



# CAMPOS VECTORIALES TIPO KILLING EN GEOMETRÍA RIEMANNIANA

# CAMPOS VECTORIALES TIPO KILLING EN GEOMETRÍA RIEMANNIANA

Paola Andrea Clavijo Hernández

Tesis presentada al Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,  
Pontificia Universidad Javeriana para optar por el grado de Matemáticas

Dirigida por:  
Andrés Vargas Ph.D.

Mayo , 2015  
Bogotá - Colombia

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Contexto histórico . . . . .	8
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1. Geometría Riemanniana . . . . .	11
2.2. Álgebra de Lie de campos vectoriales . . . . .	14
2.2.1. Derivada de Lie . . . . .	15
2.3. Aplicaciones conformes . . . . .	16
<b>3. Campos vectoriales de Killing</b>	<b>19</b>
3.1. Caracterización de campos de Killing . . . . .	20
3.2. El álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(M)$ . . . . .	22
3.3. Técnica de Bochner . . . . .	23
3.3.1. Campos de Killing con curvatura positiva y negativa .	23
3.4. Ejemplos . . . . .	25
<b>4. Campos conformes de Killing</b>	<b>29</b>
4.1. Caracterización de campos de Killing conformes . . . . .	29
4.2. Ejemplos . . . . .	31



# Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la oportunidad de culminar uno de mis proyectos vitales, a mi mamá, hermana, mis tíos y mi abuela por darme los medios y la fuerza para alcanzarlos y a todos aquellos que estuvieron a mi lado en el proceso.

A la Pontificia Universidad Javeriana, la Carrera de Matemáticas particularmente a Andrés Vargas, por la disposición constante para trabajar.



# Capítulo 1

## Introducción

En geometría Riemanniana clásica, los vectores de Killing y las isometrías fueron inicialmente estudiados desde un punto de vista local, es decir, se estudiaban sus propiedades en vecindades y entornos de algún punto del espacio. Posteriormente se hizo más énfasis en estudiar las propiedades globales de estos campos y su relación con la geometría del espacio en cuestión. Estos análisis, permitieron obtener importantes resultados en la física, en particular en relatividad general, para entender la geometría del espacio-tiempo.

Observando la importancia para la geometría de los campos vectoriales de Killing, surge el propósito de este trabajo de grado, cuyo objetivo es hacer uso de los conceptos básicos de la geometría Riemanniana para realizar un estudio de estas estructuras.

Para llevar a cabo lo anterior, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Comprender y utilizar conceptos fundamentales tanto algebraicos y geométricos como son los grupos y álgebras de Lie, las derivadas de Lie, las métricas y conexiones Riemannianas, las curvaturas, las aplicaciones conformes e isométricas y las geodésicas, entre otros.
- Estudiar las definiciones y propiedades de campos vectoriales especiales en variedades Riemannianas. En particular, los campos vectoriales de Killing y de Killing conformes y sus relaciones con las estructuras geométricas que preservan.
- Presentar un panorama general de los resultados más importantes que se conocen sobre estos campos y otros relacionados que aparecen más

recientemente en la literatura.

- Calcular explícitamente ejemplos de campos vectoriales de Killing y Killing conformes sobre algunas variedades Riemannianas apropiadas que lo permitan.
- Revisar el comportamiento de los ejemplos calculados, para comprender su significado geométrico y algebraico.

Este documento inicia con una breve descripción histórica de los campos vectoriales de Killing, continuando con una introducción de definiciones y conceptos preliminares necesarios, para, en los dos últimos capítulos analizar a profundidad los campos vectoriales de Killing y de Killing conformes, sus propiedades, caracterizaciones y teoremas importantes. Concluyendo con el cálculo de algunos ejemplos clásicos y de distintos grados de complejidad.

## 1.1. Contexto histórico

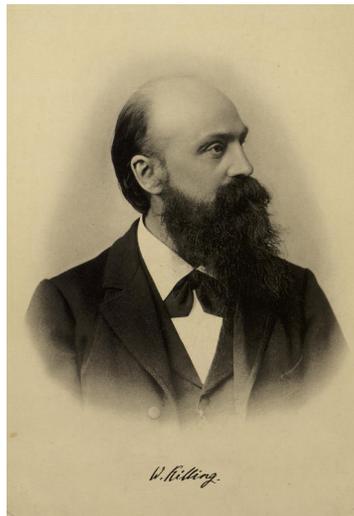


Figura 1.1: Wilhelm Killing

Para hablar de la historia de los campos vectoriales de Killing, hay que iniciar mencionando a Wilhelm Killing por quien se atribuyó el nombre a estos campos vectoriales.

Wilhelm Killing fue un matemático alemán, nacido el 10 de mayo de 1847 y quien fue actor importante en el desarrollo de la teoría de grupos y álgebras de Lie, y de la geometría no euclidiana. Sobre la teoría de Lie, tal vez, el aporte más importante de Killing fue tratar los problemas y propiedades en los que Sophus Lie trabajaba, desde la geometría y no desde las ecuaciones diferenciales. Con lo anterior Killing introdujo conceptos fundamentales de la teoría moderna, como, las raíces de un álgebra de Lie y las bases de estas.

Sobre la geometría no euclidiana su aporte más importante se preserva en el artículo *ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE* (Fundamentos de geometría, 1892). En este ambicioso artículo Killing introduce más que solo conceptos. El busca presentar una nueva forma de hacer geometría, propósito evidenciado en los 7 axiomas enunciados con un estilo propio muy marcado y que para su época, rompía con los estándares de escribir verdades matemáticas, aquí se muestra el axioma 5:

*“Un cuerpo que antes de un movimiento no tiene parte en común con un espacio y se encuentra en su totalidad dentro de ese espacio después del movimiento, alcanza en el curso del movimiento una posición en el que sólo una parte de ella se encuentra dentro de ese espacio.”* [17, pág 183]

Mas allá, de presentar su estilo propio, Killing brinda por primera vez aportes fundamentales para la geometría que se trabaja hoy en día, principalmente tres:

1. Killing dice que sus primeros siete axiomas definen una teoría equivalente a la teoría general de los grupos transitivos continuos finitos de transformaciones.
2. Trata de dar una definición topológica del número de dimensiones de un espacio.
3. Presenta una contribución de valor permanente: El concepto de lo que ahora llamamos campos vectoriales de Killing, dando la primera definición de estas estructuras matemáticas [17, pag 184]:

*Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional, tal que la métrica se define en términos de una carta  $U$  por  $g_{ij} = \mu(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ . Sea  $X$  un campo de vectores en  $M$  tal que ,  $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Entonces  $X$  es un campo*

*vectorial de Killing si el  $\xi^i$  es una solución del sistema de Killing de ecuaciones diferenciales;*

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \xi^k + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}.$$

Posterior al artículo de Killing se abre en la historia de las matemáticas, un campo de estudio sobre los campos vectoriales de Killing, en el cual se han generado importantes resultados para la teoría que conocemos hoy. En 1939 Myers y Steenrod obtienen el primer resultado en la teoría global de isometrías a través del siguiente teorema: “El grupo de isometrías de una variedad riemanniana es un grupo de Lie” Myers and Steenrod *Annals of Mathematics Second Series*, Vol. 40, No. 2 (Apr., 1939), pp. 400-416. En 1990 Nomizu escribe un artículo sobre la existencia local y global de campos vectoriales de Killing resaltando el siguiente teorema: “El conjunto de todos los campos vectoriales de Killing sobre una variedad Riemanniana forma un algebra de Lie de dimensión finita sobre el campo de los números reales” [11].

