

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA**



**TRABAJO DE GRADO**

*“Diseño de tamaño de empaque y embalaje óptimo de productos de consumo masivo, por medio de algoritmos genéticos, teniendo en cuenta los costos logísticos de salida: caso de una empresa colombiana”*

**Estudiantes**

**JUAN FRANCISCO GÓMEZ VEGA  
RAUL FERNANDO CANTILLO POLO**

**Director de Grado**

**INGENIERO JOSE FERNANDO JIMÉNEZ GORDILLO**

**Bogotá D.C.  
Mayo de 2013**

Bogotá, 22 de abril de 2013

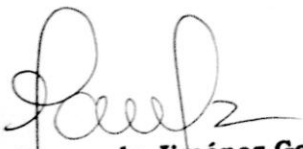
Señores  
**COMITÉ DE CARRERA**  
INGENIERÍA INDUSTRIAL  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Señores Comité de Carrera:

La presente comunicación con el fin de manifestar mi conocimiento y aprobación del trabajo de grado titulado "Diseño de tamaño de empaque y embalaje óptimo de productos de consumo masivo, por medio de algoritmos genéticos, teniendo en cuenta los costos logísticos de salida: caso de una empresa colombiana", elaborada por el(los) estudiante(s) Juan Francisco Gómez Vega, C.C. 1.090.404.391, y Raúl Fernando Cantillo Polo, C.C. 1.020.739.174 en mi calidad de Director.

Declaro conocer y aceptar el reglamento y disposiciones de los trabajos de grado en la Carrera de Ingeniería Industrial de la Pontificia Universidad Javeriana.

Cordialmente,



**Jose Fernando Jiménez Gordillo**  
**Director del Trabajo de Grado**

**CARTA DE AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES  
(Licencia de uso)**

Bogotá, D.C., 24 de Junio 2013

Señores  
Biblioteca Alfonso Borrero Cabal S.J.  
Pontificia Universidad Javeriana  
Cuidad

Los suscritos:

<u>Juan Francisco Gomez Vega</u>	, con C.C. No	<u>1090404391</u>
<u>Raul Fernando Cantillo Polo</u>	, con C.C. No	<u>1020739174</u>
	, con C.C. No	

En mi (nuestra) calidad de autor (es) exclusivo (s) de la obra titulada:

***“Diseño de tamaño de empaque y embalaje óptimo de productos de consumo masivo, por medio de algoritmos genéticos, teniendo en cuenta los costos logísticos de salida: caso de una empresa colombiana”***

Diseño de tamaño de empaque y embalaje óptimo de productos de consumo masivo, por Medio de algoritmos genéticos, teniendo en cuenta los costos logísticos de salida: caso De una empresa colombiana (por favor señale con una “x” las opciones que apliquen)

Tesis doctoral  Trabajo de grado  Premio o distinción: **Si**  **No**   
cual: Mención Honorífica

presentado y aprobado en el año 2013, por medio del presente escrito autorizo (autorizamos) a la Pontificia Universidad Javeriana para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mi (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autorizan a la Pontificia Universidad Javeriana, a los usuarios de la Biblioteca Alfonso Borrero Cabal S.J., así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado un convenio, son:

<b>AUTORIZO (AUTORIZAMOS)</b>	<b>SI</b>	<b>NO</b>
1. La conservación de los ejemplares necesarios en la sala de tesis y trabajos de grado de la Biblioteca.	x	
2. La consulta física o electrónica según corresponda	X	
3. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer	X	
4. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet	X	
5. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previo convenio perfeccionado con la Pontificia Universidad Javeriana para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones	X	

<b>AUTORIZO (AUTORIZAMOS)</b>	<b>SI</b>	<b>NO</b>
6. La inclusión en la Biblioteca Digital PUJ (Sólo para la totalidad de las Tesis Doctorales y de Maestría y para aquellos trabajos de grado que hayan sido laureados o tengan mención de honor.)	x	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

De manera complementaria, garantizo (garantizamos) en mi (nuestra) calidad de estudiante (s) y por ende autor (es) exclusivo (s), que la Tesis o Trabajo de Grado en cuestión, es producto de mi (nuestra) plena autoría, de mi (nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy (somos) el (los) único (s) titular (es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Pontificia Universidad Javeriana por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, *“Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”*, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Pontificia Universidad Javeriana está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

**NOTA: Información Confidencial:**

Esta Tesis o Trabajo de Grado contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de una investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. Si  No

En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta, tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

NOMBRE COMPLETO	No. del documento de identidad	FIRMA

FACULTAD: Ingeniería

PROGRAMA ACADÉMICO: Ingeniería Industrial

**DESCRIPCIÓN DE LA TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO  
FORMULARIO**

TÍTULO COMPLETO DE LA TESIS O TRABAJO DE GRADO						
<i>“Diseño de tamaño de empaque y embalaje óptimo de productos de consumo masivo, por medio de algoritmos genéticos, teniendo en cuenta los costos logísticos de salida: caso de una empresa colombiana”</i>						
SUBTÍTULO, SI LO TIENE						
AUTOR O AUTORES						
Apellidos Completos			Nombres Completos			
Gomez Vega			Juan Francisco			
Cantillo Polo			Raul Fernando			
DIRECTOR (ES) TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO						
Apellidos Completos			Nombres Completos			
Jimenez Gordillo			Jose			
FACULTAD						
Ingenieria						
PROGRAMA ACADÉMICO						
Tipo de programa ( seleccione con “x” )						
Pregrado	Especialización	Maestría	Doctorado			
X						
Nombre del programa académico						
Ingenieria Industrial						
Nombres y apellidos del director del programa académico						
Carlos Muñoz						
TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:						
Ingeniero Industrial						
PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o tener una mención especial):						
Mencion Honorifica						
CIUDAD		AÑO DE PRESENTACIÓN DE LA TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO			NÚMERO DE PÁGINAS	
Bogota		2013			129	
TIPO DE ILUSTRACIONES ( seleccione con “x” )						
Dibujos	Pinturas	Tablas, gráficos y diagramas	Planos	Mapas	Fotografías	Partituras
X		X				
SOFTWARE REQUERIDO O ESPECIALIZADO PARA LA LECTURA DEL DOCUMENTO						
<b>Nota:</b> En caso de que el software (programa especializado requerido) no se encuentre licenciado por la Universidad a través de la Biblioteca (previa consulta al estudiante), el texto de la Tesis o Trabajo de Grado						

quedará solamente en formato PDF.

MATERIAL ACOMPAÑANTE					
TIPO	DURACIÓN (minutos)	CANTIDAD	FORMATO		
			CD	DVD	Otro ¿Cuál?
Vídeo					
Audio					
Multimedia					
Producción electrónica					
Otro Cuál?					

**DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVE EN ESPAÑOL E INGLÉS**

Son los términos que definen los temas que identifican el contenido. *(En caso de duda para designar estos descriptores, se recomienda consultar con la Sección de Desarrollo de Colecciones de la Biblioteca Alfonso Borrero Cabal S.J en el correo [biblioteca@javeriana.edu.co](mailto:biblioteca@javeriana.edu.co), donde se les orientará).*

ESPAÑOL	INGLÉS
<b>Empaque</b>	<b>Inner Pack</b>
<b>Embalaje</b>	<b>Outer Pack</b>
<b>Algoritmo genético</b>	<b>Genetic algorithm</b>
<b>Diseño de experimentos</b>	<b>Experimental design</b>

**RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS**

(Máximo 250 palabras - 1530 caracteres)

**Diseño del tamaño del empaque y embalaje para una línea de productos de características homogéneas, a fin de minimizar los costos logísticos de salida. Se realizaron dos métodos de solución: un modelo matemático y una herramienta metaheurística. El modelo matemático nos arroja una solución relajada, por medio del software Lp-Solve, lo cual da una aproximación a la situación actual de la empresa. Por otro lado, el modelo metaheurístico, nos arroja una solución óptima para resolver el problema que presenta la empresa ABC, ya que el software utilizado, Microsoft Excel, permitió resolver el problema a gran escala, mientras que el software Lp-Solve, permitió una solución con un número mínimo de candidatos (inner y outer packs) y con una respuesta ineficiente.**

**Design package size and packaging for a product line of similar characteristics, in order to minimize output logistics costs. There were two methods of solution: a mathematical model and a tool metaheuristic. The mathematical model we threw a relaxed solution, through Lp-Solve software, which gives an approximation to the**

actual situation of the company. On the other hand, the model metaheuristic, yields an optimal solution to solve the problem with the ABC company as the software used, Microsoft Excel, allowed to solve the problem on a large scale, while Lp-Solve software allowed a solution with a minimum number of candidates (inner and outer packs) and an inefficient response.



## TABLA DE CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>12</b>
<b>CAPITULO 1.....</b>	<b>14</b>
<b>Planteamiento del problema .....</b>	<b>14</b>
Antecedentes .....	14
Justificación del proyecto .....	16
<b>CAPITULO 2.....</b>	<b>17</b>
<b>Marco teórico .....</b>	<b>17</b>
Problema de empaque y de corte (packing and cutting problem) .....	17
Objetivos del problema .....	18
Estructura de los problemas de embalaje y corte.....	19
Tipos de problemas de empaque y de corte: básicos, intermedios y refinados.....	19
Variantes de los problemas de empaque y corte.....	22
Estudios realizados del problema de empaquetamiento y corte .....	26
Problema del Flujo de Costo Mínimo (Minimum Cost Network Flow) .....	29
Características del problema del flujo de costo mínimo .....	29
Formulación del problema del flujo de costo mínimo .....	29
Caso especiales del problema del flujo de costo mínimo .....	30
Estudios realizados del problema del flujo de costo mínimo.....	31
Estudios realizados de los Problemas de empaquetamiento, corte y flujo de costo mínimo ..	33
Algoritmo genético .....	35
Operadores genéticos .....	35
Aplicación de Algoritmo Genético en empaquetamiento.....	36
Diseño de experimentos.....	40
<b>CAPITULO 3.....</b>	<b>42</b>
<b>Objetivos .....</b>	<b>42</b>
Objetivo general .....	42
Objetivos específicos.....	42
<b>CAPITULO 4.....</b>	<b>42</b>
<b>Modelo de programación entera del problema .....</b>	<b>43</b>
Consideraciones del modelo .....	43
Formulación compacta.....	44
<b>Algoritmo Genético con datos propuestos .....</b>	<b>50</b>
Algoritmo Genético con datos propuestos .....	50
Diagrama de flujo del Algoritmo genético: datos propuestos .....	50
Representación.....	51
Estructura del cromosoma .....	51
Generación de la población inicial .....	52
Población inicial de manera aleatoria .....	52
Población inicial de manera binaria .....	52

Población inicial con los mejores candidatos .....	52
Evaluación de los cromosomas .....	53
Función de aptitud (Fitness Function).....	54
Selección.....	54
Selección Aleatoria .....	54
Selección por torneo .....	54
Cruce.....	54
Cruce en genes enteros .....	55
Cruce en genes binarios .....	55
Mutación .....	55
Inserción de los hijos a la población.....	55
Criterio de Terminación.....	56
<b>CAPITULO 5.....</b>	<b>56</b>
<b>Diseño de experimentos.....</b>	<b>56</b>
Diseño de experimentos factoriales.....	56
Factores y niveles .....	57
Modelo estadístico .....	58
Pruebas de hipótesis con los efectos .....	58
Análisis de varianza – ANOVA.....	60
<b>CAPITULO 6.....</b>	<b>70</b>
Resultados de datos propuestos .....	71
Resultados obtenidos datos propuestos .....	73
Análisis de sensibilidad de datos propuestos.....	74
Análisis de sensibilidad para la capacidad de producción.....	75
Análisis de sensibilidad para las demandas.....	75
Análisis de sensibilidad para los inner pack .....	78
Análisis de sensibilidad para los outer pack .....	81
Análisis de sensibilidad para los costos de apertura .....	83
Análisis de sensibilidad para los costos de manipulación de outer pack .....	85
Análisis de sensibilidad para los costos de manipulación de inner pack .....	88
Situación actual de la empresa con datos reales .....	90
Resultados obtenidos situación actual de la empresa con datos reales.....	91
Solución propuesta con datos reales .....	93
Solución propuesta con datos reales .....	95
Análisis general de resultados.....	96
<b>CAPITULO 7.....</b>	<b>98</b>
Resultados algoritmo genético con datos propuestos.....	98
Método Completo .....	98
Método de mejores candidatos .....	99
Resultados algoritmo genético con datos reales .....	100
Análisis de sensibilidad método completo.....	102
Análisis de sensibilidad método selección de mejores candidatos.....	103

<b>CAPITULO 8.....</b>	<b>105</b>
<b>Comparación de métodos de solución: Modelo cuantitativo y Herramienta Meta-heurística</b>	<b>105</b>
<b>Comparación del método escogido, algoritmo genético, con la situación actual de la empresa</b> .....	<b>109</b>
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>110</b>
<b>Recomendaciones.....</b>	<b>113</b>
<b>Agradecimientos.....</b>	<b>113</b>
<b>ANEXO.....</b>	<b>119</b>

## INTRODUCCIÓN

Con las exigencias, necesidades y requerimientos mínimos del mercado global, las empresas de hoy en día deben tener un sistema flexible, comunicativo, eficiente y efectivo a lo largo de su cadena de abastecimiento, con el fin de adaptarse a estos cambios continuos para suplir las demandas y necesidades explícitas de sus proveedores y clientes (Hull, 2002).

Los avances en la tecnología de información (TI), la globalización de los mercados, las operaciones descentralizadas y la conciencia cada vez mayor hacia el contexto ambiental, han obligado a las industrias a reflexionar sus operaciones con el fin de mejorar sus sistemas de productividad, estrategias y técnicas de calidad, incluyendo por encima de todo, un enfoque de Administración de Operaciones (Operations Management). Justo a Tiempo (JIT), fabricación de respuesta rápida (QRM), sistemas flexibles de manufactura (FMS) y la gestión de cadena de suministro (SCM) son estrategias operacionales y tecnológicas que las empresas han puesto en marcha como respuesta a los cambios generados por los mercados (Gunasekaran & Ngai, 2012). Con estos avances tecnológicos, los usuarios finales exigen que sus productos estén en las condiciones adecuadas. Por tal motivo, los empaques se han convertido en un elemento esencial para la protección, el ciclo de vida, el fácil almacenamiento, el mejor uso, la promoción y la presentación del producto.

En la dirección de la logística no se satisfacen a cabalidad todos objetivos que proporciona el empaque. Por otro lado, el embalaje protector y la cantidad de producto son motivos de estudio que están directamente ligados al trabajo de esta materia. El empaque tiene las características de forma, volumen y peso; mientras que el producto puede ser homogéneo o heterogéneo (Ballou, 2004).

La investigación de operaciones estudia los problemas de empaquetamiento, o los llamados packing problems, con el fin de facilitar la toma de decisiones en cuanto a la maximización del espacio necesario para empaquetar los productos. Esto se ha convertido en todo un reto para los especialistas logísticos en el área de empaquetamiento. Del mismo modo, una empresa manufacturera ve la necesidad de empaquetar sus diferentes productos en distintas cantidades para ser vendidos dependiendo del canal de distribución escogido. Conocer la cantidad de producto necesario que debe contener cada empaquetamiento puede generar ganancias (ventas totales) o pérdidas (costos de ruptura) a las empresas.

Cuando se tiene el producto previamente empaquetado, se prosigue a ser despachado a los diferentes canales que la empresa ya tenga determinada. El problema de distribución, o Minimum Cost Network Flow (MCNF), determina el conjunto de productos que pasan a través de toda la red de distribución, con el fin de satisfacer los suministros y las demandas, minimizando todos los costos relacionados a este flujo (Fonoberova & Lozovanu, 2005).

El presente trabajo se realizará con base en datos entregados por La Empresa Colombiana “ABC” de consumo masivo. Por políticas de privacidad, La Empresa “ABC” ha prohibido ser mencionada en este proyecto. Se tendrán las siguientes consideraciones:

- Se trabajarán productos con características homogéneas. Este tipo de productos se conoce como Single-SKU (Stock Keeping Unit).

- La cadena de abastecimiento estará fijada por los canales que la empresa tiene actualmente.
- La información suministrada por la empresa será modificada desde el inicio en relación a: nombre de productos, precios, cantidades demandadas y capacidades de producción. Sin embargo se mantendrá una relación proporcional para que sirva como solución de un caso académico aplicado a la industria.

Con el fin de abordar una solución de la situación actual de la empresa "ABC", se desarrolló un modelo matemático de programación entera (Integer Program), donde se obtuvo una solución óptima en comparación al problema presentado. También se propuso otro método de solución que consiste en elegir dos tipos de inner y outer pack. Teniendo en cuenta que no se conocen los costos de producción de inner y outer pack, se pretende que éste sea un supuesto para que la empresa "ABC" tenga en consideraciones de aplicar en un futuro.

La herramienta meta-heurística, algoritmo genético, se desarrolló para de conocer cuál es la combinación de inner y outer más óptima, con la finalidad de minimizar costos de apertura y manipulación. Por otro lado, se desarrolló un diseño de experimentos, diseño factorial  $3^3$ , a fin de obtener una eficiencia en la herramienta aplicada.

## CAPITULO 1

### Planteamiento del problema

#### Antecedentes

La Empresa "ABC" maneja dentro de su portafolio cuatro tipos de productos con cierta cantidad de referencias para cada uno. Cada línea de producto tiene diferente forma de empaquetamiento, dependiendo de la cantidad de unidades de consumo que contenga cada empaque.

El empaquetamiento de producto tiene tres niveles. El primer nivel, conocido como unidad de consumo hace referencia a una unidad de producto. El segundo nivel, se denomina unidad de venta o empaque, que es el conjunto de unidades de consumo que son empaquetadas. El tercer y último nivel, es el embalaje, el cual reúne en una caja una cierta cantidad de unidades de venta. Todos los empaques mencionados tienen la función de proteger, conservar las características físicas y químicas, y facilitar su manipulación.

La Empresa "ABC" maneja cuatro tipos de canales, éstos son: tradicionales (tienda a tienda-TaT), modernos (grandes superficies), institucionales (colegios, hoteles, restaurantes, etc.) y los distribuidores. Los canales tradicionales e institucionales manejan los productos en unidades de ventas; mientras que los canales modernos y distribuidores, manejan los productos en embalajes.

La cadena de abastecimiento de La Empresa "ABC", se puede ver a continuación en la Ilustración 1.

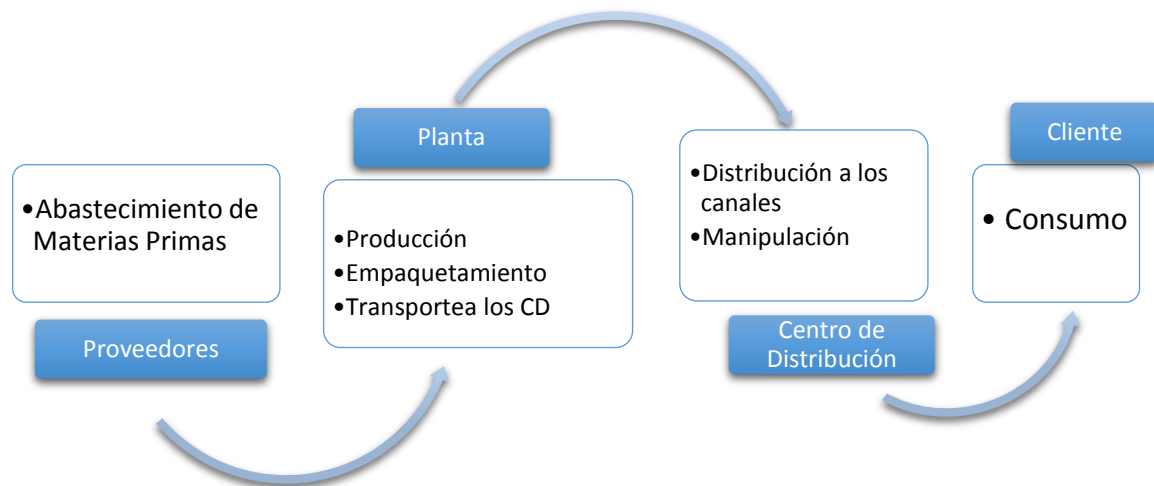


Ilustración 1. Operaciones de la cadena de abastecimiento de La Empresa "ABC"

La cadena de abastecimiento de La Empresa "ABC" está compuesta por los proveedores (por políticas de privacidad no se tiene información de éstos), su planta de producción (sedes principales ubicadas en Bogotá D.C. y Cali), sus centros de distribución (sedes principales ubicadas en Bogotá D.C. y Cali, y sucursales en el resto del país) y sus clientes (Colombia y más de 49 países a nivel mundial).

En los proveedores se tiene la operación de abastecimiento, en donde La Empresa "ABC" se aprovisiona de todas las materias primas necesarias para cada uno de sus productos. Seguido a esto, en la planta de producción, se realizan los procesos de producción para obtener el producto final, donde son empaquetados en unidades de venta y posteriormente embalados, para así ser transportados únicamente a los centros de distribución. Cuando el producto embalado llega a los centros de distribución, se genera un reproceso debido a que las cantidades demandadas de los canales tradicional e institucional, son menores a las unidades de venta que contiene cada una de las cajas enviadas desde la planta de producción, por tal motivo, se procede a la apertura de los embalajes originales con el fin de acomodar los empaques en unidades de venta para satisfacer la demanda de los clientes en los canales tradicionales e institucionales. En los canales modernos y distribuidores, se envían desde la planta de producción los embalajes originales sellados. Después de ajustar la demanda de cada canal, se realiza la respectiva asignación de la distribución a los canales.

La Empresa "ABC" analizó sus operaciones dentro de la cadena de abastecimiento y se dio cuenta que para satisfacer las demandas de los canales tradicionales e institucionales se incurre en un reproceso que se realiza en los centros de distribución, que consiste en la apertura de los embalajes con el fin de dar a estos canales los empaques deseados. Este reproceso trae consecuencias, como los costos de manipulación y el tiempo gastado en realizar dichas operaciones.

Seguido a esto, La Empresa "ABC", también se dio cuenta que la cantidad de unidades de consumo contenidas en los empaques de venta no satisfacía la demanda que sus clientes le solicitaban. Por consiguiente, la nueva problemática surgió en hallar la cantidad de unidades de consumo necesarias que debe contener la unidad de venta, para que la empresa pueda satisfacer las demandas correctamente sin tener pérdidas en ventas de productos.

La Empresa "ABC", no ha realizado nada en relación a la solución de este problema, a su vez, es la primera vez que se les presenta un caso de éstos y, por tal motivo, no tiene un registro histórico de cómo resolver este tipo de situaciones. A raíz de esta problemática, La Empresa "ABC" contrató a la consultora en logística, Logyca, para que analizara la situación actual de la problemática presentada, mejorara las operaciones y mostrara los resultados obtenidos.

La consultora Logyca, nos está brindando el apoyo para la realización de nuestro trabajo de grado, siendo ésta la intermediaria entre La Empresa "ABC" y nosotros. Logyca nos proporcionará los datos que necesitemos, pero éstos estarán modificados por un factor de conversión debido a políticas de privacidad de La Empresa "ABC". El factor de conversión no cambiará la tendencia de los datos originales.

La problemática surge a partir de la situación que presentan los diferentes canales. Estas situaciones primeramente se evidencian en los canales tradicionales e institucionales, los cuales tienen un comportamiento de la demanda totalmente diferente a lo que la empresa les puede suministrar, por ejemplo, si un cliente de tienda o institucional exige una unidad de venta con 30 unidades de consumo y el empaque ofrecido de la empresa es de 24 unidades de consumo, el cliente no compra otro segundo empaque de venta, sino que deja de vender esas 6 unidades de consumo de diferencia. Esta misma problemática pero a gran escala, surge para los canales

modernos y distribuidores, donde ya no se manejan en unidades de consumo sino en unidades de venta.

Con el ejemplo anunciado anteriormente se puede apreciar que las pérdidas en ventas, los costos en el reproceso dentro de los centros de distribución y el tiempo gastado por sus operarios en estas operaciones, ha causado aumento en los costos logísticos dentro de su cadena de abastecimiento (estos datos no se tienen por políticas de privacidad, solamente nos han mencionado dichas problemáticas).

El problema de asignación a los diferentes canales, es un valor agregado que queremos darle a la empresa como forma de reducir aún más sus costos logísticos.

La solución abordada en este proyectos será comparada con la situación actual de La Empresa "ABC", por medio de los datos brindados por la empresa Logyca S.A . La finalidad de realizar esta comparación es demostrar que existe una solución a la problemática planteada.

### **Justificación del proyecto**

La Empresa "ABC" tiene tres diferentes tipos de paquetes: los productos individuales (unidad de consumo), los empaques o unidades de venta (inner pack) y los embalajes (outer pack). Con estos tipos de paquetes, las actividades de corte, empaquetamiento y asignación de productos a los diferentes canales, influyen en la toma de decisiones para la reducción de costos, maximización de utilidades y satisfacciones del cliente. Cuando los productos son empaquetados se espera que: no se generen pérdidas por ruptura de embalaje y se puedan vender los productos en los diversos canales y en sus respectivas cantidades.

Este trabajo es elaborado en base a una problemática que se presenta en La Empresa Colombiana "ABC" de consumo masivo. Dicha problemática surge a raíz de las pérdidas en ventas de los empaques de su portafolio, los costos operacionales en la manipulación de los embalajes cuando llegan a los centros de distribución, y el tiempo utilizado para abrir y reacomodar los empaques, con el fin de ser transportados a los diferentes canales que la empresa tiene. Esto ocurre porque la demanda del usuario o canal puede ser menor o mayor a la cantidad ofrecida.

La problemática encontrada se basa en la compra que tienen los clientes (TaT, institucionales) de un producto. Esta compra no se realiza en unidades de consumo, sino que se adquieren los productos en empaques. Estos empaques pueden contener cantidades de producto que satisfacen o no la demanda del cliente, por consiguiente, se puede vender o dejar de vender el producto por estas diferencias de demanda.

Las grandes superficies y distribuidores tienen la misma problemática que las tiendas, con la diferencia de que éstos venden sus productos en empaques y no por unidades.

A causa de la problemática mencionada anteriormente, la logística aplica los conocimientos, técnicas y estrategias de la administración de operaciones, con el fin de obtener soluciones óptimas para establecer las cantidades de producto que deben contener los empaques (inner pack) y embalajes (outer pack). Esta cantidad determinada deberá satisfacer las demandas del



mercado y las ventas propuestas de la organización. A partir de la solución encontrada, se buscará minimizar los costos logísticos en la cadena de abastecimiento definida. Estos costos hacen referencia a: la manipulación de los embalajes en los centros de distribución, al costo de apertura de los embalajes y al costo de manipulación de los inner packs.

## **CAPITULO 2**

### **Marco teórico**

Los problemas de la vida real están relacionados totalmente al desarrollo sostenible, y pueden ser clasificados en complejos y compuestos. Los sistemas complejos intervienen en ámbitos sociales, tecnológicos y en contextos naturales (Sokolova et al., 2011) . Los sistemas complejos de la vida real están creciendo de manera muy acelerada, aumentando a su vez, el desarrollo del sistema de pensamiento en las acciones humanas. Estos pensamientos mejoran la capacidad de gestión y la toma de decisiones con el propósito de solucionar los problemas que se puedan presentar. El proceso de aprendizaje se desarrolla en la etapa de retroalimentación, en donde nuestras decisiones modifican el mundo real (Sterman, 1994).

Los problemas de manufactura y logística de abastecimiento hacen parte de los sistemas complejos, permitiendo la toma de decisiones a los problemas presentados en la industria. Estos problemas han sido generados por los grandes cambios tecnológicos, las necesidades y exigencias del mercado a lo largo del tiempo.

### **Problema de empaque y de corte (packing and cutting problem)**

El problema de corte y embalaje consiste en determinar y encontrar la forma óptima de organizar una gran cantidad de múltiples ítems o productos dentro de una región determinada (Hopper & Turton, 1998).

Existen dos tipos representativos de paquetes: paquetes interiores o empaques (inner packs) y paquetes exteriores o embalajes (outer packs) (ilustración 2). Los paquetes interiores (inner packs), contienen un conjunto determinado de ítems. Estas unidades pueden ser similares (Single-SKU) o variadas (Multi-SKU). En la práctica, un paquete interior contiene varios ítems similares, pero éstos se diferencian sólo en su tamaño. Por ejemplo, un paquete interno puede contener 2 paquetes pequeños, 3 paquetes medianos y 1 paquete grande. Esta práctica se realiza a causa de la gran variedad de ítems que existen y a la correspondiente demanda. Los paquetes exteriores (outer packs) contienen un conjunto específico de paquetes interiores empaquetados de forma idéntica.

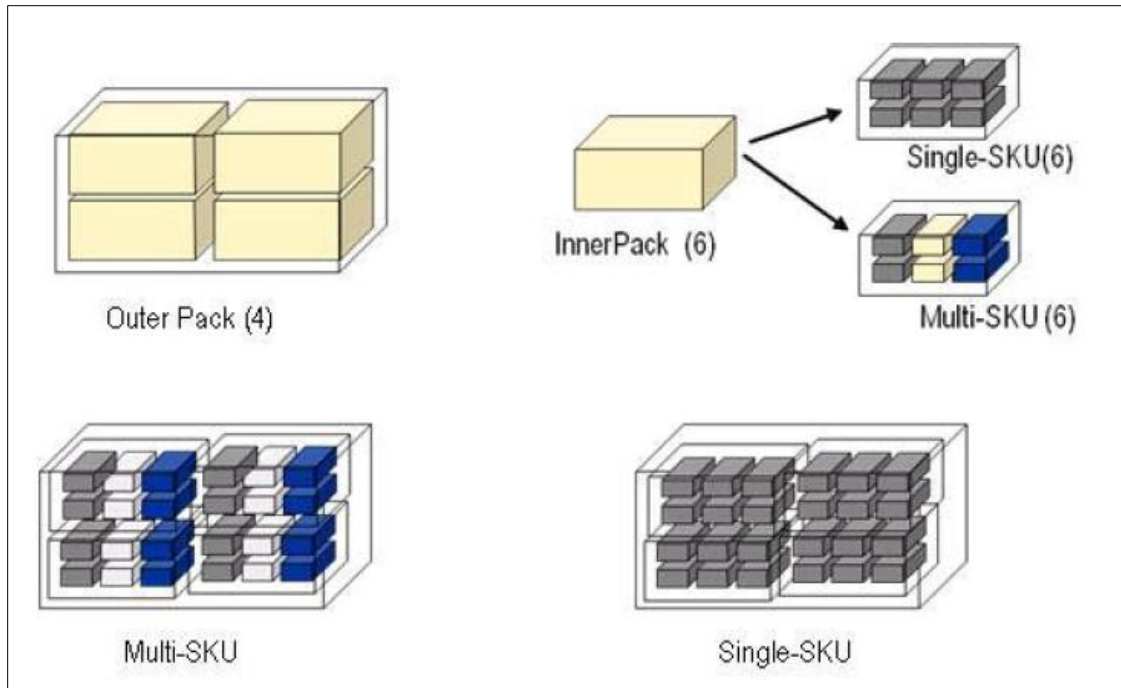


Ilustración 2. Diferentes tipos de paquetes (Wang, 2010).

La distribución de estos paquetes puede ser ordenada directamente por los centros de distribución. Existen varios casos en donde los paquetes externos pueden ser distribuidos apenas lleguen a los centros de distribución o, por otro lado, estos paquetes externos pueden abrirse con el propósito de que los paquetes internos se transporten a los diferentes canales de distribución para suplir la demanda de cada uno de los ítems.

Con los diferentes tipos de paquetes se generan varios costos de gran influencia. La distribución de los diferentes ítems puede generar que la demanda de otro ítem aumente o disminuya, ocasionando que los costos de inventario aumenten a causa de los excesos de órdenes de pedido o la cantidad de inventario que un ítem puede tener. Por otro lado, al abrir los paquetes externos se provoca un costo de apertura, lo que obliga al distribuidor a definir la cantidad óptima de ítems introducidos en los paquetes de gran tamaño, con el fin de encontrar el equilibrio entre el flujo eficiente de producto y la satisfacción de la demanda.

Como consecuencia de lo anterior, el desarrollo en la optimización de los diferentes tipos de paquetes se ha convertido en un problema desafiante en cuanto a la distribución hacia los diferentes canales y a la satisfacción de la demanda de todos los productos empaquetados y cortados (Wang, 2010).

### **Objetivos del problema**

El problema de corte y embalaje está en la búsqueda de organizar una gran cantidad de múltiples ítems o productos dentro de una región. Para que el problema de corte pueda ser desarrollado se deben tener en cuenta unas restricciones al momento de realizar la colocación de los objetos. Los objetivos de este problema son maximizar la utilización de material y, por otro lado, minimizar el área que no se aprovecha.

Las industrias de hoy en día están cada vez más interesadas en la producción en masa de sus productos, dando su interés a la reducción tanto de sus costos de producción como del material que se utiliza en el mismo proceso (Hopper & Turton, 1998).

El objetivo final es satisfacer las necesidades de la demanda de las tiendas para mejorar la eficiencia del flujo en todos los eslabones de la cadena de suministro y, así, minimizar todos los costos involucrados (Wang, 2010).

### **Estructura de los problemas de embalaje y corte**

Los problemas de embalaje y corte están definidos por dos tipos de elementos:

- Objetos de gran tamaño (inputs, suministro)
- Ítems pequeños (output, demanda)

Dichos elementos están definidos para una, dos, tres o hasta  $n$  dimensiones geométricas. Se debe cumplir la condición geométrica que indica que los ítems pequeños (uno o varios) no pueden superar las dimensiones de los objetos grandes cuando éstos son introducidos en ellos y no puede existir una superposición de los ítems pequeños (Wäscher et al., 2007).

En los problemas de empaquetamiento y corte existen un conjunto de sub-problemas que pueden solucionarse de forma simultánea con el fin de obtener un óptimo global. Éstos son:

- Selección de objetos de gran tamaño
- Selección de ítems pequeños
- Agrupación de ítems pequeños seleccionados
- Asignación de los subconjuntos de ítems pequeños a los objetos de gran tamaño
- Diseño de los ítems pequeños a introducirse en los objetos de gran tamaño seleccionados de acuerdo a su condición geométrica

Todo lo anterior está sujeto a cambios. Esto se debe a que la mayoría de sub-problemas de embalaje y corte varían de acuerdo a propiedades adicionales tales como: la forma de los productos o propiedades intrínsecas y extrínsecas (Wäscher et al., 2007).

### **Tipos de problemas de empaque y de corte: básicos, intermedios y refinados**

En la ilustración 3 podrá visualizarse de una mejor manera los diferentes problemas más representativos de embalaje y corte.

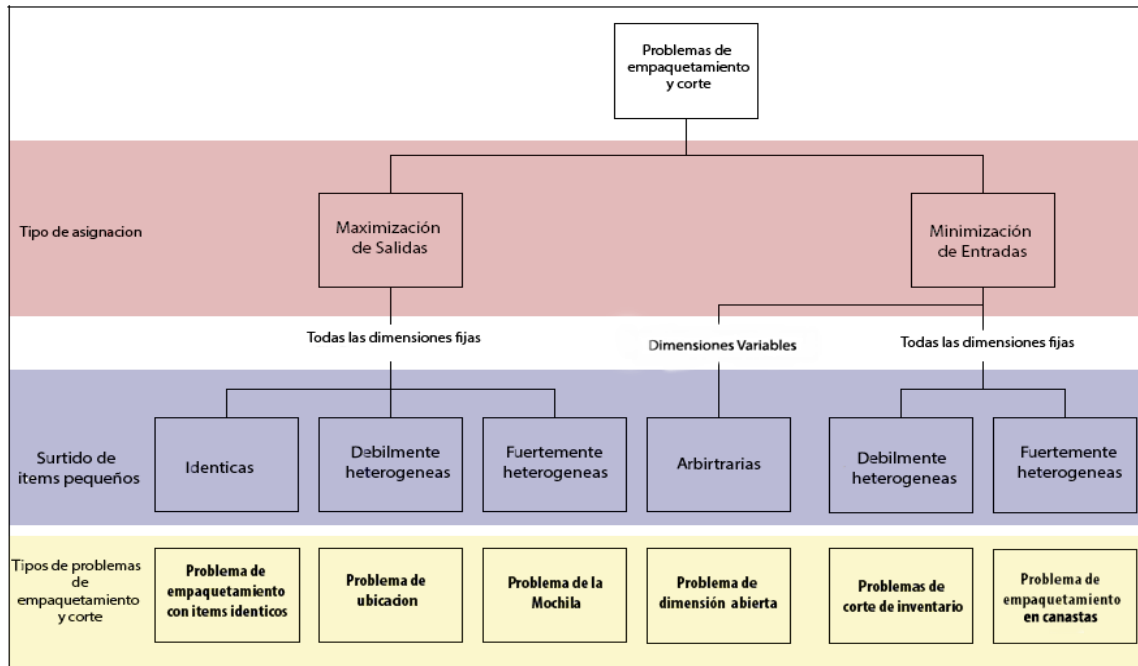


Ilustración 3. Tipos de problemas básicos (Wäscher et al., 2007). (Traducido según referencia)

### 1. Tipos de problemas básicos

Los problemas básicos están definidos por el tipo de asignación y la variedad de los ítems u objetos. Éstos son:

#### a. Tipo de maximización output

Restringe los objetos de gran tamaño debido a que solamente se puede suplir cantidades limitadas, lo que no permite acomodar todos los ítems pequeños. Esto se vuelve un problema de selección de los ítems pequeños.

- Problema de empaquetamiento con ítems idénticos

Consiste en la asignación del mayor número posible de ítems pequeños en un grupo de objetos de gran tamaño limitado. Debido a que todos los ítems son idénticos, esto se reduce a un problema de diseño con respecto a la disposición de los ítems pequeños en los objetos de gran tamaño teniendo en cuenta su condición geométrica (Wäscher et al., 2007).

- Problema de ubicación

Define la asignación de un número de ítems pequeños con características idénticas o diferentes a un conjunto de objetos de gran tamaño. En este tipo de problemas se busca maximizar la cantidad de ítems pequeños acoplados a los objetos de gran tamaño o, en su caso contrario, la minimización del espacio no utilizado.

- Problema de la Mochila (Knapsack Problem)

Consiste en seleccionar la mayor cantidad de ítems pequeños con diferentes características a introducir en un objeto de gran tamaño, limitado en características como peso y volumen. Esta selección deberá arrojar como resultado la mayor utilidad o valor óptimo.

#### **b. Tipo de minimización input**

En este tipo de problemas, lo que se quiere lograr es la minimización de los objetos de gran tamaño que se necesitan para poder acomodar la totalidad de los ítems pequeños, con el propósito de satisfacer la demanda existente.

- Problema de dimensión abierta

Consiste en la minimización de las variables de entrada que presentan los objetos de gran tamaño, tales como la longitud, el tamaño y el volumen, en la ubicación de los ítems dentro de estos. Los ítems pequeños no tienen diferencias fuertes.

- Problemas de corte de inventario

En este problema se hace necesaria la poca variedad de diferentes ítems pequeños que serán asignados a un conjunto de objetos grandes con características mínimas como su valor, su número y su tamaño total. No hay suposiciones en las dimensiones de los objetos de gran tamaño, ya que sus extensiones son fijadas en todas las dimensiones.

- Problema de empaquetamiento en canastas (Bin Packing Problem)

A diferencia de los otros tipos de problemas mencionados anteriormente, éste en especial, requiere una fuerte variedad de ítems pequeños, los cuales serán asignados a objetos idénticos de gran tamaño, donde su valor, su número y tamaño total tendrán que ser minimizados.

## **2. Tipos de problemas intermedios**

A diferencia de los tipos de problemas básicos, los problemas intermedios consideran a los objetos de gran tamaño como un criterio diferenciador adicional, lo que hace que estos problemas definan a los problemas básicos dentro de su estructura de solución.

En relación a la maximización del output se tienen los siguientes tipos de problemas:

Para el problema de ubicación (uno o varios objetos grandes):

- Problema de ubicación para un objeto grande
- Problema de ubicación de varios objetos idénticos de gran tamaño
- Problema de ubicación de varios objetos heterogéneos de gran tamaño

Para el problema de la mochila (uno o varios objetos grandes):

- Problema de la mochila para un objeto grande
- Problema de la mochila de varios objetos idénticos de gran tamaño

- Problema de la mochila de varios objetos heterogéneos de gran tamaño

Y, para los problemas de minimización de input, se tienen los siguientes tipos de problemas:

- Para el problema de corte de inventario
- Problema de corte de inventario para un objeto idéntico de gran tamaño
- Problema de corte de inventario con varios objetos de gran tamaño con débil heterogeneidad
- Problema de corte residual con varios objetos de gran tamaño con fuerte heterogeneidad

Para el problema de embalaje en canastas

- Problema de embalaje en canastas para un objeto idéntico de gran tamaño
- Problema de embalaje en canastas con varios objetos de gran tamaño con débil heterogeneidad
- Problema de embalaje en canastas residual con varios objetos de gran tamaño con fuerte heterogeneidad

Como puede mostrarse anteriormente, los problemas de asignación o ubicación de ítems pequeños pueden solucionarse en los problemas de tipo intermedio por medio de un subconjunto de problemas relacionados a los objetos de gran tamaño, donde los criterios representativos de éstos dependen de que sea un sólo objeto o varios, de sus similitudes o variedades, y su débil o fuerte heterogeneidad.

