El Modelo *CreditRisk+* [*]

Autor:
Hernando Bayona Rodríguez

Director:
Jorge Andrés Plazas Ph.D[**]

Facultad de Ciencias
Pontificia Universidad Javeriana

Mayo 2015

Resumen

El principal objetivo de la modelación del riesgo financiero es estimar la distribución de pérdidas de los portafolios y de esta manera poder calcular, bajo cierto nivel de confianza, diversas medidas de riesgo tales como Pérdidas Esperadas (PE), Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicionado (cVaR) o Expected Shortfall (ES). En el caso particular de riesgo de crédito, el modelo *CreditRisk+* (*CR+*) es uno de los más empleados. Además ha sido objeto de numerosos estudios. Este documento presenta con detalle el modelo *CR+* estándar al que se le agrega una mixtura de Poisson con el objeto de incluir factores de riesgo sistémico. Adicionalmente, se desarrolla el modelo *CR+* usando la trasformada de Fourier y se presenta una implementación del modelo vía Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Palabras claves: Riesgo de Crédito, *CreditRisk+*, Mixtura de Poisson, Transformada de Fourier, valor en riesgo (VaR, cVaR), pérdida esperada (PE).

---

[*] Trabajo de grado para optar al título de Matemático.
[**] Profesor Asistente Pontificia Universidad Javeriana.

Abstract

The main objective of financial risk modeling is to estimate the loss distribution of portfolios and thus to calculate, under certain confidence level, several risk measures such as Expected Loss (EL), Value at Risk (VaR) and Conditional value at Risk (CVaR) or Expected Shortfall (ES). In the case of credit risk, the Credit Risk+ (CR+) model is one of the most employees. It has also been the topic of many studies. This paper shows in detail the CR+ standard model to which is added a Poisson mixture in order to include systemic risk factors. In addition, CR+ model is developed using the FFT algorithm and an implementation model is presented via Fast Fourier Transform (FFT).

Keys Words: Credit Risk, *CreditRisk+*, Poisson Mixture, Fourier Transform, Value at Risk (VaR, cVaR), Expected loss (EL).

1. Introducción

Uno de los problemas más comunes que se tiene en la medición de riesgo crediticio es estimar la distribución de pérdidas de la cartera, la cual permite el cálculo de las principales medidas de riesgo: Pérdidas Esperadas (PE), Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicionado (cVaR) o Expected Shortfall (ES). En la actualidad existe un aumento importante del desarrollo de modelos de medición de riesgo de crédito. Esta tendencia está asociada con las crisis financieras, el crecimiento de la desintermediación y el aumento de la competitividad (Altman, 1998[2]). Dado que las crisis financieras pueden derivarse de una escasa regulación o una mala gestión del riesgo, surge la necesidad de revisar los modelos empleados. Por ejemplo, la reciente crisis financiera de 2008-2009 respondió a una pobre medición del riesgo de crédito en el sector inmobiliario en Estados Unidos, que contagió la economía mundial (Münnix, Schäfer & Guhr, 2014[23]). Lo que ha hecho reevaluar las metodologías de valoración del riesgo, particularmente relacionadas con el crédito.

No existe un consenso sobre como clasificar los modelos de riesgo de crédito, sin embargo, lo más frecuente es dividirlos en dos grandes grupos: modelos estructurados y modelos de forma reducida (Giesecke, 2004[13] ; Gordy, 2000[14]). Los modelos estructurados son aquellos que están sustentados por modelos teóricos desde lo económico y/o financiero. Los ejemplos clásicos de este tipo de modelos son los de Black & Scholes (1973)[5], Merton (1974)[22] y Altman (1989a,1989b)[1]. Por su parte, los modelos de forma reducida o de intensidad, son aquellos que se enfocan en estimar las tasas de incumplimiento (default) y sus posibles fluctuaciones derivadas de factores de riesgo sistémicos tales como choques a variables macroeconómicas. Entre los modelos reducidos se destacan los de Jarrow & Turnbull (1995)[19], Hull & White (2000)[17] y el modelo *CreditRisk+* creado por Credit Suisse First Boston (1997)[8].

El modelo *CreditRisk+* (*CR+*) es uno de los modelos más empleados por la industria y ha sido objeto de numerosas investigaciones y variaciones (Deshpande, 2014[10]). En su versión inicial, este modelo divide el portafolio en bandas de exposición, en cada banda se usa la Función Generadora de Probabilidad (FGP) para encontrar la distribución del número de incumplimientos; luego, empleando el valor de las bandas de exposición y la FGP del número de incumplimientos se calcula, vía convolución, la FGP de pérdidas de toda la cartera (CSFB, 1997[8]). Esta técnica tiene varios inconvenientes, el primero, es que no se define el valor de la banda óptimo; por ejemplo, una banda muy pequeña aproxima mejor la distribución pero es computacionalmente pesada. Una banda muy grande tiene una pobre aproximación y podría subestimar las pérdidas del portafolio. El segundo inconveniente radica en el hecho que no se puede encontrar una solución analítica y se requiere usar una aproximación con la recursión de Panjer. Esto genera limitaciones importantes cuando el portafolio es extremadamente grande o cuando se desea incorporar un mayor número de factores de riesgo sistémico. Finalmente, el modelo *CR+* supone independencia entre los créditos del portafolio y entre los factores de riesgo sistémico, lo cual no necesariamente es cierto. Para resolver estas debilidades la literatura ha propuesto diferentes estrategias.

Por ejemplo, Gordy (2002)[15] presenta una variación del modelo *CR+* basados en la Función Generadora Acumulada(CGF) de la distribución de pérdidas de la cartera. A través de la CGF Gordy encuentra una solución directa de los momentos de la distribución de pérdidas permitiendo que el modelo sea computacionalmente robusto. Este modelo resulta ser complementario al modelo estándar ya que en las colas de la distribución, donde el modelo estándar no funciona muy bien, el modelo que emplea CGF se comporta mejor. En contraste, en los casos donde el desempeño del modelo de Gordy no es tan bueno, el modelo estándar es rápido y fiable.

Por su parte, Melchiori (2004)[20] desarrolla un modelo que usa la Función Característica en lugar de la Función Generadora de Probabilidad empleada por *CR+*. Esta variación al modelo *CR+* le permite estimar la distribución de pérdidas empleado la transformada rápida de Fourier (FFT). La ventaja de este cambio es que permite incorporar de manera más sencilla los factores de riesgo sistémicos reduciendo los requerimientos computacionales. Sin embargo, esta investigación no dice mucho de las posibles debilidades de usar FFT. Usando la misma técnica, Reiß (2003)[24] hace un desarrollo del modelo *CR+* y describe la manera en que este podría implementarse.