En los últimos 50 años el estudio de los campos de Killing ha seguido avanzando, especialmente, en términos de aplicación a la física y relatividad general.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se introducirán nociones básicas que serán fundamentales en el desarrollo de los capítulos posteriores. Se presentaran contenidos propios de la geometría diferencial y Riemanniana y del álgebra de Lie de campos vectoriales. Para estudios más detallados de estos temas se sugiere ver [3].

### 2.1. Geometría Riemanniana

**Definición 2.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, el fibrado vectorial tangente, se define, como  $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$ . Este conjunto está dotado de la estructura diferenciable inducida por  $M$ .

**Definición 2.2.** Un campo vectorial, es una sección diferenciable

$$X : M \longrightarrow TM.$$

El conjunto de todas las secciones diferenciables sobre una variedad, se denota por:

$$C^\infty(TM) = \{X : X \text{ es campo vectorial}\}.$$

**Definición 2.3.** Una variedad diferenciable  $M$  se puede equipar con una métrica

$$g : C^\infty(TM) \otimes C^\infty(TM) \longrightarrow C^\infty(M).$$

siendo  $g$  un 2-tensor que satisface:

- **Simetría:** Para todo  $p \in M$  y dados  $X_p, Y_p \in T_p M$  tenemos

$$g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p).$$

- **Positividad:** Para todo  $p \in M$  se cumple  $g_p(X_p, X_p) \geq 0$ .

Esta métrica se denomina métrica Riemanniana.

**Definición 2.4.** El par  $(M, g)$  se llama variedad Riemanniana.

**Ejemplo 2.5.** Se define la métrica euclidiana como:

$$g_p : \begin{array}{ccc} T_p M \times T_p M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left( \sum a_i \frac{d}{dx_i}, \sum b_j \frac{d}{dx_j} \right) & \longrightarrow & \sum a_i b_i. \end{array}$$

Para  $g$  se cumple que:

- Simetría

$$g_p^{can}(X_1, X_2) = \sum a_{1i} a_{2i} = \sum a_{2i} a_{1i} = g_p^{can}(X_2, X_1).$$

- Definida positiva

$$g_p^{can}(X, X) = \sum a_i^2 \geq 0.$$

Se suele denotar como  $(g_p^{can})_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ .

**Ejemplo 2.6.** Sea  $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$  una inmersión. Si  $N$  tiene una estructura Riemanniana,  $f$  induce una estructura Riemanniana sobre  $M$ .

$$g_p^M : \begin{array}{ccc} T_p M \times T_p M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longrightarrow & g_p^M(u, v) := g_p^N(T_p f(u), T_p f(v)). \end{array}$$

Se considerará ahora la métrica canónica de  $\mathbb{S}^{n-1}$  como métrica inducida de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Sea

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & \sum x_i^2 = 1 \end{array}$$

$$h^{-1}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i^2 = 1 \right\} = \mathbb{S}^{n-1}.$$

**Definición 2.7.** Una conexión  $D$  sobre una variedad  $M$  es una aplicación  $D : C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(TM)$  tal que:

- $D_X Y$  es lineal en  $X$ .
- $D_X(fZ) = (Xf)Z + fD_X Z$  con  $f$  función.

**Definición 2.8.** Sobre una variedad  $M$ , existe una única conexión  $\nabla$ , tal que:

- $[X, Z] = \nabla_X Z - \nabla_Z X$ .
- $Yg(X, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z)$ .

$\nabla$  se llama conexión de Levi-Civita.

**Definición 2.9.** Sea  $X \in C^\infty(TM)$ , la divergencia de  $X$  sobre  $M$  esta definida como:

$$\operatorname{div} X := \operatorname{tr}(\nabla X).$$

donde, :

$$\operatorname{tr}(\nabla X) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

Con  $e_1, e_2, \dots, e_n$  elementos de una base ortonormal.

**Definición 2.10.** Se define el tensor de curvatura de Riemann como :

$$R : C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(TM)$$

tal que

$$R(X, Y)Z := [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z.$$

**Definición 2.11.** Se define el tensor de Ricci como:

$$\operatorname{Ric} : C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(TM)$$

tal que:

$$\operatorname{Ric}(X, Y) := \sum_{i=1}^n g(R(X, e_i)e_i, Y).$$

Con  $e_1, e_2, \dots, e_n$  elementos de una base ortonormal.

**Definición 2.12.** Se define el Hessiano como un 2-tensor tal que:

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) := X(Yf) - \nabla_X Yf.$$

## 2.2. Álgebra de Lie de campos vectoriales

**Definición 2.13.** Sean  $X, Y \in C^\infty(TM)$ , el bracket de campos vectoriales para  $p \in M$  se define como:

$$[X, Y]_p f = (X_p Y - Y_p X) f.$$

Donde  $X_p Y_p \in T_p M$ .

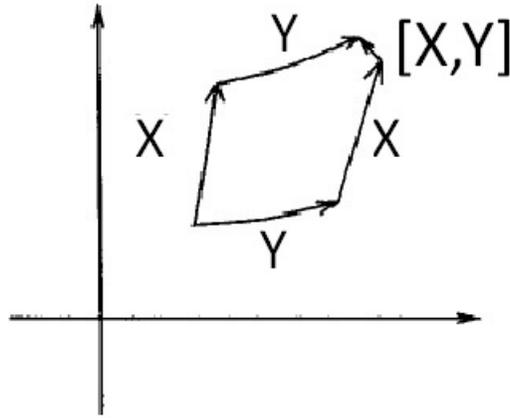


Figura 2.1: Interpretación geométrica del bracket de Lie.

**Definición 2.14.** Un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial  $\mathfrak{g}$ , dotado con una función bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , llamado bracket, tal que:

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
2.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ .

