CARACTERIZACIÓN DE ALGUNAS MATRICES CON AUTOVALORES Y AUTOVECTORES EN EL ANILLO DE LOS ENTEROS

EDWIN FERNANDO DUQUE MARÍN

Febrero de 2016

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Caracterización de algunas matrices con autovalores y autovectores en el anillo de los enteros

---

Trabajo para optar por el título de Magíster en Enseñanza de la Matemática
de la Universidad Tecnológica de Pereira

Autor: Edwin Fernando Duque Marín

Director: Yuri Alexander Poveda

Índice general

INTRODUCCIÓN

Las transformaciones lineales ocupan un lugar preponderante dentro del álgebra lineal. La mayor parte de las aplicaciones en ecuaciones diferenciales y otras áreas de la matemática están relacionadas con el manejo adecuado de ellas.

Una transformación lineal de dimensión finita está en correspondencia con un conjunto de matrices que la representan. Si se fija una base del espacio vectorial correspondiente, la transformación quedará en correspondencia con una única matriz. Así que dada una transformación lineal T, es importante saber en qué base del espacio vectorial correspondiente, esta transformación tiene la representación más sencilla posible.

No todas las transformaciones lineales de dimensión finita son diagonalizables, pero a todas se les puede encontrar una representación ideal, por ejemplo como suma de espacios invariantes representados por bloques de Jordan.

Cuando una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión finita está representada por alguna matriz A diagonalizable, el espacio vectorial de los vectores no nulos X tales que $AX = \lambda X$ forman una base en la cual la transformación se representa con una matriz diagonal.

Hallar el espacio propio de una transformación lineal conlleva a un problema de complejidad polinomial, puesto que es necesario resolver el polinomio característico asociado. En el presente trabajo se desarrollan cuatro ideas fundamentales: 1) Dada una matriz cuadrada con entradas enteras, se halla el conjunto de sus autovalores y autovectores a partir de la resolución de un sistema de 4 ecuaciones lineales, cuya complejidad es lineal. Es decir, se cambia resolver un polinomio de grado 3 por resolver 4 ecuaciones lineales; 2) Estas 4 ecuaciones se dan en términos de las entradas de la matriz; 3) Los autovalores y autovectores, están en el anillo de los enteros; es decir esta teoría puede ser aplicada en el espacio de matrices de orden 3 con entradas en un anillo arbitrario y 4)Se dan condiciones lineales suficientes y necesarias para que ciertas clases de matrices sean diagonalizables .

Sin embargo, aunque el proyecto es ambicioso si se piensa para matrices de cualquier tamaño, en el presente trabajo sólo se ha desarrollado para matrices de tamaño 2×2 y 3×3. La generalización requiere de un trabajo mucho mayor y de mayor complejidad que no ha sido tratado en esta tesis. Por lo que se ha podido detectar, el proceso desarrollado aquí para tamaño 3×3 no depende exclusivamente del trabajo realizado en matrices 2×2; aparecen nuevos argumentos de un caso a otro. Aunque de ser posible desarrollar el caso 4×4, todo parece indicar que se estaría cerca de una generalización por lo menos para una clase grande de matrices.

Hasta el momento no se ha encontrado en la literatura un procedimiento como el desarrollado por el autor, los casos que se encontraron en [1] y [2], aunque se desarrollan para matrices de cualquier tamaño, abarcan una clase muy restringida de matrices.

Finalmente, en el trabajo se da un paso más allá de encontrar autovalores y autovectores con complejidad lineal y para cada clase particular de matrices se ha descrito en un par de ecuaciones lineales que nos dan información acerca de la diagonalización o no de la matriz, el trabajo no parte del conjunto de matrices diagonalizables. En su lugar se parte del simple ejercicio de encontrar autovectores y autovalores sin saber si se conseguirán los suficientes para hablar de diagonalización.

Capítulo 1

Caracterización de Matrices

1.1. Matrices de 2×2

A toda transformación natural entre espacios de dimensión finita le corresponde un conjunto de matrices $m \times n$, que dependen de la base en la cual se describe la transformación lineal.

Uno de los problemas más importantes del algebra lineal es encontrar una base en la cual la transformación lineal se represente por una matriz lo más sencilla posible. En particular, existen transformaciones lineales que tienen una representación en una matriz cuadrada diagonal.

Si A es una matriz de $n \times n$, los vectores x diferentes de cero tales que $Ax = \lambda x$, corresponden a la base B en la cual la matriz A se puede representar como una matriz diagonal D siempre y cuando existan n vectores propios x_i diferentes de cero que cumplan la propiedad Ax colineal con x.

En esta sección, se darán condiciones suficientes para que matrices con entradas enteras de orden 2×2 tengan valores y vectores propios enteros.

Notación

Dada A una matriz de $n \times n$, denotamos por A^i la i-ésima columna de A y por A_i la i-ésima fila de A.

Proposición 1 *Dados a, b, c, d, m, n enteros con $m \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, $v_1^{\perp} = \begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $(v_1^{\perp})^T A v_1 = 0$.
2. *A tiene vector propio v_1, con valor propio λ_1 tal que $m\lambda_1 = A_1 v_1$.*

Demostración.

1⇒2:

Por hipótesis tenemos que

$$(v_1^{\perp})^T A v_1 = 0$$

es decir,

$$mA_2 v_1 = nA_1 v_1$$

entonces,

$$mAv_1 = \begin{pmatrix} mA_1 v_1 \\ mA_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mA_1 v_1 \\ nA_1 v_1 \end{pmatrix} = A_1 v_1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

con $m \neq 0$, así $m\lambda_1 = A_1 v_1$.

Por simetría, si $n \neq 0$ se tiene que $n\lambda_1 = A_2 v_1$.
2⇒1:

Como

$$(v_1^{\perp})^T A v_1 = (v_1^{\perp})^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1 (v_1^{\perp})^T v_1 = 0,$$

entonces $(\mathrm{v}_1^{\perp})^T A v_1 = 0$.

El teorema que se presenta a continuación es un aporte original al trabajo. El uso de este teorema permite establecer de manera sencilla el valor real del segundo autovalor sujeto a las condiciones de entrada de la matriz.

Teorema 1 *Dados* a, b, c, d, m, n *enteros con* $m \neq 0$, $A^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $A = (A^1 \quad A^2)$ *y* $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ *un vector propio de* A *asociado al valor propio* λ_1*. Si* A *es diagonalizable, el segundo valor propio* λ_2 *satisface*

$$n\lambda_2 = -(v_1^{\perp})^T A^1 = na - mb.$$

Demostración.

Dados los vectores propios de A, $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, linealmente independientes, con la condición $(v_1^{\perp})^T v_2 = 1$ correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente. Observemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbb{R}^2_C} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -n & m \end{pmatrix}"'] & \boxed{\mathbb{R}^2_C} \\
\boxed{\mathbb{R}^2_B} \arrow[r, "D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}"'] & \boxed{\mathbb{R}^2_B} \arrow[u, "C = \begin{pmatrix} m & \alpha \\ n & \beta \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

Es decir, $A = CDC^{-1}$, donde $\mathbb{R}^2_C$ es el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ en la base canónica, $\mathbb{R}^2_B$ es el espacio vectorial en la base B.
Así

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\beta\lambda_1 - n\alpha\lambda_2 & -m\alpha\lambda_1 + m\alpha\lambda_2 \\ n\beta\lambda_1 - n\beta\lambda_2 & -n\alpha\lambda_1 + m\beta\lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$mb - na = mn\beta\lambda_1 - mn\beta\lambda_2 - mn\beta\lambda_1 + nn\alpha\lambda_2 = n(n\alpha - m\beta)\lambda_2.$$

Como $(v_1^{\perp})^T v_2 = 1$, se tiene

$$mb - na = -n\lambda_2.$$

Puesto que $(v_1^{\perp})^T$ escalarmente A^1 es igual a $na - mb$, tenemos que el segundo valor propio λ_2 satisface que

$$n\lambda_2 = -(v_1^{\perp})^T A^1 = na - mb.$$

Corolario 1 *Dada* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, *bajo las condiciones del teorema* 1 *y tal que* $m^2 b + n^2 c \neq 0$, *entonces* $\begin{pmatrix} -nc \\ mb \end{pmatrix}$ *es un vector propio asociado a* λ_2.

