Pontificia Universidad Javeriana.
Facultad de Ciencias.
Departamento de Matemáticas.

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH EN ECONOMIA

Luis Felipe Perez Sabogal
Julie Stephani Rodríguez Rincón
Director: Leonardo Duarte

Bogotá Colombia
Mayo de 2011

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar los dos teoremas del bienestar en un modelo económico denominado intercambio puro. Los teoremas los trabajaremos en dos casos, finitodimensional en el espacio R^n y luego infinitodimensional en el espacio l_∞. El objetivo de hacer uso del espacio l_∞ es conseguir una generalización de los teoremas con el fin de trabajar con una cantidad de mercancías muy grande y proyecciones de mercancías a lo largo de la vida de un individuo.

En el primer capitulo del trabajo encontraremos los conceptos básicos, tanto económicos como matemáticos, necesarios para presentar los teoremas y sus demostraciones. Enunciaremos el teorema del hiperplano separador y la versión geométrica del Teorema de Hanh-Banach, resultados fundamentales para la demostración del segundo teorema en R^n y en su generalización a l_∞.

En el segundo capitulo desarrollaremos las demostraciones de los teoremas en R^n. El primer teorema establece que bajo las hipótesis sobre la conducta del consumidor, el equilibrio del mercado es eficiente; mientras que el segundo teorema establece que cada asignación será mantenida en equilibrio por un conjunto dado de precios.

En el tercer capitulo haremos la generalización de estos dos teoremas, al caso de dimensión infinita, mostrando la necesidad del espacio l_∞ como conjunto de consumo para la presentación del segundo teorema del bienestar en un sentido económico. En este capitulo explicaremos el uso del teorema de Hanh-Banach para ver la existencia de un funcional lineal que se comporta como un vector de precios.

En el cuarto capitulo nombraremos las ventajas y desventajas de estos teoremas y algunas aplicaciones e investigaciones hechas sobre estos temas en la actualidad.

Es importante resaltar que las demostraciones realizadas en el capítulo dos están basadas en el libro Análisis Microeconómico de Hal Varian, capítulo 17, y las desarrolladas en el capitulo tres pueden ser encontradas en el libro Recursive methods in economic dynamics, de Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas, Edward C. Prescott, capítulo 15.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de esos preliminares es contextualizar al lector en el contexto económico y darle las herramientas necesarias para entender la demostración de cada una de los teoremas que trabajaremos. En la sección de términos matemáticos encontraremos algunas definiciones y teoremas con su respectiva demostración.

1.1. Matemáticos

Convexidad

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es convexo sí para todo x e y pertenecientes a A implica que $tx+(1-y)t$ pertenece a A cualquiera que sea t tal que $0 \leq t \leq 1$.

Proposición: La suma de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Espacio vectorial normado

Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial S, junto a una norma $\|\cdot\| : S \to \mathbb{R}$, tal que para todo $x, y \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$, con igualdad si y solo si, $x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, y
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Funcional lineal

Un funcional lineal en un espacio vectorial normado $(S, \|\cdot\|_S)$, es una función $\phi : S \to \mathbb{R}$ satisfaciendo,

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y), \text{ para todo } x, y \in S, \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

El funcional lineal ϕ es **continuo** sí $\|x_n - x\| \to 0$ implica $|\phi(x_n) - \phi(x)| \to 0.$, siendo x_n una sucesión convergiente a s. Es **acotado** sí existe una constante M tal que $|\phi(x)| \leq M\|x\|$, para todo $x \in S$.

Teorema

Sean S un espacio vectorial normado, y ϕ un funcional lineal continuo en S. Entonces

1. Sí ϕ es continuo en algún punto en S, entonces es continuo en todos los puntos de S
2. ϕ es continuo si y solo si es acotado

Demostración

1. Supongamos que ϕ es contunio en $s \in S$, y sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a $x \in S$. Definimos la sucesión $\{s_n\}$ por $s_n = s + x_n - x$, $n = 1, 2, \ldots$. Por linealidad de ϕ

   $$\phi(x_n) = \phi(x) + \phi(s_n) - \phi(s), \; n = 1, 2, \ldots$$

   Por lo tanto, tomando el limite y usando la continuidad de ϕ en s, obtenemos

   $$\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x) + \lim_{n\to\infty} \phi(s_n) - \phi(s) = \phi(x)$$

2. Supongamos que ϕ es acotado, con $\|\phi\| = M$. Entonces para una sucesión $\{x_n\}$ convergiendo a θ, tenemos

   $$\lim_{n\to\infty} |\phi(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} M\|x_n\| = 0,$$

   Entonces ϕ es continuo en θ. Luego por (1) es continuo en todo S.
   En el sentido contrario, supongamos que ϕ es continuo. Entonces existe algún $0 < M < \infty$ tal que $\|x\| < 1/M$ implica $\phi(x) \leq 1$. Entonces para algún $x \neq \theta$,

   $$|\phi(x)| = |\phi(xM/\|x\|)|M\|x\| \leq M\|x\|$$

   Luego $\|\phi\| \leq M$

Espacio Dual

Para cualquier espacio vectorial normado S, el espacio S^* de todos los funcionales lineales continuos en S es llamado el dual de S. La suma y multiplicación por escalar en S^* son definidos de tal manera que

$$a\alpha + b\psi \in S^*, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}$$

De donde, S^* es un espacio vectorial. Con la siguiente norma, $(S^*, \|\cdot\|_d)$ es un espacio vectorial normado.

$$\begin{aligned} \|\phi\|_d &= \text{ínf}\, M \in \mathbb{R}_+ : |\phi(x)| \leq M\|x\|_S, \text{ para todo } x \in S \\ &= \inf_{\|x\|_S \leq 1} |\phi(x)| \end{aligned}$$

Teorema del Hiperplano Separador

Si A y B son dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacios pertenecientes a $\mathbb{R}^n$, existe una función lineal p tal que $px \geq py$ para cualquier x perteneciente a A y cualquier y perteneciente a B[1].