**Definición 2.15.** Una  $C^\infty$ -curva  $\gamma : I \rightarrow M$  sobre  $M$  se llama geodésica si, su campo tangente  $\gamma'$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$ , es decir:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

**Ejemplo 2.16.** El toro se obtiene al girar una circunferencia en el plano  $XZ$  que no corte al eje  $Z$ . Las funciones que describen el toro son  $u(\theta) = a\cos\theta + b$  y  $v(\theta) = a\sin\theta$ , donde  $b > a > 0$ . Veamos que  $u' = 0$  para  $\theta = 0, \pi$  que son la circunferencia interior y exterior del toro. Obteniendo dos geodésicas. Para encontrar las demás, se debe integrar la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}{u(\theta)\sqrt{c(u(\theta)^2 - 1)}}.$$

Remplazando adecuadamente con la parametrización del toro, las geodésicas quedan caracterizadas por:

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{ak}{(a + \cos\theta b)\sqrt{c(a + \cos\theta b)^2 - 1}}.$$

### 2.2.1. Derivada de Lie

**Definición 2.17.** La derivada de Lie, llamada así por Sophus Lie mide el cambio de un campo vectorial, a lo largo del flujo de otro campo. La derivada de Lie, se puede calcular sobre cualquier variedad diferenciable  $M$ . Formalmente, la derivada de Lie se define como:

$$\mathfrak{L}_X(f) := \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_t^* f - f}{t} \right).$$

Donde  $\{\varphi_t\}$  es el flujo de  $X$ , y  $\{\varphi_t^*\}$  es el pullback.

En especial para funciones, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_X(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_t^* f - f}{t} \right) (x), \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(\varphi_t(x)) - f(x)}{t} \right), \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(\varphi(x, t))}{t} - \frac{f(x)}{t} \right), \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(\varphi_x(t))}{t} - \frac{f(x)}{t} \right), \\ &= \varphi'(x) |_{t=0} f, \\ &= X(f)(x). \end{aligned}$$

Así, la derivada de Lie para funciones es:

$$\mathfrak{L}_X(f) = X(f).$$

Utilizando la definición formal, se puede establecer que la derivada de Lie entre campos vectoriales es:

$$\mathfrak{L}_X(Y) = [X, Y].$$

Para tensores:

$$\mathfrak{L}_X(S \otimes T) = (\mathfrak{L}_X S) \otimes T + S \otimes \mathfrak{L}_X T.$$

### 2.3. Aplicaciones conformes

**Definición 2.18.** Sean  $(M, g^M)$  y  $(N, g^N)$  variedades Riemannianas y  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Decimos que  $f$  es isometría si

$$g_p^M(X, Y) = g_f^N(T_p f(X), T_p f(Y)).$$

**Definición 2.19.** Una transformación conforme, es una función  $f$  que preservan ángulos, formalmente se define sobre variedades Riemannianas como: Sean  $(M, g^M)$  y  $(N, g^N)$  variedades Riemannianas y  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo, decimos que  $f$  es transformación conforme si

$$g_p^M(X, Y) = \lambda g_{f(p)}^N(T_p f(X), T_p f(Y)).$$

con  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función de valor real positivo, llamada factor conforme asociado.

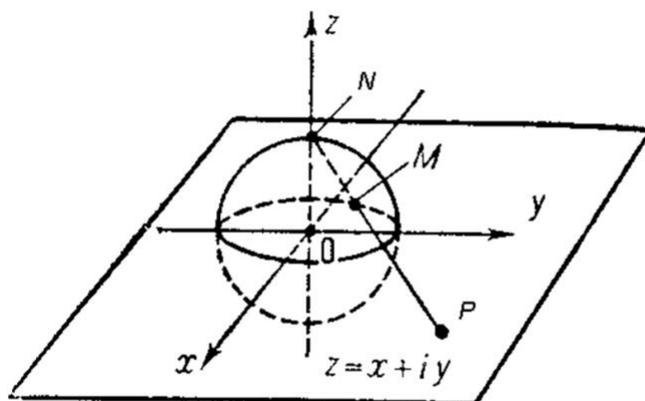


Figura 2.2: Proyección estereográfica, ejemplo 2.20

**Ejemplo 2.20.** Sea  $\mathbb{S}^2$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $N = (0, 0, 1)$  el polo norte de  $\mathbb{S}^2$ . Sea  $M \in \mathbb{S}^2$  con  $M \neq N$ , tal que la línea que une a  $N$  y a  $M$  interseca el plano  $xy$  en el punto  $P$ . Se define la proyección estereográfica como la siguiente aplicación:

$$\pi : \mathbb{S}^2 - N \Rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Con  $\pi$  definido como:

$$\pi(x, y, z) := \frac{x + y}{1 - z}.$$

Se puede comprobar que la inversa  $\pi^{-1}$  de  $\pi$  es

$$\pi^{-1}(x + y) = \frac{(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)}{1 + x^2 + y^2}.$$

Para comprobar que  $\pi$  es una transformación conforme, se debe garantizar que preserve ángulos:

Sea  $\theta$  el ángulo entre el eje real y una línea cualquiera que atraviesa un punto  $p$ , tal que, para los puntos en cada una de las anteriores líneas, se pueden parametrizar como:

$$z = p + t,$$

$$z = p + t(\cos \theta + \sin \theta).$$

para  $t \in \mathbb{R}$ .

Estos mismos puntos, sobre la esfera, se reescriben como:

$$r(t) = \frac{(2(p+t), 0, (p+t)^2 - 1)}{1 + (p+t)^2},$$

$$s(t) = \frac{(2(p+t \cos \theta), 2t \sin \theta, (p+t \cos \theta)^2 + t^2 \sin^2 \theta - 1)}{1 + (p+t \cos \theta)^2 + t^2 \sin^2 \theta}.$$

Calculando respectivamente los vectores tangentes:

$$r'(0) = \frac{(2(p^2 - 1), 0, 4p)}{(1 + p^2)^2},$$

$$s'(0) = \frac{(2(p^2 - 1) \cos \theta, 2(1 + p^2) \sin \theta, 4p \cos \theta)}{(p^2 + 1)^2}.$$

Ahora, sea  $\phi$  el ángulo entre los vectores tangentes:

$$\cos \phi = \frac{(4(p^2 - 1)^2) \cos \theta + 16p^2 \cos \theta}{\sqrt{4(p^2 - 1)^2 + 16p^2} \sqrt{4(p^2 - 1)^2 \cos^2 \theta + 4(1 + p^2)^2 \sin^2 \theta + 16p^2 \cos^2 \theta}},$$

$$= \cos \theta.$$

Por lo tanto  $\pi$  es una aplicación conforme.

# Capítulo 3

## Campos vectoriales de Killing

El objetivo principal de este capítulo es introducir los contenidos mas importantes en relación a los campos vectoriales de Killing, objeto principal de estudio de este documento. Haciendo un recorrido por las definiciones basicas, caracterizaciones y propiedades que permiten determinar los campos de Killing sobre variedades Riemannianas.