Demostración.
Se quiere resolver la ecuación $AX = \lambda_2 X = 0$. Si $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, entonces

$$\alpha\lambda_2 = a\alpha + c\beta.$$

De acuerdo al teorema 1 se tiene

$$n\lambda_2 = na - mb.$$

Luego,

$$mb\alpha + nc\beta = 0,$$

como $m\beta - n\alpha = 1$, entonces

$$mb\alpha + nc\beta = 0 \tag{1.1.1}$$
$$-n\alpha + m\beta = 1. \tag{1.1.2}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} mb & nc \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$(m^2b+n^2c)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-nc\\ mb\end{pmatrix}.$$

Observación: Dada $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ una matriz con entradas enteras,m,n enteros, analicemos qué condiciones se generan en las entradas de la matriz si $m^2b+n^2c=0$ y $m\neq 0$. Como $b=\frac{-n^2c}{m^2}$, y sustituyendo en la ecuación $mb\alpha+nc\beta=0$, se tiene que

$$m(\frac{-n^2c}{m^2})\alpha+nc\beta=nc(\frac{-n\alpha+m\beta}{m})=0,$$

como $-n\alpha+m\beta=1$, entonces

$$nc=0,$$

lo cual implica que $n=0$ o $c=0$.

CASO 1: Si $c=0$ entonces $b=0$, y

$$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$$

CASO 2: Si $n=0$ y $c\neq 0$,entonces $b=0$,

$$A=\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & d\end{pmatrix}$$

Así $\lambda_1=a,\lambda_2=d$, y

$$\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\alpha+c\beta\\ d\beta\end{pmatrix}=d\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

es decir $\alpha(d-a)=c\beta$.
Si $d\neq a$, entonces el segundo vector propio es

$$\begin{pmatrix}c\\ m(d-a)\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Si } d = a \text{ y } c \neq 0,\ A \text{ no es diagonalizable.}}$$

Teorema 2 *Dado* $v = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ *con* $m \neq 0$*. El conjunto de matrices* A *de tamaño* 2×2 *que tiene como vector propio* v *es el hiperplano*

$$BX + CY + DZ + EW = 0,$$

donde $B = nm$*,* $C = n^2$*,* $D = -m^2$ *y* $E = -mn$*.*

Demostración. Se sigue del hecho $(v_1^{\perp})^T A v_1 = 0$.

Con los resultados anteriores se pueden construir innumerables ejemplos de matrices con entradas enteras cuyos valores y vectores propios sean enteros, fijando simplemente el primer vector propio v_1.

Ejemplo 1 *Dada* A *una matriz con entradas enteras de la forma* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *con* $m = 1 = n$*, entonces por la proposición* 1 *se tiene que*

$$a + c = b + d \tag{1.1.3}$$
$$\lambda_1 = a + c \tag{1.1.4}$$
$$\lambda_2 = a - b. \tag{1.1.5}$$

Un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y el segundo vector propio esta dado por* $\begin{pmatrix} -nc \\ mb \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = -11$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 13$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = 4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2 *Sea A una matriz con entradas enteras de la forma* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *con* $m = 1, n = -1$, *entonces por la proposición* 1 *se tiene que*

$$a + b = c + d \tag{1.1.6}$$

$$\lambda_1 = a - c \tag{1.1.7}$$

$$\lambda_2 = a + b. \tag{1.1.8}$$

Un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *y el segundo vector propio esta dado por* $\begin{pmatrix} -nc \\ mb \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 8$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 8$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 12$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3 *Sea A una matriz con entradas enteras de la forma* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *con* $m = 1, n = 0$, *entonces por la proposición* 1 *se tiene que*

$$m^2 b = 0 \tag{1.1.9}$$

$$\lambda_1 = a \tag{1.1.10}$$

$$\lambda_2 = d. \tag{1.1.11}$$

Un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y el segundo vector propio esta dado por* $\begin{pmatrix} c \\ m(d-a) \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4 *Sea A una matriz con entradas enteras de la forma* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *con* $m = 1, n = 2$, *entonces por la proposición* 1 *se tiene que*

$$2(a + 2c) = b + 2d \tag{1.1.12}$$
$$\lambda_1 = a + 2c \tag{1.1.13}$$
$$2\lambda_2 = 2a - b. \tag{1.1.14}$$

Un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *y el segundo vector propio esta dado por* $\begin{pmatrix} -nc \\ mb \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 8$ $\lambda_2 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7$ $\lambda_2 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 20 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 12$ $\lambda_2 = -4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7$ $\lambda_2 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5 *Sea A una matriz con entradas enteras de la forma* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *con* $m = 2, n = 3$, *entonces por la proposición* 1 *se tiene que*

$$3(2a + 3c) = 2(2b + 3d) \tag{1.1.15}$$
$$2\lambda_1 = 2a + 3c \tag{1.1.16}$$
$$3\lambda_2 = 3a - 2b. \tag{1.1.17}$$

Un vector propio es $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y el segundo vector propio esta dado por* $\begin{pmatrix} -nc \\ mb \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -4$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -3$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 14,\ \lambda_2 = -8$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -5$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2. Matrices 3×3

En la sección anterior se presentan resultados que permiten caracterizar matrices de orden 2×2 con valores y vectores propios enteros, en ésta sección se extienden estos conceptos con el objetivo de encontrar condiciones semejantes para matrices de 3×3.

Proposición 2 *: Dados $a, b, c, d, e, w, v, x, y, m, n, p, t, q, s$ enteros con $m \neq 0$ y $s \neq 0$, $A_1 = (a\ ,c\ ,w)$, $A_2 = (b\ ,d\ ,v)$, $A_3 = (x\ ,y\ ,e)$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} t \\ q \\ s \end{pmatrix}$, $v_1^{\perp_1} = \begin{pmatrix} n \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1^{\perp_2} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ -m \end{pmatrix}$, $v_3^{\perp_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ q \end{pmatrix}$ y $v_3^{\perp_2} = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$. las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $(v_1^{\perp_1})^T A v_1 = 0.$
   $(v_1^{\perp_2})^T A v_1 = 0.$
   $(v_3^{\perp_1})^T A v_3 = 0.$
   $(v_3^{\perp_2})^T A v_3 = 0.$

2. *A tiene vectores propios v_1 y v_3, con valores propios λ_1 tal que $m\lambda_1 = A_1v_1$ y λ_3 tal que $s\lambda_3 = A_3v_3$, respectivamente.*

Demostración.

