DISEÑO DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA EL FORTALECIMIENTO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA

Una Tesis Presentada Para Obtener El Título De
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad Tecnológica de Pereira

Cristian Franco & Leandro Sánchez
Mayo 2015.

DISEÑO DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA EL FORTALECIMIENTO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA.

CRISTIAN DAVID FRANCO RESTREPO
Cod:1061370221

EDER LEANDRO SANCHEZ QUICENO
Cod:1088308167

Asesora
Lic Mónica Angulo Cruz
Magister en educación

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS Y FISICA
PEREIRA
2015

Dedicatoria

A Dios por darnos la fortaleza de luchar cada día y no caer en las adversidades, por hacernos personas humildes con la filosofía de ayudar a nuestros prójimos, y que nos ha de llevar a nuevos caminos en los cuales esperamos salir con éxito.

A nuestros padres que con esfuerzo y dedicación han hecho de nosotros personas con valores, principios y con la fuerza necesaria para luchar por nuestros sueños.

A las personas más próximas que hacen de nuestra vida la mayor interesante experiencia de todas, y que nos muestran la esencia del vivir.

Agradecimientos

A nuestra directora Mg Mónica Angulo Cruz que con sus esfuerzos y paciencia nos formó en la excelencia, al profesor Dr. Oscar Fernández que nos dio varias herramientas para incursionar en la bella arte de la enseñanza de la matemática.

A todos aquellos profesores y compañeros que aportaron de alguna manera en nuestra formación, los cuales tendremos en nuestras vidas y que en cada clase que daremos estarán presentes.

A nuestra Universidad, a Risaralda Profesional y al programa Licenciatura en Matemáticas y Física que luchan por ser cada día mejor y en ese proceso nos hicieron mejores personas y profesionales.

A nuestros amigos que estuvieron presentes en la elaboración de este proyecto, y a las personas que estuvieron relacionados indirectamente y formaron parte en nuestra meta y nos ayudaron a culminar con éxito

Contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Imágenes

Introducción

El Semillero de Investigación en Educación Matemática –SIEM- ha venido desarrollando un macroproyecto que consta de cuatro fases, de las cuales ya se han finalizado las dos primeras. En la primera fase, se desarrollaron varios exámenes diagnósticos sobre conocimiento matemático en instituciones educativas de la ciudad de Cartago (Valle del Cauca), mediante estos exámenes diagnósticos se detectaron las temáticas donde los estudiantes presentan dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas además se evidenciaron los errores más frecuentes en los procesos de modelación, razonamiento, es por eso que la segunda fase del macroproyecto consistió en diseñar una serie propuestas metodológicas en las cuales se utilizan métodos como el de ABP (Aprendizaje Basado en Problemas), Laboratorios matemáticos entre otros; estas metodologías pretenden contribuir al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas y disminuir el índice del bajo rendimiento en esta área.

Varias de las propuestas metodológicas planteadas en la segunda fase, requerían de un material didáctico para ser aplicadas, pero por limitaciones económicas y de tiempo estas ideas solo quedaron en el papel, es así como se plantean las fases 3 y 4 del macroproyecto de investigación. La fase 3 es desarrollada mediante este trabajo de investigación titulado **"Diseño de material didáctico para el fortalecimiento del pensamiento matemático en la enseñanza de la educación básica y media"** que consiste en el diseño y construcción de material didáctico para la enseñanza de las matemáticas con las respectivas guía de instrucción, estas son estructuradas para que el material didáctico juegue un papel importante en la adquisición de los objetivos que requiere cada temática seleccionada. Este trabajo de investigación es la base de la fase 4 del macroproyecto de investigación, esta fase consistirá en la aplicación de los materiales didáctico en las instituciones educativas de la región.

El presente trabajo de investigación es presentado en tres capítulos; el primero es el marco teórico donde se explica el sustento teórico en cuanto al diseño y aplicación en material didáctico para la enseñanza de las matemáticas, además se tratan las teorías pedagógicas que sustentan la investigación; estas teorías son: la transposición didáctica, situación didáctica, el constructivismo, los procesos en matemáticas, los pensamientos matemáticos y los estándares curriculares; estas teorías pedagógicas fueron las bases esenciales para el diseño y la construcción de los materiales didácticos en matemáticas propuestos en este trabajo de investigación.

En el segundo capítulo se explica la metodología, la metodología consistió en tres fases: la primera fase fue la revisión bibliográfica de las tesis realizadas en las 2 primeras fases del macroproyecto de investigación además de libros, enciclopedias, artículos y páginas web relacionadas sobre el tema del material didáctico, esto con el objetivo tener en cuenta los materiales didácticos que se necesitan para un tema determinado y también para darle la continuación al macroproyecto del semillero; la segunda fase consistió en la clasificación de los materiales didácticos, fue fundamental seguir la guía de los Estándares Curriculares para la Enseñanza de la Matemática, teniendo en cuenta las temáticas que se proponen en los estándares y La tercera fase consistió en el diseño y construcción de los materiales didácticos con la respectiva guías instrucción.

En el tercer capítulo se presentan 11 guías de instrucción para el docente con el fin de mostrar cómo se aplican los respectivos materiales didácticos. Para el diseño de una guía de instrucción es necesario conocer cómo se estructura cada uno de los momentos de una secuencia didáctica además tener claro en que instantes se va aplicar el material didáctico, es por esta razón que cada guía consta de 3 fases; interpretativa, argumentativa y propositiva. En la fase interpretativa se dan las bases de la temáticas y se dan indicios de lo que se quiere lograr, en la fase argumentativa se utilizan los argumentos de la fase anterior para explicar nuevos conceptos y la fase propositiva es donde el estudiante debe usar el material didáctico para realizar la actividad propuesta; es preciso aclarar que en varias guías se utiliza el material desde las primeras fases ya que son fundamentales para la comprensión de los conceptos explicados.

Capítulo I

Fundamentación Teórica

1.1 Material Didáctico en Matemáticas

Se entiende por material didáctico aquel instrumento didáctico que permite la mediación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, apoyando las prácticas pedagógicas de los docentes y permitiendo así ser un puente entre el mundo de la enseñanza y el mundo del proceso de aprendizaje; para la enseñanza de la matemática no se puede discutir que el poseer un material didáctico en las clases invita a despertar la curiosidad por parte de los estudiantes y la motivación para ser parte de la manipulación y participación del mismo.

El uso del material didáctico, juega un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas. Su correcta utilización constituye la comprensión de conceptos, relaciones y métodos matemáticos que permite un aprendizaje activo de acuerdo a la evolución intelectual del estudiante. Bajo el reconocimiento de la importancia del uso de los materiales didácticos en los procesos de construcción y desarrollo del pensamiento matemático para los diferentes niveles de la educación, es fundamental el laboratorio de matemáticas como una estrategia pedagógica para el uso de materiales.

El Laboratorio de Matemáticas establece una relación entre materiales que se manipulan y el tema en matemáticas que se quiere enseñar; es así como el uso de materiales didácticos produce una actividad que opera en los estudiantes y el docente y, a su vez, se convierte en elementos generadores de creatividad, que se contraponen con la posible pasividad que manifiestan algunos estudiantes que escuchan la explicación de un profesor.

El uso de los materiales didácticos produce una motivación en los estudiantes y, a su vez, se convierte en elementos generadores de creatividad, contribuyendo para que cese la monotonía manifestada en los estudiantes que escuchan la explicación de un profesor.

Para el adecuado uso se requiere la disponibilidad de un espacio y organización a la hora de orientar el proceso. El profesor desempeña la labor de director o promotor, teniendo que presentar, organizar y guiar el trabajo del estudiante, pero nunca convertirse en el protagonista del saber, ni en el centro exclusivo de las actividades. El profesor orientará el desarrollo del trabajo con el material didáctico con la presentación de una guía que organice y encamine el trabajo del estudiante.

A continuación se describen algunos materiales didácticos en matemáticas que se pueden conseguir en el comercio y que contribuyen al fortalecimiento de los pensamientos matemáticos.

1.1.1 El Abaco

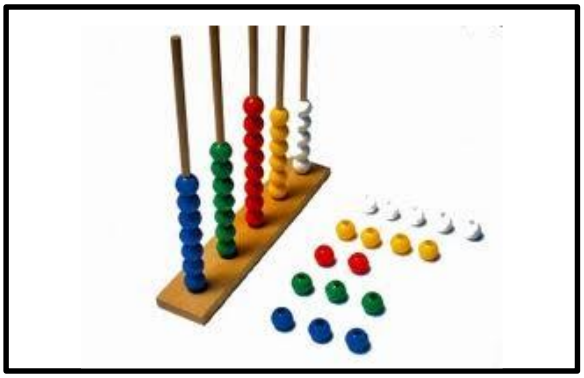


Figura 1: El ábaco. Tomado el 10 de marzo de http://2.bp.blogspot.com/U3_Rf2meJpg/UD1QUMA8WPI/AAAAAAAAAAc/_ameagNK_Dw/s1600/imagen+2.jpg

> "El ábaco es uno de los recursos más antiguos utilizado en la didáctica de las matemáticas. Consiste en un juego de varillas insertadas en un bastidor sobre las que se deslizan un número determinado de bolas o cuentas de colores". (Vázquez, 2010)

En Colombia este material didáctico se ha utilizado para la representación de números de diferentes cifras y para realización de operaciones básicas de números naturales. En ocasiones para hacer más participativas las clases los docentes instruyen a los estudiantes para que construyan el ábaco con materiales asequibles. Este material didáctico ha sido utilizado en grados segundo y tercero. Su óptima utilización permite a los estudiantes adquirir conocimientos que abarquen lo requerido en los estándares curriculares del ministerio en cuanto el pensamiento numérico en el ciclo de 1° a 3°.

1.1.2 Torres de Hanoi

Figura 2 Torre de Hanói. Tomado el 10 de marzo de http://1.bp.blogspot.com/-EuCftUD3Joc/URfHCb2U3UI/AAAAAAAADkk/YjNuHCM3Gpc/s1600/timthumb

Según (Vázquez, 2010): Las torres de Hanói "Son rompecabezas o juego matemático inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas. Consta de ocho discos de radio creciente que se apilan insertándose en una de las tres estacas de un tablero. Es necesario seguir tres simples reglas:

a. Sólo se puede mover un disco cada vez.

b. Un disco de mayor tamaño no puede descansar sobre uno más pequeño que él mismo.

c. Sólo puedes desplazar el disco que se encuentre arriba en cada varilla. " (Vázquez, 2010)

Se puede utilizar como una actividad de motivación inicial en cualquier temática, pero también se puede aplicar en los temas de geometría como "la circunferencia”, orientando los estudiantes hacia la construcción de este material didáctico y mostrando la aplicación de las circunferencias en el momento de construir los discos que encajan las varillas y observando directamente la variación de los radios. También para trabajar sucesiones mediante el número de movimientos según los discos utilizados. El buen uso de este material permite el desarrollo del pensamiento lógico - matemático en el estudiantado al momento de enfrentase a la situación problema del juego.

1.1.3 Tangram.

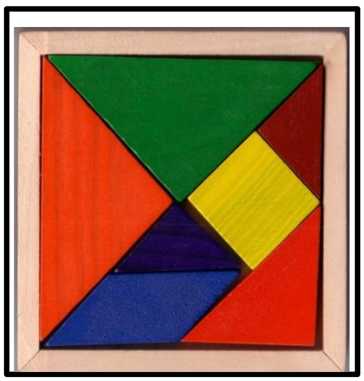


Figura 3 : El Tangram. Tomado el 11 de marzo de http://blog.cuartodejuegos.es/wp-content/uploads/2010/06/tangram45.jpg

Según (Vázquez, 2010): "Este antiguo pasatiempo oriental llamado (juego de los siete elementos) se usa en la enseñanza de matemáticas para introducir conceptos de geometría plana. Se obtiene a partir de la descomposición de un cuadrado de cartón, madera o plástico en siete piezas: un cuadrado, un paralelogramo y cinco triángulos de tres tamaños diferentes. Este puzzle puede acoplarse de diferentes maneras para construir figuras geométricas distintas, pero siempre con igual área."

A través de este material didáctico se pueden aplicar actividades recreativas que mejoren el ambiente en el aula. Un espacio donde este material se puede aplicar es en el momento de explicar los polígonos en grados de primaria e inclusive en otros de bachillerato como sexto y séptimo, temas como área, perímetro de una figura hacen parte de las aplicaciones que puede tener este material. Por lo general es recomendable que los estudiantes construyan el tangram y el docente busca las estrategias metodológicas para que este, sea usado de una manera pertinente y afiancen los conocimientos adquiridos durante el proceso de enseñanza aprendizaje de estas temáticas.

Con el uso de este material se contribuye para que el estudiante desarrolle el pensamiento espacial y métrico, pero al momento de orientar al estudiante para construir alguna figura a través de las fichas se logra fortalecer el pensamiento lógico.

1.1.4 Las Regletas de Cuisenaire

Figura 4 Regletas de Cuisenaire. Tomado el 10 de marzo de http://1.bp.blogspot.com/_EAyAH5IZ238/S2xgOLzu9SI/AAAAAAAAAA4/zciUWnBNd8I/s320/regletas.jpg

> Según (Vázquez, 2010): las regletas de Cuisenaire, "es conocido como (números de colores), este material didáctico debe el nombre a su inventor, George Cuisenaire, maestro belga que lo creó para ayudar a sus alumnos en el estudio de la aritmética. 60 años después, se considera una herramienta de garantía comprobada en la didáctica de las matemáticas. Consiste en un conjunto de regletas de madera de diez tamaños (de 1 a 10 cm) y colores diferentes. Cada tamaño y color equivale a un número determinado: la de un centímetro al número 1, la de dos centímetros al número 2 y así de forma sucesiva."

La utilización de este material se puede hacer desde los primeros años para que los niños aprendan a identificar números, adquirir la técnica del conteo y ya en los primeros grados de primaria, ellos puedan descomponer y representar números naturales y fraccionarios por medio de estas regletas. También puede aplicarse a problemas de ecuaciones lineales y hasta en temáticas de estadística y geometría, por ejemplo en estadística se pueden representar diagramas mediante las regletas.

Este material didáctico es llamativo para los estudiantes ya que el juego de colores y el tamaño de las regletas se facilitan para la manipulación. Todos los pensamientos matemáticos se pueden desarrollar por medio de este material didáctico. Para estudiantes con dificultades en el proceso de aprendizaje es de los materiales didácticos más apropiados para enseñar.

1.1.5 Geoplano

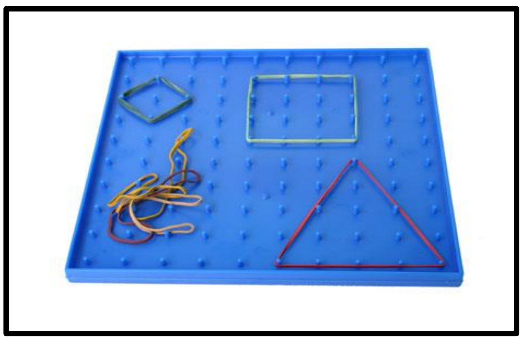


Figura 5 : Geoplano. Tomado de http://vivalanuevatecnologia.files.wordpress.com/2012/04/img1_geoplano-plastico_01.jpg

Según (Vázquez, 2010): "El Geoplano es una plancha de madera u otro material resistente en la que se disponen en forma de cuadrícula una serie de clavos o puntillas que sobresalen entre uno y dos centímetros de la superficie. Sobre esta base se trabaja con gomas elásticas de colores para construir distintas figuras geométricas. Permite a los niños visualizar cómo se construyen las distintas formas

> a partir de los puntos, asociar las figuras al movimiento, desarrollar su pensamiento espacial y la destreza motriz, entre otros aspectos."

Por medio de este material didáctico el docente puede diseñar actividades que involucren temáticas de geometría como: reconocer los elementos de los polígonos, hallar áreas de polígonos regulares, descomponer un polígono irregular para hallar su área. En el caso de que el docente solicite crear el Geoplano se recomienda que los materiales sean seguros para los estudiantes y ser claro en las instrucciones para su creación, por ejemplo, la separación entre las varillas debe ser igual. Aunque se suele pensar que teorías muy fuertes de las matemáticas son inapropiadas en niveles de básica y media es un reto docente involucrar conceptos básicos de estas teorías por medio de actividades donde el estudiante no comprenderá el simbolismo pero sin embargo si las idea conceptual.

1.2 Situaciones didácticas mediante material didáctico

> “En la concepción más general de la enseñanza, la marca de un saber es una asociación entre las buenas preguntas y las buenas respuestas. El docente plantea un problema que el alumno debe resolver: si el alumno responde, demuestra que sabe; si no, se manifiesta una necesidad de saber que requiere una información, una enseñanza. A priori, todo método que permita memorizar las asociaciones favorables es aceptable”. (Brousseau, 2007)

Cuando el estudiante presenta dificultades en el aprendizaje, es deber del docente brindar diferentes posibilidades en la aplicación de propuestas metodológicas que permitan el mejoramiento de las dificultades que se están presentando. El material didáctico es una herramienta didáctica que permite a través de su manipulación que el estudiante pueda comprender una temática de forma lúdica. Pero durante este proceso es necesario que el estudiante relacione los conceptos con el material y adquiera el aprendizaje significativo que el docente pretende.

Diariamente los estudiantes se enfrentan a situaciones donde requieren conceptos básicos de matemáticas u otras áreas, por ejemplo cuando compran o venden algún producto, contar y repartir objetos entre otras situaciones. En estos momentos el estudiante no está en el contexto educativo y no tiene las orientaciones de un docente para la solución de la problemática, a este proceso se le llama situación adidáctica. El objetivo de varios de los materiales didácticos propuestos en este trabajo es fortalecer varios de los conceptos básicos que se requieren para solucionar situaciones de este tipo.

> "Como el alumno no puede resolver de entrada cualquier situación adidáctica, el maestro le procura aquellas que están a su alcance. Las situaciones adidácticas preparadas con fines didácticos determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar por efecto de las restricciones y deformaciones aportadas a la situación fundamental. Esa situación o ese problema elegido por el docente lo involucra a él mismo en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Este juego más amplio es la situación didáctica". (Brousseau, 2007)

Para la aplicación de los materiales didácticos propuestos en este trabajo de investigación se presentan situaciones didácticas donde el docente debe interactuar con el estudiante, esta interacción se evidencia durante las explicaciones que hace el docente y las orientaciones en la fase propositiva donde se requiere que el estudiante manipule el material y adquiera el aprendizaje requerido. El docente en este proceso debe ser un facilitador del aprendizaje y debe permitir que el estudiante descubra la relación entre los conceptos matemáticos y la aplicación del material.

1.3 Transposición didáctica en el material didáctico

> "Se deduce, por tanto, la necesidad de un tratamiento didáctico del saber, de una transposición didáctica que transforme al objeto de saber, lo que se llama saber sabio, en objeto de enseñanza, el saber a enseñar. Pero las transposiciones didácticas La noción de transposición didáctica se debe a Y. Chevellard, autor de la obra La transposición didáctica, Aiqué, Buenos Aires, 1998. Que se hacen no son siempre adecuadas, y una de las tareas de la didáctica es la de ejercer una vigilancia epistemológica que garantice que las transformaciones sufridas por el saber sabio no lo han convertido en algo irreconocible, matemáticamente hablando, y desprovisto de sentido, viendo qué elementos mínimos es necesario respetar para que las transposiciones realizadas conserven el sentido del concepto y no lo desvirtúen". (Chevellard, 1998)

Este es el papel de la transposición didáctica hacer del saber sabio un saber enseñable. Y para hacerlo un saber enseñable se debe aplicar diferentes estrategias metodológicas donde el docente sea capaz de hacer enseñable el saber de la matemática.

> "En la perspectiva constructivista los niños comparan, clasifican y ordenan en el espacio y en el tiempo, y gracias a estas acciones construyen sus conocimientos aritméticos, de

manera que la experiencia del niño con los objetos, que sólo juegan el papel de soporte, es necesaria para el descubrimiento del número, que es algo que no puede extraerse directamente de los objetos, en contra de lo que postula el empirismo". (Chamorro, 2006, p.146)

Es así como en este trabajo de investigación se presentan una serie de ideas que se evidencian en la aplicación de los materiales didácticos, logrando facilitar el entendimiento en el estudiante. Cuando Chevallard menciona sobre del cómo transmitir un saber sabio puede transformarse aun saber enseñable al educando, se refiere a la búsqueda de estrategias que permita que el proceso de enseñanza aprendizaje este enfocado a facilitar el entendimiento de conocimientos muy abstractos en algo practico pero sin perder la esencia del saber original.

Los materiales desarrollados en este trabajo de investigación cumplen el papel de mediadores didácticos, que va a permitir: que el estudiante descubra, refuerce, razone, comprenda, manipule y sobre todo que este aprendizaje se de en un ambiente académico agradable ya este juega un papel importante al momento de enseñar. Es así que estos materiales van a cumplir el objeto de la transposición didáctica.

Constructivismo: Enfoque acerca del pensamiento Lógico – Matemático de Jean Piaget

… la relación fundamental implicada en todo desarrollo y en todo aprendizaje no es la relación de asociación. En el esquema de estímulo-respuesta, la relación entre estímulo y respuesta se entiende como una de asociación. Por el contrario, pienso que la relación fundamental es una asimilación. Asimilación no es lo mismo que asociación. Defino la

> asimilación como la integración de cualquier clase de realidad a una estructura, y es esta asimilación la que me parece fundamental en el aprendizaje y me parece debe ser la relación fundamental desde el punto de vista pedagógico o de aplicaciones educativas. Todos mis señalamientos representan al niño y al sujeto que aprende como activo. Una operación es una actividad. El aprendizaje solo es posible cuando hay asimilación activa. Es esta actividad por parte del sujeto la que me parece subestimada en el esquema estímulo-respuesta. Todo el énfasis se pone en la actividad del sujeto mismo y pienso que sin esa actividad no hay pedagogía que transforme significativamente al sujeto. (Campbell, 1976, p.77)

Por lo tanto la idea principal de los materiales didácticos propuestos es hacer un enlace en la asimilación de un concepto con la idea global y no teniendo como propósito limitar al estudiante a un conocimiento en lo particular con solo una aplicación, sino buscar de que ese conocimiento particular sea general pudiéndose aplicar en diferentes contextos. un ejemplo de esto puedo evidenciarse en la aplicación del material didáctico "competencia de caballos" que tiene como objetivo, comprender el concepto de probabilidad mediante este juego, pero en las situaciones donde se requiera la utilización de este, no se asocie con la aplicación de este material porque se está limitando a ver la probabilidad en este caso particular y no en otros como; la probabilidad de ganar la lotería, la probabilidad de que caiga un rayo entre muchos otros, pero en este momento donde el docente entre a jugar un papel fundamental en el proceso, ya que es el que va permitir que esta asimilación fluya de esta manera.

Como se puede apreciar para Piaget es fundamental una buena y pertinente actividad, la cual conlleva el desarrollo del contenido a estudiar de una forma amena, agradable y sobretodo significativo. Cuando estas características priman en la actividad se pueden decir con seguridad que el aprendizaje será un éxito. Para planear una actividad es importante tener en cuenta ciertos aspectos antes de desarrollarla. Entre los aspectos a tener en cuenta referentes a la aplicación de material didáctico son:

1. Temática de estudio: para la aplicación de los materiales didácticos hay temáticas centrales en las cuales se enfoca el diseño del material didáctico, pero estas involucran unas temáticas previas trabajadas anteriormente y con el buen uso del material también se pueden fortalecer.

2. Motivación Inicial: aunque el material didáctico pretende motivar al aprendizaje de las matemáticas por medio de la manipulación se deben buscar otros ejercicios que ayuden a fortalecer este aspecto.

3. Material Didáctico: la presentación del material didáctico debe ser visualmente atractiva, que contenga colores llamativos y una buena forma, esto porque la visualización es el primer impacto que tiene el estudiante, también hay que seguir bien las instrucciones para lograr el objetivo planteado, pero esto no se refiere a que el material no se pueda direccionar a otro tipo de temas. Hay materiales que no son seguros, referente al mal uso que le dé un estudiante con problemas disciplinarios, es por eso que el docente debe estar muy atento

en el proceso de la actividad y no ocurran inconvenientes que afectan el proceso de enseñanza aprendizaje.

3. Preconceptos de los estudiantes: es deber del docente realizar el diagnostico que permita determinar si el momento preciso de aplicar esta estrategia metodológica de lo contrario no hay garantías de que el objetivo de la actividad se adquiera. En el conocimiento matemático se evidencia una secuencia de temas donde uno requiere del otro para su entendimiento.

4. Evaluación de la actividad: hay que tener en cuenta que calificar no es evaluar por la tanto la evaluación de estas actividades debe considerarse la hetereoevaluación, coevaluación y autoevaluación, con el fin de socializar la efectividad del proceso.

La Pedagogía Experimental es un aspecto que Piaget hace énfasis en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que contribuye de una forma dinámica y amena a que se cumpla el proceso de aprendizaje. De nada vale compartir al estudiante gran cantidad de temáticas en el semestre sino se estimula desde el salón de clase, una metodología la cual lleve al estudiante a explorar, participar, construir, indagar, cuestionar. Esto es lo que propone la Pedagogía Experimental, un proceso donde el estudiante convine en clase gran cantidad de procesos mentales los cuales contribuyan a un entendimiento al objetivo propuesto.

Al respecto Piaget dice:

> …el pedagogo que no organice experiencias continuadas y metódicas y se contente con resolver las cuestiones a base de opiniones que <<el buen sentido>> recubre, de hecho, más de razones afectivas que efectivas igualmente expresa que “nada se sabe con precisión sobre lo que queda, por ejemplo, de la enseñanza de la geografía o historia en la cabeza de un campesino de 30 años o sobre lo que un abogado ha conservado de sus conocimientos de química, física o geometría”. (p.12)

Piaget invito a las personas que se encuentran comprometidas con el ejercicio docente a reflexionar sobre su propia práctica y sobre cómo ésta puede alimentarse de otras disciplinas y del conocimiento que genere de su autoevaluación. A este espacio es al que se llama “Pedagogía”, al acto de reflexionar sobre su quehacer cotidiano como docente, al espacio de analizar cómo ha sido, es y podrá ser su práctica como docente logrando mejorar cada día más, proporcionándoles a sus estudiantes los mejores momentos educativos.

El pensamiento Lógico – Matemático es aquel que no existe en la realidad, no lo podemos tocar, percibir más bien es algo abstracto que se encuentra en la mente del ser humano. Un ejemplo claro es el número, ya que podemos observar 5 manzanas y sabemos que existe esta cantidad pero por ningún lado vamos a observar la representación del número cinco.

> Según Piaget: "Las operaciones lógico matemáticas, antes de ser una actitud puramente intelectual, requiere en el preescolar la construcción de estructuras internas y del manejo de ciertas nociones que son, ante todo, producto de la acción y relación del niño con objetos

> y sujetos y que a partir de una reflexión le permiten adquirir las nociones fundamentales de clasificación, seriación y la noción de número". (Santamaría)

Como las matemáticas es un lenguaje que otras áreas de conocimiento usan para describir cómo funciona lo que nos rodea, por tal razón existen objetos reales que contienen abstracciones que los niños pueden comprender, aunque no conozcan el lenguaje, es decir de forma empírica el ser humano aplica matemática informalmente. Por ejemplo, al momento de repartir un alimento entre niños existe intrínsecamente la noción de cantidad al momento de comparar la cantidad que tiene cada uno. Es aquí donde se muestra que dichas interacciones de objetos y el niño crea un aprendizaje significativo en él.

> Según Vásquez Carrillo (Carrillo): “El adulto que acompaña al niño en su proceso de aprendizaje debe planificar didácticas de procesos que le permitan interactuar con objetos reales, que sean su realidad: personas, juguetes, ropa, animales, plantas, etc. Jean Piaget dedicó varios estudios al pensamiento lógico.-Matemático del niño, ya que consideraba que este aspecto del pensamiento influía en un porcentaje alto a las diferentes determinaciones que podría plantear en su vida cotidiana. Para que este pensamiento se genere es necesario que en situaciones específicas el niño ejecute, realice un proceso de: Clasificación, Simulación, Explicación y Relación”. (Carrillo)

El primer proceso que Piaget habla es la clasificación que hace referencia al proceso que constituye una serie de relaciones mentales en función de las cuales los objetos se reúnen por semejanzas, se separan por diferencias, se define la pertenecía del objeto a una clase y se incluye en aquella subclase.

