NOCIONES FUNDAMENTALES

DE

ESTÁTICA GRÁFICA

POR

Don Emilio Delgado Maqueda

COMANDANTE DE ARTILLERÍA

Y

Don Jesualdo Martínez Vivas

CAPITÁN DE ARTILLERÍA

OBRA DECLARADA DE TEXTO PROVISIONAL
PARA LA ACADEMIA DE ARTILLERÍA
POR R. O. COMUNICADA DE 22 DE JULIO DE 1910

TEXTO

SEGOVIA
ANTONIO SAN MARTÍN
IMPRESOR Y LIBRERO
1914

ESTÁTICA GRÁFICA

NOCIONES FUNDAMENTALES

DE

ESTÁTICA GRÁFICA

POR

Don Emilio Delgado Maqueda

COMANDANTE DE ARTILLERÍA

Y

Don Jesualdo Martínez Vivas

CAPITÁN DE ARTILLERÍA

OBRA DECLARADA DE TEXTO PROVISIONAL
PARA LA ACADEMIA DE ARTILLERÍA
POR R. O. COMUNICADA DE 22 DE JULIO DE 1910

SEGOVIA
ANTONIO SAN MARTÍN
IMPRESOR Y LIBRERO
1914

INTRODUCCIÓN

I. Definición.—El objeto de la Estática gráfica, es la resolución de todos los problemas relativos al equilibrio de las fuerzas por medio de las construcciones geométricas.

A fin de poder introducir las fuerzas en los cálculos, se las representa en Mecánica por líneas rectas limitadas, cuyas longitudes son proporcionales a sus intensidades, indicándose también sobre dichas líneas el sentido en que obran las fuerzas así como la posición que estas ocupan: por este medio se pueden resolver analíticamente los diferentes problemas correspondientes al equilibrio de las fuerzas; mas como en estas cuestiones de estática, no se precisa conocer el movimiento que aquellas pueden imprimir a los distintos cuerpos sobre que actúan, se pueden emplear también, en la resolución de los referidos problemas, los procedimientos gráficos.

Es cierto que las construcciones geométricas no pueden dar resultados tan exactos como los obtenidos por medio del análisis; pero es también innegable que por los métodos gráficos se resuelven los problemas con mucha rapidez, gran claridad, fácil comprobación y rectificación y producen menos fatiga en el operador, el que constantemente tiene bajo su vista, sobre el plano del dibujo, las diferentes operaciones que conducen a la obtención de los resultados.

2. Representación de las fuerzas.—Una fuerza queda perfectamente determinada, cuando se conoce su magnitud, dirección y punto de aplicación; pero como éste se puede transportar a un punto cualquiera de la dirección de la fuerza, bastará conocer su magnitud, dirección y posición.

Como las cuestiones de equilibrio se reducen a la composición y descomposición de fuerzas y para esto es preciso transportarlas según su dirección, para la resolución gráfica de estos problemas se representan las fuerzas por medio de dos líneas distintas; una ilimitada, llamada *línea de acción,* que da a conocer la posición de la fuerza, y otra limitada que representa su magnitud, dirección y sentido.

Esta manera de representar las fuerzas, ofrece escasas ventajas en los casos sencillos de composición y descomposición de un número pequeño de fuerzas; pero no sucede lo mismo en los casos en que el número de fuerzas es mayor o en los que se trata de encontrar las tensiones que se desarrollan en un sistema rígido cuando sobre él actúan varias fuerzas, pues en estos casos, por medio de la representación adoptada, no solamente se obtienen ventajas sino que además, en el último caso considerado, se deducen los valores de las tensiones al relacionar la figura formada por las líneas de acción de las fuerzas y las de las partes del sistema rígido, con las que se obtienen entre las líneas que representan la magnitud y dirección de las fuerzas y las paralelas a las direcciones del sistema rígido.

3. Polígono de las fuerzas.—Por la representación adoptada para las fuerzas se deduce que, para la resolución gráfica de los problemas, se necesitan dos figuras: una de ellas contendrá las diferentes líneas de acción, sobre las que se pueden marcar el punto de aplicación de las fuerzas así como su sentido, el que se indica por una flecha, y otra que, en la escala conveniente, por ejemplo, cm $\times$ Kg. representa la magnitud y dirección de cada fuerza.

Esta última figura se forma tomando un punto cualquiera del plano como *origen* y trazando por él una paralela a una cualquiera de las fuerzas y tomando sobre ella y a partir del origen una magnitud igual a su intensidad y en el sentido que obre la fuerza; desde el extremo de esta primera magnitud, se traza otra paralela a otra cualquiera de las fuerzas y se efectúa lo mismo que anteriormente y continuando de este modo, se obtendrá un contorno poligonal que puede ser abierto o cerrado y al que se le denomina *polígono de las fuerzas,* siendo su sentido el del movimiento de un punto ideal que lo recorriese desde el origen hasta su extremidad. En el caso de que el polígono de las fuerzas sea abierto, la línea que une su extremidad con el origen se denomina *línea de cierre,* siendo su sentido desde la extremidad al origen.

4. Notaciones.—Las líneas de acción de las fuerzas se designan por la letra F con un subíndice numérico, así como a los lados del polígono de las fuerzas con los números correspondientes al subíndice de la línea de acción que representan; marcándose el origen con la letra *a* y la extremidad con la *b* y nombrándose los vértices del polígono por la unión de los números de los lados que lo forman.

5. División de la Estática gráfica.—En dos partes se puede considerar dividida la Estática gráfica:

1.ª Que da las reglas geométricas necesarias para la composición y descomposición de fuerzas y el modo de encontrar sus condiciones de equilibrio.

2.ª Que trata de encontrar, por los mismos procedimientos, *las acciones interiores* que originan las fuerzas al actuar sobre los cuerpos rígidos reducidos a simples barras.

Esta segunda parte tiene verdadera importancia, pues de una manera sencilla da a conocer las acciones que las fuerzas ejercen sin necesidad de recurrir a la teoría matemática de la elasticidad, aumentándose la facilidad en la resolución gráfica cuando todas las fuerzas se encuentran situadas en el mismo plano, lo que en general ocurre en las construcciones.

CAPITULO I

NOCIONES RELATIVAS AL CÁLCULO GRÁFICO

I. Adición y Sustracción

6. Adición.—Se da el nombre de suma geométrica de varios segmentos rectilíneos, a la recta que cierra un contorno poligonal que tiene sus lados paralelos, de igual magnitud y sentido que los segmentos considerados.

La suma geométrica es, por lo tanto, la resultante de una línea poligonal y, como se cuenta desde el origen hasta la extremidad de dicha línea, su sentido es opuesto al de la línea de cierre.

Así, para efectuar la suma de los segmentos 1, 2, 3 y 4, *(fig. 1.ª)*, dados en magnitud y dirección y distribuídos de un modo cualquiera sobre un plano, se traza, a partir de un punto cualquiera *a* tomado como origen, el contorno poligonal *a c d e b,* cuyos lados sean paralelos, iguales y del mismo sentido que cada uno de los segmentos considerados; la suma pedida será la recta *a b*.

En el caso de que la extremidad del contorno se confunda con el origen, la suma resulta nula.

De la definición establecida se deduce: 1.º Que las diagonales *a d* y *a e,* representan las sumas parciales de los segmentos que comprenden, lo mismo que las líneas que unen los vértices *c* con *e* y *d* con *b;* y 2.º Que para efectuar la suma de muchos segmentos, se pueden efectuar primero las sumas parciales de varios grupos y hallar después la resultante de estas sumas parciales.

7. Si se observa que la suma parcial *a d* es la diagonal del paralelogramo *a c d e*, se deduce, que si en vez de haber efectuado el trazado del contorno poligonal tomando como primer segmento el 1 y después el 2, se hubiera invertido este orden, la suma no se modificaría, luego se puede invertir el orden de dos segmentos consecutivos sin que la resultante varíe y como después de haber efectuado una inversión se pueden efectuar otras, resulta finalmente que no se altera el valor de la resultante cualquiera que sea el orden que se siga al efectuar la suma de los segmentos.

De la conclusión anterior se desprende, que si un contorno poligonal cierra al efectuarse la suma en un orden, cerrará también cuando se verifique en otro orden cualquiera.

8. Cuando todos los segmentos sean paralelos y del mismo sentido, la suma geométrica se convierte en algébrica, puesto que el polígono se convierte en una recta y la resultante en la longitud de ésta.

Así, la suma de los segmentos 1, 2, 3 y 4 *(fig. 2.ª)*, será la magnitud *a b*, marcándose con un trazo la separación de los segmentos.

9. Sustracción.—Restar geométricamente un segmento de otro, es determinar un tercer segmento que, sumado del mismo modo con el primero, dé por resultante el segundo.

Así, *(fig. 3.ª)*, para restar del segmento 1 el 2, puesto que 1 ha de ser la suma de 2 y del segmento desconocido, se trazará por el punto tomado como origen *a*, dos líneas 1 y 2 paralelas a los segmentos dados y de su misma dirección y sentido y en *c b* se tendrá el resto geométrico pedido, puesto que *a b* es la resultante de 2 y *c b*.

Si se traza por el punto *b* la *bb'* paralela a la *a c*, la *a b'* es la resultante de 1 y de un segmento igual y de sentido contrario al 2, y como esta resultante es igual y del mismo sentido que la $c\,b$, se deduce, que para restar un segmento de otro, basta sumar a éste el primero con sentido contrario.

10. Cuando se trate de restar de un segmento o de varios, otros varios segmentos, siguiendo la regla establecida anteriormente, se efectuará la suma geométrica de todos ellos cambiando el sentido de los segmentos sustractivos.

Puede también efectuarse la operación sumando separadamente los dos grupos y efectuarse después la sustracción de las dos sumas halladas.

Si los segmentos son paralelos, la operación se efectúa en la forma que indica la *figura 4.ª*

II. Multiplicación y División

11. Multiplicación.—Se puede adaptar la definición general de la multiplicación al producto geométrico de segmentos, siempre que se tome como unidad a otro segmento rectilíneo determinado y entonces la multiplicación se convertirá en el producto de un segmento por la relación del otro al que se tome como unidad.

Si se trata, pues, de encontrar la magnitud lineal equivalente al producto de dos segmentos m y n, será necesario multiplicar m por la relación $\frac{n}{u}$ entre n y la magnitud u elegida como unidad; representando por p dicho producto, se tiene

$$p = m \cdot \frac{n}{u}$$

cuya igualdad expresa, que se obtendrá la magnitud lineal representante del producto p, determinando una cuarta proporcional a las rectas limitadas m, n y u.

Para obtener esta cuarta proporcional, se puede emplear uno cualquiera de los varios procedimientos que enseña la Geometría.

Si se quiere determinar el producto de varios segmentos m, n, r, s y t, siguiendo el método anterior, se obtendrá primero el producto de dos cualesquiera de ellos, el de los dos primeros, por ejemplo, después se multiplicará el producto obtenido por otro y así sucesivamente, de modo que, si se representa por p el producto de los dos primeros, se tiene

$$p = m \cdot \frac{n}{u}$$

después

$$p' = p \cdot \frac{r}{u} = m \cdot \frac{n}{u} \cdot \frac{r}{u}$$

y sucesivamente

$$p'' = p' \cdot \frac{s}{u} = m \cdot \frac{n}{u} \cdot \frac{r}{u} \cdot \frac{r}{u}$$

$$p''' = p' \cdot \frac{t}{u} = m \cdot \frac{n}{u} \cdot \frac{r}{u} \cdot \frac{s}{u} \cdot \frac{t}{u}$$

es decir, que por medio de cuartas proporcionales, se puede encontrar la magnitud lineal equivalente al producto de los segmentos dados.

12. El método para obtener estas cuartas proporcionales sucesivas de una manera cómoda y sencilla, siempre que el número de segmentos no sea muy grande, consiste en tomar sobre los dos lados de un ángulo cualquiera, y a partir de su vértice, primero dos magnitudes arbitrarias elegidas como unidad y después alternativamente los segmentos cuyo producto se quiere hallar.

Sean *(fig. 5.ª)* m, n, p y q los segmentos dados y u el que se toma como unidad; sobre el lado o A, del ángulo A o B elegido, se limitan las magnitudes $o\,a = u$, $o\,m = m$ y $o\,p = p$, así como sobre el o B las $o\,b = u$, $o\,n = n$ y $o\,q = q$:

uniendo el m con el punto b y trazada por $n\ p_1$ paralela a la $m\ b$, se tiene

$$\frac{o\,p_1}{o\,n} = \frac{o\,m}{o\,b}\ ,\ o\,p_1 = m\ .\ \frac{n}{u}$$

luego en $o\ p_1$ se tiene la representación lineal de producto $m \times n$, correspondiente a la magnitud unidad u.

Uniendo ahora q con a y trazada la $p_1\ p_2$ paralela a la $a\ q$, se tendrá la $o\ p_2$, que representará el producto de $o\ p_1$ por $\frac{q}{u}$, puesto que de los triángulos semejantes $o\ a\ q$ y $o\ p_1\ p_2$ se deduce,

$$\frac{o\,p_2}{o\,q} = \frac{o\,p_1}{o\,a}\ ,\ o\,p_2 = o\,p_1\ .\ \frac{q}{u}\ ,\ o\,p_2 = m\ .\ \frac{n}{u}\ .\ \frac{q}{u}$$

Y, finalmente, al trazar por p_2 una paralela a la $p\ b$, se determina la magnitud $o\ p_3$, que es el producto de los segmentos dados, porque de la semejanza de los triángulos $o\ p\ b$ y $o\ p_2\ p_3$ se establecen las igualdades

$$\frac{o\,p_3}{o\,p} = \frac{o\,p_2}{o\,b}\ ,\ o\,p_3 = o\,p_2\,\frac{o\,p}{o\,b}\ ,\ o\,p_3 = m\,\frac{n}{u}\ .\ \frac{q}{u}\ .\ \frac{p}{u}.$$

13. Cuando el número de segmentos sea considerable, se obtiene mayor rapidez empleando el procedimiento siguiente:

Sean m, n, s y t, (*fig. 6.ª*), los segmentos dados; sobre la recta indefinida $o\ x$, se toma, a partir de un punto o, considerado como origen, la magnitud $o\ u = u$, magnitud elegida como unidad, y se levanta en u la perpendicular u A sobre la que se limitan las magnitudes $u\ m = m$, $u\ n = n$, $u\ s = s$, $u\ t = t$, etc. y se traza por o el haz de rectas $o\ m$, $o\ n$, $o\ s$, $o\ t$,.....; tomando ahora la $o\ t = t$ y levantando en su extremo la perpendicular $t\ p$ hasta su encuentro en p con la $o\ s$, en $t\ p$ se tiene el producto $t \times \frac{s}{u}$, porque de la semejanza de los triángulos $o\ u\ s$ y $o\ t\ p$, se deduce

$$\frac{t\,p}{s\,u} = \frac{o\,t}{o\,u} \cdot t\,p = o\,t\frac{s\,u}{o\,u} = t \cdot \frac{s}{u}$$

Si se toma la $o\,p = t\,p$ y se levanta la perpendicular $p\,p_1$ hasta su encuentro con la $o\,n$, se tendrá también

$$\frac{p\,p_1}{n\,u} = \frac{o\,p}{o\,u} \cdot p\,p_1 = o\,p\frac{n\,u}{o\,u} = t\,p \cdot \frac{n}{u} = t \cdot \frac{s}{u} \cdot \frac{n}{u}$$

y análogamente se obtendría

$$p_1 p_2 = o\,p_1\frac{m}{n} = t \cdot \frac{s}{u} \cdot \frac{n}{u} \cdot \frac{m}{u}$$

que representaría el producto de las magnitudes dadas puesto que

$$t \cdot \frac{s}{u} \cdot \frac{n}{u} \cdot \frac{m}{u} = \frac{t \cdot s \cdot n \cdot m}{u^3}.$$

Es indiferente empezar la operación por cualquiera de los segmentos, porque siempre se obtendrá el mismo resultado para una magnitud unidad elegida.

14. División. —Para efectuar la división de un segmento m por otro n, es necesario encontrar un tercero c, que cumpla con la condición

$$\frac{c}{u} = \frac{m}{n} \quad \text{ó bien} \quad n \cdot \frac{c}{u} = m,$$

es decir, que el producto de su relación a la magnitud unidad por el segmento n dé el m; luego el cociente pedido será el valor de la cuarta proporcional a las magnitudes m, u y n.

Tomándose, pues, sobre uno de los lados de un ángulo dado y a partir del origen los segmentos m y n y sobre el otro u, (*fig. 7.ª*), uniendo n con u y trazando por m la $m\,c$ paralela a $n\,u$, en $o\,c$ se tendrá el cociente puesto que

$$\frac{o\,m}{o\,n} = \frac{o\,c}{o\,u} \quad \text{ó bien} \quad o\,c = \frac{m}{n} \cdot u.$$

Si se trata del cociente de un segmento por el producto de otros varios, puede efectuarse primero este producto y después efectuar el cociente en la forma que se acaba de establecer, o bien ir determinando sucesivamente los cocientes que se obtienen, dividiendo el segmento por cada uno de los factores del producto.

15. Para deducir el valor inverso de un segmento, puede efectuarse la división del segmento unidad por el dado, siguiendo el procedimiento que se acaba de establecer; pero también se puede hacer del siguiente modo, que evita el trazado de líneas paralelas.

Sean *(fig. 8.ª)* m el segmento dado y u el que se elige como unidad, verificándose que $m > u$; sobre una recta indefinida y a partir de un punto cualquiera c, se limita la magnitud $c\,a = u$ y sobre ella, como diámetro, se traza la semicircunferencia o; se levanta en a la perpendicular $a\,d$ y haciendo centro en c y con un radio igual a m, se traza un arco hasta que corte en m a dicha perpendicular; uniendo c con m, la magnitud $c\,b$ representa el valor inverso de m.

En efecto; uniendo a con b, se tienen las rectas $a\,b$ y $a\,m$ antiparalelas con respecto al ángulo en c, por lo cual

$$b\,c \,.\, c\,m = \overline{c\,a}^2 \quad \text{ó bien} \quad \frac{c\,b}{u} \,.\, \frac{c\,m}{u} = 1$$

de donde se deduce que

$$\frac{c\,b}{u} = \frac{u}{c\,m} = \frac{1}{\frac{c\,m}{u}}$$

luego el segmento $c\,b$, medido con u, es un valor inverso de $c\,m$, en la misma unidad.

En el caso de ser $m < u$, se construye la semicircunferencia sobre una magnitud igual a la unidad, y se levanta la perpendicular, lo mismo que en el caso anterior, y después, haciendo centro en c, se traza un arco de circunferencia con un radio igual a m, el cual cortará en un cierto punto a la semicircunferencia ya trazada; uniendo el punto c con el de intersección y prolongando la recta que los une hasta que corte a la perpendicular trazada, la parte de recta comprendida entre este punto y el c, representará el valor inverso pedido.

Así, si el valor de m fuese $c\,b$, su valor inverso sería $c\,m$, según se acaba de ver.

16. Observación.—Tanto en las fórmulas deducidas al tratar de la multiplicación, como en las establecidas en la división, se ha dejado de manifiesto la magnitud u que se ha elegido como unidad, para indicar que los resultados obtenidos expresan siempre una relación entre la magnitud resultante y la magnitud unidad.

Sentado esto, en las operaciones sucesivas se considerará a $u = 1$, sobreentendiéndose siempre lo anterior.

III. Elevación a potencias y extracción de raíces

17. Elevación a potencias.—La elevación a potencias de un segmento, es un caso particular de la multiplicación; por consiguiente, siguiendo el procedimiento establecido para deducir el producto de segmentos, se puede encontrar la magnitud que representa la potencia de un orden de una recta limitada.

Existen, sin embargo, otros procedimientos más expeditos y que simplifican la operación, como puede observarse en los siguientes:

a) Trazados dos ejes coordenados XX', YY', *(fig. 9.ª)*, se toma sobre uno de ellos y a partir del punto o en que se cortan, una magnitud $o\,u$ igual a la unidad, y sobre el otro, y a partir del mismo origen, la $o\,(m)$ igual al segmento m, cuyas potencias sucesivas se trata de encontrar; uniendo el punto u con el (m) y levantando en (m) la perpendicular

(m) $(m)^2$ a la o (m), en o $(m)^2$ se tiene la segunda potencia de m, puesto que en el triángulo rectángulo u (m) $(m)^2$ se verifica que

$$\overline{o\,(m)}^2 = o\,u \times o\,(m)^2 \quad \text{o bien} \quad \overline{o\,(m)}^2 = o\,(m)^2$$

es decir, que o $(m)^2$ representa el cuadrado de m.

Si en $(m)^2$ se levanta la perpendicular $(m)^2$ $(m)^3$ a (m) $(m)^2$, en o $(m)^3$, se tendrá la tercera potencia de m y de un modo análogo se tendrán las demás.

Como se ve por la figura, la línea poligonal u (m) $(m)^2$ $(m)^3$ $(m)^4$ va cerrando, por ser $u > m$; de modo que si la potencia que se quiere encontrar es demasiado pequeña, en este caso bastará tomar el valor inverso de m, en la forma que se ha dicho (15), y elevarlo a la potencia dada por el procedimiento explicado y una vez obtenida la magnitud que la represente se tomará su valor inverso, puesto que si

$$c = \frac{1}{m}, \quad \text{también se verificará que} \quad c^n = \frac{1}{m^n}$$

y por tanto que

$$m^n = \frac{1}{c^n}\ .$$

Del mismo modo, si m fuese demasiado grande con respecto a u, en cuyo caso el trazado saldría de los límites ordinarios del papel sobre que se efectúa la operación gráfica, a poco elevado que sea el índice de la potencia, se tomará también el valor inverso de m, con el que se ejecutará el cálculo gráfico, tomándose después el valor inverso del resultado para determinar la potencia pedida.

b) Otro procedimiento muy cómodo, porque se puede ejecutar en una área relativamente pequeña, consiste en tomar sobre una recta ilimitada o A, *(fig. 10)*, y a partir de un punto o, como origen, una magnitud o u igual a la unidad; se levanta en u una perpendicular a la recta considerada y haciendo centro en o, con un radio igual á m o a $\frac{1}{m}$, según que $m \gtrless u$, se traza un arco de circunferencia que cortará a la perpendicular en un punto tal como el m, uniendo el punto o con el m se forma el ángulo A o B; si se toma ahora $o\,a =$ $= o\,m$ y se levanta la perpendicular $a\,(m)^2$, en $o\,(m)^2$ se tiene el cuadrado de m.

En efecto, los triángulos $o\,u\,m$ y $o\,a\,(m)^2$ dan la relación

$$\frac{o\,(m)^2}{o\,m} = \frac{o\,a}{o\,u} \quad \text{o bien} \quad o\,(m)^2 = o\,m \times o\,a = m^2;$$

de igual modo, tomando $o\,b = o\,(m)^2$, la perpendicular $b\,(m)^3$, determina sobre o B la magnitud $o\,(m)^3$ igual a la tercera potencia de m y siguiendo el mismo procedimiento se obtendrá la potencia del grado que se desea.

Este procedimiento ofrece además la ventaja de dar directamente, o sea sin necesidad de encontrar primero los valores inversos de las magnitudes, las potencias de orden negativo. En efecto, si se toma sobre o B la longitud $o\,1 = o\,u$ y se proyecta el punto 1 sobre el lado o A, en $o\,a'$ se tiene el valor de m^{-1}, porque de los triángulos $o\,u\,m$ y $o\,1\,a'$ se deduce la relación

$$\frac{o\,m}{o\,u} = \frac{o\,1}{o\,a'} \quad \text{o bien} \quad o\,a' = \frac{1}{m} = m^{-1};$$

de igual modo se tendrá $o\,b' = m^{-2}$ y sucesivamente las demás potencias negativas.

18. Extracción de raíces.—La extracción de raíces de un grado cualquiera de los segmentos rectilíneos, es una operación que requiere el trazado de curvas especiales deducidas mediante el concurso de la analítica; pero como las de segundo y tercer grado, que son las de uso más frecuente, pueden también efectuarse por procedimientos puramente geométricos, de ellas únicamente se tratará.

a) Para extraer la raíz cuadrada de un segmento m, basta determinar una media proporcional a las magnitudes m y u, operación perfectamente conocida, siendo uno de los medios más comunmente empleados el siguiente:

Sobre una recta indefinida, y a partir de un punto dado, se toma la magnitud $a\,b$, *(fig. 11)*, igual a la que se toma como unidad, llevándose a continuación la $b\,c$ igual al segmento dado; se describe sobre $a\,c$ como diámetro una semicircunferencia y se levanta en b una perpendicular; la parte de ésta, $b\,d$, limitada por $a\,c$ y la curva, representa la raíz cuadrada de la magnitud lineal considerada, puesto que

$$\overline{b\,d}^2 = a\,b \times b\,c, \quad \text{o bien} \quad \overline{b\,d}^2 = m\,.\,u$$

y como $u = 1$, se tendrá

$$b\,d = \sqrt{m}\,.$$

b) La raíz cúbica de un segmento cualquiera se puede obtener con gran rapidez, construyendo previamente una curva especial, deducida por procedimientos puramente gráficos.