1⇒2:

Por hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned}
(v_1^{\perp_1})^T A v_1 &= 0.\\
(v_1^{\perp_2})^T A v_1 &= 0.\\
(v_3^{\perp_1})^T A v_3 &= 0.\\
(v_3^{\perp_2})^T A v_3 &= 0,
\end{aligned}$$

es decir, para v_1

$$\begin{aligned}
(v_1^{\perp_1})^T A v_1 = 0 \text{ es equivalente a } nA_1v_1 = mA_2v_1.\\
(v_1^{\perp_2})^T A v_1 = 0 \text{ es equivalente a } pA_1v_1 = mA_3v_1.
\end{aligned}$$

entonces,

$$mAv_1 = \begin{pmatrix} mA_1v_1 \\ mA_2v_1 \\ mA_3v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mA_1v_1 \\ nA_1v_1 \\ pA_1v_1 \end{pmatrix} = A_1v_1 \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix},$$

y así $m\lambda_1 = A_1v_1$.

De manera análoga se obtiene para v_3 con

$$\begin{aligned}
(v_3^{\perp_1})^T A v_3 = 0 \text{ es equivalente a } sA_2v_3 = qA_3v_3.\\
(v_3^{\perp_2})^T A v_3 = 0 \text{ es equivalente a } sA_1v_3 = tA_3v_3.
\end{aligned}$$

entonces,

$$sAv_3 = \begin{pmatrix} sA_1v_3 \\ sA_2v_3 \\ sA_3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tA_3v_3 \\ qA_3v_3 \\ sA_3v_3 \end{pmatrix} = A_3v_3 \begin{pmatrix} t \\ q \\ s \end{pmatrix},$$

y así $s\lambda_3 = A_3v_3$.

2⇒1:

$$m[(v_1^{\perp_1})^T A v_1] = m\lambda_1 (v_1^{\perp_1})^T v_1 = 0.$$
$$m[(v_1^{\perp_2})^T A v_1] = m\lambda_1 (v_1^{\perp_2})^T v_1 = 0.$$

Como

$$\text{m} \neq 0, \text{ entonces } [(\text{v}_1^{\perp_1})^T A v_1] = [(v_1^{\perp_2})^T A v_1] = 0.$$

De manera análoga se tiene que $s \neq 0$, entonces $[(v_3^{\perp_1})^T A v_3] = [(v_3^{\perp_2})^T A v_3] = 0$.

El siguiente resultado es una contribución original al trabajo, en éste se determina el valor del segundo valor propio asociado a la matriz A en términos de las entradas de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$.

Teorema 3 *Dados $a, b, c, d, e, w, v, x, y, m, n, p, t, q, s$ enteros con $m \neq 0$ y $s \neq 0$, $A_1 = (a\ ,c\ ,w), A_2 = (b\ ,d\ ,v), A_3 = (x\ ,y\ ,e), A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} t \\ q \\ s \end{pmatrix}$ vectores propios de A asociado a los valores propios λ_1 y λ_3 respectivamente. Si A es diagonalizable, el segundo valor propio λ_2 satisface*

$$ns\lambda_2 = s(na - mb - pv) - n(tx + qy).$$

Demostración.

Para demostrar el teorema se consideran. La siguiente matriz de cambio de base dada por $C = \begin{pmatrix} m & \alpha & t \\ n & \beta & q \\ p & \theta & s \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, La matriz inversa de

C es

$$C^{-1} = \frac{1}{det(C)} \begin{pmatrix} s\beta - q\theta & t\theta - s\alpha & q\alpha - t\beta \\ pq - sn & sm - pt & nt - mq \\ n\theta - p\beta & p\alpha - m\theta & m\beta - n\alpha \end{pmatrix}.$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $det(C) = ((ms\beta + nt\theta + pq\alpha) - (pt\beta + mq\theta + sn\alpha)) = 1$, el siguiente flujo determina el cambio de base

$$\begin{tikzcd} \boxed{R} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C^{-1}"'] & \boxed{R} \\ \boxed{R_B} \arrow[r, "D"'] & \boxed{R_B} \arrow[u, "C"'] \end{tikzcd}$$

Así, la matriz A en la base B, está dada en vectores columna como

$$A = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}$$

con $V_1 = \begin{pmatrix} -m(q\theta - s\beta)\lambda_1 - (ns - pq)\alpha\lambda_2 + t(n\theta - p\beta)\lambda_3 \\ (s\beta - q\theta)n\lambda_1 - \beta(ns - pq)\lambda_2 + q(n\theta - p\beta)\lambda_3 \\ p(s\beta - q\theta)\lambda_1 - \theta(ns - pq)\lambda_2 + (n\theta - p\beta)s\lambda_3 \end{pmatrix}$,

$V_2 = \begin{pmatrix} m(t\theta - s\alpha)\lambda_1 + \alpha(ms - pt)\lambda_2 - t(m\theta - p\alpha)\lambda_3 \\ n(t\theta - s\alpha)\lambda_1 + \beta(ms - pt)\lambda_2 - q(m\theta - p\alpha)\lambda_3 \\ p(t\theta - s\alpha)\lambda_1 + \theta(ms - pt)\lambda_2 - s(m\theta - p\alpha)\lambda_3 \end{pmatrix}$ y

$V_3 = \begin{pmatrix} m(q\alpha - t\beta)\lambda_1 - \alpha(mq - nt)\lambda_2 + t(m\beta - n\alpha)\lambda_3 \\ n(q\alpha - t\beta)\lambda_1 - \beta(mq - nt)\lambda_2 + q(m\beta - n\alpha)\lambda_3 \\ p(q\alpha - t\beta)\lambda_1 - \theta(mq - nt)\lambda_2 + s(m\beta - n\alpha)\lambda_3 \end{pmatrix}$

Para encontrar el valor propio λ_2 se realizan los siguientes cálculos

$(na - mb) = -nns\alpha\lambda_2 + npq\alpha\lambda_2 + mns\beta\lambda_2 - mpq\beta\lambda_2 + nnt\theta\lambda_3 - npt\beta\lambda_3 - mnq\theta\lambda_3 + mqp\beta\lambda_3$.

$(-pv+ne) = nnt\theta\lambda_2 - pnt\beta\lambda_2 - mnq\theta\lambda_2 + pqn\alpha\lambda_3 + smn\beta\lambda_3 - nns\alpha\lambda_3,$

así

$$(na+ne) - (mb+pv) = n\lambda_2 + n\lambda_3,$$

como $s\lambda_3 = tx + qy + se$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que

$s(na+ne) - s(mb+pv) - n(tx+qy+se) = ns\lambda_2$ donde

$$\boxed{sn\lambda_2 = s(na - mb - pv) - n(tx+qy)}$$

Corolario 2 *Dados* m, n, p, t, q, s *enteros tal que* $m \neq 0,\ s \neq 0$ *entonces* $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} t \\ q \\ s \end{pmatrix}$ *son vectores propios linealmente independientes de* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ *con* $A_1 = \begin{pmatrix} a, & c, & w \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} b, & d, & v \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} x, & y, & e \end{pmatrix}$ *y valores propios* $m\lambda_1 = A_1v_1$, $sn\lambda_2 = s(na - mb - pv) - n(tx+qy)$,$s\lambda_3 = A_3v_3$ *si y sólo si*

$$nA_1v_1 = mA_2v_1$$
$$pA_1v_1 = mA_3v_1$$
$$sA_2v_3 = qA_3v_3$$
$$sA_1v_3 = tA_3v_3.$$

A continuación se desarrolla un ejemplo utilizando las condiciones establecidas en la proposición 2.