Según Piaget en la clasificación el niño pasa por 4 etapas las cuales son:

1. Alineamiento: El niño escoge objetos de una sola dimensión, los elementos que escoge son heterogéneos.

2. Objetos Colectivos: El niño escoge objetos de dos o tres dimensiones formadas por elementos semejantes.

3. Objetos Complejos: Iguales caracteres de la colectiva, pero con elementos heterogéneos.

4. Colección no Figural: Posee dos momentos

   i. Forma colecciones de parejas y tríos.
   ii. Se forman agrupaciones que abarcan y que se pueden a su vez dividirse en sub-colecciones.

El segundo proceso planteado por Piaget es la Simulación, la cual hace referencia a que el niño desempeña un rol o actúa en un entorno simulado para practicar y desarrollar capacidades de acción y decisión en situaciones de la vida real. Suele parecer que está jugando, sin embargo reacciona frente a situaciones que tienen elementos fundamentales de la realidad.

Otro proceso planteado por Piaget es: La Explicación, la cual hace referencia a la argumentación que pueda dar el niño ante un hecho o situación específica que se encuentre experimentando y necesita un proceso de razonamiento para dar cuenta del acontecimiento que ha ocurrido, está ocurriendo o por el contrario esta por suceder.

Y finalmente como cuarta etapa en el proceso de clasificación está la Relación. Se entiende como el proceso mediante el cual, el niño aplica conceptos ya estructurados entre dos o más situaciones realizando un análisis de los hechos y llegando así a sus propias conclusiones. Relación entre no solo acontecimientos sino también entre los objetos los cuales realiza su ejercicio.

Es así como mediante una ejercitación continua de los anteriores procesos mentales se logra La Estructuración del Conocimiento planteado por Jean Piaget. Ejercicio que se puede realizar a partir del momento en que el niño posee uso razón y su mente esta en este proceso de maduración. Mediante diferentes actividades las cuales se combinen con una Pedagogía Experimental será efectivo el proceso de aprendizaje del estudiante.

Igualmente se reconoció la importancia en el desarrollo del aprendizaje el cual se realiza mediante un proceso de construcción por parte del sujeto, las personas desarrollan sus estructuras y funciones cognoscitivas y aprenden por medio de diferentes actividades, es así, como se va desarrollando, fortaleciendo el conocimiento teniendo en cuenta que existe un aspecto fundamental: la Asimilación Activa, la cual hace referencia a la integración de cualquier clase de realidad a una estructura. Al respecto, señala Piaget::(1989)

> "...Finalmente se ha entendido que una escuela activa no es una escuela de labor manual. La actividad del niño en algunos niveles necesariamente conlleva la manipulación de objetos y aún una cierta agrupación física real, debido a que las nociones lógico.-matemáticas, por ejemplo, se derivan, no de los objetos manipulados, sino de las acciones del niño y su coordinación. En otros niveles la más auténtica actividad investigativa tiene lugar en la esfera de la reflexión, de la más avanzada abstracción, y de la manipulación verbal". (p.81)

1.4 Proceso en Matemáticas

Los procesos en matemáticas son la base para el desarrollo de los pensamientos matemáticos, ya que por medio de estos se trabajan las actividades que se necesitan para la adquisición de los estándares de competencia. Es por esta razón que en el momento del diseño de los materiales didácticos se involucran inmersamente para las actividades propuestas en las respectivas guías de los materiales didácticos. Según el ministerio de educación menciona lo siguiente:

> "Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos". (MEN, 2003)

A continuación se menciona cada uno de ellos, haciendo una descripción y se resalta la vinculación de estos en esta investigación:

1.4. 1 La Formulación, Tratamiento y Resolución de problemas

Cuando se menciona como proceso la Formulación, tratamiento y Resolución de problemas se hace alusión a que el ser humano continuamente se cuestiona acerca de su alrededor o contexto, tratando de encontrar respuesta a este mundo. Es de aquí que se ha podido avanzar en las ciencias, y las matemáticas como lenguaje de la ciencia es la principal responsable de encontrar solución a herramientas que son aplicadas en otros contextos académicos, como los físicos, biólogos, químicos etc.

> "un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos". (MEN, 2003)

Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad. Además de esto permite que el estudiante desarrolle una actitud de querer enfrentarse a estos problemas y conseguir su solución, logrando tener la competencia de adquirir experiencias nuevas que logren crear una habilidad para la resolución de problemas.

Es claro entonces que los problemas es la esencia de la matemática de allí se hace necesario crear espacios en las clases de matemáticas donde el problema sea el protagonista en el proceso de enseñanza-aprendizaje, dicha metodología es conocida como (Aprendizaje basado en problemas) En cuanto al material didáctico diseñado en la presente investigación se puede evidenciar esta metodología en Pesando Ecuaciones , en la cual a partir de un problema que se plantea a la clase se busca inducir el concepto de ecuación y el de sistema de ecuaciones lineales, con la posibilidad de encontrar un objeto real en el cual el estudiante podrá moverse con libertad , en el sentido del lenguaje y la representaciones.

1.4.2 La Modelación.

En educación matemática cuando se trabaja el término de modelación se hace alusión a una representación o imagen (modelo) que usa una lógica-matemática basada en un algoritmo con el fin de conocer los componentes y comportamientos de las variables que se involucran para solucionar el problema luego:

> El MEN define modelo en los estándares de competencias como "… Un sistema figurativo mental, grafico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible "(2003)

El proceso de modelar o matematizar surge como la necesidad de abstraer un saber a partir de un objeto inteligible logrando tener una idea o un concepto de este mismo, después de esto, apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos dando paso para avanzar hacia las demostraciones.

Es necesario entonces aclarar que no toda representación es un modelo, ya que como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, un ejemplo claro de este proceso en este trabajo de investigación es "Pesando Ecuaciones" ya que a partir de una situación problema se pide matematizar o crear el modelo para poder inferir información de este y dar solución a los problemas que se puedan extraer allí.

1.4.3 La Comunicación.

Como futuros docentes en Educación Matemática es necesario reconocer que la comunicación hace parte de un proceso social fundamental, para que el ser humano logre una socialización. En la enseñanza de la matemática existen varios procesos comunicativos que no se pueden dejar a un lado entre ellos están:

El cual el profesor es el activo en el proceso y explica el uso de un algoritmo, noción de un concepto, La aplicabilidad de un teorema, y aquí el mensaje no es fácilmente corroborarlo en el sentido de que el receptor interiorizó la información, un segundo proceso comunicativo es cuando el estudiante interioriza el contenido y puede así argumentar con claridad las ideas dándose a partir de varios acercamientos que el docente hace en el trascurso de la clase. Por ende la comunicación hace parte esencial en el proceso de enseñanza –aprendizaje de la matemática así, En los estándares curriculares señala la importancia del lenguaje que representa las matemáticas como una competencia fundamental en el desarrollo mismo de las matemáticas de la siguiente manera.

> "La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso de liberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia". (MEN, 2003)

La matemática siendo un lenguaje que tiene una estructura simbólica requiere de una interpretación y exteriorización de ideas claras, ya que al no tenerlo da pie a la ambigüedad. Es obvio en cierto sentido que se requiere de una adecuación del conocimiento para poder así "reproducirlo" pero este no es solo el objetivo, ya que la comunicación es bidireccional y es en esto, donde se debe trabajar, en ser unos excelentes dominadores de la palabra escrita, hablada y además de tener la facultad de entender al otro.

1.4.4 El Razonamiento.

El razonamiento hace referencia a la habilidad de enfrentar una idea cuestionando la validez o invalidez de esta a partir de una lógica matemática. Por ende esta habilidad trasciende a aspectos de la vida que la matemática puede no estar explícitamente y es por esta razón que se hace necesario mostrarlo como un argumento para convencer a las personas que piensan que la matemática no es útil en sus vidas, como se define en los estándares curriculares de Colombia:

> Como se señala en los estándares básicos de competencia " Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas". (MEN, 2003)

Es por esto que es necesario en el quehacer matemático enfrentar a los estudiantes a diversas situaciones en el que se deba reconocer y aplicar tanto el razonamiento
Lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, intentando comprobar la lógica de previos conjeturas, definiciones, axiomas, teoremas o por el contrario buscando una contradicción y así logrando justificar sus contraejemplos.

Los materiales didácticos son una fuente de diversidad en cuestiones de aspectos del hacer matemático, ya que es posible llevar al estudiante al ejercicio de pensar y esto se ve reflejado en varios materiales como: “Competencia de caballos”, “Sabelotodo de estadística”, “escalera de conceptos estadísticos” entre otros.

1.4.5 La Formulación, Comparación y Ejercitación de Procedimientos.

Este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos”. Siendo una herramienta fundamental en el desarrollo de las matemáticas ya que a partir de estos la adquisición de nuevos conocimientos va a tener un soporte y rapidez en su aplicación, pero no con el fin de encajarlos en ciertas situaciones sino también de poderlos ampliar y adecuarlos para otras situaciones.

Para encontrar y poder ejercitar los procedimientos rutinarios logrando tener un desarrollo significativo y comprensivo de un conocimiento matemático, es importante tener en cuenta los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos. Uno de estos es el contraste que existe entre el conocimiento conceptual y el procedimental una de esas formas es manipular dichos momentos y encontrar una sintonía entre ellos, por obvias razones este precisa de una meticulosa planeación. Otro mecanismo cognitivo clave es la Automatización.

> "La automatización consiste en la ejecución de los pasos intermedios de un proceso complejo sin el empleo de la MCP, lo que, es fenomenológicamente hablando, representa un procesamiento no consciente. Similarmente en efecto, la compilación se trata de la ejecución en forma sintetizada de los pasos intermedios de un proceso complejo. Este modelo de procesamiento humano de la información permite concebir el pensamiento como el conjunto de los procesos a los que, en un momento determinado, es sometida la información por el procesador central (PC)". (Marcos Requena, 2000, p.58)

Es así como se hace necesario la retroalimentación de los conocimientos que son necesariamente automatizables y esto se logra con la práctica repetida y/o desarrollo de materiales didácticos que promuevan esta situación. Luego poder lograr una rápida, segura y efectiva ejecución de los procedimientos; No obstante esta automatización no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento pero en cambio, ínsita a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas, dándole al estudiante una confianza y el logro de adquirir más nuevos conocimiento de un nivel más complejo.

Otro proceso cognitivo involucrado es la reflexión, se refiere a la capacidad de poder relacionar aquellos algoritmos y procesos con patrones y regularidades.

> "Esta reflexión exige al estudiante poder explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz y cuándo basta utilizar una técnica particular para obtener más rápidamente el resultado". (MEN, 2003)

Esto conlleva entonces a la utilización de nuevos métodos para resolver un problema en matemáticas, para reconocer caminos diferentes y cadenas de conceptualización y al final compararlos logrando observar en qué casos son más útiles unos de otros. Todo esto estimula al estudiante a inventar nuevos procedimientos para obtener resultados particulares.

1.5 Estándares básicos de competencia en matemáticas emitidos por el MEN

> "Los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de las matemáticas y entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Esta propuesta requiere reconocer que si bien el aprendizaje de las

> matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar, se requiere entretejer los hilos de aprendizaje para construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales". (MEN. 2003)

En los inicios de esta propuesta, se estudió meticulosamente cada estándar y se detectaron las temáticas que abarca cada uno de estos. Ya con esta base el siguiente paso fue proponer una serie de ideas sobre materiales de las cuales se seleccionaron 12 de ellas por las limitaciones económicas del trabajo de investigación.

A continuación se presentan la relación dé cada uno de los materiales didácticos que se diseñaron y la relación con su respectivo pensamiento y los estándares curriculares en matemáticas.

CUADRO DE RELACIÓN ENTRE MATERIAL DIDÁCTICO Y TEMÁTICAS (6º Y 7º)			
Material didáctico	**Temáticas**	**Pensamiento matemático a fortalecer**	**Estándares curriculares del MEN a fortalecer mediante el uso de los materiales didácticos**
Cadena de la divisibilidad	Numero primo. Numero compuesto. Criterios de divisibilidad. Descomposición de un número en sus factores primos.	**Pensamiento Numérico**	Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
		Pensamiento Variacional	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
Discos Matemáticos	Concepto de fracción. Suma y resta de fracciones homogéneas. Fracciones equivalentes.	**Pensamiento Numérico**	Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
		Pensamiento Espacial	Identifico y describo fi guras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
Competencia de caballos	Espacio muestral Evento Probabilidad	**Pensamiento Aleatorio**	Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.

Cuadro 1: Relación entre material didáctico y temáticas (6º y 7º)

CUADRO DE RELACIÓN ENTRE MATERIAL DIDÁCTICO Y TEMÁTICAS (8º Y 9º)			
Material didáctico	**Temáticas**	**Pensamiento matemático a fortalecer**	**Estándares curriculares del MEN a fortalecer mediante el uso de los materiales didácticos**
Escalera de conceptos estadísticos	Población y muestra. Variables estadísticas. Medidas de tendencia central.	**Pensamiento aleatorio**	Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.
Sabelotodo de estadística	Población y muestra Variables estadísticas. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión. Probabilidad	**Pensamiento aleatorio**	Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)

Travesía al rio	Espacio muestral Evento Probabilidad	**Pensamiento aleatorio**	Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
Pesando ecuaciones	Sistemas de ecuaciones lineales	**Pensamiento Variacional**	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales
		Pensamiento numérico	Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Cuadro 2: Relación entre material didáctico y temáticas (8º y 9º)

<table>
<tr><th colspan="4">CUADRO DE RELACIÓN ENTRE MATERIAL DIDÁCTICO Y TEMÁTICAS (10º Y 11º)</th></tr>
<tr><th>Material didáctico</th><th>Temáticas</th><th>Pensamiento matemático a fortalecer</th><th>Estándares curriculares del MEN a fortalecer mediante el uso de los materiales didácticos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Lotería de las cónicas</td><td rowspan="2">Secciones cónicas
Parábola
Elipse
Circunferencia
Hipérbola
Rectas</td><td>Pensamiento numérico</td><td>Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.

Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.

Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.

Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.</td></tr>
<tr><td>Pensamiento Variacional</td><td>Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Analizo en representaciones gráfica cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.</td></tr>
</table>

Domino matemático	Derivadas Antiderivadas Funciones	**Pensamiento numérico**	Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.
		Pensamiento Variacional	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.
		Pensamiento espacial	Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

			Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
Concéntrese Matemático	Derivadas Antiderivadas	**Pensamiento variacional**	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.
Encajadora Geométrica	Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo Ley de senos Ley de cosenos	**Pensamiento espacial**	Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
		Pensamiento métrico	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Cuadro 3: Relación entre material didáctico y temáticas (10º y 11º)

Capítulo II

Metodología

La Metodología corresponde a un momento donde se debe tener claridad sobre el tipo de investigación que se va a realizar y por ende describir paso a paso cada una de las fases por las cuales se atraviesa el proceso investigativo. Es así como la presente investigación: "Diseño de Material Didáctico para el Fortalecimiento del Pensamiento Matemático en la Enseñanza de la Educación Básica y Media" posee una connotación de una investigación Mixta. Ya que posee aspectos tanto cualitativos como cuantitativos.

Es necesario aclarar que la presente investigación pertenece al macro proyecto: Educación Matemáticas; del Grupo de Investigación en Educación Matemática –SIEM-. Hasta el momento el Macroproyecto ha desarrollado tres fases, las cuales son: La primera fase involucra un diagnóstico del problema a partir de un análisis cualitativo y cuantitativo de la población a través de encuestas y exámenes diagnósticos realizados en la ciudad de Cartago, a partir de estos resultados se pasa a una segunda fase que consiste en la propuesta de estrategias metodológicas que contribuyan a la solución de las dificultades encontradas en la primera fase, varias de estas propuestas requerían de un material didáctico pero por limitaciones de presupuesto solo quedaron en el papel, por lo tanto la idea central es darle continuidad a las dos primeras fases haciendo un análisis de los materiales ya propuestos y de las problemáticas diagnosticadas en la primera fase, el proceder fue entonces construir los ya propuestos y crear unos nuevos dando respuesta a las problemáticas ya existentes.

Imagen 1: Fotos de los estudiantes con el material “Cadena de la Divisibilidad”

Cabe resaltar que algunos materiales han sido validados mediante pruebas pilotos en algunos grupos pertenecientes a la Institución Educativa Sur Oriental, logrando detectar una empatía y comprensión sobre el tema que se quería alcanzar. Aunque el objetivo de este trabajo de investigación no es realizar la validación de los materiales didácticos sino solo el diseño se consideró importante en algún momento del trabajo investigativo observar la interacción del material didáctico con los estudiantes.

> "El enfoque cualitativo, también se guía por áreas o temas significativos de investigación; los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos. Con frecuencia, estas actividades sirven, primero, para descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes, y después, para refinarlas y responderlas. La acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más

bien “circular” y no siempre la secuencia es la misma, varía de acuerdo con cada estudio en particular". (Hernández, Fernández, Baptista, 2010, p.7)

Este enfoque metodológico se tiene en cuenta ya que mediante la observación se puede detectar los diferentes pensamientos, concepciones o ideas que tienen estudiantes y docentes acerca del uso del material didáctico. Mediante la observación se puede percibir la aceptación frente a las metodologías que se implementan en la institución y así encontrar el verdadero sentido que puede tener el uso de un material.

"En cuanto al enfoque cuantitativo se entiende por él que es una metodología de investigación que busca cuantificar los datos/información y, por lo regular, aplica una forma de análisis estadístico. Se define como un tipo de investigación que utiliza métodos totalmente estructurados o formales, realizando un cuestionamiento a través de preguntas principalmente cerradas y concretas para explorar y entender las motivaciones y comportamientos de individuos o grupos de individuos. El conjunto de preguntas se realiza a un número de individuos determinado que conforma la muestra a partir de la cual se recolecta la información que posteriormente se va a analizar Investigación Cualitativa". (CUAS, 2007)

También, la metodología cuantitativa posee algunos alcances que se encuentran inmersos en la presente investigación ellos son: Descriptivos, Exploratorios, Correlaciónales y Explicativos.

Cuando se menciona el carácter exploratorio es porque se toca un tema o problema que no ha sido estudiado específicamente en un contexto. En cuando a un estudio descriptivo este busca caracterizar los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro dato de un fenómeno que se desee estudiar, es necesario conocer al objeto de estudio para poder llevar a cabo un trabajo con certeza y confianza. En cuanto a los estudios Correlaciónales estos asocian variables mediante un patrón predecible para un grupo o población.

En cuanto al alcance explicativo, este se evidencia durante toda la investigación ya que no es definir un concepto o un fenómeno dentro de la investigación sino que por el contrario, este trata de responder justificadamente por las causas, los eventos, sucesos que acontecen durante todo el proceso de investigación.

2.1 Tipo de investigación: Descriptiva

> Según Sabino (1986) “La investigación de tipo descriptiva trabaja sobre realidades de hechos, y su característica fundamental es la de presentar una interpretación correcta. Para la investigación descriptiva, su preocupación primordial radica en descubrir algunas características fundamentales de conjuntos homogéneos de fenómenos, utilizando criterios sistemáticos que permitan poner de manifiesto su estructura o comportamiento. De esta forma se pueden obtener las notas que caracterizan a la realidad estudiada”. (Pág. 51)

Es una investigación descriptiva porque consistió en elaborar unas guías instructivas donde se pretende suplir la necesidad de una metodología para enseñar la matemática y hacerla ver de una manera divertida.

Para alcanzar el objetivo Principal fue necesario transitar por las siguientes fases, las cuales le dieron la organización y secuencia al trabajo investigativo. Ellas son:

2.1.1 Fase 1: Revisión bibliográfica.

Se inició realizando una serie de lecturas frente al tema, enfocado desde el inicio en los estándares básicos de competencia en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, no solo se realizaron lecturas del tema del material didáctico también se revisaron algunas tesis de egresados del programa, como por ejemplo: ***“diseño de actividades didácticas para el desarrollo de pensamiento aleatorio en estudiantes de educación básica y media”*** otra fue **“*Aplicación de estrategias metodológicas para la enseñanza del pensamiento numérico variacional y el pensamiento aleatorio y sistema de datos en los grados quinto y noveno de educación básica*”** estas tesis pertenecieron al semillero de investigación y cuyo tema principal fue el **Diseño de Estrategias Metodológicas para Mejorar la Enseñanza de la Matemática** en su tesis.

Los momentos para esta primera fase fueron:

- **Revisión de tesis de grado de egresados del programa y que pertenecieron al semillero de investigación SIEM:** En este momento se analizaron cada una de las estrategias metodológicas planteadas en las diferentes tesis, que a su vez pretendían dar solución a los problemas ya detectados en investigaciones previas. realizadas por miembros del Semillero en colegios del municipio de Cartago, dichas propuestas metodologías requerían un material didáctico de apoyo para la aplicación, muchas de estas ideas solo quedaron en escrito, por las limitaciones económicas del semillero, pero ya que este trabajo de investigación contó con el apoyo económico de la Vicerrectoría de Investigaciones se logró retomar varias de estas actividades y se pudo construir el material didáctico necesario para así fortalecer y retomar estas ideas.

El material didáctico se construyó con el objetivo de lograr su aplicación a un grupo aproximado de 40 estudiantes y dar validación a las propuestas tanto retomadas como las diseñadas; Los materiales retomados fueron: **Competencia de Caballos, Travesía al rio, Escalera de conceptos estadísticos y el Sabelotodo de estadística**. Y de esta forma se le da continuidad al macroproyecto de investigación que viene desarrollando el semillero de investigación SIEM.

Basados en el diagnóstico de la primera fase del macroproyecto se encontraron dificultades en cuanto al desarrollo de las siguientes temáticas; Números fraccionarios, conceptos de estadística y probabilidad, secciones cónicas, límites y derivadas, conceptos geométricos, relaciones trigonométricas entre otras. estas falencias empezaron a dar ideas sobre que temáticas se debía trabajar en esta investigación ya que estos problemas son encontradas frecuentemente en las instituciones educativas del país, ejemplos de estos problemas son: 1. Varios estudiantes no saben representar una fracción ya que este concepto queda meramente en la abstracción y en una sistematización de operaciones, sin aferrarse a un conocimiento de la realidad concreta del concepto. 2. En las secciones cónicas, donde la expresión algebraicas de estas no son interiorizadas y dicha relación con sus graficas son nulas, es este tipo de dificultades las que se enfrentaron en el desarrollo de estas fases y dieron lugar a innovaciones para dar respuestas a estas problemáticas.

- **Revisión de libros, enciclopedias, artículos:** Durante esta etapa se revisaron escritos que contribuyeron al diseño de los materiales didácticos propuestos, analizando los elementos esenciales que poseen y la forma como ellos están clasificados. en varios de estos escritos se encontraron una serie de materiales con su respectiva metodología que dieron base para la creación de los materiales didácticos de este trabajo. Un factor común encontrado fue que se pretende mejorar el ambiente escolar ya que el estudiantado en su mayoría no encuentran un sentido real a las abstracciones y esto desencadena a su vez ciertas problemáticas tanto académicas como disciplinarias. Dentro de las académicas se detecta un miedo a enfrentar las simbologías de la matemática y la disciplinaria es en el momento de que el estudiante al no entender la temática se desmotiva y va desencadenando indisposición hacia el aprendizaje en el aula de clase. Con el material didáctico se pretende tener una variación en las estrategias metodológicas de cada clase ya que con este e estudiantado puede enfrentarse a esta área de una forma lúdica sin dejar atrás el formalismo.

2.1.2 Fase 2: Clasificación de materiales

Para este trabajo de investigación fue fundamental tomar los Estándares Curriculares para la Enseñanza de la matemática como guía ya que es un ente regulador de la educación en Colombia, teniendo en cuenta las temáticas que se encuentran en los estándares, se proponen los materiales didácticos pertinentes para la enseñanza de estos conocimientos. Es así, que para desarrollar esta fase los momentos que se tuvieron en cuenta fueron:

- **Clasificación de las temáticas según los estándares curriculares:** Durante este momento se estudiaron cada uno de los estándares propuestos por el MEN en los diferentes grados, se logró identificar cada una de las temáticas que se encuentran inmersas en cada estándar, luego se seleccionaron las temáticas donde los estudiantes presentan más dificultades y donde más falencias se encontraron durante la primera etapa del macroproyecto de semillero que constaba de un examen diagnóstico en matemáticas realizado en varias instituciones educativas de Risaralda y del Norte del Valle.

- **Propuesta de material didáctico para cada uno de los temas:** Posteriormente una vez detectado se logra proponer algunas ideas sobre materiales didácticos que logren fortalecer aquellas temáticas. Es así como se seleccionan 11 materiales didácticos. Cuyos nombres son: Cadena de la divisibilidad, Discos matemáticos, Competencia de caballos, Pesando ecuaciones, Sabelotodo de estadística, Escalera de conceptos estadísticos, Travesía al rio, Lotería de las cónicas, Domino matemático, Concéntrese Matemático, Encajadora Trigonométrica.

2.1.3 Fase 3: Diseño de material didáctico y guía.

Teniendo en cuenta la información de las fases anteriores, se procede a realizar la construcción los materiales didácticos propuestos anteriormente y luego la guía instructiva que indica cómo se debe utilizar el material didáctico, estas guías son para los docentes del área de matemáticas.

Durante la construcción de las guías se tuvo en cuanta los diseños de los gráficos, ecuaciones y textos porque este es un aspecto que incide significativamente en cuanto a la presentación y la credibilidad del material, para el momento de las aplicaciones en el aula. Los elementos con los cuales se construyeron los materiales Didácticos son: impresiones de alta calidad, temperas, papel contac, madera, colbón, tijeras, cintas métricas, cartón paja, papel fomi entre otros. Esto con el propósito de los materiales didácticos sean resistentes y perduren por un largo periodo de tiempo.

El material didáctico diseñado es fácil de manipular y para la elaboración se tuvieron en cuenta los colores y la forma, para que el impacto visual entre esta herramienta y el estudiante despierte un interés por aprender y se logren los objetivos planteados para contribuir al fortalecimiento de los pensamientos matemáticos.

La cantidad que se hizo de materiales didácticos son los suficientes para un que grupo de 40 estudiantes promedio realice la actividad de la forma apropiada, esto se logró gracias al el apoyo económico de la Vicerrectora de investigaciones de la Universidad Tecnológica de Pereira.

A continuación un cuadro donde se describe: Nombre del material, grado de aplicación y la cantidad de unidades fabricadas.

No.	**Nombre del Material**	**Grado de Aplicación**	**Cantidad de Unidades.**
1	Cadena de la divisibilidad	6	1 cadena de 100 mosquetones.
2	Discos matemáticos	6	12 bases, 32 discos particionados
3	Competencia de caballos	7	12 tableros, 144 caballos.
4	Escalera de conceptos estadísticos	8	12 tableros, 100 fichas de parques y 24 dados.
5	Travesía al rio	8	18 tableros, 100 fichas de parques y 24 dados.
6	Pesando ecuaciones	9	1 pesa, 50 fichas
7	Sabelotodo de estadística	9	45 fichas, 3 pimpones y una bolsa de tela.
8	Lotería de las cónicas	10	40 tableros, 36 fichas.
9	Encajadora Trigonométrica	10	4 encajadoras, 100 triángulos de madera.
10	Concéntrese Matemático	11	1 concéntrese con 10 parejas de fichas.
11	Domino matemático	11	14 dominós de 28 fichas cada uno.

Cuadro 4 **:** Relación entre nombre del material, grado de aplicación y la cantidad de unidades fabricadas.

Para la elaboración de las guías instructivas están basadas en el documento realizado por los autores: Prieto, Galeano, Colorado, Mosquera y Rojas. Tomado de *http://es.slideshare.net/malicosi/como-elaborar-una-guia-de-aprendizaje-presentation*

Estas guías tienen la siguiente estructura:

1. Encabezado: esta parte contiene; el nombre del material, el grado donde se va aplicar el material, el pensamiento a fortalecer, los objetivos.

