**FORMATO DESCRIPCIÓN TRABAJO DE GRADO**

| | |
|---|---|
| AUTOR: | Uribe Kaffure Leonardo |
| DIRECTOR: | Novoa Ramírez Fernando |
| TRABAJO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE: | Matemático |
| TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: | Elaboración de un texto divulgativo en Polyominós. |
| FACULTAD: | Ciencias |
| PROGRAMA: | Carrera |
| NOMBRE DEL PROGRAMA: | Matemáticas |
| CIUDAD: | Bogotá |
| AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO: | 2006 |
| NÚMERO DE PÁGINAS: | 77 |
| TIPO DE ILUSTRACIONES: | Ilustraciones |
| MATERIAL ANEXO: | Software Polyominós. |
| DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES: embaldosinados | Polyominós, |
| RESUMEN DEL CONTENIDO: | Texto divulgativo en polyominós con ejercicios y software de apoyo |

# TABLA DE CONTENIDO


I. INTRODUCCIÓN ........ 3

II. EMBALDOSINADOS ........ 4

TEOREMA DE DEHN ........ 5

RE-DEFINICIÓN DE ÁREA: ........ 5

BASES DE HAMEL: ........ 6

ÁREAS DE HAMEL: ........ 6

TEOREMA DE DEHN: ........ 7

DEMOSTRACIÓN: ........ 7

PROBLEMAS: ........ 8

III. RECTÁNGULOS PERFECTOS ........ 10

PROBLEMAS: ........ 14

IV. MONOMINÓS ........ 15

PROBLEMAS: ........ 18

V. MONOMINÓS, DOMINÓS Y FRACCIONES CONTINUAS ........ 20

PROBLEMAS: ........ 23

VI. DOMINÓS Y NÚMEROS DE FIBONACCI ........ 24

PROBLEMA: ........ 25

VII. DOMINÓS Y TABLEROS DE AJEDREZ ........ 27

ARGUMENTOS DE COLOR ........ 27

CUBRIMIENTOS SIMPLES ........ 28

CUBRIMIENTOS SIN FALLAS ........ 29

OTRO PROBLEMA CON TABLERO DE AJEDREZ: ........ 30

DEMOSTRACIÓN DE QUE NO EXISTE UN EMBALDOSINADO ................. 31

CONTANDO EL NÚMERO DE EMBALDOSINADOS..................................... 32

PROBLEMAS:........................................................................................... 34

VIII. TRIMINÓS ........................................................................................ 36

PROBLEMAS:........................................................................................... 39

IX. TETRAMINÓS ...................................................................................... 40

PROBLEMAS:........................................................................................... 42

X. PENTAMINÓS ........................................................................................ 43

XI. POLYOMINÓS DE ORDEN SUPERIOR Y GENERALIZACIONES ........ 46

REPTILES .................................................................................................. 47

ANIMALES ................................................................................................ 48

PROBLEMAS:........................................................................................... 49

XII. SOFTWARE DE APOYO ....................................................................... 51

1. GERARD'S UNIVERSAL POLYOMINO SOLVER....................................... 51

2. PENTOMINOS PUZZLE SOLVER ............................................................ 52

3. OCEAN EXPRESS ..................................................................................... 52

4. PENTA ....................................................................................................... 53

5. POLYOMINO PUZZLE SOLVER 3.2 ......................................................... 54

6. POLYOMINOES 7.O ................................................................................. 54

7. ZILLIONS OF GAMES................................................................................ 55

XIII. BIBLIOGRAFÍA ..................................................................................... 56

# I. INTRODUCCIÓN

Los problemas matemáticos denominados problemas de embaldosinados, o simplemente embaldosinados, representan un área de investigación muy amplia en la actualidad. Surgen en este campo relaciones con temas muy diversos de las matemáticas y resulta muy sencillo proponer problemas cuya solución, la mayoría de las veces, no es tan sencilla. Se trata de una 'mina' de problemas y relaciones matemáticas con la agradable característica de que el matemático decide con gran libertad las herramientas más adecuadas para extraer el oro que allí se encuentra.

Los problemas de embaldosinados, al ser problemas geométricos con enunciados simples, permiten que las personas comprendan de manera gráfica lo que se debe hacer, usen su razonamiento espacial y, en algunos casos, practiquen la solución de los mismos con objetos reales. De esta forma, los embaldosinados nos ofrecen una forma alternativa de hacer matemáticas en la cual puede inicialmente visualizarse la solución o usarse el método de ensayo y error, para finalmente proponer una solución teórica del problema.

Los textos en español de este tema son escasos, siendo este uno de los principales motivos del desconocimiento del tema en nuestros medios académicos. El presente escrito es un intento por divulgar el tema de los embaldosinados entre los lectores y motivar al público en general para que aborden esta fascinante y divertida forma de hacer matemáticas.

# II. EMBALDOSINADOS

Un problema de embaldosinados es aquel donde se da un tipo de superficies (Baldosas) y un número específico de ellas y se busca cubrir totalmente (y exactamente, sin excederse) una superficie mayor con dichas baldosas sin sobreponerlas.

Los problemas típicos que se plantean son los siguientes:

- ¿Se puede embaldosinar la superficie con las baldosas dadas?
- ¿En caso contrario, es posible demostrar que no se puede?
- ¿De cuantas formas se puede embaldosinar la superficie?
- ¿Es posible encontrar embaldosinados con características especiales?

Un problema clásico de embaldosinados es el conocido juego de Tangram. Un planteamiento del problema en este caso sería el siguiente: Dada una superficie y 7 piezas de 'rompecabezas' (Figura 1), se debe hacer un cubrimiento de la superficie (Figura 2).

- Hay por lo menos una solución?
- Cuantas soluciones hay?
- Hay una solución donde la pieza #4 no colinde con la #2?

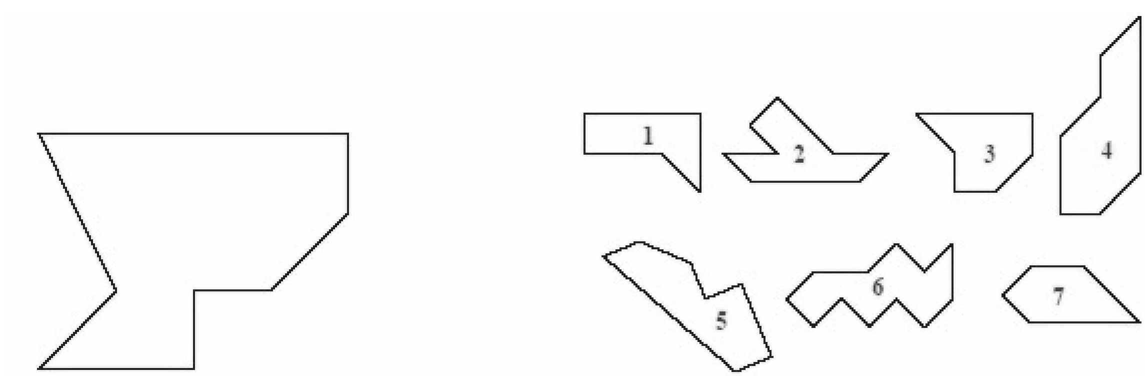



**Figura 1. Problema de Tangram**

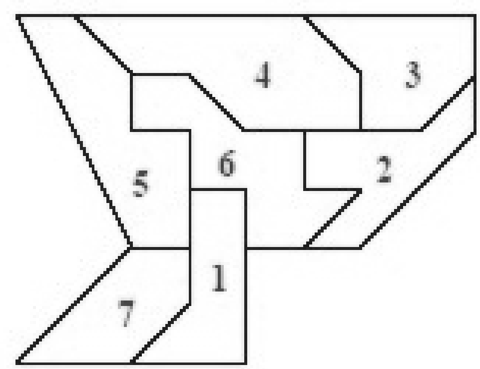



**Figura 2. Solución al problema de Tangram**

Debido a la complejidad en la forma de las fichas del tangram, se hace difícil hacer un modelamiento matemático del problema y son escasas las posibilidades de formalización [1].

## *TEOREMA DE DEHN*

Un problema clásico de embaldosinados, que muestra las posibilidades matemáticas del tema, es el siguiente: dado un rectángulo, se pregunta si es posible cubrirlo mediante cuadrados de diferentes tamaños. La respuesta a este problema se conoce como Teorema de Dehn. Veamos algunos conceptos previos antes de entrar en el teorema [14]:

**RE-DEFINICIÓN DE ÁREA:** Restringiéndonos a rectángulos y a regiones conformables mediante rectángulos, un área es una función que a cada región del plano le asigna un número real. Obsérvese que no se exige que el área sea un número positivo, puede ser negativo e incluso cero. La principal característica de esta generalización es el hecho de exigir que, dada una región con área definida, la suma de las sub-áreas de una división cualquiera de la región sea igual al área de la región original. La Figura 3 muestra una región en forma de 'L' la cual ha sido dividida de tres formas diferentes. En cada caso, la suma de las áreas de los rectángulos componentes debe ser igual al valor asignado al área de la región.

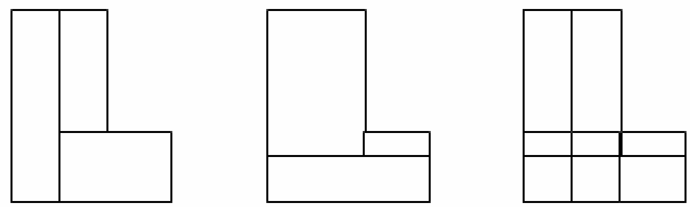


**Figura 3. Región L dividida de diferentes formas**

**BASES DE HAMEL:** Considérese el espacio vectorial V formado por los números reales con escalares tomados en los números racionales, con la adición y multiplicación definidas de la forma usual. Una base de Hamel H es simplemente una base para dicho espacio vectorial. Cualquier número real X se puede expresar entonces como una suma finita de la forma $X = q_1h_1 + q_2h_2 + \dots +q_nh_n$, donde los $q_i$ son números racionales y los $h_i$ son elementos de la base H. La suma dada se denomina expansión de Hamel de X.

**ÁREAS DE HAMEL:** Supongamos que se tiene un rectángulo de dimensiones X por Y, donde la expansión de Hamel de Y está dada por $Y = r_1h_1 + r_2h_2 + \dots +r_nh_n$; sea f una función que asigna a cada número real W el coeficiente (racional) del elemento $h_1$ de la expansión de Hamel de dicho número. Podemos definir un área de Hamel del rectángulo como $A = f(X)*f(Y)$. Por ejemplo, si $h1=\pi$, las áreas de Hamel de las regiones de la Figura 4 son, respectivamente, $A1 = f(\pi)*f(2\pi) = 1*2 = 2$, $A2 = f(1)*f(2) + f(\pi)*f(2)=0*0 + 1*0 =0$. (Obsérvese que tanto 1 como 2 son elementos linealmente independientes de $\pi$ en el espacio vectorial de los reales con coeficientes en los racionales). Para el cálculo de la segunda región se usó el hecho de que la suma de las sub-áreas que componen una región es igual al área de la región (el lector puede intentar demostrar esto).

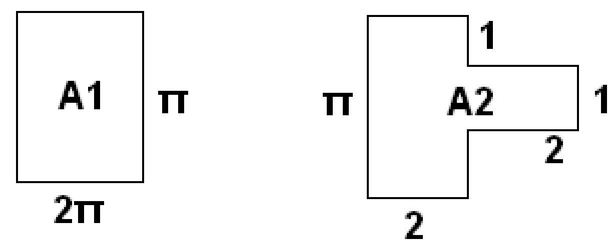



**Figura 4. Áreas de hamel A1=2 y A2=0**

Pasemos ahora a enunciar y demostrar el teorema de Dehn:

**TEOREMA DE DEHN:** Un rectángulo puede ser embaldosinado con cuadrados si y solo si la razón de las dimensiones de sus lados es un número racional.

**DEMOSTRACIÓN:** Primero, supongamos un rectángulo de lados A y B tales que A/B = m/n con m y n números naturales. Usando m*n cuadrados de lado A/m=B/n el rectángulo puede ser cubierto como se muestra en la Figura 5.

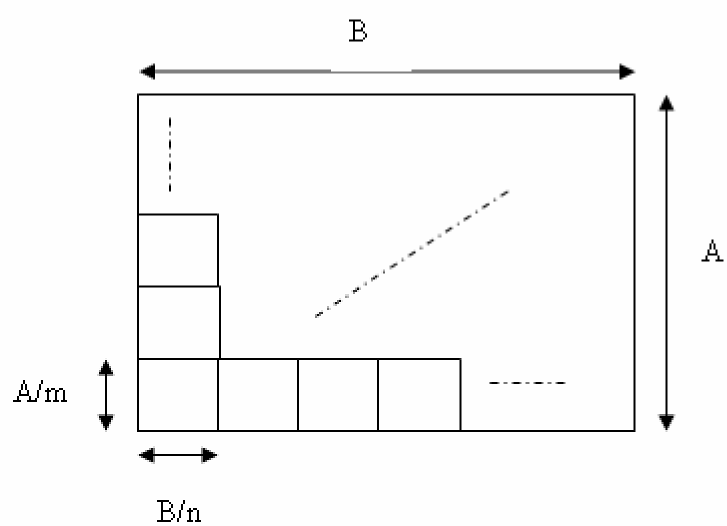



**Figura 5. Embaldosinado de un rectángulo con cuadrados**

Ahora, demostremos la implicación en el otro sentido, es decir, si el rectángulo puede ser embaldosinado entonces la razón de sus lados es un número racional o, lo que es lo mismo, si la razón de sus lados no es un número racional, el rectángulo no puede ser embaldosinado.

Supóngase un rectángulo de lados A y B tales que A/B no es un número racional. Entonces, se puede definir un área de Hamel dada por A(rectángulo AB)=f(A)*g(B) - f(B)*g(A) donde:

A= f(A)*A + g(A)*B + … es la expansión de Hamel de A en la base H = (A, B, …..)

B= f(B)*A + g(B)*B + … es la expansión de Hamel de B en la base H = (A, B, …..)

Entonces, R (rectángulo AB)= 1-0 = 1

El área de Hamel utilizada se escogió de tal manera que para cualquier cuadrado A(cuadrado) = 0 (comprobarlo). Por lo tanto, se puede concluir que el rectángulo AB no se puede dividir en cuadrados, ya que la suma de las áreas de estos sería cero, mientras el área del rectángulo es 1.