Sea A B, *(fig. 12)*, la unidad elegida y sobre ella, como diámetro, se traza la semicircunferencia o; se levanta en B la perpendicular B D a la A B: si se traza ahora una secante cualquiera, tal como A b_1, se determinarán dos puntos, el a_1 sobre la circunferencia o, y el b_1 sobre la perpendicular B D; rebatiendo el punto a_1, sobre A B y el b_1 sobre la perpendicular $a'_1\,b'_1$, se tendrá en b'_1 un punto de la curva pedida.

Para demostrarlo, se construye el ángulo recto A b'_1 F y teniendo en cuenta una de las propiedades de los triángulos rectángulos, se puede establecer la igualdad

$$\overline{A\,b'_1}^2 = A\,a'_1 \times A\,F:$$

como A a'_1 = A a_1 y se ha demostrado (15) que

$$A\,a_1 \times A\,b_1 = 1 \quad \text{de la cual} \quad A\,a_1 = \frac{1}{A\,b_1}$$

y además $A\, b_1 = A\, b'_1$, se tendrá

$$\overline{A\, b'_1}^2 = \frac{1}{A\, b_1} \times A\, F \quad \text{o bien} \quad \overline{A\, b'_1}^3 = A\, F$$

y por lo tanto que

$$A\, b'_1 = \sqrt[3]{A\, F}$$

con lo cual queda demostrado que el punto b'_1 pertenece a la curva.

De un modo análogo se determina otro punto b', y sucesivamente otros varios, que unidos por un trazado continuo darán la curva B E.

Para hacer uso de esta curva, se tomará a partir de A y en el sentido A B, la magnitud considerada o su inversa, según que sea mayor o menor que la unidad, y se construye sobre ella como diámetro una circunferencia hasta que corte a la curva B E; uniendo este punto con el A, se tendrá la raíz cúbica del segmento dado o de su inverso.

Así, si A M es el segmento dado mayor que A B, la A N será el valor lineal de su raíz cúbica.

IV. Curvas logarítmicas

19. Cuando el grado de las raíces es grande, se ha dicho era indispensable el empleo de curvas especiales; entre estas, la más fácil de construir, es la curva logarítmica, la cual también se puede emplear para obtener el producto y las potencias de segmentos.

Se construye esta curva, llevando sobre la recta indefinida OX, *(fig. 13)* las magnitudes $O\, x_0$, $O\, x_1$, $O\, x_2$,....., que representan en una escala cualquiera, una serie de números; se levantan en los puntos x_0, x_1, x_2,..... perpendiculares a la O X, sobre la que se toma con arreglo a la escala elegida los logaritmos de los números considerados y uniendo por un trazado continuo los extremos de estas perpendiculares, se tendrá la curva M N.

a) Para efectuar el producto de varios segmentos m, m_1, m_2,....., se toman con arreglo a escala sobre la O X y se miden las perpendiculares u ordenadas correspondientes a sus extremos, que se pueden representar por y, y_1, y_2,.....; y como los segmentos dados se han reemplazado por las relaciones $\frac{m}{u}$, $\frac{m_1}{u}$, $\frac{m_2}{u}$,..... el producto pedido tendrá por valor la abscisa correspondiente a la ordenada

$$Y = y + y_1 + y_2 + \cdots\cdots$$

puesto que cada ordenada representa el logaritmo de la distancia de su pie al punto O.

b) La potencia n de un segmento m, se obtendrá determinando la abscisa correspondiente a n veces la ordenada m, puesto que es un caso particular del producto y se tendrá

$$Y = y + y + y + \cdots\cdots = n\,y$$

c) Finalmente, la raíz del grado n del segmento A B = = Y, se obtiene llevando dicho segmento sobre la curva o sobre la escala de las ordenadas, para obtener su valor, y dividir éste por n; buscando en seguida la abscisa correspondiente a la ordenada $\frac{Y}{n}$; en dicha abscisa se tendrá la raíz pedida.

CAPÍTULO II

MANERA GRÁFICA DE VERIFICAR LA COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS

I. Composición de fuerzas

20. Resultante de dos fuerzas.—Dos casos pueden presentarse: que las fuerzas dadas sean concurrentes y que sean paralelas.

1.er caso. Sean F_1 y F_2, *(fig. 14),* las dos líneas de acción de las dos fuerzas dadas, cuyas intensidades son conocidas y cuyo sentido está marcado en la figura con la flecha.

Para obtener el valor y posición de la resultante, se elige un punto arbitrario en el plano, tal como *a,* desde el cual se traza una paralela a una cualquiera de las fuerzas, por ejemplo, a la F_1, y sobre dicha paralela se toma un segmento que en la escala dada represente la intensidad de F_1; por el extremo de este segmento se traza otro paralelo a F_1 que represente su intensidad; uniendo el punto *a,* origen, con el *b*, extremo, se tiene en el segmento *a b* la intensidad y dirección de la resultante R, de las fuerzas dadas.

Para determinar la posición de la resultante, es necesario conocer su línea de acción, bastando para ello determinar uno de sus puntos, puesto que su dirección es conocida; se encuentra este punto prolongando las líneas de acción F_1 y F_2 hasta que se corten y éste será el punto pedido; trazando ahora por este punto una paralela a la *a b*, se tendrá la posición de la resultante R de las fuerzas dadas.

Se observa, en este caso, que el polígono de las fuerzas se ha reducido a un triángulo, que se suele llamar *triángulo de las fuerzas*, y que la resultante *a b* es la suma geométrica de los segmentos que representan a las fuerzas dadas.

2.º caso. Cuando las fuerzas F_1 y F_2 son paralelas, tanto si son del mismo sentido como si obran en sentido contrario, el valor y la dirección de la resultante no ofrece dificultad, pues convertido el triángulo de las fuerzas en un segmento rectilíneo, el valor de la resultante será la suma de dos segmentos, cuando las fuerzas tengan el mismo sentido y la diferencia cuando esto no suceda.

Para deducir gráficamente la posición de la resultante en ambos casos, basta recordar que las distancias de la dirección de la resultante a cada una de las líneas de acción de las fuerzas, están en razón inversa de las intensidades de éstas, es decir, que si X_1 y X_2 representan dichas distancias, se ha de verificar que

$$\frac{F_1}{X_2} = \frac{F_2}{X_1}$$

de la cual se deduce, si las fuerzas obran en la misma dirección,

$$\frac{R}{X_1 + X_2} = \frac{F_1}{X_2} = \frac{F_2}{X_1}$$

y si las fuerzas tienen opuesto sentido

$$\frac{R}{X_2 - X_1} = \frac{F_1}{X_2} = \frac{F_2}{X_1};$$

luego si se traza una transversal cualquiera a las líneas de acción de las fuerzas, para fijar sobre ella el punto en que la corta la línea de acción de la resultante, bastará determinar una cuarta proporcional, según se desprende de las fórmulas anteriores.

Para deducir esta cuarta proporcional, puede seguirse cualquiera de los procedimientos que enseña la Geometría elemental, pero es mucho más rápido y sencillo, determinar un punto de la línea de acción de la resultante, del modo siguiente:

Sean 1.° las fuerzas F_1 y F_2, *(fig. 15)*, que obran en la misma dirección; trazada la secante M N, se determinan los puntos *m* y *m'* sobre las líneas de acción: sobre la dirección de la fuerza mayor F_1 y a partir de *m'*, se toma una longitud *m' n'* en sentido contrario al de la fuerza y proporcional a la intensidad de F_2; sobre la dirección de ésta y a partir de *m*, se limita también la magnitud *m n* proporcional a F_1; uniendo el *n* con *n'* se encuentra el punto *c* que pertenece a la línea de acción de R. En efecto; por ser semejantes los triángulos *m n c* y *m' n' c*, se verifica la relación,

$$\frac{m\,n}{m\,c} = \frac{m'\,n'}{m'\,c} \quad \text{o bien} \quad \frac{F_1}{m\,c} = \frac{F_2}{m'\,c}$$

y como *m c* y *m' c* son proporcionales a las distancias del *c* a las líneas de acción de F_1 y F_2, que se han representado respectivamente por X_1 y X_2, se tendrá finalmente la relación

$$\frac{F_1}{X_2} = \frac{F_2}{X_1}$$

que demuestra que el punto *c* pertenece a la línea de acción de la resultante.

Si las fuerzas F_1 y F_2, *(fig. 16)*, obran en sentido contrario, trazada la transversal M N, se toma a partir de *n* sobre la dirección F_1, la *n n'* proporcional a la intensidad de F_2 y desde *m* y sobre la dirección de F_2 la *m m'* proporcional a F_1: unidos los puntos *m'* y *n'* y prolongada la recta que los une hasta que corte a la M N, se tendrá en *c* un punto que pertenece a la línea de acción de R, puesto que los triángulos *c m m'* y *c n n'* dan,

$$\frac{m\,m'}{m\,c} = \frac{n\,n'}{n\,c} \quad \text{o bien} \quad \frac{F_1}{m\,c} = \frac{F_2}{c\,n}$$

y como también se verifica que

$$\frac{m\,c}{X_2} = \frac{n\,c}{X_1}$$

se tendrá la relación

$$\frac{F_1}{X_2} = \frac{F_2}{X_1}$$

que expresa que el punto c está sobre la dirección de la resultante.

En este caso, si $F_1 = F_2$, como $m\,m' = n\,n'$, la MN y $m'\,n'$ son paralelas y el punto de aplicación de la resultante está en el infinito, y como el polígono de las fuerzas da una resultante cero, las fuerzas forman un par.

21. Composición de un número cualquiera de fuerzas concurrentes situadas sobre un plano.—El valor y dirección de la resultante en este caso, se obtiene lo mismo que en el de dos fuerzas, o sea determinando la suma geométrica de los segmentos que en valor y dirección representan a las fuerzas dadas.

En efecto; sean las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5, *(fig. 17)*, aplicadas a un punto cualquiera o de un sólido y situadas en un plano; aplicando a las dos fuerzas F_1 y F_2 (20, *1.er caso*) se tendrá la resultante r_1, suma geométrica de los segmentos 1 y 2 que representan a las F_1 y F_2, componiendo ahora la resultante de F_1 y F_2 con la F_3, para lo cual, por el extremo de r_1 se traza el segmento 3, que representa a F_3, se tendrá en r_2 el valor y dirección de la resultante de las tres fuerzas F_1, F_2 y F_3, que será la suma geométrica del segmento r_1 y el 3, y como r_1 tiene por valor la suma geométrica del 1 y 2, r_2 representará la de los segmentos 1, 2 y 3. De un modo análogo se tendrá que r_3 equivale a la suma de los segmentos 1, 2, 3 y 4 y, finalmente, que R representa la de los 1, 2, 3, 4 y 5.

De lo anterior se deduce, que para obtener el valor y sentido de la resultante de varias fuerzas concurrentes y situadas sobre un mismo plano, desde un punto cualquiera de éste, tomado como origen, se traza un contorno poligonal cuyos lados sean paralelos a las líneas de acción de las fuerzas y sus dimensiones proporcionales a las intensidades de éstas; uniendo el origen con el extremo del contorno poligonal, se tendrá la suma geométrica que representa la intensidad y dirección de la resultante.

Esta línea poligonal es llamada, como se ha dicho (3), *polígono de las fuerzas.*

Puesto que el valor y dirección de la resultante es la suma geométrica de los segmentos que en dirección e intensidad representan a las fuerzas, no variará su valor cualquiera que sea el orden que se siga para el trazado del polígono de las fuerzas, según lo demostrado en el párrafo 7.

La línea de acción de la resultante R, se obtendrá trazando por el punto *o,* una paralela a la *a b.*

22. Trazado el polígono de las fuerzas, se puede obtener la resultante de dos fuerzas consecutivas, uniendo por medio de una diagonal el origen de una de ellas con el extremo de la otra; así, la resultante de la 2 y 3 será la diagonal 1 2 — 3 4, contada en el sentido que se enuncia.

23. Condiciones gráficas de equilibrio de fuerzas concurrentes.—Si al conjunto de las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5, *(fig. 17),* aplicadas al punto *o* del plano de las fuerzas, se le une la fuerza — R igual y contraria a la resultante R de aquéllas, se tendrá un sistema de fuerzas en equilibrio.

Si se traza ahora el polígono de las fuerzas, éste debe dar una resultante nula, puesto que al trazar por el punto *b,* extremo del contorno poligonal correspondiente a las fuerzas F, el segmento paralelo a — R, como el valor de R era *a b,* el de — R será *a b,* que necesariamente pasa por *a;* luego la suma geométrica de todos los segmentos será cero.

Se deduce, por lo tanto, que las *condiciones necesarias y suficientes para que varias fuerzas concurrentes y situadas sobre* *un mismo plano estén en equilibrio, se reducen a que el polígono de las fuerzas cierre.*

De esta propiedad se saca la consecuencia de que, para determinar la fuerza única capaz de equilibrar a otras varias concurrentes, bastará tomar la línea de cierre del polígono de las fuerzas en su sentido, o sea, desde el extremo al origen.

II. Descomposición de fuerzas

24. Descomponer una fuerza en otras dos aplicadas en el mismo punto.—Cuando el fin propuesto sea el determinar dos fuerzas que produzcan el mismo efecto que la dada, el problema resulta indeterminado, puesto que si R, (*fig. 14*), es la fuerza dada aplicada al punto *c* y por un punto *a* se traza la *a b* que la represente, como *a b* ha de ser la resultante de las dos que se buscan, trazando por *a* y *b* dos rectas que se corten, se formará un triángulo cuyos dos nuevos lados representarán los valores de dos fuerzas que produzcan el mismo efecto que la R.

Para que el problema resulte determinado, es necesario conocer las direcciones; así, si las líneas de acción de las componentes son F_1 y F_2, (*fig. 14*), una vez trazada la *a b*, por el punto *a* se traza una paralela a la F_1 y por el *b* otra a la F_2 y en 1 y 2 se tendrán las intensidades de las fuerzas pedidas.

Parece a primera vista, que trazando por *a* una paralela a la F_2 y por *b* otra a la F_1, se tendrá el mismo resultado, y aunque así es en cuanto al valor de las fuerzas, en cuanto a las aplicaciones de la estática gráfica no sucede lo mismo.

25. El problema propuesto resultará también determinado, cuando una de las fuerzas se dé en magnitud y dirección, así como en los casos en que las intensidades de las fuerzas componentes sean conocidas, y en los que una de las componentes se conozca en intensidad y la otra en dirección.

26. Caso en que la fuerza dada se quiera descomponer en otras varias aplicadas al mismo punto.—Si, lo mismo que en el caso anterior, se trata únicamente de encontrar un número cualquiera de fuerzas que reemplacen a la dada, el problema resultará también indeterminado, así, por ejemplo, si la fuerza R, *(fig. 17)*, cuya línea de acción se conoce así como su intensidad y sentido *a b*, se quiere descomponer en otras cinco, bastará construir sobre la *a b* como base, una línea quebrada cualquiera de cinco lados, obteniéndose para cada uno un sistema de fuerzas que puede reemplazar a la R, puesto que es la resultante de cada uno de ellos.

El problema será también indeterminado, aun cuando se den las direcciones de todas las fuerzas en que se quiera descomponer a la dada.

27. Para fijar las condiciones necesarias y suficientes a la determinación del problema, basta fijarse en que el polígono *a* 1 2 3 4 5 *b*, *(fig. 17)*, queda determinado en los casos siguientes:

1.° Cuando se conoce el valor y dirección de todos los lados menos uno.

2.° Conociéndose el valor de todos los lados y la dirección de todos menos dos y

3.° Cuando la dirección de todos se conozca así como el valor de todos menos dos.

Y como los lados representan las fuerzas, en estos tres mismos casos el problema será determinado.

Así, si R, *(fig. 17)*, es la fuerza dada y se quiere descomponer en otras cinco concurrentes en *o*, de las que F_1, F_2, F_3 y F_4 son conocidas en posición y magnitud, trazada la *a b*, que representa el valor de R, por el punto *a* se traza el polígono de las dadas, cuya resultante será r_3 y ya se está en el caso de descomponer la R en dos fuerzas, de la que una sea dada en intensidad y dirección, obteniéndose la 5 y, por lo tanto, el problema queda resuelto.

Del mismo modo, si se conocen las intensidades de las cinco fuerzas y la dirección de F_1, F_2 y F_3, por ejemplo, trazada la *a b* y construído el polígono de estas tres fuerzas, se tendrá la resultante r_2, pero según se ha dicho (22) la diagonal 3 4 — *b* es la resultante de las dos fuerzas restantes 4 y 5, luego se está en el caso de descomponer esta resultante en otras dos de intensidad dada, o sea construir un triángulo, conocidos los tres lados y el problema, aunque determinado, tendrá dos soluciones, si no se marcan desde luego el orden de colocación de las dos fuerzas.

Finalmente, si las líneas de acción de las cinco fuerzas son conocidas, así como la intensidad de tres de ellas, por ejemplo, las F_1, F_4 y F_5, trazada la *a b* se descompone primero la R en la 5 y r_3, problema ya resuelto; después la r_3 en la 4 y r_2 y por último la r_2 en la 1 y 1 2 — 3 4: obtenida ésta, se está en el caso de descomponer una fuerza en otras dos cuyas direcciones sean conocidas, problema ya resuelto (24): en este caso, sólo habrá una solución cuando se fije el orden en que las fuerzas se han de disponer.

III. Fuerzas no concurrentes situadas en un plano

28. Composición de las fuerzas.—Los métodos establecidos para la composición de fuerzas concurrentes, son también aplicables al caso en que las fuerzas estén distribuídas de un modo cualquiera en el plano.

Sean las tres fuerzas F_1, F_2 y F_3, (*fig. 18*); por el punto *a* se traza el polígono de las fuerzas *a 1 . 2 . 3 b* y en *a b* se tiene la intensidad y dirección de la resultante: para obtener su posición, como R es la resultante de *r* y *3*, se determina primero la línea de acción de *r*, la que se obtiene prolongando la F_1 y F_2 hasta su encuentro en *c*, y trazando por este punto la *c d* paralela á *r*, prolongando ahora la *c d* hasta que corte a la F_3 y trazando por este punto una paralela a *a b*, se tendrá la línea de acción de la resultante pedida.

Si las fuerzas que se tratan de componer son las F_1, F_2,

F_3 y F_4, *(fig. 19)*, por medio del polígono de las fuerzas se tendrá la intensidad y sentido *a b* de la resultante R: para fijar la línea de acción de ésta, se prolongan las F_1 y F_2 hasta su encuentro, lo que dará el punto *c* de la línea de acción r_1, trazada ésta y prolongada hasta que corte a F_3 se tendrá en *d* el punto de aplicación r_2 y trazada y prolongada ésta, se tiene finalmente, el punto *e* de la línea de acción de R y por consiguiente, la posición de ésta queda determinada.

29. Descomposición de fuerzas.—Sea la fuerza R, *(fig. 18)*, que se quiere descomponer en otras tres situadas en un plano y cuyas líneas de acción sean F_1, F_2 y F_3: prolongada la línea de acción de R hasta su encuentro con otra de las dadas, por ejemplo con la F_3, se tiene el punto *d*; prolongadas las otras dos líneas de acción, se encuentra el punto *c* y uniendo el *c* con el *d*, se tiene la línea de acción auxiliar *c d*, que considerada como la línea de acción de la resultante de F_1 y F_2, hace que el problema sea determinado. El problema se reduce a descomponer a R en dos direcciones dadas, lo que dará el valor *r* y ésta a su vez descomponerla en otras dos, teniéndose, por consiguiente, en 1, 2 y 3 los valores de las fuerzas componentes.

En el caso de ser más de tres las componentes que se piden, se seguirá una marcha análoga al caso anterior, debiendo darse la dirección de las resultantes parciales para que el problema sea determinado.

30. Las condiciones gráficas de equilibrio de fuerzas situadas de un modo cualquiera en un plano, son idénticas a las establecidas en el párrafo 23, puesto que debiendo ser nula la resultante de las fuerzas, la suma geométrica de los segmentos que los representan debe ser cero, por lo cual el polígono de las fuerzas cerrará.

IV. Fuerzas concurrentes aplicadas a un sólido invariable

31. Dos casos pueden presentarse: 1.° que todas las fuerzas aplicadas en distintos puntos del sólido estén situadas en un mismo plano, concurriendo bien en un mismo punto del sólido o bien en otro cualquiera fuera de él; y 2.° que las fuerzas estén situadas en distintos planos.

En el primer caso, conocidas las líneas de acción de las fuerzas, así como su intensidad, el valor y dirección de la resultante se obtendrá construyendo el polígono de las fuerzas, y su posición, trazando una paralela, por el punto de intersección de las líneas de acción de las fuerzas a la línea de cierre del polígono.

Como todas las fuerzas están situadas en un plano, se les podrá aplicar cuanto se ha dicho respecto a su descomposición en otras y a sus condiciones de equilibrio.

En el segundo caso, se determinará la proyección de las líneas de acción de las fuerzas sobre un plano por los procedimientos conocidos y ya, en el plano considerado, se hallará la resultante con los valores de las fuerzas proyectadas, y como la resultante de éstas es la proyección de la resultante de las fuerzas en el espacio, se obtendrá su valor por los medios que enseña la Mecánica.

CAPITULO III

POLÍGONO FUNICULAR

I. Propiedades

32. Definición.—Se da el nombre de *polígono funicular*, a la figura que tomaría un hilo flexible, inextensible y sin masa sometido á la acción de varias fuerzas conocidas en dirección, sentido y magnitud y aplicadas tanto a los extremos como a diferentes puntos de su longitud.

Cuando el sistema de fuerzas que se considera está sobre un plano, el polígono funicular que determinan es *plano*, resultando *alabeado* cuando las diferentes fuerzas que se aplican al hilo no están todas sobre un mismo plano.

Aquí solamente se tratará de los polígonos funiculares planos.

Los polígonos funiculares establecen una condición de equilibrio; sin embargo, mediante la interpretación geométrica dada por Varignon, se los puede aplicar a la resolución de los problemas de la estática gráfica.

33. Aplicando al sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4, *(fig 20)* que no son concurrentes y que están situadas en un mismo plano, el procedimiento establecido (28), se tendrá el valor y posición de la resultante R, que producirá como es sabido el mismo efecto que el conjunto de fuerzas dadas; luego si al sistema propuesto se le agrega una fuerza igual y contraria a R, el nuevo sistema de fuerzas estará en equilibrio. Se deduce de esto, que si se adapta sobre el contorno poligonal, F_1 A C B (—R) un hilo flexible, inextensible y sin masa, éste permanecerá invariable de forma bajo la acción de las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y — R, puesto que las tensiones que se desenvuelven en A, C y B son dos a dos iguales y de sentido contrario, según se desprende de la manera de construir la figura; por consiguiente, dicho polígono cumple con la definición establecida del polígono funicular, por cuya razón se le ha dado este nombre.

34.—Procedimiento general para determinar un polígono funicular.—La construcción que ha de hacerse para encontrar el polígono funicular F_1 A B C (— R), exige que las líneas de acción F_1 y F_2 se corten en los límites del dibujo, así como también el que las resultantes parciales encuentren a las demás líneas de acción dentro de los mismos límites; estas condiciones pueden no verificarse y aun en el caso de cumplirse, las intersecciones pueden efectuarse bajo un ángulo muy distante del recto, con perjuicio de la claridad y precisión del trazado; de aquí el que se siga otro procedimiento, aplicable, cualquiera que sea la disposición que tengan las fuerzas sobre el plano y que permite elegir la dirección que deben seguir los lados del polígono, para que corten lo más normalmente posible a las correspondientes líneas de acción. Este procedimiento general se basa en el principio de la equivalencia de los sistemas de fuerzas.

Sean las mismas fuerzas de la figura 20. Si por el punto *o*, elegido soble el plano, se trazan los radios polares *o a* y *o b*, la resultante *a b* del sistema de fuerzas considerado, lo será también de las representadas en magnitud y dirección por las *a o* y *o b*, las que formarán un sistema equivalente al propuesto: si se toman estas dos fuerzas en el sentido *b o* y *o a*, como en este caso son las componentes de *b a*, que equilibra al sistema dado de fuerzas, al tomar el conjunto *b o*, *o a*, F, etc., se tendrá un sistema de fuerzas en equilibrio.