2. Introducción: En esta parte se hace una breve descripción del material didáctico.

3. Fase interpretativa: Aquí se relacionan los conceptos centrales a desarrollar.

4. Fase argumentativa: Se redacta una explicación rigurosa a partir de los conceptos anteriormente desarrollados, relacionando estas temáticas con los materiales didácticos.

5. Fase propositiva: Se proponen explicaciones mediante ejercicios con el fin de que el estudiante manipule el material y comprenda mejor los conceptos.

6. Explicación de material didáctico: Se hace descripción detallada de cómo se debe usar el material.

7. Actividades: Se plantean actividades individuales y grupales donde el material didáctico protagoniza el proceso de aprendizaje.

8. Evaluación: Se aplican todos los métodos de evaluación con el fin de socializar las experiencias de los estudiantes con la interacción del material.

9. Bibliografía: Se referencian los textos matemáticos que fueron base para las fases interpretativa, argumentativa y propositiva con el fin de rigurosidad a las explicaciones. La estructura de esta guía le da una secuencia al docente de cómo debe orientar la clase y en que instantes debe utilizar el material didáctico. Aunque el material didáctico es una excelente herramienta de aprendizaje, una no adecuada orientación no permitirá que el estudiante adquiera los objetivos planteados. Es por eso que las presentes guías, cuentan con las detalladas instrucciones para su óptimo desarrollo.

Capítulo 3

Propuesta de Material Didáctico

A continuación se presentará las 11 guías correspondientes a los 11 materiales propuestos, con el fin de que el profesor tenga un material completo y el cual le indique detalladamente las actividades que se realiza con cada uno de los materiales didácticos.

Imagen 2: Carrera de Caballos

Imagen 3: Concéntrese Matemático

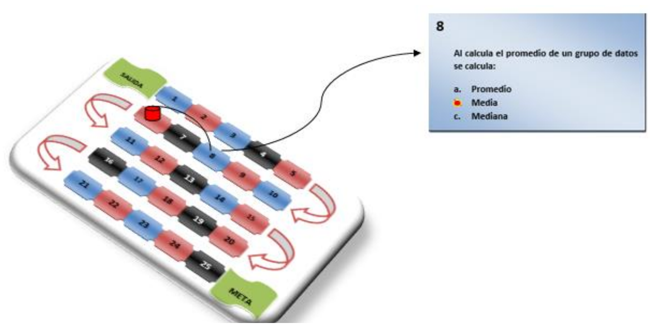


Imagen 4: Escalera de Conceptos Estadísticos

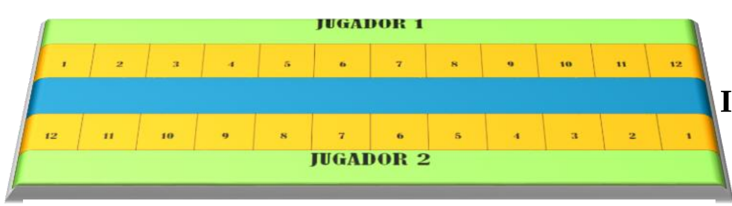


Imagen 5: Travesía al Rio

3.1 Guías Correspondientes a los Grados Sexto y Séptimo de Básica Secundaria.

3.1.1 Guía: La Cadena de la Divisibilidad

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

TEMA:	Divisibilidad
GRADO:	Sexto y Séptimo
DURACIÓN:	**3 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Numérico
MATERIAL DIDACTICO	La Cadena de la Divisibilidad
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

El material didáctico “Cadena de Divisibilidad” es diseñado para que el estudiante observe físicamente el proceso de descomposición en factores primos de un número compuesto, además que pueden comprender y utilizar adecuadamente los criterios de divisibilidad que se enuncian en el proceso. El presente material está construido a partir de mosquetones, usualmente los mosquetones se utilizan como llaveros. Mediante el uso del mosquetón como material didáctico facilita la unión y separación de cada uno de los trozos de cadenas fácilmente, la cadena consta de 170 mosquetones.

OBJETIVO GENERAL:	Comprender el concepto de divisibilidad y los criterios para la descomposición de números en sus factores primos.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Emplear fórmulas de conjuntos numéricos para el entendimiento de cada criterio de divisibilidad. Verificar algunas hipótesis que permiten comprender la teoría de la divisibilidad. Proponer cuando un número compuesto es divisible por **x** número primo.
CONTENIDOS:	Descomposición de un número compuesto en sus factores primos. Numero primo. Numero compuesto. Diagramas de árbol de un número compuesto.

FASE INTERPRETATIVA
Números primos Son los números naturales diferentes de cero y uno, que solo tienen dos divisores; la unidad y el sí mismo. **Ejemplo:** El 2 es primo porque es divisible por 1 y por sí mismo, además también es el único primo par. Otros primos serian 3, 5, 7 entre infinitos que existen.
FASE ARGUMENTATIVA
Con base en la definición anterior, enuncie por extensión un conjunto llamado “P” cuyos elementos sean mayores que cero y menores que 30. **Nota:** se observa de que en el ejemplo anterior hay unos números que no pertenecen al conjunto P, esos números son llamados compuestos y de ahí la siguiente definición: **Numero compuesto** Es todo natural que tenga más de dos divisores. **Ejemplo:** El 12 es un número compuesto porque lo divide el 1, 2, 3, 4, 6, 12 **Ejercicio:** Dado el conjunto H= {21, 33, 37, 43, 45, 53}, determine cuáles de los siguientes números son compuestos y ¿Por qué? **Diagramas de árbol de un número compuesto** **Ejemplo:**

Tomemos el numero **12** como ejemplo; ahora busquemos que factores al multiplicarse me dan como resultado el número 12, pero nuestro objetivo principal es buscar que estos sean primos, al comienzo notaremos que ese producto da a partir de factores que pueden ser de un numero primo por un compuesto, o un compuesto por compuesto. Como en este caso que tenemos 3 opciones:

$$4\times3=12 \qquad (1)$$

$$2\times6=12 \qquad (2)$$

$$12\times1=12 \qquad (3)$$

Ahora miremos la opción (1) y notemos si esos factores son números primos o compuestos, en este caso el 4 es un compuesto y el 3 es primo, como el 4 es compuesto buscamos de nuevo que dígitos al multiplicarse me dan 4, esos serian $2\times2=4$, entonces la expresión (1) me quedaría de la siguiente manera:

$$2\times2\times3=12$$

Ahora ya podemos expresar la anterior expresión como:

$$2^2\times3=12$$

En la siguiente figura observe el diagrama de árbol de la descomposición de 12 en sus factores primos:

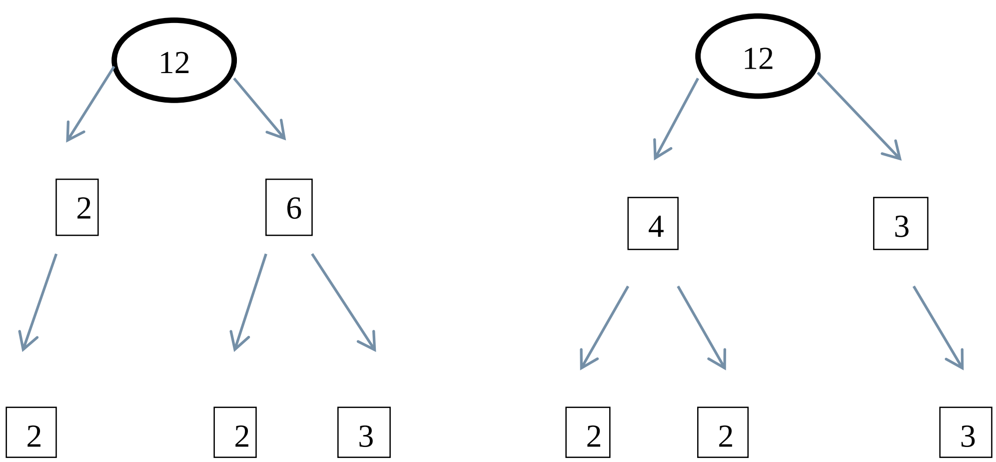


Figura 6: Descomponiendo números

Entonces $12=2^2x3$

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO: LA CADENA DE LA DIVISIBILIDAD
Este material se utiliza en el momento de explicar los criterios de divisibilidad, el docente da el criterio teóricamente y el ejemplo lo hace teórico-práctico, además será la ayuda didáctica para estudiantes a la hora de resolver ejercicios. **Ejemplos:** Suponga que usted va a dar el criterio de divisibilidad de 2, entonces da el criterio teóricamente y suponga que el número 50 es su primer ejemplo, en ese momento utiliza la cadena de 50 mosquetones y empieza a dividirla en la mitad, es aquí donde se aplica: “Es para todo número natural que termina en cero”, y hago lo mismo para un número que termine en cualquier cifra par, tome como ejemplo el número 24 y repita el procedimiento utilizado anteriormente.
FASE PROPOSITIVA:
Un número es divisible por **2** si acaba en cero o cifra par. **Ejemplos:** 38, porque acaba en 8. (En este momento debe empezar a usar la **cadena de la divisibilidad** y para los ejemplos de los criterios siguientes, siempre y cuando el número utilizado no se pase de 170). $\begin{array}{r\|l} 38 & 2 \\ 19 & \end{array}$ Ahora verifique con el número 120, porque acaba en 0. $\begin{array}{r\|l} 120 & 2 \\ 60 & \end{array}$ ❖ Un número es divisible por **3** si la suma de sus cifras es un múltiplo de tres.

Ejemplos: 21, porque 1 + 2= 3 y es múltiplo de 3 porque 21÷3=7 o 3×7=21

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & \end{array}$$

Ahora verifiquemos con este número grande 36’’.058.254’.865.239, porque 3 + 6 + 0 + 5 + 8 +2 + 5 + 4 + 8 + 6 + 5 + 2 + 3 + 9 = 66 repitiendo el proceso con 66: 6 + 6 = 12 y es un múltiplo de 3 porque 12÷3=4 ó 3×4=12

❖ Un número es divisible por **5** si la última cifra es cero o cinco.

Ejemplo: 25, porque termina en 5.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & \end{array}$$

Ahora verifique para el número 258.980, porque acaba en cero.

❖ Un número es divisible por **7** cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es cero o múltiplo de siete.

Ejemplos: 133, porque 13-2×3=13-6=7, y 7 es múltiplo de porque ó 7×1=7

Ahora verifiquemos para un número más grande como 4.886, porque 488 – 2×6 = 476,

Repitiendo el proceso: 47 – 2×6 = 35 y 35 es múltiplo de 7 porque 7×5=35

- Un número es divisible por **11** si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y lugar impar es cero o múltiplo de 11. Si es un número de 2 cifras será múltiplo de 11 si esas cifras son iguales.

Ejemplos: 88 porque es un número de dos cifras iguales y 8×11=88

Ahora verifiquemos para el numero 79.618, porque 7 + 6 + 8 = 21 (lugar impar), 9 + 1 = 10 (lugar par): 21 – 10 = 11

EJERCICIOS: Con ayuda del material didáctico "La Cadena de la Divisibilidad" realizar los siguientes ejercicios

1. Escribe los números que faltan (en algunos apartados pueden existir varias soluciones).

a) 28 es múltiplo de 4 porque 28 = 4× ___

b) 35 es múltiplo de ___ porque ___ = ___× 7

c) __ es múltiplo de ___ porque ___ = ___ × ___

d) ___ es múltiplo de 8 porque ___ = 8 × ___

e) 30 es múltiplo de 10 porque 30 = 10 × ___

f) 54 es múltiplo de ___ porque ___ = ___×___

2. Realice 3 diagramas de árbol para para expresar el número 60 en sus factores primos.

3. Escribe los números que sean:

a) Múltiplos de 3 menores que 36.
b) Múltiplos de 4 menores que 60.
c) Múltiplos de 100 menores que 1.000.
d) Múltiplos de 7 que estén comprendidos entre 30 y 90.

4. Indica cuál de los números cumple los criterios de divisibilidad de la tabla (algunos números pueden serlo por varios).

Numero	**Divisible por 2**	**Divisible por 3**	**Divisible por 5**	**Divisible por 7**	**Divisible por 11**
18					
35					
40					
385					
47					
880					
341					
14.691					
17.936					

Cuadro 5: Indicar los criterios de divisibilidad

5. Utilice la cadena de la divisibilidad para descomponer los siguientes números en sus factores primos, pero primero observemos un ejemplo y una recomendación. Y recuerde que la cadena solo e puede utilizar para números menores que 170.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$

Recomendación: cuando un numero se descompone en sus factores primos, primero se busca la mitad, sino no la hay se busca si hay tercera y así sucesivamente en orden ascendente

a) 63
b) 81
c) 162
d) 121
e) 1.320
f) 14.583

EVALUACIÓN

Durante el proceso de heteroevaluación es importante resaltar los aspectos evaluativos en cuanto a lo actitudinal, conceptual, procedimental desarrollados en las fases trabajadas anteriormente identificando si se logran los objetivos planteados al inicio de la guía de la aplicación del material didáctico “Cadena de la divisibilidad”.

También se sugiere realizar una evaluación escrita verificando si el estudiante adquirió los conceptos y posteriormente una autoevaluación y coevaluación del trabajo realizado para que la evaluación sea integral.

BIBLIOGRAFIA

García, J.F.(2009).Platea. *Criterios de divisibilidad*. www.platea.pntic.mec.es. Recuperado de: *http://platea.pntic.mec.es/jfgarcia/material_por_cursos/CRITERIOS%20DE%20DIVISIBILIDAD.pdf*

Bautista, J.(2009). Iesprofesorjuanbautista. *Divisibilidad.* www.iesprofesorjuanbautista.es. Recuperado de: *http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf_2-Divisibilidad.pdf*

3.1.2 Guía: Discos Matemáticos

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

Tema:	Divisibilidad
Grado:	Sexto y Séptimo
Duración:	**4 horas**
Pensamiento matemático:	Numérico
Material didáctico	Discos matemáticos
Guía práctica para el docente	

PRESENTACIÓN
El material didáctico “Discos Matemáticos” está diseñado para que los estudiantes de grados sexto y séptimo fortalezcan el pensamiento numérico en cuanto al aprendizaje del tema de fracciones. Aunque este tema se trabaja desde primaria hay estudiantes que presentan dificultades en el momento de representar una fracción o al realizar procedimientos de suma, resta y equivalencia, es por eso que con este material se pretende que el estudiante supere este tipo de dificultades.

OBJETIVO GENERAL:	Comprender el concepto de fracción y sus aplicaciones con el uso del material didáctico “Discos Matemáticos”.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Utilizar los “Discos matemáticos” para la comprensión del significado de fracción y de fracción equivalente. Realizar operaciones de suma y resta de fracciones con el mismo denominador con el uso de los “Discos matemáticos”. Representar fracciones mixtas con la contribución del material didáctico “Discos Matemáticos”.
CONTENIDOS:	**Fracciones** Fracción. Suma y resta de fracciones homogéneas. Fracciones mixtas. Relaciones entre fracciones. Fracciones equivalentes.

FASE INTERPRETATIVA

Concepto de fracción

*Las definiciones matemáticas fueron tomadas del libro **Hipertexto 6** de los autores **Salazar** y **Cifuentes** de la editorial **SANTILLANA S.A.***

Empiece indagando a los estudiantes acerca del concepto ¿Qué es una unidad y como se representa?, luego pregunte ¿Cómo se puede particionar una unidad?, ¿Qué nombre reciben los números que representan estas particiones?

La fracciones puede interpretarse de diferentes maneras:

En este momento entregue a los estudiantes el material didáctico "Discos matemáticos", que están conformados por discos particionados y bases de distintas unidades, pero en esta explicación solo use las bases de una unidad y los discos de medida $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$; y comience a explicar el concepto de fracción como parte una unidad.

Indique a los estudiantes que tomen el disco de ½ y pregunte ¿Qué número representa esta parte del disco? Complete ideas y siga el mismo proceso con el resto de particiones.

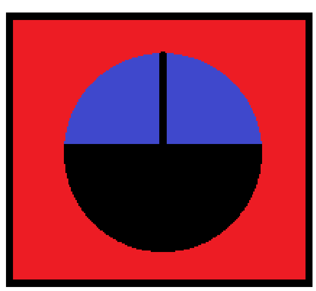


Figura 7: Disco matematico

Enuncie la definición matemática de fracción.

$$\text{“}Una\ \boldsymbol{fracción}\ es\ una\ expresión\ \frac{a}{b};\ \ en\ donde\ a, b\ \in \mathbb{N}\ y\ b \neq 0\text{”}$$

El numero b es llamado **denominador** e indica el número de partes iguales en que se divide la unidad, el número a es llamado numerador e indica el número de partes que se toman de la unidad.

Para completar la explicación enuncie y retroalimente con los estudiantes los concepto de:

Fracción como cociente

Una fracción también expresa un cociente. En este caso, indica que numero de objetos debe ser repartido en cantidades iguales.

$$\text{“}Una\ fracción\ \frac{a}{b}\ expresa\ el\ concepto\ entre\ dos\ numeros\ a, b \in \mathbb{N}\ y\ b \neq 0.$$
$$el\ numerador\ a\ corresponde\ al\ dividendo\ y\ el\ denominador\ b\ corresponde$$
$$al\ divisor\text{”}.$$

Fracción como razón

Las fracciones se utilizan para comparar dos cantidades de una misma magnitud.
Por ejemplo, en un colegio de bachillerato hay 9 profesoras y 12 profesores. La relación entre el número de profesoras y profesores, se puede expresar de las siguientes formas:

- La relación entre profesoras y profesores es de 9 a 12.
- Por cada 9 profesoras hay 12 profesores.
- Como una fracción $\frac{9}{12}$

Fracción de un número

Cuando un conjunto se divide en subconjuntos que tienen el mismo número de elementos, también se divide un todo, en partes iguales, de manera que uno o varios elementos de esos subconjuntos se pueden interpretar como una fracción.

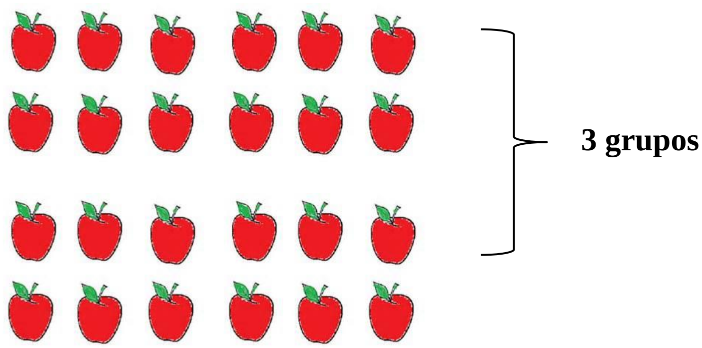


Figura 8: Partiendo un conjunto.

Por ejemplo para hallar $\frac{3}{4}$ de 24 manzanas se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se dividen en 4 grupos las 24 manzanas, así, cada grupo tiene 6 manzanas.

- Segundo, se toman 3 de esos grupos que corresponden a 18 manzanas.

Entonces, $\frac{3}{4}$ de 24 manzanas son 18 manzanas.

El procedimiento anterior se expresa numéricamente así:

$24 \div 4 = 6$, luego, $6 \times 3 = 18$. Así, los $\frac{3}{4}$ de 24 son 18.

FASE ARGUMENTATIVA

A continuación se explican las clases de fracciones y después se explicaran que son los números mixtos, las fracciones equivalentes con la ayuda del material didáctico.

Las definiciones matemáticas fueron tomadas del libro ***Hipertexto 6*** *de los autores* ***Salazar*** *y* ***Cifuentes*** *de la editorial* ***SANTILLANA S.A.***

Clases de fracciones

Una fracción es **propia** cuando el numerador es menor que el denominador. Esta fracción es menor por la unidad. Por ejemplo, $\frac{3}{7}$ que se lee tres séptimo es propia.

Una fracción es **impropia** si tiene el numerador mayor que el denominador. Esta fracción es mayor que la unidad. Por ejemplo, $\frac{7}{4}$ que se lee siete cuartos es impropia.

Una fracción es **igual a la unidad** cuando el numerador es igual que el denominador. Por ejemplo, $\frac{6}{6}$ se lee seis sextos y es igual a la unidad.

Una fracción es **entera** cuando el numerador es múltiplo del denominador. Estas fracciones son números naturales mayores que la unidad. Por ejemplo, $\frac{6}{2}$ que se lee seis medios es una fracción entera.

Con la ayuda del material didáctico de ejemplos de fracción propia, impropia y entera. De la siguiente manera:

Ejemplos:

- ✓ $\frac{1}{4}$ es una fracción propia. Observemos en los discos matemáticos

Figura 9: Representación de una Fracción

La parte azul representa 1/4

- ✓ $\frac{5}{4}$ es una fracción impropia

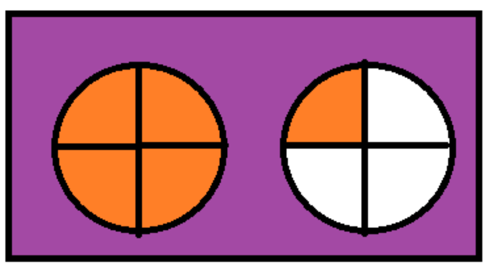


Figura 10: Fracción mayor a la unidad

La parte pintada de café representan a 5/4

- ✓ $\frac{4}{4}$ es una fracción entera. La parte verde representa 4 partes de 4 y es igual a a la unidad.

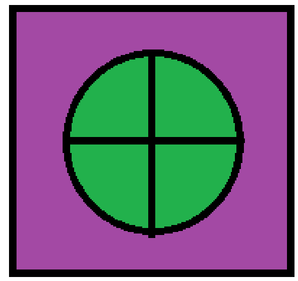


Figura 11: Representación de la Unidad

Ahora empieza a explicar el concepto de una fracción mixta a partir de la definición de fracción impropia.

Números mixtos

Cualquier facción impropia se puede expresar como un número natural más una fracción propia.

Por ejemplo, utilicemos la base de 3 unidades y los discos de medida $\frac{1}{2}$. Para expresar la fracción $\frac{5}{2}$ como la suma de un numero natural más una fracción propia, se representa la fracción $\frac{5}{2}$ como:

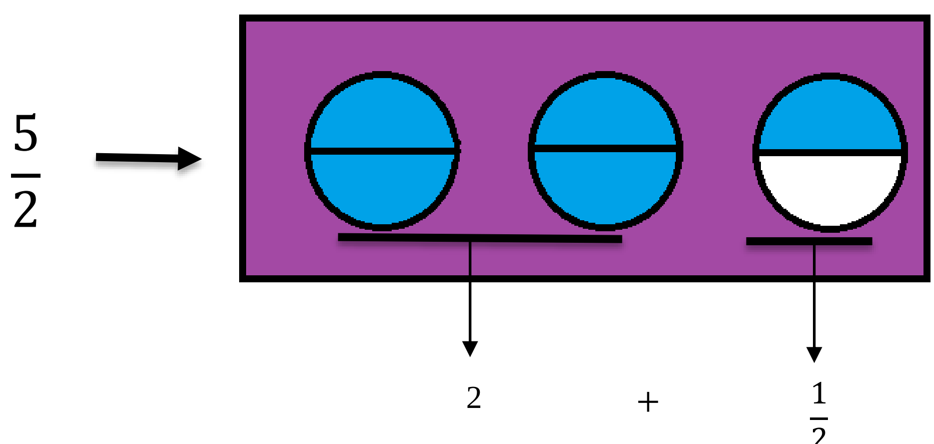


Figura 12: Sumas de Fracciones

La fracción $\frac{5}{2}$ es igual a 2 unidades completas y $\frac{1}{2}$ de unidad

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Un **número mixto** es una expresión que tiene parte entera y una parte fraccionaria. La parte fraccionaria de un número mixto es una fracción propia.

Así, $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, donde 2 es la parte entera y $\frac{1}{2}$ la parte fraccionaria menor que la unidad.

Tarea: Consulta el procedimiento de ¿cómo convertir una fracción a un número mixto y viceversa?

Representación de fracciones sobre la recta numérica

Para representar fracciones sobre una recta numérica, se deben seguir los siguientes pasos:

- Primero, se ubica el número 0 en la recta numérica y se localizan los números que se consideren necesarios.

- Segundo, se divide cada unidad en tantas partes iguales como lo indique el denominador de la fracción que se va a representar.

- Luego, se cuentan tantas partes a partir del número 0 como lo indique el numerador de la fracción y se marca el punto. Dicho punto es la representación de la fracción sobre la recta numérica.

Por ejemplo, esta es la representación de $\frac{2}{3}$ en una recta numérica.

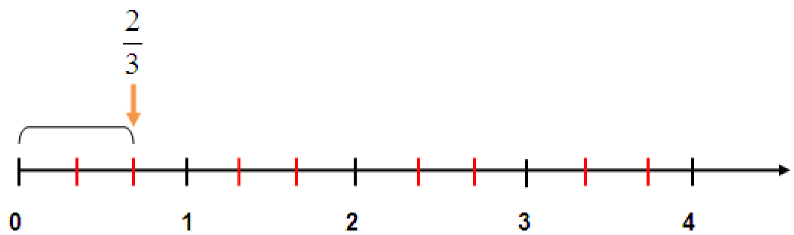
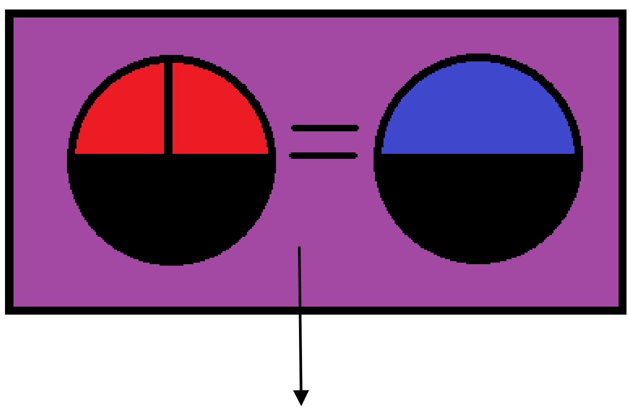


Figura 13: Representación en la Recta

A continuación se explica el concepto de fracciones equivalentes con la ayuda de los Discos Matemáticos.

Fracciones Equivalentes

Entregue a los estudiantes una base de 2 unidades y represente el siguiente esquema.



$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Figura 14: Equivalencia entre Fracciones

Explique cuando dos fracciones son equivalentes. Luego enuncie la definición de fracciones equivalentes.

$$"Dos\ fracciones\ \frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}\ , son\ equivalentes, si\ se\ cumple\ que$$
$$a \times d = b \times c\ y\ se\ escribe\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}"$$

Realice los siguientes ejemplos con la ayuda de los Discos Matemáticos

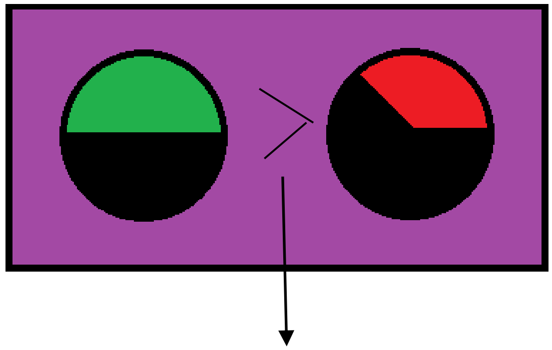
Determine si las siguientes fracciones son equivalentes

a) $\frac{1}{3}\ y\ \frac{2}{6}$
b) $\frac{3}{4}\ y\ \frac{12}{8}$
c) $\frac{3}{2}\ y\ \frac{6}{4}$

Relación de orden en las fracciones

Haga a los estudiantes la siguiente pregunta ¿Qué número fraccionario es más grande $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$? Por lo general los estudiantes responden $\frac{1}{3}$, cualquiera sea la respuesta realice el siguiente ejemplo.