## *PROBLEMAS:*

1. Considere las tres siguientes baldosas cuadradas cuyo lado tiene longitud 1:

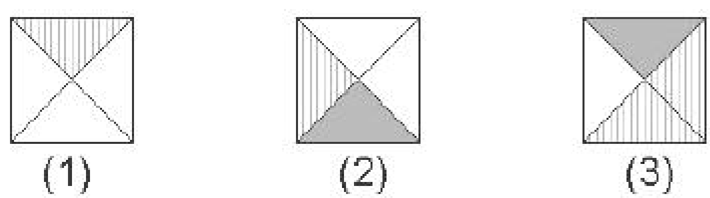



**Figura 6. Baldosas cuadradas con varios colores**

¿Se puede con ellas embaldosinar un cuadrado 2x2 con las siguientes condiciones?

- Las baldosas no se pueden rotar.
- Cada baldosa se puede usar cualquier número de veces.

- Cuando dos baldosas sean adyacentes, los colores de sus lados deben coincidir.

¿Para cuáles n se puede embaldosinar con las baldosas y las condiciones anteriores un cuadrado n x n?

2. Resolver el problema anterior con las siguientes 3 baldosas:

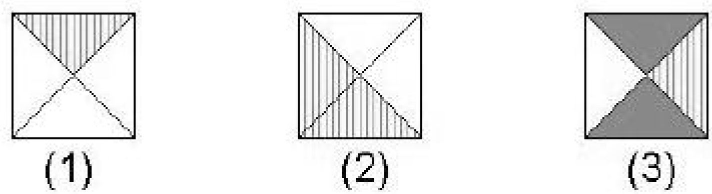



**Figura 7. Baldosas cuadradas con varios colores**

3. Una aplicación de la teoría de grupos a la solución de problemas de embaldosinados se encuentra en el artículo “Conway’s tiling groups”, William P. Thurston. The American Mathematical Monthly, Vol 97 #8.

La solución de los primeros dos problemas se encuentra en:

http://www.cse.uconn.edu/~dqg/ cse237/tiling.pdf

# III. RECTÁNGULOS PERFECTOS

Cuando trabajamos el teorema de Dehn hicimos embaldosinados de rectángulos con cuadrados iguales. Un nuevo problema surge si exigimos que cada una de las baldosas (cuadrados) sea diferente de las otras. El enunciado del problema sería el siguiente: Dado un rectángulo, es posible encontrar un embaldosinado del mismo con cuadrados diferentes dos a dos? Un rectángulo que se pueda embaldosinar con esas condiciones se llama perfecto y el número de cuadrados usados en el embaldosinado se llama el grado del rectángulo perfecto.

Una forma de abordar el problema [10] es proponer un supuesto embaldosinado de forma visual, asignando variables a las longitudes de los lados de los supuestos cuadrados (Figura 8).

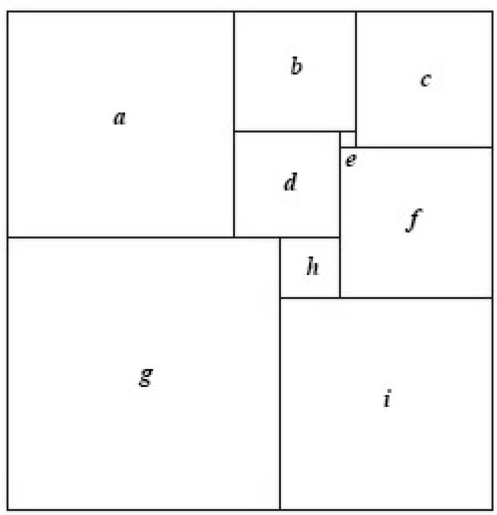



**Figura 8. Embaldosinado supuesto**

Seguidamente, obtenemos ecuaciones a partir de la gráfica, por ejemplo: $b = d + e$. Observemos que esta ecuación está relacionada con un línea horizontal dentro del rectángulo. En general, por cada línea (horizontal o vertical) se genera una ecuación. Dos ecuaciones más surgen de los bordes horizontales ($a + b + c = g + i$) y verticales del rectángulo. Finalmente, obtenemos un sistema de ecuaciones que, curiosamente, siempre tiene solución única (aunque a veces los valores de las variables resulten negativos y no podamos construir el rectángulo perfecto). Para nuestro caso particular, los valores de las variables son:

| a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 8 | 9 | 7 | 1 | 10 | 18 | 4 | 14 |

Y nuestro rectángulo tiene dimensiones 32 (base) X 33 (altura).

Una explicación al por qué el sistema de ecuaciones propuesto tiene siempre solución única fue dado por Brooks, Smith, Stone, y Tutte en 1940. En su artículo "The dissection of rectangles into squares" desarrollaron un modelo representativo de un rectángulo perfecto a través de la teoría de circuitos eléctricos. En particular, generaron un grafo en el cual cada nodo representa una línea horizontal en el embaldosinado y el valor de cada arco está dado por la longitud del lado del cuadrado limitado por las líneas horizontales representadas por los nodos que une el arco en cuestión.

El grafo que representa el rectángulo perfecto de la Figura 8 se muestra en la Figura 9.

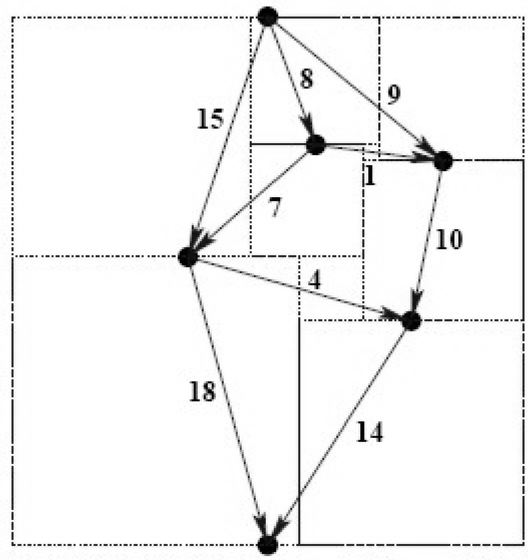



**Figura 9. Rectángulo perfecto y su respectivo grafo**

Si se piensa cada arco como una resistencia eléctrica de valor 1 cuya corriente tiene un valor dado por el número asignado al arco, se observa que la suma de los valores de los arcos que entran en un nodo es igual a la suma de los valores de los arcos que abandonan el mismo (ley de kirchhoff de corrientes). Para los nodos inicial y final se observa que la suma de los valores que salen del nodo inicial es igual a las suma de los valores que llegan al nodo final.

Por otro lado, en el paso de un nodo a otro la suma de los valores de los arcos es igual sin importar el camino (ley de kirchhoff de voltajes). Por ejemplo, al pasar del nodo superior al superior-derecho se obtiene la igualdad 8 + 1 = 9.

Retornando al planteamiento inicial del problema, las interpretaciones dadas en términos de las leyes de kirchhoff son simplemente una explicación de las ecuaciones generadas por las líneas horizontales y verticales del embaldosinado propuesto. Desde este punto de vista, se recurre a la teoría de circuitos eléctricos para explicar la unicidad de la solución (todo circuito eléctrico lineal tiene un comportamiento físico único deducible a partir de las leyes de Kirchhoff).

Armados con este modelo, Brooks, Smith, Stone, y Tutte lograron demostrar que no hay un rectángulo perfecto de orden menor que 9 (es decir, que usa 9 baldosas en su cubrimiento). Encontraron también cuadrados perfectos y a través del modelo de circuitos eléctricos, trabajaron el embaldosinado de rectángulos con rectángulos. La principal conclusión de su trabajo fue: todo rectángulo con lados conmensurables es perfectible y viceversa (esto es una forma especial del teorema de Dehn).

El cuadrado perfecto de menor orden, descubierto por Duijvestijn en 1978 (de orden 21 y lado 112) se muestra en la Figura 10.

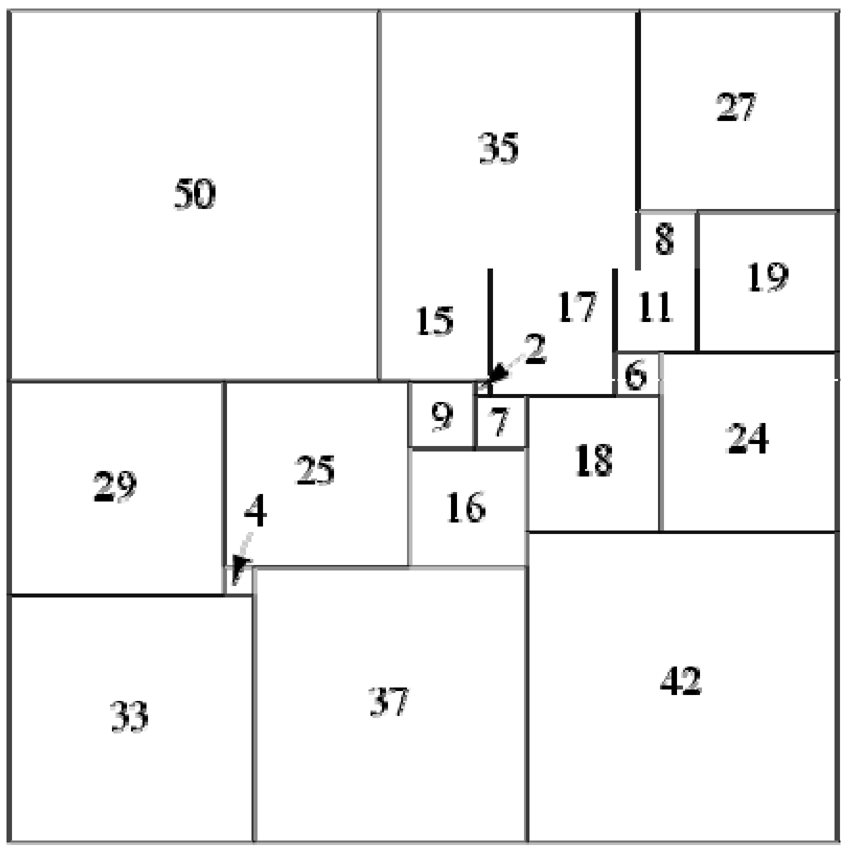



**Figura 10. Cuadrado perfecto de menor orden**

## *PROBLEMAS:*

1. Construya un rectángulo perfecto de orden 9 con los siguientes cuadrados (longitud del lado): 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18.

2. Construya un rectángulo perfecto de orden 10 con los siguientes cuadrados (longitud del lado): 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24, 25.

3. Usando la metodología expuesta en el capítulo y basándose en la figura, determine las dimensiones de los 24 cuadrados que embaldosinan el cuadrado perfecto de lado 175:

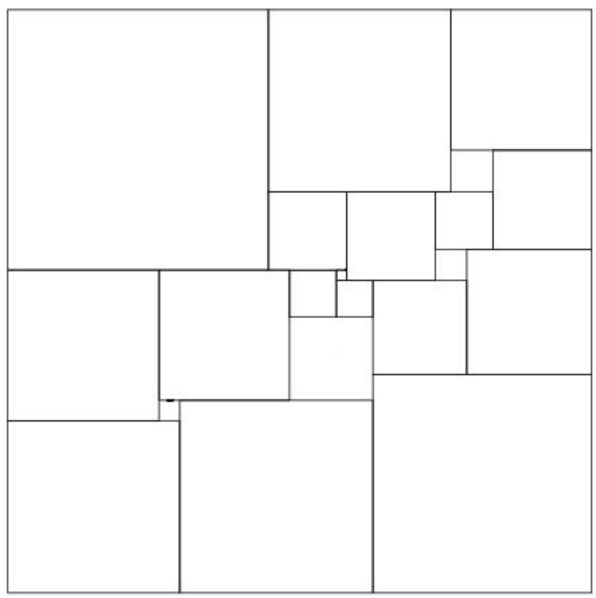


**Figura 11. Cuadrado perfecto de lado 175.**

Soluciones a los problemas anteriores en: http://mathworld.wolfram.com/

PerfectSquareDissection.html

4. Una relación entre embaldosinados con rectángulos y teoría de cuerpos se encuentra en "Shape Tiling", Kevin Keating & Jonathan L. King. The Electronic Journal of Combinatorics, #2, 1997.

# IV. MONOMINÓS

El monominó es el más simple de los embaldosinados denominados polyominós. Los polyominós son baldosas formadas al unir uno o varios cuadrados con longitud del lado igual a 1 (llamados cuadrados unitarios). La unión de dichos cuadrados se hace de tal manera que los cuadrados que se juntan se intersecten sólo y justamente en uno de sus lados. El monominó, como su nombre lo indica, es simplemente un cuadrado de lado unitario (ver Figura 12). El número de cuadrados con el cual está conformado el polyominó se denomina grado del polyominó.

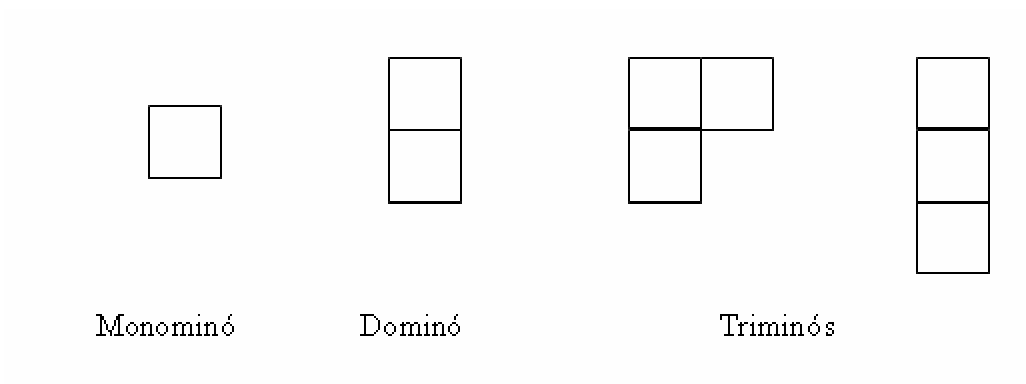



**Figura 12. Distintos polyominós**

Cuando se plantea un problema de embaldosinados con polyominós, generalmente, pero no siempre, la superficie a cubrir es otro polyominó de mayor tamaño que los polyominós que sirven como baldosas y la orientación de las mismas es tal que sus lados son siempre paralelos a los ejes coordenados (Figura 13).