Ejemplo 6 *Dados los vectores linealmente independientes* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix},$$

determinaremos los valores de las entradas de A, usando las condiciones de la proposición 2, para lo cual se tiene que

$$\boxed{\begin{matrix} m = 1 & n = 2 & p = 0 \\ t = 0 & q = 0 & s = 1 \end{matrix}}$$

Se procede a encontrar los valores de las entradas de la matriz A, Así,

Para $nA_1v_1 = mA_2v_1$, se tiene que $2(a + 2c) = b + 2d$.
Para $pA_1v_1 = mA_3v_1$, se tiene que $0 = x + 2y$.
Para $sA_2v_3 = qA_3v_3$, se tiene que $v = 0$.
Para $sA_1v_3 = tA_3v_3$, se tiene que $w = 0$,

luego, las condiciones de la matriz están sujetas a

$$\boxed{\begin{matrix} 2(a + 2c) = b + 2d \\ 0 = x + 2y \\ v = 0 \\ w = 0 \end{matrix}}$$

se observa del cuadro anterior que $2(a + 2c) = b + 2d$ tiene tres variables libres, las cuales tendrán los siguientes valores $a = 1, c = 2, b = 4$ por tanto $d = 3$, en la segunda expresión se tiene que $0 = x + 2y$, así, si $y = -4$, entonces $x = 8$ y las otras entradas estan condicionadas.

Para nuestro caso las variables d, x, w, v son dependientes, el resto de las variables a, c, b, y, e son libres, se construye entonces la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 8 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son λ_1 y λ_3 que satisfacen $m\lambda_1 = A_1v_1 = 5, s\lambda_3 = A_3v_3 = 7$ respectivamente y vectores propios asociados $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Para el segundo valor propio $sn\lambda_2 = s(na - mb - pv) - n(tx + qy) = -1$ se establece el segundo vector propio usando el método tradicional, es decir buscando su espacio propio

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 & 0 \\ 4 & 3-\lambda_2 & 0 \\ 8 & -4 & 7-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Reduciendo la matriz obtenemos,

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene

$$2x - y + 2z = 0$$

$$x + y = 0$$

resolviendo, z libre, $x = -y$, si $z = 3, y = 2$, entonces $x = -2$, así el vector propio asociado al λ_2 es $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$

A continuación se presentan una serie de ejemplos que utilizan la misma metodología explicada anteriormente pero con valores diferentes en las entradas de la matriz.

Ejemplo 7 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A, basados en las condiciones dadas en la proposición (2) son:

$$\begin{aligned} 2(a + 2c) &= b + 2d \\ x + 2y &= 0, \end{aligned}$$

y

$$v=w=0$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + 2c \tag{1.2.1}$$
$$2\lambda_2 = 2a - b \tag{1.2.2}$$
$$\lambda_3 = e. \tag{1.2.3}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 6 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -7,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 8 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} a + c &= b + d \\ x + y &= 0 \\ w &= v = 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + c \tag{1.2.4}$$
$$\lambda_2 = a - b \tag{1.2.5}$$
$$\lambda_3 = e. \tag{1.2.6}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 9 & -9 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -11 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -11$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ 45 \\ 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los ejemplos anteriores corresponden a casos particulares en los cuales se fijan dos vectores, así las condiciones que se obtienen como los valores propios corresponde a los casos estudiados en la sección anterior.

Ejemplo 9 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, -2 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$\begin{aligned} a+c &= b+d \\ x+y &= 0 \\ -2(a+c-2w) &= x+y-2e \\ x+y-2e &= -2(b+d-2v). \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a+c \tag{1.2.7}$$
$$-2\lambda_2 = (a-b)-(x+y) \tag{1.2.8}$$
$$-2\lambda_3 = x+y-2e. \tag{1.2.9}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&1\\5&-5&3\end{pmatrix}$	$\lambda_1=5,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=3$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-13\\11\\30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}8&2&3\\6&4&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$	$\lambda_1=10,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=4$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\3\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&3&1\\2&6&1\\1&-1&6\end{pmatrix}$	$\lambda_1=8,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-7\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2&4&2\\3&3&2\\3&-3&2\end{pmatrix}$	$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\1\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&4&5\\7&2&5\\-1&1&-1\end{pmatrix}$	$\lambda_1=9,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-1$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\12\\-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Ejemplo 10 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} 2(a+2c+3w) &= (b+2d+3v) \\ (x+2y+3e) &= 3(a+2c+3w) \\ y+e &= d+v \\ c+w &= 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + 2c + 3w \tag{1.2.10}$$
$$2\lambda_2 = (2a - b - 3v) - 2y \tag{1.2.11}$$
$$\lambda_3 = y + e. \tag{1.2.12}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -12 & 6 & 0 \\ -16 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 36 \\ 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 15 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & 2 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 14,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 13$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 12 & 2 & -2 \\ 17 & 3 & -1 \\ 20 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 31 \\ 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -12 & 4 & 2 \\ -10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -6 & 5 & -2 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 11 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 3 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} 3a + c + w &= 3(3b + d + v) \\ 3(3x + y + e) &= (3a + c + w) \\ 3(2a + 3w) &= 2(2x + 3e) \\ 3(2b + 3v) &= 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$3\lambda_1 = 3a + c + w \tag{1.2.13}$$

$$3\lambda_2 = 3(a - 3b - v) - 2x \tag{1.2.14}$$

$$3\lambda_3 = 2x + 3e. \tag{1.2.15}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix}2 & 35 & 4\\3 & 8 & -2\\9 & -14 & 2\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 15,\ \lambda_2 = -11,\ \lambda_3 = 8$	$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-73\\19\\71\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4 & 4 & 2\\-6 & 20 & 4\\6 & -5 & 3\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 14,\ \lambda_3 = 7$	$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-7\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\-9 & 25 & 6\\6 & -16 & 2\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 20,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-21\\19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4 & 24 & 0\\-3 & 19 & 2\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 4$	$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24\\5\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\-6 & 14 & 4\\0 & -2 & 2\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 13,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-22\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

Nota: Los ejercicios que se mostraron anteriormente cada uno forman un sistema de cuatro ecuaciones con seis variables, es decir que se puede encontrar tantas matrices como soluciones tenga el sistema.

Los siguientes ejemplos permiten determinar de manera fácil condiciones para la construcción de matrices con entradas enteras cuyos valores y vectores propios son enteros.

Ejemplo 12 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix}m, & n, & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & q, & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix}a & c & w\\b & d & v\\x & y & e\end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$
\begin{aligned}
a+c+w &= b+d+v \\
a+c+w &= x+y+e \\
-(b-v) &= 0 \\
-(a-w) &= x-e.
\end{aligned}
$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a+c+w \tag{1.2.16}$$
$$\lambda_2 = a-b-v+x+y \tag{1.2.17}$$
$$\lambda_3 = x-e. \tag{1.2.18}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ *asociados a* λ_1 *y* λ_3 *respectivamente.*

Ejemplo 13 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix}m, & n, & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & q, & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0, & 1\end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$
\begin{aligned}
a+c &= b+d \\
0 &= x+y \\
b+v &= 0 \\
a+w &= x+e.
\end{aligned}
$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a+c \tag{1.2.19}$$
$$\lambda_2 = a-b-x \tag{1.2.20}$$
$$\lambda_3 = x+e. \tag{1.2.21}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *asociados a* λ_1 *y* λ_3 *respectivamente.*

Ejemplo 14 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix}m, & n, & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & q, & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} a+c &= b+d \\ 0 &= x+y \\ b+d+v &= x+y+e \\ a+c+w &= x+y+e. \end{aligned}$$

como $x+y=0$*, entonces* $v=w$*.*
Los valores propios son

$$\lambda_1 = a+c \tag{1.2.22}$$
$$\lambda_2 = a-b-x-y \tag{1.2.23}$$
$$\lambda_3 = x+y+e. \tag{1.2.24}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *asociados a* λ_1 *y* λ_3 *respectivamente.*

