

**IDENTIFICACIÓN Y CONTROL ADAPTATIVO APLICADO A UN  
HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.**

**ALEJANDRO CUESTA GALINDO.  
COD. 1088299970**

**RAY CUESTA GALINDO  
COD. 1088299971**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
INGENIERÍA MECATRÓNICA  
PEREIRA-RISARALDA  
MARZO-2016**

**IDENTIFICACIÓN Y CONTROL ADAPTATIVO APLICADO A UN  
HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.**

**ALEJANDRO CUESTA GALINDO.  
COD. 1088299970**

**RAY CUESTA GALINDO  
COD. 1088299971**

**DIRECTOR**

**ING. ANGELO ANTONIO MARIN  
LÓPEZ**

**INGENÍERA MECATRÓNICA CICLOS PROPEDÉUTICOS  
CICLO DE INGENIERÍA**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**

**PEREIRA-RISARALDA**

**MARZO-2016**

## **Dedicatoria**

A nuestras familias en especial a nuestros padres y hermanos. A todos ellos que siempre nos han apoyado de manera incondicional y nos han motivado para seguir adelante.

## **Agradecimientos**

A nuestro director de proyecto de grado Ángelo Antonio Marín López; por acompañarnos en este proceso y por compartir sus valiosos conocimientos, mediante los cuales se hizo posible el desarrollo de este trabajo de grado.

A nuestros compañeros de ingeniería mecatrónica, que nos han acompañado y apoyado durante esta pequeña etapa de nuestras vidas.

## Tabla de contenido

Índice de Figuras .....	7
Índice de tabla.....	8
RESUMEN.....	9
INTRODUCCIÓN.....	10
Capítulo 1 .....	11
Descripción y modelo matemático.....	11
1.1 Helicóptero de dos grados de libertad .....	11
1.2 Ecuaciones del sistema.....	12
1.3 Modelo no-lineal .....	15
1.4 Modelo lineal .....	16
Capítulo 2 .....	18
Identificación de sistemas MIMO .....	18
2.1. Representación de sistemas MIMO.....	18
2.2. Esquemas de estimacion en linea .....	21
2.3. Mínimos cuadrados .....	22
2.3.1. Forma recursiva .....	25
Capítulo 3 .....	30
Control por realimentación en espacio de estados.....	30
3.1. Representación por pseudoestados.....	30
3.2 control en espacio de estados.....	32
3.3 Problema de regulación de estados .....	33
3.4 seguimiento de referencia .....	34
3.4.1 seguimiento de referencia por acción integral.....	34
3.5 Control óptimo (cálculo de $k$ y $k_a$ ).....	36
Capítulo 4 .....	38
Pruebas y resultados .....	38
4.1 Prueba para controlar el sistema acoplado.....	38
Conclusiones.....	42
Apéndice A .....	43

Apéndice B.....	47
Apéndice C.....	49
Bibliografía.....	52

## Índice de Figuras

<i>Figura 1.0 Helicóptero de dos grados de libertad.....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 2.0 Diagrama de bloques para la regulación de estados .....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 3 Diagrama de bloques para el seguimiento de referencia con acción integral .....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 4.1 Grafica de comportamiento del sistema .....</i>	<i>39</i>

## Índice de tabla

<i>Tabla 4.1 Datos medidos en la prueba de control.....</i>	<i>39</i>
<i>Tabla 4.2 Datos medidos en la prueba de control para el sistema acoplado.....</i>	<i>40</i>
<i>Tabla 4.3 Datos prueba de control adaptativo.....</i>	<i>42</i>

## **RESUMEN**

En el presente trabajo se describe el proceso de identificación y control adaptativo de un helicóptero de dos grados de libertad.

Se plantea una metodología de identificación de sistemas multivariable. A su vez se crea un control adaptativo utilizando representación por pseudoestados. Se realizan las implementaciones de dichos algoritmos en el entorno LabVIEW y se evalúa su desempeño sobre un modelo real de un helicóptero de dos grados de libertad.

## INTRODUCCIÓN

La identificación de sistemas permite obtener modelos que representan el comportamiento real de uno o varios sistemas. Dichos modelos se obtienen a partir del análisis en tiempo real de las entradas y las salidas de dicho sistema y permite establecer parámetros requeridos posteriormente en el sistema de control.

La necesidad de controlar sistemas multivariable ha ido incrementando sustancialmente a causa del avance de la tecnología y la sofisticación de los sistemas, las aplicaciones industriales y la automatización ha migrado a los sistemas MIMO (múltiples entradas, múltiples salidas), en los últimos tiempos. El estudio de metodologías para la identificación y control de sistemas MIMO es un problema actual y de gran importancia para la comunidad científica.

Los helicópteros a escala son un modelo de vehículo aéreo no tripulado que han causado un gran interés a la comunidad científica, gracias a la gran influencia de los efectos aerodinámicos, al alto grado de interacción de sus variables y a sus características no lineales, que hacen que estos sistemas sean difíciles de controlar. Debido a esto sin una teoría de control bien desarrollada no se podrían tratar estos dispositivos de manera inteligente. <sup>[1]</sup>

En este proyecto se pretende identificar el sistema de manera MIMO, para establecer una estrategia de control adaptivo por pseudoestados, el cual ofrece grandes ventajas debido a que se asemeja a un modelo discreto lineal en el espacio de estados, Además, dicha representación requiere un número de variables mucho menor en los vectores de estado que otras representaciones y es por eso que es más fácil relacionar variables físicas o de real interés con esta representación.[8]

# Capítulo 1

## Descripción y modelo matemático

A continuación se muestra una descripción matemática de un helicóptero de dos grados de libertad donde se muestran las ecuaciones que rigen el comportamiento de los diferentes elementos del sistema y los parámetros generales de operación.

### 1.1 Helicóptero de dos grados de libertad

Un helicóptero de dos grados de libertad es un mecanismo que consta de un cuerpo o estructura que está sujeta a una base central, sobre la cual se generan dos movimientos angulares, uno sobre el eje  $z$  llamado  $w$  y el otro sobre el eje  $x$  llamado  $\theta$ . En cada extremo del cuerpo del helicóptero se encuentra un motor con una hélice acoplada, los cuales son los encargados de generar el empuje necesario para mover el sistema.

Estos mecanismos son de gran interés para los estudios de control, debido a la gran influencia de los efectos aerodinámicos, al alto grado de interacción de sus variables y a sus características no lineales. Presentando así un reto para los ingenieros, los cuales deben diseñar técnicas de control robustas que permitan regular estos sistemas.

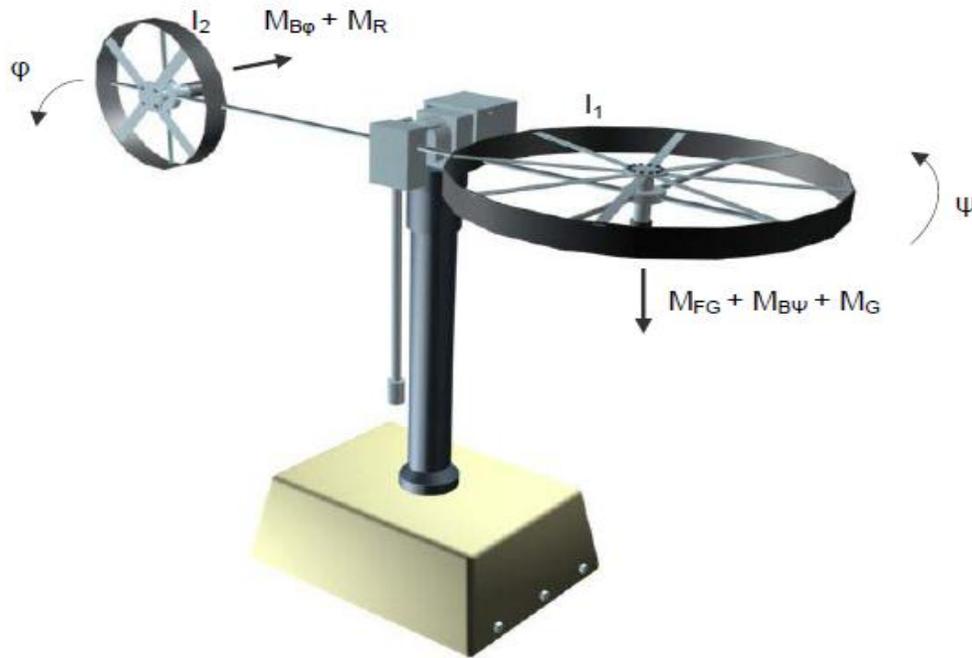


Figura 1.0 Helicóptero de dos grados de libertad. [2]

## 1.2 Ecuaciones del sistema

A pesar de que para el desarrollo de este proyecto no es necesario conocer el modelo dinámico del sistema, se hace uso de este para mostrar la complejidad del mecanismo a controlar.

