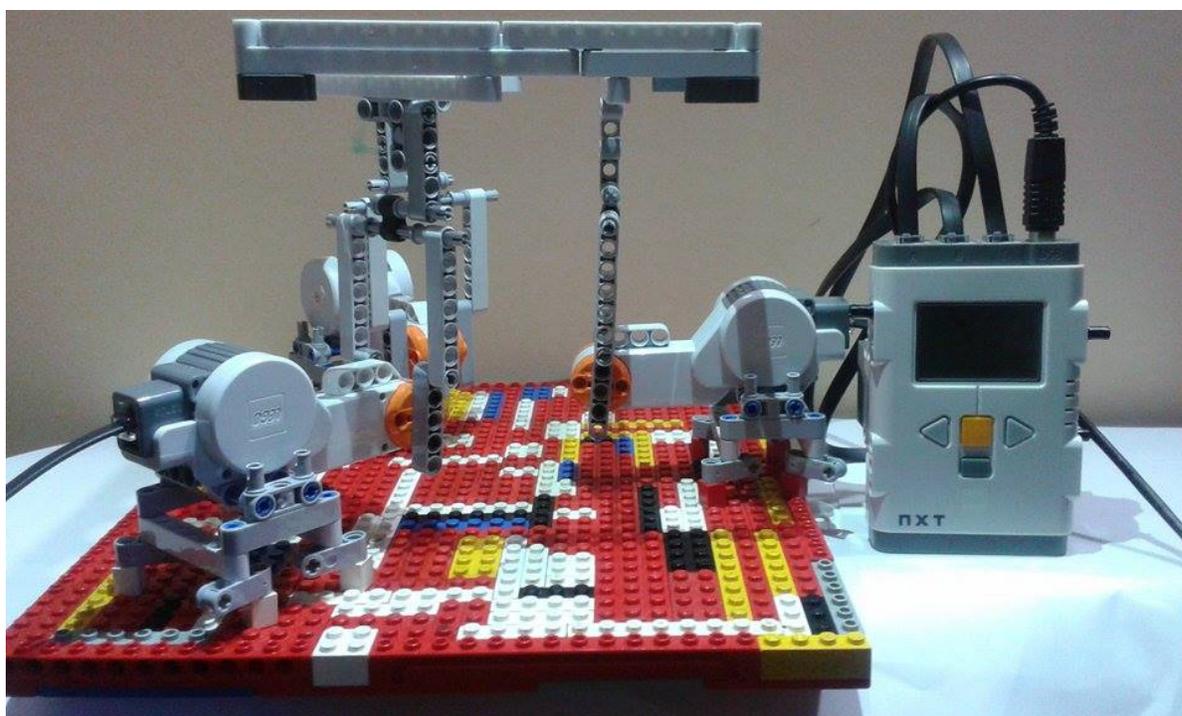


Acciones básicas y realimentación de estados auto-sintonizados para controlar sistemas físicos implementados con el Mindstorm NXT 2.0



Paola Alexandra Correa Moncada
Lorena Castro

Acciones básicas y realimentación de estados auto-sintonizados para controlar sistemas físicos implementados con el Mindstorm NXT 2.0

Paola Alexandra Correa Moncada
Lorena Castro

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniera Electricista

Pereira, Enero del 2016
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Programa de Ingeniería Eléctrica.



Acciones básicas y realimentación de estados auto-sintonizados para controlar sistemas físicos implementados con el Mindstorm NXT 2.0

©Paola Alexandra Correa Moncada

Lorena Castro

Director: Didier Giraldo Buitrago

Pereira, Enero del 2016

Programa de Ingeniería Eléctrica.

Universidad Tecnológica de Pereira

La Julita. Pereira(Colombia)

TEL: (+57)(6)3137122

www.utp.edu.co

Versión web disponible en: *<http://recursosbiblioteca.utp.edu.co/tesisd/index.html>*

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Justificación	2
1.3. Objetivos	3
1.3.1. General	3
1.3.2. Específicos	3
1.4. Estructura del trabajo de grado	3
2. Generalidades	4
2.1. Antecedentes	4
2.2. Realimentación de variables de estado	5
2.2.1. Controlabilidad y observabilidad	6
2.3. Controladores clásicos	8
2.4. Estimación de los parámetros del sistema físico	10
2.5. Efecto “ <i>windup</i> ”	12
2.6. Operador de desplazamiento	13
2.7. El efecto de los polos en el comportamiento del sistema	13
2.8. Estabilidad	16
2.9. Respuesta en el dominio del tiempo	17
2.9.1. Error estacionario	17
2.9.2. Especificaciones de respuesta transitoria	22
2.10. Sistemas de órdenes superiores	25
2.11. Respuesta transitoria de sistemas de mayor orden	26
3. Modelado	28
3.1. Descripción del sistema físico	28
3.1.1. Componentes Lego Mindstorms NXT 2.0	29

TABLA DE CONTENIDO

III

3.2. Modelo matemático de controladores	31
3.2.1. Controlador PD tipo 1	31
3.2.2. Controlador PI tipo 1	33
3.2.3. Controlador PID tipo 1	35
3.2.4. Controlador PID tipo 2	37
3.2.5. Controlador por estados extendidos con acción integral	38
4. Análisis de resultados y conclusiones	43
4.1. Resultados y análisis	47
4.1.1. Control Proporcional - Derivativo	47
4.1.2. Control Proporcional - Integral	50
4.1.3. Control Proporcional - Integral - Derivativo	54
4.1.4. Espacio de estados extendidos	58
4.1.5. “ <i>Dead-Beat</i> ” implementado con PID Tipo I	60
4.2. Conclusiones	62

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

La robótica es considerada un área de gran interés en la ciencia y la tecnología de hoy en día, debido a que los sistemas automatizados se encuentran en casi todos los sectores de la sociedad y en la vida cotidiana. Por tal motivo, la robótica móvil y los sistemas autónomos son tópicos de creciente interés en los programas educativos. La temática de este proyecto se centra en el ámbito de la robótica, la automática y el control, seleccionando un sistema físico clásico tomando como ventaja la plataforma que ofrece LEGO para la construcción de robots para el aprendizaje. Se propone diseñar y desarrollar un sistema de supervisión en tiempo real que permite monitorear las tareas que está llevando a cabo un modelo físico particular construido con el equipo Lego Mindstorms NXT 2.0, en el cual se implementará una combinación de diferentes estrategias de control propuestas como el uso de controles clásicos y una técnica de realimentación de estados de manera que se empleen controles adaptativos con base en los datos obtenidos de la implementación del sistemas físicos mencionados previamente.

1.2. Justificación

En los sectores como la industria o la sociedad en común se presentan de manera recurrente todo tipo de procesos que implican el control de un conjunto de variables en el mundo físico, como temperaturas, presiones, distancias, tensiones, posiciones angulares, entre muchas otras, lo cual exige entonces un tratamiento más a fondo de los temas relacionados con la teoría de control y sus posibles aplicaciones prácticas. Durante mucho tiempo, la educación en control se ha centrado en la enseñanza de los conceptos teóricos y recientemente se presentan simulaciones con ayuda de software especializado (Matlab, LabVIEW, SCADA, etc). Sin embargo esta teoría requiere un esfuerzo intelectual considerable, que en caso de no verse reflejado en ejercicios prácticos, puede disminuir considerablemente la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes en esta área, es decir, la contextualización del problema de control. Se hace entonces muy importante la implementación física basadas en técnicas clásicas de control, con un ideal en el que se pueda contar con características como la flexibilidad de construcción, la facilidad en la implementación de estrategias de control y el bajo costo de sus componentes. El propósito principal de la aplicación de este proyecto es que el estudiante emplee diferentes metodologías de programación sobre un dispositivo físico y que observe lo que ocurre cuando éste interactúa con el mundo real. A partir de dispositivos de Lego Mindstorms NXT 2.0, el estudiante puede solucionar problemas de diversa índole, algunos de los cuales ya se han resuelto de forma teórica, con ello se pretende aumentar la comprensión de las asignatura de Control y la motivación de los alumnos en el aprendizaje de la misma mediante una aplicación práctica.

1.3. Objetivos

1.3.1. General

- Implementar físicamente la técnica de realimentación de estados y controladores clásicos auto-sintonizados e implementar un algoritmo de atenuación para el efecto Windup.

1.3.2. Específicos

- Elaborar un control adaptativo e implementarlo en controles básicos.
- Implementar controles por técnica de realimentación de estados.
- Analizar el efecto Windup que se presenta en sistemas físicos con la implementación de controladores integrales.
- Describir el sistema físico implementado y su estabilidad.

1.4. Estructura del trabajo de grado

En el Capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos del trabajo de grado. Posteriormente en el Capítulo 2 se encuentran los antecedentes, el marco de referencia y el marco conceptual que contextualiza el desarrollo al planteamiento del problema mencionado. En el Capítulo 3 se desarrolla la metodología matemática utilizada para cada uno de los controladores empleados. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos con sus respectivos análisis y las conclusiones del trabajo de grado.

Capítulo 2

Generalidades

2.1. Antecedentes

Alrededor del mundo se han desarrollado aplicaciones educativas basadas en el Lego Mindstorms NXT 2.0. Éstas proponen la construcción de una planta con las piezas de Lego sobre la cual se implementan diversas estrategias de control en las que se pueden apreciar dependiendo del control efectuado la estabilidad que se presenta, de igual forma estrategias de control a partir de realimentación de estados, implementaciones cada vez más rigurosas de algoritmos complejos o el desarrollo de software didácticos que permita conectar o controlar cualquier dispositivo construido con Lego Mindstorms a partir de un PC, todo esto con fines educativos. En esta cuestión se presentan problemas clásicos de sistemas lineales y no lineales.

En particular se puede ver la implementación exhaustiva del problema físico del péndulo invertido siendo éste uno de los problemas clásicos en control. Este sistema constituye un caso concreto del sistema físico en el que se ponen de manifiesto importantes problemas, lo que ha hecho de él un banco de pruebas para sistemas de control [1, 2]. El interés en el estudio de este tipo de sistema radica en las particularidades de cada caso, su modelo matemático presenta una formulación basada en ecuaciones diferenciales que guarda cierta analogía con procesos reales de mayor complejidad, como por ejemplo: el generador sincrónico conectado a un bus infinito, el sistema de control de vuelo para aeronaves, control de estabilidad de grúas, hasta la construcción de vehículos de desplazamiento para humanos que implementan este problema, como es el caso del vehículo Segway [3, 4]. Los últimos años han sido testigos de un creciente interés hacia sistemas multi-variables, debido a su potencial aplicación en muchos campos diferentes: el movimiento colectivo de vehículos autónomos, exploración de entornos desconocidos, vigilancia, redes distribuidas de sensores, biología, etc. Sin embargo

buenos resultados se han obtenido tanto en el caso de modelos lineales y en el más desafiante escenario de vehículos “*nonholonomic*”, sistemas que surgen del modelo de la rodadura sin deslizamiento de los cuerpos rígidos y han cobrado gran importancia en la moderna ingeniería de control en particular en dinámica de vehículos y en generación del movimiento [4].

El Lego Mindstorms es ampliamente utilizado en muchas áreas de la educación y la investigación, que abarca una serie de aplicaciones de demostraciones a la investigación de postgrado, laboratorios y proyectos. El Mindstorms ha atraído el interés de las personas que trabajan en muchas áreas, incluyendo la inteligencia artificial, sistemas embebidos, sistemas de control, robótica y sistemas operativos.

2.2. Realimentación de variables de estado

La mayoría de las técnicas de diseño en la teoría de control moderna están basadas en la configuración de la realimentación de estados, siendo ésta una de las principales aplicaciones, es decir, el control se realiza al realimentar las variables de estado a través de ganancias constantes con el fin de reubicar los valores propios del sistema. La salida de cada sistema se representa a través de las variables de estado, por tanto cualquier aplicación que sea posible realizar a dicha salida podrá ser aplicada a sus variables de estado, puede ser usada para modificar las frecuencias naturales del sistema y hacerlas todas estables, si y sólo si, el sistema es controlable por realimentación de las variables de estado [5]. La teoría de control lineal involucra la modificación del comportamiento de un sistema de m entradas, p salidas y n estados, así:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de estado (2.1) y (2.2) representan el sistema en lazo abierto, mediante la aplicación de una realimentación lineal de estados de la forma:

$$u(t) = Nr(t) - Kx(t) \quad (2.3)$$

Donde :

$r(t) \rightarrow$ señal de referencia

$K \rightarrow$ matriz de ganancia de realimentación de estados

$N \rightarrow$ ganancia de precompensación

Las ecuaciones de estado (2.4) y (2.5) representan un sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BNr(t) \quad (2.4)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.5)$$

Nótese que el sistema en lazo cerrado también es lineal. En la Figura 2.1 se puede observar un esquema de control por realimentación de estados para un sistema de una entrada y una salida (SISO), pues la entrada depende sólo de valores presentes de los estados y la referencia [6].

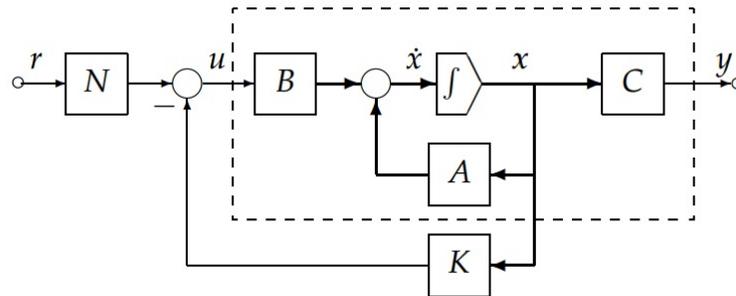


Figura 2.1: Realimentación de estados.

Cuando los estados del sistema no pueden medirse, se recurre a estimarlos mediante un observador de estados, que reconstruye dichos estados a partir de mediciones de la entrada y la salida. La combinación de un observador y realimentación de estados es un controlador dinámico por realimentación de salida, se puede aplicar siempre y cuando el sistema sea observable y controlable, como se puede observar en la Figura 2.2 [6].

2.2.1. Controlabilidad y observabilidad

La controlabilidad es la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial a cualquier estado final en tiempo finito, no importando que trayectoria se siga o que entrada se use.

Por definición, la ecuación de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ o el par (A, B) se dice que es controlable si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0 \in R^n$ y cualquier estado final $x_1 \in R^n$, existe una entrada que transfiere el estado de x_0 a x_1 en tiempo finito, de lo contrario la ecuación estado o el par (A, B) se dice que es no controlable [6].

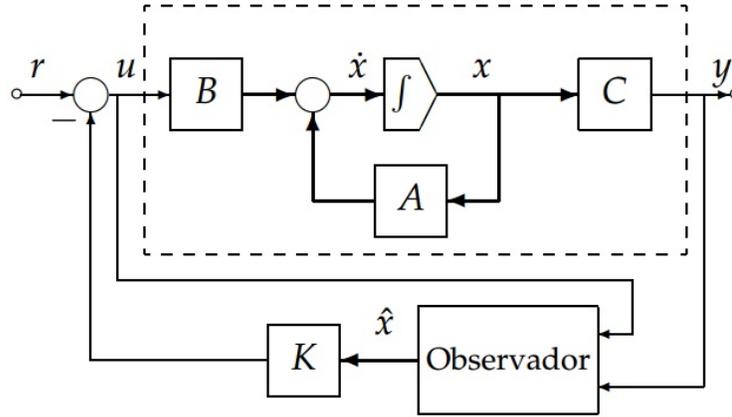


Figura 2.2: Realimentación de salida con observador.

