DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

ESPAÑOL	INGLÉS
Paradoja	Paradox
Teoría de tipos	Theory of types
Teoría de las descripciones	Theory of descriptions
Paradoja de clases	Paradox of sorts

RESUMEN

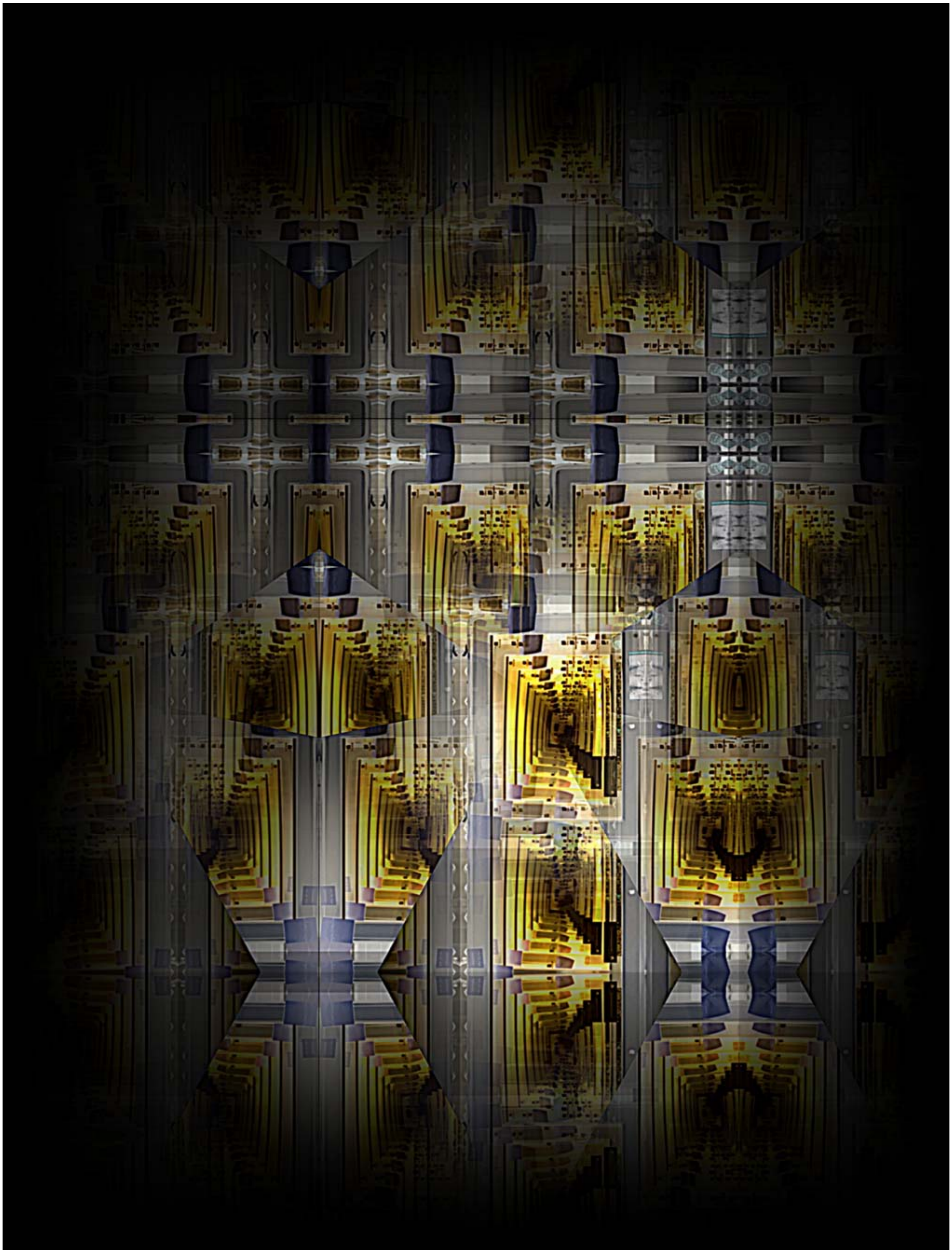
La teoría de tipos lógicos como austeridad ontológica

Este material se denomina *La teoría de tipos lógicos como austeridad ontológica* pues se considera que las ideas que ha generado la propuesta teórica del filósofo y matemático ingles Bertrand Russell, han sido determinantes en lo relacionado con su postura frente a la posibilidad de sospechar de las "evidencias" que se guardan mejor en las matemáticas. Esta sospecha se ve plasmada en la paradoja de clases. La respuesta de Russell a esta paradoja es la teoría de los tipos lógicos, desde la cual se enfrenta la siguiente pregunta: ¿cómo podemos nombrar las clases otorgándoles existencia y significado? Esta pregunta sólo puede responderse satisfactoriamente desde las dos formulaciones de la teoría de tipos (1903- 1908), filtradas a su vez por la teoría de las descripciones (1905). De este modo se pretende hacer un rastreo de la depuración ontológica que se lleva a cabo en la producción filosófica de Russell. Mostrar el cambio la teoría de los tipos, una vez filtrada por la teoría de las descripciones es el objetivo de este trabajo.

ABSTRACT.

The theory of logical types as ontological austerity

This material is called *Theory of logical types as ontological austerity* as it is considered that the ideas that the theoretical proposal of the English philosopher and mathematician Bertrand Russell have generated, have been decisive in matters concerning their attitude towards the possibility of suspicion of " evidence" that are stored better in mathematics. This suspicion is expressed in the paradox of sorts. Russell's answer to this paradox is the theory of logical types, from which it faces the question: How can we name the classes by giving them life and meaning? This question can only be answered satisfactorily from the two formulations of the theory of types (1903 - 1908), in turn filtered by the theory of descriptions (1905). In this way we try to make a crawl of the ontological purification which takes place in the philosophical work of Russell. The objective of this work is to show the change of the theory of types, once filtered by the theory of descriptions.



Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Filosofía

La teoría de tipos lógicos como austeridad ontológica

Mónica Maritza Ramos González

Agosto de 2010

Mónica Maritza Ramos González
Estudiante de la Facultad de Filosofía

La teoría de tipos lógicos como austeridad ontológica

Trabajo de grado presentado para optar al título de
Licenciada en Filosofía

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Facultad de filosofía
Bogotá, 11 de agosto de 2010

Agradecimientos

Quiero agradecer a Blanca Cecilia, por su dedicación, entrega incondicional y apoyo, y a Cecilia mi madre, que esperó en silencio y con todo el amor.

Mi deuda la tengo con mi maestro Miguel Ángel Pérez, que no solamente ha sido una excelente guía; sino que también ha sido fuente de inspiración y respeto profundo. Esta espera me ayudo, a tener la oportunidad de experimentar la cercanía y el deleite de una mente clara que "nunca especula con liviandad acerca de las grandes cosas".

Contenido

Introducción

Hemos denominado este material *Teoría de tipos lógicos como austeridad ontológica* por cuanto consideramos que los planteamientos que ha generado la propuesta teórica del filosofo y matemático ingles Bertrand Russell, han cambiado debido a irrupciones e impactos de orden psicológico llamados comúnmente paradojas. Creemos, que dentro de toda su extensa obra, hay dos teorías que son determinantes en lo que se relaciona a su producción lógico-filosófica que valen la pena de tener en cuenta en lo que corresponde a una reflexión en torno a la naturaleza del lenguaje como problema filosófico. Ellas son la teoría de los tipos y la teoría de las descripciones; la primera una teoría, claramente no finalizada; y la segunda la teoría de las descripciones que brinda una transformación de orden intelectual a la posterior obra Russelliana.

Consideramos importante hacer un seguimiento a su obra y en particular aquella que nos ha posibilitado un registro de su trasformación filosófica y matemática, en lo relacionado a su postura frente a lo que conocemos con certeza, y los mecanismos que la hacen "indudable". No sin olvidar la posibilidad de sospechar hasta de las "evidencias" que se guardan mejor en las matemáticas y la manera cómo podemos nombrarlas otorgándoles existencia y significado, apareciendo de esta manera la necesidad de una muy interesante y urgente depuración ontológica, que es el objetivo de este escrito.

En este trabajo se ha elegido la obra de Bertrand Russell en lo que comprende los periodos de 1900 a 1908, incluyendo su producción anterior y posterior única y exclusivamente como soporte a este periodo de reflexión y producción índole lógico-filosófica.

También hemos elegido autores y comentaristas especializados en la obra russelliana entre ellos Alejandro Garciadiego, C.W. Kilmister, Alexander Koyre, A.J. Ayer, D.J. O´cconor, Ruben S. Mejia y Alejandro Tomasini. Así como otros que se remiten a ella con el fin de elaborar algunas críticas y aportes a la problemática que están referenciados en la bibliografía; algunos que cabria mencionar: Francisco Consuegra, I.M. Bocheski, Susan Haack, José Hierro Pescador entre otros.

Los tres capítulos que componen nuestra propuesta son, Primero *El problema filosófico de la paradoja* este nos contextualiza en rasgos de lo qué es y no es una paradoja, su doble naturaleza de soberbia y creatividad de la razón y su invitación a ser solucionadas. Sus clasificaciones más frecuentes como también los distintos tipos de soluciones clásicas. El Segundo capitulo *Teoría de tipos lógicos y paradoja de clases* presenta la estructura de la teoría de tipos lógicos y la problemática de la aparición de la paradoja de clases, su vinculo con los problemas de los fundamentos de la matemática y el impacto que produjo al proyecto logicista de Bertrand Russell.

A partir de dicho desarrollo entramos al tercer capítulo *Teoría de las descripciones y la paradoja de clases* allí establecemos la caracterización general de la vida y obra de Bertrand Russell; nos detendremos en su transformación filosófica entre 1903 y 1908, y la importancia de la teoría de las descripciones (1905) como elemento esencial que permite el giro intelectual de corte ontológico, a su nuevo enfoque lingüístico y cómo éste nuevo enfoque enfrenta bajo otra óptica la "realidad" de la paradoja de clases y su solución.

Veremos cómo Russell, luego de atravesar por una etapa de síntesis pasa a una de análisis que le va a permitir concebir las proposiciones como objetos abstractos sin ningún tipo de objetividad; su abandono del mundo pitagórico-platónico hará que se deshaga de 'cosas' inexistentes, y planteara así a las proposiciones no como dotadas de ser, sino que deben ser consideradas como oraciones que expresen proposiciones, o como son llamadas por él descripciones determinantes o símbolos incompletos. Entonces un juicio es verdadero si corresponde a los hechos y falso cuando ocurre lo contrario. Así los hechos corresponden (existen) al mundo y los pensamientos existen en la cabeza, y las proposiciones intrusas y vagas que se suponían que eran algo no tiene ninguna existencia. Este giro es la invitación de Russell, a la filosofía analítica del siglo XX.

Capítulo Primero
El problema filosófico de la paradoja

"El hombre es, por natura, la bestia paradójica
un animal absurdo que necesita lógica"
Antonio Machado

En este capítulo nos ocupamos de lo que cabe entender por paradoja. Empezaremos ofreciendo una caracterización general de lo que vamos a entender por paradoja (sección1). Según ella, las paradojas se caracterizan por dos rasgos: (1) son construcciones lingüísticas desconcertantes que, a diferencia de los clásicos problemas lógicos, (2) son en sí mismas invitaciones a pensar cómo solucionarlas. En este orden de ideas, en la segunda parte del capítulo presentamos las clasificaciones más frecuentes que se encuentran de los distintos tipos de paradojas (sección 2) y en la tercera repasamos distintos tipos de soluciones que se han propuesto clásicamente para los distintos tipos de paradojas (sección 3).

1. Paradojas: qué son y qué no son

En esta primera sección del capítulo nos ocuparemos de tres tareas básicas. En primer lugar, intentaremos caracterizar las paradojas a partir de dos rasgos básicos: son la soberbia de la razón y también una de las fuentes de la creatividad (sección 1.1). En segundo lugar, procuraremos establecer qué es lo propio de las paradojas frente a otros tipos de expresiones lingüísticas con las que usualmente se las emparenta e incluso se las confunde: las antinomias y las falacias (sección 1.2).

1.1 Paradojas: soberbia y creatividad de la razón

A una primera mirada, las paradojas son construcciones lingüísticas que asombran o maravillan. Las paradojas se muestran como maravillosas, inusitadas, inesperadas. Por eso se las ha incluido entre los más difíciles retos mentales, tanto para el hombre común como para intelectual. Las paradojas han motivado la reflexión de filósofos y lógicos, y también han inquietado a matemáticos, antropólogos y artistas. Según esto, un primer rasgo característico de las paradojas es que en ellas aparece la formulación de una situación inquietante. Concretamente, en la paradoja nos inquieta una situación absurda que se nos aparece como plausible. Precisamente este rasgo es lo que queda capturado en la etimología de la palabra. 'Paradoja' (*παραδοξα*) significa, etimológicamente, aquello "contrario a la opinión (*δοξα*) [esto es], contrario a la opinión recibida y común" (Ferrater, 1979: 2488).

Para poder ahondar un poco más en este primer rasgo de las paradojas hay que destacar lo siguiente. A diferencia de los absurdos manifiestos y de las contradicciones patentes, las paradojas no generan rechazo inmediato y directo. Esto se debe, según se ha reconocido tiempo atrás, en que el desconcierto que encierran no es de carácter lógico. Aunque muchas veces la conclusión de una paradoja tenga la forma de una contradicción, no es un problema de naturaleza estrictamente lógica el que la paradoja encierra. Por eso resulta indispensable plantear la siguiente cuestión: ¿qué hay de especial en ese tipo de esquemas mentales desconcertantes que son las paradojas?

Para dilucidar la naturaleza de las paradojas las catalogaremos como construcciones lingüísticas que producen impacto de orden psicológico antes que lógico. El problema de la paradoja radica en cómo nos impacta, en las impresiones que nos causa. Desde un punto de vista lingüístico podemos decir que una construcción paradójica es una declaración asombrosa de las cosas, en la medida que su contenido nos parece una falsedad patente o un absurdo, pero nos parece también que es una declaración verdadera. Esto se aprecia bien en el siguiente ejemplo:

> Llegó una vez a un hotel pequeño un grupo de siete hombres un poco quisquillosos, que pidieron los acomodaran para pasar la noche, pero cada uno en una habitación. El hotelero admitió que sólo le quedaban seis, pero que creía poder alojarlos como deseaban. Se llevó al primer hombre a la primera habitación y le dijo a uno de los otros que le hiciera compañía un momento. Llevó al tercer hombre a la segunda habitación, al cuarto hombre a la tercera habitación, al quinto a la cuarta, y al sexto a la quinta. Volvió entonces a la primera habitación, llamó al séptimo hombre y lo condujo a la sexta habitación. (Northrop, 1977: 10)

Este es un típico caso en el cual se aprecian los dos aspectos enunciados. Veamos. En el ejemplo percibimos el carácter inquietante de la paradoja: ¡es asombroso que se ubiquen siete hombres en seis habitaciones, cuando se ha pedido explícitamente que se aloje sólo uno por habitación! Esta situación nos conduce a un estado de asombro, pues produce un choque con nuestros razonamientos más acostumbrados, ¡no puede ser cierto lo que se enuncia en la paradoja! ¡Tiene que ser falso! Por otra parte, la formulación del problema nos influye de tal manera que creemos que lo planteado en el enunciado es verdadero. El hotelero empezó colocando al primer hombre en la primera habitación, y prosiguió ubicando a cada uno de los restantes también en una habitación, hasta cumplir con lo solicitado por los siete, ¿cómo negarlo?

Dada la aparente contradictoriedad de la formulación, no somos capaces de afirmar inmediatamente que sea verdadera o falsa. No obstante, como hemos dicho, a diferencia de la contradicción manifiesta, la paradoja no genera un rechazo abierto, sino más bien una actitud exploratoria. Las paradojas penetran el curso habitual de nuestros pensamientos y lo suspenden, pero más allá todavía, nos mueven a buscar distintas maneras de superar la tensión que se genera entre nuestros pensamientos habituales (*δοξα*) y la desconcertante situación que ante ellos se presenta (*παρα-δοξα*). Para decirlo brevemente, la paradoja presenta lo absurdo como posible, e invita a restituirle al absurdo su lugar en el reino de lo imposible. En este sentido, la paradoja evidencia la soberbia de la razón: un pensamiento que choca contra sí mismo y se empeña tercamente en demostrar el carácter ilusorio de sus propios tropezones.

Pero la paradoja no sólo nos ayuda a ver este aspecto negativo del pensamiento, su terquedad. También nos ayuda a ver que su naturaleza no produce rechazo, sino una motivación constante que mantiene el reto de resolverlas, que nos invita a solucionarlas. Por eso las paradojas posibilitan situaciones creativas, siendo, en varias ocasiones, las responsables del avance de las matemáticas o de la ciencia. Podemos decir, hablando de un modo general, que las paradojas originan o producen pensamiento. En otros escenarios, la aparición de paradojas hace posible la visión de niveles contrastantes en la comunicación permitiendo casos como el humor, la ficción, el juego o la metáfora, enriqueciendo de esta forma, un mundo que de otro modo resultaría muy lineal, monótono y aburrido (Bateson, 1991: 310). Por eso podemos decir que el segundo rasgo característico de las paradojas es que son abiertas invitaciones a buscar su propia solución. Para ilustrar este segundo rasgo volvamos al ejemplo anterior.

En el ejemplo pudimos ver que la paradoja tiene dos aspectos relevantes que, conjuntados, nos resultan desconcertantes. El primer aspecto, nos reveló el asombro que producen, y el segundo nos mostró que lo planteado en el enunciado tiene apariencia de verdad. Ahora bien, el carácter de la paradoja no termina ahí, el segundo rasgo que las define es que nos invitan a solucionarlas. Veamos. El hotelero, inicia la ubicación de los siete hombres asignándole al primero la primera habitación y así consecutivamente con cada uno de ellos. Esto lo muestra la construcción del enunciado o así parece hacerlo. ¿Entonces en dónde se posa el artificio? En que uno de los siete hombres quedó sin habitación. Si recordamos, el primer hombre fue ubicado en la primera habitación, y se le dijo a uno de ellos que lo acompañara un momento; se ubicó al tercer hombre en la segunda, al cuarto en la tercera, al quinto en la cuarta, al sexto en la quinta y se llamó al séptimo para ser ubicado en la sexta, pero ¡el segundo se quedo sin habitación para dormitar esa noche! El hotelero audazmente cambió el segundo por el séptimo hombre manteniendo la secuencia numérica. Fue aquí donde no se pudo cumplir con la exigencia de los hombres que necesitaban hospedarse. El ejercicio que acabamos de hacer es una prueba de que en las paradojas es imposible detenerse; es imposible aquietarnos y quedarnos con este tipo de enunciados de aparente de verdad. Nuestra razón buscará irremediablemente el error, o la omisión. No obstante, jamás hay garantía de que podamos hallar la solución. Si en este ejemplo pudimos detectar la trampa, no es regla que toda paradoja halle su solución de la misma manera.

Según esta breve y modesta caracterización, las paradojas pueden definirse por dos rasgos básicos: (1) nos provocan un desconcierto psicológico, porque muestran como verdadero lo que no puede ser sino falso, y, no obstante, (2) no nos generan rechazo, sino que nos motivan a solucionarlas. Por eso nos arriesgamos a decir que las paradojas son la soberbia y la creatividad de la razón.

A pesar de la sencillez de nuestra definición, no está exenta de problemas. A decir verdad, la naturaleza de las paradojas, en cuanto construcciones lingüísticas, no siempre es fácil de definir. Una de las principales razones de ello es que suele mezclárselas y no definirlas abiertamente. En particular, es frecuente encontrar en la bibliografía que se las confunde con las falacias y las antinomias. Se hace indispensable entonces examinar brevemente a qué se debe la confusión y cómo manejarla.

1.2 Paradojas, falacias y antinomias

Los términos "paradoja", "antinomia", y "falacia" han sido utilizados con frecuencia con el mismo significado. Esta confusión se ha debido a que los tres términos designan expresiones lingüísticas que se caracterizan por su impacto psicológico más que propiamente lógico, y que, sin embargo, se usan típicamente en contextos argumentativos.

Precisamente ese rasgo, el impacto psicológico, es el que permite reunir los tres términos bajo un mismo carácter. Aquí intentaremos enfrentar esta dificultad, trazando algunos límites para no perdernos en peligrosos o ilegítimos caminos. En nuestra discusión, los tres términos se van a referir a construcciones lingüísticas que inquietan o sorprenden; pero ninguno va a presentar las mismas problemáticas. Veamos:

Para empezar, podríamos decir que, fuera del aire inquietante y de la persuasión psicológica, hay otro rasgo especial que podemos considerar común a las antinomias, las paradojas y las falacias: en cuanto expresiones lingüísticas, todas tienen una forma gramatical. Un camino para diferenciarlas es, entonces, examinar la forma gramatical que tiene cada una de ellas. Desde el punto de vista lingüístico, la paradoja puede darse en argumentos o en proposiciones; la falacia, por el contrario, solamente en argumentos y la antinomia solamente en conjuntos de argumentos.

Identifiquemos el primer caso. Aquí presentamos una variante del anterior ejemplo, pero solamente teniendo en cuenta proposiciones:

Un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno. (David Hilbert)

En este enunciado se expresa una versión coloquial de la paradoja cantoriana del infinito, según la cual hay un infinito más grande que otro. Si hay un infinito más grande que otro, y un hotel tiene infinitas habitaciones, siempre habrá posibilidad de hospedar a un huésped más. Desde un punto de vista gramatical, esta paradoja se presenta solamente en un enunciado, no en un argumento completo.

Un caso diferente es el de la falacia, estas construcciones lingüísticas solo se presentan en argumentos. Veamos el siguiente ejemplo.

1. El oro brilla.
2. Este cuchillo brilla.
3. Por lo tanto, este cuchillo es de oro.

Este argumento incurre en la falacia de afirmación del consecuente, que tiene la siguiente forma:

1. $(X)(Ox \rightarrow Bx)$
2. Ba
3. Por lo tanto, Oa

Cuando nos detenemos a examinar un razonamiento como este, vemos que otro matiz se hace presente. Es claro que tanto la premisa 1 como la premisa 2 son verdaderas. Gracias a esto ¡se esperaría que la conclusión del argumento también lo fuese! Sin embargo, nos encontramos con que a pesar de la verdad de las premisas la conclusión no es verdadera. El cuchillo no es de oro, a pesar de ser brillante. Por lo tanto, el argumento es inválido. La conclusión no se desprende de las premisas, aunque parece hacerlo.

Las falacias se definen clásicamente como los errores más comunes en la argumentación que, no obstante, pueden ser psicológicamente persuasivos. No obstante, a pesar de compartir este rasgo con las paradojas, en las falacias el impacto psicológico se disipa rápidamente en el momento en que se identifica que se ha llegado a un error lógico. Así, por ejemplo, se hace patente en el ejemplo que estamos considerando que aunque todo lo que es oro brilla, con ello se dice simplemente que basta saber que una cosa es de oro para saber que esa cosa brilla, o que si algo no brilla no es de oro.

Ahora bien, lo que se afirma en la conclusión es que puesto que un cuchillo dado brilla ese cuchillo es de oro. Pero esto no es lo que se afirmaba en las premisas. En ellas sólo se enunciaba que brillar era una condición necesaria para decir de algo que era de oro, pero en ella no se menciona que el brillar sea una condición suficiente para que podamos decir de algo brillante que está hecho de oro. El error lógico en el que se ha incurrido es tratar una condición necesaria como si fuera una condición suficiente. En esto consiste, precisamente, la falacia de afirmación del consecuente.

Pasemos ahora al tercer caso. Las antinomias son construcciones mucho más complejas que las falacias porque involucran al menos dos argumentos. Así pues, podemos decir que su primera característica específica es que se dan sólo para conjuntos de argumentos, no para argumentos simples, como ocurre en el caso de las falacias, o para enunciados aislados, como puede ser el caso de las paradojas.