Teorema de Hahn-Banach

Sea S un espacio vectorial normado, y sean A, $B \subset S$ conjuntos convexos. Asumimos que, bien B tiene un punto interior, o bien S tiene dimensión finita y A no continene ningún punto interior de B. Entonces existen un funcional lineal continuo ϕ, diferente de cero en S, y una constante c tal que

$$\phi(y) \leq c \leq \phi(x), \text{ para todo } x \in A, \text{ para todo } y \in B^2$$

1.2. Económicos

Vamos a trabajar un modelo de equilibrio general, donde todos los precios son variables y para que haya equilibrio deben vaciarse los mercados,es decir, se agotan los bienes. Específicamente analizaremos el caso cuando todos los agentes económicos son consumidores, modelo conocido como intercambio puro. En este modelo los consumidores están descritos por sus preferencias y por los bienes que poseen. Los agentes intercambian sus mercancías con el objetivo de mejorar su bienestar.

[1]Análisis Microeconómico, pág. 565

[2]Recursive methods in economic dynamics,pág. 450

Cada agente i esta descrito por sus preferencias $\succeq_i$, o su función de utilidad u_i, y su dotación inicial de las k mercancías w_i. La cantidad del bien j que tiene el agente i está representada por x_i^j. Su cesta de consumo será representada por $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^k)$; éste es un vector de dimensión k que indica la cantidad de cada bien que consume el agente i. Una asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un conjunto de n cestas de consumo que indica lo que tiene cada uno de los n agentes. Una asignación es viable sí agota todos los bienes, es decir, una asignación en la que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i$.

Cada consumidor i actúa como si estuviera resolviendo el siguiente problema

$$\max_{x_i} u_i(x_i)$$

$$\text{sujeta a } px_i = pw_i$$

Donde $p = (p_1, \ldots, p_k)$ es un vector de precios de mercado, formado por un precio para cada bien. La solución de este problema, $x_i(p, pw_i)$, es la función de demanda del consumidor[3]. La riqueza, m_i es el valor de mercado de su dotación inicial, por lo que $m_i = pw_i$. Suponiendo que las preferencias son estrictamente convexas, las funciones de demanda son funciones continuas.

Es importante saber cuales suposiciones haremos sobre las preferencias. Asumiremos que son continuas, monótonas y convexas.

La **continuidad** nos dice que cualquiera que sea y perteneciente a X, que es el conjunto de consumo, los conjuntos $\{x : x \succeq y\}$ y $\{x : x \preceq y\}$ son conjuntos cerrados. Por lo tanto, $\{x : x \succ y\}$ y $\{x : x \prec y\}$ son conjuntos abiertos. Esta condición establece que si (x^i) es una sucesión de cestas de consumo que son todas ellas, al menos tan buenas como y, y si esta sucesión converge en una cesta x^*, x^* es, al menos, tan buena como y. En otras palabras, si y se prefiere estrictamente a z y si x es una cesta sufucientemente cercana a y, x debe preferirse estrictamente a z.

La **monotonicidad** puede ser débil o fuerte, la primera nos dice que si $x \geq y$, entonces $x \succeq y$, la segunda que si $x \geq y$ y $x \neq y$, entonces $x \succ y$. Este supuesto quiere decir que "una cesta que contenga como mínimo la misma cantidad de bienes que otra es como mínimo igual de buena que ésta".

Finalmente tenemos la **convexidad**, que nos dice que dados x, y y z pertenecientes a X tal que $x \succeq y$ e $y \succeq z$, entonces $tx+(1-t)y \succeq z$ cualquiera que sea t tal que $0 \leq t \leq 1$. Debemos también tener en cuenta la **Convexidad estricta** es decir, dados $x \neq y$ y z pertenecientes a X tal que $x \succeq z$ e $y \succeq z$, entonces $tx + (1-t)y \succ z$ cualquiera que sea t tal que $0 < t < 1$.

[3] Ver más detaller en Analisis Microeconómico; cap 7

Existencia de una función de utilidad

Supongamos que las preferencias son completas, reflexivas, transitivas, continuas y monotonas en sentido fuerte. En ese caso, existe una función de utilidad continua $u : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$

Demostración

Sea ϵ el vector de R^k_+ formado únicamente por unos. En este caso, dado cualquier vector x, sea $u(x)$ un número tal que $x \sim u(x)\epsilon$. Se tiene que demostrar que existe ese número y que es único.

Sea $B = \{t \in \mathbb{R}_+ : t\epsilon \succeq x\}$ y $W = \{t \in \mathbb{R} : x \succeq t\epsilon\}$. En este caso, la monotonicidad fuerte implica que B no es un conjunto vacío; W tampoco lo es, desde luego, ya que al menos contiene un elemento, 0. La continuidad implica que los dos conjuntos son cerrados. Dado que la línea real está conectada, existe algún t_x tal que $t_x\epsilon \sim x$. Se tiene que demostrar que esta función de utilidad representa, de hecho, las preferencias. Sea

$$u(x) = t_x \text{ donde } t_x\epsilon \sim x$$

$$u(y) = t_y \text{ donde } t_y\epsilon \sim y$$

En este caso, si $t_x < t_y$, la monotonicidad fuerte demuestra que $t_x\epsilon \prec t_y\epsilon$ y la transitividad demuestra que $x \sim t_x\epsilon \prec t_y\epsilon$, por lo que t_x debe ser mayor que t_y.

A continuación vamos a definir los conceptos clave para entender los teoremas.

Equilibrio Walrasiano

Un par de vectores de asignaciones y precios (x, p) es un **equilibrio Walrasiano** si (1)La asignación es viable y (2)Cada uno de los agentes elige el punto óptimo de su conjunto presupuestario. Es decir,

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i$
2. Si el agente i prefiere x'_i a x_i, entonces $px'_i > pw_i$

En la generalización de los teoremas usaremos una definición equivalente a la de equilibrio walrasiano llamada **equilibrio competitivo**:

Una asignación $[(x_i^0), (w_i^0)]$ junto a un funcional $\phi : S \to \mathbb{R}$ es un **equilibrio competitivo** si:

1. $[(x_i^0), (w_i^0)]$ es viable
2. para cada i, $x \in X_i$, y $u_i(x) > u_i(x_i^0)$, entonces $\phi(x) > \phi(x_i^0)$.