El modelo que se muestra a continuación es tomado del manual del helicóptero de dos grados de libertad distribuido por la empresa “feedback instruments limited” (ver figura 1.0). En este se describe el helicóptero mediante un sistema de ecuaciones no lineales, en las cuales se encuentran todas las características electromecánicas de la planta. [2]

Para el movimiento rotacional alrededor del eje z, se presenta la siguiente sumatoria de momentos.

$$I_1 * \ddot{\psi} = M_1 - M_{FG} - M_{BW} - M_G - M_{R1} \quad (1.0)$$

Donde  $I_1$  corresponde al momento de inercia del rotor vertical. Los momentos que intervienen en la ecuación (1.0), se muestran a continuación.

- Características no lineales del motor 1 ( $M_1$ )

$$M_1 = a_1 * T_1^2 + b_1 * T_1 \quad (1.1)$$

Donde  $a_1$  y  $b_1$  son características estáticas del sistema y  $T_1$  se expresa en la ecuación (1.6).

- Momento gravitacional ( $M_{FG}$ )

$$M_{FG} = M_g * \sin w \quad (1.2)$$

Donde  $M_g$  es el momento de gravedad.

- Momento de las fuerzas de fricción ( $M_{BW}$ )

$$M_{BW} = B_{1W} * \dot{W} + B_{2W} * \text{sign}(\dot{w}) \quad (1.3)$$

Donde  $B_{1w}$  y  $B_{2w}$  son parámetros función del momento de inercia.

- Momento de giro ( $M_G$ )

$$M_G = K_{gy} * M_1 * \dot{\theta} * \cos(w) \quad (1.4)$$

Donde  $K_{gy}$  es un parámetro de momento de giro

- Momento de reacción ( $M_{R1}$ )

$$\dot{M}_{R1}(t) = -\frac{M_{R1}(t)}{T_{p1}} + \frac{k_{c1}}{T_{p1}} * T_2(t) + \frac{k_{c1} * T_{01}}{T_{p1}} * \dot{T}_2 \quad (1.5)$$

Donde  $T_{p1}$  y  $T_{01}$  son parámetros del momento de reacción y  $K_{c1}$  corresponde a la ganancia del momento de reacción, mientras que  $T_2$  se expresa en la ecuación (1.11).

Las características del motor 1 son aproximadas mediante un modelo de primer orden representado por la ecuación (1.6).

$$\dot{T}_1 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * T_1(t) + \frac{k_1}{T_{11}} * u_1(t) \quad (1.6)$$

Donde  $T_{10}$  y  $T_{11}$  son parámetros denominadores del motor 1 y  $k_1$  corresponde a la ganancia. Mientras que  $u_1(t)$  es una entrada del sistema.

Para el movimiento rotacional alrededor del eje x, se presenta una ecuación de momentos similar a la anterior.

$$I_2 * \ddot{\theta} = M_2 - M_{B\theta} - M_{R2} \quad (1.7)$$

Donde  $I_2$  es el momento inercial del rotor horizontal. Los momentos que intervienen en la ecuación (1.7) se muestran a continuación.

- Características no lineales del motor 2 ( $M_2$ )

$$M_2 = a_2 * T_2^2 + b_2 * T_2 \quad (1.8)$$

Donde  $a_2$  y  $b_2$  son características estáticas del sistema y  $T_2$  se expresa en la ecuación (1.11).

- Momento de las fuerzas de fricción ( $M_{B\theta}$ )

$$M_{B\theta} = B_{1\theta} * \dot{\omega} + B_{2\theta} * \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (1.9)$$

Donde  $B_{1\theta}$  y  $B_{2\theta}$  son parámetros función del momento de inercia.

- Momento de reacción ( $M_{R2}$ )

$$\dot{M}_{R2}(t) = -\frac{M_{R2}(t)}{T_{p2}} + \frac{k_{c2}}{T_{p2}} * T_1(t) + \frac{k_{c2} * T_{02}}{T_{p2}} * \dot{T}_1 \quad (1.10)$$

Donde  $T_{p2}$  y  $T_{02}$  son parámetros del momento de reacción y  $K_{c2}$  corresponde a la ganancia del momento de reacción, mientras que  $T_1$  se expresa en la ecuación (1.6).

Características del motor 2, al igual que el motor 1 presenta un modelo aproximado de primer orden.

$$\dot{T}_2 = \frac{k_2}{T_{21}} * u_2(t) - \frac{T_{20}}{T_{21}} * T_2(t) \quad (1.11)$$

Donde  $T_{20}$  y  $T_{21}$  son parámetros denominadores del motor 2 y  $k_2$  corresponde a la ganancia. Mientras que  $u_2(t)$  es otra entrada del sistema.

### 1.3 Modelo no-lineal

A partir de las ecuaciones descritas anteriormente se plantea el modelo no lineal que describe el comportamiento y la dinámica del sistema.

Reemplazando las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) en la ecuación (1.0) se obtiene.

$$\ddot{w} = \frac{a_1 * T_1^2 + b_1 * T_1 - M_g * \sin w - B_{1w} * \dot{w} - B_{2w} * \text{sign}(\dot{w})}{I_1} - \frac{K_{gy} * a_1 * T_1^2 * \dot{\theta} * \cos w - K_{gy} * b_1 * T_1 * \dot{\theta} * \cos w - M_{R1}}{I_1} \quad (1.12)$$

Reemplazando la ecuación (1.11) en la ecuación (1.5)

$$\dot{M}_{R1} = -\frac{M_{R1}}{T_{p1}} + \left( \frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * T_2 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{02}}{T_{p1} * T_{21}} * u_2(t) \quad (1.13)$$

Reemplazando la ecuación (1.6) en la ecuación (1.10)

$$\dot{M}_{R2} = -\frac{M_{R2}}{T_{p2}} + \left( \frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * T_1 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{02}}{T_{p2} * T_{11}} * u_1(t) \quad (1.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.7) y (1.8) en la ecuación (1.6)

$$\ddot{\theta} = \frac{a_2 * T_2^2 + b_2 * T_2 - B_{1\theta} * \dot{w} - B_{2\theta} * \text{sign}(\dot{\theta}) - M_{R2}}{I_2} \quad (1.15)$$

Organizando el modelo mediante el uso de variables auxiliares se puede reescribir el comportamiento de la planta como una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, que representan el modelo de estados.

$$\dot{x}_1 = \dot{w} \quad (1.16)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{a_1 * x_5^2 + b_1 * x_5 - M_g * \sin x_1 - B_{1w} * x_2 - B_{2w} * \text{sign}(x_2)}{I_1} - \frac{-K_{gy} * a_1 * x_5^2 * x_4 * \cos x_1 - K_{gy} * b_1 * x_5 * x_4 * \cos x_1 - x_7}{I_1} \quad (1.17)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} \quad (1.18)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{a_1 * x_6^2 + b_2 * x_6 - B_{1\theta} * x_2 - B_{2\theta} * \text{sign}(x_4) - x_8}{I_2} \quad (1.19)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * x_5 + \frac{K_1}{T_{11}} * u_1 \quad (1.20)$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} * x_6 + \frac{K_2}{T_{21}} * u_2 \quad (1.21)$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{1}{T_{p1}} * x_7 + \left( \frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * x_6 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{01}}{T_{p1} * T_{21}} * u_2 \quad (1.22)$$

$$\dot{x}_8 = -\frac{1}{T_{p2}} * x_8 + \left( \frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * x_5 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{01}}{T_{p2} * T_{11}} * u_1 \quad (1.23)$$

Donde

- $x_1 = w$                        $\dot{x}_1 = \dot{w} = x_2$
- $x_2 = \dot{w}$                        $\dot{x}_2 = \ddot{w}$
- $x_3 = \theta$                        $\dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4$
- $x_4 = \dot{\theta}$                        $\dot{x}_4 = \ddot{\theta}$
- $x_5 = T_1$                        $\dot{x}_5 = \dot{T}_1$
- $x_6 = T_2$                        $\dot{x}_6 = \dot{T}_2$
- $x_7 = M_{R1}$                      $\dot{x}_7 = \dot{M}_{R1}$
- $x_8 = M_{R2}$                      $\dot{x}_8 = \dot{M}_{R2}$

## 1.4 Modelo lineal

Se linealizan las ecuaciones (1.16), (1.17), (1.18), (1.19), (1.20), (1.21), (1.22) y (1.23) alrededor del punto de operación cero, para obtener un sistema multivariable expresado mediante ecuaciones de estado lineales.