Finalmente, Deshpande & Iyer (2009)[11] relajan el supuesto de independencia entre factores de riesgo sistémico en el modelo *CR+* al incorporar correlaciones entre estos. Este modelo se conoce como el modelo *CreditRisk+* en dos etapas (2-*CR+*), en donde la primera etapa es el modelo *CR+* estándar y la segunda etapa incorpora una combinación lineal de variables macroeconomícas o factores de riesgo sistémico que no necesariamente son independientes. Deshpande (2014)[10] compara el modelo *CR+* y el modelo (2-*CR+*)

encontrando, al igual que Bayona (2010)[3], que el VaR para el modelo (2-*CR+*) es mucho más alto que para el modelo *CR+*.

El presente documento desarrolla con detalle el modelo *CR+* estándar al cual se le incluye una mixtura de Poisson con el fin de incorporar en el modelo factores de riesgos que podrían afectar de manera diferencial a los créditos del portafolio. Adicionalmente, se presenta como alternativa al modelo *CR+* estandar, el modelo *CR+* usando la Trasformada de Fourier. Una de las bondades de usar la transformada es que simplifica la implementación.

Este documento se divide en cinco partes, la segunda describe las principales medidas de riesgo. La tercera el desarrollo del modelo *CR+* estándar el cual emplea para su implementación la recursión de Panjer. La cuarta parte desarrolla el modelo *CR+* usando trasformada de Fourier y presenta una implementación a partir de la Trasformada Rápida de Fourier (TRF). Finalmente, la quinta parte expone las conclusiones.

2. Medidas de Riesgo

En la literatura las medidas para la gestión del riesgo más usadas son Pérdidas Esperadas (PE), el Valor en Riesgo (VaR) y actualmente se está empleando el Expected Shortfall (ES). Donde PE, VaR y ES son variables aleatorias. Las PE hacen referencia a las provisiones con las que debe contar una institución financiera para asumir las pérdidas debidas al incumplimiento de los deudores. Por su parte, el VaR y el ES hacen referencia a los requerimientos de capital económico con los que deben contar una institución financiera para asumir las pérdidas por el incumplimiento de los deudores en un escenario poco probable, por esta razón también se denominan pérdidas no esperadas. En el presente artículo se desarrolla una metodología que permite estimar estas medidas de riesgo las cuales se definen formalmente como:

Definición 1 . ***Pérdidas Esperadas:*** *A partir de la distribución de pérdidas de la cartera, las pérdidas esperadas se definen como la esperanza de esta distribución.*

La pérdida esperada es el valor, que por la naturaleza del negocio de crédito, las entidades están dispuestas a perder y se reflejan en la contabilidad como las provisiones. Esta pérdida se debe a que por diversas razones no todos los deudores pagan sus créditos, adicionalmente las entidades no pueden saber de manera anticipada el comportamiento de pago de cada deudor o las dificultades financieras futuras del mismo. Es importante resaltar que en Colombia esta es la medida más popular en la gestión del riesgo de crédito.

Definición 2 . ***Valor en Riesgo VaR:*** *Sea X la variable aleatoria que representa las pérdidas en un portafolio. Dada la distribución de probabilidad de pérdidas para la cartera y bajo un nivel de confianza α, el valor en riesgo es calculado como:*

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \text{ínf}\{x \mid P\left[X > x\right] \leq 1 - \alpha\},$$

donde α es un parámetro que describe el percentil de la distribución.

Definición 3 . ***Expected Shortfall:*** *Se define a partir del VaR como:*

$$\mathrm{ES}_\alpha = E\left(L \mid L \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right) = \frac{E\left(L, L \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right)}{P\left(L \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right)}.$$

Tanto el VaR como el ES o VaR condicional(cVaR) se conocen como la pérdida no esperada y en este contexto es el valor, que bajo un evento poco probable de incumplimientos masivos de créditos, la entidad podría llegar a perder. En caso de la materialización de un evento de esta naturaleza, la entidad colocadora de créditos debería contar con el capital económico suficiente para asumir este escenario poco probable. Por tal razón, tanto el VaR como el cVaR se constituyen en una herramienta importante en la gestión del riesgo y pueden convertirse para la junta de las entidades financieras en parámetros para definir los niveles máximos de exposición al riesgo.

Una buena medida de riesgo debe ser una medida coherente, para lo cual debe cumplir lo siguiente:

Definición 4 . *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$[1]un espacio de probabilidad y sea $\xi \subset \Omega$ el conjunto de los posibles eventos de pérdida, tal que para todo $L_1, L_2 \in \xi$ se cumple:*
i) $L_1 + L_2 \in \xi$

[1] Ω es un espacio muestral, $\mathfrak{F}$ es una σ-álgebra definida sobre Ω y P es una medida de probabilidad, a esta terna se le denomina espacio de probabilidad.

ii) $\lambda L_1 \in \xi$ *para* $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Una medida de riesgo $\rho : \xi \rightarrow \mathbb{R}$ *se dice coherente si cumple las siguientes cuatro propiedades:*
P1. Monotonía: Si $L_1 \leq L_2$ entonces $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.
P2. Homogeneidad positiva: Dado λ positivo, $\rho(\lambda L_1) = \lambda \rho(L_1)$.
P3. Subaditividad: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$.
P4. Invarianza por traslación: $\rho(L_1 + l) = \rho(L_1) + l$.

La intuición sobre estas condiciones es la siguiente: la condición de *Subaditividad* es necesaria debido a que si no se cumpliera se podría tener que $\rho(L_1) + \rho(L_2) < \rho(L_1 + L_2)$, esto dejaría abierta la posibilidad de pensar en dividir los diferentes portafolios con el fin de obtener un menor valor en la medida de riesgo, a nivel regulatorio implicaría menor requerimiento de capital, lo cual no es una buena práctica ya que se olvida las posibles correlaciones entre los portafolios que se han dividido y de esta manera se subestima el riesgo agregado. Por su parte, la *Invarianza por translación* implica que si se agrega al portafolio un activo libre de riesgo la medida de riesgo no afecta ese activo. La *Homogeneidad positiva* indica que si se multiplica el portafolio de activos por un valor positivo la medida de riesgo se afecta en la misma proporción.

El VaR ha sido la medida de riesgo más aceptada por los reguladores y la banca, sin embargo y como lo menciona Inui y Kijima (2004)[18] el VaR es una medida muy criticada ya que en general, el VaR no es una medida de riesgo coherente y en particular no es subaditiva. En la literatura se conoce que para algunos casos, como cuando la distribución es normal ó distribución t-student, el VaR es subaditivo, en contraste, el ES si es una medida coherente y por tanto tiene propiedades deseables para tareas como la optimización de portafolios, para ver en detalle la definición y propiedades de las medidas de riesgo coherente, se recomienda consultar Fritelli y Gianin (2002)[12].