La matriz de controlabilidad se encuentra expresada como:

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.6)$$

A partir de la ecuación de estado (2.7) y (2.8)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.8)$$

El sistema es observable si para cualquier estado inicial $x(0)$ (desconocido), existe un tiempo finito t_1 tal que el conocimiento de la entrada y la salida sobre el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar en forma única el estado inicial $x(0)$, de lo contrario el sistema no es observable [6]. La matriz de observabilidad está dada:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.3. Controladores clásicos

El control proporcional integral derivativo es una estrategia de control frecuentemente usada en aplicaciones industriales, éste presenta una estrategia simple, efectiva y no requiere un estudio teórico complejo para su utilización en dichos procesos. Es fácilmente implementado el control PID en aplicaciones donde las operaciones que se realizan sean sencillas, ya que no requiera equipos de mayor complejidad. El control PID proporciona un tratamiento tanto para la respuesta de estado estacionario como la respuesta transitoria y ofrece una solución eficiente a los problemas de control del mundo real. En la actualidad, la introducción del control digital ha mejorado las capacidades del PID, como son la adaptación, la sintonización automática, y la planificación de ganancias, las cuales pueden ser fácilmente introducidas en el control PID [7].

Considérese un lazo de control de una entrada y una salida (SISO), como se muestra en la Figura 2.3:

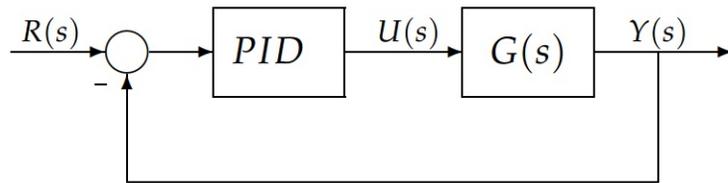


Figura 2.3: Control PID con realimentación de salida.

Los controladores PID, incluyen tres acciones: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D). Estos controladores son los denominados P, I, PI, PD y PID, de los cuales se hará mención [8, 5].

La acción de control proporcional da una salida del controlador que es proporcional al error, esta acción puede controlar cualquier planta estable, pero posee desempeño limitado y error en régimen permanente (off-set). Se define a través de la ecuación:

$$u(t) = K_p e(t) \quad (2.9)$$

Donde K_p es una ganancia proporcional.

Su función de transferencia está dada como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (2.10)$$

La acción de control integral da una salida del controlador que es proporcional al error acumulado, lo que implica que es un modo de control lento. La señal de control $u(t)$ tiene un valor diferente de cero cuando la señal de error $e(t)$ es cero, por lo que se concluye que dada una referencia constante o perturbaciones, el error en régimen permanente es cero. Se define a través de la ecuación:

$$u(t) = K_i \int e(t) \cdot dt \quad (2.11)$$

Donde K_i es la ganancia integral.

Su función de transferencia está dada como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (2.12)$$

En la acción de control proporcional - integral, para la parte de acción proporcional es necesario que exista error para tener una acción de control distinta de cero y para la acción integral un error pequeño positivo siempre nos dará una acción de control creciente y si fuese negativo la señal de control será decreciente. Este razonamiento sencillo nos muestra que el error en régimen permanente será siempre cero. Se define a través de la ecuación:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) \cdot dt \quad (2.13)$$

Su función de transferencia está dada como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (2.14)$$

La acción de control proporcional - derivativa tiene carácter de pre-visión lo que hace más rápida la acción de control, aunque tiene la desventaja importante que amplifica las señales de ruido y puede provocar saturación en el actuador. La acción de control derivativa nunca se utiliza por si sola, debido a que sólo es eficaz durante periodos transitorios. Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir, que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error de estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y permite un valor más grande para la ganancia lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable.

Se define a través de la ecuación:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.15)$$

Donde K_d es la ganancia derivativa.

Su función de transferencia está dada como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + sK_d \quad (2.16)$$

La acción de control proporcional - integral - derivativa reúne las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada está dada por:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) \cdot dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.17)$$

Su función de transferencia está dada como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.18)$$

2.4. Estimación de los parámetros del sistema físico

La técnica de control se fundamenta en una estimación de los parámetros en línea del sistema, modelo al cual se le puede implementar diferentes tipos de control, generando así varias técnicas de control adaptativo o controladores auto-sintonizados. Los controladores auto-sintonizados basan su funcionamiento en la estimación recursiva de las características del sistema, las perturbaciones y la actualización de las estimaciones para así observar posibles cambios, utilizando algún método de identificación de la planta unido al diseño de un controlador basado en dichos parámetros, los cuales se ajustan en línea [9, 10]. El interés en la identificación del sistema es debido a las dificultades asociadas al derivar modelos de principios físicos, estos escenarios hacen de la identificación una herramienta vital en muchas aplicaciones de ingeniería. Existen algunas características que no se tienen en cuenta en el desarrollo de modelos matemáticos de sistemas físicos o en el diseño de controladores, como perturbaciones, ruidos, variaciones de parámetros, entre otras. Esto puede causar un deterioro en la respuesta del controlador ante variaciones en sus parámetros.

Los parámetros del controlador pueden estar en función de los parámetros de la planta, si no se tiene acceso a los parámetros del sistema se debe emplear un método de identificación,

en este caso se aplicará el método de mínimos cuadrados para obtener dichos parámetros. A partir del modelo polinomial de la forma:

$$y(k) = [y(k-1)y(k-2)\cdots u(k-1)u(k-2)] \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \phi^T(k-1) * \theta \quad (2.19)$$

Nótese que se tiene la información pasada del sistema y los parámetros desconocidos de la planta. El método de mínimos cuadrados estima los parámetros del sistema en función de la estimación anterior. Las ecuaciones (2.20) y (2.21) describen el método de mínimos cuadrados:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.20)$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (2.21)$$

A medida que los parámetros estimados comienzan a aproximarse a los valores reales, los elementos de la matriz de covarianza toman valores pequeños, lo que hace que el algoritmo pierda sensibilidad frente a las variaciones en los parámetros. Una alternativa es utilizar el método de mínimos cuadrados con ponderación exponencial de datos, en el cual se introduce un factor de olvido, mediante el cual se agrega un peso a los datos con el fin de dar más importancia a los datos más recientes y descartar con mayor facilidad los datos más antiguos [11]. En las ecuaciones (2.22) y (2.23) se puede apreciar la implementación del factor de olvido.

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{\alpha(t-1) + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.22)$$

$$P(t-1) = \frac{1}{\alpha(t-1)} \left[P(t-2) - \frac{P(t-2)\phi(t-1)^T P(t-2)}{\alpha(t-1) + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \right] \quad (2.23)$$

2.5. Efecto “*windup*”

El “*windup*” es un efecto no lineal que se encuentra en prácticamente todos los controladores donde la acción integral esté presente, es causado por la interacción de la acción integradora con las saturaciones. Todos los actuadores están sujetos a limitaciones como por ejemplo: un motor tiene una velocidad máxima, una válvula no puede estar más abierta que un cierto tope o recíprocamente. Para un sistema de control que opere en un amplio rango de condiciones, puede ocurrir que la variable de control alcance los límites o topes del actuador, cuando esto ocurre el lazo de realimentación se interrumpe y el sistema opera como lazo abierto porque el actuador permanece en el tope independientemente del valor de la salida del proceso, es decir, la acción integradora continuará integrando dicho error incrementándolo considerablemente. Este efecto conlleva la consecuencia que todo controlador que posea acción integradora puede originar transitorios largos cuando se satura el actuador [12].

El “*windup*” del integrador puede ocurrir cuando existen cambios grandes en la referencia o puede ser causado por perturbaciones o mal funcionamiento de los componentes del sistema de control. Un ejemplo claro es el control en cascada, donde el “*windup*” puede ocurrir en el controlador primario cuando el controlador secundario se conmuta a modo manual o si su señal de control se satura [13].

La mayoría de los controladores comerciales actuales llevan incorporados estrategias que proporcionan una desaturación (“*anti-reset windup*”). Para superar este fenómeno, la variable de estado del integrador es controlada separadamente, dependiendo de si la salida del controlador está o no saturada. Si la salida del controlador está saturada, la variable de estado del integrador es reiniciada a cero a una velocidad que depende de la constante de tiempo integral mediante la realimentación negativa de la salida del controlador. De otra manera, la variable de estado integral acumula el error y la acción de control integral se activa [14].

El controlador “*anti-windup*” opera en la región de saturación o en la lineal. Cuando la referencia es un escalón grande, el controlador podrá operar en la región de saturación. En esta región, la entrada a la planta es limitada a un valor máximo prescrito y la variable de estado del integrador rápidamente converge a cero. Cuando el error de velocidad está dentro de alguna cota de error, el controlador opera en la región lineal y la acción integral es activada [14].

2.6. Operador de desplazamiento

El cálculo con el operador diferencial es una herramienta conveniente para manipular ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. El uso de operadores da descripciones compactas del sistema y permite derivar fácilmente relaciones entre las variables del sistema ya que la manipulación de las ecuaciones de diferencia es reducida a un problema puramente algebraico [15]. Un operador análogo se puede desarrollar para sistemas descritos por ecuaciones lineales de diferencia con coeficientes constantes. En el cálculo con operadores, los sistemas son vistos como operadores que mapean las señales de entrada a señales de salida. Para especificar un operador es necesario dar su rango, es decir, definir la clase de señales de entrada y describir cómo actúa el operador sobre señales. En el cálculo con el operador de desplazamiento, todas las señales son consideradas como secuencias doblemente finitas [15]:

$$f(k) : k = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} \quad (2.24)$$

Por conveniencia se escoge el periodo de muestreo igual a la unidad. El operador de desplazamiento hacia adelante se denota q y tiene la siguiente propiedad [15]:

$$qf(k) = f(k + 1) \quad (2.25)$$

El operador de desplazamiento hacia atrás o operador de retardo se denota por q^{-1} y tiene la siguiente propiedad [15]:

$$q^{-1}f(k) = f(k - 1) \quad (2.26)$$

Es importante para el rango del operador que las secuencias sean infinitas; por lo contrario, el inverso del operador de desplazamiento hacia adelante no podría existir. En discusiones de problemas relacionados a la ecuación característica de un sistema, tales como estabilidad y orden del sistema, es más conveniente usar el operador q . Con relación a causalidad es más conveniente usar el operador q^{-1} [15].

2.7. El efecto de los polos en el comportamiento del sistema

El control por asignación de polos es una de las estrategias más usuales en el control de sistemas lineales. Cuando un proceso puede ser modelado representativamente con una estructura lineal, la asignación de polos puede brindar muchas ventajas, ya que es una estrategia flexible, que permite proveer de un conjunto de características deseadas a un lazo

cerrado. En particular se habla de diseño de controladores por asignación de polos, cuando explícitamente se diseña un controlador para lograr que las raíces de un proceso estén en lugares o zonas del semiplano complejo izquierdo [16].

En el diseño de controladores por asignación de polos existen dos puntos que dificultan su implementación en aplicaciones: La primera es que se requiere de una adecuada selección de la estructura del modelo más una correcta identificación de parámetros y segundo es que se necesita de cierto conocimiento y experiencia para decidir dónde ubicar los polos en función de un comportamiento dinámico deseado, teniendo en cuenta el comportamiento de los sensores y actuadores, lo que causa que el proceso de ubicar polos en lazo cerrado se convierta en una tarea demandante. Este diseño depende de una adecuada parametrización; además, si las condiciones de operación del proceso fueran afectadas por las perturbación de parámetros, el desempeño del sistema en lazo cerrado podría verse afectado. Debido a lo anterior, la asignación de polos como estrategia puede fortalecer cuando se utiliza dentro de una estructura de control adaptable. Considerando el manejo de funciones de transferencia, se elige un polinomio deseado el cual se compara con el polinomio característico del sistema, lo que permite obtener las ganancias del control por realimentación de variables de estado [16].

A continuación se puede observar cómo la función de transferencia $G(s)$ puede expresarse como un cociente de polinomios en el dominio de s :

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.27)$$

Las raíces del polinomio numerador $B(s)$ se denominan ceros de la función de transferencia, mientras que a las raíces del denominador $A(s)$ se les llama polos, ambos son los que determinan la forma de la respuesta a una señal dada de entrada y nos permite un conocimiento cualitativo de la dinámica del sistema, aunque los ceros no influyen en la estabilidad del sistema. Debido a esta característica tan importante es que al denominador de una función de transferencia, cuando se lo iguala a cero, se lo denomina Ecuación Característica del Sistema [17]:

$$A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (2.28)$$

La función de transferencia que caracteriza un sistema puede ser descompuesta en fracciones parciales, donde el denominador de cada una de las fracciones es un monomio con el polo correspondiente [18]:

$$G(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} \quad (2.29)$$

$$G(s) = \frac{r_1}{(s - p_1)} + \frac{r_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{r_m}{(s - p_n)} \quad (2.30)$$

De esta forma, la respuesta del sistema a una señal determinada puede considerarse como la suma de las respuestas de cada una de las fracciones obtenidas en la descomposición. Pueden presentarse ciertos tipo de polos o grupos de polos: reales negativos, reales positivos, imaginarios conjugados, complejos conjugados con parte real negativa y complejos conjugados con parte real positiva [18].

A continuación se presentan el tipo de respuesta de cada uno de los tipos de polos a la señal escalón:

1. Polos Reales: Cuando la función de transferencia presenta polos reales, en la descomposición en fracciones aparecen términos en la forma:

$$\frac{r}{s - p} \quad \text{con } p \in R \quad (2.31)$$

Los dos casos posibles son $p > 0$ o $p < 0$; cuando aparecen polos reales negativos, el sistema presenta una tendencia a estabilizarse alrededor de un valor determinado, por el contrario, si tiene polos reales positivos el sistema presenta una tendencia al crecimiento exponencial [5, 19].

2. Polos Imaginarios conjugados: Cuando la función de transferencia presenta un par de polos imaginarios conjugados, en la descomposición en fracciones aparecen términos en la forma:

$$\frac{r}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \quad \text{con } \omega \in R \quad (2.32)$$

Cuando aparecen polos imaginarios complejos el sistema presenta una tendencia de oscilación continua, donde la frecuencia de dicha oscilación coincide con ω . Por tanto, cada vez que aparezcan una pareja de este tipo de polos el sistema presentará un comportamiento oscilatorio [5, 19].

3. Polos Complejos Conjugados: Por último, la función de transferencia puede presentar polos que tengan parte real e imaginaria.

$$\frac{r}{(s - p - j\omega)(s - p + j\omega)} \quad \text{con } p \text{ y } \omega \in R \quad (2.33)$$

En este caso, el comportamiento del sistema será una combinación del efecto de parte real y de la parte imaginaria.