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \quad (1.24)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = \frac{b_1 * \Delta x_5 - B_{1w} * \Delta x_2 - M_g * \Delta x_1 - \Delta x_7}{I_1} \quad (1.25)$$

$$\Delta \dot{x}_3 = \Delta x_4 \quad (1.26)$$

$$\Delta \dot{x}_4 = \frac{-\Delta x_8 + b_2 * \Delta x_6 - B_{1\theta} * \Delta x_2}{I_2} \quad (1.27)$$

$$\Delta \dot{x}_5 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * \Delta x_5 + \frac{K_1}{T_{11}} * \Delta u_1 \quad (1.28)$$

$$\Delta \dot{x}_6 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} * \Delta x_6 + \frac{K_2}{T_{21}} * \Delta u_2 \quad (1.29)$$

$$\Delta \dot{x}_7 = \left( \frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * \Delta x_6 - \frac{1}{T_p} * \Delta x_7 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{02}}{T_{p1} * T_{21}} * \Delta u_2 \quad (1.30)$$

$$\Delta \dot{x}_8 = \left( \frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * \Delta x_5 - \frac{1}{T_{p2}} * \Delta x_7 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{02}}{T_{p2} * T_{11}} * \Delta u_1 \quad (1.31)$$

## Capítulo 2

# Identificación de sistemas MIMO

En este capítulo se concentra toda la contextualización para la identificación de sistemas MIMO que se usaron en el desarrollo del proyecto. Un complemento de la teoría mostrada a continuación se presenta en el apéndice A.

### 2.1. Representación de sistemas MIMO

La representación de un sistema discreto multivariable con  $p$  salidas y  $l$  entradas con operador de retardo  $r$  puede ser de la forma.

$$A(r^{-1})y[k] = B(r^{-1})u[k] \quad (2.0)$$

Donde  $A$  esta dado por

$$A(r^{-1}) = A_0 + A_1(r^{-1}) + A_2(r^{-2}) + \dots + A_n(r^{-n}) \quad (2.1)$$

Y  $B$  esta dado por

$$B(r^{-1}) = B_1(r^{-1}) + B_2(r^{-2}) + \dots + B_m(r^{-m}) \quad (2.2)$$

con  $n \geq m$  y donde  $A_i$  es de dimension  $p \times p$  y  $B_i$  de dimension  $p \times l$ , y donde las entradas  $u$  corresponden a un vector de dimension  $l \times 1$  y las salidas  $y$  corresponden a un vector de dimension  $p \times 1$  de la forma

$$y[K] = \begin{bmatrix} y1 [k] \\ y2 [k] \\ \vdots \\ yp [k] \end{bmatrix}, \quad u[K] = \begin{bmatrix} u1[k] \\ u2[k] \\ \vdots \\ uq [k] \end{bmatrix}$$

Si  $A_0 = I$  con  $I$  siendo la matriz identidad, se obtiene

$$[I + A_1 (r^{-1}) + \dots + A_n (r^{-n})] = [B_1 (r^{-1}) + \dots + B_m (r^{-m})]u[k] \quad (2.3)$$

$$y[k] = B_1 u[k - 1] + \dots + B_m u[k - m] - A_1 y[k - 1] - \dots - A_n y[k - n] \quad (2.4)$$

Donde  $A_i$  y  $B_i$  son de la forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \dots & a_{1p}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \dots & a_{2p}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}^i & a_{p2}^i & \dots & a_{pp}^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1l}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2l}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}^i & b_{p2}^i & \dots & b_{pl}^i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.3) se puede expresar la salida  $y_i$  en términos de las entradas y las salidas anteriores como:

$$\begin{aligned}
 y_1 = & a_{i1}^1 y_1[k-1] + a_{i2}^1 y_2[k-1] + \dots + a_{ip}^1 y_p[k-1] + a_{i1}^2 y_1[k-2] \\
 & + a_{i2}^2 y_2[k-2] + \dots + a_{ip}^2 y_p[k-2] + \dots + a_{i1}^n y_1[k-n] + \\
 & a_{i2}^n y_2[k-n] + a_{ip}^n y_p[k-n] + b_{i1}^1 u_1[k-1] + b_{i2}^1 u_2[k-1] + \dots \\
 & + b_{i1}^2 u_1[k-2] + b_{i2}^2 u_2[k-2] + \dots + b_{i1}^m u_1[k-m] + \dots \\
 & + b_{i2}^m u_2[k-m] + \dots + b_{il}^m u_l[k-m] \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.6) se observa que el modelo DARMA de la ecuación (2.0), es posible de expresar como:

$$y[k] = \theta^T \varphi[k-1]; \quad k \geq 0 \quad (2.7)$$

En donde la matriz  $\theta^T$  denota la transpuesta de  $\theta$ , siendo esta una matriz conformada por los parámetros de las matrices  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ , por lo tanto el tamaño de  $\theta$  es de  $(l * m + p * n) * p$ , esto es:

$$\theta^T = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & \dots & b_{11}^m & \dots & b_{1l}^1 & \dots & b_{1l}^m & -a_{11}^1 & \dots & -a_{11}^n & \dots & -a_{1p}^1 & \dots & -a_{1p}^n & \dots \\ b_{21}^1 & \dots & b_{21}^m & \dots & b_{2l}^1 & \dots & b_{2l}^m & -a_{21}^1 & \dots & -a_{21}^n & \dots & -a_{2p}^1 & \dots & -a_{2p}^n & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ b_{p1}^1 & \dots & b_{p1}^m & \dots & b_{pl}^1 & \dots & b_{pl}^m & -a_{p1}^1 & \dots & -a_{p1}^n & \dots & -a_{pp}^1 & \dots & -a_{pp}^n & \dots \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$\varphi[k-1]$  es un vector de dimensión  $(l * m + p * n) \times 1$  y contiene los valores de las entradas y las salidas anteriores:

$$\Phi[k-1] = \begin{bmatrix} y_1[k-1] \\ \vdots \\ y_p[k-1] \\ \vdots \\ y_1[k-n] \\ \vdots \\ y_p[k-n] \\ \vdots \\ u_1[k-1] \\ \vdots \\ u_l[k-1] \\ \vdots \\ u_1[k-m] \\ \vdots \\ u_l[k-m] \end{bmatrix}$$

(2.9)

## 2.2. Esquemas de estimacion en linea

El objetivo de la identificación en línea es encontrar los parámetros del sistema basándose en los valores anteriores de las entradas y salidas, la matriz de parámetros estimados  $\hat{\theta}[k]$  también es calculada a partir de la matriz anterior de parámetros estimados  $\hat{\theta}[k-1]$ , como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + M[k-1]\phi[k-1]e[k] \quad (2.10)$$

Donde  $M[k-1]$  denota la ganancia del algoritmo (posiblemente es una matriz) y  $e[k]$  es un vector de los errores de estimación de las salidas, y es de la forma

$$e[k] = y^T[k] - \hat{y}^T[k] \quad (2.11)$$

El vector  $\hat{y}[k]$  se calcula a partir de la matriz de parámetros obtenidos en la identificación anterior y el vector de entradas y salidas pasadas

$$\hat{y}[k] = \hat{\theta}[k-1]^T \varphi[k-1] \quad (2.12)$$

La ecuación (2.10) muestra un algoritmo que permite calcular los parámetros del sistema en cada nuevo instante de muestreo, es decir, es posible implementarlo en línea.

La ganancia de la ecuación (2.10) puede ser motivada por diferentes funciones objetivo, en las siguientes secciones mostraremos varios algoritmos que se desprenden de esta ecuación.

### 2.3. Mínimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados es aplicado a una gran variedad de problemas. Este es particularmente simple si el modelo matemático puede ser escrito en la siguiente forma:

$$y[i] = \varphi_{1[i]}\theta_1^0 + \varphi_{2[i]}\theta_2^0 + \dots + \varphi_{n[i]}\theta_n^0 = \varphi^T[i]\theta^0 \quad (2.13)$$

Donde  $y$  es la variable observada,  $\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0$  Son los parámetros del modelo a determinar,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  son funciones conocidas que pueden depender de otras variables conocidas.

El modelo es indexado por la variable  $i$ , esta denota tiempo o número de la muestra.

Las variables  $\varphi_i$  son llamadas variables de regresión, y el modelo descrito en la ecuación (2.13) es también llamado modelo de regresión.