### **3. Problemas de tipo refinado**

Se aplica la característica de dimensionalidad como criterio esencial para la solución de problemas de tipo intermedio. En conjunto con la dimensionalidad, para los problemas en dos y tres dimensiones, se tiene en cuenta el criterio de la forma de los ítems pequeños (Wäscher et al., 2007).

#### **Variantes de los problemas de empaque y corte**

Los problemas de embalaje y corte manejan una estructura de diversa complejidad, ya que ésta dispone de una diversidad de variantes a la hora de solucionar estos problemas. Es de total evidencia que no todos los objetos son del mismo tamaño y que los parámetros de combinaciones geométricas son patrones que permiten que este tipo de problemas tenga un alto grado de diferentes características. Para ello tenemos las siguientes variables que dan al embalaje problema un esquema de mayor profundidad (H. Dyckhoff, 1990)

(H. Dyckhoff, 1990), en la búsqueda de clasificar los problemas de corte y embalaje, identificó características y propiedades comunes con el fin de lograr que las diferentes disciplinas tuvieran facilidad en el manejo de la información. La clasificación para los problemas de embalaje se dio en dos grupos (Hopper & Turton, 1998):

#### **Dimensiones espaciales**

Consiste en los problemas de cortar, empaquetar y cargar, definidos a partir de las dimensiones euclidianas.

### Dimensiones no espaciales

Cubre los problemas de corte y empaque. Éstos incluyen dimensiones no espaciales como el peso, el tiempo y dimensiones financieras, tales como cambio de moneda, asignación de memoria, presupuesto de capital, etc.

Entre las dimensiones espaciales y no espaciales se evidenció la existencia de características comunes entre la clasificación de los problemas de embalaje (H. Dyckhoff, 1990). Estas características, se podrán apreciar en la tabla 1.

### Dimensionalidad

Esta característica es evidenciada como la más importante de todas. La dimensionalidad está descrita como el menor número de dimensiones de números reales necesarios para describir la geometría de los patrones. Los tipos de dimensiones son (H. Dyckhoff, 1990):

- Una Dimensión
- Dos Dimensiones
- Tres dimensiones

Los problemas de más de tres dimensiones son obtenidos cuando se expande a dimensiones no espaciales como, por ejemplo, el peso y el tiempo (Hopper & Turton, 1998).

### Forma de Figuras

La forma de los objetos está definida como la representación geométrica en el espacio para sus diferentes dimensiones. Los objetos tienen la misma representación geométrica, exceptuando figuras que son determinadas por su forma, tamaño y orientación (H. Dyckhoff, 1990).

Tabla 1. Sistematización de las principales características (H. Dyckhoff, 1990).

Características	Características Geométricas	Características Combinatorias	Otras Características
Objetos grandes	Dimensionalidad, Forma de figuras	Cantidad de medición, Variedad, Disponibilidad	Objetivos, Información de status, Variabilidad
Ítems pequeños	En principio, como los objetos grandes		
Combinaciones geométricas	Restricciones de patrones dimensionales (figuras admisibles, tipo de corte, distancias, orientación, etc.).	Restricciones de patrones (número de cortes; tipos, números y combinación de figuras, etc.)	Objetivos, Información de status, Variabilidad

Asignaciones	-	Restricciones por número de etapas, órdenes o frecuencia de patrones	Objetivos, Información de status, Variabilidad
--------------	---	----------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------

Para problemas de más de dos dimensiones es necesario tener en cuenta si la figura tiene forma regular o irregular. Las formas regulares están precisadas por unos parámetros que permiten identificar si son de tipo rectangular o de forma de bloques (H. Dyckhoff, 1990). Por otro lado las formas irregulares están definidas por asimetrías y concavidades (Hopper & Turton, 1998).

### Restricción de patrones

Para la construcción de combinaciones geométricas se debe tener en cuenta un patrón de restricciones. Éstas son:

- Las mínimas o máximas distancias y espacios entre los ítems (formas pequeñas) y los objetos (formas grandes).
- Deben ser de forma relativa las orientaciones de los ítems en relación a los objetos. Éstos también se deben tener en cuenta al momento de orientarlos.
- Cantidad de ítems y combinaciones de éstos.
- Si los objetos e ítems son rectangulares o en forma de bloques, se debe tener en cuenta los cortes que a éstos se le realicen (H. Dyckhoff, 1990).

### Cantidad de Medición

Otra de las características que envuelve el embalaje problema es la de Cantidad de Medición. Éste está referido a la cantidad de objetos de gran tamaño y la de pequeño tamaño. Para eso se ha distinguido dos casos (Gilmore, 1979):

- **Medición discreta o entera:** Medida por números naturales. Hace referencia a la frecuencia de ítems u objetos de una forma determinada.
- **Medición Continua o fraccionaria:** Medido por números reales. Mide la longitud, el peso o el diámetro de un conjunto de ítems u objetos que tienen similitudes en su forma con respecto a las dimensiones relevantes.

### Variedad

La variedad está dada por la forma y el número permitido de figuras. Puede darse que los ítems u objetos tengan formas idénticas o diferentes. Para ambos casos, las cantidades varían, pueden ser muchas o pocas dependiendo de la diferenciación que presenten los ítems u objetos.

Esta característica plantea si todas las cifras podrían combinarse. Con esto, surgen los problemas de surtido o problemas de selección de surtido. Este hecho considera que pueden ser escogidas una o diferentes figuras (Hinxman, 1980).



## **Disponibilidad**

La cantidad de ítems u objetos es establecida por la característica de la disponibilidad. Esta característica hace referencia a:

- Fecha de empaque o corte
- El orden o secuencia
- La cantidad de acuerdo a sus límites superior e inferior

Dado lo anterior, se pueden distinguir cantidades infinitas o finitas de ítems u objetos y, por otro lado, puede haber muchas o pocas cantidades de éstos. En los clásicos problemas de empaque y corte se trabaja con un número infinito de objetos con una similitud en su gran tamaño y sólo unas pocas figuras pequeñas con diferentes formas. Mientras que en los problemas de corte y empaque bidimensional, la cantidad de ítems de figura pequeña es mucho mayor.

Las fechas de vencimiento de los ítems que tienen que ser empacados y transportados, las órdenes tomadas en cuenta con el equilibrio de la línea de montaje y la secuencia de operaciones en la elaboración de un producto, son propiedades que existen en ciertos productos cuando el orden y el tiempo son parte fundamental para la elaboración de éstos (H. Dyckhoff, 1990).

## **Restricciones de asignación**

Esta asignación se realiza de ítems pequeños de acuerdo con sus patrones correspondientes a objetos grandes apropiados a las características de éstos. Las restricciones de estas asignaciones se deben a:

- Tipos de asignación
- Número de asignaciones
- Frecuencia de patrones
- Dinámica de la asignación

La restricción más importante es el tipo de asignación, ya que tanto para los ítems pequeños como para los objetos grandes se debe tener claramente definida la asignación correspondiente entre estas dos figuras. En el número de asignaciones se observa la forma como se debe cortar los pequeños ítems para que éstos puedan introducirse en los objetos grandes. La frecuencia de patrones hace referencia al número de patrones similares o diferentes. Por último, en la dinámica de asignación se juega un papel importante en los diferentes puntos de la línea de proceso, donde los ítems u objetos pueden reasignarse conociendo cuáles son los objetos que siguen en la línea (H. Dyckhoff, 1990).

## **Objetivos**

En estos términos, los objetivos hacen referencia a los criterios que se quieren maximizar o minimizar. Como se mencionó anteriormente cada industria plantea sus objetivos de acuerdo a sus necesidades, éstas pueden ser la maximización de utilización de material o la minimización del área que no se aprovecha.

## **Información de status y variabilidad**

En la información del status se hace necesario identificar si los datos del problema son de tipo determinísticos, estocásticos o variables. Esto con el propósito de tener un punto de inicio a la solución de estos problemas.

Una de las razones por la cual la variabilidad se presenta es a causa de la inexactitud de las mediciones en la práctica (H. Dyckhoff, 1990).

## **Métodos de solución de los problemas de empaque y corte**

Los problemas de embalaje y de corte pueden resolverse por medio de la programación lineal, heurística y meta-heurística. También, los modelos de Kantorovich, Gilmore-Gomory, el modelo de Dyckoff-Stadtler, modelo de posición indexado y modelos derivados del problema de enrutamiento han sido unos de los muchos modelos presentados por varios autores para la solución de los problemas de embalaje y de corte (Valério de Carvalho, 2002).

El objetivo principal de todos estos modelos es empaquetar todos los ítems pequeños en objetos grandes, con el propósito de minimizar todos los costos relacionados tanto en su proceso de embalaje y corte, como en su proceso de distribución y entrega final al cliente (Correia et al., 2008).

Kantorovich plantea una formulación matemática centrada para el problema de corte, donde propone minimizar la cantidad de veces que se cortan los ítems enrollados a introducir en los objetos de gran tamaño (Valério de Carvalho, 2002).

Dyckoff, en su modelo, identifica las características de los objetos para cortar un conjunto de ítems pequeños con cierto ancho y otros ítems residuales, con el fin de que estos puedan minimizar el área utilizada dentro de los objetos de gran tamaño. Estos ítems residuales son consecuencia del espacio limitado y no tienen un ancho definido, ya que son cortados posteriormente para un ancho menor y, así, ajustar la pérdida de espacio (Valério de Carvalho, 2002).

Stadtler recopila los estudios realizados por Dyckoff con la diferencia de que para este autor se presentan diferentes restricciones para los ítems cortados (con ancho definido y los residuales). También, presenta ciertas variables que son acopladas a los pedidos con anchuras definidas (Valério de Carvalho, 2002).

## **Estudios realizados del problema de empaquetamiento y corte**

La tabla 2 (ver anexo 1) muestra en forma sintética los estudios realizados en el problema de embalaje y corte (packing and cutting problem), el objetivo de estudio y los métodos de solución que abordaron los diferentes autores para resolverlos.

El problema de corte y embalaje consiste en determinar y encontrar la forma óptima de organizar una gran cantidad de múltiples ítems o productos dentro de una región determinada (Hopper & Turton, 1998).

La primera relación directa entre el embalaje y el corte fue descrita por Arthur Brown en 1971 (H. Dyckhoff, 1990).

El énfasis realizado en la fuerte relación entre los problemas de corte y embalaje arrojó como resultado que existe cierta dualidad entre el material y el espacio. Los problemas de empaquetamiento pueden definirse como el corte de objetos grandes en pequeños ítems. El problema de la mochila (knapsack problem) fue el punto de inicio para unificar las tipologías del problema de empaquetamiento y de corte. El problema de la mochila consiste en introducir la mayor cantidad de ítems con diferentes características (peso, volumen y utilidad) en un espacio definido (mochila) con cierta capacidad (peso y volumen), con el objetivo de maximizar las utilidades (H. Dyckhoff, 1990).

Los principales problemas de este tipo inician identificando las características geométricas y las dimensiones de los diferentes ítems, con el objetivo de clasificar los problemas de empaquetamiento en dos y tres dimensiones. Para este tipo de problemas, se cuenta con empaques regulares e irregulares, que a su vez pueden ser cortables y no cortables. Los empaques cortables son aquellos que requieren de un corte especial para ser empacados, por otro lado, los no cortables pueden ser empacados en su forma original (Hopper & Turton, 1998). A consecuencia de lo anterior surgen problemas de empaquetamiento de tipo rectangular, definidos como problemas en donde las figuras o ítems tienen forma regular o forma de bloques (Hopper & Turton, 1998).

Con el empaque de tipo rectangular aparece una de las causas de estudio en los problemas de empaquetamiento de dos y tres dimensiones, tal como es, el espacio no utilizado cuando los diferentes ítems son empacados. Esta problemática se centra en empacar la mayor cantidad de ítems representados rectangularmente en un mínimo número de contenedores idénticos (Zhu et al., 2012). Por otro lado, en un entorno más industrial, como es la marina, los problemas de empaquetamiento son de iguales características para estas industrias movidas por el comercio mundial. El problema que se presenta es el problema de embalaje del contenedor (CPP – Container Packing Problem), el cual tiene como objetivo optimizar el espacio utilizado por los embalajes en un conjunto de contenedores (Thapatsuwon et al., 2011). Por tal motivo, al buscar maximizar las cantidades transportadas y minimizar el espacio no utilizable, se dio otro punto de vista al problema de empaquetamiento, en donde el costo varía dependiendo del tamaño del embalaje. El principal objetivo de este estudio de costos se dio en seleccionar el número de ítems empacados con el menor costo, a fin de reducir los costos totales (Crainic et al., 2011).

Los problemas de empaquetamiento tienen diferentes influencias que propician un estudio para la solución de los problemas presentados. El comportamiento del consumidor es una de las mayores influencias en los problemas de empaquetamiento. Estos individuos prefieren consumir cierto tipo de producto en unidades de consumo, con el fin de no tentarse a comprar empaques de gran tamaño (Jain, 2012). Diferentes factores al momento de adquirir un producto, como escoger un empaque con cierto tamaño (pequeño o grande), costo y la cantidad de producto que este contiene, permitió determinar los diferentes tipos de productos que son afectados por dichos factores, y la relación que existe entre estos factores al momento de adquirir un producto (Pornpitakpan, 2010).

De este modo se pueden ver las condiciones por las cuales las empresas producen este tipo de productos en unidades de consumo y empaques, con el propósito de que los consumidores puedan combatir sus problemas de autocontrol (Jain, 2012). También, las empresas a la hora de elegir el tamaño del empaque, el precio del producto empaquetado y el tiempo de vida del producto en relación con el tiempo empaquetado, se enfrentan a los problemas de empaque y de corte. A partir de cuatro factores (la vida útil del producto, las tasas de uso del producto, la relación tamaño del paquete-costos del producto y las unidades mínimas a adquirir por cierta cantidad de dinero) se analizan las mejores opciones en cuanto a los precios de venta y volúmenes de producto ofrecido (Koenigsberg et al., 2010)

Las metodologías de solución para los problemas de empaquetamiento son abordadas en su mayoría por medio de varios algoritmos genéticos, tales como: algoritmo de mutación, de cruce, de reproducción, de representación, de decodificación y por conveniencia (Hopper & Turton, 1998).

Hopper & Turton (1999), desarrollaron dos tipos de algoritmos genéticos para la solución del problema presentado, los cuales fueron hibridados a partir de un algoritmo heurístico de ubicación. El primer algoritmo tiene como regla que los objetos sean ubicados al fondo y a la izquierda. Por otro lado, el segundo algoritmo, corrige las desventajas que tiene el primero, las cuales permiten acomodar los ítems de una forma adecuada acoplándose al espacio resultante de los primeros ítems ubicados (Hopper & Turton, 1999).

Para la solución del problema de empaquetamiento, en donde el objetivo es reducir el espacio no utilizado, Zhu et al. (2012) propone un algoritmo basado en un estudio de desfragmentación, que combina el espacio fragmentado en un espacio continuo utilizable, lo cual permite el empaquetamiento de ítems adicionales. Mientras que para maximizar el espacio utilizado de los empaques en un contenedor, Thapatsuwon et al. (2011) propuso solucionar este problema por medio de algoritmos genéticos, optimización de enjambre de partículas (Particle Swarm Optimization-PSO) y la aplicación de un sistema inmune artificial. Para la minimización de costos, Crainic et al. (2011) utilizaron la heurística BDF (Best First Decreasing) soportada por pruebas numéricas con un número de mil elementos estudiados para la solución de dicho problema.

Diversos autores utilizaron diferentes modelos para dar solución al problema que las empresas presentaban debido a las exigencias de los consumidores en relación a tamaños, costos y unidades de producto, con el fin de implementar las mejores opciones en precios de venta y volúmenes de productos ofrecidos. Por ejemplo, Jain (2012) utilizó el descuento hiperbólico y problemas de autocontrol; Pornpitakpan (2010) utilizó una investigación de diseño, productos y procedimientos experimentales, y muestreo; y Koenigsberg et al. (2011) utilizó un modelo de optimización basado en el costo y vida útil del producto.

Como podrá observarse, la investigación de operaciones juega un papel esencial en la solución de este tipo de problemas. Algoritmos genéticos, heurísticas, algoritmos y modelos de optimización, son las herramientas más usadas para determinar una solución óptima y ayudar a tomar decisiones sobre las diferentes variables que incurren en dichos problemas.

## **Problema del Flujo de Costo Mínimo (Minimum Cost Network Flow)**

El problema del flujo de costo mínimo se centra en los modelos de optimización de redes. Este problema considera un flujo de suministros que pasan a través de una red, los cuales tienen una restricción de capacidad en cada uno de sus arcos. Asimismo, se tiene un costo (o distancia), el cual se ve reflejado en el flujo por cada arco existente. Se caracteriza por asumir diferentes orígenes conocidos como nodos fuente, y por otra parte, diversos destinos conocidos como nodos demanda (Hillier & Lieberman, 2010).

El objetivo principal del problema del flujo de costo mínimo es reducir el costo total que se obtiene cuando se envía un suministro a través de una red, desde un nodo fuente a un nodo destino, para satisfacer los requerimientos de la demanda. Por otra parte, se puede ver como alternativa de este problema, la maximización de la ganancia total del envío (Hillier & Lieberman, 2010).

### **Características del problema del flujo de costo mínimo**

El problema del flujo de costo mínimo supone una variedad de características consideradas como reglas mínimas para su ejecución, éstas son:

- La red debe ser una red dirigida y conexa, es decir, que toda la red debe estar enlazada.
- Al menos uno de los nodos debe ser fuente y otro demanda, esto implica que el resto de los nodos que existan en la red son de transbordo (conexión entre un nodo fuente a un nodo demanda)
- Se permite el flujo a través de un arco de un nodo hacia otro, sólo en la dirección que indique la flecha. Esta dirección puede ser unidireccional o bidireccional. En caso de que existan ambas direcciones, este flujo debe ser representado con un par de arcos con direcciones opuestas.
- La red está obligada a poseer suficientes arcos con suficiente capacidad, con el propósito de que los flujos generados en los nodos fuente tengan un destino a los nodos demanda.
- Se debe tener un costo proporcional a la cantidad de flujo que atraviesa el arco, este costo se conoce como costo por unidad (Hillier & Lieberman, 2010).

### **Formulación del problema del flujo de costo mínimo**

Para la formulación compacta del problema del flujo de costo mínimo, se consideran las características de este problema.

#### **Conjuntos**

$I = \text{Nodos}$

#### **Parámetros**

$C_{ij} = \text{costo por unidad de flujo a través del arco } i \text{ hacia } j, \forall i, j \in I$

$U_{ij}$  = capacidad del arco de  $i$  hacia  $j$ ,  $\forall i, j \in I$   
 $B_i$  = flujo neto generado por el nodo  $i$ ,  $\forall i \in I$

**Variable de decisión**

$X_{ij}$  = Flujo a través del arco  $i$  hacia  $j$

**Restricción**

$$\sum_{j \in I} X_{ij} - \sum_{j \in I} X_{ji} = B_i, \forall i \in I$$

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij}, \forall i, j \in I$$

**Función Objetivo**

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} C_{ij} * X_{ij}$$

Para el modelo general anterior, se tiene:

- El problema tiene solución factible sólo si  $\sum_{i=1}^n B_i = 0$

El flujo total que es generado por todos los nodos de suministro es igual al flujo total de todos los nodos de demanda.

Si es diferente de cero, se puede inferir que hay existencias de faltantes (demanda es mayor a la oferta) o excesos (oferta mayor a la demanda).

- Si todos los valores  $B_i$  y  $U_{ij}$ , son enteros, entonces todas las variables de decisión tomarán también valores enteros en todas las soluciones factibles (Hillier & Lieberman, 2010).

**Caso especiales del problema del flujo de costo mínimo**

Los casos especiales para el problema del flujo de costo mínimo, son:

**Problema de Transporte**

- Consiste en distribuir un conjunto de bienes desde un grupo de nodos fuente (centro de distribución) a un conjunto de nodos destino (centros de recepción), con el objetivo de minimizar los costos de distribución. No se imponen capacidades a los arcos (Hillier & Lieberman, 2010).

**Problema de Asignación**

- Consiste en asignar un conjunto de recursos a un conjunto de tareas o actividades, buscando minimizar los costos de asignación. No se imponen capacidades a los arcos (Hillier & Lieberman, 2010).

**Problema de Transbordo**

- Presenta las mismas características del problema de transporte con la diferencia que, además de centros de distribución y recepción, se incluyen centros de transbordo (conexión entre estos dos nodos). No se imponen capacidades a los arcos (Hillier & Lieberman, 2010).

#### **Problema de la Ruta más Corta (Shortest Path Problem)**

- Considera un nodo fuente y un nodo de destino, en donde se distribuyen un conjunto de bienes a través de los nodos de transbordo que existan en la red. El objetivo es transportar el conjunto de bienes con el mínimo costo asignado de un nodo hacia otro, para cada dirección (unidireccional o bidireccional) de la red. No se imponen capacidades a los arcos (Hillier & Lieberman, 2010).

#### **Problema de Flujo Máximo (Maximum Flow Problem)**

La red posee un nodo fuente, un nodo destino y varios nodos de transbordo, varios arcos con capacidades para cada uno de ellos. Se debe tener en cuenta tres consideraciones:

- El costo para todos los arcos existentes de la red debe ser nulo.
- Elegir una cantidad  $F$  que sea mayor al flujo factible máximo de la red, y después asignar una cierta cantidad de  $F$  a los nodos de suministro y demanda. El flujo neto generado por los nodos de transbordo es igual a cero.
- Asignar un arco directo desde el nodo fuente al nodo destino, con un costo muy elevado ( $C_{ij} = M$ ) y una capacidad de arco ilimitada ( $U_{ij}$ ), con el fin de evitar que se puedan hacer transportes de forma directa, y conseguir que el flujo máximo factible se logre por medio de los otros arcos de la red (Hillier & Lieberman, 2010).

#### **Estudios realizados del problema del flujo de costo mínimo**

Autores que han trabajado en el tema de transporte de los paquetes a los diferentes puntos de la red de distribución, se muestran en la tabla 3 (ver anexo 2).

La búsqueda del transporte y ruteo a los canales de distribución es el paso a seguir después que se tienen los productos correctamente empaquetados. El objetivo principal de este transporte se basa en encontrar el conjunto óptimo de productos empacados que pasen a través de todos los nodos de la red de distribución, con el fin de llevar un flujo eficiente y efectivo de bienes, servicios e información que van desde el punto de origen hasta el punto de destino, satisfaciendo las necesidades y requerimiento de los clientes (Council Supply Chain Management).

Satisfacer a tiempo la demanda de los clientes traerá consigo la reducción de costos y el aumento del nivel de servicio de la cadena de suministro. El cumplimiento de la demanda fue la base para desarrollar y proponer un modelo justo a tiempo (JIT) de distribución en la gestión de la cadena de suministro (Farahani & Elahipanah, 2008).

Cumplir con estas exigencias del mercado puede generar ciertos costos elevados a causa de las órdenes de pedido y los inventarios que resultan por la demanda dinámica. El estudio de este tipo de problemas se centró en la reducción de costos y requisitos en el manejo a lo largo de la cadena de abastecimiento, lo cual se solucionó elaborando un modelo de programación dinámica, enfoques exactos y heurísticas para casos especiales, como transportar un paquete, dos paquetes y n-paquetes (Chen et al., 2012).

Los costos logísticos representan un porcentaje significativamente alto en las facturaciones de las empresas. Se indagó acerca de estos costos en las empresas manufactureras y comerciales que operan en Finlandia. El objetivo de estudio consideró ciertos componentes que son característicos en los costos logísticos, tales como: el transporte de producto terminado e inventario, almacenamiento, embalaje, administración logística y costos indirectos (Engblom et al., 2012). Dentro de estos costos logísticos, el transporte es el costo más significativo. Se llega a la conclusión de que a medida que el volumen del envío aumenta, el precio del flete disminuye. Se indagó acerca de este tema y se desarrolló un modelo sobre el tamaño del lote de multi-producto (multi-product, lot-sizing) en una empresa de fabricación europea. Su objetivo de estudio radicó en determinar el tamaño de lote óptimo a distribuir, con el fin de satisfacer la demanda sin producirse acumulación de producto o pedido (backlogging), logrando minimizar los costos logísticos totales (costo de transporte, costo de ordenar, costo de inventario) (van Norden & van de Velde, 2005).

De la misma manera, el diseño óptimo de ruteo, los suministros de productos y niveles de inventario de los diferentes minoristas de una región geográfica determinada, fue el objetivo de estudio para hallar la cantidad óptima de producto a transportar, por medio de unos vehículos que cumplieran con ciertas capacidades finitas de carga, teniendo en cuenta los niveles de inventario de cada minorista. Estos vehículos solo realizaban un viaje y tenían que visitar a sus múltiples destinos (minoristas) (Kang & Kim, 2010). Este mismo problema de enrutamiento y minimización de inventario se estudió con las mismas características, con la diferencia de que la ubicación de la zona geográfica determinada para los minoristas fue tomado en conjuntos y no de forma individual (Li, Chu, & Chen, 2011).

A diferencia de la problemática estudiada por Kang & Kim (2010) y Li et al. (2011), los cuales consideran cadenas de suministros de dos etapas con un proveedor y muchos compradores, se pudo analizar desde otra perspectiva un modelo de cadena de suministro de dos etapas con un solo proveedor y un solo comprador. Su objetivo se basó en un modelo integrado de producción-inventario-marketing, donde se buscó un gana-gana a través de la cooperación de flujo de información de cada parte (proveedor-comprador, comprador-proveedor) (Sajadieh & Akbari Jokar, 2009).

Con el problema del flujo de costo mínimo, la toma de decisiones para el producto, la selección de proveedores y la división de los paquetes durante la distribución, se convierte en los objetivos de estudio en este tipo de problemas a lo largo de la red de distribución. Por otro lado, se consideró el tamaño del envase, el número de sucursales y las interacciones entre los diferentes puntos de la cadena de abastecimiento, con el propósito de conocer los niveles de inventario, niveles de escasez y el efecto látigo que se produce en a lo largo de la cadena de abastecimiento. Para dar solución a este problema presentado, se desarrolló un modelo de



simulación acompañado por la distribución poisson para modelar la demanda presentada (Yan et al., 2009).

Para desarrollar el modelo JIT en la cadena de abastecimiento, Farahani & Elahipanah (2008) desarrollaron un modelo de programación multi-objetivo, en el cual abarcaron dos principales funciones: la minimización de los costos y pedidos pendientes, y los excedentes de productos en todos los periodos.

Para los problemas de costos logísticos estudiados, Engblom et al. (2012) desarrollaron un modelo lineal generalizado mixto (GLMM), un análisis descriptivo y uso de los principales componentes como el tiempo, número de empleados, volúmenes, etc., para solucionar este problema, abarcando los cambios (rutas, niveles de inventario, demanda, etc.) que estos costos logísticos y variables del problema puedan presentar. Mientras que, para minimizar los costos logísticos de transporte en relación al tamaño del envío, Van Norden & Van De Velde (2005) presentaron un algoritmo de relajación de Lagrange para su solución.

En el diseño de ruteo para clientes de forma individual, Kang & Kim (2010) implementaron un algoritmo heurístico dividido en dos fases. La primera fase se centró en hallar sólo las cantidades de reabastecimiento demandadas por los minoristas por periodo, por lo cual los costos de transporte fueron eliminados; mientras que en la segunda fase se incluyeron los costos de transporte con el fin de poder determinar el plan de distribución detallado para cada periodo. En conjunto con esta información se tomaron decisiones tanto en los niveles de inventario como en el sistema de transporte. De una forma diferente, Li et al. (2011) presentaron un algoritmo genético para el problema de ruteo con los destinos agrupados en diferentes zonas geográficas. Este cambio tuvo la finalidad de servir a cada uno de estos grupos por medio de una ruta distinta, lo cual produjo que la red de flujo fuese más sencilla de desarrollar.

Por otro lado, Sajadieh & Akbari Jokar (2009) vieron que las relaciones entre comprador y vendedor influyen en la eficiencia de la cadena de abastecimiento de cualquier empresa. Con el fin de tener políticas de pedido óptimo, envíos y precios, un modelo de optimización basado en la programación lineal fue la solución abordada por estos autores, ya que se observó que la demanda presentada era sensible a los cambios en los precios de los productos ofrecidos.

Se puede analizar que la mayoría de estos autores usan las herramientas de la investigación de operaciones y simulaciones para resolver los problemas de ruteo, inventarios, satisfacción de demanda y manipulación de la cadena de suministro, con el propósito de reducir los costos logísticos relacionados a estos problemas.

### **Estudios realizados de los Problemas de empaquetamiento, corte y flujo de costo mínimo**

La investigación de operaciones vuelve a ser parte de la solución de este tipo de problemas, en conjunto con modelos de minimización de costos, simulaciones y modelos matemáticos. En la tabla 4 (ver anexo 3), se muestran los diferentes autores que trabajaron los problemas de empaquetamiento y distribución, como un solo tema unificado.

Sin lugar a duda, el empaquetamiento y la distribución, son dos grandes temas que pueden trabajarse por separado, otorgando soluciones satisfactorias por medio de la investigación de operaciones. Al unir estos dos temas, surgen nuevas variables y nuevas formas de solución al nuevo tipo de problema presentado.

Los centros de distribución proporcionan a sus clientes los tamaños de paquetes con ciertas unidades específicas determinadas por la demanda. Estos pueden ser embalajes (outer packs, cajas que contienen de 24 a 48 unidades), empaques (inners-pack, contienen de 6 a 8 unidades) y las unidades de consumo. La problemática de este problema fue determinar el tamaño óptimo de paquetes para cada tipo de ítem (Stock Keeping Unit-SKU) (Dawes, 2012). Por otro lado, para determinar el tamaño de lote óptimo y los costos de distribución a los diferentes canales, se dio como punto de partida considerar los costos de inventario, producción, montaje y transporte del producto al cliente (Molina et al., 2009).

En una situación más práctica y realista se desarrolló en la región de Asia pacífico un estudio dirigido a Procter & Gamble (P&G), multinacional manufacturera de bienes de consumo, en la ayuda de toma de decisiones en diferentes aspectos. El interrogante más importante que se trabajó en este estudio en relación con este proyecto fue: ¿Cuál es el precio, la distribución y las combinaciones de tamaño necesarios para lograr un crecimiento deseable? (Kumar et al., 2009). De igual manera, en la industria manufacturera de toallas, estudió la manera de reducir los costos de distribución con la ayuda del uso eficiente del espacio utilizado en las cajas de cartón, que contenían un cierto número de producto empaquetado (Leung et al., 2008).

Considerando que el empaquetamiento y la distribución pueden presentarse de diferentes maneras tanto en variedad de productos, clientes y rutas de distribución, como en un solo producto, un solo cliente y una sola ruta. Un caso especial de estos problemas de empaquetamiento y distribución fue el estudio realizado cuando se trata de  $n$  diferentes productos, un solo camión capacitado y una ruta fija para la entrega a los diferentes clientes. Por consiguiente, se usó un algoritmo de optimización local y apoyado en 14.000 problemas generados al azar, se dio una solución eficiente al problema presentado, donde se pudo observar la optimización no se daba en la programación de los horarios de entrega del embalaje (Liu et al., 2008).

Luego que Dawes (2012) obtuviera los tamaños de paquetes exigidos por los consumidores, elaboró un sistema de costos para equilibrar el manejo de costos de los centros de distribución (DC), el manejo de costos e inventario en los minoristas (tiendas) y la relación de costo/inventario tanto en los centros de distribución como en los minoristas (tiendas). Molina et al. (2009), por medio de un modelo matemático propuesto y la heurística de Lagrange, dio solución al problema de determinar el tamaño de lote óptimo y los costos de distribución.

Con el propósito de obtener una respuesta más eficiente, Kumar et al. (2009) desarrolló un coeficiente estimado de ponderación aleatoria, el cual comprende las diferentes unidades de estado e inventario, y la distribución interna de la compañía. También, ayudó a la creación de un simulador para que los altos directivos de P&G puedan generar diferentes estrategias de acuerdo a lo necesitado a fin de obtener el valor deseado (Kumar et al., 2009). Por medio de un algoritmo genético multi-objetivo, Leung et al. (2008) se planteó este problema con el propósito de buscar el diseño óptimo de cajas de cartón, permitiendo reducir el espacio no utilizable y el número de cajas utilizadas.

Se observa que el objetivo común es encontrar el tamaño óptimo de lote para maximizar la cantidad de producto a distribuir y la secuencia del ruteo necesario para satisfacer la demanda y la minimización de los costos relacionados a estas actividades.

## **Algoritmo genético**

Los algoritmos genéticos son técnicas de búsquedas estocásticas que fueron introducidas por John Holland (1975). Fueron inspirados en la analogía de la evolución y población genética (Stender, 1993).

Los modelos de los algoritmos genéticos tienen el concepto desde un proceso evolucionario, donde su naturaleza está aplicada a los problemas de optimización artificial. El uso de los operadores genéticos como mutación, selección y cruce de unos posibles candidatos de soluciones, son mejorados continuamente y no necesariamente llegan al óptimo global (Stender, 1993).

Se llama cromosoma a un arreglo compuesto por dos sub-arreglos que codifica "x" y "y" respectivamente. Cada posición en el cromosoma es llamado gen. El valor del gen es llamado valor alélico. Para consideraciones de desempeño, los valores de los alelos usualmente son escogidos de forma binaria. A fin de aplicar los algoritmos genéticos para la solución de problemas de optimización, debe ser posible definir función de aptitud (function fitness), que asocia medir la calidad de cada individuo (Stender, 1993).

## **Operadores genéticos**

Los tres operadores más importantes y más estudiados de los algoritmos genéticos son: reproducción, cruce y mutación (Stender, 1993).

### **Reproducción**

Da a la nueva población  $P(t+1)$  la proporcionalidad de aumentar el número de copias de individuos de la población vieja  $P(t)$ . Empezando de una población  $P(t)$  de  $n$  individuos, la nueva población  $P(t+1)$  es obtenida de una vieja aplicando  $n$  tiempos el operador de reproducción: los individuos ( $h$ ) se reproducen con probabilidad  $Pr(h)$  usando una distribución de probabilidad uniforme (Stender, 1993).

### **Cruce**

Éste es aplicado con probabilidad  $P_c$ , independiente del individuo al cual se le ha aplicado. Se escoge aleatoriamente dos individuos (padres) y los combina, generando dos descendencias. La unión está hecha escogiendo un punto de corte (punto de cruce) con distribución de probabilidad uniforme. El corte determina la subdivisión de los dos padres en dos partes; estas partes son intercambiadas para formar las dos descendencias. Este operador permite recombinar bloques de edificio de manera muy eficiente. En la ilustración 4 se mostrará un ejemplo de dicho cruce (Stender, 1993).

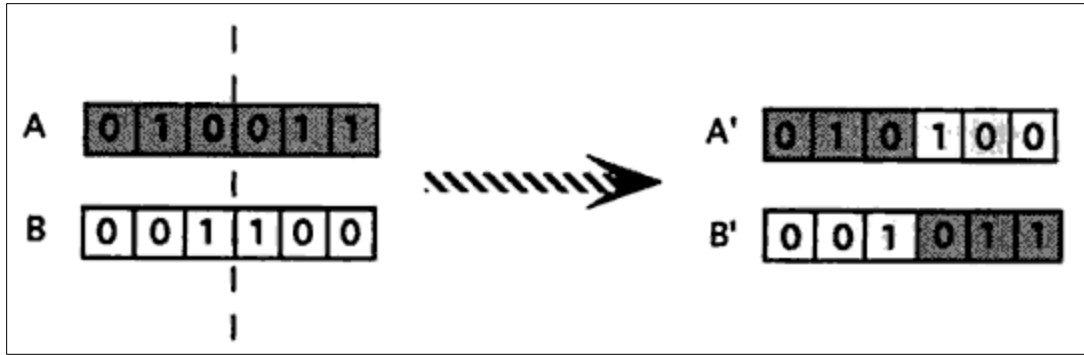


Ilustración 4. Dos cromosomas A y B (padres) son cruzados para obtener dos nuevos descendientes A' y B' (Stender, 1993).

### Mutación

Esto causa, con probabilidad  $P_m$ , un cambio en el valor alélico en un gen escogido aleatoriamente. Por ejemplo, si los valores alélicos son definidos como números binarios, un alelo con valor cero (0) es cambiado a uno (1) y viceversa. Estos operadores causan variaciones elementarias en la población y dan garantía de que cada punto en el espacio de búsqueda sea encontrado (Stender, 1993).

### Aplicación de Algoritmo Genético en empaquetamiento

Leung et al. (2008), se enfocaron en la búsqueda de un grupo óptimo de cajas para una industria manufacturera de toallas, con propósito de reducir los costos de distribución a partir de la maximización del espacio en las cajas y la minimización del tipo de cajas requeridos.

Un algoritmo genético multi-objetivo busca la caja optima dentro de los posibles candidatos, con el fin de minimizar el espacio no utilizado y, así mismo, encontrar de manera eficiente el número ideal de tipos de cajas que se necesiten para la solución del problema (Leung et al., 2008).

### Diseño espacial

Se define cual debe ser el diseño espacial de la caja (dimensiones) por medio de la selección de diferentes candidatos, es decir, para poder realizar la optimización requerida se debe determinar cada una de las cajas con las posibles combinaciones de dimensiones, haciendo referencia a su altura máxima, su altura mínima, altura sugerida y por último su volumen (alto, largo y ancho) (Leung et al., 2008).

### Optimización de cajas por medio de algoritmos genéticos

El algoritmo genético encuentra el conjunto de cajas óptimas a ser seleccionadas para encontrar una solución, por tal motivo se define cada individuo como una representación binaria, llamada cromosoma. En este caso, cada candidato determinado está formado por una cadena binaria de 10- bits, con el fin de evidenciar la existencia de 10 candidatos (cajas) (Leung et al., 2008).

## **Función de aptitud (Function Fitness)**

La función de aptitud servirá para medir la aptitud de cada cromosoma dentro del grupo de posible candidatos, para efectos de este ejemplo medirá la aptitud de cada una de las cajas candidatas, con el propósito de evidenciar cuál de los candidatos reproducidos sobrevivirá en la siguiente generación (Leung et al., 2008).

## **Operadores Genéticos**

Se usaron los esquemas existentes dentro de los algoritmos genéticos cruce y mutación, en los cuales se seleccionan a los padres como los candidatos más aptos, ya que la probabilidad de estos es mucho mayor que la de los padres con menor aptitud. Por otro lado, se realizó una estrategia elitista, la cual copia los mejores individuos de cada generación a fin de mejorar el mecanismo de selección en el algoritmo genético (Leung et al., 2008).

## **Procedimiento Evolutivo**

El algoritmo genético para el caso estudiado sigue los siguientes pasos para su solución:

- 0. Inicialización:** Generar aleatoriamente una población de N- soluciones.
- 1. Evaluación:** Calcular la aptitud de cada individuo de la población actual, y a continuación actualizar el conjunto tentativo de soluciones no dominadas.
- 2. Selección, cruce y mutación** con la finalidad de generar una nueva población N.
- 3. Estrategia elitista:** Actualizar el conjunto tentativo de soluciones no dominadas y la población actual si es necesario.
- 4. Actualización** de los pesos de la función aptitud si es necesario.
- 5. Prueba de terminación:** si una condición de parada pre-especificada se cumple, termina el algoritmo. Por otro lado si no es así vuelva al primer paso (Leung et al., 2008).

Por otro lado, Thapatsuwan et al. (2011), quiso optimizar un conjunto de cajas en un conjunto de contenedores con dimensiones fijas, este problema es conocido como Container Packing Problem (CPP). Por medio del algoritmo genético, optimización de enjambre de partículas y sistemas inmunológicos artificiales, se han aplicado para la solución de este tipo de problemas de optimización.

Para dar solución al problema CPP por medio de la meta-heurística, algoritmo genético, tuvo en primer lugar la codificación del espacio de soluciones. Esta codificación se realiza a partir del total de cajas que serán empacadas (6 cajas), con el fin de realizar posteriormente un aleatorio para formar la población de cromosomas de tamaño N. (Thapatsuwan et al., 2011).

Teniendo la población de n cromosomas generados aleatoriamente, se prosigue a aplicar los operadores genéticos, para este problema se usaron los operadores de cruce y mutación. El operador genético de cruce, combina dos cromosomas padres con el fin de obtener una

descendencia con mejores características; mientras que la mutación produce un cambio aleatorio en un gen del cromosoma (Thapatsuwan et al., 2011).