Por otro lado, la pérdida esperada se puede calcular de manera directa para cada uno de los créditos al multiplicar la probabilidad de incumplimiento del deudor por el saldo del crédito, este saldo generalmente es ajustado por alguna tasa de recuperación. Sin embargo, para hallar tanto el VaR como el cVaR se requiere contar con la distribución de pérdidas del portafolio, por tal razón se presenta en la sección 3 una metodología que permite de manera directa mediante una recursión, obtener la distribución de pérdidas de un portafolio de créditos, esta metodología también cuantifica el efecto sistémico.

3. *CreditRisk+* usando Panjer

En esta sección se desarrolla el modelo *CreditRisk+*. El primer paso consiste en agrupar los créditos de la cartera en bandas de exposición redondeando el valor del saldo de cada crédito, seguido a esto, se define la variable aleatoria que describe los dos posibles estados de cada crédito, incumple o no incumple, variable aleatoria con distribución de Bernoulli. Luego sobre cada banda se obtiene la Función Generado de Probabilidad (FGP) del número de incumplimiento de dicha banda, la cual se puede aproximar a una distribución de tipo Poisson que depende de un único parámetro μ, esto se hace vía *Convolución* sobre la distribución de probabilidad de los créditos de la banda. Con el fin de introducir los efectos sistémicos en el modelo, se supone que el parámetro de la FGP del número de incumplimiento es estocástico, a este tipo de parámetros se le denomina la mixtura del modelo. Finalmente, teniendo en cada banda la FGP del número de incumplimiento con parámetro estocástico, se hace la *Convolución* de estas distribuciones sobre todas las bandas para hallar la FGP de las pérdidas de todo el portafolio.

3.1. Agrupación por Bandas de Exposición

Se supone que la pérdida esperada por un deudor i que cae en impago, es una proporción constante λ_i del monto total D_i que debe i. Se supondrá además que el nivel de exposición que representa el deudor i, denotado por L_i, es un múltiplo entero de una cantidad L llamada ***unidad de pérdida***. Estos múltiplos enteros de L serán llamados ***niveles de exposición estándar***.

Esta descripción permite medir la pérdida por incumplimiento en términos de múltiplos v_i de la unidad fija de pérdida L, es decir:

$$v_i = \text{Redondeo}\left(\frac{\lambda_i D_i}{L}\right). \tag{1}$$

Donde *Redondeo* es una función que asigna el número entero más cercano.

3.2. FGP del Número de Incumplimientos

Definición 5 . *Dada una sucesión de números reales* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$*, si* $A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ *converge en un intervalo* $(-\epsilon, \epsilon)$*, se dice que* $A(s)$ *es una función generadora de la sucesión* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Definición 6 .*(FGP) Si se considera el caso de una variable aleatoria* X *que toma valores en* $\mathbb{Z}^+$*, y se define:*

$$p_j = P[X = j],$$

entonces:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \tag{2}$$

donde $F(s)$ *es llamada* ***Función Generadora de Probabilidad*** [2]

Ya teniendo identificadas las bandas, ahora se encuentra la distribución del número de incumplimientos en cada una, la cual se obtiene de forma indirecta empleado la Función Generadora de Probabilidad (FGP) (6).
Si se llama I_i a la variable aleatoria (v.a.) que determina si el crédito i incumple o no incumple se puede escribir como:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{Si incumple con probabilidad } p_i, \\ 0 & \text{Si cumple con probabilidad } 1 - p_i. \end{cases}$$

Si se considera una cartera conformada por un solo crédito, la Función Generadora de Probabilidad (FGP) de I_i de acuerdo con la Definición 6., estará dada por la expresión:

$$F_i(s) = (1 - p_i)s^0 + p_i s^1 = 1 + p_i(s - 1). \tag{3}$$

Dado que en una banda puede haber más de un crédito y bajo el supuesto de independencia entre dichos créditos, la FGP del número de incumplimientos en dicha banda es la *convolución* sobre los créditos en esa banda, la FGP resultante se puede aproximar por una distribución Poisson.

[2]Una definición más amplia sobre la Función Generadora de Probabilidad se tiene en Medhi (1999)[21].

3.3. Aproximación del Número de Incumplimientos a una distribución Poisson

Empleando la ecuación (3) y bajo el supuesto de que los eventos de incumplimiento son independientes, entonces la FGP de un conjunto de n créditos será el producto de las FGP individuales. Este producto se conoce como la *Convolución* de las FGP, lo cual se expresa como:

$$F(s) = \prod_{i=1}^{n} F_i(s) = \prod_{i=1}^{n} [1 + p_i(s-1)].$$

Tomando logaritmo natural a ambos lados de esta última igualdad y utilizando propiedades de los mismos se tiene que:

$$\ln(F(s)) = \sum_{i=1}^{n} \ln[1 + p_i(s-1)].$$

En este punto se utiliza el hecho de que típicamente las probabilidades de incumplimiento para obligaciones crediticias a nivel individual son pequeñas (cercanas a cero), por lo cual:

$$\ln[1 + p_i(s-1)] \approx p_i(s-1).$$

Utilizando este resultado se obtiene que:

$$\ln(F(s)) \approx \sum_{i=1}^{n} p_i(s-1),$$

de donde,

$$F(s) \approx \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(s-1)\right),$$

y denotando como $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i$ se llega a:

$$F(s) \approx \exp(\mu(s-1)).$$

Al realizar la expansión en series de Taylor de $F(s)$ se tiene que:

$$F(s) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n(e^{\mu(s-1)})}{ds^n} s^n \Bigg|_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu^n e^{-\mu} s^n.$$

Expresión que de acuerdo con la Definición 6. es la FGP del número de incumplimientos de la cartera y en la que se puede ver que los coeficientes de s^n en la sumatoria, son probabilidades Poisson, con lo cual se concluye que la distribución del número de incumplimientos bajo el supuesto de probabilidades pequeñas se puede aproximar a una distribución Poisson.

Del desarrollo anterior tenemos la siguiente Proposición:

Proposición 1 *.**(FGP Poisson)** Si el número de incumplimientos de un portafolio de crédito sigue una distribución Poisson con parámetro μ, entonces la FGP del número de incumplimientos es:*

$$F(s) = \exp(\mu(s-1)),$$

donde

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

El anterior desarrollo permite ver que bajo independencia de la distribución de variables aleatorias de tipo Bernoulli, la *convolución* de dichas distribuciones se aproxima por una distribución de tipo Poisson.

Esto indica que el comportamiento de la variable aleatoria K del número de incumplimientos del portafolio de crédito, es descrito por la distribución de probabilidad:

$$P[K=k] = \frac{1}{k!}\mu^k e^{-\mu}, \tag{4}$$

donde μ es el número esperado de incumplimientos y es el único parámetro en la distribución.