Ahora bien, lo característico de las antinomias es que los dos argumentos que las forman son bien vistos por la manera común y acostumbrada de nuestro pensar, aunque en su conjunto conduzcan a conclusiones contradictorias. Consideremos un ejemplo.

> Euatlo era un joven sin recursos económicos que deseaba estudiar con Protágoras con la idea de dedicarse a la abogacía. Protágoras que apreciaba la inteligencia del joven, le propuso que asistiera a sus clases y que una vez ganara su primer pleito ejerciendo de abogado, le abonara sus honorarios. El joven estuvo de acuerdo en el arreglo. Euatlo, efectivamente, asistió a todas las lecciones pero, cuando acabo su formación, anunció que finalmente no se iba a dedicar a la abogacía, sino a la política, y que por lo tanto, no estaba en obligación de pagar sus honorarios, pues jamás ganaría un pleito. Protágoras amenazó al estudiante con un pleito y el joven argumento:
> Si vamos a juicio, Protágoras, y yo gano, por este mandamiento judicial, no te tendré que pagar; si pierdo, dado que aún no habré ganado mi primer pleito, y esta era condición, tampoco tendré que pagar. Así pues, Protágoras, no te conviene ir a juicio: seguro que lo perderás. A lo que Protágoras replico:
> Si vamos a juicio, Euatlo, y yo gano, por este mandamiento judicial, me habrás de pagar; si pierdo, tú habrás ganado tu primer pleito y por razón de nuestro antiguo pacto, me habrás de pagar. (Kneale, 1980:)

¿En donde se posa la contradicción en nuestro ejemplo? En que, en el litigio entre discípulo y maestro, la argumentación que elabora cada uno apunta, por un lado, al no pago de honorarios, y, por otro, al pago de los mismos. Lo curioso es todavía aquí la antinomia guarda para sí una especie de turbulencia psicológica que no se diluye fácilmente. Hay un manifiesto problema lógico, pues hemos llegado a una contradicción; sin embargo, la perturbación psicológica sigue presente.

Retomando la diferenciación que hemos venido construyendo entre los términos 'paradoja', 'falacia' y 'antinomia', podemos sintetizar diciendo lo siguiente. Afirmamos que una paradoja se puede presentar en una proposición, al igual que un argumento. No obstante, no podemos decir que una proposición puede ser falaz, pues una falacia es siempre un argumento. De la misma manera, una antinomia no incluye una sola proposición y tampoco nos pone a batallar por un argumento sino por conjuntos de argumentos. Así pues, aunque antinomias, falacias y paradojas compartan un aspecto de carácter psicológico, el desconcertante impacto que producen, desde un punto de vista gramatical son diferentes. Veamos esto en el siguiente cuadro:

Construcción lingüística	**Aspecto Psicológico**	**Aspecto Gramatical**
Paradoja	hay impacto psicológico	se presenta en proposiciones y argumentos
Falacia	hay impacto psicológico	se presenta solamente en argumentos
Antinomia	hay impacto psicológico	se presenta solamente en conjuntos de argumentos

Cuadro 1
Diferencias gramaticales entre paradoja, falacia y antinomia

Esta clasificación muestra que no hay distinción precisa y una exacta división entre los tres términos. Podría ocurrir que, si tomamos una proposición paradójica como una premisa de un argumento, el argumento en su totalidad se hiciera falaz. Si esta misma proposición la ponemos en un contexto argumentativo más amplio, es probable que conduzca a antinomias. La posibilidad de desdibujar los límites entre los tres términos radica en que responden a una misma característica: su impacto psicológico, como indicamos en el *cuadro 1*.

Un ejemplo de esta situación de mezcla entre diferentes problemas de tipo lógico se presenta muy bien en el caso de las falacias. Ningún argumento falaz incurre en una sola falacia. Si las falacias estuvieran perfectamente delimitadas, se podría afirmar que un argumento dado falla y se puede determinar definitivamente el tipo de falacia en que incurre. Pero eso no pasa, todo argumento falaz comete varios errores lógicos al mismo tiempo. Así, por ejemplo, se aprecia si consideramos el siguiente argumento:

> …La felicidad de cada persona es un bien para esa persona; por lo tanto, la felicidad general es un bien para el conjunto de todas las personas. [John Stuart Mill, *El utilitarismo*]

En este ejemplo nos encontramos un argumento claramente falaz. ¿En qué consiste su error? Tenemos distintas alternativas. Por ejemplo, alguien podría decir que se trata de una *generalización indebida*. Que la felicidad sea un bien para uno, no quiere decir que la felicidad de todos sea un bien para todos. Bien podría suceder que la felicidad de un psicópata se lograra cometiendo delitos atroces, y entonces su felicidad no es un bien para el conjunto de las personas. Pero esta no es la única alternativa. Alguien podría decir que el error es más bien estar haciendo *atribuciones incorrectas de propiedades*. La felicidad es algo que puede atribuirse correctamente a una persona, pero, excepto por generalización estadística, no puede decirse que un conjunto sea feliz. ¿Puede atribuírsele a un conjunto las mismas propiedades que tienen sus individuos? No parece esto ser correcto. ¡Los leones tienen melena, pero el conjunto de los leones no tiene melena! Todavía podríamos considerar otra opción y que alguien dijera que el problema es que *el término 'felicidad' se ha utilizado equívocamente*, significando una cosa en la premisa y una cosa distinta en la conclusión. La felicidad de un grupo es apenas homónima a la felicidad de una persona. No se dice 'feliz' de la misma manera en ambos casos.

Así pues, los errores lógicos en que incurre una construcción lingüística son, por naturaleza, fuentes de confusión; porque una vez cometido un error se generan otros varios que terminan corroyendo la construcción en su conjunto. Por eso, naturalmente, una paradoja o una imprecisión terminológica puede terminar ocasionando falacias y antinomias. No es de extrañar que se las suela confundir.

Recapitulemos. Intentar precisar los términos 'paradoja', 'falacia' y 'antinomia', nos ha conducido en la necesaria disposición de algunas líneas que demarcan distinciones. Dichas distinciones aparecen cuando tomamos la forma gramatical como criterio. No obstante, si bien hay diferencias gramaticales claras entre ellos, las mezclas van a seguir apareciendo en el transcurso de nuestro estudio por cuanto no existe un límite preciso entre los términos, cuando se toma el impacto psicológico como criterio. Por eso, tras las aclaraciones previas, seguiremos utilizando el término ‘paradoja’ en un sentido genérico que engloba todos estos tipos de problemas lógicos de alto impacto psicológico, como es costumbre en la bibliografía.

2. Tipos de paradojas

En esta sección nos ocupamos de la tarea de distinguir las paradojas a partir de las diferencias planteadas por Quine en su libro *The Ways of Paradox*. Según él, las paradojas se pueden ver desde tres categorías: la primera de ellas recibe el nombre de paradojas verídicas; (2.1) la segunda, el de paradojas falsídicas (2.2) y la tercera de antinomias (2.3). Examinamos cada una de ellas con su correspondiente ejemplo. Por último abordamos la distinción entre paradojas lógicas y paradojas semánticas (2.4).

2.1 Paradojas verídicas

Quine sostiene que las paradojas pueden dividirse en tres categorías. La primera recibe el nombre de paradojas verídicas; éstas se presentan cuando producen un resultado que parece absurdo aunque su demostración sea verdadera: lo que se proponen cuando aparecen es establecer que lo enunciado es verdadero. Como ejemplo tenemos el siguiente:

> Federico ha llegado a la edad de 21 años pasando sólo por su quinto cumpleaños. Algunas circunstancias conspiran para hacer esto posible. Federico ha nacido un 29 de febrero y debido a esto, ¡solo ha estado en cinco cumpleaños!

La edad es calculada por el tiempo transcurrido, mientras que el cumpleaños debe coincidir con la fecha de su nacimiento; y febrero 29 es una fecha que no se da cada año. Dado que la situación de Federico es posible, ¿dónde está lo paradójico? Simplemente en su inicial aire de absurdo. Quine afirma que no se puede reducir la palabra paradoja a los casos en los cuales lo que se describe es cierto. Propone, entonces, llamar a estos casos paradojas verídicas o paradojas “que dicen la verdad” (Quine, 1966: 2). La paradoja de

Federico es una paradoja verídica si la tomamos no como algo dicho sobre Federico, sino como una verdad de un hombre que puede tener 5 años cumplidos cuando ya lleva viviendo veintiuno.

2.2 Paradojas falsídicas

La segunda categoría establecida por Quine recibe el nombre de paradojas falsídicas; éstas se presentan cuando instauran un resultado que no solamente parece falso sino que también lo es cuando se demuestra. En nuestros términos presenta una falacia en la demostración; entonces son aquellas que no sólo parecen absurdas en el primer momento, sino que además son falsas. Quine dice al respecto: “Las típicas paradojas falsas son del tipo gracioso: 2=1. La mayoría de nosotros ha escuchado una paradoja así” (Quine, 1966: 3). Lo que se proponen cuando aparecen es establecer que lo enunciado es falso. Como ejemplo del segundo caso tenemos el siguiente:

A este ejemplo lo conocemos con el nombre de “Aquiles y la tortuga” y fue planteada por Zenón de Elea. Aunque no es estrictamente una paradoja, las clasificaciones generalizadas la han ubicado como tal y afirman:

> ¡El más lento nunca será alcanzado en una carrera por el más veloz! Pues se hará necesario que el perseguidor llegue primero al lugar del que ha partido el perseguido, de manera que el más lento lo precederá necesariamente siempre, por alguna distancia. La conclusión del argumento, es pues, que el más lento no es alcanzado”. (Mondolfo, 1942: 85)

De igual manera, el argumento de Zenón afirma: para que Aquiles alcance a la tortuga, tendrá que recorrer la mitad del camino y antes de esto la mitad de la mitad y así hasta el infinito, por lo que jamás alcanzará a la tortuga, “asume la falsedad el argumento de Zenón, de que no pueden recorrerse infinitos puntos o tocar uno a uno puntos infinitos en tiempo finito, pues el tiempo también es infinito en este sentido” (Mondolfo, 1942: 86).

Aquí la paradoja de Zenón, más allá de los dos personajes ficticios, expone la absurda proposición de que mientras un corredor permanece corriendo, aún lentamente, otro corredor nunca podrá alcanzarlo (Quine, 1966: 5). Cuando se trata de hacer este argumento algo más explícito, la falacia que emerge es la equivocada noción de una infinita sucesión de intervalos de tiempo que puede seguirse agregando por la eternidad. Cuando realmente una infinita sucesión de intervalos de tiempo es así tomada, los siguientes intervalos llegan a ser más cortos y más cortos, y la totalidad de la sucesión puede, sin embargo, tomarse como un tiempo infinito.

Zenón de Elea es el fundador de este tipo de argumentos paradójicos que se van a convertir posteriormente en argumentaciones metodológicas, conocidas, con el nombre de *reducción al absurdo*; éste es un método cuyo principal interés se centra en demostrar que una contradicción en una proposición implica consecuencias imposibles o absurdas; es así como decimos que en una paradoja falsa, hay siempre una falacia en el argumento. Una falacia es un razonamiento lógicamente incorrecto, aunque psicológicamente pueda ser persuasivo o convincente, ocultando de esta manera su incoherencia interna. Recordemos que los razonamientos falaces, no son falaces por llegar a una conclusión falsa, sino por un error en su procedimiento. Puede decirse que una falacia es un tipo de razonamiento en que la conclusión no se deriva necesariamente de las premisas, aunque parece hacerlo; pero la conclusión pretendidamente, tiene que parecer absurda y ser ciertamente falsa.

2.3 Antinomias

Las paradojas del tercer tipo, llamadas por Quine antinomias, se manifiestan como declaraciones que llegan a resultados contradictorios, se declaran como si se estuviesen aplicando acertadamente medios admisibles de razonamiento pero violan al interior las reglas aceptadas; ellas son auto-contradictorias. Según Quine una antinomia se presenta cuando hay una contradicción entre principios racionales produciendo una forma “legitima” del razonar. Estas establecen un patrón de comportamiento confiable, donde al interior yace un fallo que debe ser removido o revisado.

Un ejemplo de antinomia es la paradoja descubierta por Kurt Grelling en 1908, que se refiere a la existencia de adjetivos heterológicos (no verdaderos de sí mismos) esto es, los pertenecientes a lo no autodescriptivo y los referentes a lo autodescriptivo, que son llamados autológicos (verdaderos de sí mismos). Para entrar en materia observemos los siguientes ejemplos: Autológico se refiere a las expresiones de la forma: "**M**" es **M**. El adjetivo "corto" es corto, el adjetivo "español" es español, el adjetivo, "adjetivo" es adjetivo, el adjetivo "polisílabo" es polisílabo. Cada uno de estos adjetivos en terminología de Grelling es autológico o autodescriptivo. En otros términos, autológicas son aquellas palabras que en sí mismas son lo que la palabra significa.

Las expresiones heterológicas son las que no se refieren a sí mismas, esto es, expresiones de la forma: "**M**" no es "**M**". El adjetivo largo, que no es largo, 'monosílabo' que no es monosílabo. Heterológicos son términos que no son en sí mismos lo que significan.

En este contexto se plantea el siguiente problema: ¿Es el término heterológico, heterológico? Tenemos: Si "heterológico" es heterológico, se refiere entonces a sí mismo. Pero si "heterológico" es autológico, no se refiere a sí mismo. Entonces si todo término se refiere a sí mismo es autológico, luego heterológico es autológico. Por consiguiente todo término que no se refiere a sí mismo es heterológico, luego heterológico es autológico. Entonces:

- "Heterológico" es heterológico si y sólo si es autológico.
- "Heterológico" es autológico si y sólo si es heterológico.

Si definimos el adjetivo "heterológico" y preguntamos si es heterológico, entonces de hecho podemos tomar la paradoja sin el adjetivo y su propia definición. Heterológico es definido con el significado de 'no verdadero de sí mismo', entonces, podemos preguntar si la frase adjetivada 'no es verdadera de sí misma' es verdad de la misma frase; por lo tanto lo es si y sólo si no lo es, de aquí que, lo es y no lo es, resultando así la paradoja. La paradoja de Grelling muestra que su proposición es en sí misma contradictoria, al decir que el adjetivo es y no es verdadero de sí mismo.

En este momento la paradoja de Grelling nos abre un espacio pertinente para introducir el término de paradojas semánticas. De estas salen a flote propiedades autorreferenciales; "son falacias que surgen de la violación del principio de circulo vicioso" (Haack, 1991: 161) que involucra criterios de verdad y de falsedad. Este tipo de construcciones surgen por autorreferencia del lenguaje; cuando decimos que heterológico es heterológico, estamos diciendo que es verdadero de sí mismo, pero por definición inicial si es verdadero de sí mismo, será falso de sí mismo, por consecuencia será a su vez autológico. Por otra parte, si heterológico es autológico será falso de sí mismo y en consecuencia será verdadero de sí mismo o sea heterologico.

> "Otras paradojas involucran "verdadero (falso) de…" más bien que "verdadero falso". "Heterologico" significa "no verdadero de sí mismo"; así, por ejemplo, "alemán", "largo", "cursiva" son adjetivos heterológicos, mientras que "castellano", "corto", "impreso" son autológico, verdaderos de sí mismos. Ahora bien, ¿"heterologico" es no es verdadero de sí mismo; por tanto, no es heterologico. Pero, si no es heterologico, es verdadero de sí mismo; por tanto, es heterologico. Así pues, "heterologico" es heterologico sii "heterológico" no es heterológico". (Haack, 1991: 159)

En opinión de Quine, siguiendo a Russell, para poder salir de antinomias autorreferenciales es necesario desmantelar o restringir el principio de autorreferencia, como es el caso de falsedad de sí mismo (Quine, 1966: 4-5).

> Cualquier solución de una antinomia, esto es, la eliminación de la contradicción, consiste por lo tanto, en hacer los cambios apropiados en el procedimiento racional. Al menos una de las presuposiciones o reglas debe a pesar de su plausibilidad ser suprimida o restringida, de tal manera que no sea posible llegar a dos conclusiones contradictorias. (Carnap, 1947: 56)

¿Cómo lograríamos esto? Lo logramos erradicando el principio implícito "no verdadero de sí mismo" tanto en lo autológico, como en lo heterológico. Si queremos que sea desmantelado se debe desistir de la expresión "verdad de" que es nociva y sin sentido. Esto último debe ser usado como un enunciado especial para hablar acerca de las facultades que hacen los adjetivos a las cosas.

Este examen de la paradoja de Grelling nos abre un camino metodológico bastante útil para solventar el problema de las paradojas en general. El reto en general es movernos en la ruta que nos conduce a encontrar problemas de autorreferencia. La solución a las paradojas, cuando incurren en este tipo de problemas es, entonces, eliminar el principio de autorreferencia.

2.4 Paradojas semánticas y paradojas lógicas

Contemporáneamente suelen distinguirse dos tipos de paradojas: las paradojas semánticas y las paradojas lógicas. Las primeras se encuentran en frases o enunciados que se pueden construir de acuerdo con reglas gramaticales y semánticas, pero no pueden recibir de forma coherente un valor de verdad. La denominación "paradojas semánticas" se debe, precisamente, a que el problema de autorreferencia que encierran se da por el uso de términos semánticos en su construcción, por ejemplo los términos 'verdadero' o 'falso'. Por eso algunos sostienen que son antinomias que implican directamente la noción de verdad. El caso más famoso de paradojas semánticas es la paradoja del mentiroso, cuya formulación en el caso de Epiménides es: "esta oración es falsa". Si la oración en cuestión es verdadera, entonces es falsa y si es falsa entonces es verdadera, presentándose de esta manera una contradicción evidente.

Con el nombre de "paradojas lógicas" se designa a un conjunto de acertijos mentales planteados más o menos desde el siglo XIX que comparten el notable rasgo de la autorreferencia, pero que no hacen uso del vocabulario semántico ni metalógico (Bochenski 1985, 403). No entraremos a explicar ni a dar ejemplos de ellas pues nos ocupan por entero en el segundo capítulo. Baste, por ahora recordar la referencia que ya hemos hecho a la paradoja cantoriana del infinito y a su coloquial versión en la paradoja del hotelero. Para Cantor, puede haber infinitos más grandes que otros. ¿Cómo afirmar esto si el infinito es inconmensurable? Si no sabemos cuál es su tamaño, ¿cómo sabemos que un infinito más grande que otro? Además, si es infinito, ¿cómo puede haber algo más grande que él? En el caso coloquial de la paradoja del hotelero el problema es cómo un hotel de infinitas habitaciones puede hospedar siempre a un cliente más, lo cual supone que el número de clientes es mayor que el de habitaciones, ¡aún siendo éstas infinitas en número!

No obstante, como hemos dicho, la clasificación de las paradojas en semánticas y lógicas es contemporánea y se ha introducido para sistematizar las paradojas encontradas a partir del siglo XIX y algunas otras clásicas. En la historia de la filosofía y de la lógica se han reconocido muchos más tipos de paradojas que estos dos. Se ha visto y hemos visto, que hay distintos tipos de argumentos que cabrían llamarse paradójicos. A partir de este momento recorreremos otros tipos de argumentaciones sorprendentes, con matices que se han simplificado o simplemente se han mostrado como incorrectos. Para abordar este tema no procederemos a ser unilaterales en donde exclusivamente se van a reconocer dos tipos de paradojas, sino que también examinaremos otras tipologías, e identificaremos el problema como una situación de perplejidad, de asombro, e inquietud y para ello es determinante no detenernos solamente en los aspectos semánticos que contemporáneamente examinan a las paradojas pero tampoco vamos a olvidar en qué consiste esta problemática. En lo que sigue nos detendremos en una clasificación legada de la Edad Media, que reconoce dos tipos de paradojas: los insolubles y los sorprendentes.

2.5 Tipos clásicos de paradojas

2.5.1 Insolubilia o admirabilia

La bibliografía sobre los insolubles comienza a aparecer en los inicios del siglo XIII y va hasta finales de la Edad Media. Los insolubles fueron originalmente ciertos tipos de oraciones autorreferenciales, paradojas semánticas como la tan conocida paradoja del mentiroso. Sin embargo pocos autores trataron de dar una definición rigurosa, pues, como señala Bochenski, a pesar de haber una mención del tema por parte de muchos, en general se seguía el planteamiento y la solución propuesta por Aristóteles (Bochenski, 1985: 251ss.).

Tres períodos pueden ser distinguidos en la bibliografía medieval con referencia a los *insolubilia*. El primero corresponde a los comienzos del siglo XIII hasta el año de 1320. El segundo al período más original de la presencia de los insolubles que fue desde 1320 hasta el momento de la muerte negra (1347-50); y por último, luego de 1350 cuando se inicia un período de refinamiento y elaboración de los *insolubilia*.

Los trabajos más reconocidos sobre las paradojas fueron los recogidos por autores medievales como: Gualterio Burleigh, Tomas Bradwardine, Guillermo de Shyreswood, en escritos conocidos con el nombre de *Insolubilia*, desarrollados anteriormente por autores tan reconocidos como: Guillermo de Ockam y Alberto de Sajonia, referidos en sus textos sobre lógica. Quizás ya el propio nombre de insolubilia fue conocido por Alberto Magno, que las define en sus *Elenchi* de la siguiente manera:

> Llamo 'insolubles' a aquellas (sentencias) tales que, dadas cualquiera de las partes de la (disyunción) contradictoria, se deduce siempre la contraria…Por ejemplo alguien jura que jura en falso; jura o verdad o no (verdad). Si jura que jura en falso y (con ello) jura la verdad, no jura en falso, (como) nadie jura en falso mientras él jura la verdad, no jura en falso: Mas se había supuesto que juraba en falso. Mas si no jura en falso y (con ello) jura que jura en falso, no jura la verdad, luego jura en falso: pues de otra manera no juraría la verdad al jurar que jura en falso. (Bochenski, 1985: 250)

La problemática sigue siendo tomada por los autores medievales hasta el siglo XIII (Lógica Escolástica). Parece ser que el problema radica en la no distinción de acto signado y acto realizado (en términos modernos: uso y mención). "La lógica medieval se entretuvo excesivamente y por puro virtuosismo dialéctico en los insolubilia. No se trata de problemas o proposiciones insolubles, sino de muy difícil solución. Los insolubilia son paradojas semánticas ya estudiadas y no resueltas por los lógicos estoicos, razón por la cual algunos las denominaron *imposibilia.*

Otra perspectiva fue la de considerar las paradojas como *admirabilia*. Cicerón define la παραδοξα como *admirabilia*, como cosas que causan admiración. Concretamente las define como una proposición que ni es un insoluble ni es un imposible, sino un admirable, es decir, una proposición que causa asombro y choque mental por la contraposición que se percibe entre sus elementos, y que aparece como pudiendo ser como dice que es. Esta última definición es la que más hemos acogido nosotros en este trabajo.

Según esta última definición, "la paradoja es una forma riquísima de expresión y produce chispazos mentales que iluminan fulminantemente aspectos de la realidad que sin ella quedarían opacos." (De Alejandro, 1970: 214). La gran mayoría de *Insolubilia* son paradojas semánticas, ya propuestas y trabajadas por los estoicos y otros autores pertenecientes a la Antigüedad, de la típica construcción de "el mentiroso".

En el siguiente cuadro abreviamos los distintos tipos de paradojas expuestos en esta sección.

Tipo de paradoja	**Característica**
Verídicas (Quine)	Procuran establecer algo verdadero
Falsídicas (Quine)	Procuran establecer algo falso
Antinomias (Quine)	Encierran una contradicción manifiesta
Semánticas (Russell)	Se basan en la autorreferencia a partir de términos semánticos
Lógicas (Russell)	Se basan en la autorreferencia a partir de términos no semánticos
Insolubilia (Escolástica)	Acertijos clásicos reducibles a "el mentiroso" tratados al modo aristotélico
Imposibilia (Escolástica)	Acertijos clásicos no solucionados por los estoicos
Admirabilia (Escolástica)	Definición de la paradoja en términos de su impacto psicológico

Cuadro 2
Tipos de paradojas

Hasta el momento hemos asumido una definición de paradoja que involucra dos aspectos (Sección 1). Por un lado, son construcciones lingüísticas asombrosas, desconcertates, inquietantes. No obstante, a diferencia de los absurdos y los crasos errores lógicos, las paradojas no generan rechazo sino que motivan un esfuerzo por solucionarlas. En la sección que estamos concluyendo hemos explorado los esfuerzos que se han hecho por definir en qué consiste lo desconcertante, asombroso inquietante de las paradojas (sección 2). Para terminar el capítulo resta destacar los esfuerzos creativos por resolver las paradojas (sección 3).