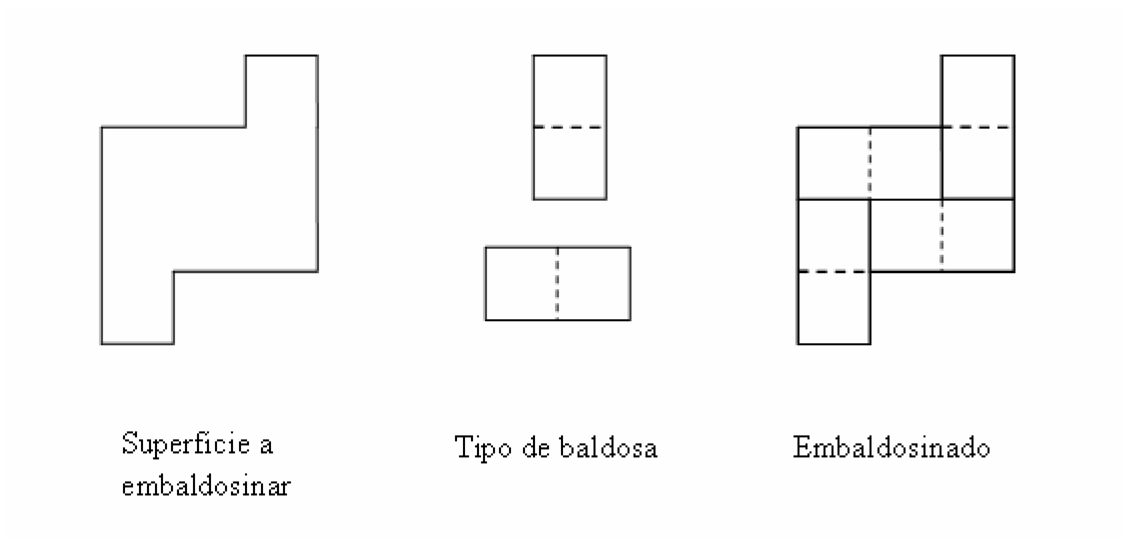



**Figura 13. Embaldosinado sencillo con polyominós**

En el caso de los monominós es trivialmente cierto que cualquier polyominó puede ser embaldosinado con monominós. Por lo tanto, es necesario plantear nuevos problemas donde se cambien las condiciones de embaldosinamiento. Los problemas conocidos como problemas de empaquetamiento de cuadrados son un ejemplo. El planteamiento de un problema típico es el siguiente: dados n cuadrados unitarios, cual es la longitud del lado del mínimo cuadrado en el que se pueden "empacar" (sin sobreponerse) los cuadrados dados. Para el caso de cinco cuadrados unitarios (n=5), la longitud del cuadrado en el que se pueden empacar es 2.75 (este número se denota por s(n)). Observemos los dos empaquetamientos propuestos en la Figura 14

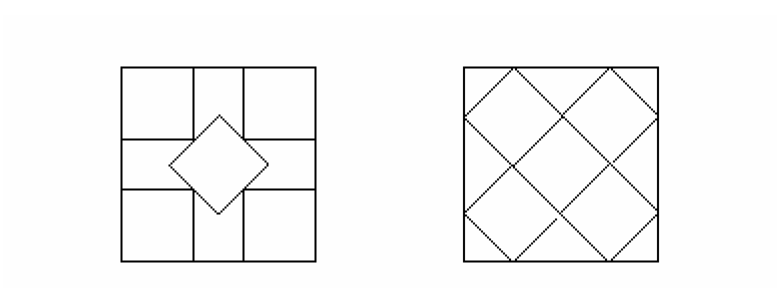
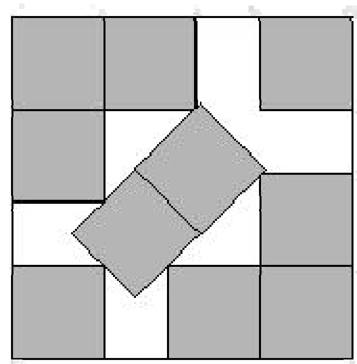


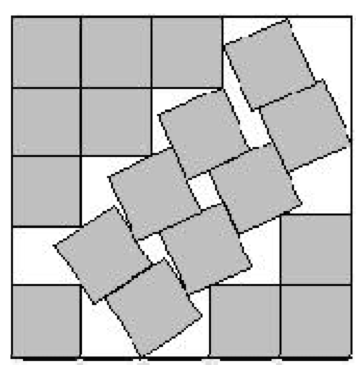
**Figura 14. Empaquetamiento de 5 cuadrados unitarios en un cuadrado mayor**

Podemos mirar ahora problemas más complicados, tales como hallar s(10) o poner un límite superior para s(18) [4]. En la Figura 15 se muestra una solución para s(10) obtenida por Göbel y en la Figura 16 observamos una cota para s(18) dada por Gensane utilizando un programa computacional.



$s(10)=3+1/\sqrt{2}$

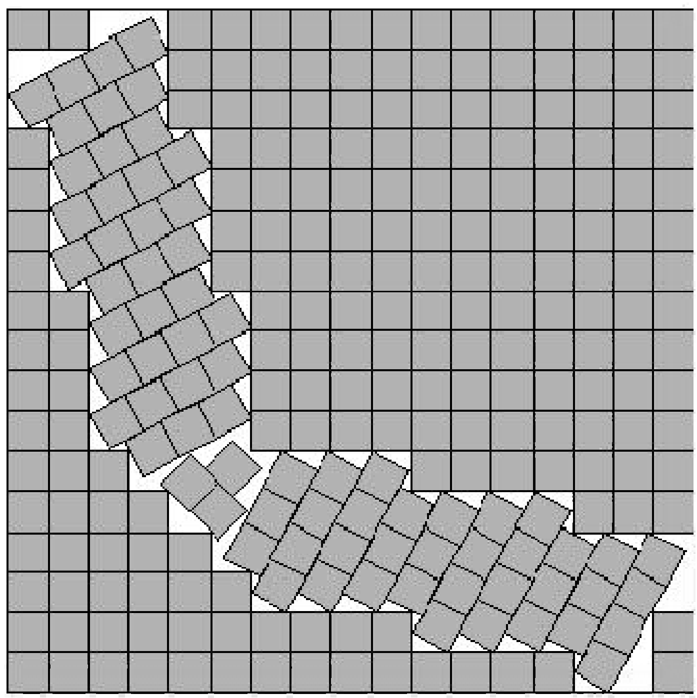
**Figura 15. Cuadrado mínimo para empaquetar 10 cuadrados unitarios**



$s(18)\leq(7+\sqrt{7})/2$

**Figura 16. Cuadrado reducido para empaquetar 18 cuadrados unitarios**

Este tipo de problemas de empaquetamiento tiene utilidad en los procesos de optimización de carga de traileres. Observemos un último ejemplo fascinante: el empaquetamiento de 272 cuadrados unitarios en un cuadrado de lado ligeramente menor que 17 (Figura 18). Esta solución es propuesta por Lars Cleemann [4] y es el más pequeño contraejemplo conocido de la conjetura de que –para n 'pequeño'- $s(n^2-n)=n$ (para este caso: $s(17^2-17)<17$).



$s(272)<17$

**Figura 17. Empaquetamiento de 272 cuadrados**

## *PROBLEMAS:*

1. Empaquetar tres monominós en un triángulo equilátero de lado $3/2+\sqrt{3}$.

2. Empaquetar siete monominós en un triángulo equilátero de lado $4+2/\sqrt{3}$.

3. Empaquetar 6 monominós en un círculo de radio 1.688.

Soluciones de los problemas en: http://www.stetson.edu/~efriedma/packing.html

4. Los problemas de empaquetamiento se trabajan como parte de la solución al problema de maximizar la carga (cajas) que puede ser almacenada en un contenedor.

Para ver algunos de dichos problemas, consulte las siguientes páginas:

*Truck Loading - Packing a container to maximize efficiency:

http://www.remarkable.co.nz/optimisers/wbtrans4.htm

*An approximation algorithm for square parking:

http://db.cwi.nl/rapporten/abstract.php?abstractnr=1459

*Bin Packing:

http://www2.toki.or.id/book/AlgDesignManual/BOOK/BOOK5/NODE192.htm

# V. MONOMINÓS, DOMINÓS Y FRACCIONES CONTINUAS

Comencemos definiendo alguna terminología que se utiliza al trabajar con fracciones continuas [2]: Dada una sucesión infinita $\{a_i\}$ de números naturales (sin incluir el cero), la expresión $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ denota la fracción continua finita

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

La expresión $\alpha=[a_0, a_1, a_2 \ldots]$ denota el límite cuando $n\rightarrow\infty$ de $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

La fracción continua finita se puede expresar como un número racional reducido $p_n/q_n$, llamado la enésima convergencia de $\alpha$. Para $p_n$ y $q_n$ se tienen las siguientes relaciones:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Para $n \geq 2$, con condiciones iniciales $p_0=a_0$, $p_1 = a_1a_0 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1= a_1$.

Planteemos ahora el siguiente problema de embaldosinados: buscamos cubrir una franja de ancho 1 y largo n+1 con monominós y dominós y con las siguientes reglas:

Se nos permite re-cubrir casillas con monominós, es decir, cubrir la misma posición con más de un monominó. El número máximo de monominós que se pueden apilar en una casilla está limitado por una constante $(a_i)$, fijada con anterioridad para cada casilla.

Cuando se cubren dos casillas con un dominó, no se nos permite recubrir encima de ellas con ningún tipo de baldosa. Además, los dominós no pueden usarse para recubrir.

La Figura 18 muestra una banda 1 X (n+1) con las casillas numeradas y las condiciones iniciales de máximo número de monominós permitidos por casilla. La Figura 19 muestra un cubrimiento que cumple con los requisitos específicos para los $a_i$.

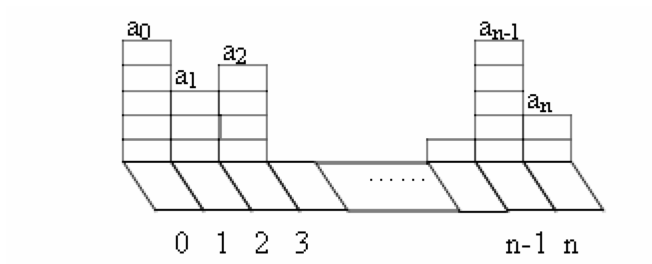



**Figura 18. Problema de embaldosinado con monominós y dominós**

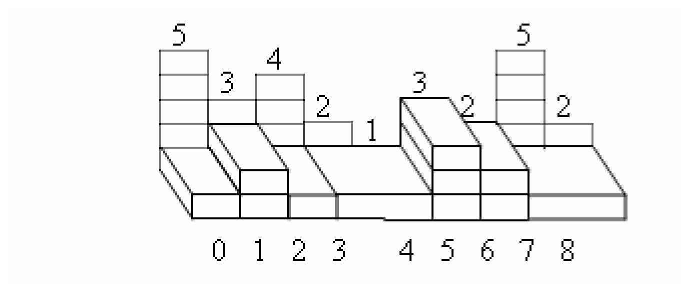



**Figura 19. Embaldosinado con monominós y dominós**

Si $P_n$ representa el número de maneras en que es posible embaldosinar una franja de tamaño 1 x (n+1) con monominós y dominós y con las reglas anteriormente dadas, entonces se tiene la siguiente relación: $P_n = a_nP_{n-1} + P_{n-2}$. Para comprobarlo, observemos que cuando hacemos un cubrimiento de dicha franja tenemos dos opciones al final de la misma: terminar con un dominó o terminar con un arrume de monominós. Cuando terminamos con un dominó, podemos hacer el resto del cubrimiento de la franja de $p_{n-2}$ maneras distintas, mientras que cuando terminamos con un arrume de monominós, tenemos $a_n$ posibles cubrimientos de la última casilla y $p_{n-1}$ maneras distintas de cubrir las casillas restantes, en total, $a_nP_{n-1}$ maneras distintas de cubrir toda la franja. Sumando las formas de cubrir toda la franja se obtiene la relación deseada: $P_n= a_nP_{n-1} + P_{n-2}$.

Observando la figura 1 se pueden deducir las condiciones iniciales de la última fórmula recurrente: $P_0=a_0$, $P_1 = a_1a_0 + 1$, las cuales resultan ser las mismas que las dadas para $p_n$ (numerador de la enésima convergencia de la fracción continua α). Por lo tanto, el problema del embaldosinado de una franja 1 x (n+1) con condiciones cómo las dadas es un modelo adecuado para representar el numerador de una fracción continua finita; en símbolos: $P_n = p_n$.

Si se remueve la primera celda de la franja de la figura dos y se mantienen las mismas condiciones para hacer el embaldosinado, se puede deducir, por un razonamiento análogo al anterior que el número de posibles embaldosinados Q es igual a q (el denominador de la enésima convergencia de la fracción continua α). En este caso debemos imponer la condición $Q_0=1$, el cual denotaría el "embaldosinado vacio".

Con esta representación de las fracciones continuas como un problema de conteo de embaldosinados, podemos entrar a demostrar por medio de argumentos combinatorios algunas relaciones típicas para fracciones continuas. Veamos una de ellas:

**Teorema 1**. si $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = p_n/q_n$ entonces $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0] = p_n/p_{n-1}$.

**Prueba**: El numerador común se debe al hecho de que cubrir una banda con condiciones dadas por las condiciones de peso $a_0, a_1, \ldots, a_n$ es exactamente el mismo problema que cubrir una banda con condiciones de peso $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$… se trata simplemente de un cambio espacial de la banda (izquierda-derecha), lo cual no altera el proceso de conteo.

Por otro lado, el denominador de $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0]$ representa el número de formas de cubrir la banda con condiciones de peso $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$, el cual es, usando el mismo argumento del párrafo anterior, $p_{n-1}$.

Como ejemplo concreto de este teorema, observemos que:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{192}}}}=\frac{103993}{33102} \qquad \text{y} \qquad 192+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3}}}}=\frac{103993}{355}$$

## ***PROBLEMAS:***

1. Pruebe que para una fracción continua: $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.

2. Pruebe la siguiente igualdad: $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$.

Soluciones en [2].

# VI. DOMINÓS Y NÚMEROS DE FIBONACCI

Planteemos el siguiente problema: se debe embaldosinar una franja 2 x n utilizando dominós, ¿de cuántas maneras ($M_n$) es posible hacer dicho embaldosinado?