3.4. Modelo de Mixtura de Poisson

Hasta ahora se tiene que el número de incumplimientos de una cartera de créditos puede ser modelada por una distribución Poisson con parámetro μ Sin embargo, y de acuerdo con Daykin (1994)[9], el parámetro de esta distribución no necesariamente es constante, pues existen factores de riesgo sistémicos que afectan el número esperado de incumplimientos, por lo anterior es natural considerar que el parámetro sea estocástico, de esta idea surge la necesidad de definir una mixtura sobre el proceso Poisson para llegar a un modelo que la literatura denomina *Mixtura de Poisson*.

Definición 7 .***(Mixtura de Poisson)*** *Sea $\mathbf{\Psi} = (\psi_1, ..., \psi_p)$ un vector aleatorio p-dimensional con $p < m$. El vector aleatorio $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ sigue un proceso de mixtura Poisson con factores $\mathbf{\Psi}$ si existen m funciones, $\mu_i : \mathbb{R}^p \to (0, \infty)$, tales que el vector Y condicionado sobre $\mathbf{\Psi} = \psi$ es un vector de variables aleatorias independientes que se distribuyen con distribución de Poisson con parámetro $\mu_i(\psi)$.*

Para el caso concreto que se está desarrollando en este documento, las componentes Y_i del vector aleatorio Y de la definición anterior representan el estado de los créditos, luego si se define $K = \sum_{i=1}^{m} Y_i$, donde K representa el número de incumplimientos en la cartera dado los factores de riesgo. Adicionalmente, como K es la suma de variables Poisson condicionalmente independientes y bajo el supuesto de que los parámetros $\mu_i(\psi)$ son típicamente pequeños se satisface que

$$P[K = k|\mathbf{\Psi} = \psi] = \exp\left(-\sum_{i=1}^{m} \mu_i(\psi)\right) \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i(\psi)\right)^k}{k!}. \tag{5}$$

Se puede observar en la ecuación anterior que si $\mu_i(\psi)$ es constante y no depende de ψ para todo i y si $\sum_{i=1}^{m} \mu_i(\psi) = \mu$, se tiene la ecuación (4).

Utilizando la Proposición 1. y la ecuación (5) se tiene que la FGP del número de incumplimiento condicionada a los factores de riesgo es,

$$F(s \mid \psi) = \exp(\mu(\psi)(s-1)). \tag{6}$$

Para obtener la FGP incondicional es necesario hacer uso del siguiente teorema.

Teorema 1 . *Si $F(s \mid \psi)$ es una FGP condicionada a ψ, y $H(\psi)$ es la distribución de probabilidad de ψ, entonces la FGP incondicional $F(s)$ es:*

$$F(s) = \int_{\psi} F(s \mid \psi)\, dH(\psi)\,.$$

Para continuar con el desarrollo, se debe escoger adecuadamente $H(\psi)$ con el fin de poder aplicar el Teorema 1. Dadas las características de la distribución Gamma, la literatura recomienda usar dicha distribución para modelar la mixtura, en el caso desarrollado en este documento, la principal razón para usar la distribución Gamma es que permite que la probabilidad del número de incumplimientos tenga una distribución conocida. En el anexo A.1 se muestra que esta distribución conocida es la binomial negativa, la cual hace parte de la familia de distribuciones Panjer[3], esta familia se caracteriza porque puede ser representada de manera recursiva.

Para hallar la FGP del número de incumplimientos incondicional a los factores de riesgo se usan las propiedades de la distribución Gamma y el Teorema 1., adicionalmente, se asume que los factores de riesgo son independientes y tienen distribución Gamma con media 1 y varianza σ^2. El detalle técnico para obtener esté resultado se presenta en el Anexo A.2. La FGP del número de incumplimientos incondicional a los factores de riesgo es

$$F(s) = \prod_{k} \left(\frac{1-\theta_k}{1-\theta_k s} \right)^{\left(\frac{1}{\sigma_k^2}\right)}, \tag{7}$$

siendo

$$\theta_k = \frac{\sigma_k^2 \mu_k}{1+\sigma_k^2 \mu_k}. \tag{8}$$

La forma de esta FGP muestra que el número total de incumplimientos en el portafolio es una suma de k variables independientes con distribución binomial negativa.

Hasta ahora se ha construido la distribución del número de incumplimiento para cada banda, el siguiente paso consiste en encontrar la distribución de las pérdidas del portafolio, para esto se siguen los principios de la teoría actuarial que conjuga frecuencia (número de incumplimiento) y severidad (bandas de exposición) en un modelo de distribución compuesta (ver Daykin (1994)[9]) que se presenta en la siguiente sección.

[3]Para más detalles sobre la familia de distribuciones Panjer ver Daykin (1994)[9]

3.5. FGP de las Pérdidas

En esta sección se obtiene la FGP de las pérdidas de la cartera a partir del número de incumplimientos y empleando la aproximación de los montos expuestos a bandas de exposición.

Sea G_j la FGP de las pérdidas ocasionadas por los deudores de la j-ésima banda, la probabilidad de perder $n \times v_j$ unidades es igual a la probabilidad de que n deudores incumplan en la banda j y dado que el incumplimiento de estos deudores se ha supuesto anteriormente que sigue una distribución de Poisson, entonces:

$$G_j\left(s|\psi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_j\left(\psi\right)^n \exp\left(-\mu_j\left(\psi\right)\right) s^{nv_j}.$$

Por lo tanto,

$$G_j\left(s \mid \psi\right) = F_j\left(s^{v_j} \mid \psi\right).$$

Se emplea el concepto de convolución para hallar la FGP de la pérdida de toda la cartera:

$$G\left(s \mid \psi\right) = \prod_j G_j\left(s \mid \psi\right) = \prod_j F_j\left(s^{v_j} \mid \ psi\right).$$

Reemplazando el resultado de la ecuación 6 se tiene:

$$G\left(s \mid \psi\right) = \prod_j \exp\left(\mu_j\left(\psi\right)\left(s^{v_j} - 1\right)\right),$$

donde $\mu_j\left(\psi\right)$ es el número esperado de incumplimientos en la banda j, adicionalmente, si se hace $\sum_j \mu_j\left(\psi\right) = \mu\left(\psi\right)$, se tiene que

$$G\left(s|\psi\right) = \exp\left(\mu\left(\psi\right)\left(s^{v_j} - 1\right)\right).$$

Haciendo el mismo desarrollo descrito en el Anexo A.1 se obtiene:

$$G\left(s\right) = \prod_{k=1} \left(\frac{1-\theta_k}{1-\theta_k \pi_k\left(s\right)}\right)^{\left(\frac{1}{\sigma_k^2}\right)}, \tag{9}$$

donde

$$\pi_k(s) = \frac{\sum_i w_{i,k}\overline{P}_i s^{v_i}}{\sum_i w_{i,k}\overline{P}_i}; \theta_k = \frac{\sigma_k^2\mu_k}{1+\sigma_k^2\mu_k}.$$

4. *CreditRisk+* Usando Transformada Fourier

4.1. Función Característica

Definición 8 (Función Característica) *Sea X una una variable aleatoria real. Entonces la función característica de X se define por*

$$\Phi_X(z) = \mathbb{E}[e^{izX}], \qquad z \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

donde $i = \sqrt[2]{-1}$.