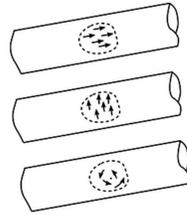


Figura 3.1: Campos de Killing en un cilindro: El cilindro tiene tres simetrías locales, sin embargo solo dos de ellas pueden extenderse a campos vectoriales de Killing

**Definición 3.1.** Un campo vectorial de Killing (CVK de ahora en adelante), es un campo vectorial sobre una variedad Riemanniana cuyo flujo preserva la métrica, es decir los CVK son los generadores infinitesimales de isometrías sobre la variedad[12]. Definiéndolo en términos de la derivada de Lie, un campo vectorial de Killing (CVK) sobre una variedad Riemanniana es un

campo vectorial  $X$  para el cual la derivada de Lie se anula, es decir:

$$\mathfrak{L}_X(g) = 0.$$

La anterior expresión es equivalente, en coordenadas locales a la ecuación de Killing:

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0.$$

**Teorema 3.2.** *Un CVK  $X$  sobre  $M$ , tiene longitud constante, si y sólo si, toda curva integral de  $X$  es una geodésica.*

*Demostración.* Como  $X$  es de Killing se garantiza  $\mathfrak{L}_X g(X, Y) = 0$ . Por propiedades de la derivada de Lie:

$$\begin{aligned} Xg(X, Y) - g(L_X X, Y) - g(X, L_X Y) &= 0 \\ g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_X Y) - g([X, X], Y) - g(X, [X, Y]) &= 0 \\ g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_Y X) &= 0. \end{aligned}$$

Si la curva es geodésica, se cumple que  $\nabla_X X = 0$ . Así, la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} g(X, \nabla_Y X) &= 0, \\ \nabla_Y g(X, X) &= 0. \end{aligned}$$

Es decir,  $X$  tiene longitud constante.

Recíprocamente, si  $X$  tiene longitud constante  $\nabla_Y g(X, X) = 0$ , es decir:  $g(\nabla_X X, Y) = 0$  luego,  $\nabla_X X = 0$ , concluyendo la prueba.  $\square$

### 3.1. Caracterización de campos de Killing

En esta sección, se enunciarán y demostrarán tres proposiciones que son útiles para encontrar y determinar los campos vectoriales de Killing sobre una variedad Riemanniana.

**Proposición 3.3.** Sea  $X$  un campo vectorial, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $X$  es CVK; es decir  $\mathfrak{L}_X g = 0$ .
2. Para todo  $Y, Z \in C^\infty(TM)$  se cumple:

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]).$$

3.  $\nabla_X$  es anti simétrico relativo a  $g$ ; es decir  $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$  para todo  $Y, Z \in C^\infty(TM)$ .

*Demostración.* Veamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{L}_X g = \mathfrak{L}_X(g(Y, Z)) - g(\mathfrak{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathfrak{L}_X Z), \\ &= Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]), \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]), \\ &= g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(Y, \nabla_X Z - [X, Z]). \end{aligned}$$

Si  $\mathfrak{L}_X g = 0$ ,

$$g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) = -g(Y, \nabla_X Z - [X, Z]).$$

□

**Proposición 3.4.** *Un campo vectorial es de Killing si y solo si todos los flujos  $\varphi_t$  sobre  $X$  son isometrías.*

*Demostración.* Si cada  $\varphi_t$  es una isometría, se tiene que  $\varphi_t^*(g) = g$ .

Así, aplicando la definición formal de la derivada de lie sobre  $g$ , se obtiene:

$$\mathfrak{L}_X g = 0.$$

Por lo tanto,  $X$  es de Killing.

Recíprocamente, Sea  $\mathfrak{L}_X g = 0$ . Sea  $\varphi_t$  un flujo local de  $X$ . Si  $v$  es un vector tangente en el dominio del flujo, entonces  $w = d\varphi_s(v)$  para  $s$  suficientemente pequeño. Bajo la definición de derivada de Lie

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(d\varphi_t(w) - g(w, w))) = 0.$$

Por propiedades algebraicas se cumple que  $\varphi_s \varphi_t = \varphi_{s+t}$ . Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(d\varphi_{s+t}, d\varphi_{s+t}(v) - g(d\varphi_s(v), d\varphi_s(v)))) = 0.$$

Esto quiere decir, que la función real:

$$s \rightarrow g(d\varphi_s(v), d\varphi_s(v))$$

tiene derivada 0 por lo tanto es constante. Así,  $g(d\varphi_s(v), d\varphi_s(v)) = g(v, v)$ .

Por lo tanto  $\varphi$  es isometría. □

**Lema 3.5.** *Sea  $X$  CVK sobre  $M$ . Para todo  $p \in M$ ,  $X$  está determinado por  $X_p$  y  $\nabla_{X_p}$ .*

**Proposición 3.6.** *Un campo vectorial  $X$  sobre  $M$  una variedad Riemanniana, es un CVK, si y sólo si:*

- *La divergencia de  $X$  con respecto a la conexión de Levi-civita se anula.*
- *$\forall U \subset M, f \in C^\infty(U)$  tal que  $X(f) = 0$ , entonces  $[X, \nabla f] = 0$*

**Observación 3.7.** Esta proposición es un caso específico de una propiedad que sera enunciada y demostrada mas adelante.

## 3.2. El álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(M)$

**Lema 3.8.** *El conjunto de todos los CVK sobre la variedad  $M$  de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathfrak{iso}(M, g)$ , es un álgebra de Lie de dimensión menor o igual a  $\frac{(n+1)n}{2}$ .*

*Demostración.* Veamos primero que:

- i)  $\mathfrak{L}_X$  es lineal en  $X$ . Así, cualquier combinación de CVK es de Killing.
- ii)  $[\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y] = \mathfrak{L}_{[X, Y]}$ . Así, un bracket de CVK es Killing.

Veamos porque:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y]f &= \mathfrak{L}_X \mathfrak{L}_Y f - \mathfrak{L}_Y \mathfrak{L}_X f \\ &= XYf - YXf, \\ &= [X, Y]f. \end{aligned}$$

Es decir, se comporta como un homomorfismo.

Por lo anterior, si  $L_X = L_Y = 0$  entonces  $L_{[X, Y]} = 0$ . Por lo tanto  $\mathfrak{iso}(M, g)$  es un álgebra de Lie.

Ahora bien, por el lema 3.5, sea  $p \in X$  se puede establecer que el mapa  $X \rightarrow (X_p, (\nabla X)_p)$  es lineal y tiene kernel trivial. Así,

$$\dim(\mathfrak{iso}(M, g)) \leq \dim T_p M + \dim(\text{SO}(n)),$$

$$\begin{aligned}
&= n + \frac{n(n-1)}{2}, \\
&= \frac{2n + n(n-1)}{2}, \\
&= \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Donde  $SO(n)$  son todas las transformaciones antisimétricas.  $\square$

### 3.3. Técnica de Bochner

En esta sección se presentara el comportamiento de los CVK bajo la curvatura de Ricci, utilizando la técnica de Bochner.