Procediendo a analizar los primeros 4 casos (n = 1,…,4), obtenemos respectivamente los resultados $M_n$ = 1, 2, 3, 5 (Figura 20)

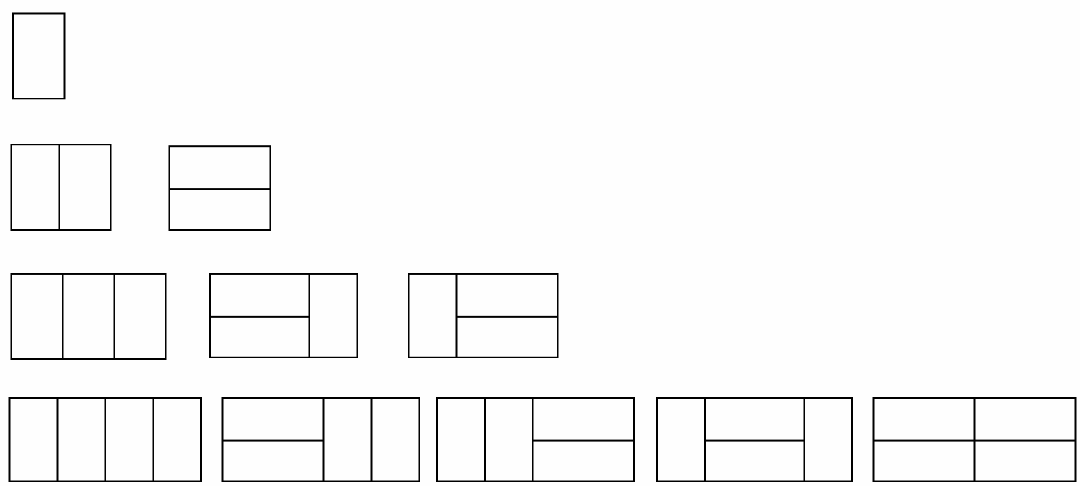


**Figura 20. Embaldosinado de franjas 2 x n**

Observemos que los números obtenidos son algunos números de la secuencia de números de Fibonacci $f_n$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, … (n = 1, 2, ….). Específicamente, se puede suponer que $M_n = f_{n-1}$.

Para comprobar dicha suposición, planteemos el problema para un n en general y contemos los posibles embaldosinados en ese caso [7]. En la Figura 21 se muestran las dos formas posibles para la terminación del embaldosinado: puede terminar con un dominó vertical, en cuyo caso la franja 2 x (n-1) restante se puede cubrir de $M_{n-1}$

formas; o puede terminar con dos dominós horizontales, caso en el cual la franja 2 x n-2 faltante se podría cubrir de $M_{n-2}$ maneras. Sumando las dos opciones obtenemos una fórmula recursiva para obtener el número de posibles embaldosinados de una franja 2 x n: $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$, con las condiciones iniciales $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$.

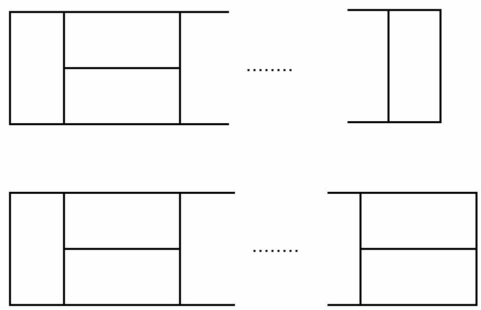



**Figura 21. Posibles terminaciones del embaldosinado**

Recordemos que los números de Fibonacci se pueden definir de forma recursiva a partir de la fórmula $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, con $f_1 = 1$, $f_2 = 2$ y, consiguientemente, $f_3 = 2$.

Comparando las dos fórmulas obtenidas llegamos a la conclusión de que $M_n = f_{n-1}$. En palabras, las posibles formas de embaldosinar una franja 2 x n con fichas de dominó es igual al (n-1)-ésimo número de Fibonacci.

## *PROBLEMA:*

1. Observe la figura y note que representa el número de formas en que se pueden colocar dos dominós acostados en una franja 2 x 4.

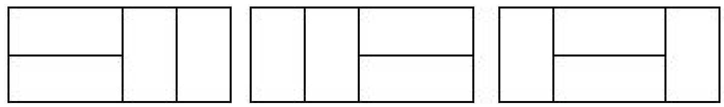


**Figura 22. 3 embaldosinados con dominós de una franja 2 x 4**

Note que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$. En otras palabras, las posibles ubicaciones para un bloque de dos dominós acostados en tres posibles puestos son 3. Generalice este argumento y obtenga una demostración por conteo de que las posibles formas de embaldosinar una franja 2 x n con fichas de dominó es igual al (n-1)-ésimo número de Fibonacci.

(Ayuda: Buscar una relación entre el triángulo de Pascal y los números de Fibonacci)

# VII. DOMINÓS Y TABLEROS DE AJEDREZ

A pesar de la sencillez geométrica de las fichas de dominó, surgen problemas de embaldosinados interesantes con ellas y así mismo técnicas de solución [1,15] que se pueden generalizar a otro tipo de polyominós.

## *ARGUMENTOS DE COLOR*

Dados los dos tipos de baldosas (dominós) mostrados en la Figura 23 (a la derecha), buscamos cubrir el tablero mostrado (a la izquierda), al cual le faltan dos casillas en dos de sus esquinas opuestas.

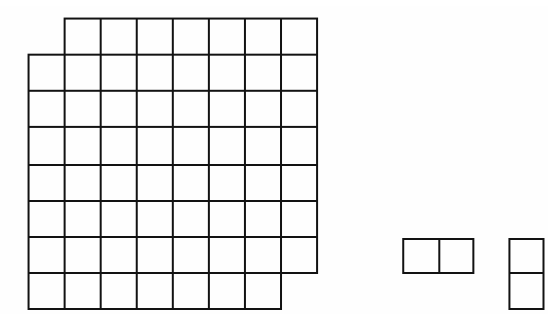


**Figura 23. Tablero de ajedrez sin esquinas**

El problema no tiene solución y esto se puede demostrar por medio de un argumento denominado 'argumento de color'.

Observemos que el tablero mostrado es similar a un tablero de ajedrez. Si coloreamos las casillas del tablero de forma análoga a las de un tablero de ajedrez (Figura 24), podemos observar que las dos casillas faltantes son ambas blancas, quedando la superficie a cubrir formada por 32 casillas negras y 30 casillas blancas. Por otro lado, cada pieza de dominó ocupa, independiente de su posición en el tablero, una casilla blanca y una negra. Por lo tanto es imposible cubrir las casillas del tablero con piezas de dominó debido a la disparidad en el número de casillas de cada color.

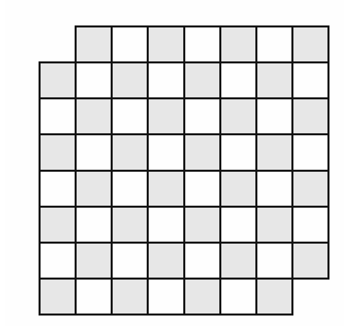


**Figura 24. Tablero de ajedrez coloreado**

## CUBRIMIENTOS SIMPLES

Un cubrimiento simple es aquel en el cual ningún subconjunto propio de 2 o más baldosas adyacentes del cubrimiento forman un rectángulo. En otras palabras, no se puede extraer un rectángulo propio del cubrimiento. La Figura 25 muestra un cubrimiento que no es simple y la Figura 26 muestra un cubrimiento simple del plano.

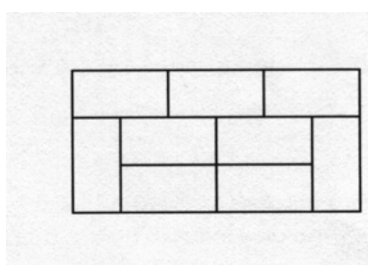


**Figura 25. Cubrimiento no-simple**

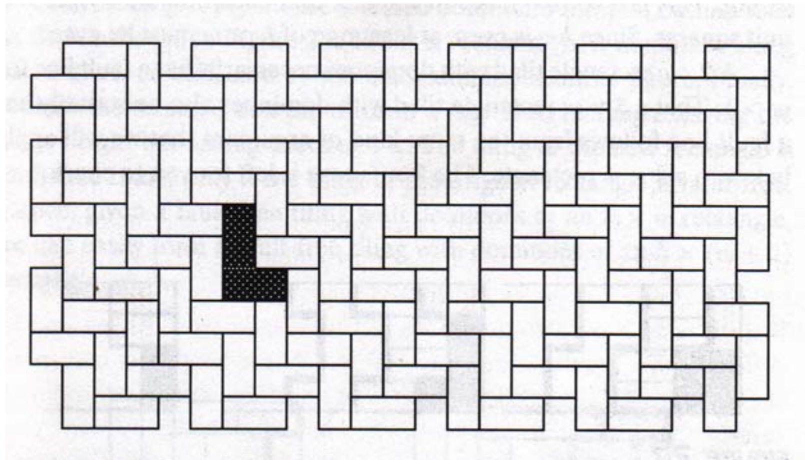


**Figura 26. Cubrimiento simple y sin fallas del plano**

## *CUBRIMIENTOS SIN FALLAS*

Una falla en un cubrimiento es una línea recta que divide la superficie a cubrir en dos partes sin intersecar el interior de ninguna de las baldosas. Un cubrimiento sin fallas del plano se muestra en la Figura 26. Se puede mostrar también fácilmente que dicho cubrimiento es el único cubrimiento simple del plano. En la Figura 27 se expone la demostración geométrica de este hecho [5], partiendo de la unión de dos baldosas y colocando las baldosas adyacentes de forma única, tal que se evite en lo posible crear un cubrimiento no simple del plano.

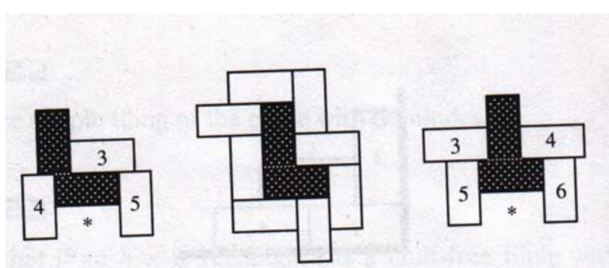



**Figura 27. Demostración gráfica de que el cubrimiento sin fallas de la figura 16 es único.**

## *OTRO PROBLEMA CON TABLERO DE AJEDREZ:*

Se puede generalizar el problema del tablero de ajedrez sin dos esquinas permitiendo que en vez de quitar los cuadros de las esquinas opuestas se puedan extraer dos cuadros cualesquiera al azar, tomando en cuenta esta vez que se debe extraer un cuadro blanco y uno negro. ¿En qué casos se podrá cubrir adecuadamente el tablero así formado con piezas de dominó?

La respuesta es: en todos los casos es posible hacer el cubrimiento [15]. La forma de demostrar este hecho se ilustra en la Figura 28, donde, sobre el tablero sin dos casillas, se ha trazado un "camino" el cual siempre podremos llenar con piezas de dominó completamente.

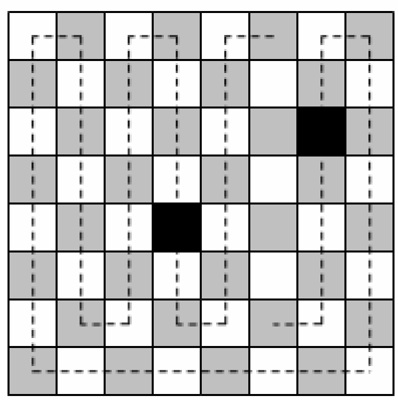


**Figura 28. Cubrimiento de un tablero de ajedrez sin dos casillas de diferentes colores**

Para garantizar el correcto cubrimiento, procedemos de la siguiente manera: después del hueco correspondiente a la casilla negra ponemos una ficha de dominó, la cual cubrirá una casilla blanca y otra negra. La siguiente casilla en el camino es blanca. Si corresponde al hueco, lo saltamos y continuamos cubriendo el camino, si no, podemos colocar otra ficha de dominó y nuevamente la siguiente casilla libre continúa siendo blanca, garantizando así que al final de cada ficha colocada encontremos o bien el hueco o bien dos espacios libres (blanco y negro) para colocar una nueva ficha de dominó.

## *DEMOSTRACIÓN DE QUE NO EXISTE UN EMBALDOSINADO*

Es posible embaldosinar la superficie de la Figura 29 con fichas de dominó?

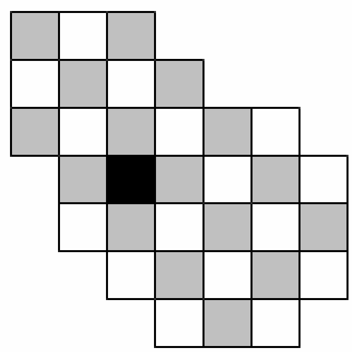


**Figura 29. Superficie a embaldosinar**

Debido a la relativa simplicidad de la figura es posible hacer un estudio caso a caso y llegar a la conclusión de que no existe un embaldosinado de esta superficie con dominós.

Hay sin embargo una forma más analítica de obtener la misma conclusión [15]. La Figura 30 muestra que, para las 6 casillas grises superiores existen sólo 5 casillas blancas adyacentes. Como cada ficha de dominó ocupa una casilla blanca y una negra, un cubrimiento con dominós de dicha parte de la superficie es imposible.

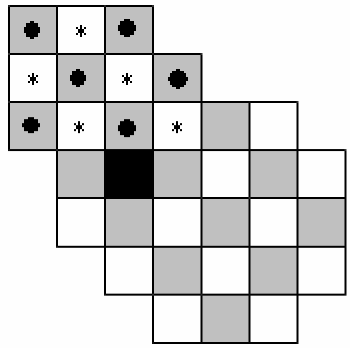


**Figura 30. Demostración de la imposibilidad de cubrir la superficie de la figura anterior con dominós**

Philip Hall demostró que en cualquier superficie que no se pueda embaldosinar con dominós existe un problema igual al del ejemplo anterior. El teorema se conoce como marriage theorem (teorema de casamiento).

## CONTANDO EL NÚMERO DE EMBALDOSINADOS

Hay algunas superficies para las cuales es posible contar el número de embaldosinados diferentes con dominós. En el caso de una franja de dimensiones 2 x n ya vimos que el número de embaldosinados es igual al (n+1)-ésimo número de Fibonacci.

El diamante azteca (de orden n) se obtiene por apilamiento sucesivo de filas de monominós de longitudes 2, 4, …, 2n, 2n, …, 4, 2. En la Figura 31 se muestran los diamantes aztecas de orden 2, 3 y 4.

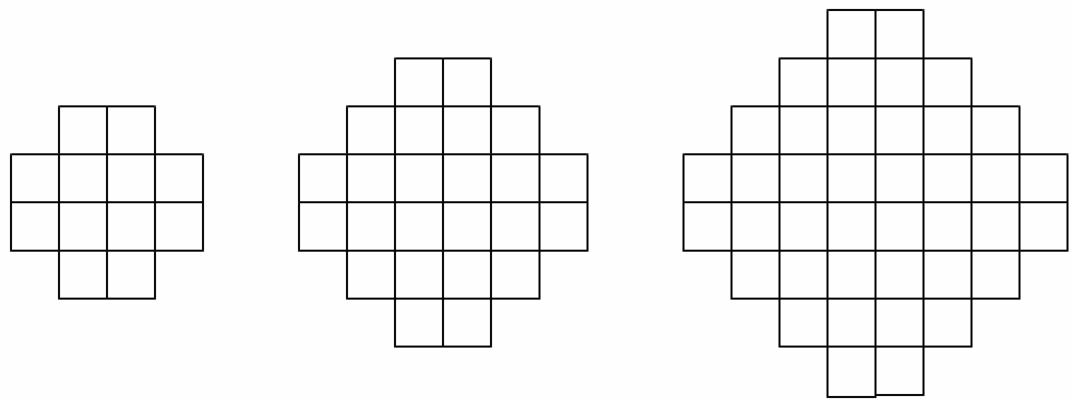


**Figura 31. Diamantes aztecas de órdenes 2, 3 y 4**

Hay 8 posibles embaldosinados con dominós para el diamante azteca de orden 2 (Figura 32).