Nótese que la función característica $\Phi_X(z)$ siempre existe para alguna variable aleatoria X ya que e^{izX} es acotada por la definición del exponencial complejo.[4] Tal como se argumenta en Billingsley (1995)[4], la función característica en el contexto no probabilístico se define como la transformada de Fourier.

Definición 9 . *Sea f una función tal que $f \in \mathbb{L}^1$. Entonces la transformada de Fourier de f existe y se define por*

$$\mathfrak{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x)dx. \tag{11}$$

Se tiene entonces que si f es la función de densidad de la variable aleatoria X, entonces,

$$\Phi_X(z) = \mathfrak{F}[f(x)], \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

La función de densidad de probabilidad se puede expresar en términos $\Phi_X(z)$ bajo el siguiente teorema

[4] Se tiene que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Teorema 1 *. Sea $f \in \mathbb{L}^1$ y sea $\mathfrak{F}[f(z)] \in \mathbb{L}^1$, entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \Phi_X(z) dz. \tag{13}$$

Algunas de las propiedades que tienen las funciones características se pueden incluir en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con funciones caraterísticas Φ_{X_1}, Φ_{X_2}, respectivamente. Entonces para todo, $a, b, z \in \mathbb{R}$*

1. $|\Phi_X(z)| \leqq 1$ *(Propiedad de la acotación),*
2. $\Phi_X(-z) = \overline{\Phi_X(z)}$ *(Propiedad del conjugado),*
3. $\Phi_{X_1+X_2}(z) = \Phi_{X_1}(z) \cdot \Phi_{X_2}(z)$ *(Propiedad de suma),*
4. $\Phi_{aX+b}(z) = e^{izb} \cdot \Phi_X(a \cdot z)$.

La propiedad 3. del teorema anterior se puede extender para $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias independientes tal como se presenta en Billingsley (1995)[4], por tanto,

$$\Phi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z) = \mathbb{E}\left[e^{iz\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{izX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(z). \tag{14}$$

4.2. Descripción del modelo *CreditRisk+*

El objetivo del modelo *CreditRisk+* es estimar la distribución de pérdidas de un portafolio de crédito. Esta sección presente de manera breve el modelo *CreditRisk+* para lo cual sigue el desarrollo de Gundlac (2004)[16] & Reib (2003)[24].

Considérese un portafolio con K deudores, donde cada deudor k tiene un monto de exposición $L_k > 0$ y probabilidad de default p_k (probabilidad de incumplimiento). Adicionalmente, los créditos del portafolio pueden ser afectados de manera diferencial por diversos factores de riesgo. Por ejemplo, individuos en diferentes sectores económicos tales como agrícola, petrolero, servicios, entre otros; serán afectados de manera diferencial ante un mismo choque económico. Para modelar esto, se definen las variables aleatorias S_n, con $n = 1, \cdots, N$, que representan N factores de riesgo o sectores. Como cada deudor k puede ser efectado de manera diferencial por cada uno de los factores de riesgo, se construyen los ponderadores α_n^k que modelan qué tanto afecta al deudor k la materialización del riesgo del sector n. Tales factores satisfacen las siguientes condiciones,

$$0 \leq \alpha_n^k \leq 1, \qquad \forall k = 1, \cdots, K, \quad n = 0, \cdots, N, \tag{15}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n^k \leq 1, \quad \forall k = 1, \cdots, K. \tag{16}$$

Por su parte, cada deudor tiene un riesgo específico o idiosincrático, el peso que este tiene se denota por α_0^k y cumple la siguiente relación.

$$\alpha_0^k = 1 - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k. \tag{17}$$

Por simplicidad del modelo se asumen los S_n independientes e idénticamente distribuidos con distribución Gamma con esperanza 1 y varianza σ_n^2. El parámetro $\sigma_n > 0$ representa la volatilidad del n-ésimo factor de riesgo. La probabilidad de default del deudor k ponderado por los factores de riesgo se define por:

$$p_k^S = p_k \left(\alpha_0^k + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k S_n \right). \tag{18}$$

Por definición, se satisface:

$$\left(\alpha_0^k + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k S_n \right) > 0, \tag{19}$$

$$\mathbb{E} \left[\alpha_0^k + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k S_n \right] = 1. \tag{20}$$

Ahora se modela la pérdida para el portafolio. Sea X la variable aleatoria que representa la pérdida total del portafolio para un horizonte de tiempo fijo T, se tiene que

$$X = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{1}_k L_k.$$

con

$$\mathbf{1}_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \text{ está en } \textit{default}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

Finalmente, el modelo *CreditRisk+* modela la distribución de pérdidas del portafolio. Para esto, esta versión del modelo emplea la función característica, Φ_X, la cual brinda toda la información acerca la distribución de las pérdidas. Para obtener Φ_X condicionada a S, se hace uso de la Propiedad 4. del Teorema 2. y la propiedad de independencia (14).

$$\Phi_{X|S}(z) = \prod_{k=1}^{K} \Phi_{L_k \mathbf{1}_k|S}(z) = \prod_{k=1}^{K} \Phi_{\mathbf{1}_k|S}(L_k \cdot z) \tag{21}$$

Usando la definición, se tiene que la función característica de $\mathbf{1}_k$ condicionada a S está dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{1}_k|S}(z) &= \mathbb{E}\left[e^{-iz\mathbf{1}_k|S}\right] \\ &= \int_0^T e^{iz(1)} p_k^S e^{-p_k^S t} dt + \int_T^\infty e^{iz(0)} p_k^S e^{-p_k^S t} dt \\ &= e^{iz}\left(1 - e^{-p_k^S T}\right) + e^{-p_k^S T}. \end{aligned}$$

Como $p_k^S T$ es proporcional a p_k y usualmente se toma T igual a un año, se tiene que

$$\Phi_{\mathbf{1}_k|S}(z) \approx e^{p_k^S (e^{iz}-1)}. \tag{22}$$

Por tanto, del resultado (22) y uniendo (18) y (21) se obtiene

$$\Phi_{X|S}(z) = exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \left(\alpha_0^k + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k S_n\right)(e^{iL_k z} - 1)\right) + F(z), \tag{23}$$

donde $F(z)$ representa el error generado por el proceso de aproximación.