Los mejores resultados obtenidos por el cruce y la mutación, seguirán el proceso de selección de ruleta (Roulette Wheel Selection-RWS), el cual determinara los cromosomas de las siguientes generaciones. El número de segmentos en la ruleta es igual al número de cromosomas en la población. El tamaño del segmento se determina por la aptitud (fitness) de cada cromosoma. El proceso de rotación es simulado por números generado al azar de manera uniforme entre el rango de 0-1, y se termina cuando se ha producido un cierto número de cromosomas para la siguiente población. La probabilidad de supervivencia y el número de réplicas del cromosoma dependerá de su aptitud. Al final, los cromosomas que sobrevivan serán los más aptos para la solución del problema (Thapatsuwan et al., 2011).

La ilustración 5, muestra el proceso de selección de los cromosomas que sobrevivirán a la siguiente generación, explicados en el parrado anterior.

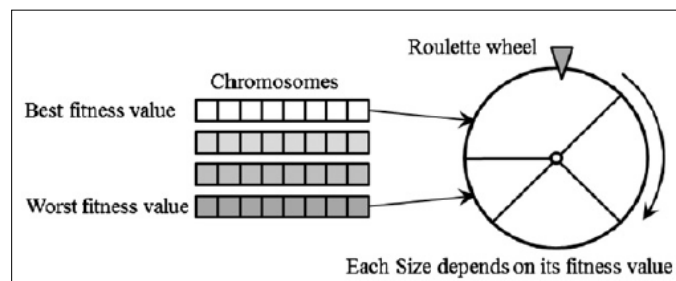


Ilustración 5. Proceso de selección de ruleta (Thapatsuwan et al., 2011).

Junto con el problema de carga de un contenedor y el problema de embalaje de contenedores, está el problema de la tira de embalaje (Strip Packing Problem-SPP). Este problema puede ser considerado en dos y tres dimensiones. En dos dimensiones se produce en el corte de rollos de metal; por otro lado, en el caso de tres dimensiones el SPP mejora diseños de los contenedores (Bortfeldt, 2006).

Existen cuatro subtipos del problema de la tira de embalaje:

- RF: Piezas rotadas en 90° y no requieren de corte de guillotina.
- RG: Piezas rotadas en 90° y requieren de corte de guillotina.
- OF: La rotación de las piezas es fijada y no requiere corte de guillotina
- OG: La rotación de las piezas es fijada y requiere corte de guillotina. (Andreas Bortfeldt)

Este tipo de problemas son resueltos por medio del uso de herramientas meta-heurísticas, principalmente los algoritmos genéticos (GA), búsqueda tabú (TS), simulación de recocido (SA), etc. Existen tres enfoques de soluciones que las meta-heurísticas utilizan para la solución del problema SPP. En el primer enfoque, se utilizan métodos de codificación, con el fin de establecer una secuencia en la ubicación de las piezas. La búsqueda de la ubicación óptima se lleva a cabo en el espacio de las posibles soluciones de codificaciones. Las posibles soluciones de codificaciones son generadas por los operadores de la meta-heurística. Ésta rutina de ubicación o decodificación, servirá para desarrollar y transformar las soluciones codificadas halladas por los operadores en diseños completos (Bortfeldt, 2006).

En el segundo enfoque mientras ya se tenga un grupo de soluciones codificadas, se requiere además la información geométrica de las piezas con el fin de hallar un posicionamiento final. Este tipo de enfoque es un problema específico de codificación, basado en gráficas y los correspondientes operadores genéticos (Bortfeldt, 2006).

El tercer y último enfoque no utiliza codificación. La búsqueda de soluciones se lleva a cabo en espacios definidos que son manipulados por los operadores específicos (Bortfeldt, 2006).

En la tabla 5, se muestran las investigaciones al problema SPP, donde se podrá apreciar que la mayoría de este tipo de problemas son resueltos por medio de la herramienta meta-heurística algoritmo genético (Bortfeldt, 2006).

Tabla 5. Meta-heurísticas para el SPP-2D con piezas rectangulares (Bortfeldt, 2006).

No.	Autor (es)	Subtipo SPP	Enfoque	Meta-heurística	Observaciones
1	Jakobs (1996)	RF	1	GA	Usa la heurística de la parte inferior izquierda (Bottom Left-BL).
2	Dagli and Poshyanonda (1997) y Poshyanonda y Dagli (2004)	RF	1	GA	La rutina de colocación se basa en un método de deslizamiento y una red neuronal artificial.
3	Liu and Teng (1999)	RF	1	GA	Utiliza una heurística BL que da al ancho del desplazamiento ortogonal de una pieza.
4	Hopper and Turton (2000)	RF	1	GA	No. 4-6, son los métodos más exitosos propuestos por Hopper y Turton (2000)
5	Hopper and Turton (2000)	RF	1	SA	Utiliza la heurística de la parte inferior de relleno (BLF), la cual llena los vacíos de un diseño
6	Hopper and Turton (2000)	RF	1	NE	NE (evolución inocente-naive evolution), es decir, un GA con mutación pero sin cruce
7	Mumford-Valenzuela et al. (2003)	RG	1	GA	Utiliza los operadores como el ciclo de cruce
8	Kröger (1993, 1995)	RG	2	Paralelo GA	Una solución es codificada como un árbol binario dirigido fijando una dimensión en la posición de cada pieza.
9	Schnecke (1996)	RG	2	Paralelo GA	Similar al No. 8
10	Ratanapan and	RF	3	GA	Los operadores genéticos específicos realizan operaciones geométricas como

	Dagli (1997, 1998)				traslación y rotación.
<b>11</b>	Iori et al. (2002) y Monaci (2001)	OF	Híbrido	Híbrido, combinación GA y TS	Las soluciones son codificadas como secuencias de ubicación. El método TS es derivado de Lodi et al. (1999)

### Diseño de experimentos

El diseño estadístico de experimentos hace referencia al proceso para planear el experimento de tal forma que los datos puedan analizarse con métodos estadísticos, con el fin de conseguir conclusiones válidas y objetivas. Por tal motivo, cualquier problema experimental incluye dos aspectos principales: el diseño de experimentos y el análisis estadístico de datos (Montgomery, 2005).

Los tres principios básicos del diseño experimental son: la realización de réplicas, la aleatorización y la formación de bloques (Montgomery, 2005).

### Realización de réplicas

Se entiende como la repetición del experimento básico. La realización de réplicas posee dos propiedades importantes. Primera, permite al experimentador obtener una estimación del error experimental, la cual se convierte en una unidad de medición básica que ayuda a determinar si las diferencias observadas en los datos son estadísticamente diferentes. Segunda, usando una media muestral para estimar el efecto de un factor en el experimento, la realización de réplicas permite al experimentador obtener una estimación mucho más precisa sobre el efecto dado (Montgomery, 2005).

### Aleatorización

Es la fundamentación del uso de los métodos estadísticos en el diseño experimental. Por aleatorización se entiende que tanto la asignación del material experimental como el orden en que se realizan las corridas del experimento se determinan de una manera al azar. Las observaciones o errores deben ser variables aleatorias con distribución independiente. Esta aleatorización ayuda a sacar el promedio de los efectos extraños que se puedan presentar (Montgomery, 2005).

El uso de programas computacionales es un auxilio para seleccionar y construir diseños experimentales. Dichos programas presentan corridas del diseño experimental de manera aleatoria, y con frecuencia sigue siendo necesario que el experimentador haga la asignación del material experimental, de los operadores, los instrumentos, las herramientas, etc. (Montgomery, 2005).

### La formación de bloques

Es una técnica de diseño que se utiliza para mejorar la precisión de las comparaciones que se hacen entre los factores de interés. Se emplea para reducir o eliminar la variabilidad transmitida por los factores perturbadores, es decir, que influyen en la respuesta experimental. Un bloque es un conjunto de condiciones experimentales relativamente homogéneas (Montgomery, 2005).



## **Pautas generales para diseñar experimentos**

Un esquema general del procedimiento recomendado para diseñar experimentos es:

- Identificación y exposición del problema
- Elección de los factores, los niveles y los rangos
- Selección de la variable de respuesta
- Elección del diseño experimental
- Realización del experimento
- Análisis estadístico de los datos
- Conclusiones y recomendaciones(Montgomery, 2005).

Nagano et al. (2008) desarrollaron un algoritmo genético en relación al problema de línea de programación general, con el fin de minimizar el tiempo entre el inicio y final de una secuencia de trabajos. Se implementó un algoritmo genético constructivo que permitió definir las funciones de aptitud. Por otra parte, se evaluaron los parámetros del algoritmo genético a partir de un diseño de experimentos, con el propósito de poder ser comparados con un algoritmo realizado por Taillards, y así tener una referencia estándar con respecto a la meta-heurística realizada.

La propuesta del algoritmo genético constructivo, tiene parámetros que son necesarios determinar para obtener el mejor rendimiento, para esto se desarrolla un diseño de experimentos con el fin de controlar las características del algoritmo ya sea fijando o modificando estos factores, obteniendo así una variedad de combinaciones que permitan la comparación frente a una referencia específica, y así poder obtener un mejor enfoque frente al algoritmo genético (Nagano et al., 2008).

Por otro lado, Pradhan & Lam (2007), realizan una investigación sobre el problema de programación de trabajo bajo una cámara de estrés ambiental, con el fin de minimizar el tiempo de producción del proceso, para esto incurren en desarrollar un algoritmo genético y un algoritmo colonia de hormigas. El desempeño de estas dos meta-heurísticas fueron confrontadas por medio de la técnica first fit (FF) de la literatura.

### **Diseño de experimentos en la investigación**

El diseño de experimentos se utilizó para determinar los parámetros del algoritmo genético, con el fin de obtener resultados a partir de diversos factores tomados. En cambio, en el algoritmo de colonia de hormigas, se aplicó un diseño de experimentos a fin de ajustar los parámetros de esta meta-heurística (Pradhan & Lam, 2007).

El diseño de experimentos permite comparar los resultados obtenidos a partir de la identificación de parámetros de la meta-heurística utilizada. Cuando estos parámetros se obtienen, se puede desarrollar la problemática de una mejor manera y se identifica cuales factores pueden influir en la solución (Pradhan & Lam, 2007).

## **CAPITULO 3**

### **Objetivos**

#### **Objetivo general**

Diseñar y desarrollar un modelo de optimización que represente la problemática actual de la empresa y solucionarla por medio de la herramienta meta-heurística, algoritmo genético, que determine el tamaño óptimo de empaque (inner pack) y embalaje (outer pack), maximice la utilidad de la operación y tenga en cuenta los costos logísticos que intervienen en la cadena de abastecimiento.

#### **Objetivos específicos**

- Analizar la problemática ya existente, con el fin de observar el efecto que tiene ésta a lo largo de la cadena de abastecimiento y definir en qué eslabones y operaciones tiene mayor impacto.
- Representar la problemática presente en la empresa por medio de un modelo cuantitativo, el cual permita tomar decisiones en el tamaño de empaque y embalaje sujeto a los costos logísticos.
- Resolver y ejecutar el modelo cuantitativo diseñado, por medio de la herramienta meta-heurística, algorítmico genético, y analizar los resultados obtenidos por medio de un análisis de sensibilidad para verificar la viabilidad de la solución.
- Realizar un diseño de experimentos a la ejecución del método cuantitativo creado para medir la eficiencia del algoritmo meta-heurístico propuesto.
- Comparar el resultado obtenido con los datos de la empresa o casos de investigación, con el fin de comprobar que el resultado final es una solución óptima.

## **CAPITULO 4**

En este capítulo se presentarán el modelo matemático y la herramienta algoritmo genético, que se usaron para la solución del problema de empaquetamiento.

El modelo matemático se desarrolló por medio de la formulación compacta (programación entera) y se implementó en el software Lp-Solve. Para observar el comportamiento de este modelo se tuvieron en cuenta dos tipos de datos. Los primeros datos fueron propuestos por los estudiantes con el fin de observar el resultado obtenido y analizarlo por medio del análisis de sensibilidad. Los segundos datos serán los otorgados por la empresa consultora Logyca S.A., los cuales son datos reales del problema que presenta la empresa "ABC".

En la herramienta usada, algoritmo genético, se desarrolló por medio del software Microsoft Excel y lenguaje de programación Visual Basic. Al igual que en el modelo matemático, se presentan los dos tipos de datos, los propuestos y los reales, con el fin de poder realizar un análisis general en estos.

## Modelo de programación entera del problema

El problema de optimización de empaquetamiento será formulado por medio de un modelo matemático. Este modelo matemático se desarrollará de forma compacta a través de la programación entera (Integer Program). Con ayuda del software LpSolve se verificará y se analizará la programación realizada y los resultados obtenidos. Este software se puede descargar online de manera gratuita, con el fin de poder visualizar los modelos realizados (MODELO LPSOLVE DATOS PROPUESTO, MODELO LPSOLVE DATOS REALES Y MODELO LPSOL VARIOS INNER OUTER).

## Consideraciones del modelo

Para el problema de la empresa "ABC" se tendrán las siguientes consideraciones para la formulación del modelo matemático:

- El modelo está diseñado para escoger diferentes tipos de inner pack y outer pack, dependiendo de los diferentes productos que se estudien. En nuestro modelo, el conjunto I viene dado por un solo producto, donde el trayecto que recorrerá en la cadena de abastecimiento será para un solo inner pack, outer pack y DC. En el DC se repartirán los productos en sus diferentes presentaciones a los clientes. Lo anterior se podrá ver en la ilustración 6.
- Solamente existe un **Centro de Distribución (DC)** que atiende las demandas, de outer pack e inner pack, para todos sus diferentes clientes. Este DC está clasificado a partir de los diferentes tipos de outer pack que se consideren, es decir, si se consideran 3 tipos diferentes de outer pack  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , cada uno de ellos irá respectivamente a un DC diferente  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  contenidos en el DC PRINCIPAL. Si se escoge la trayectoria de  $K_2$ , entonces éste deberá ir a  $L_2$ , el cual está contenido en el DC PRINCIPAL. Éste sería el único DC escogido, y de ahí se asignarán las demandas a los clientes.
- El DC no puede tener inventario, es decir, todo lo que llega al centro de distribución debe ser asignado a los demás clientes.
- El producto se entrega a los clientes en presentaciones de inner pack y outer pack. En consecuencia de lo anterior, no se pueden abrir los inner pack para entregar a los clientes unidades de producto.
- La demanda total (outer pack e inner pack) es entregada por la empresa Logyca.
- Los costos de manipulación de inner pack y outer pack, y el costo de apertura de outer pack serán otorgados por la empresa logyca.

Para proveer una solución completa del problema de optimización de empaquetamiento, se necesita determinar el número y el tipo de outer pack e inner pack que deberían ser ordenados por el DC. También es necesario conocer el número de outer pack que serán abiertos en el DC antes de asignarlos a sus clientes. Finalmente se requiere saber el número de outer pack e inner pack que serán enviados a cada cliente.

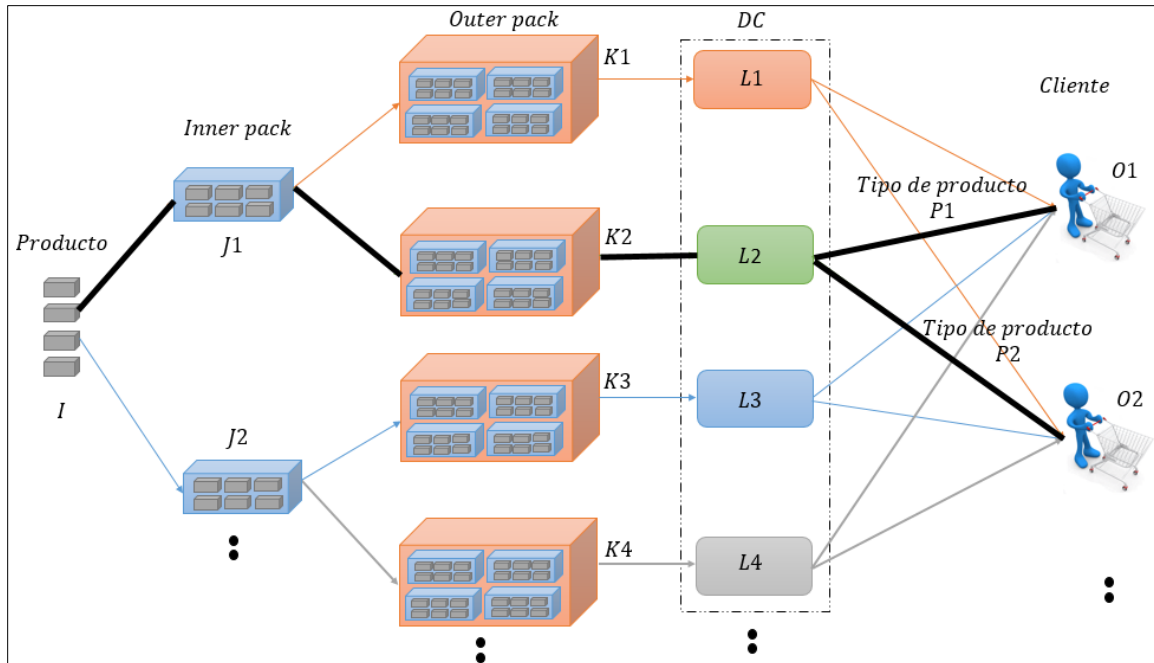


Ilustración 6. Consideraciones del modelo en la cadena de abastecimiento propuesta

### Formulación compacta

La programación entera del problema de empaquetamiento para la empresa “ABC”, se divide en cinco partes fundamentales, estas son: conjuntos, parámetros, variables de decisión, restricciones y función objetivo.

- Los conjuntos es la agrupación de elementos con las mismas características.
- Los parámetros son los datos numéricos del problema.
- Las variables de decisión son los valores que están bajo nuestro control e influyen en el desempeño del sistema.
- Las restricciones son los posibles ciertos valores que pueden adquirir las variables de decisión.
- La función objetivo que, en la región factible, puede hacerse grande en el caso de un modelo de maximización, o arbitrariamente negativa en el caso de un modelo de minimización (Winston, 2005).

La formulación compacta del modelo con la cual se quiere representar la problemática actual de la empresa “ABC”, con el fin de dar una solución a ella, es:

### Conjuntos

$I = \text{Producto}$

$J = \text{Inner packs}$

$K = \text{Outer packs}$

$L = \text{Centros de distribución}$

$O = \text{Clientes}$

$P = \text{Tipo de producto}$

### Parámetros

$s_i = \text{Capacidad de producto } i \text{ producidas, } \forall_i$   
 $a_j = \text{Cantidad de unidades contenidas en inner } j, \forall_j$   
 $b_k = \text{Cantidad de inners packs contenidos en outer pack } k, \forall_k$   
 $njk_{jk} = \text{Matriz de asignación de inner pack } j \text{ a outer pack } k, \forall_j, \forall_k$   
 $nkl_{kl} = \text{Matriz de asignación de outer pack } k \text{ a DC } l, \forall_k, \forall_l$   
 $ca_k = \text{Costo de apertura de un outer pack tipo } k, \forall_k$   
 $cmo_l = \text{Costo de manipulación de outer pack en DC, } \forall_l$   
 $cmi_l = \text{Costo de manipulación de inner pack en DC } l, \forall_l$   
 $d_{op} = \text{Demanda del cliente o del producto tipo } p, \forall_o, \forall_p$   
 $nlp_{lp} = \text{Matriz de asignación de DC } l \text{ de producto tipo } p, \forall_l, \forall_p$   
 $rlp_{lp} = \text{Matriz de asignación de DC } l \text{ de producto tipo } p, \forall_l, \forall_p$   
 $M = 10000000$

### Variables de Decisión

$X_{ij} = \text{Cantidad de unidades de producto } i \text{ empaquetadas en inner pack } j, \forall_i, \forall_j$   
 $Y_{jk} = \text{Cantidad de inner pack } j \text{ embaladas en outer pack } k, \forall_j, \forall_k$   
 $Z_{kl} = \text{Cantidad de outer pack } k \text{ enviadas a DC } l, \forall_k, \forall_l$   
 $alpha_j = \text{Activación de inner pack } j, \forall_j$   
 $beta_k = \text{Activación de outer pack } k, \forall_k$   
 $xlop_{lop} = \text{Cantidad de producto } p \text{ enviado desde DC } l \text{ a cliente } o, \forall_l, \forall_o, \forall_p$

### Restricciones

#### 1. Capacidad

$$X_{ij} \leq s_i, \forall_i \quad (1)$$

#### 2. Balanceo de inner pack

$$X_{ij} = a_j * njk_{jk} * Y_{jk}, \forall_j \quad (2)$$

#### 3. Activación de inner pack

$$alpha_j = 1, \forall_j \quad (3)$$

#### 4. Envío de inner pack

$$X_{ij} \leq M * alpha_j, \forall_j \quad (4)$$

#### 5. Balanceo de outer pack

$$njk_{jk} * Y_{jk} = b_k * nkl_{kl} * Z_{kl}, \forall_k \quad (5)$$

#### 6. Activación de outer pack

$$\beta_k * n_{jk} = 1 \quad \forall j \quad (6)$$

7. Envío de outer pack

$$n_{jk} * Y_{jk} \leq M * \beta_k, \forall k \quad (7)$$

8. Demanda de outer pack

$$x_{lop_{l01}} * r_{lp_{l1}} = d_{o1}, \forall o \quad (8)$$

9. Demanda de inner pack

$$x_{lop_{l02}} * r_{lp_{l2}} = d_{o2}, \forall o \quad (9)$$

10. Balanceo del DC

$$n_{kl} * Z_{kl} = x_{lop} * n_{lp}, \forall k, \forall l, \text{ donde } k = l \quad (10)$$

### Función Objetivo

Minimizar los costos totales (costos de manipulación y apertura de outer pack, y costo de manipulación de inner pack)

$$\begin{aligned} \min \text{cost} = & \left( \sum_k \sum_l Z_{kl} * ca_k - \sum_l \sum_o (x_{lop_{l01}} * ca_k) \right) + \left( \sum_k \sum_l Z_{kl} * cm_{ol} \right. \\ & \left. - \sum_l \sum_o (x_{lop_{l01}} * cm_{ol}) \right) + \sum_l \sum_o x_{lop_{l02}} * cm_{il} \\ & + \sum_l \sum_o (x_{lop_{l01}} * cm_{ol}) \quad (11) \end{aligned}$$

A continuación, en la tabla 6, se realizará un breve análisis de cada uno de los componentes de la formulación compacta del modelo matemático propuesto. Este análisis se realiza con el propósito de aclarar dudas sobre cada componente, dado el caso que el lector no entienda su significado dentro de la formulación.

Tabla 6. Análisis de los componentes de la formulación compacta propuesta

	Componente	Análisis
<b>Conjuntos</b>	<i>I</i>	Determina cuales son los productos con los que se trabajará el modelo. Los productos son SKU homogéneos. Ejemplo: galleta
	<i>J</i>	Se busca el mejor empaque que reúna cierta cantidad de producto. Ejemplo: empaques de 2 unidades, 4 unidades, etc.
	<i>K</i>	Se busca el mejor embalaje que reúna cierta cantidad de inner pack. Ejemplo: cajas de 8 inner pack, 16 inner pack, etc.
	<i>L</i>	Es el centro de distribución de la empresa al que llegan los outer pack. En él se deciden que cajas serán abiertas para satisfacer las demandas en inner pack, y cuales se dejan cerradas para demandas en outer pack.
	<i>O</i>	Son los clientes que tiene la empresa. Estos clientes pueden

		demandar en inner pack y outer pack
	$P$	Tipo de producto entregado al cliente. El producto $p=1$ , hace referencia a outer pack. El producto $p=2$ , hace referencia a inner pack.
<b>Parámetros</b>	$s_i$	Es la capacidad de producción de la empresa de un producto.
	$a_j$	Es la cantidad de producto que puede contener cierto tipo de inner pack. Ejemplo: un inner pack de 6 unidades, 10 unidades, etc.
	$b_k$	Es la cantidad de inner pack que puede contener cierto tipo de outer pack. Ejemplo: un outer pack de 16 inner pack, 32 inner pack, etc.
	$njk_{jk}$	Es la matriz binaria (1 y 0), donde 1 indica que se asigna cierto tipo de inner pack $j$ a un outer pack $k$ , y, 0 no asigna.
	$nkl_{kl}$	Es la matriz binaria (1 y 0), donde 1 indica que se asigna cierto tipo de outer pack $k$ a un DC $l$ , y, 0 no asigna. Como existen diferentes tipos de outer en el centro de distribución estos son clasificados de manera separada, dependiendo de sus capacidades.
	$ca_k$	Es el costo de apertura de cada outer pack que se decida abrir.
	$cmo_l$	Es el costo de manipulación de un outer pack, tanto abierto como cerrado.
	$cmi_l$	Es el costo de manipulación de un inner pack.
	$d_{op}$	Es la demanda que tiene el cliente o de un tipo de producto $p$ . Este producto puede demandarlo en outer pack ( $p=1$ ) o inner pack ( $p=2$ )
	$nlp_{lp}$	Es la matriz de números reales que transforman los inner pack en outer pack. Cuando $p=1$ entonces $nlp=1$ ; cuando $p=2$ entonces $nlp=(1/b_k)$
	$M$	Es un número muy grande, el cual permite que se pueda entregar todo el producto necesario que se envía de un nodo a otro.
$rlp_{lp}$	Es la matriz de números reales que transforman los outer e inner pack a unidades. Cuando $p=1$ entonces $rlp=a_j*b_k$ ; cuando $p=2$ entonces $rlp=a_j$	
<b>Variables de Decisión</b>	$X_{ij}$	Es la cantidad de unidades de producto que se pretenden empacar en los diferentes tipos de inner pack
	$Y_{jk}$	Es la cantidad de inner pack que se pretenden embalar a los diferentes tipos de outer pack. Esta variable depende de $a_j$ .
	$Z_{kl}$	Es la cantidad de outer pack que se pretenden enviar al DC. Esta variable depende de $b_k$ .
	$alpha_j$	Permite decidir si los productos se empacan a uno o varios inner pack
	$beta_k$	Permite decidir si los inner pack se embalan en uno o varios

		outer pack
	$x_{lop_{lop}}$	Es la cantidad de producto p (1 para outer, 2 para inner) que se pretende enviar desde el DC / al tipo de cliente o.

El análisis respectivo de cada ecuación se presenta a continuación. Para un mejor entendimiento, en la ilustración 7, se observa el diseño de la cadena de abastecimiento del modelo propuesto.

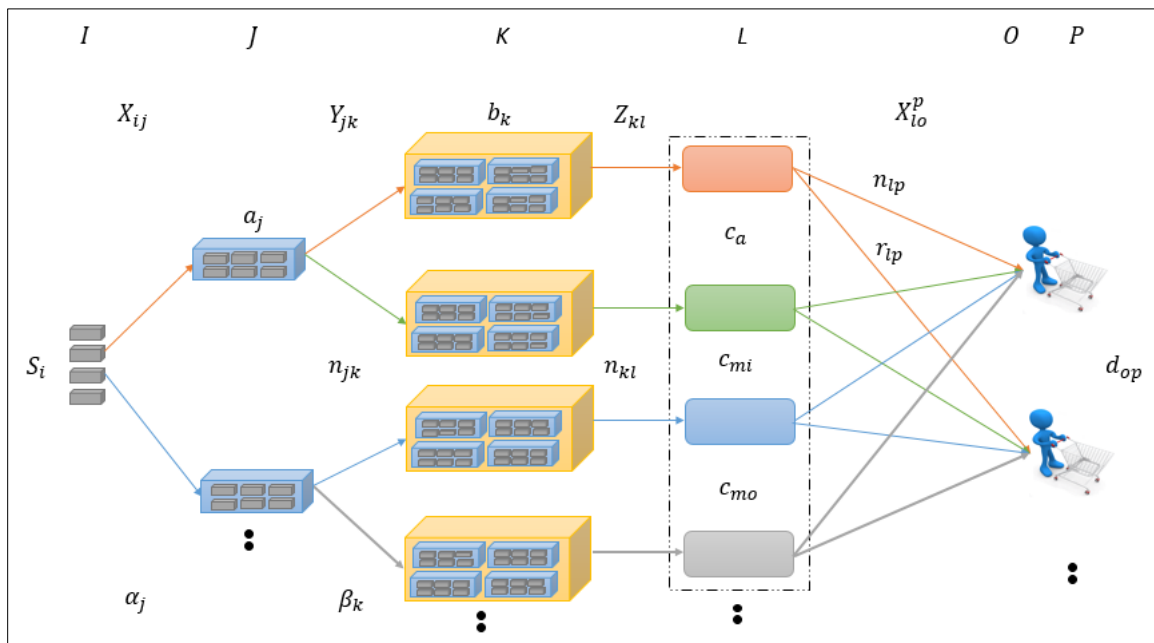


Ilustración 7. Diseño de la cadena de abastecimiento de la formulación compacta del modelo propuesto

En la ecuación (1), todo el producto que se envía para empacar en inner pack, tiene que ser menor o igual a la cantidad de producto producido por la empresa.

La ecuación (2) realiza un balanceo en el conjunto J (inner pack), con el fin de que todo el producto que se empaca a los inner pack sea igual al producto embalado en los outer pack, es decir, las cajas que se obtengan deben contener la cantidad total de producto existente. El  $\alpha_j$  es el parámetro de conversión de inner pack a unidades de producto, el cual, multiplicado por la variable de decisión  $Y_{jk}$ , dirá cuántas unidades totales se enviarán al outer pack, donde éste es asignado por medio de la matriz binaria  $n_{jk}$ .

La ecuación (3) activa los inner pack que se requieran para el problema, es decir, si se quiere que el problema se distribuya por un solo tipo de inner, la ecuación se iguala a 1; de la misma manera, si se distribuye para dos tipos diferentes de inner pack, la ecuación se iguala a 2.

En la ecuación (4), M hace referencia a un número muy grande, esto indica que si cierto trayecto desde el producto I al inner J, es válido, entonces se envía todo el producto existente; de lo contrario no envía nada. Lo anterior se puede entender con el siguiente ejemplo: si el producto I es enviado al inner J=1, entonces alpha es igual a 1, y al multiplicarlo con M permite que todo el



producto producido pueda enviarse; en caso contrario, si no está permitido el camino del producto  $I$  al inner  $J=1$ , entonces  $\alpha$  es igual a cero, y al multiplicarlo con  $M$  la desigualdad es cero (0), por consiguiente no se envía producto al inner  $J=1$ .

La ecuación (5) al igual que en la ecuación (2) se realiza un balanceo, en este caso, en el conjunto  $K$  (outer pack), con el propósito de que todos los inner packs que son embalados en los outer pack, sea igual al producto enviado al centro de distribución respectivo.

La ecuación (6) tiene el mismo comportamiento que la ecuación (3). Ésta ecuación activa los outer pack que se requieren para el problema, es decir, si se quiere que el problema se distribuya por un solo tipo de outer pack la igualdad debe ser igual a 1; en otro caso, si se quiere que se distribuya por dos tipos de outer pack, la igualdad debe ser igual a 2. En esta ecuación se multiplica por la matriz binaria  $n_{jk}$  por  $beta_k$ , ya que para cada tipo de inner pack se tienen diferentes tipos de outer pack.

La ecuación (7) tiene el mismo comportamiento que la ecuación (4).  $M$  hace referencia a un número muy grande. Esto indica que si cierto camino desde el inner  $J$  al outer  $K$  es válido, entonces se envía todo el producto existente, de lo contrario no envía nada. Lo anterior se puede entender con el siguiente ejemplo: si el inner  $J$  es enviado al outer  $K=1$ , entonces  $\beta$  es igual a 1, y al ser multiplicado por  $M$  permite que todo el producto que este empacado pueda enviarse; en caso contrario, si no está permitido el camino del inner  $J$  al outer  $K=1$ , entonces  $\beta$  es igual a cero (0), y al ser multiplicado por  $M$ , entonces la desigualdad es cero (0), por consiguiente no se envía el inner  $J$  al outer  $K=1$ .

La ecuación (8) y la ecuación (9) hacen referencia a la demanda del producto dada por el cliente. En la ecuación (8), se tiene que la cantidad de producto de tipo 1 (outer pack), enviado desde un centro de distribución  $I$ , tiene que ser igual a la cantidad demandada en outer pack por cliente. En la ecuación (9) ocurre el mismo caso para el producto de tipo 2 (inner pack), la cantidad enviada en inner pack desde un centro de distribución  $I$ , tiene que ser igual a la cantidad demanda en inner pack por cliente.

La ecuación (10) representa el balanceo en el DC. Todo el producto embalado (outer pack) que entra al DC, tiene que ser igual a todo el producto enviado en outer pack e inner pack a los clientes. Se dice que  $K=L$ , porque del outer que salga el producto va al mismo centro de distribución, es decir, si se escogió el outer  $K=3$ , éste es enviado al centro de distribución  $L=3$ . Lo anterior se puede observar en la ilustración 6.

La ecuación (11) es la función objetivo, donde en la primera parte hace referencia a la cantidad de outer pack que son abiertos, multiplicados por su costo de apertura y costo de manipulación. En la tercera parte, se tiene la cantidad de inner pack que son enviados multiplicados por su costo de manipulación. En la cuarta parte, se tiene la cantidad de outer que no son abiertos multiplicados por su respectivo costo de manipulación. La finalidad de esta ecuación es buscar el mínimo costo de manipulación de outer e inner pack, y apertura de outer pack, cumpliendo con las restricciones establecidas.

### **Algoritmo Genético con datos propuestos**

La formulación del modelo matemático nos arroja una solución que está dentro de la región factible, pero dicha solución no es lo más eficiente en cuanto a recursos computacionales y tiempo para dar una solución global al problema.

Los problemas de la vida real son usualmente muy complejos, los cuales gastan recursos por encima de lo normal para su solución. Se hace necesario buscar métodos meta-heurísticos que puedan resolver problemas en un tiempo razonable y con menos recursos que los usados normalmente.

### **Algoritmo Genético con datos propuestos**

En esta sección se pretende describir el algoritmo genético propuesto del problema de empaquetamiento. Este algoritmo presenta un operador de cruce y un operador de mutación. El algoritmo fue diseñado y desarrollado en Microsoft Excel y en lenguaje de programación Visual Basic.

A partir de la problemática existente se tuvieron en cuenta para el diseño realizado los siguientes puntos:

- La demanda se maneja en unidades de consumo de manera general, con el fin de que la herramienta utilizada nos indique el tipo de inner y outer pack más efectivo para satisfacer la demanda total.
- Los operadores genéticos deben ser eficientes.
- Todos los operadores genéticos deben permitir realizar una exploración en el espacio de búsqueda.

### **Diagrama de flujo del Algoritmo genético: datos propuestos**

El diagrama de flujo para el algoritmo genético que se quiere proponer para la solución del problema de empaquetamiento de la empresa "ABC" se presenta a continuación en la ilustración 8.

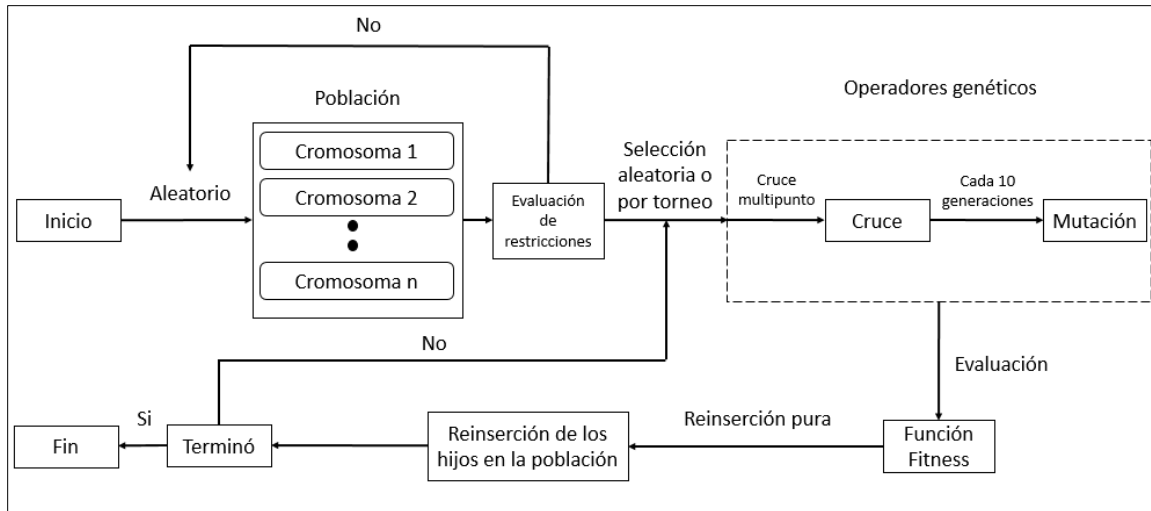


Ilustración 8. Diagrama de flujo del algoritmo genético propuesto para la empresa "ABC"

## Representación

Los métodos de representación más utilizados para la codificación de un cromosoma son:

- **Problemas Binarios:** La codificación binaria puede presentarse de manera natural en la investigación de operaciones, ésta se puede evidenciar en el problema conocido como knapsack problem.
- **Problemas Discretos (No Binarios):** En algunos casos, la codificación de un alfabeto de más de dos números es apropiada.
- **Problemas de Permutación:** En algunos problemas la opción más “obvia” de la representación está definida, no sobre un conjunto, pero sí sobre una permutación. El problema del viajero (TSP) es un ejemplo donde se aplica esta representación.
- **Problemas no Binarios:** en algunos casos las variables naturales de un problema no son binarias, sino enteras o reales. En estos casos es necesario una transformación a un arreglo binario (Kochenberger, 2003).

La representación que se eligió fue una combinación entre números binarios y no binarios. El algoritmo genético en el problema de empaquetamiento propuesto está compuesto por 102 genes, los cuales se caracterizan de la siguiente manera para su desarrollo: los primeros dos (2) genes están codificados de manera entera definidos entre uno y cincuenta (1-50) debido a que se determinaron cincuenta (50) tipos de inner y cincuenta (50) tipos de outer pack; los siguientes cien (100) genes se codifican en el esquema binario.

## Estructura del cromosoma

El cromosoma se compone de 102 genes, donde el primer gen representa la capacidad de unidades de producto contenidas en un inner pack, el segundo gen representa la capacidad de inner packs que puede contener un outer pack, y los siguientes cien (100) genes codificados de manera binaria representan el porcentaje de apertura de los outer packs. El modelo de la

estructura del cromosoma se puede evidenciar en la ilustración 9, donde se escogió como ejemplo el inner pack cinco (5) y el outer pack cuarenta y cuatro (44). Este ejemplo nos indica que el inner pack tiene capacidad para 5 unidades; por otro lado, la capacidad del outer pack se puede obtener por medio de la matriz de capacidades ilustrada en el documento Microsoft Excel, *ALGORITMO GENÉTICO, SHEET1*. Para hallar el porcentaje de outer packs que se abren, se realiza la sumatoria del vector binario dado. Este porcentaje va desde el cero por ciento (0%) hasta el ciento por ciento (100%), donde 0% no se abre ningún outer pack, y 100% se abren todos.

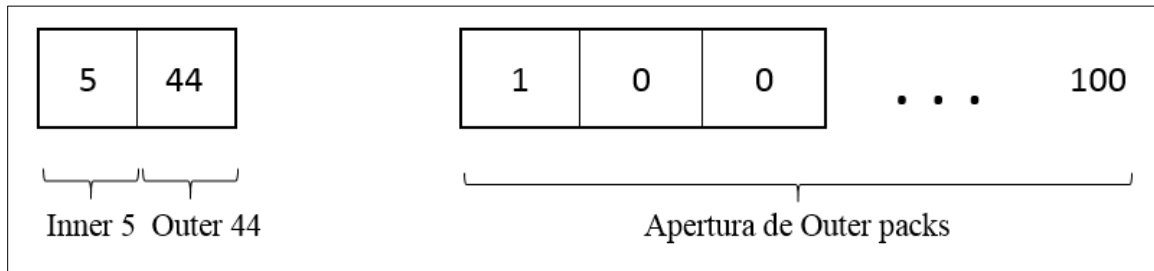


Ilustración 9. Estructura del cromosoma propuesto

### Generación de la población inicial

El tamaño de la población es definido por discusión de los estudiantes. Para este caso, se habla de una población de cincuenta (50) cromosomas, los cuales tienen una parte entera y otra binaria.

Para la selección de la población inicial se escogieron dos alternativas: generación de población inicial de manera aleatoria y generación de población con los mejores candidatos. A continuación se explican lo realizado en cada una de ellas.

#### Población inicial de manera aleatoria

La parte entera (los dos primeros genes), se desarrolló por medio de un aleatorio de uno a cincuenta (1-50) con distribución uniforme, ya que cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ser escogido.

