

MODELAMIENTO Y CONTROL DIGITAL DE TEMPERATURA PARA HORNO ELECTRICO

HECTOR IVÁN REYES SIERRA

MANUEL FRANCISCO MONTAÑA ORTEGA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE INGENIERO ELECTRÓNICO

DIRECTOR

ING. DIEGO ALEJANDRO PATIÑO, Ph.D

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

BOGOTÁ D.C.

JUNIO 2010

**RECTOR MAGNÍFICO:
JOAQUÍN SÁNCHEZ GARCÍA S. J.**

**DECANO ACADÉMICO:
Ing. FRANCISCO J. REBOLLEDO M.**

**DECANO DEL MEDIO UNIVERSITARIO:
SERGIO BERNAL RESTREPO S. J.**

**DIRECTOR DE CARRERA:
Ing. JUAN MANUEL CRUZ**

**DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO:
Ing. DIEGO PATIÑO M. Sc, Ph. D.**

ARTÍCULO 23 DE LA RESOLUCIÓN N° 13 DE JUNIO DE 1946

“La universidad no se hace responsable de los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de grado. Solo velara porque no se publique nada contrario al dogma y la moral católica y porque los trabajos no contengan ataques o polémicas puramente personales. Antes bien que se vea en ellos el anhelo de buscar la verdad y la justicia”

Contenido

1. INTRODUCCIÓN GENERAL	7
2. MARCO TEÓRICO	9
2.1. Teoría de modelamiento de un sistema	9
2.1.1. Modelamiento a partir de variables internas de un sistema térmico.	9
2.2. Sistemas no lineales	11
2.2.1. Saturación	11
2.2.2. Zonas Muertas.....	11
2.2.3. Retardos.....	11
2.2.4. Múltiples Puntos de Equilibrio	12
2.3. Linealización.....	12
2.4. Modelamiento matemático de sistemas lineales	13
2.4.1. Función de transferencia	13
2.4.2. Modelo En Espacio De Estados	13
2.5. Sistemas en tiempo discreto.....	14
2.5.1. Período de Muestreo.....	15
2.5.2. Muestreo de Señales Continuas.....	16
2.6 Transformada Z	16
2.7. Muestreo en Función de Transferencia.....	16
2.8. Cambio de Operadores Lineales	17
2.8.1. Diferencias hacia adelante (Forward).....	17
2.8.2. Diferencias hacia atrás (Backward)	18
2.8.3. Transformación bilineal (Tustin)	18
2.9. Análisis de Sistemas en Tiempo Discreto.....	18
2.10. Teoría de control	19
2.10.1. Control PID	19
2.10.2 Control por Realimentación de Estados	20
2.10.3. Control Polinomial RST.....	21
3. IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA	23
3.1 Descripción de la Planta	23
3.2 Adquisición de Datos	24
3.3 Análisis del comportamiento	25

3.4 Regiones de Operación.....	26
3.4.1 Caracterización de Regiones de Operación	27
3.4.2 Caracterización de Regiones de Enfriamiento	29
3.4.3 Validación de Modelos	30
3.5 Modelo en Espacio de Estados	34
4. Control.....	36
4.1 PID Continuo	36
4.1.1 Implementación PID Continuo.	42
4.1.2 Resultados PID Continuo.....	44
4.2 PID Discreto.....	47
4.2.1 Función de Transferencia de PID discreto	47
4.2.2 Ecuación de diferencias del PID.....	48
4.2.1 Implementación PID Discreto.....	50
4.2.2 Resultados PID Discreto	52
4.3 Realimentación de Estados Tiempo Continuo	55
4.3.1. Implementación RE en Tiempo Continuo	57
4.3.2 Resultados RE Continuo	59
4.4 Realimentación de Estados Tiempo Discreto.....	61
4.4. 1 Implementación RE en Tiempo Discreto.....	64
4.4.2 Resultados RE Discreto	66
4.5 Controlador Polinomial RST	68
4.5.1 Implementación RST.....	70
4.5.2 Resultados RST	72
5. Análisis de los Resultados.....	75
5.1 Especificaciones de Desempeño.	75
5.2 Especificaciones de Robustez.	77
5.2.1. Rechazo a Perturbaciones.....	77
5.2.2. Esfuerzo de Control	78
5.3. Análisis de Respuesta en Frecuencia.....	78
5.3.1 Controlador PID Continuo para la segunda región de operación.....	79
5.3.2. Controlador PID Continuo para la cuarta región de operación.....	80
5.3.3. Controlador PID Discreto para la segunda región de operación.....	80
5.3.4. Controlador PID Discreto para la cuarta región de operación.	80

5.3.5. Controlador por realimentación de estados continuo para la segunda región de operación.....	81
5.3.6. Controlador por realimentación de estados continuo para la cuarta región de operación.....	81
6. Conclusiones.....	82
7. Bibliografía.....	84

1. INTRODUCCIÓN GENERAL

La temperatura es una de las variables más importantes a considerar en muchos sistemas ya que representa un factor que puede cambiar y afectar las propiedades físicas de otras variables. Es conocida la dependencia que tiene la presión, el volumen en los gases, la corriente en transistores, la resistividad de los materiales y muchas más características con la temperatura, por esta razón mantener el valor de la temperatura en un punto deseado es de importancia para muchos sistemas, en particular en sectores industriales.

El análisis y estudio de sistemas térmicos requiere conocimientos físicos previos en áreas como termodinámica, fluidos y demás ramas relacionadas con la transferencia de calor; en este orden de ideas puede decirse que un sistema térmico puede modelarse a través de ecuaciones matemáticas cuyo comportamiento en la mayoría de casos no se considera lineal [4].

En el análisis y estudio de sistemas térmicos aparecen varios efectos no lineales que son característicos de los sistemas térmicos, los cuales se utilizan en la identificación de la planta y en los modelos realizados. Los efectos no lineales más comunes son la saturación y los tiempos de retardo típicos a la hora de trabajar con temperatura [2], por estos fenómenos en la mayoría de casos es necesario realizar aproximaciones a sistemas lineales que permitan usar la teoría de estos sistemas. Esto se lleva a cabo linealizando el sistema alrededor de un punto de equilibrio establecido [6].

En estudios realizados actualmente se busca linealizar los sistemas térmicos en diferentes rangos de operación haciendo más simple el análisis del comportamiento del sistema alrededor del punto de equilibrio y obteniendo acciones de control mucho más sencillas [11]. Existe un gran número de sistemas térmicos a nivel industrial que pueden ser controlados mediante diferentes acciones de control; para llevar a cabo una buena acción es necesario obtener una aproximación lineal que represente el comportamiento de la planta en su totalidad y tener en cuenta la existencia de perturbaciones que puedan afectar la dinámica del sistema. Una vez obtenido el modelo más próximo de la planta, se puede escoger entre varias técnicas de control dependiendo del sistema, donde para sistemas térmicos las acciones de control más comunes son el controlador PID y control On-Off [11]; sin embargo existen otras posibilidades como control polinomial RST y control por realimentación de estados [12].

La diferencia entre este trabajo y el realizado en [1] radica en la consecución de dos objetivos diferentes: la construcción de la planta y el diseño e implementación de los controladores para el sistema. El trabajo realizado en [1] se concentró en la implementación física de la planta (elaboración y conexión de termopares, conexión del SSR) analizando detalladamente el funcionamiento de sus componentes. En [1] se utilizó un controlador On/Off HoneyWell® y se implementó un controlador PID continuo en LabView® para determinar las acciones de control del sistema; sin embargo, el modelo utilizado no consideró la no linealidad de la planta y la acción de control obtenida presentó diversos inconvenientes tanto a nivel de implementación como a nivel de diseño. Como complemento y mejoramiento del trabajo realizado en [1] se

decide entonces enfocar el proyecto hacia el diseño de diferentes controladores fundamentados en una caracterización formal y refinada de la planta.

Este trabajo tiene como objetivo modelar un horno eléctrico teniendo en cuenta los efectos no lineales que presenta y definiendo las regiones de atracción de los puntos de equilibrio de la planta. Esto con el fin de llegar a un modelo aproximado del sistema en su totalidad y posteriormente desarrollar el control. Se implementarán diferentes acciones de control continuo y discreto con ayuda de LabView® y a través del desarrollo teórico de los controladores se podrá establecer cuál de estas presenta mejor desempeño teniendo en cuenta diferentes criterios de evaluación.

Así pues, ayudados de la teoría de control [5], [12] se desarrollarán varias alternativas de control tanto continuo como discreto para sistemas térmicos, que pueden servir como base sólida para una posible aplicación a nivel industrial.

2. MARCO TEÓRICO

Resumen - Como soporte a todo el desarrollo que se plantea en este proyecto, será necesario poner a disposición del lector todos los recursos teóricos y bibliográficos necesarios para la comprensión de este documento. Se comenzará por resumir conceptos relacionados con teoría de modelamiento, efectos no lineales, linealización, diseño de controladores y discretización. Todos los temas que se tratarán son relevantes y serán de utilidad en el desarrollo del documento; sin embargo por la complejidad o extensión de algunos de ellos se referenciarán a textos bibliográficos especializados que desarrollan la teoría en detalle.

2.1. Teoría de modelamiento de un sistema

El objetivo de modelar un sistema, de caracterizarlo matemáticamente consiste en llegar a describirlo en la forma más completa, exacta y sencilla posible, para posteriormente analizarlo y poder realizar diseños de controladores de tal manera que su funcionamiento se adecue a los requerimientos de diseño. El modelo matemático se basa en una o varias ecuaciones que representan el comportamiento del sistema, pero no representan un único modelo, pues se pueden lograr representaciones diferentes del mismo sistema que no contradicen una a la otra. Sin embargo, es útil encontrar el modelo que proporcione información de interés para cada problema en particular.

Realizar un modelo físico comprende dos aspectos importantes: hallar las características dinámicas del sistema con base en la teoría matemática, desarrollos experimentales y la información que se tenga de la planta; para posteriormente realizar aproximaciones bajo criterios válidos que simplifiquen el resultado obtenido.

Las consideraciones y aproximaciones se realizan con base en las simulaciones iterativas de las respuestas que el modelo presenta con respecto a las que debería tener el sistema real. De la escogencia de estas se obtiene un modelo del sistema sobre el cual se realizará un controlador que tendrá éxito según la exactitud del modelo especificado.

En este orden de ideas se puede decir que para el modelamiento de un sistema térmico, que es el problema a tratar, deben tenerse en cuenta diferentes parámetros físicos y experimentales del sistema que permitan obtener una representación aproximada de la planta a partir de la relación entre entrada y salida, teniendo en cuenta los fenómenos no lineales y estableciendo las consecuencias que esto trae en su respectivo modelamiento.

2.1.1. Modelamiento a partir de variables internas de un sistema térmico.

Como un método adicional al análisis de sistemas a partir de las entradas y salidas del mismo es posible establecer un modelo que tenga en cuenta las características físicas y en específico térmicas, propias de la planta. Sin embargo estos métodos no son estrictamente independientes y es útil hacer un acercamiento entre estos para obtener una aproximación más acertada del comportamiento real del sistema. Para lograrlo se deben tener en cuenta tres aspectos:

A partir de las variables a controlar, se debe tener en cuenta cuales son las entradas, salidas y variables internas del proceso. De la misma forma se deben tener en cuenta cuales son las constantes y parámetros que intervienen.

En segunda estancia se describen las relaciones matemáticas que involucran todos los parámetros físicos involucrados, para que finalmente se determinen ecuaciones que enlacen estas relaciones, formando así un modelo que puede ser comparado y ajustado con respecto a otros métodos de modelado, como el de relación entradas, salidas del sistema.

En los Sistemas térmicos, las variables involucradas son: la temperatura $T(^{\circ}C)$, y el flujo de calor por unidad de tiempo que es la potencia transferida al sistema, $f = \frac{dQ}{dt}$ (w) y la energía definida como $Q = \int f dt$ (w_s). Por otro lado se deben tener en cuenta el calor específico $c(\frac{w_s}{kg^{\circ}C})$ definido como la cantidad de calor necesario para aumentar la temperatura de una masa unitaria un grado centígrado, además la relación entre el flujo de calor f y el gradiente de temperaturas que resulta ser una variable llamada resistencia térmica $R = \frac{\Delta T}{f}, (\frac{^{\circ}C}{w})$.

Normalmente la temperatura no es homogénea en un cuerpo y por lo contrario presenta gradientes de temperatura que dan lugar a ecuaciones diferenciales con derivadas parciales y parámetros distribuidos. Por este motivo se hacen simplificaciones a modelos donde el cuerpo se divide en pequeñas regiones que se consideran como homogéneas, e isotérmicas simplemente suponiendo homogeneidad en todo el sistema debido a condiciones particulares.

En termodinámica se definen algunas propiedades físicas que relacionan la temperatura y el flujo de calor, una de estas es la transferencia de calor que se puede dar por conducción, convección y radiación, En la practica el intercambio de calor puede mezclar los tres modos, la transferencia por convección se presenta entre partículas adyacentes impartiendo energía entre un nivel más alto a un nivel más bajo, se puede definir la conducción como la proporcionalidad del flujo de calor por unidad de área a la conductividad térmica y un gradiente de temperatura, donde la conductividad es una característica física propia de los materiales.

La convección, más relacionada con la transferencia que se da dentro del horno para este proyecto, implica el intercambio de energía entre un fluido compacto y una superficie, similar a la que se genera naturalmente a través del aire caliente que sube desde la superficie, o la generada por medio de un ventilador. La convección se define como la cantidad de calor movida que depende de cuánto calor puede transportar el medio $Q = hA(T_{in} - T)$ donde A es el área de la superficie normal a la dirección de flujo y h es el coeficiente de transferencia de calor ($\frac{w}{m^2^{\circ}C}$) propio de cada fluido. Para el aire $5 < h < 30$.

El calentamiento de un horno suele modelarse teniendo en cuenta la aproximación mencionada de suponer una temperatura homogénea dentro del mismo. En un punto se genera una potencia calorífica P dada en vatios (w), de la que una parte se emplea para calentar un cuerpo P_c y el resto fluye hacia el exterior P_{ext} . Dados que la construcción física del horno contemplará una resistencia y una capacidad térmica R, C , se tiene que por convección se transmitirá calor del punto que genera potencia hacia todo el interior del horno. Este punto que genera potencia es una fuente de flujo de calor f equivalente aproximadamente a la potencia disipada por el resistor, en otras palabras $f \approx P = V * I$ donde V, I es el voltaje y la corriente proveniente de la red eléctrica sobre el resistor que genera el flujo de calor.

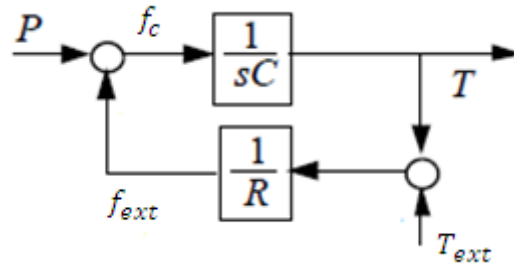
Se denominara por consecuencia con las variables térmicas a P_{ext} y P_c como flujos de calor f_{ext} y f_c respectivamente.

De esta forma se tiene la siguiente ecuación diferencial dada en derivadas ordinarias y como una representación lineal del modelo:

$$C \frac{dT}{dt} = f_c = P - f_{ext} = P - \frac{T - T_{ext}}{R}$$

Donde T_{ext} es la temperatura exterior o la temperatura ambiente.

Por último en diagrama de bloques se tiene:



2.2. Sistemas no lineales

Todos los sistemas físicos son no lineales en su comportamiento, debido a que ningún sistema de la naturaleza es ideal. Existen regiones donde debe escogerse un área de trabajo específica con el fin de linealizarla y trabajar en ella, es por esto que en un sistema térmico, por ejemplo, existe un gran número de elementos que pueden considerarse lineales en la vecindad de un punto de operación. Un punto de operación se define como un punto x^* para el sistema $\dot{x} = f(x)$ si tiene la propiedad que cuando el estado del sistema comienza en x^* permanece en x^* para todo tiempo futuro, es decir $\dot{x} = 0$ y $f(x^*) = 0$ [4].

Ahora bien, la no linealidad de un sistema físico trae consigo unos nuevos fenómenos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de caracterizar el mismo. Los fenómenos que se tendrán en cuenta principalmente se muestran en la figura 2.1, estos son:

2.2.1. Saturación

La saturación se define como un efecto causado, generalmente, por limitaciones físicas de los componentes que utiliza el sistema y por limitaciones en las condiciones de operación, en el ejemplo de un sistema térmico puede estar dado por la potencia mínima y máxima que puede recibir el actuador y la temperatura mínima y máxima que el sistema puede entregar. Este fenómeno se aprecia en la figura 2.1. (a)

2.2.2. Zonas Muertas

La zona muerta se define como un efecto no lineal donde el sistema entrega una salida nula para un rango de entradas determinadas, este fenómeno es causado en sistemas térmicos debido a la energía inicial necesaria para ponerlos en funcionamiento. Ver figura 2.1 (b)

2.2.3. Retardos

En sistemas físicos el efecto de retardo se entiende como el tiempo que se demora la salida en tomar el valor esperado después de aplicar una entrada válida. Para sistemas térmicos es de esperarse valores considerables en los retardos debido a que este tipo de sistemas es lento y su salida no toma el valor deseado de forma instantánea. Ver figura 2.1 (c)

2.2.4. Múltiples Puntos de Equilibrio

Un sistema lineal tiene un único punto de equilibrio, de esta forma tiene un punto de operación en estado estable que define el estado del sistema sin tener en cuenta el estado inicial. Por otro lado, un sistema no lineal puede tener más de un punto de equilibrio estable, luego el estado del sistema puede converger en uno de varios puntos de operación en estado estable, dependiendo del estado inicial del sistema [4].



Figura 2.1. Características de No Linealidades de (a) Saturación, (b) Zona Muerta y (c) Retardo respectivamente [2].

2.3. Linealización

Existen poderosas herramientas para analizar sistemas lineales, en este orden de ideas es necesario obtener un punto de operación válido del sistema y trabajar en una región lineal que permita utilizar dichas herramientas, este proceso se conoce como linealización. Sin embargo, este proceso trae consigo dos limitaciones importantes. Debido a que la linealización es una aproximación en la vecindad de un punto de operación, esta solo puede predecir el comportamiento del sistema en esta región y ciertamente no se puede predecir el comportamiento global a través del rango completo de operación. Sumado a esto, es fácil evidenciar que la dinámica de un sistema no lineal es mucho más compleja que la de un sistema lineal, de esta forma no puede asumirse una predicción general del sistema utilizando modelos netamente lineales [4]. La linealización por el contrario permitirá una ruta eficiente para el diseño del sistema de control.

En la figura 2.2 se aprecia la estructura y secuencia básica que debe tener el diseño de controladores.

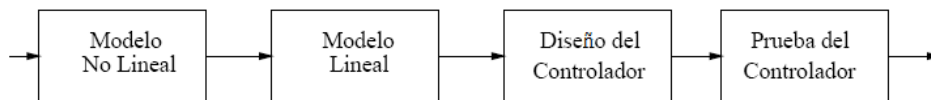


Figura 2.2. Ruta del Diseño de Controladores para sistemas no lineales [8].

Se sabe que un sistema lineal es de la forma:

$$\dot{x} = f(x) = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Donde m_i son coeficientes constantes y la salida del sistema depende de las variables x_i con $i=1, 2, 3, \dots, n$ y su relación es lineal. Si la salida del sistema no puede representarse en términos de la ecuación anterior se dice que el sistema es no lineal.

Generalmente para linealizar la función es necesario conocer el modelo no lineal de la planta, así escoger un punto de operación y tomar la recta tangente a la curva en dicho punto.

Suponiendo que se desea aproximar el comportamiento de este sistema a un sistema cuya región de operación se encuentra alrededor de un punto se emplean las series de Taylor cuyo desarrollo se muestra en [6].

Otro tipo de linealización, que no implica el conocimiento del modelo no lineal, consiste en aproximar a partir de subsistemas lineales el comportamiento no lineal que presenta la planta, esto con el fin de utilizar la teoría de control de sistemas lineales para diferentes regiones dentro del mismo sistema. La figura 2.3 muestra la aproximación de una función no lineal a una recta que puede representar su comportamiento. Este método se llevará a cabo para la linealización del sistema que se quiere controlar en este proyecto y será explicado en detalle en el capítulo 3.

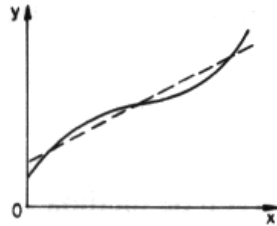


Figura 2.3. Aproximación de Sistemas No Lineales

2.4. Modelamiento matemático de sistemas lineales

Con el propósito de modelar la dinámica del sistema pueden emplearse modelos matemáticos que a través de un conjunto de ecuaciones representen de forma aproximada el comportamiento de un sistema lineal o linealizado.

2.4.1. Función de transferencia

Este método se conoce como la descripción entrada-salida del sistema, el cual permite hacer una relación matemática entre la entrada y la salida de la planta. Se aplica cuando se dice que el sistema está *relajado* o en *descanso* (condiciones iniciales nulas) antes de haber aplicado una entrada, lo cual evidencia que la salida se verá afectada únicamente después de aplicada la entrada. Para desarrollar esta descripción no debe tenerse en cuenta la estructura interna del sistema, el único acceso a éste es a través del conocimiento de las entradas y salidas respectivas.

La estructura puede modelarse como una “caja negra” donde lo único que puede hacerse es aplicar todo tipo de entradas y medir sus salidas correspondientes, para luego abstraer propiedades del sistema para los pares entrada-salida [2].

Una función de transferencia a nivel matemático se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, considerando condiciones iniciales nulas [3].

2.4.2. Modelo En Espacio De Estados

El comportamiento de los componentes de la mayoría de los sistemas dinámicos, se rigen en leyes físicas de la materia que también son usadas para determinar el modelo matemático y particularmente para determinar el modelo en espacio de estados.

El estado de un sistema depende de un conjunto variables linealmente independientes que lo definen. Un conjunto de variables es linealmente independiente si es imposible encontrar un conjunto de constantes m_i que satisfacen la ecuación exceptuando el caso en que todas las constantes sean cero:

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = 0$$

El número de variables de estado representa el orden del sistema. Un sistema dinámico modelado por espacio de estados está representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times r}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^r$. (\mathbb{R} es el conjunto de los reales), r es el número de entradas y q es el número de salidas. Por otro lado $x(t)$ es llamado el vector de estados, $y(t)$ es llamado el vector de salida, $u(t)$ es llamado el vector de entradas, A es la matriz de estados, B es la matriz de entrada, C es la matriz de salida y D es la matriz de transición directa, que por simplicidad se toma en la mayoría de casos como la matriz cero.

2.5. Sistemas en tiempo discreto

En la actualidad, muchos sistemas de control se basan en sistemas digitales debido a la implementación de instrumentos computacionales en la mayoría de procesos de la industria y la ingeniería. Aunque el control digital puede ser entendido como una aproximación del control analógico, este brinda características ventajosas a nivel teórico que en el control analógico no se presentan. Por estas razones se hace importante el estudio e implementación de sistemas en tiempo discreto, aplicados a procesos como un horno eléctrico doméstico en este trabajo de grado.

Un sistema en tiempo discreto se define como un dispositivo que actúa después de una excitación en la entrada por una señal que tiene un número finito de muestras en un intervalo dado. Se puede decir que a una entrada $x(n)$ se espera una salida $y(n)$ cuya relación está dada por [7]:

$$y(n) \equiv T\{x(n)\}$$

Donde T se define como la operación aplicada a $x(n)$ para obtener $y(n)$. Esta relación se observa en la figura 2.4 como una representación en bloques.

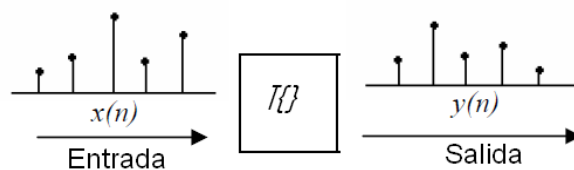


Figura 2.4. Relación entrada/salida de un sistema discreto [7].

La estructura básica de un sistema de control digital se muestra en la figura 2.5, consta de un proceso que por naturaleza tiene una señal de salida analógica $y(t)$ que debe ser convertida a una señal digital $y(t_k)$ por medio de un conversor A/D y luego llevada al algoritmo de control, seguido a esto un conversor D/A toma la señal del $u(t_k)$ algoritmo y lo acopla nuevamente a la naturaleza continua del proceso. Este proceso depende en su totalidad del tiempo de muestreo t_k sincronizado por medio de una señal de reloj [9].

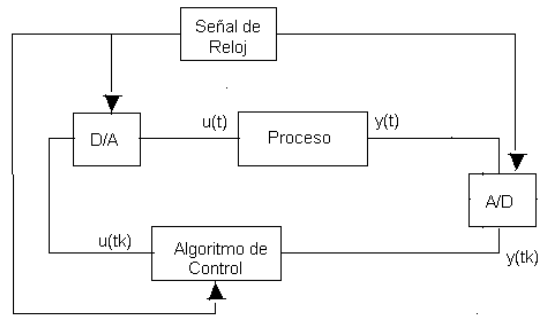


Figura 2.5. Estructura básica de un sistema de control digital [8].

El muestreo de una señal continua puede presentar fenómenos no naturales de un sistema lineal e invariante con el tiempo pero que pueden ser aprovechados para obtener resultados de control que con un sistema continuo no podrían ser posibles [9].

2.5.1. Período de Muestreo

El período de tiempo donde las mediciones son convertidas de analógico a digital se define como el tiempo de muestreo, el intervalo entre conversión y conversión es denominado periodo de muestreo (h). Es posible emplear varios tipos de muestreo, dependiendo de las características de la señal, sin embargo los más usuales son el muestreo por periodo constante y el muestreo por cambios de valor en la señal con respecto a una referencia. Existe la necesidad de seleccionar un periodo de muestreo adecuado con el fin de no perder datos relevantes de la dinámica del sistema, complementando los datos con la implementación de filtros anti aliasing [7].

El muestreo de señales genera componentes de frecuencia de diferentes magnitudes a la de muestreo y que deterioran las características de las señales a la salida de un sistema. Teniendo esto en cuenta, es necesario tomar precauciones en las propiedades del sistema para evitar que el muestreo cambie el comportamiento y el desempeño del control digital.

La buena selección del periodo de muestreo depende del propósito, la planta, su dinámica y de los costos computacionales principalmente. Escoger un periodo muy grande hace difícil reconstruir la señal en tiempo continuo y un periodo muy pequeño incrementa la cantidad de cálculos computacionales, lo cual no es apropiado.

En sistemas en lazo abierto se debe tener en cuenta el tiempo de subida y el periodo de muestreo como la relación de cuántos períodos existen en el tiempo de subida. De esta forma el número de periodos (N_r) se relaciona con el tiempo de subida (t_r) y el tiempo de muestreo (h) como indica la siguiente ecuación.

$$N_r = \frac{t_r}{h} \quad (2.1)$$

Para sistemas de primer orden la constante de tiempo del sistema es igual al tiempo de subida, por lo cual un factor adecuado sería $4 < N_r < 10$. Para un segundo orden teniendo en cuenta el factor de amortiguamiento (ξ) y la frecuencia natural del sistema (W_n) el tiempo de subida está dado por:

$$t_r = W_n^{-1} e^{\frac{\varphi}{\tan\varphi}}$$

Donde $\varphi = \cos^{-1}(\xi)$.

$$h = \frac{t_r}{N_r}$$

Manteniendo un criterio de $4 < N_r < 10$. Se debe tener en cuenta que los polos y ceros del sistema discreto se acercan al origen mientras que el intervalo de muestreo se incrementa.

2.5.2. Muestreo de Señales Continuas

Los subsistemas encargados de transformar de continuo a digital y digital a continuo son los conversores A/D y D/A. Por convención t_k es el instante de muestreo. El tiempo transcurrido entre instantes t_k y t_{k+1} es el periodo de muestreo (h). Donde $t_k = k * h$, $k \in \mathbb{N}$. La frecuencia de muestreo está entonces dada por:

$$f = \frac{1}{h} [\text{Hz}]$$

Comúnmente los conversores D/A son construidos buscando mantener la señal análoga constante hasta que una nueva conversión sea calculada, este tipo de convertor es llamado retenedor de orden zero o ZOH.

2.6 Transformada Z

En tiempo discreto, análogamente a la transformada de Laplace del tiempo continuo, se desarrolla la transformada Z. La transformada va de una secuencia a un rango de variable compleja. Matemáticamente la transformada Z se define como [9]:

$$Z\{f(kh)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)z^{-k}$$

Esta transformada permite la solución de ecuaciones en diferencias determinando la respuesta de un sistema discreto para una entrada dada, el análisis matemático puede ser estudiado en detalle en el capítulo 2 de [10].

2.7. Muestreo en Función de Transferencia

En la figura 2.6 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control digital. Aquí, el muestreador, el convertidor A/D, el controlador digital, el ZOH y el convertidor D/A producen una señal de control $u(t)$ en tiempo continuo para alimentar la planta. En la figura 2.7 se muestra las funciones de transferencia de los bloques involucrados.