- Primer caso $p < 0$: Dado que el sistema presenta parte real negativa, tenderá a estabilizarse alrededor de un valor determinado, pero como el polo tiene parte imaginaria dicha tendencia presenta un comportamiento oscilatorio [19, 18].
- Segundo caso se presenta cuando $p > 0$: En este caso, debido a la parte real positiva el sistema presentará una tendencia de crecimiento exponencial con comportamiento oscilatorio [19, 18].

2.8. Estabilidad

Un sistema dinámico es estable si para cualquier entrada acotada se obtiene una salida acotada, independientemente de cuál fuese su estado inicial. La inestabilidad de los sistemas es la mayor limitación a la hora de realizar la sintonía del controlador [17, 15].

Es posible afirmar que la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es que todos los polos de su función de transferencia tengan parte real negativa o dicho en forma más compacta, si todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo de la variable compleja s [17, 15].

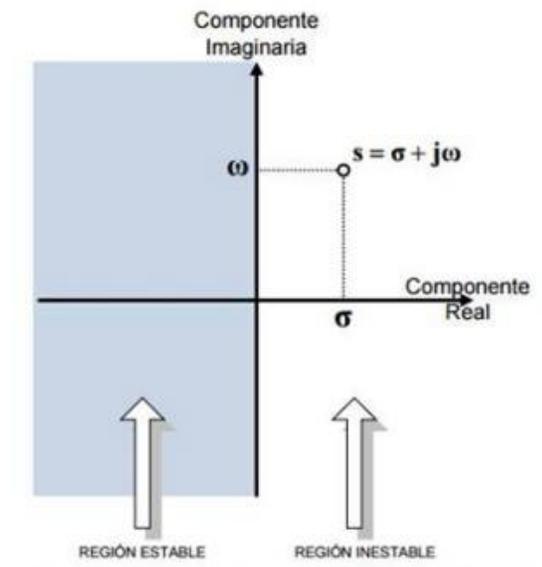


Figura 2.4: Estabilidad según ubicación de polos [17].

Dado el caso de que una raíz se ubique en el eje imaginario, se obtiene un sistema con estabilidad marginal, es decir, un sistema que se halla en el límite entre la estabilidad y la inestabilidad. Es importante realizar algunas observaciones de este sistema:

- Si se quiere saber si un sistema es estable o no, bastaría con analizar las raíces de la ecuación característica [17].
- Observando la ecuación característica, queda en evidencia que las raíces (y por lo tanto la estabilidad del sistema en lazo cerrado) depende de la función de transferencia. Como se sabe, se pueden elegir el tipo de controlador y el valor de sus parámetros (sintonización). Si el proceso y los elementos de medición y actuación ya están fijados, se puede concluir entonces que la estabilidad del sistema de control dependerá de una minuciosa elección del tipo y sintonización del controlador [17].

2.9. Respuesta en el dominio del tiempo

Todos los sistemas de control reales presentan un fenómeno transitorio antes de alcanzar la respuesta del estado estable. Aquellos elementos que almacenan algún tipo de energía no pueden transferirla instantáneamente, requieren de un tiempo, esto quiere decir que al estimular a los sistemas de control, éstos necesitarán un tiempo en alcanzar los valores deseados. La respuesta del régimen transitoria define la rapidez de la respuesta, su estabilidad y las oscilaciones alrededor del estado permanente. Por el contrario, la respuesta del régimen permanente determina el estado estable del sistema, su valor nominal de funcionamiento y el error. Al recordar que los sistemas de control deben de seguir a la señal de referencia, la diferencia entre esta señal y la de salida cuantificará la precisión del control [20].

2.9.1. Error estacionario

Si la salida del sistema de control en estado estacionario no coincide exactamente con la señal de referencia o entrada, se dice que el sistema tiene un error estacionario, el cual indica la exactitud del sistema. Es importante analizar en los sistemas de control la respuesta transitoria, el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario y el error en este estado [5]. La siguiente figura es una representación estandarizada del diagrama de bloques de una planta de segundo orden:

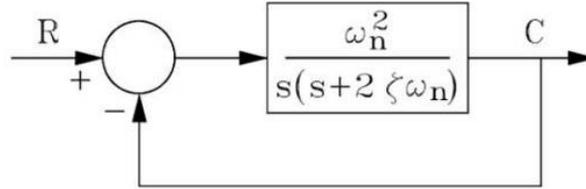


Figura 2.5: Diagrama de bloques de una planta de segundo orden [5].

Donde:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{T} \quad (2.34)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{K}{T} = 2\sigma \quad (2.35)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{KT}} \quad (2.36)$$

Así:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.37)$$

Donde:

$\sigma \rightarrow$ es la atenuación

$\omega_n \rightarrow$ frecuencia natural no amortiguada

$\zeta \rightarrow$ relación o razón de amortiguación

La ecuación característica del sistema está dada por la ecuación (2.37) y sus respectivos polos o raíces son [21]:

$$R(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2.38)$$

Las raíces o polos del sistema son:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \times \omega_n \end{aligned} \quad (2.39)$$

A continuación se citarán diferentes casos para diferentes valores de ζ [21], caso subamortiguado o respuesta con $0 < \zeta < 1$:

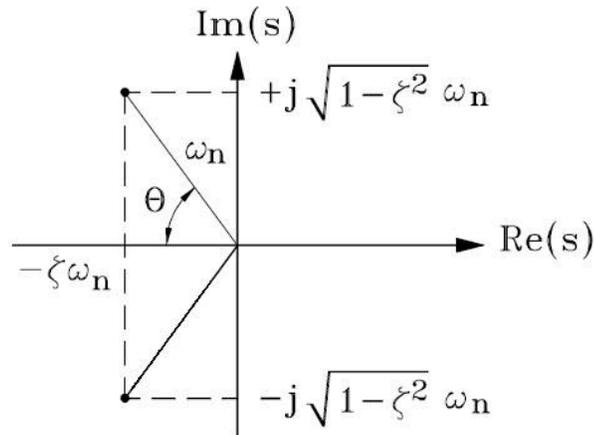


Figura 2.6: Ubicación de los polos caso subamortiguado [5].

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \tag{2.40}$$

Donde $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ se llama frecuencia natural amortiguada.

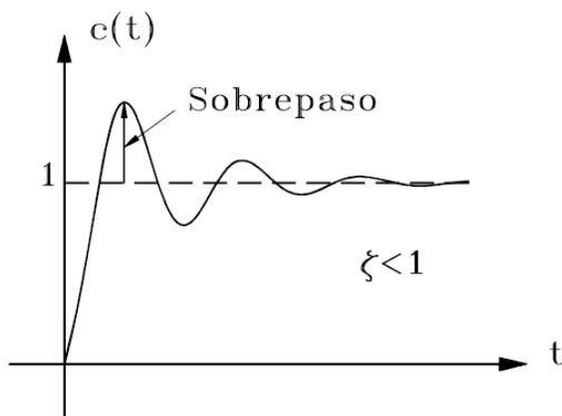


Figura 2.7: Respuesta subamortiguada [5].

Caso de amortiguamiento crítico o respuesta con $\zeta = 1$, corresponde a un par de polos reales ubicados en [21]:

$$p_{1,2} = -\omega_n \quad (2.41)$$

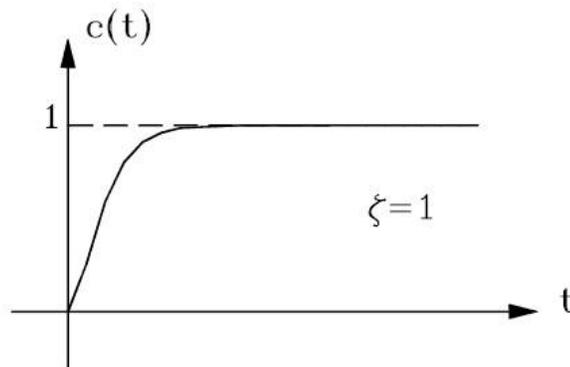


Figura 2.8: Respuesta críticamente amortiguada [5].

Caso sobreamortiguado o respuesta con $\zeta > 1$, la ubicación del par de polos reales correspondientes está dada por:

$$p_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n \quad (2.42)$$

$$p_2 = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n \quad (2.43)$$

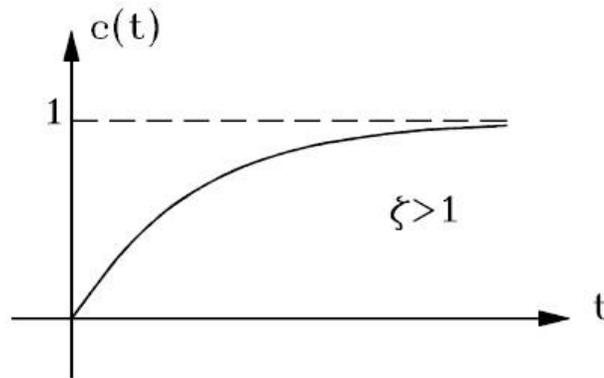


Figura 2.9: Respuesta sobreamortiguada [5].

Si $p_1 \gg p_2$, la respuesta debido a p_1 se puede despreciar ya que al término que involucra a p_1 cae más rápido que el correspondiente a p_2 . Es decir, la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden con un solo polo ubicado en $-p_2$ [21].

Respuesta oscilatoria o caso de amortiguamiento nulo, $\zeta = 0$, corresponde a un par de polos complejos ubicados en [21]:

$$p_{1,2} = \pm j\omega_n \quad (2.44)$$

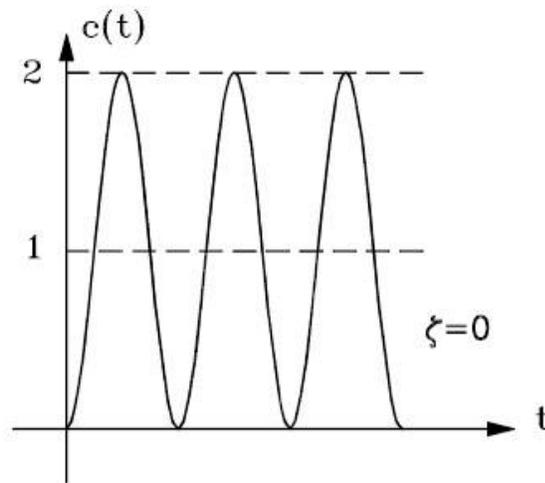


Figura 2.10: Respuesta con amortiguamiento nulo [5].

Ahora se pueden apreciar todos los casos anteriores:

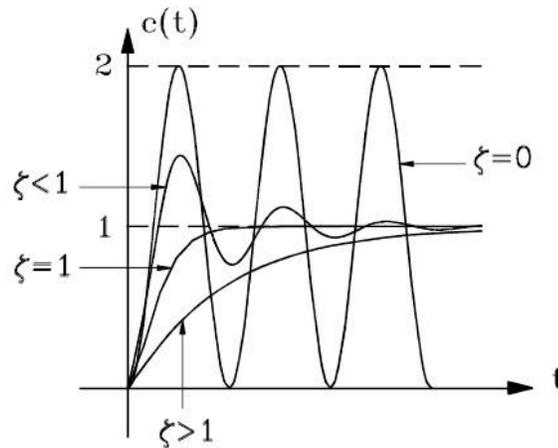


Figura 2.11: Resumen de los casos [5].

En resumen, para todos los casos excepto para la respuesta oscilatoria ($\zeta = 0$), el error en estado estacionario es cero, $e_{ss} = 0$. Si dos sistemas de segundo orden tienen el mismo ζ , pero diferente ω_n tienen el mismo sobreimpulso y el mismo diagrama oscilatorio mostrado en la figura (2.11). Un sistema subamortiguado con $0,5 < \zeta < 0,8$ se aproxima al valor final más rápidamente que uno con amortiguamiento crítico o sobreamortiguado. Entre los sistemas que responden sin oscilación, el críticamente amortiguado presenta la respuesta más rápida. Un sistema sobreamortiguado siempre es lento en responder a cualquier entrada [17, 18].

2.9.2. Especificaciones de respuesta transitoria

La entrada escalón es frecuentemente usada para especificar las características de funcionamiento de un sistema de control. Además, si se conoce la respuesta de un sistema a una entrada escalón, en principio es posible calcular la respuesta a cualquier entrada. Obviamente la respuesta transitoria de un sistema depende de las condiciones iniciales, sin embargo, para poder comparar fácilmente las características de la respuesta transitoria de diversos sistemas, se acostumbra suponer que las condiciones iniciales son cero. Cuando la respuesta transitoria presenta oscilaciones amortiguadas es habitual dar las especificaciones mostradas a continuación [5]:

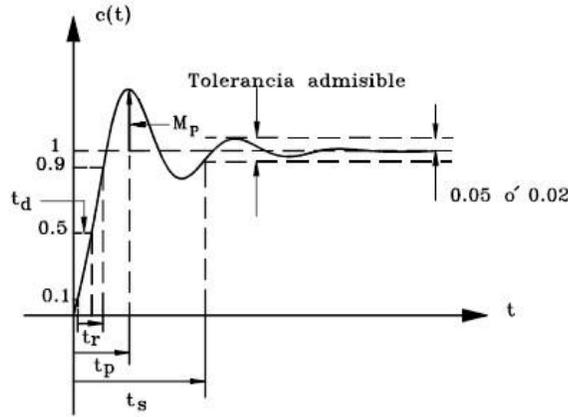


Figura 2.12: Especificaciones de respuesta transitoria [5].

1. Tiempo de retardo, t_d . El tiempo que la respuesta tarda en alcanzar por primera vez la mitad del valor final [5].
2. Tiempo de crecimiento, t_r . El requerido para que la respuesta crezca del 10 al 90 %, del 5 al 95 % o del 0 al 100 % de su valor final [5].
3. Tiempo de pico o de sobrepaso, t_p . El tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico de sobreimpulso o sobrepaso [5].
4. Máximo sobreimpulso o sobrepaso, M_p . Éste se define en forma porcentual mediante:

$$M_p = \frac{e(t_p) - e(\infty)}{e(\infty)} \times 100\% \quad (2.45)$$

y es un indicativo de la estabilidad relativa del sistema [5].

5. Tiempo de establecimiento o de solución, t_s . Tiempo requerido por la respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final. Este rango generalmente se especifica en porcentaje absoluto del valor final (habitualmente 5 % ó 2 %). El tiempo de establecimiento se relaciona con la constante de tiempo más grande del sistema [5].

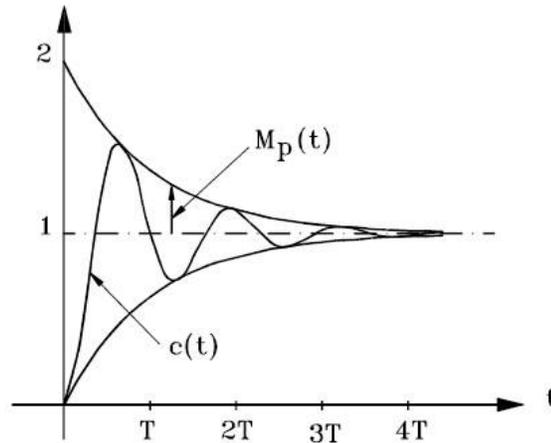


Figura 2.13: Tiempo de establecimiento [5].