#### Población inicial de manera binaria

La parte binaria (los cien genes siguientes), se desarrolló por medio de un aleatorio entre cero y uno (0-1), con distribución normal con media 0 y desviación 1. A causa de que los aleatorios generados por Microsoft Excel son de distribución uniforme, generando una tendencia entre los datos, se usó la distribución normal con el propósito de que exista una variación en la generación de los aleatorios para evitar tendencias entre estos datos.

#### Población inicial con los mejores candidatos

Cuando se da una solución por medio de la población iniciada de manera aleatoria, ésta es guardada y acomodada como un nuevo miembro de una nueva población. Al completar la nueva población de los n candidatos solución se comienza a resolver el problema. Esta nueva

población, a diferencia de la generada aleatoriamente, contiene los mejores candidatos, con el fin de poder explorar nuevos espacios partiendo de una población que se considera no aleatoria.

### Evaluación de los cromosomas

Los cromosomas evaluados son los de la parte entera. El primer gen representa la cantidad de producto que contiene el inner pack escogido, por ejemplo, el inner pack 10 tiene capacidad de 10 productos. El segundo gen representa la cantidad de inner pack que contiene el outer pack escogido, por ejemplo, el outer pack 20 tiene capacidad de 20 inner pack específicos.

Para evaluar estos dos genes se tiene una restricción de capacidad (volumen) que sólo aplica para los outer pack, ya que estos son los que dependen de la cantidad de producto que contenga cada inner pack.

Dado que esta restricción sólo aplica a los outer pack, se puede deducir que: no en todo outer pack se tiene la capacidad de albergar cualquier tipo de inner pack, por ejemplo, un outer pack del tipo 3 tiene un volumen de  $300 \text{ cm}^3$ , puede embalar inner pack hasta de 30 unidades, ya que este último inner pack tiene un volumen de  $300 \text{ cm}^3$ . Lo anterior se obtiene por medio de la relación

$$\text{cantidad de inner en outer} = \frac{\text{volumen outer pack}}{\text{volumen inner pack}} = \frac{300 \text{ cm}^3}{300 \text{ cm}^3} = 1$$

Por consiguiente, solamente se puede embalar un (1) inner pack de 30 unidades en un outer pack de capacidad tres (3). Los datos anteriores son datos propuestos de tendencia lineal.

Siguiendo el ejemplo anterior, para un inner pack de 31 unidades se tiene:

$$\text{cantidad de inner en outer} = \frac{\text{volumen outer pack}}{\text{volumen inner pack}} = \frac{300 \text{ cm}^3}{310 \text{ cm}^3} = 0,9677 \approx 0$$

El resultado anterior se aproxima al valor inferior dado que son restricciones de capacidad de volumen, su valor no alcanza a cumplir con el mínimo establecido.

Para los procedimientos anteriores se realizó en Microsoft Excel, ALGORITMO GENÉTICO: DATOS PROPUESTOS, SHEET1, una matriz de capacidades entre volúmenes de inner y outer pack, con el propósito de conocer la cantidad de inner pack que se pueden embalar en un outer pack. Se tomó una población de cincuenta (50) inner pack y cincuenta (50) outer pack.

A partir de la tabla diseñada se elaboró un código en Visual Basic, donde se escogen aleatoriamente los dos genes y se evalúa la restricción de capacidad. Si se cumple la relación, el problema sigue al siguiente cromosoma; en caso contrario, busca un nuevo par de genes que cumplan la restricción.

Una vez evaluados los cromosomas enteros, se prosigue a desarrollar la parte binaria de los cromosomas.

### **Función de aptitud (Fitness Function)**

La función de aptitud consiste en minimizar los costos de apertura de outer pack y manipulación tanto de outer como inner pack. Para encontrar estos costos se hizo necesario hallar la cantidad de outer pack abiertos, outer pack cerrados y total de inner pack que serán enviados a los diferentes clientes en sus respectivas cantidades, dependiendo de la demanda de cada una de ellas.

La fórmula realizada en Visual Basic para la función de aptitud es:

$$\begin{aligned} \text{Costo total} = & \text{cantidad de outer abierto} * (\text{costo de abrir} + \text{costo de manipulación}) \\ & + \text{cantidad de inner} * \text{costo de manipulación de inner} \\ & + \text{cantidad de outer cerrados} * \text{costo de manipulación} \\ & + (\text{unidades no entregadas} * \text{costo de unidad sobrante}) \end{aligned}$$

### **Selección**

La selección de los cromosomas padre y madre se realizó de dos maneras: selección aleatoria y selección por torneo.

#### **Selección Aleatoria**

La selección aleatoria genera al padre y madre por medio de dos aleatorios entre uno y cincuenta (1-50), donde el primer aleatorio hace referencia al padre y el segundo a la madre.

#### **Selección por torneo**

La selección por torneo escoge dos individuos dentro de la población aleatoriamente tanto para padre como para madre. En el primer par de cromosomas se comparan sus funciones de aptitud, y es escogido como padre el que tenga la mejor función, para este caso, el que tenga el menor costo. En los aleatorios de la madre se busca que éstos no sean iguales al resultado final del padre, y es escogido como madre el cromosoma que tenga la mejor función, para este caso, el que tenga el menor costo.

### **Cruce**

Después de haber escogido y evaluado a los padres, se prosigue a crear al hijo. El hijo tiene dos partes para su creación, la parte entera y la parte binaria, por tal motivo el cruce que se realizó sobre el cromosoma es un cruce multipunto.

El cruce que se realiza en varios puntos del cromosoma es una extensión del cruce de un sólo punto (ver ilustración 4). En vez de cortar el cromosoma en un sólo punto, éste se hace en dos o más partes, dando lugar a lo que se conoce como cruce multipunto (Pose, 2000).

En la ilustración 10 se muestra un ejemplo de un cruce multipunto.

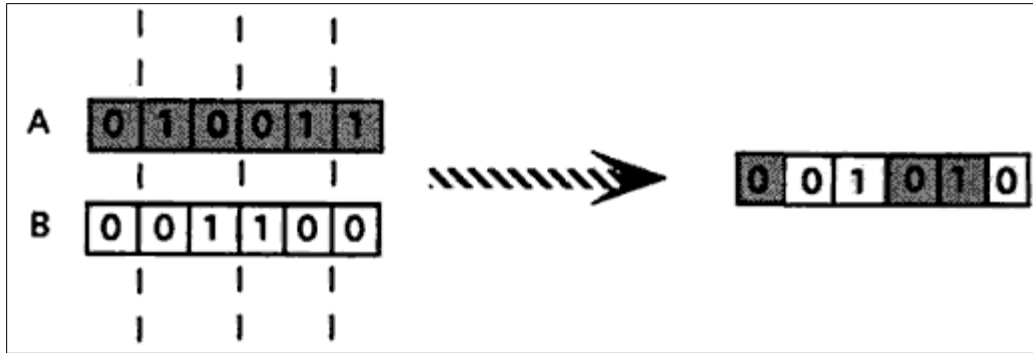


Ilustración 10. Cruce multipunto. Tomada y modificada para ejemplo (Stender, 1993)

Todo lo anterior se cumple para cualquiera de las selecciones escogidas por el usuario, ya sea selección de forma aleatoria o selección por torneo.

### Cruce en genes enteros

En la parte entera, el hijo es fruto de la combinación del primer gen del padre como inner pack y del segundo de la madre como outer pack. Este cruce tiene que evaluarse y cumplir con las restricciones de capacidad; dado el caso que no cumpla con dichas restricciones, el hijo es formado con el primer gen de la madre como inner pack y el segundo gen del padre como outer pack.

### Cruce en genes binarios

En la parte binaria se hace una selección uno a uno, es decir, se escoge los genes binarios impares del padre y los genes binarios pares de la madre, hasta completar los cien (100) genes generados.

### Mutación

La mutación es un proceso que se realiza al hijo con el propósito de que se pueda generar diversidad y se evite convergencias tempranas. La mutación, para efectos de este trabajo se realiza cada diez (10) iteraciones. La mutación propuesta sólo se realizó en la parte binaria del cromosoma. El proceso de mutación consiste en cambiar el valor del gen alelo por otro, es decir, si el valor del gen alelo es cero (0) este es cambiado por uno (1). Un ejemplo de esto se puede apreciar en la ilustración 11.

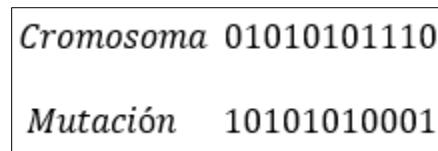


Ilustración 11. Ejemplo de la mutación propuesta

### Inserción de los hijos a la población

Luego que ya se ha obtenido un nuevo miembro de la población (hijo), ya sea por cruce y/o mutación, éste es introducido a la población. Cuando el hijo se introduce, siendo éste un nuevo

cromosoma, se hace una comparación con el cromosoma menos apto (mayor costo) con el fin de que sea reemplazado por este nuevo miembro (hijo). Dado que el hijo sea el menos apto (mayor costo), no es insertado en la población.

El proceso anterior se desarrolla de manera repetitiva hasta que el problema complete las iteraciones o generaciones que el usuario le haya establecido.

Lo anterior se denomina “reinserción pura”, la cual consiste en generar mediante la reproducción tantos hijos como individuos existentes en la población, y reemplazar estos anteriores por los cromosomas provenientes de las nuevas generaciones (Goldberg, 1989).

### **Criterio de Terminación**

Cuando se han completado las iteraciones que el usuario ha establecido y se ha hecho los respectivos cruces, mutaciones e inserciones, se detiene el ciclo de vida de evolución del algoritmo genético, lo que indica que se ha encontrado un cromosoma calificado para ser solución al problema planteado. En nuestro caso, el cromosoma que contenga la función de aptitud con el costo mínimo.

Por consiguiente, el criterio de terminación del algoritmo genético propuesto se determina cuando éste haya finalizado con las iteraciones establecidas y haya encontrado el cromosoma solución.

## **CAPITULO 5**

### **Diseño de experimentos**

#### **Diseño de experimentos factoriales**

Los diseños de experimentos factoriales sirven para estudiar los efectos individuales y la interacción de varios factores sobre una o varias respuestas, con la finalidad de conocer mejor cómo es dicha relación y generar conocimientos que permitan tomar acciones y decisiones para mejorar el desempeño del proceso. (Pulido, Salazar, González, Martínez, & Prez, 2004).

Para encontrar una solución óptima dentro del algoritmo genético es necesario conocer cuántas iteraciones se deben realizar, cuán gran debe ser mi población inicial y cada cuánto debo realizar una mutación con el fin de recorrer diferentes espacios de búsqueda. Con lo anterior, se hace necesario determinar estos tres factores principales que ayudarán a encontrar la solución más óptima del modelo. Por tal motivo, se desarrollará un diseño de experimentos factorial  $3^3$ .

En el diseño factorial  $3^3$  se tienen tres factores (A, B y C) y el número de niveles de prueba (a, b y c), con los cuales se puede construir el arreglo factorial  $a \times b \times c$  que consiste en  $a \times b \times c$  tratamientos o puntos experimentales.



## Factores y niveles

Los factores y niveles del modelo para el diseño de experimentos factorial propuesto, se pueden observar en la tabla 7.

Tabla 7. Factores y niveles del diseño de experimentos factorial  $3^3$  propuesto

Factor		Nivel
A	Número de generaciones	80
		120
		200
B	Tamaño de población inicial	50
		75
		100
C	Proporción de mutación	1/4
		1/5
		1/10

Para el factor A se escogió el número de generaciones. Este factor se desea variar en el modelo con el propósito de corroborar si realmente aumentar o disminuir el número de generaciones (iteraciones) en la herramienta meta-heurística, tiene alguna influencia dentro del desempeño del modelo. Por tal motivo, se eligieron 3 niveles en los que se quiere variar ese modelo y realizar las respectivas corridas. Estos niveles se escogieron de una forma que los datos no estuviesen ni tan cercanos, ni distantes el uno del otro, ya que no se podría encontrar ninguna variación y se alejaría de la región de interés de variación de los datos.

Para el factor B se escogió el tamaño de población inicial. En este factor se quiere observar el comportamiento de la herramienta meta-heurística cuando varía el tamaño de la población con el que el modelo inicia la búsqueda del cromosoma óptimo. Para este factor, se escogieron 3 niveles con los que se quiere hacer variar el modelo. Al igual que el factor A, los niveles se eligieron de tal manera que exista una variación dentro del objetivo.

Para el factor C se escogió la proporción de mutación. Con este factor se desea analizar si variar la cantidad de generaciones para realizar una mutación trae influencia en el modelo, con el propósito de buscar otras soluciones óptimas en nuevos espacios. Para este factor se escogieron 3 niveles con los que se desea variar la herramienta a fin de observar el comportamiento y variación dentro del objetivo. La proporción de mutación es la multiplicación del nivel de proporción por el número de generaciones, por ejemplo, para una proporción de 1/5 y 120 generaciones, se tiene:

$$\text{Proporción de mutación} = \frac{1}{5} * 120 = 24$$

Es decir, cada 24 generaciones se realiza una mutación.

## Modelo estadístico

Con un diseño factorial  $a \times b \times c$  se pueden estudiar los tres efectos individuales y el efecto de interacción entre estos factores. En términos estadísticos se afirma que el comportamiento de la variable de respuesta  $Y$  puede escribirse mediante el modelo de efectos (Pulido et al., 2004).

El modelo estadístico para el diseño de experimentos propuesto es:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}; \text{ en donde}$$

$$i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, c; l = 1, 2, \dots, n$$

$Y_{ijkl} = l$  – ésima observación del costo total de manipulación y apertura, de inner y outer pack, cuando se realizan  $i$  generaciones, con un tamaño de población inicial  $j$ , con una proporción de mutación  $k$

$\mu =$  Media poblacional de los costos totales de manipulación y apertura de inner y outer pack

Donde se tiene que  $\mu$  es la media general,  $\alpha_i$  es el efecto del nivel  $i$ -ésimo del factor A,  $\beta_j$  es el efecto del nivel  $j$  del factor B,  $\gamma_k$  es el efecto del nivel  $k$  del factor C;  $(\alpha\beta)_{ij}$ ,  $(\alpha\gamma)_{ik}$ ,  $(\beta\gamma)_{jk}$  representan efectos de interacción dobles (dos factores) en los niveles  $ij$ ,  $ik$ ,  $jk$  respectivamente, y  $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$  es el efecto de interacción triple en la combinación o punto  $ijk$ ;  $\varepsilon_{ijkl}$ , representa el error aleatorio en la combinación  $ijkl$  y  $l$  son las repeticiones o réplicas del experimento. Todos los efectos cumplen la restricción de sumar cero (0), es decir, son desviaciones respecto a la media general  $\mu$  (Pulido et al., 2004).

## Pruebas de hipótesis con los efectos

Con un diseño factorial  $a \times b \times c$  interesa estudiar los efectos del modelo estadístico, para los cuales se pueden plantear los siguientes pares de hipótesis:

$\alpha_i =$  Número de generaciones

$$H_0: \alpha_i = 0, \forall_i$$
$$H_1: \text{Al menos un } \alpha_i \neq 0, \forall_i$$

$H_0 =$  No hay un efecto significativo del número de generación para la minimización de los costos totales

$H_1 =$  Hay un efecto significativo del número de generación para la minimización de los costos totales

$\beta_j =$  Tamaño de población inicial

$$H_0: \beta_j = 0, \forall_j$$
$$H_1: \text{Al menos un } \beta_j \neq 0, \forall_j$$

$H_0 =$  No hay un efecto significativo del tamaño de población para la minimización de los costos totales

$H_1 =$  Hay un efecto significativo del tamaño de población para la minimización

de los costos totales

$\gamma_k$  = Proporción de mutación

$$H_0: \gamma_k = 0, \forall_i$$
$$H_1: \text{Al menos un } \gamma_k \neq 0, \forall_i$$

$H_0$  = No hay un efecto significativo de la proporción de mutación para la minimización de los costos totales

$H_1$  = Hay un efecto significativo de la proporción de mutación para la minimización de los costos totales

$\alpha\beta_{ij}$  = Interacción entre número de generación y tamaño de población inicial

$$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall_i$$
$$H_1: \text{Al menos un } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0, \forall_i$$

$H_0$  = No hay un efecto significativo entre la interacción de número de generaciones y tamaño de población inicial, para la minimización de los costos totales

$H_1$  = Hay un efecto significativo entre la interacción de número de generaciones y tamaño de población inicial, para la minimización de los costos totales

$\alpha\gamma_{ik}$  = Interacción entre número de generación y proporción de mutación

$$H_0: (\alpha\gamma)_{ik} = 0, \forall_i$$
$$H_1: \text{Al menos un } (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0, \forall_i$$

$H_0$  = No hay un efecto significativo entre la interacción de número de generaciones y proporción de mutación, para la minimización de los costos totales

$H_1$  = Hay un efecto significativo entre la interacción de número de generaciones y proporción de mutación, para la minimización de los costos totales

$\beta\gamma_{jk}$  = Interacción entre tamaño de población inicial y proporción de mutación

$$H_0: (\beta\gamma)_{jk} = 0, \forall_i$$
$$H_1: \text{Al menos un } (\beta\gamma)_{jk} \neq 0, \forall_i$$

$H_0$  = No hay un efecto significativo entre la interacción de tamaño de población inicial y proporción de mutación, para la minimización de los costos totales

$H_1$  = Hay un efecto significativo entre la interacción de tamaño de población inicial y proporción de mutación, para la minimización de los costos totales

$\alpha\beta\gamma_{ijk}$  = Interacción entre número de generaciones, tamaño de población inicial y proporción de mutación

$$H_0: (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0, \forall_i$$
$$H_1: \text{Al menos un } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0, \forall_i$$

$H_0$  = No hay un efecto significativo entre la interacción de número de generaciones, tamaño de población inicial y proporción de mutación, para la minimización de los costos totales

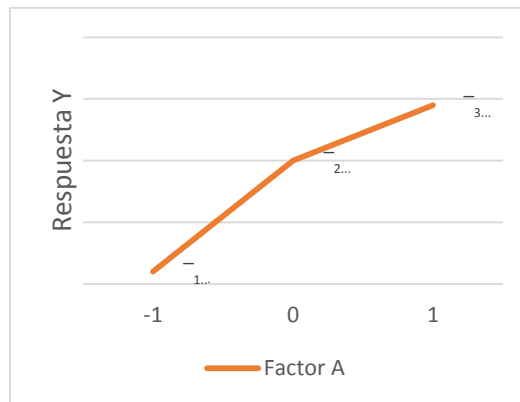
$H_0$  = Hay un efecto significativo entre la interacción de número de generaciones,

*tamaño de población inicial y proporción de mutación, para la minimización de los costos totales*

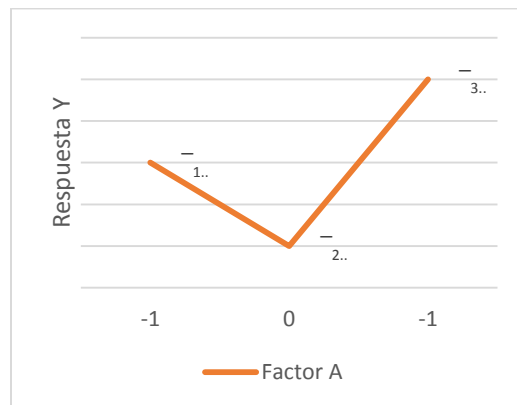
### **Análisis de varianza – ANOVA**

En los análisis de diseños factoriales  $3^3$  se puede evidenciar que hay existencia de tres niveles y que, por lo tanto, su efecto marginal se puede descomponer en una parte lineal y una parte cuadrática pura (Pulido et al., 2004).

En la práctica un efecto puede ser prácticamente lineal, como se puede observar en la gráfica 1, ya que su comportamiento más activo es la parte lineal  $A_1$ , o también puede ser cuadrático, como se puede observar en la gráfica 2, ya que su componente más activo es  $A^2$ . En cualquiera de los dos casos la representación del efecto permite comprender como está actuando físicamente el factor sobre la variable respuesta (Pulido et al., 2004).



Gráfica 1. Efecto en el que predomina la parte lineal  $A_1$



Gráfica 2. Efecto en el que predomina la parte cuadrática  $A^2$

Con el propósito de realizar los cálculos para ajustar el modelo, se utilizó la siguiente codificación para cada tratamiento con un comportamiento lineal: Alto (-1), Medio (0) y Bajo (1). Para los tratamiento que presentan un comportamiento cuadrático, se utilizó la siguiente codificación: Alto (1), Medio (-2) y Bajo (1) (Pulido et al., 2004).

**Resultados obtenidos en el arreglo factorial por método de selección aleatoria**

Los resultados obtenidos por medio del método aleatorio para cada factor y nivel establecidos pueden observarse en la tabla 8; mientras que en la tabla 9 se pueden observar los resultados obtenidos por medio del método de selección por torneo.

Tabla 8. Resultados para cada factor y nivel por medio del método aleatorio

A	C		1/4		1/5		1/10	
	B							
80	50		5130385.381	3331780.951	2840715.926	5484784.928	6220370.981	4095926.411
	75		4869482.13	5756216.204	3812524.567	4964490.002	5062599.74	6311344.661
	100		5321207.561	3659533.109	5771614.569	6024149.275	3186302.859	4359010.117
120	50		4848949.264	4958345.946	4221585.566	3720827.576	4993663.834	4547517.678
	75		5721191.022	5130385.381	6097764.719	5506055.537	7203701.216	6092101.393
	100		3615009.212	4122154.281	5297972.245	3611204.286	3333856.776	4396230.08
200	50		4817985.75	4571767.319	4501540.134	4649426.518	3369585.267	3651843.427
	75		6355004.053	7919831.578	3823088.103	3497985.086	6669299.345	3202796.131
	100		3747193.474	4258176.017	4851300	6457827.775	3753754.37	4700775.632

Tabla 9. Resultados para cada factor y nivel por medio del método por torneo

A	C		1/4		1/5		1/10	
	B							
80	50		5750818.961	3323304.251	8411774.12	5248181.08	5279357.326	4685253.8
	75		4439685.127	3651857.437	3590813.349	4623284.681	4563178.321	4233928.459
	100		5944285.944	4732207.332	3167143.539	4288877.666	3870442.127	4651518.39
120	50		3562373.441	3258031.956	3237023.435	4652835.715	6030801.78	4632789.514
	75		2868775.45	4445584.791	4160320.542	4028568.104	3325691.708	3692560.137
	100		4690528.324	4311915.672	4953375.635	4547869.852	4067426.56	4637211.942
200	50		7034964.749	5115300.324	3602872.337	5106714.007	3344110.147	3665695.529
	75		3736273.204	3022871.086	2397663.01	3707574.514	3047325.25	4934825.627
	100		4855831.733	7308653.712	4665590.365	2907095.829	4185058.259	4817127.254

La proporción de mutación representa el número de generaciones en la cual se hace efectiva. Las conversiones utilizadas para cada proporción en la herramienta se pueden observar en la tabla 10.

Tabla 10. Proporción de mutaciones

Mutación	1/4	1/5	1/10
80	20	16	8
120	30	24	12
200	50	40	20

Una réplica es la repetición o corrida de todo un arreglo factorial (Pulido et al., 2004). En las tablas 8 y 9 se puede evidenciar que se realizaron dos replicas para cada arreglo factorial. Para realizar las réplicas se desarrollan todas las posibles combinaciones entre los factores A, B y C, por ejemplo, la primera réplica del método por selección aleatoria (5130385.381) se obtiene realizando el algoritmo genético con los niveles bajos de cada factor, es decir, para los factores A, B y C, se tienen los niveles 80, 50 y 1/4 respectivamente (Tabla 46).

Luego de realizar todas las réplicas necesarias, se procedió a desarrollar el análisis de varianzas (ANOVA). El ANOVA consiste en separar la contribución de cada fuente de variación en la variación total observada (Pulido et al., 2004). El procedimiento que se siguió para desarrollar los ANOVAS de cada método de selección, aleatoria y por torneo, se pueden observar en el

archivo de Microsoft Excel, *DISEÑO DE EXPERIMENTOS*, hoja, *DISEÑO DE EXPERIMENTOS ALEAT* y *DISEÑO DE EXPERIMENTOS TORNEO*.

Para el cálculo del valor p (p-value) se escogió un alfa de 0.05, por lo cual, para un efecto menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula correspondiente, demostrando así que la fuente de variación afecta de manera significativa la variable de respuesta (Pulido et al., 2004).

En la tabla 11 se puede ver el modelo general del ANOVA para el diseño  $3^3$ , con el fin de poder observar cómo se desarrolla el análisis de varianzas.

Tabla 11. ANOVA para el diseño factorial  $a \times b \times c$  (Pulido et al., 2004)

FV	SC	GL	CM	$F_D$	p-value
Efecto A	$SC_A$	$a-1$	$CM_A$	$CM_A/CM_E$	$P(F>F_D^A)$
Efecto B	$SC_B$	$b-1$	$CM_B$	$CM_B/CM_E$	$P(F>F_D^B)$
Efecto C	$SC_C$	$c-1$	$CM_C$	$CM_C/CM_E$	$P(F>F_D^C)$
Efecto AB	$SC_{AB}$	$(a-1)(b-1)$	$CM_{AB}$	$CM_{AB}/CM_E$	$P(F>F_D^{AB})$
Efecto AC	$SC_{AC}$	$(a-1)(c-1)$	$CM_{AC}$	$CM_{AC}/CM_E$	$P(F>F_D^{AC})$
Efecto BC	$SC_{BC}$	$(b-1)(c-1)$	$CM_{BC}$	$CM_{BC}/CM_E$	$P(F>F_D^{BC})$
Efecto ABC	$SC_{ABC}$	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$CM_{ABC}$	$CM_{ABC}/CM_E$	$P(F>F_D^{ABC})$
Error	$SC_E$	$abc(n-1)$	$CM_E$		
Total	$SC_T$	$abcn-1$			

A continuación, en la tabla 12, se observan el ANOVA para el método de selección aleatoria.

Tabla 12. ANOVA para el método de selección aleatorio

ANOVA						
F.V.	S.C.	GL	C.M.	Fcalc	F teo	Valor P
A	190905565734.603	2	95452782867	0.108032817	3.354130829	0.897984163
B	11720596540048.100	2	5.8603E+12	6.632646153	3.354130829	0.004537789
C	331527264789.922	2	1.65764E+11	0.187610164	3.354130829	0.830009192
AB	4050866332333.120	4	1.01272E+12	1.146185815	2.727765306	0.356206835
AC	3687868438669.070	4	9.21967E+11	1.043476172	2.727765306	0.403230809
BC	13200929838387.600	4	3.30023E+12	3.735180893	2.727765306	0.015203356
ABC	10809138884958.400	8	1.35114E+12	1.529213833	2.305313177	0.193622908
Error	23855946727550.700	27	8.83554E+11			
Total	6.78478E+13	53				

Se puede observar en la tabla 12, análisis de varianza (ANOVA), que sí hay un efecto en el número de población inicial, y en la interacción del número de población inicial y la proporción de mutación. Lo anterior se debe a que estos dos factores tienen un p-value menor a 0.05, lo que demuestra que el efecto B y el efecto BC afectan de manera significativa la variable de respuesta.

Como el diseño de experimentos propuesto es un diseño factorial  $3^3$ , permite estudiar efectos de curvaturas, lineales y de interacción. Como la tabla 12 muestra una ANOVA de manera global, es decir, no se especifica si influyen los componentes lineales o cuadráticos para cada efecto, se mostrará en la tabla 13 el ANOVA desglosado (Pulido et al., 2004).

Tabla 13. ANOVA desglosado para el método de selección aleatoria

FV	S.C.	GL	C.M.	Fcalc	F teo	Valor P
AL	54698247773.138	1	54698247773.138	0.061907109	4.210008468	0.8054
AQ	136207317961.465	1	136207317961.465	0.154158526	4.210008468	0.6977
BL	7232617469.047	1	7232617469.047	0.008185828	4.210008468	0.9286
<b>BQ</b>	<b>11713363922579.000</b>	<b>1</b>	<b>11713363922579.000</b>	<b>13.25710648</b>	<b>4.210008468</b>	<b>0.0011</b>
CL	247326969882.112	1	247326969882.112	0.279923	4.210008468	0.6011
CQ	84200294907.809	1	84200294907.809	0.095297327	4.210008468	0.7599
ALBL	40757179675.511	1	40757179675.511	0.046128702	4.210008468	0.8316
ALBQ	167939136926.521	1	167939136926.521	0.190072385	4.210008468	0.6663
AQBL	1189308075091.730	1	1189308075091.730	1.346050878	4.210008468	0.2561
AQBQ	2652861940639.360	1	2652861940639.360	3.002491296	4.210008468	0.0945
ALCL	2336788583429.240	1	2336788583429.240	2.644761596	4.210008468	0.1155
ALCQ	52708310801.196	1	52708310801.196	0.059654912	4.210008468	0.8089
AQCL	1252687625832.870	1	1252687625832.870	1.417783427	4.210008468	0.2441
AQCQ	45683918605.763	1	45683918605.763	0.051704752	4.210008468	0.8218
BLCL	1891028345.973	1	1891028345.973	0.002140253	4.210008468	0.9634
<b>BLCQ</b>	<b>5160235392571.290</b>	<b>1</b>	<b>5160235392571.290</b>	<b>5.840319699</b>	<b>4.210008468</b>	<b>0.0227</b>
BQCL	5811946032.757	1	5811946032.757	0.006577921	4.210008468	0.9360
<b>BQCQ</b>	<b>8032991471437.550</b>	<b>1</b>	<b>8032991471437.550</b>	<b>9.0916857</b>	<b>4.210008468</b>	<b>0.0055</b>
ALBLCL	2330998874716.960	1	2330998874716.960	2.638208843	4.210008468	0.1159
ALBLCQ	505393558391.805	1	505393558391.805	0.572001029	4.210008468	0.4560
ALBQCL	1321395246266.940	1	1321395246266.940	1.495546249	4.210008468	0.2319
ALBQCQ	1215402954366.160	1	1215402954366.160	1.375584886	4.210008468	0.2511
AQBCLCL	20424855297.868	1	20424855297.868	0.023116714	4.210008468	0.8803
AQBLCQ	23282545212.779	1	23282545212.779	0.026351028	4.210008468	0.8723
AQBQCL	1807190250606.180	1	1807190250606.180	2.045365767	4.210008468	0.1641
AQBQCQ	3585050600099.760	1	3585050600099.760	4.057536148	4.210008468	0.0540
Error	23855946727550.700	27	883553582501.878			
Totales	67847779592471.500	53				

La suma de cuadrados de cada efecto se puede descomponer en la suma de cuadrados con un grado de libertad, por ejemplo, para el efecto B con dos grados de libertad, se pueden desglosar en los componentes  $B_L$  y  $B_Q$ , efecto lineal y efecto cuadrático respectivamente, cada uno con un grado de libertad. De igual manera la suma de cuadrados para AB puede ser desglosado en cuatro efectos diferentes con un grado de libertad cada uno, estos son  $A_L B_L$ ,  $A_L B_Q$ ,  $A_Q B_L$  y  $A_Q B_Q$ . Este mismo comportamiento sucede para la combinación ABC, tal como se desglosa en la tabla 13. Lo anterior se realiza con el fin de obtener una información más detallada, de cómo los factores afectan a la variable respuesta (Pulido et al., 2004).

En la tabla 13 se pueden ver tres efectos que afectan de manera significativa la variable respuesta. El efecto B afecta significativamente la variable de respuesta en su componente cuadrático (BQ). Por otro lado, la interacción de los factores B y C afectan significativamente la variable de respuesta de una manera lineal para el factor B y cuadrática para el factor C (BLCQ); y así mismo de una forma cuadrática en ambos factores B y C (BQCQ).

Se puede concluir que B es el único factor que afecta la variable de respuesta en sus componentes lineal y cuadrática; mientras que el factor C solamente afecta la variable de respuesta en su componente cuadrático.

Analizando los resultados obtenidos por ANOVA desglosado, se estableció encontrar el mejor ANOVA con el propósito de definir cuáles de los tratamientos afectan de manera significativa a la variable respuesta.

Tabla 14. Mejor ANOVA para el método de selección aleatoria

FV	S.C.	GL	C.M.	F <sub>calc</sub>	F <sub>teo</sub>	Valor P
BQ	11713363922579.000	1	11713363922579.000	13.63884449	4.034309707	0.0005
BLCQ	5160235392571.290	1	5160235392571.290	6.008491539	4.034309707	0.0178
BQCQ	8032991471437.550	1	8032991471437.550	9.353480533	4.034309707	0.0036
Error	42941188805883.600	50	858823776117.673			
Total	67847779592471.500	53				

Dado que en la tabla 14 ninguno de los factores tienen un p-value mayor que 0.05, se puede decir que dichos factores son los mejores, es decir, son los que afectan de una manera significativa la variable de respuesta.

Se puede concluir que para el factor B, se rechaza la hipótesis y, por lo tanto, el tamaño de la población tiene un efecto significativo sobre la minimización de costos totales.

También, para la interacción de factores B y C se rechaza la hipótesis y, por tanto, sí hay un efecto significativo entre la interacción de la población inicial y la proporción de mutación.

**Comparación de medias múltiples para el método por selección aleatoria**

Como el mejor ANOVA arrojó que la población inicial y la interacción entre la población inicial y la proporción de mutación, para el método de selección aleatoria, tienen un efecto significativo en la variable de salida, se realizará una comparación de medias a partir del método de Duncan, con el fin de determinar cuál o cuáles tratamientos provocan la diferencia en la variable de respuesta (Montgomery, 2005).

El método Duncan, es un procedimiento muy utilizado para comparar todos los pares de medias. El procedimiento para aplicar el método de Duncan cuando los tamaños de las muestras son iguales, es el siguiente: los  $\alpha$  promedios de los tratamientos se arreglan en orden ascendentes, el error de cada promedio se determina como (Montgomery, 2005):

$$S_{Y_i} = \frac{\overline{CM_E}}{n}$$

Luego se busca en la tabla de los rangos significativos de Duncan, los cuales están dados por los valores  $r_\alpha(p, f)$  para  $p=2,3,\dots, a$ ; donde alfa es el nivel de significación y f es el número de grados de libertad del error. Estos rangos se convierten en un conjunto de a-1 rangos mínimos de significación, por ejemplo ( $R_p$ ), para  $p=2,3,\dots,a$  calculando (Montgomery, 2005):

$$R_p = r_\alpha p, f * S_{Y_i}, \text{ para } p=2,3\dots a$$

Al aplicar la comparación de medias, por el modelo de Duncan, el procedimiento que se siguió para su resultado se puede observar en el archivo de Microsoft Excel, DISEÑO DE EXPERIMENTOS, HOJA, M.DUNCAN ALEATORIO. Las pruebas de hipótesis para el factor B son:

$$H_0: \mu_{B_1} = \mu_{B_2} \text{ Vs } H_1: \mu_{B_1} \neq \mu_{B_2}$$

$$H_0: \mu_{B_1} = \mu_{B_3} \text{ Vs } H_1: \mu_{B_1} \neq \mu_{B_3}$$

$$H_0: \mu_{B_2} = \mu_{B_3} \text{ Vs } H_1: \mu_{B_2} \neq \mu_{B_3}$$



Los rangos se obtuvieron de la siguiente manera: se halla las medias para cada factor B (B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>) de las réplicas obtenidas en la tabla 46 (n= 18 réplicas), y se ordenaron en forma ascendente, obtenido los siguientes resultado:

$$Y_{B_1} = 4442055.714$$

$$Y_{B_3} = 4470403.98$$

$$Y_{B_2} = 5444214.493$$

Para obtener los rangos de dignificación mínima, R1, R2 y R3, se aplica la forma  $R_p = r_{\alpha p, f} * S_{Y_i}$ , donde alfa es igual a 0.05, p=2, 3; f = 27 (grados de libertad del error). Para el valor  $r_{\alpha p, f}$ , se obtiene por medio de la tabla de Rangos de Duncan, para los valores de  $r_{0.05}(2,27)$  y  $r_{0.05} 3,27$ . Dado que se tienen grados de libertad establecidos en la tabla de Duncan, se procede a realizar una interpolación con el fin de hallar los valores para 27 grados de libertad. La interpolación realizada se puede observar en la tabla 15.

Tabla 15. Interpolación tabla de rangos de Duncan

$r_{\alpha}(p,f)$	p	
	2	3
20	2.95	3.1
27	2.908	3.058
30	2.89	3.04

Donde el R se obtiene de la siguiente manera.

$$R_3 = r_{0.05} 2,27 * S_{Y_i} = 2.908 * \frac{CM_E}{n} = 2.908 * \frac{883553582501.878}{18} = 677513.065$$

$$R_2 = r_{0.05} 3,27 * S_{Y_i} = 3.058 * \frac{CM_E}{n} = 3.058 * \frac{883553582501.878}{18} = 644279.919$$

Después de finalizar con todos los procedimientos necesarios para tener los datos, los resultados de las comparaciones de medias se puede observar en la tabla 16.

Tabla 16. Resultado comparación de medias, método Duncan, para el factor B (Población inicial)

Comparación de medias	Diferencia	Calculado		Teórico	Rangos	Conclusión
2 Vs 1	5444214.49-4442055.71	1002158.779	>	677513	R3	Significativo
2 Vs 3	5444214.49-4470403.97	973810.5129	>	644280	R2	Significativo
3 Vs 1	4470403.97-4442055.71	28348.26561	<	644280	R2	No significativo

Puede observarse que dos medias de las tres que son comparadas se rechazan, es decir, existen diferencias significativas entre las medias. La media de B<sub>2</sub> tiene un efecto más significativo sobre B<sub>1</sub> y B<sub>3</sub>, ya que las medias de comparación de B<sub>2</sub>son rechazadas.

Ahora, siguiendo los principios de solución del efecto B, para el efecto BC se tienen los siguientes resultados.

Se tiene la siguiente codificación:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{B_1C_1}; \mu_2 = \mu_{B_1C_2}; \mu_3 = \mu_{B_1C_3} \\ \mu_4 &= \mu_{B_2C_1}; \mu_5 = \mu_{B_2C_2}; \mu_6 = \mu_{B_2C_3} \\ \mu_7 &= \mu_{B_3C_1}; \mu_8 = \mu_{B_3C_2}; \mu_9 = \mu_{B_3C_3} \end{aligned}$$

Las pruebas de hipótesis son las siguientes

$H0: \mu_1 = \mu_2$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H0: \mu_3 = \mu_7$	$Vs$	$H1: \mu_3 \neq \mu_7$
$H0: \mu_1 = \mu_3$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_3$	$H0: \mu_3 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_3 \neq \mu_8$
$H0: \mu_1 = \mu_4$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_4$	$H0: \mu_3 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_3 \neq \mu_9$
$H0: \mu_1 = \mu_5$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_5$	$H0: \mu_4 = \mu_5$	$Vs$	$H1: \mu_4 \neq \mu_5$
$H0: \mu_1 = \mu_6$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_6$	$H0: \mu_4 = \mu_6$	$Vs$	$H1: \mu_4 \neq \mu_6$
$H0: \mu_1 = \mu_7$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_7$	$H0: \mu_4 = \mu_7$	$Vs$	$H1: \mu_4 \neq \mu_7$
$H0: \mu_1 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_8$	$H0: \mu_4 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_4 \neq \mu_8$
$H0: \mu_1 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_1 \neq \mu_9$	$H0: \mu_4 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_4 \neq \mu_9$
$H0: \mu_2 = \mu_3$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_3$	$H0: \mu_5 = \mu_6$	$Vs$	$H1: \mu_5 \neq \mu_6$
$H0: \mu_2 = \mu_4$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_4$	$H0: \mu_5 = \mu_7$	$Vs$	$H1: \mu_5 \neq \mu_7$
$H0: \mu_2 = \mu_5$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_5$	$H0: \mu_5 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_5 \neq \mu_8$
$H0: \mu_2 = \mu_6$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_6$	$H0: \mu_5 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_5 \neq \mu_9$
$H0: \mu_2 = \mu_7$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_7$	$H0: \mu_6 = \mu_7$	$Vs$	$H1: \mu_6 \neq \mu_7$
$H0: \mu_2 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_8$	$H0: \mu_6 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_6 \neq \mu_8$
$H0: \mu_2 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_2 \neq \mu_9$	$H0: \mu_6 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_6 \neq \mu_9$
$H0: \mu_3 = \mu_4$	$Vs$	$H1: \mu_3 \neq \mu_4$	$H0: \mu_7 = \mu_8$	$Vs$	$H1: \mu_7 \neq \mu_8$
$H0: \mu_3 = \mu_5$	$Vs$	$H1: \mu_3 \neq \mu_5$	$H0: \mu_7 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_7 \neq \mu_9$
$H0: \mu_3 = \mu_6$	$Vs$	$H1: \mu_3 \neq \mu_6$	$H0: \mu_8 = \mu_9$	$Vs$	$H1: \mu_8 \neq \mu_9$

Los rangos se obtuvieron de la siguiente manera: se hallaron las medias para cada factor BC ( $B_1C_1, B_1C_2, B_1C_3, B_2C_1, B_2C_2, B_2C_3, B_3C_1, B_3C_2, B_3C_3$ ) de las réplicas obtenidas en la tabla 8 (n= 6 réplicas), y se ordenaron en forma ascendente, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} Y_{B_3C_3} &= 3954988.306 \\ Y_{B_3C_1} &= 4120545.609 \\ Y_{B_1C_2} &= 4236480.108 \\ Y_{B_1C_3} &= 4479817.933 \\ Y_{B_1C_1} &= 4609869.102 \\ Y_{B_2C_2} &= 4616984.669 \\ Y_{B_3C_2} &= 5335678.025 \\ Y_{B_2C_1} &= 5958685.062 \end{aligned}$$

Para obtener los rangos dados, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8 y R9, se aplica la forma  $R_p = r_{\alpha} p, f * S_{Y_i}$ , donde alfa es igual a 0.05, p=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; f = 27 (grados de libertad del error). Para el valor  $r_{\alpha} p, f$ , se obtiene por medio de la tabla de Rangos de Duncan, para los valores de  $r_{0.05}(2,27), r_{0.05} 3,27, \dots, r_{0.05} 9,27$ . Dado que se tienen grados de libertad establecidos en la tabla de Duncan, se procede a realizar una interpolación con el fin de hallar los valores para 27 grados de libertad. La interpolación realizada se puede observar en la tabla 17.