3. Tipos de soluciones a las paradojas

Como hemos dicho, el cometido de esta sección final es presentar de un modo breve los distintos tipos de soluciones clásicas que se han ofrecido para los distintos tipos de paradojas que expusimos en la sección anterior. Nos limitaremos a las soluciones clásicas más importantes sólo como marco de referencia para los esfuerzos técnicos de la lógica más reciente que nos ocuparán en el segundo capítulo, pues, como ha señalado un importante historiador de la materia:

> El viejo problema de las *antinomias semánticas* tomó forma durante este periodo [la escolástica] en tratados realmente colosales. Se plantearon numerosas antinomias y fueron propuestas más de una docena de soluciones distintas, que encierran casi todo lo esencial que en este terreno hasta hoy se conoce. (Bochenski 1985, 264)

3.1 Resolución en términos de nulidad

Puesto que, como hemos dicho, la mayor parte de las paradojas consideradas durante la Edad Media se podían reducir a la del mentiroso, la mayor parte de las soluciones hacen referencia a ella. La primera solución influyente a dicha paradoja se conoce como la solución en términos de o nulidad. En esta teoría el que pronuncia un insoluble "nada dice". Al decir que "esta frase es verdad" es falsa, no se genera una autorreferencia, como si el predicado 'es falsa' se aplicase a la oración entendida como sujeto de la oración, sino que la anula. Por eso todo aquel que incurre en la paradoja simplemente nada dice. Esta solución es decretar la preferencia de la paradoja como un sinsentido (Bochenski 1985, 254).

El texto más tempranamente conocido adopta este punto de vista y por esto fue llamado a estar de acuerdo al "juicio común". Sin embargo, esto prontamente muere y parece no haber revivido hasta David Derodon en el siglo XVII. A mediados del siglo XIII un texto atribuido a William de Sherwood discute muchos puntos de vista que pueden ser considerados versiones de nulidad, incluyendo una teoría en la que los insolubles por razones semánticas fallan a la hora de construir la oración, así el que pronuncia "nada dice".

3.2 Solución en términos de secundum quid et simpliciter.

Una segunda aproximación, la más común, intenta tratar los insolubles *como falacias* al confundir lo que es verdadero solamente en un cierto aspecto con lo que es verdadero absolutamente (secundum quid et simpliciter). Aristóteles discutió tales falacias en las *Refutaciones sofísticas*, y brevemente alude al problema de si el mismo hombre puede decir al mismo tiempo lo que es tanto falso como verdadero. La autorreferencia propia de la paradoja del mentiroso se debe a que se trata como simple lo que es complejo. En la frase "esta oración es falsa" hay dos elementos en juego y no uno sólo: la oración y el juicio que se hace de ella. Tratar los dos como si fueran uno es lo que causa la autorreferencia y, por lo tanto, la solución es dividir lo que falazmente se ha unido.

El casi universal testimonio de los existentes tratados del siglo XIII indica que la literatura medieval se salió de la especulación sobre este pasaje. Todos excepto dos de esos tratados adoptan variantes de esta aproximación, algunas veces combinándolo con otros puntos de vista. Sin embargo, los insolubles no responden muy bien al patrón de falacia *secundum quid et simpliciter*, así que tales aproximaciones fueron siempre forzadas. Ellas parecen haber muerto alrededor de 1330 con Richard Kilvington, a pesar de que un cierto Henry de Inglaterra tomó este punto de vista, tal vez mucho más tarde.

3.3 Solución en términos de transcasus

Una tercera teoría aparece quizás fuera de intentar hacer que los insolubles respondan con lo que Aristóteles dice sobre las falacias. De acuerdo con este punto de vista, los verbos en tiempo presente en los insolubles se refieren al tiempo justamente de la enunciación insoluble, así que "yo estoy diciendo una falsedad" a pesar de su gramática, significa "yo dije una falsedad hace un momento". Los insolubles son verdaderos o falsos dependiendo de si el hecho: uno dijo una falsedad en ese tiempo inmediatamente anterior. Walter Burley refiere a tal un punto de vista como *transcasus*, y lo rechaza.

El texto anónimo en Braakhuis adopta esta posición y la enlaza con un rechazo del autorreferimiento. Bradwardine, también, trata este punto de vista como una variante de la teoría de los restrictores (restingentes), que niega la autorreferencia. Los restrictores establecen que "una parte no puede suponer la totalidad de la cual ella es parte" (un término para la oración en la cual éste ocurre). Algunos excluyen de consideración tipos más generales de ciclos referenciales. Pueden distinguirse dos grupos de restrictores, unos pueden ser definidos, otros excluidos de autorreferencia, en todos los casos la mayor parte están sobre la base de malos argumentos. Ellos rápidamente dieron a entender que este fuerte punto de vista prevenía cosas inocuas tanto como la autorreferencia viciosa. Otros permiten la autorreferencia en algunos casos, pero no en insolubles, ellos no dan ninguna vía muy informativa para distinguir tales casos.

3.4 Solución en términos de condición de verdad

Bradwardine presenta un sobreviviente de los casos de *transcasus* y otros puntos de vista. Con él la bibliografía de los insolubilia entró en su segunda y más productiva fase. Bradwardine parece haber sido el primero en formular cuidadosamente y tomar seriamente la teoría de que los insolubles no solo significan o implican que ellos sean falsos, sino también que ellos son verdaderos.

Algunos llegaron más lejos y dijeron que todas las oraciones significan o implican que ellas son verdaderas. Desde que la oración sea verdadera, todo lo que ella significa o implica debe ser de ese modo, y nos dice que los insolubles son ciertos solamente si ellos son tanto verdaderos como falsos. En este punto los insolubles son falsos y ninguna paradoja puede ser derivada.

Variaciones de esta aproximación fueron adoptadas por muchos autores. En verdad, ello viene a ser una de las principales tradiciones en el siglo XIV. Las expresiones directo y significación consecutiva que uno ve algunas veces en la literatura de los *insolubilia* pertenecen a esta tradición. Sin embargo, pedir que las oraciones signifiquen o impliquen su propia verdad, haría ver la teoría como una argumentación que se orienta a mostrar su validez solamente para el caso o la situación en particular que se quiere defender.

3.5 Solución en términos de autofalsificación

Roger Swineshead, escribiendo brevemente después de Bradwardine, tomó un acercamiento diferente. Para él, una oración verdadera es una que no solo corresponde a la realidad, sino que también no se falsifique a sí misma. Una oración falsa es una que menos representa a la realidad o algo más, "se falsifica así misma". Una oración se falsifica a sí misma sólo en el caso que sea relevante (pertinente) a inferir que ella es falsa.

Esta noción de "relevancia" es un complejo e importante punto para el estudio. Los insolubles en todo caso salen a falsificarse a sí mismos; de este modo lo insoluble en "esta oración es falsa" es simplemente falso, y la paradoja no emerge. Uno no puede afirmar que desde esa perspectiva es exactamente lo que la oración significa, y debe ser verdad después de todo. Para Swinshead, la verdad requiere más que eso.

Swinsdehead dedujo tres famosas conclusiones de sus estudios; ellas son el tópico de muchas controversias futuras: Primera, "hay falsedad en algunas oraciones". Segunda, "en alguna consecuencia formal, lo falso sigue de lo verdadero", es decir, "lo consecuente es falso", sin embargo tanto el antecedente como el consecuente de esta consecuencia es falso. Ahora bien, tanto el antecedente como el consecuente corresponde a la realidad, la posterior se falsifica a sí misma y la anterior no.

Para muchos medievales, esta es la oración soporte de valor de verdad. Swineshead dice explícitamente que aunque las consecuencias válidas no necesitan preservar la verdad, ellas continúan con la propiedad de correspondencia a la realidad. Tercera, en el caso de los insolubles "dos opuestos mutuos son falsos al mismo tiempo si solo si esta oración es falsa" aunque falso, corresponde a la realidad. Sería contradictorio si se dice la "oración no es falsa".

Swineshead distinguió la noción de verdadero de la noción de correspondencia a la realidad. Si, cuando las dos fueron identificadas aparecen paradojas que envuelven verdad y falsedad, ahora bien uno puede sospechar que las paradojas están ahí en la noción de correspondencia, aunque ellas no serán expresadas en términos de verdad y falsedad. Swineshead discute también estas paradojas, y parece decir que ellas no son ni verdaderas ni falsas. Pero los detalles son oscuros y no está claro que él pueda manejarlas adecuadamente. El punto de vista de Swineshead fue atacado por William Heytesbury en su *regulae solvendi sophistamta* aunque ello fue adoptado en una amplia y algunas veces modificada forma por Paul de Venice y Jhon de Celaya, y por muchos autores en el siglo XVI.

3.6 Solución en términos de obligaciones

La propia teoría de Heytesbury fue más influyente. De acuerdo con él los insolubles deben ser tratados en el contexto de obligaciones, las condiciones codificadas de disputa formal escolástica. El resultado principal de su aproximación es que sin oración, bajo un juego de circunstancias o hipótesis (casos) que la hacen insoluble, puede significar en forma exacta tal como lo hace comúnmente; el asumir que ello puede ser así, es lo que es responsable para las paradojas. De este modo, en un caso la oración significa como ordinariamente lo hace la significación adicional, como está relacionada con la ordinaria, diferentes respuestas para lo insoluble son apropiadas. Heytesbury formula su posición en cinco reglas gobernando una que responda cuando lo insoluble aparece o emerge en una disputa de obligaciones (obligationibus).

Uno de los llamados de Heytesbury probó ser especialmente polémico: Cuando el oponente en una disputa no especifica una significación adicional de insolubles el que responde no tiene que especificarla. Heytesbury había simplemente fallado al responder la más obvia pregunta, lo que hizo que su teoría creciera. ¿Cómo la significación de una frase en circunstancias insolubles difiere de su significación ordinaria?

Algunos trataron de responderla por él, diciendo que los insolubles, además de su significación ordinaria significan que ellos son verdaderos, este movimiento trae las dos tradiciones provenientes desde Heytesbury y Bradwardine.

El enunciado de Heytesbury, que las oraciones en circunstancias insolubles no significan lo que ordinariamente significan, tiene importantes consecuencias. Para la significación de oraciones habladas o escritas depende de la voluntaria adopción de convenciones. Si las oraciones significan diferente en circunstancias insolubles, entonces debe ser porque una nueva convención ha sido voluntariamente adoptada pero de hecho eso es lo que raramente sucede. Heytesbury considera esta objeción, y admite que no tiene una respuesta satisfactoria. De nuevo, para más autores, el lenguaje mental significa por naturaleza, no por convención. De aquí las oraciones mentales siempre significan en la misma manera, nunca otra como ellas "ordinariamente" significan. Esto sigue de la teoría de Heytesbury, entonces, que ahí no hay insolubles en el lenguaje mental.

3.7 Solución en términos de la noción de lenguaje mental

Esta solución probablemente fue por especulación sobre este hecho que Gregori de Rimini y Peter de Aily fueron guiados y basados en sus propias teorías de insolubles sobre la noción del lenguaje mental. Poco conocido es el punto de vista de Gregori, pero *Peter ensu conceptus* de insolubilia toma que no hay insolubles en el lenguaje mental. Y que insolubles hablados o escritos son oraciones ambiguas en la medida como ellas corresponden no a una sino a dos distintas oraciones mentales, una verdadera y la otra falsa. El punto de vista de Peter era complejo; ello tuvo alguna influencia en el siglo XVI.

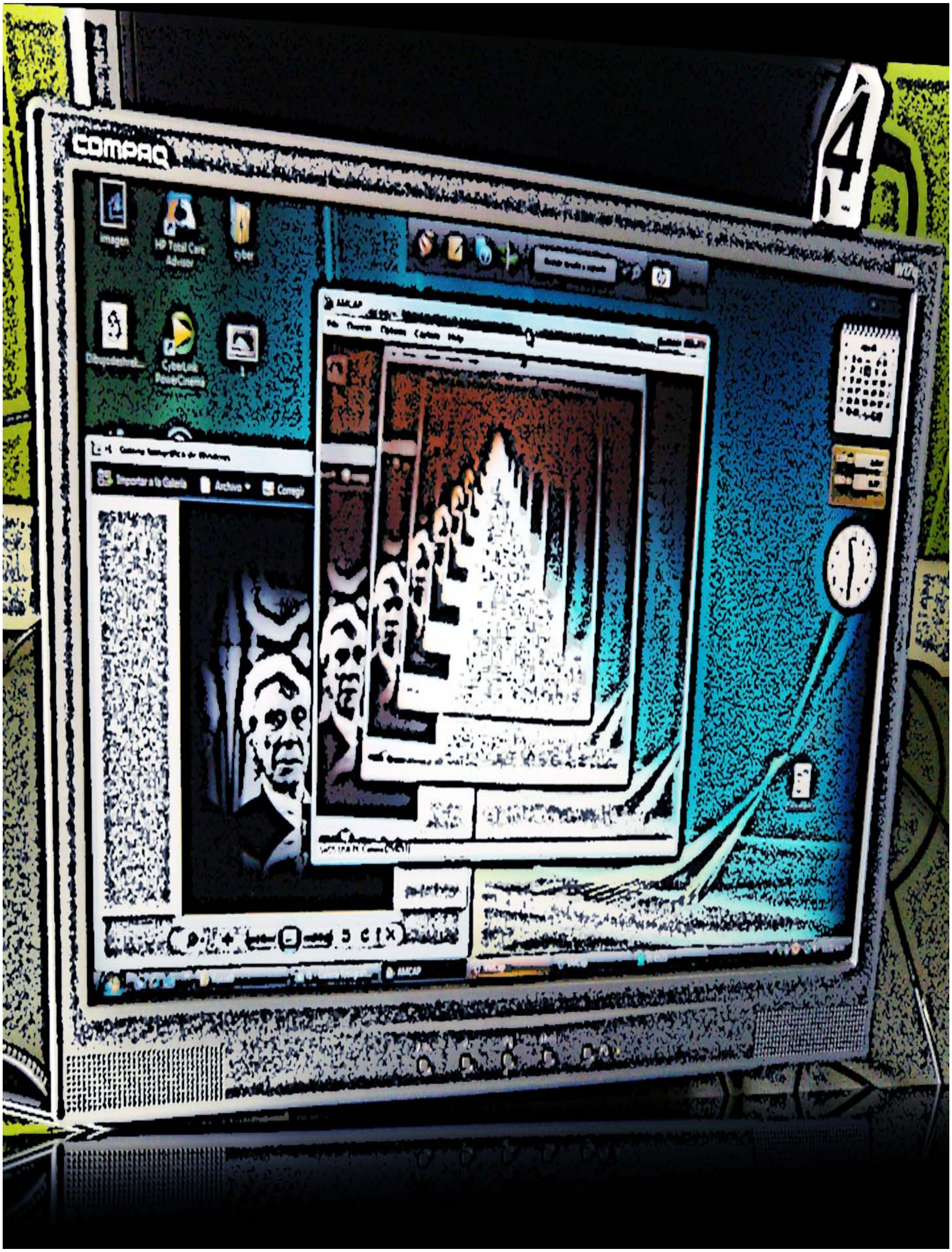
Con excepción de Peter de Ailly y sus puntos de vista las mayores teorías de insolubles después de 1350 fueron elaboraciones o formas modificadas de las teorías de Bradwardine, Swineshead y Heytesburry. Hubo otros puntos de vista, por supuesto, a través de la historia de la literatura de los insolubilia; pero ellos fueron menores.

* * *

Para finalizar, rememoremos un poco lo que trabajamos en este capítulo. En primer lugar, introdujimos una definición de paradoja: es la soberbia de la razón, pero también una de las fuentes de la creatividad. En segundo lugar, examinamos las principales clasificaciones de paradojas que se han propuesto. Todas ellas son un esfuerzo por clarificar la naturaleza desconcertante de la paradoja, su carácter soberbio. Por último, en tercer lugar, expusimos los principales esfuerzos de solución a las paradojas que se encuentran en la historia del pensamiento. Ellos son una prueba evidente del potencial creador que introduce la paradoja en el pensamiento.

Según lo dicho, nos gustaría sacar una conclusión lúdica. Está claro que las paradojas invitan a su solución. No obstante, hemos fallado sistemáticamente al hacerlo y no hemos podido, en consecuencia, dar con un método unánimemente aceptado para resolverlas. La soberbia de la razón que exhibe la paradoja es que ella encierra, en su naturaleza, el ser irresoluble, pero también el ser desafiante e invitar a la solución. No obstante, al ser irresoluble, ninguna solución nos satisface. Por eso seguimos esforzándonos en solucionar lo que sabemos insoluble. A lo mejor tal es el destino de la razón, como decía Kant, seguir formulándose retos por fuera de su alcance. Pero en lugar de denunciar este trágico destino de la razón, creemos que aquí se encierra un aspecto lúdico: no es una tragedia en lo que se resuelve la terquedad, sino en el juego; un juego incesante de proponer y refutar: el juego mismo de la creatividad. Por eso las paradojas se convierten en una especie de divertimento intelectual.

En este primer capítulo vimos las paradojas como una especie de divertimento intelectual, en donde el reto mental no se desvanece y continúa a pesar de no encontrar soluciones. En el segundo capítulo nos adentraremos en terrenos más difíciles y comprometedores tanto para matemáticos, como para lógicos, en donde las soluciones se hacen indispensables para no derrumbar pilares que sostienen nuestras “evidencias” matemáticas. Las paradojas que nos ocupan en el próximo capítulo no reclaman una solución de juego, pues si la solución no es buena con ella se derrumba toda la matemática y la ciencia. Para Frege y Russell la paradoja dejó de ser un juego, pasó a ser su pesadilla.


COMPAQ
imagen
HP Total Care Advisor
cyber
CyberLink PowerCinema
AMCAP
Importar a la Galería
Archivo
Corregir
4

Capítulo Segundo

La teoría de los tipos lógicos y la paradoja de clases

"Fue en el Congreso de Filosofía en Paris, en el año de 1900, donde caí en la cuenta de la importancia que tenía una reforma lógica en la filosofía de la matemática…Me di cuenta de ello al escuchar los debates entre Peano en Turín, y los demás filósofos allí reunidos. No había leído con anterioridad las obras de Peano, pero me impresionó el hecho de que en todos los debates revelaba más precisión y más rigor lógico que cualquier otro. Me acerque a él y le dije: "Quisiera leer todas sus obras. ¿lleva usted ejemplares de ellas? Los tenía, y pude leerlos todos. Aquellos libros fueron los que imprimieron el empuje necesario a mis teorías sobre los principios de las matemáticas"

Bertrand Russell

"Nuestras mentes son finitas y sin embargo, incluso en estas circunstancias de finitud, estamos rodeados por posibilidades infinitas, y el propósito de la vida humana es agarrar tanto como sea posible de esa infinitud".

Alfred North Whitehead

En este capítulo nos ocupamos de la paradoja de clases ¿qué es? Y como se relaciona su aparición en la historia de la filosofía y la matemática; deteniéndonos en el impacto que tuvo para el proyecto logicista de Bertrand Russell. Empezaremos ofreciendo un breve panorama de la matemática del siglo XIX, y la influencia de esta identificación en la propuesta lógico-filosófica de Russell (sección 1). Nos detendremos en la caracterización de la paradoja de de clases, ¿cómo surge? Y qué repercusiones tiene en la propuesta teórica de Russell (sección 2). Con base en la aparición de la paradoja de clases y otras gobernadas por el mismo matiz, ofreceremos una visión de la teoría de tipos lógicos como solución a estas construcciones lingüísticas (sección 3). Y por último nos detendremos en la solución de la paradoja de clases a la luz de la teoría de tipos de Bertrand Russell (sección 4)

1. Problema de los fundamentos de la matemática

Hace más de un siglo, un equipo de notables matemáticos de varias nacionalidades, se interesaron en realizar una reflexión sobre lo que es o no aceptable en matemáticas; esto debido al surgimiento de una serie de paradojas que se han sostenido en la matemática desde la época clásica. Entre ellas encontramos a la paradoja de la continuidad[1], que luego estuvo relacionada con la noción de infinitesimal[2]; estas paradojas se fueron manteniendo a través de la historia como problemas sin 'aparente solución'. El análisis que hacen estos matemáticos no se queda ahí sino que también consideró nuevas construcciones paradójicas que emergieron de la "naciente" teoría de conjuntos y el concepto de niveles de infinito, iniciando de esta manera un trabajo exhaustivo y un serio cuestionamiento a los fundamentos de las matemáticas, su verdad y sus axiomas base.

> Si los matemáticos quisieran de veras entender la verdad matemática, deberían prestar atención a las contradicciones de la continuidad, del infinito y lo infinitesimal, y pensar de nuevo los fundamentos lógicos y filosóficos de su disciplina. La mala filosofía-o peor la indiferencia por la filosofía produce mala matemática […] Desde Zenón en adelante, las dificultades del continuo han sido sentidas por filósofos y evitadas, con un análisis cada vez más sutil, por los matemáticos […] parecía que valía la pena recoger y definir, tan brevemente como fuera posible, algunas contradicciones en la relación de la cantidad continua con el número y también mostrar lo que los matemáticos están en peligro de olvidar, que las antinomias filosóficas, en esta esfera, encuentran su correspondiente en falacias matemáticas. Parece, a mí por lo menos, que estas falacias invaden el cálculo (Russell 1967, 2: 46ss)

Bertrand Russell (1872-1970) va a descubrir posteriormente que algunos matemáticos ya estaban ejecutando la tarea que reclamaba. Autores como Weierstrass, Dedekind y Cantor habían provisto a la matemática de unos fundamentos mucho más

---

[1] Eran conocidas desde la antigüedad y se asociaban con un discípulo de Parménides llamado Zenón, que las había utilizado para argumentar que el movimiento no existe. Ellas surgen al considerar una línea continua como una secuencia de puntos discretos. El problema es que esta secuencia tiene que ser divisible infinitamente.(Monk, 1998: 18)

[2] Noción que juega un papel central en el cálculo diferencial. Se supone que in infinitesimal es unacantidad infinitamente pequeña, más pequeña que cualquier cantidad que uno pudiera pensar y sin embargo diferente a nada.(Monk, 1998: 19)

refinados. La noción de infinitesimal había sido suprimida, el concepto de continuidad había sido redefinido, una nueva y perfeccionada rama de la aritmética había sido concebida: la aritmética transfinita. Russell preparaba en su libro *Los principios de la Matemática* escritos en 1900 su mayor parte y publicados en 1903 soluciones a éstas dificultades que estaban siendo solventadas ya por otros matemáticos. En una revisión hecha por el mismo Russell y en el prefacio de 1902 a su libro dice lo siguiente:

> En los años siguientes los temas de que tratan han sido ampliamente discutidos, y la técnica de la lógica matemática ha progresado grandemente; mientras, han surgido algunos problemas nuevos, se han resuelto algunos ya antiguos, y otros, que todavía son controvertidos, han adoptado formas completamente nuevas…parece inútil ponerse a corregir en el libro lo que ya no esté de acuerdo con mis puntos de vista actuales" El interés que tiene este libro es histórico y consiste en el hecho de que representa cierta etapa en el desarrollo de la temática que toca."[…] mi tesis fundamental [se mantiene] es que la matemática y la lógica son idénticas. […] Existen ciertas dificultades no resueltas en la lógica matemática que la hacen aparecer como menos cierta de lo que se cree que es la Matemática; y en segundo lugar, el que, si acepta la base lógica de la Matemática, ello justifica, o tiende a justificar, muchas obras, tales como la de George Cantor, que son miradas con desconfianza por muchos matemáticos a causa de las paradojas no resueltas que comparten con la Lógica. (Russell: 1900: 379)

En su siguiente gran obra *Principia Mathematica* (1910-1913) conserva la idea de "la importancia de la lógica matemática como herramienta analítica de la filosofía y muestra como algunas doctrinas lógicas tienen consecuencias filosóficas[3]" (O'cconor 1983,7:46). Pero tendrá que enfrentar otro tipo dificultades que veremos con detenimiento en el desarrollo de este capítulo. Russell parte de la "doctrina según la cual toda la matemática pura es un desarrollo de la lógica que solo utiliza conceptos que pueden ser definidos en términos lógicos" (Russell citado por O'cconor 1983,7:47). Los *Principia* parte entonces de dos estudios previos: el trabajo de analistas y geómetras cuya finalidad es formular y sistematizar axiomas; así como el de otros autores que abordan la teoría de conjuntos, entre ellos George Cantor (1845-1918). El segundo, el trabajo de la lógica simbólica de Giuseppe Peano[4] (1858-1932), que brinda adaptabilidad técnica y comprensión lógica, elementos necesarios a un instrumento matemático, para ocuparse de lo que hasta ese momento fueron los comienzos de la matemática del siglo XX.