Obsérvese que para el mismo ω_n y $\zeta < 1$, el tiempo de establecimiento para un sistema muy levemente amortiguado, es mayor que para un sistema adecuadamente amortiguado. Sin embargo, como el valor de ζ generalmente es determinado por un requerimiento de máximo sobreimpulso permitido, el tiempo de establecimiento t_s está determinado principalmente por la frecuencia natural no amortiguada ω_n , es decir, la duración del periodo transitorio puede ser variada sin modificar el máximo sobrepaso, ajustando ω_n [21, 22]. Entonces, para tener una respuesta rápida, ω_n debe ser grande y para limitar el máximo sobrepaso M_p , la relación de amortización ζ no debe ser demasiado pequeña.

El criterio para la fijación del porcentaje de error a usar depende de los objetivos del diseño del sistema. Nótese que si se especifican $t_d, t_r, t_p, t_s, y M_p$, virtualmente queda determinada la forma de la respuesta. Para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo pico y máximo sobreimpulso. Para sistemas con error estacionario para entradas escalón, el error se debe mantener dentro de un nivel porcentual específico [22]. Excepto donde no se toleren oscilaciones, se desea una respuesta transitoria suficientemente rápida y suficientemente amortiguada. Para sistemas de segundo orden el rango recomendado para ζ es: $0,4 < \zeta < 0,8$. Para $\zeta < 0,4$ el sobrepaso es excesivo y para $\zeta > 0,8$ la respuesta es lenta [21, 22].

2.10. Sistemas de órdenes superiores

Considérese el sistema (2.46):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} \quad (2.46)$$

Si $r(t) = u(t)$ o $R(s) = \frac{1}{s}$, se puede obtener $c(t)$, con $0 < \zeta < 1$:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta\zeta^2(\beta - 2) + 1} \left\{ \beta\zeta^2(\beta - 2)\cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) + \frac{\beta\zeta(\zeta^2(\beta - 2) + 1)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) \right\} - \frac{e^{pt}}{\beta\zeta^2(\beta - 2) + 1} \quad (2.47)$$

Donde:

$$\beta = \frac{p}{\zeta\omega_n} \quad (2.48)$$

Obsérvese que:

$$\beta\zeta^2(\beta - 2) + 1 = \zeta^2(\beta - 1)^2 + (1 - \zeta^2) > 0 \quad (2.49)$$

entonces el coeficiente del término e^{-pt} es siempre negativo. Por lo tanto el efecto del polo real situado en $s = -p$ en la respuesta al escalón unitario es reducir el máximo sobrepaso y podría aumentar el tiempo de establecimiento. Si el polo real está ubicado a la derecha de los polos complejos conjugados, hay tendencia a una respuesta lenta y el sistema se comporta como uno sobreamortiguado al cual los polos complejos conjugados añaden ondulaciones a la curva de respuesta.

2.11. Respuesta transitoria de sistemas de mayor orden

Para el sistema dado por (2.50)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.50)$$

si no hay polos repetidos, entonces:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (2.51)$$

donde $q + 2r = n$

Por descomposición en fracciones parciales con $R(s) = \frac{1}{s}$, función escalón, se obtiene:

$$c(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k (s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (2.52)$$

Si se antitransforma la ecuación (2.52), $c(t)$ se puede expresar:

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \operatorname{sen}(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \quad (2.53)$$

parat ≥ 0

Si todo los polos están en el semiplano complejo izquierdo:

$$c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = a \quad (2.54)$$

Considérese que el sistema es estable, entonces los polos que están ubicados lejos del eje $j\omega$ tiene partes reales negativas grandes y por lo tanto los términos exponenciales de $c(t)$ que corresponden a esos polos caen muy rápidamente a cero ya que el tiempo de establecimiento depende de la distancia horizontal de los polos al eje $j\omega$. La curva de respuesta de un sistema estable de orden superior a una entrada escalón unitario es la suma de cierto número de curvas exponenciales y curvas senoidales amortiguadas. Algunas respuestas se muestran en la figura 2.14.

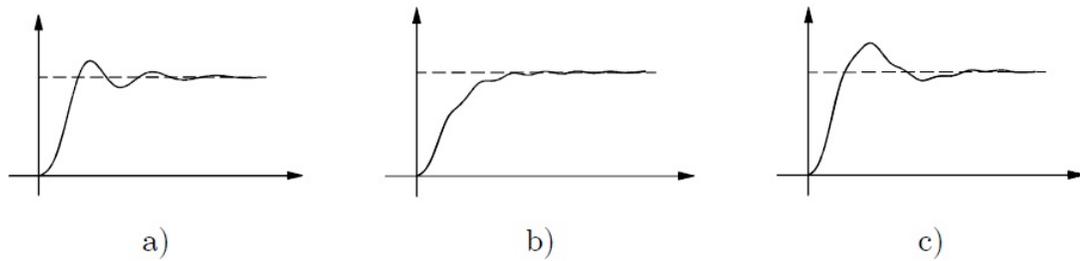


Figura 2.14: Tipos de respuesta sistemas de mayor orden [5].

En la figura 2.14 a) a la respuesta corresponde a un par de polos complejos conjugados dominantes. Su comportamiento es similar al de uno de segundo orden. En la Figura 2.14 b) se nota la presencia de un polo real dominante, ya que se asemeja a la respuesta de un sistema de primer orden sobre el que se superpone la respuesta de un par de polos complejos conjugados menos dominantes. La figura 2.14 c) muestra la respuesta de un par de polos complejos dominantes sobre la que superpone la respuesta de otro par de polos complejos menos dominantes.

Capítulo 3

Modelado

3.1. Descripción del sistema físico

El modelo físico implementado para el trabajo de grado ha sido la construcción de una mesa estable a partir de piezas de Lego Mindstorms NXT 2.0. El diseño fue inspirado por las mesas utilizadas en cirugías, éstas a partir de un control acomodan al paciente y hacen correcciones de posicionamiento durante las intervenciones quirúrgicas, tales como las reparaciones de retina o el tratamiento de un desprendimiento de retina que requieren de alta precisión. En la mayoría de los casos, los cirujanos pueden ejecutar sólo la operación en una parte limitada de sus carreras, pero más tarde en la vida se vuelve cada vez más difícil de realizar estos procedimientos complejos. El sistema a controlar pretende ubicar la mesa según una posición dada por el usuario, de tal forma que la mesa llegue a la referencia por medio de un control aplicado a los actuadores, de manera que el procedimiento se pueda realizar con mayor comodidad y que al existir alguna perturbación (como un temblor) ésta conserve su posición.



Figura 3.1: Sistema físico.

El diseño y construcción de la mesa LEGO se basa esencialmente en una estructura física, que consta de un arreglo de tres servomotores NXT (actuadores), un sistema de detección de posición angular que está inmerso en cada actuador, un sistema para identificación y la aplicación de diversos tipos de controladores. La estructura física consiste de bloques y piezas técnicas Lego Mindstorms NXT 2.0, capaces de dar soporte a los elementos o dispositivos encargados de realizar mediciones, planear y actuar; además de otorgar libertad de maniobra al sistema.

3.1.1. Componentes Lego Mindstorms NXT 2.0

El Lego Mindstorms NXT 2.0 es un equipo de robótica que parte inicialmente de la versión NXT, con el cual comparte la idea de construir un robot mediante la unión de piezas y la programación de acciones de forma sencilla, a través del ensamblado de bloques. El NXT 2.0 es el segundo robot de la línea LEGO MINDSTORMS; está conformado por una mini-computadora o “brick” (ladrillo) con capacidad de almacenamiento en una memoria RAM e incluye cuatro puertos de entrada utilizados para conectar los diferentes sensores

y tres puertos de salida usados para interconectar los motores. Los sensores proporcionan información del mundo o contexto donde se ubica el robot, es decir, información de los objetos externos que rodean al robot NXT 2.0, esta información es interpretada por una aplicación de software [23].

3.1.1.1. “*Brick*” Lego Mindstorms NXT 2.0

El “*brick*” o ladrillo programable es el cerebro de los robots Lego Mindstorms. Dispone de 4 entradas y 3 salidas. Se pueden transmitir los datos con el ordenador a través de un cable USB (incluido) o por tecnología Bluetooth [24].

3.1.1.2. Servomotor

Incorpora un sensor de rotación que mide velocidad exacta y distancia e informa de ello al NXT. Esto permite el control del motor con un alto grado de precisión [24].

3.1.1.3. Cables de conexión y conjunto de piezas NXT

Se cuenta con siete cables para la conexión de sensores y actuadores, incluye un set de piezas para las implementaciones físicas.

3.1.1.4. LabVIEW

LabVIEW de National Instruments, es un estándar industrial en entornos gráficos de desarrollo. Centros educativos de todo el mundo utilizan este lenguaje de programación para un aprendizaje basado en experiencias reales o simuladas con robots y otros dispositivos. Ofrece una integración sin igual con miles de dispositivos de hardware y sistemas de robótica, permitiendo:

- Visualizar y explorar conceptos de robótica a través de simulaciones interactivas y con las señales del mundo real.
- Diseñar proyectos en aplicaciones para robots tales como la medición, control, programación, sistemas empujados, procesamiento de señales o comunicaciones.

3.2. Modelo matemático de controladores

3.2.1. Controlador PD tipo 1

La señal de control está dada de la forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.1)$$

Expresada la ecuación (3.1) de forma discreta y en diferencias hacia atrás para la derivada del error, se obtiene:

$$u[k] = K_p e[k] + K_d \left(\frac{e[k] - e[k-1]}{h} \right) \quad (3.2)$$

Empleando el operador de desplazamiento q^{-1} en la ecuación (3.2):

$$u[k] = K_p e[k] + K_d \left(\frac{e[k] - q^{-1}e[k]}{h} \right) \quad (3.3)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{u[k]}{e[k]} = K_p + \frac{K_d}{h}(1 - q^{-1}) \quad (3.4)$$

$$H(q^{-1}) = \left(K_p + \frac{K_d}{h} \right) - \left(\frac{K_d}{h} \right) q^{-1} \quad (3.5)$$

$$H(q^{-1}) = C_0 + C_1 q^{-1} \quad (3.6)$$

Reescribiendo la ecuación en diferencias del controlador, se obtiene:

$$u[k] = (C_0 + C_1 q^{-1})e[k] \quad (3.7)$$

$$u[k] = C_0 e[k] + C_1 e[k-1] \quad (3.8)$$

Utilizando este tipo de control en una planta de primer orden en un lazo cerrado, donde la función de transferencia del controlador definida en la ecuación (3.6), se expresa en el dominio de z así:

$$C(z) = \frac{C_0 z + C_1}{z} \quad (3.9)$$

Y la función de transferencia de una planta de primer orden definida en el dominio de z , está dada por la ecuación (3.10):

$$H_{PLANTA}(z) = \frac{b_0}{z + a_1} \quad (3.10)$$

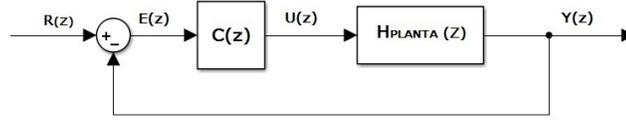


Figura 3.2: Sistema de control en lazo cerrado [5].

Donde la ganancia en lazo cerrado de la figura (3.2) es:

$$H_{LC} = \frac{H_{PLANTA}(z) * C(z)}{1 + H_{PLANTA}(z) * C(z)} \quad (3.11)$$

$$H_{LC} = \left(\frac{\left(\frac{b_0}{z+a_1} \right) \frac{C_0 z + C_1}{z}}{1 + \left(\frac{b_0}{z+a_1} \right) \frac{C_0 z + C_1}{z}} \right) \quad (3.12)$$

Obteniendo así el polinomio característico de la ecuación de (3.12), que describe el sistema en lazo cerrado:

$$P_{LC}(z) = (z + a_1)z + (C_0 z^2 + C_1 z)b_0 \quad (3.13)$$

$$P_{LC}(z) = z^2 + (b_0 C_0 + a_1)z + c_1 b_0 \quad (3.14)$$

Se compara $P_{LC}(z)$ de la ecuación (3.14) con un polinomio deseado P_D , tal que las raíces se encuentren dentro del círculo unitario en el plano z :

$$P_D = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \quad (3.15)$$

$$P_{LC}(z) = P_D \quad (3.16)$$

$$z^2 + (b_0 C_0 + a_1)z + c_1 b_0 = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \quad (3.17)$$

Despejando C_0 y C_1 de la ecuación 3.17 comparando término a término se obtiene:

$$C_0 = \frac{\alpha_1 - a_1}{b_0} \quad (3.18)$$

$$C_1 = \frac{\alpha_2}{b_0} \quad (3.19)$$

3.2.2. Controlador PI tipo 1

La señal de control esta dada de la forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \quad (3.20)$$

Expresada la ecuación (3.20) de forma discreta, se obtiene:

$$u[k] = K_p e[k] + K_i e[k_i] \quad (3.21)$$

Donde $e[k_i]$ se puede expresar a partir de una integración numérica por rectángulos de la forma:

$$e[k_i] = h e[k] - e_i[k - 1] \quad (3.22)$$

Empleando el operador de desplazamiento q^{-1} y aplicándolo a la ecuación (3.22):

$$e[k_i] = h e[k] - q^{-1} e[k_i] \quad (3.23)$$

Despejando de la ecuación (3.23) $e_i[k]$ en función de $e[k]$ y reemplazándolo en la ecuación (3.21):

$$e_i[k] = \left(\frac{h}{1 - q^{-1}} \right) e[k] \quad (3.24)$$

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \left(\frac{h}{1 - q^{-1}} \right) e[k] \quad (3.25)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{K_p(1 - q^{-1}) + K_i h}{1 - q^{-1}} \quad (3.26)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{(K_p + K_i h) - (K_p)q^{-1}}{1 - q^{-1}} \quad (3.27)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{C_0 + C_1 q^{-1}}{1 - q^{-1}} \quad (3.28)$$

Reescribiendo la ecuación en diferencias del controlador, se obtiene:

$$u[k] = \frac{C_0 + C_1 q^{-1}}{1 - q^{-1}} e[k] \quad (3.29)$$

$$u[k] = u[k - 1] + C_0 e[k] + C_1 e[k - 1] \quad (3.30)$$

Utilizando este tipo de control en una planta de primer orden en un lazo cerrado, donde la función de transferencia del controlador se define en la ecuación (3.28) y se expresa en el dominio de z así:

$$C(z) = \frac{C_0 z + C_1}{z - 1} \quad (3.31)$$

Se considera un lazo de control como el de la figura (3.2), se aplica a una planta de primer orden donde la ganancia está definida así:

$$H_{LC} = \left(\frac{\left(\frac{b_0}{z+a_1} \right) \left(\frac{C_0 z + C_1}{z-1} \right)}{1 + \left(\frac{b_0}{z+a_1} \right) \left(\frac{C_0 z + C_1}{z-1} \right)} \right) \quad (3.32)$$

Obteniendo así el polinomio característico de la ecuación de (3.32), que describe el sistema en lazo cerrado:

$$P_{LC}(z) = (z - 1)(z + a_1) + (C_0 z + C_1)b_0 \quad (3.33)$$

$$P_{LC}(z) = z^2 + (a_1 - 1 + b_0 C_0)z + (-a_1 + b_0 C_1) \quad (3.34)$$

Se compara $P_{LC}(z)$ de la ecuación (3.34) con un polinomio deseado P_D , tal que las raíces se encuentren dentro del círculo unitario en el plano z :

$$P_D = z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4 \quad (3.35)$$

$$P_{LC}(z) = P_D \quad (3.36)$$

$$z^2 + (a_1 - 1 + b_0 C_0)z + (-a_1 + b_0 C_1) = z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4 \quad (3.37)$$