Eficiencia de Pareto

Decimos que una asignación viable x es **eficiente en en el sentido de Pareto** si no existe ninguna asignación viable x' tal que todos los agentes la prefieran estrictamente a la asignación x. Para la generalización de los teoremas usaremos la siguiente definición que es equivalente; una asignación es óptimo de Pareto si es viable y si no existe otra asignacion $[(x_i'), (w_i')]$ tal que $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$, para todo i; y $u_i(x_i') > u_i(x_i)$, para algunos i.

Aunque para la demostración de los teoremas de bienestar no es requerida la demostración de la existencia de equilibrios Walrasianos, la realizaremos a continuación ya que es de gran importancia para el la teoría del equilibrio económico. Antes de hacer la demostración necesitaremos algunas definiciones.

Ley de Walras: Dado cualquier p perteneciente a S^{k-1} tenemos que $pz(p) = 0$; es decir, el valor del exceso de demanda es idénticamente igual a cero. Donde

$$S^{k-1} = \left\{ \text{p pertenece a } \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\}$$

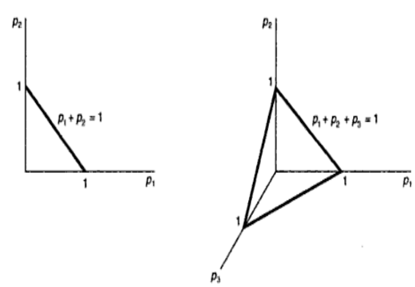

Figura 1.1: representación gráfica de S_1 y S_2

Demostración

Para realizar la demostración es necesaria la función de exceso de demanda agregegada, que se define asi:

$$z(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p, pw_i) - w_i$$

Multiplicando esta función por p, tenemos

$$pz(p) = p\left[\sum_{i=1}^{n} x_i(p, pw_i) - \sum_{i=1}^{n} w_i\right] = \sum_{i=1}^{n}[px_i(p, pw_i) - pw_i] = 0,$$

dado que $x_i(p, pw_i)$ debe satisfacer la restricción presupuestaria $px_i = pw_i$ en el caso de todos los agentes $i = 1, \ldots, n$.

Existencia de equilibrios Walrasianos

Dado que la función de exceso de demanda agregada es homogénea de grado cero, podemos normalizar los precios y expresar las demandas en función de los **precios relativos**. Existen varias maneras de hacerlo, pero una normalización util para nuestros fines consiste en sustituir cada uno de los precios absolutos p_i por un precio normalizado:

$$p_i = \frac{\hat{p}_i}{\sum_{j=1}^{k} \hat{p}_j}$$

De esta manera la suma de los precios normalizados p_i ha de ser igual a 1. Por lo tanto, podemos limitarnos a examinar los vectores de precios que pertenecen al simplex unitario de dimensión $k-1$. Volvamos ahora a la cuestión de la existencia de un equilibrio walrasiano:¿existe un vector de precios p^* que vacie todos los mercados?

Teorema existencia de equilibrios Walrasianos

Si $z : S^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ es una función continua que satisface la ley de Walras, $pz(p) \equiv 0$, existe algún p^* perteneciente a S^{k-1} tal que $z(p^*) \leq 0$.

Demostración

Definimos la aplicación $g : S^{k-1} \to S^{k-1}$ de la siguiente manera:

$$g_i(p) = \frac{p_i + max(0, z_i(p))}{1 + \sum\limits_{j=1}^{k} max(0, z_j(p))} \qquad \text{siendo } i = 1, \ldots, k$$

Obsérvese que esta aplicación es continua, ya que z y la función del máximo son funciones continuas. Por otra parte, $g(p)$ es u punto que pertence al simplex S^{k-1}, ya que $\sum_i g_i(p) = 1$.

De acuerdo con el teorema del punto fijo de Browder, existe un p^* tal que $p^* = g(p^*)$, es decir,

$$p_i^*(p) = \frac{p_i^* + max(0, z_i(p^*))}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} max(0, z_j(p^*))} \qquad \text{siendo } i = 1, \ldots, k \tag{1.1}$$

Demostraremos que p^* es un equilibrio walrasiano. Eliminando los denominadores de la ecuación (2.2) y reordenando, tenemos que

$$p_i^* \sum_{j=1}^{k} max(0, z_j(p^*)) = max(0, z_i(p^*)) \qquad \text{siendo } i = 1, \ldots, k.$$

Multiplicanco ahora cada una de estas ecuaciones por $z_i(p^*)$, tenemos que

$$z_i(p^*)p_i^* \left[\sum_{j=1}^{k} max(0, z_j(p^*)) \right] = z_i(p^*)max(0, z_i(p^*)) \qquad \text{siendo } i = 1, \ldots, k.$$

Sumando estas k ecuaciones, observemos

$$\left[\sum_{j=1}^{k} max(0, z_j(p^*)) \right] \sum_{i=1}^{k} p_i^* z_i(p^*) = \sum_{i=1}^{k} z_i(p^*)max(0, z_i(p^*)).$$

Ahora bien, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i^* z_i(p^*) = 0$ por la ley de Walras, por lo que tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} z_i(p^*)max(0, z_i(p^*)).$$

Cada uno de los términos de esta suma es mayor o igual a cero, ya que cada uno de ellos es o bien 0, o bien $(z_i(p^*))^2$. Pero si algún término fuera estrictamente mayor que cero, no se cumpliría la igualdad. Por lo tanto, todos los términos deben ser iguales a cero, lo que significa que

$$z_i(p^*) \leq 0 \quad \text{siendo } i = 1, \ldots, k.$$

Y con esto terminamos la demostración. Teniendo ahora los elementos necesarios, podemos pasar a la demostración de los teoremas de bienestar, primero en R^n y luego su generalización a espacios de dimensión infinita.