Si extendemos este modelo a la representación de sistemas descrito en la sección anterior, tenemos:

$$y[i] = -A_1[i]y[i-1] - \dots - A_n[i]y[i-n] + B_1[i]u[i-1] + \dots + B_m[i]u[i-m] = \theta^T \phi[i-1] \quad (2.14)$$

Los pares de observaciones y variables de regresión  $\{(y[i], \phi[i-1]), i = 1, 2, \dots, k\}$  pueden ser obtenidos de forma experimental. El problema es determinar los parámetros de tal manera que las salidas calculadas a partir del modelo de la ecuación (2.14) sean tan iguales como sea posible con respecto a las variables medidas  $y[i]$  en el sentido de los mínimos cuadrados. Es decir, los parámetros  $\theta$  deben ser elegidos de tal manera que minimice la función de costo.

$$V(\theta, i) = \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^k (y[i] - \theta^T \phi[i-1])^2 \quad (2.15)$$

Debido a que las medidas de las variables son lineales en los parámetros  $\theta$  y el criterio de los mínimos cuadrados es cuadrático, el problema admite una solución analítica. Introduciendo la notación  $y$  y con  $n = m$

$$Y[k] = \begin{bmatrix} y[n+1]^T \\ y[n+2]^T \\ \vdots \\ y[k]^T \end{bmatrix} \quad E[k] = \begin{bmatrix} e[n+1]^T \\ e[n+2]^T \\ \vdots \\ e[k]^T \end{bmatrix}$$

$$\Phi[k] = \begin{bmatrix} -y(n)^T & -y(n)^T \dots & -y(1)^T & u(n)^T & u(n-1)^T \dots & -u(1)^T \\ -y[n+1]^T & -y[n]^T \dots & -y(2)^T & u[n+1]^T & u(n)^T \dots & -u(2)^T \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ -y[k+1]^T & -y[n]^T \dots & -y[k-n]^T & u[k-1]^T & u[k-2]^T \dots & -u[k-n]^T \end{bmatrix}$$

$$\phi[k] = \begin{bmatrix} \phi(n)^T \\ \phi[n+1]^T \\ \vdots \\ \phi[k-1]^T \end{bmatrix}$$

$$P[k] = (\Phi[k]^T \Phi[k])^{-1} = \left( \sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] \phi[i-1]^T \right)^{-1}$$

Donde los errores  $e[i]$  son definidos por:

$$e[i] = y[i] - \hat{y}[i] = y[i] - \theta^T \phi[i-1] \quad (2.16)$$

Con estas notaciones la función de costo (2.15) puede ser reescrita como

$$V(\theta, i) = \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^K e[i]^2 = \frac{1}{2} E^T E = \frac{1}{2} \|E\|^2 \quad (2.17)$$

Donde E puede ser escrito como:

$$E = Y - \hat{y} = \mathbf{y} - \Phi\theta$$

La solución al problema de mínimos cuadrados está dada por el siguiente teorema.

La función de la ecuación (2.15) es mínima para parámetros  $\hat{\theta}$  tal que

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T Y \quad (2.18)$$

Si la matriz  $\Phi^T \Phi$  es no singular, el mínimo es único y está dado por

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (2.19)$$

### 2.3.1. Forma recursiva

Cuando se implementa un control adaptativo, las muestras se obtienen de forma secuencial y en tiempo real. En este sentido, con la intención de ahorrar tiempo de procesamiento en el computador y de realizar implementaciones en línea es necesario tener todos los algoritmos en ecuaciones de forma recursiva. La ecuación de estimación de mínimos cuadrados puede ser cambiada de tal forma que el resultado obtenido en k-1 pueda ser utilizado para obtener la estimación en el tiempo k. Si  $\hat{\theta}[k - 1]$  denota la estimación por mínimos cuadrados basada en k - 1 mediciones.

Asumiendo que la matriz  $\Phi^T \Phi$  es no singular para todo k. Se deduce de la definición de P[k] en la ecuación (2.16) que:

$$\begin{aligned}
P^{-1}[k] &= \Phi^T[k]\Phi[k] = \left( \sum_{i=n+1}^k \Phi[i-1]\Phi[i-1]^T \right)^{-1} \\
&= \sum_{i=n+1}^k \Phi[i-1]\Phi[i-1]^T + \Phi[k-1]\Phi[k-1]^T \\
&= P^{-1}[k-1] + \Phi[k-1]\Phi[k-1]^T \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Los parámetros estimados  $\hat{\theta}[k]$  es dado por la ecuación (2.19) y puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}[k] &= \left( \sum_{i=n+1}^k \Phi[i-1]\Phi[i-1]^T \right)^{-1} \left( \sum_{i=n+1}^k \Phi[i-1]y[i]^T \right) \\
&= P[k] \left( \sum_{i=n+1}^k \Phi[i-1]y[i]^T \right) \\
&= P[k] \left( \sum_{i=n+1}^k \Phi[i-1]y[i]^T + \Phi[k-1]y[k]^T \right) \quad (2.21)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (2.20) y (2.21), tenemos:

$$\sum_{i=n+1}^{k-1} \Phi[i-1]y[i]^T = P^{-1}[k-1]\hat{\theta}[k-1] = P^{-1}[k]\hat{\theta}[k-1] - \Phi[k-1]\Phi[k-1]^T\hat{\theta}[k-1] \quad (2.23)$$

La estimación en el tiempo k es entonces:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}[k] &= \hat{\theta}[k-1] - P[k]\phi[k-1]\phi[k-1]^T\hat{\theta}[k-1] + [k-1]_y[k]^T \\
 &= \hat{\theta}[k-1] + P[k]\phi[k-1]\left[y[k]^T - \phi[k-1]^T\hat{\theta}[k-1]\right] \\
 &= \hat{\theta}[k-1] + K[k]e[k]^T
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Donde

$$K[k] = P[k]\phi[k-1] \quad y \quad e[k]^T = y[k]^T - \phi[k-1]^T\hat{\theta}[k-1]$$

Para continuar, es necesario encontrar una ecuación recursiva para P[k] o más bien de su inversa (2.21); para ello se utiliza el siguiente lema.

Sean  $A, C$  y  $C^{-1} + DA^{-1}B$  matrices cuadradas no singulares. Entonces  $A + BCD$  es invertible, y

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BC^{-1} + DA^{-1}B^{-1}DA^{-1}$$

Aplicando el lema 1.3.1 a  $P[k]$  y usando la ecuación (1.21), tenemos:

$$\begin{aligned}
 P[K] &= (P[K-1]^T + \phi[k-1]\phi[k-1]^T)^{-1} \\
 &= P[K-1] - P[k-1]\phi[k-1][I + \phi[k-1]^T P[k-1]\phi[k-1]]^{-1}\phi[k-1]^T P[k-1]
 \end{aligned}$$

(2.25)

Lo que implica que:

$$K[k] = P[k]\Phi[k-1] = P[k-1]\Phi[k-1][I + \Phi[k-1]^T P[k-1]\Phi[k-1]]^{-1} \quad (2.26)$$

Y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[k] &= \hat{\theta}[k-1] \\ &+ P[k-1]\Phi[k-1][I + \Phi[k-1]^T P[k-1]\Phi[k-1]]^{-1}(Y[k]^T - \Phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} P[k] &= P[k-1] \\ &- P[k-1]\Phi[k-1][I + \Phi[k-1]^T P[k-1]\Phi[k-1]]^{-1}\Phi[k-1]^T P[k-1] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las ecuaciones anteriores resultan de asumir que la matriz  $\Phi[k]$  es de rango completo, esto es,  $\Phi[k]^T \Phi[k]$  es no singular para todo  $k \geq k_0$ .

Ahora, revisemos el  $\Phi[k-1]^T P[k-1]P[k-1]\Phi[k-1]$ , la dimensión de  $\Phi[k-1]$  es un vector de  $(p * n + l * m) \times 1$ ,  $P[k-1]$  es una matriz de  $(p * n + l * m) \times (p * n + l * m)$ , por consiguiente el término el  $\Phi[k-1]^T P[k-1]P[k-1]\Phi[k-1]$  es un escalar; lo que implica que las ecuaciones (2.27) y (2.28) pueden ser escritas como

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \frac{P[k-1]\Phi[k-1]}{1 + \Phi[k-1]^T P[k-1]\Phi[k-1]}(Y[k]^T - \Phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \quad (2.29)$$

$$P[k] = P[k - 1] - \frac{P[k - 1]\phi[k - 1]\phi[k - 1]^T P[k - 1]}{1 + \phi[k - 1]^T P[k - 1]\phi[k - 1]}$$

(2.30)

## Capítulo 3

# Control por realimentación en espacio de estados

La representación en modelo de espacio de estados se presenta en diversos entornos, principalmente en sistemas MIMO. Seguidamente se mostrarán varios enfoques para el diseño de controladores por realimentación modelados en espacio de estados. En primer lugar se resolverá el problema de regulación; en segundo lugar, se implementará un esquema de control con ganancia en lazo directo para el seguimiento de referencia y por último se mostrará un diagrama con acción integral. Para las tres arquitecturas, el problema de diseño es el de seleccionar las ganancias de realimentación que cumplan con las propiedades deseadas de un control, especialmente el tiempo para llegar a la referencia y el máximo sobrepaso.