Ejemplo 15 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix}m, & n, & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & q, & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1, & 1\end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} a+c+w &= b+d+v \\ a+c+w &= x+y+e \\ d+v &= y+e \\ c+w &= 0. \end{aligned}$$

como $c+w=0$*, entonces* $b+d+v=x+y+e$*, así* $x=b$*.*
Los valores propios son

$$\lambda_1 = a+c+w \tag{1.2.25}$$
$$\lambda_2 = a-b-v-y \tag{1.2.26}$$
$$\lambda_3 = y+e. \tag{1.2.27}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ *asociados a* λ_1 *y* λ_3 *respectivamente.*

Ejemplo 16 *Dados los siguientes vectores* $\big(m, \quad n, \quad p\big) = \big(1, \quad 1, \quad 0\big)$*,* $\big(t, \quad q, \quad s\big) = \big(0, \quad 1, \quad 1\big)$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} a+c &= b+d \\ 0 &= x+y \\ d+v &= y+e \\ c+w &= 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a+c \tag{1.2.28}$$
$$\lambda_2 = a-b-y \tag{1.2.29}$$
$$\lambda_3 = y+e. \tag{1.2.30}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ *asociados a* λ_1 *y* λ_3 *respectivamente.*

Ejemplo 17 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix}m, & n, & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1, & 1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & q, & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1, & -1\end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} -a+c &= -(-b+d) \\ 0 &= -(-x+y) \\ -(d-v) &= y-e \\ -(c-w) &= 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a - c \tag{1.2.31}$$
$$\lambda_2 = a + b + y \tag{1.2.32}$$
$$\lambda_3 = -y + e. \tag{1.2.33}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ *asociados a* λ_1 *y* λ_3 *respectivamente.*

Ejemplo 18 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix}m, & n, & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1, & 1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & q, & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & -1, & 1\end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} -a+c &= -(-b+d) \\ 0 &= -(-x+y) \\ b-d+v &= -(x-y+e) \\ a-c+w &= x-y+e. \end{aligned}$$

como $x - y = 0$ y multiplicando por -1 la última condición, entonces $b - d + v = c - a + w$, así $v = -w$.
Los valores propios son

$$\lambda_1 = a - c \tag{1.2.34}$$
$$\lambda_2 = a + b - x + y \tag{1.2.35}$$
$$\lambda_3 = x - y + e. \tag{1.2.36}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *asociados a λ_1 y λ_3 respectivamente.*

Los siguientes casos determinan condiciones particulares diferentes a las estudiadas en la proposición 2 que pueden ser encontradas al caracterizar las matrices de orden 3

Si $(ma + nc + pw) = 0$ se tiene que $m\lambda_1 = 0$ o $m = 0$ entonces
CASO 1: Si $\lambda_1 = 0$ y $m \neq 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} ma + nc + pw \\ mb + nd + pv \\ mx + ny + pe \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$
$$\frac{ma + nc + pw}{m} \begin{pmatrix} m \\ \frac{m(mb+nd+pv)}{ma+nc+pw} \\ \frac{m(mx+ny+pe)}{ma+nc+pw} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

por hipótesis se tiene que $(ma + nc + pw) = 0$, entonces

$$m(mb + nd + pv) = 0.$$

$$m(mx + ny + pe) = 0.$$

donde

$$(mb + nd + pv) = (mx + ny + pe) = 0.$$

CASO 2: Si $\lambda_1 \neq 0$ y $m = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ p \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} nc + pw \\ nd + pv \\ ny + pe \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

$$\frac{nd + pv}{n} \begin{pmatrix} \frac{n(nc+pw)}{nd+pv} \\ n \\ \frac{n(ny+pe)}{nd+pv} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

así se tiene que

$$\lambda_1 = \frac{(nd + pv)}{n}$$

y

$$n(nc + pw) = 0$$

$$n(ny + pe) = p(nd + pv)$$

con $(nd + pv) \neq 0$.

De manera similar que el CASO 1 se procede Si $(tx + qy + se) = 0$ entonces $s\lambda_3 = 0$, entonces si $\lambda_3 = 0$ o $s = 0$ se tiene que:
CASO 3: Si $\lambda_3 = 0$ y $s \neq 0$ entonces

$$s(ta + qc + sw) = 0.$$

$$s(tb + qd + sv) = 0.$$

donde

$$(ta + qc + sw) = (tb + qd + sv) = 0.$$

CASO 4: Si $\lambda_3 \neq 0$ y $s = 0$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} at + cq \\ bt + dq \\ xt + yq \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{bt + dq}{q} \begin{pmatrix} \frac{q(at+cq)}{bt+dq} \\ q \\ \frac{q(xt+yq)}{bt+dq} \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$$

así se tiene que

$$\lambda_3 = \frac{(bt + dq)}{q}.$$

y

$$q(xt + yq) = 0.$$

$$q(at + cq) = t(bt + dq).$$

con $(bt + dq) \neq 0$.

Capítulo 2

Estudios Previos

Diversos artículos abordan el estudio de matrices, centrados en la caracterización de matrices con entradas y valores propios enteros. En particular se abordará el estudio de Gutierrez A., Poveda Y. y Prieto L. en [1] el cual da condiciones para algunas familias de matrices con entradas enteras que poseen valores propios enteros.

Las ideas de este trabajo inician en la caracterización de matrices de orden 2 y extienden las ideas para matrices de orden 3 y 4.

Considera la matriz A, definida como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde a, b, c, d son enteros que satisfacen la condición

$$a + b = c + d.$$

El estudio concluye que la matriz A sujeta a la condición anterior posee los valores propios $\lambda_1 = a + b$ y $\lambda_2 = a - c$, luego extienden esta idea para matrices de orden 3, considerando que la suma de las filas de la matriz no es garantia para que los valores propios sean enteros, es así que centran el estudio de la caracterización de matrices de orden 3 que tengan los mismos valores propios dados para el caso de matrices de orden 2 y cuyas entradas contengan la menor cantidad de ceros posibles, para esto definen la matriz A como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ z & w & e \end{pmatrix}$$

Se dan condiciones sobre x, y, z, w con el objetivo que A tenga valores propios $\lambda_1 = a + b$, $\lambda_2 = a - c$ y $\lambda_3 = e$, esto equivale a encontrar las soluciones enteras del sistema

$$xz + wy = 0 \tag{2.0.1}$$
$$zby - zdx - way + wcx = 0 \tag{2.0.2}$$

A partir de las ecuaciones anteriores es posible construir matrices de distintos tipos que las satisfacen, algunas de ellas se presentan a continuación.

MATRIZ TIPO 1

$$A = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & x \\ z & -z & e \end{pmatrix}$$

MATRIZ TIPO 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b & ub \\ c & d & -uc \\ -uc & -ub & e \end{pmatrix}$$

con u un número entero.

MATRIZ TIPO 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & ub \\ c & d & -uc \\ uc & ub & e \end{pmatrix}$$

con u un número entero.

MATRIZ TIPO 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & x \\ b & 0 & -x \\ z & z & e \end{pmatrix}.$$

En [1] los autores determinan que en cada caso, las matrices son diagonalizables unicamente cuando los valores propios son distintos.

Por otro lado Gilbert R. en [2], realiza un estudio mas general centrado en la composición de matrices con entradas enteras, valores y vectores propios enteros, para lo cual utiliza el polinomio característico y el teorema de bloques de Jordan que se describen a continuación.