Tabla 17. Interpolación para la tabla de rangos de Duncan

$r_{\alpha}(p,f)$	p							
	2	3	4	5	6	7	8	9
20	2.95	3.1	3.18	3.25	3.3	3.34	3.37	3.39
27	2.908	3.058	3.138	3.215	3.265	3.305	3.335	3.362
30	2.89	3.04	3.12	3.2	3.25	3.29	3.32	3.35

Los rangos de significación mínima son:

$$\begin{array}{lll}
 R_2 = 1115926 & R_5 = 1233735 & R_8 = 1279784 \\
 R_3 = 1173487 & R_6 = 1252922 & R_9 = 1290145 \\
 R_4 = 1204187 & R_7 = 1268272 &
 \end{array}$$

El valor del error estándar de cada promedio,  $S_{Y_i}$ , es

$$S_{Y_i} = \frac{CM_E}{n} = \frac{883553582501.878}{6} = 383743.3132$$

Los resultados de estas comparaciones pueden observarse en la tabla 18.

Tabla 18. Comparación de medias del factor BC

Comparación de medias	Calculado		Teórico	Rangos	Conclusión
4 Vs 9	2003696.8	>	1290145.019	R9	Significativo
4 Vs 7	1838139.5	>	1279783.949	R8	Significativo
4 Vs 2	1722205	>	1268271.65	R7	Significativo
4 Vs 3	1478867.1	>	1252921.918	R6	Significativo
4 Vs 1	1348816	>	1233734.752	R5	Significativo
4 Vs 5	1341700.4	>	1204186.517	R4	Significativo
4 Vs 8	623007.04	<	1173487.052	R3	No significativo
4 Vs 6	201711.31	<	1115925.555	R2	No significativo
6 Vs 9	1801985.4	>	1279783.949	R8	Significativo
6 Vs 7	1636428.1	>	1268271.65	R7	Significativo
6 Vs 2	1520493.6	>	1252921.918	R6	Significativo
6 Vs 3	1277155.8	>	1233734.752	R5	Significativo
6 Vs 1	1147104.6	<	1204186.517	R4	No significativo
6 Vs 5	1139989.1	<	1173487.052	R3	No significativo
6 Vs 8	421295.72	<	1115925.555	R2	No significativo
8 Vs 9	1380689.7	>	1268271.65	R7	Significativo
8 Vs 7	1215132.4	<	1252921.918	R6	No significativo
8 Vs 2	1099197.9	<	1233734.752	R5	No significativo
8 Vs 3	855860.09	<	1204186.517	R4	No significativo
8 Vs 1	725808.92	<	1173487.052	R3	No significativo
8 Vs 5	718693.36	<	1115925.555	R2	No significativo
5 Vs 9	661996.36	<	1252921.918	R6	No significativo
5 Vs 7	496439.06	<	1233734.752	R5	No significativo
5 Vs 2	380504.56	<	1204186.517	R4	No significativo
5 Vs 3	137166.74	<	1173487.052	R3	No significativo
5 Vs 1	7115.567	<	1115925.555	R2	No significativo
1 Vs 9	654880.8	<	1233734.752	R5	No significativo
1 Vs 7	489323.49	<	1204186.517	R4	No significativo
1 Vs 2	373388.99	<	1173487.052	R3	No significativo
1 Vs 3	130051.17	<	1115925.555	R2	No significativo
3 Vs 9	524829.63	<	1204186.517	R4	No significativo
3 Vs 7	359272.32	<	1173487.052	R3	No significativo
3 Vs 2	243337.83	<	1115925.555	R2	No significativo
2 Vs 9	281491.8	<	1173487.052	R3	No significativo
2 Vs 7	115934.5	<	1115925.555	R2	No significativo
7 Vs 9	165557.3	<	1115925.555	R2	No significativo

Tomando en cuenta el efecto de interacción BC, se puede concluir que 1, 2, 3, 5, 7 y 9 no tienen un efecto significativo, por consiguiente son iguales en su nivel intermedio.

Para el caso de 8, sólo hay un efecto significativo diferente versus la media 9. Mientras las medias de 4 y 6 presentan un efecto significativamente diferente, y por tanto, existe diferencia en su nivel intermedio.

**Resultados obtenidos en el arreglo factorial por método de selección por torneo**

Siguiendo el mismo procedimiento del método de selección aleatoria, el análisis de varianza para los datos del método de selección por torneo, se puede visualizar en la tabla 19.

Tabla 19. ANOVA para el método de selección por torneo

ANOVA						
F.V.	S.C.	GL	C.M.	Fcalc	F teo	Valor P
A	2629639313193.320	2	1314819656596.66	1.41845416	3.354130829	0.259557898
B	9557450742614.390	2	4778725371307.20	5.155386026	3.354130829	0.012695466
C	778037319089.553	2	389018659544.78	0.419681234	3.354130829	0.661470471
AB	3913861773562.780	4	978465443390.70	1.055588401	2.727765306	0.397416996
AC	7668982608289.210	4	1917245652072.30	2.068363564	2.727765306	0.112883149
BC	5015498812979.500	4	1253874703244.87	1.352705506	2.727765306	0.27636321
ABC	13039043440867.600	8	1629880430108.45	1.758348124	2.305313177	0.130172697
Error	25027337310251.500	27	926938418898.20			
Total	67629851320847.90	53				

Se puede observar en la tabla 19, análisis de varianza (ANOVA), que sí hay un efecto del número de población inicial. Lo anterior se debe a que este factor tiene un p-value menor a 0.05, lo que demuestra que el factor B afecta de manera significativa la variable de respuesta.

Con el fin de mostrar de una manera más detallada el ANOVA de la tabla 19, se hará un desglose tanto en sus partes lineales y cuadráticos, que se podrá observar en la tabla 20.

En la tabla 20, se puede observar que un factor afectan de manera significativa a la variable respuesta. El efecto B afecta significativamente a la variable de respuesta en su componente cuadrática (BQ).

Se puede concluir que B es el único factor que afecta a la variable de respuesta, y lo hace en su componente cuadrática.

Analizando los resultados obtenidos por ANOVA desglosado, se estableció encontrar el mejor ANOVA, con el propósito de definir si el tratamiento para el factor B afecta de manera significativa a la variable respuesta. La tabla 21 muestra el mejor ANOVA para el método de selección por torneo.

Tabla 21. Mejor ANOVA para el método de selección por torneo

FV	S.C.	GL	C.M.	Fcalc	F teo	Valor P
BQ	9247565109576.660	1	9247565109576.660	8.237	4.027	0.00592274
Error	58382286211271.200	52	1122736273293.680			
Total	67629851320847.900	53				

Dado que en la tabla 21, el factor B no tiene un p-value mayor que 0.05, se puede decir que dicho factor es el mejor, es decir, el factor B afecta de una manera significativa la variable de respuesta.

Se puede concluir que para el factor B se rechaza la hipótesis y, por lo tanto, el tamaño de la población tiene un efecto significativo sobre la minimización de costos totales.

Tabla 20. ANOVA desglosado para el método de selección por torneo

FV	S.C.	GL	C.M.	Fcalc	F teo	Valor P
AL	1361253049592.240	1	1361253049592.240	1.468547448	4.210008468	0.2361
AQ	1268386263601.080	1	1268386263601.080	1.368360872	4.210008468	0.2523
BL	309885633037.731	1	309885633037.731	0.334310917	4.210008468	0.5679
BQ	9247565109576.660	1	9247565109576.660	9.976461134	4.210008468	0.0039
CL	535082829573.791	1	535082829573.791	0.577258228	4.210008468	0.4540
CQ	242954489515.762	1	242954489515.762	0.26210424	4.210008468	0.6128
ALBL	1991758961621.050	1	1991758961621.050	2.148750037	4.210008468	0.1542
ALBQ	462125604122.977	1	462125604122.977	0.498550491	4.210008468	0.4862
AQBL	1086205040579.570	1	1086205040579.570	1.171820067	4.210008468	0.2886
AQBQ	373772167239.192	1	373772167239.192	0.403233008	4.210008468	0.5308
ALCL	1771957914362.590	1	1771957914362.590	1.911624201	4.210008468	0.1781
ALCQ	2655486162339.470	1	2655486162339.470	2.864792427	4.210008468	0.1020
AQCL	2775673261619.190	1	2775673261619.190	2.994452711	4.210008468	0.0950
AQCQ	465865269967.969	1	465865269967.969	0.502584919	4.210008468	0.4844
BLCL	1130072029986.640	1	1130072029986.640	1.219144667	4.210008468	0.2793
BLCQ	2663547819312.500	1	2663547819312.500	2.873489506	4.210008468	0.1016
BQCL	1197725970932.050	1	1197725970932.050	1.292131113	4.210008468	0.2656
BQCQ	24152992748.309	1	24152992748.309	0.026056739	4.210008468	0.8730
ALBCL	1577021168599.510	1	1577021168599.510	1.701322479	4.210008468	0.2031
ALBCLQ	1430780569940.810	1	1430780569940.810	1.54355515	4.210008468	0.2248
ALBQCL	1357979260287.100	1	1357979260287.100	1.465015618	4.210008468	0.2366
ALBQCQ	402825856989.006	1	402825856989.006	0.434576719	4.210008468	0.5153
AQBCL	1084541236322.970	1	1084541236322.970	1.170025122	4.210008468	0.2890
AQBCLQ	3625013445249.350	1	3625013445249.350	3.910738158	4.210008468	0.0583
AQBQCL	3269810306345.480	1	3269810306345.480	3.527537795	4.210008468	0.0712
AQBQCQ	291071597133.410	1	291071597133.410	0.314013953	4.210008468	0.5798
Error	25027337310251.500	27	926938418898.203			
Totales	67629851320847.900	53				

### Comparación de medias múltiples para el método de selección por torneo

Como el mejor ANOVA arrojó que la población inicial para el método de selección por torneo tiene un efecto significativo en la variable de salida, se realizará una comparación de medias a partir del método de Duncan, con el fin de determinar cuál o cuáles tratamientos provocan la diferencia en la variable de respuesta. El procedimiento para la comparación de medias por el método de selección por torneo se puede visualizar en el archivo Microsoft Excel, DISEÑO DE EXPERIMENTOS, hoja, M.DUNCAN TORNEO.

Las hipótesis planteadas son:

$$H_0: \mu_{B_1} = \mu_{B_2} \text{ Vs } H_1: \mu_{B_1} \neq \mu_{B_2}$$

$$H_0: \mu_{B_1} = \mu_{B_3} \text{ Vs } H_1: \mu_{B_1} \neq \mu_{B_3}$$

$$H_0: \mu_{B_2} = \mu_{B_3} \text{ Vs } H_1: \mu_{B_2} \neq \mu_{B_3}$$

Los rangos se obtuvieron de la siguiente manera: se hallaron las medias para cada factor B ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ) de las réplicas obtenidas en la tabla 47 ( $n = 18$  réplicas), y se ordenaron en forma ascendente, obtenido los siguientes resultados:

$$Y_{B_2} = 3803932.266$$

$$Y_{B_3} = 4589008.896$$

$$Y_{B_1} = 4774566.804$$

Para obtener los rangos de dignificación mínima,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , se aplica la forma  $R_p = r_{\alpha, p, f} * S_{Y_i}$ , donde alfa es igual a 0.05,  $p=2, 3$ ;  $f = 27$  (grados de libertad del error). Para el valor  $r_{\alpha, p, f}$ , se obtiene por medio de la tabla de Rangos de Duncan, para los valores de  $r_{0.05}(2,27)$  y  $r_{0.05} 3,27$ . Dado que se tienen grados de libertad establecidos en la tabla de Duncan, se procede a realizar una interpolación con el fin de hallar los valores para 27 grados de libertad. La interpolación realizada se puede observar en la tabla 15, ya que estos dos métodos presentaron el mismo comportamiento.

Donde el R se obtiene de la siguiente manera.

$$R_3 = r_{0.05} 2,27 * S_{Y_i} = 2.908 * \frac{CM_E}{n} = 2.908 * \frac{926938418898.20}{18} = 693947.6$$

$$R_2 = r_{0.05} 3,27 * S_{Y_i} = 3.058 * \frac{CM_E}{n} = 3.058 * \frac{926938418898.20}{18} = 659908.3$$

Después de finalizar con todos los procedimientos necesarios para tener los datos, los resultados de las comparaciones de medias se puede observar en la tabla 22.

Tabla 22. Resultado comparación de medias, método Duncan, para el factor B (Población inicial)

Comparación de medias	Diferencia	Calculado		Teorico	Conclusión
1 Vs 2	4774566.8-3803932.26	970634.5374	R3	> 693947.5869	Significativo
1 Vs 3	4774566.8-4589008.89	185557.9074	R2	< 659908.3004	No es Significativo
3 Vs 2	4589008.89-3803932.26	785076.63	R2	> 659908.3004	Significativo

Puede observarse que la hipótesis nula se rechaza para la media 1 Vs. 3 y 3 Vs. 2, lo que quiere decir que  $\mu_3 \neq \mu_2$  y  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Mientras que, para la media 1 Vs 3, la hipótesis es aceptada, lo que significa que  $\mu_1 = \mu_3$ .

También se puede concluir que  $\mu_2$  tiene un efecto significativamente diferente a comparación de las demás medidas presentadas.

## CAPITULO 6

En este capítulo se analizará el modelo matemático formulado con los datos propuestos por los estudiantes y los datos reales brindados por la empresa consultora Logyca S.A. Se realizará el análisis de sensibilidad para los datos propuestos, con el fin de evidenciar que parámetros son los más influyentes dentro del modelo. Por otro lado, con el resultado obtenido por los datos reales se comparará con la situación actual de la empresa, con el propósito de comprobar si el

modelo matemático propuesto fue una solución óptima a dicho problema. Finalmente se realizará un análisis general de los puntos clave del modelo matemático.

El código de programación en el software Lp-solve, propuesto para la solución del problema con datos reales, puede observarse en el anexo 4.

### Resultados de datos propuestos

El modelo matemático propuesto se formulará con datos propuestos por los estudiantes. Estos datos son:

#### Conjuntos

$$I = 1 \quad J = 5 \quad K = 25 \quad L = 25 \quad O = 2 \quad P = 2$$

#### Parámetros

$$s_i = 15000$$

$$a_j: a_1 = 4; a_2 = 10; a_3 = 16; a_4 = 24; a_5 = 32$$

$$b_k: b_1 = 2.5; b_2 = 4.5; b_3 = 6.5; b_4 = 9.5; b_5 = 11$$

$$b_6 = 1; b_7 = 1.8; b_8 = 2.6; b_9 = 3.8; b_{10} = 4.4$$

$$b_{11} = 11.063; b_{12} = 1.13; b_{13} = 1.63; b_{14} = 2.38; b_{15} = 2.75$$

$$b_{16} = 0.42; b_{17} = 0.75; b_{18} = 1.08; b_{19} = 1.58; b_{20} = 1.83$$

$$b_{21} = 0.31; b_{22} = 0.56; b_{23} = 0.81; b_{24} = 1.19; b_{25} = 1.38$$

$$n_{jk} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

$$n_{kl} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$ca_k$ :  $ca_1 = 34$ ;  $ca_2 = 42$ ;  $ca_3 = 50$ ;  $ca_4 = 62$ ;  $ca_5 = 68$   
 $ca_6 = 34$ ;  $ca_7 = 42$ ;  $ca_8 = 50$ ;  $ca_9 = 62$ ;  $ca_{10} = 68$   
 $ca_{11} = 34$ ;  $ca_{12} = 42$ ;  $ca_{13} = 50$ ;  $ca_{14} = 62$ ;  $ca_{15} = 68$   
 $ca_{16} = 34$ ;  $ca_{17} = 42$ ;  $ca_{18} = 50$ ;  $ca_{19} = 62$ ;  $ca_{20} = 68$   
 $ca_{21} = 34$ ;  $ca_{22} = 42$ ;  $ca_{23} = 50$ ;  $ca_{24} = 62$ ;  $ca_{25} = 68$

$cmo_l$ :  $cmo_1 = 59$ ;  $cmo_2 = 67$ ;  $cmo_3 = 75$ ;  $cmo_4 = 87$ ;  $cmo_5 = 93$   
 $cmo_6 = 59$ ;  $cmo_7 = 67$ ;  $cmo_8 = 75$ ;  $cmo_9 = 87$ ;  $cmo_{10} = 93$   
 $cmo_{11} = 59$ ;  $cmo_{12} = 67$ ;  $cmo_{13} = 75$ ;  $cmo_{14} = 87$ ;  $cmo_{15} = 93$   
 $cmo_{16} = 59$ ;  $cmo_{17} = 67$ ;  $cmo_{18} = 75$ ;  $cmo_{19} = 87$ ;  $cmo_{20} = 93$   
 $cmo_{21} = 59$ ;  $cmo_{22} = 67$ ;  $cmo_{23} = 75$ ;  $cmo_{24} = 87$ ;  $cmo_{25} = 93$

$cmi_l$ :  $cmi_1 = 18$ ;  $cmi_2 = 24$ ;  $cmi_3 = 30$ ;  $cmi_4 = 38$ ;  $cmi_5 = 46$   
 $cmi_6 = 18$ ;  $cmi_7 = 24$ ;  $cmi_8 = 30$ ;  $cmi_9 = 38$ ;  $cmi_{10} = 46$   
 $cmi_{11} = 18$ ;  $cmi_{12} = 24$ ;  $cmi_{13} = 30$ ;  $cmi_{14} = 38$ ;  $cmi_{15} = 46$   
 $cmi_{16} = 18$ ;  $cmi_{17} = 24$ ;  $cmi_{18} = 30$ ;  $cmi_{19} = 38$ ;  $cmi_{20} = 46$   
 $cmi_{21} = 18$ ;  $cmi_{22} = 24$ ;  $cmi_{23} = 30$ ;  $cmi_{24} = 38$ ;  $cmi_{25} = 46$

$d_{op}$ :  $d_{11} = 1500$ ;  $d_{12} = 2000$ ;  $d_{21} = 4000$ ;  $d_{22} = 2500$

$M = 10000000$

$nlp_{lp}$ :

$rlp_{lp}$ :



	1	2
1	1	0.4
2	1	0.22222
3	1	0.15385
4	1	0.10526
5	1	0.09091
6	1	1
7	1	0.55556
8	1	0.38462
9	1	0.26316
10	1	0.22727
11	1	1.6
12	1	0.88889
13	1	0.61538
14	1	0.42105
15	1	0.36364
16	1	2.4
17	1	1.33333
18	1	0.92308
19	1	0.63158
20	1	0.54545
21	1	3.2
22	1	1.77778
23	1	1.23077
24	1	0.84211
25	1	0.72727

	1	2
1	10	4
2	18	4
3	26	4
4	38	4
5	44	4
6	10	10
7	18	10
8	26	10
9	38	10
10	44	10
11	10	16
12	18	16
13	26	16
14	38	16
15	44	16
16	10	24
17	18	24
18	26	24
19	38	24
20	44	24
21	10	32
22	18	32
23	26	32
24	38	32
25	44	32

### Resultados obtenidos datos propuestos

Los resultados obtenidos en el Lp-Solve se pueden observar en la ilustración 12.

```

SUBMITTED
Model size:      92 constraints,      785 variables,      400 non-zeros.
Sets:           0 GUB,                0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Found feasibility by dual simplex after      50 iter.
Relaxed solution      34559.6584734 after      64 iter is B&B base.

Feasible solution      74722.2194975 after      132 iter,      2 nodes (gap 116.2%)
Improved solution      71250.0064905 after      143 iter,      4 nodes (gap 106.2%)
Improved solution      40924.3407811 after      395 iter,     24 nodes (gap 18.4%)
Improved solution      37361.8407818 after      601 iter,     52 nodes (gap 8.1%)
Improved solution      36715.9077188 after      603 iter,     53 nodes (gap 6.2%)
Improved solution      34559.6584734 after      814 iter,     88 nodes (gap 0.0%)

Optimal solution      34559.6584734 after      814 iter,     88 nodes (gap 0.0%).
Excellent numeric accuracy ||*|| = 2.27374e-013

```

Ilustración 12. Resultados Lp-Solve

El problema da como resultado en la función objetivo, después de realizar 64 iteraciones, una solución relajada de 34559,65 unidades monetarias.

El problema se realiza de forma continua (relajado), ya que al hacerlo de forma entera, no sería beneficioso en relación al tiempo gastado para llegar a una solución y realizar el análisis de sensibilidad respectivo.

La solución en las variables de decisión se presenta en la ilustración 13.

Variables	MILP Better	result
	34559,6584734375	34559,6584734375
x[1,5]	10036,363467	10036,363467
y[5,25]	313,63635834375	313,63635834375
alpha[5]	1	1
z[25,25]	227,2727234375	227,2727234375
beta[25]	1	1
xlop[25,1,1]	34,0909090909091	34,0909090909091
xlop[25,2,1]	90,9090909090909	90,9090909090909
xlop[25,1,2]	62,5	62,5
xlop[25,2,2]	78,125	78,125

Ilustración 13. Resultado de variables de decisión

Los resultados anteriores pueden traducirse de la siguiente manera: Las 10036,36 unidades de producto i son enviadas a empacar al inner pack 5. El alpha es igual a 1 porque solo se escogió un inner pack, siendo éste el 5. Una vez las 9963,63 unidades son empacadas, se generan 313,363 inner pack con capacidad de 32 unidades de producto cada uno, que son enviados a embalar al outer pack 25. Al embalar los inner pack se generan 227,27 outer pack con capacidad de 1,37 inner pack cada una. El beta es igual a 1 porque sólo se escogió un outer pack, siendo éste el 25. El producto embalado es enviado al centro de distribución 25. En centro de distribución 25 se envían las diferentes cantidades y presentaciones a los clientes. Al cliente 1 del producto de tipo 1 se envía una cantidad de 34,09 outer pack, y al cliente dos del producto de tipo 1 se envía una cantidad 90,09 outer pack. De la misma manera, del centro de distribución 25 se envía al cliente 1 del producto de tipo 2 una cantidad de 62,5 inner pack, y al cliente 2 del producto de tipo 2 se envía una cantidad 78,125 inner pack. Al final, la empresa entrega las unidades que son demandadas por los diferentes clientes.

### **Análisis de sensibilidad de datos propuestos**

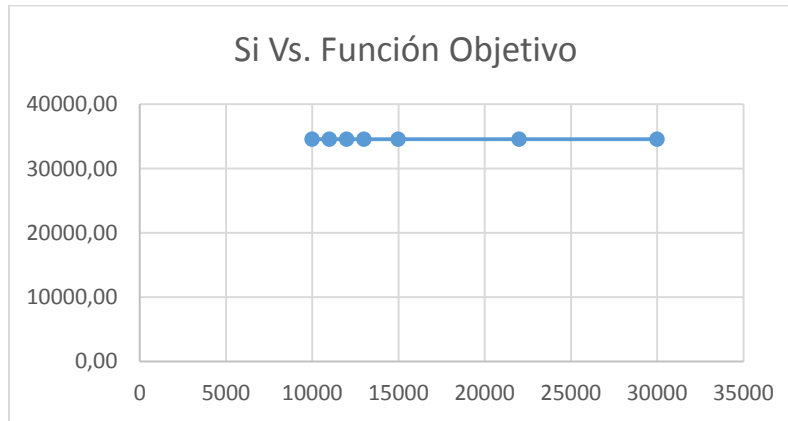
En esta sección se realizará el análisis de sensibilidad para los datos propuestos por los estudiantes con el propósito de observar qué parámetros tienen más influencia en la función objetivo. No vale la pena realizar dos análisis de sensibilidad, ya sea con los datos propuestos o reales, porque el comportamiento de los parámetros será el mismo.

### Análisis de sensibilidad para la capacidad de producción

Se tomó como base la capacidad dada en el problema, la cual es 15000 unidades. Los datos analizados se pueden ver en la tabla 23, y el comportamiento y valores se pueden observar en la gráfica 3.

Tabla 23. Datos capacidad de producción

Si	10000	11000	12000	13000	15000	22000	30000
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66



Gráfica 3. Capacidad de producción Vs. Función objetivo

Se puede observar en la gráfica 3 que si la capacidad de producción aumenta o disminuye, no existirá ninguna variación en la función objetivo, es decir, la capacidad de producción es totalmente independiente a la función objetivo, siempre y cuando se cumplan las restricciones de demanda. Si la capacidad de producción es menor a las unidades de producto demandado, el modelo será infactible.

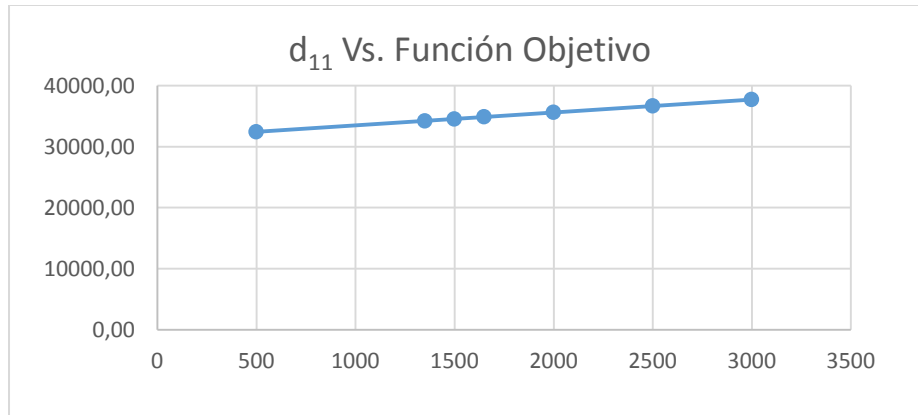
### Análisis de sensibilidad para las demandas

Se realizaron cuatro análisis de sensibilidad para las demandas, ya que se tienen dos diferentes clientes que demandan dos diferentes tipos de producto.

Para el cliente 1 que demanda del producto de tipo 1 (outer pack), se tomó la demanda base del problema, la cual es 1500 unidades. Al realizar cambios respectivos en dicha demanda (ver Tabla 24) se obtuvo el comportamiento que puede observarse en la gráfica 4.

Tabla 24. Datos demanda de cliente 1 para producto 1

d11	500	1350	1500	1650	2000	2500	3000
FO	32446.02	34242.61	34559.66	34876.70	35616.48	36673.29	37730.11



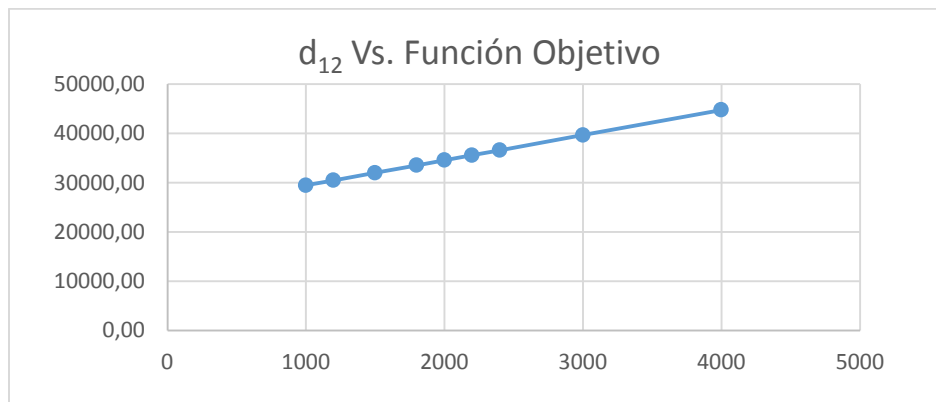
Gráfica 4. Demanda cliente 1 de producto 1 Vs. Función objetivo

En la gráfica 4, la demanda del producto 1 respecto a la función objetivo tiene una correlación positiva débil, es decir, a medida que se aumente o se disminuya la demanda del producto 1 para el cliente 1, la Función objetivo no tendrá una variabilidad significativa, a consecuencia de que no hay existencia de costos de apertura y manipulación de inner pack.

Para el cliente 1 que demanda del producto de tipo 2 (inner pack), se tomó la demanda base del problema, la cual es 2000 unidades. Al realizar cambios respectivos en dicha demanda (ver Tabla 25) se obtuvo el comportamiento que puede observarse en la gráfica 5.

Tabla 25. Datos cliente 1 del producto 2.

d <sub>12</sub>	1000	1200	1500	1800	2000	2200	2400	3000	4000
FO	29463.0	30482.3	32011.3	33540.3	34559.6	35578.9	36598.2	39656.2	44752.8



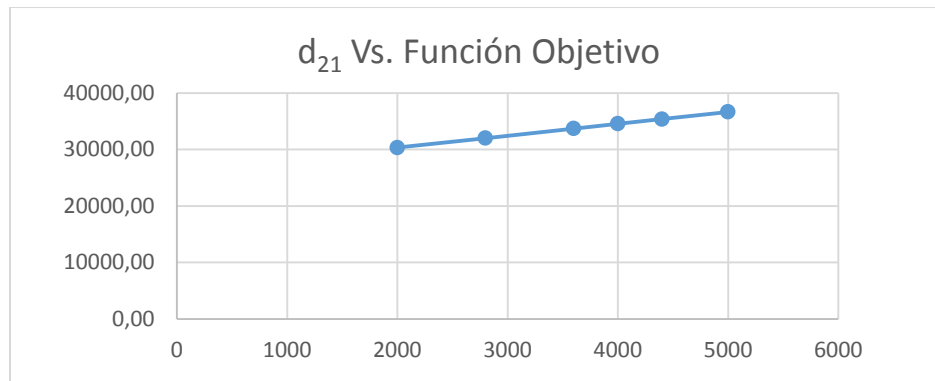
Gráfica 5. Demanda del cliente 1 del producto 2 Vs. Función objetivo

En la gráfica 5 se evidencia una correlación positiva o en aumento, donde la demanda del producto tipo 2 influye de manera directa a los costos de manipulación y apertura. Se observa que por cada 1000 unidades de producto que se demandan hay un aumento en el costo por valor de 5000. Este comportamiento se debe a que el producto tipo 2, inner pack, obliga a la existencia de un costo de manipulación de inner pack y costo de apertura de outer pack.

Para el cliente 2 que demanda del producto de tipo 1, se tomó la demanda base del problema, la cual es 4000 unidades. Al realizar cambios respectivos en dicha demanda (ver Tabla 26) se obtuvo el comportamiento que puede observarse en la gráfica 6.

Tabla 26. Datos cliente 2 para producto tipo 1

d <sub>21</sub>	2000	2800	3600	4000	4400	5000
FO	30332.39	32023.29	33714.20	34559.66	35405.11	36673.29



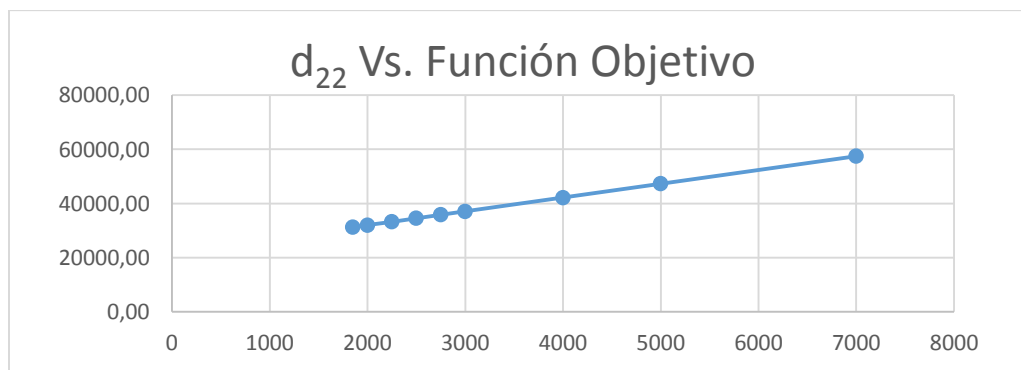
Gráfica 6. Demanda de cliente 2 para producto del tipo 1 Vs. Función objetivo

Analizando la gráfica 6 se puede determinar que tiene el mismo comportamiento del producto tipo 1 para el cliente 1. Esto sugiere que la demanda del producto tipo 1 no incurre de manera significativa en variación de la función objetivo. Aunque este parámetro tenga una variación en relación a su punto de referencia, el aumento o disminución no presentara gran influencia en los costos finales.

Para el cliente 2 que demanda del producto de tipo 2, se tomó la demanda base del problema, la cual es 2500 unidades. Al realizar cambios respectivos en dicha demanda (ver Tabla 27) se obtuvo el comportamiento que puede observarse en la gráfica 7.

Tabla 27. Datos cliente 2 para producto de tipo 2

d <sub>22</sub>	1850	2000	2250	2500	2750	3000	4000	5000	7000
FO	31246.87	32011.36	33285.51	34559.66	35833.81	37107.95	42204.54	47301.14	57494.32



Gráfica 7. Demanda del cliente 2 del producto 2 Vs. Función objetivo

Puede observarse que los datos de la tabla 27 presentan una tendencia lineal en la gráfica 7, de la misma manera que sucede con la demanda del cliente 1 para el producto 2. Se observa que estos tipos de productos, inner pack, son más influyentes en la función objetivo. Esto quiere decir, que dado el caso que se aumente o disminuya la demanda del inner pack en su valor de referencia, aumentará o disminuirá la función objetivo.

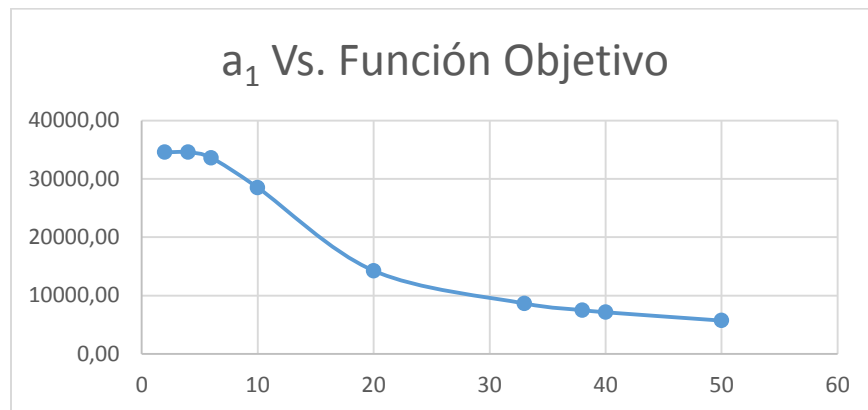
### Análisis de sensibilidad para los inner pack

Se tomaron los inner pack que el problema tiene y se modificó cada uno de estos. Al mismo tiempo, se hizo necesario modificar la matriz de conversión  $nlp_{lp}$  que es la encargada de convertir los inner pack en unidades, con la finalidad de cumplir con las restricciones del modelo.

Para el inner pack 1 se tomaron los datos de la Tabla 28, siendo 4 el dato base del problema. El comportamiento de los diferentes datos se puede observar en la gráfica 8.

Tabla 28. Datos inner pack 1

a1	2	4	6	10	20	33	38	40	50
FO	34559.6	34559.6	33603.3	28500.0	14250.0	8636.36	7500.00	7125.00	5700.00

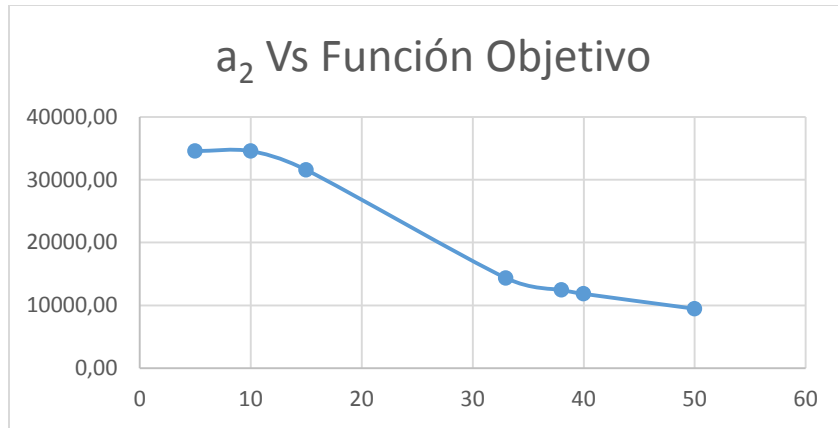


Gráfica 8. Inner pack 1 Vs. Función objetivo

Para el inner pack 2 se tomaron los datos de la Tabla 29, siendo 10 el dato base del problema. El comportamiento de los diferentes datos se puede observar en la gráfica 9.

Tabla 29. Datos inner pack 2

a2	5	10	15	33	38	40	50
FO	34559.66	34559.66	31557.89	14344.50	12457.06	11834.21	9467.37

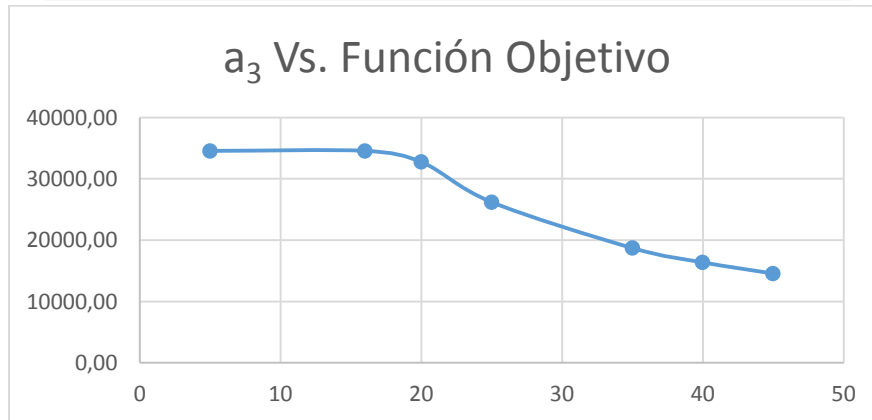


Gráfica 9. Inner 2 Vs Función objetivo

Para el inner pack 3 se tomaron los datos de la Tabla 30, siendo 16 el dato base del problema. El comportamiento de los diferentes datos se puede observar en la gráfica 10.

Tabla 30. Datos inner pack 3

a <sub>3</sub>	5	16	20	25	35	40	45
FO	34559.66	34559.66	32739.47	26191.58	18708.27	16369.74	14550.88

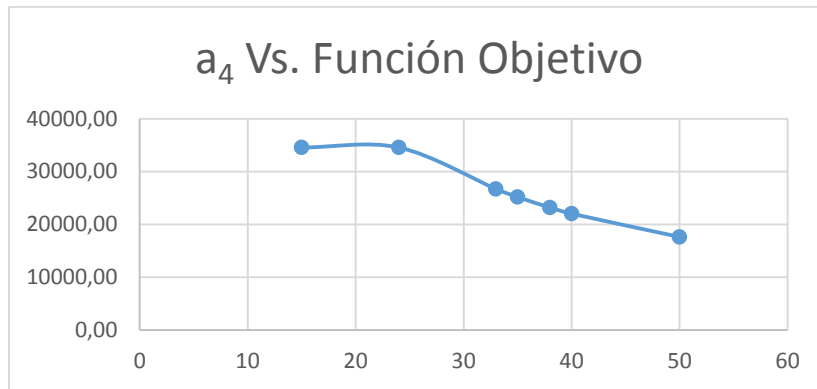


Gráfica 10. Inner 3 Vs. Función objetivo

Para el inner pack 4 se tomaron los datos de la Tabla 31, siendo 24 el dato base del problema. El comportamiento de los diferentes datos se puede observar en la gráfica 11.