Tome una base de dos unidades, en una represente la cantidad $\frac{1}{2}$ y en la otra $\frac{1}{3}$, pregúntele a los estudiantes ¿cuál es la partición más grande? Lógicamente los estudiantes responderán que $\frac{1}{2}$. En estos casos los valores de los denominadores tienden a confundir la relación de orden entre fracciones, pero en este momento explicara cada una de las relaciones entre fracciones.



$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

Figura 15: Desigualdad entre fracciones

Cuando se comparan dos fracciones, se cumple una y solo una de las siguientes:

- $\frac{a}{b}$ es menor que $\frac{c}{d}$. Es decir, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
- $\frac{a}{b}$ es mayor que $\frac{c}{d}$. Es decir, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
- $\frac{a}{b}$ es igual a $\frac{c}{d}$. Es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Así mismo, cuando se comparan dos fracciones se pueden presentar tres casos:

Fracciones con igual denominador: cuando se comparan dos fracciones con igual denominador, es mayor la que presenta mayor numerador. Por ejemplo, $\frac{7}{3} > \frac{5}{3}$ porque $7 > 5$.

Fracciones con igual numerador: cuando se comparan dos fracciones con igual numerador, es mayor la que presenta menor denominador. Por ejemplo, $\frac{7}{2} > \frac{7}{5}$ porque $2 < 5$.

Fracciones con diferente numerador y denominador: para comparar dos fracciones con diferente numerador y denominador se reducen a común denominador las fracciones y se comparan los numeradores.

Por ejemplo, para determinar que fracción es mayor o menor entre $\frac{7}{8}$ y $\frac{11}{12}$; se halla el mínimo común denominador. Así, $mcm(8,12) = 24$.

Se multiplica cada una de las fracciones al mínimo común denominador hallado anteriormente. Así:

$$\frac{7\times3}{8\times3} = \frac{21}{24} \qquad\qquad \frac{11\times2}{12\times2} = \frac{22}{24}$$

Se comparan los numeradores de las fracciones multiplicadas, determinando el tipo de relación entre las fracciones. Así,

$21 < 22$, entonces, $\frac{21}{24} < \frac{22}{24}$. Por lo tanto, $\frac{7}{8} < \frac{11}{12}$.

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO: DISCOS MATEMATICOS

El material didáctico “Discos matemáticos” se aplica desde las primeras fases de la guía, ya que es importante introducirlos en los conceptos de fracción, clases de fracciones, fracciones equivalentes, fracciones mixtas y relación de fracciones, ya que este material didáctico contribuye a la adquisición de estos conceptos y estos son la base para la realización de las operaciones básicas de fracciones.

Posteriormente una vez adquiridos estos conceptos se continúa desarrollando la fase propositiva, donde el docente debe explicar la suma y resta de fracciones homogéneas con la ayuda de los Discos matemáticos y proponer a los estudiantes ejercicios de este tipo.

A continuación se muestra el siguiente ejemplo $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, este se efectúa con la ayuda del material didáctico Discos matemáticos.

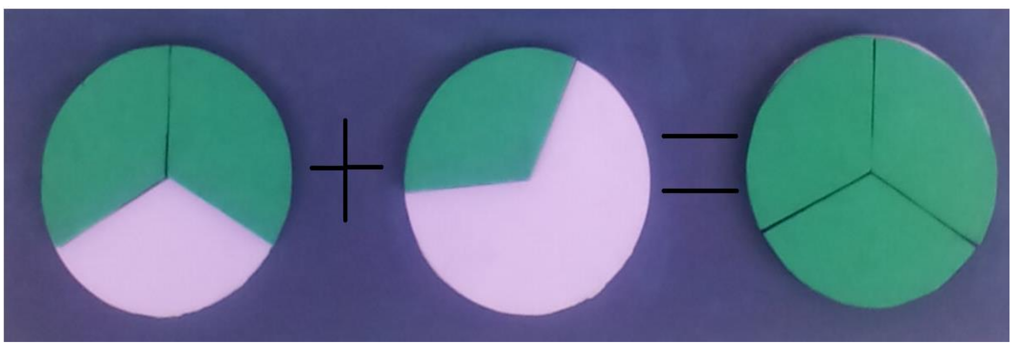


Imagen 6: Suma de Discos Matemáticos

FASE PROPOSITIVA

Suma y resta de fracciones homogénea

Dos o más fracciones son homogéneas si tienen igual denominador.

En este momento el docente debe entregar las bases de 3 y 4 unidades con todos los discos y los signos de operación menos (-), mas (+) e igual (=). Y explicar el siguiente algoritmo con la ayuda de los “Discos Matemáticos”.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \forall a, b \; y \; c \; \in \mathbb{N}$$

Aplique los siguientes ejemplos con los estudiantes:

- ✓ $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

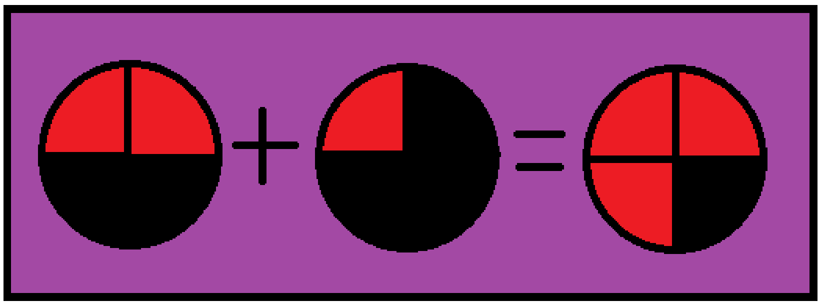


Figura 16: Suma de fracciones homogéneas

- ✓ $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$

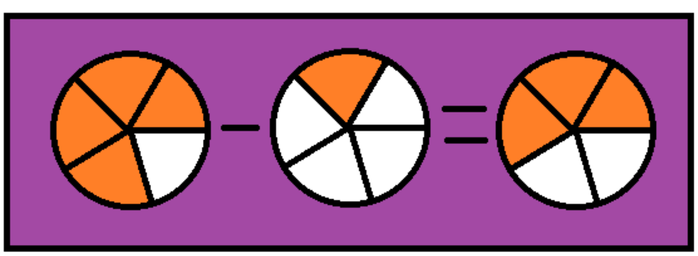


Figura 17: Resta de fracciones homogéneas

- ✓ $\frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6+3-5}{10} = \frac{9-5}{10} = \frac{4}{10}$

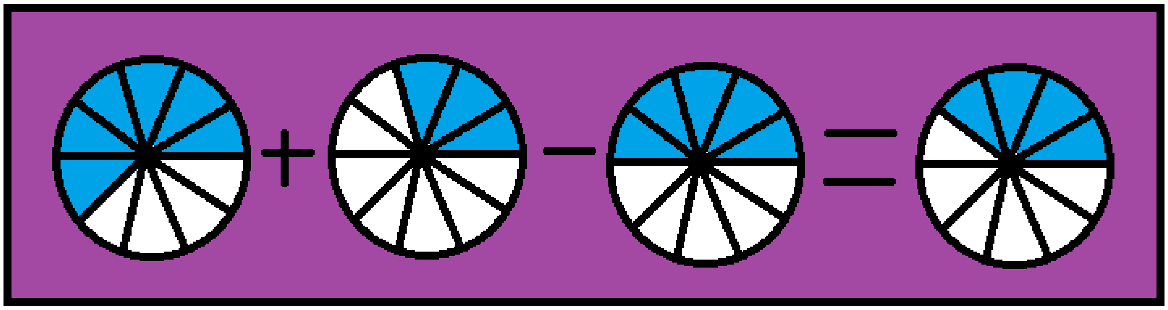


Figura 18: Suma y resta de fracciones homogéneas

EVALUACIÓN

Durante el proceso de hetereoevaluacion es importante resaltar los aspectos evaluativos en cuanto a lo actitudinal, conceptual, procedimental desarrollados en las fases trabajadas anteriormente identificando si se logran los objetivos planteados al inicio de la guía de la aplicación del material didáctico “Discos matemáticos”.

Pero es importante realizar una autoevaluación y coevaluación del trabajo realizado para que la evaluación sea integral.

BIBLIOGRAFIA

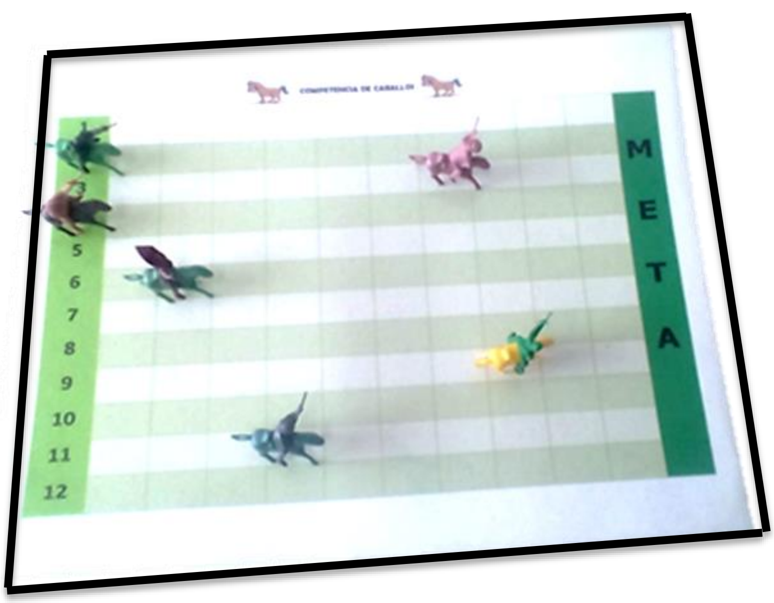
Cifuentes, Salazar (2010). HIPERTEXTO *Santillana 6*. Bogotá, Colombia. Editorial Santillana S.A. (pp 242, 243, 248)

3.1.3 Guía: Competencia de Caballos:

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	Universidad Tecnológica de Pereira

TEMA:	Probabilidad
GRADO:	Sexto y Séptimo
DURACIÓN:	**4 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Aleatorio
MATERIAL DIDACTICO	Competencia de caballos
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN
El presente material didáctico denominado **Competencia de caballos**; es un juego de azar que consiste en los estudiantes escojan varias de las 12 casillas y vayan avanzando paso por paso según el número que se obtenga al lanzar dos dados, este material didáctico ayuda al estudiante a comprender el concepto de probabilidad de forma lúdica y a fortalecer el pensamiento aleatorio, estos aspectos son importantes en la toma de decisiones en problemas de este tipo.



OBJETIVO GENERAL:	Adquirir por medio del juego “Competencia de caballos” los conceptos básicos de probabilidad simple, espacio muestral y evento logrando una mejor interpretación en el momento de enfrentar situaciones de tipo aleatorio.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Aplicar los conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento independencia, etc.), mediante la participación en la competencia de caballos. Calcular probabilidad de eventos simples, identificando los casos más y menos posibles.
CONTENIDOS:	Espacio muestral. Experimento aleatorio. Probabilidad.

FASE INTERPRETATIVA

Las definiciones matemáticas fueron tomadas del libro ***Hipertexto 7*** *de los autores* ***Salazar*** *y* ***Rubiano*** *de la editorial* ***SANTILLANA S.A.***

Para definir probabilidad es necesario recurrir a tres definiciones previas: experimento aleatorio, espacio muestral y eventos.

Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual se conoce el procedimiento que se va a seguir y los posibles resultados, pero no se puede presidir con certeza cuál de esos resultados será el final antes de realizar el experimento.

Por ejemplo, si dos selecciones de futbol juegan la final de la copa mundial, se tienen tres posibles resultados al finalizar el tiempo reglamentario: que gane un equipo, que gane el equipo contrario o que queden empatados. El resultado final se tendrá solo una vez finalice el partido.

El **espacio muestral** es el conjunto, S, de todos los posibles resultados en que se puede terminar el experimento aleatorio.
En relación con la cantidad de elementos del espacio muestral, los experimentos aleatorios pueden variar así:

- Si el espacio muestral es el conjunto vacío, entonces, es imposible que ocurra el experimento aleatorio.
- Si el espacio muestral es un conjunto unitario es seguro que ocurra el experimento aleatorio.

El espacio muestral debe ser construido de tal forma que indique claramente todas las posibilidades de ocurrencia de un experimento aleatorio.

En todos los experimentos aleatorios existe una **población** y una **muestra**. La población está conformada por todos los elementos con los cuales se puede conformar un posible resultado del espacio muestral. La muestra corresponde al número de elementos necesarios para formar un evento del espacio muestral.

Ejemplos:

Determinar, en cada caso, si la situación corresponde o no corresponde a un experimento aleatorio. Luego, encontrar el espacio muestral.

a. **Un niño tiene cuatro fichas, cada una con un número: 1, 2, 3 y 4. Se le pide que conforme un número de dos cifras con estas fichas.**

   Ya que se sabe que el número debe tener dos cifras pero existen cuatro disponibles, la situación corresponde a un experimento aleatorio.

   El espacio muestral es:

   $S = \{12,13,14,21,23,24,31,32,34,41,42,43\}$

b. **El colegio "Enrique Pozzo" desea enviar a dos de sus estudiantes al Foro de Juventudes de las Naciones Unidas. A la convocatoria se presentan Hugo, Pablo y Luis.**

   Se trata de un experimento aleatorio ya que se conocen los tres candidatos y se pueden conformar todas las posibles parejas, pero no se tiene la certeza de quienes serán elegidos.

   La población está conformada por tres candidatos. La muestra corresponde a los dos cupos que hay disponibles.

El espacio muestral correspondiente es:

S = {Hugo-Pablo, Hugo-Luis, Pablo-Luis}

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral. Un evento está formado por uno o más elementos del espacio muestral.

Los eventos se representan con las primeras letras mayúsculas del alfabeto y pueden expresarse como conjunto o mediante un enunciado verbal.

Por ejemplo, una persona desea comprar tres teléfonos celulares y el vendedor le ofrece dos tipos de aparatos: genéricos y de marca. La población corresponde a los dos tipos de aparatos celulares disponibles: Genérico (G) o de Marca (M). La muestra estará formada por tres aparatos que compra la persona.

El espacio muestral correspondiente será:

S = {GGG, GGM, GMG, MGG, GMM, MGM, MMG, MMM}

El evento A consiste en que la menos dos de los tres celulares que la persona compra sean de marca. Entonces el evento será:

A = {GMM, MGM, MMG, MMM}

El evento muestral está formado con los elementos del espacio muestral.

Si el evento B es B = {GGG, MMM}, entonces, B consiste en que los tres celulares sean del mismo tipo.

FASE ARGUMENTATIVA

PROBABILIDAD

La **probabilidad** es un valor que se calcula sobre la ocurrencia de un evento. La probabilidad es una medida que se obtiene al comparar el número de elementos del evento con el número de elementos del espacio muestral. Dado un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un evento A, cuya notación es P(A) se calcula como:

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (A)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)}$$

La probabilidad de que el evento vacío o imposible ocurra es 0 y la probabilidad de que el evento seguro ocurra es 1.

La probabilidad de ocurrencia de un evento se puede considerar como una medida de incertidumbre. A mayor probabilidad de ocurrencia se tiene mayor confianza en el posible resultado.

Ejemplos:

1. **Se lanzan cuatro monedas al aire y se anotan los resultados obtenidos.**

   a. **Hallar la probabilidad de que dos monedas caigan en cara,**

Primero, se encuentra el espacio muestral del experimento:

S = { cccc, cccs, ccsc, cscc, sccc, ccss, cssc, sscc, sccs, cscs, scsc, csss, scss, sscs, sssc, ssss}

Si el evento A consiste en que dos de las monedas caigan en cara, entonces sus elementos son:

A = {ccss, cssc, sscc, sccs, cscs, scsc}

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (A)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)} = \frac{6}{16} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

Luego, la probabilidad de que dos muestras caigan en cara es 37,5 %.

b. Hallar la probabilidad de que al menos dos monedas caigan en cara.

Sea B el evento que consiste en que la menos dos de las monedas caigan en cara.

B = { cccc, cccs, ccsc, cscc, sccc, ccss, sccs, cscs, scsc, sscc, cssc}

$$P(B) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (B)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)} = \frac{11}{16} = 0{,}6875 = 68{,}75\ \%$$

Luego, la probabilidad de que al menos dos monedas caigan en cara es 68.75%.

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:

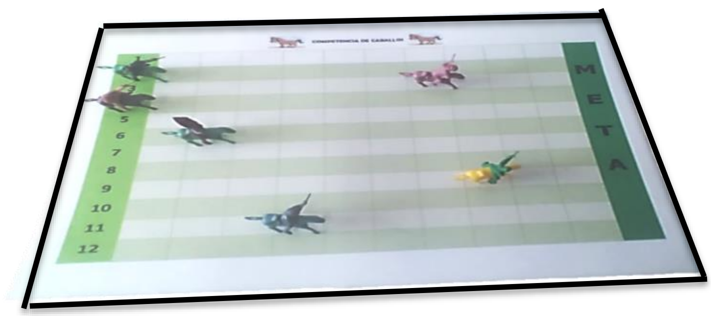
COMPETENCIA DE CABALLOS

El presente juego **"competencia de caballos"** es un material didáctico que facilita la comprensión del concepto de probabilidad. Este presenta unas trampas que si el estudiante no asimila en el momento de la orientación del juego, puede tener menos posibilidades de ganar la competencia. Es por esta razón que es importante que el orientador de las instrucciones precisas.

Para el uso del material didáctico es importante que el docente tenga presente que se aplicará cuando los estudiantes posean los conocimientos básicos del tema; de esta forma se podrá percibir si ha comprendido el tema de una forma lúdica y dinámica. El juego consiste en que cada estudiante escoja dos casillas del tablero las cuales están enumeradas del 1 al 12, y cada número con 10 espacios en forma de camino. Luego cada uno empieza a lanzar los dos dados y el número que arrojen los dados hará que el estudiante que este en esa casilla avance un espacio. Ganará el juego el estudiante que avance los 10 espacios.

Ejemplo:

Un estudiante X elige el número 1 y 6, cuando un jugador y lanza los dados cae el numero 6 entonces el jugador X avanza un espacio (ver la figura 1). El jugador X puede concluir que cometió un error al escoger el numero 1 porque este nunca va a salir, ya que el mínimo número que puede dar al lanzar dos dados es 1.



El caballo en la posición número 6 procede a moverse una casilla.

.

Imagen 7 : Carrera de Caballos antes de lanzamientos.

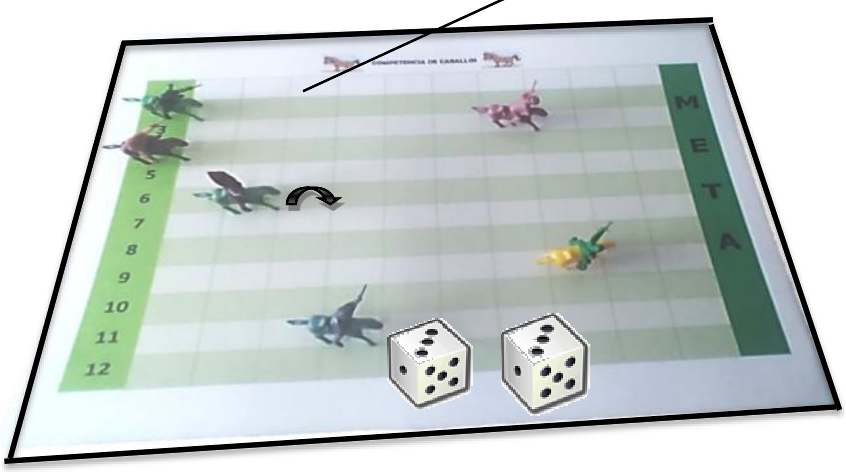


Imagen 8: Carrera de Caballos, después de lanzamiento.

FASE PROPOSITIVA:
Actividad: proceso de la actividad: 1. Para poner en práctica el juego el docente debe distribuir a los estudiantes en grupos de 6 estudiantes, y así cada grupo tendrá su propia tabla para competir entre ellos. 2. En la tabla se encuentra los números del 1 al doce en donde cada estudiante (del grupo de 6) escogerá dos números con los que jugará. 3. Los estudiantes lanzaran los dados y el número que caiga el estudiante que posea ese número moverá una casilla, así se continuarán hasta que algún estudiante llegue a la última casilla de su fila. Este estudiante será el ganador. 4. Los resultados se llevarán a un gráfico de barras, esté será la posición en la que quedo situado cada estudiante. 5. Este mismo procedimiento se realizará unas 8 o 10 veces, por lo que se tendrá 8 o 10 gráficas de donde los estudiantes sacarán conclusiones al respecto. 6. Los estudiantes llegarán a conclusiones que deducirán la probabilidad de ganar con cada uno de los números compuestos por las suma de cada uno de los dados en cada lanzamiento. 7. Después de que cada grupo adquiera sus conclusiones y las comparta con los demás, se procederá a realizar un producto cartesiano de los números compuestos por cada dado. De allí se comenzará a dar los conceptos básicos de la probabilidad a los estudiantes.

8. Con los numerales 5 y 7 los estudiantes podrán comparar las conclusiones dadas desde cada grupo con la teoría de la probabilidad, y así, dar de nuevo una conclusión final de lo que es la probabilidad simple.

9. Se darán algunos ejemplos teóricos para asimilar los conceptos y lo obtenido con el juego, con respecto a la probabilidad.

EVALUACIÓN

Durante el proceso de heteroevaluación es importante resaltar los aspectos evaluativos en cuanto a lo actitudinal, conceptual, procedimental desarrollados en las fases trabajadas anteriormente identificando si se logran los objetivos planteados al inicio de la guía de la aplicación del material didáctico "Competencia de caballos".

Pero es necesario recibir el trabajo escrito por los estudiantes para evaluar los gráficos y las conclusiones.

Pero es importante realizar una autoevaluación y coevaluación del trabajo realizado para que la evaluación sea integral.

BIBLIOGRAFÍA

Rubiano, Salazar (2010). *HIPERTEXTO Santillana 7.* Bogotá, Colombia. Editorial Santillana S.A. (pp 242, 243, 248)

PRECIADO Geovanny, LONDOÑO Marcela. *Aplicación de estrategias metodológicas para la enseñanza del pensamiento numérico variacional y el pensamiento aleatorio y sistema de datos en los grados quinto y noveno de educación básica.* Tesis (licenciado en matemáticas). Pereira, Colombia. Universidad Tecnológica de Pereira. 2013. P. 49-51.

3.2 Guías Correspondientes a los Grados Octavo y Noveno de Básica Secundaria.

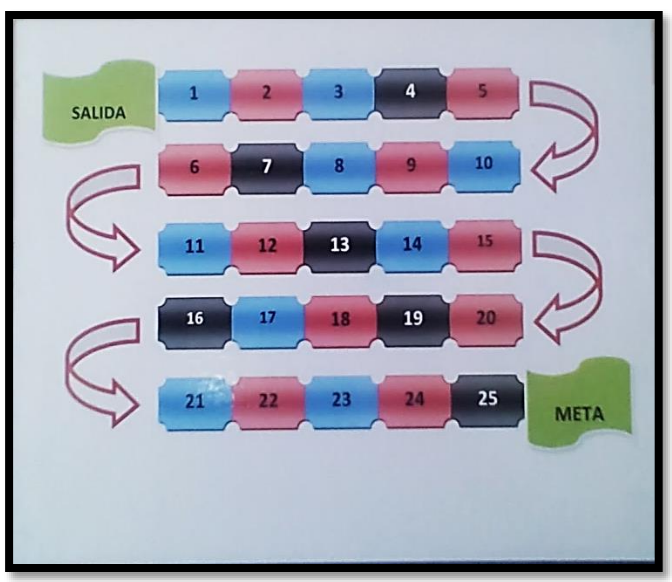
3.2.1 Guía: Escalera de Conceptos Estadísticos:

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

TEMA:	Estadística y Probabilidad
GRADO:	Octavo y Noveno
DURACIÓN:	**2 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Aleatorio
MATERIAL DIDACTICO	Escalera de conceptos estadísticos
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

Este material como su nombre lo indica está basado en el juego tradicional de la escalera, el cual interactúa suerte y conocimiento en un juego muy entretenido que muchas personas ya han tenido contacto con él en muchas de sus formas. Se presenta esta escalera mezclando los conceptos estadísticos trabajados en clase con la estructura del juego.



OBJETIVO GENERAL:	Reforzar los conceptos fundamentales de la estadística a partir del uso del material didáctico Escalera de conceptos estadísticos.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Entender de una manera global, le significado y uso de la física en la vida cotidiana a partir del uso de la Escalera de conceptos Estadísticos. Comprender el significado concreto de los conceptos en estadística sin el error de confundirlos, a partir del uso de la Escalera de conceptos Estadísticos.
CONTENIDOS:	Estadística descriptiva. Conteo.

FASE INTERPRETATIVA
A continuación se presentará de una manera muy resumida los conceptos involucrados con el material didáctico sabelotodo estadístico, desde luego se recomienda al profesor en el caso de que desee ahondar en los temas aquí presentes, buscar otras fuentes, esto es porque es una teoría muy amplia para desarrollarse en este contexto. Los siguientes conceptos fueron tomados de (LEVINE, 2014). **Estadística descriptiva** descripción y análisis de conjuntos de datos o población. **Inferencia estadística,** la cual hace posible la estimación de una característica de una población, o la toma de una decisión con respecto a una población, con base únicamente en resultados muéstrales (pg. 4 estadística y probabilidades). **Variable** Una característica de un objeto o individuo. **Datos** El conjunto de valores Individuales asociados con una variable.(pág. 6 estadística para administración) **Las variables categóricas** (también llamadas variables cualitativas) tienen valores que solo pueden colocarse en categorías, como sí y no. **Variables numéricas** (también llamadas variables cuantitativas) tienen valores que representan cantidades. Las variables numéricas, a la vez, se clasifican como discretas o continuas. **Las variables discretas** tienen valores numéricos que surgen de un proceso de conteo. **Variables continuas** producen respuestas numéricas que surgen de un proceso de medición.

Una población consta de todos los objetos o Individuos sobre los que se desea obtener conclusiones. **Una muestra** es una parte de una población, seleccionada para su análisis. **Un parámetro** es una medida que describe una característica de una población. **Un estadístico** es una medida que describe una característica de una muestra **Media** es una medida de tendencia central determinada por el cociente entre la suma total de los datos y el número de datos. Es también conocida como promedio. **La mediana** es el valor Intermedio en un conjunto de datos ordenado de menor a mayor. La mitad de los valores son menores o Iguales que la mediana, y la mitad de los valores son mayores o iguales que esta. La mediana no se ve afectada por valores extremos, por lo que resulta útil cuando exista este tipo de valores. **Moda** La moda es el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.
FASE ARGUMENTATIVA
Una vez definido en la fase interpretativa los conceptos relacionados al material didáctico se procede al desarrollo de los siguientes ejemplos: **Ejemplos de variables categóricas son:** "¿Tiene certificados de inversión actualmente?" (Sí o no) y el nivel del riesgo de un certificado de inversión (por debajo del promedio, promedio o por arriba del promedio). Número de canales de televisión por cable al que se suscribió" es un **ejemplo de una variable numérica discreta**, ya que la respuesta es uno de un número finito de enteros. Las personas se

pueden suscribir a cero, uno, dos o más canales. Otra variable numérica discreta es "el número de artículos comprados*, porque se cuenta el número de productos adquiridos.

El tiempo que una persona espera para ser atendida por un cajero de un banco es un **ejemplo de una variable numérica continua**, ya que la respuesta asume cualquier valor dentro de un continuo o un Intervalo, dependiendo de la precisión del Instrumento de medición. Por ejemplo, su Tiempo de espera podría ser de 1 minuto, 1.1 minutos, 1.11 minutos o 1.113 minutos, dependiendo de la precisión del aparato utilizado. (En teoría, dos valores continuos nunca son Idénticos. Sin embargo, como ningún aparato de medición es perfectamente preciso, quizás ocurran valores continuos idénticos para dos o más objetos o individuos).

Variables Cualitativas

Ejemplo:

1) Estado civil :

soltero

casado

viudo

separado

Variables Cuantitativas Discretas

Ejemplos :

1) Número de asignaturas inscritas en el primer semestre.

2) Número de integrantes del grupo familiar.

3) Número de salas de clases del IPVG.