---

[3] Entre ellas se contaban la teoría de los tipos que es el teoría base de este capítulo y la teoría de las descripciones, tema del tercer capítulo; teorías que influyeron considerablemente en el posterior desarrollo filosófico de Russell.

[4] Elabora un exhaustivo análisis del proceso demostrativo de la matemática. Instaura la formulación axiomática de la aritmética a través de sus Axiomas, los cuales definen los números naturales en términos de la teoría de conjuntos, naciendo así, la Lógica Matemática

El objeto de los *Principia* consiste, entonces en otorgar un estricto tratamiento a los fundamentos de la matemática. De la unión de estos dos estudios modernos se originan las siguientes consecuencias. La primera se refiere a los que antiguamente consideraban tácita o explícitamente axiomas, se identificó que son innecesarios o demostrables. La segunda, que los métodos por los que se demuestran los axiomas producirán resultados dignos de tenerse en cuenta en ciertos lugares tales como las del número infinito, que anteriormente se habían considerado como inalcanzables al conocimiento humano. (Russell & Whitehead, 1981: 7).

En pocas palabras la misión de Russell y Whitehead[5] en los *Principia* es elaborar una sistematización de la matemática[6] desarrollando un procedimiento lógico lo suficientemente fértil para que las proposiciones de la aritmética sean reducibles de él "partiendo de justificar la verdad de las matemáticas construyéndolas a partir de la lógica [lineamiento epistemológico] y el fortalecimiento de la lógica mediante una teoría de las relaciones perfectamente desarrollada [lineamiento de corte ontológico]".(Kilmister, 1984: 147) Los *Principia* intenta por medio de un procedimiento técnico [el lógico] construir los números naturales y su aritmética; pero su argumento va mas allá, quiere construir el resto de la aritmética y el análisis matemático. (Kilmister, 1984: 147)

Russell por esta época mantiene una postura ortodoxa con referencia a la existencia del concepto de clase, "Un número será todo aquello que sea el número de alguna clase […] El número de una clase es la clase de todas las clases similares a ella" (Russell,1973:1276-77) "la concepción de número como algo esencialmente aplicable a las clases desea ofrecer una traducción puramente lógica de lo que significa que una clase determinada tenga un número determinado, y a través de un método para correlacionar los miembros de las clases, captar la noción de número cardinal en una definición general"

[5] Alfred North Whitehead (1861-1947) maestro de matemáticas de Russell y colaborador en los tres volúmenes de *Principia Mathematica*.
[6] Antes de la elaboración de los *Pricipia,* Russell cree que toda la matemática puede reducirse sobre los números naturales en términos lógicos y no está dispuesto a abandonar que las proposiciones de la matemática pura no son contingentes sino necesariamente verdaderas. Este es el proyecto iniciado en su obra *Los principios de matemáticas* publicado en 1903. (Ayer 1983:37)

(Ayer, 1983:37). Este va a ser uno de los puntos que decidirán el futuro del proyecto de los *Principia*.

> Dos colecciones igualmente numerosas parecen tener algo en común: su número cardinal. Pero en tanto el número cardinal se infiere de las colecciones, no está construido en términos de ellas, su existencia debe ponerse en duda, a no ser que partamos de un postulado metafísico *ad hoc*. Definiendo el número cardinal de una determinada colección como la clase de todas las colecciones igualmente numerosas, evitamos la necesidad del postulado metafísico, y con ello suprimimos una innecesaria duda de la filosofía de la aritmética. (Russell, 1903: 967)

Ahora bien si nos detenemos un poco no queda esclarecido si ¿existen cosas como los números? ¿En donde reposaría la novedad de la no existencia de los números? ¿Habría realmente alguna manera posible de hacerlo? Al parecer la única manera potencial es no reducir los números a clases, a numerales, o nada más. Entonces ¿qué tipo de realidad ostenta la aritmética? "No deberíamos tener reparo en decir que sería un juego de fantasía, en el sentido que sus proposiciones no serían descriptivas del mundo y no haría más que expresar reglas de inferencia de acuerdo con el sistema de cómputo que hayamos querido adoptar, pero no todos los matemáticos estarían de acuerdo con esto" (Ayer, 1983: 38). Russell evita este problema, el de si sus métodos logran reducir los números a clases y por esta época no estaba preocupado por la existencia de las clases.

> Sus primeros libros filosóficos *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría* de 1897 y *Exposición crítica de la filosofía de Leibniz* publicado en 1900, estaban escritos desde un punto de vista kantiano, pero en el momento de la aparición de *los Principios de matemática* había sido convertido por Moore a una forma extrema de realismo platónico. Todo lo que podía ser mencionado lo consideraba como un término, cualquier termino podía ser sujeto lógico de una proposición, incluidas las entidades no existentes, como los unicornios, e incluso la entidades lógicamente imposibles, como el mayor número primo, eran seres en algún sentido. Posteriormente, Russell llegó a pensar que una tolerancia tan extrema en la multiplicación de las entidades demostraba, según sus propias palabras, "una falta del sentido de la realidad que debía conservarse incluso en los estudios más abstractos". (Ayer, 1983: 39)

Russell en su obra *Los problemas de la filosofía* de 1912 mantiene una postura conservadora "acepta la existencia de los universales en el sentido platónico y adoptaba una actitud de sentido común crítico en las cuestiones referentes a las mentes y los objetos físicos". (O'cconor, 1983: 47). Ahora bien, detengámonos un momento, y recapitulemos, es importante identificar que el problema de la matemática de la época se centra básicamente en los siguientes aspectos: el primero, está en la naturaleza demostrable de los axiomas; el segundo, lo referente a la paradoja del infinito y sus niveles, surgida en la “naciente” Teoría de Conjuntos. Pero lo que inquieta y motiva a Russell es encontrar buenas razones para creer en la verdad de la matemática.

La matemática entonces, se encuentra en un periodo de crisis en donde sus cimientos deben consolidarse por medio del hallazgo de su verdad. De esta manera, se deben elaborar elementos lo suficientemente consistentes que la soporten como conocimiento certero. La tarea de nuestros autores, consiste, entonces, en un intento por derivar la mayor parte de los conocimientos matemáticos, a partir de un conjunto o axiomas lógicos, incluyendo al concepto de número definido desde el concepto de clase y ésta ostentando ontológicamente el centro del proyecto. Como producto de estas dificultades aparecen distintas escuelas de pensamiento (logicistas, formalistas e intuicionistas).

> Para los logicistas no hay diferencia esencial entre Lógica y Matemática, en cuanto la Matemática se desarrolla a partir de la Lógica; más exactamente: en cuanto todos los términos matemáticos pueden definirse por medio de los de la lógica, y deducirse los teoremas matemáticos, de axiomas puramente lógicos. El fundador de esta, que alcanza su punto más elevado en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, obra vigorosa, encaminada expresamente a demostrar la exactitud de las tesis logicistas, es Frege.”(Bochenski, 1985: 301).

Para un formalista el lenguaje, en concreto el lenguaje matemático, considera que puede reducirse a operar espacio-temporalmente con signos:

> Tampoco los formalistas ven diferencia alguna esencial entre las formulas lógicas y las matemáticas, pero conciben ambas formalisticamente considerando el sistema unitario que resulta de ellas como un sistema de signos, en el que ni la evidencia ni la verdad de los axiomas juegan ningún papel: es decisiva por el contrario la no contradicción. El fundador del Formalismo es David Hilbert (Bochenski, 1985: 306-307)

Finalmente, en el Intuicionismo el planteamiento es diferente al de los logicistas y formalistas. El concepto básico del intuicionismo es la construcción. Para un intuicionista una construcción es una entidad mental y en ningún caso se pueden identificar con entidades lingüísticas. Las construcciones no son oraciones del lenguaje natural ni de un lenguaje o sistema formal aunque puedan expresarse en ellos:

> “[…]Los intuicionistas establecen una profunda distinción entre lógica y matemática. La matemática no es ya para ellos un conjunto de formulas sino, primariamente, una actividad

> mental, cuyos resultados se comunican subsiguientemente por medio del lenguaje. En éste, tal como lo usan los matemáticos, se observan ciertas normas que son las que conducen a la formación de una lógica. La lógica no es, por lo tanto, algo que se presupone, sino que se abstrae de las matemáticas. Una vez hecho esto, puede incluso procederse a su formalización, pero esto ya es accidental…Se consideran precursores suyos L. Kronecker y H Poincare…Pero es L.E. J. Brouwer quien pasa por fundador de la escuela, siendo propiamente formulada (y formalizada) por primera vez la Lógica intuicionista por A Heyting en 1930" (Bochenski, 1985: 307).

Cada una de estas escuelas enfrenta desde sus propios principios básicos la misión de consolidar a la matemática y limpiarla de contradicciones.

1.1 Proyecto Logicista

El logicismo es la corriente en filosofía de las matemáticas relacionada con pensadores como Frege, Russell (y Whitehead) y cuya tesis central es que "toda matemática pura se ocupa exclusivamente de conceptos definibles en términos de un número muy reducido de conceptos lógicos y de que todas sus proposiciones son deducibles de un muy reducido número de principios lógicos fundamentales" (Russell, 1973: 398). Frege reconoce la importancia de la lógica para reducir axiomas de las matemáticas, obteniendo de esta manera una definición de número en términos de clases; "Russell ha dado una interpretación extensional a la definición fregeriana de número, al concebirlo como una clase de clases". (Bochenski, 1985: 306) así inicia un proceso de construcción de las nociones matemáticas a partir de las lógicas. Ahora bien, Frege busca probar que el análisis y la aritmética pueden reducirse a la lógica. "El principal objetivo de Frege es establecer la objetividad de las matemáticas, mostrando que no son una construcción mental, ni tampoco el resultado de generalizaciones y que el lógico, más que inventar descubre un reino objetivo del ser, un tercer mundo "igualmente heterogéneo con los mundos material y mental". (Tomasini, 1994:123).

Pero en el período en el que irrumpen las paradojas de la teoría de clases, el programa logicista de Frege entra en crisis. Es Russell el encargado de comunicarle en una carta fechada 22 de junio de 1902 su hallazgo “si la clase de todas las clases no se pertenece a sí misma, entonces no debería pertenecerse a sí misma, pero si no se pertenece a sí misma, debería pertenecerse a sí misma”. Para este teórico, la dificultad no es solo un problema técnico, sino todo el cuestionamiento del punto de vista que tiene de la aritmética. Su proyecto logicista está montado sobre las descripciones de verdades absolutas correspondientes a un mundo no tangible pero real. La paradoja hallada refuta el sustrato en el cual se posa su proyecto. Lo que Frege piensa es que se obstruye la oportunidad de fundamentar la lógica de la aritmética. El proyecto de Frege pretende revelar que la naturaleza última de los números es lógica. Se trata de demostrar, en primer lugar, que se puede axiomatizar, y en segundo lugar, que sus axiomas últimos son lógicos.

No cualquiera de los sistemas formales es apropiado para el proyecto, sino solo aquel que pueda evidenciar su forma lógica. Para Frege entonces la lógica no es matemática como en Boole, tampoco es la sierva de la matemática como en Peano, es la naturaleza más profunda de las matemáticas. Siguiendo este argumento, la lógica está conectada a las leyes más agudas de lo pensable, en palabras de Frege:

> La palabra “verdadero” indica el objetivo de la Lógica como hace “bello” en la estética o “bueno” en ética. Todas las ciencias tienen la verdad como su meta; pero la lógica está referida también con ella en una manera muy diferente de esto [...] Descubrir verdades es la tarea de todas las ciencias; le cae a la lógica la de discernir las leyes de la verdad”. (Frege, 1917:14 ss)

Es importante identificar que el punto de partida de Russell para adherirse al Logicismo lo lleva a compartir con Frege el mismo interés, reducir la matemática a principios lógicos. Pero la preocupación persistente de Russell es revelar cuánto puede decirse que conocemos y con qué grado de certeza o de duda; preguntas filosóficas de corte ontológico y epistemológico, que no van a abandonar a Russell por un largo periodo de desarrollo filosófico. Esta necesidad de encontrar algo seguro lo conduce a hacer de la lógica y las matemáticas punto de partida confortable y firme. En su libro *Evolución de mi pensamiento filosófico*, las primeras frases con las que inicia enfatiza esa lucha frente al escepticismo en el que se encontraba el edificio de la matemática que se mostraba inmóvil e inexpugnable ante todas las armas de la duda (Russell, 1964: 71). Ha llegado en la modernidad a saber realmente cuál es su naturaleza. (Russell, 1928: 33). Este triunfo, que, no obstante, las siguientes décadas oscurecerían, es la bandera a levantar por Russell, a la que se aferra con convicción fervorosa.

Ahora bien, ¿cómo enfrentar estas aspiraciones que encaminen al encuentro de la certeza de la matemática? ¿Qué método conducirá a este hallazgo? Y ¿Qué tipo de filósofo es el encargado de llevar a cabo este método? Russell afirma que hay dos formas en que la filosofía debe encontrar un camino eficaz. Lo primero es que el filósofo debe basarse en la ciencia otorgando énfasis en los resultados más generales de este saber y tratar de enfocarlos en una universalidad aún mayor. Lo segundo es estudiar los métodos de la ciencia y tratar de aplicarlos según las necesidades del propio ámbito particular. (Russell, 1903 2: 973). Cuando Russell habla de métodos, se refiere a los usados por las ciencias formales, como la lógica y la matemática. La tarea del filósofo científico es entonces, aplicar los principios y métodos de la lógica a los problemas de la filosofía. La lógica se convierte para Russell en la esencia de la filosofía[7] y luego de la matemática.

> Históricamente hablando, las matemáticas y la lógica han sido estudios completamente diferentes. La matemática ha estado siempre unida con la ciencia y la lógica con los griegos. Pero ambas han evolucionado en los tiempos modernos: la Lógica se ha hecho más matemática y la Matemática más lógica. La consecuencia es que ahora es completamente imposible, trazar una línea entre las dos, las dos son efectivamente una sola cosa". (Russell 1919:1382)

Esta descripción nos lleva a los *Principia Mathemática*, que aspira a la construcción de un lenguaje técnico permitiendo con esto, encontrar un esquema lógico común y, de esta manera, hacer la traducción del lenguaje natural a uno formal, que no conduzca a contradicciones. "Si todavía hubiese quien no admitiese la identidad de una y otra, podríamos invitarlo a indicar en qué punto de las sucesivas definiciones y deducciones de los *Principia Mathematica* consideraba que acababa la Lógica y empezaba la Matemática. (Russell, 1919:1382)

---

[7] Cfr Conferencia II *La lógica como esencia de la filosofía* en *Nuestro conocimiento del mundo exterior como campo para el método científico en filosofía*. (Russell, 1914:1163)

Russell enfrentará la responsabilidad como filosofo y matemático llevando a cabo su búsqueda de la certeza matemática de la siguiente manera: 1.- Todos los conceptos matemáticos pueden ser definidos en los términos en que lo están los conceptos lógicos y 2.- Gracias a esta traducción todas las verdades de las matemáticas se derivan de las verdades de la lógica: los teoremas matemáticos pueden ser derivados a partir de axiomas lógicos, en una deducción puramente lógica, la lógica se transforma en la parte central de la filosofía. Russell construye esta tesis y adecua conceptos matemáticos directamente relacionados con las influencias ejercidas por Cantor y Peano.

Hay que tener presente la diferencia de propósitos entre Frege y Russell: mientras el primero piensa solamente en la fundamentación de la aritmética, el segundo lo hace en la fundamentación de toda la matemática pero con la salvedad de que parte de la crisis del surgimiento de paradojas. Russell desea mostrar que tenemos conocimiento "real", es decir un cuerpo de proposiciones basado en verdades indudables y que podemos probar lo que poseemos, si tomamos a las matemáticas como punto de partida. Según Tomasini: "la motivación de Frege es metafísica, mientras que la de Russell es epistemológica.[8]

El proyecto logicista tiene la siguiente pretensión, primero: la aritmetización de las matemáticas; segundo: la axiomatización de la aritmética,[9] tercero: la fundamentación de la aritmética en la teoría de conjuntos y cuarto: la logicización de la teoría de conjuntos: los dos últimos avances realizados por Russell. Ahora bien, qué hay de especial en este encuentro teórico entre Frege y Russell: el descubrimiento de la paradoja de clases por Russell.

---

[8] Por aquel tiempo, la realidad de las matemáticas había sido puesta en tela de juicio por los neohegelianos británicos (especialmente por Bradley y Mctggart), Russell, entendió esto como un reto escéptico. (Tomasini, pag 123, retomado: Mi desarrollo filosófico, obra de Russell)

[9] Peano logró axiomatizar a la aritmética. Introdujo varias nociones primitivas o indefinidas y varias oraciones en términos de las cuales era posible interpretar los enunciados de la aritmética. Sus nociones eran: Cero, Número y Sucesor. Los axiomas eran: 1- Cero es un número, 2- El cero es el sucesor de ningún número. 3- No hay números que tengan el mismo sucesor, 4- El sucesor de un número es un número, 5- Toda propiedad que pertenezca al cero y que pertenezca también al sucesor de cualquier número (n) pertenece a todos los números (principio de inducción).

El programa logicista en Russell concibe la reducción de toda la matemática, pasando a través de la aritmetización de la misma. Para Russell no solo la aritmética es reducible a la lógica, como en Frege, también lo es el remanente de las matemáticas. Russell llega al logicismo de un modo autónomo y diferente al camino que toma Frege; su acercamiento se basa en su rechazo frente a una conciencia pretérita de corte idealista[10], y a partir de la relación con las investigaciones adelantadas por Peano en la firmeza de las matemáticas.

La filosofía de las matemáticas de Russell así como la ejecución de su programa logicista queda establecido, primero, por el escenario de la paradoja de clases y, segundo, por la búsqueda de la solución a ésta. Las inquietudes de Russell en *Los Principios* versaron en torno a la solidez y coherencia de las matemáticas. Al contrario que Russell, Frege escribe durante dos décadas sus obras más importantes sobre el cimiento incuestionado de una aritmética consistente, basada en la verdad absoluta e inmutable; Russell, parte de un mundo matemático de corte pitagórico sacudido por la aparición de situaciones controversiales que tienen que ver con las mismas ideas de número y clase como eje de su proyecto. Esto es decisivo: pero Russell desea mantener la imagen original sobre la matemática: una construcción de verdades absolutas firmes, y seguras.

1.2 Problemática de la paradoja: Origen matemático

El paso que da Russell de temas matemáticos a temas lógicos-filosóficos, identifica la evolución del problema establecido por las paradojas. Las primeras antinomias que atraen la atención de Russell y que lleva al desarrollo de esta problemática son la de Cantor y la de Burali Forti que consideraron los números cardinales y ordinales transfinitos respectivamente. Los años 1895, 1899, 1903 y 1908 son determinantes para la Teoría de Conjuntos. En 1897 Cesare Burali-Forti (1861-1931) divulga la primera de las paradojas las cuales circundan alrededor de la idea del “conjunto de todos los conjuntos". Básicamente la conmoción no fue tan colosal ya que la definición que uso para conjuntos bien ordenados era inexacta, pero a pesar de rectificar el error la paradoja persistía. En 1899 Cantor

[10] Esta influencia idealista es trabajada en el tercer capítulo y se muestra el por qué es abandonada por Russell

descubre su propia paradoja que surge de la idea antes mencionada pero la pregunta aquí es ¿Cual es el número cardinal del conjunto **T** constituido por todos los conjuntos? De existir dicho número cardinal, debería ser el mayor cardinal posible, ¿pero no había probado ya que el cardinal del conjunto $\mathbf{2^T}$ es mayor que del de **T**?

Russell se propone reparar y reorientar el trayecto poniendo de pie a la matemática sobre la sólida base de la lógica en su libro *Principios de matemática*. Mientras tanto la Teoría de Conjuntos se había extendido a otras áreas y su lenguaje se había convertido en una herramienta no sólo útil, sino indispensable. A partir de 1902 H. Lebesgue (1875-1945) elabora su más bella creación, la teoría de la medida y la teoría de la integral en las que las operaciones infinitas con los conjuntos y con las funciones son su divisa. Lejos de devastar el trabajo de Cantor por culpa de las paradojas, el camino es conservar sus principales elementos pero cerrándoles el paso a las inconsistencias. Demos el espacio para que Cantor hable sobre su propio trabajo

> Mi teoría se levanta tan firme como una roca; cada flecha dirigida en su contra regresaría rápidamente a su arquero. ¿Cómo sé esto? Porque la he estudiado desde todos los lados por muchos años; porque he examinado todas las objeciones que se han hecho en contra de los números infinitos y sobre todo porque he seguido sus orígenes, por así decirlo, a la primera causa infalible de todas las cosas creadas. (Cantor, 1955: 78)

Estos planteamientos establecen la existencia de cardinalidades infinitas diferentes. Estás cardinalidades son llamadas Números Transfinitos. Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos con la cual logró salvar la contradicción de la destrucción de los números finitos por el infinito. La teoría de conjuntos introduce elementos útiles que fundamentan las matemáticas, aclara y formaliza conceptos que hasta el momento habían sido usados en forma tácita o habían pasado inadvertidos por los mismos matemáticos. Se inicia un trabajo de definir objetos matemáticos en términos de conjuntos y Cantor parte de los trabajos de las reorientaciones que tuvo el enfoque conjuntista antes que él. Las raíces de la noción de conjunto se encuentran en el análisis real, en la teoría de las series trigonométricas, y las funciones discontinuas de Fourier que llevaron posteriormente a Cantor a iniciar un estudio pormenorizado de los conjuntos de puntos de discontinuidad. (Collete, 1993 2: 521)

Pero el asombroso descubrimiento es que el conjunto de los números reales no es numerable, llevando a Cantor a formular la cardinalidad de un conjunto infinito y de esta manera es como se inicia una reorientación de los problemas de la teoría de conjuntos. El detonante que dio pie al avance de la teoría de conjuntos cantoriana se inició en 1873, cuando Cantor se formula una pregunta crucial y le da una respuesta sorprendente. La pregunta era: ¿es posible correlacionar biunívocamente los números reales y los naturales?, o en otros términos, ¿hay la misma cantidad de números en N y en $\Re$? La respuesta, en 1873 sobre la base de la completitud de $\Re$, es no, y con ella adquirió sentido la noción de cardinalidad de un conjunto infinito, ya que se prueba que existen conjuntos infinitos de diversos tamaños.

Cantor reveló numerosas propiedades de los tamaños de los conjuntos infinitos. Diferenció tamaños en los conjuntos infinitos: descubrió que no todos los conjuntos infinitos eran equipotentes, es decir, que no todos tienen el mismo número de elementos. Cantor definió que dos conjuntos eran equivalentes cuando se podía definir una correspondencia unívoca entre los elementos de uno y otro conjunto. (Collete, 1993 2: 523)

Gracias a ello, demostró que los números racionales podían quedar en correspondencia con los naturales. Cantor llamó numerables a aquellos conjuntos cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia 1-1 con los naturales, es decir, los que tienen elementos que se pueden *contar*. El siguiente paso de Cantor fue aún más extraordinario: demostró que no puede haber correspondencia entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los naturales. Es decir, los números reales no son numerables, son incontables.