Donde la función de transferencia del retenedor de orden zero es:

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-hs}}{s}$$

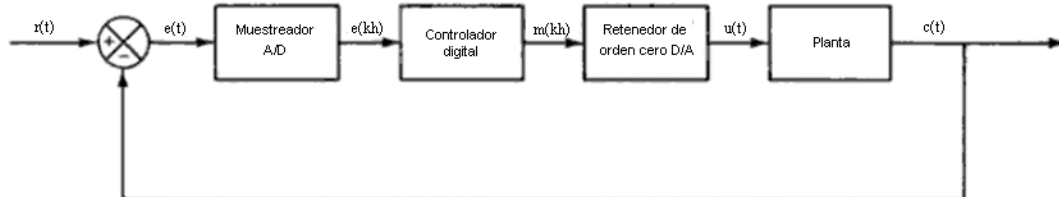


Figura 2.6. Sistema de Control Digital [10].

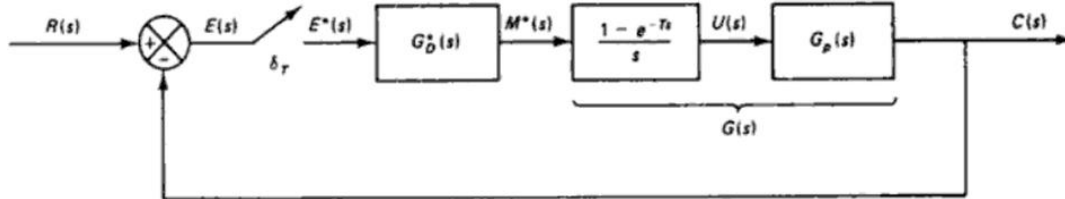


Figura 2.7. Sistema equivalente en Función de Transferencia del sistema completo de Control Digital [10].

La función de transferencia de la planta se denomina $G_p(s)$, de esta forma $G(s)$ es la función de transferencia de la planta con el retenedor que según la figura 2.7 se define como:

$$G(s) = G_p(s) \left(\frac{1 - e^{-h}}{s} \right)$$

$G_D^*(s)$ es la función de transferencia del controlador y $E^*(s)$ el error muestreado. A partir de la figura 2.7 se observa que la salida $C(s)$ está dada por:

$$C(s) = G(s)G_D^*(s)E^*(s)$$

Aplicando transformada Z,

$$C(z) = G(z)G_D(z)E(z)$$

Siguiendo con el desarrollo se llega a:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) representa la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control digital mostrado en la figura 2.7.

2.8. Cambio de Operadores Lineales

Para manejar en forma más simple los cálculos con las ecuaciones diferenciales, es conveniente hacer un cambio de operador lineal. Este cambio consiste en sustituir en $G(s)$ la variable s por una función en z . Estas transformaciones son flexibles en el sentido de que pueden realizarse bloque a bloque en diagramas compuestos, sin embargo debe considerarse que todas son aproximaciones de s a funciones racionales en z . Las transformaciones más comunes son las siguientes:

2.8.1. Diferencias hacia adelante (Forward)

Puede verse como una derivación adelantada, no causal, o como una integración rectangular retrasada. Su principal desventaja es que no conserva la estabilidad en la transformación de polos rápidos en $G(s)$. Utilizando una discretización en el plano s se busca sustituir la variable s por una función racional en z mediante el método de Forward. La sustitución se muestra en la ecuación (2.3)

$$s = \frac{z - 1}{h} \quad (2.3)$$

Donde h se define como el tiempo de muestreo establecido previamente para sistemas discretos. Este método no es conveniente en la mayoría de los casos debido a su naturaleza no causal.

2.8.2. Diferencias hacia atrás (Backward)

Puede verse como una derivación atrasada. Este método conserva la estabilidad en la transformación de polos en $G(s)$ y si existen polos reales rápidos en $G(s)$ no aparecen oscilaciones. La sustitución Backward se muestra en la siguiente ecuación.

$$s = \frac{z - 1}{zh} \quad (2.4)$$

2.8.3. Transformación bilineal (Tustin)

Puede verse como una integración trapezoidal. Este método conserva la estabilidad en la transformación de polos en $G(s)$, sin embargo si existen polos reales rápidos en $G(s)$ tienden a aparecer oscilaciones amortiguadas. La sustitución Tustin se muestra en la siguiente ecuación.

$$s = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.5)$$

2.9. Análisis de Sistemas en Tiempo Discreto

Se dice que un sistema es estable cuando sus trayectorias no cambian de forma significativa si las condiciones iniciales del sistema son modificadas en pequeñas cantidades. En este orden de ideas puede decirse que un sistema es estable si para toda entrada acotada el sistema genera una salida acotada. Existen métodos algebraicos o gráficos que permiten establecer la estabilidad del sistema, estos métodos permiten entender cómo los parámetros del controlador o del sistema influyen en la estabilidad de la planta.

Uno de los métodos más conocidos que puede utilizarse tanto en sistemas continuos como en sistemas discretos es el lugar geométrico de las raíces. Si bien en sistemas continuos la estabilidad depende de si los polos del sistema se encuentren en el semiplano izquierdo del plano imaginario, para sistemas discretos el límite de estabilidad cambia de ser el eje imaginario a ser un círculo de radio unitario (ver figura 2.8).

De igual forma los criterios de estabilidad de Nyquist y los diagramas de Bode permiten establecer mediante métodos gráficos la estabilidad del sistema.

Para sistemas de una entrada y salida simple los polos y ceros pueden hallarse del denominador y numerador de la función de transferencia respectivamente. También presentan una base teórica sólida que revela importantes características de un sistema.

Los polos tienen una relación con la función de tiempo, mientras que los ceros suponen la forma en que las entradas y las salidas están acoplados a los estados. Los polos de un sistema descrito en espacio de estados son los valores propios del mismo, de esta manera se encuentra que al hacer un mapeo desde el tiempo continuo y sus polos hacia los de tiempo discreto, esto se relaciona mediante la ecuación:

$$Z = \exp(sh)$$

Un mapeo del plano complejo de (s) dentro del plano complejo Z como por ejemplo la mitad izquierda del plano s están dentro de un círculo unitario del plano Z como se muestra en la figura 2.8.

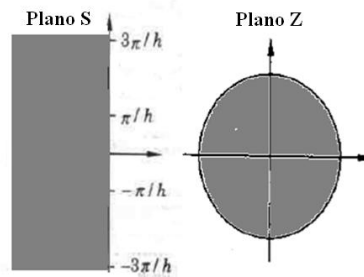


Figura 2.8. Estabilidad y correspondencia entre (a) plano s y (b) plano z [8].

La correspondencia entre planos S y Z no es única, un punto en el plano Z corresponde a infinitos puntos en el plano S pero un punto en el plano S corresponde solo un punto en el plano Z [8].

2.10. Teoría de control

La teoría de control y la ingeniería de control tienen como fundamento tratar con la dinámica de procesos de diversas áreas. Es bien sabido que los procesos presentan un número importante de variables dependientes, estas variables deben ser controladas con el fin de obtener un comportamiento deseado del sistema. Para un control funcional del sistema es necesario tener en cuenta los parámetros ligados el mismo (entradas, perturbaciones, puntos de equilibrio, etcétera). Ahora bien, para relacionar e interactuar las entradas con las salidas es necesario implementar un control por realimentación, en el cual el control correctivo aplicado a la entrada del sistema se genera a través de medidas en la salida de este.

El problema principal del diseño del control de un sistema es determinar las características y parámetros del controlador, para esto las salidas controladas pueden [9]:

1. Establecerse en valores determinados denominados referencias.
2. Mantenerse en los valores de referencia a pesar de los disturbios desconocidos.

Usar control digital en un sistema facilita la utilización de cálculos complejos en la teoría, e impulsa la implementación de circuitos lógicos y funciones no lineales en forma manejable. Un beneficio de usar sistemas digitales es poder almacenar datos referentes al comportamiento del mismo como un archivo útil para determinar fallas, errores, mejoras, con el fin de monitorear la respuesta del sistema.

2.10.1. Control PID

El control PID permite regular el comportamiento del sistema basado en tres parámetros básicos de control, representados en una acción proporcional, una acción derivativa y una acción integral. Es necesario sintonizar cada una de estas acciones con el fin de garantizar un control que cumpla con las especificaciones.

La acción proporcional se encarga de corregir los picos y las oscilaciones de la respuesta del sistema; la acción integral corrige el error en estado estable aproximándolo a cero y la acción derivativa se encarga de corregir los cambios rápidos en el transitorio.

La ecuación que representa el comportamiento de un PID continuo se puede expresar como:

$$PID_C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d$$

De otra forma:

$$PID_c(s) = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s} \quad (2.6)$$

Donde K_p es la constante proporcional, K_i es la constante integral y K_d es la constante derivativa. Para cada una de las acciones de control se puede establecer que según su magnitud pueden presentarse diferentes efectos como muestra la tabla 2.1

$MV = k_p e + \frac{k_i}{s} e + k_d s$

	Pequeño	Adecuado	Grande
Inestabilidad		Corrige perturbación	Corrección lenta de perturbación
Offset		Corrige Offset	Oscilación
Pico y Oscilación		Corrige picos y oscilaciones	Offset Alcance a SP lento

Tabla 2.1 Comportamiento de parámetros PID [11].

Para representar el comportamiento de un PID discreto se puede tomar la función de transferencia del PID continuo mostrada en la ecuación (2.6) y realizar la respectiva discretización a través de los métodos propuestos [sección 2.8]. Dependiendo del método utilizado y de la dinámica propia de la planta, los resultados obtenidos pueden diferir en el comportamiento transitorio y en la estabilidad del sistema.

2.10.2 Control por Realimentación de Estados

Considerando un proceso descrito a través de un modelo matemático lineal correspondiente a un proceso linealizado, la técnica de control por realimentación de estados consiste en establecer una ley de control de la forma:

$$u = -Kx + u_1$$

Donde K es una matriz constante; y u_1 representa una evolución temporal de referencia del control u . En la figura 2.11 se presenta un esquema en bloques de un sistema de control por realimentación de estados. El objetivo de este control es seleccionar la matriz de realimentación K , de manera tal que los estados del proceso evolucionen según una dinámica deseada preestablecida, donde es posible plantear un problema de diseño por ubicación de polos que consiste en especificar la ubicación deseada de los polos en el plano complejo y calcular las componentes de K que den lugar a dichos polos [12].

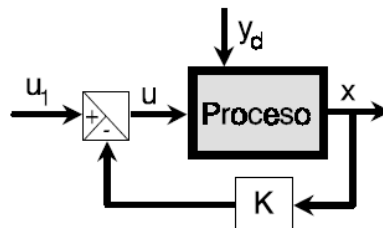


Figura 2.11. Sistema de control por realimentación de estados [12].

Debe notarse que en el sistema de control propuesto se asume que todos los estados del proceso son medibles; esto no siempre es posible en un proceso real y es entonces necesario recurrir a

estimadores de estado u observadores, ya que la realimentación de estados no modifica la controlabilidad pero puede destruir la observabilidad del sistema en lazo abierto [12]. Finalmente, es válido establecer que el control por realimentación de estados se maneja de la misma forma en tiempo continuo y en tiempo discreto.

2.10.3. Control Polinomial RST

El enfoque de ecuaciones polinomiales es un método alternativo al diseño de controladores por ubicación de polos y es igualmente realizable como sistema físico, a pesar que, como cualquier otro, presenta restricciones propias de la planta, y del diseño como tal. Dichas restricciones serán especificadas más adelante.

2.10.3.1 La ecuación Diofantina

La ecuación Diofantina representa los polos del sistema controlado y realimentado teniendo en cuenta las características del numerador y denominador de la función de transferencia de la respuesta impulso del sistema junto con el numerador y denominador de la función de transferencia de la respuesta impulso del control. De acuerdo con esto, se tienen en cuenta los polinomios mencionados:

Polinomio del numerador de la planta: $B(z)$.
 Polinomio del denominador de la planta: $A(z)$.
 Polinomio numerador del controlador: $\beta(z)$.
 Polinomio denominador del controlador: $\alpha(z)$.

Donde

$$\begin{aligned} A(z) &= z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n \\ B(z) &= b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_{n-1}z + b_n \\ \alpha(z) &= \alpha_0z^{n-1} + \alpha_1z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2}z + \alpha_{n-1} \\ \beta(z) &= \beta_0z^{n-1} + \beta_1z^{n-2} + \dots + \beta_{n-2}z + \beta_{n-1} \end{aligned}$$

En diagrama de bloques se representa en la figura 2.9.

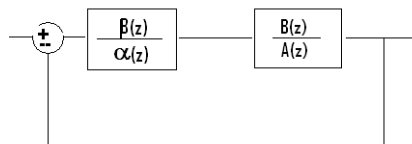


Figura 2.9. Representación clásica de control RST [10].

Como se había aclarado existen ciertas restricciones, $A(z)$ debe ser un polinomio mónico de grado n , es decir que el coeficiente del término de mayor grado debe ser siempre uno, de lo contrario será necesario realizar un ajuste matemático. La función de transferencia en lazo abierto $\frac{B(z)}{A(z)}$ debe ser completamente controlable y observable, esto es, $A(z)$ y $B(z)$ deben ser polinomios coprimos, como se explica en la página 518 de [10].

La ecuación Diofantina se completa igualando la combinación de estos polinomios a un polinomio estable de grado $(2n-1)$ denominado $D(z)$ de la forma:

$$D(z) = d_0z^{2n-1} + d_1z^{2n-2} + \dots + d_{2n-2}z + d_{2n-1}$$

Así, el polinomio Diofantino queda expresado como:

$$A(z)\alpha(z) + B(z)\beta(z) = D(z) \tag{2.7}$$

Este tipo de diseño busca el $\beta(z)$ y el $\alpha(z)$ para satisfacer la ecuación (2.7) que representan el numerador y denominador del controlador $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$. Sin embargo falta por determinar la procedencia del polinomio $D(z)$ que completa la ecuación Diofantina.

De la figura 2.9 es posible obtener la función de transferencia a lazo cerrado donde su denominador está representado por la primera parte de la ecuación (2.7):

$$\frac{B(z)\beta(z)}{A(z)\alpha(z) + B(z)\beta(z)}$$

Por este motivo $D(z)$ debe ser escogido para que represente un comportamiento estable y dinámicamente deseado del sistema, es decir $D(z)$ ha de ser equivalente a la ecuación característica deseada y a un factor que ajuste el orden de $D(z)$ al orden que resulta de la parte izquierda de la ecuación (2.7).

Es posible decir que,

$$D(z) = H(z)\beta(z)$$

Donde $H(z)$ es el polinomio deseado y $F(z)$ es el polinomio de error de observador o ajuste. Si $D(z)$ es estable es de esperarse que $H(z)$ y $F(z)$ también lo sean. Además si el grado de $D(z)$ es $(2n-1)$, el grado de $H(z)$ debe ser (n) y el de $F(z)$ es $(n-1)$.

Existen varios modelos de controlador, además del mostrado en la figura 2.9, se encuentran también los mostrados en la figura 2.10.



Figura 2.10. Representación alterna de control RST [10].

Donde k_0 es la ganancia ajustable requerida por el sistema para que la salida $Y(z)$ en estado estable sea igual a uno cuando la entrada es un escalón unitario $R(z) = 1 - z^{-1}$, y donde la configuración de la figura 2.10 representa un regulador. Sea cual sea la configuración siempre será posible establecer una forma donde el denominador de la función de transferencia impulso en realimentación representa la combinación de polinomios de la ecuación Diofantina. k_0 se puede determinar haciendo el límite de la función de transferencia cuyo desarrollo se encuentra en [10], de donde se obtiene:

$$k_0 = \frac{H(1)F(1)}{B(1)\beta(1)} \quad (2.8)$$

Conclusión: En este capítulo se presentaron diferentes herramientas teóricas que serán utilizadas en el resto del documento. Se trataron desde elementos de identificación hasta estructuras básicas de control. Además se mencionaron diferentes métodos para la discretización de controladores mediante aproximaciones. Específicamente en los métodos de control se mostraron a nivel general conceptos basados en función de transferencia continuas y discretas como el controlador PID, el modelo de espacio de estados como la realimentación de estados y funciones de transferencia discreta como el método polinomial RST. En los capítulos siguientes cada uno de estos métodos será utilizado y analizado para el control de un horno eléctrico convencional

3. IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA

Resumen – En este capítulo se tratará la descripción, adquisición, linealización y caracterización de la planta, como medio para llegar a un modelo apropiado del sistema sobre el cual se diseñarán controladores en el capítulo 4. Crear un modelo implica la necesidad de generar pruebas experimentales que extraigan las características y valores importantes de la planta, como ganancia y tiempos; por lo tanto será necesario idear y desarrollar programas en MATLAB® y LabView® que lo permitan. Al final del capítulo se realizará un ajuste del modelo calculado teóricamente determinando el error entre el modelo y la respuesta real, con el fin validar los resultados obtenidos.

3.1 Descripción de la Planta

La figura 3.1 muestra la descripción general del sistema. La planta está compuesta por un horno eléctrico Kalley KWS-10SS de entrada alterna monofásica que funciona por calentamiento de dos resistencias térmicas ubicadas al interior del mismo. Como sensor de la variable de proceso se utilizan termopares tipo K cuyo desarrollo y características se describen en [1]. Estos termopares toman el valor de la temperatura desde dos puntos centrales dentro del horno y son posteriormente adquiridos a través de la tarjeta CDAQ-9172, como una señal análoga, para que puedan ser vistos y analizados en el computador. Para una medición adecuada la variable de proceso y su respectivo control se analiza a través del promedio de la señal entregada por los dos termopares.

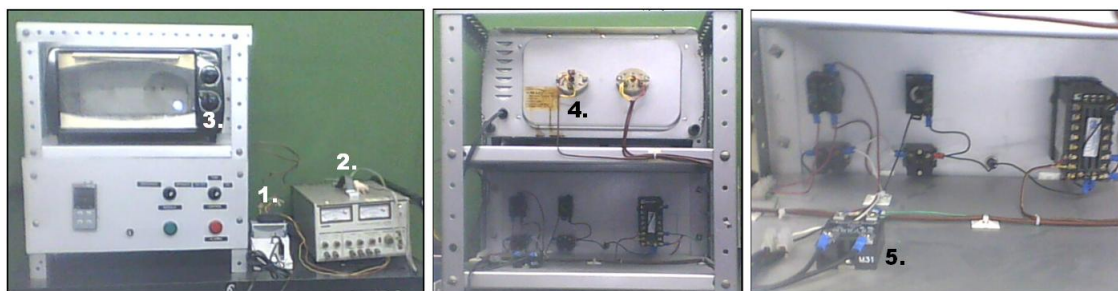


Figura 3.1. Composición de la planta. 1) Tarjeta de adquisición CDAQ-9172, 2) Fuente de alimentación para DAQ, 3) Horno eléctrico monofásico, 4) Termopares tipo K, 5) SSR.

Una vez adquirida la temperatura se implementa el algoritmo de control en LabView® que arroja una señal cuadrada, con frecuencia de 60 Hz (frecuencia de la línea) y amplitud de 20 mA (limitación del módulo de adquisición) como requiere la tarjeta de adquisición. La señal de control varía el ciclo útil, regulando la cantidad de potencia que se transfiere al horno manifestándose en la cantidad de calor que produce cada resistencia.

Para el efecto anterior es necesario un transductor que tome la señal cuadrada y genere un voltaje eficaz de la línea proporcional al ciclo útil de la señal cuadrada. El encargado de esto es el SSR Crydom D2425 que recibe un voltaje entre 3V y 33V DC, permitiendo el paso de la línea, donde si dicho voltaje es menor a 3V la salida será nula. El relevo puede pensarse como

un multiplicador entre la señal cuadrada y la señal de la línea, por esta razón la señal que alimenta al horno será una versión de la línea pero seccionada porcentualmente en cada periodo.

En la figura 3.2 se muestra la configuración básica que tiene el sistema, enunciando cada uno de los elementos importantes y la forma en que están conectados.

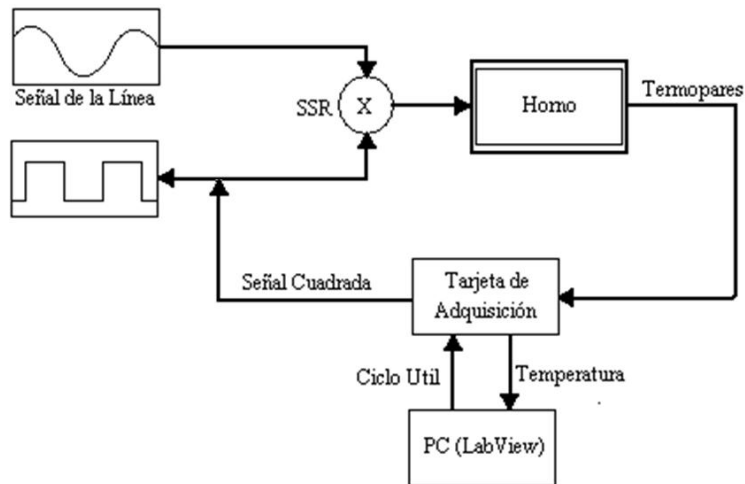


Figura 3.2. Representación en bloques de la configuración de la planta.

3.2 Adquisición de Datos

Para la caracterización del sistema fue necesario establecer un método que permitiera identificar el comportamiento del sistema para cada una de las entradas posibles. Para analizar la respuesta del sistema se optó por utilizar una rampa que permitiera analizar el comportamiento de la planta para cualquier valor de entrada.

A través de LabView ® se diseñó gráficamente un sistema de adquisición de datos con el fin de guardar y analizar posteriormente los resultados obtenidos mediante rutinas implementadas en MATLAB ®. Teniendo en cuenta que la pendiente de la rampa de entrada debe ser pequeña debido a la dinámica lenta de la planta y a que el sistema siempre debe encontrarse en estado estacionario para el cálculo de ganancia y para poder observar las zonas lineales, se implementó una rutina que incrementa el ciclo útil progresivamente en un factor de 0.0148 cada segundo, lo que equivale a un incremento de 1% de ciclo útil cada 68 segundos aproximadamente.

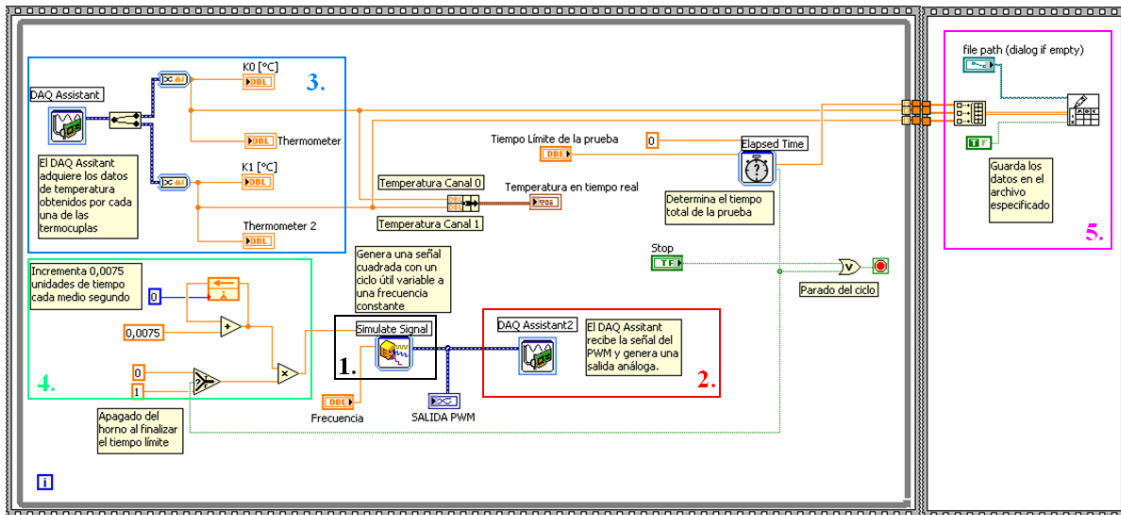


Figura 3.3 Implementación en LabView® para adquisición de datos.

En la figura 3.3 se observan cinco funciones que conforman la caracterización del sistema, éstas son: 1) generación de una señal cuadrada (Simulate Signal), 2) envío de la señal cuadrada al horno por medio de una salida análoga de la tarjeta CDAQ, 3) adquisición de los valores de temperatura por medio de los termopares tipo K con la tarjeta de adquisición CDAQ, 4) el bloque encargado de incrementar el ciclo útil de acuerdo a la pendiente fijada y 5) un arreglo que permite guardar los resultados obtenidos después de finalizada la prueba.

3.3 Análisis del comportamiento

Los resultados obtenidos después de aplicada la rampa se almacenaron y se graficaron seguidamente con ayuda de MATLAB® como se muestra en la figura 3.4.

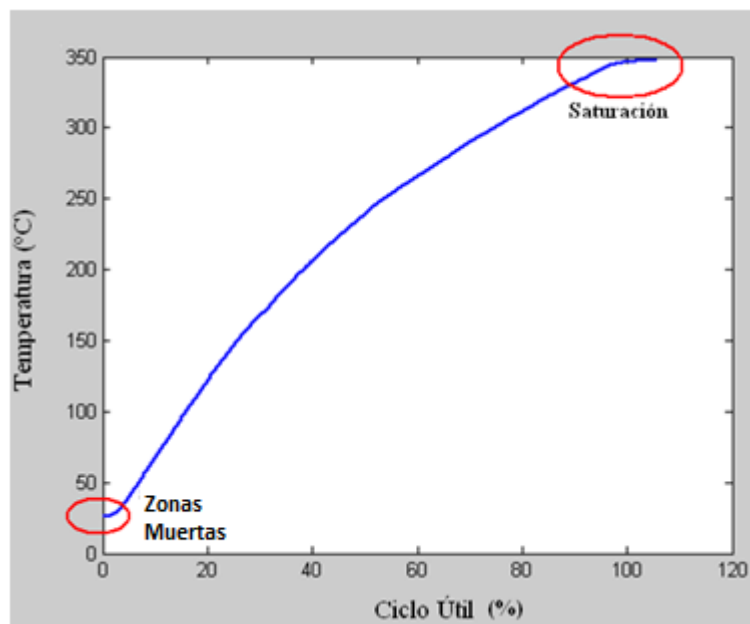


Figura 3.4 Respuesta de la planta a entrada rampa.

De acuerdo con el comportamiento del sistema se aprecia la no linealidad de la planta (si fuera lineal debería ser una línea recta). En la gráfica se destacan efectos de saturación para una temperatura aproximada de 348° C a un ciclo útil de 98% y un tiempo muerto cercano a 120 segundos. Se observa que la variación del ciclo útil no representa una variación proporcional en la salida de la planta para todo el rango evaluado, por lo cual es necesario analizar diferentes regiones de operación y asumir cada una de ellas como un subsistema lineal.

3.4 Regiones de Operación

Para determinar el número de regiones lineales se establecen puntos críticos, donde se presentan cambios significativos de pendiente, el lugar entre estos puntos representa las regiones lineales donde se establecerán rectas que se asemejen al comportamiento característico de la planta. Es necesario realizar ajustes en la ubicación y la cantidad de puntos críticos hasta lograr que los resultados obtenidos sean lo más aproximados al comportamiento real.

Después de ajustes y comparaciones entre los modelos se obtuvo la grafica mostrada en la figura 3.5, donde se encuentra la linealización aproximada del sistema sobrepuesta con la respuesta real.

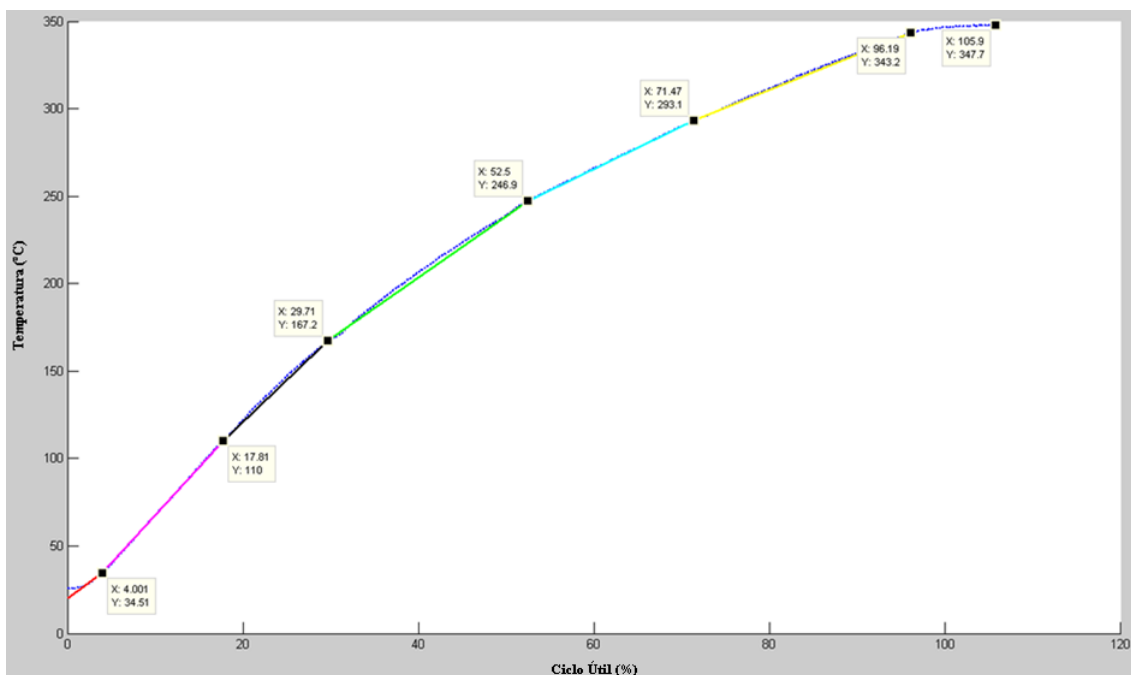


Figura 3.5 Análisis de regiones de operación lineales.