Despejando C_0 y C_1 de la ecuación (3.37) y comparando término a término se obtiene:

$$C_0 = \frac{\alpha_3 - a_1 + 1}{b_0} \quad (3.38)$$

$$C_1 = \frac{\alpha_4 + a_1}{b_0} \quad (3.39)$$

3.2.3. Controlador PID tipo 1

La señal de control esta dada de la forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.40)$$

Expresada la ecuación (3.40) de forma discreta y en diferencias hacia atrás para la derivada del error, se obtiene:

$$u[k] = K_p e[k] + K_i e_i[k] + K_d \left(\frac{e[k] - e[k-1]}{h} \right) \quad (3.41)$$

Donde $e_i[k]$ en función de $e[k]$ queda expresada así:

$$e_i[k] = \left(\frac{h}{1 - q^{-1}} \right) e[k] \quad (3.42)$$

Reemplazando la ecuación (3.42) en la ecuación (3.41):

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \left(\frac{h}{1 - q^{-1}} \right) e[k] + K_d \left(\frac{e[k] - e[k-1]}{h} \right) \quad (3.43)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{K_p(1 - q^{-1}) + \frac{K_d}{h}(1 - q^{-1})^2 + K_i h}{1 - q^{-1}} \quad (3.44)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{(K_p + \frac{K_d}{h} + K_i h) - (K_p + \frac{2K_d}{h})q^{-1} + (\frac{K_d}{h})q^{-2}}{1 - q^{-1}} \quad (3.45)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{C_0 + C_1 q^{-1} + C_2 q^{-2}}{1 - q^{-1}} \quad (3.46)$$

Reescribiendo la ecuación en diferencias del controlador, se obtiene:

$$u[k] = \frac{C_0 + C_1 q^{-1} + C_2 q^{-2}}{1 - q^{-1}} e[k] \quad (3.47)$$

$$u[k] = u[k-1] + C_0 e[k] + C_1 e[k-1] + C_2 e[k-2] \quad (3.48)$$

Utilizando este tipo de control en una planta de primer orden en un lazo cerrado, donde la función de transferencia del controlador definida en la ecuación (3.46), se expresa en el dominio de z así:

$$C(z) = \frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{z^2 - z} \quad (3.49)$$

Empleando el mismo lazo de control definido anteriormente en la ecuación (3.11), se tiene:

$$H_{LC} = \left(\frac{\left(\frac{b_0}{z+a_1} \right) \left(\frac{C_0 z^2 + C_1 z^1 + C_2}{z^2 - z} \right)}{1 + \left(\frac{b_0}{z+a_1} \right) \left(\frac{C_0 z^2 + C_1 z^1 + C_2}{z^2 - z} \right)} \right) \quad (3.50)$$

Obteniendo así el polinomio característico de la ecuación de (3.50), que describe el sistema en lazo cerrado dado por la ecuación (3.52):

$$P_{LC}(z) = (z^2 - z)(z + a_1) + (C_0 z^2 + C_1 z + C_2)b_0 \quad (3.51)$$

$$P_{LC}(z) = z^3 + (a_1 - 1 + b_0 C_0)z^2 + (-a_1 + b_0 C_1)z + C_2 b_0 \quad (3.52)$$

Se compara $P_{LC}(z)$ de la ecuación (3.52) con un polinomio deseado P_D , tal que las raíces se encuentren dentro del círculo unitario en el plano z :

$$P_D = z^3 + \alpha_5 z^2 + \alpha_6 z + \alpha_7 \quad (3.53)$$

$$P_{LC}(z) = P_D \quad (3.54)$$

$$z^3 + (a_1 - 1 + b_0 C_0)z^2 + (-a_1 + b_0 C_1)z + C_2 b_0 = z^3 + \alpha_5 z^2 + \alpha_6 z + \alpha_7 \quad (3.55)$$

Despejando C_0 , C_1 y C_2 de la ecuación 3.55 y comparando término a término se obtiene:

$$C_0 = \frac{\alpha_5 - a_1 + 1}{b_0} \quad (3.56)$$

$$C_1 = \frac{\alpha_6 + a_1}{b_0} \quad (3.57)$$

$$C_2 = \frac{\alpha_7}{b_0} \quad (3.58)$$

3.2.4. Controlador PID tipo 2

Considere la ecuación (3.49), la función de transferencia de un control PID expresada en el dominio de z , donde esta presenta un polo igual a uno en el límite real positivo y un polo en cero. Se adiciona un grado más de libertad y la reubicación estratégica de uno de los polos, queda así:

$$C(z) = \frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{(z + C_3)(z - 1)} \quad (3.59)$$

En una planta de segundo orden la función de transferencia que describe el sistema es:

$$H_{PLANTA}(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (3.60)$$

Aplicando el control PID descrito en la ecuación (3.59) a la planta descrita en la ecuación (3.60) y aplicando el lazo de control descrito en la figura(3.2), se tiene:

$$H_{LC} = \frac{\left(\frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} \right) \left(\frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{(z + C_3)(z - 1)} \right)}{1 + \left(\frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} \right) \left(\frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{(z + C_3)(z - 1)} \right)} \quad (3.61)$$

Obteniendo así el polinomio característico a partir de la ecuación de (3.61), que describe el sistema en lazo cerrado:

$$P_{LC}(z) = (z^2 + a_1 z + a_2)((z + C_3)(z - 1)) + (b_0 z + b_1)(C_0 z^2 + C_1 z + C_2) \quad (3.62)$$

$$P_{LC}(z) = z^4 + (b_0 C_0 - 1 + a_1 + C_3)z^3 + (b_0 C_1 + b_1 C_0 - C_3 + a_1 C_3 - a_1 + a_2)z^2 + (b_0 C_2 + b_1 C_1 - C_3 a_1 + a_2 C_3 - a_2)z + b_1 C_2 - a_2 C_3 \quad (3.63)$$

Se compara $P_{LC}(z)$ de la ecuación (3.63) con un polinomio deseado P_D , tal que las raíces se encuentren dentro del círculo unitario en el plano z :

$$P_D = z^4 + \alpha_8 z^3 + \alpha_9 z^2 + \alpha_{10} z + \alpha_{11} \quad (3.64)$$

$$P_{LC}(z) = P_D \quad (3.65)$$

$$z^4 + (b_0 C_0 - 1 + a_1 + C_3)z^3 + (b_0 C_1 + b_1 C_0 - C_3 + a_1 C_3 - a_1 + a_2)z^2 + (b_0 C_2 + b_1 C_1 - C_3 a_1 + a_2 C_3 - a_2)z + b_1 C_2 - a_2 C_3 = z^4 + \alpha_8 z^3 + \alpha_9 z^2 + \alpha_{10} z + \alpha_{11} \quad (3.66)$$

Despejando C_0, C_1, C_2 y C_3 de la ecuación (3.66) y comparando término a término se obtiene:

$$\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_0 & 0 & (a_1 - 1) \\ 0 & b_1 & b_0 & (a_2 - a_1) \\ 0 & 0 & b_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_8 - a_1 + 1 \\ \alpha_9 + a_1 - a_2 \\ \alpha_{10} + a_2 \\ \alpha_{11} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Reescribiendo la ecuación (3.59) con el operador de desplazamiento q^{-1} :

$$H(q^{-1}) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{C_0 + C_1q^{-1} + C_2q^{-2}}{1 + (C_3 - 1)q^{-1} - C_3q^{-2}} \quad (3.68)$$

La señal de control a partir de la ecuación (3.68) es:

$$u[k] = -(C_3 - 1)u[k - 1] + C_3u[k - 2] + C_0e[k] + C_1e[k - 1] + C_2e[k - 2] \quad (3.69)$$

3.2.5. Controlador por estados extendidos con acción integral

3.2.5.1. Espacio de estados

Se parte del modelo en espacio de estados en tiempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.70)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.71)$$

Aplicando diferencias hacia adelante:

$$\dot{x}|_{t_k} = \frac{1}{h}(x[k + 1] - x[k]) \quad (3.72)$$

Remplazando la ecuación (3.72) en la ecuación (3.70), se tiene:

$$x[k + 1] = x[k] + hAx[k] + hBu[k] \quad (3.73)$$

$$x[k + 1] = \underbrace{(I + hA)}_F x[k] + \underbrace{hB}_G u[k] \quad (3.74)$$

Reescribiendo el conjunto de ecuaciones de estado y de salida:

$$x[k + 1] = Fx[k] + Gu[k] \quad (3.75)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] \quad (3.76)$$

Aplicando el operador de desplazamiento a la ecuación (3.75), se puede obtener una representación de la salida $y[k]$ en función de la señal de control $u[k]$, así:

$$qx[k] = Fx[k] + Gu[k] \quad (3.77)$$

$$(qI - F)x[k] = Gu[k] \quad (3.78)$$

$$x[k] = (qI - F)^{-1}Gu[k] \quad (3.79)$$

Se reemplaza la ecuación (3.79) en la ecuación (3.76):

$$y[k] = C\{(qI - F)^{-1}Gu[k]\} + Du[k] \quad (3.80)$$

$$y[k] = \underbrace{\{C(qI - F)^{-1}G + D\}}_{H(q)} u[k] \quad (3.81)$$

Se define una relación entrada - salida de la forma:

$$A(q^{-1})y[k] = B(q^{-1})u[k] \quad (3.82)$$

Y su representación en función de transferencia está dada:

$$y[k] = \underbrace{\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}}_{H(q^{-1})} u[k] \quad (3.83)$$

Donde:

$$y[k] = \frac{b_0q^{-(n-m)} + b_1q^{-1-(n-m)} + \dots + b_mq^{-n}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}} u[k] \quad (3.84)$$

Se plantea la forma canónica CONTROLLER para el modelo de espacio de estados.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_n[k+1] \end{bmatrix}}_{x[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix}}_{x[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_G u[k] \quad (3.85)$$

Para la ecuación de salida se tiene:

$$y[k] = \underbrace{[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m]}_C \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_D u[k] \quad (3.86)$$

3.2.5.2. Representación en espacio de estados extendidos

Para la representación en espacio de estados extendidos, se parte del modelo de ecuación en diferencias:

$$y[k] = -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] \cdots - a_n y[k-n] + b_0 u[k-d] + b_1 u[k-1-d] + \cdots + b_m u[k-m-d] \quad (3.87)$$

Se factorizan los coeficientes como:

$$y[k] = \underbrace{[-a_1 \quad -a_2 \quad \cdots \quad -a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m]}_C \begin{bmatrix} y[k-1] \\ y[k-2] \\ \vdots \\ y[k-n] \\ u[k-d] \\ u[k-1-d] \\ \vdots \\ u[k-m-d] \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_D u[k] \quad (3.88)$$

$x[k]$

Para la ecuación de estado:

$$x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \quad (3.89)$$

Se expresa como:

$$\begin{aligned}
 x[k+1] = & \begin{bmatrix} y[k] \\ y[k-1] \\ \vdots \\ y[k-n+1] \\ u[k-d+1] \\ u[k-d] \\ \vdots \\ u[k-m-d+1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n & b_0 & b_1 & \cdot & b_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} y[k-1] \\ y[k-2] \\ \vdots \\ y[k-n] \\ u[k-d] \\ u[k-d-1] \\ \vdots \\ u[k-m-d] \end{bmatrix} \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_G u[k]
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

3.2.5.3. Seguimiento con acción integral - Espacio de estados extendidos

Partiendo de las ecuaciones espacio de estados extendidos:

$$x[k+1] = Fx[k] + G[k] \tag{3.91}$$

$$y[k] = Cx[k] \tag{3.92}$$

Se sabe que la representación del error y su integral están dadas por:

$$e_i[k+1] = e[k] + e_i[k] \tag{3.93}$$

$$e[k] = r[k] - y[k] \tag{3.94}$$

Reemplazando la ecuación (3.92) en la ecuación (3.94):

$$e[k] = r[k] - Cx[k] \tag{3.95}$$

Ahora se reemplaza la ecuación (3.95) en la ecuación (3.93):

$$e_i[k+1] = r[k] - Cx[k] + e_i[k] \quad (3.96)$$

Se define la señal de control como:

$$u[k] = -kx[k] + k_i h e_i[k] = - \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k_i h \end{bmatrix}}_{k_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix}}_{x_a[k]} = -k_a x_a[k] \quad (3.97)$$

Se obtiene el modelo aumentado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e_i[k+1] \end{bmatrix}}_{x_a[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{F_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix}}_{x_a[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}}_{G_a} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r[k] \quad (3.98)$$

Se calcula k_a usando la fórmula de Ackerman:

$$k_a = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \varsigma_a^{-1} P_{DA}(F) \quad (3.99)$$

$$\varsigma_a = [G_a \quad F_a G_a \quad F_a G_a^2 \quad \dots] \quad (3.100)$$

$$P_{DA}(F) = F^n + \alpha_1 F^{n-1} + \dots + \alpha_n I \quad (3.101)$$

Capítulo 4

Análisis de resultados y conclusiones

Una vez establecidos los fundamentos teóricos de los sistemas de control clásico, la técnica de realimentación de variables de estado y los sistemas de control auto-sintonizados, se presenta en este capítulo el diseño y ensamble de una planta experimental de un sistema físico en el que se implementarán las técnicas y controladores mencionados en los capítulos anteriores, todo sobre Lego Mindstorm NXT.

Para implementar un control adaptativo se requiere dar mención a una serie de criterios de diseño, los cuales permiten que el sistema físico implementado se comporte de forma similar al sistema en el cual se ha inspirado este trabajo de grado (mesa para cirugía), los criterios adoptados para el éxito del proyecto son:

- Control de la posición angular (altura de la mesa).
- Control ante perturbaciones.
- Desplazamiento suave de la mesa frente a cambios de referencia.
- Control independiente de cada motor.

Diseño del sistema físico

En este ítem se explicarán los pasos dados durante el diseño de la mesa, los problemas surgidos durante éste y las soluciones adoptadas. Lo primero que se realiza es el reconocimiento de las fichas del paquete Lego Mindstorm NXT 2.0, se investigan las funciones que tiene cada pieza y con qué cantidad de fichas se cuenta. Inicialmente se elabora la parte superior de la mesa con las fichas, luego se procede a realizar un bosquejo en el cual se analiza

la mejor ubicación de los tres servomotores de manera que el área de trabajo de cada uno y los elementos adicionados a este no se interrumpen entre sí, se espera lograr esto con una ubicación triangular simétrica de los motores. Luego se construye la base usando piezas lego genéricas ya que el paquete no cuenta con las suficientes fichas para poder realizar el montaje. Una vez terminada la base se unen los servomotores a ésta, pero como la parte superior de la mesa fija la ubicación de los motores la simetría no se puede lograr, aún así el modelo permite que la mesa quede de forma horizontal, con esta posición inicial se pretende variar la altura de la mesa a partir de un control de posición angular de los motores, el cual es uno de los criterios de diseño del modelo físico.