Teorema 3 . *La función característica de las pérdidas en un portafolio de crédito del modelo estándar de CreditRisk+, está dado por,*

$$\Phi_X(z) = G_X(e^{iz}) = exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_0^k T(e^{iL_k z} - 1)\right) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{1 + \sigma_n^2 T \sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_n^k (1 - e^{iL_k z})}\right)^{\frac{1}{\sigma_n^2}}. \tag{24}$$

Prueba 1 . *Tómese $\{S_n \mid n = 1, \cdots, N\}$ variables independientes e idénticamente distribuidas Gamma con media 1 y varianza σ_n^2, entonces:*

$$\begin{aligned}
\Phi_X(z) &= \mathbb{E}\left[\Phi_{X|S}(z)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \left(\alpha_0^k + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k S_n\right) T(e^{iL_k z} - 1)\right)\right] \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_0^k T(e^{iL_k z} - 1)\right) \mathbb{E}\left[exp\left(\sum_{n=1}^{N} S_n \sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_n^k T(e^{iL_k z} - 1)\right)\right] \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_0^k T(e^{iL_k z} - 1)\right) \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_n^k T(e^{iL_k z} - 1) S_n\right)\right] \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_0^k T(e^{iL_k z} - 1)\right) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{1 + \sigma_n^2 T \sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_n^k (1 - e^{iL_k z})}\right)^{\frac{1}{\sigma_n^2}}.
\end{aligned}$$

Los momentos para el modelo de *CreditRisk+* están dados por

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{K} p_k L_k, \tag{25}$$

$$\mathrm{VAR}[X] = \sum_{k=1}^{K} p_k L_k^2 + \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_n^k p_k L_k\right)^2. \tag{26}$$

4.3. Función de densidad vía Transformada Rápida de Fourier (TRF)

Para cada variable aleatoria X con función de densidad f de valor real, existe una función característica Φ_X y esta determina la distribución de forma única. En el caso especial del modelo *CreditRisk+* la función característica no es siempre integrable. Sin embargo, en este caso hay posibilidad de obtener la función de densidad bajo la estructura especial del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (TRF).

Sea X una variable aleatoria cuya función característica es $\Phi_X(z)$, sea f la función de densidad de X definida en un intervalo $[a,b]$. Se supone f continua en casi todo punto. Para cada g en una clase de funciones apropiada G, se debe cumplir que

$$\int f(x)g(x)dx = \mathbb{E}[g(X)], \tag{27}$$

donde una escogencia apropiada de G está dada por:

$$G = \left\{ g(x) = e^{izx} : z \in \mathcal{Z} \right\},$$

donde $\mathcal{Z}$ es un conjunto finito de números reales.

Note que las funciones g son linealmente independientes, que resulta ser necesario para la aproximación deseada. El valor esperado en (27) para estas funciones g es la función característica evaluada en algún punto $z \in \mathcal{Z}$. Como la función característica es conocida y la función de densidad f es desconocida en (27), se puede usar esta ecuación para obtener f. La aproximación de f está dada por el siguiente algoritmo.

Tomesé Z el número en el que se divide el portafolio[5] *y sean,*

$$\Delta x = \frac{b-a}{Z-1}; \qquad \Delta z = \frac{2\pi}{Z\Delta x}.$$

El valor de Δz se debe tomar de esta manera ya que el algoritmo de TRF se toman $\frac{2\pi}{Z}$ componentes espectrales equiespaciados y donde 2π representa la

[5] Usualmente Z se toma en potencias de 2^u con $u \in \mathbb{N}$, esto se debe a un requerimiento computacional. TRF requiere $Z \log_2 Z$ operaciones para ser calculada.

frecuencia de muestreo. $Z \times Z$ *es una matriz* M_{jw} *para* $j, w = 0, 1, \ldots, Z-1$, *además*

$$\begin{aligned} x_w &= a + w\Delta x, \\ f_w &= f(x_w), \\ z_w &= \begin{cases} w\Delta z \quad si \quad w < \frac{Z}{2} \\ \\ (w-Z)\Delta z \qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases} \\ M_{jw} &= exp\left(2\pi i \frac{jw}{Z}\right). \end{aligned}$$

Se define el conjunto

$$\mathcal{Z} = \{z_w : w = 0, \ldots, Z-1\}.$$

La transformada de Fourier de f *en los puntos* z_w *se puede denotar por* $\Phi_w = \Phi_X(z_w)$, *luego la integral (11) se puede aproximar por la relación*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x)dx \approx \Delta x e^{iza} \sum_{w=0}^{Z-1} e^{izw\Delta x} f(a + w\Delta x).$$

Usando la notación matricial, se tiene la ecuación

$$\Phi_w = \Delta x e^{iaz_w} \sum_{j=0}^{Z-1} M_{wj} f_j.$$

Esto se da si se toma un intervalo adecuado $[a, b]$ *y un número de pasos apropiados. Para determinar la función de densidad* f_w *sólo se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales. Este sistema se puede resolver fácilmente a través de la inversa de* M_{jw} *que está dada por,*

$$M_{jw}^{-1} = \frac{1}{Z} \exp\left(-2\pi i \frac{jw}{Z}\right).$$

Por tanto, la inversa basado en las ecuaciones lineales esta dada por,

$$f_w = \frac{1}{Z\Delta x} \sum_{w=0}^{Z-1} \exp\left(-2\pi i \frac{jw}{Z}\right) e^{-iaz_w} \Phi_w.$$

4.4. *CreditRisk+* aplicando TRF

Aunque la pérdida de un portafolio de créditos es una variable aleatoria discreta, resulta sencillo dar una aproximación de la función de densidad si el número de deudores es grande. Esta función de densidad puede ser determinada haciendo uso del algoritmo de la TRF.

En un portafolio de crédito las pérdidas están acotadas por 0, en el caso que ningún deudor ingrese al default (No pago), y $\sum_{k=1}^{K} L_k$, en el caso que todos los deudores tengan default. Por lo tanto, la función de densidad está definida en el intervalo $\left[0, \sum_{k=1}^{K} L_k\right]$.