Tabla 31. Datos inner pack 4

a <sub>4</sub>	15	24	33	35	38	40	50
FO	34559.66	34559.66	26702.48	25176.62	23188.99	22029.54	17623.64

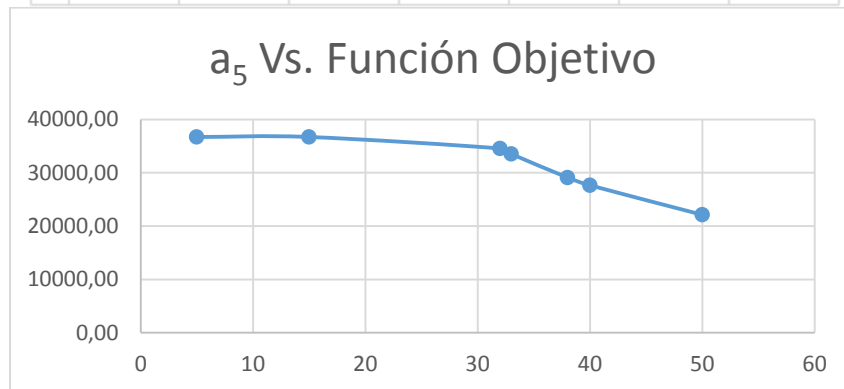


Gráfica 11. Inner pack 4 Vs. Función objetivo

Para el inner pack 5 se tomaron los datos de la Tabla 32, siendo 32 el dato base del problema. El comportamiento de los diferentes datos se puede observar en la gráfica 12.

Tabla 32. Datos inner pack 5

a <sub>5</sub>	5	15	32	33	38	40	50
FO	36715.91	36715.91	34559.66	33512.40	29102.87	27647.73	22118.18



Gráfica 12. Inner pack 5 Vs. Función objetivo

Observando el comportamiento de las gráficas 8, 9, 10, 11 y 12 la función objetivo permanece constante hasta que se aproxima al valor de referencia de cada gráfica, donde empieza a disminuir el valor de la función objetivo a causa de que si el inner pack es mayor, abarcará más producto y disminuirá su costo de apertura de outer pack y manipulación inner pack.

Se evidenció la existencia de diferencias entre las gráficas a pesar de ser similares en su comportamiento. La gráfica de a<sub>1</sub>, que es del inner pack con menor capacidad y de menor costo, presenta una variabilidad mucho mayor porque su costo no aumentará mientras que su capacidad sí. Este comportamiento sucede para cada una de las gráficas, mostrando a a<sub>5</sub> como la gráfica con menor variabilidad, ya que su costo es elevado y su capacidad no representará una opción ideal para el modelo.



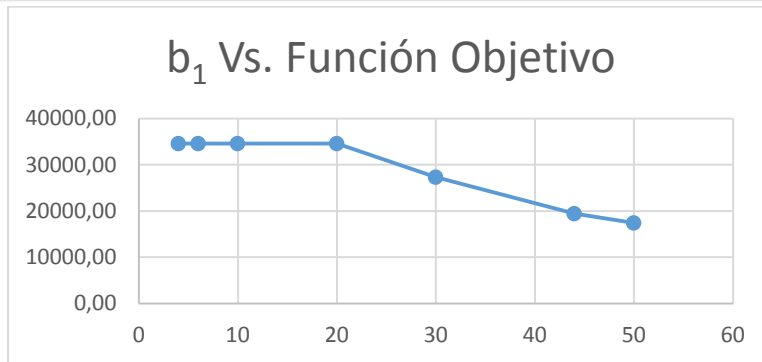
### Análisis de sensibilidad para los outer pack

Se tomaron los outer pack que el problema tiene y se modificaron con el fin de analizar la influencia de estos parámetros en la función objetivo. Hay que tener en cuenta que existen 5 outer pack para cada tipo de inner pack, por tal razón, se desarrolló el análisis de sensibilidad para los 5 outer pack del problema. Como los cambios del outer pack influyen en las matrices de conversión  $nlp_{lp}$  y  $rlp_{lp}$ , éstas también tienen que modificarse para cumplir con las restricciones del modelo.

Para el outer pack 1, se tomaron los datos de la Tabla 33, siendo 10 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 13.

Tabla 33. Datos outer 1

Outer 1	4	6	10	20	30	44	50
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	27297.91	19417.61	17391.25

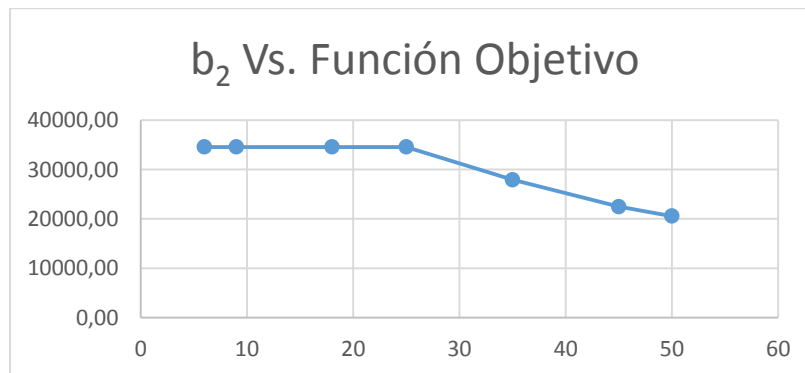


Gráfica 13. outer 1 Vs. Función objetivo

Para el outer pack 2, se tomaron los datos de la Tabla 34, siendo 18 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 14.

Tabla 34. Datos outer 2

Outer 2	6	9	18	25	35	45	50
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	27917.86	22463.89	20555.00

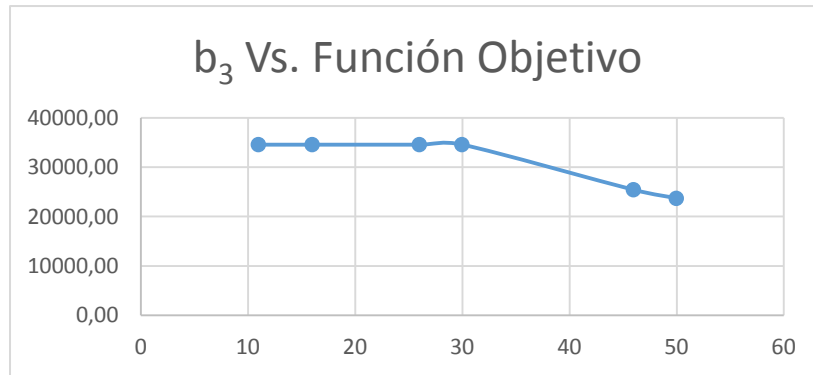


Gráfica 14. Outer 2 Vs. Función objetivo

Para el outer pack 3 se tomaron los datos de Tabla 35, siendo 26 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 15.

Tabla 35. Datos outer 3

Outer 3	11	16	26	30	46	50
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	25414.40	23718.75

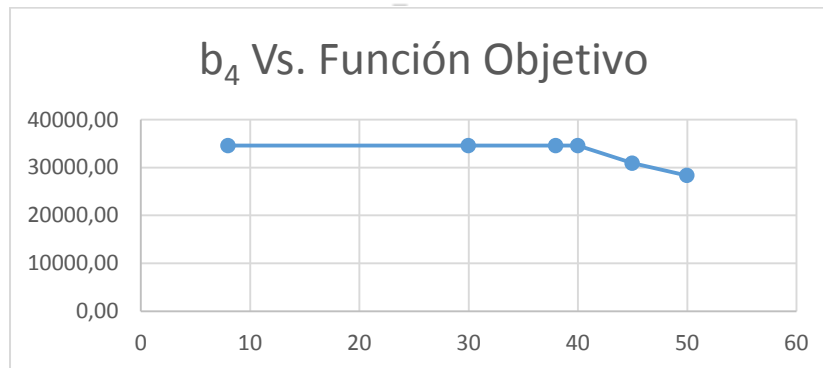


Gráfica 152. Outer 3 Vs. Función objetivo

Para el outer pack 4, se tomaron los datos de la Tabla 36, siendo 38 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 16.

Tabla 36. Datos outer 4

Outer 4	8	30	38	40	45	50
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	30877.08	28323.75

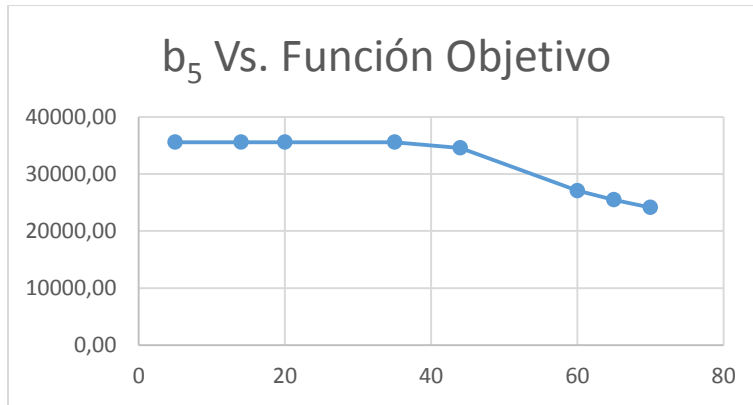


Gráfica 16. Outer 4 Vs. Función objetivo

Para el outer pack 5, se tomaron los datos de la Tabla 37, siendo 44 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 17.

Tabla 37. Datos outer 5

Outer 5	5	14	20	35	44	60	65	70
FO	35580.5	35580.5	35580.5	35580.5	34559.6	27068.7	25484.1	24125.9



Gráfica 173. Outer 5 Vs. Función objetivo

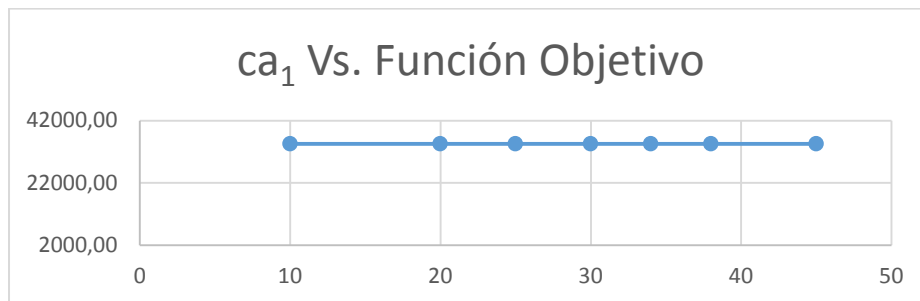
Como se puede observar en las gráfica 13, 14, 15, 16 y 17, existe una estabilidad en la función objetivo cuando estos outer pack se aproximan a su punto de referencia. Cuando se sobrepasa de este punto de referencia, se produce una disminución en el costo de manipulación de outer pack, a causa de que la capacidad para embalar los inner pack es mayor, así mismo, el costo de apertura disminuye porque el número de outer pack es menor.

#### Análisis de sensibilidad para los costos de apertura

Para los costos de apertura 1, se tomaron los datos de la Tabla 38, siendo 25 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 18.

Tabla 38. Datos costo de apertura 1

ca1	10	20	25	30	34	38	45
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66

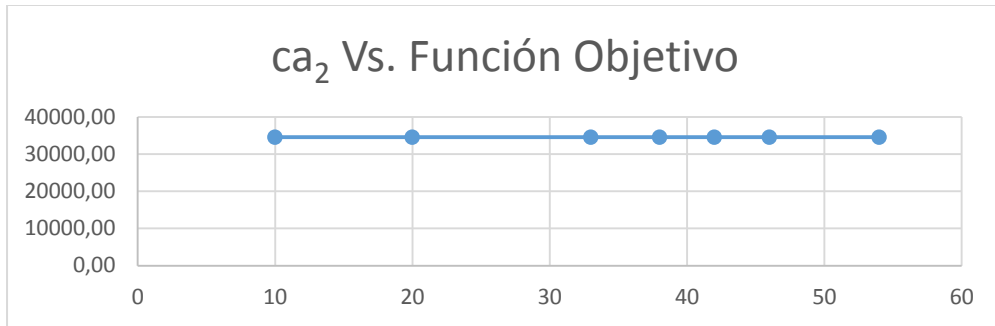


Gráfica 18. Costo de apertura 1 Vs. Función objetivo

Para los costos de apertura 2, se tomaron los datos de la Tabla 39, siendo 42 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 19.

Tabla 39. Datos coto de apertura 2

ca2	10	20	33	38	42	46	54
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66

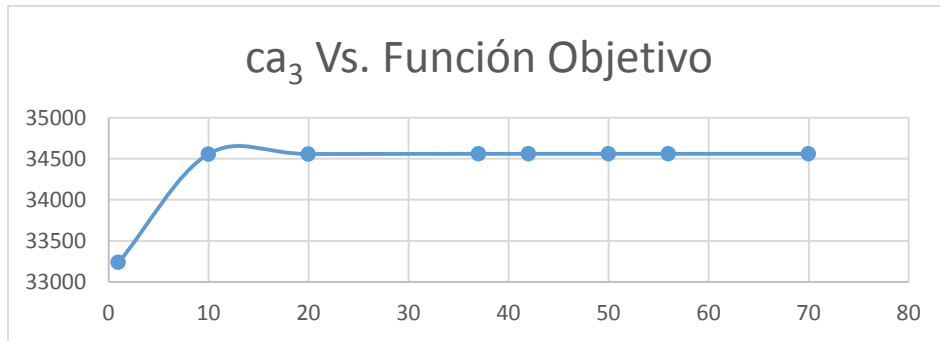


Gráfica 19. Costo de apertura 2 Vs. Función objetivo

Para los costos de apertura 3, se tomaron los datos de la Tabla 40, siendo 50 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 20.

Tabla 40. Datos costo de apertura 3

ca3	1	10	20	37	42	50	56	70
FO	33238	34557.6	34557.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6

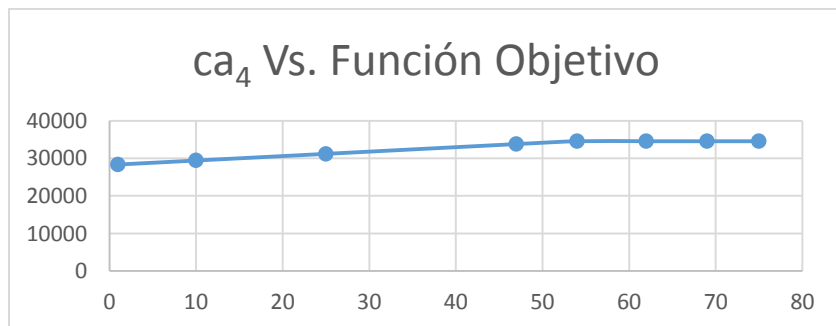


Gráfica 204. Costo de apertura 3 Vs. Función objetivo

Para los costos de apertura 4, se tomaron los datos de la Tabla 41, siendo 62 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 21.

Tabla 41. Datos costo de apertura 4

ca4	1	10	25	47	54	62	69	75
FO	28356.91	29422.70	31199.01	33804.28	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66

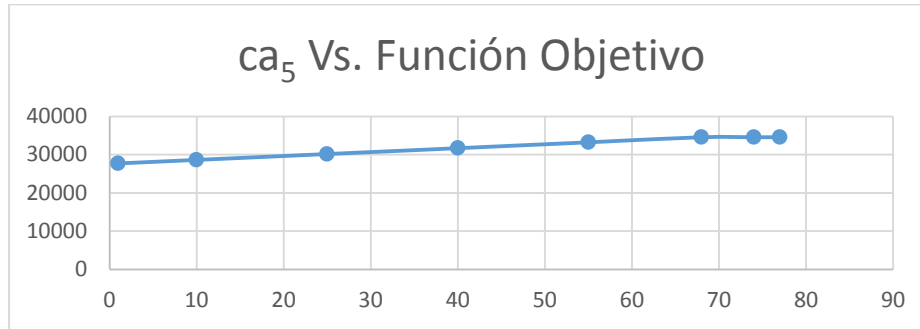


Gráfica 21. Costo de apertura 4 Vs. Función objetivo

Para los costos de apertura 5, se tomaron los datos de la Tabla 42, siendo 68 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 22.

Tabla 42. Datos costo de apertura 5

ca5	1	10	25	40	55	68	74	77
FO	27707.4	28627.8	30161.9	31696.0	33230.1	34559.6	34559.6	34559.6



Gráfica 22. Costo de apertura 5 Vs. Función objetivo

Se puede observar que las gráficas 18 y 19 permanecen constante por el aumento o disminución del costo de apertura sobre el nivel de referencia. Lo anterior se debe a que para la solución del modelo, por más mínimo que sea dicho costo, no resulta beneficioso por la capacidad del outer pack.

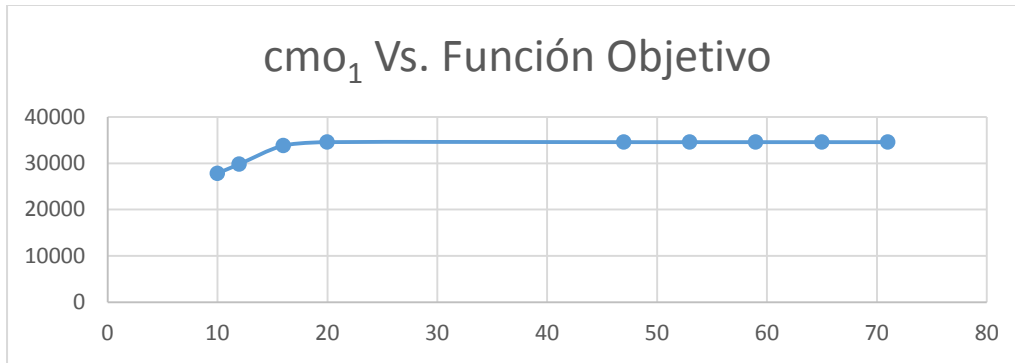
Por otro lado, las gráficas 20, 21 y 22 tienen un aumento en la función objetivo a medida que aumenta el costo de apertura, y se estabilizan cuando se aproximan a su punto de referencia, ya que para estos outer su capacidad es mayor y a su vez su costo es menor, por consiguiente, el costo de apertura más bajo de uno de los tres outer pack es tomado como una solución óptima.

### Análisis de sensibilidad para los costos de manipulación de outer pack

Para los costos de manipulación de outer pack 1, se tomaron los datos de la Tabla 43, siendo 59 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 23.

Tabla 43. Datos costo de manipulación outer 1

cmo1	10	12	16	20	47	53	59	65	71
FO	27831.25	29831.25	33831.25	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66

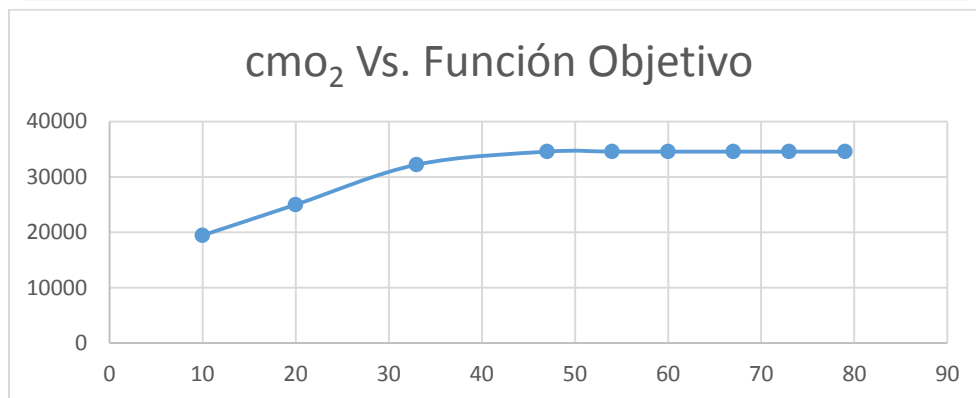


Gráfica 23. Costo de manipulación outer 1 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación de outer pack 2, se tomaron los datos de la Tabla 44, siendo 67 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 24.

Tabla 44. Datos coto de manipulación outer 2

cmo2	10	20	33	47	54	60	67	73	79
FO	19430.6	24986.1	32208.3	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6

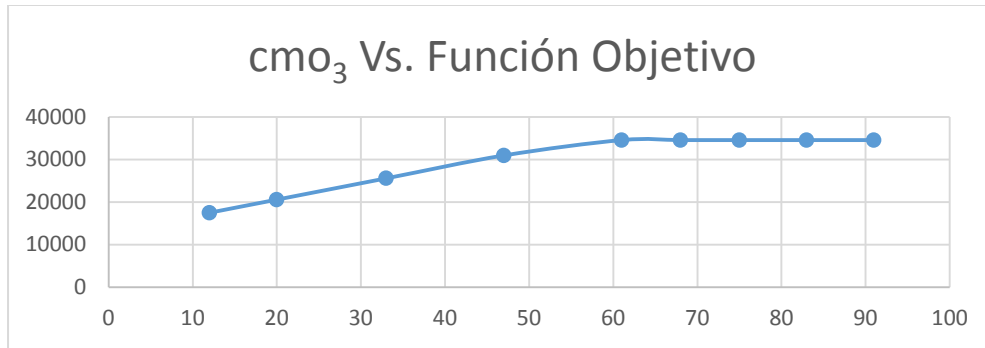


Gráfica 24. Costo de manipulación 2 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación de outer pack 3, se tomaron los datos de la Tabla 45, siendo 50 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 25.

Tabla 45. Datos costo de manipulación outer 3

cmo3	12	20	33	47	61	68	75	83	91
FO	17488	20564.9	25564.9	30949.5	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6

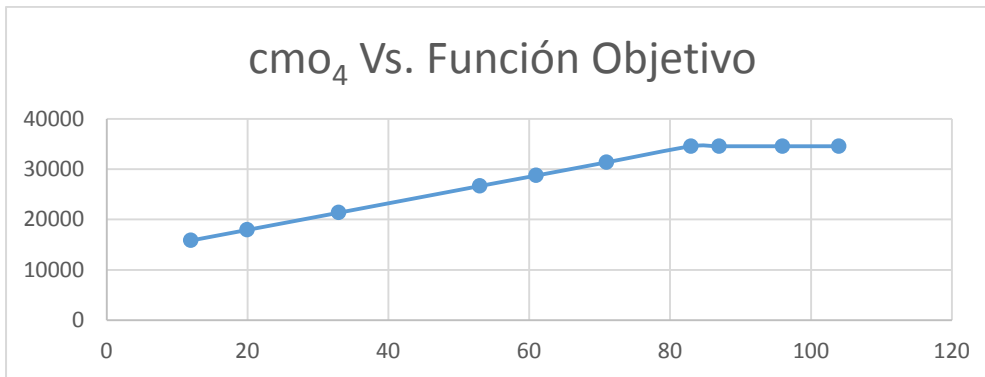


Gráfica 25. Costo de manipulación outer 3 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación outer 4, se tomaron los datos de la Tabla 46, siendo 87 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 26.

Tabla 46. Datos costo de manipulación outer 4

cmo4	12	20	33	53	61	71	83	87	96	104
FO	15844	17949	21370	26663	28738	31370	34559	34559	34559	34559

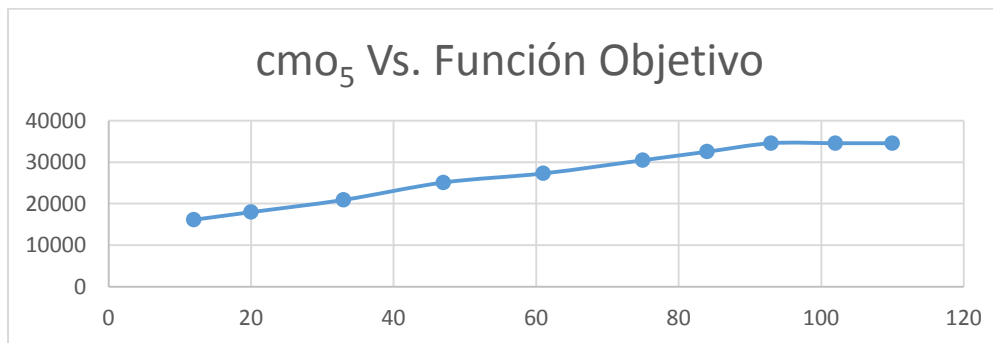


Gráfica 26. Costo de manipulación outer 4 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación outer 5, se tomaron los datos de la Tabla 47, siendo 93 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 27.

Tabla 47. Datos costo de manipulación outer 5

cmo5	12	20	33	47	61	75	84	93	102	110
FO	16151	17969	20923	25105	27287	30469	32514	34559	34559	34559



Gráfica 27. Costo de manipulación outer 5 Vs. Función objetivo

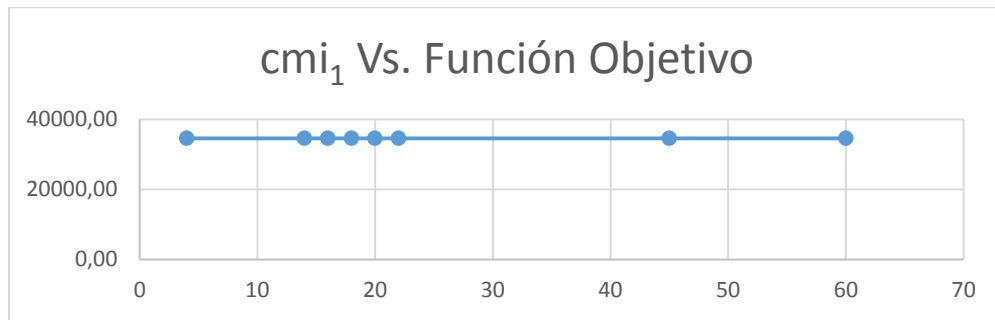
Analizando las gráficas 23, 24, 25, 25 y 27 se puede apreciar una tendencia de aumento a medida que el costo de manipulación de outer pack también aumenta, esto es causado porque siempre se va a tener una manipulación de outer pack, ya sea entregando productos en outer e inner pack. El punto de estabilidad sucede porque si un costo va a ser muy grande comparado con los demás, el modelo prefiere escoger otra ruta con el fin de minimizar la función.

### Análisis de sensibilidad para los costos de manipulación de inner pack

Para los costos de manipulación inner 1, se tomaron los datos de la Tabla 48, siendo 18 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 28.

Tabla 48. Datos costo de manipulación inner 1

cmi1	4	14	16	18	20	22	45	60
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66

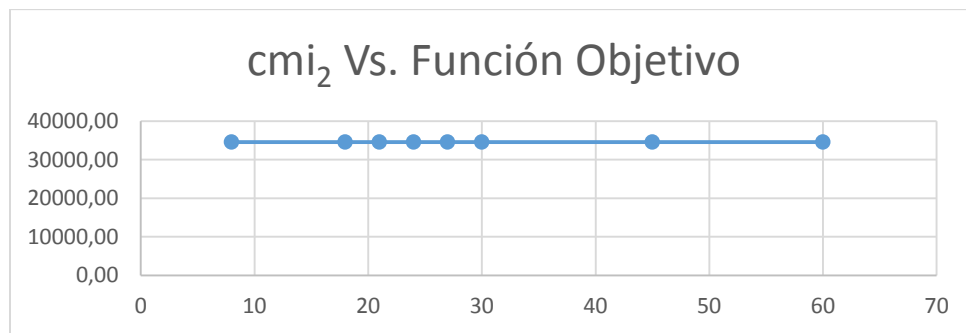


Gráfica 28. Costo de manipulación inner 1 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación inner 2, se tomaron los datos de la Tabla 49, siendo 24 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 29.

Tabla 49. Datos costo de manipulación inner 2

cmi2	8	18	21	24	27	30	45	60
FO	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6



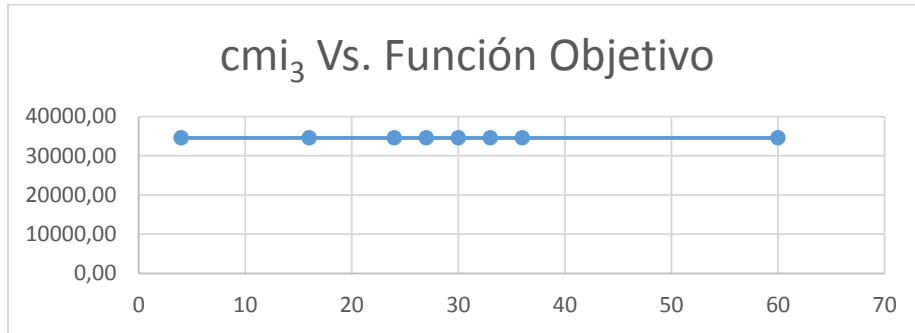
Gráfica 29. Costo de manipulación inner 2 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación inner 3, se tomaron los datos de la Tabla 50, siendo 30 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 30.



Tabla 50. Datos costo de manipulación inner 3

cmi3	4	16	24	27	30	33	36	60
FO	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66	34559.66

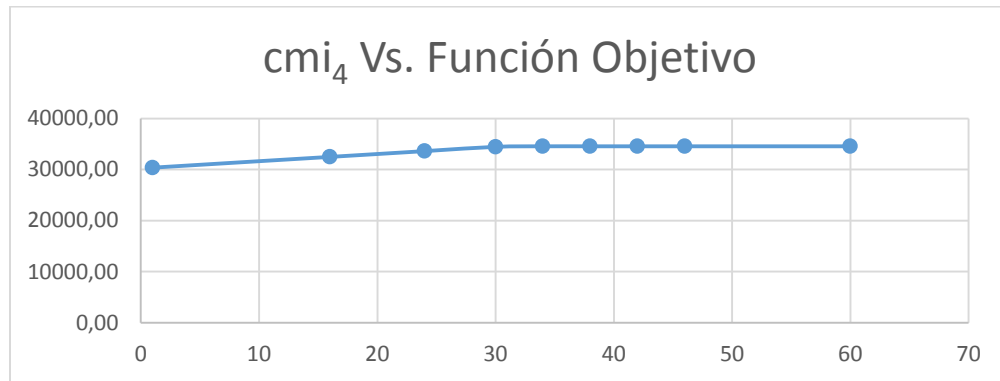


Gráfica 30. Costo de manipulación inner 3 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación inner 4, se tomaron los datos de la Tabla 51, siendo 38 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 31.

Tabla 51. Datos costo de manipulación inner 4

cmi4	1	16	24	30	34	38	42	46	60
FO	30377.4	32486.8	33611.8	34455.5	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6	34559.6

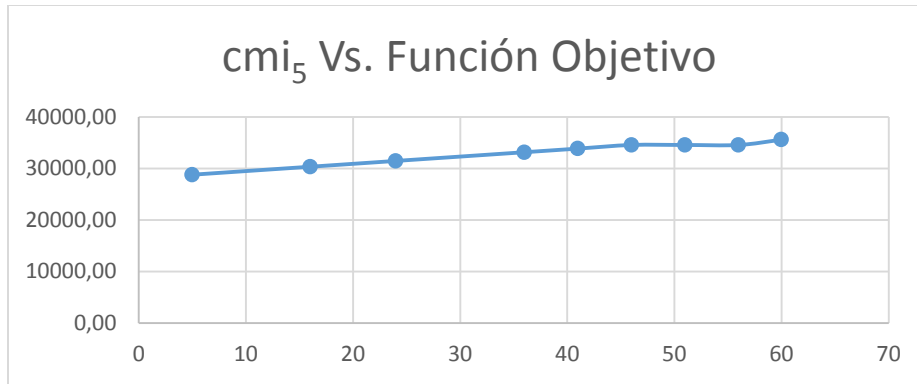


Gráfica 31. Costo de manipulación inner 4 Vs. Función objetivo

Para los costos de manipulación inner 5, se tomaron los datos de la Tabla 52, siendo 46 el valor de referencia del modelo. El comportamiento de estos datos se puede ver en la gráfica 32.

Tabla 52. Datos costo de manipulación inner 5

cmi5	5	16	24	36	41	46	51	56	60
FO	28794.0	30340.9	31465.9	33153.4	33856.5	34559.6	34559.6	34559.6	35580.5



Gráfica 32. Costo de manipulación inner 5 Vs. Función objetivo

Las gráficas 28, 29 y 30 permanecen constantes en el modelo, a causa de que la ruta por los tres primeros inner pack no es eficiente para el modelo. Por otro lado, las gráficas 31 y 32, donde los inner pack tienen mayor capacidad de producto, es necesario manipular menos los inner pack, por lo que sus costos de manipulación varían respecto a la cantidad contenida en los inners. Por otro lado, la tendencia de estas dos últimas gráficas tiene una correlación positiva débil, demostrando que este costo tiene una influencia baja sobre la Función Objetivo.

#### Situación actual de la empresa con datos reales

Al analizar los datos entregados por la empresa Logyca S.A., se pudo observar que la empresa "ABC" maneja inner pack con capacidad de empaquetar 24 unidades de consumo (homogéneos), outer pack con capacidad de embalar 16 inner pack, costo de apertura de 237.03 unidades monetarias, costo de manipulación de outer pack de 41.26 unidades monetarias, costo de manipulación de inner pack de 143.98 unidades monetarias.

Las demandas están establecidas de la siguiente manera:

- Detallistas
  - 228 detallistas con una demanda de 48726 inner pack (24 unidades de consumo)
- Institucional
  - 54 instituciones con una demanda de 3581 en inner pack (24 unidades de consumo) y 38 instituciones con una demanda de 1690 en outer pack (16 inner pack)
- Moderno
  - 200 canales modernos con una demanda de 2190 en inner pack (24 unidades de consumo) y 237 canales modernos con una demanda de 13037 en outer pack (16 inner pack)
- Tradicional
  - 29 canales tradicionales con una demanda de 620 en inner pack (24 unidades de consumo) y 233 canales tradicionales con una demanda de 126401 en outer pack (16 inner pack).

No se obtuvo un dato de la producción de la empresa "ABC", por tal motivo, en el modelo matemático se asignó una producción de 53 millones de unidades de consumo con el propósito de satisfacer la totalidad de las demandas.

Los datos entregados por la empresa consultora Logyca S.A., donde se evidencia la situación actual de la empresa, son:

**Conjuntos**

$$I = 1 \quad J = 1 \quad K = 1 \quad L = 1 \quad O = 4 \quad P = 2$$

**Parámetros**

$$s_i = 53000000$$

$$a_j: a_1 = 24$$

$$b_k: b_1 = 16$$

$$njk_{jk} =$$

	1
1	1

$$nkl_{kl} =$$

	1
1	1

$$ca_k: ca_1 = 237.03$$

$$cmo_l: cmo_1 = 41.46$$

$$cml_l: cml_1 = 14.98$$

$$d_{op}: d_{11} = 0; d_{12} = 1169424; d_{21} = 608400; d_{22} = 85944$$

$$d_{31} = 4693320; d_{32} = 52560; d_{41} = 45504360; d_{42} = 14880$$

$$M = 10000000000$$

$$nlp_{lp}:$$

	1	2
1	1	0.0625

$$rlp_{lp}:$$

	1	2
1	384	24

**Resultados obtenidos situación actual de la empresa con datos reales**

Los resultados obtenidos por el software Lp-Solve se puede ver en la ilustración 14.

```

Model name: '' - run #1
Objective: Minimize(cost)

SUBMITTED
Model size:      16 constraints,      13 variables,      28 non-zeros.
Sets:           0 GUB,                0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Found feasibility by dual simplex after      12 iter.
Relaxed solution      7270467.44313 after    12 iter is B&B base.

Feasible solution      7270467.44313 after    12 iter,      0 nodes (gap 0.0%)
Optimal solution      7270467.44313 after    12 iter,      0 nodes (gap 0.0%).
Reasonable numeric accuracy ||*|| = 1.49012e-008 (rel. error 2.22045e-016)

```

Ilustración 14. Resultados obtenidos en el software Lp-Solve de la situación actual de la empresa "ABC" con datos reales

El resultado obtenido por el modelo matemático propuesto para la situación de la empresa actual, donde se observa el comportamiento de las variables de decisión, puede observarse en la ilustración 15.

Variables	MILP Feasible	result
	7270467,44312501	7270467,44312501
x[1,1]	52128888	52128888
y[1,1]	2172037	2172037
alpha[1]	1	1
z[1,1]	135752,3125	135752,3125
beta[1]	1	1
xlop[1,1,1]	0	0
xlop[1,2,1]	1584,375	1584,375
xlop[1,3,1]	12222,1875	12222,1875
xlop[1,4,1]	118500,9375	118500,9375
xlop[1,1,2]	48726	48726
xlop[1,2,2]	3581	3581
xlop[1,3,2]	2190	2190
xlop[1,4,2]	620	620

Ilustración 15. Resultados situación actual de la empresa con datos reales

Los resultados anteriores pueden traducirse de la siguiente manera: Las 52128888.06 unidades de producto i son enviadas a empacar al inner pack 1 (único inner pack de la empresa). El alpha es igual a 1 porque solo se escogió un inner pack, siendo éste el 1. Una vez las 52128888.06 unidades son empacadas, se generan 2172037 inner pack con capacidad de 24 unidades de producto cada uno, que son enviados a embalar al outer pack 1. Al embalar los inner pack, se generan 144802.466 outer pack con capacidad de 15 inner pack cada una. El beta es igual a 1 porque sólo se escogió un outer pack, siendo éste el 1. El producto embalado es enviado al centro de distribución 1. En centro de distribución 1 se envían las diferentes cantidades y presentaciones a los clientes. Al cliente 1 del producto de tipo 1 no se envía ninguna cantidad de outer pack, al cliente 2 del producto de tipo 1 se envía una cantidad de 1584.375 outer pack, al

cliente 3 del producto tipo 1 se envía una cantidad de 112222.1875 outer pack, y al cliente 4 del producto tipo 1 se envía una cantidad de 118500.9375 outer pack. De la misma manera, del centro de distribución 1 se envía al cliente 1 del producto de tipo 2 una cantidad de 48726 inner pack, al cliente 2 del producto de tipo 2 se envía una cantidad 3581 inner pack, al cliente 3 del tipo de producto 2 se envía una cantidad de 2190 inner pack, y al cliente 4 del producto tipo 2 se envía una cantidad de 620 inner pack. Al final, la empresa entrega las unidades que son demandadas por los diferentes clientes.

**Solución propuesta con datos reales**

A continuación se muestran los datos ingresados al modelo matemático, teniendo en cuenta los datos reales entregados y modificados por la empresa consultora Logyca S.A..