El siguiente paso es instalar los programas necesarios para crear la interfaz hombre-máquina, tal como: LabVIEW 2013 y el módulo de LabVIEW para Lego Mindstorm. Al comienzo se da uso del toolkit Mathscript el cual permite realizar líneas de código que pueden ser descargadas en el NXT o ajustadas a medida que el código esté compilando, con el pasar del tiempo a medida que el código usado se hace más extenso y complejo, el toolkit Mathscript empieza a fallar. Por esta razón se decide cambiar al nodo de fórmula ya que es una herramienta similar, que acepta códigos extensos y complejos pero compila los códigos en menor tiempo, para su utilización se hizo necesario la instalación de Matlab.

Siguiente a esto se realiza un algoritmo PID de poca complejidad con ganancias ajustables, para probar el correcto funcionamiento del sistema físico implementado, es aquí donde se presenta un fenómeno de rigidez en el movimiento de la parte superior de la mesa y adicionalmente se nota fricción entre las piezas que unen los servomotores a la parte superior de ésta. Para dar solución a la rigidez se hace uso de fichas de goma que permiten tener esa flexibilidad que se necesita y adiciona un efecto de amortiguación a la planta física, finalmente para dar solución a la fricción se usan otro tipo de piezas más alargadas que aportan mayor libertad al movimiento.

Entorno de programación

Para el desarrollo de los algoritmos de control se emplea el entorno de desarrollo gráfico LabVIEW. El lenguaje utilizado por este entorno es denominado Lenguaje G; es un lenguaje que describe de forma visual los elementos y el funcionamiento del programa sumándole simplicidad a su elaboración, también es posible escribir programas altamente complejos con una interfaz de usuario completa, son estas unas de las razones por las cuales se elige este entorno de programación, además de que es compatible con el Lego Mindstorm NXT 2.0.

Para la implementación de los algoritmos de control, se hace necesario adicionar un toolkit que permite utilizar las herramientas avanzadas de programación gráfica que LabVIEW

proporciona al usuario para el control del NXT, escapando de las limitaciones propias del entorno de programación del Mindstorm. Ofrece más libertad de control y expande los límites de lo que es posible en el desarrollo de proyectos más complejos. Al ser un entorno ampliamente usado en ámbitos profesionales y sectores académicos encaja perfectamente dentro de éstos [25].

Sensor de los servomotores

Al implementar el algoritmo PID de poca complejidad con ganancias ajustables para probar el sistema físico, se hace uso de las herramientas que proporciona el toolkit, éste permite conectar los servomotores a la estructura de LabVIEW donde se expresa en líneas de código el algoritmo de control. La señal de entrada al código es tomada como la señal que arroja el sensor de posición angular que tiene inmerso cada servomotor, esta señal se toma de un bloque que proporciona el toolkit mencionado y la señal de salida que proporciona el código se conecta al bloque del motor. Todos los códigos a implementar cuentan con: una señal de referencia que es la señal al que el usuario tiene acceso, la señal de posición angular que se obtiene del servomotor y la señal de control que se obtiene a través de la compilación del código del control implementado. Para determinar el correcto funcionamiento de los códigos se usa sólo un motor fuera del esquema de la planta para observar dicho comportamiento, en esta parte se puede observar que al iniciar cada compilación del código el servomotor se toma como cero de referencia o posición inicial la primera lectura que obtiene el sensor de posición angular, es decir, cada vez al compilar el código la posición cero del motor es exactamente en la que se encuentra al iniciar el proceso. Para hacer un análisis más completo se realizan y analizan unas perturbaciones, al inicio se pretenden hacer a la superficie de la mesa pero debido a su construcción y las piezas implementadas los servomotores no responden a ésta ya que no es muy significativa, por tal motivo las perturbaciones se hacen directamente a los servomotores.

Identificación de la planta

Como se establece dentro de los criterios de diseño, se realiza un control para cada motor, el control de la mesa está dada a partir de el control de posición angular de los motores, es decir, se hace un control independiente de los servomotores donde a cada motor se le implementa un algoritmo de identificación de parámetros y su respectivo control de posición.

Una vez conocida la plataforma de programación se da paso a realizar el método de identificación de cada servomotor para la estimación de sus parámetros, se implementa un

método de identificación muy conocido llamado mínimos cuadrados con factor de olvido. Para poder apreciar esta buena identificación se simula una planta en LabVIEW adicionándole el algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido y un algoritmo de control, allí se nota que se identifican los parámetros establecidos y se observa que cuando los parámetros se inicializan en cero la respuesta del control al comienzo tiene una caída significativa no deseada, por tal motivo se inicializan dichos parámetros en valores diferentes a cero y se ve una apreciable mejoría de la señal de control.

Inicialmente, al implementarse la identificación de los parámetros en los servomotores se inicializan en cero ya que estos son parámetros desconocidos, luego de que los parámetros tienden a estabilizarse se detiene el control y se toman estos para la inicialización de los controles empleados.

4.1. Resultados y análisis

4.1.1. Control Proporcional - Derivativo

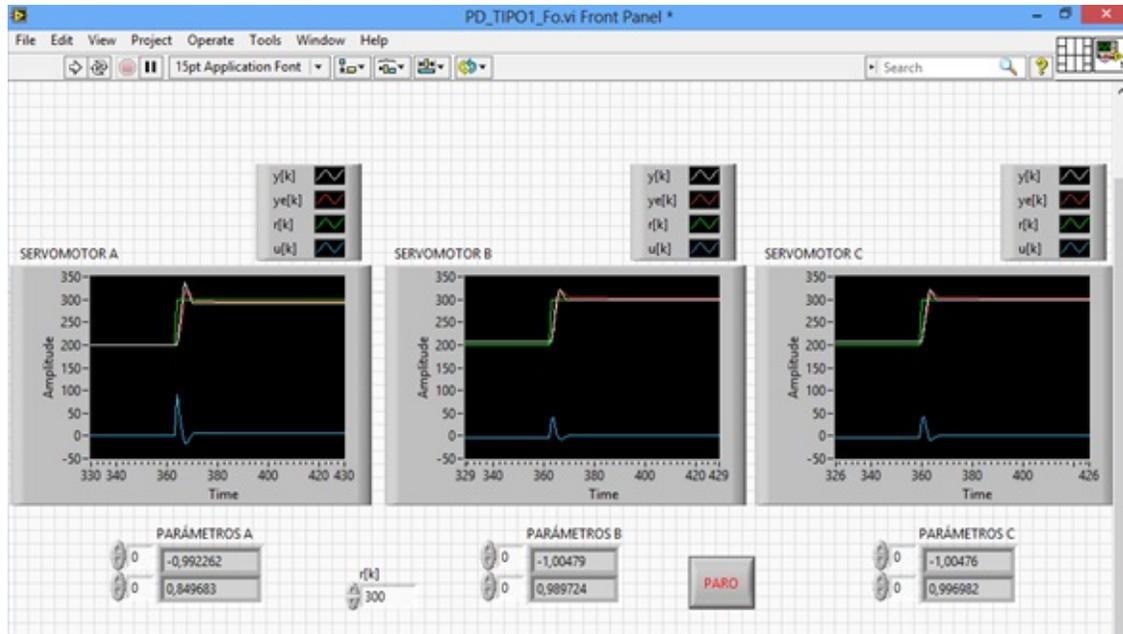


Figura 4.1: Respuesta del control PD a partir de un polinomio deseado con un par de polos en 0.3



Figura 4.2: Respuesta del control PD a partir de un polinomio deseado con polos en 0.3 y 0.6

Como se puede observar en la Figura 4.1 al tener un cambio de referencia elevado (pendiente grande), ocurre un sobrepaso alto. En esta figura se puede apreciar que al actuar en conjunto la acción proporcional con la acción derivativa la respuesta alcanza con mayor velocidad la señal de referencia. Según el criterio de diseño establecido con anterioridad, se requiere que la respuesta sea lenta, esta es la razón por la cual en la Figura 4.2 se emplea un polinomio deseado con polos más alejados del cero según la región de estabilidad del círculo unitario en dominio de z , ésto con el fin de que la respuesta no sea brusca en cuanto al movimiento observado en el modelo físico. En la Figura 4.2 también se puede observar cómo se presenta un error de estado estacionario y que al ser este constante la parte derivativa no provee ninguna acción correctora al proceso, ya que la derivada con respecto al tiempo de ese error es cero, provocando que la parte derivativa del controlador y la señal de control adopten una actitud pasiva.

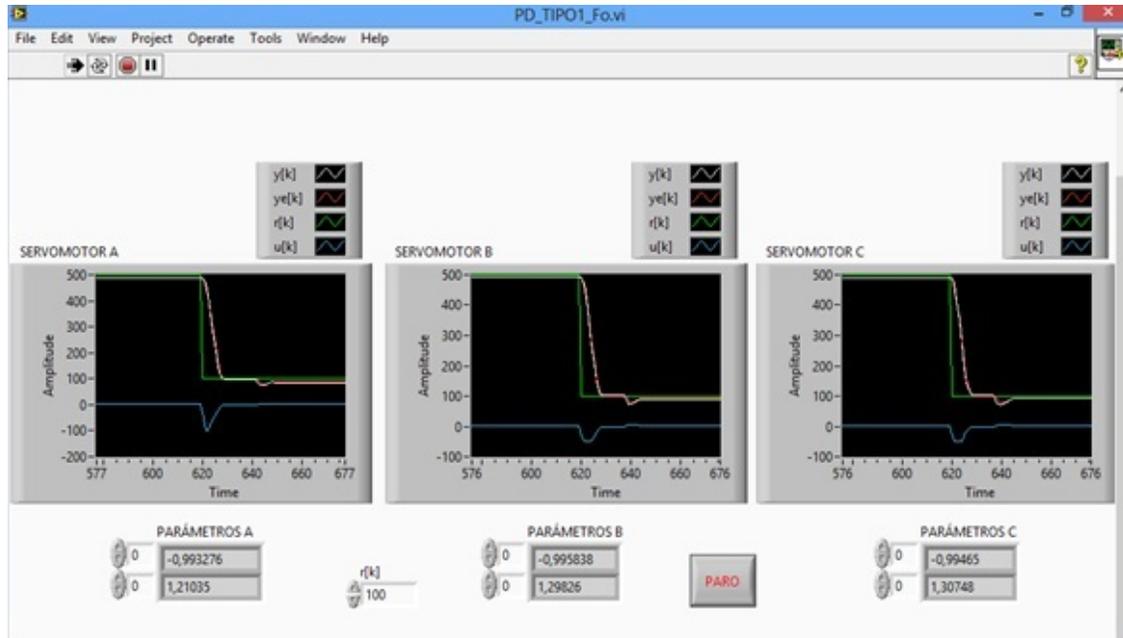


Figura 4.3: Perturbación control PD a partir de un polinomio deseado con polos 0.3 0.6

En la Figura 4.3 se presenta una perturbación, en este caso el error de estado estable se incrementa con el tiempo generando un nuevo actuar de la acción derivativa, lo cual reduce notablemente la magnitud del error. En las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, se visualiza una disminución del sobrepaso máximo (M_p), el tiempo de levantamiento (t_r) y del tiempo de asentamiento o establecimiento (t_s).

4.1.2. Control Proporcional - Integral

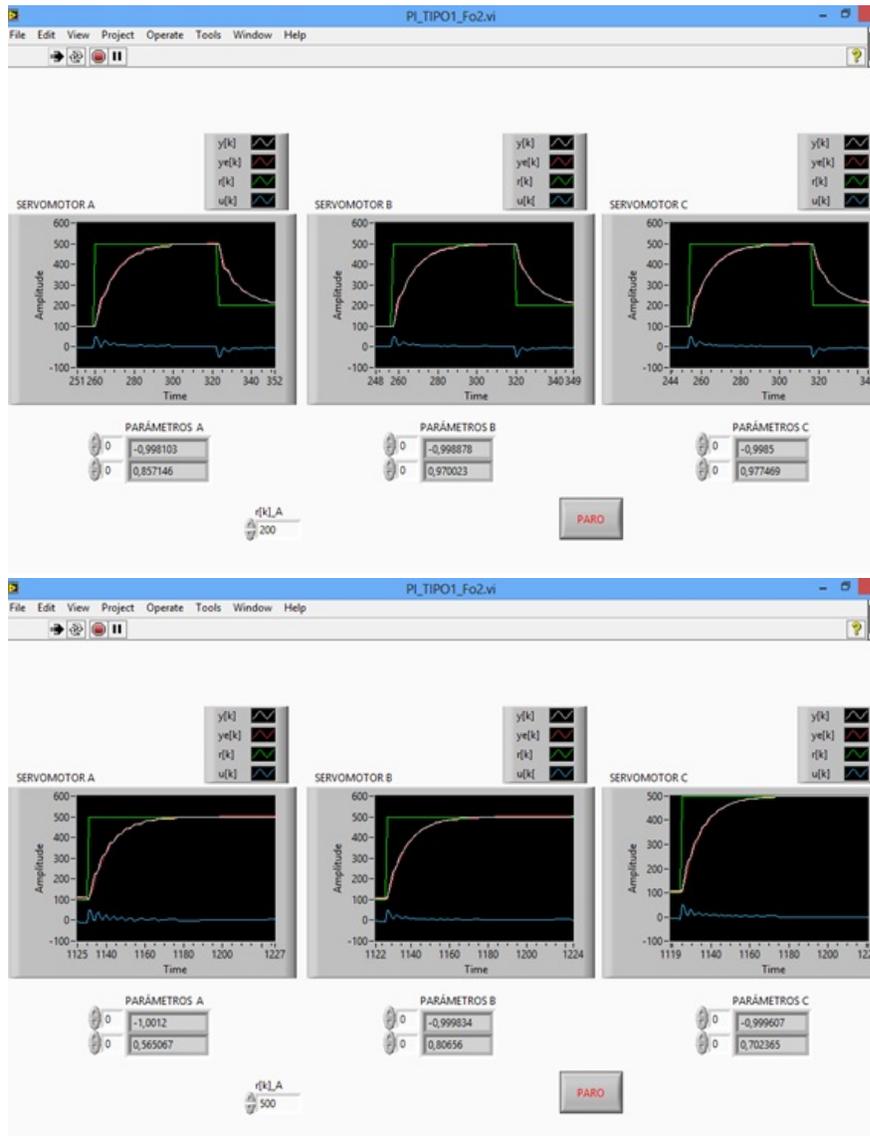


Figura 4.4: Control PI con polos en 0.3 y 0.9 del polinomio deseado.