Sea Z el número en el que se divide el portafolio, un Z más grande implica un cálculo más fino o de mayor precisión, pero con una mayor carga computacional. Las distancias entre dos puntos de la muestra adyacentes está dada por

$$\Delta x = \frac{1}{Z-1}\sum_{k=1}^{K} L_k; \qquad \Delta z = \frac{2\pi}{Z\Delta x}. \tag{28}$$

Se define

$$z_j = \left(j - \frac{Z}{2}\right)\Delta z.$$

De la ecuación (24) se tiene que la función característica $\Phi_X(z)$ para el modelo *CreditRisk+* está dada por:

$$\Phi_X(z_j) = exp\left(\xi_0(z_j)\right)\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-\sigma_n^2\xi_n(z_j)}\right)^{\frac{1}{\sigma_n^2}}, \tag{29}$$

donde

$$\xi_n(z_j) = \sum_{k=1}^{K} p_k \alpha_n^k (e^{iL_k z_j} - 1), \qquad n = 0, \cdots, N. \tag{30}$$

Haciendo uso del logaritmo natural se puede rescribir la potencia de la ecuación para $\Phi_X(z_j)$ como

$$\Phi_X(z_j) = \exp\left(\xi_0(z_j) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sigma_n^2}\ln\left(1-\sigma_n^2\xi_n(z_j)\right)\right). \tag{31}$$

La representación anterior computacionalmente es más estable que la presentada en (24).

CR+ vía TRF supera algunos de los inconvenientes que se presentan con el modelo estándar; sin embargo, al igual que el modelo original, CR+ usando la trasformada de Fourier no captura las posibles dependencias o relaciones entre diferentes créditos. Por ejemplo, si en un portafolio de crédito existen dos miembros de una misma familia, no es creíble que la probabilidad de default sea independiente para estos dos créditos. Una posible solución para resolver este problema es implementar en el modelo *CR+* matrices aleatorias que permitan modelar todas las posibles correlaciones entre créditos y también entre créditos y los factores de riesgos asociados a los diferentes sectores económicos. Un trabajo cercano a esto es el de Münnix, Schäfer & Guhr (2014)[23] quienes extienden el modelo de Merton (1974)[22] con matrices aleatorias.

5. Conclusiones

El modelo *CreditRisk+* ha tenido un fuerte desarrollo desde su creación en 1997. En su versión original, CR+ se implementa a través de la recursión de Panjer. Aunque se puede incluir factores de riesgo adicionales al riesgo idiosincrático, un número elevado de sectores unido con un portafolio de crédito grande aumenta de manera importante el esfuerzo computacional.

El modelo *CreditRisk+* usando transformada de Fourier supera las debilidades del modelo original en dos aspectos. Por un lado reduce el esfuerzo computacional y, por el otro aumenta la estabilidad de las estimaciones. Sin embargo, *CreditRisk+* vía TRF aún no contempla las posibles correlaciones entre los diferentes créditos del portafolio.

Futuras investigaciones deben relajar el supuesto de independencia entre los créditos del portafolio ya que en general esto no se cumple. Una posible vía para solucionar este problema es usar en el modelo la teoría de matrices aleatorias que permitan incluir las correlaciones entre los créditos y las correlaciones con los factores de riesgo asociados a los diversos sectores económicos.

A. Anexos

A.1. Distribución Gamma

A continuación se describen algunas propiedades de la distribución **Gamma** suponiendo que $E\left[\mu_k\right] = \mu_{\psi_k}$, $var\left(\mu_k\right) = \sigma_k^2$ y $\mu_{\psi_k} = 1$.

$$\begin{aligned}
\mu_{\psi_k} &= \alpha_k \beta_k = 1 \text{ para todo } k \text{, entonces } \alpha_k = \frac{1}{\beta_k}, \\
\sigma_{\psi_k}^2 &= \alpha_k \beta_k^2 = \beta_k \text{ para todo } k \text{, entonces } \alpha_k = \frac{1}{\sigma_k^2}.
\end{aligned}$$

Estos parámentros de Gamma permiten obtener el siguiente resultado

$$\mathrm{E}\left[\mu_i\left(\psi\right)\right] = \overline{P_i} E\left[w_i' \cdot \psi\right] = \overline{P_i}.$$

Como la función de densidad de una Gamma está dada por:

$$f\left(\psi \mid \alpha, \beta\right) = \frac{\psi^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha} \Gamma\left(\alpha\right)} \exp^{-\frac{\psi}{\beta}},$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
f\left(\psi | \alpha\right) &= \frac{\psi^{\alpha-1}}{\frac{1}{\alpha^{\alpha}} \Gamma\left(\alpha\right)} \exp^{-\alpha\psi} \\
&= \frac{\alpha^{\alpha} \psi^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)} \exp^{-\alpha\psi}.
\end{aligned}$$

A.2. Desarrollo para hallar la FGP del Número de Incumplimientos

Asumiendo que los factores de riesgo son independientes y se distribuyen Gamma con media 1 y varianza σ^2 se obtiene:

$$dH\left(\psi\right) = \prod_k \frac{\alpha_k^{\alpha_k} \psi_k^{\alpha_k - 1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)} \exp\left(-\alpha_k \psi_k\right) d\psi_k.$$

Usando este resultado en el teorema 1 se tiene

$$F\left(s\right) = \int_{\psi} \exp\left(\mu(\psi)\left(s-1\right)\right) \prod_k \frac{\alpha_k^{\alpha_k} \psi_k^{\alpha_k - 1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)} \exp\left(-\alpha_k \psi_k\right) d\psi_k.$$

Definiendo

$$f\left(\psi_k\right) = \frac{\alpha_k^{\alpha_k} \psi_k^{\alpha_k - 1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)} \exp\left(-\alpha_k \psi_k\right),$$

se puede ver que:

$$\begin{aligned}
F\left(s\right) &= \int_{\psi} \exp\left(\mu(\psi)\left(s-1\right)\right) \prod_k f\left(\psi_k\right) d\psi_k \\
&= \int_{\Psi} \exp\left(\sum_i P_i\left(\psi\right)\left(s-1\right)\right) \prod_k f\left(\psi_k\right) d\psi_k \\
&= \int_{\psi} \exp\left(\sum_i \overline{P_i} \sum_k \psi_k w_{i,k}\left(s-1\right)\right) \prod_k f\left(\psi_k\right) d\psi_k \\
&= \int_{\psi} \exp\left(\sum_k \psi_k \sum_i \overline{P_i} w_{i,k}\left(s-1\right)\right) \prod_k f\left(\psi_k\right) d\psi_k \\
&= \int_{\psi} \exp\left(\sum_k \psi_k \mu_k\left(s-1\right)\right) \prod_k f\left(\psi_k\right) d\psi_k \\
&= \int_{\psi} \prod_k \exp\left(\psi_k \mu_k\left(s-1\right)\right) f\left(\psi_k\right) d\psi_k.
\end{aligned} \tag{32}$$