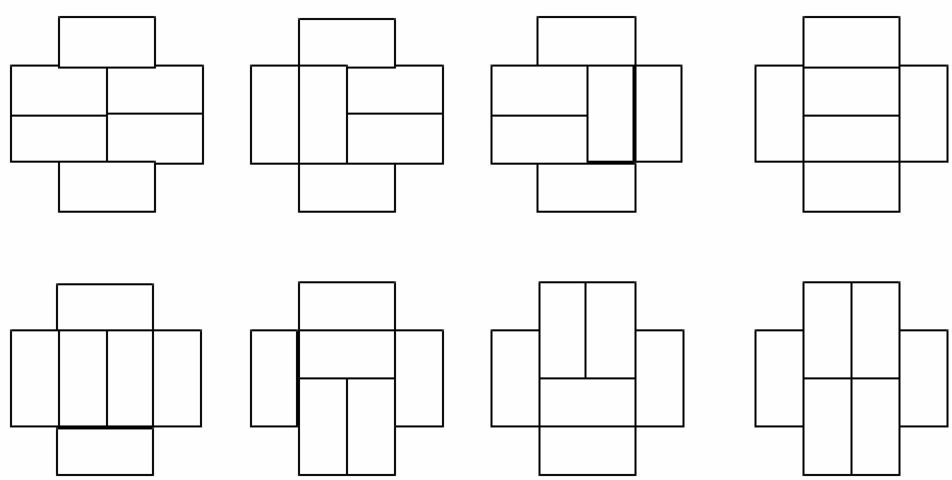


**Figura 32. Posibles embaldosinados para el diamante azteca de orden 2**

Elkies, Kuperberg, Larsen y Propp demostraron (de cuatro diferentes maneras!) que el número de embaldosinados con dominós de un diamante azteca de orden n es $2^{n(n+1)/2}$ [15]. La siguiente tabla muestra el número de embaldosinados para n entre 1 y 6:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 8 | 64 | 1024 | 32768 | 2097152 |

Un problema un poco más complejo en conteo de embaldosinados fue resuelto en 1961 de manera independiente por Fisher y Temperley y por Kasteleyn [15]; Ellos encontraron que el número de embaldosinados posibles con dominós de un rectángulo de dimensiones 2n x 2m está dado por la expresión:

$$4^{mn}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{j\pi}{2m+1}+\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Donde Π denota producto de términos y π representa 180°.

Por ejemplo, supongamos que deseamos saber el número de posibles embaldosinados de un cuadrado de lado 4 (n=2, m=2), entonces, aplicando la fórmula obtenemos:

$$4^4*[2\cos^2(\pi/5)*(\cos^2(\pi/5)+\cos^2(2\pi/5))^2*2\cos^2(2\pi/5)]$$

$$= 256*[1.3090*0.5625*0.1909] = 36$$

Es interesante ver que obtenemos un número entero después de hacer cálculos con números de varias posiciones decimales.

## *PROBLEMAS:*

1. Muestre que ningún rectángulo tiene un embaldosinado simple con dominós

2. Muestre que si un rectángulo h x w tiene un embaldosinado sin fallas, entonces $h>4$ y $w>4$.

3. Es posible encontrar un embaldosinado de un cuadrado de lado 6 con dominós?

4. Suponga que tiene un tablero de ajedrez y en cada paso le extrae una casilla blanca y una negra. ¿Cuál es el máximo número de pasos que se pueden hacer antes de que sea imposible embaldosinar el tablero resultante con dominós?

5. Suponga que se ha embaldosinado un rectángulo 2n x 2m con dominós. Pruebe que existe otro embaldosinado tal que ningún dominó ocupa la misma posición en los dos embaldosinados.

Soluciones en: http://www.pagat.com/tile/wdom/math.html, [5]

6. Una aplicación de los dominós a la solución de un problema de mecánica estadística se encuentra en "Domino tilings and the six-vertex model at its free fermion point". Patrik L. Ferrari and Herbert Spohn. Technische Universität München.

# VIII. TRIMINÓS

Hay dos tipos de triminós (Figura 33), el triminó recto (straight tromino) y el triminó L (right tromino).

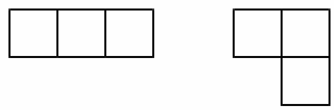


**Figura 33. Triminós**

Comencemos planteando un problema con triminós rectos: ¿es posible embaldosinar un tablero de ajedrez al que se le ha extraído una casilla con triminós rectos?

Para responder a esta pregunta es conveniente usar nuevamente un argumento de color [13]. Observemos la Figura 34 y percatémonos de que por cada triminó recto que se coloque sobre el tablero se cubrirá una casilla blanca, una gris y una oscura.

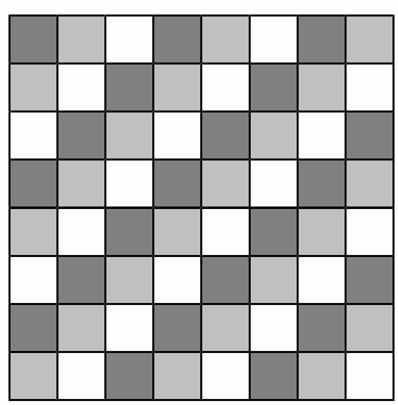


**Figura 34. Tablero de ajedrez con tres colores diferentes**

Si contamos las diferentes casillas obtenemos 21 casillas oscuras, 22 casillas grises y 21 casillas blancas, lo cual nos indica que la casilla que se debe extraer del tablero debe ser una casilla gris.

Ahora bien, si escogiéramos la casilla gris que se encuentra en la última fila y la penúltima columna y giráramos el tablero 90 grados hacia la izquierda notaríamos que la nueva posición de la casilla seleccionada corresponde a una casilla de color blanco en el tablero sin rotar. Como la solución del problema no se ve alterada al realizar una rotación, debemos concluir que hay casillas grises que no pueden ser extraídas para solucionar el problema. La Figura 35 muestra las únicas 4 casillas grises que conservan su color original después de que el tablero sea rotado.

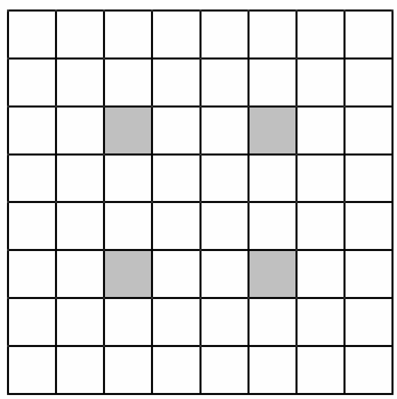


**Figura 35. Cada una de las casillas que se puede extraer antes de cubrir con triminós rectos**

Finalmente, nos basta con exhibir un embaldosinado de un tablero al que le falte una de las casillas sombreadas en la Figura 35 para responder a nuestra pregunta inicial: sí es posible embaldosinar un tablero de ajedrez al que le falte una casilla con triminós rectos (Figura 36) siempre y cuando la casilla faltante corresponda a una de las casillas grises de la Figura 35.

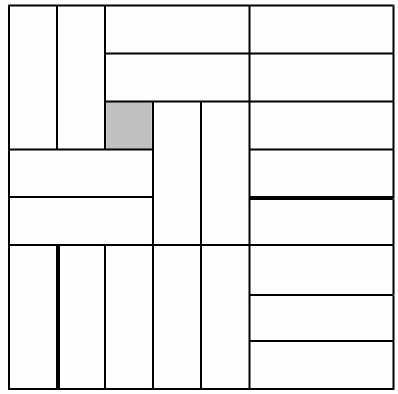


**Figura 36. Cubrimiento de tablero de ajedrez sin una casilla con triminós rectos**

Abordemos ahora un problema de embaldosinados con el triminó L. Planteemos una pregunta similar a la anterior: ¿es posible embaldosinar un trablero de ajedrez al cual le ha sido extraída una casilla con triminós L?

Abordemos el problema de manera "constructiva": observemos que obviamente es posible embaldosinar un tablero 2 x 2 al que se le ha extraído una casilla (Figura 37). Analizando un tablero 4 x 4, observamos que, ensamblando adecuadamente 3 tableros 2 x 2 podemos embaldosinar ¾ partes del tablero, con lo cual el problema de embaldosinar un tablero 4 x 4 con una casilla faltante queda resuelto apoyándonos en la solución del tablero 2 x 2. Más aun, observemos que así como cualquiera de las casillas del tablero 2 x 2 puede ser la casilla faltante, podemos hacer diferentes ensamblados del tablero 4 x 4 para concluir que cualquiera de las casillas en dicho tablero puede ser la faltante. Siguiendo un procedimiento similar, podemos concluir que el tablero de ajedrez (8 x 8) puede ser embaldosinado con triminós L cuando una cualquiera de sus casillas es extraída.

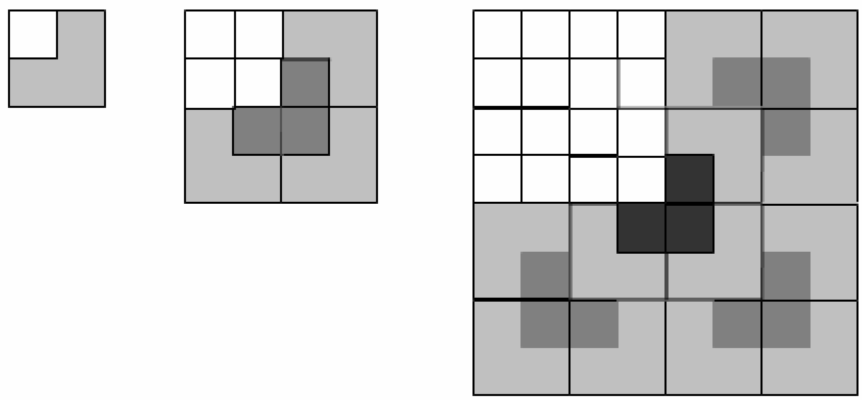


**Figura 37. Cubrimiento de tablero de ajedrez sin una casilla con L-triminós**

Generalizando, se puede concluir que cualquier tablero de dimensiones $2^n$ x $2^n$ (n entero positivo) al que le falta una casilla se puede embaldosinar con triminós L. De paso, demostramos de una forma gráfica que $2^{2n}$-1 es divisible por 3 para todo n entero positivo.

## *PROBLEMAS:*

1. ¿Se puede embaldosinar un cuadrado de 5 x 5 con 8 triminós L y un monominó puesto en cualquier posición?

2. ¿Se puede hacer un embaldosinado de un cuadrado 7 x 7 con 16 triminós L y un monominó ubicado en cualquier posición?

3. Muestre que hay infinitos embaldosinados simples y sin falla del plano con triminós L.

4. Pruebe que es posible embaldosinar con triminós L cualquier cuadrado n x n al que le falte una casilla siempre que n>5, n impar y n no sea múltiplo de 3.

Soluciones en [5,13]

# IX. TETRAMINÓS

Hay 5 tetraminós diferentes (Figura 38) llamados tetraminó recto, tetraminó cuadrado, tetraminó L, tetraminó T y tetraminó Z

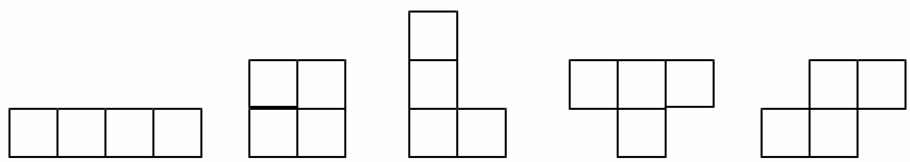


**Figura 38. Tetraminós**

Los primeros cuatro pueden cubrir cada uno por separado el tablero de ajedrez. La Figura 39 muestra un cubrimiento del tablero haciendo uso de estos cuatro tetraminós, es claro a partir de la figura que cada tetraminó por separado puede hacer el cubrimiento total del tablero.

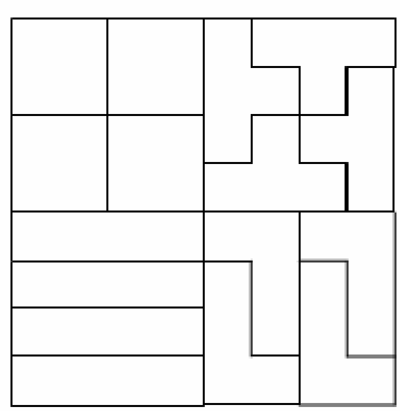


**Figura 39. Cubrimiento de tablero de ajedrez con tetrominós**

El tetraminó Z en cambio no puede cubrir el tablero de ajedrez. Más aun, no puede cubrir ningún rectángulo, para ver esto basta observar la Figura 40: el tetraminó Z no puede hacer dos giros consecutivos en la misma dirección, por lo tanto, la esquina superior derecha no podrá ser embaldosinada adecuadamente.

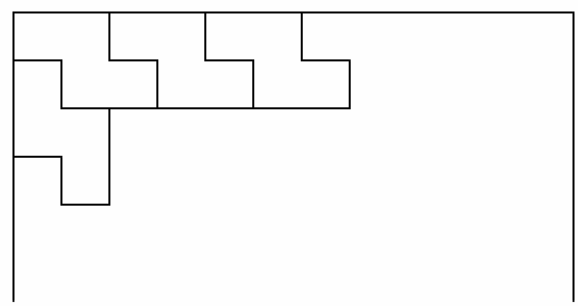


**Figura 40. Imposibilidad de cubrir un tablero de ajedrez con Z-tetrominós**

Recordemos que un embaldosinamiento sin fallas es aquel en el cual no es posible encontrar una línea recta que divida en dos la superficie cubierta. Planteemos el siguiente problema [15]: ¿es posible hacer un embaldosinamiento sin fallas del tablero de ajedrez usando tetraminós rectos? La respuesta es no. Observemos la Figura 41, donde se han marcado los tetraminós rectos indicando el orden en que han sido colocados.