Al reemplazar la resultante del sistema de fuerzas por otras dos, se evita desde luego el que tengan que cortarse las líneas de acción de las fuerzas consideradas en los límites del dibujo, porque siendo indeterminadas las situaciones de las líneas de acción de las nuevas componentes, se podrá elegir la posición que más convenga. Así, en el caso considerado, elegido un punto cualquiera del plano, tal como el A_1, al tirar por él una parelela a la nueva componente *a o*, se tendrá su correspondiente línea de acción A_1 *h*, la que necesariamente cortará a la F_1 en un punto tal como el *c*, pero la 1 se puede considerar como resultante de las *a o* y la representada por el radio polar *o* — 12 y como la línea de acción de esta nueva fuerza debe pasar por *c*, por ser una de las componentes de F_1, trazando la *c d* paralela al radio *o* — 12 se tendrá la nueva línea de acción. Del mismo modo, la 2 se puede mirar como la resultante de las representadas por 12, — *o* y *o* — 23, por lo cual la *c d* tiene que cortar a la F_2, luego si por *d* se traza una paralela a la *o* — 23,. en *d e* se determina su línea de acción. Repitiendo las construcciones y razonamientos anteriores se encontrará el punto *f*, por dondé pasa la línea de acción de la componente *o b*. Si se considera ahora a las componentes de R con sentido contrario, el polígono obtenido A_1 *c d e f* B, responde a la definición dada del polígono funicular, viéndose por la figura que los lados de éste son paralelos a los radios polares y que sus vértices están situados sobre las líneas de acción de la fuerza, denominándose lados *extremos* a los paralelos a las componentes de R.

Variando la posición del *polo o*, o la del *punto de partida* A_1, o bien haciendo simultáneamente el cambio de posición de estos dos puntos, se tendrán diferentes polígonos funiculares para un mismo sistema de fuerzas y esta variabilidad en el trazado es en lo que consiste la generalidad del procedimiento, puesto que permite elegir el polígono más apropiado para la resolución del problema establecido.

En general, debe elegirse el polo de modo que no esté sobre los lados del polígono de las fuerzas, ni en su prolongación, ni tampoco sobre la línea de cierre de este polígono, con lo cual el punto de partida puede ser cualquiera. Si en algún caso particular conviene tomar el polo sobre un lado ó en su prolongación, el punto de partida tiene que elegirse necesariamente sobre la línea de acción que corresponde a la fuerza que aquél representa, porque si así no se hiciera, la paralela trazada al lado considerado sería paralela a la línea de acción correspondiente y no se podría trazar el polígono funicular: por ejemplo, si en la figura 20 se toma el origen a como polo, con lo cual los radios polares serán $a - 12$, $a - 23$, $a - 34$ y $a\ b$, si el punto de partida fuese el A_1, al trazar por él una paralela al radio polar $a - 12$, como éste se confunde con el lado 1, dicha paralela no podrá cortar a la línea de acción F_1.

Si las fuerzas dadas son paralelas, como el polígono de fuerzas se reduce a una recta, la distancia del polo a la dirección de los diferentes lados del polígono es constante y se la llama *distancia polar*.

35. Consecuencias importantes.— Obtenido el polígono funicular correspondiente a un polo dado, como los lados extremos representan las líneas de acción de las dos nuevas componentes de la resultante, prolongándolas hasta su punto de encuentro, se tendrá un punto de la línea de acción de la resultante y trazando por este punto una paralela a la línea de cierre del polígono de las fuerzas, quedará fijada la posición de la resultante.

Así en el caso de la figura 20, prolongando las líneas $A_1\ e$ y $B_1\ f$ se tendrá el punto h y trazando por él una paralela a la $a\ b$ se encontrará la posición de R.

Se deduce de lo anterior que, para determinar la resultante de un sistema de fuerzas, no es necesario emplear los procedimientos expuestos en el capítulo anterior, sino que bastará determinar el punto de intersección de los lados extremos de uno cualquiera de los polígonos funiculares, correspondientes al sistema dado, y trazar por dicho punto una paralela a la línea de cierre.

Si se toman las fuerzas 1, 2 y 3, su resultante $a - 3\ 4$ puede ser considerada como la resultante de las fuerzas representadas por los radios polares $a\ o$ y $o - 3\ 4$ y como el polígono funicular correspondiente será el $A_1\ c\ d\ e\ f$, cuyos lados extremos son $A_1\ c$ y $e\ f$, resulta que la línea de acción de la resultante de las fuerzas consideradas, se obtendrá, prolongando los lados $A_1\ c$ y $e\ f$ hasta su punto de encuentro y trazar por este punto una paralela á la $a - 3\ 4$: como lo establecido para las fuerzas anteriores se puede aplicar a otro número cualquiera de fuerzas consecutivas, se puede establecer que toda propiedad general de los lados extremos de los polígonos funiculares pertenece también a dos lados cualesquiera, considerándolos como lados extremos del polígono de las fuerzas que comprenden.

36. Propiedades de los polígonos funiculares.— A cada sistema de fuerzas corresponden diferentes polígonos funiculares, y como la posición de los lados extremos correspondientes también variará, es necesario demostrar que la línea que determina la posición de la resultante de las fuerzas consideradas, es la misma cualquiera que sea el polígono que se trace.

Los diferentes medios de variar el polígono funicular son:

1.° Cambiar el punto de partida.

2.° Variar la posición del polo.

3.° Modificar a la par la situación de los puntos anteriores.

4.° Alterar el orden de colocación de las fuerzas en el polígono de composición.

1.er caso. Trazado el polígono funicular $A\ c\ d\ e\ f\ B$ (*fig. 21*), correspondiente al polo o, así como el $A'\ c'\ d'\ e'\ f'\ B'$, del mismo polo pero de distinto punto de partida, es preciso demostrar que la línea $h\ h'$, que determinan los puntos de intersección de los lados extremos de los dos polígonos, es paralela a la línea *a b*.

Puesto que r_1 es la resultante de 1 y 2 y también de las *a o* y *o* — 23, prolongando los lados A *c* y *d e* del polígono se encuentra el punto *s*, que pertenece a la línea de acción de r_1; la paralela a la *a* — 23 trazada por el punto *s* debe necesariamente pasar por el punto de intersección de F_1 y F_2. Del mismo modo, el punto *s'*, intersección de los lados A' *e'* y *d' e'* del otro polígono, pertenece también a la línea de acción de r_1; luego las dos paralelas a *a* — 23 trazadas por *s* y *s'* se confundirán en una sola por tener común el punto de intersección de F_1 y F_2, es decir, que la línea *s s'* es paralela a r_1.

La resultante parcial r_2 lo es también de las r_1 y 3 a la vez que de las *a o* y *o* — 34, luego, por las mismas consideraciones anteriores, la línea que une *t* y *t'* será paralela a r_2. Finalmente, como R es resultante de r_2 y 4 y de *a o* y *o b*, la *h h'* será paralela a la *a b*, deduciéndose, como conclusión, que al variar el punto de partida se obtiene siempre el punto de intersección de los lados extremos del polígono, sobre la verdadera posición de la línea de acción de la resultante.

De la demostración anterior se deduce, como consecuencia, que una vez trazado el polígono funicular correspondiente a un polo cualquiera, se obtienen los puntos de las líneas de acción de las resultantes parciales, prolongando uno de los lados extremos del polígono y determinando sobre él la intersección de los demás lados. Esta consecuencia está conforme con la establecida en el párrafo 35.

2.º caso. Cuando se varía la posición del polo, permanece también inalterable la posición de la resultante. En efecto, sean A *c d e* B (*fig. 22*), el polígono correspondiente al polo *o* y A *c' d' e'* B' el de *o'*; la resultante parcial *r* de las fuerzas 1 y 2 puede también considerarse como descompuesta en las *a o* y *o* — 23 y en las *a o'* y *o'* — 23; luego los puntos *s*, *s'* y el de intersección de F_1 y F_2 deben de estar sobre una paralela a la *a* —23, es decir, que *s s'* será paralela a *a* — 23 y del mismo modo *h h'* será paralela á la *a b*.

*3.*er *caso.* Variando primero el punto de partida, por el 1.er caso, se demostrará que la posición de la resultante es la misma y después por el 2.° caso, se vería que al cambiar el polo tampoco se modifica dicha posición.

4.° caso.— Cuando se altera el orden de composición de las fuerzas, ya se ha demostrado (21) que el valor, intensidad y dirección de la resultante no varía y ahora se va a demostrar que su posición también es invariable.

Sean las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 *(fig. 23)*, y A *c d e f* B el polígono funicular correspondiente al polo *o* y al polígono de las fuerzas *a* 1 2 3 4 *b*; prolongando los lados extremos A *c* y B *f*, se obtiene el punto *h* de la posición de R.

Empezando la determinación del polígono de las fuerzas por la 2 se tiene *a'* 2 3 4 1' *b'* y el polígono funicular A' *d e f g* B', que prolongados sus lados extremos, dan el punto *h'* de la posición de R.

Bastará, pues, demostrar que la *h h'* es paralela a *a b*, puesto que *a b* y *a' b'* también lo son, para comprender que la posición de R no ha variado.

Como *r* es la resultante parcial de las fuerzas, 2, 3 y 4, su posición se obtendrá trazando una paralela a *a' b* por el punto *s*, intersección de los lados extremos del polígono funicular *c d* y B *f*, pero a *r* se le puede también considerar como resultante de 1 y *a b* o de *a' b'* y 1' por lo que la línea de acción de R pasará por el punto *m* de intersección de *r* y F_1; luego las *h' m* y *h m* paralelas a la *a b*, se confundirán en una sola recta, y por consiguiente *h h'* es paralela a la *a b*.

37. Aplicación del polígono funicular a la composición de fuerzas.— En resumen, para encontrar la resultante de un sistema cualquiera de fuerzas situadas en un mismo plano, se construye primero el polígono de las fuerzas, cuya línea de cierre contada desde el origen a la extremidad dará la intensidad y sentido de la resultante; desde un punto del plano considerado como polo, se trazan los radios polares correspondientes al polígono anterior y sobre la línea de acción se traza el polígono funicular correspondiente á dicho polo; prolongando sus lados extremos, se tendrá un punto de la línea de acción de la resultante y trazando por este punto una paralela á la línea de cierre, se tendrá su posición.

38. Consecuencias importantes que se deducen del estudio del polígono funicular.— Todo sistema de fuerzas situadas de un modo cualquiera sobre un plano puede reducirse sin excepción a otro formado de dos, que tenga por líneas de acción los lados extremos de uno cualquiera de los polígonos funiculares de aquéllas y por valor los radios polares extremos, contados desde el origen al extremo del polígono de las fuerzas.

Esta importante consecuencia se deduce inmediatamente de lo expuesto en los párrafos 34 y 35.

39. Condiciones gráficas de equilibrio.— Las condiciones necesarias y suficientes para qne un sistema de fuerzas, distribuídas en un orden cualquiera sobre un mismo plano, estén en equilibrio son: 1.ª que cierre el polígono de las fuerzas y 2.ª que sea también cerrado uno cualquiera de los diferentes polígonos funiculares que se pueden trazar.

En efecto, si las fuerzas dadas están en equilibrio, su resultante ha de ser nula y como la resultante gráfica es la suma geométrica de las magnitudes que representan a las fuerzas, dicha suma debe ser también nula, o lo que es lo mismo, que al trazar el polígono de las fuerzas el extremo vendrá a coincidir con el origen, por lo cual el polígono será cerrado. Por otra parte, cualquiera que sea el polo elegido, los radios polares extremos coincidirán, por lo cual los lados extremos del polígono funicular correspondiente serán paralelos y como estos lados representan las líneas de acción de dos fuerzas iguales y de sentido contrario que están aplicadas á un mismo punto, a más de ser paralelas se confundirán en una sola línea, lo que exige que sea cerrado el polígono funicular.

Estas condiciones necesarias son también suficientes, puesto que por cerrar uno cualquiera de los polígonos funiculares, las dos resultantes (38) tienen una misma línea de acción y por cerrar el polígono de las fuerzas, las dos resultantes tienen el mismo valor y están contadas en sentido contrario.

Se ha dicho que basta con que cierre un polígono funicular cualquiera, porque si cierra uno cerrarán todos los demás: esto es evidente teniendo en cuenta lo expuesto en el párrafo 36, pues siendo nula la resultante de las fuerzas, las dos resultantes á que pueden reducirse deberán también equilibrarse, lo que exige que siempre tengan una misma línea de acción.

40. Las condiciones establecidas anteriormente, para deducir el equilibrio de las fuerzas, se deben cumplir simultáneamente, porque puede verificarse que cierre el polígono de las fuerzas y no cumpla esta condición el funicular y en este caso no existe equilibrio.

En efecto, las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 *(fig. 24)*, dan un polígono de fuerzas cerrado y tomando como polo el punto *o*, que puede ser otro cualquiera del plano, da el polígono funicular A *c d e f g* B, cuyos lados extremos A *c* y B *g* son paralelos, por serlo ambos a los radios polares extremos *a o* y *o b* que están confundidos; luego el punto de aplicación de la resultante está en el infinito y como la resultante es nula, es prueba de que las fuerzas no están en equilibrio y que pueden reducirse á un par.

Este par puede encontrarse fácilmente, porque siendo *a b* — 5 4 la resultante de las fuerzas 1 2 3 y 4, su punto de aplicación se obtendrá prolongando los lados extremos del polígono funicular relativo á las indicadas fuerzas, obteniéndose así el punto *h*, teniéndose de este modo la posición de su resultante R, y como su sentido es contrario al de F_2, tiene su mismo valor y son paralelas, el sistema dado se ha reducido al par F_5 y $R = - F_5$.

41. Cuando las fuerzas sean concurrentes, todo cuanto se acaba de exponer es aplicable; pero en cuanto se refiere a las condiciones de equilibrio se reducen a una sola, que sea cerrado el polígono de las fuerzas, porque cumpliendo esta condición, sucesivamente han de cerrar también todos los polígonos funiculares correspondientes.

Supuestas en equilibrio las fuerzas F (*fig 25*), aplicadas en el punto *o*, el polígono de fuerzas correspondientes será cerrado; elegido el polo *o*, se tendrá el polígono funicular A *c d e f g* B que deberá ser cerrado, pero esto tiene necesariamente que cumplirse puesto que existiendo equilibrio entre las fuerzas consideradas, cada una de ellas debe ser igual y directamente opuesta a la resultante de todas las demás; por consiguiente, la fuerza F_5, por ejemplo, debe pasar por el punto *g*, intersección de los lados extremos del funicular de las demás fuerzas, a fin de que su línea de acción se confunda con la de la resultante que tiene por valor *a b* — 54 igual y contrario al de F_5; y lo mismo se podía decir de otra fuerza cualquiera y para cualquiera que fuere el polígono que se elija.

42. Consecuencias que se deducen de la condición gráfica de equilibrio de fuerzas concurrentes.—Se acaba de establecer, en el párrafo anterior, que la condición necesaria y suficiente para que exista equilibrio entre varias fuerzas aplicadas a un mismo punto, es que sea cerrado el polígono funicular correspondiente a un polo dado; de esta condición y del modo de efectuar el trazado del polígono citado y del de las fuerzas, se deduce que ambas figuras son recíprocas.

En efecto (*fig 25*), las tensiones que se desarrollan en los lados *g f*, *f e*, *e d*,..... del polígono funicular, están representadas en magnitud y dirección por los radios polares *o a*, *o* — 54... del polígono de las fuerzas *a* — 12 — 23 — 34 — 45; si se supone ahora que en el polo *o* se aplican varias fuerzas iguales y paralelas a los lados del polígono funicular y se adapta al mismo tiempo un cordón o hilo inextensible y sin masa sobre el polígono de las fuerzas, este hilo no cambiará de forma y por lo tanto será un polígono funicular cuyas tensiones serán iguales y paralelas a las diagonales *o c, o d,*..... del polígono funicular primitivo; luego las dos figuras gozan de propiedades correlativas y, por lo tanto, se pueden deducir la una de la otra por los mismos procedimientos, por lo cual serán recíprocas.

En las dos figuras anteriores se observa:

1.º Que a cada línea de una de ellas corresponde una paralela en la otra y solamente una, llamándose dichas líneas *correspondientes*.

2.º Que a las líneas que concurren en un mismo vértice en una de las figuras, corresponde en la otra los lados de un polígono cerrado.

Sean, en particular, las tres fuerzas F_1 F_2 F_3 (*figura 26*), concurrentes en el punto *o* y que se equilibran: según lo establecido anteriormente, tanto el polígono de las fuerzas *a b c*, como el funicular A B C, de polo *o*, serán cerrados y las figuras *o a b c* y *o* A B C serán recíprocas, puesto que las líneas correspondientes son paralelas y a las tres que concurren en cada vértice les corresponde en la otra un triángulo.

Si se limitan las líneas de acción de las fuerzas hasta los puntos A, B y C, la figura A B C *o* formará un sistema de seis rectas que unen los cuatro puntos, recíproco de otro formado por las rectas que unen los cuatro puntos *o, a, b* y *c* y como para determinar la posición de un punto bastan dos rectas que se corten, sólo será necesario el paralelismo de cinco líneas de la figura *o a b c* con respecto a cinco de las seis de la *o* A B C, para deducir que la sexta de la primera lo será también a la sexta de la segunda. Así, por ejemplo; si las cinco líneas *a b, b c, c o, a o* y *o b* son respectivamente paralelas a las *o* A, *o* B, C A y A B, la *o c* será también paralela a la C B.

Si se toma el polo fuera de las fuerzas (*fig. 27*), se obtienen los dos cuadriláteros recíprocos O A B C y *o b a c* que con sus diagonales formarán dos sistemas de seis líneas paralelas dos a dos.

Se podrá, pues, decir en general, que *si cinco de las seis líneas que unen cuatro puntos de un plano, son paralelas á otras cinco de las seis que unan otros cuatro puntos, las sextas líneas serán paralelas.*

La reciprocidad de las figuras consideradas (*figs. 26 y 27*), no se modifica si a una cualquiera, de las dos que se consideran en cada caso, se les hace dar un giro de 90°, pero en este caso los lados correspondientes serán perpendiculares y por lo tanto se podrá establecer la siguiente proposición: *Si cinco de las seis líneas que unen cuatro puntos de un plano son paralelas o perpendiculares a otras cinco de las seis que unan otros cuatro puntos, las sextas líneas serán paralelas o perpendiculares.*

Esta proposición, puramente geométrica, es de mucha utilidad, porque facilita, como después se verá, la resolución de varios problemas.

43. Resumen.—De todo lo expuesto anteriormente se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª Un sistema cualquiera de fuerzas situadas sobre un plano, darán una resultante, cuando sea abierto el polígono de las fuerzas.

2.ª El sistema de fuerzas considerado estará en equilibrio, cuando cierre el polígono de las fuerzas y uno cualquiera de los polígonos funiculares y

3.ª Las fuerzas dadas se reducirán a un par, cuando cierre el polígono de las fuerzas y sea abierto uno cualquiera de los polígonos funiculares correspondientes.

II. Pares

44. Condición gráfica para que un sistema de fuerzas paralelas se reduzcan a un par.—Se ha visto (20) que si las dos fuerzas paralelas que se componen son iguales y de sentido contrario, su resultante, dada por el polígono de las fuerzas, es cero y su punto de aplicación está en el infinito, constituyendo por lo tanto un par; a la misma consecuencia se llega por la consideración del polígono funicular.

Sean *(fig. 28)*, F_1 y F_2 las líneas de acción de dos fuerzas paralelas y de la misma intensidad: el polígono de fuerzas cerrará y el funicular correspondiente al polo *o*, trazado por el punto A, tiene sus lados extremos A *c* y B *d* paralelos, luego su punto de encuentro estará en el infinito. Resulta, en primer lugar, que las fuerzas consideradas no están en equilibrio y, además, que cumplen las condiciones de un par.

Como según lo establecido (38) el sistema F_1 y F_2 ha de ser equivalente al formado por los lados extremos del polígono funicular, es necesario demostrar que, este último sistema, es un par equivalente al primero.

Es evidente que el nuevo sistema de fuerzas forman un par, puesto que sus líneas de acción son paralelas y sus intensidades *a o* y *o b* son iguales y de sentido contrario: en cuanto a la equivalencia, bastará demostrar que los dos pares tienen igual momento.

Si se representa por h la altura del triángulo *a o n* relativa al lado *n a* y h_1 la que corresponde al lado *o a* desde luego se ve que

$$n\,a \times h = o\,a \times h_1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{n\,a}{o\,a} = \frac{h_1}{h}$$

por otra parte, siendo semejantes los triángulos *c d d'* y el *o n a*, se tiene siempre

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{h_1}{h} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \frac{n\,a}{o\,a} = \frac{\delta_1}{\delta}$$

deduciéndose de esta última expresión,

$$n\,a \times \delta = o\,a \times \delta_1$$

y como *n a* representa la intensidad de una de las fuerzas del par primitivo y *o a* la del par resultante, el primer miembro representa el momento del par dado y el segundo el del nuevo, luego los dos pares son equivalentes.

Sean ahora varias fuerzas paralelas F_1, F_2 y F_3 *(fig. 29)*, tales que una de ellas, por ejemplo la F_3, sea igual a la suma de las otras dos y de sentido opuesto.

Al trazar el polígono de las fuerzas resultará cerrado y, como consecuencia, cualquier polígono funicular que se trace resultará con sus lados extremos paralelos, luego el sistema de fuerzas considerado será equivalente a un par: esto no ofrece duda puesto que el sistema de fuerzas F_1, F_2 y F_3 se puede reemplazar por el R′ y F_3 y estas dos fuerzas forman un par equivalente al A A′ y B B′.

De lo anterior se deduce la consecuencia, de que la condición gráfica, que debe cumplir un sistema de fuerzas paralelas, para reducirse a un par, es que cierre el polígono de las fuerzas.

45. Si en cualquiera de los dos casos considerados, se toma otro polo distinto, se tendrá otro par, que será equivalente al propuesto y por lo tanto equivalente al del primitivo polo. En efecto, sea el par F_1, F_2 que, con respecto al polo o, es equivalente al par A c B d; y con relación al polo o_1, es también equivalente al A_1 c_1, B_1 d_1; prolongando las líneas de acción de los dos nuevos pares, se cortarán necesariamente en cuatro puntos tales, como c', n, d' m *(fig. 30)*; uniendo c' con d', se tiene el triángulo c' d' n semejante al o o_1 a, formado por los radios polares que representan las intensidades de las fuerzas de los nuevos pares, y por la línea que une los polos; aplicando a estos dos triángulos lo expuesto en el párrafo 44, se tendrá

$$o\,a \times \delta = o_1\,a \times \delta_1$$

luego los dos nuevos pares son también equivalentes.

De esto se deduce que se puede reemplazar un par por otro de intensidad y dirección conocidas, para lo cual se traza por el origen del polígono de fuerzas una paralela a la dirección de la fuerza y sobre esta línea se toma una magnitud igual a la intensidad: el extremo marcará la posición del nuevo par. Y, también, si se dan las líneas de acción del nuevo par se conocerá la intensidad de la fuerza, prolongando aquellas hasta que corten a las primitivas y trazar por el origen una paralela a la dirección y por el otro extremo otra paralela a cualquiera de las diagonales del cuadrilátero de intersección; la intersección de las dos líneas dará el polo y por consecuencia la intensidad que se busca.

46. Caso de fuerzas no paralelas.—Se ha visto en el párrafo 40, que si el polígono de fuerzas cierra sin que así se verifique en uno cualquiera de sus polígonos funiculares, el sistema no está en equilibrio, reduciéndose a un par; luego la condición gráfica para que un sistema de fuerzas cualquiera se reduzca a un par, es que sea cerrado el polígono de fuerzas y abierto uno cualquiera de sus polígonos funiculares.

47. Observación.—La equivalencia de dos pares se puede encontrar gráficamente, fundándose en que, si se unen a las fuerzas de un par las del otro cambiadas de sentido, se tiene un sistema en equilibrio; es decir, que dos pares serán equivalentes, cuando tomado uno dé ellos en opuesta dirección, el conjunto de las fuerzas satisfacen a las condiciones gráficas de equilibrio.