### 3.1. Representación por pseudoestados

Considere un sistema MIMO lineal e invariante representado en su forma DARMA (ecuación (2.7)), este modelo es representado como:

$$y[k] = \theta^T \varphi[k]$$

La ecuación (3.1) puede ser encontrada, esta ecuación relaciona el vector  $\varphi[k]$  con  $\varphi[k - 1]$  y  $u[k]$

$$\phi[k] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & \dots & B_{m-1} & B_m & -A_1 & \dots & -A_{n-1} & -A_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \phi[k-1] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) se puede interpretar como un modelo en espacio de estados, donde los estados del sistema son los elementos que componen el vector  $\phi[k-1]$ , si tomamos  $x_a[k]$  como el vector de estados, es decir,  $x_a[k] = \phi[k-1]$  se tiene el siguiente modelo de espacio de estados.

$$x_a[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & \dots & B_{m-1} & B_m & -A_1 & \dots & -A_{n-1} & -A_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} x_a[k] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \quad (3.2)$$

$$y[k] = \theta^T x_a[k] \quad (3.3)$$

El modelo representado con las ecuaciones (3.2) y (3.3) se conoce como modelo por pseudoestados, este presenta una ventaja frente a otros a la hora de desarrollar metodologías de control, esto dado al conocimiento completo de los estados, por tanto no se hace necesario el cálculo de un observador.

### 3.2 control en espacio de estados

Se define un modelo de representación de la forma:

$$x[k + 1] = Fx[k] + Gu[k] \quad (3.4)$$

$$y[k] = Cx[k] \quad (3.5)$$

Para diseñar un controlador en espacio de estados es necesario verificar que el sistema sea controlable o alcanzable.

**Controlabilidad:** “El sistema representado en las ecuaciones (3.4) y (3.5) es controlable si, si es posible encontrar una secuencia de control tal que el origen ( $x[k] = 0$ ) pueda ser alcanzado desde cualquier estado inicial en un tiempo finito”. (6)

**Alcanzabilidad:** “El sistema representado en las ecuaciones (2.4) y (2.5) es alcanzable, si es posible encontrar una secuencia de control tal que un estado arbitrario pueda ser alcanzado desde cualquier estado inicial en un tiempo finito”. (6)

Se define la matriz de controlabilidad como:

$$W_c = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

El sistema representados en las ecuaciones (3.4) y (3.5) es alcanzable si y solo si la matriz  $W_c$  es de rango completo (rango  $n$  en sistemas SISO). (6)

### 3.3 Problema de regulación de estados

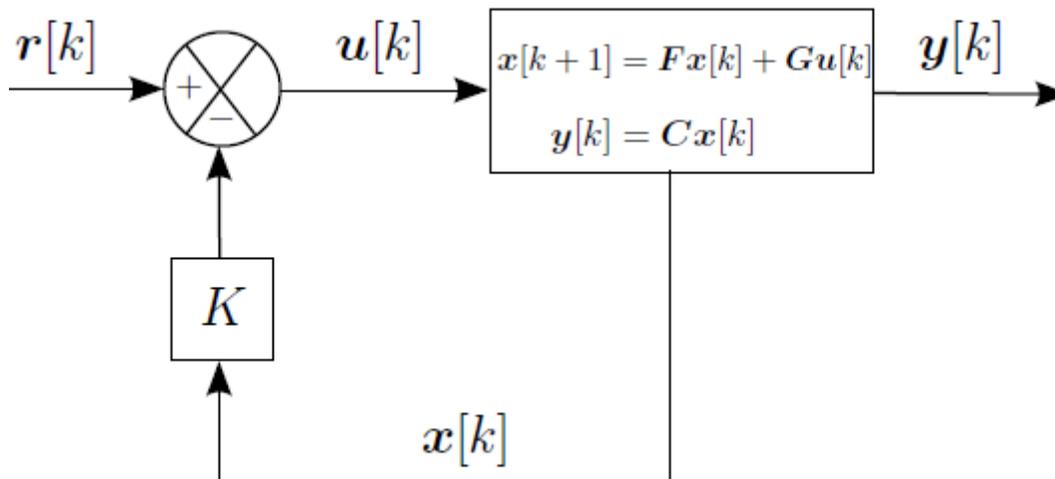


Figura 2.0 Diagrama de bloques para la regulación de estados

Una forma sencilla e intuitiva de llevar los estados del sistema al punto de operación ( $x[k] = 0$ ) es aplicar una entrada proporcional a los estados pero de signo contrario. Es decir, en el ciclo cerrado que se muestra en la figura 2.0 cuando el vector de referencia es cero ( $r[k] = 0$ ) el sistema siempre debe de ir al punto de operación  $x[k] = 0$ .

La regulación de estados usa la siguiente ley de control:

$$u[k] = -Kx[k] \quad (3.6)$$

Donde  $K$  es la ganancia de realimentación y una matriz del número de entradas por el número de estados, por ejemplo, si la representación está dada en pseudoestados  $K$  es de dimensiones  $l \times (l * m + p * n)$ .

Es posible calcular la matriz de ganancia de realimentación  $K$  de diferentes maneras, el método que se utilizara en este documento es el método por asignación de valores propios.

### 3.4 seguimiento de referencia

#### 3.4.1 seguimiento de referencia por acción integral

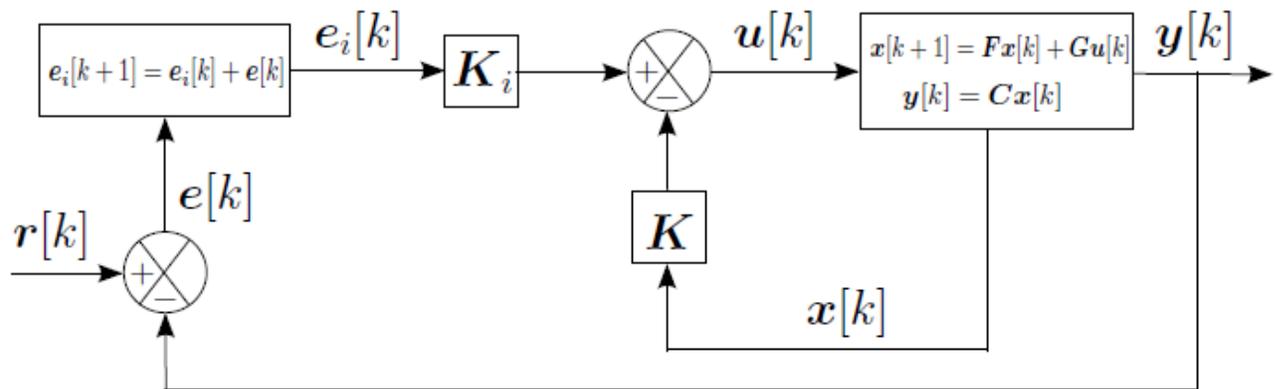


Figura 3 Diagrama de bloques para el seguimiento de referencia con acción integral

En este caso la figura 3.0 muestra un diagrama de bloques que permite seguir la referencia y además tiene un rechazo a las perturbaciones. Este enfoque puede verse como una generalización de un control proporcional e integral (PI) [9]. El punto de partida es el de incluir en el vector de estados el vector de los errores de control  $e[k] = r[k] - y[k]$ . Realmente se usa la integral del error de control, el cual describe el error acumulado. Si denotamos el error acumulado como  $e_i[k]$ , y se puede encontrar como:

$$e_i[k - 1] = e_i[k] + e[k] \quad (3.17)$$

El vector de estados aumentado es  $\begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix}$ , por lo tanto la ley de control toma la forma:

$$u[k] = -[k - k_i] \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Donde  $K$  es la ganancia de realimentación y  $K_i$  es la ganancia asociada con  $e_i[k]$ . El modelo de espacios de estado aumentado es:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e_i[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r[k] \quad (3.19)$$

Si sustituimos la ley de control (ecuación (3.18)) se puede obtener la ecuación del sistema en lazo cerrado.

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e_i[k+1] \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} F & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} [K - K_i] \right) \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r[k] \quad (3.20)$$

De igual forma que en la sección 3.3 la matriz  $K_a = K - K_i$  se calcula de tal forma que el sistema en lazo cerrado tenga la respuesta deseada, esta matriz es encontrada por el método de asignación de valores propios.

### 3.5 Control óptimo (cálculo de k y ka)

El cálculo de la ganancia de realimentación o de la ganancia de realimentación junto con la ganancia de acción integral, por el método de control óptimo permite generar una ley de control que es capaz de desacoplar un sistema acoplado [15].

Si se tiene una ley de control de la forma

$$u[k] = -kx_a[k] \quad (3.21)$$

Donde  $x_a[k]$  es un vector con los estados del sistema más los errores acumulados de las salidas que se desean controlar.

$$x_a[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix}$$

Entonces la ecuación de lazo cerrado está dada por:

$$x[k + 1] = (F_a - G_a K)x_a[k] + E_a r \quad (3.22)$$

Donde  $E_a^T = [0 \ I]$

El objetivo es entonces asignar una matriz Q diagonal cuadrada donde su dimensión dependerá del número de estados del sistema, se define una matriz R diagonal para la cual su dimensión dependerá del número de entradas del sistema. Ambas matrices son matrices de restricción y deben ser positivas semidefinidas.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_p \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Donde n es el número de estados y p el número de entradas del sistema.