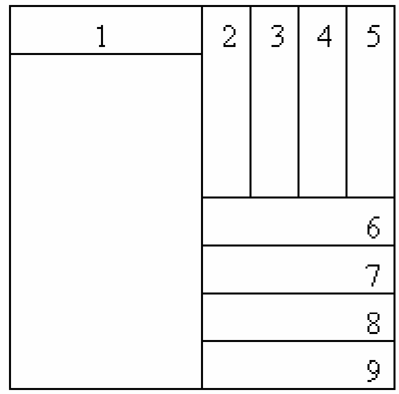



**Figura 41. Cubrimiento con fallas del tablero de ajedrez con tetraminós rectos**

Si comenzamos desde la esquina superior izquierda y colocamos el primer tetraminó en la forma indicada, el segundo debe ser obligatoriamente colocado de la forma mostrada para evitar una falla entre la primera y segunda filas. La ubicación de los tetraminós del 3 al 5 es obligatoria y también lo es la ubicación del sexto tetraminó para evitar una falla entre la séptima y octava columnas. Los tetraminós del 7 al 9 tienen una sola posible posición. Después de colocar el tetraminó 9 observamos que se ha generado una falla vertical que divide el tablero en 2. Si cambiamos la posición del tetraminó 1 llegaremos al mismo inconveniente, esta vez llenando el tablero en sentido contrario a las manecillas del reloj.

## *PROBLEMAS:*

1. Encuentre un embaldosinado simple y sin fallas de un tablero de ajedrez con tetraminós T.

2. Muestre que es imposible cubrir un tablero de ajedrez con un tetraminó cuadrado y 15 tetraminós T.

3. ¿Se puede cubrir un cuadrado 10 x 10 con tetraminós rectos? ¿Y con tetraminós L? ¿Y con tetraminós T?

# X. PENTAMINÓS

Hay 12 pentaminós diferentes. La forma de cada uno de ellos puede ser recordada fácilmente si se observa que en la Figura 42 está escrita la palabra “flip ´n tuvwxyz”.

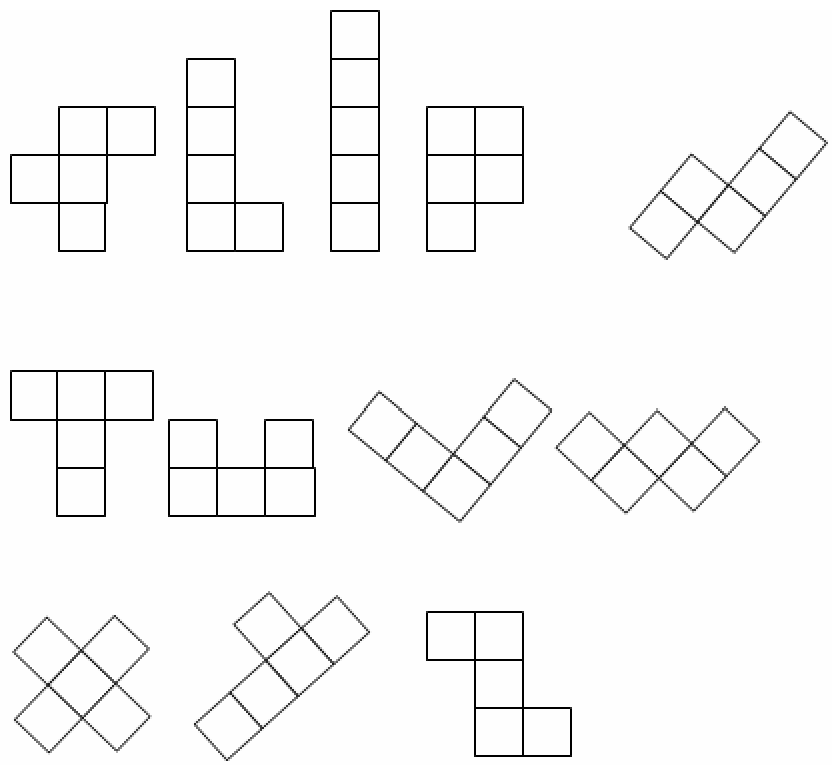


**Figura 42. Pentaminós**

Los pentaminós han sido usados como rompecabezas, lo cual los hace los polyominós más conocidos (el domino, a pesar de ser más conocido, no se usa como un objeto para hacer embaldosinados).

El juego de rompecabezas más popular con pentaminós consiste en utilizar los 12 pentaminós para cubrir un rectángulo 6 x 10. Una solución a este problema se muestra en la Figura 43.

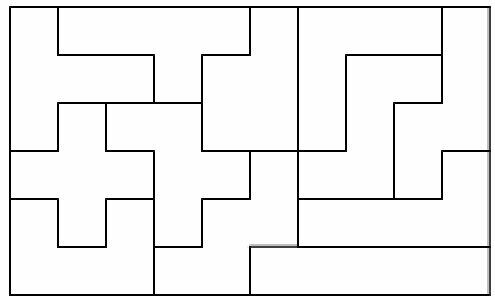


**Figura 43. Rompecabezas con los 12 pentaminós**

PROBLEMAS:

1. Cubra el tablero de ajedrez con los 12 pentaminós y el tetraminó cuadrado. Muestre que el tetraminó puede ser ubicado arbitrariamente.

2. Repita el ejercicio anterior pero con el tetraminó recto.

3. ¿Dónde es posible ubicar dos dominós en un tablero de ajedrez para que las casillas restantes puedan ser cubiertas con los 12 pentaminós?

4. Use los 12 pentaminós para formar un rectángulo 5 x 12.

5. Use los 12 pentaminós para formar un rectángulo 4 x 15.

6. Use los 12 pentaminós para formar un rectángulo 3 x 20.

7. Use los 12 pentaminós para formar un rectángulo 6 x 10 donde cada pentaminó toque el borde del rectángulo.

8. Use los 12 pentaminós para formar cada uno de los patrones mostrados en la Figura 44. Superficies a cubrir con los 12 pentaminós

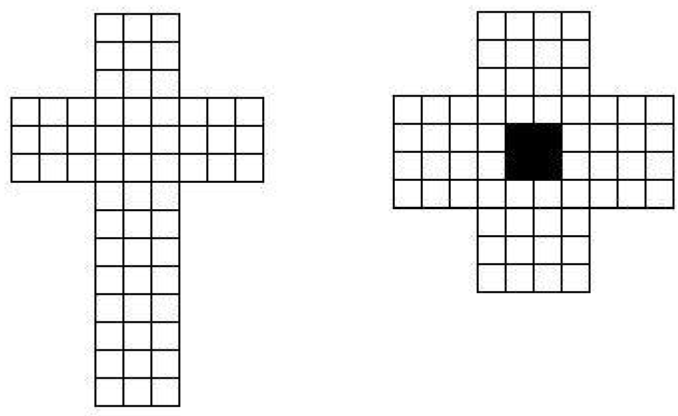


**Figura 44. Superficies a cubrir con los 12 pentaminós**

9. Use los 12 pentaminós para formar una superficie que al plegarse pueda formar un cubo. Observe que la superficie en cruz de la figura 44 indica que la arista del cubo debe ser mayor que 3.

Algunas soluciones en [5].

# XI. POLYOMINÓS DE ORDEN SUPERIOR Y GENERALIZACIONES

Al abordar los polyominós de grado mayor que 5, encontramos que la cantidad de ellos en cada grado se hace demasiado grande. Hay 35 hexaminós y 108 heptaminós. No existe aun una fórmula para determinar el número de polyominós de un determinado grado. La siguiente tabla muestra el número de polyominós para los primeros 15 grados:

| n (grado) | # n-minós sin huecos | # n-minós con huecos | # total de n-minós |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 2 |
| 4 | 5 | 0 | 5 |
| 5 | 12 | 0 | 12 |
| 6 | 35 | 0 | 35 |
| 7 | 107 | 1 | 108 |
| 8 | 363 | 6 | 369 |
| 9 | 1,248 | 37 | 1,285 |
| 10 | 4,460 | 195 | 4,655 |
| 11 | 16,094 | 979 | 17,073 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 58,937 | 4,663 | 63,600 |
| 13 | 217,117 | 21,747 | 238,591 |
| 14 | 805,475 | 96,496 | 901,971 |
| 15 | 3’002,520 | 425,365 | 3’427,885 |

A partir del grado 7, comienzan a aparecer polyominós con huecos en su interior (Figura 45). Considerar o no estas figuras como polyominós es un tema abierto. Si se encontrara alguna fórmula para determinar el número de polyominós, ésta posiblemente determinaría si incluir o no las figuras ‘huecas’ como polyominós.

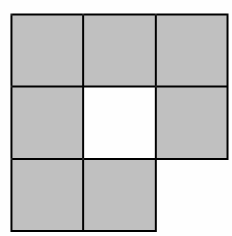


**Figura 45. Heptominó con un "hueco"**

## *REPTILES*

Nos podemos preguntar si, dado algún polyominó, se puede con éste embaldosinar un polyominó semejante de mayor grado. En caso de que esto se pueda lograr, al polyominó menor se le denomina reptil, palabra que proviene de abreviar ‘replicating tile’ [15] (baldosa que se replica). En la Figura 46 observamos que el triminó L es un reptil. El mínimo número de copias del polyominó usadas para replicarlo se denomina el orden del reptil. Para este caso, el L-triminó es de orden 4.

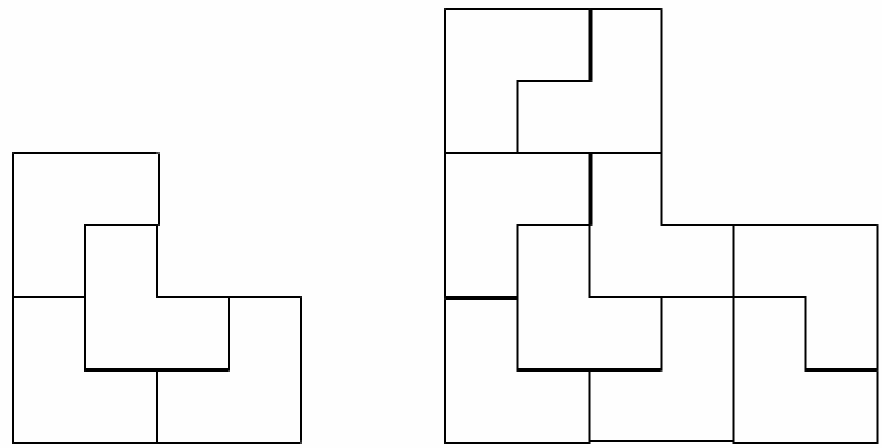


**Figura 46. Autoreplicación de un triminó L**

El polyominó de menor orden que no es un reptil es el tetrominó Z. Ya habíamos visto que este tetrominó no puede embaldosinar dos esquinas adyacentes de un rectángulo (Figura 40), siendo por tanto imposible que se replique a sí mismo a mayor escala.

## *ANIMALES*

Hay sólo tres polígonos regulares con los que se puede embaldosinar el plano: el cuadrado, el triángulo equilátero y el hexágono. A partir de estos polígonos y generalizando para ellos el concepto de polyominós, se generan los animales [15]. La culebra, la esfinge y el gusano son tres de ellos (Figura 47). Algunas aplicaciones prácticas de los animales están en el estudio del crecimiento celular, la química orgánica y el diseño computacional.

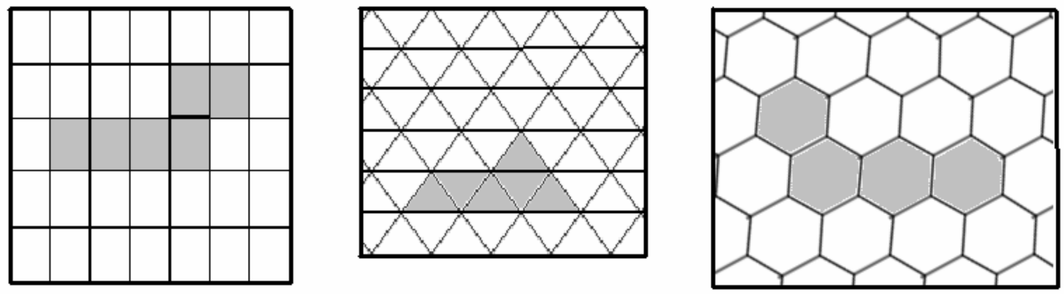


Figura 47. Animales. De izq. a der: la culebra, la esfinge y el gusano

## *PROBLEMAS:*

1. ¿Para cuales enteros *k* pueden usarse *k* triminós L para formar un polyominó similar al triminó L?

2. Con los 35 hexaminós embaldosine la superficie mostrada en la Figura 48

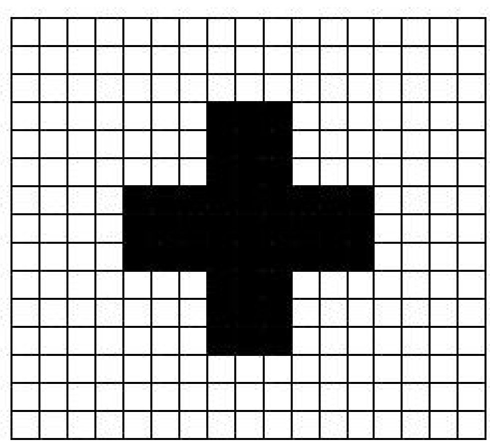


Figura 48. Superficie a embaldosinar con los 35 hexaminós

3. Forme un rectángulo 9 x 12 con 18 copias del hexaminó mostrado en la Figura 49a.

4. Forme un rectángulo 6 x 11 con 11 copias del hexaminó mostrado en la Figura 49b.

5. Muestre que el hexaminó de la Figura 49c no puede embaldosinar un rectángulo.

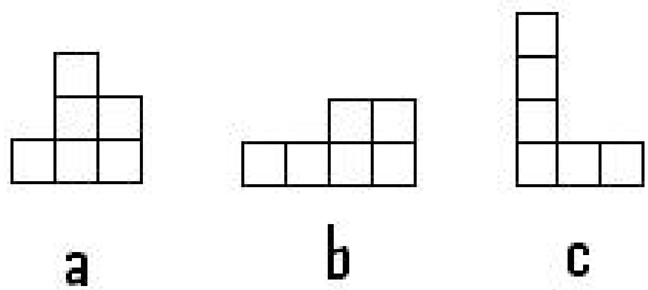


**Figura 49. Algunos hexaminós**

6. Embaldosine un rectángulo con el heptaminó de la Figura 50a

7. Embaldosine un cuadrado 14 x 14 con el heptaminó de la Figura 50b

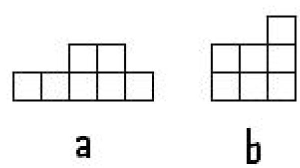


**Figura 50. Algunos heptaminós**

# XII. SOFTWARE DE APOYO

A continuación se presentan algunos programas como soporte computacional para trabajar el tema de los polyominós:

## 1. GERARD'S UNIVERSAL POLYOMINO SOLVER

http://www.xs4all.nl/~gp/PolyominoSolver/Polyomino.html

Esta página muestra bastantes problemas con polyominós de grados 5, 6 y 7. El autor utiliza un software suyo para solucionar la mayoría de ellos. En la figura se muestra una bonita estructura formada con los 12 pentaminós y creada por el software mencionado.