Observemos algunas definiciones. Cantor entiende por conjunto: "Por un agregado [conjunto] entendemos una colección cualquiera en un todo ***M*** de objetos bien definidos y distintos de nuestra mente o de nuestra intuición (a los cuales llamaremos elementos de ***M***)" (Chadid & Perez, 2007: 157). Ahora bien, lo básico de esta definición es que está expresada en términos de sus elementos, y no en términos del propio concepto de conjunto.

La inquietud que suscitan estas contradicciones son las que llevan a Russell a plantear una solución que contribuya en la creación de una nueva antinomia; entonces entre más 'acertijos' se puedan encontrar, muchas más facilidades de solución se deben construir, para inaugurar una forma de control sobre dichos problemas. Esta forma de control debe ser elaborada a la luz de la física y su dominio sobre los hechos. Aquí hablamos de hechos lingüísticos, si se quiere, para proteger a la misma construcción de los fundamentos de la matemática de posibles y futuras sorpresas, que puedan desquebrajar dichos principios. Siguiendo la sugerencia ofrecida por la contradicción cantoriana, Russell descubre su paradoja bajo un nuevo enfoque.

2. La paradoja de clases

Luego de identificadas algunas dificultades en la matemática a lo largo del siglo XIX y principios del XX, se llega a concluir que sus principales líneas como la geometría, el algebra o el análisis pueden construirse partiendo de una nueva forma denominada "Teoría de Conjuntos". Debido a la necesidad de ser rigorizada la matemática hace que el enfoque conjuntista sea el análisis que permita sistematizar y unificar con mayor solidez una parte de la matemática y el aporte original otorgado por Cantor es determinante, pero en su teoría de conjuntos infinitos llego a la demostración de que no existe un número cardinal más grande de todos. Esto unido a la importancia del concepto de clase produjo un giro determinante en la producción intelectual de Russell. Veamos:

Para Russell el concepto de clase es definible en términos de lo que recibe el nombre de función proposicional[11] esto quiere decir que una función proposicional es una proposición con una variable, "Toda función proposicional debe determinar una clase, compuesta de aquellos argumentos para los cuales la función es verdadera"(Russell, 1973: 1376) por ejemplo: "Sócrates es hombre", "Pedro es hombre", son proposiciones, pero "x es un hombre" ya es una función proposicional, entonces la clase de los hombres se define como las cosas para las cuales "x es un hombre" es verdadero, consistan ellas en lo que consistan. Para comprender la noción de la "clase de los hombres", no se necesitaría saber

[11] Noción brindada por Peano

cuántos miembros tiene la clase, ni si el número de miembros es infinito, ni siquiera si la clase tiene algún miembro; solo se necesita saber lo que significa la función proposicional "x es un hombre". Lo que busca Russell es reducir la matemática y no solo una parte de ella,-teoría de conjuntos- hasta aquí no es problemática la visión cantoriana de conjunto. Es así como Russell mantiene su proyecto consistiendo su labor, en simplificar el sistema aritmético de Peano[12]. Los siguientes son los cinco axiomas de los cuales parte Russell

1- 0 es un número.
2- El sucesor de cualquier número es un número.
3- Dos números distintos no tienen nunca el mismo sucesor.
4- 0 no es el sucesor de ningún número.
5- De toda propiedad de la que goce el 0, y de la que goce el sucesor de todo número, en la hipótesis de que también dicho número goce de ella, gozará asimismo cualquier número arbitrario. (Peano citado por Russell, 1919:1269)

En otras palabras demostrar que los números podían ser definidos como clases. Habiendo aprendido de Cantor de que dos clases son equipotentes o similares y retomando la concepción de correspondencia uno a uno; un número se define como la clase de las clases similares: ejemplo la clase de las clases que tienen 10 miembros, o las clases de las clases que tiene un solo miembro etc. Aquí Russell está seguro que es posible llevar a cabo el sueño pitagórico mostrando un cuerpo de verdades exactas abstractas en su más alto nivel, pero reales.

Pero como sabemos Bertrand Russell, identifica una paradoja en la teoría general de conjuntos y esto inicia un giro importante reflexión en torno a lo que existe y lo que no. El cardinal de un conjunto **M** es la clase de todos los conjuntos equipotentes con **M**" Luego de las correspondientes definiciones de conjunto finito Cantor pasa a lo que es un conjunto infinito y lo dice de la siguiente manera. "agregados con número cardinal finito son los llamados agregados finitos, todos lo demás se llamaran agregados transfinitos y su número

---

[12] las tres ideas primitivas en la aritmética de Peano son: 0, número, sucesor" (Russell, 1919: 1268).

cardinal, número cardinal transfinito" (Chadid & Perez 158 ss). Ahora bien, detengámonos en el descubrimiento que hace Russell:

> Si pudiéramos, […] reunir en una sola clase los individuos, las clases de individuos, las clases de clases de clases de individuos, etc., obtendríamos una clase de la que sus propias subclases tendrían que ser sus miembros. La clase compuesta de todos los objetos que pueden ser contados, de cualquier índole que sean, deberá, si hay tal clase, tener un número cardinal que será el mayor posible. Puesto que todas sus subclases serán miembros de ella, no puede haber más de ellas que sus miembros. Cuando llegué por primera vez a esta contradicción, en el año de 1901, traté de descubrir algún falló en la prueba de Cantor de que no había ningún cardinal máximo. Aplicando esta prueba a la supuesta clase de todos los objetos imaginables, vine a parar a una nueva y más simple contradicción: La clase comprensiva que estamos considerando, que ha de abarcarlo todo, deberá abarcarse a sí misma como uno de sus miembros. En otras palabras, si hubiera una tal cosa como "todo", entonces "todo" sería algo, y, por consiguiente, un miembro de la clase "todo". Pero normalmente una clase no es miembro de sí misma."(Russell, 1919:1348)

Russell, al descubrir su paradoja, hace que varios de los cimientos en donde se encuentra cimentado su proyecto logicista frente a la matemática se agrieten, y entren en crisis muchos de los planteamientos que se daban por ciertos desde el concepto de clase y número. Apareciendo un nuevo problema que hasta entonces era desconocido: 'la clase de las clases que no son miembros de sí mismas'.

> […] normalmente una clase no es miembro de sí misma. El género humano, por ejemplo, no es un hombre. Formemos ahora el apartado de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Esta sería una clase: ¿sería miembro de sí misma o no? Si así fuera, sería entonces una de aquellas clases que no son miembros de sí mismas, es decir, no sería un miembro de sí misma. Si no lo es, no sería ninguna de aquellas clases que no son miembros de sí mismas, esto sería un miembro de sí misma. Por consiguiente-de ser o no ser miembro de sí misma-, cada una de ellas implica una contradictoria. Esto es una contradicción. (Russell, 1919: 1348)

Russell descubre que la noción de clase en donde estaba apoyado todo su proyecto de reducción lógica de la matemática era contradictoria. Recordemos que las clases son, para Russell un tipo de objeto, no es un objeto tangible pero tenía realidad objetiva, no se encontraban en la mente sino en el reino de las formas como en Platón. Y para Russell los números eran clases. Si los números son clases de clases éstas tenían que ser una especie de objeto o de lo contrario ¿cómo se podría formar clases de ellos? Esta dificultad surge luego de haber reflexionado con detenimiento sobre la teoría de los conjuntos infinitos de Cantor, en donde ya había demostrado la inexistencia de un número cardinal más grande que todos. Los números cardinales sirven para conteos, ejemplo cuantos hay en el salón: hay uno, dos, tres. Ahora bien si se pusiera en orden ascendente por resultados académicos a los mismos del salón se estarían usando los ordinales: primero, segundo, tercero…etc. Cantor establece que los números cardinales pertenecen a conjuntos, y hay cardinales finitos como infinitos.

Ahora bien, el conjunto de los números naturales tiene un cardinal infinito al que Cantor lo llamo (alef) $\aleph_0$, y también está en los números reales. (Collete 1993, 2: 522).

> "Podría decirse: Supongamos que el número de individuos sea n, en donde n puede ser 0 sin menoscabo de nuestro razonamiento; si formamos entonces el conjunto completo de individuos, clases, clases de clases, etc., tomamos todos juntos, el número de términos de nuestro conjunto será: $n + 2^n + 2^{2n}$ + […] ad infinitum el cual será $\aleph_0$." (Russell, 1919: 1347)

Aquí Russell acepta una demostración cantoriana en donde se afirma que el conjunto de números reales tiene más miembros que el conjunto de los números naturales, esta demostración funciona afirmando, primero, que los números naturales son un subconjunto propio de los reales y, segundo, que los reales no se pueden ubicar en una correspondencia uno a uno con los naturales. Se concluye entonces que el conjunto de los reales es mayor que el conjunto de los naturales.

> Admitiendo que el número de individuos del universo fuese n, el número de clases de individuos seria 2^n esto en virtud de la proposición según la cual el número de clases contenidas en una clase de n miembros tenía que ser 2^n. Ahora bien: 2^n es siempre mayor de n. De aquí que el número de las clases en el universo sea mayor que el número de objetos individuales" (Russell, 1919: 1346).

También había otra demostración cantoriana en donde se afirmaba que un conjunto tiene menos miembros que el conjunto de sus subconjuntos. Ahora bien si un conjunto tiene n miembros entonces habrá 2^n subconjuntos en él y 2^n es siempre mayor que n. Juntando estas dos demostraciones Cantor concluyó que el conjunto de los números reales tiene un número cardinal $2^{\aleph 0}$. Desde aquí Cantor elabora una sofisticada jerarquía de diferentes números infinitos que puede continuarse indefinidamente. Cantor afirmó que no puede haber un cardinal infinito más grande que todos, pues cualquiera que sea el número cardinal que se tome, se puede construir uno más grande formando su conjunto de subconjuntos. (Collete 1993, 2: 523-4).

Para Russell era muy difícil aceptar la demostración de Cantor, quería encontrar un error en este tipo de razonamientos[13]. Ya que estaba aceptado que las clases son números y estas son reales, entonces necesariamente debería haber un número mayor que todos, en otros términos el numero que exprese todas las cosas que existen no en el mundo físico sino en el de las formas en donde las clases tienen su propia existencia.

Ahora bien, la contradicción surge en el momento en el que se considera la clase de todas las clases. Es desde aquí en donde Russell ve la necesidad de ir despojándose de su desbordante ontología. Si las demostraciones cantorianas son verdaderas, entonces las clases no pueden ser objetos porque no están dentro de las cosas del mundo y es cuando son declaradas por Russell ficciones lógicas, al igual que los números y tanto el mundo pitagórico como el platónico son una gran ilusión.

> Lo primero que hay que hacer es comprobar qué las clases no pueden considerarse como una parte del mobiliario definitivo del universo. Es difícil explicar con precisión lo que ha de entenderse con esta aserción; pero para aclarar su sentido, podemos valernos de una de las consecuencias que implica. Si tuviéramos un lenguaje simbólico completo, con una definición para cada cosa definible y un símbolo sin definir para cada cosa no definible, los símbolos indefinidos de este lenguaje representarían simbólicamente lo que queremos dar a entender por el mobiliario definitivo del universo." (Russell, 1919: 1375)

Esta indicación y el descubrimiento de su propia paradoja sirvieron como un importante aporte a la lógica matemática.

> En los Principios de Matemáticas párrafo 339, página 357, se dan varios argumentos destinados a probar la existencia de las clases infinitas. En tanto dichos argumentos suponen que si n es un número cardinal inductivo, n no es igual a n+1. Hay un argumento sugerido por un pasaje del Parménides de Platón, según el cual, si hay un número tal como el 1, este 1 tiene entonces ser; pero 1 no es idéntico con el ser, y, por tanto, 1 y el ser son dos, y por consiguiente, hay un número como el 2, y el 2 junto al 1, y junto al ser, dan lugar a una clase de tres términos, y así sucesivamente. Este argumento es falaz, en parte porque "ser" no es término que tenga un significado definido, y más todavía por la razón de que si se inventara un significado definido para ello, se encontraría entonces que los números no tendrían ser: son, en efecto, lo que se llaman "ficciones lógicas". (Russell, 1919 1973: 1349)

Aquí yace nuevamente el fantasma de las paradojas y Russell inicia un nuevo recorrido y esta vez de la mano de A. N. Whitehead bajo el nombre de *Los Principia Matemática* en donde el punto de vista cambia de lo ontológico a lo semántico;

[13] Ver cita Russell, 1973: 1348

reflexionando con mayor cuidado situaciones referentes a lo que existe y a lo que no y a situaciones acerca de qué tiene sentido decir y qué no lo tiene (Monk, 1998: 43)

3. La teoría de los tipos lógicos

En esta sección del capítulo nos ocuparemos de cinco tareas básicas a la luz de los *Principia Mathematica*. En primer lugar, intentaremos caracterizar la idea de lenguaje ideal para Russell, teniendo en cuenta el concepto de análisis lógico (3.1). En segundo lugar, estableceremos en qué consiste el círculo vicioso y qué repercusiones tiene dentro de la teoría de tipos lógicos (3.2). En tercer lugar distinguiremos lo propio de las funciones proposicionales y teoría de tipos frente a construcciones autorreferenciales (3.3). En cuarto lugar indicaremos la jerarquía de funciones, la aparición del concepto de orden y variable aparente y su relación con el principio de círculo vicioso (3.4). En quinto lugar reconoceremos el axioma de reductibilidad como base de la teoría de tipos, su formulación, avances y límites.

3.1 La idea de lenguaje ideal

La idea de lenguaje ideal Procedimiento de análisis lógico en donde se clarifican conceptos y proposiciones; de tal manera que lo que pretende Russell, es construir instrumentos que otorguen claridad para poder ver el esqueleto lógico común a todos los lenguajes naturales, y de esta manera abordar y solucionar situaciones paradójicas como las anteriormente vistas. Para ello, se hace necesario que este ´nuevo´ lenguaje sea regulado por la teoría de los tipos lógicos y la teoría de las descripciones. Iniciemos con la primera

3.2 El principio de círculo vicioso y la introducción a la teoría de los tipos

Bertrand Russell formula en el capítulo II de sus *Principia Mathematica*, la teoría de tipos lógicos. Esta tiene por función resolver ciertas contradicciones. La teoría se dirige a enfrentar las dificultades planteadas por las paradojas matemáticas como la relativa al mayor ordinal, (Russell & Whitehead, 1981:93) interesándonos en especial la que Russell descubre sobre «la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas», modelo que va a revelar que la noción de clase es en sí misma equívoca.

Russell inicia su teoría de tipos, afirmando que una clase es una función proposicional, cuyo significado depende del dominio de objetos que la hacen verdadera, y asegura que todas las paradojas provienen de lo que se podría llamar círculo vicioso, que consiste en suponer que una colección de objetos puede contener miembros que sólo pueden ser definidos por medio de la colección como un todo, o, en otras palabras, considera la totalidad de una colección como parte de la misma colección.(Russell, 1981:93) El análisis de las paradojas según Russell, muestra que todas ellas resultan de un cierto género de círculo vicioso.

> Los círculos viciosos de los que nos ocupamos surgen del hecho de suponer que una colección de objetos puede contener miembros que sólo pueden ser definidos mediante la colección como totalidad. Así, por ejemplo, la colección de *proposiciones* se supone que contiene una proposición que dice "toda proposición es verdadera o es falsa". Parecería, sin embargo, que dicha afirmación no podría ser legítima menos que "*toda proposición"* se refiera a alguna colección ya definida, lo que no puede hacerse si se crean nuevas proposiciones mediante expresiones que contengan "*toda proposición"*. Tendremos, por tanto, que decir que las expresiones que contengan "toda proposición" carecen de sentido. (Russell & Whitehead, 1981: 93)

Russell cita como ejemplo: "dado un conjunto de objetos tal que -si suponemos que si el conjunto forma una totalidad- contenga miembros que presupongan dicha totalidad, entonces tal conjunto "carece de totalidad"". (Russell 1981: 93) Aquí lo que quiere indicar Russell cuando afirma que "carece de totalidad" es que no se puede tomar ninguna expresión acerca de todos sus miembros ya que esto carece de sentido o se están afirmando totalidades ilegitimas y lo que pretende el principio de circulo vicioso es evitar dichas afirmaciones. No puede tomarse ninguna expresión acerca de todos sus miembros que sea significante. Lo que quiere decir Russell, es que nada que implique el todo de un conjunto debe ser miembro del conjunto, ya que si un determinado conjunto tiene una totalidad e intentamos identificar nuevos miembros que solo van a ser definibles en términos de la totalidad, entonces el conjunto ya no va a ser una totalidad ya que tendrá que incluir un nuevo miembro más si ostenta la categoría de ser totalidad, en otros términos: este conjunto no forma un todo. "Pues en fin, parece claro que hay siempre algo que jamás se puede meter en un saco, por grande que éste sea, y es el saco mismo; en efecto, el continente debe ser más grande que el contenido" (Koyré, 1981 v 4, n 1-2: 95) "En tales casos es indispensable descomponer nuestro conjunto en otros más pequeños, cada uno que sea capaz de una expresar totalidad". A esto es a lo que aspira la teoría de tipos lógicos. (Russell, 1981, 93) Detengamos por ahora solamente es este acento: Lo que propone Russell es evitar círculos viciosos, para así impedir la aparición de paradojas. Aquí Russell no nos va a otorgar una justificación de orden lógico si se quiere del principio de circulo vicioso; simplemente su explicación produce su utilidad y como consecuencia su aprobación.

3.3 Las funciones proposicionales y la teoría de tipos

Una característica fundamental del circulo vicioso es que se ocupa de las funciones proposicionales. "Por "función proposicional" entendemos algo que contiene una variable x y que expresa una proposición en cuanto se le asigne un valor a dicha x. Es decir, difiere de una proposición solamente por el hecho de que es ambigua: contiene una variable a la que no se le asigna ningún valor" (Russell, 1981: 94-95). Teniendo en cuenta la anterior argumentación es imposible que la totalidad de un conjunto incluya un elemento que presuponga la totalidad misma, por esta razón ninguna función proposicional puede admitir como argumento a la función o a un objeto que sólo se pueda llegar a definir en términos de la función misma. Russell inicia este recorrido mostrando la distinción entre una proposición y una función proposicional, esta última se distingue porque es ambigua, en otros términos la función proposicional tiene variables cuyo valor no ha sido establecido. Russell cree que la ambigüedad no es una característica provisional sino que es la esencia misma de una función.

> La cuestión respecto a la naturaleza de una función no es en modo alguno una cuestión fácil. Puede parecer, empero, que la característica esencial de una función es la ambigüedad. Tomemos por ejemplo, la ley de identidad en la forma "*A* es *A*", que es la forma en la que se enuncia normalmente […] ¿qué decimos del contenido del juicio? No estamos juzgando que Sócrates es Sócrates, ni que Platón es Platón, ni ningún otro juicio determinado que sea ejemplo de la ley de identidad. Aun así, cada uno de estos juicios está en cierto sentido, dentro del alcance de nuestro juicio. Estamos de hecho, juzgando un ejemplo ambiguo de la función proposicional "*A* es *A*". Nos parece tener un único pensamiento que no tiene un objeto definido, sino que tiene como objeto un valor

> indeterminado de los de la función "*A* es *A*". Esta es la clase de ambigüedad que constituye la esencia de una función. Cuando hablamos de "ϕx", en donde la x no está especificada, aludimos a un valor de la función, pero no a uno determinado. Podemos expresar esto diciendo que "ϕx" denota ambiguamente ϕa, ϕb, ϕc, etc., en donde ϕa, ϕb, ϕc, etc., son los diferentes valores de "ϕx". (Russell, 1981: 95)

Ahora bien para que un valor ambiguo de "ϕx" se convierta en un valor definido Russell afirma que deben estar bien definidos los argumentos como sus valores bajo la función específica, "La función no puede ser definida hasta que sus valores no estén definidos. Es este un caso particular, quizá el más fundamental, del principio de circulo vicioso" (Russell, 1981: 95) Esta parte es muy importante en lo que corresponde análisis de las paradojas, no se puede definir el campo de argumentos admisibles y la dirección de valores o conjuntos de valores formados por la función aplicada a los argumentos admisibles ya que no es factible saber cuáles son los argumentos admisibles antes de haber asignado la función. Y para poder asignar la función es necesario identificar la dirección y cuales los argumentos admisibles. Es por esto que no es posible incluir en una función a la función misma como argumento ya que esta inclusión estaría violando el principio de círculo vicioso. Entonces para Russell cada valor ambiguo como "ϕx" presupone la totalidad de sus valores y por consiguiente la totalidad de sus posibles argumentos. No puede ocurrir lo contrario, los valores no presuponen la función "los valores de una función se presuponen en ella y no al contrario" (Russell, 1981: 96)

3.4 Jerarquía de funciones

Con base en el anterior argumento para Russell no se pueden admitir las elaboraciones que incluyan una función proposicional aplicada a la misma función; es por ello que para evitar las falacias del círculo vicioso es indispensable hacer que las funciones operen en distintos órdenes. Es así como surge la idea de la Teoría de Tipos Lógicos, que pretende clasificar los objetos y las funciones conforme al orden o nivel al cual pertenecen. Un tipo es definido como el orden de significancia de una función proposicional, como la colección de argumentos por los cuales dicha función tiene valor. Tipo:

> Se define como el ámbito de significación de una función proposicional, esto es, como la colección de los argumentos para los que la mencionada función tiene valores. Siempre que una variable aparente intervenga en una proposición corresponderá un tipo al campo de

> valores de dicha variable aparente, viniendo dicho tipo fijado por la función cuyos "valores todos" entran en juego. La clasificación en tipos de los objetos se hace necesaria en razón de las falacias reflexivas que de otro modo surgirían. Estas falacias han de ser evitadas poniendo lo que podría llamarse el "principio de círculo vicioso". (Russell, 1966: 102)

La jerarquía de funciones diría: lo que sea que contiene una variable aparente "la presencia de palabras como todo o algún indica presencia de una variable aparente; pero con frecuencia una variable aparente ésta realmente presente donde el lenguaje no indica su presencia de una manera inmediata. Así, por ejemplo "*A* es mortal" significa "hay un momento en el que *A* morirá". De este modo, la variable *tiempo* interviene como una variable aparente" (Russell, 1981: 107) como contenido, no puede ser el contenido mismo de la variable diremos entonces que es de un tipo más alto. Así la variable aparente contenida en una expresión es la que determina su tipo. Esta es la guía de principios a seguir. Las proposiciones que contienen variables aparentes son generadas de las que no contienen esas variables aparentes por procesos en los cuales uno es siempre el proceso de generalización; Por lo tanto, la proposición es llamada una proposición *generalizada* cuando ésta contiene una variable aparente. Una proposición que no contiene una variable aparente recibe el nombre de proposición elemental."Los ejemplos más claros de proposiciones que no contienen variables aparentes son las que expresan juicios inmediatos de percepción, como "esto es rojo o esto es doloroso" en donde "esto" es dado de forma inmediata. (Russell, 1981: 107) Esto es que una proposición conteniendo una variable aparente presupone otras de las cuales puede ser obtenida por generalización; de este modo todas las proposiciones generalizadas presuponen proposiciones elementales.

En una proposición elemental podemos distinguir uno o más *términos* de uno o más *conceptos*; los términos son cualquiera que puedan ser reconocidos como el *sujeto* de la proposición, mientras los conceptos son los predicados o relaciones afirmadas de esos términos. Los términos de las proposiciones elementales se llaman de primer o más bajo tipo.

No es necesario en la práctica, saber qué objetos pertenecen al tipo más bajo, o si el tipo más bajo de la variable ocurrida en un contexto dado es de *individuales* o algún otro. Para la práctica solamente los tipos *relativos* de las variables son relevantes. Por la aplicación del proceso de generalización a individualización que ocurre en proposiciones elementales, obtenemos nuevas proposiciones. La legitimidad de este proceso requiere solamente que los individuales no sean proposiciones. Si esto es así se debe estar seguro del sentido que se le dé a la palabra *individual*. Podemos definir *individual* como algo desprovisto de complejidad. Esto entonces obviamente no es una proposición, ya que una proposición es necesariamente compleja; por lo tanto en la aplicación del proceso de generalización a individualización no se corre el riesgo de incurrir en reflexiones falaces.