Para seleccionar los valores de  $q_i$  y  $r_i$  a partir de los valores máximos permitidos en cada variable, se debe realizar el siguiente proceso:

$$q_i = \frac{1}{\Delta x_{jmax}^2} \quad y \quad r_i = \frac{1}{\Delta u_{jmax}^2} \quad (3.24)$$

Dónde:

$$\Delta x_{jmax}^2 = (x_{jmax} - x_{jmin})^2 \quad y \quad \Delta u_{jmax}^2 = (u_{jmax} - u_{jmin})^2 \quad (3.25)$$

Y de esta manera las restricciones quedan asociadas a los rangos de las variables.

Para darle solución a este problema y encontrar el valor de K óptimo para controlar el sistema, se debe minimizar la función de costo representada en la ecuación (3.26) sujeta a restricciones como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} \min_K \int_{t_0}^{t_f} (x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau))d\tau \\ \text{sujeto a } \dot{x} = (F_a - G_a K)x_a \end{aligned} \quad (3.26)$$

De esta manera se encuentra un vector de valores llamado K el cual representa la ganancia de realimentación junto con la ganancia de acción integral, debido a que fue calculado a partir del sistema aumentado.

# Capítulo 4

## Pruebas y resultados

Para realizar la prueba del desempeño de los controladores se plantean una serie de pruebas, las cuales consisten en llevar el sistema a una referencia determinada, consignando el tiempo que tarda el proceso en realizar esta acción y el error obtenido una vez se estabilice la salida. Una vez hecho esto se procederá a perturbar el proceso y se tomaran nuevamente las medidas mencionadas. Esta prueba se repetirá al menos tres veces en puntos de referencia diferentes con el fin de observar la adaptación del sistema en diferentes puntos de operación.

### 4.1 Prueba para controlar el sistema acoplado

La siguiente tabla muestra los datos obtenidos al variar los puntos de referencia, donde el tiempo mostrado es el periodo que tardaron ambas variables en estabilizarse. Como se puede observar los errores son mínimos a pesar del fuerte acople del mecanismo.

En la figura 4.1 la gráfica control x, representa el movimiento angular de la cabeza del sistema, donde se puede detallar que a pesar de los fuertes movimientos realizados en el control de la cola, visualizado en la gráfica control z, esta trata de conservar el sistema en su punto de referencia, mostrando así su buena adaptabilidad ante las perturbaciones.

SISTEMA				Control			
		Posición angular cabeza	Posición angular cola	Posición angular cabeza	Posición angular cola	Tiempo de respuesta	error
Prueba 1	Referencia	7°	-10°	6.93°	-10.6°	6s	0.07 – 0.6
	Perturbación			6.63°	-10.4°	9s	0.37 – 0.4
Prueba 2	Referencia	-18°	30°	-18.6°	30.28°	7s	0.6 – 0.28
	Perturbación			18.9°	30.94°	11s	0.9 – 0.94
Prueba 3	Referencia	-22°	0°	-21.7°	0.8°	8s	0.7 – 0.8
	Perturbación			-21.5°	0.6°	10s	0.5 – 0.6

Tabla 4.1 Datos medidos en la prueba de control. Fuente: autores.

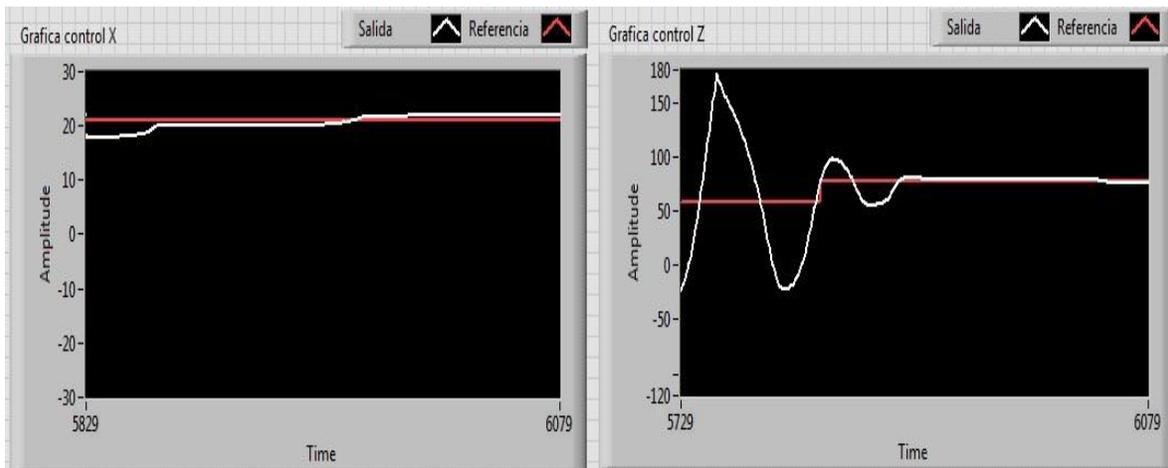


Figura 4.1 Grafica de comportamiento del sistema. Fuente: autores.

Una vez obtenidos los datos de la prueba de control anteriormente consignados en la tabla 4.1 se decide hacer una comparación teniendo como referencia los datos obtenidos de un sistema de control adaptativo consignados en una tabla del proyecto: CONSTRUCCION Y CONTROL ADAPTATIVO DE UN HELICOPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD". Se realizan las mismas tres pruebas que se consignaron en la tabla del proyecto anteriormente mencionado para obtener así los resultados esperados.

A continuación se muestran los resultados de las dos tablas:

Tabla proyecto "construcción y control adaptativo de un helicóptero de dos grados de libertad."

Sistema acoplado		Control mixto					
		Posición angular cabeza	Posición angular cola	Posición angular cabeza	Posición angular cola	Tiempo de respuesta	error
Prueba 1	Referencia	5°	-20°	5.6°	-19.2°	8 s	0.6 – 0.8
	perturbación			4.92°	-20.4°	15 s	0.08 – 0.4
Prueba 2	Referencia	10°	40°	9.2°	39.89°	10 s	0.8 – 0.11
	perturbación			10.7°	41.1°	12 s	0.7 – 1.1
Prueba 3	Referencia	-10	20	-9.9°	19.1°	15 s	0.1 – 0.9
	perturbación			-10.5°	20.6°	20s	0.5 – 0.6

Tabla 4.2 Datos medidos en la prueba de control para el sistema acoplado. Fuente construcción y control adaptativo de un helicóptero de dos grados de libertad.

Tabla de resultados realizando la prueba con los mismos valores de la tabla anterior

SISTEMA					Control		
		Posición angular cabeza	Posición angular cola	Posición angular cabeza	Posición angular cola	Tiempo de respuesta	error
Prueba 1	Referencia	5°	-20°	5.4°	-19.6°	8s	0.4 – 0.4
	Perturbación			5.2°	-20.3°	12s	0.2 – 0.3
Prueba 2	Referencia	10°	40°	9.6°	40.6°	8s	0.4 – 0.6
	Perturbación			10.5°	40.9°	11s	0.5 – 0.9
Prueba 3	Referencia	-10°	20°	-10.2°	19.6°	12s	0.2 – 0.4
	Perturbación			-9.8°	21.4°	16s	0.2 – 1.4

Tabla 4.3 Datos prueba de control adaptativo. Fuente: Autores

Como se puede observar en las dos tablas anteriores los resultados obtenidos son los esperados debido a que los tiempos de respuesta se reducen y el error en la mayoría de los casos es menor.

## Conclusiones

- Para la identificación de los parámetros del proceso se debe tratar de tener señales con poco ruido y mover el sistema alrededor de todo su rango de operación, con el fin de captar todas las dinámicas que presenta el sistema
- Es posible implementar algoritmos de identificación para sistemas MIMO como una extensión de los algoritmos implementados en identificación de sistemas SISO lineales, por tanto, los cálculos realizados en la implementación de dichos algoritmos son cálculos poco complejos basados solo en operaciones con matrices reales, permitiendo a su vez que estos algoritmos puedan ser ejecutados en tiempos muy pequeños.