**Conjuntos**

$$I = 1 \quad J = 5 \quad K = 25 \quad L = 25 \quad O = 2 \quad P = 2$$

**Parámetros**

$$s_i = 53000000$$

$$a_j: a_1 = 6; a_2 = 12; a_3 = 24; a_4 = 36; a_5 = 48$$

$$b_k: b_1 = 21; b_2 = 65; b_3 = 26; b_4 = 43; b_5 = 131$$

$$b_6 = 10; b_7 = 32; b_8 = 13; b_9 = 21; b_{10} = 65$$

$$b_{11} = 5; b_{12} = 16; b_{13} = 6; b_{14} = 10; b_{15} = 32$$

$$b_{16} = 3; b_{17} = 10; b_{18} = 4; b_{19} = 7; b_{20} = 21$$

$$b_{21} = 2; b_{22} = 8; b_{23} = 3; b_{24} = 5; b_{25} = 16$$

$$n_{jk}_{jk} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

$$n_{kl}_{kl} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$ca_k$ :  $ca_1 = 161.12$ ;  $ca_2 = 237.03$ ;  $ca_3 = 173.5$ ;  $ca_4 = 213.16$ ;  $ca_5 = 348.11$   
 $ca_6 = 161.12$ ;  $ca_7 = 237.03$ ;  $ca_8 = 173.5$ ;  $ca_9 = 213.16$ ;  $ca_{10} = 348.11$   
 $ca_{11} = 161.12$ ;  $ca_{12} = 237.03$ ;  $ca_{13} = 173.5$ ;  $ca_{14} = 213.16$ ;  $ca_{15} = 348.11$   
 $ca_{16} = 161.12$ ;  $ca_{17} = 237.03$ ;  $ca_{18} = 173.5$ ;  $ca_{19} = 213.16$ ;  $ca_{20} = 348.11$   
 $ca_{21} = 161.12$ ;  $ca_{22} = 237.03$ ;  $ca_{23} = 173.5$ ;  $ca_{24} = 213.16$ ;  $ca_{25} = 348.11$

$cmo_l$ :  $cmo_1 = 39.62$ ;  $cmo_2 = 41.46$ ;  $cmo_3 = 39.81$ ;  $cmo_4 = 40.54$ ;  $cmo_5 = 44.23$   
 $cmo_6 = 39.62$ ;  $cmo_7 = 41.46$ ;  $cmo_8 = 39.81$ ;  $cmo_9 = 40.54$ ;  $cmo_{10} = 44.23$   
 $cmo_{11} = 39.62$ ;  $cmo_{12} = 41.46$ ;  $cmo_{13} = 39.81$ ;  $cmo_{14} = 40.54$ ;  $cmo_{15} = 44.23$   
 $cmo_{16} = 39.62$ ;  $cmo_{17} = 41.46$ ;  $cmo_{18} = 39.81$ ;  $cmo_{19} = 40.54$ ;  $cmo_{20} = 44.23$   
 $cmo_{21} = 39.62$ ;  $cmo_{22} = 41.46$ ;  $cmo_{23} = 39.81$ ;  $cmo_{24} = 40.54$ ;  $cmo_{25} = 44.23$

$cmi_l$ :  $cmi_1 = 12.96$ ;  $cmi_2 = 13.69$ ;  $cmi_3 = 14.98$ ;  $cmi_4 = 16.28$ ;  $cmi_5 = 17.75$   
 $cmi_6 = 12.96$ ;  $cmi_7 = 13.69$ ;  $cmi_8 = 14.98$ ;  $cmi_9 = 16.28$ ;  $cmi_{10} = 17.75$   
 $cmi_{11} = 12.96$ ;  $cmi_{12} = 13.69$ ;  $cmi_{13} = 14.98$ ;  $cmi_{14} = 16.28$ ;  $cmi_{15} = 17.75$   
 $cmi_{16} = 12.96$ ;  $cmi_{17} = 13.69$ ;  $cmi_{18} = 14.98$ ;  $cmi_{19} = 16.28$ ;  $cmi_{20} = 17.75$   
 $cmi_{21} = 12.96$ ;  $cmi_{22} = 13.69$ ;  $cmi_{23} = 14.98$ ;  $cmi_{24} = 16.28$ ;  $cmi_{25} = 17.75$

$d_{op}$ :  $d_{11} = 0$ ;  $d_{12} = 1169424$ ;  $d_{21} = 608400$ ;  $d_{22} = 85944$   
 $d_{31} = 4693320$ ;  $d_{32} = 52560$ ;  $d_{41} = 45504360$ ;  $d_{42} = 14880$

$M = 10000000000$

$nlp_{lp}$  :

	1	2
1	1	0.0476190
2	1	0.0153846
3	1	0.0384615
4	1	0.0232558
5	1	0.0076336
6	1	0.1000000
7	1	0.0312500
8	1	0.0769231
9	1	0.0476190
10	1	0.0153846
11	1	0.2000000
12	1	0.0625000
13	1	0.1666667
14	1	0.1000000
15	1	0.0312500
16	1	0.3333333
17	1	0.1000000
18	1	0.2500000
19	1	0.1428571
20	1	0.0476190
21	1	0.5000000
22	1	0.1250000
23	1	0.3333333
24	1	0.2000000
25	1	0.0625000

$rlp_{lp}$ :

	1	2
1	126	6
2	390	6
3	156	6
4	258	6
5	786	6
6	120	12
7	384	12
8	156	12
9	252	12
10	780	12
11	120	24
12	384	24
13	144	24
14	240	24
15	768	24
16	108	36
17	360	36
18	144	36
19	252	36
20	756	36
21	96	48
22	384	48
23	144	48
24	240	48
25	768	48

## Solución propuesta con datos reales

El resultado del software Lp-Solve al problema de empaquetamiento diseñado por los estudiantes, se puede observar en la ilustración 16.

```

Model name: '' - run #1
Objective: Minimize(cost)

SUBMITTED
Model size:      96 constraints,      885 variables,      600 non-zeros.
Sets:           0 GUB,              0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Found feasibility by dual simplex after      51 iter.
Relaxed solution 4023905.42175 after      51 iter is B&B base.

Feasible solution 9363869.76187 after      108 iter,      2 nodes (gap 132.7%)
Improved solution 7432574.48029 after      112 iter,      3 nodes (gap 84.7%)
Improved solution 5502990.53863 after      179 iter,     15 nodes (gap 36.8%)
Improved solution 4580075.98062 after      241 iter,     33 nodes (gap 13.8%)
Improved solution 4311137.00017 after      399 iter,     60 nodes (gap 7.1%)
Improved solution 4090912.60562 after      407 iter,     64 nodes (gap 1.7%)

Optimal solution 4090912.60562 after      407 iter,     64 nodes (gap 1.7%).
Reasonable numeric accuracy ||*|| = 1.49012e-008 (rel. error 1.42926e-016)
    
```

Ilustración 16. Solución propuesta con datos reales en Lp-Solve

Los resultados para las variables del problema, desarrollado por el software Lp-Solve se pueden apreciar en la ilustración 17.

Variables	MILP Better	result
	4090912.606	4090912.606
x[1,5]	52128888	52128888
y[5,25]	1086018.5	1086018.5
alpha[5]	1	1
z[25,25]	67876.15625	67876.15625
beta[25]	1	1
xlop[25,1,1]	0	0
xlop[25,2,1]	792.1875	792.1875
xlop[25,3,1]	6111.09375	6111.09375
xlop[25,4,1]	59250.46875	59250.46875
xlop[25,1,2]	24363	24363
xlop[25,2,2]	1790.5	1790.5
xlop[25,3,2]	1095	1095
xlop[25,4,2]	310	310

Ilustración 17. Solución variable de decisión modelo propuesto con datos reales.

Los resultados anteriores pueden traducirse de la siguiente manera: Las 52128888 unidades de producto  $i$  son enviadas a empacar al inner pack 5. El  $\alpha$  es igual a 1 porque solo se escogió un inner pack, siendo éste el 5. Una vez las 52128888 unidades son empacadas, se generan 1086018.5 inner pack con capacidad de 48 unidades de producto cada uno, que son enviados a embalar al outer pack 25. Al embalar los inner pack, se generan 678876.15625 outer pack con

capacidad de 16 inner pack cada una. El beta es igual a 1 porque solo se escogió un outer pack, siendo éste el 25. El producto embalado es enviado al centro de distribución 1. En centro de distribución 1 se envían las diferentes cantidades y presentaciones a los clientes. Al cliente 1 del producto de tipo 1 no se envía ninguna cantidad de outer pack, al cliente 2 del producto de tipo 1 se envía una cantidad de 792.1875 outer pack, al cliente 3 del producto tipo 1 se envía una cantidad de 6111.09375 outer pack, y al cliente 4 del producto tipo 1 se envía una cantidad de 59250.46875 outer pack. De la misma manera, del centro de distribución 1 se envía al cliente 1 del producto de tipo 2 una cantidad de 24363 inner pack, al cliente 2 del producto de tipo 2 se envía una cantidad 1790.5 inner pack, al cliente 3 del tipo de producto 2 se envía una cantidad de 1095 inner pack, y, al cliente 4 del producto tipo 2 se envía una cantidad de 310 inner pack. Al final, la empresa entrega las unidades que son demandadas por los diferentes clientes.

### **Análisis general de resultados**

Para los datos de  $b_k$ , se tomaron los volúmenes de los outer e inner pack con el fin de determinar la cantidad de inner pack que puede ser contenido por un outer pack. Luego de determinar las capacidades para cada outer pack, las matrices de conversión a unidades  $nlp_{tp}$  y  $rlp_{tp}$ , también modificaron sus valores como se puede apreciar en los datos ingresado al modelo propuesto con datos reales.

Como primera observación a los resultados obtenidos con la situación actual de la empresa y la propuesta, se puede evidenciar una disminución en los costos totales. En los datos actuales de la empresa se tiene un costo total de \$7'270467.4431, mientras que en la solución propuesta se tiene un costo total de \$4'090912.606. Lo anterior se debe a varias razones:

- La empresa actualmente está limitada en hallar una optimización en sus costos totales, debido a que tradicionalmente han trabajado con un tipo de inner y outer pack definido para cualquier demanda.
- La solución propuesta busca optimizar los recursos por medio de la relación cantidad/costo, es decir, se busca abarcar la mayor cantidad de unidades de consumo en inner pack con el fin de disminuir los costos de manipulación tanto de inner pack como de outer pack y costos de apertura.
- Esta solución es abordada de acuerdo a las recomendaciones establecidas por la empresa "ABC", la cual es diseñar el inner y outer pack con las características necesarias para minimizar los costos totales en las operaciones de la empresa. Por otro lado, se quiso romper el paradigma de un solo diseño de inner y outer pack, y buscar otros posibles resultados que el programa nos ofrece. Estos resultados pueden ser vistos en la Ilustración 18.

En la ilustración 18 se puede observar una disminución en los costos totales. Este costo total es \$ 4'006292.401, que se obtuvo mediante el diseño de dos inner y outer pack. El primer conjunto es un inner pack (número 1) con una capacidad de 6 unidades para un outer pack (número 5) con capacidad de 131 inner pack tipo 1. El segundo conjunto es un inner pack (número 5) con una capacidad de 48 unidades para un outer pack (Número 25) con una capacidad de 16 inner pack tipo 5. Para los clientes que demandan



del producto de tipo 1 (outer pack), el modelo sugiere enviar inner pack de 6 unidades en outer pack con capacidad de 131 inner pack, ya que los costos de manipulación de inner pack y de apertura de outer pack no serán de gran influencia para esta demanda. Para los clientes que demandan del producto tipo 2 (inner pack), el modelo sugiere enviar inner pack con capacidad de 48 unidades en outer pack con capacidad de 16 inner pack, ya que lo importante para esta demanda es suplir la cantidad de producto en un número mínimo de inner y outer pack, y minimizar los costos de apertura de outer pack y manipulación de inner pack.

Variables	MILP Better	result
	4006292,401	4006292,4
x[1,1]	50806080	50806080
x[1,5]	1302808	1302808
y[1,5]	8467680	8467680
y[5,25]	27141,83333	27141,8333
alpha[1]	1	1
alpha[2]	1	1
alpha[3]	1	1
alpha[4]	1	1
alpha[5]	1	1
z[5,5]	64638,77863	64638,7786
z[25,25]	1696,364583	1696,36458
beta[2]	1	1
beta[4]	1	1
beta[5]	1	1
beta[10]	1	1
beta[25]	1	1
xlop[5,1,1]	0	0
xlop[5,2,1]	774,0458015	774,045802
xlop[5,3,1]	5971,145038	5971,14504
xlop[5,4,1]	57893,58779	57893,5878
xlop[25,1,2]	24363	24363
xlop[25,2,2]	1373,833333	1373,83333
xlop[25,3,2]	1095	1095
xlop[25,4,2]	310	310

Ilustración 18. Resultado de datos con posibilidad de cinco inner y outer pack

Como no se tiene un dato real del costo total de producción, no se sabe si producir dos tipos diferentes de inner y outer pack sea beneficioso, de igual manera, se espera que esta decisión o resultado que se obtuvo se tenga en cuenta en un futuro.

## CAPITULO 7

### Resultados algoritmo genético con datos propuestos

Para el desarrollo del problema por medio de la herramienta utilizada, algoritmo genético, se plantearon dos posibles métodos para su solución. Estos métodos son:

#### **Método Completo**

El método completo soluciona el problema de una manera rápida, en donde el usuario sólo ingresa el número de generaciones y el tipo de método de selección, ya sea de forma aleatoria o por torneo.

Para un mejor entendimiento se quiso realizar el método completo “paso a paso”, donde se busca que el usuario comprenda los procedimientos que se realizan para desarrollar la herramienta propuesta. Este procedimiento se explica a continuación.

#### ***Método paso a paso***

El método “paso a paso” nos permite como usuarios ver como es el procedimiento del algoritmo genético en relación a la generación de la población entera y binaria, la generación de los costos de la población, la selección del método por el cual se quiere resolver el algoritmo y obtener la solución dada.

Para este método se siguieron los siguientes pasos:

1. Se ingresó un número de X generaciones
2. Se generó la población entera
3. Se generó la población binaria
4. Se generaron los costos de la población
5. Se selecciona el método (aleatorio o torneo)
6. Se selecciona “solución”
7. Se obtiene la solución

Con los pasos anteriores se corrió el modelo en diferentes situaciones y se obtuvieron los siguientes resultados que se pueden visualizar en la Tabla 53. Las mutaciones son realizadas por el programa de manera automática cada 10 generaciones, con la finalidad de buscar nuevos espacios de solución.

Tabla 53. Resultado algoritmo genético por medio del método “paso a paso”.

Generaciones	Método selección	Solución						
		Tipo Inner	Tipo Outer	% de apertura	Cantidad Inner enviadas	Cantidad Outer enviados	Unidades sobrante	Costo total
50	torneo	31	48	3%	56	93	19	12033
100	torneo	31	48	4%	71	92	19	12780
150	torneo	10	32	0%	20	140	0	11820
200	torneo	50	41	5%	52	106	0	13733
50	aleatorio	18	45	3%	75	97	0	12007
100	aleatorio	10	41	0%	31	109	0	10554
150	aleatorio	31	48	2%	41	94	19	11286
200	aleatorio	25	30	1%	24	148	0	12840

Teniendo en cuenta que la demanda es en unidades de producto y no existe una dependencia de esta demanda tanto para inner y outer pack, el método que mejor se ajusta a este primer modelo es el método de selección aleatoria, ya que muestra una mejor optimización en los costos totales, aunque relativamente semejante al método por torneo.

Se puede observar que para los dos métodos de selección el porcentaje de apertura es mínimo, ya que de esta forma se eliminan los costos de apertura y manipulación de inner pack.

El rango de escogencia para los inner pack están entre 10 y 30; mientras que para los outer pack, el rango de escogencia está entre 30 y 50, es decir, se busca abarcar la mayor cantidad de producto en ambos casos.

El programa busca no dejar unidades de consumo sin empacar con el fin de no incurrir en los costos de inventario que se tendrían por cada unidad.

El número de generaciones no representa gran influencia para este tipo de método, tanto para selección aleatoria como para selección por torneo.

### **Método de mejores candidatos**

Para el desarrollo de los mejores candidatos se desarrollaron los siguientes pasos:

1. Se ingresó un número de X generaciones para la producción de los mejores candidatos
2. Se generó una población con mejores candidatos
3. Se ingresó un número Y de generaciones para desarrollar el modelo
4. Se seleccionó el método (aleatorio o torneo)
5. Se seleccionó “solución”
6. Se obtuvo la solución

Al igual que el método completo, la mutación se realiza cada 10 generaciones. Se realizaron diferentes pruebas con el fin de observar los nuevos espacios de solución que genera este método. La solución puede ser observada en la Tabla 54.

Tabla 54. Resultados algoritmo genético por medio del método de población con mejores candidatos

Generaciones para mejores candidatos	Generaciones para solucionar modelo	Método selección	Solución						
			Tipo Inner	Tipo Outer	% de apertura	Cantidad Inner enviadas	Cantidad Outer enviados	Unidades sobrante	Costo total
5	25	torneo	29	50	0%	4	91	21	9244
10	50	torneo	39	49	0%	1	96	33	9560
25	75	torneo	45	45	0%	0	100	0	9400
30	100	torneo	15	46	0%	0	100	0	9500
5	25	aleatorio	24	46	0%	13	98	0	9800
10	50	aleatorio	9	46	0%	2	98	0	9356
25	75	aleatorio	9	45	0%	0	100	0	9400
30	100	aleatorio	25	50	0%	0	90	0	8910

En la Tabla 54 se puede evidenciar que los inner pack escogidos son muy dispersos, pero los outer pack tienden a ser de gran tamaño, ya que se encuentran en un rango de 45 a 50.

Para esta solución no es importante abrir ningún tipo de outer pack, ya que se evita incurrir en los costos de manipulación de inner pack y apertura de outer pack. Las cantidades enviadas de inner pack son sobrantes que no se embalaron en los outer pack establecidos, y las unidades sobrantes se representarán como inventarios que no se empacaron en los inner pack.

Los costos totales obtenidos tanto por el método de selección por torneo y aleatorio son semejantes. El costo total mínimo fue obtenido por medio del método aleatorio.

### Resultados algoritmo genético con datos reales

Para el desarrollo del algoritmo genético con datos reales se hicieron modificaciones en el código de Visual Basic. Estas modificaciones tienen lugar en la demanda (inner y outer pack), volúmenes (inner y outer pack), costos y capacidades, todos asociados a los datos reales. En cuanto a la estructura funcional del modelo, se tiene el mismo procedimiento para resolver el problema.

En la demanda se realizó una restricción de entrega de productos en las diferentes presentaciones (inner y outer pack), en donde, el objetivo principal es entregar el porcentaje correspondiente a la demanda para cada presentación, con el propósito de que el porcentaje de apertura de outer pack, corresponda a la demanda establecida en inner pack.

Los nuevos parámetros que se tienen en este modelo son:

- Una demanda de inner pack de 1'322.808 unidades de producto de consumo, que significa una 2.54% de la demanda total
- Una demanda de outer pack de 50'706.080 unidades de producto de consumo, que significa un 97.46% de la demanda total

- Se tiene 50 nuevos volúmenes y costos asociados a datos reales para inner y outer pack, y una nueva matriz de capacidades, los cuales se pueden ver en el archivo de Microsoft Excel, ALGORITMO GENÉTICO DATOS REALES, hoja, SHEET 1.

El resultado para el algoritmo genético con datos reales se puede visualizar en la Tabla 55 y 56.

Tabla 55. Resultado algoritmo genético con datos reales por medio del método completo

Generaciones para solucionar el modelo	Método de selección	Solución						
		Tipo inner	Tipo outer	% apertura	Cantidad Inner enviadas	Cantidad Outer enviados	Unidades sobrantes	Costo total
50	Torneo	31	30	7%	117727	62554	9	6466773.17
100	Torneo	46	28	6%	67996	71016	32	6827434.93
150	Torneo	50	30	7%	72992	64639	38	6081365.33
200	Torneo	37	44	3%	42284	44084	32	3437104.02
50	Aleatorio	14	43	3%	111812	45146	0	4345429.65
100	Aleatorio	12	48	3%	130424	40130	0	4350332.57
150	Aleatorio	42	47	4%	49670	41086	0	3683461.79
200	Aleatorio	48	45	7%	76050	42082	24	4930962.9

Tabla 56. Resultado algoritmo genético con datos reales por medio del método de mejores candidatos

Generación para mejores candidatos	Generaciones para solucionar el modelo	Método de selección	Solución						
			Tipo inner	Tipo outer	% apertura	Cantidad Inner enviadas	Cantidad Outer enviados	Unidades sobrantes	Costo total
5	25	Torneo	48	35	3%	32601	55443	24	3819737.32
10	50	Torneo	44	41	2%	23723	48376	20	3117146.75
25	75	Torneo	17	47	10%	306717	38329	3	8399484.17
30	100	Torneo	25	31	3%	62563	63206	13	4532790.73
5	25	Aleatorio	43	47	3%	36383	41997	31	3289761.1
10	50	Aleatorio	12	36	5%	217250	52908	0	6591997.86
25	75	Aleatorio	41	43	6%	76308	44264	12	4740277.39
30	100	Aleatorio	44	22	5%	59246	86577	20	6234946.38

Tanto para el método completo como para el de mejores candidatos se realizaron diferentes generaciones con el propósito de observar si al aumentar este factor se generaba una tendencia en los datos. En la Tabla 55 se puede ver que en el método de selección por torneo, el número de generaciones establecidas es independiente al valor de la función objetivo. De igual manera, el método aleatorio presenta dicha independencia con la diferencia de que los valores de la función objetivo son eficientes, es decir, presentan un costo mínimo a comparación con los resultados obtenido en el método por torneo.

Por otro lado, en la Tabla 56, se usaron distintas iteraciones para generar la población de mejores candidatos. La cantidad de generaciones establecidas fueron números relativamente pequeños, ya que si el número es grande la solución tardaría mucho tiempo para ser obtenida, por tanto, el algoritmo es ineficiente en relación a recursos de tiempo. Una vez se obtuvo la población de mejores candidatos, se seleccionaron diferentes números de generaciones para solucionar el modelo con el propósito de encontrar una tendencia en la solución.

Con los resultados obtenidos no se puede deducir cuál de los dos métodos podría ser más eficiente que otro. Por tal motivo, no se puede decir que el número de generaciones ni el método de selección influyen dentro de una solución eficiente. Dado esto, se realizará en el capítulo 7, el diseño de experimentos, con el fin de determinar cuál es la mejor combinación de parámetros para encontrar una solución óptima al problema presentado.

### **Análisis de sensibilidad método completo**

Los resultados obtenidos en el método completo se pueden observar en la Tabla 57 para el método de selección por torneo, y en la Tabla 58 se puede ver los resultados del método completo por medio del método de selección aleatoria.

Tabla 57. Resultados análisis de sensibilidad por medio del método completo por selección por torneo para el algoritmo genético con datos reales

Corrida	Método	Generaciones	Método de selección	% apertura	Costo total	Promedio Costo Total
1	Completo	300	torneo	0.00%	2393237.21	2922140.097
2	Completo	300	torneo	0.00%	4336820.586	
3	Completo	300	torneo	0.00%	2036362.496	
4	Completo	300	torneo	2.54%	3652690.879	3086518.652
5	Completo	300	torneo	2.54%	2651941.721	
6	Completo	300	torneo	2.54%	2954923.356	
7	Completo	300	torneo	5.00%	8125732.891	6806802.778
8	Completo	300	torneo	5.00%	5328781.132	
9	Completo	300	torneo	5.00%	6965894.312	

Tabla 58. Resultado análisis de sensibilidad por medio del método completo por selección aleatorio para el algoritmo genético con datos reales

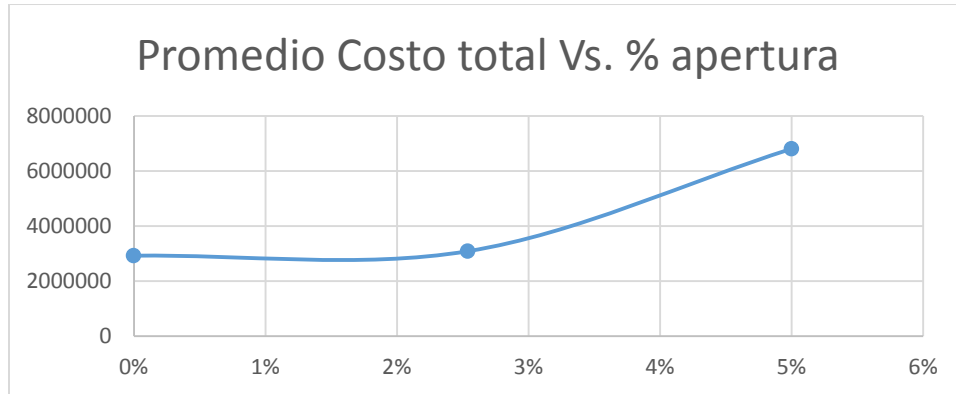
Corrida	Método	Generaciones	Método de selección	% apertura	Costo total	Promedio Costo Total
1	Completo	300	Aleatorio	0.00%	3495600.522	3152034.036
2	Completo	300	Aleatorio	0.00%	2641142.736	
3	Completo	300	Aleatorio	0.00%	3319358.851	
4	Completo	300	Aleatorio	2.54%	3825898.999	4278550.94
5	Completo	300	Aleatorio	2.54%	3379732.228	
6	Completo	300	Aleatorio	2.54%	5630021.593	
7	Completo	300	Aleatorio	5.00%	7259156.365	7098333.289
8	Completo	300	Aleatorio	5.00%	5028017.545	
9	Completo	300	Aleatorio	5.00%	9007825.958	

Se generaron 3 corridas para cada porcentaje de apertura, y en cada una de ellas se realizaron 300 iteraciones. Con el costo total para cada porcentaje de apertura, se obtuvo el promedio a fin de realizar un análisis de sensibilidad y observar el comportamiento del modelo con diferentes porcentajes. Se escogieron 2 porcentajes equidistantes del porcentaje referencia, 2.54%, con la

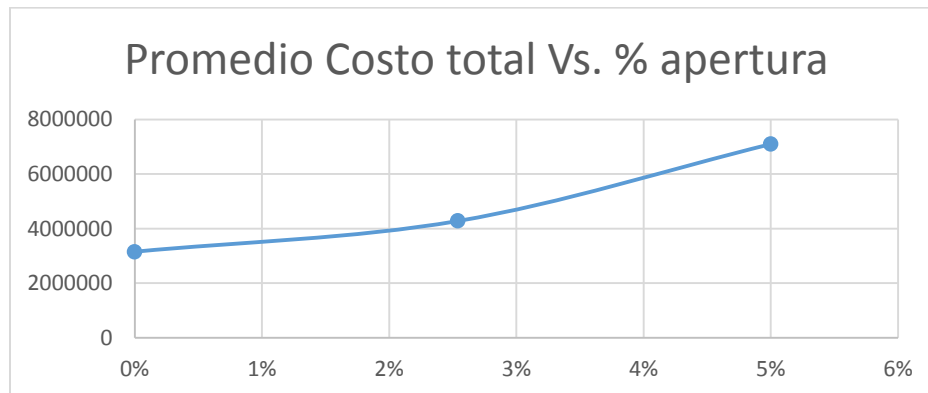
finalidad de observar la tendencia del modelo. Este proceso se realizó para los dos métodos propuestos, método de selección por torneo y método aleatorio.

### **Comportamiento gráfico**

Para los análisis de sensibilidad de las Tabla 57 y 58, se tomaron los promedios de los tres diferentes porcentajes de apertura propuestos. El comportamiento para la Tabla 57 se puede observar en la gráfica 33, y para la Tabla 58 se puede observar en la gráfica 34.



Gráfica 33. Análisis de sensibilidad para el método completo por selección por torneo



Gráfica 34. Análisis de sensibilidad para el método completo por selección aleatoria

Se puede observar un comportamiento ascendente en ambas gráficas. Este comportamiento comprueba que a medida que al modelo se le exige abrir menos cajas (0%), su costo es menor, ya que no incurre en los costos de manipulación de inner pack y apertura de outer pack, pero si el porcentaje de apertura aumenta (5%), su costo también, debido a que se tienen que abrir más outer pack y a su vez manipular más inner pack.

### **Análisis de sensibilidad método selección de mejores candidatos**

Los resultados obtenidos en el método de selección de mejores candidatos se pueden observar en la Tabla 59 para el método de selección por torneo, y en la Tabla 60 se puede ver los resultados del método de selección de mejores candidatos por medio del método de selección aleatoria.

Tabla 59. Resultado análisis de sensibilidad método mejores candidatos por selección por torneo

Corrida	Método	Generaciones		Método de selección	% apertura	Costo total	Promedio Costo Total
		Población mejores candidatos	Solución				
1	Mejores candidatos	10	300	Torneo	0.00%	1906033.68	1915015.323
2	Mejores candidatos	10	300	Torneo	0.00%	1904398.653	
3	Mejores candidatos	10	300	Torneo	0.00%	1934613.637	
4	Mejores candidatos	10	300	Torneo	2.54%	2482475.72	2574446.237
5	Mejores candidatos	10	300	Torneo	2.54%	2868775.45	
6	Mejores candidatos	10	300	Torneo	2.54%	2372087.54	
7	Mejores candidatos	10	300	Torneo	5.00%	3328769.281	3045159.523
8	Mejores candidatos	10	300	Torneo	5.00%	2766508.599	
9	Mejores candidatos	10	300	Torneo	5.00%	3040200.688	

Tabla 60. Resultado análisis de sensibilidad método mejores candidatos por selección aleatoria

Corrida	Método	Generaciones		Método de selección	% apertura	Costo total	Promedio Costo Total
		Población mejores candidatos	Solución				
1	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	0.00%	1939298.789	1939657.136
2	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	0.00%	1940374.429	
3	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	0.00%	1939298.189	
4	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	2.54%	2658294.352	2730942.035
5	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	2.54%	2962007.678	
6	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	2.54%	2572524.076	
7	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	5.00%	3162171.086	3440996.168
8	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	5.00%	3608511.295	
9	Mejores candidatos	5	300	Aleatorio	5.00%	3552306.124	

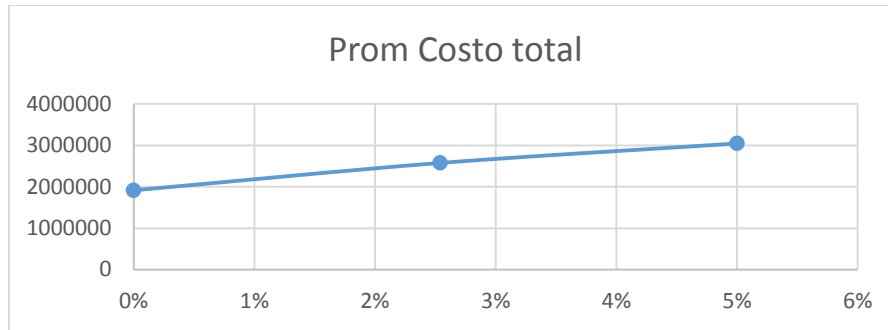
Se generaron 3 corridas para cada porcentaje de apertura, y en cada una de ellas se realizaron 5 iteraciones para hallar la población con mejores candidatos, y 300 iteraciones para hallar la solución. Con el costo total para cada porcentaje de apertura, se obtuvo el promedio a fin de realizar un análisis de sensibilidad y observar el comportamiento del modelo con diferentes porcentajes. Se escogieron 2 porcentajes equidistantes del porcentaje referencia, 2.54%, con la finalidad de observar la tendencia del modelo. Este proceso se realizó para los dos métodos propuestos, método de selección por torneo y método aleatorio.

Se puede evidenciar una mejora total en los costos del método de mejores candidatos, a comparación de los costos del método completo. Lo anterior se debe a que el método de mejores candidatos iniciará su desarrollo con una población que es solución al método completo, la cual siempre será más destacada que la población de dicho método.

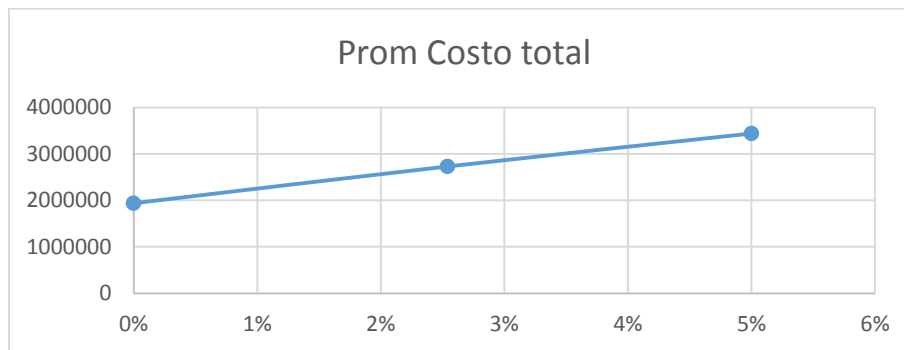
### **Comportamiento gráfico**

Para los análisis de sensibilidad de las Tablas 59 y 60, se tomaron los promedios de los tres diferentes porcentajes de apertura propuestos. El comportamiento para la Tabla 59 se puede observar en la gráfica 35, y para la Tabla 60 se puede observar en la gráfica 36.





Gráfica 35. Análisis de sensibilidad método mejores candidatos por selección por torneo



Gráfica 36. Análisis de sensibilidad método mejores candidatos por selección aleatoria

Los comportamientos de las gráficas 35 y 36 presentan ciertas semejanzas en el comportamiento de las gráficas 33 y 34. Esto quiere decir que el costo de manipulación de inner pack y el costo de apertura de outer pack se hará cada vez menor o mayor dependiendo del porcentaje de apertura que se desee. La diferencia entre los dos métodos evaluados es que el método de mejores candidatos tendrá siempre un mejor espacio de búsqueda, debido a que su población es solución del método completo.

## CAPITULO 8

### Comparación de métodos de solución: Modelo cuantitativo y Herramienta Meta-heurística

Luego de obtener una solución aproximada (relajada) por medio del modelo cuantitativo para cinco diferentes tipos de inner pack y cinco diferentes tipos de outer pack, se modeló la herramienta meta-heurística con los mismos datos a fin de observar cuál de los dos modelos tiene una mejor solución.

La comparación de los modelos puede observarse en la Tabla 61, donde los dos métodos propuestos comparten las mismas características en cuanto al tipo de inner pack y outer pack para cada solución. El tipo de inner pack 48 significa que ese inner pack tiene capacidad de empacar 48 unidades de producto homogéneo; por otro lado, el tipo de outer pack 30 tiene capacidad de embalar 16 inner pack de 48 unidades.

Tabla 61. Comparación del modelo cuantitativo y la herramienta meta-heurística para 5 tipos diferentes de Inner y Outer pack

Método	Cantidad de Inner Pack	Cantidad de Outer Pack	Tipo de Inner Pack	Tipo de Outer Pack
Modelo Cuantitativo	5	5	48	30
Algoritmo Genético	5	5	48	30

Método	% Outer Pack A Abrir	% Outer Pack Cerrado	Cantidad total de Inners Pack entregados	Unidades de Ventas Entregadas	Inners Packs contenidas en Outers Packs
Modelo Cuantitativo	2.54%	97.46%	1086018.5	52128888	16
Algoritmo Genético	3%	97%	1086018	52128864	16

Método	Total Unidad Venta Sobrante	Cantidad de Outer Pack antes de abrir	Cantidad de Inner Pack sobrante	Total de Outer Pack a abrir	Total de Outer Pack cerrados	Total Inner Pack manipulados
Modelo Cuantitativo	0	67876.15625	0	1722.40625	66153.73	27558.5
Algoritmo Genético	24	67876	2	2036	65839	32594

Método	Costo Inventario de Unidad de Venta sobrante	Costo Manipulación Outer Pack	Costo Apertura de Outer Pack	Costo manipulación Inner Pack	Costo Total
Modelo Cuantitativo	\$ -	\$ 3,002,162.39	\$ 599,586.84	\$ 489,163.38	\$ 4,090,912.61
Algoritmo Genético	\$ 72.00	\$ 3,002,154.80	\$ 708,751.95	\$ 578,543.37	\$ 4,289,522.12

El costo total para el método cuantitativo es menor que el del algoritmo genético. Esto es porque dicho método es desarrollado en forma relajada, es decir que permite resolver el problema de forma continua, aunque a su vez dificulta tomar una decisión inmediata y óptima. Al ser restricciones de capacidad, decidir si aproximar al valor mayor o menor de las variables de decisión continuas arrojadas por el modelo cuantitativo, puede alterar el resultado final con la posibilidad de escoger una solución no óptima. Dado lo anterior, se realizó el algoritmo genético, el cual nos aborda una solución entera, siendo ésta la solución más óptima para el problema.

Como también se observa en la Tabla 61, hay una diferencia de 313.6 outer packs a abrir para el algoritmo genético, en comparación al modelo cuantitativo. La decisión del porcentaje de outer packs que deben abrirse es significativamente influyente en los costos totales, ya que se incurre en más costos de manipulación.

Los tiempos de ejecución de ambos modelos se presentan en la tabla 62. Ésta muestra que el modelo cuantitativo es mucho más rápido en conseguir una solución al problema. Este tiempo corto se debe a que el modelo se realizó de una forma relajada y a que la cantidad de los datos del problema no es significativa. Por otro lado, se observa que el recurso computacional influye en el tiempo de ejecución, ya que para encontrar una solución al algoritmo genético, los tiempos varían dependiendo del computador del cual se realicen. El algoritmo genético tiene una duración mayor, ya que el código programado tiene un proceso a seguir para la solución del problema, estos procesos son: inicio de población binaria y entera, selección, cruce, mutación, número de iteraciones y validación de los individuos.

Tabla 62. Comparación en tiempo de ejecución de los dos métodos propuestos

Recurso computacional	Especificaciones	Tiempo Modelo cuantitativo (Seg)	% GAP Modelo Cuantitativo	Tiempo Algoritmo Genético (Seg)
Sony Vaio (VGN-CR360F)	Memoria RAM 2 Gb	0.07	1.7%	85
Macbook Pro	Memoria RAM 4 Gb	0.07	1.7%	34

Dado lo anterior, se trabajaron ambos métodos con una cantidad representativa, cincuenta (50) tipos de inner y outer pack diferentes. Los resultados obtenidos por medio del modelo cuantitativo se pueden ver en la ilustración 19, y para el algoritmo genético los resultados se muestran en la Tabla 63.

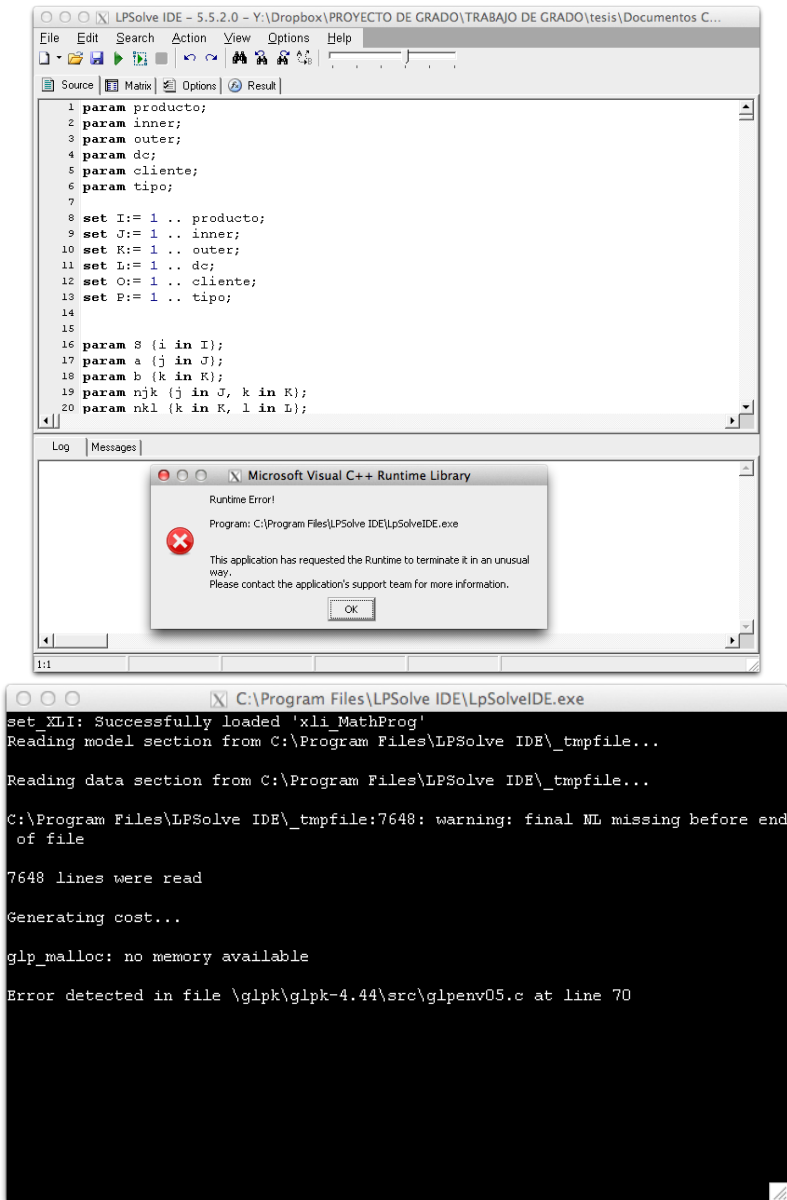


Ilustración 19. Resultados obtenidos por medio del modelo cuantitativo para 50 tipos diferentes de inner y outer pack

Tabla 63. Resultados obtenidos por medio del Algoritmo Genético para los métodos de selección por torneo y aleatorio, para un total de 200 iteraciones con 50 tipos diferentes de inner y outer pack.

Método		Cantidad de Inner Pack	Cantidad de Outer Pack	Tipo de Inner Pack	Tipo de Outer Pack
Algoritmo Genético	Selección por Torneo	50	50	46	50
	Selección Aleatoria	50	50	46	42
	Selección por Torneo	50	50	47	45

Método		% Outer Pack A Abrir	% Outer Pack Cerrado	Cantidad total de Inners Pack entregados	Unidades de Ventas Entregadas	Inners Packs contenidas en Outers Packs
Algoritmo Genético	Selección por Torneo	3%	97%	1133236	52128856	28
	Selección Aleatoria	5%	95%	1133236	52128856	23
	Selección por Torneo	3%	97%	1109125	52128875	25

Método		Total Unidad Venta Sobrante	Cantidad de Outer Pack antes de abrir	Cantidad de Inner Pack sobrante	Total de Outer Pack a abrir	Total de Outer Pack cerrados	Total Inner Pack manipulados
Algoritmo Genético	Selección por Torneo	32	40472	20	1214	39257	34040
	Selección Aleatoria	32	49271	3	2463	46807	56675
	Selección por Torneo	13	44365	0	1330	43034	33275

Método		Costo Inventario de Unidad de Venta sobrante	Costo Manipulación Outer Pack	Costo Apertura de Outer Pack	Costo manipulación Inner Pack	Costo Total
Algoritmo Genético	Selección por Torneo	96	\$ 1,939,552.20	\$ 602,407.02	\$ 595,870.06	\$ 3,137,925.29
	Selección Aleatoria	96	\$ 2,288,439.98	\$ 1,076,266.94	\$ 992,095.65	\$ 4,356,898.57
	Selección por Torneo	39	\$ 2,085,154.11	\$ 610,722.69	\$ 586,554.93	\$ 3,282,470.73

Puede observarse, en la ilustración 19, que el modelo cuantitativo no puede resolverse por medio del software Lp-Solve, es decir, la cantidad de datos excede la capacidad del modelo para ser resuelto por medio de dicho software y de una forma relajada. La memoria del recurso computacional se mostró como insuficiente a la solución del problema, demostrando que es necesaria la aplicación de la herramienta meta-heurística propuesta, algoritmo genético, para encontrar una solución óptima al problema de empaquetamiento presentado.