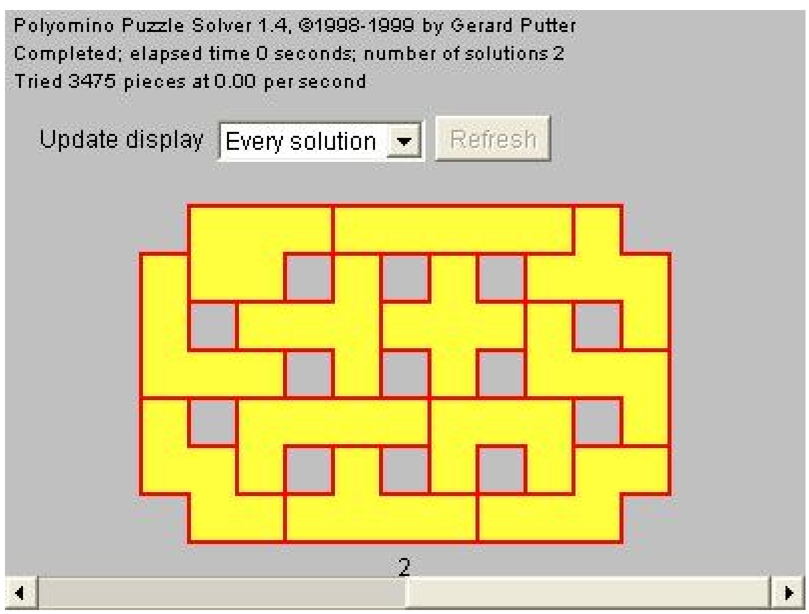



**Figura 51. Gerard's universal polyomino solver**

## 2. PENTOMINOS PUZZLE SOLVER

http://math.hws.edu/xJava/PentominosSolver/

Es un programa que automáticamente (por ensayo y error) hace el embaldosinado de un tablero de ajedrez al cual el usuario le ha quitado cuatro casillas que forman un rectángulo (Figura). Se puede bajar el código fuente.

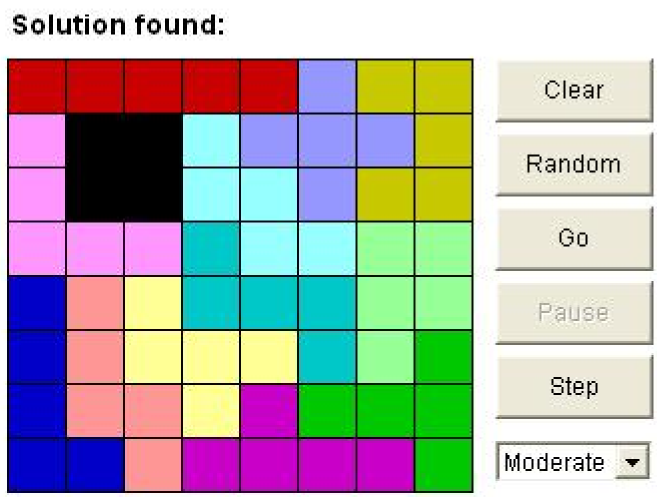



**Figura 52. Pentominos Puzzle Solver**

## 3. OCEAN EXPRESS

http://www.hipsoft.com/

Juego interesante con polyominós donde se da como superficie una figura llamativa y se le dan al usuario diferentes polyominós para que la vaya embaldosinando. Entre mejor el embaldosinado, mayor la puntuación. Hay una versión gratuita del juego para descargar.


**Figura 53. Juego con polyominós "Ocean Express"**

## 4. PENTA

http://www.geocities.com/liviozuc/

Un juego similar al tetris pero donde las piezas son pentaminós. Corre en D.O.S o en Windows y es gratuito.

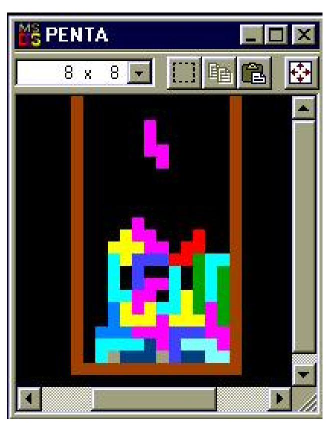



**Figura 54. Juego con pentaminós "Penta"**

## 5. POLYOMINO PUZZLE SOLVER 3.2

http://home.quicknet.nl/mw/prive/wil.laan/puzzle/large.html

Se trabaja con diferentes superficies a cubrir y el usuario escoge el tipo de baldosas a utilizar. El programa se encarga de hacer el embaldosinado (si existe) con las baldosas seleccionadas por el usuario.

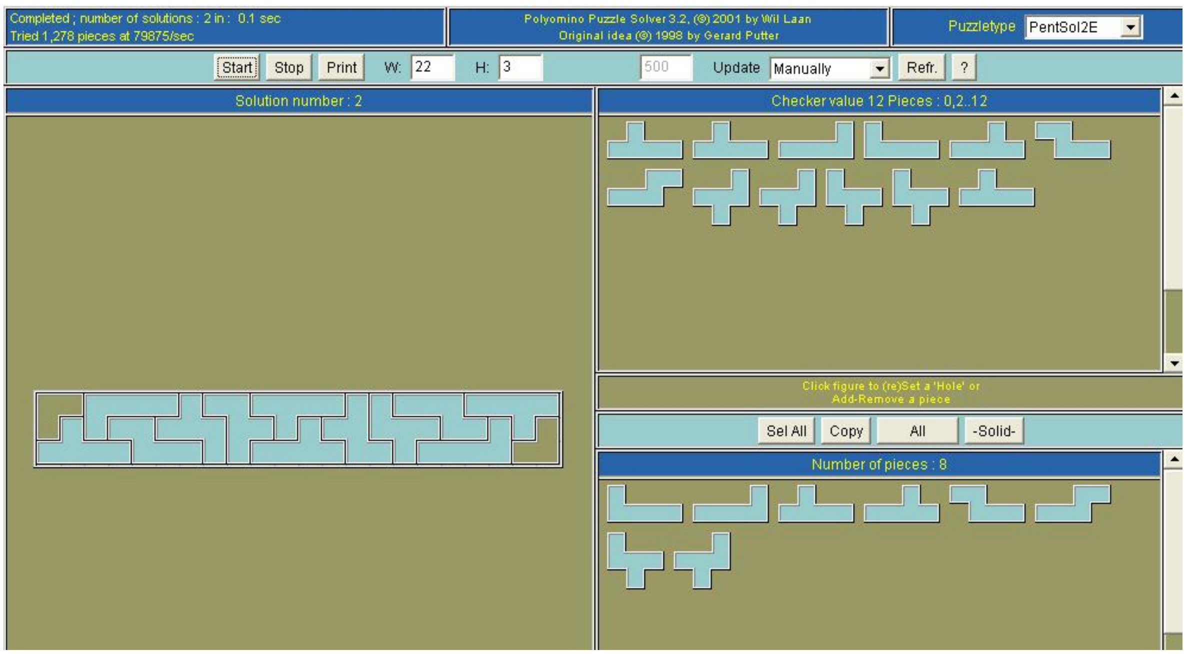



Figura 55. Polyomino puzzle solver 3.2

## 6. POLYOMINOES 7.O

http://www.kevingong.com/Polyominoes/

Un juego gratis muy interesante. Hay variedad de superficies a cubrir y varias posibilidades de polyominós para escoger. Además, se puede jugar sólo, contra la máquina o resolver algunos problemas propuestos.

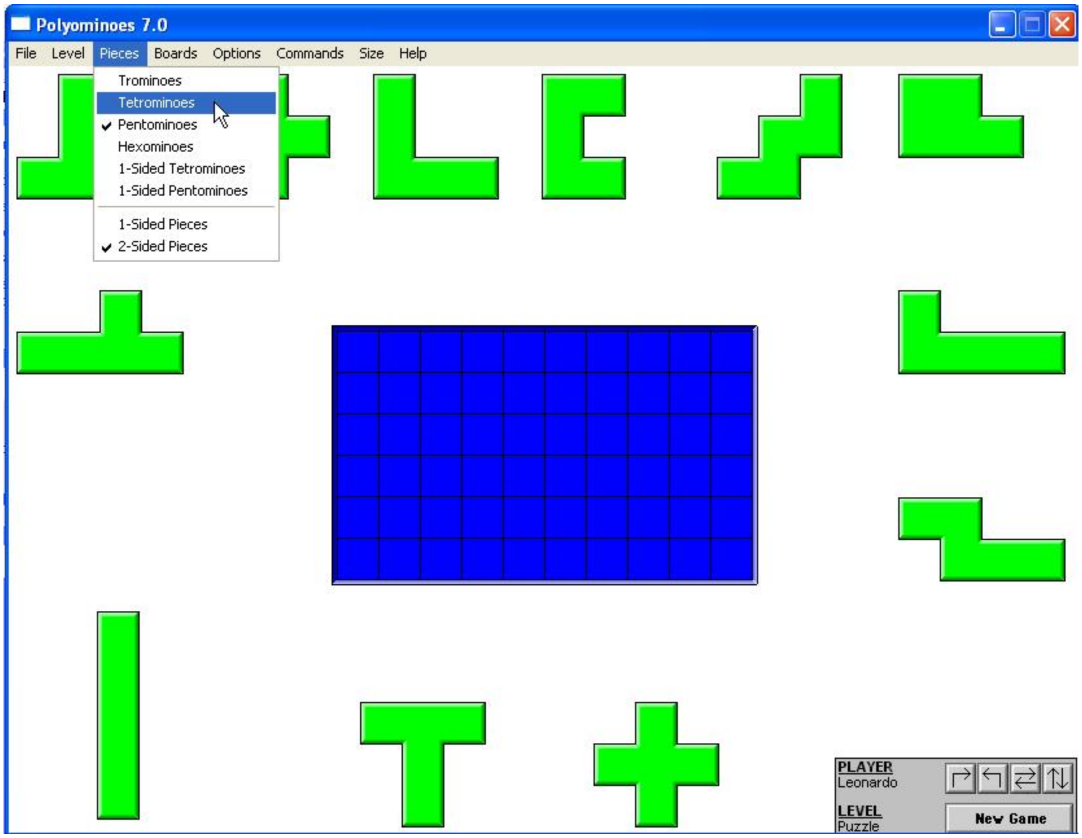



**Figura 56. Polyominoes 7.0**

## *7. ZILLIONS OF GAMES*

http://www.zillions-of-games.com/cgi-bin/zilligames/submissions.cgi/16541?do=show;id=980

Sitio Web con miles de juegos, entre ellos hay 53 juegos relacionados con embaldosinados. Para poder usar estos juegos se debe obtener la interfase de Zillions of games.

# XIII. BIBLIOGRAFÍA


1. Checker boards and polyominoes. Salomón Golomb. The Americal Mathematical Monthly, Vol 61 #10. Dic 1954.
2. Counting on continued fractions. Arthur T. Benjamin y otros. Mathematics Magazine, Vol 73 #2. Apr. 2000.
3. Institute in July, 2004.
4. Packing Unit Squares in Squares: A Survey and New Results. Erich Friedman. Stetson University, DeLand, FL 32723.
5. Polyominoes, a guide to puzzles and problems in tiling. Goerge E. Martin. The Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-501-1.
6. Random approaches to Fibonacci identities. Arthur T. Benjamín y otros. The Americal Mathematical Monthly, Vol 107 #6. Jun. 2000.
7. Recounting Fibonacci and Lucas identities. Arthur T. Benjamín; Jennifer J. Quinn. The Collage Mathematics Journal, Vol 30 #5. Nov. 1999
8. Shape tiling. Kevin Keating & Jonathan L. King. The Electronic Journal of Combinatorics, Vol 4 #2. 1997.
9. Squaring the square. Ross Honsberger. University of Waterloo, Faculty of Mathematics.
10. The Dissection of Rectangles into Squares. Brooks, R. L.; Smith, C. A. B.; Stone, A. H.; and Tutte, W. T. Duke Math. *J.* **7**, 312-340, 1940.
11. Tilig rectangles with rectangles. F R K Cheng y otros. Mathematics Magazine, Vol 55 # 5. Nov. 1982
12. Tiling a square with similar rectangles. C. Freiling ; D. Rinne. Mathematical Research Letters 1, 547–558 (1994).

13. Tiling deficient boards with triminós. I-Ping Chu; Richard Johnsonbaugh. Mathematics Magazine, Vol 59 #1. Feb 1986.

14. Tiling with squares and anti squares. Chris Freinling y otros. The Americal Mathematical Monthly, Vol 107 #3. Mar. 2000.

15. Tilings. Richard P. Stanley; Federico Ardila. Park City Mathematics

# ELABORACIÓN DE UN TEXTO DIVULGATIVO EN POLYOMINÓS

**LEONARDO URIBE KAFFURE**

**TRABAJO DE GRADO**
**Presentado como requisito parcial**
**Para optar al título de**

**Matemático**

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**CARRERA DE MATEMÁTICAS**
**Bogotá D.C.**
**Julio 25 de 2006**

**NOTA DE ADVERTENCIA**

**Artículo 23 de la Resolución N° 13 de Julio de 1946**

"La Universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Solo velará por que no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y por que las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vea en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia".

**ELABORACIÓN DE UN TEXTO DIVULGATIVO EN POLYOMINÓS**

**LEONARDO URIBE KAFFURE**

**APROBADO**

**Fernando Novoa**
**Magíster en Matemáticas**
**Director**

**Edilberto Sarmiento**
**Magíster en Ciencias Matemáticas**
**Jurado**

**Harold Noriega**
**Magíster en Ingeniería de Sistemas**
**Jurado**

**ELABORACIÓN DE UN TEXTO DIVULGATIVO EN POLYOMINÓS**

**LEONARDO URIBE KAFFURE**

**APROBADO**

| | |
|---|---|
| **Ángela Umaña Muñoz** | **Patricia Hernandez** |
| **MPhill** | **Magíster en Matemáticas** |
| **Decana Académica** | **Directora de Carrera** |

## DEDICATORIA

**A Fernando Novoa,**
**De quien descubrí la belleza**
**de las matemáticas y una buena**
**pedagogía (esto último sin que él lo notara)**

# AGRADECIMIENTOS

**A mi papá,**
**a quien no le cuesta mucho**
**confiar en mí**

# TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN ..... 1

2. MARCO TEÓRICO Y REVISIÓN DE LITERATURA ..... 2

CUBRIMIENTOS ..... 2

POLYOMINÓS ..... 3

3. OBJETIVOS ..... 5

GENERAL ..... 5

ESPECÍFICOS ..... 5

4. METODOLOGÍA ..... 6

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN ..... 7

6. CONCLUSIONES ..... 8

7. RECOMENDACIONES ..... 9

8. REFERENCIAS ..... 10

9. ANEXO: TEXTO DIVULGATIVO EN POLYOMINÓS ..... 11

# RESUMEN

El presente proyecto generó un escrito divulgativo en el tema denominado Polyominós. Fue fruto de un estudio detallado de la bibliografía disponible sobre el tema (principalmente a nivel de artículos de revistas internacionales) y algunas reflexiones y construcciones matemáticas del autor relacionadas con los polyominós. En particular, se desarrolló una demostración propia del teorema de Dehn, demostración revisada y aprobada por el matemático Chris Freiling (California State University – San Bernardino).