III. Problemas relativos a la composición, descomposición y equilibrio de fuerzas paralelas

48. 1.° Composición de dos fuerzas paralelas del mismo sentido.—Sean F_1 y F_2 (*fig.ª 31*), las líneas de acción de las fuerzas consideradas a las que corresponde el polígono de fuerzas *a b*, siendo el valor de la intensidad la magnitud *a b*, así como su dirección y sentido el de esta magnitud: para fijar la posición de la resultante, se toma el polo *o* y se traza el polígono funicular A *c d* B correspondiente a dicho polo: la intersección h de la prolongación de los lados extremos del polígono, dará un punto de la línea de acción de la resultante y como ésta, según el polígono de las fuerzas, es paralela a las dos fuerzas dadas, trazando por h la R paralela a F_1 y F_2 se tiene la línea de acción pedida.

La resultante así obtenida tiene su línea de acción entre las dos consideradas, su misma dirección y su intensidad igual a la suma de F_1 y F_2; queda por demostrar que la línea R, determina sobre una transversal cualquiera, dos segmentos que están en razón inversa de las intensidades de las fuerzas.

Comparando los triángulos semejantes $o\ a\ (12)$ y $c\ n\ h$ se obtiene

$$\frac{a\,(12)}{n\,h} = \frac{o\,(12)}{n\,c} \qquad \text{de donde} \qquad F_1 \times n\,c = o\,(12) \times n\,h$$

de igual modo, los triángulos $o\ b\ (12)$ y $n\ h\ d$, también semejantes, dan

$$\frac{b\,(12)}{n\,h} = \frac{o\,(12)}{n\,c} \qquad \text{de donde} \qquad F_2 \times n\,d = o\,(12) \times n\,h$$

deduciéndose de las dos relaciones obtenidas, la expresión

$$F_1 \times n\,c = F_2 \times n\,d \qquad \text{o bien} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{n\,d}{n\,c}$$

luego la transversal $c\ d$ queda dividida por la R en dos segmentos inversamente proporcionales a F_1 y F_2. Resulta, pues, que la resultante obtenida por medio del polígono funicular cumple las condiciones establecidas en estática ordinaria.

2.° Composición de dos fuerzas paralelas de opuesto sentido.—Siguiendo la marcha general establecida, se tendrá el punto h (*fig. 32*) de la línea de acción de la resultante, la cual es paralela a las componentes, del mismo sentido que la mayor, estando situada fuera de las líneas de acción y su intensidad es la diferencia de las que corresponden a F_1 y F_2.

La resultante determina también, sobre una transversal cualquiera, magnitudes que están en razón inversa de las de F_1 y F_2. En efecto, comparando los triángulos semejantes $o\,a\,b$ y $h\,n\,c$, se tiene

$$\frac{a\,b}{n\,c}=\frac{o\,b}{n\,h} \quad \text{o bien} \quad (F_1-F_2)\times n\,h=o\,b\times n\,c$$

del mismo modo, los triángulos $o\,b\,(12)$ y $n\,d\,c$, dan

$$\frac{b\,(12)}{n\,c}=\frac{o\,b}{n\,d} \quad \text{o bien} \quad F_2\times n\,d=o\,b\times n\,c$$

se tendrá, por lo tanto, la identidad

$$(F_1-F_2)\times n\,h=F_2\times n\,d \quad \text{de donde} \quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{h\,d}{h\,n}$$

que demuestra lo propuesto.

3.° Composición de un número cualquiera de fuerzas paralelas del mismo sentido.—Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 *(fig. 33)*, las fuerzas consideradas: siguiendo el procedimiento establecido se tendrá, en $a\,b$ la intensidad, dirección y sentido de la resultante, y en h el punto de intersección de los lados extremos del polígono funicular, por donde ha de pasar la línea de acción de la resultante.

Por $a\,b$ se ve que la resultante es igual a la suma de las componentes y paralela a ellas; luego trazando por h una paralela a la dirección de las fuerzas, se tendrá en R la resultante. Para ver que el resultado así obtenido es el verdadero, bastará determinar la resultante de F_1 y F_2, valiéndose de lo establecido anteriormente en el primer problema y en la propiedad de los lados del polígono funicular ya trazado; esta composición dará R_1: por idénticas consideraciones la R_2 será la resultante de F_3 y F_4, luego el sistema propuesto será equivalente al formado por R_1 y R_2 y como el polígono funicular correspondiente a éstas es A h_1 h_2 B, la R será resultante de las dos últimas, y por consiguiente, equivalente al sistema primitivo, cumpliendo como se ve las condiciones establecidas en la estática.

4.° Composición de fuerzas paralelas de diferente sentido. —Por la aplicación del polígono funicular se obtiene la resultante R, del sistema de fuerzas que se representan en la *figura 34*, siendo este el verdadero, puesto que si separadamante se componen las fuerzas que están en cada sentido, se obtendrán las R_1 R_2, y la resultante R del sistema, que también lo es de estas dos, cumple las dos condiciones establecidas en el problema 2.°

Al resolver el problema de que se trata, puede ocurrir, que cierren el polígono de las fuerzas y el funicular, en cuyo caso las fuerzas estarán en equilibrio, o que cierre el polígono de las fuerzas sin ser cerrado el funicular y entonces las fuerzas se reducen a un par.

5.° Descomponer una fuerza en otras dos paralelas cuyas líneas de acción son dadas.—Pueden ocurrir dos casos: 1.° que la línea de acción de la fuerza dada esté comprendida entre las dos, y 2.° que las dos líneas de acción de las componentes desconocidas estén a un mismo lado de la fuerza.

1.er caso.—Sea R *(fig. 35),* la línea de acción de la fuerza dada cuya intensidad es *a b*, F_1 y F_3 las líneas de acción de las componentes. Puesto que, en este caso, la R ha de ser la suma de las otras dos, trazada la *a b*, paralela a R y limitada en ella una magnitud igual a la intensidad de R, se tendrá el polígono de fuerzas, reduciéndose el problema a dividir la magnitud *a b* en dos partes tales que su relación sea $\frac{c\,n}{d\,n}$, siendo *c d* una transversal cualquiera.

Se sabe que la resultante de dos fuerzas tiene su línea de acción sobre la intersección de los lados extremos de uno de los polígonos funiculares, luego si se toma el polo *o* cualquiera, y se une con *a* y *b*, se conocerá la dirección de los lados extremos del funicular correspondiente a dicho polo; y si por un punto de R, tal como el *h*, se trazan las rectas *h* A y *h* B paralelas a los radios extremos polares y se unen los *c* y *d*, en que dichas paralelas cortan respectivamente a F_1 y F_2, la *o m* paralela a la *c d* determina sobre la *a b* dos segmentos 1 y 2 que están entre sí en la relación dicha; por lo tanto, estos dos segmentos representan la intensidad de cada una de las componentes.

2.º caso. Si las líneas de acción F_1 y F_2 (*fig. 36*), están a un mismo lado de la R, como el valor de ésta es la diferencia de las otras dos, la magnitud *a b*, tomada sobre una paralela a R, representará la diferencia de las dos fuerzas y si se toma un polo *o*, los radios *o a* y *o b* serán los extremos, y trazando por un punto cualquiera de A, dos rectas que sean paralelas a los citados radios, se tendrán los puntos *c* y *d* sobre las líneas de acción dadas: unidos estos dos puntos y trazada por *o* una paralela a la *c d*, en *a m* se tiene el valor de la componente que actúa según la línea de acción de F_1 y en *b m* la que obra según la dirección de F_2.

Consideraciones análogas a las del caso anterior, evidenciarán que la descomposición está bien hecha.

6.º Resolución de los dos problemas anteriores cuando se conoce la resultante y una de las fuerzas.—*1.er caso*: **a**) Se conocen R y F_2 y se trata de encontrar la posición, intensidad y sentido de la otra componente, con la condición de que R esté comprendida entre ellas; para que el problema tenga solución, es necesario que $R > F_2$; si esto se verifica, se traza (*fig. 35*), el polígono de fuerzas *a b* y como $R = F_1 + F_2$ tomándose desde *a* una magnitud $a\,m = R - F_2$, en *a m* se tendrá el valor de F_1. Trazando desde un polo cualquiera *o* los radios polares *o a*, *o m* y *o b* y recordando que sobre la línea de acción de la resultante se han de cortar los lados extremos del polígono funicular, se toma un punto *h* y por él se trazan, *h* A y *h* B y trazando por el punto *d*, en el que *h* B corta a la línea de acción de F_2, la *d n* paralela al radio *o m*, se obtendrá el punto *c*, intersección del lado extremo del polígono funicular correspondiente al polo *o*, con el segundo lado, luego *c* será un punto de la línea de acción de F_1: trazando por *c* una paralela a R, se tendrá en F_1 la línea de acción de la componente buscada, así como en *a m* su intensidad y sentido.

b) Si solamente se fija la condición de que R y F_1 sean paralelas y del mismo sentido, para el caso de ser $F_1 < R$, se resolverá el problema como se acaba de indicar; pero si $F_1 > R$, esto indica que la componente F_2 es de sentido contrario a R y F_1 y que su línea de acción está hacia el lado de F_1.

Como $R = F_1 - F_2$ la intensidad de F_2 se obtendrá (*figura 36*), tomando sobre la línea *a m*, que representa la intensidad de F_1, la magnitud *a b* valor de R y en *b m* se tiene el valor pedido. Para deducir la posición de la nueva componente, se trazan, por un punto cualquiera de la línea de acción de R, dos paralelas a los radios polares extremos *o a* y *o b* y por el punto *c*, de la línea de acción de F_1, determinado como se indica en la figura, otra paralela a *o m;* se obtendrá de este modo el punto *d*, correspondiente a la línea de acción de F_2.

2.º caso. Se dan los valores de R y F_2 paralelos y de diferente sentido; el problema tendrá solución, cualquiera que sean sus valores.

Puesto que en este caso $F_1 = R + F_2$, tomando (*fig. 36*), *a m* igual a la suma de R y F_2 se tendrá la intensidad de F_1. Trazados los radios polares *o a, o b, o m* y por un punto de R, los *h c* y *h d* respectivamente paralelos a los radios *a o* y *o b*, se tiene el punto *d* por el que se traza *d c* paralela a *o m* y en *o*, punto de encuentro de *h c* y *d c*, se tiene un punto de F_1 y trazando por él una paralela a R_1 queda determinado la posición de F_1.

7.º Descomponer una fuerza dada en otras varias que le sean paralelas.—Dos casos se deben considerar: 1.º que las componentes que se buscan sean del mismo sentido y 2.º que unas sean del mismo sentido y otras de sentido contrario.

1.^{er} caso. Para que el problema tenga solución, es necesario que la línea de acción de la fuerza dada esté comprendida entre las de las componentes. Sea R *(fig. 33)*, la línea de acción de la fuerza dada y F_1, F_2, F_3 y F_4 las de las componentes: como $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$, podemos, primero, descomponer a R en dos fuerzas tales que cada una de ellas sea la suma de otras dos y luego, tomando dos líneas de acción paralelas a las de las fuerzas y que una esté comprendida entre F_1 y F_2, y la otra entre F_3 y F_4, el problema queda reducido al de descomponer una fuerza en otras dos paralelas y del mismo sentido; siguiendo, pues, la marcha establecida en el problema 5.°, se tendrá el valor de las componentes.

2.° caso. Si la fuerza que se trata de descomponer y las líneas de acción de sus componentes afectan la disposición de la figura 34, el problema se reduce a determinar dos fuerzas auxiliares R_1 y R_2, de opuesto sentido, y después descomponer éstas en otras de su misma dirección, problemas ya resueltos.

El problema en el caso que se estudia, podrá o no tener solución, dependiendo ésta de la disposición que tenga la fuerza dada con respecto a la posición y sentido de las componentes: un estudio detenido, en cada caso, dará a conocer las condiciones de posibilidad del problema.

8.° Equilibrar un sistema de fuerzas paralelas por otras dos de la misma dirección.—Sea F_1, F_2, F_3 *(fig. 37)*, el sistema de fuerzas considerado y R_1 y R_2 las líneas de acción de las fuerzas que han de equilibrar a dicho sistema. El problema se reduce a descomponer la resultante R en dos fuerzas según direcciones dadas (Problema 5.°, Caso 1.°) y tomar estas dos nuevas componentes con sentido contrario, lo que equivale a reemplazar el sistema propuesto por otro formado por dos fuerzas y después equilibrar este nuevo sistema por otro cuyas fuerzas son iguales y de sentido contrario.

Así, según la figura, en R_1 y R_2 se tendrá el sentido y dirección de las fuerzas que equilibran al sistema considerado y en *m a* y *b m* las intensidades respectivas de cada una de las nuevas fuerzas.

Para resolver este problema, no hace falta trazar la resultante; basta trazar el polígono funicular correspondiente a un polo cualquiera y prolongar los lados extremos de dicho polígono, hasta que corten a las nuevas líneas de acción y uniendo estos dos puntos se tiene la línea de cierre y trazando por el polo un radio polar a esta línea, se determinará sobre el polígono de fuerzas (aquí una recta) el *m*, que da a conocer la intensidad y sentido de las dos fuerzas buscadas.

La solución obtenida es cierta, puesto que uniendo al sistema de fuerzas considerado las dos encontradas, cumplen las condiciones gráficas de equilibrio, cerrándose el polígono de las fuerzas y el polígono funicular.

El problema tiene siempre solución cualquiera que sea la disposición de las dos nuevas líneas de acción, por reducirse este problema a los dos casos considerados en el problema 5.°

9.° Equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas por otras tres de direcciones dadas.—Dos casos deben considerarse: 1.° que las direcciones de las nuevas fuerzas sean las del sistema y 2.° que tengan una dirección cualquiera.

En ambos casos el problema se reduce a descomponer la resultante en tres direcciones dadas.

1.er caso. Sea R *(fig. 38)*, la resultante de las fuerzas dadas y R_1, R_2, R_3 las líneas de acción de las que se buscan. Tomando una fuerza auxiliar, cuya línea de acción sea R', se descompone R en R' y R_1, siguiendo el procedimiento ya explicado, con lo que el valor y sentido de R_1 será *m a*. Como el valor y sentido de R' es *b m*, para descomponerla según las direcciones R_2 y R_3, bastará trazar la línea de cierre $i\,i'$ y tirar por el polo *o*, una paralela a esta dirección; se tiene en *n m* y *b n* el sentido e intensidad de cada una de las fuerzas R_2 y R_3.

El problema tiene siempre solución, siendo fácil deducir la regla que debe seguirse si las nuevas líneas de acción tienen la disposición de la figura 38. Si la disposición es la indicada en la figura 39, se puede también con igual facilidad deducir, pues prolongando el lado extremo A c del polígono funicular, hasta que corte en f a la línea de acción R_1, así como el otro lado extremo B e hasta que corte en f' a la línea de acción auxiliar, en $f f'$ se tendrá la línea de cierre del polígono funicular $h f f'$ correspondiente a las tres fuerzas R, R_1, R′ y el radio polar $o\, m$ paralelo a $f f'$, dará el valor de las nuevas componentes. Como R′ ha de ser la resultante de R_2 y R_3 la línea de cierre del polígono funicular de las tres fuerzas será la $g\, g'$; determinando el radio polar $o\, n$ que le es paralelo, las magnitudes $b\, n$ y $n\, m$ dan el sentido e intensidad de R_2 y R_3.

Si se varía la posición de la componente auxiliar, variarán también los valores de las tres componentes, por lo cual el problema es indeterminado.

2.º caso. Sean R_1, R_2 y R_3 (*fig. 40*), las líneas de acción de tres fuerzas desconocidas, que se quiere hagan equilibrio al sistema de fuerzas paralelas F_1, F_2, F_3 y F_4. Trazado el polígono funicular correspondiente al polo o, se determinará la posición de la resultante R y el problema queda reducido a la descomposición de una fuerza en tres direcciones dadas.

Recordando lo establecido anteriormente (29), para resolver el problema bastará prolongar R hasta que corte a una cualquiera de las nuevas líneas de acción, por ejemplo a la R_3, se obtiene el punto p que unido con el q, intersección de las otras dos direcciones, dan la componente auxiliar. Ahora sólo resta descomponer R en otras dos, cuyas líneas de acción son R_3 y $p\, q$, obteniéndose en el polígono de las fuerzas los valores $a\, m$ y $m\, b$ de estas dos componentes; descomponer después la $m\, b$ en otras dos, cuyas posiciones vienen dadas por R_2 y R_1, encontrándose $n\, m$ y $n\, b$, respectivamente, para dichas componentes; resultando, por lo tanto, conocidos los valores de las intensidades de las tres fuerzas en que se trataba de descomponer a R: contando estas fuerzas, en sentido contrario al obtenido, se tendrá un sistema de tres fuerzas que hace equilibrio a R y como consecuencia, al sistema considerado.

Si se prolongan los lados extremos A *c* y B *f* del polígono funicular correspondiente al polo *o*, se tiene sobre la R_3 el punto *k* y sobre la prolongación de *p q* el *r* que unidos dan una paralela al radio polar *o m:* en efecto, los cuatro puntos *h, r, p, k*, están unidos por las cinco rectas *h k, k p, p r, r h, h p* que son respectivamente paralelas a las *o a, a m, m b, b o, a b* que unen los cuatro puntos *o, a, m, b;* luego (52) la *r k* y *o m* son paralelas. Esto prueba que las tres fuerzas cuyas intensidades son *a b, b m* y *a m* y cuyas líneas de acción son R_1, R_3 y *p q*, cumplen las condiciones gráficas de equilibrio puesto que cierran el polígono *a b m* de las fuerzas y el polígono funicular correspondiente, reducido en este caso al triángulo *r h k*.

Prolongando, ahora, la recta *h r* hasta que encuentre en *g* a la R_1, así como la *k r* hasta que corte a la R_2 en *i*, se tienen también los cuatro puntos *r, i, q, g* que están unidos por cinco rectas paralelas a las que respectivamente unen los puntos *m, o, b, n;* luego la *g i* es paralela a la *o n* y como el triángulo *r i g* es el polígono funicular del sistema de fuerzas *m b, b n, n m*, se ve que estas tres fuerzas cumplen también las condiciones gráficas de equilibrio.

Por ser *r i* prolongación de *r k* y *r g* de *h r*, resulta que si se considera el conjunto de los dos sistemas de fuerzas, el primitivo y el nuevo, y se traza el polígono funicular correspondiente al punto *o*, tomando como punto de partida el *k*, se halla el polígono *k c d e f g i k,* que como se ve, es cerrado; luego el sistema total está en equilibrio.

Fundándose en lo anterior, se deduce, que para encontrar el valor de las tres fuerzas cuyas líneas de acción se dan, que han de equilibrar a un sistema de fuerzas dado, se determina primero la resultante de éstas y se descompone a continuación esta resultante en las tres direcciones dadas: para esto se prolongan los lados A *c* y B *f* del polígono funicular hasta que corten a dos de las direcciones dadas, por ejemplo, a las R_3 y R_1, se obtendrán así los puntos k y g; unir después el punto p, de intersección de R y R_3, con el q, que es donde se cortan R_1 y R_2, y prolongar la $p\,q$ hasta que corte en r al lado extremo Bf; uniendo ahora r con k y prolongando la $k\,r$ hasta que corte en i a la R_2, se tendrán en $i\,g$ y $k\,i$ los dos lados que cierran el polígono funicular total; para deducir ahora la intensidad de las fuerzas, se tira por a una paralela a la línea de acción que ha sido cortada por el lado extremo Ac y por b otra a la que cortó al lado Bf y como los lados $i\,g$ y $k\,i$ son paralelos a los radios polares, trazando por o los $o\,n$ y $o\,m$ respectivamente paralelos a dichos lados, se obtendrán los puntos n y m que unidos dan la $n\,m$: siendo, por consiguiente, $b\,n$, $n\,m$ y $m\,a$ los valores de las fuerzas que equilibran al sistema primitivo, según las direcciones R_1, R_2 y R_3.

Este procedimiento exige el que sea previamente trazada la resultante del sistema de fuerzas que se da, pero esto no es necesario, porque si se traza por q la $q\,t$ paralela a la R_3 y se prolongan los $a\,m$ y $b\,n$ hasta que se corten en s, se tienen por una parte los cuatro puntos g, r, i, q que están unidos por cinco rectas que son paralelas a las que respectivamente unen los cuatro puntos o, m, s, b, por lo que las rectas $q\,t$ y $o\,b$ serán paralelas; luego si por el punto q se traza la $q\,t$ paralela a R_3 y por g la $g\,t$ paralela a $o\,s$, se obtiene el punto t que al unirlo con k dará el punto i, no habiendo sido necesario determinar el punto p intersección de la resultante R con la R_3.

Del párrafo anterior se deduce el siguiente procedimiento, que puede considerarse como general: Por el origen a, se traza una paralela a una de las líneas de acción, a la R_3, y por el extremo b otra paralela a la otra línea de acción, a la R_1; estas dos paralelas se cortan en el punto s; por un punto k de la R se traza el polígono funicular cuyo lado extremo cortará en g a la R_1: determinando ahora el punto q, de la intersección de la R_1 con la R_2, se traza por este punto una paralela a la R_3 y por g una paralela a la $o\,s$, con lo que se encuentra el punto l, que unido con k da el i: trazando finalmente las $o\ n$ y $o\ m$ paralelas respectivamente a $i\ g$ y $k\ i$, se tiene resuelto el problema.

Este 2.º caso tiene solución, siempre que las nuevas líneas de acción no sean paralelas entre sí, ni concurrentes y en este último caso habrá varias soluciones, si la resultante del sistema considerado pasa por el punto de concurso.

IV. Propiedades particulares de los polígonos funiculares de fuerzas paralelas.

49. Además de las propiedades generales establecidas (36), los polígonos funiculares de fuerzas paralelas gozan de otras propiedades particulares que interesan conocer.

a) *Si se prolongan los lados extremos de dos polígonos funiculares cualesquiera de un sistema de fuerzas paralelas, las intersecciones de los lados extremos del mismo orden están sobre una recta paralela a la que une los polos.*

En efecto, sean A $c\ d\ e\ f$ B y A′ $c'\ d'\ e'\ f'$ B′ los dos polígonos dados *(fig.ª 41)*, prolongados los lados A c y A′ c' hasta que se corten, así como los B f y B′ f', se tienen los puntos r y r'. Como los puntos h y h', intersecciones de los lados extremos de cada polígono, pertenecen a la línea de acción de la resultante según lo demostrado (36), resulta que los cuatro puntos, h, h', r, r', están unidos por las cinco rectas $h\ r$, $h\ r'$, $h\ h'$, $r\ h'$ y $h'\ r'$, que respectivamente son paralelas a las $o\ b$, $o\ a$, $a\ b$, $o'\ b$ y $o'\ a$ que unen los cuatros puntos a, b, o, o': luego la $r\ r'$ será paralela a la $o\ o'$.

b) Si se trata de equilibrar un sistema de fuerzas paralelas por otras dos que le sean paralelas y cuyas líneas de acción sean dadas, *se obtendrá siempre para éstas el mismo valor, cualquiera que sea el polígono funicular considerado*, puesto que dichas fuerzas han de ser iguales y directamente opuestas a las componentes de la resultante según las mismas líneas de acción y esta resultante no varía.

c) Unidos los puntos A y B (*fig.ª 41*), en que los lados extremos, de uno cualquiera de los polígonos funiculares del sistema, cortan a dos rectas paralelas a las líneas de acción de las fuerzas y exteriores a ellas, se obtiene la figura cerrada A *c d e f* B. Si se traza ahora una paralela cualquiera a las líneas de acción, y que esté comprendida entre A y B, se determina sobre la figura cerrada un segmento L T. *El producto de este segmento, por la distancia polar correspondiente, es una cantidad constante para todas las figuras cerradas análogas.*

En efecto, el segmento L T divide a la figura en dos partes, pudiéndose considerar cada una como el polígono funicular de las fuerzas que comprende. Si se considera la parte L A T, el polígono funicular será el L A *c* T, que corresponde a las fuerzas R_1, igual y contraria a la componente de R según A A′, y la F_1'; prolongando los lados extremos L A y T *c*, se tiene el punto *p* de la línea de acción de la resultante de las dos fuerzas cuyo valor será (12) *m*.

Por la semejanza de los triángulos L *p* T y *o m* (12) se deduce, representado por δ la distancia polar,

$$\frac{L\,T}{p\,q} = \frac{m\,(12)}{\delta} \quad \text{o bien} \quad L\,T \times \delta = m\,(12) \times p\,q.$$

Ahora, *p q* es constante, puesto que la *p p′* que une el punto *p* con el *p′*, determinado por la prolongación de B′ A′ y *c′ d′* de otro polígono, es paralela a las líneas de acción R_1 y F_1 (36); por otra parte, *m* (12) diferencia entre R_1 y F_1 es siempre la misma, por ser estas dos fuerzas constantes; luego el producto *m* (12) $\times$ *p q* es siempre constante y por lo tanto, también lo es el producto L T . δ .

d) *La relación entre los segmentos* L T *y* L′ T′ que una misma paralela determina sobre dos polígonos cualesquiera, correspondientes a dos paralelas R_1 y R_2 fijas, *es inversa a la que existe entre las distancias polares correspondientes.*

En efecto, según lo demostrado anteriormente

$$L'\,T' \times \delta = m\,(12) \times p\,q$$

luego $L\,T \, . \, \delta = L'\,T' \, . \, \delta'$ de donde $\dfrac{L\,T}{L'\,T'} = \dfrac{\delta'}{\delta}$.