En la gráfica de la figura 3.5 se encuentran cinco regiones de operación indicadas con un color para su diferenciación. Los ajustes realizados permiten que la linealización aproximada del sistema pueda ser utilizada para diseñar los respectivos controladores. En la tabla 3.1 se puede visualizar el rango de temperaturas y de ciclo útil correspondientes a cada una de las zonas lineales del sistema.

REGION LINEAL	RANGO DE TEMPERATURA °C	RANGO DE CICLO UTIL %
REGION LINEAL 1	34.51	4
REGION LINEAL 2	110	17.81 (incluido)
REGION LINEAL 3	167.2	29.71 (incluido)
REGION LINEAL 4	246.9	52.5 (incluido)
REGION LINEAL 5	293.1	71.47 (incluido)
	343.2	96.19 (incluido)

Tabla 3.1 Rangos de operación de regiones lineales.

3.4.1 Caracterización de Regiones de Operación

De cada región lineal, en el modelo aproximado, es posible obtener el valor de pendiente de la recta trazada, en unidades de $\frac{^{\circ}C}{\%DC}$ que corresponde a la ganancia k de un sistema de primer orden $\frac{k}{\tau S + 1}$. La figura 3.6 ilustra una gráfica similar a la de la figura 3.5 pero cambiando el eje del ciclo útil por un eje temporal. Se puede encontrar el valor del tiempo muerto para cada región, proyectando cada recta al eje de tiempo y determinando el cruce con el valor inicial de temperatura (temperatura ambiente). De esta forma se evidencia que para las primeras regiones existe un tiempo muerto mientras que para las últimas no, debido a que el cruce mencionado con las abscisas no siempre se da en valores positivos de tiempo. Estos valores se encuentran consignados en la tabla 3.3. Un sistema de primer orden más tiempo muerto t_o puede representarse como lo muestra la siguiente ecuación:

$$G_p = \frac{ke^{-t_o s}}{\tau S + 1} \quad (3.1)$$

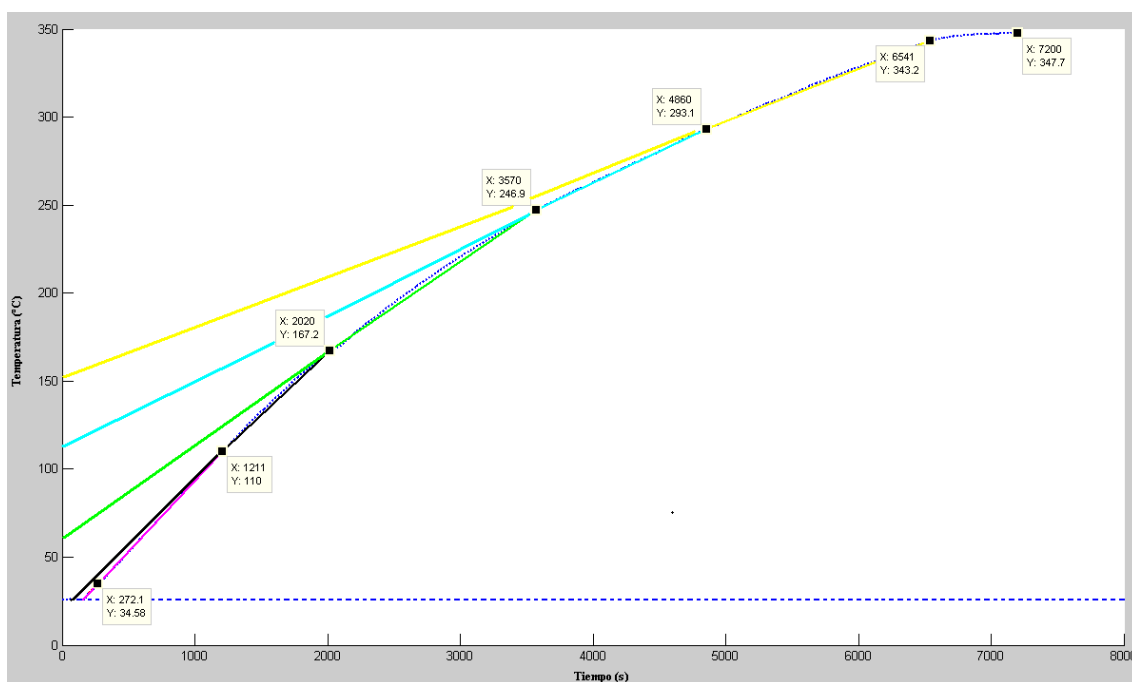


Figura 3.6 Análisis de tiempo muerto en regiones de operación lineales.

Para finalizar el modelado y completar los parámetros de la función de transferencia de la ecuación (3.1), es necesario encontrar la constante de tiempo τ , sin embargo, esto no es posible extraerlo de la prueba anterior (entrada rampa), sino de una nueva prueba que evalúe el tiempo de respuesta del horno para cada región de operación. La constante de tiempo puede ser tomada de la respuesta del sistema a una entrada paso, evaluando los tiempos correspondientes al 28,3% y el 63,2% del valor de temperatura en estado estable, y tomando tres veces la mitad de la diferencia entre estos tiempos [1]. Esto es:

$$\tau = \frac{3}{2} (t_{63,2\%} - t_{28,3\%}) \quad (3.2)$$

La implementación de la prueba en LabView® tiene en cuenta cada región lineal, verificando que la temperatura inicial se encuentre en el rango de operaciones donde se quiere hallar la constante de tiempo, para luego generar una entrada paso que permita que la salida del sistema se mantenga dentro de la zona que se desea. La rutina implementada conmuta entonces dos entradas paso de distinto valor asegurando la permanencia dentro de la región lineal que se está evaluando, es decir, la primera entrada paso pone la variable de proceso dentro la zona lineal y la segunda entrada paso se genera sin salirse de la zona. De la segunda entrada paso se evalúa la constante de tiempo. Lo anterior implica que la prueba se debe repetir para cada una de las cinco zonas lineales de la planta. La implementación se presenta en la figura 3.7.

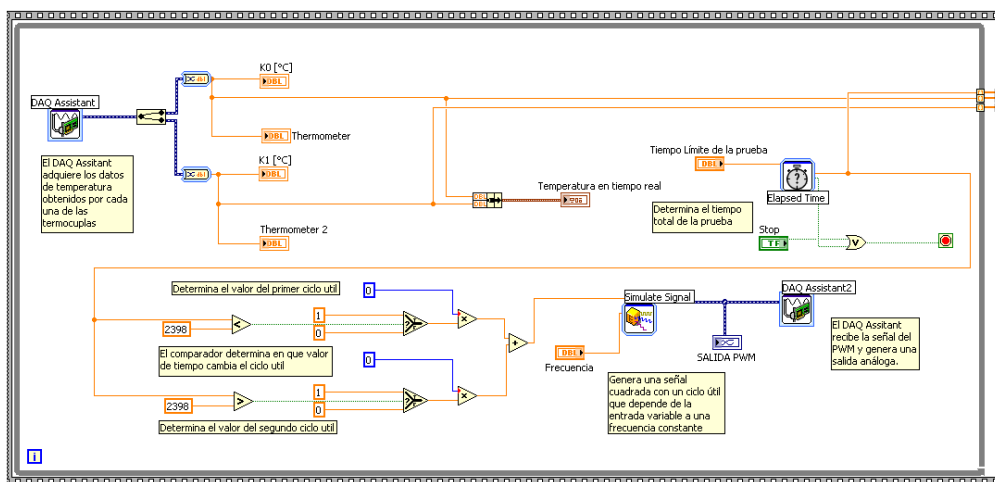


Figura 3.7 Implementación en LabView® para cálculo de constantes de tiempo.

Los valores que se utilizan para generar la secuencia de dos pasos se muestran en la tabla 3.2.

REGIÓN	EXITACIÓN	% DC
REGIÓN LINEAL 1	Entrada Paso 1	7
	Entrada paso 2	12
REGIÓN LINEAL 2	Entrada Paso 1	22
	Entrada paso 2	26
REGIÓN LINEAL 3	Entrada Paso 1	40
	Entrada paso 2	43
REGIÓN LINEAL 4	Entrada Paso 1	60
	Entrada paso 2	64
REGIÓN LINEAL 5	Entrada Paso 1	82
	Entrada paso 2	87

Tabla 3.2 Valores de entrada para el cálculo de la constante de tiempo.

Para cada una de las regiones se determinaron las constantes de tiempo en la segunda entrada paso aplicada como se muestra en la figura 3.8, donde los puntos mostrados corresponden al 28.3% y 63.2% respectivamente.

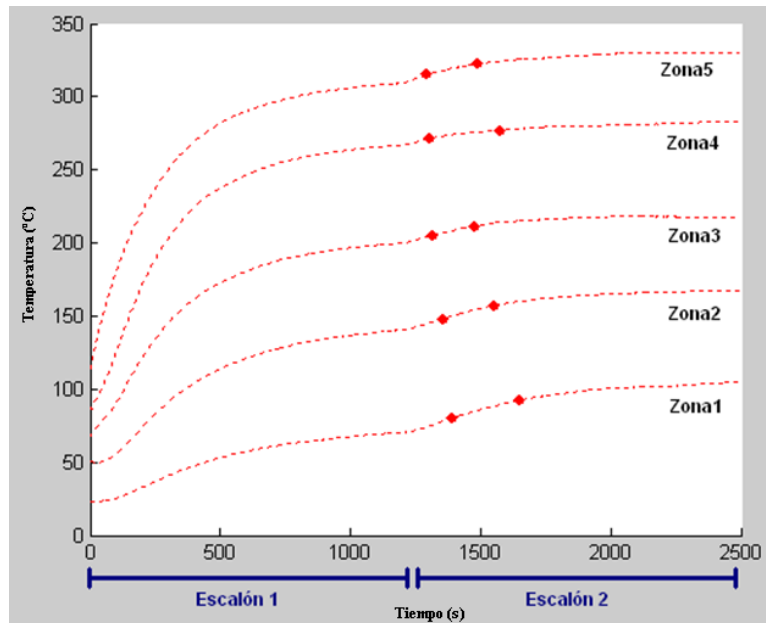


Figura 3.8 Respuesta paso y determinación de los dos puntos para el cálculo de la constante de tiempo de cada zona.

Una rutina implementada en MATLAB® (ver Anexo 1) es la encargada de tomar todos los datos y construir la función de transferencia para cada una de las zonas lineales. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 3.3.

REGIÓN LINEAL	GANANCIA $\left(\frac{^{\circ}C}{\%DC}\right)$	CONSTANTE DE TIEMPO (s)	TIEMPO MUERTO (s)	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA
1	6.4552	386.25	124.562	$\frac{6.4552e^{-124.56s}}{386.25s + 1}$
2	5.6651	293.25	41.562	$\frac{5.6651e^{-41.562s}}{293.25s + 1}$
3	4.1285	242.226	0	$\frac{4.1285}{242.226s + 1}$
4	2.8749	403.477	0	$\frac{2.8749}{403.477s + 1}$
5	2.3902	293.25	0	$\frac{2.3902}{293.25s + 1}$

Tabla 3.3 Cálculo de función de transferencia para cada región.

3.4.2 Caracterización de Regiones de Enfriamiento

Debido a las características del sistema térmico es de esperarse que la acción de enfriamiento del horno se comporte diferente a las regiones de operación en relación con el tiempo; de esta forma es indispensable determinar la función de transferencia de dicha acción. Para tal fin se procede de forma similar a la caracterización de las regiones de calentamiento, donde después de colocar el horno en una temperatura determinada se aplica una entrada paso nula, es decir, se apaga el sistema y se adquieren los datos del comportamiento para un posterior análisis.

Para determinar la función de transferencia, es necesario hallar la máxima tasa de cambio que presenta la gráfica debido a que esta representa la ganancia del sistema; de igual forma, mediante el método de los dos puntos mostrado en la ecuación (3.2) se encuentra la constante del tiempo del sistema, tal como muestra la figura 3.9. Este proceso puede encontrarse en el Anexo 2 como un desarrollo también realizado en MATLAB®.

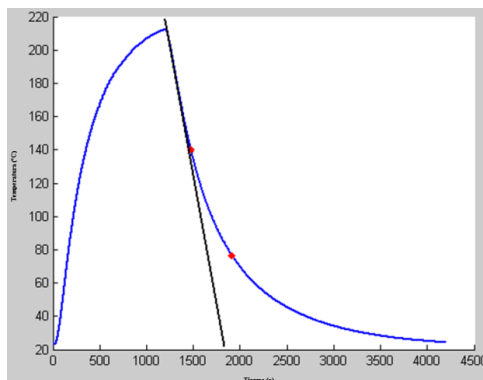


Figura 3.9 Respuesta paso de la planta en enfriamiento

Los resultados de ganancia, constante de tiempo y tiempo muerto se presentan en la tabla 3.4 con su respectiva función de transferencia.

REGIÓN LINEAL	GANANCIA ($\frac{^{\circ}C}{\%DC}$)	CONSTANTE DE TIEMPO (s)	TIEMPO MUERTO (s)	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA
ENFRIAMIENTO	0.4062	658.5	0	$\frac{0.4062}{658.5s + 1}$

Tabla 3.4 Cálculo de función de transferencia para región de enfriamiento

3.4.3 Validación de Modelos

Es indispensable comprobar que las funciones de transferencia calculadas teóricamente representan el comportamiento del sistema, para esto es necesario analizar los resultados teóricos y a través de una simulación compararlos con el modelo real en cada una de las regiones lineales. De esta forma se establece si el modelo calculado tiene un comportamiento similar a la planta real o si por el contrario hay que realizar ajustes que permitan llegar a un modelo más preciso.

3.4.3.1 Validación de Función de Transferencia de Regiones de Operación

Después de obtener la función de transferencia de cada una de las regiones lineales es preciso validar los resultados, para tal fin se generaron entradas paso de diferentes valores dentro del rango de operación de cada zona y con ayuda de MATLAB® se simuló la respuesta con el fin de obtener resultados similares.

REGIÓN LINEAL	MODELO SIMULADO	MODELO REAL
1	10%	10%
2	25.5%	25.5%
3	44%	44%
4	60%	60%
5	85%	85%

Tabla 3.5 Entradas en Ciclo Útil para cada región.

Las pruebas se realizaron cumpliendo con los valores de entrada mostrados en la tabla 3.5 correspondientes a un valor arbitrario que asegure que la salida se encuentre dentro de cada región del modelo. Los resultados obtenidos se enseñan en la figura 3.10 y 3.11, donde la línea violeta representa la salida simulada y la línea azul representa la salida real de la planta.

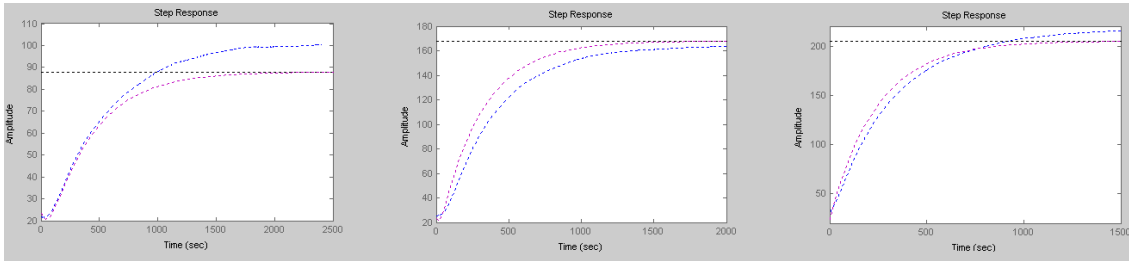


Figura 3.10 Comparación entre respuesta de la planta modelada y real para regiones 1, 2 y 3.

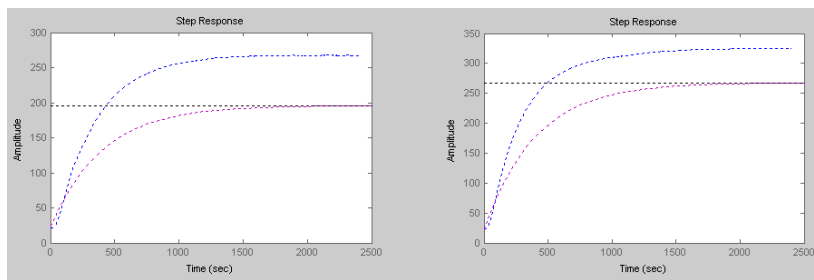


Figura 3.11 Comparación entre respuesta de la planta modelada y real para regiones 4 y 5.

El error (e) que presenta el modelo calculado con relación a la respuesta real del sistema se muestra en tabla 3.6, junto con medidas estadísticas que cuantifican la aproximación del modelo. La media muestra cual es el valor central al que tienden todos los datos del error, la varianza especifica que tan dispersos están los datos con respecto a este valor central, mientras que la norma mide la magnitud del error en general.

REGION	MODELO	MEDIA (e)	VARIANZA (e)	NORMA(e)
1	$\frac{6.4552e^{-124.56s}}{386.25s + 1}$	7.3625	19.4333	85.7004
2	$\frac{5.6651e^{-41.562s}}{293.25s + 1}$	-6.7233	9.9207	74.1787
3	$\frac{4.1285}{242.226s + 1}$	3.5808	85.5304	98.7408
4	$\frac{2.8749}{403.477s + 1}$	68.4790	197.9952	698.9557
5	$\frac{2.3902}{293.25s + 1}$	61.7323	143.9702	625.6089

Tabla 3.6 Error entre respuesta de la planta modelada y real para cada región.

Se observa que se presentan diferencias entre los valores medidos y los valores simulados, por lo cual el modelo calculado no puede ser utilizado debido a la magnitud del error. Se realiza un ajuste experimental de los parámetros de las funciones de transferencia calculadas a unas más

precisas que representen mejor el comportamiento del sistema en cada una de las regiones, como se muestra en la tabla 3.7.

REGIÓN LINEAL	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA OBTENIDA	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA APROXIMADA
1	$\frac{6.4552e^{-124.56s}}{386.25s + 1}$	$\frac{7.7e^{-100s}}{495s + 1}$
2	$\frac{5.6651e^{-41.562s}}{293.25s + 1}$	$\frac{5.5e^{-65s}}{380s + 1}$
3	$\frac{4.1285}{242.226s + 1}$	$\frac{4.45}{350s + 1}$
4	$\frac{2.8749}{403.477s + 1}$	$\frac{4.12}{320s + 1}$
5	$\frac{2.3902}{293.25s + 1}$	$\frac{3.53}{280s + 1}$

Tabla 3.7 Aproximación del modelo de cada región.

Al comparar nuevamente la respuesta del sistema modelado utilizando las funciones de transferencia aproximadas, se evidencia que la salida se acerca a la respuesta real, como se presenta en las figuras 3.12 y 3.13.

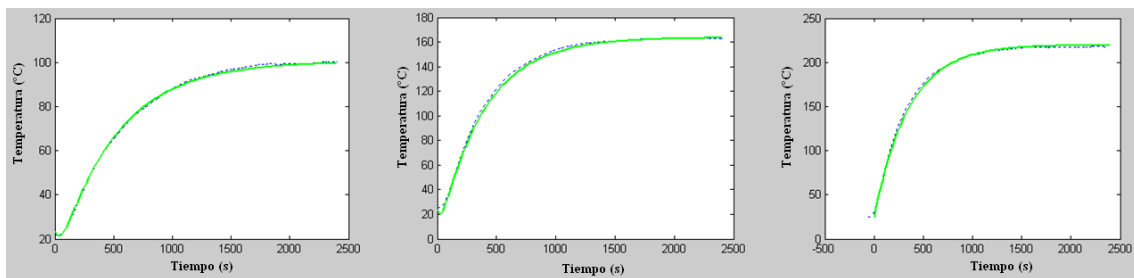


Figura 3.12 Comparación entre respuesta de la planta aproximada y real para regiones 1, 2 y 3.

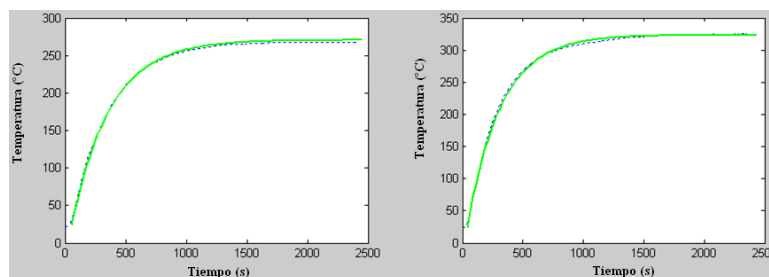


Figura 3.13 Comparación entre respuesta de la planta aproximada y real para regiones 4 y 5.

En las figuras 3.12 y 3.13, la línea azul muestra el comportamiento real de la planta a diferentes entradas según la región en la que se encuentre y la línea verde es la aproximación, utilizando la función de transferencia aproximada de la tabla 3.7.

Se observa que las aproximaciones para cada una de las cinco regiones lineales ahora son más apropiadas y modelan mucho mejor el comportamiento real de la planta. Para corroborar esta aproximación se determina nuevamente el error y se calcula su media, su varianza y la

respectiva norma, encontrando valores más confiables que en el caso anterior. Estos valores se observan en la tabla 3.8.

REGION	MODELO	MEDIA (e)	VARIANZA (e)	NORMA(e)
1	$\frac{7.7e^{-100s}}{495s + 1}$	0.2007	0.5775	7.8228
2	$\frac{5.5e^{-65s}}{380s + 1}$	1.1730	0.8543	13.4091
3	$\frac{4.45}{350s + 1}$	-1.0715	0.2850	9.3347
4	$\frac{4.12}{320s + 1}$	-2.6060	0.0804	16.7824
5	$\frac{3.53}{280s + 1}$	-0.6198	0.5911	6.9403

Tabla 3.8. Error entre respuesta de la planta aproximada y real para cada región.

3.4.3.2 Validación de Función de Transferencia de Región de Enfriamiento

Al igual que para las regiones de operación de calentamiento es necesario validar los resultados obtenidos en la zona de enfriamiento. De la misma forma que se analizaron los resultados del modelo calculado, en la gráfica de la figura 3.14, se observa el comportamiento real de la planta con dos comportamientos simulados, uno para el modelo teórico y otro para el modelo aproximado.

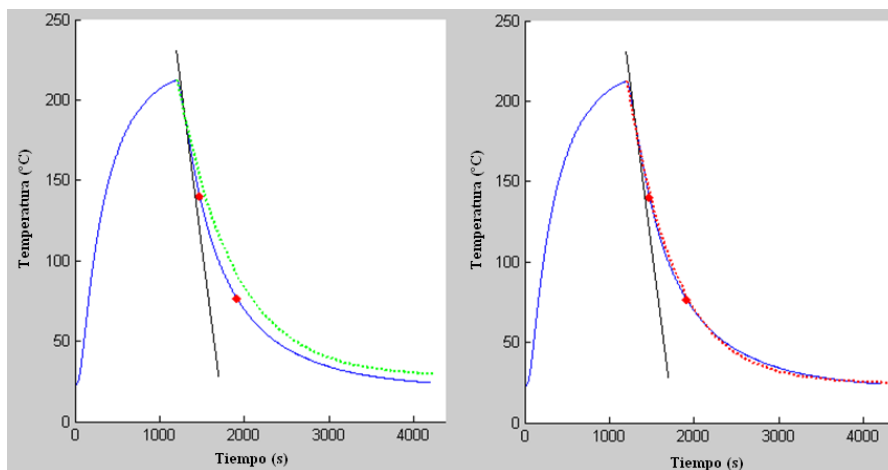


Figura 3.14. Comparación entre respuesta de la planta modelada y real y comparación entre respuesta de la planta aproximada y real para región de enfriamiento.

En la figura 3.14 la gráfica de la izquierda muestra en color verde la respuesta de la función de transferencia calculada teóricamente, mientras que la de la derecha muestra en color rojo la aproximación realizada con el fin de obtener una mejor respuesta. En la tabla 3.9 se muestra la función de transferencia del modelo teórico y del modelo aproximado.

REGION	MODELO TEÓRICO	MODELO APROXIMADO
Enfriamiento	$\frac{0.4062}{658.5s + 1}$	$\frac{0.4142}{565s + 1}$

Tabla 3.9 Aproximación del modelo de región de enfriamiento.

Se evidencia que el modelo se comporta de forma similar a la respuesta real de la planta. Este modelo de primer orden tiene una constante de tiempo mayor a los calculados en las regiones de calentamiento, esto corrobora que el sistema se demora más tiempo enfriándose que elevando su temperatura sin importar la región de operación en la que se encuentre.

Para validar el modelo aproximado de la región de enfriamiento es necesario encontrar el error y su media, varianza y norma. Los resultados se muestran en la tabla 3.10.

REGION	MODELO	MEDIA (e)	VARIANZA (e)	NORMA(e)
1	$\frac{0.4142}{565s + 1}$	0.1407	0.4875	6.9423

Tabla 3.10 Error entre la respuesta de la planta modelada y aproximada para la región de enfriamiento.

3.5 Modelo en Espacio de Estados

Para modelar el sistema como un espacio de estados es necesario encontrar una realización a partir de la función de transferencia ajustada, con la cual se trabajará de acá en adelante. Toda la planta se puede representar como un sistema de primer orden de la forma.

$$G_p(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.3)$$

Donde k es la ganancia, τ es la constante de tiempo, $Y(s)$ es la salida y $U(s)$ es la entrada de la planta. De la ecuación (3.3) se obtiene:

$$kU(s) = Y(s)(\tau s + 1)$$

$$kU(s) = sY(s)\tau + Y(s)$$

Escribiéndolo en variables de estado es:

$$ku(t) = \dot{y}(t)\tau + y(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{\tau} + \frac{ku(t)}{\tau}$$

Por la teoría de espacio de estados se tiene que una variable \dot{x} se define como:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4)$$

Donde su salida está dada por:

$$y = Cx + Du \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.4) y (3.5) puede decirse que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= x \end{aligned}$$

Donde

$$A = \frac{-1}{\tau} \quad B = \frac{k}{\tau}$$

Siendo consecuentes se tiene de (3.5):

$$C = 1 \quad D = 0$$

De esta forma el modelo en espacio de estados para cada región se muestra en la tabla 3.11. Vale aclarar que los retardos no van incluidos dentro del modelo debido a que el retardo afecta la linealidad del espacio de estados y además le quita sentido a las variables físicas.

REGION	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	ESPACIO DE ESTADOS
1	$\frac{7.7e^{-100s}}{495s + 1}$	$\dot{x} = \frac{-x}{495} + \frac{7.7u}{495}$
2	$\frac{5.5e^{-65s}}{380s + 1}$	$\dot{x} = \frac{-x}{380} + \frac{5.5u}{380}$
3	$\frac{4.45}{350s + 1}$	$\dot{x} = \frac{-x}{350} + \frac{4.45u}{350}$
4	$\frac{4.12}{320s + 1}$	$\dot{x} = \frac{-x}{320} + \frac{4.12u}{320}$
5	$\frac{3.53}{280s + 1}$	$\dot{x} = \frac{-x}{280} + \frac{3.53u}{280}$

Tabla 3.11. Representación del modelo aproximado en espacio de estados para cada región con $y = x$, $C = 1$, $D = 0$.

Conclusión- Se modeló tanto la región de calentamiento como de enfriamiento del horno teniendo en cuenta todos los fenómenos no lineales discutidos en el marco teórico, esto permitió adquirir un modelo realmente completo de la planta. Si bien el modelo teórico no representa en su totalidad la dinámica de la planta real, el análisis establecido permite llegar a un modelo aproximado con menor error, cuyo comportamiento es similar al de la planta. Los ajustes realizados muestran en las simulaciones la obtención de un modelo más cercano al real, permitiendo dar el paso al desarrollo de controladores.

4. Control

Resumen – En este capítulo se utiliza la teoría de control de sistemas lineales, a través de ella se explicará el desarrollo matemático del diseño de controladores PID, por realimentación de estados (cada uno con su respectiva discretización), y controlador polinomial RST. Cada uno de estos controladores será probado para comparar su desempeño, de esta forma se establecerá si la acción de control tiene un funcionamiento adecuado con relación a los demás tipos de controladores. El análisis detallado y la comparación entre controladores será expuesto en el capítulo 5.

Para establecer la acción de control del sistema es importante regular la temperatura mediante técnicas de control digital utilizando controladores PID y por realimentación de estados, partiendo de un modelo en tiempo continuo y discretizándolo posteriormente. De esta forma a continuación se exponen cada uno de los controladores implementados y su respectivo cálculo y sintonización.