Para iniciar, se enunciaran dos lemas necesarios para el trabajo posterior, para detalles de las pruebas, se puede ver [13].

**Lema 3.9.** [13] *X es un CVK si y solo si*

$$v \rightarrow \nabla_v X.$$

*es un 1-tensor anti simétrico.*

**Lema 3.10.** [13] *Sea X un CVK sobre M y considere  $f = \frac{1}{2}g(X, X) = \frac{1}{2}|X|^2$ , entonces:*

1.  $\nabla f = -\nabla_X X$
2.  $\text{Hess } f(v, v) = g(\nabla_v X, \nabla_v X) - R(v, X, X, v)$
3.  $\Delta f = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X)$

#### 3.3.1. Campos de Killing con curvatura positiva y negativa

**Teorema 3.11** (Teorema de Bochner(1946)). *Sea M compacta , orientada y con  $\text{Ric} \leq 0$ .Entonces, todo X CVK sobre M es paralelo. Adicionalmente, si  $\text{Ric} \leq 0$ ,entonces no existen CVK no triviales.*

*Demostración.* Sea  $f$  como en el lema 3.10 para  $X$  un CVK. Aplicando el teorema de Stokes para variedades ( ver [13, pag 380]), y bajo la condición de  $\text{Ric} \leq 0$ :

$$0 = \int_M \Delta f \, \text{dvol},$$

Por la condición 3 del lema 3.10

$$\begin{aligned} &= \int_M (\text{Ric}(X, X) + |X|^2) \, \text{dvol}, \\ &\geq \int_M |X|^2 \, \text{dvol}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|X| = 0$  y así,  $X$  debe ser paralelo. Adicionalmente,  $\text{Ric}(X, X) \leq 0$ , luego

$$\int_M -\text{Ric}(X, X) \, \text{dvol} = 0$$

por lo que  $\text{Ric}(X, X) = 0$ . Si  $\text{Ric} \leq 0$ , implica  $X = 0$ . □

**Teorema 3.12** (Berger,1965). *Si  $M$  es una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , compacta y con curvatura seccional positiva entonces todo campo vectorial  $X$  tiene un cero.*

*Demostración.* Sea  $f = \frac{1}{2}|X|^2$  igual que en lema 3.10 para  $X$  un CVK. Asumamos que  $X$  no tiene ceros. Lo anterior implica,  $f$  tiene un mínimo positivo en  $p \in M$ , luego  $\text{Hess } f|_p \geq 0$ . Además, por la condición 2 del lema 3.10, si  $X, V$  campos vectoriales :

$$\text{Hess } f(V, V) = g(\nabla_V X, \nabla_V X) - R(V, X, X, V).$$

Adicionalmente, por hipótesis si  $X, V$  son linealmente independientes  $g(R(V, X), X, V) \geq 0$ . Así, encontraremos  $V$  tal que  $\text{Hess } f(V, V) \leq 0$  cerca a  $p$ , llegando a una contradicción:

Sabemos que  $f$  tiene un mínimo en  $p$  y  $\nabla f|_p = (-\nabla_X X)|_p$ . Por lo tanto, el mapa  $T_p M \rightarrow T_p M$  definido por  $v \rightarrow \nabla_X X$  tiene por lo menos un cero. Por otro lado la dimensión par de  $T_p M$ , asegura, por la conjetura de Hopf (ver [13]), que existe al menos un  $v$ , vector propio linealmente independiente de  $X$ , que es cero, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(v, v) &= g(\nabla_v X, \nabla_v X) - R(v, X, X, v), \\ &= -R(v, X, X, v) \leq 0. \end{aligned}$$

Llegando a una contradicción.

Por lo tanto  $X$  tiene por lo menos un cero.  $\square$

### 3.4. Ejemplos

**Ejemplo 3.13.** Si  $v \in \mathbb{R}^n$ , sea  $V^*$  el campo vectorial  $p \rightarrow v_p$ .

Como  $V^*$  es paralelo, es de Killing. El flujo de  $V^*$  consiste de todas las traslaciones  $\varphi_t(p) = p + tv$ . (Traslación infinitesimal)

**Ejemplo 3.14.** Sean  $i, j, k$  las coordenadas naturales sobre  $\mathbb{R}^3$ . Las traslaciones infinitesimales sobre  $\mathbb{R}^3$  tienen bases  $\partial_t, \partial_x, \partial_y$ . Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

una base para  $\mathbb{R}^3$ .

Se obtienen los siguientes CVK:

$$\begin{aligned} A^* &= x\partial_z - z\partial_x, \\ B^* &= y\partial_z - z\partial_y, \\ C^* &= -y\partial_x + z\partial_y. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.15.** Sea  $X := L_z(x, y, z) = y\frac{d}{dx} - x\frac{d}{dy}$  sobre  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Calculemos su conexión de Levi-civita asociada y analizaremos los campos vectoriales de Killing respectivos.

Sea  $V \in C^\infty(TM)$  un campo vectorial definido como:

$$V = v_1\partial_x + v_2\partial_y + v_3\partial_z.$$

Así,  $\nabla_V X$  es ,

$$v_1 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \partial_x - v_1 \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right) \partial_y + v_2 \left( \frac{\partial y}{\partial y} \right) \partial_x - v_2 \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) \partial_y + v_3 \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right) \partial_x - v_3 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right) \partial_y.$$

Reduciendo la expresión a:

$$\nabla_V X = v_2\partial_x - v_1\partial_y.$$

Sobre el CVK asociado, se puede ver que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_X g(V, X) &= g(\nabla_V X, Z) + g(\nabla_Z X, V), \\ &= (v_2 z_1 - z_2 v_1) + (z_2 v_1 - v_2 z_1) = 0.\end{aligned}$$

Es decir, que  $X$  en si mismo es un CVK sobre  $\mathbb{S}^2$ .

**Observación 3.16.** De manera análoga al ejemplo 3.15 se pueden establecer las 3 rotaciones de la esfera como campos vectoriales de Killing:

- $L_y(x, y, z) := z\partial_x - x\partial_z$ .
- $L_x(x, y, z) := y\partial_z - z\partial_y$ .

En el siguiente ejemplo, presentaremos una aplicación de la caracterización 3.6. Antes de iniciar, enunciamos la siguiente proposición:

**Proposición 3.17** (Hodge-Helmholtz). *Sea  $X$  un campo vectorial sobre  $M$ , existe una única descomposición:*

$$X = F + U.$$

donde  $F := \text{grad } g$  tal que  $\text{rot}(F) = 0$  y  $\text{div } U = 0$ . Es decir,  $X$  tiene una descomposición en un campo irrotacional y solenoidal (campo donde se anula la divergencia) (ver [14]).