Capítulo 2

Teoremas del Bienestar en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo buscaremos formalizar las condiciones de existencia de la Mano Invisible del autor Adam Smith a través de la teoría del consumidor basadas en las preferencias de los individuos. Presentaremos los dos teoremas del bienestar que muestran la incidencia entre puntos de equilibrio y puntos eficientes en las asignaciones de los agentes.

2.1. Primer Teorema de Bienestar

Si (x, p) es un equilibrio walrasiano, x es eficiente en el sentido pareto.

Demostración

Actuemos por contradicción. Supongamos que (x, p) no fuera un equilibrio walrasiano y que x' es una asignación viable que prefieren todos los agentes a la x. Por la segunda propiedad de la definición de equilibrio walrasiano, tenemos que

$$px'_i > pw_i \text{ siendo } i = 1, \ldots, n$$

Sumando los valores correspondientes a todos los agentes $i = 1, \ldots, n$ y valiéndose del hecho que x' es viable, tenemos que

$$p\sum_{i=1}^{n} x'_i > \sum_{i=1}^{n} pw_i,$$

pero por la primera propiedad de la definición de equilibrio walrasiano

$$p\sum_{i=1}^{n} w_i = p\sum_{i=1}^{n} x'_i,$$

luego

$$p\sum_{i=1}^{n} w_i > \sum_{i=1}^{n} pw_i,$$

lo cual es una contradicción.

2.2. Segundo Teorema de Bienestar

Supongamos que x^* es una asignación eficiente en el sentido de Pareto en la que cada uno de lo agentes posee una cantidad positiva de cada uno de los bienes. Supongamos que las preferencias con convexas, continuas y monótonas. En ese caso, x^* es un equilibrio walrasiano en el caso de las dotaciones iniciales $w_i = x_i^*$ siendo $i = 1, \ldots, n$

Demostración

Sea

$$P_i = \{x_i \text{ en } \mathbb{R}^k \mid x_i \succ_i x_i^*\}.$$

el conjunto de todas las cestas de consumo que el agente i prefiere a x_i^*. En éste caso, definimos

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \{z \mid z = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ donde } x_i \text{ pertenece a } P_i\}$$

P es el conjunto de todas las cesta de los k bienes que pueden distribuirse en los n agentes con el fin de mejorar el bienestar de todos ellos. Dado que cada P_i es un conjunto convexo por hipótesis y la suma de los conjuntos convexos es un conjunto convexo, P también es un conjunto convexo.

Sea $w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^*$ la cesta agregada actual. Dado que x^* es eficiente en el sentido de Pareto, no existe ninguna redistribución de x^* que mejore el bienestar de todo el mundo, lo cual significa que w no es un elemento de conjunto P.

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del hiperplano separador, existe un vector $p \neq 0$ tal que

$$pz \geq p\sum_{i=1}^{n} x_i^* \text{ cualquiera que sea } z \text{ perteneciente a } P.$$

Reordenando la ecuación, tenemos que

$$p\left(z - \sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) \geq 0 \text{ cualquiera que sea } z \text{ perteneciente a } P \tag{2.1}$$

Queremos demostrar que p es, de hecho, un vector de precios de equilibrio. La demostración consta de tres partes.

1. p es no negativo; es decir, $p \geq 0$

   Consideremos el vector $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ que tiene un 1 en el i-ésimo componente. Dado que las preferencias son monótonas, $w + e_i$ debe pertenecer a P, dado que si tenemos una unidad más de un bien cualquiera, es posible redistribuirlo para mejorar el bienestar de todo el mundo. La desigualdad (2.1) implica, entonces, que

   $$p(w + e_i - w) \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, k.$$

   Anulando terminos,

   $$pe_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, k.$$

   Esta ecuación implica que $p_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

2. Sí $y_j \succ_j x_j^*$, entonces $py_j \geq px_j^*$, para todos los agentes $j = 1, \ldots, n$

   Ya sabemos que si *todos* los agentes i prefieren y_i a x_i^*, entonces

   $$p\sum_{i=1}^{n} y_i \geq p\sum_{i=1}^{n} x_i^*.$$

   Ahora supongamos que solamente un *determinado* agente j prefiere una cesta y_j a la x_j. Construyamos una asignación z distribuyendo una cierta cantidad de cada bien del agente j en favor de los démas. En terminos más formales, suponemos que θ es un número muy pequeño y definimos las asignaciones z de la manera siguiente:

   $$z_j = (1 - \theta)y_i$$
   $$z_i = x_i^* + \frac{\theta y_i}{n - 1} \qquad i \neq j$$

Si θ es suficientemente pequeño, el supuesto de la monotonicidad fuerte implica que la asignación z se prefiere en el sentido de Pareto a la x_i^* y, por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} z_i$ pertenece a P. Aplicando la desigualdad (2.1), tenemos que

$$p\sum_{i=1}^{n} z_i \geq p\sum_{i=1}^{n} x_i^*$$

$$p\left[z_j + \sum_{i\neq j} z_i\right] \geq p\left[x_j^* + \sum_{i\neq j} x_i^*\right]$$

$$p\left[y_i(1-\theta) + \sum_{i\neq j}(x_i^* + \frac{y_i}{n-1}\theta)\right] \geq p\left[x_j^* + \sum_{i\neq j} x_i^*\right]$$

$$p\left[y_i(1-\theta) + \sum_{i\neq j} x_i^* + y_j\theta\right] \geq p\left[x_j^* + \sum_{i\neq j} x_i^*\right]$$

$$py_i \geq px_i^*$$

Este argumento demuestra que si el agente j prefiere y_j a x_j^*, y_j no puede costar menos que x_j^*.