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:

ESCALERA DE CONCEPTOS ESTADISTICOS.

Este juego consta de un tablero dispuesto con 25 casillas de color rojo, azul y negro, seis fichas de parques de diferente color. Cada casilla tiene ya sea una pregunta o una penalización para el jugador que caiga en una de las casillas.

Cada jugador debe tirar el dado y avanzar tantas casillas como lo indique el resultado del dado, además debe responder la pregunta si cae en una casilla azul o roja o cumplir la penalización si cae en la casilla negra.

FASE PROPOSITIVA:

Reglas del juego.

1. El máximo de jugadores es de seis jugadores y un moderador. Cada jugador tiene una ficha del color que seleccione o se le asigne.

2. El moderador tendrá las fichas de preguntas y penalización y la hoja de respuestas, y será el encargado de hacer cumplir con las reglas del juego.

3. Para la salida cada jugador tira el dado y sale el jugador que saque mayor puntaje saque en la tirada y en su orden de mayor a menor. En caso de empate entre dos o más jugadores para el orden de la salida se debe tirar el dado tantas veces como sea necesario para desempatar y saber el orden de salida.

4. Al empezar el juego se tiene dos tipos de casillas una de penalización que con una condición, las otras tienen una pregunta la cual debe ser respondida, si lo hace en forma correcta puede permanecer en dicha casilla en caso contrario debe volver a la casilla en la que se encontraba.

5. Gana aquel jugador que llegue primero a la meta. Para llegar a la meta el jugador debe tirar el dado y debe sacar exactamente lo que necesita para llegar allí, por ejemplo si le faltan 3 casillas para llegar a la meta al tirar el dado debe obtener exactamente 3, de lo contrario pierde el turno.

EJEMPLO: Se mostrará a continuación el uso del material "Escalera de conceptos estadísticos".

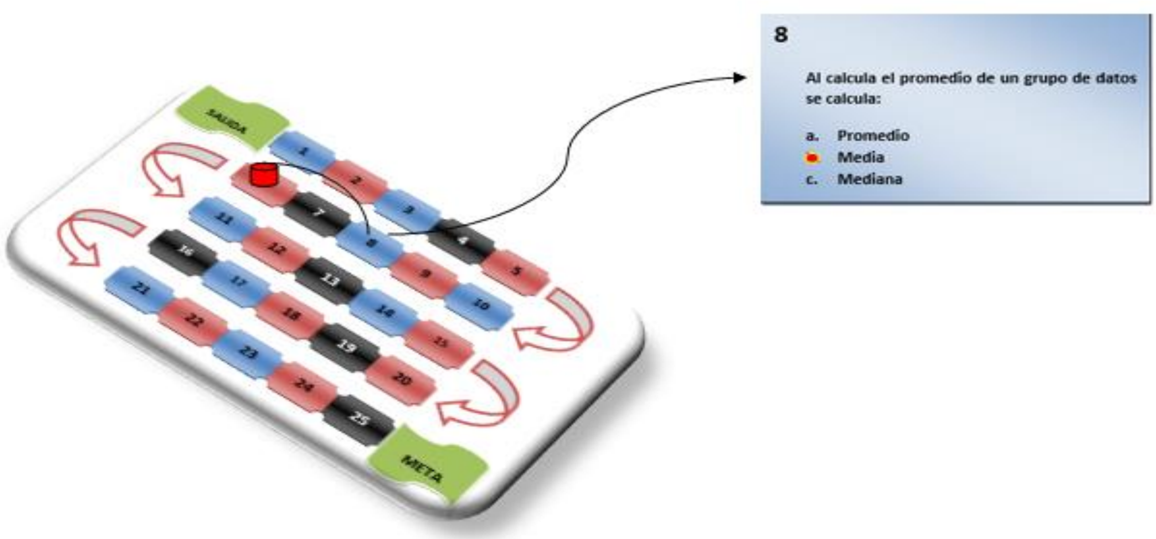


Imagen 9: Ejemplo de uso de la Escalera de Conceptos Estadísticos.

EVALUACIÓN

La evaluación es de carácter conceptual, ya que es una recopilación de los temas relacionados con estadística, lo que hace que este material sea de gran uso a la hora de conocer el nivel de comprensión de los estudiantes en estadística, debido a que el desarrollo de la actividad con el material en su aplicación divide al grupo, es importante realizar una evaluación individual referente a la actitud, frente al uso del material, finalmente es necesario evaluar la actividad respondiendo lo siguiente:

¿Qué tan productivo fue el material didáctico?

¿Cuál fue el desempeño del grupo desarrollando la actividad?

¿Qué mejoras pueden ser hechas a la actividad y/o material Escalera de conceptos estadísticos?

¿Lograron los objetivos propuestos en esta guía?

BIBLIOGRAFÍA

CASTAÑO Oscar, BERNAL Julián. *diseño de actividades didácticas para el desarrollo de Pensamiento aleatorio en estudiantes de educación básica y media*. Tesis (licenciado en Matemáticas). Pereira, Colombia. Universidad Tecnológica de Pereira. 2013. P. 129-133.

LEVINE. David M.; KREUBIEL, Timothy, C y BERENSON, Mark L. *Estadística para administración.* México, Pearson educación. 2014. P:624

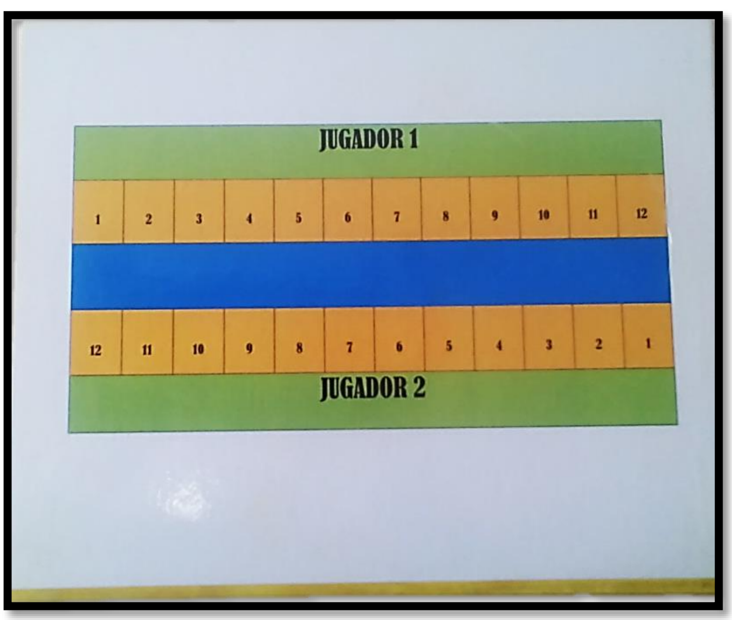
3.2.2 Guía: Travesía al Rio

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	Universidad Tecnológica de Pereira

TEMA:	Estadística y Probabilidad
GRADO:	Sexto y Séptimo
DURACIÓN:	**2 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Aleatorio
MATERIAL DIDACTICO	Travesía al Rio
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

Travesia al rio es un material entretenido en el cual es posible hacer un análisis probabilístico, a partir de un experimento aleatorio con una temática interactiva llevando al estudiante de un estado de gran lanzador de dados a un matemático analista de probabilidades.



OBJETIVO GENERAL:	Predecir fenómenos aleatorios en cualquier contexto, a partir del uso del material didáctico Travesía al rio.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Inferir conclusiones acerca de fenómenos aleatorios relacionados a la probabilidad de suceso. Comparar fenómenos aleatorios, sacando conclusiones de sus resultados y de las variables incluidas en cada uno de ellos. Entender el concepto de probabilidad, partiendo del caso particular de lanzamientos de dado.
CONTENIDOS:	Probabilidad. Espacio muestral. Experimento aleatorio.

FASE INTERPRETATIVA

Las definiciones matemáticas fueron tomadas del libro ***Hipertexto 7*** *de los autores* ***Salazar*** *y* ***Rubiano*** *de la editorial* ***SANTILLANA S.A***

PROBABILIDAD

Para definir probabilidad es necesario recurrir a tres definiciones previas: experimento aleatorio, espacio muestral y eventos.

Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual se conoce el procedimiento que se va a seguir y los posibles resultados, pero no se puede presidir con certeza cuál de esos resultados será el final antes de realizar el experimento.

Por ejemplo, si dos selecciones de futbol juegan la final de la copa mundial, se tienen tres posibles resultados al finalizar el tiempo reglamentario: que gane un equipo, que gane el equipo contrario o que queden empatados. El resultado final se tendrá solo una vez finalice el partido.

El **espacio muestral** es el conjunto, S, de todos los posibles resultados en que se puede terminar el experimento aleatorio.

En relación con la cantidad de elementos del espacio muestral, los experimentos aleatorios pueden variar así:

- Si el espacio muestral es el conjunto vacío, entonces, es imposible que ocurra el experimento aleatorio.
- Si el espacio muestral es un conjunto unitario es seguro que ocurra el experimento aleatorio.

El espacio muestral debe ser construido de tal forma que indique claramente todas las posibilidades de ocurrencia de un experimento aleatorio.

En todos los experimentos aleatorios existe una **población** y una **muestra**. La población está conformada por todos los elementos con los cuales se puede conformar un posible resultado del espacio muestral. La muestra corresponde al número de elementos necesarios para formar un evento del espacio muestral.

Ejemplos:

Determinar, en cada caso, si la situación corresponde o no corresponde a un experimento aleatorio. Luego, encontrar el espacio muestral.

c. **Un niño tiene cuatro fichas, cada una con un número: 1, 2, 3 y 4. Se le pide que conforme un número de dos cifras con estas fichas.**

   Ya que se sabe que el número debe tener dos cifras pero existen cuatro disponibles, la situación corresponde a un experimento aleatorio.

El espacio muestral es:

S = {12,13,14,21,23,24,31,32,34,41,42,43}

d. El colegio “Enrique Pozzo” desea enviar a dos de sus estudiantes al Foro de Juventudes de las Naciones Unidas. A la convocatoria se presentan Hugo, Pablo y Luis.

Se trata de un experimento aleatorio ya que se conocen los tres candidatos y se pueden conformar todas las posibles parejas, pero no se tiene la certeza de quienes serán elegidos.

La población está conformada por tres candidatos. La muestra corresponde a los dos cupos que hay disponibles.

El espacio muestral correspondiente es:

S = {Hugo-Pablo, Hugo-Luis, Pablo-Luis}

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral. Un evento está formado por uno o más elementos del espacio muestral.

Los eventos se representan con las primeras letras mayúsculas del alfabeto y pueden expresarse como conjunto o mediante un enunciado verbal.

Por ejemplo, una persona desea comprar tres teléfonos celulares y el vendedor le ofrece dos tipos de aparatos: genéricos y de marca. La población corresponde a los dos tipos de aparatos celulares disponibles: Genérico (G) o de Marca (M). La muestra estará formada por tres aparatos que compra la persona.

El espacio muestral correspondiente será:

S = {GGG, GGM, GMG, MGG, GMM, MGM, MMG, MMM}

El evento A consiste en que la menos dos de los tres celulares que la persona compra sean de marca. Entonces el evento será:

A = {GMM, MGM, MMG, MMM}

El evento muestral está formado con los elementos del espacio muestral.

Si el evento B es B = {GGG, MMM}, entonces, B consiste en que los tres celulares sean del mismo tipo.

FASE ARGUMENTATIVA

Probabilidad

La **probabilidad** es un valor que se calcula sobre la ocurrencia de un evento. La probabilidad es una medida que se obtiene al comparar el número de elementos del evento con el número de elementos del espacio muestral.

Dado un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un evento A, cuya notación es P(A) se calcula como:

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (A)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)}$$

La probabilidad de que el evento vacío o imposible ocurra es 0 y la probabilidad de que el evento seguro ocurra es 1.

La probabilidad de ocurrencia de un evento se puede considerar como una medida de incertidumbre. A mayor probabilidad de ocurrencia se tiene mayor confianza en el posible resultado.

Ejemplos:

Se lanzan cuatro monedas al aire y se anotan los resultados obtenidos.

c. Hallar la probabilidad de que dos monedas caigan en cara,

Primero, se encuentra el espacio muestral del experimento:

S = { cccc, cccs, ccsc, cscc, sccc, ccss, cssc, sscc, sccs, cscs, scsc, csss, scss, sscs, sssc, ssss}

Si el evento A consiste en que dos de las monedas caigan en cara, entonces sus elementos

son:

A = {ccss, cssc, sscc, sccs, cscs, scsc}

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (A)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)} = \frac{6}{16} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

Luego, la probabilidad de que dos muestras caigan en cara es $37{,}5\ \%$.

d. Hallar la probabilidad de que al menos dos monedas caigan en cara.

Sea B el evento que consiste en que la menos dos de las monedas caigan en cara.

B = { cccc, cccs, ccsc, cscc, sccc, ccss, sccs, cscs, scsc, sscc, cssc}

$$P(B) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (B)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)} = \frac{11}{16} = 0{,}6875 = 68{,}75\ \%$$

Luego, la probabilidad de que al menos dos monedas caigan en cara es 68.75%.

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO: **TRAVESIA AL RIO.**
Es un juego para dos jugadores cada jugador ubica sus fichas en cualquiera de las casillas, de tal manera que al lanzar los dados a la vez y sumar los resultados pueda pasar sus fichas al otro lado si esta suma coincide con el valor de la casilla en la cual tiene ubicada una de sus fichas. **Material:** • 12 fichas de dos colores diferentes. Seis para cada jugador. • Dos dados cúbicos. • Tablero de juego.
FASE PROPOSITIVA:
Reglas del Juego. Cada jugador tiene 6 fichas que sitúa en su lado del río. En cada casilla, puede poner solo una ficha. 1. Los jugadores van lanzando los dos dados por turno. Si la suma de los números obtenidos coincide con el número de una casilla en la que tiene colocada una de sus fichas, puede pasarla una al otro lado del río. Gana el primer jugador que pasa al otro lado todas sus fichas. 2. Realizar el juego solo con un dado, lo que indica que las fichas se pueden solo ubicar desde el numero 1 hasta el 6, luego de esto jugar de tal manera que cada jugador lanze 99 vecesel

dado,se entiende que se debe jugar una partida un numero indeterminado de veces. en cada uno de estos lanzamientos se debe anotar el numero de veces que sale un numero y en una tabla de frecuencia (número de veces que Salio el numero) escribir sus resultados.

a. Deducir la probabilidad de sacar 5, analizando los resultados de la frecuencia.
b. ¿Se diferencia del hecho de que sea otro número?
c. Haciendo un analisis cual es la probabilidad exacta, justifique su respuesta.

3. Realizar lo mismo del ejercicio anterior pero con dos dados.

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que el jugador 1 logre pasar su ficha en la posición 8 al otro lado del rio?

Imagen 10: Ejemplo de uso de la Travesía al Rio.

Solución:

La probabilidad de un evento particular, como que caiga una combinación que sume 8, es la suma de posibilidades de las sumas que produce 8, por ejemplo la de la imagen anterior 6 y 2.

En un lanzamiento de 2 dados existen 6 x 6 posibles salidas, solo basta contar las salidas que produce nuestro evento y dividirla por estas 36 posibilidades.

2 y 6, 6 y 2, 3 y 5 ,5 y 3, 4,4 ahora bien, son 5 posibles sumas luego:

$$P(8) = \frac{5}{36} \approx 0.138$$

EJERCICIOS

1. Al lanzar 1000 veces un dado se obtienen los resultados de la tabla:

CARA	FREC.	FRECUENCIAS RELATIVAS
1	175	
2	166	
3	171	
4	160	
5	157	
6	171	

Cuadro 6:Frecuencia relativas (F´prima, 2014)P 411.

   a. ¿Cuál es la frecuencia absoluta del 4?

   b. Calcula las frecuencias relativas de cada suceso.

   c. Estima la probabilidad de obtener un 4 con ese dado.

2. Lanzamos dos dados y sumamos sus puntuaciones. Calcula la probabilidad de que:

a. Sumen 6.

b. La suma sea un número impar.

3. Lanzamos dos dados y anotamos sus puntuaciones. Calcula la probabilidad de que:

a. Salga un número igual y par en cada dado.

b. Salgan números menores que 5 en cada dado.

4. Lanzamos dos dados y anotamos sus puntuaciones. Calcula la probabilidad de que:

a. Sumen 7.

b. Sumen 12.

5. Tiramos dos dados sobre la mesa.calcula la probabilidad de:

a. Obtener uno en ambos.

b. No obtener ningun seis.

c. Obtener algún seis.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la diferencia de sus puntuaciones sea 2?

7. Se lanzan cuatro dados de manera sucesiva. Calcúlese:

a. Probabilidad de obtener 4 cincos.

b. Probabilidad de no sacar 4 cincos.

EVALUACIÓN
Unos de los resultados propuestos en el material travesía al rio es el de inducir el concepto de probabilidad, es por esto que la heteroevaluación debe ser planeada pidiendo el entendimiento de la probabilidad en otros fenómenos aleatorio y no solo particularizar la probabilidad en el fenómeno de los lanzamientos de los dados, luego de esto es indispensable hacer una evaluación en la cual se involucre los aspectos a mejorar en la actividad y que tanto aporto este material al entendimiento de los estudiantes, para poder así dar importancia a esta metodología y abrir espacios donde se puedan realizar este tipo de juegos.

BIBLIOGRAFIA

Rubiano, Salazar (2010). HIPERTEXTO Santillana 7. Bogotá, Colombia. Editorial Santillana S.A. (pp 242, 243, 248)

CASTAÑO Oscar, BERNAL Julián. *diseño de actividades didácticas para el desarrollo de Pensamiento aleatorio en estudiantes de educación básica y media*. Tesis (licenciado en matemáticas). Pereira, Colombia. Universidad Tecnológica de Pereira. 2013. P. 34-35-36.

F´prima. (2014). MATEMÁTICA 9:Hacia la resolucion de problemas Reforma Matemática Costa Rica. Alajuela: F´prima .

Javier Martin, J. M. (1998). Poblemas de Probabilidad . Madrid: Paraninfo.

3.2.3 Guía: Pesando Ecuaciones.

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

TEMA:	Sistema de Ecuaciones Lineales
GRADO:	Octavo y Noveno
DURACIÓN:	**3 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Pensamiento variacional, pensamiento métrico
MATERIAL DIDACTICO	Pesando Ecuaciones
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

Pesando Ecuaciones es una posibilidad para la enseñanza del concepto de ecuación y solución de ecuaciones simultáneas que a partir de una situación problemas, lleva al estudiante al rol de un matemático, formulando hipótesis, validando o refutando resultados.

OBJETIVO GENERAL:	Representar un modelo multiecuacional en forma estructural y reducida logrando interrelacionar los problemas de la vida real que pueden ser solucionados de esta misma manera.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Calcular correctamente el peso de los objetos a partir de las ecuaciones planteadas. Graficar el problema planteado utilizando parámetros algebraicos. Utilizar los parámetros planteados para formar las ecuaciones. Conocer la relación entre los parámetros estructurales y los parámetros de las ecuaciones en forma reducida.
CONTENIDOS:	Ecuaciones. Sistema de ecuaciones Lineales. Solución de sistemas de Ecuaciones.

FASE INTERPRETATIVA

Las definiciones matemáticas fueron tomadas del libro ***Curso básico de matemáticas y estadística*** *del autor* **Camara Ángeles** *de la editorial* ***Delta Publicaciones Universitarias***

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

En general, se llama «solución de un sistema de ecuaciones» al conjunto de valores de las incógnitas que sustituidos en todas ellas, las transforman en identidades. Los sistemas se clasifican en determinados (con solución única), indeterminados (múltiples soluciones) o incompatibles (cuando no existe dicha solución).

Los llamados Sistemas de Ecuaciones Lineales son los que poseen ecuaciones polinómicas de primer grado. Para resolverlos se aplican varios métodos, que veremos a continuación.

Resolución algebraica

Se conoce como sistemas equivalentes a los que tienen las mismas soluciones. Para resolver algebraicamente un sistema lo transformaremos entonces en otro equivalente, pero de modo que consigamos tener una ecuación que contenga una sola incógnita. Para ello habrá que tener en cuenta lo siguiente:

- Si a dos miembros de una misma ecuación se les suma (o resta) o bien se les multiplica (o divide) por un mismo número, la ecuación que se obtiene es equivalente a la dada.

- Si en un sistema se sustituye una ecuación por una combinación lineal de ella con las demás, el sistema que se obtiene es equivalente al dado.

FASE ARGUMENTATIVA

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN:

Métodos de sustitución

Para aplicar este método a un sistema se procederá de la siguiente forma: de una de las ecuaciones se procede a despejar una de las incógnitas, por ejemplo la v. La expresión que se obtiene se sustituye en la ecuación que queda, con lo que se obtiene otra que sólo posee una incógnita, la x. Resuelto esto, se sustituye el valor de x en la ecuación obtenida al despejar y, para obtener el valor de y que nos queda.

Ejemplo:

Resuelva, por el método de sustitución, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y = 22} \\ \mathbf{-4x + 2y = 0} \end{cases}$$

Pasos a seguir:

- Despejamos la variable y de una de las ecuaciones:

$$\boldsymbol{y = \frac{4x}{2} = 2x}$$

- Sustituimos dicho valor en la otra:

$$\boldsymbol{3x + 4(2x) = 22\ ;\ \ 3x + 8x = 22\ ;\ \ 11x = 22\ \rightarrow\ \ x = 2}$$

- Con lo obtenido calculamos la otra incógnita:

$$\boldsymbol{y = 2x;\ \ y = 2.2\ \rightarrow\ \ y = 4}$$

Método de reducción o combinación lineal

Consiste en conseguir, multiplicando por los números que creamos convenientes, que una misma incógnita tenga coeficientes opuestos en ambas ecuaciones. Se procederá entonces a su suma con el fin de obtener una sola ecuación con una sola incógnita. Una vez hallada esta, al igual que antes, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones para calcular la incógnita que nos queda. Estudiamos, a continuación, el mismo ejemplo.

Ejemplo:

Resuelva, por el método de reducción, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y = 22} \\ \mathbf{-4x + 2y = 0} \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por (-2). Obtenemos:

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y = 22} \\ \mathbf{8x - 4y = 0} \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$\mathbf{11x = 22} \;\rightarrow\; \mathbf{x = 2}$$

y ya sólo basta con sustituir en cualquiera de las dos:

$$\mathbf{3.2 + 4y = 22};\;\; \mathbf{4y = 16} \;\rightarrow\; \mathbf{y = 4}$$

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones, igualando las expresiones obtenidas para conseguir tener una sola ecuación con una sola incógnita. Una vez hallada esta, se procederá como siempre al cálculo de la incógnita restante.

Ejemplo:

Resuelva, por el método de igualación, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x + 4y = 22} \\ \boldsymbol{-4x + 2y = 0} \end{cases}$$

Se despeja, por ejemplo, la ven las dos ecuaciones:

$$\boldsymbol{y = \frac{22-3x}{4}\ ;\ y = 2x}$$

Igualando ambas y resolviendo:

$$\boldsymbol{\frac{22-3x}{4} = 2x\ ;\ 22x - 3x = 8x;\ \ 22 = 11x \rightarrow x = 2}$$

Luego, al igual que antes:

$$\boldsymbol{y = 4}$$

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:

PESANDO ECUACIONES

Este material consta de unos objetos con pesos definidos y una balanza, sirve para inducir al estudiante a sistemas de ecuaciones y el uso práctico que él tiene en la vida ,reflejándose en la física con el peso indirecto de objetos y asistiendo la respuesta del uso de la matemática.

Se desarrollará de acuerdo a una tendencia matemática que se preocupa por la construcción del significado que hace el alumno.

> Los partidarios de esta "línea semántica" proponen que la enseñanza de las matemáticas debía de tener en cuenta el desarrollo de las capacidades intelectuales de los alumnos, y que se tenía que ir de la acción a la abstracción, de acuerdo con Piaget, Lovell. Bruner, Dienes, etc. Todos estos autores coincidían en que. Para poner de manifiesto las estructuras subyacentes de las matemáticas, el alumno tenía que pasar por tres fases:
>
> 1) Fase de manipulación: los conceptos tienen su origen en las acciones realizadas sobre los objetas.
>
> 2) Fase de representación: aquello que se ha comprendido se ha de poder explicar oralmente y se ha de saber representar irónicamente.
>
> 3) Fase simbólica: esta etapa es la más reflexiva y la que posibilita el paso efectivo a la abstracción: aquello que se ha comprendido se ha de saber trabajar con símbolos sin un referente concreto. (VICENÇ FONT, 2003, p. 260-261)

> 2) Fase de representación: aquello que se ha comprendido se ha de poder explicar oralmente y se ha de saber representar irónicamente.
>
> 3) Fase simbólica: esta etapa es la más reflexiva y la que posibilita el paso efectivo a la abstracción: aquello que se ha comprendido se ha de saber trabajar con símbolos sin un referente concreto. (VICENÇ FONT, 2003, p. 260-261)

Estas fases se ven reflejadas en el arte de resolver problemas y esta tendencia a cogido mucho auge en los últimos tiempos, aunque sin embargo tenga décadas de antigüedad y es este el ABP (aprendizaje basado en problemas) donde su temática gira alrededor de las situaciones problema se define:

> “ Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación”. (Obando, G y Muñera, J. (2002, Octubre))

Son estas situaciones las cuales se deben incentivar en las aulas de clase, es por esto que "Pesando Ecuaciones" usa la metodología del ABP ,para propiciar un ambiente de reflexión donde el estudiante pueda proponer e idear soluciones diversas al problema de las pesas y así, dinamizadoras de aprendizaje y relacione las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas".(Obando, G y Muñera, J. (2002, Octubre))

En este orden de ideas, se presentara las siguientes fases anteriormente explicadas , pero ahora en el caso de la situación problema planteada con este material, estas son entonces ; la manipulación, la graficación, la simbolización y la evaluación, esto se desarrollará en la fase propositiva de esta guía.

FASE PROPOSITIVA:

Problema

Teniendo tres objetos compuestos de elementos básicos y una balanza, hallar el peso de cada uno de los elementos básicos (No se pueden desunir los objetos en sus partes básicas).

Figura 20; Objetos compuestos

Figura 19:Elementos básicos

Instrucciones

1. Se forma grupos de 3 estudiantes y se les presenta el problema.

2. Fase 1 (Manipulación)

En esta fase se les entrega los objetos a cada grupo de estudiantes para que tomen sus medidas en la balanza siguiendo lo planteado en el problema.

- Se indica el uso adecuado de la balanza para evitar un error a la hora de tomar los datos.
- Cada grupo manipula y toma las medidas correspondientes de acuerdo a los parámetros del ejercicio.

3. Fase 2 (Graficación)

En esta fase se despierta la creatividad de los estudiantes para solucionar el problema, gráficamente intentarán plasmar la situación del problema para luego pensar una o varias estrategias y tomar la menos cantidad de medidas con el menor número de objetos posibles, pero sin infringir la condición del problema.

- Cada grupo hace un esquema para identificar de una manera más sencilla el ejercicio.
- Cada grupo utiliza diferentes estrategias.

4. Fase 3 (Simbolización)

Los estudiantes en esta fase le darán a cada objeto un nombre con una sola letra para tomar más fácilmente los datos, formando las ecuaciones que modela el problema. Buscarán solución a éstas ecuaciones por medio de algún método de ecuaciones simultáneas y así encontrar analíticamente el peso de cada uno de los elementos básicos.

5. Fase 4 (Evaluación)

En esta fase los estudiantes comprueban sus resultados analíticos con los pesos reales de cada elemento básico midiéndolos por último en la balanza. Se valorará el proceso diciendo como les pareció, que aprendieron, que aclararon cuales fueron sus fortalezas y cuales sus debilidades.

- Con diferentes tipos de ecuaciones los grupos tendrán respuestas muy aproximadas, ya que hay muchos factores que crean un margen de error muy pequeño.
- Los estudiantes verificaran la solución del problema, realizando el peso de cada objeto.

Ejemplo:

- Este es un ejemplo de la simbolización que se realiza en esta actividad.