## Apéndice A

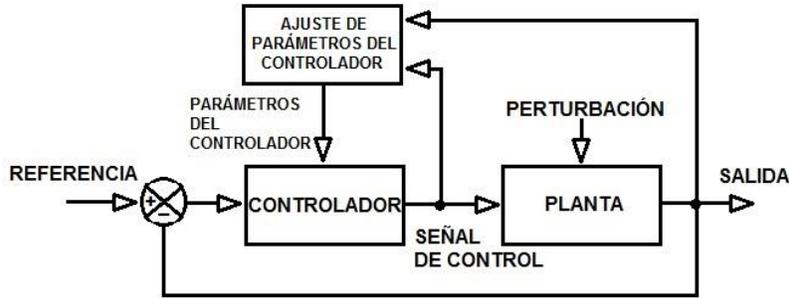
### Conceptos generales

#### Control adaptativo

Intuitivamente un controlador adaptativo se puede definir como un controlador que puede modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del proceso y las perturbaciones. Sin embargo, un controlador con realimentación también puede reducir estos efectos, pero no puede considerarse adaptativo debido a que estos cuentan con una ganancia constante de realimentación, la cual debe ser definida a partir de un modelo aproximado del sistema que por lo general es lineal o linealizado. Es decir que estos controladores solo son eficientes cuando se pretende regular un sistema en un punto de operación fijo. <sup>[3]</sup>

Por tanto cuando existen partes del sistema cuya variación no se conoce, se puede optar por usar un controlador adaptativo. El cual cuenta con parámetros ajustables y un mecanismo para ajustar dichos parámetros. Permitiendo así una mejora de la linealización local (modelamiento de un sistema no lineal como si fuera lineal mediante un punto de operación) reconociendo la existencia de no linealidades y adaptando sistemáticamente el controlador con respecto a las variaciones del proceso. <sup>[4]</sup>

Un sistema adaptativo básico como el mostrado en la ilustración 1 está compuesto por dos lazos de realimentación, uno es el bucle de regulación convencional y el otro es un lazo que permite ajustar los parámetros del controlador. Lo cual contribuye a asegurar la estabilidad del sistema y mejorar la actuación del conjunto.

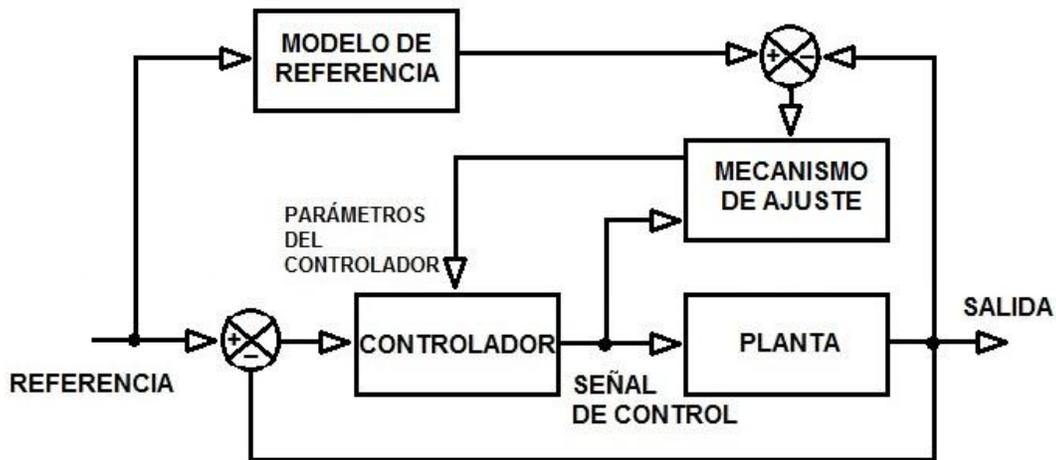


**Ilustración 1. Esquema básico de un sistema de control adaptativo. Fuente: autores.**

Los controladores adaptativos se pueden dividir principalmente en dos grupos: controladores adaptativos con modelo de referencia (MRAC) y reguladores autoajustables (STR).

### **Controladores adaptativos con modelo de referencia (MRAC)**

Estos controladores intentan alcanzar para una señal de entrada definida, un comportamiento en lazo cerrado dado por un modelo de referencia. [4]



**Ilustración 2. Diagrama de bloques de un controlador adaptativo con modelo de referencia. Fuente: autores.**

En la ilustración 2 se puede apreciar el diagrama de bloques de un MRAC. Este sistema compara el comportamiento del modelo de referencia con el comportamiento del sistema ajustable generando un error, el cual debe ser reducido por el mecanismo de control elegido y el ajuste de los parámetros del sistema.

## Sistemas de control por realimentación de variables de estado

El propósito de la realimentación de variables de estado es solucionar dos problemas de control: el problema de regulación y el problema de seguimiento. El problema de regulación consiste en llevar todas las variables de estado a un valor cero, lo cual permite reducir las perturbaciones de carga y las fluctuaciones creadas por el error en la medida que se inyecta al sistema debido a la realimentación. El problema de seguimiento busca que el sistema pueda seguir un comando de referencia. <sup>[5] [6]</sup>

### Regulación por realimentación de estado

Para el desarrollo del regulador se supone un modelo discreto de la forma.

$$x(k + 1) = \phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (6.0)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (6.1)$$

Donde  $u$  representa las variables de control,  $x$  el vector de estados, y la salida del sistema y  $\phi$ ,  $\Gamma$  y  $C$  son matrices constantes.

Con un polinomio característico de la matriz  $\phi$  definido por:

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (6.2)$$

Para modificar los valores propios del sistema, de tal manera que se obtenga un sistema estable con unos parámetros de respuesta acordes a los criterios de diseño, se debe comparar el polinomio característico (6.2) con un polinomio característico deseado en lazo cerrado. <sup>[7]</sup> Como el que se observa en la siguiente ecuación.

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \quad (6.3)$$

Para tal fin se especifica la información disponible para la señal de control, haciendo uso de la siguiente ley de control.

$$u(k) = -Lx(k) \quad (6.4)$$

Una forma para calcular los valores de  $L$ , es haciendo uso de la fórmula de Ackermann, donde si el sistema es alcanzable, hay una realimentación lineal que da un sistema en lazo cerrado con el polinomio característico  $P(z)$ .

$$L = [0 \ \dots \ 0 \ 1] W_c^{-1} P(\phi) \quad (6.5)$$

En donde  $P(\phi)$  corresponde a:

$$P(\phi) = \phi^n + p_1\phi^{n-1} + \dots + p_{n-1}\phi + p_nI \quad (6.6)$$

Y  $W_c$  es la matriz alcanzable del sistema que está definida por:

$$W_c = [\Gamma \ \phi\Gamma \ \dots \ \phi^{n-1}\Gamma] \quad (6.7)$$

### **Ganancia del sistema en lazo cerrado**

Una modificación simple del sistema se puede ver en la ecuación (6.13), donde la señal de referencia es alterada por una ganancia que le permite alcanzar el estado deseado. <sup>[7]</sup>

$$u(k) = -L\tilde{x}(k) + L_cr(k) \quad (6.13)$$

Donde  $r$  es el comando de referencia.

Con esta modificación considérese un sistema en lazo cerrado de la forma:

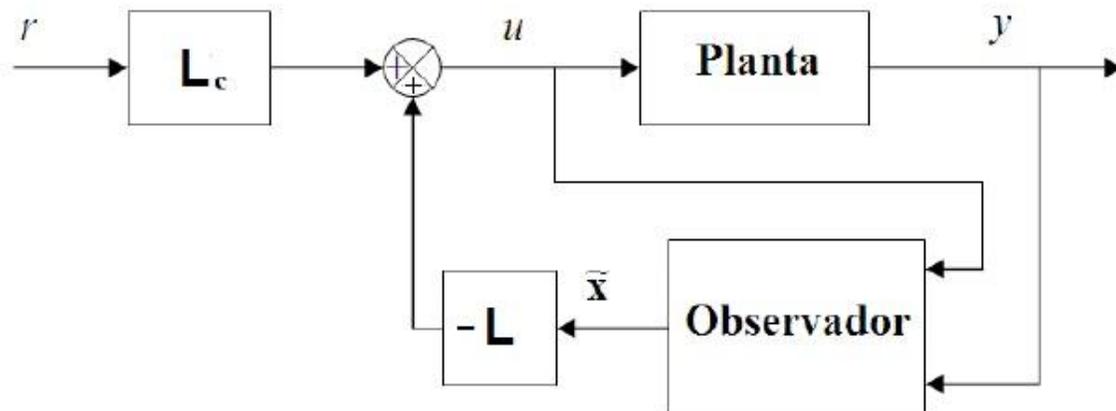
$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (6.14)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$\tilde{x}(k+1) = \phi\tilde{x}(k) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C\tilde{x}(k))$$

$$u(k) = -L\tilde{x}(k) + L_cr(k)$$

El cual es representado en el siguiente diagrama de bloques:



**Ilustración 4. Diagrama de bloques simplificado para un modelo simple de seguimiento con regulación y observador. [6]**

Para el cálculo de la ganancia  $L_c$  se aplica el teorema del valor final sobre la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, asumiendo  $r$  como un escalón unitario.

$$L_c = (C(zI - \phi + \Gamma L)^{-1} \Gamma)^{-1} \quad (6.15)$$

## Apéndice B

### Fichas técnicas

Tarjeta Arduino uno: <sup>[10]</sup>

- Microcontrolador: ATmega328.
- Voltaje de operación: 5V.
- Pines digitales: 14 (6 de ellos se pueden usar como PWM).
- Entradas análogas: 6.
- Corriente DC pines: 40mA.