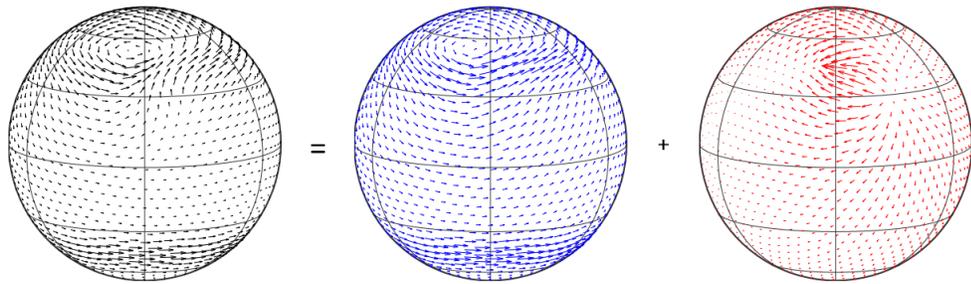


Figura 3.2: Interpretación geométrica de la descomposición de Helmholtz; El campo vectorial de la izquierda, es la composición de un campo libre de divergencia (azul) y un campo libre de rotacional (rojo).

Utilizando la descomposición de Hodge-Helmholtz se puede encontrar un campo vectorial de Killing con la parte solenoidal de la descomposición, y posteriormente, utilizando la caracterización 3.6, viendo como ese campo se comporta para  $f \in C^\infty(U)$ ,  $U \subset M$ .

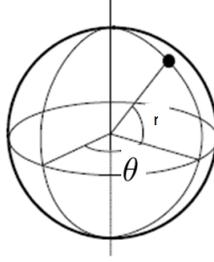


Figura 3.3: Ejemplo 3.18

**Ejemplo 3.18.** Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unitaria con  $N = (0, 0, 1)$  el polo norte como origen, y  $S$  denotando el polo sur. Sean  $(r, \theta)$  las coordenadas esféricas usuales con  $r \in (0, \pi)$  la inclinación del ángulo (colatitud), y  $\theta \in (0, 2\pi)$  el ángulo azimutal (longitud).

Para  $p \in \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$ , el espacio tangente  $T_p\mathbb{S}^2$ , tiene en esas coordenadas una base natural inducida  $\{\partial_r, \partial_\theta\}$  con respecto a la métrica  $g_0$  definida en coordenadas por:

$$ds_0^2 := dr^2 + \sin^2 r d\theta.$$

Ortonormalizando se obtiene una base  $\{e_1, e_2\}$ , con  $e_1 := \partial_r$  y  $e_2 := \csc r \partial_\theta$ . Por lo tanto, para  $X := X(r, \theta)$ ,  $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$ . Calculando la divergencia:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &:= \operatorname{tr}(\nabla X) \\ &= g(\nabla_{e_1} X, e_1) + g(\nabla_{e_2} X, e_2), \\ &= \partial_r X^1 + \csc r \partial_\theta X^2 + \cot r X^1. \end{aligned}$$

Entonces,  $\operatorname{div}(e_1) = \cot r$  y  $\operatorname{div}(e_2) = 0$ .

Asumamos que  $X = f(r)e_2$  para un  $f$  tal que  $X$  pueda ser campo de Killing, es decir si  $X(f) = 0$ , entonces  $[X, \nabla f] = 0$ . Sea  $Y := \nabla f$ ,

$$\begin{aligned} [Y, f e_2] &= 0, \\ f[Y, e_2] + Y(f)e_2 &= 0. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} Y(f)e_2 &= f[Y, e_2], \\ &= f(\csc r \cot r). \end{aligned}$$

Así, queremos:

$$\begin{aligned} f[Y, e_2] &= f \csc r \cot r, \\ \partial_r f \csc r \partial_\theta &= f \csc r \cot r \partial_\theta, \\ \partial_r f &= f \cot r, \\ \ln f &= \ln \sin r, \\ f &= \sin r. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $X := (\sin r)e_2 = \partial_\theta$  es un campo vectorial de Killing.

# Capítulo 4

## Campos conformes de Killing

En este capítulo se estudiarán los campos de Killing conformes, desarrollando caracterizaciones y propiedades, para concluir en la clasificación de los mismos sobre campos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.1.** Un campo vectorial de Killing Conforme  $X$  sobre una variedad Riemanniana  $(M, g)$  satisface que

$$\mathfrak{L}_X g = \lambda g.$$

con  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función de valor real positivo.

Cuando  $\lambda \equiv 0$ , la métrica se preserva a lo largo del flujo de  $X$ , es decir, son precisamente los campos vectoriales de Killing.

### 4.1. Caracterización de campos de Killing conformes

**Proposición 4.2.** *Un campo vectorial  $X \in TM$ , es un campo de Killing conforme si y solo si, existe un función  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que:*

1. *La divergencia de  $X$  satisface la siguiente igualdad:  $\operatorname{div} X = \frac{n}{2}\lambda$*
2. *Sea  $U \subset M$  un conjunto abierto y  $f \in C^\infty(U)$  tal que  $X(f) = 0$ , entonces  $\mathfrak{L}_{\nabla f} X = \lambda \nabla f$*

*Demostración.* Sea  $X$  un campo vectorial de Killing conforme, entonces por la relación  $\text{tr}(\mathfrak{L}_X g) = 2 \text{div } X$  se cumple que:

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \frac{\text{tr}(\mathfrak{L}_X G)}{2}, \\ &= \frac{\text{tr}(\lambda g)}{2}, \\ &= \frac{\lambda}{2} n. \end{aligned}$$

Comprobando la condición 1 de la proposición.

Ahora bien, si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  es constante a través del flujo de  $X$ , es decir  $X(f) = 0$  entonces para  $Y \in TM$ :

$$\begin{aligned} \lambda g(Y, \nabla f) &= \mathfrak{L}_X g(Y, \nabla f), \\ &= XY(f) - [X, Y](f) - g(Y, [X, \nabla f]), \\ &= -g(Y, [X, \nabla f]). \end{aligned}$$

Así,

$$\lambda g(Y, \nabla f) = -g(Y, [X, \nabla f]).$$

Por lo tanto,

$$g(Y, \lambda \nabla f + [X, \nabla f]) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que  $X \in C^\infty(TM)$ , satisface las condiciones 1 y 2 de la proposición, se probará que  $\mathfrak{L}_X g = \lambda g$  sobre un conjunto denso y abierto  $U_1 \cup U_2$  donde,

$$U_1 := \{p \in M : X_p \neq 0\} \text{ y } U_2 := \{p \in M : X_p = 0\}.$$

Es evidente, que  $X$  se anula sobre  $U_2$ , así  $\lambda \equiv 0 \forall p \in U_2$ .