Definición 1 *Si A es una matriz real de tamaño $n \times n$ y $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, el polinomio $p_n(A)$ denota la matriz que se genera si se reemplaza cada aparición de x en $p_n(x)$ por la matriz A:*

$$p_n(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + ... + a_1 A + a_0 A^0$$

donde $a_i \in R, (i = 0, 1, ..., n)$ y $A^0 = I_n$.

En consecuencia, se dice que A satisface el polinomio $p_n(x)$ si $p_n(A) = 0$.

Definición 2 *El polinomio mínimo de una matriz A es el polinomio no nulo de menor grado que es satisfecho por A. Se denota por $m_A(x)$*

Teorema 4 *Suponga que A es una matriz de $n \times n$ con valores propios $\beta_1, \ldots, \beta_c$ de multiplicidad algebraica $m_1, \ldots, m_c$. Sean $W_1, \ldots, W_{m1}$ bloques de Jordan correspondientes al valor propio β_1, sean $W_{m_1+1}, \ldots, W_{m_1+m_2}$ bloques de Jordan correspondientes al valor propio β_2, y así hasta β_c entonces la matriz $Q = [W_1, W_2, \ldots, W_n]$ tiene la propiedad que $Q^{-1}AQ = J$*

Donde $J = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$

Gilbert R. considera las definiciones anteriores y el teorema para caracterizar matrices con entradas enteras y con valores y vectores propios enteros, a partir de una matriz A, cuyas entradas estan dadas por los coeficientes del polinomio mínimo de A, esta matriz es llamada matriz de composición de

$p(\mu)$.

La matriz de composición de $p(\mu)$ esta dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

Veamos algunos ejemplos donde fijamos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y dos vectores propios v_1, v_3 y se sigue el estudio dado por el autor.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 30 & -31 & 10 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 14 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -7,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 13 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -4 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & 22 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 36 \end{pmatrix}$

La tabla anterior determina 5 ejercicios que se desarrollan en cada uno de los ejemplos que se presenta a continuación, donde se considera para cada uno los valores propios y los vectores propios dados en la tabla y se verifican que satisfagan las condiciones establecidas en la proposición 2.

Ejemplo 19 *Tiene polinomio mínimo* $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 31\lambda - 30$ *y satisface las* *siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
5(a+5c+25w) &= 1(mb+5d+25v)\\
m(x+5y+25e) &= 25(a+5c+25w)\\
9(a+3c+9w) &= (x+3y+9e)\\
3(x+3y+9e) &= 9(b+3d+9v)\\
\lambda_1 &= a+5c+25w\\
9\lambda_3 &= x+3y+9e\\
(9)(5)\lambda_2 &= 9(5a-b-25v)-5(x+3y),
\end{aligned}$$

Ejemplo 20 *Tiene polinomio mínimo* $\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda-14$ *y satisface las siguiente condiciones*

$$\begin{aligned}
-7(a-7c+49w) &= (b-7d+49v)\\
(x-7y+49e) &= 49(a-7c+49w)\\
(a-c+w) &= (x-1y+e)\\
-1(x-y+e) &= (b-d+v)\\
\lambda_1 &= a-7c+49w\\
\lambda_3 &= x-y+e\\
(-7)(1)\lambda_2 &= 1(-7a-b-49v)+7(x-y),
\end{aligned}$$

Ejemplo 21 *Tiene polinomio mínimo* $\lambda^3-13\lambda^2+22\lambda$ *y satisface las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
11(a+11c+121w) &= (b+11d+121v)\\
(x+11y+121e) &= 121(a+11c+pw)\\
4(a+2c+4w) &= (x+2y+4e)\\
2(x+2y+4e) &= 4(b+2d+4v)\\
\lambda_1 &= a+11c+121w\\
4\lambda_3 &= x+2y+4e\\
(11)(4)\lambda_2 &= 4(11a-b-121v)-11(x+2y),
\end{aligned}$$

Ejemplo 22 *Tiene polinomio mínimo* $\lambda^3-7\lambda^2+4\lambda+12$ *y satisface las* *siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
36(a+6c+36w) &= (b+6d+36v)\\
(x+6y+36e) &= p(a+6c+36w)\\
4(a+2c+4w) &= (x+2y+4e)\\
2(x+2y+4e) &= 4(b+2d+4v)\\
\lambda_1 &= a+6c+36w\\
4\lambda_3 &= x+2y+4e\\
(6)(4)\lambda_2 &= 4(6a-b-36v)-6(x+2y),
\end{aligned}$$

Ejemplo 23 *Tiene polinomio mínimo* $\lambda^3-3\lambda^2-22\lambda+24$ *y satisface las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
(a+c+w) &= (b+d+v)\\
(x+y+e) &= (a+c+w)\\
36(a+6c+36w) &= (x+6y+36e)\\
6(x+6y+36e) &= 36(b+6d+36v)\\
\lambda_1 &= a+c+w\\
36\lambda_3 &= x+6y+36e\\
36\lambda_2 &= 36(a-b-v)-(x+6y),
\end{aligned}$$

los ejemplos anterios verifican que las condiciones dadas por Gilber R., son sastisfechas en este trabajo.

En los siguientes ejemplos se fijan dos valores propios y dos vectores propios y se construye matrices basados en las condiciones establecidas en la proposición 2.

Ejemplo 24 *Dados los valores propios* $\lambda_1=1, \lambda_3=2$, *y los vectores* $v_1=\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\end{pmatrix}$ *que satisfacen las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
(a+c+w) &= (b+d+v)\\
(x+y+e) &= (a+c+w)\\
4(a+2c+4w) &= (x+2y+4e)\\
2(x+2y+4e) &= 4(b+2d+4v)\\
(a+c+w) &= 1\\
(x+2y+4e) &= 8,
\end{aligned}$$

se construyen a partir de estas condiciones una serie de matrices, veamos algunas

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 8,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -31 \\ -9 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 8 & -11 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ejemplo 25 *Dados los valores propios* $\lambda_1 = 3, \lambda_3 = -1$, *y los vectores* $v_1 = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 9 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$ *que satisfacen las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned} 3(a + 3c + 9w) &= (b + 3d + 9v) \\ (x + 3y + 9e) &= 9(a + 3c + 9w) \\ (b - d + v) &= -(x - y + e) \\ (x - y + e) &= (a - c + w) \\ (a - 3c - 9w) &= 3 \\ (x - y + e) &= -1. \end{aligned}$$

se construyen a partir de estas condiciones una serie de matrices, veamos algunas

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 8,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -7,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fijemos ahora dos valores propios y dos vectores y utilicemos las condiciones dadas en la proposición 2

Ejemplo 26 *Dados los valores propios* $\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 2$*, y los vectores* $v_1 = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ *que satisfacen las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned} (a+c) &= (b+d) \\ (x+y) &= 0 \\ (b+2d+v) &= 2(x+2y+e) \\ (x+2y+e) &= (a+2c+w) \\ (a+c) &= 1 \\ (x+2y+e) &= 2 \end{aligned}$$

así se generan matrices a partir de estas condiciones, veamos algunas

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

En el capítulo 2, se muestran resultados mas generales que los presentados en los artículos estudiados. Por una parte se hace una caracterización mas general sobre las condiciones de la matriz que los mostrados por Gutierrez A, Poveda Y y Prieto L.[1], además que se estable matrices diferentes a las elaboradas por Gilbert R.[2].

Capítulo 3

Diagonalización

En este capítulo se toman algunas matrices de 3×3 estudiadas en el capítulo 1 y se determinan condiciones para que estas sean diagonalizables.