Para cada ψ_k se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\int_{\psi_k} \exp\left(\psi_k \mu_k\left(s-1\right)\right) f\left(\psi_k\right) d\psi_k \\
&= \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k - \mu_k\left(s-1\right)}\right)^{\alpha_k} = \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k - \mu_k\left(s-1\right)}\right)^{\alpha_k} \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\sigma_k^2}}{\frac{1}{\sigma_k^2} - \mu_k\left(s-1\right)}\right)^{\frac{1}{\sigma_k^2}} = \left(\frac{1-\theta_k}{1-\theta_k s}\right)^{\left(\frac{1}{\sigma_k^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Esto por propiedades de la función generadora de momentos de una distribución, definida como $M_{\Psi}\left(t\right) = E\left[\exp\left(t\psi\right)\right]$. Siendo $\theta_k = \frac{\sigma_k^2 \mu_k}{1+\sigma_k^2 \mu_k}$. Entonces:

$$F\left(s\right) = \prod_k \left(\frac{1-\theta_k}{1-\theta_k s}\right)^{\left(\frac{1}{\sigma_k^2}\right)}. \tag{33}$$

A.3. Recursion

La recursión que permite encontrar la distribución de pérdidas se define a partir de:

$$G\left(s\right) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n s^n,$$

donde R_n es la probabilidad de perder n unidades. Para este procedimiento se requiere la siguiente proposición:

Proposición 2 .
Sea $G(s)$ una función expresada en series de potencias tal que la derivada del logaritmo de $G\left(s\right)$ es una función racional así:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\log G\left(s\right) &= \frac{1}{G\left(s\right)}\frac{dG\left(s\right)}{ds} \\ &= \frac{A\left(s\right)}{B\left(s\right)} = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_r s^r}{b_0 + b_1 s + \cdots + b_t s^t}. \end{aligned}$$

Entonces los coeficientes de la serie de potencias R_n se pueden calcular así:

$$R_{n+1} = \frac{1}{b_0\left(n-1\right)}\left(\sum_{i=0}^{\text{mín}(r,n)} a_i R_{n-i} - \sum_{j=0}^{\text{mín}(t-1,n-1)} b_{j+1}\left(n-j\right)R_{n-j}\right).$$

Tomando logaritmo en la ecuación 9 se tiene:

$$\log G\left(s\right) = \sum_k \frac{1}{\sigma_k^2}\left(\log(1-\theta_k) - \log(1-\theta_k\pi_k\left(s\right))\right), \tag{34}$$

derivando la ecuación 34 con respecto a s se tiene:

$$\frac{d}{ds}\log G\left(s\right) = \sum_k \frac{\frac{\theta_k}{\mu_k\sigma_k^2}\sum_i v_i w_{i,k}\overline{P}_i s^{v_i-1}}{1-\frac{\theta_k}{\mu_k}\sum_i w_{i,k}\overline{P}_i s^{v_i}}. \tag{35}$$

De la ecuación (35) y la Proposición 2. se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\frac{A(s)}{B(s)} &= \sum_k \frac{\frac{\theta_k}{\mu_k \sigma_k^2} \sum_i v_i w_{i,k} \overline{P}_i s^{v_i - 1}}{1 - \frac{\theta_k}{\mu_k} \sum_i w_{i,k} \overline{P}_i s^{v_i}} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\theta_k}{\sigma_k^2 \mu_k} \sum_{i=0}^{n} v_i w_{i,k} \overline{P}_i s^{v_i - 1} \right) \left(\prod_{j \neq k}^{k} \left(1 - \frac{\sigma_k}{\mu_k} \sum_{i=0}^{n} w_{i,k} \overline{P} i s^{v_i} \right) \right)}{\prod_{k=1}^{K} \left(1 - \frac{\sigma_k}{\mu_k} \sum_{i=0}^{n} w_{i,k} \overline{P}_i s^{v_i} \right)} .
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Referencias

[1] Altman, E.I., *Measuring corporate bond mortality and performance.* Journal of Finance September, 909-922, 1989.

[2] Altman, E.I., *Credit risk measurement: Developments over the last 20 years*. Journal of Banking & Finance September, 1721-1742, 1998.

[3] Bayona H., *Cálculo de las Reservas para el Aval de Cheques Posfechados Empleando Un Enfoque Actuarial Basado En El Modelo CreditRisk+*, 2010.

[4] Billingsley P., *Probability and measure*. Willey and Sons. 1995.

[5] Black F. & Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 1973.

[6] Blanco, L., Muñoz M., *Análisis Estocástico.* Universidad Nacinal de Colombia, Bogotá 2003.

[7] *Comité de supervisión bancaria de Basilea, Convergencia Internacional de Medidas y Normas de Capital*, Basilea Suiza 2004.

[8] *Credit Suisse First Boston* , CreditRisk+ A credit risk management framework 1997.

[9] Daykin, C.D., Pentikäinen, T., Personen, M., *Practical risk theory for actuaries*, Chapman and Hall, England 1994.

[10] Deshpande, A., *Comparing the Vaalue at Risk Performance of the CreditRisk$^+$ and its Enhancement: A large*, Methodol Comput Appl Probab, 16:1009-1023, 2014.

[11] Deshpande, A., Srikanth K., *The CreditRisk+ Model with General Sector Correlations*, Springer-Verlag, 2009.

[12] Fritelli and Gianin, *Putting Order in Risk Measures*, Journal of Banking and Finance, 2002.

[13] Giesecke, K., *CreditRisk Modelling and Valuation: An Introduction*, Management Science & Enginneering, 2004.

[14] Gordy, M., *A Comparative Anatomy of Credit Risk Models*, Journal of Banking and Finance, 24, pp. 119 - 149, 2000.

[15] Gordy, M., *A Saddlepoint approximation of CreditRisk*$^+$, Journal of Banking and Finance, 26, pp. 1335 - 1353, 2002.

[16] Gundlach M., Lehrbass F. *Credit Risk*$^+$ *in the banking industry.* Springer-Verlang. 2004.

[17] Hull J., White A., *Valuing Credit Default Swaps II: Modeling Default Cor-relations*, Working Paper in progress, University of Toronto, 2000.

[18] Inui, Kijima, *On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure*, Journal of Banking and Finance 29 853-864, 2005.

[19] Jarrow A., Stuart M., *Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk*, The Journal of Finance, Vol. L, No. 1, Marzo 1995.

[20] Melchiori M., *CreditRisk+ by Fast Fourier Transform*, Universidad Nacional del litoral, Argentina, 2004.

[21] Medhi J., *Stochastics Processes*. 2nd Ed. New Delhi 1999.

[22] Merton, R., *On the pricing of corporate debt : The Risk Structure of Interest Rates*. Journal of Finance 449-470, 1974.

[23] Münnix, M.C., Schäfer R., Guhr T.*A Random Matrix Approach to CreditRisk*. PLoS ONE 9(5): e98030. doi, 2014.

[24] Reib O., *Fourier inversion algorithms for generalized Credit Risk*$^+$ *models and an extension to incorporate market risk*. WIAS-Preprint No. 817, 2003.