Sea:

Figura 21: Ejemplo simbolozación

Se necesita entonces saber el peso de cada elemento de estas formas sin desunirse del cuerpo inicial.

De aquí podemos simbolizar la situación como sigue:

X = Peso Elemento 1

Y = Peso Elemento 2

Z = Peso Elemento 3

Figura 22: Elemento 1 , Elemento2 y Elemento 3

Las ecuaciones parte inferior salieron de:

1. Se pesó un (Elemento 1) con un (Elemento 2) y cuatro (Elemento 3), el peso de esto marco 10 g.

2. Se pesó un (Elemento 2) con 2 (Elemento 3) y el peso conjunto marco 5 g.
3. Se pesó un (Elemento 1) con 1 (Elemento 2) y el peso conjunto marco 5 g.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 4z = 10} \\ \boldsymbol{y + 2z = 5} \\ \boldsymbol{x + y = 5} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 4z = 10} \\ \boldsymbol{y + 2z = 5} \\ \boldsymbol{x + y = 5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 5 - y} \\ \boldsymbol{z = \frac{5-y}{2}} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{(5 - y) + y + 4\left(\frac{5-y}{2}\right) = 10}$$

$$\boldsymbol{(5 - y) + y + 4\left(\frac{5 - y}{2}\right) = 10}\,; \quad \boldsymbol{5 - y + y + 10 - 2y = 10}: \ \boldsymbol{-2y = -5}$$

$$\boldsymbol{y = 2.5 \quad y \quad z = 1.25}$$

Remplazando en la ecuación $\boldsymbol{x + y = 5}$ **se tiene:**

$$\boldsymbol{x + 2.5 = 5 \rightarrow x = 2.5}$$

Remplazando en la ecuación $\boldsymbol{y + 2z = 5}$ **se tiene:**

$$\boldsymbol{2.5 + 2z = 5 \rightarrow z = 1.25}$$

$\boldsymbol{x = 2.5}$ $\boldsymbol{y = 2.5}$ $\boldsymbol{z = 1.25}$

EJERCICIOS

Con el uso del material y las instrucciones anteriormente expuestas, realizando cada una de las fases hacer los siguientes ejercicios:

1. Sean los cuatro objetos, encontrar el peso de sus elementos.

Figura 23: Ejercicio 1 de simbolización

2. Con las fichas del material didáctico “Pesando ecuaciones” crear:

Figura 24: Ejercicio 2, Creación

1. Dos objetos, los cuales puedan ser pesados y analíticamente poderse encontrar los pesos de sus elementos.

2. Cuatro objetos, los cuales puedan ser pesados y analíticamente poderse encontrar los pesos de sus elementos.
3. Proponer a la clase, los ejercicios planteados por cada grupo y darle solución a cada uno de ellos.

EVALUACIÓN

Este literal se trabajó en el desarrollo de las fases, pero aun así se pide entonces que se haga una retroalimentación del proceso y cómo esta metodología basada en problemas influenció en el desarrollo de las competencias esperadas con el uso de este material para poder así, crear un espacio donde se pueda desarrollar esta misma metodología con otros problemas.

BIBLIOGRAFÍA

Camara Ángeles set al. *Curso básico de matemáticas y estadística. 1. ed.* Madrid: Delta Publicaciones Universitarias, 2007. 312 p.

Font (2003) Matemáticas y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática. *Didáctica de la Matemática, Venezuela, V* , X, No. 2 Edición Especial Recuperado de : http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/vfont.pdf

Obando, G y Muñera, J. (2002, Octubre). "Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática. Facultad de Educación. Vol. XV, Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/5952/5362

3.2.4 Guía: Sabelotodo Estadístico

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

TEMA:	Estadística y Probabilidad
GRADO:	Octavo y Noveno
DURACIÓN:	**2 Horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Aleatorio
MATERIAL DIDACTICO	Sabelotodo Estadístico
GUIA PRACTICA PARA EL DCENTE	

PRESENTACIÓN
Sabelotodo estadístico busca que los estudiantes se integren dentro de una actividad grupal y logren retroalimentar, confrontar y debatir sus conocimientos de estadística y probabilidad.

OBJETIVO GENERAL:	Retroalimentar conceptos de estadística y probabilidad con el uso del material didáctico sabelotodo estadístico.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Fortalecer los conceptos de probabilidad a partir de la realización del juego sabelotodo estadístico. Fortalecer los conceptos en estadística descriptiva a partir de la práctica del juego sabelotodo estadístico.
CONTENIDOS:	Probabilidad. Estadística descriptiva.

FASE INTERPRETATIVA
A continuación se presentarán los conceptos involucrados con el material didáctico sabelotodo estadístico, información de (LEVINE,M 2014), desde luego se recomienda al profesor en el caso de que desee ahondar en los temas aquí presentes, buscar otras fuentes, esto es porque es una teoría muy amplia para desarrollarse en este contexto. **Estadística descriptiva** descripción y análisis de conjuntos de datos o población. **Inferencia estadística,** la cual hace posible la estimación de una característica de una población, o la toma de una decisión con respecto a una población, con base únicamente en resultados muéstrales. **Variable** Una característica de un objeto o individuo. **Datos** El conjunto de valores Individuales asociados con una variable.(pág. 6 estadística para administración) **Las variables categóricas** (también llamadas variables cualitativas) tienen valores que solo pueden colocarse en categorías, como sí y no. **Variables numéricas** (también llamadas variables cuantitativas) tienen valores que representan cantidades. Las variables numéricas, a la vez, se clasifican como discretas o continuas. **Las variables discretas** tienen valores numéricos que surgen de un proceso de conteo.

Variables continuas producen respuestas numéricas que surgen de un proceso de medición.

Una población consta de todos los objetos o Individuos sobre los que se desea obtener conclusiones.

Una muestra es una parte de una población, seleccionada para su análisis.

Un parámetro es una medida que describe una característica de una población.

Un estadístico es una medida que describe una característica de una muestra.

Media es una medida de tendencia central determinada por el cociente entre la suma total de los datos y el número de datos. Es también conocida como promedio.

La mediana es el valor Intermedio en un conjunto de datos ordenado de menor a mayor. La mitad

de los valores son menores o Iguales que la mediana, y la mitad de los valores son mayores o iguales

que esta. La mediana no se ve afectada por valores extremos, por lo que resulta útil cuando exista este tipo de valores.

Moda

La moda es el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

1) a. para datos no agrupados:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\text{n}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{x_i}{\boldsymbol{n}}; \boldsymbol{n = tamaño\ de\ la\ muestra}$$

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\text{N}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{x_i}{\boldsymbol{N}}; \boldsymbol{N = tamaño\ de\ la\ población}$$

Frecuencia absoluta acumulada (F_i) indica el número de datos de la muestra menores o iguales al límite real superior del intervalo i.

$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$ $\boldsymbol{Obs}$: $f_{m=n}$

Frecuencia absoluta acumulada (H_i) indica la porción de datos de la muestra menores o iguales al límite real superior del intervalo i.

$H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$

La probabilidades el valor numérico que representa la oportunidad o posibilidad de que ocurra un evento en particular. La probabilidad Involucrada es una proporción o fracción cuyo valor oscila entre 0 y 1. Un evento que no tiene posibilidades de ocurrir (el evento imposible) tiene una probabilidad de 0. Un evento que seguramente ocurrirá un «todo» tiene una probabilidad de 1.

Probabilidad

La **probabilidad** es un valor que se calcula sobre la ocurrencia de un evento. La probabilidad es una medida que se obtiene al comparar el número de elementos del evento con el número de elementos del espacio muestral.

Dado un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un evento A, cuya notación es P(A) se calcula como:

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (A)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)}$$

La probabilidad de que el evento vacío o imposible ocurra es 0 y la probabilidad de que el evento seguro ocurra es 1.

La probabilidad de ocurrencia de un evento se puede considerar como una medida de incertidumbre. A mayor probabilidad de ocurrencia se tiene mayor confianza en el posible resultado.

Probabilidad de ocurrencia

Evento

Cada resultado pasible de una variable se denomina evento.

Espacio muestral

El conjunto de todos los eventos pasibles se conoce como espacio muestral.

La proporción **frecuencia relativa** en cada grupo es igual al número de datas en cada clase dividido entre el número total de datos. El porcentaje en cada grupo es su proporción multiplicada por 100%.

Cálculo de la proporción o frecuencia relativa

La proporción, o frecuencia relativa, es el número de datos en cada clase dividido entre el número total de datos.

Distribución acumulada es una forma de presentar Información acerca del porcentaje de los datos que son menores que una cantidad específica.

Regla de conteo 1

SI cualquiera de k eventos diferentes mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos puede ocurrir en cada uno de n ensayos.

Regla de conteo 2

La segunda regla de conteo es una versión más general de la primera y permite que el número de eventos posibles difieran de un ensayo a otro.

Regla de conteo 3

La tercera regla de conteo permite calcular el número de maneras en que se puede ordenar un conjunto de elementos.

Regla de conteo 4

En muchos casos necesitamos conocer el número de maneras en que un subconjunto de un grupo completo de elementos se puede acomodar en orden cada arreglo posible.

Regla de conteo 5 (combinaciones)

El número de maneras de seleccionar x objetos a partir de n objetos, sin Importar el orden.

FASE ARGUMENTATIVA

Una vez definido en la fase interpretativa los conceptos relacionados al material didáctico se procede al desarrollo de los siguientes ejemplos:

Ejemplos de variables categóricas son: "¿Tiene certificados de inversión actualmente?" (Sí o no) y el nivel del riesgo de un certificado de inversión (por debajo del promedio, promedio o por arriba del promedio).

Número de canales de televisión por cable al que se suscribió" es un **ejemplo de una variable numérica discreta**, ya que la respuesta es uno de un número finito de enteros. Las personas se pueden suscribir a cero, uno, dos o más canales. Otra variable numérica discreta es "el número de artículos comprados*, porque se cuenta el número de productos adquiridos.

El tiempo que una persona espera para ser atendida por un cajero de un banco es un **ejemplo de una variable numérica continua**, ya que la respuesta asume cualquier valor dentro de un continuo o un Intervalo, dependiendo de la precisión del Instrumento de medición. Por ejemplo, su Tiempo de espera podría ser de 1 minuto, 1.1 minutos, 1.11 minutos o 1.113 minutos, dependiendo de la precisión del aparato utilizado. (En teoría, dos valores continuos nunca son Idénticos. Sin embargo, como ningún aparato de medición es perfectamente preciso, quizás ocurran valores continuos idénticos para dos o más objetos o individuos).

Variables Cualitativas

Ejemplo:

1) Estado civil :
soltero
casado
viudo
separado

Variables Cuantitativas Discretas

Ejemplos :

1) Número de asignaturas inscritas en el primer semestre.
2) Número de integrantes del grupo familiar.
3) Número de salas de clases del IPVG.

Espacio muestral cualquier subconjunto de una población es evento o suceso.

Ejemplo:

A = {obtener un número impar al lanzar un dado }

A ={1,2,3}

Espacio muestral

Ejemplo:

a)lanzamiento de un dado.

Ʊ={1,2,3,4,5,6}

Moda

Ejemplos:

Datos=2,4,5,6,7,7,8,7,3 moda=7

Ejemplos:

Se lanzan cuatro monedas al aire y se anotan los resultados obtenidos.

a. Hallar la probabilidad de que dos monedas caigan en cara:

Primero, se encuentra el espacio muestral del experimento:

S = { cccc, cccs, ccsc, cscc, sccc, ccss, cssc, sscc, sccs, cscs, scsc, csss, scss, sscs, sssc, ssss}

Si el evento A consiste en que dos de las monedas caigan en cara, entonces sus elementos son:

A = {ccss, cssc, sscc, sccs, cscs, scsc}

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ elemetos\ de\ (A)}{Numeros\ del\ espacio\ muestral\ (S)} = \frac{6}{16} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

Luego, la probabilidad de que dos muestras caigan en cara es 37,5 %.

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:

SABELOTODO ESTADISTICA

Materiales

1. Dado.
2. Pimpones de color azul, amarillo y verde (uno de cada uno).
3. Fichas de preguntas de color azul, amarillo y verde.
4. Bolsa negra.

Como Jugar

Se deben elegir 3 equipos de acuerdo el número de estudiantes del curso, el docente será el moderador.

Cada equipo debe elegir un capitán, quien será el encargado de transmitir las respuestas y sacar la balota de la bolsa.El capitán del equipo saca una balota en nuestro caso pimpones de la bolsa negra, de acuerdo con el color toma la tarjeta que se encuentra en la parte de arriba y lee la pregunta a los integrantes de su equipo y después le da la respuesta al moderador que decide la validez o invalidez de la respuesta y aplica la regla apropiada.

FASE PROPOSITIVA:
Reglas del Juego **1.** Se deben hacer 3 montones de las tarjetas. **2.** Para iniciar el juego el capitán de cada equipo tira el dado para elegir el orden de salida en el juego. **3.** Las preguntas contestadas correctamente dan puntaje de acuerdo al color: azul **5** puntos, amarillo **8** puntos y azules **10** puntos. **4.** Las preguntas no contestadas o contestadas incorrectamente quitan puntaje de acuerdo con el color: azul **-2** puntos, amarillo **-5** puntos y azul **-7** puntos. **5.** El capitán será el encargado de sacar la balota de la bolsa y de transmitir la respuesta al moderador. **6.** Cada equipo tendrá un máximo de un minuto para debatir la respuesta. **7.** Las tarjetas usadas serán puestas en la parte de abajo del montón. **8.** Ningún equipo tendrá un saldo negativo de puntos. **NOTA:** El docente debe tener un completo manejo de los temas de estadística y probabilidad.

EJEMPLO

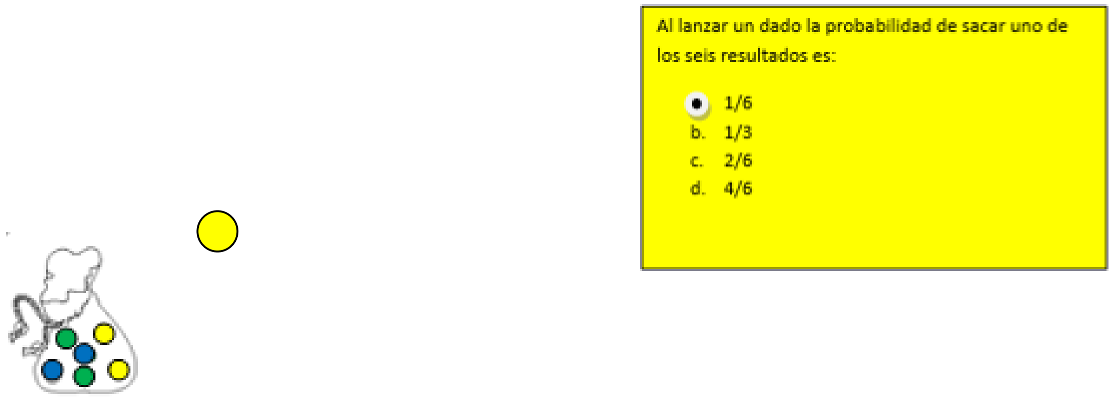


Imagen 11: Ejemplo del uso del Sabelotodo Estadístico

EVALUACIÓN

El material sabelotodo estadístico, es un material que se plantea alrededor de la temática de evaluar y retroalimentar en grupo los conocimientos en estadística y probabilidad, es necesario entonces que exista un control actitudinal y procedimental de los estudiantes a la hora de desarrollar la actividad propuesta con el material. Finalmente es necesario que se realice una evaluación a la actividad, centrándose en la efectividad y alcances que se lograron con el uso del sabelotodo estadístico como una autoevaluación del compromiso que se tuvo para el desarrollo del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

CASTAÑO Oscar, BERNAL Julián. *diseño de actividades didácticas para el desarrollo de Pensamiento aleatorio en estudiantes de educación básica y media*. Tesis (licenciado en Matemáticas). Pereira, Colombia. Universidad Tecnológica de Pereira. 2013. P. 122-128.

LEVINE. David M.; KREUBIEL, Timothy, C y BERENSON, Mark L. *Estadística para administración.* México, Pearson educación. 2014. P:624

Rubiano, Salazar (2010). HIPERTEXTO Santillana 7. Bogotá, Colombia. Editorial Santillana S.A.

(pp 242, 243, 248)

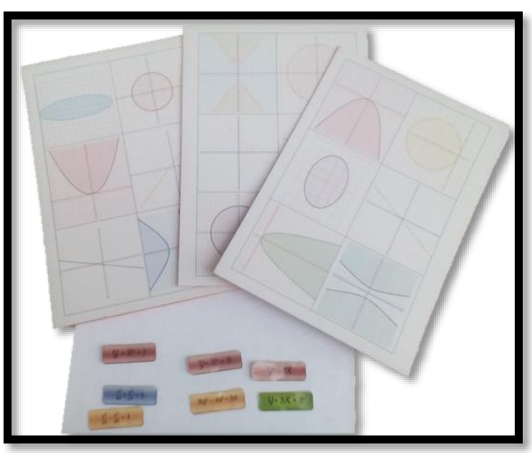
3.3 Guías Correspondientes a los Grados Décimo y Undécimo de Básica Secundaria.

3.3.1 Guía: Lotería de las Cónicas

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

TEMA:	Secciones cónicas
GRADO:	Noveno, diez y once
DURACIÓN:	**4 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Variacional y espacial
MATERIAL DIDACTICO	Lotería de las cónicas
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN
Este material sirve para que el estudiante relacione las secciones cónicas en su representación algebraica con su representación gráfica en plano coordenado R^2; esto sirve para que el estudiante se haga una representación permanente en su cerebro y así en situaciones futuras él pueda aplicar muy fácilmente estos fundamentos matemáticos.
El material consta de 40 tablas y 48 fichas. Las tablas contienen cada una 6 graficas respectivamente y las fichas tienen escritas 48 ecuaciones**.**



OBJETIVO GENERAL:	Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas con la ayuda del material didáctico Lotería de las cónicas.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos, mediante la traslación y características de las secciones cónicas. Reconocer por medio de la Lotería de las cónicas relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas, logrando una mejor comprensión en los problemas de este tipo. Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada, por medio de los procesos de identificación de las secciones cónicas.
CONTENIDOS:	Secciones cónicas • Circunferencia • Hipérbola • Elipse • Parábola Rectas en R^2

FASE INTERPRETATIVA

A continuación se estudian cada una de las características de las secciones cónicas en las tres fases: La siguiente información de "secciones cónicas" fue tomada de la página web: *karladma.pbworks.com/f/**SECCIONES**+**CÓNICAS**.doc* del autor Moreno Álvarez.

Secciones cónicas

Una sección cónica (o cónica) es una curva de intersección de un plano con un cono recto circular de dos hojas; tenemos cuatro tipos de curvas: CIRCUNFERECNIA, ELIPSE, HIPÉRBOLA Y PARÁBOLA. El matemático Apolonio estudio las secciones cónicas en términos de Geometría utilizando este concepto.

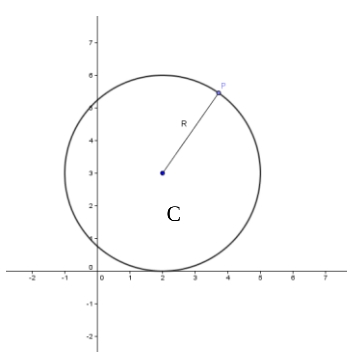
Ahora bien, pero qué es una cónica, es el conjunto de puntos "P" del plano tales que la distancia no dirigida de "P" a un punto fijo está en razón constante a la distancia no dirigida de "P" a una recta fija que no contiene al punto fijo. Esta razón constante en la definición anterior se llama excentricidad.

Las cónicas tienen innumerables aplicaciones en las ciencias y en la tecnología; de allí la gran importancia que tiene conocerlas y resolver problemas donde se apliquen cada una de ellas.

FASE ARGUMENTATIVA

Circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos P(x, y) del plano que (equidistan) de un punto C(h, k) llamado Centro.



R = radio

C (h, k) = Centro

P(x, y) = Punto Cualquiera de Circunferencia.

Figura 25: Lugar geométrico Circunferencia

Esto es:

$d(C,P) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \Rightarrow R = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$$\Rightarrow R^2 = \sqrt{((x-h)^2 + (y-k)^2)^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Ecuación canónica de Circunferencia de centro C(h, k) y radio R.

Ejemplo No. 1: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$; es la Ecuación de una Circunferencia de centro C(1,-3) y radio R = 4

Ejemplo No. 2: $x^2 + (y - 4)^2 = 7$ es la Ecuación de una circunferencia de centro C(0, 4) y Radio R = $\sqrt{7}$.

Si el centro de la circunferencia es C(0,0) y radio R = 5; la Ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Ecuación general de la circunferencia

Al desarrollar la Ecuación Canónica $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ resulta:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = R^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 = R^2$$

Ahora tenemos:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde A = B y no aparece producto de la variable x e y.

Ejemplo No. 1: Una circunferencia tiene centro C(-3, 4) y pasa por el punto P(1, -2). Determinar su Ecuación General. Solución:

Para llegar a la ecuación general partimos de la ecuación canónica:

$$\mathbf{R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Observamos si tenemos el centro, en este caso C(-3, 4) pero el radio no está dado. ¿Cómo encontrarlo? Es sencillo, ya que nos dan un punto P(1, -2) por donde pasa las circunferencia; y sabemos que *R = d(C, P)*. Entonces, por definición de distancia, tenemos:

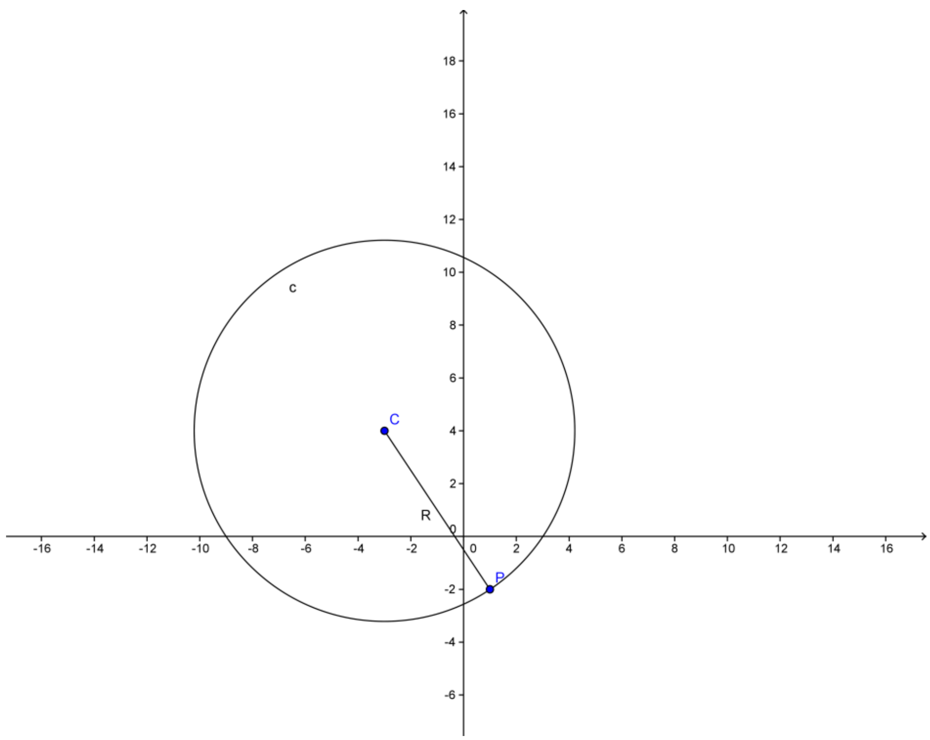


Figura 26: Ecuación de la circunferencia.

Ejercicios:

Geogebra es un software libre que permite realizar gráficos y animaciones mediante comandos algebraicos. Este programa ayuda al estudiante a identificar fácilmente las características entre una ecuación y un gráfico además sirve para resolver ejercicios de tipo geométrico.

Resolver usando Geogebra:

Los siguientes ejercicios de “secciones cónicas” fueron tomados de la página web: karladma.pbworks.com/f/SECCIONES+CÓNICAS.doc del autor Moreno Álvarez.

1.- Determinar la ecuación general de la circunferencia de centro $C\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ y Radio $R = 3\sqrt{2}$.

2.- Determinar la Ecuación General de la Circunferencia si los extremos del diámetro son

$A(-2,4)$ y $B(0,-8)$.

3.- Determinar la Ecuación de la Circunferencia de centro $C(-1,4)$ y es tangente al eje de las abscisas.

4.- Calcular la distancia entre los centros de la circunferencia de ecuación:
$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ y $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

5.- Determinar la Intersección entre la recta de ecuación x – y = 1 y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.

6.- Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $P(1, 6)$ y tangente a la recta de la ecuación $x - y - 1 = 0$

Elipse

Es el lugar Geométrico de los puntos P(x, y) del plano, cuya suma de distancias a dos puntos F_1 y F_2 (focos) es constante. (Ver grafica)

$d(P,F_1) + d(P,F_2) = d(A_1, A_2)$ Donde:

C(h, k) es el centro.

A_1, A_2, B_1, B_2 Son los Vértices

F_1, F_2 Focos.

$\overline{A_1A_2} = 2a$ Eje Mayor.

$\overline{F_1F_2}$ = Eje Focal

$\overline{B_1B_2}$ = Eje Menor.

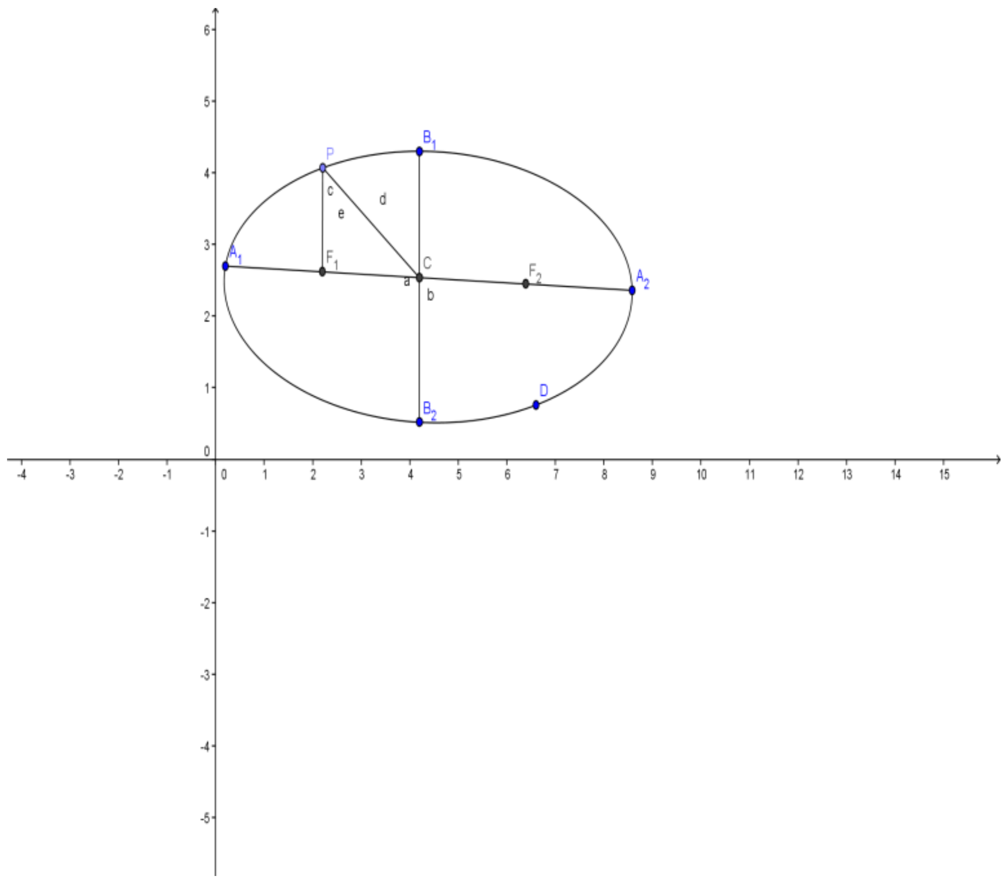


Figura 27: Elipse

Ecuación canónica de la elipse

A partir de la definición se obtienen dos ecuaciones llamadas canónicas. Estas son:

CASO I: Cuando el eje focal está paralelo al eje de las abscisas (x, x_1).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

CASO II: Cuando el eje focal está paralelo al eje de las coordenadas (y, y_1).