Si en vez de haber considerado una paralela, se hubiese tomado una línea de acción cualquiera, por ejemplo, y para mayor sencillez de la figura, la F_1, el producto del segmento $e_1\,e$ por δ también sería constante e igual a $e_1'\,e'$ por δ'; representando, pues, por z el segmento de paralela comprendido en el polígono cerrado, o sea entre el polígono funicular y su cuerda, se tiene la expresión

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{\delta}{\delta'}$$

Esta expresión da el medio de construir el polígono funicular correspondiente a una distancia polar dada, conocido que sea uno de los polígonos funiculares. En efecto, si δ se conoce y está trazado el polígono A $c\ d\ e\ f$ B se conocerán los diversos valores de z, como se da δ', el de z' se deducirá de la ecuación

$$Z' = Z\,\frac{\delta}{\delta'}$$

Trazada una cuerda cualquiera A′ B′ y tomando sobre las líneas de acción y a partir de aquellas magnitudes z', y uniendo después los puntos marcados sobre las líneas de acción, se tendrá el nuevo polígono funicular A′ $c'\ d'\ e'\ f'$ B′.

Si se toma $\delta = \delta'$, el trazado se simplifica por resultar entonces $z = z'$.

V. Curvas funiculares

50. Definición.—Cuando se tiene un sistema de fuerzas cuyas líneas de acción están muy próximas entre sí, los lados del polígono funicular correspondiente a un punto cualquiera son muy pequeños y tienden a confundirse con elementos de una curva, a medida que vaya siendo menor la distancia que separa dos líneas de acción consecutivas. Las curvas límites de estos polígonos funiculares se las denomina *curvas funiculares*, y se las puede definir diciendo que son, *los polígonos funiculares correspondientes a un sistema de fuerzas, cuyas líneas de acción se suceden de una manera continua.*

Como los lados de los polígonos de las fuerzas son paralelos á las líneas de acción, si éstas se deducen de una manera continua, los ángulos que dos lados cualesquiera forman entre sí, serán cada vez más obtusos y si se supone que la intensidad de las fuerzas sea muy pequeña, el polígono de las fuerzas tenderá a confundirse con una curva, a la que se llama *curva de las fuerzas*, y que tendrá un radio de curvatura infinito, cuando se considere un sistema de fuerzas paralelas.

En las definiciones anteriores se deduce, que todas las propiedades relativas a los polígonos funiculares son también aplicables a las curvas, puesto que aquellas se han establecido de una manera general, sin tener para nada en cuenta ni la magnitud de las fuerzas, ni la distancia que separa cada dos líneas de acción.

51. Propiedades particulares de las curvas funiculares.—Como los radios polares son paralelos a los lados del polígono funicular y estos son elementos diferenciales de una curva, resulta que aquellos serán paralelos a las tangentes a la curva en el punto correspondiente y de igual modo las líneas de acción de las fuerzas serán paralelas a las tangentes de las curvas de fuerzas. Así *(fig. 42)*, sea A B la curva funicular correspondiente al polo *o* y a la curva de fuerzas *a b;* si se traza un radio polar cualquiera *o m* se obtendrá el punto M correspondiente al *m*, determinando la tangente a la A B que sea paralela a *o m;* e inversamente, si se quiere determinar el punto *a b* correspondiente a N, se trazará la tangente a A B en N y por *o* se traza un radio polar *o b* paralelo a dicha tangente, obteniéndose de este modo el punto *n* correspondiente al N.

a) Consideremos ahora dos puntos *m* y *n* de la curva *a b;* cualquiera que sea la distancia que medie entre los dos puntos considerados, la línea *m n* que los une representa la intensidad, dirección y sentido de la resultante de las fuerzas cuyas líneas de acción están comprendidas entre los puntos M y N de A B y como las tangentes M *h* y N *h* son los lados extremos del polígono funicular correspondiente al conjunto de fuerzas comprendidas entre M y N, el punto *h,* en que dichas tangentes se cortan, pertenece a la línea de acción de la resultante; luego trazando la F paralela a la cuerda *m n,* se tendrá la línea de acción de la resultante.

La resultante total se obtendrá, pues, trazando por A y B las tangentes respectivas, las que serán paralelas a los radios polares extremos de la curva *a b*, y tirando después por el punto de intersección de las tangentes una paralela a la cuerda de la *a b.*

Las consideraciones anteriores prueban, *que si se circunscribe a una curva funicular un polígono de un número cualquiera de lados, con la única condición de que los lados extremos sean tangentes en las extremidades de la curva, el sistema ilimitado de fuerzas considerado, se habrá reemplazado por un número finito de fuerzas, que serán las resultantes parciales de las que obran entre los puntos de contacto de la curva y del polígono.*

Esta propiedad permitirá, en cada caso, reemplazar la curva funicular por el polígono funicular más apropiado a la resolución del problema de que se trate.

b) Como las tangentes en A y *b* *(fig. 43)*, han de ser paralelas a los radios polares *o a* y *o b* y estos representan los valores de las dos componentes de la resultante *a b*, que contados en el sentido *b o* y *o a* equilibran al sistema propuesto, resulta, *que, a condición de no variar las tangentes en* A *y* B, *el sistema de fuerzas se podrá reemplazar por otro equivalente.* Así el sistema de fuerzas que corresponde a la curva funicular N y de fuerzas *n*, es equivalente al que determinan las curvas N′ y *n*′, puesto que los dos son equivalentes al sistema formado por las dos fuerzas *a o* y *o b*, componentes de la resultante *a b* que es constante.

CAPITULO IV

SISTEMAS ARTICULADOS Y CONSTRUCCIÓN DE MOMENTOS

I. Sistemas articulados

52. Definición de las figuras geómetricas formadas por los sistemas articulados.—Si se considera un conjunto de varios cuerpos que tengan todos un plano común de simetría, sobre el cual obran las fuerzas que los solicitan, estando unidos entre sí por medio de articulaciones, se tendrá un *sistema articulado:* este sistema, en cada caso, adoptará, una forma especial correspondiente al equilibrio del sistema de fuerzas formado, por las que actúan directamente y por las acciones interiores que se originan.

Para hacer el estudio de las condiciones de equilibrio de los sistemas articulados, se suponen a los cuerpos que los forman, reducidos a prismas o barras cilíndricas de pequeña sección, por lo que se denominan *barras o barillas,* que serán los lados de la figura que se toma el sistema. Si se supone que las barras carezcan de dimensiones transversales, o sea que se reduzcan a simples líneas, todo sistema articulado se convertirá en una *figura geométrica,* cuyos *lados* son barras y sus *vértices* son las articulaciones que ligan las barras entre sí.

Puede ocurrir que en un vértice concurran más de dos barras y entonces se dice que forman un *nudo*, y también, que por las circunstancias de equilibrio de las fuerzas que obran sobre el sistema, varios vértices estén sobre una misma dirección; los lados en este caso, serán las partes de barras comprendidas entre dos vértices consecutivos.

Aun cuando en general, los cuerpos que forman el sistema articulado se reducen a simples barras, es necesario no olvidar la definición dada, según la cual, los cuerpos pueden afectar una forma cualquiera, es decir, que los cuerpos considerados pueden a su vez estar formados por otro sistema de barras, lo que permite hacer más sencillo el estudio del sistema articulado primitivo.

53. Clases de figuras geométricas que se consideran en estática gráfica.—Refiriéndose las figuras geómetricas a los sistemas articulados en equilibrio, es necesario que cumplan ciertas condiciones, a fin de que se las pueda aplicar los principios establecidos.

Es fácil demostrar, que si el sistema está en equilibrio, cada una de sus partes lo estará también bajo la acción de las fuerzas que obran directamente sobre ella y de las acciones interiores que provienen de las demás. En efecto; sea A *(figura 44)*, uno de los cuerpos que forma parte de un sistema articulado en equilibrio, unido a los restantes por las articulaciones *a* y *b*: siendo rígido y no actuando fuerzas exteriores, permanecerá en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que se desarrollen según *a b* y que actuarán en sentido contrario, bien tendiendo a separar los puntos *a* y *b*, en cuyo caso se llaman *tensiones*, o bien tienden a que se acerquen dichos puntos, originándose *presiones*. En ambos casos la rigidez de A impide su deformación, no habrá, por lo tanto, inconveniente en reemplazar dicho cuerpo por otro, que sea una barra cilíndrica o prismática y que tenga la resistencia conveniente para no ser deformada bajo la acción de las fuerzas que se originan en la dirección *a b*.

Si el cuerpo A se encuentra sometido a la acción de un sistema de fuerzas, cuya resultante sea F, se podrá siempre descomponer a ésta en dos que le sean paralelas y que estén aplicadas en *a* y *b* y aplicando en dichos puntos dos iguales y de sentido contrario, el cuerpo A se encontrará también en equilibrio bajo la acción de las fuerzas interiores originales en el sentido *a b* y las reacciones $-F_1$ y $-F_2$ que se desenvuelven en las articulaciones.

Se deduce, pues, que siempre que un sistema articulado esté en equilibrio, cada uno de los cuerpos que lo forman también lo está, considerando todas las fuerzas que sobre él actúan.

54. Si se consideran dos cuerpos A y B *(fig. 44)*, el sistema por ellos formado estará también en equilibrio bajo la acción de las fuerzas F y F′ y las reacciones que se originan en *b′* y *a*, y como el B se reduce también a una barra, se formará la línea poligonal *b′ b a* que estará también en equilibrio bajo la acción de las fuerzas.

Descompuestas la F y F′ en sus componentes aplicadas en *a*, *b* y *b′*, compuestas las que actúan en *b* y conocido el sentido de las reacciones en *b′* y *a*, a la línea poligonal *a b b′*, se la puede considerar como un polígono funicular de las fuerzas consideradas, de las que únicamente son desconocidas las reacciones en *a* y *b′*; luego para poder trazar el polígono de fuerzas correspondiente, es necesario que exista una relación determinada entre las dos figuras, es decir, que las dos figuras deben satisfacer a las condiciones de reciprocidad establecidas (43).

De lo anterior se deduce, que las condiciones a que deben satisfacer las figuras geométricas, son las siguientes:

1.ª Que cada lado pase por lo menos por dos vértices.

2.ª Que cada nudo comprenda por lo menos tres lados, y

3.ª Que, entre los sistemas de figuras cerradas que comprenda, exista por lo menos una cuyos lados formen parte de otras dos solamente.

Así, A B C D E F *(fig. 45)*, puede representar un sistema articulado, por cumplir las condiciones anteriores. En efecto, la figura considerada puede descomponerse en varios polígonos cerrados, pero entre todas estas descomposiciones, la que satisface a la 3.ª condición es, el polígono exterior y los seis interiores, puesto que cada lado A B, por ejemplo, forma parte solamente del polígono A B D E F y del triángulo *o* A B: lo mismo puede verse para otro lado cualquiera. Además la 1.ª y 2.ª condición quedan también satisfechas, puesto que cada lado pasa por dos vértices y en cada vértice concurren tres lados.

En el caso de estar formada la figura por el contorno cerrado A B C D (*fig. 46*) y las líneas que unen los vértices con los dos puntos *o* y *o'*, únicamente se pueden considerar los cuatro triángulos que tienen su vértice en *o'*, puesto que las figuras cerradas por ellos determinadas, cumplen las tres condiciones.

55. División de las figuras geométricas.—Las figuras geométricas se dividen en dos grupos: 1.º *Figuras deformables,* llamándose así a las figuras cuyos ángulos pueden variar conservando sus lados una longitud constante. 2.º *Figuras indeformables,* cuyos ángulos quedan determinados cuando se fijan las longitudes de sus lados.

Las figuras indeformables se clasifican a su vez en: 1.º *extrictamente indeformables* o *definidas de forma,* que son aquellas que dejan de ser indeformables cuando se suprime uno cualquiera de sus lados; y 2.º de *líneas sobrantes,* las que continúan siendo indeformables después de haberles suprimido uno o algunos de sus lados.

Así, por ejemplo, un cuadrilátero será una figura deformable, puesto que sin variar la longitud de sus lados ni su orden de colocación, se puede modificar el valor de sus ángulos: la figura formada por un cuadrilátero y una de sus diagonales, pertenece al 1.er grupo de las indeformables, puesto que dada la magnitud de las líneas, los valores de los ángulos quedan determinados: finalmente, la figura formada por un cuadrilátero y sus dos diagonales, es una figura de líneas sobrantes, puesto que se puede suprimir bien un lado o bien una diagonal sin que se modifiquen las posiciones de los lados restantes.

56. Condiciones que definen la naturaleza de las figuras geométricas.—Sea A B C D E (*fig. 47*), un polígono cualquiera: trazadas las diagonales correspondientes a un vértice cualquiera, tal como E, se le habrá descompuesto en triángulos. Si se considera la figura formada por los lados del polígono y las diagonales trazadas, se tiene una figura estrictamente indeformable, puesto que está constituída por una sucesión de triángulos que son estrictamente indeformables.

Por cumplir la condición anterior, el número de lados de la nueva figura será el justamente preciso para poderla construir, siendo su valor igual a la suma del número de lados primitivos y el de diagonales trazadas, o sea representando en general por m el total de lados y por n el de vértices,

$$m = n + n - 3 = 2n - 3$$

puesto que el número de lados de la figura considerada es igual al número de vértices y el de diagonales es igual á éste disminuído en tres unidades.

Suprimida la diagonal E B, por ejemplo, la figura estará entonces formada por un cuadrilátero y varios triángulos y como el cuadrilátero es una figura deformable, la figura que ha resultado será también deformable; en este caso el número de diagonales será $n - 2$ y como consecuencia $m < 2n - 3$.

En vez de suprimir una diagonal, se puede aumentar otra o varias, por ejemplo, la A C, la nueva figura estará formada por el cuadrilátero A B C E, con sus dos diagonales y varios triángulos y como el primero es una figura de líneas sobrantes, la total será de la misma clase: como el número de diagonales se ha aumentado en una, se tiene que $m > 2n - 3$.

57. Sea, en general, una figura formada por una sucesión de M triángulos (*fig. 48*), cuyos lados son conocidos. Desde luego la figura será estrictamente indeformable y para establecer la relación que existe entre el número de lados y el de vértices, basta tener en cuenta que, para trazar la figura, se necesitan, primero, tres lados para construir uno cualquiera de los triángulos, y segundo, que para trazar los restantes, únicamente se necesitan dos, es decir, que el total de lados será, representado por m dicho número,

$$m = 3 + 2\,(M - 1)$$

en cuanto al número de vértices será la suma de los tres del primer triángulo y uno para cada uno de los restantes, o sea

$$n = 3 + (M - 1)$$

y eliminando M entre estas dos ecuaciones, se tiene finalmente

$$m = 2\,n - 3.$$

Se deduce, pues, que la condición necesaria y suficiente para que una figura sea estrictamente indeformable, es, *que el número de lados sea igual al doble del número de vértices disminuido en tres unidades.*

Si el número de lados es menor que dicho número, la figura será deformable y si es mayor, será una figura de líneas sobrantes.

II. Momentos de fuerzas situadas en un plano

58. Representación gráfica del momento de una fuerza.— Se llama momento de una fuerza con relación a un punto de su plano, al producto del número que expresa su intensidad por la longitud de la perpendicular trazada por dicho punto a la dirección de la fuerza.

Si con arreglo a escala, se toma un segmento rectilíneo que represente la fuerza y con la misma escala se mide la distancia de su dirección al punto con respecto al cual se toma el momento, teniendo en cuenta lo que se dijo en el párrafo 11, se podrá obtener una magnitud rectilínea que represente el valor del momento, hallando una cuarta proporcional a las magnitudes que respectivamente representan la intensidad de la fuerza, su brazo de palanca y la unidad.

Así, si $a\,b$ representa la intensidad de la fuerza y o el punto con respecto al cual se toma el momento y $o\,d$ el brazo de palanca, tomando a partir del c, $c\,o_1$, igual á la unidad (*fig. 49*), y $o_1\,d = o\,c$ la magnitud A B, de la paralela a $a\,b$ trazada por d e interceptada por las líneas $o_1\,a$ y $o_1\,b$, representará geométricamente el momento de la fuerza con respecto al punto o_1 puesto que los triángulos semejantes $o_1\,a\,b$ y o_1 A B dan la relación

$$\frac{a\,b}{c\,o_1} = \frac{\mathrm{A\,B}}{d\,o_1} \quad \text{de la cual} \quad \mathrm{A\,B} \times c\,o_1 = a\,b \times d\,o_1$$

$$\text{y como} \quad c\,o_1 = 1 \quad \text{y} \quad a\,b \times d\,o_1 = \mathrm{M}^t_o\,\mathrm{F}$$

$$\text{resulta} \quad \mathrm{A\,B} = \mathrm{M}^t_o\,\mathrm{F} \quad \text{o bien} \quad \mathrm{A\,B} \times 1 = \mathrm{M}^t_o\,\mathrm{F}.$$

Esto prueba que la magnitud A B, se puede considerar como la intensidad de una fuerza que, obrando con un brazo de palanca igual á la unidad, produzca el mismo efecto que la fuerza considerada F, obrando con un brazo de palanca $o\,o_1$

Se ha supuesto para la demostración anterior, que tanto las fuerzas como las distancias están medidas con la misma escala, pero no es necesario que tengan la misma unidad de medida, aparte de no ser conveniente por la excesiva dimensión que tomará el dibujo a poco considerable que fuese la intensidad de la fuerza; en efecto, si se toma $a\,b$ en la escala $\frac{1}{m}$ y la $o_1\,d$ en la $\frac{1}{n}$ se tendrá

$$\frac{\dfrac{a\,b}{m}}{\dfrac{c\,o_1}{n}} = \frac{\dfrac{\mathrm{A\,B}}{m'}}{\dfrac{d\,o_1}{n}}$$

de donde

$$\frac{A\,B}{m} \times \frac{c\,o_1}{n} = \frac{a\,b}{m} \times \frac{d\,a_1}{n}$$

luego para que el producto sea homogéneo, es preciso que $m' = m$, o lo que es lo mismo, que midiendo A B en la misma escala que $a\,b$, siempre A B representará el momento pedido.

59. Procedimiento general para la determinación gráfica del momento de una fuerza.—El procedimiento que se acaba de exponer, para la representación gráfica del momento, es muy sencillo, pero en las aplicaciones de la Estática gráfica, es aún más cómodo proceder del siguiente modo:

Sea F *(fig. 50)*, la línea de acción de la fuerza considerada y o el punto con respecto al cual se quiere hallar el momento. Trazado el polígono de las fuerzas, que en este caso se reduce a la magnitud $a\,b$, que expresa la intensidad y sentido de la fuerza considerada y elegido el polo o, se tendrá el polígono funicular correspondiente A c B; si se traza ahora por el punto O, una paralela a la línea de acción de F, el segmento $m\,n$, interceptado por el lado A c y la prolongación del B c, multiplicado por la distancia polar $o\,d$, representa en magnitud y signo el momento de la fuerza con respecto al punto O.

En efecto, siendo semejantes los triángulos $m\,c\,n$ y $a\,o\,b$, se tiene

$$\frac{m\,n}{\delta} = \frac{a\,b}{o\,d} \quad \text{de donde} \quad a\,b \times \delta = m\,n \times o\,d$$

y como $a\,b$ representa la intensidad de la fuerza y δ el brazo de palanca, el producto $a\,b \times \delta$ será el momento con respecto a o; se tiene pues,

$$M_o^t\,F = m\,n \times o\,d$$

Si no varía la posición del O, el valor del momento tampoco variará, y como $m\,n$ y $o\,d$ cambian de valor con el polo elegido, es necesario probar que para un mismo punto o el producto del segmento interceptado por los lados del polígono funicular por la distancia polar, es siempre el mismo cualquiera que sea el polo considerado. Esto es evidente, puesto que al comparar los triángulos semejantes que se forman, darán siempre, para valor del producto considerado, el producto $a\,b \times \delta$, que permanece constante.

Si se emplean distintas escalas para las fuerzas y las longitudes, $m\,n$ deberá medirse en la escala de las fuerzas a fin de que el producto $m\,n \times o\,d$ sea homogéneo con el momento, y si se hace $o\,d = 1$, la reprentación del momento será $m\,n$.

Para que el signo del momento quede siempre determinado, hay que establecer los dos convenios siguientes: 1.º se considerará a $m\,n$ como positivo cuando tenga el mismo sentido que la fuerza y como negativo cuando se cuente en sentido contrario; y 2.º el signo de la distancia polar $o\,d$ será contrario al del momento de $a\,b$ con relación a o. Así, para el punto O, $m\,n$ es positivo, y $o\,d$ positivo, luego el momento será positivo; para el punto O$'$, $m'\,n'$ es negativo y como $o\,d$ es positivo, el $M^t_0\,F < O$; finalmente, si el punto es o'', como $m''\,n'' < o$ y $o\,d > o$, el momento será negativo.

60. Momento de fuerzas concurrentes.—1.^{er} *caso.*—Sea primero, el caso de dos fuerzas F_1 y F_2, concurrentes en los límites del dibujo: construído el polígono de las fuerzas, se encontrará *(fig. 51)* $a\,b$ que da la intensidad y dirección de la resultante, cuya línea de acción será la C R.

El momento de las fuerzas con relación al punto o, es el mismo que el momento de su resultante R con relación al referido punto, luego el caso presente se reduce al anteriormente considerado.

Si se toma como polo el vértice 12, el valor del momento se obtendrá multiplicando la magnitud $m\,n$ por la distancia $12 - e'$.

Si se elige el punto o, situado a la unidad de distancia de $a\,b$, como polo, se tendrá en $m'\,n'$ el valor del momento, habiéndose hecho la construcción expuesta en el párrafo ya citado, siendo preciso ahora demostrar que

$$m\,n \times (1\,2 - e') = m'\,n' \times o\,e.$$

Para ello se tiene, que, por la primera construcción,

$$m\,n \times (1\,2 - e') = a\,b \times \delta$$

siendo δ la distancia del punto o, con respecto al cual se toman los momentos.

Por la segunda construcción

$$m'\,n' \times o\,e = a\,b \times \delta,$$

luego se tendrá que verificar la igualdad

$$m\,n \times (1\,2 - e') = m'\,n' \times o\,e$$

y como $o\,e$ se toma igual á la unidad, resulta

$$m\,n \times (1\,2 - e') = m'\,n' \times u.$$

Si en lugar de hacer $o\,e = u$ se toma una magnitud cualquiera, esto es, si el polo o es uno cualquiera del plano, el momento de las fuerzas dadas se obtendrá siempre multiplicando la magnitud $m\,n$, correspondiente al polígono funicular de o, por la distancia de éste a la dirección de la resultante, luego para deducir el momento de dos fuerzas concurrentes F_1, F_2 no es necesario determinar el punto de intersección de sus líneas de acción, bastando determinar un polígono funicular cualquiera y encontrar la magnitud $m'\,n'$ en la forma ya explicada.

Como siempre se verifica que

$$M_0^t\,R = - M_0^t\,F_1 + M_0^t\,F_2$$

y los momentos de F_1 y F_2 tienen por valores

$$M_0^t F_1 = 1 \times \delta_1 = - M \times a_1$$
$$M_0^t F_2 = 2 \times \delta_2 = M' \times a_2$$

representándose por δ_1 y δ_2 las distancias de *o* a la dirección de las fuerzas y por a_1 y a_2 las alturas de los triángulos *o a* (12) y *o b* (12), relativos á los lados 1 y 2, como

$$M_0^t R = m' n' \times o e$$

se tendrá, por ser constantes los productos $1 \times \delta$ y $2 \times \delta_2$,

$$m' n' \times o e = - M \times a_1 + M' \times a_2$$

2.º caso. Si se consideran varias fuerzas concurrentes, como el momento de dos cualesquiera de ellas es igual al momento de su resultante, así como el momento de esta resultante y otra cualquiera de las fuerzas que quedan, es igual al momento de la nueva resultante, y así sucesivamente, se deduce que para obtener el momento de un sistema de fuerzas concurrentes, se determina el polígono de las fuerzas y el funicular correspondiente a un polo cualquiera y el momento de la resultante con respecto al punto elegido, determinado en la forma expuesta en el caso primero, será el momento pedido.