Ahora, sea  $p \in U_1$ , sea  $V \in C^\infty(TM)$ , por hipótesis, sabemos que:

$$\begin{aligned} g([X, \nabla f], V) &= g(\nabla_X \nabla f - \nabla_{\nabla f} X, V), \\ &= g(\nabla_X \nabla f, V) - g(\nabla_{\nabla f} X, V), \\ &= g(\nabla_V \nabla f, X) + g(\nabla_V X, \nabla f), \\ &= g(\nabla_V \nabla f, X) + Vg(X, \nabla f) - g(X, \nabla_V \nabla f), \\ &= \lambda g(\nabla f, V). \end{aligned}$$

Sobre lo anterior consideramos dos casos para  $X$ :

Si  $X$  no es proporcional a  $\nabla f$ , del cálculo anterior se observa que  $\nabla X$  es

anti-simétrico.

Si  $X$  es proporcional a  $\nabla f$ , como  $\operatorname{div} X = \frac{n}{2}\lambda$ , tenemos:

$$\frac{n}{2}\lambda = g(\nabla_{E_1} X, E_1) + \sum_{i=2}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i).$$

donde  $\{E_i\}$  es ortonormal y  $E_1 := \frac{X}{\|X\|}$ . Sabemos que para  $i \neq 1$ :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{E_i} X, E_i) &= \lambda g(E_i, E_i), \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}\lambda &= g(\nabla_{E_1} X, E_1) + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda}{2}, \\ &= g(\nabla_{E_1} X, E_1) + (n-1)\frac{\lambda}{2}, \\ n\lambda &= 2g(\nabla_{E_1} X, E_1) + (n-1)\lambda, \\ &= -\frac{1}{\|X\|^2} Xg(X, X) + (n-1)\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Xg(X, X) = \lambda$ . Así, si  $X$  apunta en la misma dirección de  $\nabla f$ , también se cumple que  $X$  es de Killing, concluyendo la prueba.  $\square$

## 4.2. Ejemplos

En esta sección se realizará la clasificación de aplicaciones conformes con los campos vectoriales de Killing asociados sobre  $M = \mathbb{R}^n$  con dimensión  $n > 2$ . Sea  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $X$  de Killing conforme,  $g_{\mu\nu} := \delta_{\mu\nu}$ ,  $\nabla_\nu X_\mu := \partial_\nu X_\mu$  y  $\lambda$  el factor conforme asociado a  $X$ . Para comenzar, consideremos dos casos sobre  $\lambda$ :

**Caso 1.** Si  $\lambda = 0$ ,  $\nabla_\mu X_\mu + \nabla_\mu X_\mu = 0$ , es decir  $X$  no depende de  $x^\mu$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Así,  $\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0$ , lo que implica  $\nabla_\nu^2 X_\mu := \partial_\nu \partial_\nu X_\mu = 0$ . Luego,  $X$  se puede escribir como

$$X^\mu(x) = c^\mu + A_\nu^\mu x^\nu \text{ con } c^\mu \in \mathbb{R}, A_\nu^\mu \in \mathbb{R}.$$

Si todos los coeficientes  $A_\nu^\mu$  se anulan, el campo vectorial  $X^\mu(x) = c^\mu$  determina la ecuación  $\dot{x}(t) = c$  con  $\varphi^X(t, x) = x + tc$  como flujo. Por lo tanto, la transformación conforme asociada (con  $t = 1$ ), es la traslación

$$\varphi(x) = x + c.$$

Ahora, si  $c = 0$  y  $A = A_\nu^\mu$  las ecuaciones  $\nabla_\nu X^\mu + \nabla_\mu X^\nu = \lambda \delta_{\mu\nu} = 0$ , implican:

$$\delta_{\nu\rho} A_\mu^\rho + \delta_{\mu\rho} A_\nu^\rho = 0$$

es decir,  $A^T + A = 0$ . Así, las soluciones están dadas por los elementos del álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}) = \{A : A^T + A = 0\}$ .

Las transformaciones conformes asociadas (con  $t = 1$ ) son  $\varphi(x) = e^A$ . Es decir, son las transformaciones ortogonales

$$\varphi_\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$x \rightarrow \Lambda x.$$

Con  $\Lambda := e^A \in O(n) := \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n^2} : \Lambda^T \Lambda = \mathbb{I}\}$ .

**Caso 2.** Si  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ :  $X(x) = \lambda x$  con transformación asociada  $\varphi(x) = e^\lambda x$ , que corresponde a las dilataciones.

Toda función  $\lambda \neq 0$  sin un término constante es lineal, y puede ser escrito como:

$$\lambda(x) = 4\langle x, b \rangle \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Teniendo en cuenta esto, y sabiendo que,  $X$  es de Killing conforme, se satisface la ecuación  $\nabla_\mu X^\nu + \nabla_\nu X^\mu = \lambda \delta_{\mu\nu}$ . Calculando, con la definición de  $\lambda$ , se encuentra la siguiente solución:

$$X^\mu(x) = 2\langle x, b \rangle x^\mu - \langle x, x \rangle b^\mu \text{ con } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por otro lado, el campo  $X(x) = 2\langle x, b \rangle x - \langle x, x \rangle b$  con  $b \neq 0$  no posee un grupo uniparametrico de soluciones, aunque se puede establecer uno, localmente:

$$\varphi_t(x) = \frac{x - \langle x, x \rangle tb}{1 - 2\langle x, tb \rangle + \langle x, x \rangle \langle tb, tb \rangle},$$

con  $\{t \in \mathbb{R} : 1 - 2\langle x, tb \rangle + \langle x, x \rangle \langle tb, tb \rangle \neq 0\}$ .

La transformación asociada correspondiente a  $\varphi := \varphi_1$  está dada por:

$$\varphi_1(x) = \frac{x - \langle x, x \rangle b}{1 - 2\langle b, x \rangle + \langle x, x \rangle \langle b, b \rangle}$$

Las anteriores, son llamadas transformaciones especiales.

%

Se presentan ahora, graficas de algunas transformacion especiales:

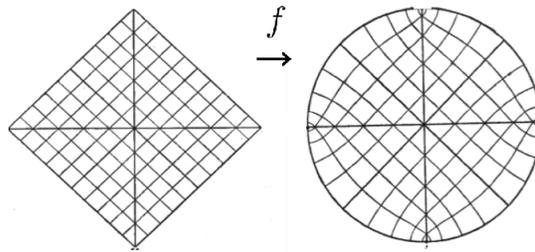


Figura 4.1: Ejemplo de una transformación especial (de Schwarz-Christoffel) de un cuadrado en un círculo que es conforme excepto en los vértices del cuadrado. Tomada del artículo original de 1869 de Schwarz.