4.1 PID Continuo

Para las regiones 1 y 2 se tiene que la planta presenta un tiempo muerto tal cómo se evidencia en la tabla 3.6, de esta forma, utilizando la ecuación (3.1) y utilizando la aproximación de Padé de primer orden en el tiempo de retardo se puede escribir como:

$$G_p(s) = \frac{ke^{-t_0s}}{\tau s + 1} \approx \frac{k(2 - t_0s)}{(\tau s + 1)(2 + t_0s)}$$

Para la implementación del PID en tiempo continuo se tiene que la función de transferencia del controlador está dada por la siguiente ecuación,

$$PID_C(s) = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s}$$

Ahora bien, se sabe que la planta se representa en las dos primeras regiones por:

$$G_p(s) = \frac{k(2 - t_0s)}{(\tau s + 1)(2 + t_0s)}$$

Donde G_p es la función de transferencia del sistema, k es la ganancia, τ es la constante de tiempo y t_0 es el tiempo muerto. Debido a que se establece la acción de control para que cumpla su función en lazo cerrado es necesario realimentar el sistema como se muestra en la figura 4.1.

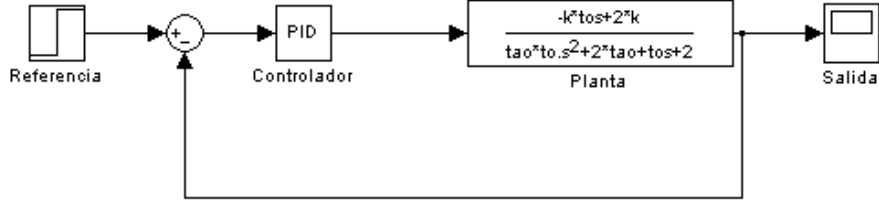


Figura 4.1. Representación en bloques de sistema controlado

Esto mismo se puede expresar en función de transferencia al realimentar el sistema, obteniendo la función de transferencia de la planta en lazo cerrado G_r como:

$$G_r(s) = \frac{PID_C(s)G_p(s)}{PID_C(s)G_p(s) + 1} = \frac{\left(\frac{s^2K_d + sK_p + K_i}{s}\right) \left(\frac{k(2 - t_0s)}{(\tau s + 1)(2 + t_0s)}\right)}{\left(\frac{s^2K_d + sK_p + K_i}{s}\right) \left(\frac{k(2 - t_0s)}{(\tau s + 1)(2 + t_0s)}\right) + 1}$$

$$G_r(s) = \frac{\frac{(s^2K_d + sK_p + K_i)k(2 - t_0s)}{s(\tau s + 1)(2 + t_0s)}}{\frac{(s^2K_d + sK_p + K_i)k(2 - t_0s)}{s(\tau s + 1)(2 + t_0s)} + 1}$$

$$G_r(s) = \frac{(s^2K_d + sK_p + K_i)k(2 - t_0s)}{(s^2K_d + sK_p + K_i)k(2 - t_0s) + s(\tau s + 1)(2 + t_0s)}$$

$$G_r(s) = \frac{s^3(-kK_d t_0) + s^2(2kK_d - kK_p t_0) + s(2kK_p - K_i k t_0) + 2kK_i}{s^3(\tau t_0 - kK_d t_0) + s^2(2K_d k - K_p k t_0 + t_0 + 2\tau) + s(2K_p k - K_i k t_0 + 2) + 2kK_i}$$

Haciendo que el denominador de la función de transferencia sea un polinomio mónico:

$$G_r(s) = \frac{\frac{s^3(-kK_d t_0)}{(\tau t_0 - kK_d t_0)} + \frac{s^2(2kK_d - kK_p t_0)}{(\tau t_0 - kK_d t_0)} + \frac{s(2kK_p - K_i k t_0)}{(\tau t_0 - kK_d t_0)} + \frac{2kK_i}{(\tau t_0 - kK_d t_0)}}{s^3 + \frac{s^2(2K_d k - K_p k t_0 + t_0 + 2\tau)}{(\tau t_0 - kK_d t_0)} + \frac{s(2K_p k - K_i k t_0 + 2)}{(\tau t_0 - kK_d t_0)} + \frac{2kK_i}{(\tau t_0 - kK_d t_0)}}$$

Ahora bien, para cumplir con los parámetros de desempeño es necesario igualar los polos de la respuesta del sistema en lazo cerrado a los polos deseados. Los polos deseados del sistema están dados por la ecuación (4.1) donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento y W_n es la frecuencia natural.

$$Polos(s) = s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 \quad (4.1)$$

Es necesario aclarar que los polos deseados del sistema cumplen con dos parámetros de desempeño que para este caso son el máximo sobreimpulso (M_p) y el tiempo de establecimiento (t_s) de la salida del sistema. De esta forma se tiene:

$$M_p = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi W_n}$$

Donde pueden despejarse los valores correspondientes al factor de amortiguamiento del sistema ξ y a la frecuencia natural no amortiguada W_n ; obteniendo:

$$\xi = \sqrt{-\log(M_p) \left(\frac{1}{\log(M_p)^2 + \Pi^2} \right)}$$

$$W_n = \frac{4}{t_s \xi}$$

Debido a que el denominador de la función realimentada es de tercer orden y los polos deseados son un sistema de segundo orden es necesario agregar un polo que actúe lejos de los polos deseados con el fin que no modifique la dinámica deseada en la planta. Para esto se tiene que los polos de la ecuación (4.1) están dados por:

$$s_{1,2} = -\xi W_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

El polo que se agrega actuará una década después para que no afecte la dinámica impuesta por los polos deseados. El polo agregado está dado por:

$$P = -10\xi W_n$$

Al agregar un polo P la ecuación (4.1) queda:

$$Polos(s) = (s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2)(s + P)$$

$$Polos(s) = s^3 + (2\xi W_n + P)s^2 + (2\xi W_n P + W_n^2)s + W_n^2 P$$

Se iguala el denominador de $G_r(s)$ con los polos deseados, entonces:

$$s^3 + \frac{s^2(2K_d k - K_p k t_o + t_o + 2\tau)}{(\tau t_o - k K_d t_o)} + \frac{s(2K_p k - K_i k t_o + 2)}{(\tau t_o - k K_d t_o)} + \frac{2k K_i}{(\tau t_o - k K_d t_o)}$$

$$= s^3 + (2\xi W_n + P)s^2 + (2\xi W_n P + W_n^2)s + W_n^2 P$$

Igualando los pesos de los coeficientes se tiene:

$$1 = 1$$

$$\frac{(2K_d k - K_p k t_o + t_o + 2\tau)}{(\tau t_o - k K_d t_o)} = 2\xi W_n + P \quad (4.2)$$

$$\frac{(2K_p k - K_i k t_o + 2)}{(\tau t_o - k K_d t_o)} = 2\xi W_n P + W_n^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{2k K_i}{(\tau t_o - k K_d t_o)} = W_n^2 P \quad (4.4)$$

De (4.2) se llega a:

$$(2K_d k - K_p k t_o + t_o + 2\tau) = (2\xi W_n + P)(\tau t_o - k K_d t_o)$$

Multiplicando la parte derecha,

$$2K_d k - K_p k t_o + t_o + 2\tau = 2\xi W_n \tau t_o - 2\xi W_n k K_d t_o + P \tau t_o - P k K_d t_o$$

$$2K_d k + P k K_d t_o + 2\xi W_n k K_d t_o = 2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o + K_p k t_o - t_o - 2\tau$$

Factorizando en términos de K_d ,

$$K_d(2k + P k t_o + 2\xi W_n k t_o) = 2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o + K_p k t_o - t_o - 2\tau$$

$$K_d = \frac{2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o + K_p k t_o - t_o - 2\tau}{2k + P k t_o + 2\xi W_n k t_o} \quad (4.5)$$

De (4.4) se llega a:

$$2k K_i = W_n^2 P (\tau t_o - k K_d t_o)$$

$$2k K_i = W_n^2 P \tau t_o - W_n^2 P k K_d t_o$$

$$K_i = \frac{W_n^2 P \tau t_o - W_n^2 P k K_d t_o}{2k} \quad (4.6)$$

De (4.3) se llega a:

$$(2K_p k - K_i k t_o + 2) = (2\xi W_n P + W_n^2)(\tau t_o - k K_d t_o) \quad (4.7)$$

Reemplazando (4.6) en (4.7) se tiene:

$$\left(2K_p k - \frac{(W_n^2 P \tau t_o - W_n^2 P k K_d t_o) k t_o}{2k} + 2 \right) = (2\xi W_n P + W_n^2)(\tau t_o - k K_d t_o)$$

$$\left(2K_p k - \frac{(W_n^2 P \tau t_o - W_n^2 P k K_d t_o) t_o}{2} + 2 \right) = (2\xi W_n P + W_n^2)(\tau t_o - k K_d t_o)$$

$$(4K_p k - (W_n^2 P \tau t_o - W_n^2 P k K_d t_o) t_o + 4) = 2(2\xi W_n P + W_n^2)(\tau t_o - k K_d t_o)$$

$$(4K_p k - W_n^2 P \tau t_o^2 + W_n^2 P k K_d t_o^2 + 4) = 2(2\xi W_n P + W_n^2)(\tau t_o - k K_d t_o)$$

$$\begin{aligned} 4K_p k - W_n^2 P \tau t_o^2 + W_n^2 P k K_d t_o^2 + 4 \\ = 4\xi W_n P \tau t_o - 4\xi W_n P k K_d t_o + 2W_n^2 \tau t_o - 2W_n^2 k K_d t_o \end{aligned}$$

$$4K_p k - W_n^2 P \tau t_o^2 - 4\xi W_n P \tau t_o - 2W_n^2 \tau t_o + 4 = -K_d(4\xi W_n P k t_o + 2W_n^2 k t_o + W_n^2 P k t_o^2)$$

$$-4K_p k + W_n^2 P \tau t_o^2 + 4\xi W_n P \tau t_o + 2W_n^2 \tau t_o - 4 = K_d(4\xi W_n P k t_o + 2W_n^2 k t_o + W_n^2 P k t_o^2)$$

Ahora bien, sea:

$$C_a = 4\xi W_n P k t_o + 2W_n^2 k t_o + W_n^2 P k t_o^2$$

Sea:

$$C_b = W_n^2 P \tau t_o^2 + 4\xi W_n P \tau t_o + 2W_n^2 \tau t_o - 4$$

Reescribiendo se obtiene:

$$-4K_p k + C_b = K_d C_a \quad (4.8)$$

Reemplazando (4.5) en (4.8) entonces:

$$-4K_p k + C_b = \left(\frac{2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o + K_p k t_o - t_o - 2\tau}{2k + P k t_o + 2\xi W_n k t_o} \right) C_a \quad (4.9)$$

Sea:

$$C_c = 2k + P k t_o + 2\xi W_n k t_o$$

$$C_d = 2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o - t_o - 2\tau$$

Reemplazando en (4.9) se obtiene:

$$-4K_p k + C_b = \left(\frac{C_d + K_p k t_o}{C_c} \right) C_a$$

$$-4K_p k C_c + C_b C_c = C_d C_a + K_p k t_o C_a$$

$$C_b C_c - C_d C_a = K_p k t_o C_a + 4K_p k C_c$$

$$C_b C_c - C_d C_a = K_p (k t_o C_a + 4k C_c)$$

$$K_p = \frac{C_b C_c - C_d C_a}{k t_o C_a + 4k C_c}$$

$$K_p = \frac{C_b C_c - C_d C_a}{k(t_o C_a + 4C_c)} \quad (4.10)$$

Reemplazando (4.10) en (4.5) se obtiene:

$$K_d = \frac{2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o + \left(\frac{C_b C_c - C_d C_a}{k(t_o C_a + 4C_c)} \right) k t_o - t_o - 2\tau}{2k + P k t_o + 2\xi W_n k t_o} \quad (4.11)$$

Y reemplazando (4.11) en (4.6) se obtiene:

$$K_i = \frac{W_n^2 P \tau t_o - W_n^2 P k \left(\frac{2\xi W_n \tau t_o + P \tau t_o + \left(\frac{C_b C_c - C_d C_a}{k(t_o C_a + 4C_c)} \right) k t_o - t_o - 2\tau}{2k + P k t_o + 2\xi W_n k t_o} \right) t_o}{2k} \quad (4.12)$$

Finalmente se hallan los parámetros K_p , K_d y K_i con (4.10), (4.11) y (4.12) respectivamente, los cuales permiten establecer la función de transferencia del controlador de las regiones 1 y 2 para que cumpla con los parámetros de desempeño establecidos.

Para las regiones 3, 4 y 5 mostradas en la sección 3.4.3.1 se implementó un controlador proporcional integral PI que disminuye el tiempo de subida y elimina el error en estado estable con lo cual se logran los resultados deseados. En este caso se opta por implementar un controlador PI debido a que el sistema en estas regiones es un sistema de primer orden y con las acciones proporcional e integral se logra controlar tanto el transitorio como el estacionario del sistema.

Para la implementación del PI en tiempo continuo la función de transferencia del controlador está dada por la misma ecuación (2.6) sin tener en cuenta la acción derivativa, de esta forma:

$$PI_C(s) = \frac{sK_p + K_i}{s}$$

En este caso, debido a que estas regiones no tienen tiempo muerto, la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)}$$

Realimentando unitariamente el sistema controlado se obtiene la función de transferencia de la planta en lazo cerrado G_r como:

$$G_r(s) = \frac{PI_C(s)G_p(s)}{PI_C(s)G_p(s) + 1} = \frac{\left(\frac{sK_p + K_i}{s} \right) \left(\frac{k}{\tau s + 1} \right)}{\left(\frac{sK_p + K_i}{s} \right) * \left(\frac{k}{\tau s + 1} \right) + 1}$$

$$G_r(s) = \frac{\frac{(sK_p + K_i)k}{s(\tau s + 1)}}{\frac{(sK_p + K_i)k + s(\tau s + 1)}{s(\tau s + 1)}}$$

$$G_r(s) = \frac{(sK_p + K_i)k}{(sK_p + K_i)k + s(\tau s + 1)}$$

$$G_r(s) = \frac{sK_p k + K_i k}{s^2 \tau + s(K_p k + 1) + K_i k}$$

$$G_r(s) = \frac{\frac{sK_p k}{\tau} + \frac{K_i k}{\tau}}{s^2 + s \frac{(K_p k + 1)}{\tau} + \frac{K_i k}{\tau}}$$

Nuevamente, con el fin de establecer un parámetro de desempeño con el que se quiera cumplir se establecen los polos deseados que estarán dados por la ecuación (4.1). En este caso como ambos polinomios son de segundo orden se pueden igualar los pesos respectivos. Igualando los coeficientes se tiene:

$$1 = 1$$

$$\frac{(K_p k + 1)}{\tau} = 2\xi W_n \quad (4.13)$$

$$\frac{K_i k}{\tau} = W_n^2 \quad (4.14)$$

De esta forma de (4.13) se tiene:

$$K_p k + 1 = 2\xi W_n \tau$$

$$K_p = \frac{2\xi W_n \tau - 1}{k} \quad (4.15)$$

Por otro lado de (4.14) se obtiene:

$$K_i k = W_n^2 \tau$$

$$K_i = \frac{W_n^2 \tau}{k} \quad (4.16)$$

Finalmente se obtienen los parámetros K_p y K_i a través de (4.15) y (4.16) respectivamente cuyos valores permiten controlar las regiones 3, 4 y 5.

4.1.1 Implementación PID Continuo.

Las especificaciones del diseño de los controladores para cada una de las regiones se muestran en la tabla 4.1 donde se presentan las constantes calculadas (K_p, K_i, K_d) para cada controlador a partir del sobrepico M_p y el tiempo de establecimiento t_s requeridos. El cálculo se realiza a través de una rutina implementada en MATLAB® mostrada en el Anexo 1.

REGIÓN	M_p (%)	t_s (s)	K_p	K_i	K_d	dt
1	10	900	0.6305	0.0032	32.1489	26.458
2	1	700	0.7028	0.003	26.6534	34.7687
3	1	800	0.5618	0.0029	-	39.7357
4	1	900	0.4477	0.0022	-	44.7027
5	1	1000	0.3513	0.00186	-	49.670

Tabla 4.1 Especificaciones de diseño y constantes del PID continuo para cada región.

Los parámetros de desempeño del sistema se escogieron con base en las simulaciones realizadas, donde se evaluaba la saturación en la señal de control y una concordancia de las especificaciones de diseño con la respuesta simulada. Para el caso de la primera región, el sobrepico se establece en un valor de 10%, mucho mayor al de los demás casos, debido a que en las simulaciones la respuesta transitoria presentaba oscilaciones que afectan los parámetros deseados.

Después de calcular los controladores para cada una de las regiones es importante validar los resultados obtenidos. Con ayuda de SIMULINK®, una herramienta de programación gráfica de MATLAB®, se utilizó un controlador PID con cada una de las constantes determinadas y se utilizó el modelo en espacio de estados calculado previamente en la identificación del sistema, esto con el fin de simular la respuesta del sistema en cada una de las regiones lineales y compararlas con el resultado obtenido. La representación del sistema continuo en diagrama de bloques se observa en la figura 4.2.

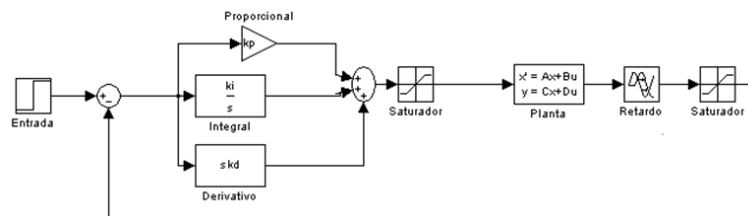


Figura 4.2. Representación en bloques de controlador PID Continuo

Al realizar la simulación se busca comparar los resultados obtenidos, donde se analizan la salida del sistema y la señal de control; para esto es necesario colocar un saturador que limite la salida de la señal de control en un rango entre 0 y 100, debido a que este será el ciclo útil de entrada a la planta y no tendría sentido hablar de porcentajes mayores. Se debe tener en cuenta el retardo del sistema para aquellas regiones que tengan tiempo muerto y además retardo.

Es necesario validar los resultados simulados, para este fin el PID continuo fue implementado gráficamente en LabView®, donde se estableció la adquisición de datos del sistema controlado como se muestra en la figura 4.3. Donde se muestra 1) la adquisición de temperatura, 2) el bloque de ingreso de variables del controlador por parte del usuario y 3) el controlador PID incluido en las librerías de LabView® con su respectiva acción de control.

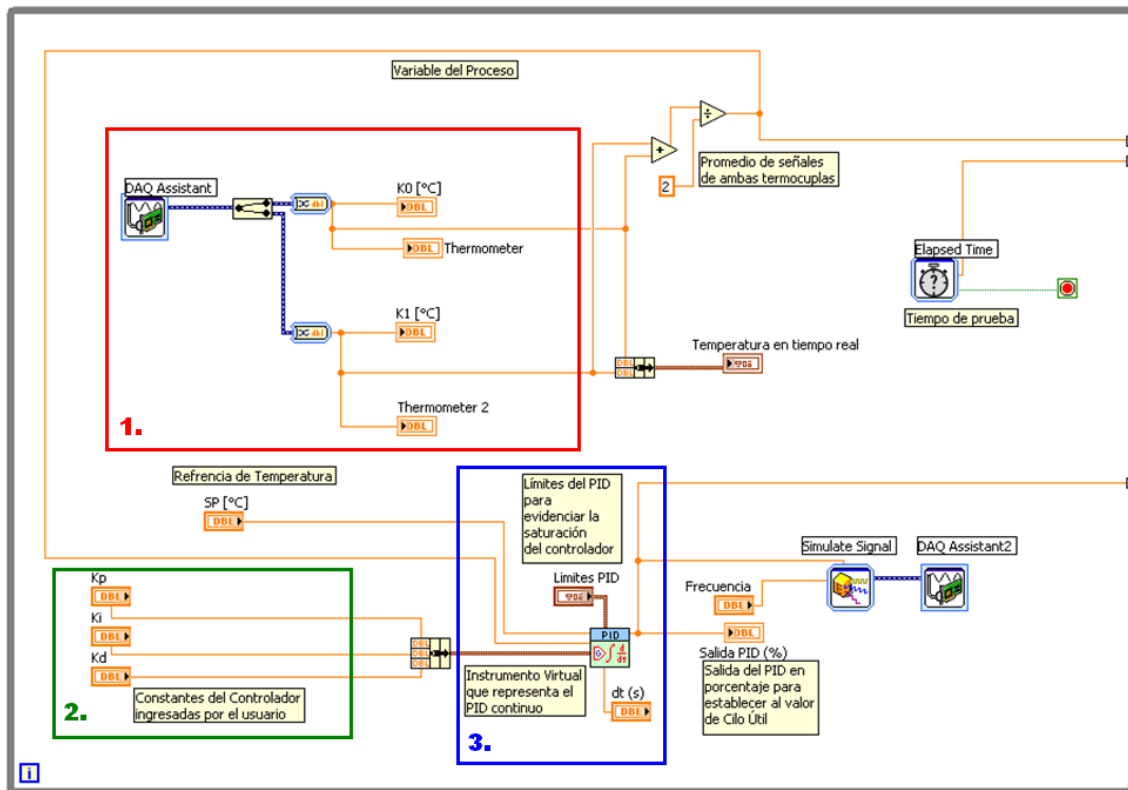


Figura 4.3. Implementación en LabView® de controlador PID Continuo.

Es importante establecer que la implementación del PID Continuo es discreta debido a que se realiza en un dispositivo digital tal como lo es el computador; sin embargo, debido a que el periodo de muestreo es muy pequeño respecto al tiempo de respuesta de la planta, el sistema puede considerarse como un sistema en tiempo continuo.

4.1.2 Resultados PID Continuo

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada una de las regiones de operación establecidas previamente; en cada una de las siguientes gráficas se observa la salida de la planta y la señal de control del sistema. En todas las gráficas se sobrepone la respuesta medida en la planta a través de los módulos de adquisición con la respuesta obtenida en la simulación a través de SIMULINK®.

En todos los resultados presentados en esta sección la respuesta real del sistema está compuesta por la línea roja que representa la temperatura medida por los termopares y por la línea verde que muestra la señal de control aplicada a la planta. La respuesta simulada del sistema está compuesta por la línea verde oscuro que muestra la salida de la planta y por la línea azul que representa la señal de control.

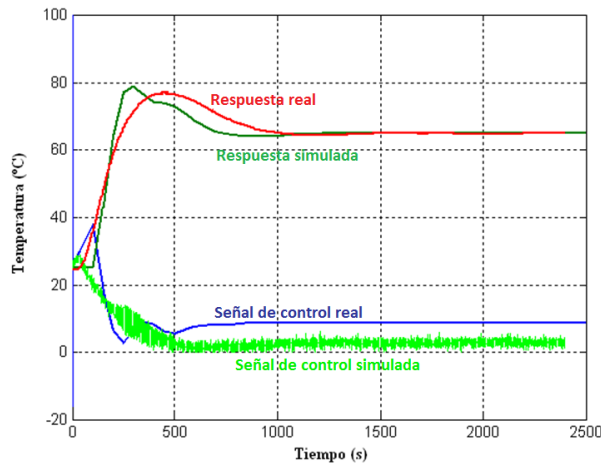


Figura 4.4. Respuesta Paso PID Continuo Primera Región 65°

La figura 4.4 ilustra la respuesta simulada y la respuesta real para la primera región con una referencia de 65° C. En la salida real del sistema se observa un M_p del 16%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 21%. Se evidencia que ambas respuestas presentan un t_s cercano a 1000 segundos. Las señales de control presentan un comportamiento similar estableciéndose en 5 y 9% de ciclo útil respectivamente. Se observa que el sistema se acerca a la especificación de M_p y t_s .

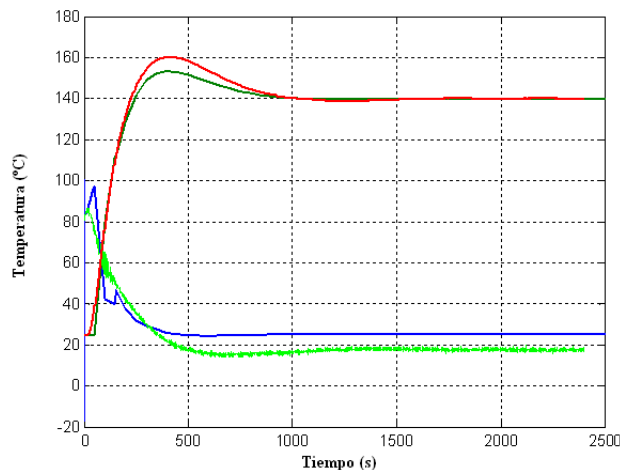


Figura 4.5. Respuesta Paso PID Continuo Segunda Región 140°

La figura 4.5 muestra la respuesta simulada y la respuesta real para la segunda región con una referencia de 140° C. En la salida real del sistema se observa un M_p aproximado del 15.5%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 9.3%. Las señales de control no presentan saturación y se estabilizan alrededor de 19 y 25% de ciclo útil respectivamente. En cuanto al tiempo de establecimiento, ambas respuestas presentan un valor cercano a 900 segundos. Analizando la relación entre t_s y M_p se observa que al exigirle al sistema una respuesta de 700 segundos el sistema genera una señal de control alta, comparada con el estado estable, durante un rango aproximado de 300 segundos, esto produce un M_p mucho mayor al esperado, donde si se exigiera un tiempo relativamente mayor a 700 segundos podría obtenerse una respuesta con menor M_p .

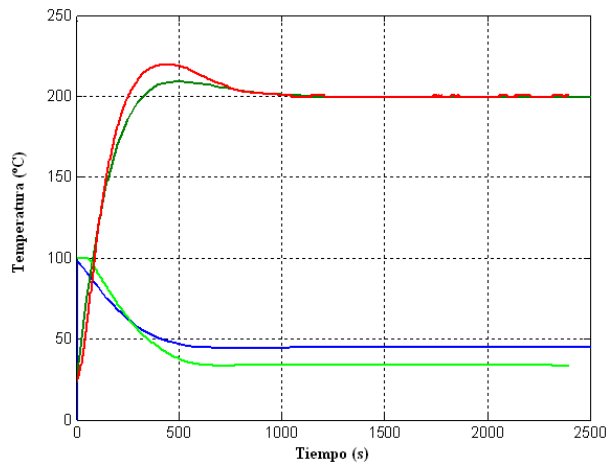


Figura 4.6. Respuesta Paso PID Continuo Tercera Región 200°

La figura 4.6 presenta la respuesta simulada y la respuesta real para la tercera región con una referencia de 200° C. La respuesta de la planta real muestra un M_p aproximado del 12%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 5%. La señal de control del sistema real presenta saturación por un tiempo muy corto (50 segundos), estabilizándose alrededor de 37% de ciclo útil, mientras que la simulación arroja una saturación de 12 segundos y una estabilización cercana a 46%. Se observa que ambas respuestas presentan un t_s cercano a 900 segundos bajo el criterio del 2%.

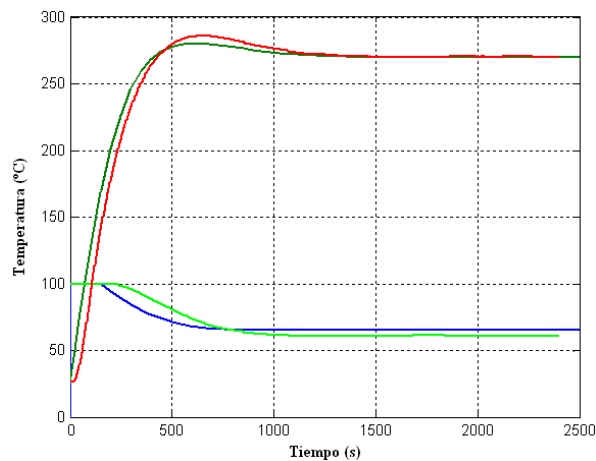


Figura 4.7. Respuesta Paso PID Continuo Cuarta Región 270°

La figura 4.7 ilustra la respuesta simulada y la respuesta real para la cuarta región con una referencia de 270° C. En la salida real del sistema se observa un M_p aproximado del 6.3%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 6%. La señal de control del sistema real presenta saturación durante 260 segundos y se estabiliza alrededor de 62% de ciclo útil, mientras que la simulación muestra una saturación de 180 segundos y una estabilización cercana a 64%. Ambas respuestas presentan un t_s cercano a 1200 segundos bajo el criterio del 2%. Se observa que bajo los parámetros de desempeño el sistema genera una señal de control saturada, si bien el tiempo de saturación es menor al de la quinta región, la acción de control en la región de enfriamiento responde más lento produciendo así un M_p mayor al esperado.