61. Momento de un sistema de fuerzas paralelas.—Sean F_1, F_2, F_3 las fuerzas dadas *(fig. 52)*; trazado el polígono de las fuerzas y el funicular correspondiente al polo *o*, si se desea obtener el momento con respecto al punto O, trazada la *m n* y prolongados los lados extremos A *b* y B *d*, se tendrá en *m n* el valor del momento si la distancia polar *o c* es igual a la unidad.

En efecto, se sabe que el momento de un sistema de fuerzas es igual al momento de su resultante, y como aquél está formado por la suma de momentos, habrá que demostrar que

$$m n \times c o = M_0^t F_1 + M_0^t F_2 + M_0^t F_3$$

Siguiendo el método establecido para determinar el momento de una fuerza, se tiene, por ser constantes las alturas de los triángulos que tienen por vértice el punto o, y por bases 1, 2, etc.

$$M_0^t F_1 = n\, n_1 \times o\, c$$
$$M_0^t F_2 = n_1\, n_2 \times o\, c$$
$$M_0^t F_3 = n_2\, m \times o\, c$$

y sumando resulta

$$\Sigma M_0^t F = (n\, n_1 + n_1\, n_2 + n_2\, m)\, o\, c = m\, n \times o\, c$$

luego queda demostrado lo que se quería.

Si el punto o estuviese entre las líneas de acción de las fuerzas, teniendo presente el sentido de los momentos, fácilmente se llegaría al mismo resultado.

62. Caso particular de dos fuerzas paralelas e iguales.— En este caso el polígono funicular tiene sus lados extremos paralelos, lo que da un punto en el infinito para aplicación de la resultante; pero como el momento de ésta ha de ser igual al de las fuerzas que forman el sistema, aplicando a cada una lo expuesto, se tiene (*fig. 53*)

$$\left.\begin{matrix} M_0^t F_1 = (+\, m\, n_1) \times o\, e \\ M_0^t F_2 = (-\, n\ \ n_1) \times o\, e \end{matrix}\right\} \Sigma M_0^t F = -\, m\, n \times o\, e,$$

luego el momento se obtiene siguiendo la regla general.

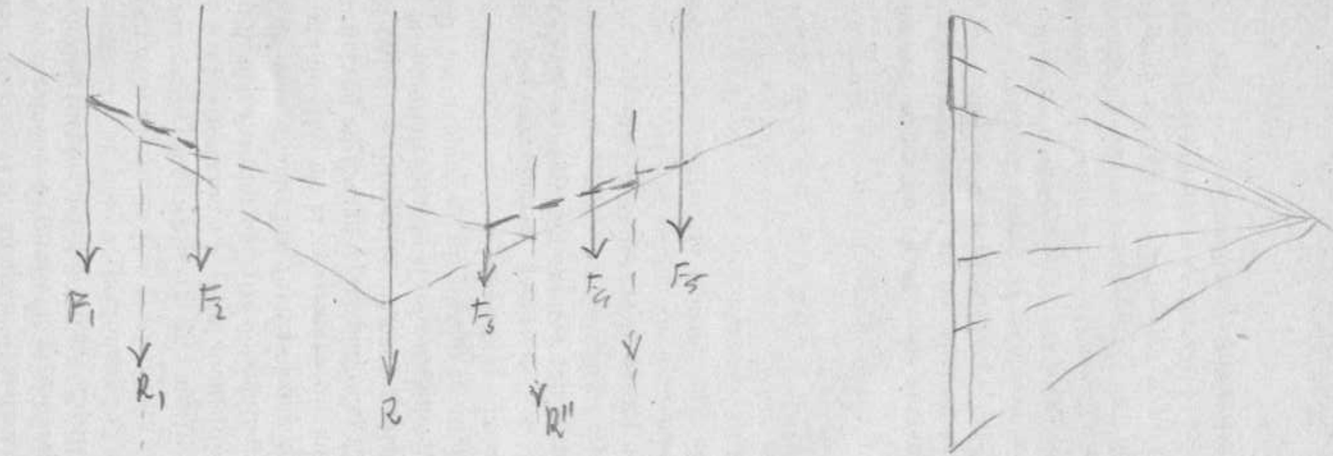
63. Momento de fuerzas situadas de un modo cualquiera en un plano.—Por estar situadas en un plano, dos cualquiera de ellas podrán cortarse, la resultante de estas podrá cortar a otra cualquiera o ser paralela; la nueva resultante estará también en uno de los casos anteriores y como ya se ha demostrado (60 y 61) la manera de determinar los momentos en cada caso y se sabe que el momento de la resultante es siempre igual a la suma de los momentos de las componentes, resulta que bastará encontrar el momento de la resultante, siguiendo el procedimiento establecido.

Así (*fig. 54*), el momento del sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 con relación al punto O, se obtendrá trazando el polígono de las fuerzas *a* 1 2 3 4 6 y el funicular A *c d e f* B correspondiente al polo *o*: prolongando los lados extremos se tiene en *h* un punto de R y trazada ésta y O *n* paralela a ella, se encontrará el segmento *m n* que multiplicado por la distancia de *o* a la dirección *a b*, da el momento pedido.

La figura anterior permite determinar los momentos parciales de cada una de las fuerzas consideradas, puesto que cada una de ellas es la resultante de las tensiones que se desenvuelven en los lados del polígono funicular.

En todos los diferentes casos estudiados, se tendrá presente la sencilla regla de signos establecida.

Descomponer una fuerza en 5



CAPÍTULO V

DETERMINACIÓN GRÁFICA DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES

I. Centro de fuerzas paralelas

64. Consideraciones generales. —Se sabe por Mecánica, que el *centro de gravedad* de un cuerpo, es el punto ideal por el cual pasa constantemente la resultante de las acciones ejercidas por la pesantez, sobre los diversos puntos materiales que constituyen el cuerpo considerado, independientemente de la posición que este ocupe en el espacio.

La definición anterior ha sido establecida en la hipótesis de considerar como líneas paralelas, a las verticales que pasan por los diferentes puntos del cuerpo, en dirección de las cuales se ejerce la acción de la gravedad: esta hipótesis se puede admitir como exacta cuando las dimensiones de los cuerpos no sean exagerados, como ocurre con los que se emplean en la práctica.

El centro de gravedad, tal como se acaba de definir, puede ó no pertenecer al cuerpo considerado, siendo dependiente de la forma que éste afecte, pero siempre ocupa la misma posición con respecto a las diferentes partes que lo integran, cualquiera que sea la inclinación o giro que se le dé, es decir, que el centro de gravedad es siempre un mismo punto.

De las consideraciones anteriores se deduce que la determinación gráfica del centro de gravedad de un cuerpo, se puede efectuar mediante los principios de Estática gráfica, puesto que el problema se reduce a encontrar el punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas, que actúan sobre los demás puntos de un sistema material invariable.

65. Determinación del centro de un sistema de fuerzas paralelas.—Cuando se tienen varias fuerzas paralelas, actuando sobre diferentes puntos materiales invariablemente unidos entre sí, su resultante pasa constantemente por un punto que goza de la propiedad de ser siempre el mismo, cualquiera que sea la posición de la directriz de las líneas de acción de las fuerzas, denominándose por esta razón, *centro del sistema de fuerzas paralelas* considerado.

Esta importante propiedad es general para cualquier sistema de fuerzas paralelas; por lo tanto, es aplicable aun cuando parte de las fuerzas actúen en sentido contrario a las demás, así como también en el caso de que los puntos de aplicación no estén sobre un mismo plano.

a) Sean primero, dos fuerzas paralelas del mismo sentido y de intensidad conocida, cuyas líneas de acción F_1 y F_2 *(fig. 54)*, pasan por los puntos *a* y *b* invariablemente unidos entre sí. Aplicando lo establecido en el caso 2.° del párrafo 20, o bien por lo expuesto en el 1.° del 48, se obtendrá fácilmente la resultante, cuya línea de acción R corta á la recta *a b* en el punto *c*, que la divide en los segmentos *a c* y *c b* inversamente proporcionales a las intensidades de las fuerzas.

Si se supone que las líneas de acción de las fuerzas, giran un mismo ángulo α alrededor de los puntos de aplicación *a* y *b*, permaneciendo paralelas, el punto en que la línea de acción de la resultante corta a la transversal *a b*, tendrá que ser el mismo punto *c* anteriormente encontrado, puesto que la intensidad de las fuerzas no se ha modificado y los segmentos que la nueva resultante determina sobre *a b*, han de guardar la misma relación que antes de haber dado el giro a las fuerzas.

Si en lugar de modificar la dirección de las fuerzas, se cambia la posición de la recta *a b*, sobre cuyos extremos siguen actuando las mismas fuerzas paralelas anteriores, el punto *c*, en que la resultante corta a dicha recta, permanece sobre ella invariable, puesto que los segmentos *a c* y *c b*, han de estar en relación inversa de las intensidades de las fuerzas y estas no han variado.

Resulta, pues, que el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas consideradas, es invariable en el caso que se estudia.

Como se ha de verificar que

$$\frac{F_2}{a\,c}=\frac{F_1}{b\,c} \quad \text{o bien} \quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{b\,c}{a\,c},$$

si se modifican las intensidades de las fuerzas de modo que su relación permanezca invariable, el punto de aplicación de la resultante tampoco variará: en el caso de que las fuerzas sean iguales, el punto *c*, será el punto medio de la recta *a b*.

La relación anterior, pone también de manifiesto que si, sobre la recta *a b*, y en el plano de las fuerzas, se construye el triángulo *a d b*, de modo, que los lados *a d* y *d b* sean respectivamente proporcionales a F_2 y F_1, la recta *d c* será la bisectriz del ángulo *a d b*.

Esta propiedad, a la vez que indica un nuevo procedimiento para la determinación gráfica del punto *c*, expresa la invariabilidad de su situación sobre la recta *a b* cuando únicamente se modifica la dirección de las fuerzas.

b) En el caso de que las dos fuerzas paralelas tengan sentidos diferentes, repitiendo cuanto se acaba de decir, se vería fácilmente que su centro era invariable, pudiendo aplicarse también a este caso la última demostración, por lo que se vería, que el punto de aplicación de la resultante se determina por la intersección de la bisectriz del ángulo exterior en *d* con la prolongación de la recta *a b*, porque en este caso los segmentos son substractivos.

En el caso particular de que las dos fuerzas consideradas sean de la misma intensidad, como forman un par, su centro estará en el infinito.

c) Sean, ahora, tres fuerzas F_1, F_2 y F_3, cuyas líneas de acción son paralelas, pudiendo tener las tres el mismo sentido o una de ellas sentido diferente de las otras dos: estas fuerzas, obran sobre tres puntos invariablemente unidos entre sí, los cuales pueden o no estar en línea recta. Según lo que se acaba de exponer, es evidente que el centro de dos fuerzas cualesquiera, las F_1 y F_2, por ejemplo, es invariable cualquiera que sea la dirección de las líneas de acción de ellas, con la condición de permanecer paralelas y no modificarse su intensidad: si se compone esta primer resultante con la F_3, es también cierto que no variará el valor de la nueva resultante ni su punto de aplicación, cuando se modifique la dirección general de las líneas de acción, dentro de las condiciones establecidas, y como la última resultante lo es también del sistema de fuerzas paralelas considerado, se deduce que su centro permanece invariable.

La demostración anterior fundamentada sobre principios, racionales, se puede también establecer del siguiente modo:

Sean A, B y *c* (*fig. 55*), los puntos invariablemente unidos entre sí, a que están aplicadas las tres fuerzas consideradas y cuyas líneas de acción son F_1, F_2 y F_3; componiendo las dos primeras darán la resultante R_1 aplicada al punto *a* de la recta A B, de modo que los dos segmentos *a* B y *a* A cumplan con la condición:

$$\frac{F_1}{a\mathrm{B}} = \frac{F_2}{a\mathrm{A}} \quad \text{de la que se deduce} \quad \frac{F_1 + F_2}{F_2} = \frac{\mathrm{A\,B}}{a\mathrm{A}}$$

Encontrando, ahora, la resultante de R_1 y F_3, se obtiene la R, resultante final, que obrará sobre el punto *o*, de la recta *a* C, a la que divide en los segmentos *o a*, y *o* C que cumplen con la igualdad

$$\frac{R_1}{o\,\mathrm{C}} = \frac{F_3}{o\,a} \quad \text{de la que se deduce} \quad \frac{F_3}{F_1 + F_2} = \frac{o\,a}{o\,\mathrm{C}}$$

Para demostrar que el punto *o*, permanece invariable cualquiera que sea el orden establecido para la composición de las fuerzas consideradas, basta probar que uniendo el punto *o*, con el A, la recta *o* A prolongada, determina sobre el lado C B dos segmentos *b* B y *b* C, que cumplen con la condición

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{b\,B}{b\,C}$$

y para ello, considerando el triángulo *a* B C, cortado por la transversal A *b* se tiene la expresión

$$\frac{A\,B}{a\,A} \cdot \frac{o\,a}{o\,C} \cdot \frac{b\,C}{b\,B} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{A\,B}{a\,A} \cdot \frac{o\,a}{o\,C} = \frac{b\,B}{b\,C}$$

y sustituyendo en el primer miembro, en lugar de las relaciones $\frac{A\,B}{a\,A}$ y $\frac{o\,a}{o\,C}$ sus iguales en función de las fuerzas y suprimiendo factores comunes, se obtiene la relación

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{b\,B}{b\,C}.$$

luego si se hubiese compuesto primero F_2 y F_3 y su resultante F_1, el punto *o* sería el mismo.

De un modo análogo se vería que el punto *o* permanece constante cuando se hiciera la composición de F_1 y F_3 y la de esta resultante y la F_2. Claro es, que si giran las fuerzas dadas un mismo ángulo alrededor de su punto de aplicación de modo que sus líneas de acción sigan siendo paralelas, aun cuando no estén en un mismo plano, su centro no habrá variado sobre el plano que determinan los puntos de aplicación.

d) Cuando el número de fuerzas sea superior a tres, puede suceder que todos los puntos de aplicación estén sobre un mismo plano o que se encuentren sobre planos diferentes.

Si los puntos sobre que actúan las fuerzas están situados sobre un plano, el centro estará sobre él, puesto que agrupando las fuerzas tres a tres, los centros parciales permanecen invariables según se ha visto (e), sobre el plano, luego el centro del conjunto total tampoco variará sobre dicho plano.

Si los puntos de aplicación se hallan en diferentes planos, es fácil demostrar que el centro de las fuerzas paralelas considerado permanece invariable. En efecto; sean, primero, cuatro fuerzas, cuyas líneas de acción son F_1, F_2, F_3 y F_4 *(fig. 56)* que actúan constantemente sobre los puntos A, B, C y D, que no están sobre un mismo plano, pero se encuentran a distancias invariables entre sí; uniendo estos puntos, se tiene el tetraedro A B C D, sobre cuyas caras A B D se determinará como se ha expuesto anteriormente el centro *d* de las fuerzas F_1 F_2 y F_3 que obran en los vértices A, B y D de dicha cara, así como sobre la recta *d* C se encontrará el punto O de aplicación de la resultante final R; este punto O es el centro del sistema de fuerzas considerado, siendo ahora preciso demostrar que es siempre el mismo, cualquiera que sea el orden de composición que se establezca. Para fijar el punto *d*, se ha unido *a*, centro de las fuerzas F_1 y F_2 con D, por lo cual la recta *d* C está situada en el plano *a* D C; uniendo el punto D con el punto O, la recta D O corta a la *a* C en un punto tal como el *d'* situado en la cara A C B, que es el centro de las fuerzas aplicadas en A, C y B: puesto que la recta D O es una transversal del triángulo *a d* C se tiene

$$\frac{F_4}{F_1 + F_2} = \frac{d'\,a}{d'\,C}$$

lo que prueba que habiendo compuesto primeramente las fuerzas F_1 F_4 y F_3, y luego la resultante de estas con la F_2 se hubiese obtenido el mismo punto O para centro del sistema. Además, la *d* C es intersección de los planos *b* B C y *a* D C y como el punto O se ha de encontrar sobre la recta B *d''*, situada en el plano *b* B C así como en el B D C, resulta que el centro O es el punto de intersección de los tres planos, *a* D C, *b* B C y B D C, cuya posición es invariable; luego el centro O es invariable.

Cuando el número de fuerzas sea grande, agrupándolas cuatro a cuatro, se obtendrían varias resultantes parciales cuyos puntos de aplicación permanecerían invariables y efectuando la misma operación con las resultantes parciales, se encontraría la resultante final cuyo punto de aplicación, o sea el centro de las fuerzas, ocuparía siempre el mismo lugar en el espacio.

e) En todos los casos que se acaban de estudiar, la aplicación de los principios de la Estática gráfica no ofrece dificultad, por tratarse solamente de relaciones entre magnitudes lineales.

66. Como las demostraciones establecidas en el número anterior son generales, se puede decir: que el centro de un sistema de fuerzas paralelas, aplicadas á un conjunto de puntos fijos situados de un modo cualquiera en el espacio, es invariable e independiente de la dirección general de las fuerzas, con tal de que estas tengan siempre la misma intensidad y estén aplicadas al mismo punto.

II. Centros de gravedad

67. Método general. —Puesto que los cuerpos materiales no son otra cosa que un conjunto de puntos materiales y la acción de la pesantez se puede considerar como un sistema de fuerzas paralelas, resulta que la determinación del centro de gravedad se reduce a encontrar el *centro* de un sistema de fuerzas paralelas, pero como el número de puntos materiales de un cuerpo es ilimitado, para la aplicación de los principios de la Estática será necesario reemplazar las acciones de la pesantez por un número finito de fuerzas paralelas que le sea equivalente.

En primer lugar hay que considerar que los cuerpos son rígidos y homogéneos, pues en el caso de que estas dos condiciones no se cumplan, se podrán descomponer en diferentes partes que las satisfagan. Además, que las líneas y superficies deben ser consideradas como materiales, esto es, formadas por puntos materiales, admitiéndose que la gravedad se ejerce sobre ellas en razón de sus dimensiones.

En segundo lugar, es necesario descomponer el cuerpo en diversas partes y reemplazar en cada una de ellas, la acción ejercida por la gravedad por una fuerza única que le sea equivalente, con lo cual el conjunto total de la acción de la pesantez queda reducido a un número limitado de fuerzas paralelas.

Finalmente, como los principios gráficos solamente pueden ser aplicados a los cuerpos geométricos, de estos será de los que se trate, puesto que en la práctica, los cuerpos que se emplean se aproximan siempre, bien en su totalidad o bien parcialmente, a aquéllos.

68. Según lo que se acaba de indicar, un cuerpo, cuyo volumen sea V, puede ser reemplazado por otro cuya suma de volúmenes sea igual al del primitivo, es decir, que se tendrá:

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

y como puede ocurrir que al adaptarse el cuerpo considerado a alguna de las formas geómetricas conocidas, habrá casos que se tendrá que considerar volúmenes substractivos, la expresión más general será:

$$V = v_1 + v_2 + v_3 \pm \ldots \pm v_n$$

Como cada uno de estos volúmenes parciales, corresponde a cuerpos geométricos conocidos, aplicando a sus centros de gravedad fuerzas proporcionales a la materia que contienen, que sean paralelas con una dirección cualquiera y del sentido que indique el signo correspondiente a cada volumen, el centro de gravedad del cuerpo considerado, será el centro de las fuerzas paralelas anteriores,

69. Centro de gravedad de las líneas.—**a**) *Línea recta limitada.*—En una recta limitada formada por puntos homogéneos, la acción de la gravedad actuará sobre cada uno de ellos con igual intensidad, por lo que el centro de las fuerzas paralelas que reemplazan á dichas acciones corresponde al punto medio de la recta considerada, de aquí el que el centro de gravedad de un trozo de línea recta está situado en su *punto medio.*

Puesto que la resultante de las fuerzas, no es otra cosa que el peso de la línea y su valor depende de la longitud, resulta que el peso de una línea es proporcional a su longitud, y para la determinación del centro de gravedad de un conjunto de varias líneas rectas, se podrán estas reemplazar por sus pesos correspondientes aplicados en sus puntos medios.

b) *Contorno poligonal.*—Reemplazando cada lado por una fuerza proporcional a su peso y que esté aplicada en su punto medio, el contorno dado será substituído por un sistema de fuerzas paralelas; componiendo estas por medio del polígono funicular, se tendrá la línea de acción de su resultante y su intensidad.

Si se hace ahora girar a todas las fuerzas un mismo ángulo alrededor de sus puntos de aplicación, de modo que sigan siendo paralelas y se vuelven a componer por el mismo procedimiento, se encontrará otra línea de acción para su resultante, que cortará a la anterior, por cortarse las fuerzas en las dos direcciones. Este punto de intersección de las dos líneas de acción es el centro de gravedad buscado.

Cuando el contorno sea regular o porción de polígono regular, se puede simplificar el procedimiento anterior. En efecto, sea A B C D E, (*fig. 57*), una porción de polígono regular; por ser simétrico con respecto al radio O C, el centro de gravedad se encontrará sobre esta línea, puesto que las acciones de la pesantez sobre los lados simétricos son iguales. Tomando los momentos de las fuerzas que reemplazan a los lados, con relación al eje A′ E′, que pasa por el centro del polígono y es paralelo a la cuerda A E, que cierra el contorno dado, se tiene

$$M^{to} R = \Sigma M^{to} F,$$

representando por R a la resultante y por F a una cualquiera de las fuerzas componentes: como F es proporcional a la longitud del lado, su momento será para el lado A B, por ejemplo, $A B \times m n$, cuyo producto es igual a $A r \times O m$, dada la semejanza de los triángulos $A B r$ y $m n O$; o sea, que el momento de una fuerza, correspondiente a un lado cualquiera, es igual a la proyección del lado sobre el eje multiplicada por la apotema a del polígono, luego para todo el contorno se tiene

$$\Sigma M^{to} F = a \times A E;$$

por otra parte, como la resultante es igual a la suma de las componentes y estas son proporcionales a los lados, R, será proporcional al perímetro p del contorno, por lo cual

$$M^{to} R = p \times O G$$

siendo G, el centro de gravedad. Igualando las dos últimas expresiones se tiene

$$p \times O G = a \times A E, \quad \text{de donde} \quad O G = \frac{a \times A E}{p}$$

que expresa la manera de encontrar gráficamente la magnitud O G.

Sobre la misma figura puede hacerse la construcción, trazando a partir de O y sobre O E′ prolongada, como cateto mayor, un triángulo rectángulo en O cuya hipotenusa $a d$ sea igual al perímetro p del contorno, a partir de a toma una magnitud $a b = A E$, y partiendo de O la $O d = a$, por la semejanza de los triángulos $a b c$ y $a d O$, se deduce

$$\frac{b c}{b a} = \frac{d O}{a d} \quad \text{de la que} \quad b c = \frac{a \times A E}{p},$$

es decir, que $b\,c$ es la distancia del punto O al centro de gravedad.

Trazada por b una paralela a a O, se tendrá en G el centro buscado.

c) *Línea curva.*—Si se inscribe sobre una línea curva un contorno poligonal cuyos lados sean tan pequeños como se pueda, el centro de gravedad de este contorno es el que se toma como correspondiente a la línea dada. Claro es, que este punto se aproximará tanto más al verdadero centro de gravedad, cuanto más se acerque la curva considerada a otra de desarrollo conocido.

Si la curva considerada es un arco de círculo, se puede determinar con gran exactitud su centro de gravedad. En efecto, sea el arco A B C, *(fig. 58)*, que corresponde a la circunferencia de centro O y radio r: como la longitud l del arco se puede encontrar, conocido que sea su valor gradual, se podrá aplicar lo establecido para el contorno poligonal, teniendo en cuenta que la apotema es el radio en el caso presente, por lo que

$$\mathrm{O\,G} \times l = r \times \mathrm{A\,C} \quad \text{o bien} \quad \mathrm{O\,G} = \frac{r \times \mathrm{A\,C}}{l}$$

por la cual se puede encontrar gráficamente el valor de O G, del mismo modo ya establecido.

En vez de hacer la construcción trazando por O una paralela a la cuerda, se puede trazar por el punto B, medio del arco A B C, una tangente y tomar sobre ella y a partir de B, en un sentido y en otro magnitudes equivalentes a los semiarcos B C y B A, uniendo los extremos de esta tangente así limitada con el punto O y proyectando sobre estos lados la cuerda C A, se tendrán dos triángulos semejantes en los cuales las bases son proporcionales a las alturas y se tendrá

$$\mathrm{O\,G} = \frac{r \times \mathrm{E\,E'}}{\mathrm{T\,T'}} = \frac{r \times \mathrm{A\,C}}{l}$$

Claro es que si solamente se toma sobre la tangente la magnitud $B\,T = \frac{1}{2}\,l$, se une T con O y sobre O T se proyecta C, y por E se traza la E G paralela a B T, el punto G será el centro de gravedad del arco, puesto que se tendrá

$$O\,G = \frac{r \times \frac{1}{2}\,A\,C}{\frac{1}{2}\,l} = \frac{r \times A\,C}{l}$$

Esta construcción es la que debe aplicarse en los casos prácticos, por la rapidez con que se efectúa.