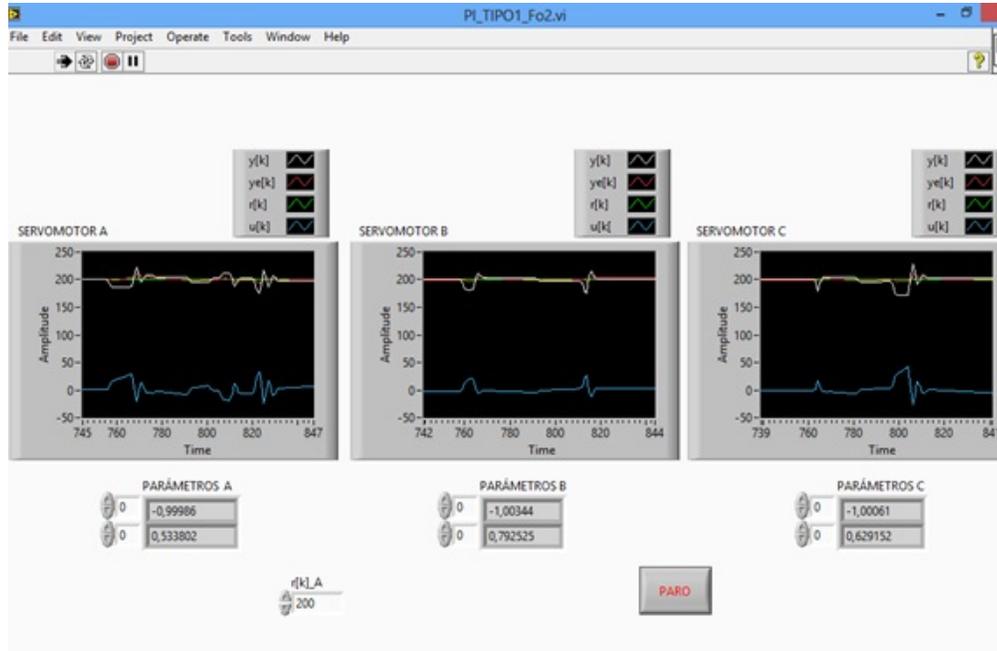


Figura 4.5: Perturbación al control PI.

En la Figura 4.4 se nota cómo la acción integral reduce el error de estado estacionario, pero la parte integral al mismo tiempo empeora la estabilidad relativa aumentando las oscilaciones en la señal de respuesta.

Este tipo de controlador es en esencia un filtro pasa bajo, como se puede observar en la Figura 4.4 el sistema tiene una respuesta más lenta con un tiempo de subida más bajo y un tiempo de estabilización más largo.

En la Figura 4.5 se puede observar que la respuesta a las dos perturbaciones hechas de forma manual es lenta pero con el pasar del tiempo se ve como el error disminuye gracias a la acción integral. También al ser la integral una operación acumulativa en el tiempo se deben tomar acciones especiales para evitar saturaciones en los actuadores finales debido a la acumulación del error, esta es la razón por la que en la Figura 4.6 se implementa un algoritmo de atenuación del efecto “*windup*” explicado en capítulos anteriores.

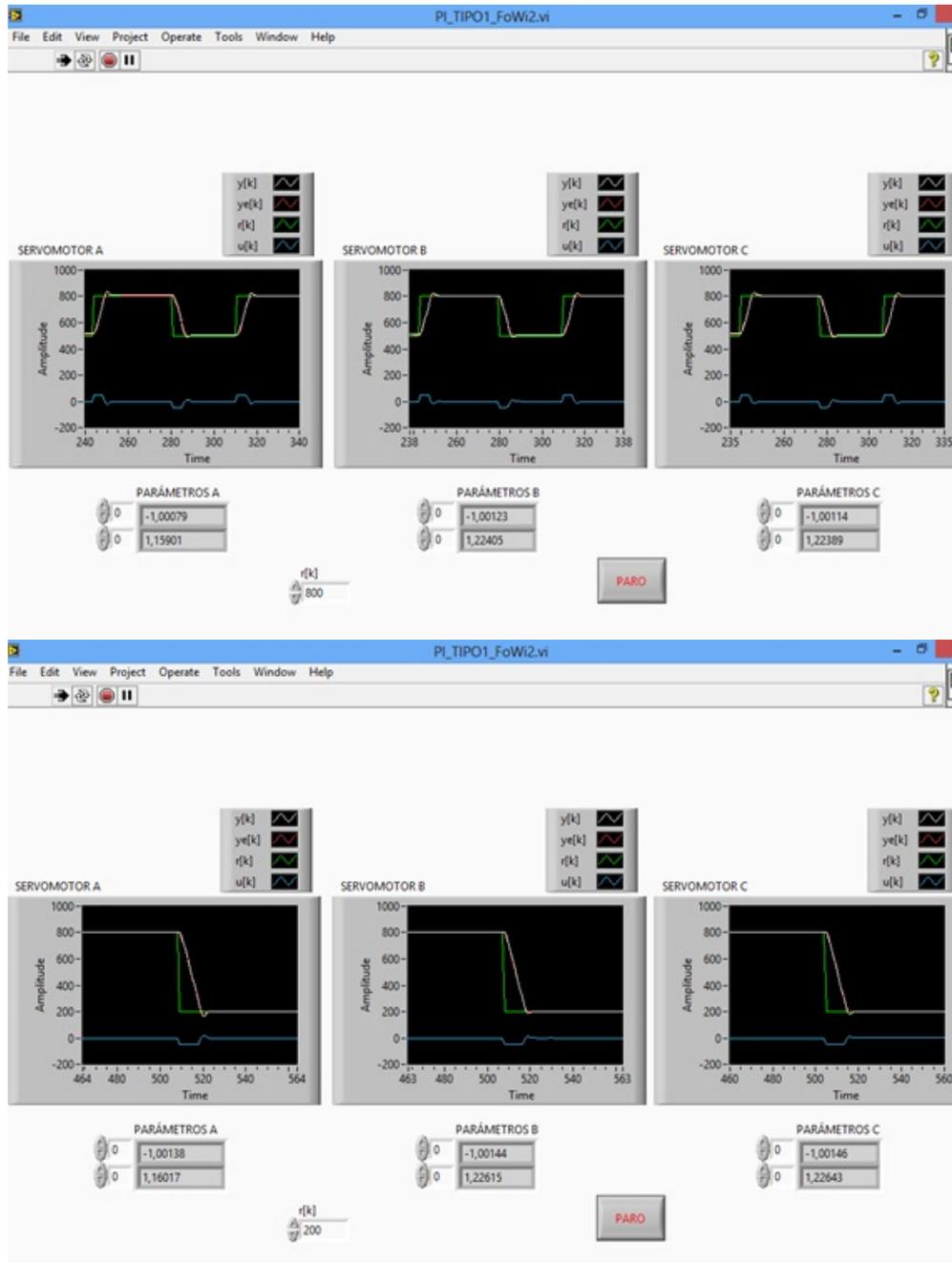


Figura 4.6: Control PI con algoritmo “anti-windup”.



Figura 4.7: Perturbación Control PI con “anti-windup”.

En comparación con la Figura 4.4, la Figura 4.6 muestra una apreciable mejoría en la respuesta del control PI, aumentando la velocidad de respuesta y mitigando las oscilaciones aunque se puede apreciar un pequeño sobrepaso. En cuanto a la perturbación realizada en la Figura 4.7 se puede observar en comparación con la Figura 4.5 que la señal de control crece rápidamente y ésto hace que la respuesta del control alcance la referencia en menor tiempo.

4.1.3. Control Proporcional - Integral - Derivativo

Control Proporcional - Integral - Derivativo Tipo I



Figura 4.8: Control PID Tipo I, con los polos del polinomio deseado fijados en 0.8,0 y 0.9

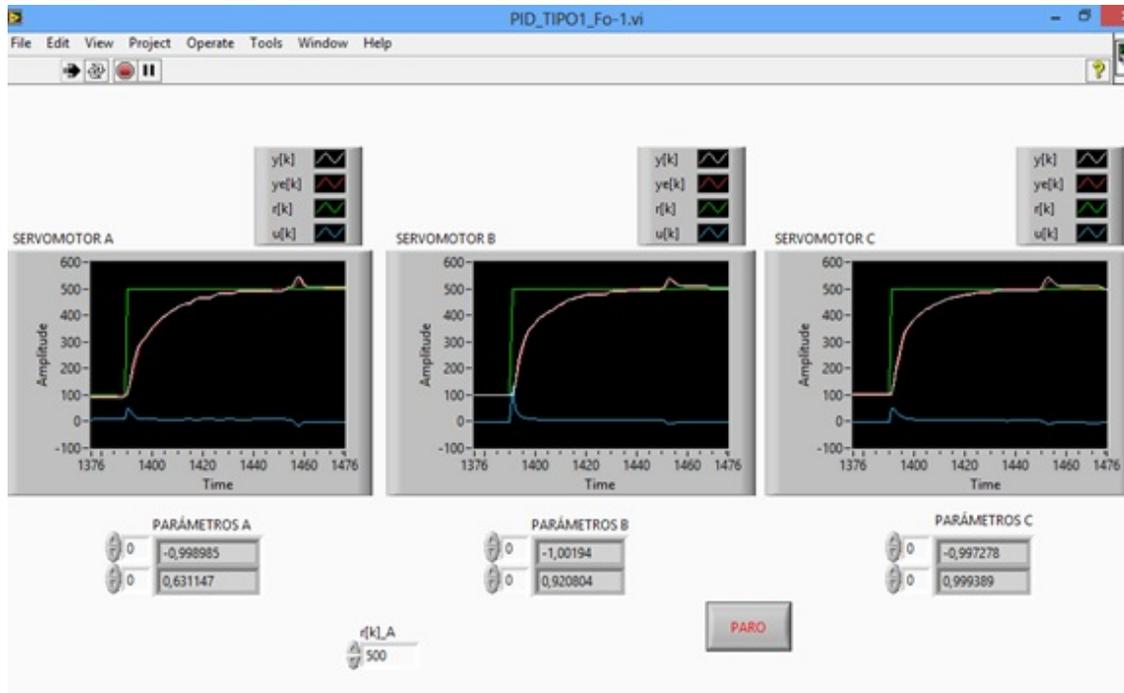


Figura 4.9: Perturbación control PID Tipo I, con los polos del polinomio deseado fijados en 0.8,0 y 0.9

Control Proporcional - Integral - Derivativo Tipo II

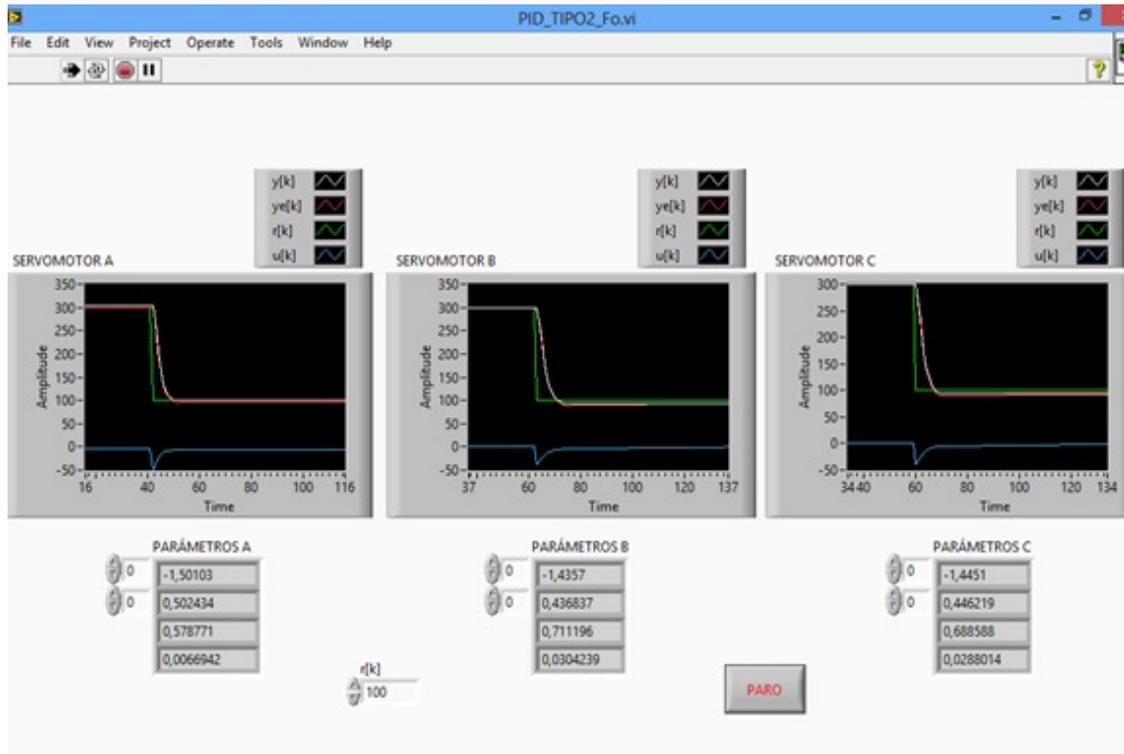


Figura 4.10: Control PID con los polos del polinomio deseado en 0.8, 0.9 y un par en 0.5



Figura 4.11: Perturbación al control PID Tipo II

Tanto en la Figura 4.8 como en la Figura 4.10 se aprecia el correcto funcionamiento del controlador PID ya que el control trata de aprovechar las ventajas de cada uno de los controladores de acciones básicas, es decir, cuando la señal de error varía lentamente en el tiempo predomina la acción proporcional e integral y cuando hay un cambio de referencia grande predomina la acción derivativa. En las Figuras 4.8 y 4.9 se presentan oscilaciones, propias del controlador. De los anteriores análisis se observa que el controlador PD puede añadir amortiguamiento al sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable. El controlador PI mejora la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de subida se incrementa. Por tanto un controlador PID como se muestra en las Figuras 4.8 y 4.10 mejora la respuesta del sistema agrupando las tres acciones de control. En las Figuras 4.9 y 4.11 al realizarse las perturbaciones se puede apreciar una respuesta ideal y una compensación de la señal de error rápida.

4.1.4. Espacio de estados extendidos



Figura 4.12: Estados extendidos

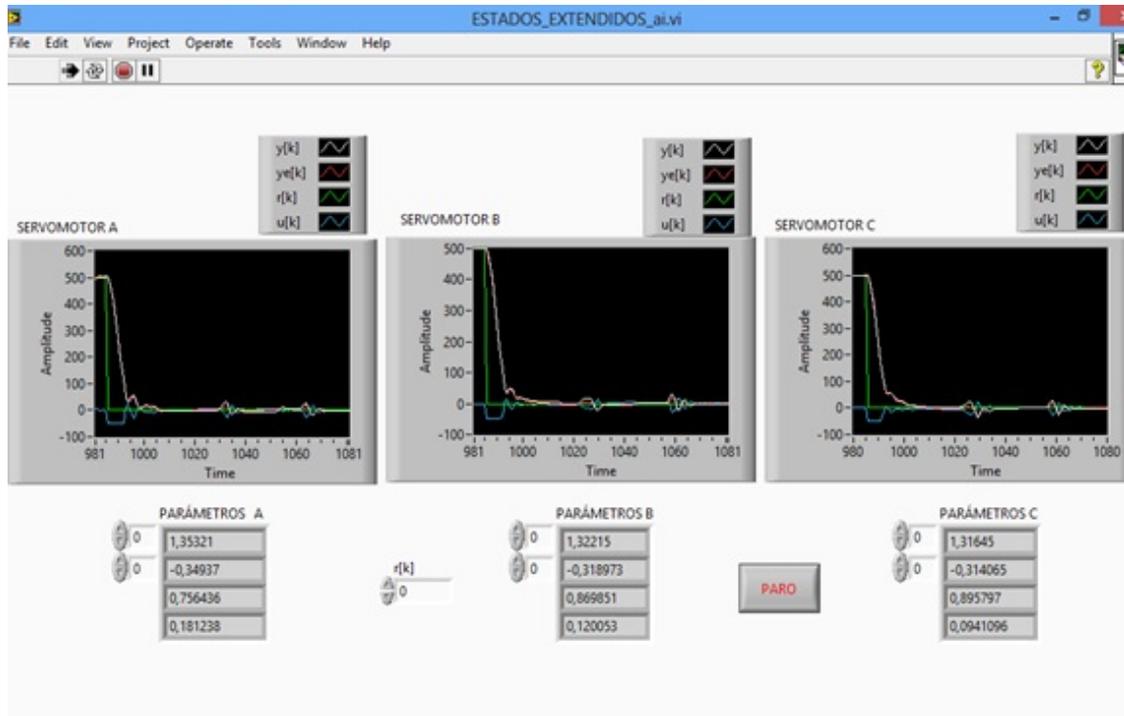


Figura 4.13: Perturbación estados extendidos

En la Figura 4.12 se puede observar la respuesta de un control aplicando la técnica de variables de estado con acción integral, la cual tiene una respuesta suave y sin sobrepaso que es lo que se busca. En la Figura 4.13 se aprecia la respuesta a las perturbaciones realizadas, se notan algunas oscilaciones que no son muy apreciables en el sistema físico.