Dados m, n, p, t, q, s enteros tales que $m \neq 0$, $s \neq 0$ entonces $v_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} t \\ q \\ s \end{pmatrix}$ son vectores propios de $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ con $A_1 = \begin{pmatrix} a, & c, & w \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} b, & d, & v \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} x, & y, & e \end{pmatrix}$ y valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tal que $m\lambda_1 = A_1 v_1$, $sn\lambda_2 = s(na - mb - pv) - n(tx + qy)$,$s\lambda_3 = A_3 v_3$ si y sólo si

$$nA_1v_1 = mA_2v_1.$$

$$pA_1v_1 = mA_3v_1.$$

$$sA_2v_3 = qA_3v_3.$$

$$sA_1v_3 = tA_3v_3.$$

Si se quiere estudiar condiciones de diagonalización, es necesario partir de condiciones como $\lambda_1 = \lambda_3$ ó $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3$ ó $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y verificar en que casos los valores propios no generan vectores linealmente independientes que construyan una base para las matrices estudiadas.

Dada A una matriz de tamaño 3×3 con valores propios λ_1, λ_2, λ_3, si $\lambda_1 = \lambda_3$ entonces

$$
\begin{aligned}
m\lambda_1 &= A_1 v_1 \\
m\lambda_3 &= A_1 v_1 \\
ms\lambda_3 &= sA_1 v_1 \\
mA_3 v_3 &= sA_1 v_1,
\end{aligned}
$$

así,

$$
\begin{aligned}
nA_1 v_1 &= mA_2 v_1. \\
pA_1 v_1 &= mA_3 v_1. \\
qA_1 v_1 &= mA_2 v_3. \\
tA_1 v_1 &= mA_1 v_3. \\
mA_3 v_3 &= sA_1 v_1.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos estas condiciones en los siguientes ejemplos

Ejemplo 27 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$
A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}
$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$
\begin{array}{rcl}
a + c & = & b + d \\
x + y & = & 0 \\
a + c & = & e \\
v & = w = & 0.
\end{array}
$$

Los valores propios son

$$
\lambda_1 = a + c = \lambda_3 \tag{3.0.1}
$$
$$
\lambda_2 = a - b. \tag{3.0.2}
$$
$$
\tag{3.0.3}
$$

y los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *asociado a* λ_1.

La matriz A que satisface las condiciones establecidas anteriormente se puede representar como

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & a+c-b & 0 \\ x & -x & a+c \end{pmatrix}$$

El primer valor propio $\lambda_1 = a+c$ tiene multiplicidad algebraica 2 y el espacio nulo de λ_1, denotado E_{λ_1} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, entonces se debe estudiar el caso $\lambda_2 = a-b$ con el objeto de determinar condiciones de diagonalización para la matriz A.

Si $\lambda_2 \neq \lambda_1$ entonces $a-b \neq a+c$ implica que $b+c \neq 0$ en cuyo caso A es diagonalizable.

Se estudia el espacio propio de A para λ_2, denotado E_{λ_2} y se concluye que:

Si $b+c \neq 0$ y $x = b = 0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Si $b+c \neq 0$,$x = 0$,$b \neq 0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}-c\\b\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Si $b+c \neq 0$,$b = 0$,$x \neq 0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}-(c+b)\\0\\x\end{pmatrix}\right\}$.

Si $b+c = 0$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y la matriz A es diagonalizable si $c = 0 = b$.

La siguiente tabla establece las condiciones sobre las entradas de A para que sea diagonalizable.

MATRICES		
$\neq 0$	$= 0$	DIAGONALIZABLE
$c+b$		*SI*
	$c, c+b, x$	*SI*
c	$c+b$	*NO*
x	c, b	*NO*

CONCLUSIÓN:

MATRICES		
$\neq 0$	$= 0$	DIAGONALIZABLE
$c+b$		SI
	$c, c+b, x$	SI

$\boxed{A \text{ es diagonalizable si y sólo si } b+c=0 \text{ y } x=0=c \text{ ó } b+c\neq 0}$

EJEMPLOS

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 9$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Las siguentes matrices satisfacen $c+b=0$, en estos casos las matrices presentadas no son diagonalizable.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -5 & 11 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\, \lambda_2 = 6,\, \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\, \lambda_2 = 5,\, \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\, \lambda_2 = 1,\, \lambda_3 = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -2,\, \lambda_2 = -2,\, \lambda_3 = -2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 28 *Dados los siguientes vectores* $\big(m, \quad n, \quad p\big) = \big(1, \quad 2, \quad 0\big)$, $\big(t, \quad q, \quad s\big) = \big(0, \quad 0, \quad 1\big)$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} 2(a+2c) &= b+2d \\ x+2y &= 0 \\ a+2c &= e \\ v = w &= 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + 2c = \lambda_3 \tag{3.0.4}$$
$$2\lambda_2 = 2a - b. \tag{3.0.5}$$
$$\tag{3.0.6}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A con entradas enteras que satisface las condiciones establecidas para este ejemplo se representa de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 2(a+2c-d) & d & 0 \\ -2y & y & a+2c \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A está dado por

$$P(\lambda) = (2\lambda - (2a-b))((a+2c)-\lambda)^2.$$

Como $\lambda_1 = \lambda_3$, valor propio de multiplicidad algebraica 2 genera el espacio propio $E_{\lambda_1} = \mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, entonces si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la matriz A es diagonalizable.

Se determinan condiciones sobre λ_2 con el objeto de obtener una matriz A que sea diagonalizable, esto es, si $\lambda_1 = \lambda_2$, implica que $a+4c-d \neq 0$

Si $a+2c-d \neq 0$, $y \neq 0$ y $a+4c-d \neq 0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}-c\\a+2c-d\\-y\end{pmatrix}\right\}$.

Si $a+2c-d \neq 0$, $y \neq 0$ y $c=0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Si $a+2c-d \neq 0$, $c \neq 0$ y $y=0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}-c\\a+2c-d\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Si $a+4c-d = 0$ y $c = 0 = y$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\right\}$.

Si $a+4c-d = 0$, $c=0$ y $y \neq 0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\right\}$.

Si $a+4c-d = 0$, $y=0$ y $c \neq 0$, E_{λ_2} está generado por $\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\right\}$.

La siguiente tabla establece las condiciones sobre las entradas de A para que sea diagonalizable.

MATRICES		
$\neq 0$	$= 0$	DIAGONALIZABLE
$a+4c-d, a+2c-d, y$		SI
$a+4c-d, a+2c-d, y$	c	SI
$a+4c-d, a+2c-d, c$	y	SI
	$a+4c-d, c, y$	SI
y	$a+4c-d, c$	NO
c	$a+4c-d, y$	NO
y, c	$a+4c-d$	NO

CONCLUSIÓN:

$\boxed{A \text{ es diagonalizable si y sólo si } a+4c-d=0 \text{ y } y=0=c \text{ ó } a+4c-d\neq 0}$

La siguiente tabla muestra algunas matrices con entradas enteras que satisfacen las condiciones dadas, dichas matrices tienen valores y vectores propios enteros y son diagonalizables.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 9$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 29 *Dados los siguientes vectores* $\big(m, \quad n, \quad p\big) = \big(1, \quad 1, \quad 0\big)$, $\big(t, \quad q, \quad s\big) = \big(1, \quad 1, \quad 1\big)$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A *son:*

$$\begin{aligned} a + c &= b + d \\ x + y &= 0 \\ a + c &= e \\ v = w &= 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + c = \lambda_3 \tag{3.0.7}$$
$$\lambda_2 = a - b - x - y. \tag{3.0.8}$$
$$\tag{3.0.9}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como $x + y = 0$, entonces $\lambda_2 = a - b$ lo que conlleva a las mismas condiciones de diagonalización estudiadas en el *ejemplo* 27.