Si el arco que se considera fuese media circunferencia, como su rectificación vale $\pi\,r$ y su cuerda $2\,r$, se tendrá

$$O\,G = \frac{r \times 2\,r}{\pi\,r} = \frac{2\,r}{\pi} = 0{,}636\,r.$$

d) *Líneas cerradas planas.*—El centro de gravedad del perímetro de un triángulo, no ofrece dificultad reemplazando cada lado por fuerzas que le sean proporcionales y que estén aplicadas en sus puntos medios, pero si se tiene en cuenta que la resultante de las fuerzas F_1 y F_3 *(fig. 59)*, que corresponden a los lados A B y A C, divide a la recta $c\,b$, que une los puntos medios de estos lados, en los segmentos $c\,m$ y $m\,b$ que cumplen con la condición

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{m\,b}{m\,c}$$

y que en el triángulo $c\,b\,a$, que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados, $c\,a = \frac{1}{2}\,A\,C$ y $a\,b = \frac{1}{2}\,A\,B$, la relación anterior se convierte en

$$\frac{a\,b}{a\,c} = \frac{m\,b}{m\,c}$$

por lo cual la recta $m\,a$, es bisectriz del ángulo en a; y como lo mismo se demostraría para las $b\,m'$ y $c\,m''$ que se obtienen uniendo b y c, respectivamente, con los m' y m'' en donde se aplican las otras resultantes parciales, resulta que el centro de gravedad del perímetro triangular corresponde al centro del círculo inscripto en el triángulo *a b c*, que se obtiene uniendo dos a dos los puntos medios de los lados.

Si se considera un polígono cualquiera, se le podrá descomponer en triángulos, cuyos centros de gravedad se encontrarán como se acaba de exponer; en cada uno de estos se supondrá aplicada una fuerza equivalente a la acción de la pesantez, las que se compondrán siguiendo el procedimiento general (caso **b** del párrafo 69) y de este modo se tendrá el centro de gravedad pedido.

En el caso de que la figura sea simétrica con respecto a un eje, sobre éste se ha de encontrar el centro de gravedad y si lo es con respecto a dos ejes, el centro de gravedad corresponde al punto de intersección. Cuando una figura tiene centro, ésta será el centro de gravedad.

70. Centro de gravedad de las superficies.—Dos casos se tienen que estudiar: 1.° que sean superficies planas y 2.° que sean curvas o poliedrales.

1.er caso.—**a**) *Superficie limitada por un perímetro triangular.*—Sea el triángulo A B C, (*fig. 60),* si se traza la mediana B*b*, relativa al lado A C, es evidente que dicha recta dividirá en partes iguales a todas las paralelas a dicho lado, es decir, que será un diámetro conjugado con relación a dichas paralelas; por otra parte, las áreas A B *b* y *b* B C son equivalentes, luego en el supuesto de considerar materializadas dichas superficies, el peso de cada una de ellas será idéntico, por lo cual, si se apoya el triángulo a lo largo de *b* B sobre una arista viva, permanecerá en equilibrio, o bien si se le suspende del vértice B, la vertical de este punto coincidirá con la B *b*, luego el centro de gravedad estará sobre esta línea.

Si se traza la mediana A *a*, relativa al lado B C, el centro de gravedad se tiene también que encontrar sobre ella, por consiguiente, el centro de gravedad de la superficie del triángulo considerado está en G, punto de intersección de las medianas; como $a\,b = \frac{1}{2}$ A B y G $a = \frac{1}{2}$ A G $= \frac{1}{3}$ A a, el centro de gravedad está sobre una de las medianas y a la tercera parte de su longitud a contar del lado.

Cuando el triángulo sea equilátero, el centro de gravedad de la superficie que comprende, coincide con su centro de figura, puesto que el punto de intersección de las medianas, equidista de los vértices y de los lados del triángulo.

b) *Superficie comprendida dentro de un polígono cualquiera.* Conocida la manera de encontrar el centro de gravedad del área de un triángulo cualquiera, fácilmente se encontrará el de una superficie limitada por un polígono, pues bastará descomponerle en triángulos, determinar sus centros de gravedad respectivos y aplicar a estos puntos fuerzas paralelas proporcionales a las superficies triangulares, la composición de estas fuerzas dará el centro de gravedad buscado.

El procedimiento general anterior, se puede simplificar en muchos casos, pues si las superficies son simétricas con relación a un eje, sobre éste se encontrará su centro de gravedad; si lo es con respecto a dos ejes, su punto de intersección será el centro de gravedad y si tiene centro con éste coincide el de gravedad.

Cuadrilátero.—Sean A B C D *(fig. 61)*, un cuadrilátero cualquiera; trazando la diagonal A C, quedará descompuesto en los dos triángulos A B C y A D C, cuyos centros de gravedad estarán, respectivamente, en g_1 y g_2, determinados como se ha dicho (**a**). Al aplicar a estos puntos fuerzas proporcionales a sus áreas, resulta que dichas fuerzas lo son también a las magnitudes B b y D d alturas de los triángulos y por consecuencia a B a y a D y a $g_1\,c$ y $g_2\,c$, luego bastará tomar g_2 G $= g_1\,c$, sobre la recta $g_1\,g_2$, para obtener el centro de gravedad G del cuadrilátero.

Trapecio.—Cuando el cuadrilátero sea trapecio se simplifica la construcción anterior. Sea A B C D *(fig. 62)*, el trapecio considerado; uniendo los puntos medios m y n de los lados paralelos, se tiene la recta $m\,n$ que es un diámetro, por lo que el centro de gravedad estará sobre esta línea; trazando la diagonal A C, queda la figura descompuesta en dos triángulos cuyos centros de gravedad, determinados como se ha dicho, serán g_1 y g_2, estando sobre la línea $g_1\, g_2$ el centro de gravedad buscado, a la vez que sobre la $m\, n$, dicho punto será el G intersección de estas dos líneas.

Se puede aún simplificar más la determinación del centro de gravedad del área de un trapecio, por las consideraciones siguientes. Si por los puntos g_1 y g_2 se trazan las rectas $g_1\, a$ y $g_2\, b$ paralelas a las bases, se tienen los triángulos semejantes G $a\, g_1$ y G $b\, g_2$ que dan la relación

$$\frac{\mathrm{G}\,a}{\mathrm{G}\,b}=\frac{a\,g_1}{b\,g_2}=\frac{\mathrm{A}\,m}{n\,\mathrm{C}}.$$

de la que se deduce, teniendo en cuenta las propiedades de las fraccionarias

$$\frac{\mathrm{G}\,a+2\,\mathrm{G}\,b}{\mathrm{G}\,b+2\,\mathrm{G}\,a}=\frac{\mathrm{D\,C}+\frac{1}{2}\,\mathrm{A\,B}}{\mathrm{A\,B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C\,D}}$$

Como los puntos g_1 y g_2 están sobre las medianas An y cm y a la tercera parte de ellas a contar de los lados DC y AB, respectivamente, las magnitudes an, y bm son la tercera parte de $m\, n$, y por lo tanto $a\, b = \frac{1}{3}$ por lo que

$$\mathrm{G}\,a+2\,\mathrm{G}\,b=\mathrm{G}\,m \text{ y } \mathrm{G}\,b+2\,\mathrm{G}\,a=\mathrm{G}\,n$$

y la anterior igualdad tomará la forma

$$\frac{\mathrm{G}\,m}{\mathrm{G}\,n}=\frac{\mathrm{D\,C}+\frac{1}{2}\,\mathrm{A\,B}}{\mathrm{A\,B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C\,D}}$$

luego si se prolonga el lado C D y se toma a partir de D, D A′ = A B y se hace lo mismo con el lado A B tomando en su prolongación y en opuesto sentido la magnitud B C′ = = D C, uniendo A′ con C′, se tendrán los triángulos semejantes G n A′ y G m C′ que dan la relación

$$\frac{G\,m}{G\,n}=\frac{m\,C'}{n\,A'}=\frac{D\,C+\frac{1}{2}\,A\,B}{A\,B+\frac{1}{2}\,C\,D}$$

es decir, que el punto de intersección de A′ C′ con la $m\,n$ es el centro de gravedad de la superficie del trapecio.

Sector poligonal regular.—El centro de gravedad de O A B C D (*fig. 63*) se obtendrá descomponiéndolo en triángulos que tengan su vértice en O y como el centro de gravedad de estos triángulos está sobre una mediana tal como la $o\,m$ y a la tercera parte de su longitud a partir de m, resulta que todos los centros equidistarán de O; si por ellos se trazan paralelas a los lados del contorno poligonal, se tendrá el $a\,b\,c\,d$ que también será regular en cuyos lados y en sus puntos medios se tienen que aplicar fuerzas proporcionales a las superficies de los triángulos primitivos. Luego para encontrar su centro basta determinar el centro de gravedad del contorno poligonal $abcd$ en la forma ya explicada (69, *b*.)

c) *Superficies comprendidas en un perímetro formado por arcos de círculo y radios o cuerdas.*

Sector de círculo.—Como la demostración anterior es cierta, cualquiera que sea el número de lados del contorno poligonal, subsistirá cuando los lados sean tan pequeños que se confundan con el arco de circunferencia cuyo radio sea O D, por lo que el centro de gravedad del sector considerado coincidirá con el del arco comprendido por los lados y trazado desde el mismo centro con un radio igual a los dos tercios del radio del sector. Así, el centro de gravedad del sector A O B (*fig. 64*), coincidirá con el del arco $a\,c\,b$ trazado con el radio O $c = \frac{2}{3}$ O C; aplicando a este arco la construcción de la figura 58, se tendrá el punto pedido.

Si previamente se hubiese trazado el centro de gravedad del arco A C D, como

$$O\,G_1 = \frac{r \times A\,B}{l} \quad \text{y para} \quad O\,G = \frac{\frac{2}{3} r \cdot \frac{2}{3} A\,B}{\frac{2}{3} l} = \frac{2}{3} \frac{r \times A\,B}{l}$$

resulta, que tomando desde O y sobre el radio medio

$$O\,G = \frac{2}{3} O\,G_1,$$

se tendrá en G el centro de gravedad del sector.

El de un semicírculo será, pues,

$$O\,G = \frac{2\,r \times 2\,r}{3 \quad \pi\,r} = \frac{4\,r}{3\,\pi} = 0{,}484\,r.$$

Segmento de círculo.—Sea el segmento A C B (*fig. 65*), por ser simétrico con relación al radio O B perpendicular a la cuerda A C, el centro de gravedad estará sobre dicho radio; por otra parte, dicho segmento es la diferencia entre el área del sector O A B C y la del triángulo O A C, cuyos centros de gravedad respectivos, también están situados sobre el radio O B; determinados estos últimos centros como se ha expuesto anteriormente, se tendrán los puntos g_1, para el triángulo y g_2 para el sector. Si se aplican a estos últimos puntos fuerzas paralelas proporcionales a las áreas respectivas, y de sentido contrario, el problema queda reducido a fijar sobre el radio O B, un punto, tal como el G que cumpla con la condición

$$\frac{G\,g_1}{G\,g_2} = \frac{\frac{1}{2} \quad r\,l}{\frac{1}{2} r \times a\,A}$$

representándose por r el radio y l la longitud del arco del sector: como $\frac{1}{2} l$ es el arco A B y $\frac{1}{2}\, a$ A es la longitud O a' la expresión anterior toma la forma

$$\frac{G\,g_1}{G\,g_2}=\frac{\text{arco BC}}{O\,a'}$$

luego si sobre O B y a partir de g_1 se traza la perpendicular $g_1\,c=$ arc B C y en g_2 la perpendicular $g_2\,b=O\,a'$, al unir los puntos b y c, la intersección de la recta $b\,c$ con C B determinará el punto G, centro de gravedad buscado, puesto que los triángulos $G\,g_1\,c$ y $G\,g_2\,b$, dan la relación

$$\frac{G\,g_1}{G\,g_2}=\frac{g_1\,c}{g_2\,b}=\frac{\text{arco BC}}{O\,a'}$$

Area comprendida entre dos círculos concéntricos y dos radios.—Como el área circular A B C D (*fig. 66*) es la diferencia de los sectores O A B y O D C y además, es una superficie simétrica con relación al radio medio O *o*, el problema se reduce por las mismas consideraciones establecidas para el segmento, a encontrar sobre el radio O *o*, un punto G que satisfaga a la relación

$$\frac{G\,g_2}{G\,g_1}=\frac{\frac{1}{2}\,O\,A\times\text{arco A B}}{\frac{1}{2}\,O\,D\times\text{arco D C}}$$

siendo g_1 y g_2 los centros de gravedad respectivos de cada uno de los sectores y como los arcos de estos son proporcionales a los cuadrados de los radios,

$$\frac{G\,g_2}{G\,g_1}=\frac{\overline{O\,A}^2}{\overline{O\,D}^2}\ ;$$

pero si se une A con *o* y se traza por D la D *a* paralela a A *o*, los triángulos *o* A O y O D *a* por ser semejantes y tener el lado *o* O = O D, dan

$$\overline{O\,D}^2=O\,A\times O\,a$$

por lo que

$$\frac{G\,g_2}{G\,g_1}=\frac{O\,A}{O\,a}$$

es decir, que tomando sobre la perpendicular al radio medio y a partir de g_2, una magnitud $g_2\, b = \mathrm{O\,A}$ y desde g_1, y en las mismas condiciones, la $g_1\, c = \mathrm{O}\, a$, la recta $b\, c$ cortará al radio O o en el punto G, que es el centro de gravedad buscado.

Area comprendida por un triángulo mixtilíneo formado por dos arcos de círculo y una recta.—El centro de gravedad de la figura A C B *(fig. 67)* que es simétrica con respecto a la perpendicular *B b* al lado A C, estará sobre esta línea; el centro de gravedad del área comprendida en el triángulo mixtilíneo A B b, diferencia entre el área del sector O B A y el triángulo O B b, se hallará, aplicando a los centros de gravedad g_s y g_t de estas dos figuras fuerzas proporcionales a sus áreas. Como el centro de gravedad G tiene que estar sobre la recta $g_s\, g_t$ de modo que cumpla la relación

$$\frac{\mathrm{G}\, g_t}{\mathrm{G}\, g_s} = \frac{\text{área sector}}{\text{área triángulo}}$$

tomando por base del triángulo el radio O B, la relación anterior tomará la forma

$$\frac{\mathrm{G}\, g_t}{\mathrm{G}\, g_s} = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\, a\, \mathrm{B}}{\frac{1}{2}\, b\, c}$$

luego tomando desde g_t, y sobre una recta cualquiera, una longitud $g_t\, n$ igual a la rectificación del arco a B y sobre una paralela trazada por el punto g_s la $g_s\, m = \frac{1}{2}\, b\, c$, la $m\, n$ determinará sobre $g_s\, g_t$ prolongada el punto G, que es el centro de gravedad del triángulo A b B; como el triángulo C b B es simétrico del anterior, su centro de gravedad estará sobre la perpendicular trazada por G al eje de simetría b B y a la misma distancia de él, pero no es necesario determinarlo, porque el centro que se busca, será el punto en que la perpendicular corta al eje.

Area comprendida por un arco de parábola y su cuerda.— Sea A B C (*fig. 68*), el segmento considerado, trazando el diámetro B X conjugado a la cuerda A C; sobre él se encontrará el centro de gravedad. Si se considera un elemento diferencial *a b*, y se toman los momentos con relación al eje B Y, se tendrá, suponiendo que G es el centro de gravedad,

$$\mathrm{G\,B} \times \text{área}\ \mathrm{ABC} = \Sigma \mathrm{X} \times \text{área}\ a\,b \ \text{de donde}\ \mathrm{GB} = \frac{\Sigma \mathrm{X} \times \text{área}\ a b}{\text{área}\ \mathrm{A\,B\,C}}:$$

como la ecuación de la curva con respecto a los ejes considerados es

$$y^2 = 2\,p\,x$$

el área del elemento *a b* será $2\sqrt{2\,p\,x} \times d\,x$, así como el área total $2\int\sqrt{2\,p\,x} \times d\,x$; por tanto

$$\mathrm{G\,B} = \frac{2\int x\,d\,x\sqrt{2\,p\,x}}{2\int d\,x\sqrt{2\,p\,x}} = \frac{\int x^{\frac{3}{2}}\,d\,x}{\int x^{\frac{1}{2}}\,d\,x} = \frac{3}{5}x + \mathrm{C}$$

y efectuando la integración entre los límites 0 y B D, se tiene

$$\mathrm{G\,B} = \frac{3}{5}\,\mathrm{B\,D}$$

siendo, por lo tanto, fácil determinar el punto G.

2.º caso. Superficies poliedrales y curvas.—Sabiendo determinar, por el caso anterior, el centro de gravedad de una superficie limitada por un polígono cualquiera, el correspondiente a una superficie poliedral será fácil de obtener, aplicando a los centros de gravedad de las caras que la forman fuerzas paralelas proporcionales a las superficies de dichas caras, porque el centro de este sistema de fuerzas es el de gravedad de la superficie considerada.

En el caso de una superficie curva, se la sustituye por una poliedral inscrita en aquélla, cuyo número de caras sea el mayor posible y el centro de gravedad de esta nueva superficie se aproximará tanto más al de la dada, a medida que el número de caras sea mayor.

Este procedimiento general se simplifica en muchos casos, teniendo presente que en las superficies que tengan eje o plano de simetría, sobre estas se ha de encontrar el centro de gravedad, y si tienen dos elementos de estos, dicho punto se encontrará en su intersección.

Superficie lateral de una pirámide regular.—Sea A B C D E (*fig. 69*) una superficie regular de base cuadrada; como sus caras laterales son triángulos, sus centros de gravedad respectivos estarán sobre las medianas relativas a los lados de las bases, a los dos tercios a contar desde el vértice de la pirámide; pero todas las caras son iguales y tienen la misma inclinación sobre las bases, luego todos los centros de gravedad de las caras estarán sobre un mismo plano que será paralelo a la base, debiendo, por lo tanto, encontrarse sobre él, el centro de gravedad pedido. Por otra parte, la altura A O, de la pirámide, es un eje de simetría, por lo que en él también se ha de encontrar el centro de gravedad. De esto se deduce que el centro G, se encontrará en la intersección de la altura con el plano que contiene los centros g de las caras y como este plano determina sobre las aristas laterales segmentos proporcionales a $g\ a$ y g A, sobre la altura A O, también determinará los segmentos G O y G A, que guarden la misma relación, es decir, que G O, será la mitad de G A. Se tiene, pues, que el centro de gravedad del área lateral de una pirámide regular se encuentra sobre su altura y a la tercera parte de su longitud contada desde la base.

Superficie lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas.—La superficie lateral de esta figura (*fig. 70*) está formada por trapecios iguales, que forman el mismo ángulo con la base. El centro de gravedad g de uno cualquiera de estos trapecios, B B′ C′ C, está situado sobre la recta $a\ b$ que une los puntos medios de los lados paralelos y ha de dividir a dicha recta en la relación

$$\frac{g\,b}{g\,a} = \frac{a + \frac{1}{2}\,b}{b + \frac{1}{2}\,a}$$

de la que se deduce que

$$g\,b = a\,b\,\frac{2\,a + b}{3\,(a + b)},$$

es decir, que el punto g se encuentra a una distancia de la base expresada por la relación $\frac{2\,a + b}{3\,(a + b)}$. Como los demás trapecios son idénticos, todos sus centros de gravedad se encontrarán también a igual distancia de sus bases respectivas, por cuya razón se encuentran sobre un mismo plano paralelo a la base. Por otra parte, el eje O O′ es de simetría, debiendo, por lo tanto, encontrarse sobre él el centro de gravedad, por lo que dicho punto será la intersección de dicho eje con el plano que contiene a los centros de gravedad de las caras. Si g es el punto de intersección, la G g es paralela a la O′ b, así como a la a O, por lo que se tendrá la igualdad

$$\frac{\mathrm{G\,O'}}{\mathrm{G\,O}} = \frac{g\,b}{g\,a} = \frac{a + \frac{1}{2}\,b}{b + \frac{1}{2}\,a} \quad \text{o bien que} \quad \mathrm{G\,O'} = \mathrm{G\,O}\,\frac{2\,a + b}{3\,(a + b)}$$

luego el centro de gravedad de la superficie lateral considerada, se encuentra sobre la recta O O′ que une los centros de las bases y a una distancia de la inferior dada por la relación

$$\frac{2\,a + b}{3\,(a + b)}$$

Como el valor numérico de esta última relación no varía cuando sus términos se multiplican por un mismo factor, si éste es igual al número de lados de las bases, *4* en este caso que se considera, la relación citada toma la forma

$$\frac{2a+b}{3(a+b)}=\frac{2p'+p}{3(p'+p)}$$

representando por p el perímetro de la base mayor y por p' el de la menor.

Superficie de un cono de revolución.—Como el cono de revolución puede considerarse como una pirámide regular de infinito número de caras, se le podrá aplicar lo establecido para esto, por lo cual el centro de gravedad de la superficie considerada, está en el centro de la sección hecha en el cono por un plano paralelo a su base y que diste del vértice las dos terceras partes de la altura.

Superficie lateral de un tronco de cono de bases paralelas.—Siendo esta figura el límite de un tronco de pirámide regular, cuando los lados de las bases van siendo cada vez menores, el centro de gravedad pedido estará sobre la altura y a una distancia de la base mayor expresada por la relación

$$\frac{2p'+p}{3(p'+d)}$$

y como $p' = \pi d'$ y $p = \pi d$, en el caso presente, se tendrá la expresión

$$\frac{2d+d}{3(d'+d)}$$

en función de los diámetros de las dos bases.

Superficie lateral de un prisma o cilindro, recto u oblicuo de bases paralelas.—Tanto el prisma como el cilindro se pueden considerar como un tronco de pirámide o de cono, en los que las bases tienen el mismo perímetro, con cuya condición se tiene

$$\frac{2p+p}{3(p+p)}=\frac{1}{2}$$

esto es, que el centro de gravedad del área lateral de un prisma o cilindro de bases paralelas, se encuentra en el punto medio de la recta que une los centros de las bases, o también, que coincide con el centro de gravedad del perímetro de la sección paralela a la base que pasa por el punto medio de su altura.

Zona y casquete esférico.—El centro de gravedad de una zona esférica se encuentra en la línea que une los centros de sus bases, puesto que es un eje de simetría; además, si se divide la altura en un número de partes iguales y por los puntos de división se trazan planos paralelos a las bases, la zona propuesta quedará dividida en una infinidad de zonas parciales de la misma superficie y cuyos centros de gravedad estarán sobre el eje, luego al reemplazar cada zona por una fuerza que le sea equivalente, se tendrá un sistema de fuerzas paralelas e iguales, repartidas con regularidad a lo largo del eje y cuyo centro coincidirá con el punto medio de esta línea; luego el centro de gravedad de una zona se encuentra en el punto medio de la línea que une los centros de las bases.

Si se considera un *casquete esférico*, que no es otra cosa que una zona en la que una de las bases se ha reducido a un punto, su centro de gravedad coincidirá con el punto medio de su altura.

71. Centro de gravedad de los volúmenes.—Dos casos deben considerarse: 1.° Volúmenes de forma geométrica definida y 2.° Cuerpos cualesquiera.

1.^{er} *caso.* *Tetraedro.*—Sea el tetraedro O A B C *(fig. 71)*; si se hace pasar por la arista O C y por el punto medio D, de la arista opuesta A B, un plano, el tetraedro dado quedará dividido en otros dos, O A D C y O D B C, que son entre sí equivalentes, por lo cual la acción de la gravedad se ejercerá con igual intensidad sobre cada uno de ellos; luego el centro de gravedad del volumen total se encontrará sobre el plano O C D, que es un plano diametral con relación a las cuerdas paralelas a la arista A B: por los mismos razonamientos se deduce que el centro de gravedad pertenece también al plano diametral O A E, por lo tanto estará sólo la recta O g_1 intersección de dichos planos; esta última recta está determinada por el vértice O y el punto g_1, centro de gravedad de la cara A B C. Como lo establecido es general, se deduce que el centro de gravedad del tetraedro se encuentra sobre la recta que une uno cualquiera de sus vértices con el centro de gravedad de la cara opuesta; trazando, pues, por C la recta C g_2 que cumple la anterior condición, sobre ella también debe encontrarse el centro de gravedad, y como esta recta se encuentra en el plano O C D, cortará a la O g_1, obteniéndose por lo tanto en G el centro de gravedad del tetraedro.