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Observación: El centro es C(h, k) a^2 y b^2 están relacionadas con el eje mayor y menor respectivamente por lo tanto para identificar los dos casos, solo tienes que ver con quien está el mayor denominador (con la variable x o con la variable y)

Ejemplo No. 1: La Ecuación $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ Corresponde a una elipse de centro C(3, -1) y el eje mayor paralelo a las abscisas.

Ecuación general de la elipse

Viene dada por $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ donde A ≠ B pero de igual signo. Ejemplo:

$$2x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + -1 = 0$$

<u>Excentricidad</u>: es la relación entre "C" y "a" esto es $e=\frac{C}{a}$

<u>Coordenadas de los vértices y focos</u>: es importante conocer estos puntos de la elipse; pero es báñate sencillo determinar sus coordenadas, tomando en cuenta que siempre se puede llegar a partir del centro de la elipse.

CASO I:

$$A1(\ h+a,k)\ ;\ A2(h-a,k)$$
$$F1(h+c,k)\ ;\ \ F2(h-c,k)$$
$$B1(h,k+b)\ ;\ \ B2(h,k-b)$$

CASO II:

$$A1(h,k+a)\ ;\ \ A2(h,k-a)$$
$$F1(h,k+c); F2(h,k-c)$$
$$B1(h+b,k); B2(h+b,k)$$

$Donde\ C(h,k)$ "a" distancia del centro hasta A_1 y A_2,

"b" distancia del centro hasta B_1, B_2

"c" distancia del centro hasta F_1, F_2.

Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos P(x, y) y del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado "foco" y una recta fija llamada Directriz. Veamos la gráfica para identificar los elementos en sistemas de coordenadas cartesianas.

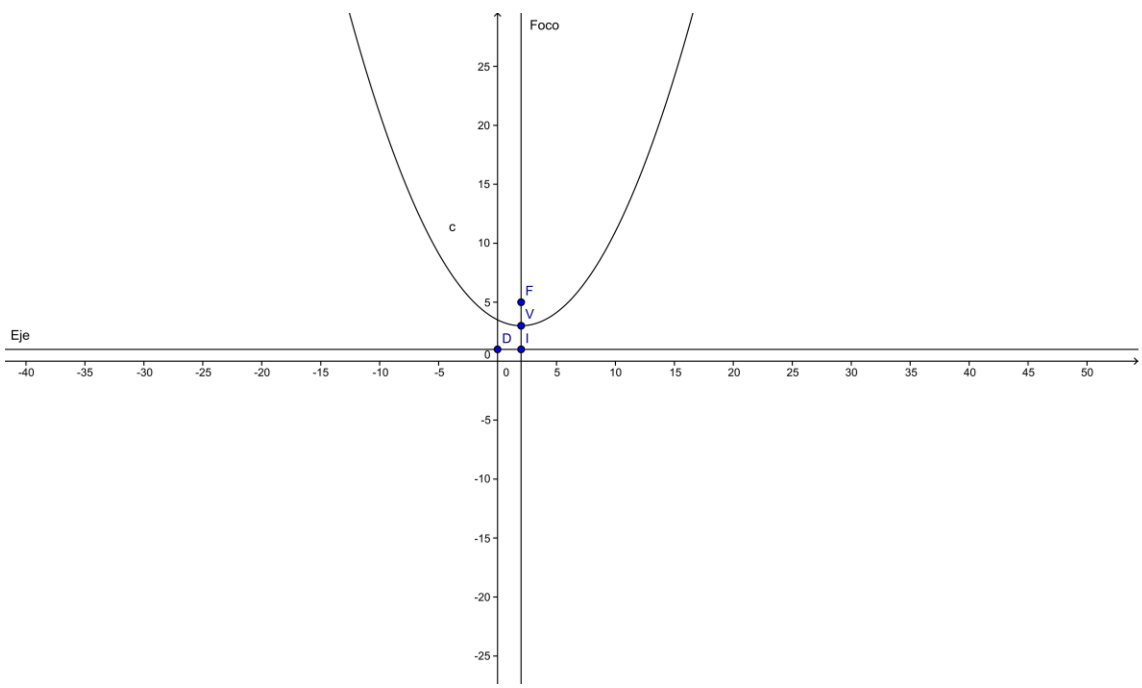


Figura 28: Parábola

Por Definición $d(P, F) = d(P, M)$

Se estudiará cuatro casos de la ecuación canónica de la parábola

Caso 1

Cuando la parábola abre hacia arriba, cuya ecuación canónica es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Donde C(h, k) es el centro de "p" el parámetro.

Elementos:

$$V(h, k)$$
$$F(h, k + p)$$
$$I(h, k - p)$$
$$Eje: x = h$$
$$Directriz: y = k - p$$

Ejemplo: $(x – 2)^2 = 8(y – 3)$.

Ecuación de Parábola de vértice V(2, 3)

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$ parámetro.

Foco:

$$F(h, k + p) = F(2, 3 + 2) = (2, 5)$$
$$I(h, k - p) = I(2, 3 - 2) = (2, 1)$$

Eje x = h entonces x = 2

Directriz $y = k - p$ entonces $y = 3 - 2 = 1$

Veamos su Grafica.

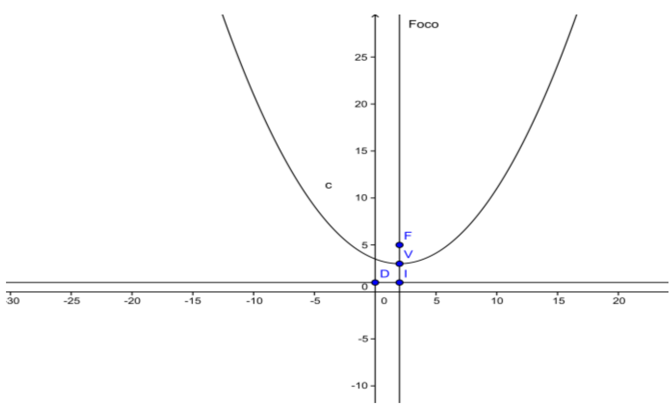


Figura 29: Caso I de la parábola

Caso 2

Cuando la Parábola abre hacia abajo, cuya ecuación canónica es:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Donde C(h, k) es el centro de "p" el parámetro.

Elementos:

$$V(h, k)$$
$$F(h, k - p)$$
$$I(h, k + p)$$
$$Eje: x = h$$
$$Directriz: y = k - p$$

Ejemplo: $(x - 3)^2 = -8(y - 1)$.

Ecuación de Parábola de vértice V(3, 1)

$-4p = -4 \Rightarrow p = 1$ parámetro.

Foco:

$F(h, k + p) = F(3, 1 - 1) = (3, 0)$

$I(h, k - p) = I(3, 1 + 1) = (3, 2)$

Eje x = h entonces x = 3

Directriz y = x + p entonces y = 1 + 1 = 2

Veamos su Grafica

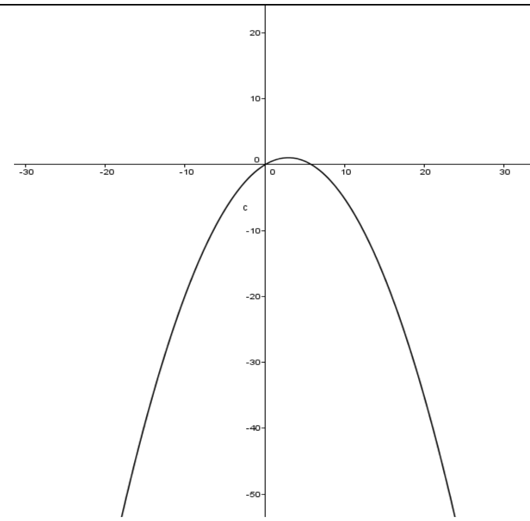


Figura 30: Caso II de la parábola

Caso 3

Cuando la parábola abre hacia la derecha, cuya ecuación canónica es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Donde C(h, k) es el centro de “p” el parámetro.

Elementos :

$$V(h, k)$$

$$F(h + p, k)$$

$$I(h - p, k)$$

$$Eje: y = k$$

$$Directriz: x = h - p$$

Ejemplo : $(y - 4)^2 = 12(x - 1)$.

Ecuación de Parábola de vértice V(1, 4)

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$ parámetro.

Foco:

$F(h+p,k) \ = \ F(1+3,4) \ = \ (4,4)$

$I(h \ - \ p,k) \ = \ I(1 \ - \ 3,4) \ = \ (-2,1)$

Eje y = 4

Directriz x = 1 – 3 entonces x = 3–2 = -2

Veamos su Grafica.

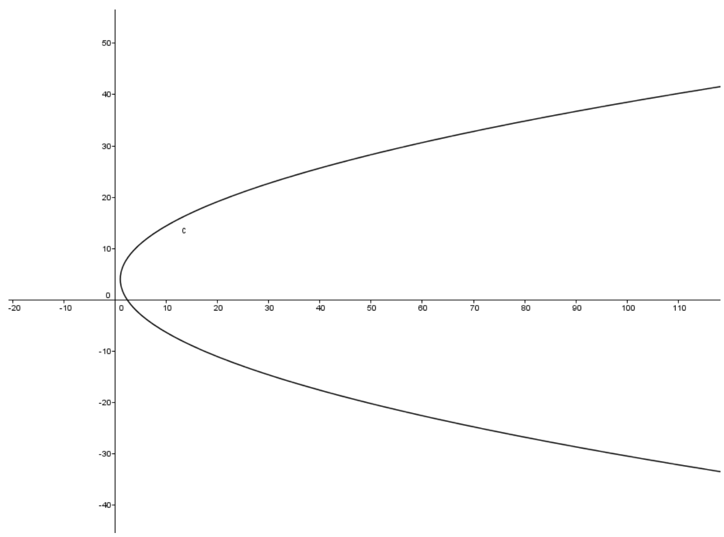


Figura 31: Caso III de la parábola.

Caso 4

Cuando la parábola abre hacia la izquierda, cuya ecuación canónica es:

$$(y - k)^2 = - 4p(x - h)$$

Donde C(h, k) es el centro de “p” el parámetro.

Elementos :

$$V(h,k)$$

$$F(h-p,k)$$

$$I(h+p,k)$$

$$Eje\colon y \ = \ k$$

$$Directriz\colon x \ = \ h \ + \ p$$

Ejemplo : $(y - 3)^2 = -8x$

Ecuación de Parábola de vértice V(0, 3)

$-4p = -8 \Rightarrow p = 2$ parámetro.

Foco:

$F(h - p, k) = F(0 - 2, 4) = (-2, 3)$

$I(h + p, k) = I(0 + 2, 3) = (2, 3)$

Eje $y = 3$

Directriz $x = 0 + 2$ entonces $x = 2$

Veamos su Grafica.

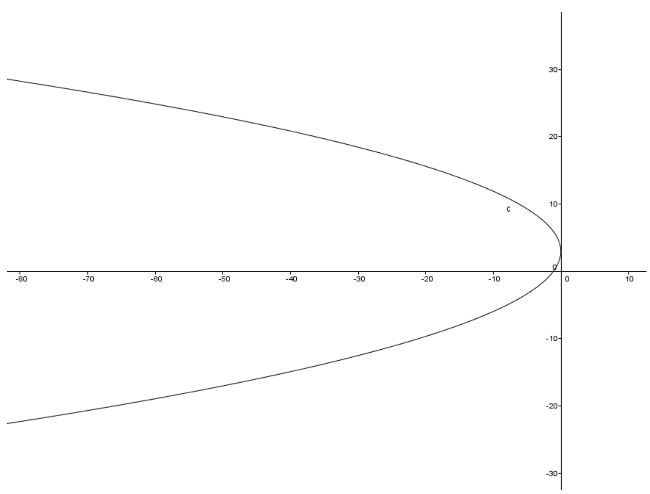


Figura 32: Caso IV de la parábola

Ecuación general de la parábola

Al desarrollar las ecuaciones canónicas, cualquiera que sea el caso llegamos a una ecuación de la forma:

a) $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ o b) $Ay^2 + Cx + Dy + E = 0$

Hipérbola

Ecuaciones en coordenadas cartesianas

Ecuación de una hipérbola con centro en el origen de coordenadas $(0,0)$ y ecuación de la hipérbola en su forma canónica.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

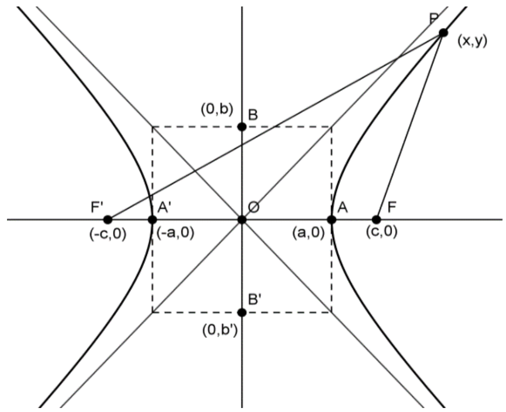


Imagen 12: Elementos de la hipérbola;

tomada de:

http://www.roberprof.com/2009/09/08/hiperbola-def/hiperbola-2/

Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (h,k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ejemplos:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x-8)^2}{36} - \frac{(y-6)^2}{49} = 1$

Si el eje x es positivo, entonces la hipérbola es horizontal; si es al revés, es vertical. La excentricidad de una hipérbola siempre es mayor que uno.

Rectas

Ecuación punto pendiente y ordenada al origen

Dada una recta mediante un punto, $P = (x_0, y_0)$ y una pendiente **m**:

Se puede obtener la ecuación de la recta a partir de la fórmula de la pendiente (ecuación punto-pendiente):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Donde **m** es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas X.

Ejemplo

1. La ecuación de la recta que pasa por el punto A=(2, -4) y que tiene una pendiente de $m = -\frac{1}{3}$

$$x + 3y + 10 = 0$$

2. Observe la siguiente imagen

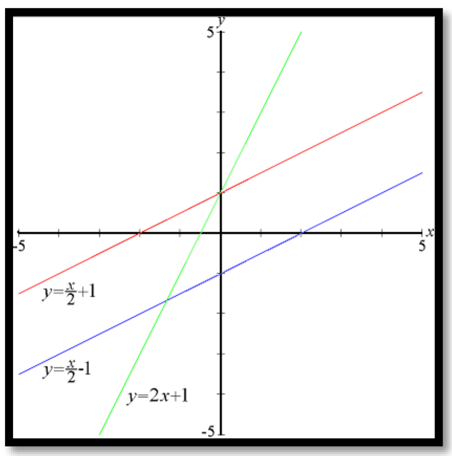


Imagen 13: Gráfico de tres rectas

En la figura hay tres líneas rectas. Las líneas roja y azul poseen la misma pendiente (m) que en este ejemplo es ½, mientras que las líneas roja y verde interceptan al eje y en el mismo punto, por lo que poseen idéntico valor de ordenada al origen (b) que en este ejemplo es el punto x=0, y=1.

Forma simplificada de la ecuación de la recta

Conociendo la pendiente m, y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es (0, b), podemos deducir, partiendo de la ecuación general de la recta,

$$y - y_1 = m(x - x_1):$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = m\,x$$

$$y = m\,x + b$$

Esta es la segunda forma de la ecuación de la recta y se utiliza cuando se conoce la pendiente y la ordenada al origen, que llamaremos b.

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:

LOTERIA DE LAS CONICAS

El material didáctico denominado **"Lotería de las cónicas"** ha sido creado para que el estudiante relacione las ecuaciones de las diferentes secciones cónicas con sus respectivas gráficas. El momento que debe ser aplicado es cuando los estudiantes de grado noveno estudien por primera vez el tema de las secciones cónicas es recomendable usarlo como forma de evaluación porque el estudiante debe identificar cada ecuación y realizar cálculos para obtener centros, ejes, amplitudes entre otros, que le permitirán deducir la respectiva gráfica. Aunque también puede ser usado en grados 10 y 11 como forma de repaso ya que en estos grados se ve el tema de funciones donde las ecuaciones de las secciones cónicas pasan a ser funciones.

FASE PROPOSITIVA:

Una clase antes de la aplicación del material el docente debe dar a conocer las tablas del juego planteando la siguiente actividad

Actividad

El docente debe dar las siguientes instrucciones

1) Conformar grupos de 4 estudiantes.

2) Entregar a cada grupo un tablero de la lotería de las cónicas que consta de 6 graficas de secciones cónicas.

3) Los estudiantes deben utilizar algunos trucos matemáticos para identificar la ecuación correspondiente de cada una de las gráficas.

4) Luego entregar seis ecuaciones para que los estudiantes construyan la respectiva gráfica.

Luego cada grupo debe socializar las técnicas que utilizaron para hallar las ecuaciones. El primer grupo en terminar esta actividad tendrá un incentivo en las notas.

ACTIVIDAD

Para la utilización del material didáctico “Lotería de las cónicas” el docente debe seguir las siguientes instrucciones.

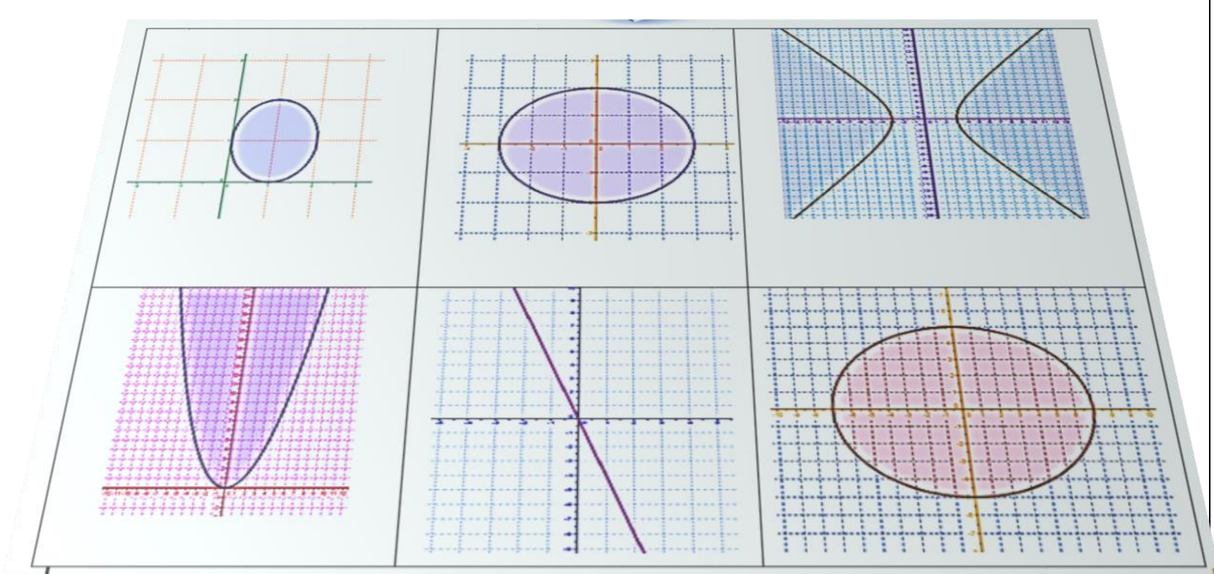
Ya una vez el estudiante aprenda como representar la gráfica algebraicamente el docente debe dar la sorpresa de que la evaluación es un juego llamado “la lotería de las cónicas” este se juega igual a las loterías infantiles.

Recuerde: en las loterías infantiles por lo general son para 4 o 8 personas y hay un encargado en sacar las fichas de una bolsa una por una y el participante que tenga en su tabla la imagen sacada la pide inmediatamente, este juego lo gana el primero llenar su tabla por lo general estas tienen 6 o 8 imágenes y estas no se repetían en los tableros que contiene el juego.

Los cambios en la lotería de las cónicas es que las imágenes que en este caso son graficas se repiten en varias tablas y estas no se tapan con la ficha que saca el réferi si no con cartones blancos que se entregan al comenzar el juego.

Ejemplo:

Se saca una ficha de la bolsa, en este caso salió la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, cada jugador observa en un su lotería si se encuentra la gráfica de esta cónica



Luego se tapa con el cartón

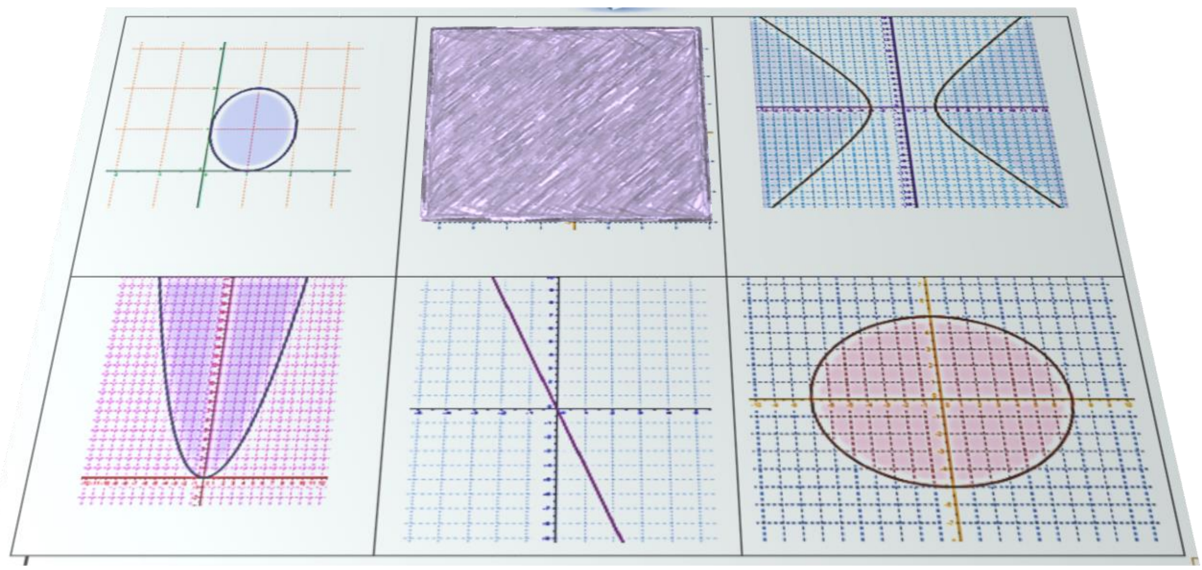


Imagen 14: Ejemplo del uso de la Lotería de las Cónicas

Instrucciones de la actividad

El docente entregara a cada estudiante un tablero y seis cartones del material didáctico “Lotería de las cónicas”. La distribución de los estudiantes en el salón de ser equidistante para evitar fraude en la actividad.

Una vez todos los estudiantes tengan los tableros y los respectivos cartones, el docente debe empezar a sacar las ecuaciones de la bolsa.

El ganador es el primero en tapar todas las secciones cónicas, pero el resto de estudiantes deben esperar que el docente verifique que son correctas, de lo contrario el juego debe continuar hasta cuando haya un ganador

Una vez haya un ganador, el docente debe verificar a cada estudiante que cónicas tapo para que evidencia si adquirieron los objetivos de la guía y pueda tener argumentos al momento de la evaluación.

EVALUACIÓN

Este material didáctico sirve de evaluación en la temática de las secciones cónicas o al momento de explicar funciones es un material didáctico pertinente para recordar preconceptos.

Durante el proceso de heteroevaluación de esta guía es importante tener en cuenta los aspectos evaluativos en cuanto a lo conceptual, procedimental y actitudinal aplicados en el desarrollo de las fases y actividades de la guía.

Pero es necesario realizar la autoevaluación y coevaluación de la aplicación del material didáctico y poder cada vez hacer el uso de este más efectivo. Además se pretende de que la evaluación sea integral

BIBLIOGRAFIA

1. Moreno Álvarez, K.D. Karladma. *Secciones cónicas*. Recuperado de *karladma.pbworks.com/f/**SECCIONES**+**CÓNICAS**.doc*

2. Anónimo. Robertprofe. *Hipérbola.* Recuperado de *http://www.roberprof.com/2009/09/08/hiperbola-def/hiperbola-2/*

3.3.2Guía: Encajadora Trigonométrica:

	Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.	

TEMA:	Trigonometría
GRADO:	Décimo y Once
DURACIÓN:	**3 horas**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Pensamiento Espacial y los sistemas Geométrico
MATERIAL DIDACTICO	Encajadora Trigonométrica.
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

La encajadora trigonométrica consta de un tablón con abertura en forma de triángulos Los cuales indican explícitamente alguna parte que lo compone ya sea lados, ángulos, alturas entre otros y fichas que corresponden implícitamente a las aberturas pero las cuales el estudiante debe deducir matemáticamente a cual corresponde, este material sirve para mostrar de lo significativo de la geometría como también realizar una evaluación diferente de los contenidos relacionados a resolución de triángulos.

OBJETIVO GENERAL:	Aprender varios métodos en la solución de problemas de trigonometría para luego lograr en el estudiante la habilidad de escoger el método adecuado para llegar a la solución fácilmente.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Reconocer los diferentes métodos para la solución de problemas relacionados a triángulos. Asociar un problema trigonométrico a un método de solución logrando ser así más ágil a la hora de desarrollar un problema. Deducir los valores de las relaciones trigonométricas para ciertos ángulos significativos mediante el uso repetitivo de la encajadora trigonométrica.
CONTENIDOS:	Teorema de Pitágoras, Relaciones trigonométricas, Teorema de seno y Teorema del coseno.

FASE INTERPRETATIVA

La Trigonometría es la rama de la Matemática que trata de las relaciones entre los lados y ángulos de triángulos (polígonos con tres lados). La trigonometría plana trabaja con figuras geométricas pertenecientes a un único plano, y la trigonometría esférica trata de los triángulos que son una sección de la superficie de una esfera.

Como aparece en (Fernandez, s.f.), La trigonometría comenzó como una Matemática eminentemente práctica, para determinar distancias que no podían ser medidas directamente. Sirvió a la navegación, a la agricultura y a la astronomía. Al lidiar con la determinación de puntos y distancias en tres dimensiones, la trigonometría esférica amplio su aplicación a la Física, a la Química y a casi todas las ramas de la ingeniería, en especial en el estudio de fenómenos periódicos como la vibración del sonido y el flujo de corriente alternada.

La trigonometría comenzó con las civilizaciones babilónica y egipcia y se desarrolló en la Antigüedad gracias a los griegos e indianos. A partir del siglo VIII d.C., astrónomos islámicos perfeccionaron los descubrimientos griegos e indianas, notablemente en relación a las funciones trigonométricas.

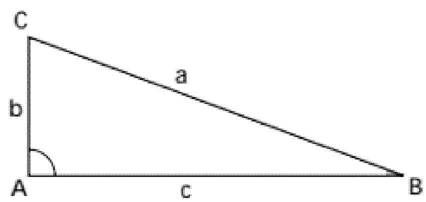
La trigonometría moderna comenzó con el trabajo de matemáticos en Occidente a partir del siglo XV. El invento de los logaritmos por escoces John Napier y del cálculo diferencial e integral por Isaac Newton auxiliaron los cálculos trigonométricos.

De aquí se mostrará y deducirá algunos teoremas y relaciones trigonométricas que se utilizan en la resolución de problemas.

FASE ARGUMENTATIVA

En trigonometría todo gira alrededor de la resolución de triángulos, la encajadora trigonométrica incentiva al uso de varios de estos métodos de solución es por esto que de una manera muy reducida se dará las formulas y explicación de: Teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, teorema de seno y teorema del coseno.

TEOREMA DE PITAGORAS



$$a^2 = b^2 + c^2$$

De esta fórmula se obtienen las siguientes:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$\boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2}} \qquad \boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2}} \qquad \boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Figura 33: Fórmulas relacionadas al Teorema de Pitágoras.

JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.1

Ejemplo

Para el siguiente triángulo equilátero, halla el valor de x, el perímetro y el área.