El objetivo durante todo el proceso fue componer un texto a nivel introductorio que permitiera a un lector interesado en las matemáticas abordar su lectura de manera agradable. El grado de complejidad del escrito es variable y puede ser encontrado interesante tanto por un matemático como por un bachiller (cada uno en su respectiva medida).

Cada tópico abordado en el escrito tiene dos objetivos: primero, invita a generar modelos matemáticos a partir de juegos sencillos de rompecabezas. Segundo, busca también entretener, al tiempo que afinar el razonamiento espacial del lector.

Como material de apoyo para quien esté interesado en trabajar en los problemas, se presentan los resultados de una indagación de software para polyominós, ofreciendo al lector varios programas de apoyo para realizar los ejercicios.

# ABSTRACT

The present project generated a divulging writing in the subject denominated polyominoes. It was the result of a detailed study of the bibliography available on the subject (mainly from international magazines) and some mathematical reflections and constructions of the author. In particular, the author re-proved Dehn´s theorem. The prove was revised and approved by Chris Freiling (California State University – San Bernardino).

The objective throughout the process was to compose a text at a basic level which allows a reader interested in mathematics to approach its reading in a pleasant way. The degree of complexity of the writing is variable and can be found interesting by a mathematician as well as by a high school student.

Each tackled topic in the monography has two objectives: first, it invites to generate theoretical mathematical models from simple games of puzzles. Second, it also looks for entertaining while sharpening the spatial reasoning of the reader.

As supporting material for who is interested in working in the problems of the monography, several notes and software references related to polyominoes appear, offering to the reader many programs of support to make the exercises.

# 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas matemáticos denominados problemas de embaldosinados, o simplemente embaldosinados, representan un área de investigación muy amplia en la actualidad. Surgen en este campo relaciones con temas muy diversos de las matemáticas y resulta muy sencillo proponer problemas cuya solución, la mayoría de las veces, no es tan sencilla. Se trata de una ‘mina’ de problemas y relaciones matemáticas con la agradable característica de que el matemático decide con gran libertad las herramientas más adecuadas para extraer el oro que allí se encuentra.

Los problemas de embaldosinados, al ser problemas geométricos con enunciados simples, permiten que las personas comprendan de manera gráfica lo que se debe hacer, usen su razonamiento espacial y, en algunos casos, practiquen la solución de los mismos con objetos reales. De esta forma, los embaldosinados nos ofrecen una forma alternativa de hacer matemáticas en la cual puede inicialmente visualizarse la solución o usarse el método de ensayo y error, para finalmente proponer una solución teórica del problema.

Los textos en español de este tema son escasos, siendo este uno de los principales motivos del desconocimiento del tema en nuestros medios académicos. El presente escrito es un intento por divulgar el tema de los embaldosinados entre los lectores y motivar al público en general para que aborden esta fascinante y divertida forma de hacer matemáticas.

# 2. MARCO TEÓRICO Y REVISIÓN DE LITERATURA

## *CUBRIMIENTOS*

Un problema de cubrimientos es aquel donde se da un tipo de superficies (Baldosas) y un número específico de ellas y se busca cubrir totalmente una superficie mayor con dichas baldosas sin sobreponerlas.

Los problemas típicos que se plantean son los siguientes:

- ¿Se puede cubrir la superficie con las baldosas dadas?
- ¿En caso contrario, es posible demostrar que no se puede?
- ¿De cuantas formas se puede cubrir la superficie?
- ¿Es posible encontrar cubrimientos con características especiales?

Un problema clásico de cubrimientos es el conocido juego de Tangram. Un planteamiento del problema en este caso sería el siguiente:

Dada una superficie (Ilustración 1) y 7 piezas de 'rompecabezas', se debe hacer un cubrimiento de la superficie.

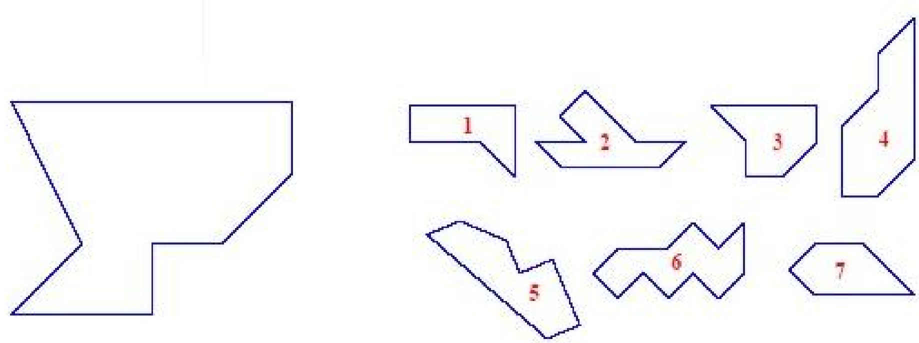



**Ilustración 1. Problema de embaldosinados con tangram**

Una solución al problema planteado se muestra en la Ilustración 2

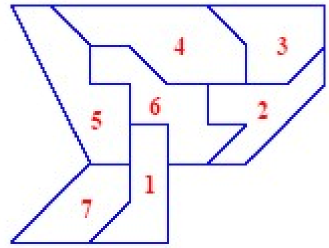



**Ilustración 2. Solución al problema planteado en la ilustración anterior**

Se podría continuar con el problema planteando las siguientes preguntas:

- ¿La solución dada es única?
- ¿Cuantas soluciones hay?
- ¿Hay una solución donde la pieza #4 no colinde con la #2?

## *POLYOMINÓS*

La modelación matemática y el consiguiente estudio de un problema general de cubrimientos como el del tangram entraña un alto grado de dificultad, motivo por el cual el estudio formal de los problemas de cubrimientos se ha restringido a cubrimientos con baldosas triangulares, rectangulares, o en forma de polígonos regulares.

Los polyominós son un caso especial de baldosas poligonales formadas por cuadrados del mismo tamaño, cada uno de los cuales comparte por lo menos un lado en común. La Ilustración 3 muestra algunos ejemplos de polyominós. Las superficies a cubrir con polyominós son generalmente polyominós mayores.

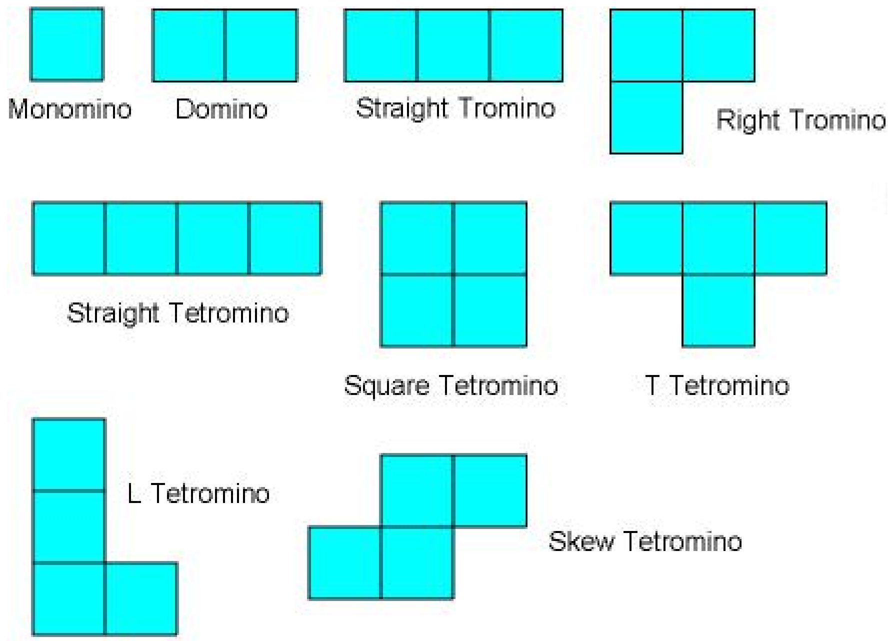



**Ilustración 3. Diversos polyominós: monominó, dominós, triminós y tetraminós**

En la Ilustración 4 se observa la solución al problema de cubrir un tablero de ajedrez (cuadrado 8 x 8) con cuatro tipos diferentes de tetraminós.

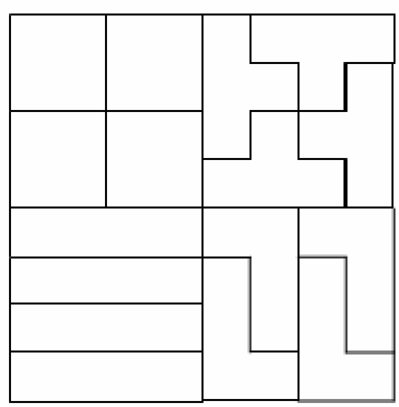


**Ilustración 4. Embaldosinado del tablero de ajedrez con tetraminós**

# 3. OBJETIVOS

## *GENERAL*

Exponer de manera clara y accesible los conceptos básicos de los cubrimientos en general y más particularmente los cubrimientos con polyominós.

## *ESPECÍFICOS*

- Mostrar algunas ramificaciones y nexos que se presentan con diversos temas al abordar problemas de cubrimientos.
- Proponer caminos y dar guías para estudios posteriores en cubrimientos
- Recopilar ejercicios adecuados para reforzar los conceptos expuestos
- Proveer software de apoyo a algunos de los temas propuestos

# 4. METODOLOGÍA

A partir del documento “Tilings” de Richard P. Stanley y Federico Ardila (Park City Mathematics Series, 2004), se comenzó un estudio bibliográfico minucioso de la literatura disponible respecto al tema de los embaldosinados.

La selección del material que conforma el escrito se hizo teniendo en cuenta los siguientes aspectos

- En general, el material debe ser accesible a un estudiante con grado de bachiller, aunque algunos apartes del libro poseen una mayor dificultad.
- Cada capítulo debe hacer una presentación de un tema de embaldosinados, mostrar un resultado reprsentativo respecto al tema y, en lo posible, desarrollar una aplicación del tema que involucre una construcción matemática.
- Cada capítulo debe presentar al lector una serie de ejercicios acordes con la lectura realizada.
- El escrito total debe presentar armonía entre sus partes, sin restar por ello independencia a cada uno de los capítulos.

# 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El principal resultado del proyecto de grado fue la elaboración de un libro divulgativo de polyominós. El libro completo se encuentra en el anexo A.

No se trata solo de una recopilación de material en embaldosinados y polyominos, también incluye dos aportes hechos por el autor: El primero, una demostración propia del teorema de Dehn (cuyo original se encuentra en idioma alemán), demostración confirmada por el Matemático Chris Freiling (California State University-San Bernardino). El segundo, una forma de relacionar embaldosinados de dominós con números de Fibonacci, resultado que se encuentra propuesto como ejercicio en el capítulo “Dominós y números de Fibonacci”.

# 6. CONCLUSIONES

Se generó un libro divulgativo en el tema de los polyominós. Los capítulos y los ejercicios propuestos dieron lugar a una exposición con grado de dificultad creciente y con diferentes temas de interés para el lector. El libro no necesariamente debe ser abordado de manera secuencial y el lector puede seleccionar los capítulos que más le interesen, teniendo que referirse a los otros capítulos solo en caso de que algún concepto previo se halla definido en ellos.

A través del libro se mostraron algunas ramificaciones y nexos que se presentan con diversos temas al abordar problemas de embaldosinados. Además,  se propusieron caminos y guías para estudios posteriores en embaldosinados, así como ejercicios adecuados y software para el trabajo con polyominós.

# 7. RECOMENDACIONES

Es importante que el libro elaborado sea retroalimentado de alguna forma. Podría por ejemplo ser expuesto como parte de un curso de matemática discreta y proponerse algunos de sus capítulos y ejercicios como temas de estudio.

Así, a partir de su utilización y mejoramiento, se podría pensar en divulgarlo de forma impresa o a través de la red.

También es aconsejable revisar el software propuesto, utilizarlo y mejorarlo, buscando la posibilidad de generar software propio que se adecue a las necesidades de nuestro entorno académico y sirva como herramienta potencial de acompañamiento en caso de que el libro se divulgue.

# 8. REFERENCIAS


- Checker boards and polyominoes. Salomón Golomb. The Americal Mathematical Monthly, Vol 61 #10. Dic 1954.
- Counting on continued fractions. Arthur T. Benjamin y otros. Mathematics Magazine, Vol 73 #2. Apr. 2000.
- Institute in July, 2004.
- Packing Unit Squares in Squares: A Survey and New Results. Erich Friedman. Stetson University, DeLand, FL 32723.
- Polyominoes, a guide to puzzles and problems in tiling. Goerge E. Martin. The Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-501-1.
- Random approaches to Fibonacci identities. Arthur T. Benjamín y otros. The Americal Mathematical Monthly, Vol 107 #6. Jun. 2000.
- Recounting Fibonacci and Lucas identities. Arthur T. Benjamín; Jennifer J. Quinn. The Collage Mathematics Journal, Vol 30 #5. Nov. 1999
- Shape tiling. Kevin Keating & Jonathan L. King. The Electronic Journal of Combinatorics, Vol 4 #2. 1997.
- Squaring the square. Ross Honsberger. University of Waterloo, Faculty of Mathematics.
- The Dissection of Rectangles into Squares. Brooks, R. L.; Smith, C. A. B.; Stone, A. H.; and Tutte, W. T. Duke Math. *J.* **7**, 312-340, 1940.
- Tilig rectangles with rectangles. F R K Cheng y otros. Mathematics Magazine, Vol 55 # 5. Nov. 1982
- Tiling a square with similar rectangles. C. Freiling ; D. Rinne. Mathematical Research Letters 1, 547–558 (1994).
- Tiling deficient boards with triminós. I-Ping Chu; Richard Johnsonbaugh. Mathematics Magazine, Vol 59 #1. Feb 1986.
- Tiling with squares and anti squares. Chris Freinling y otros. The Americal Mathematical Monthly, Vol 107 #3. Mar. 2000.
- Tilings. Richard P. Stanley; Federico Ardila. Park City Mathematics

# 9. ANEXO: TEXTO DIVULGATIVO EN POLYOMINÓS