Las proposiciones elementales junto con las que solamente contienen individuales como variables aparentes, las llamaremos proposiciones de primer orden. Esas forman el segundo tipo lógico. Tenemos de este modo una nueva totalidad, aquella proposición de primer orden. Podemos así, formar nuevas proposiciones en las cuales las proposiciones de primer orden se presentan como variables aparentes. Aquellas proposiciones las llamaremos de segundo orden; estas forman el tercer tipo lógico.

Aquí tipo de una proposición debe entenderse como el grado de complejidad lógica es así como los individuos siendo los objetos lógicos más sencillos serán el nivel 0, las propiedades de los individuos y funciones que contiene individuos perteneciendo a los objetos lógicos que se fundan en individuos les corresponderá el primer orden, las funciones que se refieren a funciones serán de segundo orden etc. Lo determinante es identificar que toda función debe ser de un orden superior a sus elementos (Koyré: 1981: 90) Aquí podríamos decir que es el ejercicio lógico que custodia a la función limitándola ejerciendo presión desde arriba impidiéndole que suba de orden. En otras palabras el tipo encapsula en su orden a la función para no referirnos a "todas las funciones de x".

La teoría de los tipos, entonces, propone que la aparición de paradojas se presenta cuando incursiona la clase la cual se comprende a sí misma y el concepto predicable de sí mismo, la clase de todas las clases que no se comprende a sí misma y el concepto no predicable de sí mismo. Todo tipo está constituido por sistemas de valores de significación, el cual supone para cada uno, una función de tipo inferior; en el caso de que el argumento no sea de tipo inferior del predicado -o función- la proposición obtenida es insignificante y por tanto, ni cierta ni falsa. Aquí Russell toma el objeto del tipo más bajo de los individuos o de los términos si suponemos un sistema o clases de individuos, así también se presumen las clases de clases de individuos. Así se obtiene una inmensa jerarquía de tipos.

3.5 Axioma de reductibilidad

Con base en los anteriores argumentos Russell llega a la formulación de su axioma de reductibilidad el cual va a ser la base en la que se apoya su teoría de tipos lógicos:

> Sea φx una función, de cualquier orden, de un argumento x, que por su parte puede ser o bien un individuo, o bien una función de orden cualquiera. Si φ es del orden inmediatamente superior a x transcribiremos la función como $\varphi!x$, en tal caso, diremos que es una función predicativa. (Russell, 1966: 112)

El axioma de reductibilidad pretende posibilitar el referirnos a totalidades reduciendo el tipo, esto debido a que en algunos casos de la matemática es necesario referirse a la existencia de números reales ya que estos son solo definibles en términos de su totalidad.

> Más si la matemática ha de ser posible, es absolutamente necesario que encontremos un medio de formular enunciados que equivalgan de algún modo a aquello en que pensamos hablar (impropiamente) de "todas las propiedades de *x*. Esta necesidad se pone de manifiesto en muchos casos, pero de modo particular en relación con la inducción matemática. Nos es posible decir, valiéndonos de *cualquier* en lugar de todos: "Cualquier propiedad poseída por 0 y por los sucesores de todos los números que la posean será poseída por todos los números finitos". Mas no podemos pasar a decir: "Un número finito es aquel que posee todas las propiedades poseídas por 0 y por los sucesores de todos los números que las posean." Si circunscribimos este enunciado a todas las propiedades de primer orden de los números, no podremos inferir que sea válido para las propiedades de segundo orden. (Russell, 1966: 110-111)

Según Russell si no se mantiene el axioma de Reducibilidad no podría haber manera de probar que si ***m*** y ***n*** son números finitos, ***m+n*** sea un número finito pues, con base en la anterior definición "m es un número finito" será entonces una propiedad de segundo orden de m y por lo tanto, el hecho de que ***m+0*** sea un número finito, y que, si ***m+n*** es un número finito, lo sea también $m+n+1$, esto no nos autoriza a concluir por inducción que ***m+n*** sea un número finito. (Russell, 1966: 111) Este axioma pretende minimizar el tipo lógico a las funciones el grado de complejidad lógica ¿Cómo se podría ver con mayor claridad esto?

Con la función predicativa que está en el primer orden inmediatamente superior al de su argumento más alto (Russell, 1981: 113) Y el mismo Russell pone el siguiente ejemplo:

> Napoleón tuvo todas las cualidades que hacen a un gran general" aquí hay un predicado que es una variable aparente. Si ponemos "ϕ: f (ϕ ! z sombrero arriba de la z) implica ϕ ! (Napoleón). Ya que esto se refiere a una totalidad de predicados, él mismo no es un predicado de Napoleón ya que los predicados son solo algunas propiedades de un objeto. Esto no implica que no hay un predicado común a los grandes generales." (Russell, 1981: 113)

Al parecer Russell cree que hay predicados que solo pertenecen a un solo objeto este es el caso de Napoleón en donde hay generales grandes que solo le pertenece este único predicado a un solo objeto-sujeto. Ahora bien, ese predicado le corresponde un nivel más bajo que el tipo de la función que reconoce una totalidad. Esta es la función de axioma de reductibilidad aunque no queda esclarecida su verdad ya que en él se evidencia su carácter extra lógico que va a perjudicar su programa logicista. La Teoría de Tipos dirá, *grosso modo*, para casos como este que: Ninguna clase en un discurso formal de índole lógico o matemático puede ser miembro de sí misma, por lo tanto la clase de las clases no puede ser una de las clases que son sus integrantes; que un nombre no va a ser la cosa nombrada. Hay errores graves en el momento en el que al clasificar los nombres se clasifican junto con la cosa que se está nombrando, y esto es precisamente lo que se debe evitar.

La solución a las paradojas que plantea Russell en su teoría de los tipos lógicos, consiste en identificar expresiones que cuando se formulan carecen de significado y, deben ser erradicadas del lenguaje por medio de nuevas reglas. Así se da el ejemplo de la paradoja de clases que desaparece cuando se reconoce y se verifica que una clase es de tipo más elevado que los miembros de la clase. O que por ende una subclase de una clase es de tipo menos elevado que la clase. Se podría establecer que el principio que le da consistencia a la teoría de los tipos lógicos es: "Cualquier expresión que contiene una variable aparente es de tipo más elevado que aquella variable". (Russell, 1910: 382.) Según lo dicho hasta ahora, Russell enuncia que hay un número infinito de niveles de tipos lógicos, con un nivel reducido de objetos lógicos, que son las proposiciones elementales relativas a objetos individuales, punto determinante para optar por un proceso de depuración ontológica.

> Visto desde el punto de vista estrictamente lógico, no vemos ninguna razón para creer que el axioma de Reducibilidad sea lógicamente necesario, que es lo que habría que entender al decir que fuese cierto en todos los mundos posibles. La admisión de este axioma en un sistema de lógica sería por consiguiente, un defecto, incluso aunque el axioma fuese empíricamente cierto. Por esta razón es por lo que la teoría de las clases no puede considerarse tan completa como la teoría de las descripciones. (Russell, 1919: 1381)

Aquí encontramos una dificultad con el axioma de Reducibilidad, y es que el axioma es de tal generalidad que contiene todas las afirmaciones y de esta manera seria innecesaria una teoría que se sustente en él. No se puede mirar la validez o invalidez del axioma sino el error del uso en la teoría de los tipos al involucrar el empleo de clases cuando su finalidad consiste en eliminarlas. La teoría de los tipos estaría encerrada ella misma en el principio de Reducibilidad implicándose como una clase.

4. Solución a la paradoja de clases basada en la teoría de tipos

En esta sección nos ocupamos de la tarea de aplicar la teoría de tipos a la solución de la paradoja de clases. Examinamos su planteamiento, la influencia cantoriana y la disolución de la paradoja haciendo uso de las herramientas conceptuales otorgadas por Russell.

Nuestro autor parte de la tesis de Cantor de que “no existe el número cardinal máximo” y gracias a ésta llega a la formulación de la paradoja de clases. La prueba afirma que si una clase tiene **n** miembros, entonces hay $\mathbf{2^n}$ formas de combinar esos miembros y que el número de subclases de una clase es siempre mayor que el número de sus miembros. Como ilustración vamos a utilizar los siguientes ejemplos: Tengamos en cuenta estos conjuntos de números: Cada uno de ellos implica un conjunto más grande

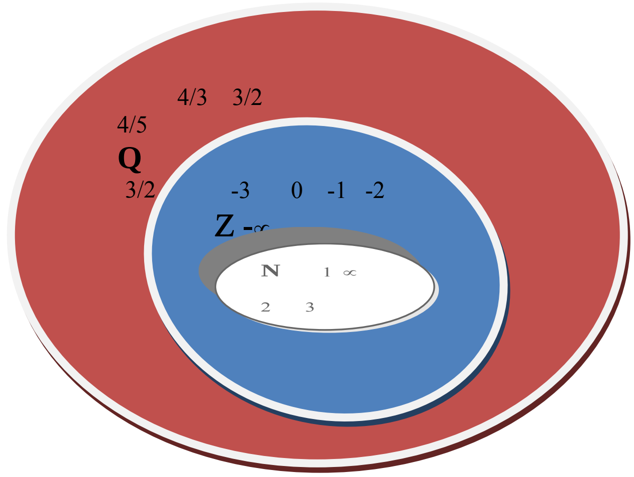
-Naturales: $[1, 2, 3, \ldots \propto) = N$

-Enteros: $(-\propto,\ldots -3,-2,-1, 0, 1, 2, 3\ldots,\propto) = Z$

-Racionales: $(3/2, 4/3, 4/5, 6/5) = (1.5, 1.3, 1.25, 1.2) = Q$

$N= x/x \in N\ x$

$Z= x/x\in Z\ (-\propto<x<\propto)$



Hasta aquí aparentemente no hay ninguna dificultad, pero según Russell siguiendo a Cantor, evidencia un peligro de contradicción al atribuirse que las subclases de una clase dada puedan ser sus miembros. Verbi gracia, la clase de todos los objetos debe tener el número cardinal máximo, así por muy alto que sea el número de las subclases contenidas en ellas, ese número, no puede superar al de sus miembros. Pero no hay un cardinal máximo porque siempre se le puede sumar uno; es como si existiera y no al mismo tiempo. Cada categoría está Jerarquizada.

Aquí se identifica que el fallo se posa en la naturaleza misma de las clases; ya que cada vez que se acota una clase, la cantidad de elementos de la subclase será mayor, el número de elementos del subconjunto es mayor que el número de elementos del conjunto y la clase es la que determina el conjunto y el subconjunto, esto ya lo hemos visto en el desarrollo del capítulo. Los elementos no pueden superar las subclases; ya que estas subclases serian más que los mismos elementos. Es aquí en donde surge la paradoja. ¿Cómo organizar subclases de manera que el número de subclases no supere al número de elementos? Este planteamiento muestra que la dificultad se presenta en el uso del término "clase". (Consuegra, 2004: 217ss) Iniciemos la aplicación de la teoría a la primera dificultad:

1- Una subclase no puede pertenecer a una clase

2- Las pertenencias [$\in$] tienen orden creciente

3- Se puede establecer un cardinal máximo para cada tipo

4- Los cardinales máximos no pueden sumarse, por $\in$ a categorías diferentes

Luego no existe un cardinal máximo.

Hay diversos tipos de clases, esto es, clases en donde sus miembros son individuos, clases en donde sus miembros son clases de individuos, clases en donde sus miembros son clases de clases de individuos, etc., igual como existen individuos u objetos, propiedades de individuos y propiedades de propiedades de individuos, y así gradualmente. Pero ninguna clase puede ser miembro de sí misma, y, por esta razón, la totalidad de elementos no es ella misma un elemento, sino una clase de tipo superior. No existe una «clase todas las clases», sino una clase de tipo o nivel superior al resto de tipos de clase. Así, no hay una clase cuyos miembros sean clases y, por lo mismo, los miembros de una clase (de individuos) no son sino individuos, y en modo alguno clases. Pero existe el grupo de clases cuyos miembros son clases.

La teoría, al distinguir distintos niveles de tipos de predicados, contiene e imposibilita las contradicciones de determinadas paradojas. Al decir «la clase de las clases cuyos miembros no son miembros de sí mismas es miembro de sí misma» no se hace sino elaborar mal una frase, que como consecuencia no es ni verdadera ni falsa, sino una frase sin sentido. La teoría de tipos de Russell confirma la idea de que no es viable examinar todos los objetos como pertenecientes a un mismo nivel de realidad lingüística.

Segunda aplicación:

1. la finalidad: solucionar la paradoja: “la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas.

2. Este tipo de paradojas se caracteriza por la autorreferencia. (Presencia de auto pertenencia; esto significa que se acepta que el contenido de una afirmación pueda aplicarse al mismo enunciado).

3. La paradoja se disipa cuando se comprende que una clase no es una “cosa”, sino función proposicional, es decir, que elige la propiedad o propiedades que participan las cosas que pertenecen a dicha clase. El concepto de clase se inscribe siempre en un nivel proposicional superior al de sus referentes. Es decir, hay diferentes niveles de realidad y distintas clases de predicados: no es lo mismo ser jardín, que pertenecer a una clase.

4. En síntesis: hay distintos niveles de significación

5. Dicho de otra forma: cuando hablamos de clases estamos en un nivel metalingüístico.

La Teoría de Tipos afirma que: ninguna clase en un discurso formal de índole lógico o matemático puede ser miembro de sí misma, ya que la clase de las clases no puede ser una de las clases que son sus integrantes; por tanto, un nombre no es la cosa nombrada; Esta teoría, afirma que una clase de clases no puede ser un elemento numerado como uno de sus no miembros. Ahora si obviamos esta regla: “ninguna clase puede ser miembro de sí misma” forma que reclama la Teoría de Tipos caemos en una nueva paradoja que deja el discurso viciado.

Si una clase es una entidad y, por serlo, se incluye en el conjunto de todas las cosas, incurrimos en contradicciones: si una clase es una «cosa», «se llega a la conclusión de que existen más clases de cosas que cosas»; por ello, las clases no son «cosas», sino sólo una expresión, que puede emplearse adecuada o inadecuadamente. Dado cualquier grupo de objetos, y al suponer que el grupo es una totalidad, éste contendrá miembros los cuales presupondrán esta totalidad; entonces cada grupo no puede ser una totalidad, tenemos, en primer lugar que la afirmación no significante puede ser hecha a partir de *todos sus miembros*. Las proposiciones deben ser un grupo que no sea una totalidad.

> […] para cualquier propiedad de un orden superior hay una propiedad equivalente de orden inferior. Esta equivalencia no es de significado sino de extensión. Vale decir, que cualquier cosa que tenga una propiedad tiene la otra, de modo que las propiedades definen la misma clase en el sentido que tienen la misma extensión. Así las propiedades son formalmente equivalentes (Russell, 1897: 112 ss)

La paradoja de clases esta formulada de la siguiente manera:

> Si pudiéramos, […] reunir en una sola clase los individuos, las clases de individuos, las clases de clases de clases de individuos, etc., obtendríamos una clase de la que sus propias subclases tendrían que ser sus miembros. La clase compuesta de todos los objetos que pueden ser contados, de cualquier índole que sean, deberá, si hay tal clase, tener un número cardinal que será el mayor posible. Puesto que todas sus subclases serán miembros de ella, no puede haber más de ellas que sus miembros. (Russell, 1919:1348)

Tercera y última aplicación:

La Teoría de los Tipos lógicos hace que se tengan en cuenta los siguientes puntos:

1. Ninguna clase puede ser miembro de sí misma (un nombre no es la cosa nombrada). El error de clasificar el nombre junto con la cosa nombrada es un error en la *asignación de tipos lógicos.*
2. Una clase de clases no puede ser uno de los ítems catalogados correctamente como sus no-miembros.
3. Si se incumple esta sencilla regla del discurso formal, se genera una paradoja y el discurso queda viciado.

Ahora bien en términos más simples: "si la clase de todas las clases no se pertenece a sí misma, entonces no debería pertenecerse a sí misma, pero si no se pertenece a sí misma, debería pertenecerse a sí misma". Teniendo en cuenta cada uno de los pasos vistos con detenimiento en el anterior punto podríamos decir: ¿es la clase de todas las clases que no se contiene a sí mismas un miembro de sí misma? Si no es miembro de sí misma, debería serlo, porque el conjunto incluye todas las clases que no son miembros de sí mismas y si por el contrario se contiene a sí misma, no debería, contenerse a sí misma, ya que la clase es solo de clases que no se contienen a sí mismas. Si tenemos presente que para Russell una clase es un objeto derivado de una función que presupone a la función de la cual es derivado; es indispensable tener presente entonces que la clase no es válida como argumento de la función con la cual está ligada, siempre hay que distinguir que la clase y sus miembros pertenecen a niveles diferentes y recordemos que las expresiones que no respeten la jerarquía de tipos carecen de sentido. No tiene sentido referirse a las clases que son miembros de sí mismas. Ya que no tiene sentido referirse a este tipo de clases es improbable que la paradoja surja.

Tercera

imagen

Capítulo Tercero
La teoría de las descripciones y la paradoja de clases

¿Qué es en efecto, conocer una cosa
si no nombrarla?
Miguel de Unamuno

En este capítulo nos ocupamos de la teoría de las descripciones y la paradoja de clases. Empezaremos ofreciendo una caracterización general de la vida y obra de Bertrand Russell; nos detendremos en su transformación filosófica entre 1903 y 1908, en especial el giro intelectual de corte ontológico, a su nuevo enfoque lingüístico, otorgado por la elaboración de su teoría de las descripciones producida en el año de 1905 (sección1). Luego haremos un acercamiento a la teoría de las descripciones, y su directa influencia en lo que corresponde, a la depuración ontológica del planteamiento teórico Russelliano (sección2). En este orden de ideas, en la tercera y última parte del capítulo presentamos la contribución de la teoría de las descripciones a la solución de la paradoja de clases y su insumisión ontológica (sección 3).

3.1 Un apunte biográfico. Russell entre los Principios y los Tipos

Antes de centrarnos en ese periodo (1903-1908) de reflexión, vamos a introducir algunos aspectos que no hemos tratado hasta ahora; pero que nos harán acercarnos un poco más a la personalidad de nuestro autor y a la naturaleza que envuelve el problema de las paradojas. Bertrand Russell nació en 1872 y murió en 1970. Pertenecía a una familia noble de la aristocracia liberal inglesa. Su antepasado John Russell fue uno de los más ricos y enérgicos miembros de la nueva aristocracia creada por Enrique VIII. Su abuelo, Lord John Russell, fue un político conocido que obtuvo tres veces el cargo de primer ministro durante la regencia de la reina Victoria.

En su infancia Russell fue criado por su abuela paterna y educado privadamente después de la prematura muerte de sus padres. Más tarde se formó en matemáticas y filosofía tras haber ganado una beca en el Trinity College de Cambrige, doctorándose en el año de 1894. Sus manifestaciones como pacifista durante la primera guerra mundial lo condujeron a su primer encarcelamiento que empleó para escribir su libro *Introducción a la filosofía matemática.* Dictó charlas sobre filosofía, política y temas sociales por varias partes del mundo y produjo una amplia y variada gama de libros que incluían temas filosóficos, matemáticos, científicos, políticos, éticos, religiosos y también educativos. En 1950 ganó el premio nobel de literatura. Se caso cuatro veces y se divorcio tres. Su actividad política le ocasionó dos sentencias de cárcel una de seis meses en 1918 por difamación contra el ejército norteamericano, y otra, a los ochenta y nueve años, por incitación a la desobediencia civil, en apoyo a la campaña para el desarme nuclear.(O'connor, 1983 7: 43-44)

Pero ¿qué fue lo que llevó a que Bertrand Russell con formación matemática se inclinara por la filosofía? En su autobiografía nos cuenta de este especial interés que se dio por una razón fundamental: la incansable lucha por hallar buenas razones para creer en la verdad de las matemáticas:

> Éste fue uno de los grandes sucesos de mi vida, tan deslumbrante como un primer amor. No había imaginado que hubiera algo tan delicioso en el mundo. Después de haberme aprendido la quinta proposición de Euclides, mi hermano me dijo que en general era considerada difícil, pero yo no había encontrado ninguna dificultad. Esta fue la primera vez que se me ocurrió que yo quizás podía tener algo de inteligencia. Desde aquel momento hasta que Whitehead y yo terminamos *Principia Mathematica*, cuando yo tenía 38 años, la matemática fue mi principal interés y mi fuente principal de felicidad. Como toda felicidad sin embargo, no estaba sin empañar. Se me había dicho que Euclides demostraba cosas, y me decepcionó bastante que comenzara con axiomas. En un principio me rehusé a aceptarlos a menos que mi hermano pudiera ofrecer alguna razón para hacerlo, pero entonces me dijo: "Si no los aceptas no podemos continuar", y como yo deseaba continuar las acepte provisionalmente. La duda acerca de las premisas de la matemática que sentí en ese momento permaneció conmigo y determinó el curso de mi trabajo subsiguiente. (Russell, 1967: 36)

Este pasaje nos muestra un Russell que poseía una razón particular para experimentar con deleite amoroso el formarse en geometría euclidiana, aquí acepta la verdad de los axiomas solo por deferencia con su hermano, debido única y exclusivamente a la condición que pone éste de proseguir, pero hace evidente la negación de confiar en la verdad de los axiomas. Se interesa en la filosofía a raíz de su deseo de encontrar buenas razones para creer en la verdad de las matemáticas (Ayer, 1983: 36). Lo que intenta revelar es la necesidad de llegar a donde reposa lo autoevidente de los axiomas y su por qué. No abandonó su idea de que las proposiciones de la geometría, y las de cualquier otra rama de la matemática, necesitaban una ulterior justificación. (Ayer, 1983: 37) Es esta una de las razones que marca el interés y desarrollo académico sus primeros cincuenta años de vida.

> Encontré gran deleite en la matemática, mucho más deleite que en cualquier otro estudio. Me gustaba pensar en las aplicaciones de la matemática al mundo físico, y tenía la esperanza de que con el tiempo habría una matemática del comportamiento humano tan precisa como la matemática de las maquinas. Esperaba esto porque me gustaban las demostraciones y la mayor parte del tiempo esta motivación pesaba más que el deseo que también sentía de creer en el libre albedrío (Russell, 1956: 20)

Fue amor a primera vista. Las matemáticas eran ese algo que, en sus propias palabras, podía amar sin ser amado en reciprocidad, y es así como se convirtieron en una obsesión. Para Russell, las matemáticas prometían una única vía para la certeza y perfección. "Me desagradaba el mundo real –admitía-, y busqué refugio en el mundo, sin tiempo, sin cambio ni corrupción ni el fuego fatuo del progreso". (Russell, 1959: 210)

A pesar de estar directamente asociado este tipo de inclinaciones teóricas con la propuesta filosófica de Platón, en donde se hace referencia al mundo de las ideas, como verdades eternas, inmutables, imperecederas que son conocidas única y exclusivamente por la razón, Russell las otorga a Pitágoras convirtiéndose para él en una imagen representativa ya que se estableció como el ideal de filosofo que Russell aspiraba a ser, y le dio forma a la pasión que persiguió en su filosofía de la matemática. Russell presenta a Pitágoras tanto como un profeta espiritual como un matemático puro.