Si se une g_2 con g_1, se tiene la $g_2\,g_1$ que será paralela a la arista O C, por estar los puntos g_1 y g_2 a la tercera parte de las distancias D C y D O, a contar desde el punto D; por lo cual, los triángulos $g_2\,g_1$ G y O G C son semejantes y dan

$$\frac{G\,g_1}{G\,O}=\frac{g_2\,g_1}{O\,C}=\frac{1}{3} \quad \text{de donde} \quad G\,g_1=\frac{1}{4}\,O\,g_1$$

es decir, que el centro de gravedad de un tetraedro, se encuentra sobre la recta que une un vértice cualquiera con el centro de gravedad de la cara opuesta y a la cuarta parte de su longitud contando desde la cara.

Trazando por el punto G un plano paralelo a la base, se tiene el triángulo $a\,b\,c$, y uniendo el vértice c con G se encuentra la $c\,m$ que es la mediana relativa al lado $a\,b$, puesto que el punto m pertenece al plano diametral O C D, por lo que será el de intersección de la O D con la $a\,b$; si se hubiese unido el vértice a con el punto G, dicha recta cortaría al lado $b\,c$ en su punto medio, lo que se demuestra del mismo modo; se tiene, pues, que G es el punto de intersección de dos medianas del triángulo $a\,b\,c$, es decir, que es un centro de gravedad. Por lo tanto, el centro de gravedad de un tetraedro coincide con el de la sección en él causada por un plano paralelo a una de sus caras y que diste de ella la cuarta parte de sus distancias al vértice opuesto.

El centro de gravedad del tetraedro se encuentra también situado en el punto medio de la recta que une los puntos medios de las aristas opuestas. En efecto, uniendo el punto D con G, por estar la recta D G situada en el plano O D C cortará a la arista O C en un punto tal como el F, que debe ser su punto medio, y para verlo, basta considerar las tres transversales D O, D F y D C, así como las D F, g_2 C y O g_1, cortadas por las dos paralelas $g_2 g_1$ y O G; el primer grupo da la relación

$$\frac{n g_2}{n g_1}=\frac{\mathrm{O\,F}}{\mathrm{C\,F}}$$

y el segundo da la igualdad

$$\frac{n g_2}{n g_1}=\frac{\mathrm{C\,F}}{\mathrm{O\,F}}$$

y para que estas dos igualdades queden cumplidas, es preciso que F sea el punto medio de O C. Por otra parte, por ser $g_1 g_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{OC}$ se tiene $\mathrm{D}n = \frac{1}{2}(n\mathrm{G} + \mathrm{GF})$ y como $\mathrm{G}g_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{GC}$ resulta también que, $\mathrm{G}\,n = \frac{1}{3}\,\mathrm{G\,F}$, pero $\mathrm{D\,G} = \mathrm{D}\,n + n\,\mathrm{G}$; luego sustituyendo valores resultará

$$\mathrm{D\,G} = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{G\,F} = \mathrm{G\,F}$$

lo que prueba que G es el punto medio de D F.

Como la demostración anterior es general, se deduce que las cuatro líneas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro se cortan en un mismo punto, que es el punto medio de cada una de ellas, coincidiendo dicho punto de cruce con el centro de gravedad del tetraedro.

Considerando el paralelógramo que los puntos medios D, E, F y H de las aristas A B, B C, C O y O A, determinan, se vería que el punto G es el punto de encuentro de las diagonales D F y E H de dicho paralelógramo, llegándose, por lo tanto, a la misma consecuencia anterior.

Si en vez de considerar un tetraedro, se hubiesen puesto cuatro cuerpos de igual masa, aplicados a cuatro puntos A, B, C y O unidos invariablemente entre sí, el centro de gravedad del conjunto coincide con el del tetraedro que dichos puntos determinan, puesto que la resultante de los cuerpos aplicados en A y B darán una resultante doble de cada uno de ellos y aplicada en D, medio de A B; la resultante de las fuerzas que reemplazan a los cuerpos que obran en O y C, actuará en el punto medio F de la recta O C, siendo su valor doble de una de ellas y por lo tanto igual a la resultante que obra en D, por lo cual la resultante final estará aplicada en el punto G medio de la D F, siendo su valor cuatro veces mayor que el de una de ellas. Si se toman los momentos de las cuatro fuerzas que reemplazan a los pesos considerados, con relación a un plano cualquiera se tendrá

$$4\,F \times h = F_1\,h_1 + F_2\,h_2 + F_3\,h_3 + F_4\,h_4$$

representando por F a las fuerzas y por h a sus distancias al plano; y como las fuerzas son iguales, resulta

$$h = \frac{1}{4}\,(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

es decir, que la distancia del centro de gravedad de un tetraedro a un plano es la media aritmética de la suma de las distancias de los vértices al mismo plano.

Pirámide.—El centro de gravedad de una pirámide se encuentra sobre la línea que une su cúspide con el centro de gravedad de la base, y dista de ésta la cuarta parte de dicha línea. Esto es fácil de demostrar, puesto que descomponiendo la base en triángulos, por medio de diagonales que partan de un vértice elegido, se tendrá descompuesta a la pirámide propuesta en varios tetraedros, que tendrán todos la misma altura y sus bases sobre un mismo plano, por lo que sus centros de gravedad estarán sobre un mismo plano paralelo a la base y distante de ella la cuarta parte de la altura. Las áreas de los triángulos determinados por el plano considerado sobre cada uno de los tetraedros parciales es proporcional a sus volúmenes, luego al reemplazar cada uno de estos por fuerzas proporcionales, su centro corresponderá al centro de la sección total; uniendo este punto con la cúspide, de la pirámide, esta línea pasa por los centros de gravedad de las secciones que en ella determinan varios planos paralelos, por lo cual pasará también por el centro de gravedad de la base.

Cono.—Como este cuerpo puede considerarse como una pirámide de un número indefinido de caras laterales, su centro de gravedad estará sobre la línea que une su cúspide con el centro de la base y dista de ésta la cuarta parte de la longitud total de dicha línea.

Tronco de pirámide de bases paralelas.—Sea el tronco de pirámide de bases paralelas A C C′ A′ (*fig. 72*), su volumen será la diferencia de las correspondientes a la pirámide total O A B C D E y a la parcial O A′ B′ C′ D′ E′; por lo tanto, al reemplazar cada una de estas pirámides por fuerzas proporcionales a sus volúmenes y que estén aplicadas a sus respectivos centros de gravedad, deberán considerarse al componerlas como de sentidos contrarios. Los centros de gravedad de las dos pirámides se encuentran sobre la misma línea que se obtiene uniendo la cúspide común con los centros de gravedad de las bases y distan de cada una de ellas la cuarta parte de sus respectivas distancias al vértice, por lo que su posición G_1 y G_2 quedará determinada, y como las fuerzas que se aplican a estos puntos han de ser proporcionales a los volúmenes, lo serán también al cubo de las líneas homólogas, quedando por lo tanto el problema gráfico reducido a determinar sobre la recta indefinida $G_1\ G_2$ un punto G que cumpla la condición

$$\frac{G\ G_2}{G\ G_1} = \frac{\overline{O\ A}^3}{\overline{O\ A'}^3}$$

Hallados los valores de $\overline{O\ A}^3$ y $\overline{O\ A'}^3$ por el procedimiento explicado (párrafo 17, **b**) sobre una recta cualquiera que pase por G_2, se toma la magnitud $G_2\ a = \overline{O\ A}^3$ y sobre otra paralela a la anterior y que pase por G_1, la $G_1\ b = \overline{O\ A'}^3$, uniendo a con b se encontrará el punto G que será el centro de gravedad del tronco considerado.

Hay otro procedimiento más rápido para determinar los valores de $\overline{OA}^3$ y $\overline{OA'}^3$; basta tomar sobre uno de los lados de un ángulo cualquiera M O N *(fig. 73)*, una magnitud O a, proporcional a una arista de una de las pirámides, por ejemplo, a la O A′ y sobre el otro lado, la longitud O b que guarde la misma relación con la homóloga O A: trazando por a la $a\,c$ que forme el ángulo O $a\,c$ igual al O $b\,a$ y tirando por b la $b\,d$ paralela a la $a\,c$, se tienen los segmentos O c y O d que son proporcionales a los cubos de O A′ y O A; en efecto, como por la construcción las rectas $a\,c$ y $a\,b$ son antiparalelas con respecto al ángulo en O, se tiene la igualdad

$$\overline{Oa}^2 = Oc \times Ob,$$

pero las $a\,b$ y $b\,d$ también son antiparalelas con respecto al mismo ángulo, con lo cual

$$Oa \times Od = \overline{Ob}^2$$

y multiplicando miembro a miembro estas dos igualdades se tendrá

$$\frac{\overline{Oa}^3}{\overline{Ob}^3} = \frac{Oc}{Od} = \frac{\overline{OA'}^3}{\overline{OA}^3}$$

que es lo que se quería demostrar.

Tronco de cono de bases paralelas.—Puesto que un tronco de cono puede ser considerado como un tronco de pirámide, se le podrá aplicar la construcción anterior; bastan, pues, prolongar dos aristas cualquiera para determinar las dos magnitudes correspondientes a las O A′ y O A del tronco de pirámide y que son precisas para hacer el cálculo gráfico.

Prisma triangular.—El centro de gravedad de un prisma triangular coincide con el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las bases, puesto que si por la arista D C *(fig. 74)* del prisma A B C D E F, y los puntos medios de las aristas opuestas se traza el plano, d C, el centro de gravedad y del prisma estará sobre este plano, por ser un plano diametral: por la misma razón se encontrará en el A *e* trazado por la arista A E y el punto medio de la arista B C, luego estará sobre su intersección $g_1 g_2$, si por el punto medio de una de las aristas laterales, se traza un plano paralelo a las bases, se tendrá la sección M N P, que también será un plano diametral, por lo cual el punto G, intersección de la $g_2 g_1$ con este último plano será el centro de gravedad pedido.

Como las rectas M *m* y P *p*, son las medianas del triángulo sección M N P, G será también el centro de gravedad del área comprendida por dicho triángulo, por lo cual se puede también decir, que el centro de gravedad de un prisma triangular, coincide con el de la sección en él causada por un plano paralelo a las bases y equidistante de ellas.

Prisma cualquiera de bases paralelas.—El volumen del prisma considerado será igual a la suma de los volúmenes de los prismas triangulares en que se descomponga y como estos son a su vez proporcionales a las áreas de los triángulos que sobre ellos determina un plano paralelo a las bases y equidistante de ellos, al reemplazar cada pirámide parcial por fuerzas paralelas que le sean equivalentes, se tendrá un sistema de fuerzas cuyos puntos de aplicación estarán en un mismo plano, sobre el cual estarán también el de su resultante y coincidirá con el centro de gravedad de la sección total: como las secciones causadas en el prisma por planos paralelos a sus bases, son iguales, los centros de gravedad de todos ellos, estarán sobre una misma recta determinada por los centros de gravedad de las bases; luego el centro de gravedad de un prisma cualquiera de bases paralelas, coincide con el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las bases.

Paralelepípedo.—Como el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de dos caras opuestas, pertenece al punto de encuentro de sus diagonales y este punto es, además, el centro de figura, el centro de gravedad de un paralelepípedo cualquiera coincide con su centro de figura, *Cilindro.*—El cilindro de bases paralelas no es más que un prisma de infinito número de caras laterales; en su consecuencia, su centro de gravedad estará en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las bases.

Poliedro cualquiera.—Puesto que todo poliedro puede ser descompuesto en pirámides o tetraedros, fácilmente se podrá determinar su centro de gravedad.

En el caso de que el poliedro tenga centro, éste será también el de gravedad.

Sector esférico.—Para determinar el centro de gravedad de un sector esférico, se puede inscribir al casquete base, uno formado por una infinidad de elementos superficiales diferenciales é iguales, los que sirven de base a otra infinidad de sectores esféricos que pueden ser considerados como pirámides. Los centros de gravedad de cualquiera de estos, se encuentran sobre la línea que une su cúspide con el centro de gravedad de la base y a la cuarta parte de su longitud a contar desde la base, por lo cual los centros de gravedad de todas ellas estarán sobre una zona esférica de una sola base, correspondiente a una esfera que tenga por radio los $\frac{3}{4}$ del que corresponde al sector; luego al reemplazar cada pirámide parcial por una fuerza equivalente, el centro de todas ellas coincidirá con el de gravedad de esta última zona.

Según se vió, el centro de gravedad de una zona coincide con el punto medio de su altura; como la altura de la última zona vale los $\frac{3}{4}$ de la que es base del sector, resulta que el centro de gravedad de un sector esférico, se encuentra sobre el radio que une el vértice con el centro de la zona base y a una distancia de aquél, igual a $\frac{3}{4}\, r - \frac{3}{8}\, h$, representándose por r el radio de la esfera, y por h la altura del casquete base.

Segmento esférico de una base.—Sea A C D (*fig. 75*) el segmento esférico correspondiente a una esfera de radio $O\,C = r$. Como este cuerpo se puede considerar como engendrado por revolución del área A B C, mitad del segmento de círculo A C D, alrededor del radio O C, este radio será un eje de simetría y sobre él estará el centro de gravedad.

Para fijar su situación sobre dicho eje, se observa que el segmento considerado es la diferencia entre el volumen del sector O A C B y del cono O A D B, por lo cual, tomando los momentos de estos cuerpos con relación a un plano que pase por O y sea paralelo a la base A D B del segmento, tendrá

$$M^{to} \text{ del seg}^{to} = M^{to} \text{ del sector} - M^{to} \text{ del cono}$$

o bien teniendo en cuenta que $\overline{DB}^2 = h(2r - h)$,

$$X \times \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right) = \frac{2}{3} \pi r^2 h \left(\frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h \right) - \frac{1}{3} \pi h \left(r - h \right)$$

$$(2r - h) \times \frac{3}{4} (r - h)$$

representándose por X la distancia del centro de gravedad del segmento al plano considerado y por h la altura C D de dicho segmento. Efectuando operaciones, se tiene

$$X \left(r - \frac{1}{3} h \right) = \frac{1}{4} (2r - h)^2$$

y como $r \frac{1}{3} h =$ O E y $2r - h =$ D C′, se tendrá

$$X \cdot 4 \, OE = \overline{DC'}^2$$

es decir, que D C′ es una media proporcional entre la distancia X que se trata de encontrar y cuatro veces la magnitud O E; luego si por C′ se traza una recta cualquiera C′ M y sobre ella se toma la magnitud C′ M $= 4$. O E, se une el punto D con el M y por D se traza la recta D N que forme con la D E un ángulo igual al que la D M forma con la C M, se tendrá

$$\overline{DC'}^2 = C'N \times C'M,$$

y por lo tanto, C′ N es el valor de X. llevando esta magnitud sobre la O C, a partir de O, se tendrá en G el centro de gravedad pedido.

Semiesfera.—En el caso particular que el segmento esférico sea una semiesfera, se determina su centro de gravedad, bien considerando dicho volumen como un sector esférico o bien como un segmento. Si se considera como un sector, el centro de gravedad de la semiesfera, se encontrará sobre el radio perpendicular a la base y a una distancia del centro igual a $\frac{3}{4}r - \frac{3}{8}r = \frac{3}{8}r$, y si se considera como un segmento, se tiene

$$X\left(r - \frac{1}{3}r\right) = \frac{1}{4}(2r - r)^2 \quad \text{de la que} \quad X = \frac{3}{8}r.$$

Segmento esférico de dos bases.—El segmento esférico de dos bases, o rebanada esférica, es simétrico con relación a la recta que une los centros de sus bases, por lo que sobre él se encontrará el centro de gravedad; también se encuentran sobre dicho eje los centros de gravedad correspondientes a los segmentos de una base A M D y B M C (*fig. 76*), cuya diferencia da el volumen propuesto.

Determinados los centros g_1 y g_2 correspondientes a estos últimos segmentos, bastará trazar por dichos puntos dos rectas paralelas cualesquiera y limitar sobre ellas magnitudes proporcionales a los respectivos volúmenes, es decir, que se tiene que encontrar un punto, tal como el G, sobre la recta $g_1 g_2$ que satisfaga a la relación

$$\frac{G g_1}{G g_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

representándose por V_2 el volumen del segmento B M C y por V_1 el de A M D.

Como $V_2 = \pi \overline{MN}^2 (OM - \frac{1}{3} MN)$ o bien, tomando $MN = h_2$ y $OM = r$, $V_2 = \pi h_2 \left(r - \frac{1}{3} h_2\right)$, si se dividen los dos términos por πr^2, se tiene

$$\frac{V_2}{\pi r^2}=\left(r-\frac{1}{3}h_2\right)\frac{h_2^2}{r^2}:$$

representándose por h_1 la altura del otro segmento, se tendrá también

$$\frac{V_1}{\pi r^2}=\left(r-\frac{1}{3}h_1\right)\frac{h_1^2}{r^2}$$

luego la relación primera se convertirá en

$$\frac{G\,g_1}{G\,g_2}=\frac{\left(r-\frac{1}{3}h_2\right)\frac{h_2^2}{r^2}}{\left(r-\frac{1}{3}h_1\right)\frac{h_1^2}{r^2}}$$

Tomando sobre los dos lados de un ángulo R O S *(fig. 77)* las magnitudes $o\,r=r$ y $o\,h=h$ y sobre uno de ellos la $O\,a=r-\frac{1}{3}h$, uniendo primero r con h y trazando la $a\,b$ paralela a $r\,h$ y después el r del otro lado con h del primero, y trazada la $b\,c$ paralela a $r\,h$, en $O\,c$ se obtiene el valor lineal del producto $\left(r-\frac{1}{3}h\right)\frac{r^2}{h^2}$, puesto que los triángulos $O\,b\,a$ y $O\,r\,h$ dan

$$\frac{O\,a}{O\,b}=\frac{O\,r}{O\,h}$$

y los $O\,c\,b$ y $O\,r\,h$, la igualdad

$$\frac{O\,b}{O\,c}=\frac{O\,r}{O\,h}$$

y multiplicando estas dos igualdades, se tiene

$$\frac{O\,a}{O\,c}=\frac{\overline{O\,r}^2}{\overline{O\,h}^2} \quad \text{o bien} \quad O\,c=O\,a\frac{\overline{O\,h}^2}{\overline{O\,r}^2}$$

trazando esta construcción para los valores de h_1 y h_2 se tendrán las magnitudes $g_2 c_2$ y $g_1 c_1$ *(fig. 76)* a las que son proporcionales $G g_2$ y $G g_1$ respectivamente, y uniendo c_2 con c_1 se tendrá el punto G.

Si las dimensiones de r, h_1 y h_2, fuesen demasiado grandes, para hacer la construcción de la figura 77, se tomarán magnitudes más reducidas que estén en una relación dada con las primeras, operándose después como en el caso anterior, esto es, que sobre las paralelas trazadas por g_1 y g_2 se tomarán las magnitudes finales que se encuentran, no variando por esto la posición del punto G.

Envuelta esférica.—Sea A B C D E *(fig. 78)*, una porción de envuelta esférica; como este volumen es simétrico con relación al radio O C, que pasa por el punto medio del arco B D, sobre dicho radio se encontrará su centro de gravedad; además, la porción de envuelta considerada, es la diferencia entre los dos sectores esféricos O B C D y O A F E; el problema queda, pues, reducido a encontrar el centro de dos fuerzas paralelas, de sentido contrario, proporcionales a los volúmenes de estos sectores y aplicados en sus centros de gravedad.

Sean g_1 el centro de gravedad del sector O A F E y g_2 el del otro sector, determinándose ambos centros en la forma ya explicada: como los volúmenes de los dos sectores son proporcionales a los cubos de sus radios, o sea, a $\overline{A\,O}^3$ y $\overline{B\,O}^3$ el punto G que se busca ha de estar situado en la recta $g_1\,g_2$ y habrá que determinar sobre ella dos segmentos que cumplan con la relación

$$\frac{G g_1}{G g_2} = \frac{\overline{B\,O}^3}{\overline{A\,O}^3}$$

repitiendo la construcción de la figura 73, o sea uniendo F con B, formando en F y sobre la F O el ángulo a F O = F B O y tirando por B, la B b paralela a F a, en O a y O b, se tendrán las magnitudes que hay que tomar a partir de g_2 y g_1 sobre las rectas paralelas trazadas por estos puntos, y uniendo a' y b' se tendrá en G el centro de gravedad del volumen considerado.

Segmento de paraboloide. —Sea el segmento A B C *(fig. 79)* y B O el diámetro conjugado de la sección A C, claro es que dicha recta contendrá los centros de gravedad de todas las secciones causadas en dicho segmento, por planos paralelos a A C, y por consiguiente, el centro de gravedad del volumen propuesto, también estará sobre dicho diámetro.

Si se refiere la parábola generatriz A B C al sistema coordenado Y B O, como todas las secciones paralelas a la A C son semejantes, y por consiguiente, proporcionales al cuadrado de las coordenadas paralelas al eje B Y, que podemos considerar como el de las Y, tomando los momentos con relación al plano tangente en B, se tendrá

$$BG \int y^2 dx = \int x y^2 dx$$

y teniendo en cuenta la ecuación de la parábola

$$BG \int x dx = \int x^2 dx$$

y efectuando la integración entre los límites 0 y B O, resulta

$$BG = \frac{2}{3} BO$$

2.° caso. Cuerpo cualesquiera.—Si el cuerpo considerado se aproxima a alguna de las formas geométricas que se acaban de exponer, o bien se pueden descomponer en partes cuyos centros de gravedad se sepa determinar, no ofrecerá dificultad el determinar el centro de gravedad, obteniéndose este punto con tanta mayor aproximación, cuanto más se acerque el cuerpo a alguna de las formas ya estudiadas. Cuando el cuerpo se aparte demasiado de las formas geométricas, se supondrá inscrito en su superficie un poliedro, cuyo número de caras sea lo suficientemente grande para que el volumen del poliedro se pueda considerar como sensiblemente igual al del cuerpo; el centro de gravedad del poliedro que se obtendrá, descomponiéndolo en pirámides, según se dijo, será el del cuerpo.

ÍNDICE

Páginas

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

Nociones relativas al cálculo gráfico.

CAPÍTULO II

Manera gráfica de verificar la composición y descomposición de fuerzas.

CAPÍTULO III

Polígono funicular.

Páginas

CAPÍTULO IV

Sistemas articulados y construcción de momentos.

CAPÍTULO V

Determinación gráfica del centro de gravedad de las líneas, superficies y volúmenes.

ERRATAS

TEXTO

Página	Línea	DICE	DEBE DECIR
17	1	a la *o* (*m*)	a la *u* (*m*)
26	16	dos fuerzas F_1 y F_2	dos fuerzas F_1 y F_2 lo dicho
38	8	de los lados A' e'	de los lados A' c'
65	18	que se toma el sistema	que toma el sistema

ATLAS

Figura 8.	Línea *n*........................	Línea *u*
»	» —Ángulos *c a b* y *b m a*...........	Ángulos α
»	10.—arcos *u* y *a*....................	arcos *u* 1 y *a m*
»	17.—resultantes *a*-2-3, *a*-3-4 y *a*-3-5..	r_1, r_2, r_3
»	21.—línea *d*-*e*........................	línea *d*-*e*-*s*
»	» —línea *d*-*e*........................	línea *d'*-*e'*-*s'*
»	22.—líneas *n*-*e* y *n'*-*e'*...............	líneas *h*-*e*-B y *h'*-*e'*-B'
»	76.—línea c_2 punto..................	línea c_2 g_2
»	» —línea c_1 *g*.....................	línea c_1 g_1
»	78.—línea G *a'* *b*....................	línea G *a'* *b'*

Precio de esta obra, 5 PESETAS.

OBRAS DE LOS MISMOS AUTORES Y EN COLABORACIÓN

Aparatos balísticos y *Trazado del material de Artillería*, por D. Emilio Delgado Maqueda.

Química general y aplicada y *Pólvoras y explosivos modernos*, por D. Jesualdo Martínez Vivas y D. José Fernández Ladreda.

Fundamentos de análisis químico, por D. José Martínez Díaz y D. Jesualdo Martínez Vivas.

Pólvoras negras y pardas, por D. Jesualdo Martínez Vivas.

EN PRENSA:

Apuntes de siderurgia.

Química general y aplicada (2.ª edición).

Pólvoras y explosivos modernos (2.ª edición).