Ardumoto: <sup>[11]</sup>

- Controla 2 motores.
- Puente H L298.

- Permite 2A por canal.
- En la siguiente imagen se muestra los pines de conexión del Arduino y del driver.

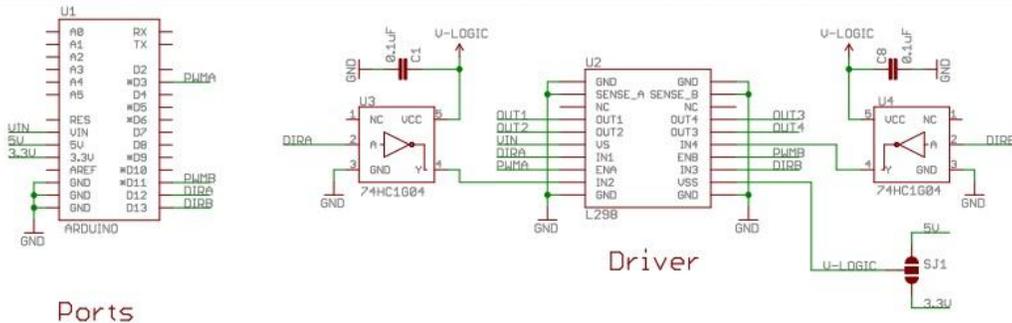


Figura 3.4 Esquema de conexiones Ardumoto. [11]

Giroscopio MPU 6050: [12]

- Escala del giroscopio:  $\pm 250$ ,  $\pm 500$ ,  $\pm 1000$  y  $\pm 2000$  %/sec.
- Corriente de peracion del giroscopio: 3.6mA.
- Comunicación: I<sup>2</sup>C.
- Voltaje nominal: 2.375V-3.46V.
- Diagrama de bloques de la representación del giroscopio.

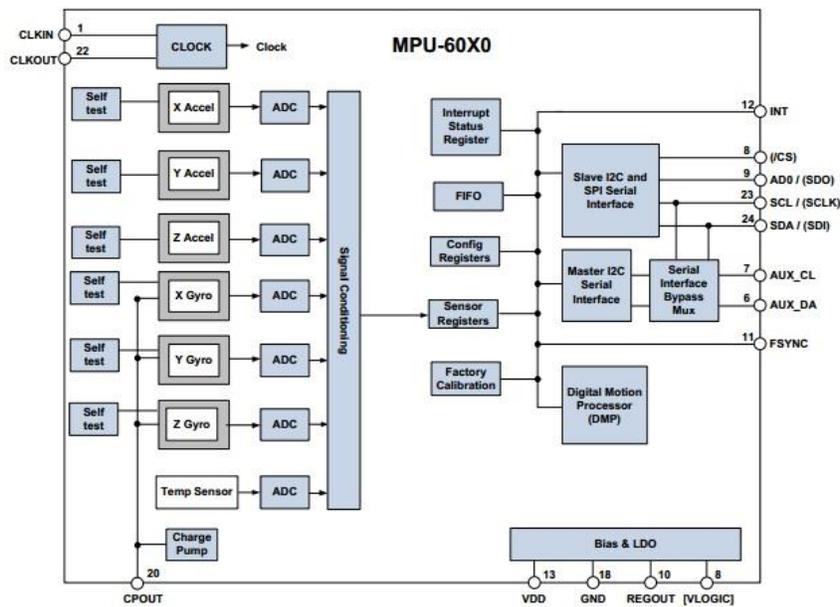


Figura 3.5 Diagrama de bloques del giroscopio. [12]

Motores: [13]

- Voltaje nominal: 20V
- Revoluciones: 14010 RPM
- Corriente: 1.06 A.
- Torque: 9.56 mN-m.

## Apéndice C

### Códigos

#### Código MIMO helicóptero

```
% Identificación del sistema usando mínimos cuadrados
phi_1=[u1(1) u1(2) u2(1) u2(2) y1(1) y1(2) y2(1) y2(2)]';
p2=p0;
c1=(phi_1')*p2*phi_1;
c1=c1(1,1)
ye=(th1')*phi_1;
```

```

ye=ye(:,1)
if c1==0
th=th1
p1=p2
else
p1=p2-((p2*phi_1*(phi_1')*p2)/(1+phi_1'*p2*phi_1))
th=th1+(p2*phi_1)*((y-ye')/(c1+1))
end
F=zeros(8,8);
F(3:4,1:2)=eye(2)
F(7:8,5:6)=eye(2)
F(5:6,:)=th'
G=zeros(8,2)
G(1:2,:)=eye(2)
C=th'
phi_1=phi_1';

% Controlador del sistema
Fa=zeros(10,10);
Fa(1:8,1:8)=[F]
Fa(9:10,1:8)=-C
Fa(9:10,9:10)=eye(2)
Ga=zeros(10,2)
Ga(1:8,:)=G
if(con==1)

```

```

Q=eye(10)
Q(9:10,9:10)=100*eye(2)
R=[10000 0;0 1000];
K=dlqr(Fa,Ga,Q,R)
er=[R1(1)-y(1);R1(2)-y(2)]
ei_1=[er(1)+ei(1) er(2)+ei(2)]
phi_a=[phi_1(1,1) phi_1(1,2) phi_1(1,3) phi_1(1,4) phi_1(1,5)
phi_1(1,6) phi_1(1,7) phi_1(1,8) ei_1(1,1) ei_1(1,2)]'
U1=-K*phi_a
U=U1(:,1)
else
ei_1=[0 0]
U1=R1(:)
end

```

## Bibliografía

- [1] Cesar Augusto Cortes Garzón. Identificación de sistemas lineales y no-lineales multivariados por espacio de estados. 2013.
- [2] Twin Rotor MIMO system, control experiments. Feedback instruments limited.
- [3] Aström, Karl J and Wittenmark, Björn. Adaptive Control. Second edition. Mineloa, New York: Dover Publications inc, 2008. 590 p.
- [4] Rodríguez Rubio, Francisco y López Sánchez, Manuel Jesús. Control adaptativo y robusto. Primera edición. Sevilla, España: Universidad de Sevilla, 1996. 381 p.
- [5] Giraldo Buitrago, Didier. Giraldo Suarez, Eduardo. Teoría de control análogo. Primera edición. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 2010. 299 p.
- [6] Giraldo Buitrago, Didier. Giraldo Suarez, Eduardo. Teoría de control digital. Primera edición. Pereira, Colombia: produmedios, 2012. 262 p.
- [7] Escobar Dávila, Luisa Fernanda. Montoya Giraldo, Oscar Danilo. Control híbrido del péndulo de Furuta. Pereira, Colombia. 2012. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de Ingeniero (a) Electricista.
- [8] Rodríguez Ramírez, Daniel. Bordóns Alba, Carlos. Apuntes de ingeniería de control. {En línea}. {02 de mayo del 2014}. Disponible en: (<http://www.esi2.us.es/~danirr/apuntesIC4.pdf>).
- [9] Albarracín Ávila, Danna Lisseth. Control de sistemas multivariados aplicado a un generador eólico conectado a un sistema de potencia. Pereira, Colombia. 2013. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de Ingeniero (a) Electricista.
- [10] Arduino uno. {En línea}. {4 de mayo del 2014}. Disponible en: (<http://arduino.cc/en/Main/arduinoBoardUno>).
- [11] Ardumoto. {En línea}. {4 de mayo del 2014}. Disponible en: ([https://www.sparkfun.com/datasheets/DevTools/Arduino/Ardumoto\\_v13.pdf](https://www.sparkfun.com/datasheets/DevTools/Arduino/Ardumoto_v13.pdf)).
- [12] Giroscopio MPU 6050. {En línea}. {4 de mayo del 2014}. Disponible en: (<http://www.invensense.com/mems/gyro/documents/PS-MPU-6000A-00v3.4.pdf>).

[13] Motores. {En línea}. {4 de mayo del 2014}. Disponible en: (<http://www.mopselectric.com/ebay/rs385sh2.pdf>).

[14] Nathan\_B. LIFA MPU 60X0. {En línea}. {4 de mayo del 2014}. Disponible en: (<https://decibel.ni.com/content/docs/DOC-34263>).

[15 ] Stengel F, Robert. Optimal control and estimation. Primera edicion. New york, Estados unidos: Dover publications INC, 1994. 638 p.