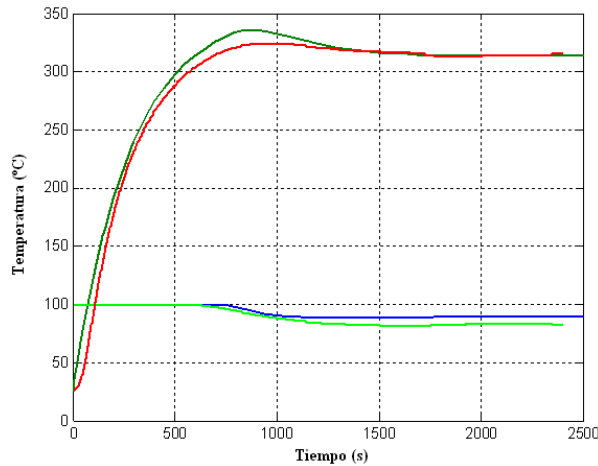


Figura 4.8. Respuesta Paso PID Continuo Quinta Región 315°

La figura 4.8 muestra la respuesta simulada y la respuesta real para la quinta región con una referencia de 315° C. En la salida real del sistema se observa un M_p aproximado del 3.2%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 7.9%. Las señales de control presentan saturación durante 640 segundos y se estabilizan alrededor de 85 y 90% de ciclo útil respectivamente. En cuanto al tiempo de establecimiento, ambas respuestas presentan un valor cercano a 1200 segundos. Analizando la relación entre t_s y M_p se observa que al exigirle al sistema una respuesta de 1000 segundos el sistema genera una señal de control saturada durante varios segundos, lo cual produce un M_p mayor al esperado. Si no se saturara la señal de control podría obtenerse una respuesta sin M_p sacrificando el tiempo de respuesta, que en este caso sería mayor.

4.2 PID Discreto.

Después de analizar los resultados obtenidos con el PID continuo se procede a discretizar el PID con el fin de analizar el sistema de forma discreta a través del respectivo tiempo de muestreo entregado por la rutina de MATLAB® en el Anexo 1. Para la discretización del PID se utilizó el método de Backwards descrito en el marco teórico en la sección 2.6.2 donde la transformación que se realiza está dada por la ecuación (2.4). Se escoge este método ya que conserva la estabilidad en la transformación de los polos y no presenta oscilaciones para polos reales rápidos, por otro lado recarga menos computacionalmente al sistema.

4.2.1 Función de Transferencia de PID discreto

El PID continuo está dado por:

$$PID_C(s) = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s}$$

Aplicando Backward se tiene:

$$PID_D(z) = \frac{\left(\frac{z-1}{zh}\right)^2 K_d + \left(\frac{z-1}{zh}\right) K_p + K_i}{\left(\frac{z-1}{zh}\right)}$$

$$PID_D(z) = \frac{\frac{(z-1)^2 K_d + (z-1)zhK_p + K_i(zh)^2}{(zh)^2}}{\frac{(z-1)}{zh}}$$

$$PID_D(z) = \frac{(z-1)^2 K_d + (z-1)zhK_p + K_i(zh)^2}{(z-1)zh}$$

$$PID_D(z) = \frac{(z^2 - 2z + 1)K_d + (z-1)zhK_p + K_i(zh)^2}{(z-1)zh}$$

$$PID_D(z) = \frac{z^2 K_d - 2zK_d + K_d + z^2 hK_p - zhK_p + z^2 K_i h^2}{z^2 h - zh}$$

Finalmente se obtiene:

$$PID_D(z) = \frac{z^2(K_d + hK_p + K_i h^2) - z(2K_d + hK_p) + K_d}{z^2 h - zh} \quad (4.17)$$

4.2.2 Ecuación de diferencias del PID

Ahora bien, entendiendo el PID como un sistema compuesto por acciones P, I y D se pueden descomponer cada una de sus partes en el plano s de la siguiente forma:

$$P(s) = K_p E(s)$$

Donde K_p es la ganancia proporcional y $E(s)$ es el error. Sustituyendo s con la transformación mostrada en la ecuación (2.4) se obtiene:

$$P(z) = K_p E(z)$$

Tomando tiempos de muestreo k finalmente se llega a:

$$P(kh) = K_p E(kh) \quad (4.18)$$

Por otro lado se tiene:

$$I(s) = \left(\frac{K_i}{s}\right) E(s)$$

Donde K_i es la ganancia integral. Sustituyendo s se obtiene:

$$I(z) = \left(\frac{K_i zh}{z-1}\right) E(z)$$

$$I(z)(z-1) = K_i h z E(z)$$

$$zI(z) - I(z) = K_i h z E(z)$$

Dividiendo por z :

$$I(z) - z^{-1}I(z) = K_i h E(z)$$

Por propiedades de la transformada Z y tomando un tiempo de muestreo h :

$$I(kh) - I((k-1)h) = K_i h E(kh)$$

Finalmente se tiene:

$$I(kh) = K_i h E(kh) + I((k-1)h) \quad (4.19)$$

Para la parte derivativa se tiene:

$$D(s) = K_d s E(s)$$

Donde K_d es la ganancia derivativa. Sustituyendo s se obtiene:

$$D(z) = K_d \left(\frac{z-1}{zh} \right) E(z)$$

$$zhD(z) = K_d (z-1) E(z)$$

$$zhD(z) = K_d z E(z) - K_d E(z)$$

Dividiendo por z :

$$hD(z) = K_d E(z) - K_d * z^{-1} E(z)$$

Por propiedades de la transformada Z y tomando un tiempo de muestreo h :

$$hD(kh) = K_d E(kh) - K_d E((k-1)h)$$

Finalmente se tiene:

$$D(kh) = \frac{K_d E(kh) - K_d E((k-1)h)}{h}$$

$$D(kh) = \frac{K_d}{h} [E(kh) - K_d E((k-1)h)] \quad (4.20)$$

De esta forma la acción de control total está dada por:

$$PID(kh) = P(kh) + I(kh) + D(kh)$$

$$PID(kh) = K_p E(kh) + K_i h E(kh) + I((k-1)h) + \frac{K_d}{h} [E(kh) - E((k-1)h)] \quad (4.21)$$

4.2.1 Implementación PID Discreto

Las especificaciones del diseño de los controladores para cada una de las regiones son las mismas que las presentadas en la tabla 4.1 donde lo único que cambia es la implementación del controlador. Con ayuda de SIMULINK® se utilizó un controlador PID discreto mostrado en la ecuación (4.17) determinado a través de la discretización Backward de la función de transferencia del PID continuo de la ecuación (2.6). De igual forma se utilizó el modelo de la planta, calculado a través de la discretización del modelo continuo presentado en la ecuación (3.3).

La representación del sistema discreto en diagrama de bloques se observa en la figura 4.9. Este diagrama se implementó en SIMULINK® utilizando la función de transferencia discreta del PID mostrada en la ecuación (4.17) y de la planta $G(z)$, con el fin de analizar una respuesta deseada según los parámetros de desempeño establecidos en la tabla 4.1.

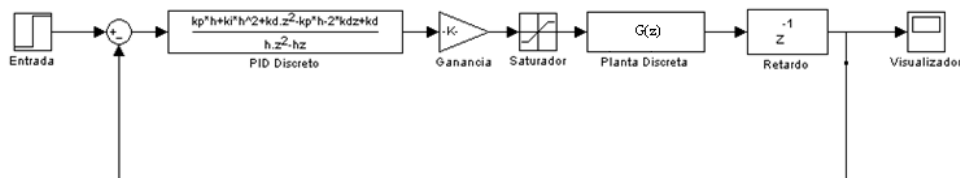


Figura 4.9 Representación en bloques de controlador PID Discreto

Las ganancias del controlador (K_p, K_i, K_d) y el periodo de muestreo h toman el mismo valor del PID continuo, sin embargo en este caso aparece una ganancia k que a partir del lugar geométrico de las raíces del controlador, permite ajustar la ubicación de los polos, estos valores se presentan en la tabla 4.2.

REGIÓN	$M_p(\%)$	t_s (s)	K_p	K_i	K_d	h	k
1	10	900	0.6305	0.0032	32.1489	26.458	0.61
2	1	700	0.7028	0.003	26.6534	34.7687	0.96
3	1	800	0.5618	0.0029	-	39.7357	0.9
4	1	900	0.4477	0.0022	-	44.7027	0.88
5	1	1000	0.3513	0.00186	-	49.670	0.827

Tabla 4.2 Especificaciones de diseño y constantes del PID discreto para cada región.

Es necesario validar los resultados simulados, para este fin el PID discreto fue implementado gráficamente en LabView® como se muestra en la figura 4.10. Donde se ilustra 1) la adquisición de temperatura, 2) el bloque de ingreso de variables del controlador por parte del usuario y 3) el controlador PID discreto con su respectiva acción de control. Para el caso de la primera región, el sobrepico se establece en un valor de 10%, mucho mayor al de los demás casos, debido a que en las simulaciones la respuesta transitoria presentaba oscilaciones que afectan los parámetros deseados.

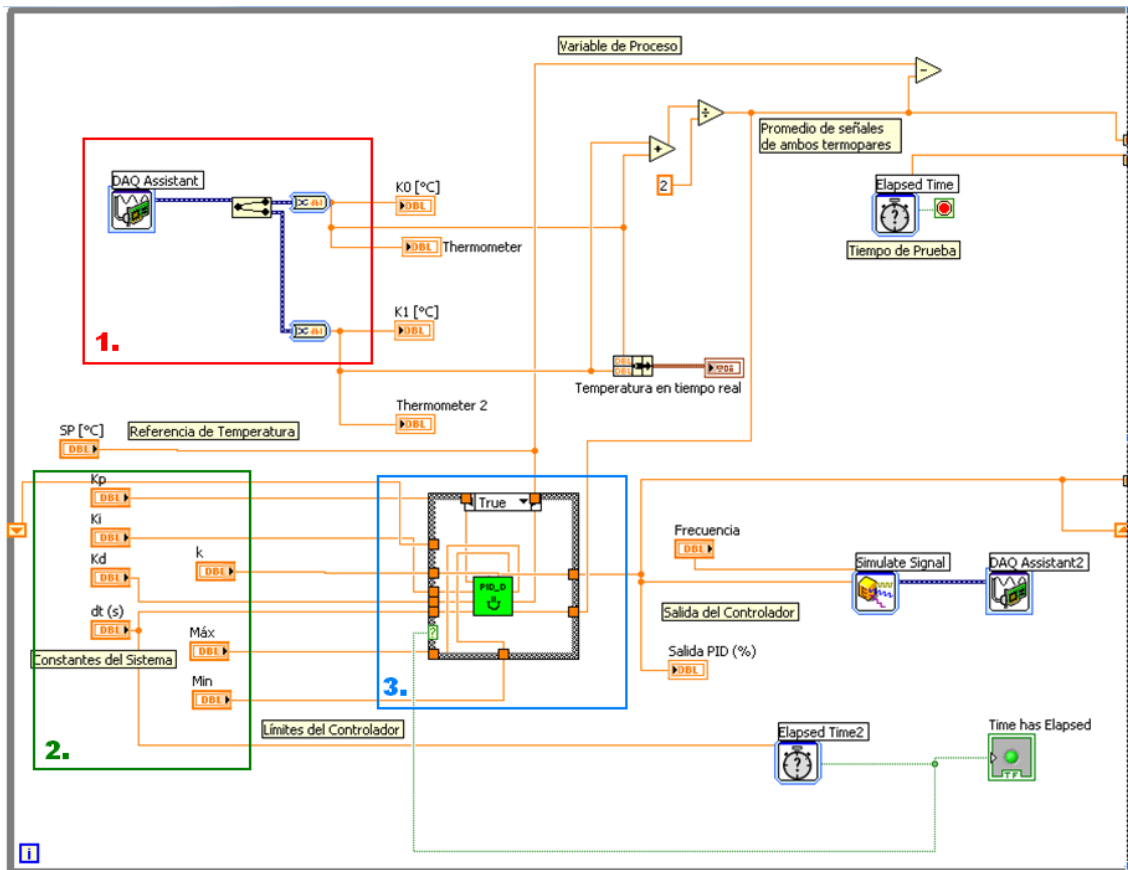


Figura 4.10 Implementación en LabView® de controlador PID Discreto. dt es el tiempo de muestreo h .

El bloque del PID discreto presentado en la figura 4.11 se implementó en LabView® basado en las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20).

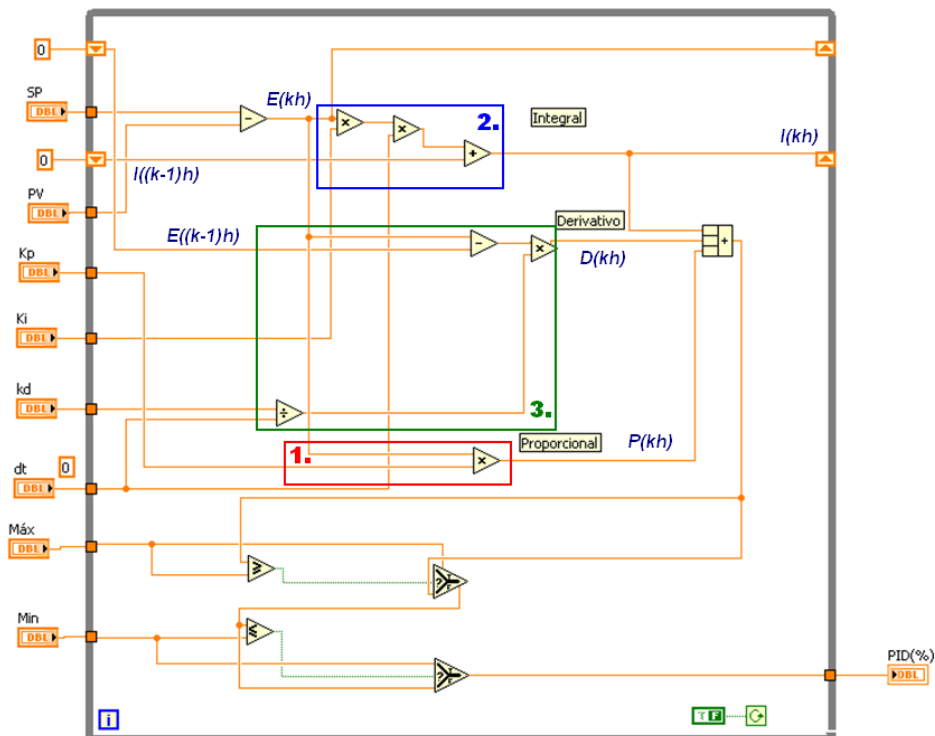


Figura 4.11. Estructura interna del PID Discreto

Se evidencia que el error se representa como la diferencia entre el Set Point (SP) y la variable del proceso (PV). Siguiendo con la ecuación (4.18) se implementa la acción proporcional encerrada en el recuadro 1, el recuadro 2 muestra la implementación de la acción integral de la ecuación (4.19) y el recuadro 3 muestra la acción derivativa que se obtuvo de la ecuación (4.20). Las constantes Máx y Min observadas en la figura corresponden a los límites físicos establecidos para el PID cuya salida en este caso estará nuevamente comprendida en un rango de 0 a 100, equivalente a la entrada en porcentaje del ciclo útil de la alimentación de la planta. Esto se hace con el fin de tener en cuenta la saturación existente en el controlador como se hizo para el PID continuo.

4.2.2 Resultados PID Discreto

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada una de las regiones de operación establecidas previamente; en cada una de las siguientes gráficas se observa la salida de la planta y la señal de control del sistema, donde se sobrepone la respuesta medida en la planta a través de los módulos de adquisición con la respuesta obtenida en la simulación a través de SIMULINK®.

En todos los resultados presentados en esta sección la respuesta real del sistema está compuesta por la línea roja que representa la temperatura medida por los termopares y por la línea verde que muestra la señal de control aplicada a la planta; la salida de la planta se muestra de forma continua debido a que se quiere ver el comportamiento de la planta entre los tiempos de muestreo establecidos. La respuesta simulada del sistema está compuesta por la línea verde oscuro que muestra la salida de la planta y por la línea azul que representa la señal de control.

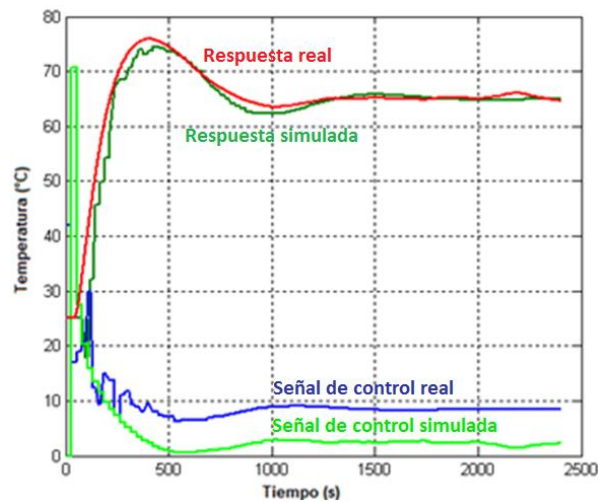


Figura 4.12. Respuesta Paso PID Discreto Primera Región 65°

La figura 4.12 ilustra la respuesta simulada y la respuesta real para la primera región con una referencia de 65° C. Los criterios de diseño presentados en la tabla 4.2 muestran un M_p de 10% y un t_s de 900 segundos. En la salida real del sistema se observa un M_p del 17.6%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 15%. Se evidencia que ambas respuestas presentan un t_s cercano a 1200 segundos. Las señales de control presentan un comportamiento similar estableciéndose en 2.5 y 9% de ciclo útil respectivamente. Se observa que el sistema se acerca a la especificación de M_p .

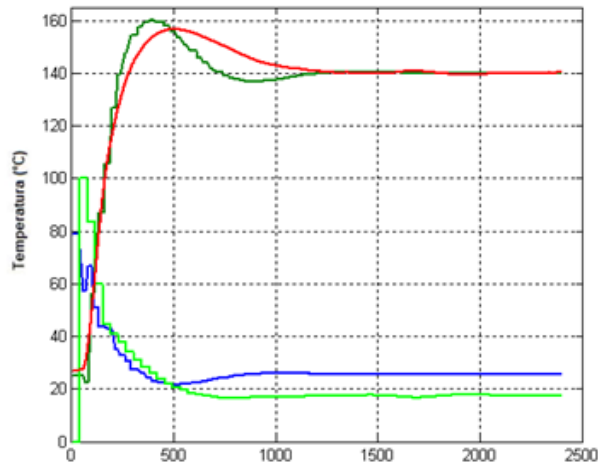


Figura 4.13 Respuesta Paso PID Discreto Segunda Región 140°

La figura 4.13 muestra la respuesta simulada y la respuesta real para la segunda región con una referencia de 140° C. En la salida real del sistema se observa un M_p aproximado del 12.8%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 14.3%. La señal de control real presenta saturación, mientras que la simulada no; estas señales se estabilizan alrededor de 19 y 24% de ciclo útil respectivamente. En cuanto al tiempo de establecimiento, ambas respuestas presentan un valor cercano a 1350 segundos. Analizando la relación entre t_s y M_p se observa que al exigirle al sistema una respuesta de 700 segundos el sistema genera una señal de control alta durante los primeros 200 segundos con relación al estado estable, esto produce un M_p mucho mayor al esperado aumentando el tiempo de establecimiento como se corrobora en la figura.

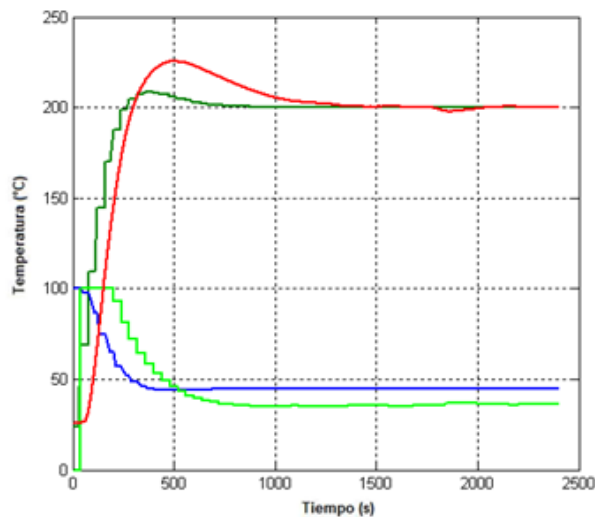


Figura 4.14. Respuesta Paso PID Discreto Tercera Región 200°

La figura 4.14 presenta la respuesta simulada y la respuesta real para la tercera región con una referencia de 200° C. La respuesta de la planta real muestra un M_p aproximado del 12.5%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 9%. La señal de control del sistema real presenta saturación durante 160 segundos, estabilizándose alrededor de 34% de ciclo útil, mientras que la simulación arroja una saturación de 120 segundos y un establecimiento en 47%. En cuanto al tiempo de establecimiento, la respuesta real presenta un valor cercano a 1300 segundos mientras que la simulación se estabiliza en 700, sin embargo debe tenerse en cuenta que para la respuesta real la salida de la señal de control presenta un retardo mientras que para la

respuesta simulada no. Al igual que la respuesta mostrada en la figura 4.13, el controlador presenta saturación durante un intervalo considerable de tiempo; este efecto genera el M_p obtenido y consecuentemente aumenta el t_s del sistema.

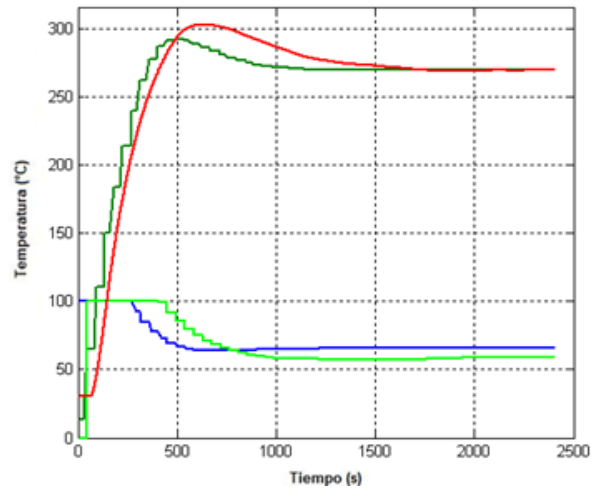


Figura 4.15. Respuesta Paso PID Discreto Cuarta Región 270°

La figura 4.15 ilustra la respuesta simulada y la respuesta real para la cuarta región con una referencia de 270° C. En la salida real del sistema se observa un M_p aproximado del 11%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 14%. La señal de control del sistema real presenta saturación durante 470 y se estabiliza alrededor de 62% de ciclo útil, mientras que la simulación muestra una saturación de 180 segundos y una estabilización de 64%. La respuesta real presenta un valor cercano a 1400 segundos de establecimiento mientras que la simulación se estabiliza en 950. Bajo los parámetros de desempeño establecidos, el sistema genera una señal de control saturada durante mucho tiempo, por lo cual es de esperarse un M_p de mayor magnitud al especificado afectando considerablemente el t_s del sistema.

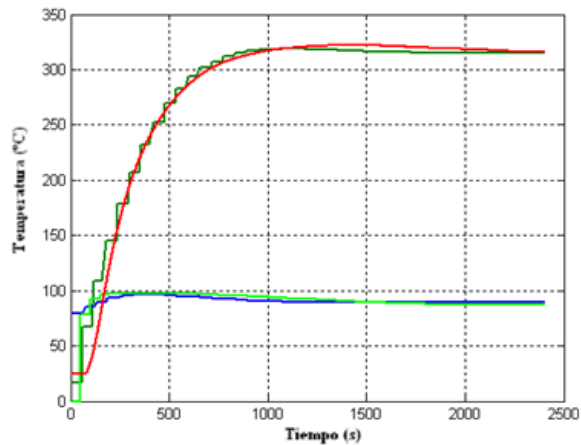


Figura 4.16. Respuesta Paso PID Discreto Quinta Región 315°

La figura 4.16 muestra la respuesta simulada y la respuesta real para la quinta región con una referencia de 315° C. En la salida real del sistema se observa un M_p aproximado del 1.62%, donde según la simulación se esperaba un M_p del 1.5%. Las señales de control no presentan saturación y se estabilizan alrededor de 87.5% de ciclo útil. En cuanto al tiempo de establecimiento, ambas respuestas presentan un valor cercano a 1100 segundos. Se evidencia que el sistema cumple con las especificaciones de diseño, dónde a diferencia del PID continuo,

la acción de control se calcula cada tiempo de muestreo evitando en este caso una saturación y por ende un M_p no deseado.

4.3 Realimentación de Estados Tiempo Continuo

El objetivo de diseñar un controlador por realimentación de estados (RE), es tener un punto de comparación con respecto a los demás métodos de diseño, y mostrar cómo a partir de un modelo en espacio de estados se genera un controlador que cumpla con los mismos requerimientos que los demás cumplen.

Partiendo del espacio de estados realimentado de la figura 4.17, de las ecuaciones (3.4), (3.5) y conociendo que los polos del sistema pueden ser determinados como los valores propios λ de $\det|\lambda I - A| = 0$, es posible diseñar el controlador por ubicación de polos, desplazándolos en los lugares deseados a partir de los parámetros de desempeño como es común en todos los controladores diseñados en este proyecto.

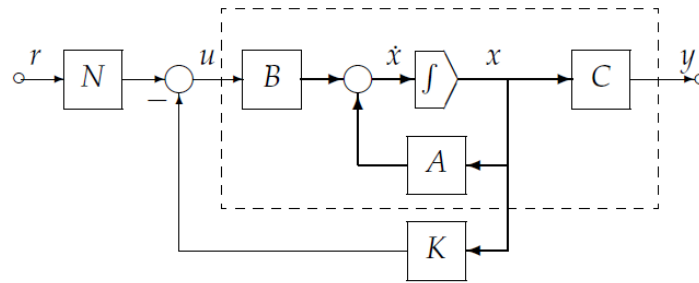


Figura 4.17. Representación en bloques de controlador por realimentación de estados

De las ecuaciones (3.4) y (3.5) y la realización de la planta mostrada en la sección 3.5 se tiene que:

$$A = \frac{-1}{\tau} \text{ y } B = \frac{k}{\tau} \tag{4.22}$$

$$C = 1 \text{ y } D = 0 \tag{4.23}$$

El objetivo es generar un sistema que realice un seguimiento de la entrada del sistema y que además contemple la corrección del error de estado estable. Para esto se plantea un modelo denominado seguimiento dinámico de referencia, su configuración es mostrada en la figura 4.18.

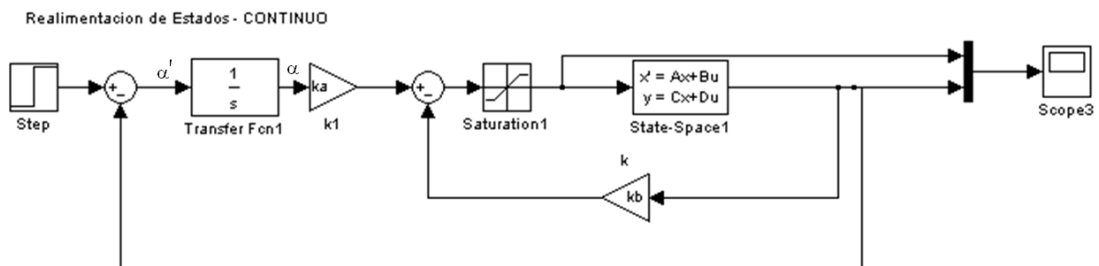


Figura 4.18. Representación en bloques de controlador por Realimentación de Estados Continuo

El esquema de la figura 4.18 muestra la realimentación de estados con una ganancia K_b que permite el correcto seguimiento de la entrada y un integrador para darle robustez al diseño, debido a que corrige las perturbaciones y el error de estado estable a partir de una ganancia K_a

que modera esta acción integral. Para manejar la saturación del controlador en la misma forma que la planta real, se supone un saturador con valor máximo de 100% de ciclo útil y un mínimo de 0 %. Todas estas consideraciones permiten desarrollar un controlador apropiado, solo resta definir el valor de las ganancias K_a y K_b para que el sistema tenga los polos en el lugar deseado.

Se realiza la descripción del sistema de la figura 4.18 determinando las variables de estado y colocándolas como una matriz:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= r - y = error \\ \dot{\alpha} &= r - Cx \\ u &= K_a\alpha - K_b x\end{aligned}\tag{4.24}$$

Por otro lado:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Remplazando u en \dot{x}

$$\dot{x} = Ax + B(K_a\alpha - K_b x)$$

Factorizando

$$\dot{x} = (A - BK_b)x + BK_a\alpha\tag{4.25}$$

Se plantean las matrices del espacio de estados de las ecuaciones (4.24) y (4.25)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_b & BK_a \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Donde:

$$E = \begin{bmatrix} A - BK_b & BK_a \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Por la propiedad mencionada, se determinan los valores propios de E que son los polos deseados para el sistema.

$$\det[\lambda I - E] = 0$$

$$\det \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A - BK_b & BK_a \\ -C & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - A + B K_b & -BK_a \\ C & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(A - B K_b) + C B K_a$$

Donde A, B, C y D, relacionados en la figura 4.17, son valores escalares y no matrices como es usual en representaciones en espacio de estados, debido a las condiciones particulares de este sistema. Estos valores propios son igualados al polinomio deseado. De este polinomio se despejan las constantes K_a y K_b

$$\lambda^2 - \lambda(A - B K_b) + C B K_a = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2$$

$$2\xi w_n = A - B K_b$$

$$w_n^2 = C B K_a$$

De esta forma se establecen los valores de K_a y K_b que serán tomados para cada región lineal del modelo propuesto por medio de un desarrollo implementado en una rutina MATLAB® que se encuentra en el Anexo 3.

$$K_a = \frac{w_n^2 * \tau}{K} \quad (4.26)$$

$$K_b = \frac{(2\xi w_n * \tau) - 1}{K} \quad (4.27)$$

4.3.1. Implementación RE en Tiempo Continuo

El primer paso para validar estas ecuaciones es construir el esquema de seguimiento dinámico de referencia de la figura 4.18, un programa estructurado en bloques, implementado en SIMULINK® con el fin de simular la respuesta del modelo y donde el valor de las constantes K_a y K_b es calculado por una rutina implementada en MATLAB® a partir de los valores de tiempo de establecimiento y sobrepico que se especifican en la tabla 4.3 y con base en las ecuaciones (4.26) y (4.27).