> Aunque largamente sospechado de que toda la matemática pura tradicional fuese derivable de los números naturales es realmente es un descubrimiento reciente. Pitágoras que creía que no solamente la Matemática, sino que también todo lo demás era deducible de los números, fue quien descubrió el más serio obstáculo en la llamada "aritmetización" de la Matemática. Fue el mismo quien descubrió la existencia de los inconmensurables, y en particular la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con la diagonal. Acerca de los triángulos rectángulos, la longitud de la hipotenusa de un triangulo rectángulo en el que los otros dos lados tiene cada uno una unidad de longitud será la raíz cuadrada de 2. El problema es que la raíz cuadrada de 2 es inconmensurable, es decir no se puede expresar no tenía en modo alguno la apariencia de un número como la relación entre dos números o, para decirlo de otra manera es irracional […] (Russell, 1919: 1268)

El problema de los inconmensurables se mantuvo, Pero para aquellos que conservaban la idea que en la matemática todo era sinónimo de perfecto rigor y exactitud, y al aparecer cantidades como raíz de 2 y pi fueron ¡era desconcertante! Aunque fueron incluidas, como parte de la matemática aun no existía una definición satisfactoria de ellos o, por lo tanto, de la noción de "número real" en general. Tres nociones fundamentales en matemática parecían constitutivamente paradójicas: infinito, infinitesimal y continuidad…Las paradojas del infinito y de la continuidad eran célebres y conocidas desde la antigüedad, pero adquirieron una original importancia a medida que creció la capacidad de la matemática para incorporar secuencias continuas e infinitas. Para mediados del siglo XIX, estos embarazosos problemas lógicos en el corazón de la matemática habían inspirado un movimiento liderado por matemáticos alemanés, para proveer a la matemática y en particular al cálculo de unos cimientos más rigurosos (Monk, 1998: 15 ss)

Russell no conocía el trabajo de esos matemáticos y sentía una gran decepción con la manera en que se enseñaba la matemática, antes y en su formación universitaria en ella, se trataba a la matemática, no como un establecimiento de verdades exactas, sino que eran enseñadas con un enfoque pragmático, dándole exclusivamente técnicas útiles de aplicabilidad.

> Quienes me enseñaron el cálculo infinitesimal no conocían las demostraciones válidas de sus teoremas fundamentales y trataron de persuadirme para que aceptara el uso de los sofismas oficiales como un acto de fe. Me di cuenta de que el cálculo funcionaba en la práctica, pero quedaba perplejo al tratar de comprender cómo podía ser así. Sin embargo, encontraba tanto placer en la adquisición de habilidades técnicas que la mayoría del tiempo olvidaba mis dudas" (RUSSELL B. My Philosophical Development, pag 35- 36) […] "La enseñanza matemática en Cambridge cuando yo era un estudiante de pregrado era definitivamente mala. Su mediocridad se debía en parte a la clasificación en orden de mérito en el *Tripos* (exámenes finales en la universidad de Cambridge) que fue abolida no mucho después. La necesidad de una bonita discriminación entre las habilidades de distintos examinados llevaba a privilegiar los "problemas" como opuestos al "trabajo de texto". Las demostraciones de los teoremas matemáticos eran un insulto a la inteligencia lógica. En efecto la matemática entera era enseñada como un conjunto de trucos ingeniosos para acumular puntos en el *Tripos*. El efecto de todo esto sobre mi fue hacerme creer que la matemática era repugnante. Cuando terminé mis *Tripos*, vendí todos mis libros

> matemáticos e hice la promesa de que nunca jamás miraría un libro de matemática. Así que, en mi cuarto año, me zambullí de todo corazón en el fantástico mundo de la filosofía. (Russell, 1959: 37 ss)

Decepcionado, Russell se refugia en estudios filosóficos en el año de 1893, recurriendo a la metafísica para hallar satisfacción, rigor y exaltación del mundo pitagórico y la geometría euclidiana que lo había suspendido en un rapto amoroso colmándolo de satisfacción y goce contemplativo. Con toda la esperanza puesta, Russell se enfrenta decidido a encontrar un conocimiento exacto y absoluto de los fundamentos de la geometría, pero esta vez no recurre a la matemática sino a su nuevo descubrimiento: el idealismo transcendental kantiano y su *Critica de la razón pura*, en donde Kant plantea ¿Cómo es que los teoremas de la geometría euclidiana puedan establecerse sobre la base de la sola razón y sin embargo ser verdaderos para el mundo físico? Kant concluye que la geometría euclidiana no delinea al mundo tal como es en sí mismo, sino el mundo tal como se nos aparece. No es que el mundo tenga que ser como Euclides lo describe, sino que nosotros tenemos que verlo e imaginarlo así. En términos kantianos, lo que la geometría describe es nuestra forma de intuición con respecto al espacio. Es así como la geometría euclidiana muestra sus teoremas como necesariamente verdaderos, como si su verdad estuviese respaldada, al igual que los principios de la lógica, por la naturaleza misma de la razón. La duda gracias a la aparición de sistemas divergentes de la geometría: las geometrías no euclidianas; las dos más relevantes fueron las creadas por el matemático alemán Bernhard Riemann y el Ruso Nikolai Lobachevsky. Quienes no tuvieron en cuenta el quinto postulado de Euclides (que afirma que dos líneas paralelas nunca se encuentran) y elaboraron descripciones de un espacio "curvo". Reconociendo que en este tipo de espacio, todo es distinto: los ángulos de un triangulo, no suman 180 grados sino un poco más (en la geometría de Riemann) o un poco menos (en la geometría de Lobachevsky). Teniendo en cuenta que estos sistemas son en sí mismos consistentes, demostraría que Kant se encontraba equivocado: no tenemos que percibir el mundo como euclideano. ¿Por qué no verlo según el modelo de Riemann o Lobachevsky? Esta situación va a atacar la idea que animaba a Russell a la edad de once años, la idea de que podemos conocer, apriori, y con total certeza y exactitud absoluta, las relaciones espaciales que existen en el mundo físico.(Monk, 1998: 23)

En su *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, primer libro filosófico de Russell, admite la aproximación kantiana sobre la geometría, sólo que el *apriori* antes de la experiencia espacial no era la geometría euclidiana sino la proyectiva que estudia las figuras geométricas no respecto a sus tamaños, sino solo respecto a sus formas, afirmando que los axiomas serían ciertos ya sea que el espacio sea curvo o no, siempre y cuando su curvatura sea constante. (Russell, 1973: 141-142). En esta época Russell se distanciaba y apartaba la aplicación de las geometrías no euclidianas en la experiencia; decisión equivocada que la formulación de la teoría de la relatividad revocaría pocos años después. (Russell, 1897: 149).

Más adelante, Russell le quita valor a su primer trabajo de geometría contemplándolo como algo sin importancia, pero en la época de su publicación consideró que estaba a punto de llevar a cabo, mediante el idealismo filosófico, algo así como el sueño pitagórico: revelar la realidad racional de verdades eternas ocultas detrás del confuso aspecto de los hechos contingentes y esta vez no sería por medio de la geometría o la aritmética sino por medio de la lógica dialéctica en particular la que había introducido Georg W. F. Hegel: intentando por un proceso de síntesis superar todas las contradicciones reuniendo a los opuestos para formar nuevas unidades trascendentes llegando a comprender la totalidad de la realidad como una idea absoluta. Pero no conforme, se adhiere al neo hegelianismo por medio del contacto con J.M.E. McTaggart quien percibía filosóficamente al igual que Hegel la interconexión de todo lo que hay en el mundo. Por ende la separación es una ilusión. "toda la realidad es racional y justa…el propósito más alto de la filosofía es indicarnos la naturaleza general de una armonía final, cuyo contenido completo no ha entrado aún en nuestros corazones para ser concebida". "Toda verdadera filosofía", declara McTaggart, tiene que ser mística, no tanto en sus métodos como en sus conclusiones".

Esto nos muestra que Russell se ancla en esta percepción racional del mundo en donde es necesario superar categorías inferiores que están inmersas de contradicciones resueltas por síntesis hasta llegar al absoluto. Por un breve periodo Russell se inspiró en esta forma mística emprendiendo el proyecto de redactar una dialéctica de las ciencias en donde pretendía demostrar la superioridad de la filosofía hegeliana sobre todos los otros intentos, mostrando las contradicciones resueltas dentro de las matemáticas, la física y otras ciencias (Monk, 1998: 24-25).

Russell no se estableció por mucho tiempo en la postura idealista, el escepticismo relativista y el subjetivismo de Hegel y Kant, ya que no satisfacían las necesidades de la línea intelectual firme a la cual deseaba acogerse. Siente que sus esfuerzos lo han conducido a descubrir que las contradicciones lógicas se han presentado debido a la mala filosofía o a la indiferencia por la filosofía, es esta la que produce mala matemática (las sofisterías oficiales y los trucos ingeniosos). Según Russell los matemáticos, si realmente se interesaran por la verdad matemática, deberían estar más atentos a las paradojas como la del infinito, la continuidad y lo infinitesimal y recrear de nuevo los fundamentos lógicos y filosóficos.

A finales del siglo XIX la revolución del "atomismo lógico" y la "lógica matemática" establecieron el terreno filosófico un poco más firme sobre el que caminaría de aquí en adelante. "La tarea de la filosofía ya no era demostrar la conexión de todo, ni demostrar que la realidad era un todo indivisible. Por el contrario, la tarea era identificar, a través del análisis, los átomos discretos-materiales, psicológicos y lógicos-con los que está construido el mundo". (Monk, 1998: 28) En cada nuevo paso, sin embargo, Russell siempre llevó consigo sus anteriores influencias, de una u otra manera. (Russell, 1964: 9) Debido a la ruptura con el idealismo rompe la postura del subjetivismo kantiano en las matemáticas y en su obra los *Principios de la matemática* de 1903 manifestaba:

> Gracias al progreso de la lógica simbólica, especialmente tal cual la trata el profesor Peano, puede darse ahora refutación final e irrevocable a esta parte de la filosofía kantiana".

Y esto muestra como su pensamiento se vincula al logicismo; sigue la cita

> Con la ayuda de diez principios de deducción y de otras diez premisas de naturaleza lógica general (por ejemplo, "la implicación es una relación") puede deducirse toda la matemática estricta y formalmente, y todas las entidades que figuran en matemática pueden definirse en función de las que figuran en las veinte premisas anteriores. Bajo esta formulación la matemática no sólo incluye la aritmética y el análisis sino también la geometría, euclidiana y no euclidiana. La dinámica racional y un número indefinido de otros estudios aún no comenzados o en su infancia. El hecho de que toda la matemática sea lógica simbólica es uno de los descubrimientos más importantes de nuestro tiempo; y una vez establecido este hecho, lo que queda de los principios de la matemática consiste en el análisis de la propia lógica simbólica (Russell, 1967: 29)

"Toda la orientación de la matemática moderna, con su creciente insistencia en el logro del rigor, se rebeló en contra de la teoría kantiana" (Russell, 1945: 205). Russell en su "empresa" contra Kant y Hegel se adhirió a la orientación filosófica de su amigo G.E. Moore. Es esta filosofía la que aparece en las cuestiones fundamentales, de hecho, así lo reconoce en el Prefacio del libro *Los principios de la matemática*.

> He aceptado de él la naturaleza no existencial de las proposiciones (excepto de aquellas que expresan justamente existencia) y su independencia de cualquier mente consciente; y también el pluralismo que considera al mundo, tanto el de lo existente como el de las entidades, como compuesto de un número infinito de entidades independientes entre sí, con relaciones últimas y no reducibles a adjetivos de sus términos o del todo que ellas componen". (Russell, 1897: 390).

Para Russell su separación de Kant y Hegel, aparte de buscar romper con la teoría de las "relaciones internas" y de asentar la independencia de la realidad y el conocimiento, lo condujo, en oposición de Moore, a las cuestiones lógicas. El propósito de deducir la matemática a la lógica era demostrar que la filosofía de Kant y Hegel eran falsas.

> La filosofía de la matemática ha sido hasta ahora tan controvertida y ha estado tan estancada como las otras ramas de la filosofía. Aunque en general se estaba de acuerdo en que la matemática en algún sentido es verdadera, los filósofos discutían acerca de qué

> significaban realmente las proposiciones matemáticas; aunque algo era verdad, no había dos personas que estuvieran de acuerdo acerca de qué es lo que era verdad, y si algo se sabía, no había dos personas que estuvieran de acuerdo acerca de qué es lo que sabía. Sin embargo, mientras que esto fuera dudoso, difícilmente podía decirse que es posible obtener de la matemática algún conocimiento seguro y exacto. Encontramos, por lo tanto, que los idealistas han estado inclinados más y más a considerar toda la matemática como algo que se ocupa solamente de la apariencia, mientras los empíricos han sostenido que todo lo matemático es una aproximación a una verdad exacta acerca de lo cual no tienen nada que decirnos. Este estado de cosas, hay que confesarlo, era totalmente insatisfactorio. La filosofía le pregunta a la matemática: ¿qué significa? En el pasado la matemática no pudo contestar, y la filosofía respondió introduciendo la noción del todo impertinente de la mente. Pero ahora la matemática puede responder, al menos en cuanto a reducir la totalidad de sus proposiciones a ciertas nociones fundamentales de la lógica. Había hasta hace muy poco, una dificultad especial en los principios de la matemática. Parecía obvio que la matemática consiste en deducciones, y sin embargo los métodos ortodoxos de deducción eran en su mayor parte, o totalmente, inaplicables a la matemática existente. No solo la teoría silogística aristotélica, sino también las modernas teorías de la lógica simbólica eran, o teóricamente inadecuadas para el razonamiento matemático, o en cualquier caso requerían tales formas artificiales de las afirmaciones que no podían aplicarse en forma práctica. En este hecho estaba la fortaleza del punto de vista kantiano, que afirmaba que el razonamiento matemático no es estrictamente formal, sino que siempre usa intuiciones, es decir, el conocimiento a priori del espacio y del tiempo. Gracias al progreso de la lógica simbólica, especialmente de la forma como fue tratada por el profesor Peano, esta parte de la filosofía kantiana puede ser refutada final e irrevocablemente. (Russell, 1900: 394)

Este libro va a ser uno de los primeros que usa terminología técnica y formal, sin ser una obra de lógica o de matemática. Aquí Russell no va a construir un sistema lógico, la intención es plantear la posibilidad de reducir la matemática a la lógica en unos pocos y fundamentales axiomas. El giro de Russell de la síntesis al análisis y del idealismo al realismo se la atribuye en varias ocasiones a Moore, pero es el impacto que produce los trabajos de Weierstrass, Cantor y Dedekind (Russell, 1964: 10).

El proceso de ruptura, sin embargo, no orientó a Russell a tomar una posición empirista siguiendo una postura filosófica como la de Mill. Russell aspiraba encontrar la verdad y la realidad, y ésta parecía estar en las matemáticas; pero las matemáticas no podían ser simplemente empíricas, había que encontrar un terreno intermedio para la matemática entre lo subjetivo y lo objetivo material. La crítica a Mill, nos dirá en *Los problemas de la filosofía,* se concentra en la imposibilidad de probar la validez del principio inductivo por inducción, y porque las proposiciones matemáticas no necesitan la enumeración de casos particulares, basta con sólo uno (Russell, 1928: 99-100). Es necesario establecer la distinción, y ésta se realiza por la diferencia en la demostración: “La diferencia entre una proposición general *a priori* y una generalización empírica no proviene del sentido de la proposición, sino del género de prueba en que se fundan”. (Russell, 1964: 126.)

S. Mill no conseguía satisfacer la mentalidad y ambiciones filosóficas de Russell. La resistencia frente a Hegel y Kant lo condujo a dotar de realidad a los conceptos, las categorías, las entidades de la matemática, “cualquier cosa que no pudiese ser refutada” (Ibid la evolución de mi pensamiento filosófico pag 11). Se trataba entonces de un “edificio de verdades” real. Un mundo independiente de los objetos, no material (Ibid evolución de mi pensamiento p.240) Para Russell, como reconoce en la introducción a la segunda edición de sus *Principios*:

“Los números eran inmutables y eternos, como los cuerpos celestes; los números eran inteligibles; la ciencia de los números era la llave del universo (...). Cuando escribí los *Principios*, compartía con Frege la creencia en la realidad platónica de los números, que, en mi imaginación personificaban el dominio eterno del Ser” (Russell, 1973: 383). El Platonismo de Russell fue tradicional y en este libro esbozó las nociones básicas y axiomas que su reducción lógica contendría. Los objetos ideales poseen una realidad que es aprendida por el sujeto de una forma directa y esta realidad la demuestra desde la noción de clase. El trabajo más significativo en filosofía fue el que inspiro el aporte otorgado por matemáticos como Dedekind, Weierstrass y Cantor, quienes abrieron el camino para corroborar que la matemática es lógicamente consistente o simplemente habían bridado soluciones a lo que históricamente mostraba su falibilidad, y lo que Russell anhelaba era con una completa demostración de la identidad de la matemática y la lógica.

> La conexión de la Matemática con la lógica, es extraordinariamente estricta. El hecho de que todas las constantes sean constantes lógicas y de que todas las premisas de la matemática estén relacionadas con ellas, da creo yo, la formulación precisa de lo que los filósofos han indicado al afirmar que la matemática es a priori. (Russell, 1900, 398)

Los Principios es un libro con un nivel técnico bastante sofisticado en donde se propone Russell una tarea difícil elaborar argumentos lo suficientemente sólidos para mostrar que se puede llevar a cabo una reducción de la matemática a la lógica. En esta obra Russell muestra cómo podrían ser las nociones básicas y cuales serian sus axiomas fundamentales y uno de los más importantes para llevar a cabo su proyecto era el concepto de clase.

> La matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma "*p* implica *q*", donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni *p* ni *q* contienen ninguna constante, excepto las constantes lógicas. Y las constantes lógicas son todas las nociones definibles en los términos siguientes: implicación, la relación de un término a una clase de la que es un miembro, la noción de "tal que", la noción de relación y otras nociones tales que puedan ser incluidas en la noción general de proposiciones de la forma anterior. Además de ellas, la Matemática usa una noción que no es el elemento integrante de las proposiciones que considera, la noción de verdad [...] Nuestro método se basará en el análisis y nuestro problema puede llamarse filosófico -es decir, en el sentido de que intentaremos pasar de lo complejo a lo simple, de lo demostrable a sus premisas indemostrables-. (Russell, 1900: 393)

La tarea que afronta Russell en esta obra es reducir el sistema matemático de Peano a un sistema lógico mucho más reducido que sus 5 axiomas detengámonos solamente en los dos primeros:

> El primero de los axiomas de Peano es "toda clase está contenida en sí misma". Esto es equivalente a "toda proposición se implica a sí misma". Parece no haber posibilidad de evitar este axioma, que es equivalente a la ley de identidad excepto por el método empleado al usar la autoimplicación para definir proposiciones. El segundo es el axioma de que el producto de dos clases es una clase. Este debe haberse establecido, como también la definición del producto lógico, para una clase de clases; pues cuando solo se establece extenderse al producto lógico de una clase infinita de clases. Si se toma "clase" como indefinible, es un axioma genuino que es muy necesario para razonar. (Russell, 1900: 416)

Lo grandioso de los axiomas de Peano era que estaban planteados en términos de clases entonces lo que debía hacer era demostrar que los números se podían definir en términos de clases y lo que hizo fue aprender de Cantor la correspondencia de uno a uno de los conjuntos equipotentes. Es así como pasa a definir número, número finito e infinito, continuidad, cardinales y ordinales transfinitos, relación de la geometría métrica con las geometrías proyectivas y descriptiva, el movimiento absoluto y el relativo.

Recordemos que surge una dificultad y su estado de abstracción intelectual perece, descubre que la noción de clase en donde estaba apoyado todo su proyecto de reducción lógica de la matemática era contradictoria. Tengamos presente que las clases son, para Russell un tipo de objeto, no es un objeto tangible pero tenía realidad objetiva, no se encontraban en la mente sino en el reino de las formas. Y para Russell los números eran clases. Si los números son clases de clases éstas tenían que ser una especie de objeto tenían existencia. Esta dificultad surge luego de haber reflexionado con detenimiento sobre la teoría de los conjuntos infinitos de Cantor, en donde ya había demostrado la inexistencia de un número cardinal más grande que todos. El grado de preocupación también se muestra cuando descubre que la demostración su axioma de infinitud era falsa.

> En la práctica, es posible un gran desarrollo de la matemática sin admitir la existencia de ninguna cosa. Puede construirse toda la aritmética elemental de los enteros finitos y las fracciones racionales; pero todo lo que implique clases infinitas de enteros resulta imposible. Esto excluye a los números reales y a la totalidad del análisis. Para incluirlos necesitamos el "axioma de infinitud", el cual establece que, si n es un número finito existe por lo menos una clase que tiene n miembros. En la época en que escribí los *Principios* supuse que esto se podía probar, pero por el tiempo en que Whitehead y yo publicamos los *Principia Mathematica* nos habíamos convencido de que la supuesta demostración era falsa. (Russell, 1900: 382)

En su transformación o depuración ontológica que ha producido esta crisis, Russell se hace preguntas como: "Respecto a las constantes lógicas, Primero ¿existen tales constantes? Segundo ¿cómo se definen? Tercero ¿figuran en las proposiciones de la lógica? Y Afirma "la dificultad radica en que cuando analizamos las proposiciones en la expresión escrita en que figuran tales símbolos ("o", "y", "no", "si entonces", "la clase vacía", "0", "1", "2"…) encontramos que no tiene elementos constituyentes que correspondan a las expresiones en cuestión". Y continúa:

> […] ni aún el más ardiente platónico defendería que "o" perfecto está situado en un lugar celeste y que los "o" terrestres son copias imperfectas del arquetipo celeste. Pero en el caso de los números, esto es menos evidente. Las doctrinas de Pitágoras, que dieron lugar al misticismo aritmético, influyeron sobre toda la filosofía y la matemática posteriores y más profundamente que lo que generalmente se cree. Los números eran inmutables y eternos, como cuerpos celestes, los números eran inteligibles, la ciencia de los números era la llave del universo. Esta última tesis ha engañado a matemáticos y al ministerio de educación hasta el día actual. Decir que los números son símbolos que no significan nada parece una forma horrible de ateísmo. (Russell, 1900: 383)

Russell evidencia su decepción, pero frente a esta dificultad muestra el camino que recorre en esa nueva etapa intelectual. Lo primero que aborda es su teoría de las descripciones de 1905, con ella descubre frente a la proposición "Scott es el autor de Waverley" que no hay ningún componente que corresponda a el autor de Waverley, al igual que la discusión con Meinong sobre el cuadrado redondo no existe, evidencia una extraña cualidad la de no existir. Su siguiente etapa es la abolición de las clases:

> Esta etapa se cubrió en los *Principia Mathematica*, donde se dice: los símbolos para clases, al igual que los símbolos para las descripciones, son en nuestro sistema, símbolos incompletos; sus "usos" están definidos, pero establece que ellos en sí mismos tengan algún significado…Así las clases, en tanto que las introducimos, son simplemente conveniencias simbólicas o lingüísticas, no genuinos objetos. Dado que los números cardinales han sido definidos como clases de clases, también son meras conveniencias simbólicas o lingüísticas.

Russell continúa en la misma dirección logicista y, propone en un artículo *Algunas dificultades en la teoría de los números transfinitos y orden de los Tipos* de 1906 la eliminación de las contradicciones en tres teorías: la primera, la *limitación de la grandeza,* la segunda, del *zig-zag* y la tercera, la nuevamente re-elaborada *teoría de los tipos*. Esta última es la retomada en el trabajo *Teoría de clases* del mismo año, donde establece la reducción de las clases a las respectivas funciones y fija la imposibilidad, para toda función de su aplicación a sí misma, como argumento propio. Establece así, la insensatez de toda frase de la forma $f(f)$ en donde la noción de la clase, que es miembro de sí misma, es un sin sentido; de esta manera se obtiene una serie de tipos en donde se distinguen niveles del lenguaje. En consecuencia si en el primer nivel del lenguaje se presenta una paradoja, es porque no se está aplicando una clara diferenciación de tipos, presentándose de esta forma confusión de niveles semánticos y generando paradojas. Es así como la filosofía de Russell marca un nuevo desarrollo, el abandono de su excesiva ontología hacen que su construcción filosófica se dirija a lo que realmente hay en el mundo y el cómo lo podemos nombrar.