3. Sí $y_j \succ_j x_j^*$, debe cumplirse que $py_j > px_j^*$

Ya sabemos que $py_j \geq px_j^*$; queremos excluir la posibilidad de que se cumpla el caso de la igualdad, por lo que suponemos que $py_j = px_j^*$ y llegamos a una contradicción.
De acuerdo con el supuesto de la continuidad de las preferencias, podemos hallar un θ tal que $0 < \theta < 1$, de tal manera que θy_i se prefiera estrictamente a x_j^*. De acuerdo con la argumentación de la parte anterior sabemos que θy_i debe costar al menos tanto como x_j^*:

$$\theta py_j \geq px_j^* \tag{2.2}$$

Una de las hipótesis del teorema es que todos los componentes x_j^* son estrictamentes positivos, de donde se deduce que $px_j^* > 0$.

Por lo tanto, si $py_j - px_j^* = 0$, entonces $\theta py_j < px_j^*$. Pero esto contradice la desigualdad , por lo cual damos como concluida la demostración del teorema.

Capítulo 3

Generalización de los Teoremas del Binestar

Con el proposito de crear una teoria de consumo que se acomode a cantidades muy grandes de mercancías o cantidades de mercancías proyectadas por un individuo, que las considera infinitas a lo largo de su vida, haremos la generalización de los teoremas del bienestar haciendo uso del espacio infinitodimensional l_∞.

3.1. Primer Teorema del bienestar

Suponga que para cada i y cada $x \in X_i$, X_i el espacio de consumo del agente i, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X_i, convergiendo a x, tal que $u_i(x_n) > u_i(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Si $[(x_i^0), (w_i^0), \phi]$, es un equilibrio competitivo, siendo ϕ el vector de precios, entonces la asignación $[(x_i^0), (w_i^0)]$ es eficiente en el sentido pareto.

Demostración

Sea $[(x_i^0), (w_i^0), \phi]$ un equilibrio competitivo. Razonemos por contradicción, supongamos que existe una asignacion viable $[(x_i'), (w_i')]$ tal que $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$, para todo i; y $u_i(x_i') > u_i(x_i)$, para algunos i. Primero miraremos la condición establecida

$$\text{Para cada } i, u_i(x) = u_i(x_i^0) \text{ implica } \phi(x) \geq \phi(x_i^0) \tag{3.1}$$

Supongamos lo contrario, que

$$u_i(x) = u_i(x_i^0) \text{ y } \phi(x) < \phi(x_i^0), \text{ para algún } i$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X_i que converge a x, tal que

$$u_i(x_n) > u_i(x) = u_i(x_i^0),\ i = 1, 2, \ldots$$

La continuidad de ϕ implica que para todo n suficientemente grande, $\phi(x_n) < \phi(x_i^0)$, contradiciendo la segunda condición de la definición de equilibrio competitivo. La condición 3.1 establecida ha sido demostrada.

Ahora, ya que $[(x_i'), (w_i')]$ es posible, $x_i' \in X_i$, para todo i . Por la definición de equilibrio competitivo para cada i, y $u_i(x) > u_i(x_i^0)$ implica $\phi(x) > \phi(x_i^0)$

Sumando los valores correspondientes a todos los agentes y usando el hecho que ϕ es lineal, encontramos que

$$\phi\left(\sum_i x_i'\right) = \sum_i \phi(x_i') > \sum_i \phi(x_i^0) = \phi\left(\sum_i x_i^0\right)$$

Ya que las dos asignaciones son posibles,

$$\sum_i \phi(w_i) = \phi\left(\sum_i w_i\right) = \phi\left(\sum_i x_i'\right) > \phi\left(\sum_i x_i^0\right) = \phi\left(\sum_i w_i\right) = \sum_i \phi(w_i)$$

Llegando a una contradicción.

3.2. Segundo teorema del Bienestar

Para generalizar de forma completa el segundo teorema del bienestar vamos a seguir tres pasos, primero demostraremos el segundo teorema del bienestar donde presentaremos que existe un funcional ϕ, que hará el papel del vector de precios y se comporta como equilibrio competitivo, segundo mostraremos que para que ϕ pueda ser interpretado en el sentido económico, lo remplazaremos por un funcional ψ a través de la escogencia de un adecuado conjunto de consumo y su representación de producto interno, por ultimo se verá que esta nueva interpretación $[(x_i^0), (w_i^0), \psi]$ cumple los requisitos necesarios para ser un equilibio competitivo.

Antes de enunciar el segundo teorema, debemos tener en cuenta los siguientes supuestos.

$$\text{Para cada } i, X_i \text{ es convexo} \tag{3.2}$$

$$\text{Para cada } i. \text{ si } x, x' \in X_i, u_i(x) > u_i(x'),\ \text{ y } \theta \in (0,1), \tag{3.3}$$

entonces $u_i[\theta x + (1-\theta)x'] > u_i(x')$.

$$\text{Para cada } i, u_i : X_i \to \mathbb{R} \text{ es continua} \tag{3.4}$$

3.2.1. Segundo Teorema del Bienestar

Supongamos que se cumplen los anteriores supuestos, y sea $[(x_i^0), (w_i^0)]$ una asignación óptima en el sentido de Pareto. Entonces existe una funcional lineal continuo $\phi : S \to \mathbb{R}$, diferente de cero, tal que:

$$\text{para cada } i,\ x \in X_i \text{ y } u_i(x) \geq u_i(x_i^0) \text{ implica } \phi(x) \geq \phi(x_i^0) \tag{3.5}$$

Demostración

Sea $[(x_i^0), (w_i^0)]$ una asignación óptima en el sentido de Pareto. Definamos el conjunto

$$A_i = \{x \in X_i : u_i(x) \geq u_i(x_i^0)\},\ i = 1, \dots, I$$

Sea $A = \sum_i A_i$ y $w = \sum_i x_i^0$.Queremos demostrar que los conjuntos A y w cumplen las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach. Dado que $[(x_i^0), (w_i^0)]$ es eficiente en el sentido de Pareto, no existe ninguna redistribución de $(x_i^0), (w_i^0)$ que mejore el bienestar de todo el mundo, lo cual significa el punto óptimo no es un elemento de A.