REGIÓN	M_p (%)	t_s	K_a	K_b
1	1	800	0.0024	0.5130
2	1	620	0.0042	0.7097
3	1	500	0.0074	1.0337
4	1	570	0.0056	0.8474
5	1	800	0.0029	0.5099

Tabla 4.3. Especificaciones de diseño y constantes del Control por Realimentación de Estados

Vale aclarar que los valores de la tabla 4.3 se escogieron con base en simulaciones, donde se evaluaba la saturación en la señal de control, y la concordancia entre las especificaciones de diseño con la respuesta simulada ya que si se presentaban altas saturaciones de los controladores, muy seguramente se debía a exigencias demasiado altas en estos parámetros.

Una vez obtenidas estas constantes se realiza la implementación del sistema en LabView® teniendo en cuenta que la variable de estado x es la salida del sistema y , ya que C es igual a 1. En la misma forma que en los controladores PID discretos, se elabora una acción integral a partir de ecuaciones en diferencia pero con un tiempo de muestreo mínimo permitido para que se pueda aproximar a un control continuo. Por esta razón la parte integral se realiza tomando la implementación del control PID discreto de la figura 4.9, pero anulando las componentes proporcional y derivativa, usando solamente la componente integral como es requerido tal y como se muestra más adelante en la figura 4.20.

En la figura 4.19 se muestra la implementación hecha del sistema completo donde se pueden observar cuatro partes que lo componen, 1) La adquisición de datos de temperatura y el cálculo del promedio de las dos termopares, 2) el bloque que genera la acción integral denominado RE junto con la realimentación y multiplicación por las constantes K_a y K_b que componen la estructura de la figura 4.18, 3) el saturador que limita la acción de control a los valores porcentuales del ciclo útil y por ultimo 4) el bloque que genera una señal cuadrada con el valor del ciclo útil que genera la acción de control calculada.

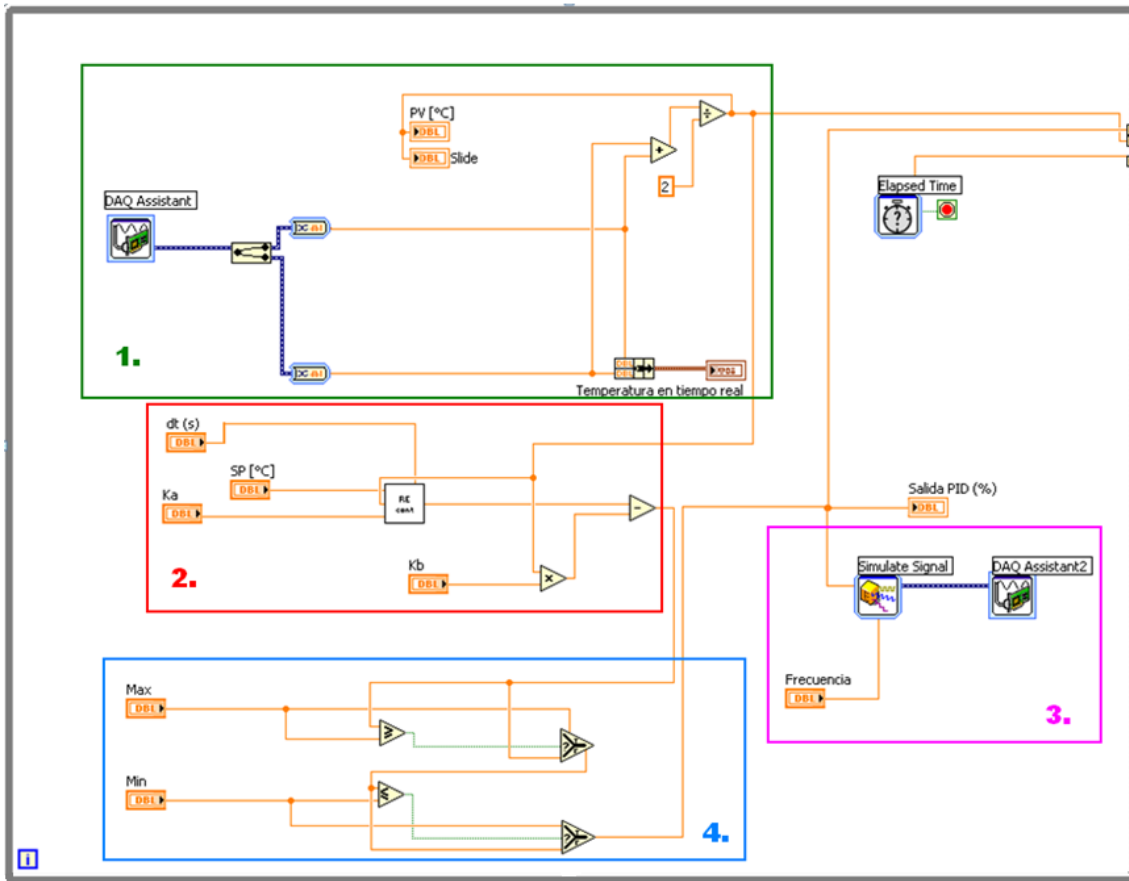


Figura 4.19 Implementación en LabView® de controlador por realimentación de estados continuo.

El bloque 2 de la figura 4.19 contiene la acción integral similar a la del PID discreto de la figura 4.9, sin embargo se observa que este bloque no se encuentra interno en una estructura condicional sujeta al tiempo de muestreo, en la implementación llamado dt , lo cual significa que LabView® realiza el cálculo de la acción de control fijando 0,5 segundos que es el tiempo mínimo para considerar el sistema como continuo.

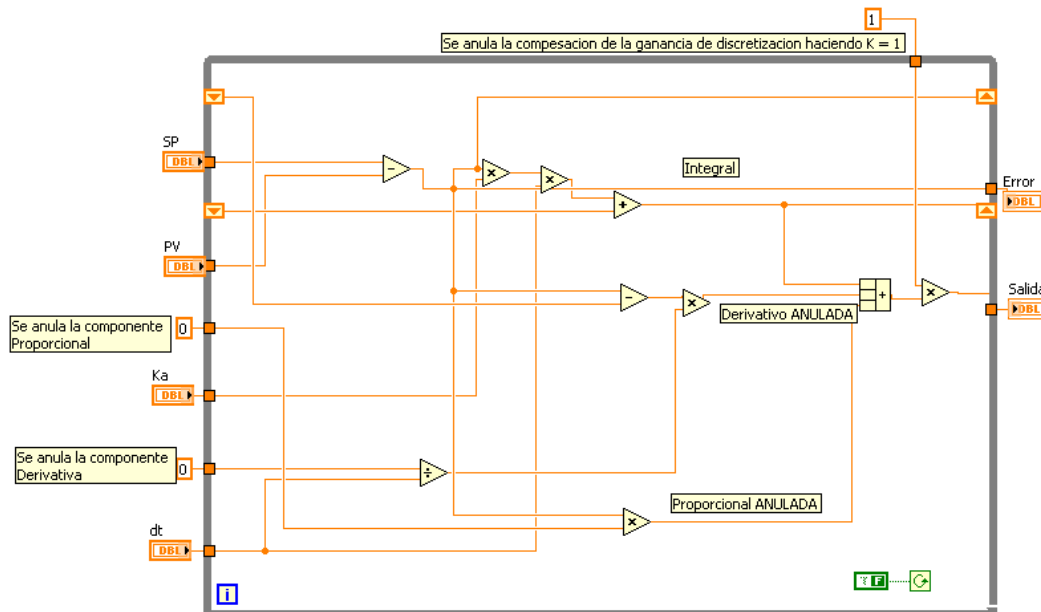


Figura 4.20. Estructura interna del controlador por realimentación de estados continuo.

4.3.2 Resultados RE Continuo

Los resultados obtenidos tanto en la simulación por medio de SIMULINK®, como en la prueba real, se muestran sobrepuestos en las figuras 4.21 a 4.25, cada cual para su respectiva región lineal y para los mismos valores de referencia acostumbrados: 65°, 140°, 200°, 270° y 315°. De igual forma se muestra las señales de control aplicadas al sistema para cada región.

Para todas las graficas desde la figura 4.21 a 4.25, la respuesta real del sistema está compuesta por la línea roja que representa la temperatura medida por los termopares y por la línea verde que muestra la señal de control aplicada a la planta. La respuesta simulada del sistema está compuesta por la línea verde oscuro que muestra la salida de la planta y por la línea azul que representa la señal de control.

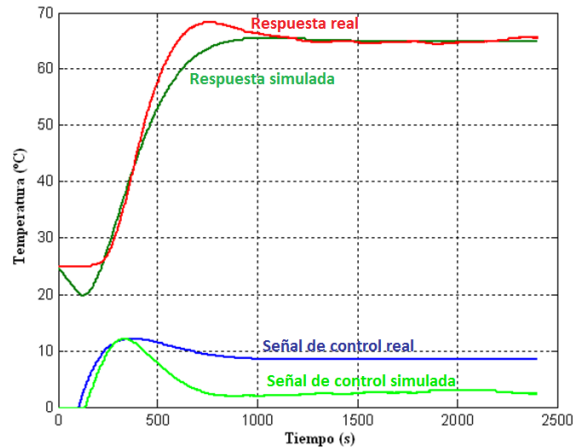


Figura 4.21. Respuesta paso RE continuo primera región 65°

En la figura 4.21 se observa una similitud entre las señales de respuesta simulada y real, estabilizada en el valor de referencia. Existe una diferencia en los valores desempeño y en la señal de control con respecto a los resultados simulados. En la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado del 3.07%, en simulación de 0.7%. Debido a la especificación de un sobrepico de 1%, se evidencia que el resultado de este parámetro de desempeño se asemeja al requerido. El tiempo de establecimiento real es aproximadamente 1100 segundos, en simulación de 800 segundos, frente a un tiempo especificado de también 800 segundos, todos medidos al criterio de 2 %, esto muestra que el tiempo de establecimiento debe ser mayor a 800 segundos. Las señales de control no presentan saturación debido a que el valor de referencia no demanda una acción de control fuerte, por lo contrario en estado estable la señal real se estabiliza alrededor de 3% mientras que la señal simulada alrededor de 9% del ciclo útil.

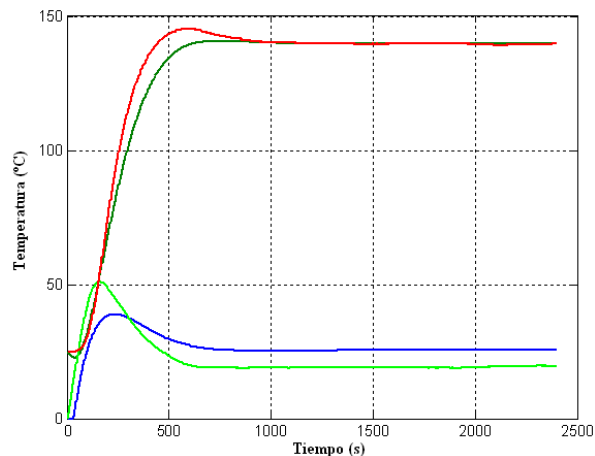


Figura 4.22. Respuesta paso RE continuo segunda región 140°

En la figura 4.22 se observa similitud entre las señales de respuesta simulada y real, con diferencias de sobrepico y tiempo de establecimiento aunque este último en pequeña proporción. En la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado del 5.35%, en simulación de 1.07% y deseado de 1%. Si bien los resultados son cercanos, es válido establecer que la diferencia radica en la especificación del tiempo de establecimiento (620 segundos) ya que debido a ser un valor pequeño en comparación con la dinámica de la planta, se genera un sobrepico grande en la señal de control que se ve reflejado en un sobrepico en la salida de la planta. Aunque las señales de control real y simulada no presentan saturación, debido a que el valor de referencia no requiere una acción de control grande, ambas presentan un sobrepico durante varios segundos estabilizándose finalmente en 23 y 25 % de ciclo útil respectivamente.

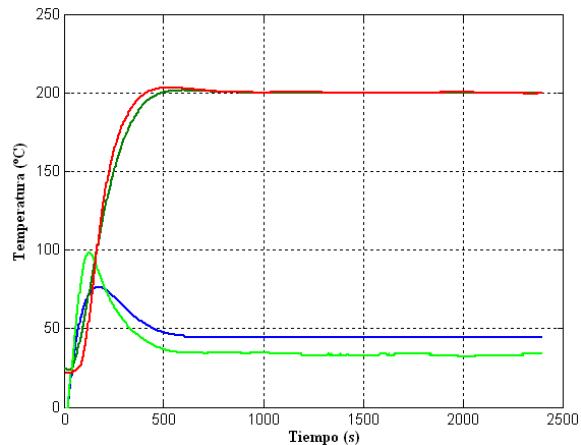


Figura 4.23. Respuesta paso RE continuo tercera región 200°

En la figura 4.23 se observa una concordancia aceptable entre las señales de respuesta simulada y real, con pequeñas diferencias en la señal de control. La respuesta del sistema en estado estable alcanza el valor de referencia, ratificando el correcto funcionamiento del controlador. En la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado del 1.5%, en simulación de 0.7% y deseado de 1%, dichos valores se encuentran muy próximos entre sí, permitiendo concluir que se obtuvo la respuesta deseada. El tiempo de establecimiento real es aproximadamente 400 segundos, en simulación de 480 segundos, frente a un tiempo especificado de también 500 segundos, todos medidos al criterio de 2 %, mostrando nuevamente el cumplimiento de los parámetros deseados. Las señales de control no presentan saturación debido a que el valor de referencia no exige una acción fuerte de control. En estado estable la señal real de control se estabiliza alrededor de 30%, mientras que la señal simulada alrededor de 46% del ciclo útil.

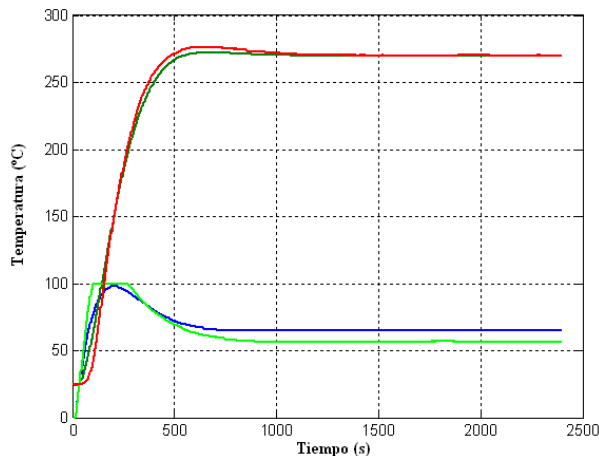


Figura 4.24. Respuesta paso RE continuo cuarta región 270°

En la figura 4.24 se aprecia una similitud entre las señales simuladas y reales. Como es de esperarse existen pequeñas diferencias que para la dinámica y los requerimientos de un control del proyecto son poco relevantes. En la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado del 1.8%, en simulación de 1.48%, concordando con la especificación de diseño.

El tiempo de establecimiento real y simulado son similares en aproximadamente 480 segundos, frente a un tiempo especificado de 570 segundos, todos medidos al criterio de 2%. La respuesta en estado estable alcanza el valor de la referencia y es difícil determinar la diferencia entre real y simulado para este parámetro. La señal real de control presenta saturación durante 210 segundos debido a que el valor de referencia exige una acción de control más fuerte para lograr cumplir con el tiempo de establecimiento. En estado estable la señal real se estabiliza alrededor de 58% mientras que la señal simulada alrededor de 69% del ciclo útil. Como observación importante se destaca la diferencia en el tiempo de establecimiento, donde la respuesta simulada es más lenta que la respuesta del horno. El esfuerzo de control del sistema real es mayor durante los primeros 200 segundos lo cual hace que efectivamente la planta alcance el estado estable más rápidamente.

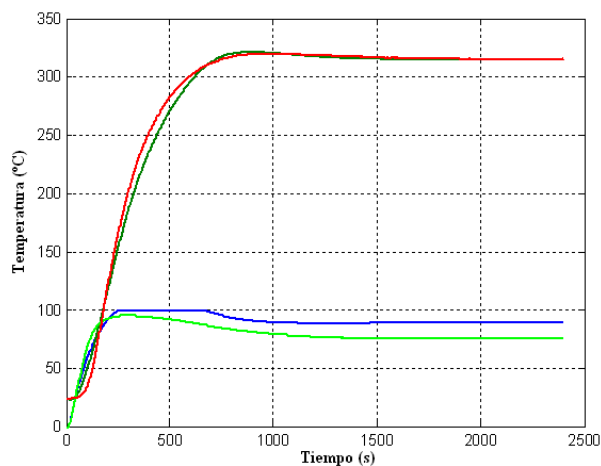


Figura 4.25. Respuesta paso RE continuo quinta región 315°

En la figura 4.25 se observa una buena proximidad entre las señales de respuesta simulada y real. Partiendo de estos resultados se puede decir que las especificaciones se cumplen, ya que la respuesta simulada y real coinciden con los parámetros deseados. Las diferencias que se presentan pueden ser explicadas como los errores sistemáticos de medición y linealización, ya que la planta es no lineal y el modelo establecido es una aproximación.

Las salidas real y simulada del sistema presentan un mismo sobrepico aproximado del 1.58%, en comparación al sobrepico deseado de 1%. El tiempo de establecimiento real y simulado es aproximadamente 720 segundos, frente a un tiempo especificado de 800 segundos. La señal de control simulada presenta saturación durante 400 segundos debido al esfuerzo de control que se exige para este valor de referencia.

La respuesta y la señal de control presentan error en pequeñas proporciones como se puede evidenciar en la grafica, donde el esfuerzo de control real es menor que el de la simulación. Se muestra que el controlador real no se satura, sin embargo, ambas señales de control presentan una respuesta aproximada.

4.4 Realimentación de Estados Tiempo Discreto

Tomando nuevamente las ecuaciones de la realimentación del modelo en espacio de estados, pero ahora en su forma discreta, ecuaciones (4.27) y (4.28), se realiza el mismo desarrollo

empleado para tiempo continuo y se pretende llegar al mismo objetivo partiendo nuevamente de la ubicación de los polos deseados como los polos del sistema controlado y realimentado.

$$x((k + 1)h) = A_d x(kh) + B_d u(kh) \quad (4.28)$$

$$y(kh) = C_d x(kh) + D_d u(kh) \quad (4.29)$$

De las ecuaciones (4.22) y (4.23) se toman los valores de A, B, C y D del espacio de estados y transformándolas a tiempo discreto muestreando con un periodo h y asumiendo que la señal de control se mantiene constante entre tiempos de muestreo se tiene la equivalencia en tiempo discreto [1]:

$$A_d = e^{Ah} \quad (4.30)$$

$$B_d = \int_0^h e^{As} ds B \quad (4.31)$$

$$C_d = 1 \quad y \quad D_d = 0$$

Reemplazando los valores A, B, C y D:

$$A_d = e^{\frac{-1}{\tau}h}$$

$$B_d = \frac{K}{\tau} \int_0^h e^{\frac{-1}{\tau}s} ds$$

$$C_d = 1 \quad y \quad D_d = 0$$

Desarrollando se obtiene:

$$A_d = e^{\frac{-1}{\tau}h} \quad (4.32)$$

$$B_d = K(e^{\frac{h}{\tau}} - 1)e^{\frac{-h}{\tau}} \quad (4.33)$$

$$C_d = 1 \quad y \quad D_d = 0 \quad (4.34)$$

Se plantea el mismo modelo de seguimiento dinámico de referencia pero ajustándolo a las características discretas. Para pasar del modelo continuo a discreto se aplica la transformación Backward al integrador y se utiliza el modelo en espacio de estados discreto con los valores de constantes de las ecuaciones (4.32), (4.33) y (4.34). Las constantes K_a y K_b discretizadas serán ahora llamadas K_{ad} y K_{bd} respectivamente. El modelo de seguimiento discreto se muestra en la figura 4.26.

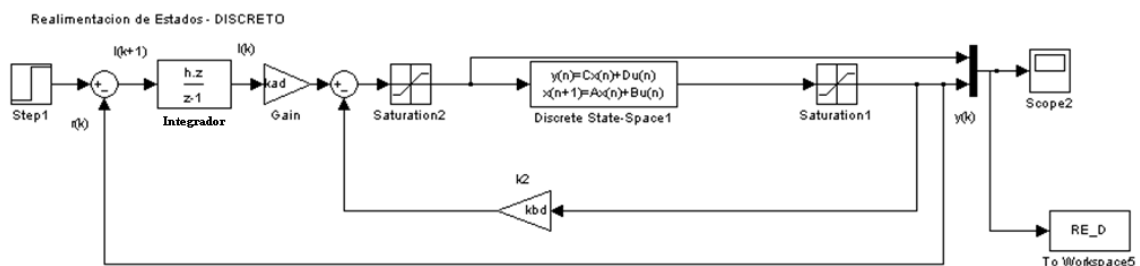


Figura 4.26. Representación en bloques de controlador por Realimentación de Estados Discreto

El esquema de la figura 4.26 muestra la realimentación de estados con una ganancia k_{bd} que permite el seguimiento correcto de la entrada y un integrador que corrige el error de estado estable a partir de una ganancia k_{ad} , la cual modera esta acción integral. Para manejar la saturación del controlador en la misma forma que la planta real, se supone un saturador con valor máximo de 100% de ciclo útil y un mínimo de 0 %.

Todas estas consideraciones permiten desarrollar un controlador apropiado, solo resta definir el valor de las ganancias k_{ad} y k_{bd} para que el sistema tenga los polos en el lugar deseado. El procedimiento para hacerlo consiste en describir matemáticamente el sistema de la figura 4.26, determinando las variables de estado y colocándolas como una ecuación de matrices. Los valores propios λ de $\det|\lambda I - E| = 0$ se obtienen de la matriz que multiplica a los estados. Estos se igualan a los polos deseados. Entonces,

$$I((k + 1)h) = r_k - y_k = E(kh)$$

Sin pérdida de generalidad se asume $h = 1$ en las siguientes ecuaciones.

$$I(k + 1) = r(k) - C_d x(k)$$

$$u(k) = I(k) - K_{bd} x(k)$$

Por otro lado:

$$x(k + 1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

Remplazando $u(k)$ en $x(k + 1)$

$$x(k + 1) = A_d x(k) + B_d (I(k) - K_{bd} x(k))$$

Factorizando

$$x(k + 1) = x(k) (A_d - B_d K_{bd} x(k)) + B_d I(k) \quad (4.35)$$

De la figura 4.26

$$I(z)(z - 1) = k_{ad} h E(z) z$$

Dividiendo por z

$$I(z)(1 - z^{-1}) = k_{ad} h e(z)$$

En ecuaciones diferencia

$$I(k) = I(k - 1) + k_{ad} h e(k)$$

Adelantando una muestra

$$I(k + 1) = I(k) + k_{ad} h r(k) - C_d x(k)$$

$$I(k + 1) = I(k) + k_{ad} h r(k) - C_d k_{ad} h x(k) \quad (4.36)$$

Se plantean las matrices del espacio de estados a partir de las ecuaciones (4.35) y (4.36)

$$\begin{bmatrix} x(k + 1) \\ I(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d - B_d K_{bd} & B_d \\ -K_{ad} C_d h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{ad} h \end{bmatrix} r(k)$$

Asumiendo:

$$E = \begin{bmatrix} A_d - B_d K_{bd} & B_d \\ -K_{ad} C_d h & 1 \end{bmatrix}$$

Por la propiedad mencionada, se determinan los valores propios de E que son los polos deseados para el sistema.

$$\det|\lambda I - E| = 0$$

$$\det \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_d - B_d K_{bd} & B_d \\ -K_{ad} C_d h & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - A_d + B_d K_{bd} & -B_d \\ K_{ad} C_d h & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(B_d K_{bd} - 1 - A_d) + A_d - B_d K_{bd} + K_{ad} B_d C_d h = 0$$

El polinomio deseado está dado por:

$$\text{polos deseados } (z) = (z - a)(z - b)$$

Donde a y b son:

$$\begin{aligned} a &= e^{s_1 h} \\ b &= e^{s_2 h} \end{aligned}$$

Donde s_1 y s_2 son los polos deseados de la ecuación (4.1).

Esto es,

$$z^2 + z(-a - b) + ab$$

Igualando el polinomio deseado a la ecuación característica se despejan las constantes K_{ad} y K_{bd}

$$\lambda^2 - \lambda(B_d K_{bd} - 1 - A_d) + A_d - B_d K_{bd} + K_{ad} B_d C_d h = \lambda^2 + \lambda(-a - b) + ab$$

De esta forma se establecen los valores de k_{ad} y k_{bd} que serán tomados para cada región lineal del modelo propuesto por medio de un desarrollo implementado en una rutina MATLAB® que se encuentra en el Anexo 3.

$$k_{ad} = \frac{a * b - (a + b) + 1}{h C_d B_d} \quad (4.37)$$

$$k_{bd} = \frac{1 - (a + b + A_d)}{B_d} \quad (4.38)$$

Por medio de una sencilla rutina en MATLAB®, se determinan los valores k_{ad} y k_{bd} para cada región lineal del modelo.

4.4.1 Implementación RE en Tiempo Discreto

El primer paso para validar estas ecuaciones es construir el esquema de seguimiento dinámico de referencia de la figura 4.26, un programa estructurado en bloques, implementado en SIMULINK® con el fin de simular la respuesta del modelo y donde el valor de las constantes K_{ad} y K_{bd} es calculado por una rutina implementada en MATLAB® a partir de los valores de tiempo de establecimiento y sobrepico que se especifican en la tabla 4.4 y con base en las ecuaciones (4.37) y (4.38).

REGIÓN	$M_p(\%)$	t_s	K_{ad}	K_{bd}
1	1	500	0.0051	0.6530
2	1	550	0.0046	0.6121
3	1	600	0.0044	0.5876
4	1	650	0.0037	0.5589
5	1	840	0.0023	0.4739

Tabla 4.4. Especificaciones de diseño y constantes del control por realimentación de estados

Vale aclarar que los valores de la tabla 4.4 se escogieron con base en simulaciones, donde se evaluaba la saturación en la señal de control y la respuesta transitoria del sistema.

Una vez obtenidas estas constantes se realiza la implementación del sistema de la figura 4.26 en LabView® teniendo en cuenta que la variable de estado x es la salida del sistema y ya que C es igual a 1. Se elabora una acción integral a partir de ecuaciones en diferencia utilizando el periodo de muestreo respectivo y las especificaciones de desempeño para cada región. Por esta razón la parte integral se toma de la implementación del control PID discreto pero anulando las componentes proporcional y derivativa.

En la figura 4.27 se muestra 1) la implementación hecha para la acción integral y la realimentación, mostrando adicionalmente 2) los bloques habituales de adquisición, 3) el esquema de generación de señal cuadrada, 4) un saturador y 5) el condicional que encierra la acción de control completa.

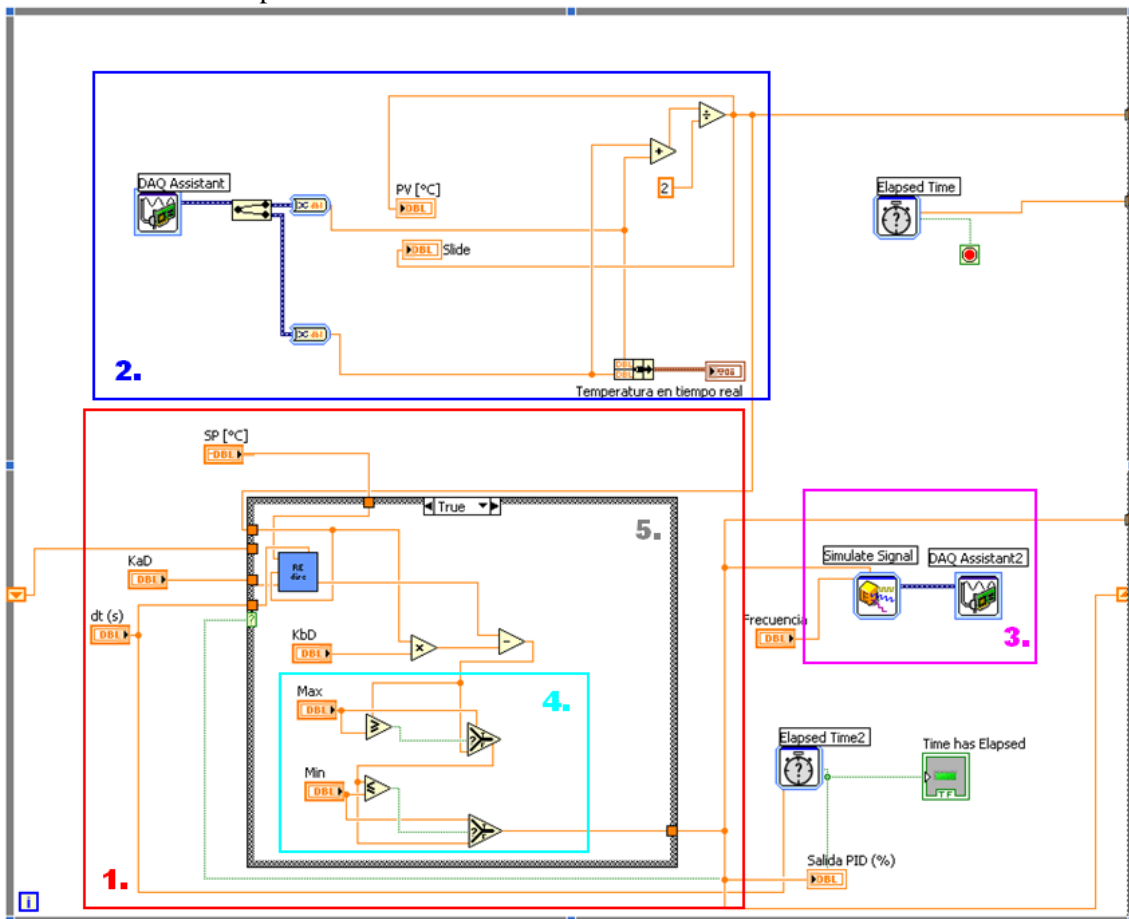


Figura 4.27 Implementación en LabView® de controlador por realimentación de estados discreto.