3.2 Teoría de las descripciones

A pesar de hallar dificultades en torno a la naturaleza de la matemática, Russell conservaba todavía la fe en la verdad y concebía la necesidad de verla correctamente en su absoluta belleza… "De las virtudes mas austeras, el amor a la verdad es la principal, y en la matemática más que en cualquier otra parte, el amor a la verdad puede encontrar estimulo para la fe en la decadencia" (Misticismo y Lógica: 62-74) Pero si las clases y los números eran ficciones y el mundo pitagórico contaba con la misma realidad, entonces debe comenzar un camino que lo direcciona a sus últimos hallazgos en donde redefine que lo que creía que eran cosas existentes de hecho solo eran palabras o símbolos sin sentido o incompletos (si fuera completo habría un objeto que se refiera a él).

Russell, teniendo en cuenta su planteamiento fundamental que cualquier función proposicional que tuviera sentido le correspondía una clase, va a someter a un estricto seguimiento poniendo límites y de esta manera identificar lo que se podía contar como significativo menos platónico-pitagórico acerca de qué clase de cosas existen y las primeras que descarta son las mismas clases; siendo las funciones proposicionales las que van a apoyar los fundamentos de las matemáticas. De esta manera, intentó ver detrás de las formas lingüísticas una verdad y autentica forma lógica que se halla escondida entre éstas.

Es así como inicia una nueva trasformación teórica pasando de lo ontológico a lo lingüístico; dejando de esta manera un poco atrás su anterior recorrido en donde estaba colmado de ontología y menos de lenguaje.

"En la percepción adquirimos conocimiento directo de los objetos de percepción, y en el pensamiento de los objetos de carácter lógico más abstracto" (Russell, Bertrand. *Los principios de la matemática*. p.12). Ahora detengamos en el año de 1905 y observemos qué pasa con su concepción de la realidad y su proyecto pitagórico. Bertrand Russell, en su artículo "On Denoting" presenta como propósito principal hacer uso de la navaja de Occam: disminuir obligaciones ontológicas al mínimo, esto significa que debemos creer en la existencia de objetos que sean necesarios, en tanto nos sirvan para nuestras explicaciones.

De tal forma que al aplicar la navaja de Occam a las expresiones denotativas se va a disminuir la obligación ontológica (un ejemplo de ello sería: si no hay tantos nombres propios no habrá tantos objetos) y como resultado, se da cuenta de la verdad y la falsedad de los enunciados. De hecho, las dificultades que estaban asociadas con la suposición de creer que el significado de un nombre ha de identificarse con el objeto que dicho nombre denota, condujeron a Russell a proponer la teoría de las descripciones definidas. Para Russell, el significado que tiene una expresión, especialmente el nombre propio, será su denotación. Una expresión denotativa es una expresión como: Un hombre, algún hombre, cualquier hombre, todo hombre, todos los hombres, el actual rey de Francia (Russell, 1905: 1371). Russell, por lo tanto argumenta que una expresión es denotativa en virtud de su forma.

De esta manera reconoce tres instancias: 1- Una expresión puede ser denotativa y sin embargo no denotar nada, verbi gracia “el actual Rey de Francia”; 2- Una expresión puede denotar un objeto especifico como “la actual Reina de Inglaterra, denota una determinada mujer; y 3- una expresión puede denotar algo con un cierto grado de vaguedad verbi gracia “un hombre” no denota muchos hombres sino un hombre indeterminado. Además, Russell intenta demostrar un principio fundamental de la teoría de la denotación que propone. Este es que “las expresiones denotativas nunca poseen significado alguno consideradas en sí mismas, pero que toda proposición en cuya expresión verbal intervienen aquellas posee un significado” (Russell, 1905: 1370).

Ahora bien, dentro de las expresiones que Russell considera denotativas hay un grupo que observa como algo mucho más interesante y complicado que el resto, a saber, la expresiones que contienen el articulo definido el. Esto porque el articulo definido, además de designar la univocidad del objeto, compromete la exclusividad (saca del conjunto) de la persona o las personas y de las características que se predican, o mejor aún, se compromete ontológicamente la existencia de una, solo una entidad.

A continuación, Russell procede a aplicar la navaja de Occam con el fin de reducir todas las proposiciones en que intervienen tales expresiones denotativas a fórmulas en las que no intervienen tales expresiones. Comienza, entonces, a examinar la teoría de Meinong según la cual todo nombre propio o descripción definida representa un objeto, el cual debe de tener una existencia lógica, esto es, una existencia. No obstante, cuando consideramos expresiones tales como “el actual Rey de Francia” o el “cuadrad redondo”, inexistentes en el mundo de los hechos, se admite que objetos no existen, sin embargo, se sobreentiende que son objetos. Esto de por sí amenaza con infringir el principio de no contradicción ($a \wedge \neg a$), es decir, se pretende que “el cuadrado redondo” no exista, y al mismo tiempo exista. En palabras de Russell:

La más simple de entre las posibles teorías que admiten tales elementos constitutivos es la de Meinong. Esta teoría considera que toda expresión denotativa gramaticalmente correcta representa un objeto. Así, “el actual rey de Francia”, “el cuadrado redondo”, etc., son entendidos como auténticos objetos. Se admite que tales objetos no subsisten, pero, no obstante, se sobre entiende que son objetos. Esto ya establece de por sí una interpretación difícilmente razonable; pero la objeción principal es que tales objetos amenazan con infringir el principio de no contradicción. Se pretende por ejemplo, que el actualmente existente rey de Francia existe y que, al mismo tiempo, no existe; que el cuadrado redondo es redondo y a la vez, no redondo (Russell, 1905: 1367)

Para Russell la teoría de Frege evita esa infracción del principio de no contradicción, condición tan necesaria para admitir alguna posible conclusión, ya que Frege distingue en toda expresión denotativa dos elementos, a saber; el significado y la denotación. No obstante, una objeción que Russell le encuentra a esa teoría surge cuando consideramos aquellos enunciados en los que hay denotación alguna: por ejemplo, si decimos “La reina de Escocia es calva”, no se trata de un enunciado que verse sobre el sentido “la reina de Escocia, sino acerca de la persona realmente denotada por dicho sentido. Pero si consideramos la siguiente proposición “el rey de Francia es calvo”, aunque no carezca de sentido, ciertamente carece de denotación.

En consecuencia, concluye Russell que si se acepta que las expresiones denotativas poseen esta doble cualidad de sentido y denotación, aquellos casos en los que no aparezca haber denotación alguna plantearan dificultades, tanto de hecho si las hay como si no. No obstante, para Frege no es el sentido, sino el signo el que denota y lo hace en virtud del sentido, es decir, el sentido contiene el modo de darse del objeto.

Junto a Frege en su proyecto logicista, Russell concuerda el custodiar el realismo platónico en lo que se refiere a los objetos de la matemática como números, relaciones, clases, etc., éstas poseen una existencia independiente del sujeto y de la experiencia. Una correspondencia del tipo "si **P** = **Q**, y **Q** = **R**, entonces **P** = **R**" apareciendo una emancipación del sujeto que la piensa, existe y es siempre verdadera. Pese a esto, hay una cuestión significativa, sobre la cual Russell en estos años se aparta de Frege: su *Teoría de las Descripciones.* Frege había hecho notar que expresiones como "la estrella de la mañana" y "la estrella de la tarde", aunque aluda al mismo planeta Venus, dicen dos cosas diferentes, tienen sentidos distintos. Por lo tanto, habían diferenciado entre (Sinn) sentido y (Bedeutung) referencia o como son llamados lingüísticamente connotar y denotar o intensión y extensión.

Las dos expresiones citadas hace un instante poseen el mismo significado o la misma denotación, indican el mismo objeto; sin embargo, su sentido o connotación lo que dicen de ese objeto es distinto. Ahora bien, Alexius Meinong también había reflexionado sobre estos problemas y sobre el status de determinadas frases como las siguientes: "la montaña de oro no existe" o "el círculo cuadrado no existe". Se trata de proposiciones verdaderas y que en algunos casos pueden llegar a ser útiles. No obstante, plantean un problema: ¿cómo puede una proposición ser verdadera y tener significado, si hace referencia a la nada? Se pensó, por lo tanto que debía haber algún sentido en el que existen las montañas de oro o los círculos cuadrados, esto es, los objetos indicados por las expresiones denotantes.

En definitiva, aunque no existan en la realidad, las montañas de oro o los círculos cuadrados, deben poseer algún genero de existencia, si las expresiones que los denotan forman parte de los enunciados que tienen significado y son verdaderos, como ocurre en el caso de la afirmación "el circulo cuadrado no existe". Russell se rebeló ante el reino de las sombras defendido por Meinong y, para evitar los engaños y los enigmas a los que conducen tales expresiones denotantes, propuso un análisis que hiciese desaparecer esta clase de expresiones: en vez de decir "la montaña de oro no existe", se puede decir: "no hay ninguna entidad, que al mismo tiempo sea de oro y sea montaña".

> Al faltarles el aparato lógico de las funciones proposicionales, muchos lógicos llegaron a la conclusión de la existencia de objetos irreales. Se ha argumentado, por Meinong, por ejemplo, que podíamos hablar de "la montaña de oro", de "el cuadrado redondo", etc.; que podríamos enunciar proposiciones ciertas de las que aquellas fuesen sujetos; de aquí que estos tuviesen alguna especie de ser lógico, puesto que, de otro modo, las proposiciones en que intervienen carecerían de sentido. Hay tales teorías, según nos parece, una falta de aquel sentido de la realidad que debemos conservar aun en los estudios más abstractos. (Russell, 1919: 1367)

Tal análisis descarta la formula "una montaña de oro" y, por consiguiente, excluye al mismo tiempo cualquier razón para creer que un objeto indicado por ella tiene algún género de existencia. Entonces la proposición "el actual Rey de Francia es calvo" se convierte en "no es siempre falso de x que x es ahora Rey de Francia y que x es calvo y que sea siempre verdad que, si y es ahora Rey de Francia, y es idéntico a x". La proposición "Jorge IV quería saber si Walter Scott era el autor de Waverley"" se convierte en "Jorge IV quería saber si solo un hombre había escrito Waverley, y si Walter Scott era ese hombre". La frase "el circulo cuadrado no existe" se transforma en "nunca es verdad que x sea circular, y sea cuadrado, y no sea siempre falso que x e y se identifican". Como puede apreciase, en las reconstrucciones de Russell desaparecen las expresiones denotantes y no se utilizan las formas del verbo "existir" y del verbo "ser" en funciones no copulativas. "Obedeciendo al sentimiento de la realidad, deberíamos insistir en que, en el análisis de proposiciones, no deberá admitirse nada "no real". Pero después de todo, podría uno preguntarse si no habiendo nada no real podríamos admitir algo no real". (Russell, 1919: 1371)

Esta teoría, presentada en 1905 fue desarrollada más tarde en los *Principia Mathematica*, donde Russell distingue entre descripciones indefinidas o ambiguas ("un hombre", "alguien se acerca") y descripciones definidas ("el primer Rey de España, el tal y tal", etc.). Por este camino Russell pensaba eliminar las paradojas metafísicas de la existencia y las paradojas de lo no existente.

> No parece haber incluso ninguna necesidad lógica por la que debiera haber un individuo[14]; por la que de hecho, debería haber siquiera un universo. La prueba ontológica de la existencia de Dios, si fuese válida, establecería la necesidad lógica de un individuo al menos. Pero generalmente, no se suele reconocer como válida, y en efecto descansa sobre un equivocado concepto de la existencia; no cae en la cuenta de que la existencia solo puede afirmarse de algo descrito, no de algo nombrado, de forma que carece de sentido el pasar de "esto es el tal y cual", de tal y cual existe" a la afirmación de que "esto existe". Si rechazamos el argumento ontológico, nos veremos llevados a concluir que la existencia de un mundo es un accidente; es decir no es lógicamente necesaria" (Russell, 1919: 1388)

En síntesis, la teoría de las descripciones afirma que las expresiones denotantes son incompletas, no son capaces de tener significado por sí las y se distinguen nítidamente de los nombres propios (que considerados aisladamente poseen significado) y de lo contrario carecen de sentido.

3.3 Contribución de la teoría de las descripciones a la solución de la paradoja de clases

La teoría de las descripciones es quizá la contribución más importante de Russell a la filosofía del lenguaje; ésta es normalmente ilustrada utilizando la frase "El actual rey de Francia", como en "El actual rey de Francia es calvo". Como vimos antes surge entonces la pregunta ¿Sobre qué objeto se trata esta proposición, dado que no existe en la actualidad un rey de Francia? (difícilmente el mismo problema surgiría si hubiera dos reyes de Francia en la actualidad: ¿a cuál de ellos se refiere "*El*" rey de Francia?) (Hierro, 1986: 201). Russell inicia la misión de analizar afirmaciones que contiene frases para denotar, de tal manera que se suprima del todo la apariencia de denotar cosas que no existen. La teoría que propuso es que todas las clases que denotan carecen, en sí mismas de sentido. Tómense por ejemplo frases descriptivas que comienzan con la palabra "el" o "la" "el actual rey de Francia", "la manzana de oro".

[14] Las proposiciones primitivas de los *Principia Mathematica* son tales, que, permiten la inferencia de que al menos existe un individuo; pero ahora vemos que, en pura lógica, esto constituye más bien un defecto. (Russell, 1973: 1388)

Estas frases, sostiene Russell, ahora no significan nada. Sin embargo sí significan algo afirmaciones que las contengan, pero qué es lo que significan solo puede entenderse acertadamente cuando se expresan de tal manera que la descripción determinante no se da. Tómenos el ejemplo, la afirmación, "el actual rey de Francia es calvo". Ella parece suponer, en forma equivocada, que hay en el presente un rey de Francia y parece denotar esa entidad inexistente y asignarle calvicie. El análisis propuesto por Russell transforma esta suposición en tres afirmaciones. De acuerdo a su teoría de las descripciones, 'el actual Rey de Francia es calvo' es efectivamente una conjunción de tres afirmaciones:

1. La función proposicional 'x es el actual Rey de Francia' no es siempre falsa
2. Si la función proposicional 'y es el actual Rey de Francia' es verdadera para cualquier y, entonces y es idéntico a x [es decir, sólo hay un Rey de Francia actual]
3. X es calvo.

La primera afirmación equivale a una afirmación explícita de que el actual rey de Francia existe, y, como esto es falso, la conjunción completa es falsa. Así que, por medio de este intrincado análisis, se muestra que 'el actual Rey de Francia es calvo' es una proposición que tiene sentido pero es falsa.

$$(\exists x)(Y)[Px \wedge Py \rightarrow (y = x) \wedge Gy]$$ [15]

Esta fórmula se lee así: existe al menos un individuo *x* que es Rey de Francia, y para cualquier otro individuo *y*, si es Rey de Francia, entonces *y* es idéntico a *x*, y *y* es calvo.

En el "lenguaje lógicamente apto" de Russell, las frases que denotan no ocurren. No existe, contrariamente a lo que había dicho en *Principios,* la denotación (de alguna manera, esto es una consecuencia inmediata de la negación de la existencia de clases, pues en la

---

[15] *Apuntes sobre filosofía del lenguaje***,** Miguel Ángel Pérez J. Seminario sobre lingüística, Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, 11 de octubre de 2005

mayoría de casos, el objeto "denotado" era una clase). En vez de la denotación lo que tenemos son afirmaciones que sostienen que una función proposicional dada (x es A) es siempre verdadera, siempre falsa o algunas veces verdadera (no siempre falsa). Esta última se convierte, en efecto, en una afirmación de existencia. Decir que los príncipes azules existen, por ejemplo, es decir que la función proposicional 'x es un príncipe azul' es a veces verdadera.

La determinación de Russell de deshacerse de las clases y basar toda su teoría en las funciones proposicionales, produce cierta extrañeza.

> Una vez que hemos decidido que las clases no puede ser cosas de la misma índole que sus miembros, que no pueden ser simplemente montones o agregados y tampoco pueden identificarse con las funciones proposicionales, resulta muy difícil ver lo que puedan ser, si han de ser algo más que ficciones lógicas. (Russell, 1973: 1376)

Como pudo darse cuenta en un etapa jovial de su pensamiento, la paradoja de clases que pertenecen a sí mismas o que no pertenecen tiene su equivalente en el campo de las funciones proposicionales, donde el problema es causado por proposiciones que son verdaderas acerca de sí mismas o que no lo son…parece que Russell piensa que las funciones proposicionales son mas "fáciles" de manejar que las mismas clases. Ya en este momento sabía que las clases no existen, este argumento es manejado fuera de una teoría lógica consistente. Luego de escribir este texto también descubre que las proposiciones tampoco existen.

En 1907 Russell concebía las proposiciones como objetos abstractos, no eran oraciones eran objetos de los pensamientos 1+1=2 si todos tenemos el mismo objeto es porque la proposición maneja un grado de objetividad tiene su ser no en alguna mente en particular sino en el reino de la verdad (inmutable-pitagorico-platonico)

La misma fuerza que lo condujo a deshacerse de ‘cosas’ inexistentes denotadas por descripciones determinantes lo obligó a deshacerse de las proposiciones. Las proposiciones no existen no tienen un ser y por lo tanto las oraciones que expresen proposiciones deben ser consideradas, igual de las descripciones determinantes símbolos incompletos solo que ahora el contexto es necesario para que tengan sentido es la mente de una persona. Entonces un juicio es verdadero si corresponde a los hechos y falso cuando ocurre lo contrario. Así los hechos corresponden (existen) al mundo y los pensamientos existen en la cabeza, y las proposiciones extravagantes y vagas como “la clase de todas las clases que pertenece a si misma” que se suponían que eran algo no tiene ninguna existencia.

> Y otra manera de expresar la misma cosa seria la de decir que la lógica (o la Matemática) se refiere solamente a las formas […] Puesto que el lenguaje ordinario carece de palabras que expresen exactamente y de un modo natural lo que queremos expresar, será necesario, mientras continuemos adictos al lenguaje corriente, deformar las palabras dándoles sentidos no habituales; y lo más seguro es que al cabo de cierto tiempo, sino desde el principio, el lector vuelva a dar a estas su significado corriente, llegando así a nociones equivocadas, distintas de las que se han pretendido entender. Además de esto la gramática y la sintaxis ordinarias son extremadamente engañosas. (Russell, 1919: 1389)

Esta teoría muestra que muchos de los grandes hallazgos de algunos filósofos son la consecuencia de las confusiones en que incurren por su falta de comprensión lógica del lenguaje, el lenguaje engaña. Y los filósofos son particularmente propensos a dejarse engañar (Pérez, 2005: 7) y Russell no es la excepción.

BIBLIOGRAFIA

AYER. A. J. 1983. *Filosofía del siglo XX*, Trad Jorge Vigil Editorial Crítica, Barcelona.

BATESON, G. 1991. *Pasos hacia una ecología de la mente*, Planeta, Argentina.

BOCHENSKI, I. M. 1985. *Historia de la lógica formal*, Gredos, Madrid.

CANTOR, G. 1955. *Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, New York .

CARNAP, R. 1947. *Meaning and Necessity*. *A Study in Semantics and Logic*, The University of Chicago Press. Sixth-Impression: 1970 Chicago.

CONSUEGRA, F. 2004. *Tipos Lógicos, Lenguaje y Filosofía en Filosofía de la lógica,* Consejo superior de investigaciones científicas, Edición de Raul Orayen y Alberto Moretti. Editorial Trotta

COLLETE. J. P. 1993 *Historia de las matemáticas* Tomo II siglo XXI Editores

CHADID PEREZ, 2007. *Un paseo finito por lo infinito, el infinito en Matemática* Editorial Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá.

DE ALEJANDRO, J. M. S.I. 1970. *La lógica y el hombre*, BAC.

FERRATER, M. J. 1979. *Diccionario de Filosofía*, Alianza Editorial, tomo III. Madrid.

FREGE, G, 1917. "*The thought: Logical Inquiry*" Strawson, PF (Edit). *Philosophical logic*. Oxford University Press, 1967 Oxford.

GARCIADIEGO, D.A.1992. *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas*, Alianza, Madrid.

HAACK, S. 1991. *Filosofía de las lógicas*, Trad Amador Anton, con la colaboración de Teresa Orduña Cátedra segunda edición. Madrid.

HIERRO, S. P, 1986 *Principios de filosofía del lenguaje* Editorial Alianza, Madrid.

KILMISTER, C.W. 1992. *Russell*, Fondo de Cultura Económica, México.

KOYRE, A. 1981. "*Epiménides el Mentiroso*" en Cuadernos de filosofía y letras (Conjunto y Categoría). *Cuadernos de filosofía*, vol, IV No 1, 2. Bogotá.

KNEALE, W y M. 1980. *El Desarrollo de la Lógica*, Trad Javier Muguerza Tecnos, reimpresión 1980 Madrid.

MONK, R. 1998. *Bertrand Russell, Matemática: sueños y pesadillas*, Editorial Norma, Bogotá.

MONDOLFO, R 1942 *El pensamiento antiguo* Editorial Lozada, Buenos Aires

NORTHROP, E. 1977. *Paradojas Matemáticas*, hispanoamericana, México.

OCONNOR, D. J. 1983. *Historia Crítica de la Filosofía Occidental*, la filosofía Contemporánea Trad Nestor Miguez, Andres Pirk y Nilda Robles Paidos, Tomo VIII. Barcelona.

PÉREZ, J. M Á 2005 *Apuntes sobre filosofía del lenguaje*, Seminario sobre lingüística, Pontificia Universidad Javeriana Bogotá

QUINE, W. V. O. 1976. *The Ways of Paradox*, Harvard University Press. Cambridge

RUSSELL, B. 1973. *Obras Completas*, Trad José Barrio Gutierrez, Carlos Benito Cardenal, Aníbal Froufe, Jose Fuentes, Juan Garcia-Puente, Miguel Ortega, Julio Porcel y Victor Sanchez de Zavala, Tomo II, Ciencia y Filosofía Aguilar Madrid.

_________. 1897 *Ensayo sobre los fundamentos de la Geometría.* En *Obras completas,* 1973. Trad Julio Porcel. Editorial Aguilar tomo II Ciencia y Filosofía Aguilar Madrid.

_________. 1900 *Principios de la Matemática* en *Obras Completas*, Trad Jose Barrio Gutiérrez. Tomo II, Ciencia y Filosofía Aguilar Madrid.

_________. 1903-14. *Misticismo y Lógica y otros Ensayos*. En *Obras completas* 1973. Trad Anibal Froufe. Editorial Aguilar tomo II Ciencia y Filosofía Aguilar Madrid.

_________. 1928 *Los problemas de la filosofía.* Trad. Joaquín Xirau. Editorial Labor, Barcelona.

_________. 1945 *Introducción a la filosofía matemática*. Trad. Juan B. Molinari Losada, Buenos Aires.

_________. 1956 *Portraits from Memory* Allen and Unwin, London

_________. 1959 *My Philosophical Development*, New York, Simon and Schuster.

_________. 1964 *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Trad. Juan Novella Aguilar, Madrid.

_________. 1966 *Lógica matemática en la teoría de tipos* en *Ensayos sobre lógica y conocimiento (1901-1950)* Compilados por Robert Charles Marsh, traducción Javier Muguerza, Taurus, Madrid

_________. 1967 The *Autobiography of Bertrand Russell* 1872-1914, Allen and Unwin. London.

_________. 1969. *Escritos básicos* 1903-1959. Comp. Robert Egner y Lester Denonn. Trad. varios, Aguilar México.

_________. 1981. *Principia Matemática*, Trad J. Manuel Dominguez Rodríguez. Paraninfo, Madrid.

_________. 1990 *The Collected Papers* of 2, London, Unwin Hyman

SIERRA. M. R. 1979. "*Lógica y Filosofía del Lenguaje en Bertrand Russell*", en *Cuadernos de Filosofía y Letras*, vol II, No 4. Bogotá.

SMITH. J. Karl.1991. *Introducción a la lógica*, Grupo Iberoamérica. México.

SUPPES P, HILL S. 1988. *Introducción a la lógica Matemática*, Reverté Colombiana S.A. Bogotá

TOMASINI, Bassols. Alejandro. 1994. *Los Atomismos Lógicos de Russell y Wittgenstein*, Unam, México.