Ahora por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional linear continuo ϕ, diferente de cero, y una constante c tal que $\phi(w) \leq c \leq \phi(x)$, para todo $x \in A$.

Nota

Supongamos que las hípótesis del punto anterior se cumple, y sea $\phi : S \to \mathbb{R}$ un funcional linear, y ademas

$$\text{para cada } i,\ \text{existe } x_i' \in X_i,\ \text{tal que } \phi(x_i') < \phi(x_i^0).$$

Entonces $[(x_i^0), (w_i^0), \phi]$ es un equilibrio competitivo.

Demostración

Debemos mostrar que para cada i, $x_i' \in X_i$, y $u_i(x_i') > u_i(x_i^0)$, entonces $\phi(x_i') > \phi(x_i^0)$.

Ya sabemos que si todos los agentes j prefieren y_j a x_j^0 entonces

$$\sum_j \phi(y_j) > \sum_j \phi(x_j^0)$$

Supongamos ahora que solamente un determinado agente i prefiere una cesta x_i' a x_i^0. Construyamos una asignación z distribuyendo una cierta cantidad de cada bien del agente j en favor de los demas. Supongamos un θ pequeño, $\theta \in (0,1)$ y definimos z:

$$z_i = (1-\theta)x_i'$$

$$z_j = x_j^0 + \frac{\theta x_i'}{n-1} \qquad i \neq j$$

Como θ es muy pequeño, la asignacion z se prefiere en el sentido Pareto a la x^0 y por lo tanto $\sum_i (z_i) \in A$. Aplicando la desigualdad tenemos:

$$\phi \sum_{j=1} (z_j) \geq \phi \sum_{j=1} (x_j^0)$$

$$\phi \left[x_i'(1-\theta) + \sum_{j\neq i} (x_j^0) + x_i'\theta \right] \geq \phi \left[x_i^0 + \sum_{j \neq i} x_j^0 \right]$$

$$\phi(x_i') \geq \phi(x_i^0)$$

Ahora en nuestro segundo paso vamos a ver que el funcional lineal encontrado junto con los supuestos dados puede ser interpretado como un conjunto de precios en el sentido usual. En algunos casos esta interpretación requiere cuidado en la escogencia del conjunto de consumo $(S, \|\cdot\|)$. Dos consideraciones juegan en la toma de decisión. La primera es que la norma escogida determina que cualquier función u_i es continua y que cualquier conjunto W tiene un punto interior; la norma en S tiene que ser escogida tal que cumpla los supuestos del segundo teorema del bienestar para las preferencias de interés. La segunda consideración es que la norma escogida define la clase de funcional lineal continuo en S. Esto es conveniente si la norma puede ser escogida siempre que cada funcional lineal continuo tenga una representación de producto interno, porque el segundo teorema del bienestar garantiza la existencia de un conjunto de precios en el sentido usual.

En el modelo de un sector de crecimiento optimo, una asignacion es una secuencia infinita $x = (x_0, x_1, \ldots)$. Estos elementos hacen parte de los espacios l_p, por lo que esta familia ofrece muchas posibilidades para el conjunto de consumo. Sin embargo trabajando con cualquiera de los espacios l_p diferente a l_∞ causan serias dificultades. En primer lugar, si $1 \leq p < \infty$, entonces $x \in l_p$ solo si la serie $\sum\limits_{t=0}^{\infty} |x_t|^p$ converge, el cual requiere que

$$\lim_{t \to \infty} x_t = 0.$$

Aunque el punto cero puede tener diferentes interpretaciones, esta condicion es una grave restricción en las clases dinámicas que pueden ser consideradas. La segunda dificultad que se presenta es que ninguno de los espacios l_p con p finito, pueden tener un conjunto producto en el ortante positivo con un punto interior; solo l_∞ tiene un ortante positivo con puntos interiores.

Hemos visto que si el espacio de consumo es l_∞, el funcional lineal necesariamente no tiene una representacion de producto interno. Ahora vamos a ver que en este caso podemos obtener una representación de producto interno, adicionando algunos requerimientos de las preferencias y asi fortaleciendo el segundo teorema del bienestar que nos asegura la existencia de precios, esto es, un funcional lineal que puede ser representado como un producto interno.

Sea el espacio vectorial normado $(X, ||\cdot||_x)$ el espacio del conjunto de consumo. Sea $S = X \times X \times X \times \ldots$ el espacio de sucesiones $x = (x_0, x_1, \ldots), x_t \in X$ con la norma

$$||x||_S = \sup_t ||x_t||_x < \infty.$$

Luego $(S, ||\cdot||_s)$ es un espacio vectorial normado. Para cualquier $x = (x_0, x_1, \ldots) \in S$, denotemos $x^T \in S$ la sucesión truncada, definida $x^T = (x_0, \ldots, x_T, 0, 0, \ldots)$. Esta sucesion nos ayudará a mostrar que cada funcional lineal continuo ϕ en S, puede ser descompuesto en una parte "bien definida",ψ, y una parte que le da "peso al infinito", al resto. El siguiente lema nos mostrará como construir ψ dado ϕ. Luego, se demostrará en el siguiente teorema que con las preferencias restringidas, el funcional ψ es también un sistema de precios de equilibrio.

Lema

Sea ϕ el funcional lineal continuo en el espacio vectorial normado $(S, || \centerdot ||_s)$ definido anteriormente. Entonces

$$\psi(x) = \lim_{T\to\infty} \phi(x^T) \text{ para todo } x \in S, \tag{3.6}$$

define un funcional lineal continuo en S, y ψ puede ser escrito como

$$\psi(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t(x_t), \text{ para todo } x \in S \tag{3.7}$$

donde cada ψ_t es un funcional lineal continuo en X.

Demostración

Debemos mostrar que el limite en 3.6 existe para todo $x \in S$ y que ψ es definido como un funcional lineal continuo. Primero notemos que como ϕ es continuo, entonces $||\phi|| < \infty$.