A diferencia del caso continuo, nótese que esta vez el bloque RE se encuentra interno en una estructura condicional sujeta al tiempo de muestreo dt , lo cual significa que el cálculo de la acción de control se da en el tiempo que fija la respectiva discretización y dependerá de la región lineal que se analice.

4.4.2 Resultados RE Discreto

Los resultados obtenidos tanto en la simulación por medio de SIMULINK®, como en la prueba real, se muestran superpuestos en las figuras 4.28 a 4.32 para su respectiva región lineal y para los valores de entrada acostumbrados: 65°, 140°, 200°, 270° y 315°. De igual forma son mostradas las señales de control aplicadas al sistema para cada región, superpuestas para simulación y prueba real.

Para todas las graficas desde la figura 4.28 a 4.32 al igual que para el PID continuo y discreto, la respuesta real del sistema está compuesta por la línea roja que representa la temperatura medida por los termopares y por la línea verde que muestra la señal de control aplicada a la planta. La respuesta simulada del sistema está compuesta por la línea verde oscuro que muestra la salida de la planta y por la línea azul que representa la señal de control

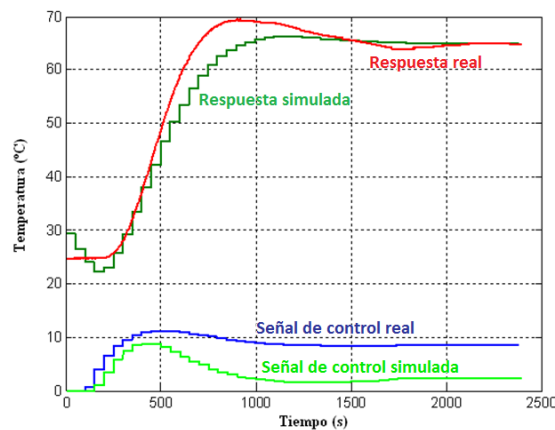


Figura 4.28. Respuesta paso RE discreto primera región 65°

En la figura 4.28 se comparan las señales de respuesta simulada y real, las cuales presentan diferencias considerables en los valores de desempeño, causadas por la arbitrariedad en la selección del tiempo de establecimiento, errores de medición y el hecho de diseñar el controlador sobre un modelo aproximado de la planta. En la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado del 16.1%, en simulación de 3.07% y deseado de 1%. El tiempo de establecimiento real es aproximadamente 1800 segundos, en simulación de 1500 segundos, frente a un tiempo especificado de 800 segundos. Al pedir un tiempo de establecimiento tan pequeño es evidente la existencia de un sobrepico alto, lo cual presenta que la respuesta transitoria esperada no concuerde con la real. Las señales de control no presentan saturación debido a que no se exige una acción de control fuerte, por lo contrario la señal real se estabiliza alrededor de 3% mientras que la señal simulada alrededor de 8.5% del ciclo útil.

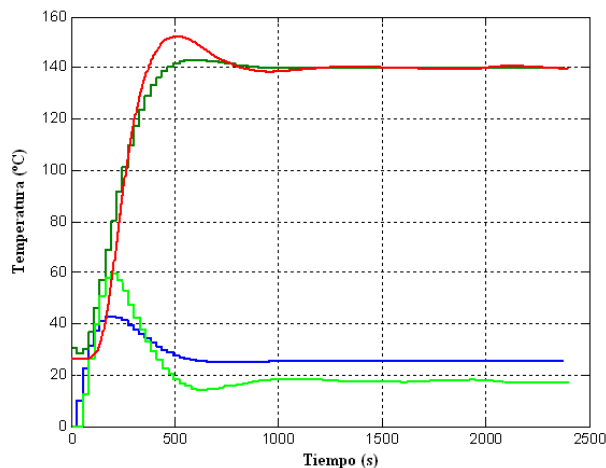


Figura 4.29. Respuesta paso RE discreto segunda región 140°

En la figura 4.29 se puede apreciar cierta proximidad entre las respuestas real y simulada a una entrada de referencia alcanzada en estado estable. A pesar de tener una buena aproximación, existen diferencias en el sobrepico de la respuesta y de la señal de control, en la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado del 8.57% y en simulación de 2.85%. La especificación de un tiempo de establecimiento pequeño representa un sobrepico en la respuesta transitoria de la planta. En tiempo discreto la señal de control es constante entre tiempos de muestreo, esto implica que si ocurre una variación significativa de la señal de control en un momento dado, la respuesta del controlador se verá afectada tan solo un periodo de muestreo después.

El tiempo de establecimiento real es de 800 segundos y en simulación de aproximadamente 800 segundos. Las señales de control no presentan saturación debido a que el valor de referencia no exige una acción de control fuerte.

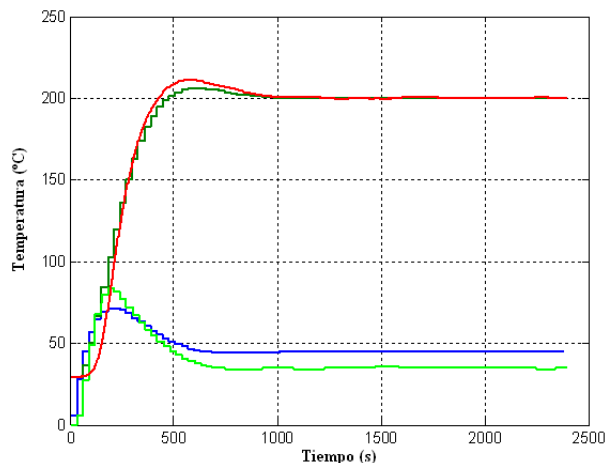


Figura 4.30. Respuesta paso RE discreto tercera región 200°

En la figura 4.30 se aprecia una similitud entre las señales simuladas y reales. La respuesta real del sistema presenta sobrepico aproximado del 7.5% y en simulación de 4%. En cuanto al tiempo de establecimiento se obtiene un valor muy cercano al deseado. Los valores son relativamente cercanos, luego se observa que se cumple con los parámetros de desempeño

Las señales de control no presentan saturación debido al valor de referencia bajo que presentan; ambas señales tienen un comportamiento similar estabilizándose alrededor de 3% y de 8.5% de ciclo útil respectivamente.

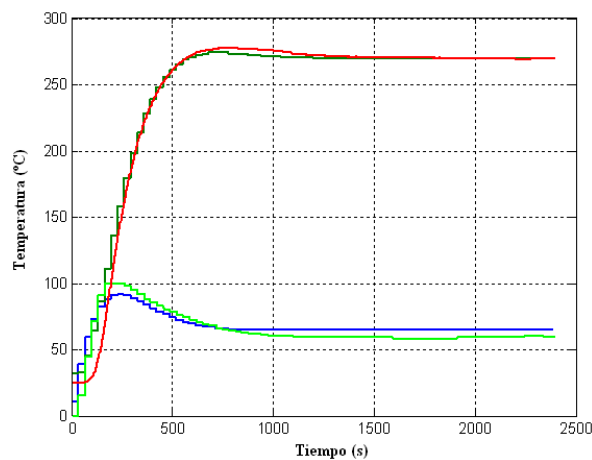


Figura 4.31. Respuesta paso RE discreto cuarta región 270°

La figura 4.31 muestra similitudes entre la respuesta real y la simulada, esto se debe a la buena escogencia de los parámetros deseados. En la salida real del sistema se observa un sobrepico aproximado de 5,18 %, debido a una acción de control fuerte que alcanza a saturar el

controlador por unos segundos, sin embargo esto permitió que el controlador tuviera un tiempo de subida corto para luego estabilizarse después del sobrepico. En simulación el valor obtenido es de 3.70%. El tiempo de establecimiento real es aproximadamente 900 segundos y en simulación de 1100 segundos, parámetros cercanos comparados con el tiempo de respuesta del sistema.

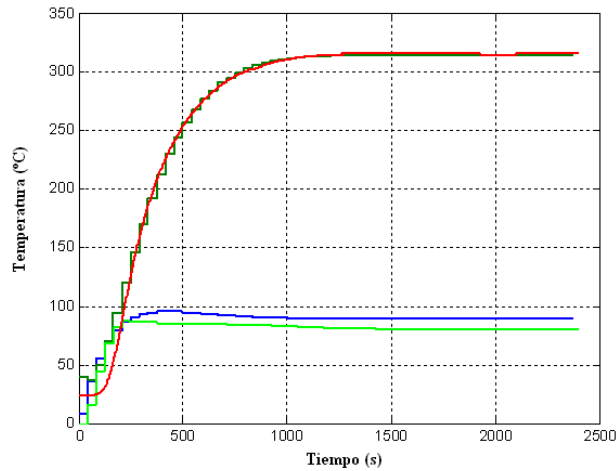


Figura 4.32. Respuesta paso RE discreto quinta región 315°

En la figura 4.32 se evidencia el resultado a una referencia que a pesar de ser alta, no obliga al controlador a saturarse. La respuesta de esta región muestra una concordancia entre las señales real y simulada, una respuesta sobreamortiguada sin sobrepico y tiempo de establecimiento de 1100 segundos en real y simulada, manteniendo el criterio de 2%. El valor de estabilización del controlador es aproximadamente 90% en la simulación y 79 % en la salida real, valores relativamente próximos que aseguran un buen modelamiento de la planta y el correcto diseño del controlador por realimentación de estados para esta región.

4.5 Controlador Polinomial RST

Como se había mencionado en la teoría, el diseño del controlador por enfoque de ecuaciones polinómicas, RST, está fundamentado en la dinámica de la ecuación Diofantina, que se plantea en forma de matrices E, D, M, donde M representa la matriz de coeficientes de los polinomios numerador y denominador del control diseñado. A continuación se muestra el desarrollo completo de los parámetros tenidos en cuenta, y la elaboración de las matrices:

Al igual que para los demás controladores implementados, es necesario diseñar un controlador para cada una de las regiones de atracción que se acople según las características dinámicas de estas. El diagrama en bloques que representa la planta se muestra en la figura 4.31.

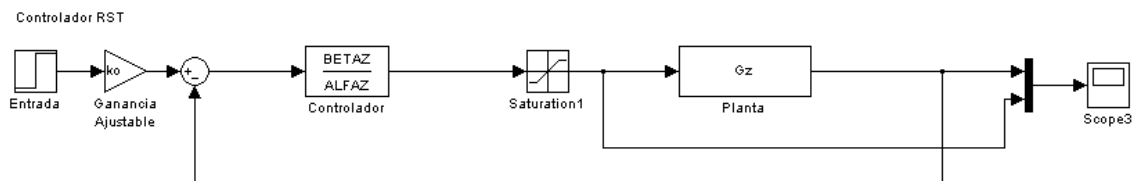


Figura 4.31. Representación en bloques de controlador polinomial RST

Para diseñar el controlador se parte de que la función de transferencia en tiempo continuo para las regiones está dada por la ecuación (3.3). Discretizando por Backward y utilizando la ecuación (2.4), se obtiene la siguiente función de transferencia.

$$G_z = \frac{kzh}{z(\tau + h) - \tau} = \frac{z \left(\frac{kh}{\tau + h} \right)}{z - \left(\frac{\tau}{\tau + h} \right)} \quad (4.38)$$

Los polinomios que describen la planta según la ecuación (4.35) son:

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = z - \left(\frac{h}{\tau + h} \right)$$

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = z \left(\frac{kh}{\tau + h} \right)$$

La matriz (E de $2n \times 2n$) para esta función de transferencia es:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{-\tau}{\tau + h} & 0 \\ 1 & \frac{kh}{\tau + h} \end{bmatrix}$$

La ecuación Diofantina se completa con el polinomio estable $D(z)$ de grado $(2n-1)$ que a su vez se compone de los polinomios $H(z)$ de grado (n) y de $F(z)$ de grado $(n-1)$, donde $H(z)$ toma uno de los polos deseados de segundo orden, de tal forma que la escogencia del polo deseado no sea arbitraria. Siendo $H(z)$ de orden 1, $F(z)$ no puede ser más que 1.

Partiendo de la ecuación característica de un sistema de segundo orden,

$$polos(s) = s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2$$

Donde ξ y W_n se escogen a partir de los parámetros de desempeño, tiempo de establecimiento y sobre impulso:

$$M_p = e^{\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi W_n}$$

Teniendo en cuenta que:

$$polos(s) = (s + \delta_1)(s - \delta_2) = s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2$$

$$s_1 = \delta_1 \quad y \quad s_2 = \delta_2$$

Por mapeo de polos se sabe que:

$$z_1 = e^{s_1 t_e} \quad y \quad z_2 = e^{s_2 t_e}$$

Y de esta forma se tienen los polos en tiempo discreto:

$$polos(z) = (z - z_1)(z - z_2)$$

A partir de una rutina implementada en MATLAB ® añadida al Anexo 5, se determinan los polos para cualquier parámetro de desempeño de tiempo de establecimiento y sobre impulso.

Conformado el polinomio $D(z)$ como:

$$D(z) = d_0 z^{2n-1} + d_1 z^{2n-2} + \dots + d_{2n-2} z + d_{2n-1} = (z - z_2)$$

Se presenta a continuación la matriz (D) de este polinomio:

$$D = \begin{bmatrix} -z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solo resta tomar la inversa de E y multiplicarla por la matriz D para obtener la matriz M con los coeficientes de los polinomios numerador y denominador del controlador.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-\tau}{\tau + h} & 0 \\ 1 & \frac{kh}{\tau + h} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} -z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-(h + \tau)}{\tau} & 0 \\ \frac{(h + \tau)^2}{k\tau h} & \frac{h + \tau}{kh} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{z_2(h + \tau)}{\tau} \\ \frac{-(h + \tau)(hz_2 + \tau(z_2 - 1))}{h\tau k} \end{bmatrix}$$

Donde el control se define como:

$$\begin{aligned} \text{Control} &= \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \\ \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} &= \frac{\frac{-(h + \tau)(hz_2 + \tau(z_2 - 1))}{h\tau k}}{\frac{z_2(h + \tau)}{\tau}} = \frac{-(hz_2 + \tau(z_2 - 1))}{z_2 h k} = Cte \end{aligned} \quad (4.39)$$

Se observa como el controlador RST anula la dinámica del sistema reemplazándola por la dinámica de un sistema 'ideal' de primer orden, donde al ubicar los polos entre el origen y el círculo unitario se permite obtener una respuesta más real del sistema.

4.5.1 Implementación RST

El primer paso para validar estas ecuaciones es construir el esquema de control de la figura 4.31, un programa estructurado en bloques, implementado en SIMULINK® con el fin de simular la respuesta del modelo y donde el controlador y la constante k_o son calculados a partir de los valores de tiempo de establecimiento y sobrepico, que se especifican en la tabla 4.5, por una rutina implementada en MATLAB® que se puede encontrar en el Anexo 5. Con base en las ecuaciones (2.8) y (4.39) se obtuvo:

REGIÓN	$M_p(\%)$	t_s	$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$	k_o	k_o'
1	1	600	-	-	-
2	1	450	-	-	-
3	1	500	0.4470	1.509	1.37
4	1	600	0.3038	1.798	1.68
5	1	700	0.1876	2.509	2.385

Tabla 4.5. Especificaciones de diseño y constantes del control polinomial RST

Los valores de la figura 4.5 se escogieron con base en simulaciones, donde se evalúa la saturación en la señal de control y la concordancia entre las especificaciones de diseño con la respuesta simulada. Si se presenta saturación de los controladores, lo más probable es que las exigencias en estos parámetros son demasiado estrictas. Para las regiones 1 y 2 los resultados obtenidos no cumplieron con las especificaciones de diseño debido al retardo que presentaban, de esta forma no se valida la implementación del controlador para estas regiones.

Es necesario validar los resultados simulados en las demás regiones, de esta forma el RST se implementó gráficamente en LabView®. La figura 4.32 muestra 1) la etapa de adquisición de temperatura, 2) el bloque del controlador RST con el ingreso respectivo de variables por parte del usuario y 3) la salida del controlador hacia la planta.

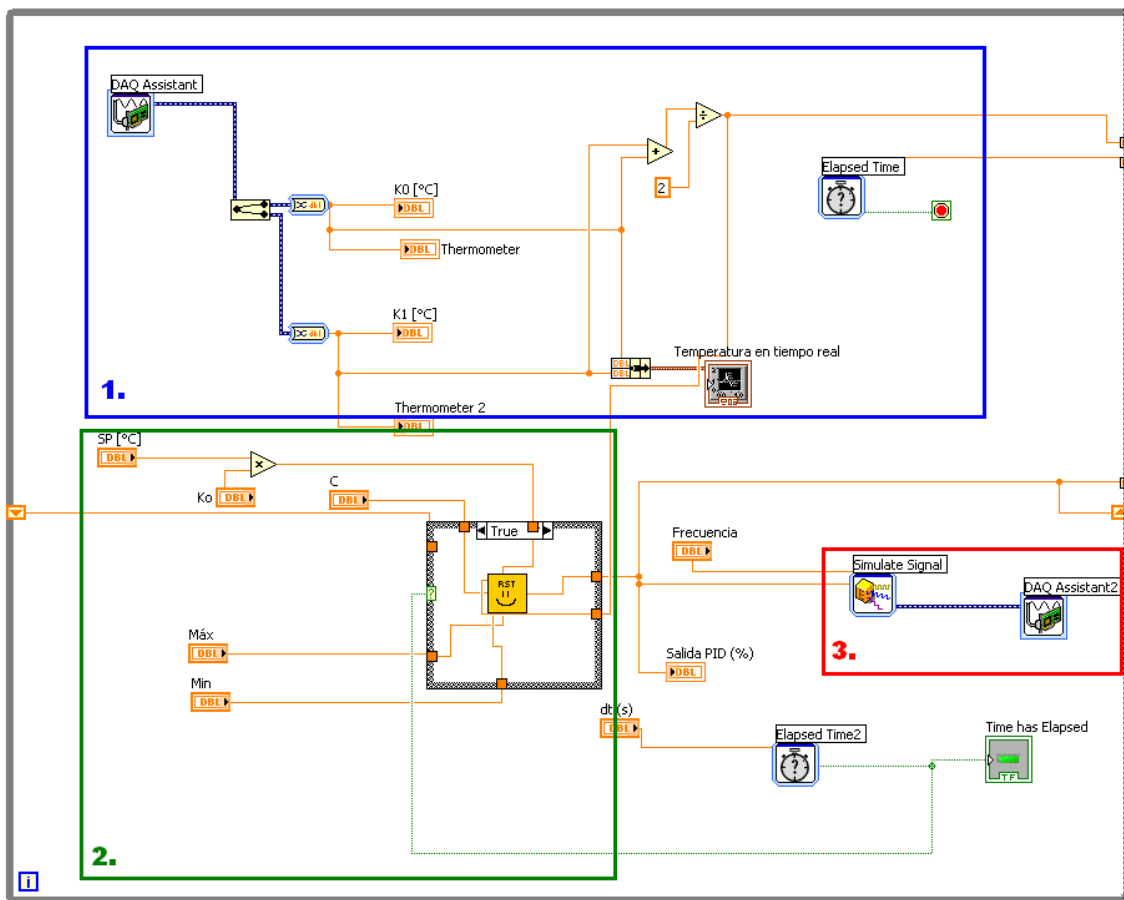


Figura 4.32. Implementación en LabView® de controlador RST.

El bloque del RST presentado en la figura 4.32 se implementó en LabView® basado en las ecuación (4.35).

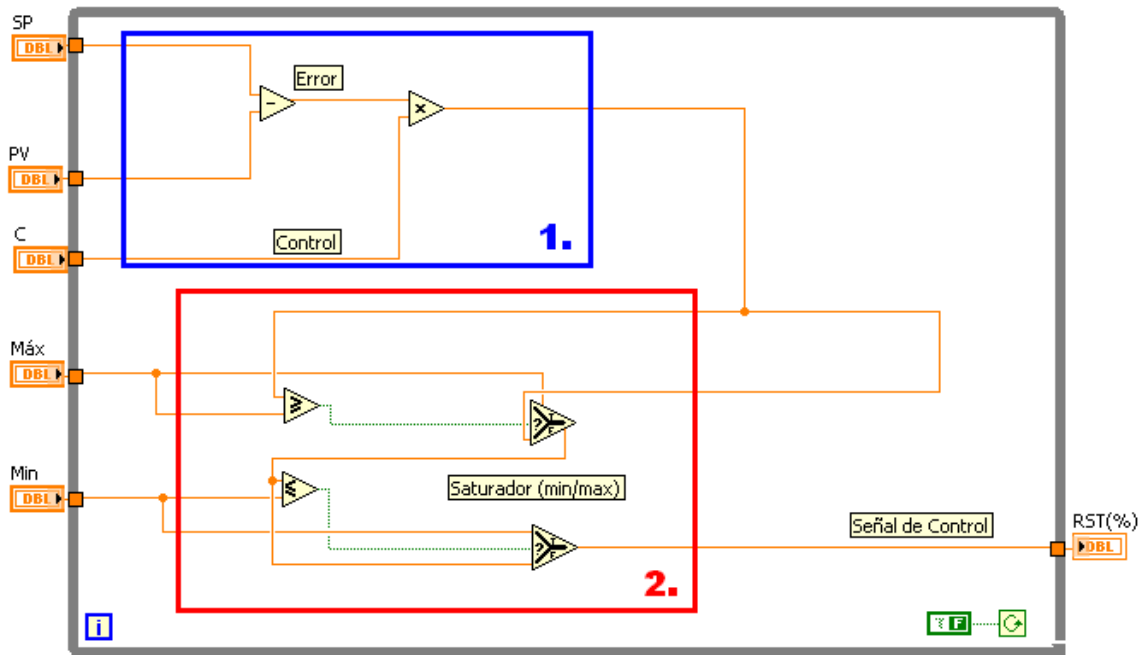


Figura 4.33. Estructura interna del RST

En la figura 4.33 se evidencia el error como la diferencia entre el Set Point (SP) y la variable del proceso (PV). La acción de control se representa por la constante determinada en la ecuación (4.35), donde las constantes Máx y Min corresponden a los límites físicos establecidos para el controlador, cuya salida comprende un rango de 0 a 100, equivalente a la entrada en porcentaje del ciclo útil de la alimentación de la planta.

4.5.2 Resultados RST

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada las regiones de operación que no presentan retardos; en cada una de las siguientes gráficas se observa la salida de la planta y la señal de control del sistema, donde se sobrepone la respuesta medida en la planta a través de los módulos de adquisición con la respuesta obtenida en la simulación a través de SIMULINK®.

En todos los resultados presentados en esta sección la respuesta real del sistema está compuesta por la línea roja que representa la temperatura medida por los termopares y por la línea verde que muestra la señal de control aplicada a la planta; la salida de la planta se muestra de forma continua debido a que se quiere ver el comportamiento de la planta entre los tiempos de muestreo establecidos. La respuesta simulada del sistema está compuesta por la línea verde oscuro que muestra la salida de la planta y por la línea azul que representa la señal de control.

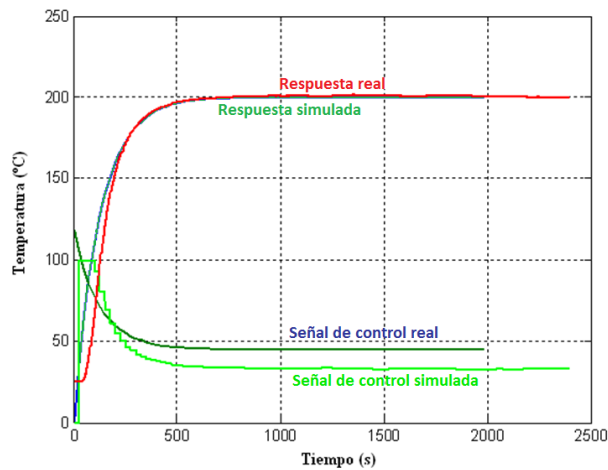


Figura 4.34. Respuesta Paso RST Segunda Región 200°

La figura 4.34 muestra la respuesta típica de un controlador polinomial RST donde se anula la dinámica del sistema, generando una respuesta con un sobrepico aproximado a 0% y un tiempo de establecimiento lo más pequeño posible. En la figura se ilustra un comportamiento “ideal” de la planta con sobrepico menor al 1% y con tiempo de establecimiento de 550 segundos, los valores esperados coinciden en gran magnitud con los obtenidos.

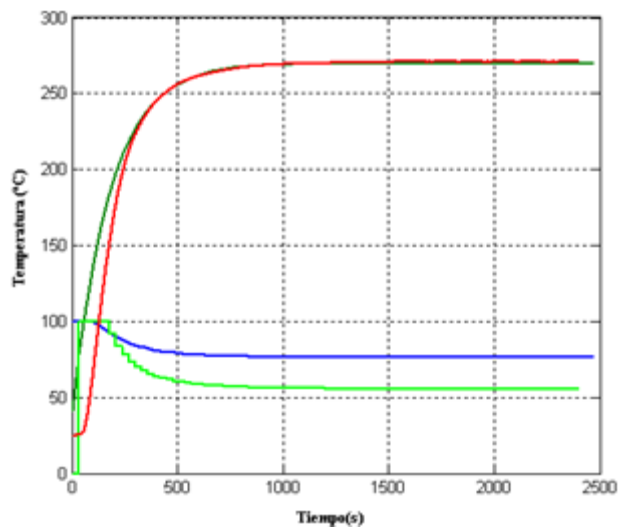


Figura 4.35. Respuesta Paso RST Tercera Región 270°

La figura 4.35 muestra una respuesta sin sobrepico y un tiempo de establecimiento de 600 segundos, los valores obtenidos coinciden con las especificaciones de diseño, mostrando que el comportamiento de la señal de control se aproxima a la esperada .

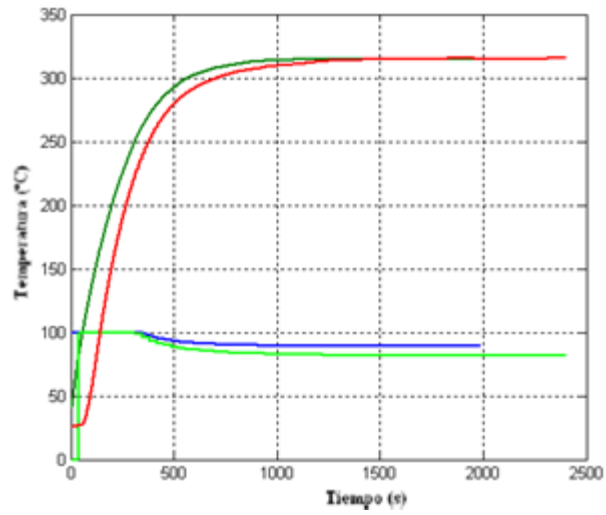


Figura 4.36. Respuesta Paso RST Cuarta Región 315°

La figura 4.36 muestra una respuesta sin sobrepico y un tiempo de establecimiento de 1100, un poco mayor al especificado (700 segundos). Se puede concluir que el RST representa un control óptimo comparado con los demás controladores implementados.

5. Análisis de los Resultados

5.1 Especificaciones de Desempeño.

El resultado final para cualquier acción de control es obtener ciertas características de la respuesta temporal. En la mayoría de casos, los requerimientos de la respuesta transitoria se determinan a través de los polos dominantes del sistema, estos polos dominantes son modificados principalmente en función del tiempo de establecimiento y del máximo sobrepico permitido. En este orden de ideas se compararán en primera instancia los resultados obtenidos con base a la respuesta transitoria de cada controlador dentro de cada región, analizando así los valores obtenidos experimentalmente.

CONTROLADOR	MP (%)	TS (s)	ESS (%)	ESFUERZO DE CONTROL	RECHAZO A PERTURBACIONES
PID Continuo	16	1000	1.53	No Saturación (5%)	304
PID Discreto	17.6	1200	1.53	No Saturación (2.5%)	445
RE Continuo	3.07	1100	1.54	No Saturación (3%)	312
RE Discreto	16.61	1800	1.53	No Saturación (3%)	326

Tabla 5.1. Parámetros de desempeño de los diferentes controladores para la primera región lineal.