4.1.5. “*Dead-Beat*” implementado con PID Tipo I

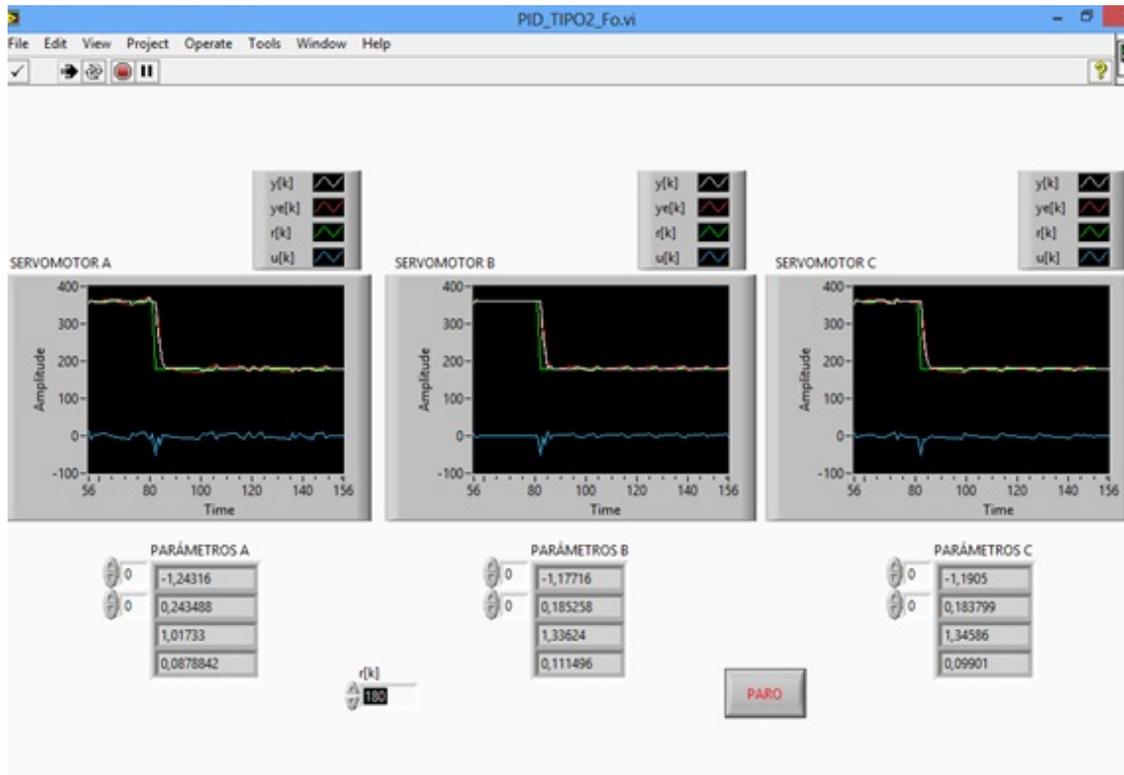


Figura 4.14: “*Dead-Beat*” PID Tipo I con una frecuencia de muestreo de 0.35s

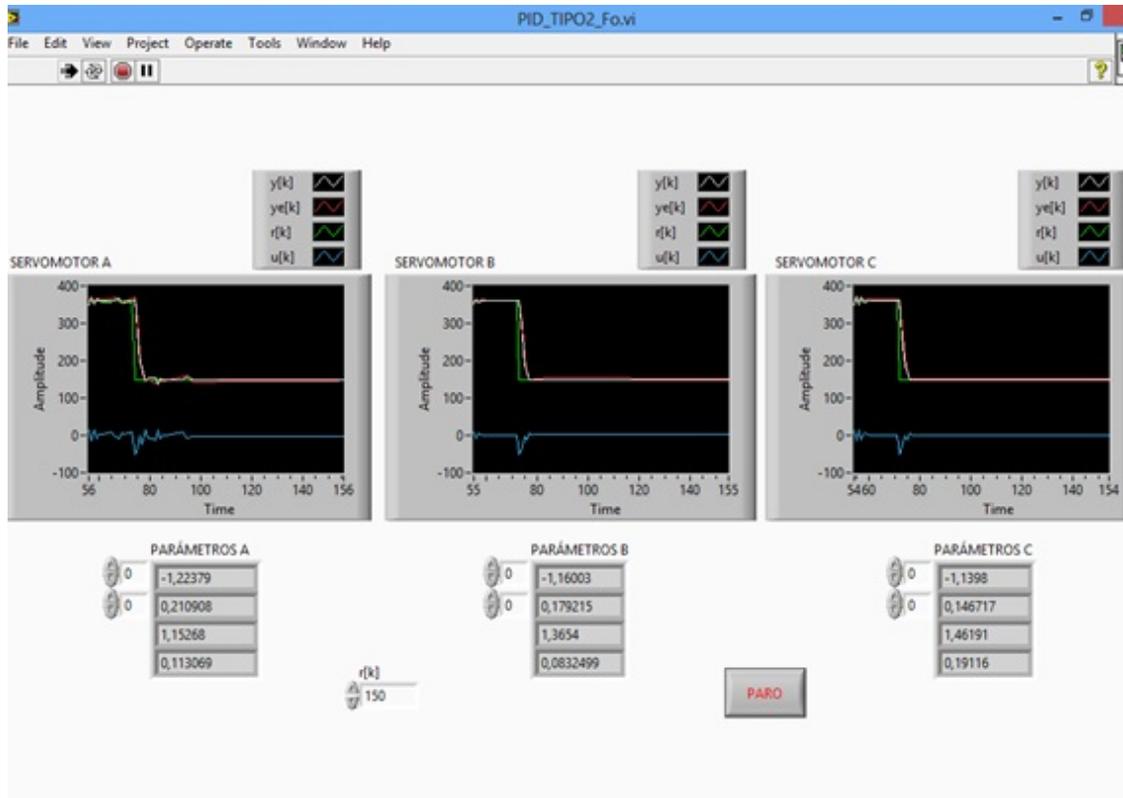


Figura 4.15: “Dead-Beat” PID Tipo I con una frecuencia de muestreo de 0.358s

En las Figuras 4.14 y 4.15 se implementa un control PID tipo I con un polinomio deseado que tiene todos sus polos en 0, esto con el fin de implementar un control “Dead-Beat” donde se puede apreciar la importancia del periodo de muestreo, en la Figura 4.14 se utiliza un periodo de muestreo de $350ms$, a pesar de que el control funciona de forma muy rápida presenta algunas oscilaciones en estado estable, es decir, el error no se atenúa rápidamente. En la Figura 4.15 se utiliza un periodo de muestreo de $358ms$, el control sigue siendo muy rápido pero en comparación con la Figura 4.14 las oscilaciones disminuyen notablemente.

En los resultados expuestos, se nota que el servomotor A en algunos casos presenta una respuesta no deseada en comparación con los servomotores B y C, esto se ve reflejado en la diferencia que hay en los parámetros identificados por el algoritmo del servomotor A con respecto a los otros.

4.2. Conclusiones

Es importante y necesario tener un modelo matemático preciso ya que permite obtener mejores resultados en el control de sistemas reales. Este modelo típicamente se puede hallar de forma analítica pero le brinda dificultad y complejidad a la identificación, el método de identificación de parámetros de mínimos cuadrados con factor de olvido encuentra unos parámetros que se adaptan a los cambios del sistema en el tiempo, representando un modelo numérico de manera adecuada que establece la dinámica del sistema.

Se comprueba que el efecto del controlador PD tiene una gran y rápida acción inicial, seguida de un eventual decaimiento a cero de la acción derivativa, lo que ocasiona un error de estado estacionario ya que sólo actúa de la parte proporcional al error. Además, el controlador PD decrementa el sobrepaso máximo (M_p), el tiempo de levantamiento (t_r), y el tiempo de asentamiento o establecimiento (t_s).

Se verifica que en el control PI, la acción integral reduce el error de estado estacionario pero al mismo tiempo empeora la estabilidad relativa aumentando las oscilaciones en la señal de respuesta, la respuesta de este tipo de controlador es más lenta con un tiempo de levantamiento más bajo (t_r) y un tiempo de asentamiento o establecimiento más largo (t_s).

Para un sistema de control con un amplio rango de operación puede suceder que la variable de control alcance los límites del actuador, si se usa un controlador con acción integral el error continuará siendo integrado, incrementando aún más su valor. Se hace evidente que al emplear un atenuador para el efecto “*windup*” la respuesta del controlador mejora notoriamente, al igual para las perturbaciones que se presentan sobre el sistema, estas son mitigadas en un menor tiempo.

Se aprecia que el controlador PID aprovecha las ventajas de cada uno de los controladores de acciones básicas, es decir, cuando la señal de error varía lentamente en el tiempo predomina la acción proporcional e integral y cuando hay un cambio de referencia grande predomina la acción derivativa. También se observa que el controlador PD puede añadir amortiguamiento al sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable, el controlador PI mejora la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de subida se incrementa.

Como se pudo observar, al implementarse el control “*dead-beat*” la respuesta del controlador es muy rápida, para otras implementaciones este puede ser un control ideal pero en nuestro caso esta no es una respuesta deseada ya que según los criterios de diseño establecidos se requiere que la respuesta sea lenta, de manera que no represente un cambio brusco en el sistema físico.

Se verifica que al hacer un control directamente sobre la salida o a las variables de estado este control funciona correctamente, ya que la salida de cada sistema se representa a través de las variables de estado, por tanto cualquier aplicación que sea posible realizar a dicha salida podrá ser aplicada a sus variables de estado y puede ser usada para modificar las frecuencias naturales del sistema y hacerlas todas estables.

Como nueva propuesta para los requerimientos de educación actual en el área de control se hace evidente la importancia de implementar la teoría de control en sistemas reales para el aprendizaje, a partir de la robótica educativa.

Bibliografía

- [1] B. G. Márquez, “Desarrollo de un sistema de monitoreo para diversas aplicaciones,” Universidad de los Andes Mérida, Venezuela, Tech. Rep., 2008.
- [2] A. H. Largacha, M. L. Martínez, and J. P. Martín, “Control inteligente del péndulo invertido,” Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Tech. Rep., 2012.
- [3] J. Fleischer, B. Szatmary, D. Hutsona, D. Moore, J. Snookand, G. Edelman, and J. Krichmar, “A neurally controlled robot competes and cooperates with humans in segway soccer,” *IEEE*, pp. 3673–3678, Mayo 2006.
- [4] D. Benedettelli, N. Ceccarelli, and A. A. Giannitrapani, “Experimental validation of a decentralized control law for multi-vehicle collective motion,” *IEE*, pp. 4170–4175, 2007.
- [5] D. Giraldo and I. Tabares, “Teoría de control,” 1997.
- [6] J. H. Braslavsky, “Control automatico 2,” Universidad Nacional de Quilmes, Tech. Rep., Agosto 2001.
- [7] L. F. L. Valencia, L. F. R. García, and D. G. Buitrago, “Diseño, implementación y validación de un controlador pid autosintonizado,” *Tecno Lógicas*, pp. 33–53, enero-junio 2012.
- [8] V. Mazzone, “Controladores pid,” Universidad Nacional de Quilmes, Tech. Rep., Marzo 2002, automatización y Control Industrial.
- [9] D. Giraldo, M. Alvarez, and C. Guarnizo, “Control adaptativo por reubicación de polos,” *Scientia et Technica*, 2006, universidad Tecnológica de Pereira.
- [10] M. A. V. M. no, “Diseño y análisis de desempeño de observadores adaptativos en esquemas de control mediante realimentación completa de estados,” Escuela Politécnica del Ejército, ecuador.

- [11] D. F. García and D. D. L. Fuente, “Estimación adaptativa en tiempo real de funciones de transferencia revisión de las técnicas disponibles y presentación de nuevos algoritmos,” Universidad de Oviedo, 1990, volumen 14.
- [12] W.J.D.Cova, “Control pid un enfoque descriptivo,” Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, Tech. Rep., 2005, departamento de Electrónica.
- [13] I. M. A. Moreno, *APUNTES DE CONTROL PID*, Universidad Mayor de San Andrés, La paz - Bolivia, Enero 2011.
- [14] D. G. Buitrago, I. T. Gómez, and J. C. Vásquez, “Control pi .antiwindup,” *Scientia Et Technica*, 2001.
- [15] D. G. Buitrago and E. G. Suárez, “Teoría de control digital,” Produmedios, Colombia, Marzo 2012, universidad Tecnológica de Pereira.
- [16] M. A. P. Ramos, “Análisis, síntesis y construcción de un controlador adaptable genérico con supervisión,” Ph.D. dissertation, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México, Septiembre 2006, departamento de Electrónica.
- [17] M. R. Cesca and A. P. Ingaramo, *Estabilidad de los Sistemas en Lazo Cerrado*, Departamento de Ingeniería de Procesos y Gestión Industrial, facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.
- [18] F. G. Bravo, *Análisis de sistemas*, Escuela Politécnica Superior Universidad de Huelva, departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.
- [19] A. Gutiérrez and F. Monasterio-Huelín, *Dominio de la Frecuencia*, Laboratorio de Robótica y Control, Madrid, España.
- [20] *Análisis en el dominio temporal*, Dpto. Electrónica, Automática e Informática Industrial, Universidad Politécnica de Madrid.
- [21] “Sistemas lineales de segundo orden,” Web, <http://www.galeon.com/mcoronado/MODELAMIENT>
- [22] J. Arántegui, *Análisis de estabilidad de sistemas*, 2009.
- [23] E. T. Leal, T. Y. G. Melendez, and V. P. S. Alonso, “Revisión de la plataforma robótica lego mindstorms para aplicaciones educativas y de investigación,” Universidad Autónoma de Tamaulipas, México, Tech. Rep., Septiembre 2013.

BIBLIOGRAFÍA

66

[24] “Ro-botica global s.l.” barcelona.

[25] I. J. V. Araoz.