Sí $x = 0$, entonces $\psi(0) = 0$. Supongamos que $x \neq 0$. Para cada $t = 0, 1, \ldots$, sea $\widetilde{x}_t = (0, \ldots, 0, x_t, 0, \ldots)$; sea

$$y_t = \begin{cases} x_t & \text{si } \phi(x_t) \geq 0 \\ -x_t & \text{si } \phi(x_t) < 0 \end{cases}$$

y sea $\widetilde{y}_t = (0, \ldots, 0, y_t, 0, \ldots)$. Entonces para todo T,

$$\phi(x^T) = \sum_{t=0}^{T} \phi(x_t) \leq \sum_{t=0}^{T} \mid \phi(x_t) \mid = \sum_{t=0}^{T} \phi(y_t) = \phi(y^T)$$

$$\leq \parallel \phi \parallel \parallel y^T \parallel_s = \parallel \phi \parallel \parallel x^T \parallel_s \leq \parallel \phi \parallel \parallel x \parallel_s$$

Esto es, la serie $\sum_{t=0}^{T} \mid \phi(\widetilde{x}_t) \mid$ es acotada por $\parallel \phi \parallel \parallel x \parallel_s$ y tambien converge. Esto muestra que la serie $\sum_{t=0}^{T} \phi(x_t)$ tambien converge, entonces $\psi(x)$ esta bien definido.

Claramente ψ es lineal y $\psi(x) \leq \parallel \phi \parallel \parallel x \parallel_s$, para todo $x \in S$; se cumple tambien $\parallel \psi \parallel \leq \parallel \phi \parallel < \infty$, entonces ψ es acotado. Esto nos ayuda a ver facilmente por que ψ es continuo.

Finalmente, sea X^* el dual de X y definimos el funcional lineal continuo $\psi_t \in X^*$, $t = 0, 1, \ldots$ por

$$\psi_t(x_t) = \phi(x_t)$$

Luego (3.7) se obtiene inmediatamente de (3.6).

Si X es el espacio Euclidiano de dimensión finita $\mathbb{R}^k$, entonces cada funcional lineal ψ_t tiene una representación de producto interno: $\psi_t(x_t) = p_t \cdot x_t$ para algún $p_t = (p_{t1}, \ldots, p_{tk}) \in \mathbb{R}^k$. Luego, para este caso, el lineal funcional podrá ser escrito como un producto interno

$$\psi(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t(x_t) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t \cdot x_t = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} p_{tk} x_{tk} \tag{3.8}$$

Nuestro siguiente paso es mostrar que bajo algunos supuestos mas fuertes en las preferencias, el funcional lineal ϕ mediante el cual ha definido el funcional ψ, es un sistema de precios de equilibrio competitivo. Para esto necesitamos dos supuestos más. El espacio S y la definición de la sucecion truncada se mantienen como anteriormente se definieron.

Supuestos

$$\text{Para cada } i, x \in X_i, \text{ implica } x^T \in X_i, \text{ para todo } T \text{ suficientemente grande.} \tag{3.9}$$

$$\text{Para cada i, si } x, x' \in X_i \text{ y } u_i(x) > u_i(x'), \text{ entonces } u_i(x^T) > u_i(x'),$$

$$\text{para todo } T \text{ suficientemente grande.} \tag{3.10}$$

Segundo Teorema del bienestar

Sea S el espacio vectorial normado definido anteriormente; y teniendo en cuenta los supuestos (3.2) a (3.4) y (3.9) a (3.10) definidos anteriormente en este capitulo; sea $[(x_i), (w_i), \phi]$ una asignacion viable y el funcional lineal continuo tal que:

$$\text{para cada } i, x \in X_i \text{ y } u_i(x) \geq u_i(x_i^0) \text{ implica } \phi(x) \geq \phi(x_i^0) \tag{3.11}$$

y suponga que para cada i existe $\hat{x_i} \in X_i$ tal que $u_i(\hat{x_i}) > u_i(x_i^0)$. Sea ψ un funcional lineal continuo definido (3.6). Entonces (3.11) tambien se cumple con ψ en lugar de ϕ.

Demostración

Primero verificaremos que:

$$\text{para cada } i, x \in X_i \text{ and } u_i(x) \geq u_i(x_i^0) \text{ implica que } \psi(x) \geq \phi(x_i^0) \quad (3.12)$$

Fijemos i, y supongamos que $x \in X_i$ con $u_i(x) \geq u_i(x_i^0)$. Por hipótesis, existe $\widetilde{x}_i \in X_i$ tal que $u_i(\widetilde{x}_i) > u_i(x_i^0)$. Definimos

$$x^\theta = \theta\widetilde{x}_i + (1-\theta), \text{ para todo } \theta \in (0,1)$$

Por las suposiciones (3.2) y (3.3)

$$x^\theta \in X_i \text{ y } u_i(x^\theta) > u_i(x_i^0), \text{ para todo } \theta \in (0,1).$$

Fijemos $\theta \in (0,1)$, por las suposiciones (3.9) y (3.10)

$$x^{\theta T} \in X_i \text{y } u_i(x\theta^T) > u_i(x_i^0), \text{ para } T \text{ suficientemente grande}$$

Entonces se muestra de (3.11) que para T suficientemente grande,

$$\phi(x_i^0) \leq \phi(x^{\theta T}) = \theta\phi(\widetilde{x}_i^T) + (1-\theta)\phi(x^T)$$

Como vimos en el lema, el limite del lado derecho esta bien definido cuando $T \to \infty$; luego, tomando el limite y usando la definición de ψ, encontramos que

$$\phi(x_i^0) \leq \theta\phi(\widetilde{x}_i) + (1-\theta)\psi(x)$$

Siempre y cuando esto se cumpla para cada $\theta \in (0,1)$, tomando el limite como $\theta \to 0$, encontramos que $\phi(x_i^0) \leq \psi(x)$, cumpliendo (3.12).