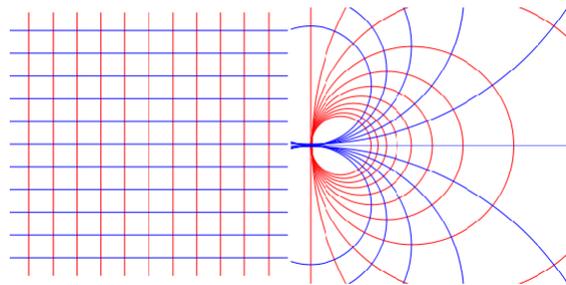


Figura 4.2: Una cuadrícula antes y después de aplicarle una transformación conforme

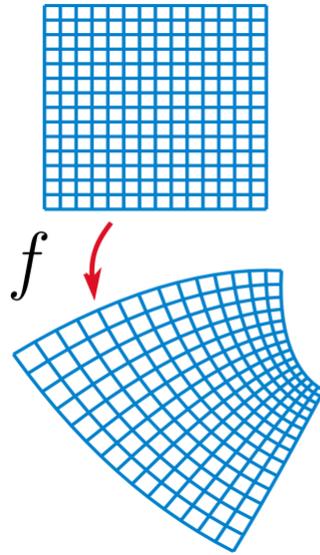


Figura 4.3: Una rejilla rectangular y su imagen bajo una transformación conforme  $f$ . Se ve que  $f$  envía pares de líneas que se cortan en  $90^\circ$  a pares de curvas todavía se cortan en  $90^\circ$ .

De la clasificación anterior de aplicaciones conformes se establece que :

**Proposición 4.3.** *Toda transformación conforme  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se puede escribir como una composición de:*

- Una traslación :  $x \rightarrow x + c$ .
- Una transformación ortogonal  $x \rightarrow \Lambda x$  con  $\Lambda \in \mathbb{O}(n)$ .
- Una transformación especial:

$$x \rightarrow \frac{x - \langle b, b \rangle b}{1 - 2\langle x, b \rangle + \langle x, x \rangle \langle b, b \rangle}.$$

**Ejemplo 4.4.** Un ejemplo del anterior resultado es la transformación de Mobius  $f$  para la proyección estereográfica  $\pi$  u  $\pi^{-1}$ , definida en el ejemplo 2.20, adicionando la compactificación por un punto para  $N$ , el polo norte. Escribiendo , a partir de esto,  $f$ , como:

$$f = \pi \circ T \circ \pi^{-1}.$$

Donde  $T$  , son precisamente las traslaciones y rotaciones anteriormente presentadas. Aquí, algunas graficas de esta transformación( ver [1]):

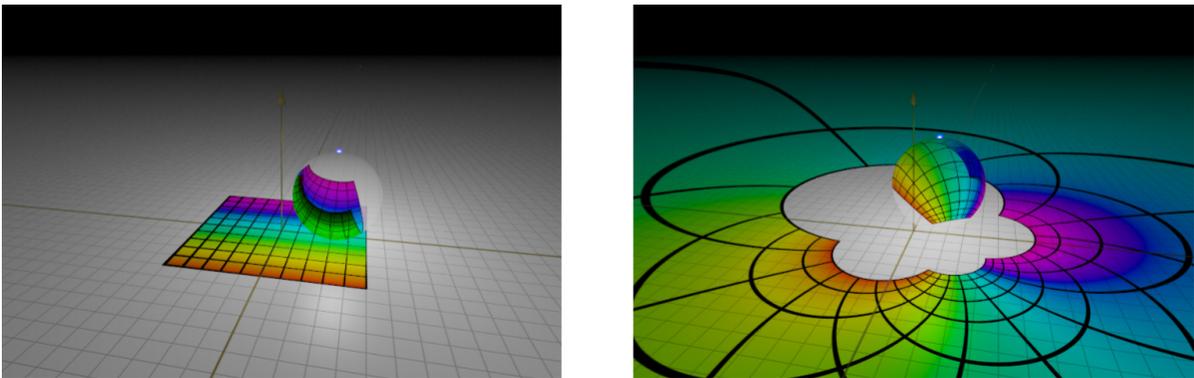


Figura 4.4: Proyección estereográfica de la esfera en el plano.

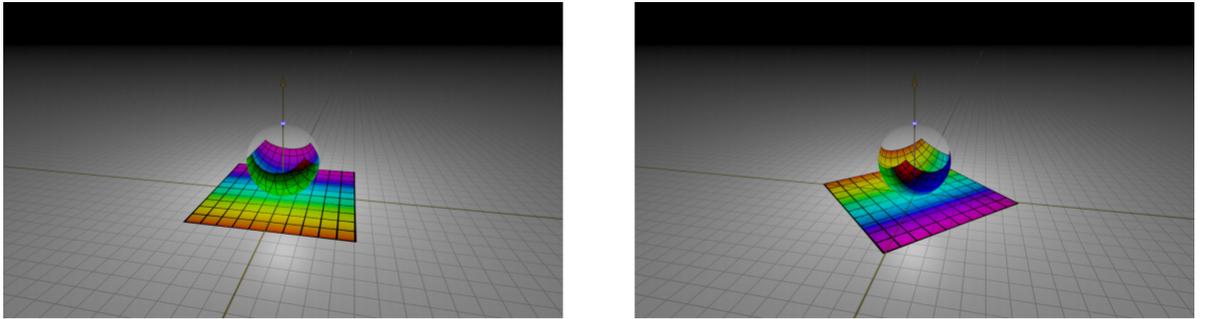


Figura 4.5: Rotación sobre el eje z.

# Bibliografía

- [1] A. Douglas. *Mobius transformations revealed*. Online, June 2007.
- [2] S. Gudmundsson. *Introduction to Gaussian Geometry Lecture Notes*. Lund University, 2013.
- [3] S. Gudmundsson. *Introduction to Riemannian Geometry Lecture Notes*. Lund University, 2009.
- [4] S. Gallot. *Riemannian Geometry*, 3<sup>ra</sup>Ed. Springer, 2004.
- [5] M. Hazewinkel *Killing form*, Springer, 2001.
- [6] T. Hawkins. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 26. Springer, 1990.
- [7] W. Kühnel. *Differential Geometry: Curves, Surfaces, Manifolds*, Vol. 16. American Mathematical Society, 2006.
- [8] J.M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*, Vol. 107. American Mathematical Society, 2009.
- [9] I. Madsen and J. Tornehave. *From Calculus to Cohomology*. Cambridge University Press, 1997.
- [10] V.N. Berestovski, YU.G. Nikonorov. *Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds*. Siberian Mathematical Journal Volume 49, pp 395-407 , 1960.
- [11] K. Nomizu. *On Local And Global Existence Of Killing vector fields*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 72,, 1960.

- [12] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. University of California, 1983.
- [13] P. Petersen. *Riemannian Geometry*, Springer, 2006.
- [14] E. Presnov. *Global decomposition of vector field on Riemannian manifolds along natural coordinates*, Vol 62 Volcani center, 2008.
- [15] M. Schottenloher. *A mathematical introduction to Conformal field theory*, Springer, 2008.
- [16] R. Siciliano. *Constructing Mobius transformation with spheres*, Princeton University, 2012.
- [17] R. Torretti. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincare*. D. Reidel Publishing Company, 1984.