En la Tabla 63 se observan los resultados obtenidos del algoritmo genético, donde se puede apreciar que el mejor resultado se obtuvo por medio de la selección por torneo, siguiendo los resultados obtenidos por el diseño de experimentos para esta selección, es decir, se corrió el modelo con una población inicial de 75 candidatos para mutaciones e iteraciones indiferentes. El resultado obtenido fue el siguiente: un inner pack con capacidad de empaquetar 46 unidades de consumo, y un outer pack con capacidad de embalar 28 inner pack.

Los tiempos de ejecución para el algoritmo genético se pueden apreciar en la Tabla 64. Debido a que no se pudo resolver el problema por medio del método cuantitativo, no se tiene el tiempo de ejecución de dicho modelo. En la Tabla 64 se muestran los tiempos de ejecución del algoritmo genético en dos diferentes recursos computacionales, donde para un problema robusto la solución es obtenida en un intervalo de tiempo considerablemente bueno.

Tabla 64. Tiempos de ejecución de los resultados obtenidos del algoritmo genético

Recurso Computacional	Método	Iteraciones	Tiempo (Seg)
Sony Vaio (VGN-CR360F)	Selección por Torneo	200	130
	Selección Aleatoria	200	133
	Selección por Torneo	200	135
Macbook Pro	Selección por Torneo	200	35
	Selección Aleatoria	200	40
	Selección por Torneo	200	38

Con los resultados obtenidos anteriormente, se puede decir que la herramienta meta-heurística utilizada, algoritmo genético, es el mejor método de solución para resolver el problema de empaquetamiento que presenta la empresa ABC.

### Comparación del método escogido, algoritmo genético, con la situación actual de la empresa

A fin de corroborar que nuestra herramienta propuesta, algoritmo genético, es una solución al problema de empaquetamiento que tiene la empresa ABC, se presentará una tabla comparativa entre la situación actual de la empresa ABC y la herramienta meta-heurística. Esta comparación se puede observar en la tabla 65.

Tabla 65. Comparación entre la situación actual de la empresa y la solución obtenida por medio del algoritmo genético.

	Tipo de Inner Pack	Tipo de Outer Pack	% Outer Pack A Abriir	% Outer Pack Cerrado	Cantidad total de Inners Pack entregados	Unidades de Ventas Entregadas	Inners Packs contenidas en Outers Packs
<b>EMPRESA ABC SITUACIÓN ACTUAL</b>	24	15	2.54%	97.46%	2172037	52128888	16
<b>ALGORITMO GENÉTICO PROPUESTO</b>	46	50	3%	97%	1133236	52128856	28

	Total Unidad Venta Sobrante	Cantidad de Outer Pack antes de abrir	Cantidad de Inner Pack sobrante	Total de Outer Pack a abrir	Total de Outer Pack cerrados	Total Inner Pack manipulados
<b>EMPRESA ABC SITUACIÓN ACTUAL</b>	0	135752.31	0	3444.820366	132307.5	55117
<b>ALGORITMO GENÉTICO PROPUESTO</b>	32	40472	20	1214	39257	34040

	Costo Inventario de Unidad de Venta sobrante	Costo Manipulación Outer Pack	Costo Apertura de Outer Pack	Costo manipulación Inner Pack	Costo Total
<b>EMPRESA ABC SITUACIÓN ACTUAL</b>	0	\$5,628,290.77	\$816,525.77	\$825,652.66	\$7,270,467.44
<b>ALGORITMO GENÉTICO PROPUESTO</b>	96	\$1,939,552.20	\$602,407.02	\$595,870.06	\$3,137,925.29

La empresa actualmente tiene un inner pack con capacidad de empacar 24 unidades de consumo y un outer pack (tipo 15) con capacidad de embalar 16 inner pack. El algoritmo genético muestra la siguiente solución: un inner pack con capacidad de empacar 46 unidades y un outer pack (tipo 50) con capacidad de embalar 28 inner pack.

Puede observarse que la solución por medio del algoritmo genético tiene unos costos totales de \$3'137925.29 unidades monetarias, lo cual tiene una diferencia con los costos actuales de la empresa de \$4'132542.15 unidades monetarias, que representan una disminución en los costos totales (costos de manipulación de inner y outer pack, y costos de apertura) de 56.84%.

Con el resultado anterior, se afirma que el modelo de la herramienta meta-heurística propuesta reducirá sus costos totales de empaquetamiento de la empresa ABC y, por tanto, es solución a la problemática actual que ésta presenta.

## CONCLUSIONES

- La situación actual de la empresa “ABC” presenta unos costos totales (apertura y manipulación) de 7’270467.443 unidades monetarias, con un inner pack de 24 unidades de consumo y un outer pack de capacidad de 16 inner pack. Cabe aclarar que los datos otorgados por la empresa Logyca S.A. tienen un factor de conversión propuestos por ellos.

La solución propuesta por el modelo matemático arroja unos costos totales de 4’090912.606 unidades monetarias, con un inner pack de 48 unidades de consumo y un outer pack de capacidad de 16 inner pack.

Como se puede observar, el modelo matemático reduce los costos totales a 3’179551.837 unidades monetarias, lo cual equivale a una disminución del 43.73% en los costos totales (apertura y manipulación).

- La empresa sólo maneja un tipo de inner y outer pack para cierto tipo de producto homogéneo. Como propuesta a nuestro modelo matemático presentado, se quiso observar si elegir dos o más tipos de inner y outer pack influían en los costos totales del modelo. Como se observa en la ilustración 18, el alpha y beta es igual a cinco, ya que el modelo máximo escoge dos rutas (dos inner y outer pack diferentes) para satisfacer las demandas.

Realizando este experimento resultó un costo total de 4’006292.401 unidades monetarias, con la primera opción de un inner pack de 6 unidades de consumo en un outer pack de capacidad de 131 inner pack, estipulados para la demanda de outer pack. La segunda elección es un inner pack de 48 unidades de consumo en un outer pack de capacidad de 16 inner pack, estipulados para la demanda de inner pack.

La reducción de los costos totales (apertura y manipulación) es de 3’264175.042 unidades monetarias, lo que equivale a un 44.89 % en los costos totales.

Como no se sabe el costo de producir un inner y outer pack, se deja que la empresa estudie este comportamiento con el fin de obtener en un futuro otras posibles soluciones.

- Después de haber corrido la herramienta meta-heurística, algoritmo genético, sin haber medido su eficiencia por medio del diseño de experimentos, se pudo deducir que el modelo siempre buscaba encontrar la solución que le evitara incurrir en costos de apertura y manipulación de inner y outer pack, por tal motivo, el modelo escoge el inner y outer pack que tengan las mayores capacidades.

Lo anterior se pudo corroborar con el análisis de sensibilidad para los datos reales, en donde, al aumentar el porcentaje de apertura de outer pack, se aumentan los costos totales.

- Al aplicar el diseño de experimentos, diseño factorial  $3^3$ , se utilizaron 3 factores y 3 niveles, con el fin de poder comprobar que efectos incurren significativamente en la variable respuesta del modelo.

El diseño de experimentos aplicado al algoritmo genético por medio del método aleatorio, muestra en el análisis de varianza (ANOVA), que el factor B (población inicial) y la interacción BC (población inicial y proporción de mutación) son efectos significativos en la variable de respuesta, donde el efecto B se presenta activo en su componente cuadrático; mientras que la interacción BC, presenta: componente lineal en B y componente cuadrático en C activos, y, componente cuadrático en B y C activos.

Para el factor B, puede concluir que:

$$H_0 = \textit{Se rechaza}$$

$$H_1 = \textit{Se acepta}$$

Lo que quiere decir que si hay un efecto significativo en el tamaño población inicial para la minimización de costos totales.

Para el factor BC, se puede concluir que:

$$H_0 = \textit{Se rechaza}$$

$$H_1 = \textit{Se acepta}$$

Lo que quiere decir que sí hay un efecto significativo entre la interacción en el tamaño población inicial y la proporción de mutación para la minimización de costos totales.

Dado lo anterior, se sugiere que para encontrar mejores soluciones por el método aleatorio se debe tener en cuenta principalmente el factor B (tamaño de población inicial) en el modelo. De la misma manera, se debe considerar la interacción que tiene este factor con la proporción de mutación (factor C). Lo que da como entendido, que el factor A (número de generaciones) no tiene influencia significativa en la variable de respuesta, por consiguiente, se pueden combinar de manera indiferente con este factor. El factor de B que se recomienda tomar es  $B_2 = 75$  individuos como tamaño de población inicial.

Un solución eficiente abordada por los resultados del diseño de experimentos para algoritmo genético es la interacción  $B_2C_1$ , para cualquier A, es decir, 75 individuos de población inicial, 1/5 de proporción de mutación y cualquier tipo de A.

El diseño de experimentos realizado a partir del método de selección por torneo, permitió establecer que el factor B tiene efectos significativos en la variable respuesta. Con la ayuda del ANOVA desglosado, se pudo evidenciar que la parte activa de este factor es el componente cuadrático.

Para el factor B se puede concluir que:

$$H_0 = \textit{Se rechaza}$$

$$H_1 = \textit{Se acepta}$$

Lo que quiere decir que sí hay un efecto significativo entre la interacción en el tamaño población inicial para la minimización de costos totales.

Para conocer más a fondo el comportamiento del factor B, se realizó una comparación de medias a partir del método de Duncan, a fin de determinar cuál de los niveles de este factor es el más eficiente.

La solución eficiente abordada por el diseño de experimentos para el método de selección por torneo es,  $B_2 = 75$  individuos como tamaño de población inicial. Esto quiere decir que el factor A y C, no tienen ningún efecto significativo en la variable respuesta. Una solución abordada para este problema por medio del método de selección por torneo es la combinación de cualquiera de los factores A y C, con el factor  $B_2 = 75$ .

- La solución propuesta por el algoritmo genético es: un inner pack con capacidad de empacar 46 unidades y un outer pack (tipo 50) con capacidad de embalar 28 inner pack. Esta solución tiene unos costos totales de \$3'137925.29 unidades monetarias, lo cual disminuye los costos actuales de la empresa en \$4'132542.15 unidades monetarias, que representan el 56.84%.
- El modelo propuesto de la herramienta meta-heurística, algoritmo genético, es la solución al problema que presenta actualmente la empresa ABC.



## **Recomendaciones**

Para estudios posteriores se recomienda tener en cuenta los siguientes aspectos, los cuales se hacen necesarios para modelar un problema más real que permita tomar mejores decisiones a cambios que pueda presentar la empresa por efectos del mercado:

- Estudiar diferentes tipos de empaques y embalajes para las diferentes demandas
- Aplicar el problema de empaquetamiento para unidades heterogéneas
- Estudiar la viabilidad de abrir los inner pack en las tiendas a fin de satisfacer a cabalidad las demandas estrictas de los clientes
- Manejar inventarios en los centros de distribución a fin de estudiar la influencia del producto almacenado para satisfacer fluctuaciones de la demanda

## **Agradecimientos**

Agradecemos a la empresa Logyca S.A. por la colaboración en la información brindada.

Agradecemos a nuestro director de tesis, Jose Fernando Jiménez, por su colaboración en la elaboración de este trabajo de grado.

Agradecemos a Alejandra Camargo por su colaboración en el escrito de esta tesis.

Agradecemos a nuestras familias y amigos que nos apoyaron durante nuestro proceso académico.

## **Bibliografia**

- Ballou, R. H. (2004). *Business Logistics - Supply Chain Management: Planning, Organizing, and Controlling the Supply Chain*. Prentice Hall.
- Bortfeldt, A. (2006). A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces. *European Journal of Operational Research*, 172(3), 814–837.
- Chen, S., Geunes, J., & Mishra, A. (2012). Algorithms for multi-item procurement planning with case packs. *IIE Transactions*, 44(3), 181–198.
- Correia, I., Gouveia, L., & Saldanha-da-Gama, F. (2008). Solving the variable size bin packing problem with discretized formulations. *Computers & Operations Research*, 35(6), 2103–2113.
- Crainic, T. G., Perboli, G., Rei, W., & Tadei, R. (2011). Efficient lower bounds and heuristics for the variable cost and size bin packing problem. *Computers & Operations Research*, 38(11), 1474–1482.
- Dawes, J. G. (2012). Brand-Pack Size Cannibalization Arising from Temporary Price Promotions. *Journal of Retailing*, 88(3), 343–355.
- Engblom, J., Solakivi, T., Töyli, J., & Ojala, L. (2012). Multiple-method analysis of logistics costs. *International Journal of Production Economics*, 137(1), 29–35.
- Farahani, R. Z., & Elahipanah, M. (2008). A genetic algorithm to optimize the total cost and service level for just-in-time distribution in a supply chain. *International Journal of Production Economics*, 111(2), 229–243.
- Fonoberova, M., & Lozovanu, D. (2005). Optimal multicommodity flows in dynamic networks and algorithms for their finding. *The Bulletin of Academy of Sciences of Moldova, Mathematics*, 1(47), 19–34.

- Gilmore, P. C. (1979). Cutting stock, linear programming, knapsacking, dynamic programming and integer programming, some interconnections. *Annals of Discrete Mathematics*, 4, 217–235.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*.
- Gunasekaran, A., & Ngai, E. W. (2012). The future of operations management: An outlook and analysis. *International Journal of Production Economics*, 135(2), 687–701.
- H. Dyckhoff. (1990). A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2), 145–159.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill.
- Hinxman, A. I. (1980). The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, 5(1), 8–18.
- Hopper, E., & Turton, B. (1998). Application of genetic algorithms to packing problems-a review. In *Proceedings of the Second On-line World Conference of Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing* (pp. 279–288).
- Hopper, E., & Turton, B. (1999). A genetic algorithm for a 2D industrial packing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 37(1), 375–378.
- Hull, J. C. (2002). *Introducción a los mercados de futuros y opciones*.
- Jain, S. (2012). Marketing of vice goods: A strategic analysis of the package size decision. *Marketing Science*, 31(1), 36–51.
- Kang, J.-H., & Kim, Y.-D. (2010). Coordination of inventory and transportation managements in a two-level supply chain. *International Journal of Production Economics*, 123(1), 137–145.
- Kochenberger, G. A. (2003). *Handbook of metaheuristics*. Springer.
- Koenigsberg, O., Kohli, R., & Montoya, R. (2010). Package size decisions. *Management Science*, 56(3), 485–494.

- Kumar, V., Fan, J., Gulati, R., & Venkat, P. (2009). Practice Prize Paper—Marketing-Mix Recommendations to Manage Value Growth at P&G Asia-Pacific. *Marketing Science*, 28(4), 645–655.
- Leung, S. Y. S., Wong, W. K., & Mok, P. Y. (2008). Multiple-objective genetic optimization of the spatial design for packing and distribution carton boxes. *Computers & Industrial Engineering*, 54(4), 889–902.
- Liu, S., Lei, L., & Park, S. (2008). On the multi-product packing-delivery problem with a fixed route. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 44(3), 350–360.
- Molina, F., Santos, M. O. dos, Toledo, F., & Araujo, S. A. de. (2009). An approach using Lagrangian/surrogate relaxation for lot-sizing with transportation costs. *Pesquisa Operacional*, 29(2), 269–288.
- Montgomery, D. C. (2005). *Diseño y análisis de experimentos*. Limusa Wiley.
- Nagano, M. S., Ruiz, R., & Lorena, L. A. N. (2008). A constructive genetic algorithm for permutation flowshop scheduling. *Computers & Industrial Engineering*, 55(1), 195–207.
- Pornpitakpan, C. (2010). How package sizes, fill amounts, and unit costs influence product usage amounts. *Journal of Global Marketing*, 23(4), 275–287.
- Pose, M. G. (2000). *Introducción a los Algoritmos Genéticos*. Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones Universidad de Coruña.
- Pradhan, S., & Lam, S. S. Y. (2007). Minimizing makespan during environmental stress screening using a genetic algorithm and an ant colony optimization. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 32(5), 571–577.
- Pulido, H. G., Salazar, R. de la V., González, P. G., Martínez, C. (rev ) T., & Prez, M. del C. (rev ) T. (2004). *Análisis y diseño de experimentos*. McGraw-Hill Interamericana.

- Sajadieh, M. S., & Akbari Jokar, M. R. (2009). Optimizing shipment, ordering and pricing policies in a two-stage supply chain with price-sensitive demand. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 45(4), 564–571.
- Sokolova, M. V., Fernández-Caballero, A., & Gómez, F. J. (2011). Decision Making in Complex Systems with an Interdisciplinary Approach. En *Agents and Artificial Intelligence* (pp. 240–250). Springer.
- Stender, J. (1993). *Parallel genetic algorithms: theory and applications* (Vol. 14). los PressInc.
- Sterman, J. D. (1994). Learning in and about complex systems. *System Dynamics Review*, 10(2-3), 291–330.
- Thapatsuwan, P., Pongcharoen, P., Hicks, C., & Chainate, W. (2011). Development of a stochastic optimisation tool for solving the multiple container packing problems. *International Journal of Production Economics*.
- Valério de Carvalho, J. M. (2002). LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2), 253–273.
- Van Norden, L., & van de Velde, S. (2005). Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract. *European Journal of Operational Research*, 165(1), 127–138.
- Wang, P. (2010). *Pack Optimization Problem: Models and Solution Methods*. North Carolina State University.
- Wäscher, G., Haußner, H., & Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3), 1109–1130.
- Winston, W. L. (2005). *Investigación de Operaciones: Aplicaciones Y Algoritmos*. Cengage Learning Latin America.

Yan, X. S., Robb, D. J., & Silver, E. A. (2009). Inventory performance under pack size constraints and spatially-correlated demand. *International Journal of Production Economics*, 117(2), 330–337.

Zhu, W., Zhang, Z., Oon, W.-C., & Lim, A. (2012). Space defragmentation for packing problems. *European Journal of Operational Research*.

**ANEXO**

**Anexo 1**

**Tabla 2. Referencias de Packing and cutting problems**

Año	Autor (es)	Nombre	Objetivo modelo	Consideraciones	¿Cómo se resolvió?
2012	Wenbin Zhu, Zhaoyi Zhang, Wee-Chong Oon, Andrew Lim	Space defragmentation for packing problems	Cargar todos los elementos dados (representado por cajas rectangulares) en el menor número de contenedores idénticos.	Se tomó el modelo de empaquetamiento en 2D y 3D	Heurística de inserción de punto extremo
2012	Sanjay Jain	Marketing of Vice Goods: A Strategic Analysis of the Package Size Decision	Ofrecer paquetes pequeños de productos para ayudar a los consumidores a luchar contra su problema de autocontrol, y como esta oferta afecta los precios, beneficios, consumidores y el bienestar social.	Los consumidores no pueden resistir la tentación del consumo excesivo de ciertos productos.	Descuento hiperbólico, problemas de autocontrol
2011	Peeraya Thapatsuwan, Pupong Pongcharoen, Chris Hicks, Warattapop Chainate	Development of a stochastic optimization tool for solving the multiple container packing problems	Optimizar el empaque de un número de cajas rectangulares en un conjunto de recipientes	Se califica como un problema NP duro, es decir, la cantidad de cálculos necesarios para encontrar la solución aumenta exponencialmente con el tamaño del problema.	Sistema Artificial Inmune, Optimización por Enjambre de Partículas, Algoritmo Genético
2011	Teodor Gabriel Crainic, Guido Perboli, Walter Rei, Roberto Tadei	Efficient lower bounds and heuristics for the variable cost and size bin packing problem	Seleccionar los contenedores para empacar todos los ítems en un mínimo costo total	Pruebas numéricas realizadas en casos con un máximo de 1000 elementos	Heurística BDF (Best First Decreasing)
2011	Oded Koenigsberg, Rajeev Kohli, Ricardo Montoya	Package Size Decisions	¿Cómo una empresa puede elegir el tamaño del paquete y el precio de un producto que se deteriora con el tiempo?	Vida útil del producto, velocidades que los consumidores usan el producto, la relación entre el tamaño del paquete y el costo variable del producto y las cantidades mínimas consumidas por cada dólar gastado.	Modelo de optimización basado en el costo y vida útil del producto
2010	Chanthika Pornpitakpan	How Package Sizes, Fill Amounts, and Unit Costs Influence Product Usage Amounts.	Estudiar el efecto del tamaño del envase, los costos unitarios y las cantidades de relleno en 343 estudiantes.	Consumidores que utilizan una cantidad mayor del producto cuando el tamaño del paquete es mayor versus menor, y los consumidores que utilizan una cantidad de producto mayor cuando el costo unitario del producto es menor versus mayor.	Investigación de diseño, productos experimentales, procedimientos experimentales, muestreo.
2010	Richard E. Korf, Michael D. Moffitt, Martha E. Pollack	Optimal rectangle packing	Encontrar un rectángulo que encierre en un área mínima un conjunto de rectángulos	Rectángulos en los que se pueden contener el conjuntos de cuadrados de tamaño $1 \times 1$ , $2 \times 2, \dots, n \times n$ , para un $n$ igual a 27.	Algoritmos NP-Complejos
2009	Darron W. Dixon-Hardy, Beverly A. Curran	Types of packaging waste from secondary sources (supermarkets) – The situation in the UK	Detallar los tipos de empaques secundarios utilizados dentro del sector de los supermercados y, analizar cómo se puede reducir los desechos.	Tipos de envases tales como: plástico, vidrio y cartón.	Estadística descriptiva

## Anexo 2

### Tabla 3.

#### Referencias del problema de Distribución en la cadena de abastecimiento

Año	Autor (es)	Nombre	Objetivo modelo	Consideraciones	¿Cómo se resolvió?
2012	Shuang Chen, Joseph Geunes, Ajay Mishra.	Algorithms for multi-item procurement planning with case packs	Reducir los requisitos de manipulación en la cadena de distribución	1 o dos paquetes, múltiples paquetes, Problemas de gran tamaño	Programación Dinámica, Enfoque Exacto, Heurísticas
2012	Janne Engblom, Tomi Solakivi, Juuso Töyli, Lauri Ojala	Multiple-method analysis of logistics costs	Examinar las diferencias y las interdependencias de los costos logísticos de las empresas manufactureras y comerciales que operan en Finlandia	241 empresas analizadas a partir de las encuestas para los años 2005 y 2008	Análisis Descriptivo, Modelos lineales generalizados mixtos, análisis de componentes principales
2011	Jianxiang Li, Feng Chu, Haoxun Chen	A solution approach to the inventory routing problem in a three-level distribution system	Determinar un transporte combinado (ruta) y la estrategia de minimización de inventario de todo el sistema de costos, satisfaciendo la demanda, sin escasez alguna.	Problema infinito de inventarios en un sistema de distribución de tres niveles con un vendedor, un almacén y varios minoristas geográficamente dispersos.	Algoritmo genético
2010	Jae-Hun Kang, Yeong-Dae Kim	Coordination of inventory and transportation managements in a two-level supply chain	Determinar las cantidades y el tiempo de reposición para los minoristas, así como la cantidad de productos entregados a los minoristas por cada vehículo con el fin de minimizar la suma de costos fijos.	Cadena de Suministro de dos niveles	Algoritmos Heurísticos
2009	Mohsen S. Sahadieh, Mohammad R. Akbari Jokar.	Optimizing shipment, ordering and pricing policies in a two-stage supply chain with price-sensitive demand	Desarrollar un sistema producción-inventario, basado en el beneficio total de la articulación de vendedor-comprador con políticas óptimas de pedidos, envíos y precios.	Cadena de suministro de dos etapas que consiste en un único proveedor y un único comprador	Programación lineal
2009	Xi Steven Yan, David J. Robb, Edward A. Silver	Inventory performance under pack size constraints and spatially-correlated demand	Proporcionar apoyo a las decisiones de producto, selección de proveedores y división de paquetes durante la distribución.	Tamaño del envase, correlaciones, número de sucursales	Simulación, distribución Poisson
2008	Raze Zanjirani Farahani, Mahsa Elahipanah	A genetic algorithm to optimize the total cost and service level for just in time distribution in a supply chain	Desarrollar y resolver un modelo de JIT de distribución en el contexto de la gestión de la cadena de suministro.	Cadena de suministro de tres eslabones	Programación Multi-objetivo
2005	Linda van Norden, Steef van de Velde	Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract	Determinar los tamaños de lote a transportar con el fin de satisfacer la demanda de almacenamiento sin backlogging y para minimizar los costos de inventario, pedidos y transporte.	Los costos de fletes disminuye a medida que aumenta los volúmenes de envío	Algoritmo de relajación de Lagrange



Anexo 3

Tabla 4.

Referencia de problemas consolidados de distribución y packing and cutting problem.

Año	Autor (es)	Nombre	Objetivo modelo	Consideraciones	¿Cómo se resolvió?
2012	Jhon G. Dawes	Brand-Pack Size Cannibalization Arising from Temporary Price Promotions	Equilibrar costos de manejo de DC, costos de manejo de las tiendas minoristas, y costos de inventario tanto en el DC y las tiendas minoristas.	Cajas de cartón que contienen 24 o 48 unidades, paquetes de 6 u 8 unidades y unidades individuales	Modelo de costos
2011	Wang, Pu	Pack Optimization Problem: Models and Solution Methods. North Carolina State University	Encontrar la combinación de empaque y embalaje óptimo, que minimizara los costos de manipulación en la cadena de abastecimiento de la industria textil	Los diferentes tamaños de SKU, un solo centro de distribución, y unidades dentro de empaque establecidas	Programación entera, Diseño de experimentos
2009	V. Kumar, Jia Fan, Rohit Gulati, P. Venkat	Practice Prize Paper—Marketing-Mix Recommendations to Manage Value Growth at P&G Asia-Pacific	¿Cómo puede P&G puede incrementar el precio de sus marcas para obtener un crecimiento de valor? ¿Cuál es el precio, distribución y combinaciones de tamaño necesarias para lograr el crecimiento deseado? ¿Cómo ha cambiado el precio a partir de la elasticidad en el tiempo?	P&G de Asia-Pacífico	Simulación
2009	Flavio Molina, Maristela Oliveira dos Santos, Franklina M. B. Toledo, Silvio Alexandre de Araujo	An approach using Lagrangian/surrogate relaxation for lot-sizing with transportation costs	Estudiar el problema de distribución y el tamaño de lote	Costo de transporte a un almacén de la empresa, costo de inventario, producción y montaje.	Modelo matemático, Heurística de Lagrange
2008	S.Y. Leung, W.K Wong, P.Y. Mok	Multiple-objective genetic optimization of the spatial design for packing and distribution carton boxes	Buscar un conjunto óptimo de cajas de cartón con el fin de reducir costos generales de distribución en el futuro, mediante la buena utilización de espacio de cartón y reducción de tipos de cartón necesarios.	Previsión de una semana de ventas y una previsión de 53 semanas de ventas.	Algoritmo genético multi-objetivo
2008	Shuguang Liu, Lei Lei, Sunju Park	On the multi-product packing-delivery problem with a fixed route	Estudiar la variación del problema de embalaje, de entrega y lo que implica k productos distintos en un solo camión capacitado, y una secuencia fija de ubicaciones de los clientes a visitar.	Algoritmo de optimización local con una complejidad computacional de $O(\log n^3 (n))$	Algoritmo de optimización

#### Anexo 4

#### Código Programación Entera LP-SOLVE

```
param producto;  
param inner;  
param outer;  
param dc;  
param cliente;  
param tipo;
```

```
set I:= 1 .. producto;  
set J:= 1 .. inner;  
set K:= 1 .. outer;  
set L:= 1 .. dc;  
set O:= 1 .. cliente;  
set P:= 1 .. tipo;
```

```
param S {i in I};  
param a {j in J};  
param b {k in K};  
param njk {j in J, k in K};  
param nkl {k in K, l in L};  
param ca {k in K};  
param d {o in O, p in P};  
param cmo {l in L};  
param cmi {l in L};  
param nlp {l in L, p in P};  
param rlp {l in L, p in P};  
param M ;
```

```
var x {i in I, j in J}>=0 ;  
var y {j in J, k in K}>=0 ;  
var alpha {j in J} binary;  
var z {k in K, l in L}>=0 ;  
var beta {k in K} binary;  
var xlop {l in L, o in O, p in P}>=0 ;
```

```
minimize cost      : (sum {k in K,l in L} z[k,l]* ca[k] - sum{l in L, o in O} xlop[l,o,1]*ca[l])  
                  + (sum {k in K, l in L}z[k,l]* cmo[l]- sum{l in L, o in O} xlop[l,o,1]*cmo[l])  
                  +((sum{l in L, o in O} xlop[l,o,2]* cmi[l]))  
                  +((sum{l in L, o in O} xlop[l,o,1]*cmo[l]));
```

```
s.t. capacidad {i in I}      : sum {j in J} x[i,j] <= S[i];  
s.t. balanceo1 {j in J}     : sum {i in I} x[i,j]= sum{k in K} a[j]*njk[j,k]*y[j,k];  
s.t. activacion_inner      : sum {j in J} alpha[j]=1;  
s.t. envio_inner {j in J}   : sum {i in I} x[i,j]<= M * alpha[j];  
s.t. balanceo2 {k in K}    : sum {j in J} njk[j,k]*y[j,k] = sum {l in L} b[k]*nkl[k,l]*z[k,l];  
s.t. activacion_outer      : sum{j in J,k in K} beta[k]* njk[j,k]=1;
```

s.t. envio\_outer {k in K} : sum {j in J} njk[j,k]\*y[j,k] <= M \* beta[k];  
 s.t. demanda\_outer {o in O} : sum {l in L} xlop[l,o,1]\*rlp[l,1] = d[o,1];  
 s.t. demanda\_inner {o in O} : sum {l in L} xlop[l,o,2]\*rlp[l,2] = d[o,2];  
 s.t. balanceo3 {k in K, l in L: k=l} : nkl[k,l]\*z[k,l] = sum {o in O, p in P} xlop[l,o,p]\*nlp[l,p] ;

## Anexo 5

Código Visual Basic Algoritmo Genético Método Aleatorio

Sub AGENETICO\_A()

Dim i, j, k, aux, aux2, aux3, var1, var2, padre, madre, debil, sol As Integer

Dim min As Double

'Inicio Población INNER OUTER'

Sheets("Sheet2").Select

j = 3

Do While j = 3

For i = 3 To 52

aux = (Int(50 \* Rnd())) + 1

aux2 = (Int(50 \* Rnd())) + 1

If Sheets("Sheet1").Cells(aux + 2, aux2 + 2) > 0 Then

Sheets("Sheet2").Cells(i, j) = aux

Sheets("Sheet2").Cells(i, j + 1) = aux2

Else

i = i - 1

End If

Next i

j = j + 1

Loop

'Inicio Población Abrir-Cerrar y Costos Población'

i = 3

aux3 = Sheets("Sheet1").Cells(i, 61)

Do While i <= 52

For j = 6 To 105

aux10 = Sheets("Sheet1").Cells(j - 3, 61)

If aux3 < aux10 Then

Sheets("Sheet2").Cells(i, j) = 0

Else

Sheets("Sheet2").Cells(i, j) = 1

End If

Next j

'Generación Costos

'% Outer Abrir

Cells(i, 107).FormulaR1C1 = "=SUM(RC[-101]:RC[-2])/100"

'% OUTER Cerrado

Cells(i, 108).FormulaR1C1 = "=100%-RC[-1]"

'Cantidad Inner Entregados Total

Cells(i, 109).FormulaR1C1 = "=INT(Sheet1!R57C9/Sheet2!RC[-106])"

'Cantidad UV Entregadas

Cells(i, 110).FormulaR1C1 = "=RC[-1]\*RC[-107]"

'Inners en Outers

Cells(i, 111).FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(RC[-108],TABLA, RC[-107] +1,FALSE)"

'Total UV Sobrante

Cells(i, 112).FormulaR1C1 = "=Sheet1!R57C9-Sheet2!RC[-2]"

```
'Cant Outer Antes de Abrir  
Cells(i, 113).FormulaR1C1 = "=INT(RC[-4]/RC[-2])"
```

```
'Cant Inner Sobrante  
Cells(i, 114).FormulaR1C1 = "=RC[-5]-(RC[-3]*RC[-1])"
```

#### 'No Outers Abiertos y Cerrados Población

```
'Cells(i, 115).Select  
Cells(i, 115) = Int(Cells(i, 107) * Cells(i, 113))  
'Cells(i, 116).Select  
Cells(i, 116) = Int(Cells(i, 108) * Cells(i, 113))
```

#### 'Total Inner Población

```
Cells(i, 117) = (Cells(i, 111) * Cells(i, 115)) + Cells(i, 114) + ((Cells(i, 113) - (Cells(i, 115) + Cells(i, 116))) * Cells(i, 111))
```

#### 'Costo Unidad Venta Población

```
'Cells(i, 118).Select  
Cells(i, 118) = Cells(i, 112) * Sheets("Sheet1").Cells(57, 6)  
'Costo Manipulacion Outer Poblacion  
aux4 = Cells(i, 4)  
For j = 2 To 51  
aux5 = Sheets("Sheet1").Cells(108, j)  
If aux5 = aux4 Then  
Sheets("Sheet2").Cells(i, 119) = Sheets("Sheet2").Cells(i, 113) * Sheets("Sheet1").Cells(110, j)  
End If  
Next j
```

#### 'Costo Apertura Outer Población

```
aux6 = Cells(i, 4)  
For j = 2 To 51  
aux7 = Sheets("Sheet1").Cells(108, j)  
If aux7 = aux6 Then  
Sheets("Sheet2").Cells(i, 120) = Sheets("Sheet2").Cells(i, 115) * Sheets("Sheet1").Cells(111, j)  
End If  
Next j
```

#### ' Costo Inner Población

```
aux8 = Cells(i, 3)  
For j = 57 To 106  
aux9 = Sheets("Sheet1").Cells(j, 1)  
If aux8 = aux9 Then  
Sheets("Sheet2").Cells(i, 121) = Sheets("Sheet2").Cells(i, 117) * Sheets("Sheet1").Cells(j, 3)  
End If  
Next j
```

```

'Costo Total Población
Cells(i, 122) = Cells(i, 118) + Cells(i, 119) + Cells(i, 120) + Cells(i, 121)
If Cells(i, 115) * Cells(i, 111) * Cells(i, 3) >= Sheets("Sheet1").Cells(59, 10) Then
i = i + 1
aux3 = Sheets("Sheet1").Cells(i, 61)
Else
aux3 = Sheets("Sheet1").Cells(i + 5, 61)
End If
Loop

```

```

iteracion = 0
Do While iteracion < Range("C75")

```

#### 'Creación Padre Madre PMAleatorio

```

a = Int(50 * Rnd())
b = Int(50 * Rnd())
padre = (a + 1)
madre = (b + 1)
For i = 3 To 122
Sheets("Sheet2").Cells(56, i) = Cells(padre + 2, i)
Sheets("Sheet2").Cells(57, i) = Cells(madre + 2, i)
Next i

```

#### 'Creación del Hijo parte inner y outer CRUCE Multipunto

```

i = 3
For i = 3 To 4
If i < 4 Then
Sheets("Sheet2").Cells(59, i) = Cells(56, i)
Else
Sheets("Sheet2").Cells(59, i) = Cells(57, i)
End If
Next i

```

#### 'Creación de Hijo Abrir-Cerrar Cruce Multipunto

```

For i = 6 To 105
If i Mod 2 = 0 Then
Sheets("Sheet2").Cells(59, i) = Cells(56, i)
Else
Sheets("Sheet2").Cells(59, i) = Cells(57, i)
End If
Next i

```

### 'Mutación

```
If iteracion Mod 10 = 0 And iteracion > 0 Then
For j = 6 To 105
If Sheets("Sheet2").Cells(59, j) = 0 Then
Sheets("Sheet2").Cells(59, j) = 1
Else
Sheets("Sheet2").Cells(59, j) = 0
End If
Next j
End If
```

### 'Costos Hijo

#### 'No Outers Abiertos y Cerrados Hijo

```
For i = 59 To 59
'% Outer Abrir
Cells(i, 107).FormulaR1C1 = "=SUM(RC[-101]:RC[-2])/100"
'% OUTER Cerrado
Cells(i, 108).FormulaR1C1 = "=100%-RC[-1]"
'Cantidad Inner Entregados Total
Cells(i, 109).FormulaR1C1 = "=INT(Sheet1!R57C9/Sheet2!RC[-106])"
'Cantidad UV Entregadas
Cells(i, 110).FormulaR1C1 = "=RC[-1]*RC[-107]"
'Inners en Outers
Cells(i, 111).FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(RC[-108],TABLA, RC[-107] +1,FALSE)"
'Total UV Sobrante
Cells(i, 112).FormulaR1C1 = "=Sheet1!R57C9-Sheet2!RC[-2]"
'Cant Outer Antes de Abrir
Cells(i, 113).FormulaR1C1 = "=INT(RC[-4]/RC[-2])"
'Cant Inner Sobrante
Cells(i, 114).FormulaR1C1 = "=RC[-5]-(RC[-3]*RC[-1])"
'Cells(i, 115).Select
Cells(i, 115) = Int(Cells(i, 107) * Cells(i, 113))
'Cells(i, 116).Select
Cells(i, 116) = Int(Cells(i, 108) * Cells(i, 113))
```

#### 'Total Inner hijo

```
Cells(i, 117) = (Cells(i, 111) * Cells(i, 115)) + Cells(i, 114) + ((Cells(i, 113) - (Cells(i, 115) + Cells(i, 116))) * Cells(i, 111))
```

#### 'Costo Unidad de Consumo Inventario hijo

```
Cells(i, 118) = Cells(i, 112) * Sheets("Sheet1").Cells(57, 6)
```

#### 'Costo Manipulación Outer Hijo

```
aux4 = Cells(i, 4)
For j = 2 To 51
aux5 = Sheets("Sheet1").Cells(108, j)
If aux5 = aux4 Then
Sheets("Sheet2").Cells(i, 119) = Sheets("Sheet2").Cells(i, 113) * Sheets("Sheet1").Cells(110, j)
```

End If  
Next j

'Costo Apertura Outer Hijo

```
aux6 = Cells(i, 4)
For j = 2 To 51
  aux7 = Sheets("Sheet1").Cells(108, j)
  If aux7 = aux6 Then
    Sheets("Sheet2").Cells(i, 120) = Sheets("Sheet2").Cells(i, 115) * Sheets("Sheet1").Cells(111, j)
  End If
Next j
```

' Costo Inner Hijo

```
aux8 = Cells(i, 3)
For j = 57 To 106
  aux9 = Sheets("Sheet1").Cells(j, 1)
  If aux8 = aux9 Then
    Sheets("Sheet2").Cells(i, 121) = Sheets("Sheet2").Cells(i, 117) * Sheets("Sheet1").Cells(j, 3)
  End If
Next j
```

'Costo Total Hijo

```
Cells(i, 122) = Cells(i, 118) + Cells(i, 119) + Cells(i, 120) + Cells(i, 121)
Next i
```

'Validación de Hijo

```
For i = 3 To 3
  var1 = Cells(110, i)
  var2 = Cells(110, i + 1)
  If Sheets("Sheet1").Cells(var1 + 2, var2 + 2) > 0 And Cells(110, 115) * Cells(110, 111) * Cells(110, 3)
  >= Sheets("Sheet1").Cells(59, 10) Then
    Sheets("Sheet2").Cells(110, i) = var1
    Sheets("Sheet2").Cells(110, i + 1) = var2
  Else
    Sheets("Sheet2").Cells(110, i) = Cells(108, i)
    Sheets("Sheet2").Cells(110, i + 1) = Cells(107, i + 1)
  For r = 6 To 105
    If r Mod 2 = 0 Then
      Sheets("Sheet2").Cells(110, r) = Cells(108, r)
    Else
      Sheets("Sheet2").Cells(110, r) = Cells(107, r)
    End If
  Next r
  If Sheets("Sheet1").Cells(var1 + 2, var2 + 2) < 1 And Cells(110, 115) * Cells(110, 111) * Cells(110, 3)
  < Sheets("Sheet1").Cells(59, 10) Then
    PMTorneo
  Else
  End If
End If
Next i
```



'id el mayor costo

```
mascaro = 0
mayor = 0
For i = 3 To 52
If Sheets("Sheet2").Cells(i, 122) > mayor Then
mayor = Sheets("Sheet2").Cells(i, 122)
mascaro = i
End If
Next i
```

```
If Sheets("Sheet2").Cells(59, 122) < mayor Then
```

```
For j = 3 To 122
Sheets("Sheet2").Cells(mascaro, j) = Sheets("Sheet2").Cells(59, j)
Next j
End If
iteracion = iteracion + 1
```

Loop

'Solución

```
menoscaro = 1000000000
For i = 3 To 52
If Sheets("Sheet2").Cells(i, 122) < menoscaro Then
menoscaro = Sheets("Sheet2").Cells(i, 122)
Solucion = i
End If
Next i
For j = 2 To 122
Sheets("Sheet2").Cells(63, j) = Sheets("Sheet2").Cells(Solucion, j)
Next j
```

End Sub