En la tabla 5.1 se observa que el sobrepico es más alto en los controladores discretos debido a que se genera corrección del error durante cada periodo de muestreo y no continuamente. El RE es un sistema con poco sobrepico pero de establecimiento lento, el PID tiene una respuesta rápida pero con sobrepicos muy altos que lo alejan de la referencia durante un largo tiempo. Los tiempos de establecimiento son grandes en todo los controladores, en especial el control por realimentación de estados discreto donde el sobrepico es demasiado grande y retarda el tiempo de establecimiento a casi el doble del valor deseado. Cuando el valor de referencia es muy pequeño y se acerca a la zona muerta, el controlador genera una acción de control mínima que toma un tiempo considerablemente largo para alcanzar el estado estable, este efecto puede causar una respuesta transitoria indeseable más que todo en el tiempo de establecimiento.

CONTROLADOR	MP (%)	TS (s)	ESS (%)	ESFUERZO DE CONTROL	RECHAZO A PERTURBACIONES
PID Continuo	15.5	900	1.42	No Saturación (19%)	339
PID Discreto	12.8	1350	1.42	Saturación (19%)	480
RE Continuo	5.35	770	1.1	No Saturación (21%)	331
RE Discreto	8.57	800	1.1	No Saturación (18.8%)	381

Tabla 5.2. Parámetros de desempeño de los diferentes controladores para la segunda región lineal.

La región dos se definió como un sistema de primer orden más tiempo muerto, donde es de esperarse que la respuesta obtenida presente mayor diferencia con la simulada debido a la aproximación realizada. Es razonable pensar que el tiempo de establecimiento es mayor que para las demás regiones, donde para estos controladores se hace más notable la diferencia entre los parámetros de desempeño deseados y los obtenidos. Para esta región se obtienen sobrepicos mayores al 5 %, errores de estado estable mayores al 1%, dificultad en la determinación de los parámetros deseados, entre otros. La respuesta real de todos estos controladores es aceptable, se ha logrado realizar un equilibrio de los requerimientos impuestos y de las variables mostradas en la tabla 5.2. El controlador por realimentación de estados continúa superando en todos los

aspectos al control PID tanto en la forma continua como discreta. Debe tenerse en cuenta que en el caso de comparar sistemas discretos con continuos, algunos de los parámetros de desempeño mejoran por la cantidad de cálculos realizados por unidad de tiempo.

CONTROLADOR	MP (%)	TS (s)	ESS (%)	ESFUERZO DE CONTROL	RECHAZO A PERTURBACIONES
PID Continuo	12	900	0.5	Saturación (37%)	426
PID Discreto	12.5	1300	1.2	Saturación (34%)	442
RE Continuo	1.5	400	0.15	No Saturación (30%)	425
RE Discreto	7.5	850	0.15	No Saturación (32%)	440
RST	0.1	500	0.01	Saturación (32%)	380

Tabla 5.3. Parámetros de desempeño de los diferentes controladores para la tercera región lineal.

En la región lineal tres se puede mantener las mismas observaciones que para la segunda región, sin embargo, es importante mencionar que aquí los controladores PID se saturan y aun así no logran obtener mejores resultados que los controladores por RE como se muestra en la tabla 5.3. El error en estado estable es mínimo, lo cual indica una excelente acción de control impuesta por los controladores diseñados. El RST presenta la mejor respuesta debido a que cancela la dinámica del sistema y cumpliendo las especificaciones de diseño.

CONTROLADOR	MP (%)	TS (s)	ESS (%)	ESFUERZO DE CONTROL	RECHAZO A PERTURBACIONES
PID Continuo	6.3	1200	0.37	Saturación (62%)	475
PID Discreto	11	1400	0.74	Saturación (62%)	480
RE Continuo	1.8	480	0.1	Saturación (58%)	482
RE Discreto	5.18	1100	0.2	Saturación (59%)	595
RST	0.1	600	0.01	Saturación (51%)	420

Tabla 5.4. Parámetros de desempeño de los diferentes controladores para la cuarta región lineal.

Para esta región lineal se observa una mejor respuesta transitoria en los sistemas controlados por realimentación de estados; los sobrepicos alcanzados por el PID aparecen debido a los ceros que coloca el PID en lazo cerrado. En esta ocasión se permitió la saturación del controlador para todos los casos en magnitudes aceptables, con el fin de obtener parámetros de desempeño razonables que se aproximaran a las especificaciones del diseño. El error en estado estable mostrado en la tabla 5.4 es menor al 1% lo cual garantiza que la acción de control de los 4 controladores funciona correctamente. Para esta región los resultados se aproximan a las respuestas simuladas especialmente para el controlador RE, que presenta menores tiempos de establecimiento, menor error de estado estable, menor sobrepico, y menor esfuerzo de control comparado con el PID. El RST presenta la mejor respuesta debido a que cancela la dinámica del sistema y cumpliendo las especificaciones de diseño.

CONTROLADOR	MP (%)	TS (s)	ESS (%)	ESFUERZO DE CONTROL	RECHAZO A PERTURBACIONES
PID Continuo	3.2	1100	0.47	Saturación (85%)	616
PID Discreto	1.62	1200	1.26	Saturación (87.5%)	593
RE Continuo	1.58	720	0.6	No Saturación (75%)	582
RE Discreto	0.0	1100	0.8	No Saturación (79%)	603
RST	0.1	700	0.01	Saturación (80%)	564

Tabla 5.5. Parámetros de desempeño de los diferentes controladores para la quinta región lineal.

En esta región se debe destacar que los controladores presentan un excelente comportamiento y que coinciden en gran medida con las especificaciones de diseño deseadas y con las simulaciones como ilustra la tabla 5.5. Se observa que entre los controladores PID continuo y PID discreto no hay una diferencia significativa en tiempos de establecimiento, donde ambos llegan al estado estable con un error pequeño. Era de esperarse que el control continuo presentara un error de estado estable menor que el sistema discreto, pues este último realiza cálculos cada periodo de muestreo mientras que el continuo calcula la señal de control de forma instantánea dependiendo del error entre la variable de proceso y la referencia.

El PID continuo tiene un sobrepico dos veces mayor que el discreto, razonable al establecer los ceros que coloca en lazo cerrado, generando comportamientos indeseables en la respuesta transitoria de un lazo realimentado, sin embargo se buscaba tener un balance entre esfuerzo de control y velocidad de respuesta sin importar en parte sacrificar un poco una respuesta más amortiguada. En cuanto al control por realimentación de estados, no se obtuvo saturación del controlador para ningún caso, se lograron tiempos de establecimiento más cortos y se obtuvo un sobrepico menor al requerido. Todas estas características hacen al control por realimentación de estados una mejor opción de control para la zona lineal que se está tratando.

5.2 Especificaciones de Robustez.

Se intenta determinar qué tan robusto es el controlador implementado donde se analizarán principalmente dos parámetros: el rechazo a perturbaciones y el esfuerzo de control. Analizando los diferentes valores para cada controlador dentro de las zonas de operación, puede identificarse que controlador presenta mayor robustez comparado con los demás.

5.2.1. Rechazo a Perturbaciones

Con el fin de determinar cómo la planta responde a un disturbio, se generó una perturbación pequeña que cambia la temperatura interna del horno en unos cuantos grados. Es de esperarse que la acción de control corrija la variación creada y la temperatura se estabilice nuevamente en el valor de referencia. Para lograr este efecto, se necesitaron elementos fríos que no alteraran la dinámica propia del horno, ni cambiaran su construcción interna.

El objetivo del diseño de los controladores es lograr que la variable de proceso sea igual a la señal de referencia a pesar de la influencia constante de los disturbios. Se realizó esta prueba para los controladores PID y Realimentación de Estados para todas las zonas lineales; en la figura 5.1 se muestran únicamente los resultados obtenidos para las regiones 2 y 4 correspondientes a 140 y 270 grados respectivamente.

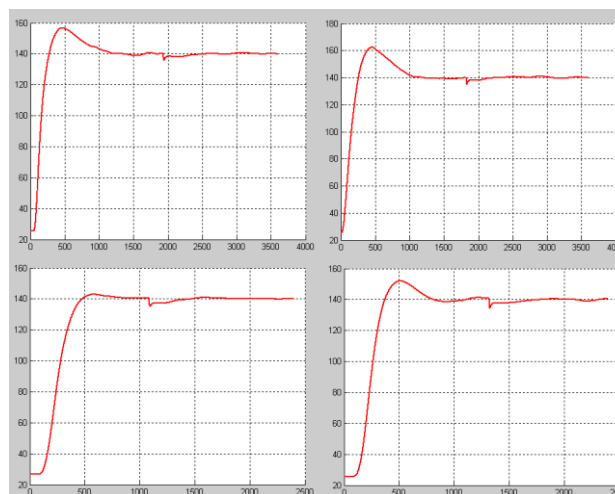


Figura 5.1. Respuesta del sistema a Perturbacion con Set Point de 140° a) PID discreto, b) PID continuo, c) RE discreto, d) RE continuo

Para esta región puede observarse que los controladores responden de la forma esperada y se estabilizan nuevamente en el valor deseado (140°). Su tiempo de rechazo a perturbaciones oscila entre los 475 y los 595 segundos como se muestra en la figura 5.1.

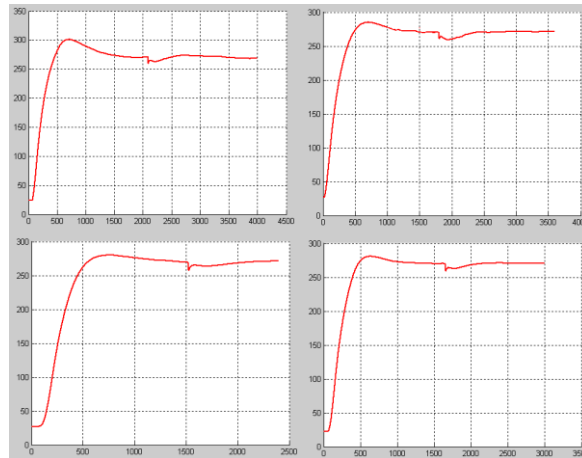


Figura 5.2. Respuesta del sistema a Perturbacion con Set Point de 140° a) PID discreto, b) PID continuo, c) RE discreto, d) RE continuo

Para esta región se observa que los controladores nuevamente responden de la forma esperada y se estabilizan en la temperatura requerida (270°). Su tiempo de rechazo a perturbaciones oscila entre los 339 y los 480 segundos, lo cual evidencia que el tiempo es menor al analizado previamente. Analizando los valores de rechazo a perturbaciones de las figuras 5.1 y 5.2 se evidencia que los controladores diseñados logran que la señal controlada se mantenga en el valor de la señal de referencia a pesar de las perturbaciones, donde dependiendo del modelo unos se demoran más tiempo que otros.

5.2.2. Esfuerzo de Control

Se busca lograr objetivos de control teniendo en cuenta los límites físicos que presenta la señal de control, para este caso el esfuerzo de control se encuentra acotado entre 0 y 100 siendo consecuentes con que la salida del controlador representa el ciclo útil a la entrada de la planta, es imposible hablar de valores mayores a 100. La saturación del actuador puede causar inestabilidad y una respuesta transitoria indeseable, luego es necesario tener en cuenta en qué proporción puede saturarse el controlador sin afectar las especificaciones de diseño.

Para la cuarta región, debido al tiempo de establecimiento escogido para cada controlador, se exigió una respuesta del control que pudiera cumplir con los parámetros específicos. En este caso se observa que aunque todos los controladores se hayan saturado, el esfuerzo de control no causa inestabilidad y genera una respuesta transitoria acorde con las especificaciones.

Para la mayoría de regiones se tiene que los controladores PID se saturan, esto se debe a que la acción proporcional tiene un efecto inmediato sobre el error mientras que la integral no, generando una señal de control más rápida que para el caso del controlador por realimentación de estados.

5.3. Análisis de Respuesta en Frecuencia

El sistema de primer orden de la ecuación (3.3) muestra el lugar geométrico de las raíces presentado en la figura 5.3., donde se evidencia la existencia de un único polo. En consecuencia, el bode mostrará únicamente el margen de fase correspondiente a 104° .

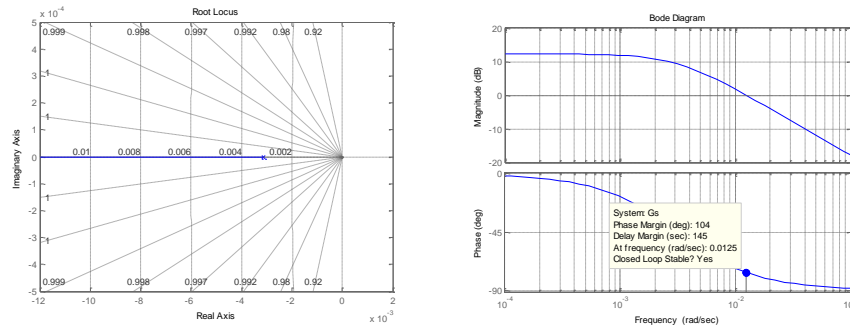


Figura 5.3. a) LGR y b) Bode de la planta representada como sistema de primer orden.

La planta con tiempo muerto identificada en la ecuación (3.1) presenta el lugar geométrico de las raíces que se ilustra en la figura 5.4. donde se observa que el sistema posee dos polos estables. Al analizar el Bode de la planta se determina el margen de ganancia y de fase, cuyos valores son 3.02 dB y 22.2° respectivamente.

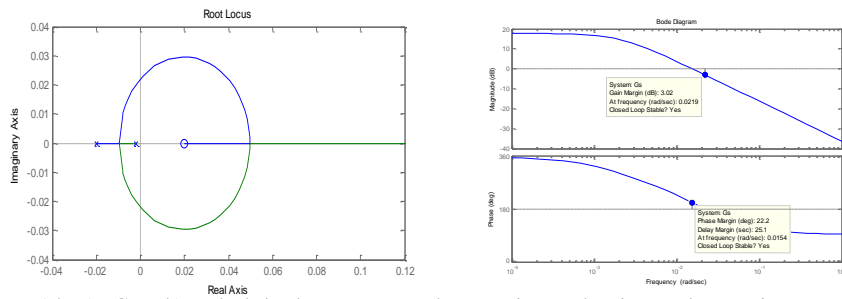


Figura 5.4. a) LGR y b) Bode de la planta representada como sistema de primer orden con tiempo muerto.

La función de los controladores PID es colocar dos ceros en el semiplano izquierdo forzando a los polos a la estabilidad del sistema. En la práctica, para que un sistema de control tenga un funcionamiento adecuado, el margen de ganancia debe ser superior a 6dB y el margen de fase estar entre +30° y +60°. Con estos márgenes, queda garantizada la estabilidad del sistema a pesar de que las constantes de tiempo de los componentes varíen dentro de ciertos límites. Por simplicidad el análisis de la respuesta en frecuencia se realiza para las regiones dos y cuatro de la tabla (3.11), donde la primera región está representada por una función de transferencia de primer orden más tiempo muerto y la segunda únicamente por una función de transferencia de primer orden.

5.3.1 Controlador PID Continuo para la segunda región de operación.

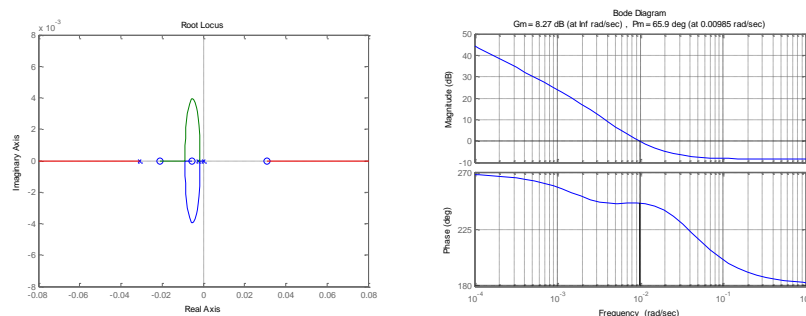


Figura 5.5. a) LGR y b) Bode de la planta de primer orden mas tiempo muerto con control PID continuo (Zona 2).

En la figura 5.5 se observa como el controlador estabiliza el sistema a través del LGR, el margen de ganancia es de 8.27 dB y el de fase es de 65.9° cumpliendo con un control adecuado.

El sistema puede llegar a la inestabilidad dependiendo de la ganancia aplicada, luego debe tenerse en cuenta el valor límite para el cual el sistema sigue siendo estable.

5.3.2. Controlador PID Continuo para la cuarta región de operación.

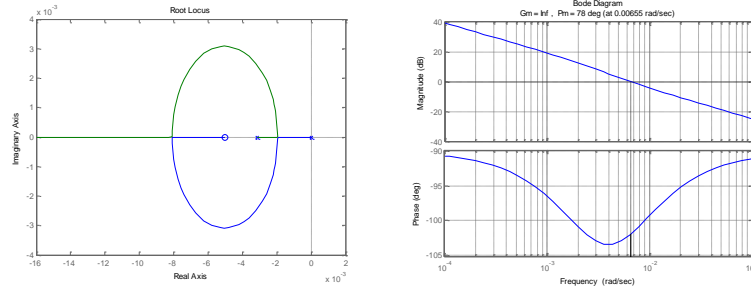


Figura 5.6. a) LGR y b) Bode de la planta de primer orden con control PID continuo (Zona 4).

En la figura 5.6 se observa en el LGR que el sistema es estable para cualquier ganancia, debido a esto el margen de ganancia es infinito y el de fase es de 78° cumpliendo con un control adecuado.

5.3.3. Controlador PID Discreto para la segunda región de operación.

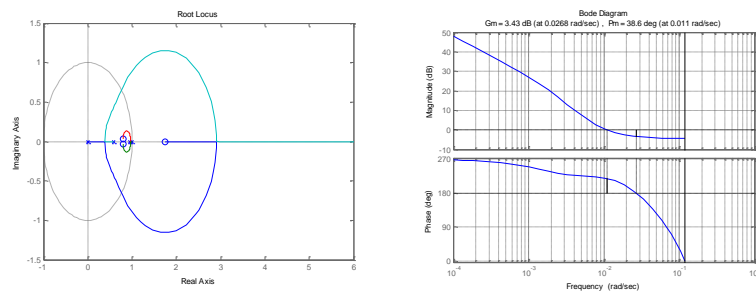


Figura 5.7. a) LGR y b) Bode de la planta de primer orden mas tiempo muerto con control PID discreto (Zona 2).

En la figura 5.7 se observa en el LGR que el sistema es estable pero puede llegar a la inestabilidad fácilmente, el margen de ganancia es 3.43dB y el de fase es de 38.6° . Debe tenerse en cuenta que el sistema no es 100% confiable y no cumple con un control adecuado.

5.3.4. Controlador PID Discreto para la cuarta región de operación.

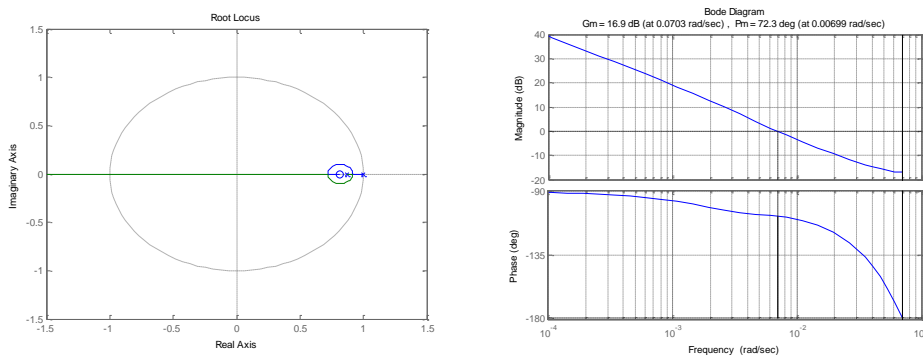


Figura 5.8. a) LGR y b) Bode de la planta de primer orden con control PID discreto (Zona 4).

En la figura 5.8 se observa en el LGR que el sistema es estable pero no para cualquier ganancia, el margen de ganancia es 16.9dB y el de fase es de 72.3° cumpliendo con un control adecuado.

5.3.5. Controlador por realimentación de estados continuo para la segunda región de operación

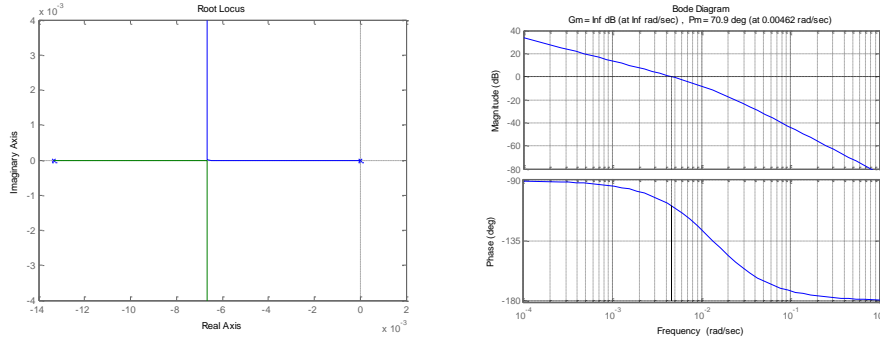


Figura 5.9. a) LGR y b) Bode de la planta de primer orden con control RE continuo (Zona 2)..

En la figura 5.9 se observa en el LGR que el sistema es estable para cualquier ganancia, debido a esto el margen de ganancia es infinito y el de fase es de 70.9° cumpliendo con un control adecuado para la región lineal controlada.

5.3.6. Controlador por realimentación de estados continuo para la cuarta región de operación

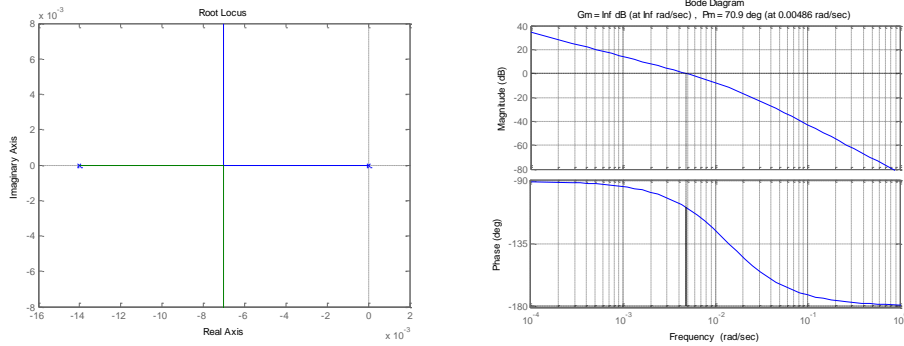


Figura 5.10. a) LGR y b) Bode de la planta de primer orden con control RE continuo (Zona 4)..

En la figura 5.10 se observa en el LGR que el sistema es estable para cualquier ganancia, debido a esto el margen de ganancia es infinito y el de fase es de 70.9° cumpliendo con un control adecuado para la región lineal controlada.

6. Conclusiones.

Por medio de simulaciones que evaluaron la respuesta del controlador PID discreto, se determinó que el método de Tustin no es apropiado para algunas regiones de operación debido a que aparecen oscilaciones amortiguadas. Como solución se plantea el método de discretización de Backward ya que conserva la estabilidad en la transformación de los polos y no presenta oscilaciones para polos reales rápidos, por otro lado recarga menos computacionalmente al sistema.

Con ayuda del método del lugar geométrico de las raíces se evidencia que los polos y ceros del sistema discreto se acercan al origen mientras que el intervalo de muestreo se incrementa.

La discretización de los controladores implementados afecta la respuesta y genera diferencias en el desempeño analizado en tiempo continuo principalmente para las regiones con tiempo muerto; esto se debe a que el retardo no corresponde a un múltiplo entero del tiempo de muestreo y la dinámica del modelo continuo difiere con la del modelo discreto.

Para los controladores discretos los retardos o variaciones a la entrada no afectan significativamente el comportamiento de la salida de la planta debido a que entre cada intervalo de muestreo la señal de control se mantiene constante; mientras que para los controladores continuos debe tenerse en cuenta que cualquier cambio o variación a la entrada por mínimo que sea afecta la salida del controlador por un tiempo determinado.

La realimentación redujo el efecto de las perturbaciones en el comportamiento del sistema, permitiendo que la variable del proceso fuera igual a la señal de referencia a pesar de las variaciones constantes que representan dichos disturbios.

Existe una relación evidente entre el esfuerzo de control y los parámetros de desempeño de sobrepico y tiempo de establecimiento, donde es indispensable lograr un balance de estas tres partes con el fin de obtener una respuesta transitoria deseada.

Si bien el diseño de un control digital representa una respuesta deseada del sistema, es válido establecer que se puede construir un control digital a partir de aproximaciones de controladores analógicos que han demostrado un comportamiento satisfactorio, donde la implementación digital es solo una aproximación numérica de ecuaciones de diferencia de dichos controladores.

Los métodos de control clásico, como el PID, esperan que se genere un error entre el set point y la variable de proceso con el fin de minimizarlo a través de una acción de control, mientras que los métodos de control moderno, como el control por realimentación de estados, se encargan de ejercer una acción de control mediante el sensado inmediato de cada estado definido en el modelo en espacio de estados; de esta forma es evidente establecer que la acción de control moderna represente una mejor respuesta transitoria con menor variación a la salida en comparación con la acción de control clásica, requiriendo además un menor esfuerzo de la señal del controlador.

Una estrategia que permite evitar el sobrepico de los controladores PID consiste en cambiar la derivada del error por una fracción de la referencia menos la salida. $E_d(t) = bR(t) - y(t)$ donde $0 < b < 1$.

Para mejorar el fenómeno de saturación en los controladores PID es apropiado implementar una estrategia anti-wind up.

Debido a que la adquisición de datos se hace a través del computador, el controlador PID presenta un mejor desempeño en relación con el PID continuo debido a su naturaleza discreta.

Se realizó una prueba con todos los controladores por realimentación de estados, conmutando el controlador a medida que se iba variando la referencia. Los resultados se ilustran en la figura 6.1 para los valores de temperatura utilizados en el desarrollo del libro (65°, 140°, 200°, 270°, 315°).

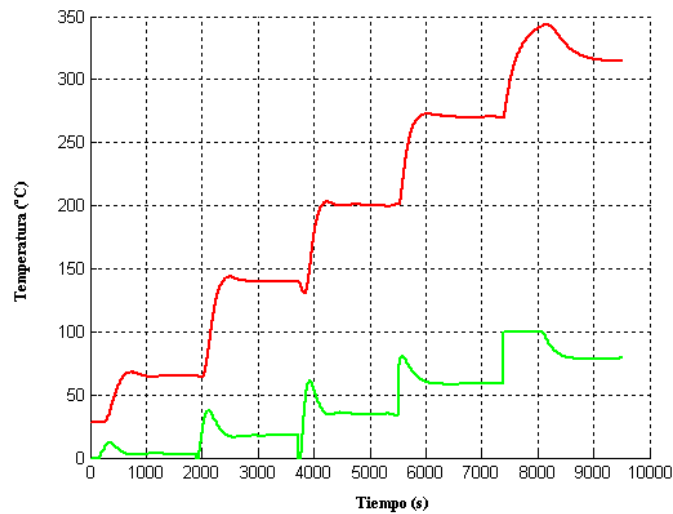


Figura 6.1. Resultado de prueba de conmutación de controladores RE continuo para todas las regiones.

Se evidencia el efecto Bumpless al cambiar abruptamente el controlador, ya que cada vez que la referencia cambia las condiciones iniciales no son las mismas, donde una estrategia es suavizar la señal de control en las conmutaciones entre controladores.

7. Bibliografía

- [1] EGEA MEJÍA, Luis A. y SARMIENTO GALEANO, Jaime E., *Modelo y controlador de temperatura para horno eléctrico doméstico*, Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia, Trabajo de Grado TG0867, año 2009.
- [2] CHI-TSONG. Chen, *Introduction to Linear System Theory: Mathematical Description of Systems*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
- [3] NUÑEZ MONENEGRO, Bernardo, *Control y Automatización de procesos: Funciones de Transferencia*. Escuela Superior de Ingeniería de Sistemas, Lambayeque.
- [4] KHALIL K. Hassan, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, Tercera Edición, 2002.
- [5] ERONINI-UMEZ-ERONINI, *Dinámica De Sistemas Y Control*. Morgan State University, 1° EDISION, editorial Thomson Learning, 2001.
- [6] FLORES T. Antonio. Linealización de Funciones No Lineales. Enero 29 de 2009.
- [7] PROAKIS. John G. y MANOLAKIS Dimitris G., *Tratamiento Digital de Señales*. Prentice Hall, 3rd Edition.
- [8] ASTROM Karl, WITTENMARK Bjorn , *Computer Controlled Systems Theory and Design* , Prentice Hall , 1995.
- [9] SILVA, Guillermo J., DATTA Aniruddha y BHATTACHARYYA S. P., *PID Controllers for Time-Delay Systems*. Birkhäuser.
- [10] OGATA, Katsuhiko, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall, Segunda Edición, 1996.
- [11] OMRON, ELECTRONICS S.A, *Curso de Control de Temperatura*. 2009.
- [12] SCENNA, Nicolás J., *Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos*. ISBN: 950-42-0022-2 - ©1999