EJEMPLOS

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 11$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

OBSERVACIÓN 1: La matriz es diagonalizable siempre que $c \neq -b$ ó $c+b = 0$ y $c = 0 = b$.

Ejemplo 30 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$\begin{aligned} a + c &= b + d \\ x + y &= 0 \\ 2(a + c) &= b + 2d + v \\ -c &= w \\ a + c &= x + 2y + e. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + c = \lambda_3 \tag{3.0.10}$$

$$\lambda_2 = a - b - x - 2y. \tag{3.0.11}$$

$$\tag{3.0.12}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\3 & -1 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\-4 & 2 & -4\\-2 & 2 & 0\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -2$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2 & 5 & -5\\4 & 3 & 4\\3 & -3 & 10\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 7$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\\4 & -4 & 6\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-3 & 6 & -6\\2 & 1 & 2\\1 & -1 & 4\end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

OBSERVACIÓN 2: Si $\lambda_1 = \lambda_2$, implica que

$$\begin{gathered}a + c = a - b - x - 2y\\ c + b = -(x + 2y)\end{gathered}$$

la matriz no es diagonalizable.
CONCLUSIÓN

$\boxed{A \text{ es diagonalizable si y sólo si } c + b = -y \text{ y } y = 0 = c = b \text{ ó } c + b \neq -y}$

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & 8 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 31 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$\begin{aligned} a + c + w &= b + d + v \\ a + c + w &= x + y + e \\ 0 &= b + v \\ a + c + w &= a + w \\ a + c + w &= x + e. \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = a + c + w = \lambda_3 \tag{3.0.13}$$
$$\lambda_2 = a - b - v - x. \tag{3.0.14}$$
$$\tag{3.0.15}$$

y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A que satisface las condiciones establecidas para este ejemplo se representa como

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & w \\ b & a+w & -b \\ x & 0 & a+w-x \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A está dado por

$$P(\lambda) = (\lambda - (a-b-v-x))((a+c+w)-\lambda)^2$$

Se estudia el espacio generado por λ_2, denotado por E_{λ_2} para establecer las condiciones que debe cumplir A para que sea diagonalizable.

MATRICES		
$\neq 0$	$= 0$	DIAGONALIZABLE
$w+x, x$	b	SI
$w+x$	b, x	SI
$w+x, b$	x	SI
$w+x, b, x$		SI
	$w+x, b, x$	SI
w	$w+x, b$	NO
b	$w+x, w$	NO
b, x	$w+x$	NO

CONCLUSIÓN: Con la tabla anterior se concluye que:

$\boxed{A \text{ es diagonalizable si y sólo si } w+x=0 \text{ y } b=0=w \text{ ó } x+w\neq 0}$.

Los siguientes ejemplos muestran matrices que satisfacen las condiciones establecidas para que los valores y vectores propios sean enteros, además de ser diagonalizables

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 8$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & -6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

OBSERVACIÓN 3: Dadas las condiciones anteriores, se contruyen matrices con $\lambda_1 = \lambda_2$, esto implica que $w = -x$, con $b \neq 0$ y $w \neq 0$, así
la matriz no es diagonalizable,

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 11 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 9$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los ejemplos anteriores suponen las condiciones dadas en la proposición 2 y $\lambda_1 = \lambda_3$, veamos el caso de $\lambda_2 = \lambda_3$, esto es

$$\begin{aligned} sn\lambda_2 &= s(na - mb - pv) - n(tx + qy) \\ ns\lambda_3 &= s(na - mb - pv) - n(tx + qy) \\ nA_3v_3 &= s(na - mb - pv) - n(tx + qy), \end{aligned}$$

así, se tienen las condiciones originales dadas en la proposición 2 mas esta nueva condición, estudiemos criterios para que una matriz $A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.

Ejemplo 32 *Dados los siguientes vectores* $\begin{pmatrix} m, & n, & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t, & q, & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ *y la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & d & v \\ x & y & e \end{pmatrix}$$

Las condiciones que se obtienen para la matriz A son:

$$\begin{aligned} a + c + w &= b + d + v \\ a + c + w &= x + y + e \\ b + v &= 0 \\ a + w &= x + e \\ x + e &= a - b - v - x. \end{aligned}$$

con $\lambda_2 = \lambda_3$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A que satisface las condiciones anteriores se representa por

$$A = \begin{pmatrix} a & c & w \\ b & a + c + w & -b \\ -w & c & a + 2w \end{pmatrix},$$

el polinomio característico de A está dado por

$$P(\lambda) = (\lambda - (a+c+w))(\lambda - (a+w))^2.$$

Donde $\lambda_1 = a+c+w; \lambda_2 = a+w = \lambda_3$.
Notese que el polinomio característico de A es sencillo de encontrar, debido a que las condiciones conllevan a determinar los valores propios sin necesidad de usar la técnica clásica que utiliza determinantes.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

CONDICIONES DE DIAGONALIZACIÓN
Si $c \neq 0$ tenemos dos valores propios repetidos $\lambda_2 = a+w = \lambda_3$, es decir de multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_1 = a+c+w$ de multiplicidad algebraica 1. Veamos que condiciones sobre las entradas de la matriz se deben dar para que A sea diagonalizable.

la siguiente tabla muestra matrices que satisface las condiciones pero no son diagonalizables

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & -8 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

la siguiente tabla muestra matrices que satisface las condiciones del ejemplo 32 y son diagonalizables.

MATRICES		
MATRIZ	VALORES PROPIOS	VECTORES PROPIOS
$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

MATRICES			
CASOS	$\neq 0$	$= 0$	DIAGONALIZABLE
1	w	b, c	NO
2	b	c, w	NO
3	$c, b, b+w$		NO
4	$b, b+w$	c	NO
5	c	$b+w$	SI
6		c, b, w	SI

CONCLUSIÓN.

$\boxed{A \text{ es diagonalizable si y sólo si } c + w = w \text{ y } b = 0 = w = c \text{ ó } c + w \neq w}$.

NOTA: se puede observar que la tabla anterior es cerrada, es decir cuando no se cumple una condición, se cumple una de las otras condiciones, la verificación se deja al lector.

Bibliografía

[1] Gutirrez A, Prieto L, Poveda Y. Matrices con entradas y valores propios enteros; Scientia et Technica ao XIV, No 39, pp 374 - 376, septiembre de 2008.

[2] R. Gilbert, Companion matrices with integer enries and integer eigenvalues and eigenvectors, American mathematical monthly, vol. 95, pp, 947 - 950, diciembre 1988.

[3] J. C. Renaud, Matrices whit integer entries and integer eigenvalues, American mathematical monthly, vol. 90, pp 202 - 203, Marzo 1983.

[4] Strang G. Algebra Lineal y sus aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano S . A, 1982.

[5] Apostol T.,Calculus, Editorial Revete S. A, volumen II, 1988.

[6] Takahashi A., Algebra Lineal, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[7] Restrepo P. , Franco R. , Muoz L., Algebra Lineal con aplicaciones, Universidad Nacional de Colombia sede Medellin, 2000.

[8] Hoffman K., Lineal algebra, Prentice hall, 1971.

[9] Nakos G., Joyner D., Algebra Lineal con aplicaciones, Thomson Editores, 1999.

[10] Mesa F., Fernández O., Valencia E., Introducción al Algebra lineal, Ecoe ediciones, 2012.

[11] Lay D., Algebra Lineal y sus aplicaciones, Pearson, 2006.