Ahora, por (3.12), nos lleva a que

$$\psi(x_i^0) \geq \phi(x_i^0) \text{para todo } i$$

Sumando sobre i y recordando que $x^0 = \sum\limits_i x_i^0 = \sum\limits_i w_i = w$, obtenemos

$$\psi(x^0) \geq \phi(x^0) = \phi(w) \geq \psi(w) = \psi(x^0)$$

entonces $\psi(x^0) = \phi(x^0) = \phi(w) = \psi(w)$. Se sigue de las desigualdades de arriba que

$$\psi(x_i^0) = \phi(x_i^0) \text{para todo } i$$

Luego (3.12) implica que ϕ puede ser remplazado con ψ en (3.11).

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

Investigaciones Actuales

Con respecto a la investigación que se ha hecho durante los últimos años encontramos un artículo muy interesante denominado "On the fundamental theorems of general equilibrium"[1]escrito por Eric S. Maskin[2] y Kevin W. Roberts[3] en el cual hacen una generalización de los tres teoremas principales del equilibrio general, demostrando la existencia de equilibrio en economías donde la ley de Walras no siempre se cumple y como consecuencia de est el segundo teorema será un corolario del primero.

Desventajas

Ya hemos dado la demostración de los teoremas, de los cuales podemos corroborar que mercados competitivos llevan a una asignación eficiente en el sentido económico. De esta afirmación, podemos deducir que se debería dejar actuar los mercados sin restricciones, como las del gobierno, y se llegaría a una eficiencia en el sentido de Pareto. Sin embargo, para que le primer

teorema se pueda aplicar debe ser necesario que haya una competencia perfecta; es decir, que hay muchos productores y muchos consumidores, que los productos sean homogéneos, que no haya barreras en el mercado, y no hay costos de transacción; propiedades que son muy difíciles que las mercancías

[1]Articulo invertigativo publicado en 2007
[2]Institute for Advanced Study and Princeton University, Princeton
[3]Deparment of Economics and Nuffield College, Oxford

tengan. Con respecto a esto, Greenwald y Stiglitz [4] publicaron el Teorema de la Asimetria de la Información [5], el cual dice que sí la información es imperfecta o los mercados no son competitivos entonces no puede haber eficiencia en el sentido de Pareto. Siguiendo con el análisis de la eficiencia en el sentido de Pareto, tomemos el ejemplo en el cual el 1 % de la sociedad posee el 99 % de la riqueza, y 99 % de la sociedad se distribuye el 1 % restante, esta distribución es eficiente porque nadie puede mejorar sin que otro empeore, ahora, tomemos el caso en el que cada individuo de la sociedad posee la mismas cantidad de riqueza, lo cual también es eficiente. Con estos ejemplos podemos ver que la eficiencia de Pareto es muy débil para escoger una asignación que maximice el beneficio de la sociedad. Por ejemplo, con respecto a esto, Amartya Sen dice que pueden haber muchas asignaciones en el sentido de Pareto que no son deseables o aceptables desde el punto de vista de la sociedad o los individuos [6].

Aplicaciones

De acuerdo a la Revista de Economía Mundial 23, publicada en el año 2009, específicamente con el autor del articulo "Los modelos de Equilibrio General aplicado: una revisión de los principales campos a nivel internacional"Manuel Alejandro Cardenete: "Una de las mayores virtudes de los modelos de equilibrio general es su capacidad para explicar las consecuencias de grandes cambios en un sector particular, en relación con la economía en su conjunto. Las consecuencias de un cambio en una política económica son analizadas frecuentemente asumiendo que los cambios son pequeños y usando aproximaciones lineales basadas en estimaciones de las elasticidades relevantes. Si el número de sectores es pequeño, las técnicas de análisis de los modelos de dos sectores usados en la teoría del comercio internacional se utilizan igualmente. Pero si el modelo es desagregado y los cambios son más de uno, no hay otra opción que acudir a la construcción de modelos numéricos de equilibrio general de la economía a estudiar". A continuación nombraremos las áreas en las cuales los modelos de equilibrio general han tenido una mayor proliferación

1. Análisis de políticas fiscales

2. Análisis de políticas comerciales

[4] Premio Nobel de Economía 2010

[5] Externalities in Economies with Imperfect Information and Incomplete Markets, Quarterly Journal of Economics, no. 90.

[6] A. Sen en: "Sobre ética y economía"

3. Análisis de políticas migratorias

4. Análisis de políticas agrarias

5. Modelización de competencia imperfecta

6. Modelización de intercambios intertemporales

El objetivo de este trabajo era analizar de manera profunda teoremas de bienestar tanto en R^n como en espacios l_∞. A medida que se hacen las demostraciones es importante mencionar el rol tan importante que juega la matemática en diferentes campos de aplicación, en nuestro caso, económico. En general, estos teoremas nos formalizan la teoría del equilibrio general, basándonos en el comportamiento del consumidor.

Es relevante notar como se interpreta el cambio de espacios y la generalización realizada en el tercer capitulo. En el mercado la cantidad de mercancías que se tienes son muy grandes, por eso es mejor tomarlo como una cantidad infinita, esta es la primera razón para la generalización, la segunda es que los consumidores buscan su bienestar pensando también en su futuro, al tomar sus decisiones para obtener este bienestar nunca toman en cuenta que se van a morir, luego toman el tiempo como infinito.

Finalmente, es interesante ver cómo éste trabajo puede llevarnos de varias maneras a la investigación, haciendo modificaciones a las hipótesis o a las suposiciones, o analizando como es el comportamiento real de la economía y basados en estos teoremas para modelarlos.

Bibliografía

[1] Fundamentos de Economía, Paul Krugman, Robin Wells, Martha L. Olney, Reverté 2008

[2] Análisis Microeconómico, Hal R. Varian, Antoni Bosch, editor, S.A. 1998

[3] Recursive methods in economic dynamics, Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas, Edward C. Prescott. 1989

[4] On the fundamental theorems of general equilibrium, Eric S. Maskin, Kevin W. Roberts, 2009

[5] Los modelos de Equilibrio General aplicado: una revisión de los principales campos a nivel internacional, Manuel Alejandro Cardenete, 2009

[6] Sobre ética y economía, Amartya Sen, 1999