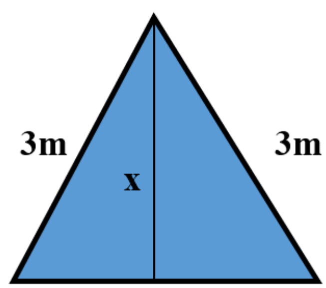


Figura 34: Triangulo 1

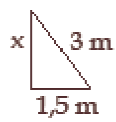
Solución:

El perímetro es la suma de los lados. En este caso:

$$P = 3 + 3 + 3 = 9m$$

Calculemos x:

$x^2 + (1.5)^2 = 3^2$



$\Rightarrow x = \sqrt{9 - 2.25} = 2.6m$

Calculemos el área

$$A = \frac{base.altura}{2} = \frac{3.x}{2} = \frac{3(2.6)}{2} = 3.9m^2$$

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo:

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

Son las siguientes funciones:

La función seno, coseno, tangente, cosecante, secante y

Cotangente. Todas ellas pueden entenderse como

Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo.

Veamos las expresiones de cada una de ellas referidas a

los ángulos a y p del triángulo rectángulo aquí representado:

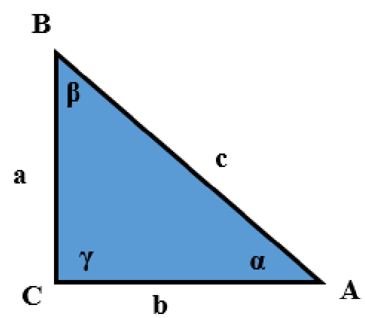


Figura 35: Triángulo Rectángulo

función seno	función coseno	función tangente
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{a}$	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$	$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{b}{a}$

Cuadro 7 : Relaciones trigonométricas Para el ángulo α :

JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.1.

función seno	función coseno	función tangente
$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{b}$	$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$	$\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{b}$

Cuadro 8: Relaciones trigonométricas Para el ángulo β

JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.2

ángulo		sen	cos	tg	ángulo		sen	cos	tg
0°	0 rad	0	1	0	60°	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
30°	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	90	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞
45°	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	180°	π rad	0	-1	0

Cuadro 9: Valores del seno, coseno y tangente para ciertos ángulos significativos en grados y radianes JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.2.

Ejemplo

1. Calcula las relaciones trigonométricas directas de α y β.

Solución

Las razones trigonométricas directas son

Seno, el coseno y la tangente.

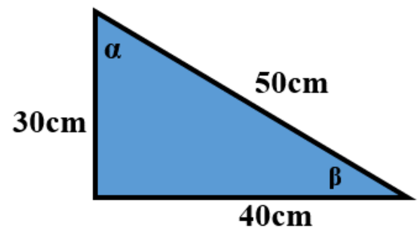


Figura 36: Ejemplo Triángulo Rectángulo

- Para el ángulo α :

$$sen\ \alpha = \frac{40}{50} \Rightarrow sen\ \alpha = 0.8$$

$$\cos\alpha = \frac{30}{50} \Rightarrow \cos\alpha = 0.6$$

$$\tan\alpha = \frac{40}{30} \Rightarrow \tan\alpha = 1.33$$

Observa que se cumple que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Para el ángulo β :

$$sen\ \beta = \frac{30}{50} \Rightarrow sen\ \beta = 0.6$$

$$\cos\ \beta = \frac{40}{50} \Rightarrow \cos\ \beta = 0.8$$

$$\tan\ \beta = \frac{30}{40} \Rightarrow \tan\ \beta = 0.75$$

Observa que también se cumple que $sen^2\beta + \cos^2\beta = 1$, como no podía ser de otra manera.

2. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30°.

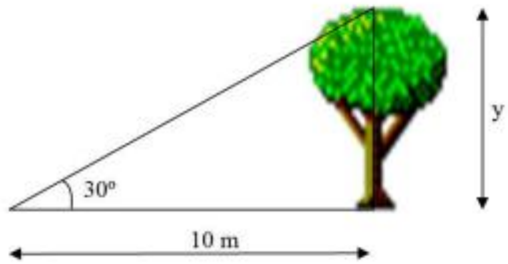


Figura 37: : problema número 1 tomado de: http://aplicaciones.colombiaaprende.edu.co/red_privada/sites/default/files/problemas_de_aplicacion.pdf

Solución:

La altura, y, del árbol la deducimos de la relación siguiente:

$$\tan\ 30° = \frac{y}{10} \Rightarrow\ \mathrm{y} = 10\tan\ 30° \Rightarrow y = 5.77$$

Fórmula Herón

"Herón de Alejandría vivió hacia el siglo III a. de C. Son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos **s** al semiperímetro y **a**, **b**, **c** a los tres lados" (Gomez, s.f.)

Llamando al semiperímetro

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

entonces el área puede expresarse como

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

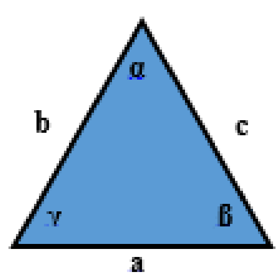


Figura 38: Fórmula de Herón

Teorema del seno

Se utiliza paro relacionar los lados de un triángulo con los ángulos opuestos a estos lados.

Partiendo de un triángulo general, en el que los lados se expresan en minúsculas y los ángulos en mayúsculas, como el que se muestra:

Teniendo en cuenta que los triángulos parciales, ACH y BCH, son triángulos rectángulos, podemos poner, de la definición de seno:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\ sen\ A \\ sen\ B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\ sen\ B \end{array}\right\} b\ sen\ A = a\ sen\ B \ \Rightarrow \ \frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

Si trazamos la altura h correspondiente a este otro triángulo, el anterior, girado.

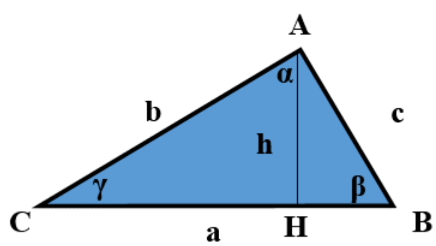


Figura 39: Teorema del Seno

Lo que nos queda es la siguiente expresión:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\ sen\ C \\ sen\ B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\ sen\ B \end{array}\right\} b\ sen\ C = c\ sen\ B \ \Rightarrow \ \frac{c}{sen\ C} = \frac{b}{sen\ B}$$

Con todo lo anterior el teorema del seno se suele enunciar de la forma siguiente, hay que tener en cuenta que esto permite varias combinaciones para su utilización, de la que elegiremos la más conveniente de las tres:

$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{sen\,A}=\dfrac{b}{sen\,B}\\ \dfrac{b}{sen\,B}=\dfrac{c}{sen\,C}\\ \dfrac{a}{sen\,A}=\dfrac{c}{sen\,C}\end{cases}$$

Ejemplo

Un camino recto hace un ángulo de 25° con relación a la horizontal. Desde el punto A sobre el camino, el ángulo de elevación a un avión es de 57°. En el mismo instante, desde otro punto B situado a 120 metros de A, el ángulo de elevación es de 63°. Encuentra la distancia del punto A hasta el avión y la altura a la que vuela el avión con respecto a la horizontal.

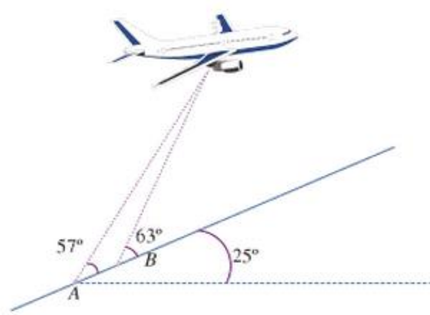


Figura 40: Problema 4 sección VII pagina 270 (Patricia Carrasco, 2010)

Solución

$$\frac{sen\,6°}{120}=\frac{sen\,117}{b}$$

La distancia desde el punto A hasta el avión es de aproximadamente 1022,88 m

$$b\,sen\,6° = 120 sen 117°$$

$b = \frac{120\, sen\, 117}{sen\, 6°} \Longrightarrow\ b = 1022{,}88m$

La altura a la que vuela el avión con respecto a la horizontal es de aproximadamente 1012,92

$$sen\ 82° = \frac{h}{1022{,}88\ m}$$

$$h = 1022{,}88\ m\ sen\ 82° \Longrightarrow\ h = 1012{,}9$$

Teorema del coseno.

Sabemos por ley de Cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

En general, en todo triángulo ABC

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$cosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

En la figura se ha trazado la altura AD sobre la

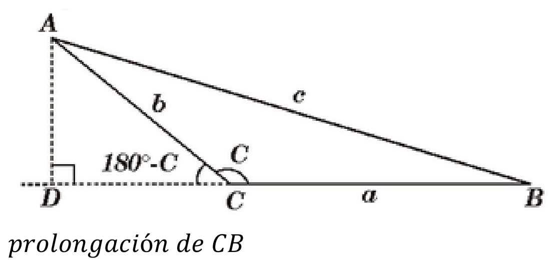


Figura 41: Teorema del Coseno

En el triángulo rectángulo ADC, por resolución de triángulos rectángulos tenemos:

$$AD = bsen(180° - C) y\ DC = bcos(180° - C)$$

$$AD = bsen(C) y\ DC = -bcos(C)$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo Rectángulo ADB tenemos:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow c^2 = (bsenC)^2 + (-bcosC + a)^2$$

$$\Rightarrow c^2 = b^2sen^2C + a^2 - 2abcosC + b^2cos^2C$$

$$\Rightarrow c^2 = b^2(sen^2C + cos^2C) + a^2 - 2abcosC$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

Del mismo modo se demuestra los otros dos teoremas

Consecuencia: El coseno de un ángulo se puede expresar en función de los lados, así:

$$cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \ cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Ejemplo:

En un triángulo ABC se tiene que:

$$a = 3, b = 4\ \ y\ C = 60°$$

Calcular la longitud del lado AB.

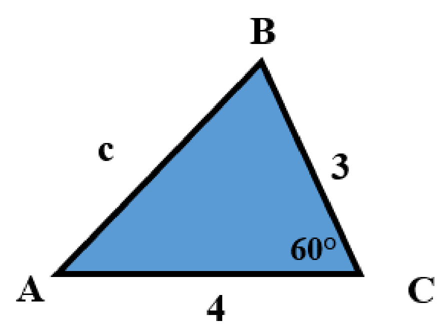


Figura 42: Ejemplo de Teorema del Coseno

Solución:

Del triángulo observamos que $AB = c$,

$Cos\ 60° = 0.5$ aplicamos la ley de cosenos, así:

$$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2.12.\frac{1}{2}$$

$$c^2 = 25 - 12 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

Así queda mostrado que $c = \sqrt{13}$

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:

ENCAJADORA TRIGONOMETRICA

Está diseñado para ser aplicado al final del tema de trigonometría, la temática es la siguiente:

- Se forman grupos de n estudiantes (queda a consideración del docente).
- Se tiene dos áreas donde se va a realizar el juego didáctico en una donde se encuentran los tablones y en la otra las fichas.
- Dos estudiantes de cada grupo debe ubicarse en la área de fichas, las cuales se encuentran en una bolsa.
- Cuando se dé la señal de inicio un estudiante debe sacar una ficha y escribir en una hoja la información que se da en ella y llevarla al grupo que se encuentra en la segunda área.
- El grupo resuelve las incógnitas si esa ficha corresponde algún vacío tiene que darle la señal al otro miembro para que lleve la ficha y dos nuevos miembros van a la zona dos y repiten el proceso de no ocurrir un nuevo miembro se dirige a la zona dos y repiten el mismo proceso,
- gana el equipo que logre llenar todas las aberturas.

FASE PROPOSITIVA:
ACTIVIDAD: **1** Se forma grupos de n personas **2** Se ubican dos áreas donde se va aplicar el material Primera zona: Tablones Segunda zona: fichas **3** Dos miembros de cada grupo se ubica en la segunda área. **4** Se da inicio a la temática ,comienza retirando una ficha de la bolsa **5** Uno de los miembros lleva la información vista en la ficha, el resto del grupo la resuelve y verifica si es posible que encaje en el tablón. **6** De ser posible el encaje, el miembro restante lleva la ficha y dos nuevos miembros se dirigen a la segunda zona y retoman el proceso, de no serlo se descarta la ficha y un nuevo miembro va a la segunda zona y retoman el mismo proceso. **7** Gana el grupo que termine con el menor número de errores en el mejor tiempo posible (El tiempo vale el 60% de la competencia y el número de errores 40%) **Ejemplo:** Para dos grupos: A 8 minutos y 4 errores y B 8 minutos 30 segundos y 2 errores Se procede así : $X = \left(\frac{menor\ tiempo}{tiempo\ \ del\ grupo}\right)\frac{60}{100} + (\frac{menor\ numero\ de\ errores}{errores\ del\ grupo})\frac{40}{100}$ X Puntaje por equipo, menor tiempo en la competencia = 8 minutos, menor número de errores= 2 y en este caso el equipo ganador es B.

Ejemplos:

1. Calcular el valor de los lados a y c

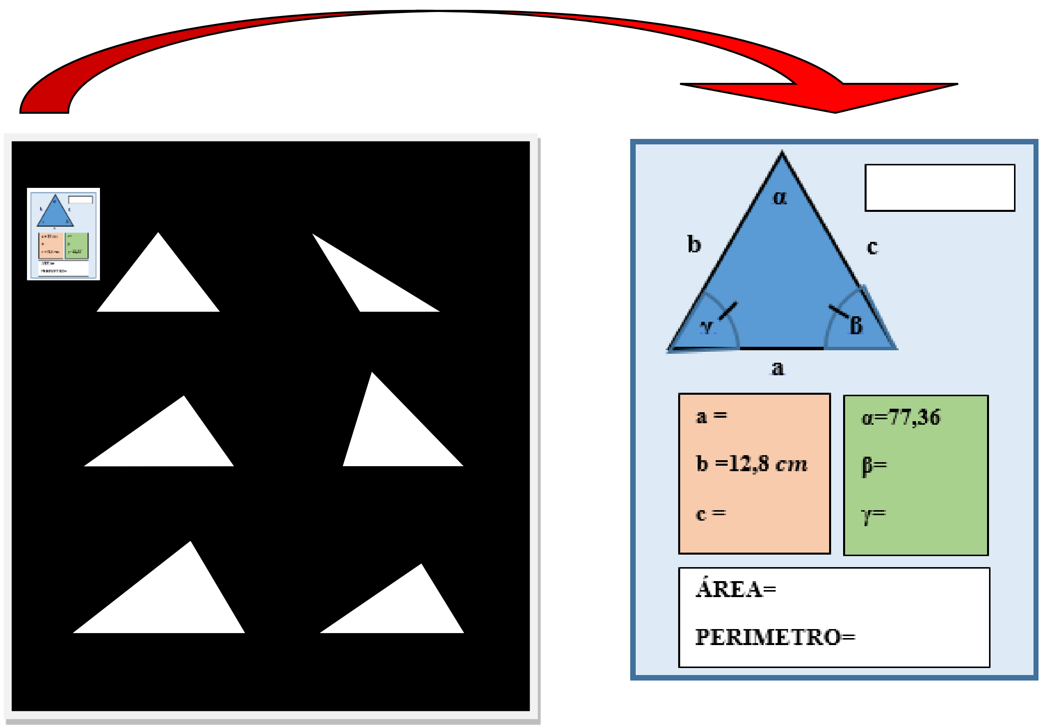


Imagen 15: Ejemplo 1 del Uso de La Encajadora Trigonométrica

Solución:

como los ángulos β y γ son congruentes y la siguiente relación se cumple en todo triangulo

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

De aquí tenemos que

$$\beta + \gamma = 180° - 77{,}36° \Rightarrow \beta = \gamma = 51{,}32°$$

Aplicando el Teorema del seno y sustituimos los valores dados en la expresión del teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{12.8sen\ 51{,}32°}{sen\ 51{,}32°} = 12.8m \\ a = \dfrac{12.8sen\ 77{,}36°}{sen\ 51{,}32\ °} = 16\ m \end{cases}$$

Se puede observar un lindo resultado de los triángulos, donde los lados opuestos a los ángulos congruentes son entre ellos congruentes.

2. Calcular el valor de c

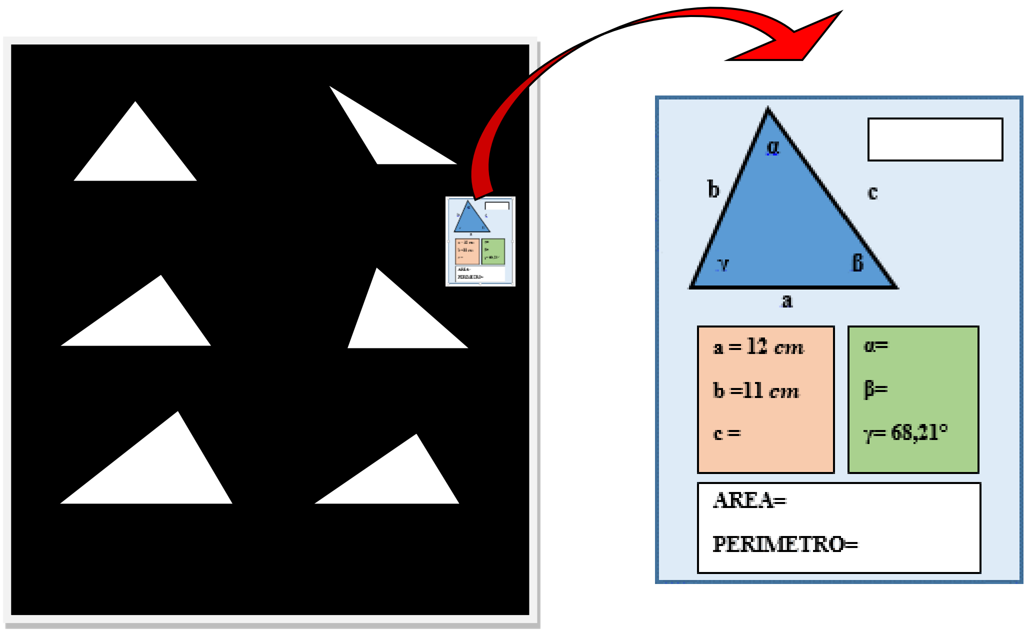


Imagen 16:Ejemplo 2 del Uso de La Encajadora Trigonométrica

Solución:

Aplicamos el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

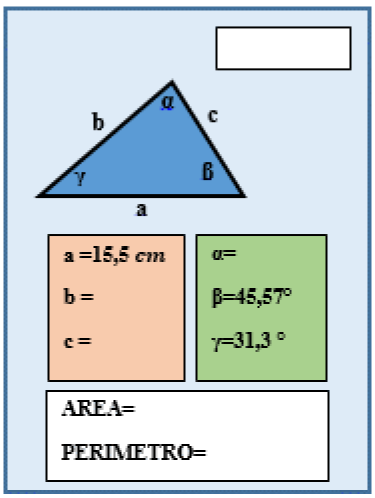
Sustituimos los valores en la expresión y se tiene entonces:

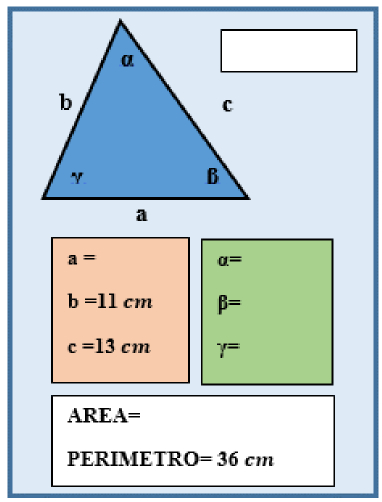
$$c^2 = 12^2 + 11^2 - 2(12)(11)\cos 68{,}21° \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{144 + 121 - 264\cos 68{,}21°} = 13\ \text{cm}$$

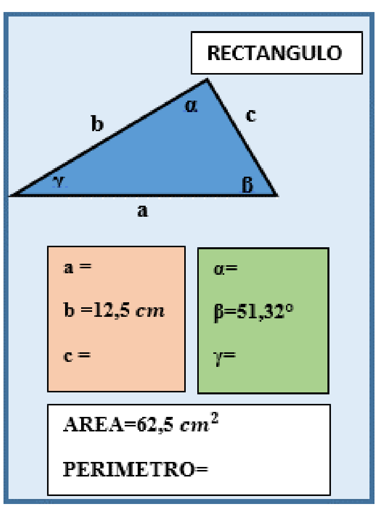
EJERCICIOS
Después de realizar la actividad, se pide a los estudiantes encontrar el método más rápido para solucionar los siguientes triángulos, compararlos con otros métodos y posteriormente justificar su respuesta.

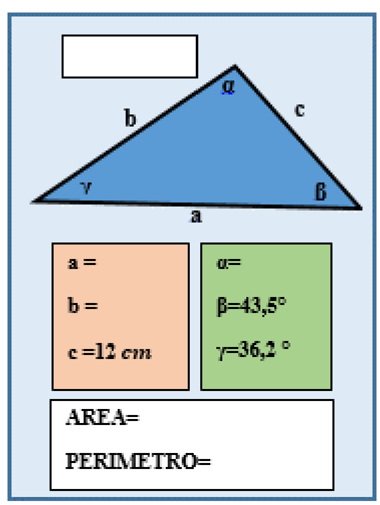
1.





2.





3.

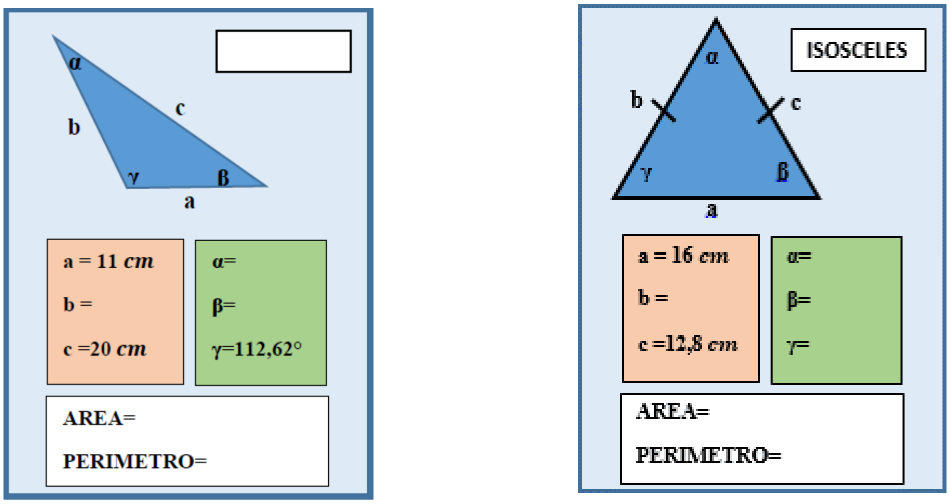


Figura 43: Ejercicios de Resolución de Triangulos

EVALUACIÓN

La actividad es cooperativa es así que la evaluación es de acuerdo al rendimiento grupal por ende se debe observar que se prime el trabajo en equipo, además valorar la actitud individual al realizar la actividad con el material didáctico ENCAJADORA TRIGONOMÉTRICA, al finalizar se debe realizar una evaluación en la cual se analice los resultados obtenidos y como podría mejorarse la actividad, proponiendo variaciones en el juego tal que se logre rápidamente los objetivos propuestos en esta guía.

BIBLIOGRAFIA

Fernandez, A. (s.f.). Iniciación a la Trigonometria. Obtenido de lectura recomendada(Historia de la Trigonometría): http://perso.wanadoo.es/amiris/trigonometria/documentos/lecturatrigo.html

Gomez, J. M. (s.f.). Matemática, Filosofía,Musica,Cine,Humos...y otra yerbas Digestivas. . Obtenido de Formula de Heron:

http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/proteo/formulaheron.htm

Pascual, J. J. (s.f.). Matematicas. Obtenido de TIMONMATE (Ejercicio Resuletos de Trigonometria): http://matematicasjjp.webcindario.com/pitagoras_resueltos.pdf

Pascual, J. J. (s.f.). Matemáticas. Obtenido de TIMONMATE: http://perso.wanadoo.es/timonmate/

Pascual, J. J. (s.f.). TIMONMATE. Obtenido de http://aplicaciones.colombiaaprende.edu.co/red_privada/sites/default/files/problemas_de_aplicacion.pdf

Sevilla, D. (19 de JULIO de 2000). MATEMATICA. Obtenido de TIMONMATE:http://perso.wanadoo.es/timonmate/

3.3.3 Guía: Concéntrese Matemático

Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.

TEMA:	Derivación
GRADO:	Once
DURACIÓN:	**2 hora**
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Variacional y Sistemas Algebraicos y analíticos
MATERIAL DIDACTICO	Concéntrese Matemático
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

El concéntrese Matemático pretende promover una clase de repaso de temas con otra dinámica (juegos didácticos), el nombre hace referencia a el común juego concéntrese en el cual se trata de armar duplas, a diferencia de este se puede realizar algunas modificaciones para que en las soluciones se puedan relacionar definiciones, propiedades u otro tipo de elementos en matemáticas.

OBJETIVO GENERAL:	Aplicar las derivadas fundamentales en problemas de aplicación sin necesidad de recurrir a una tabla o a su deducción.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Solucionar una derivada de una función en su representación más general usando las estructuras expuestas en el concéntrese. Recordar de una manera más significativa las derivadas de funciones fundamentales por medio de las relaciones constantes en la solución del concéntrese. Entender la regla de la cadena relacionando las soluciones de funciones compuestas que están en el concéntrese.
CONTENIDOS:	Derivadas. Reglas de Derivación. Regla de la cadena.

FASE INTERPRETATIVA

Derivada de una función

Definición de derivada de una función en un punto

Comenzamos, como no podía ser de otra forma, introduciendo la definición formal de derivada de una función $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{x_0}$

Definición: Sea $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ Se define la derivada de la función $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{x_0}$ y se representa por $\mathbf{f}'(\boldsymbol{x_0})$ como el límite (si existe):

$$\mathbf{f}'(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{x_0})}{\mathbf{h}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

En el caso de que ese límite exista, diremos que $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{x_0}$.

Una función $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice derivable si es derivable en cada uno de los puntos de su dominio. Si $\boldsymbol{f}$ es una función derivable, podemos definir a partir de ella una nueva función que recibe el nombre de función derivada. Dicha función se denota por $\boldsymbol{f}'$ y su definición es la siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}':\ ]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\rightarrow \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Aunque veremos más adelante, existen fórmulas y reglas que permiten calcular las derivadas de algunas funciones sin tener que recurrir al cálculo del límite

que aparece en la definición de derivada anteriormente presentada. Sin embargo, en ocasiones estas reglas no pueden ser aplicadas, y en esos casos
resulta necesario el cálculo del límite. Por ello, repasemos con algunos ejemplos
el cálculo de derivadas utilizando la definición anterior:

Ejemplo

Dada la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, calcula $\boldsymbol{f'(-3)}$ usando la definición de derivada.

Solución:

Utilizando la definición de derivada **(1.1)** se tiene que

$$\mathbf{f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Calculando los elementos que aparecen en el numerador

$$\begin{aligned} \mathbf{f(-3+\boldsymbol{h})} &= \mathbf{(-3+h)^2 + 1 = (-3)^2 + h^2 + 2(-3)h + 1} \\ &= \mathbf{9 + h^2 - 6h + 1} \\ &= \mathbf{h^2 - 6h + 10} \qquad \textbf{(1.3)} \end{aligned}$$

Y

$$\mathbf{f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en **(1.3)** y **(1.4)** en la ecuación **(1.2)** obtenemos

$$\mathbf{f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 6h + 10 - 10}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{h^2 - 6h}}{\boldsymbol{h}}}$$

Si en este punto sustituimos h por 0 obtenemos como resultado la indeterminación Sin embargo, en el numerador de la fracción anterior no aparece término independiente. Entonces podemos sacar factor común de h en el numerador y simplificar con la h que aparece en el denominador obteniendo

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h-6)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (h-6) = 0 - 6 = -6$$

Siempre que calculamos la derivada de un polinomio usando la definición llegamos a la situación anterior, es decir, indeterminación de la forma £ donde podremos sacar factor común de h y simplificar.

FASE ARGUMENTATIVA

Cálculo de derivadas

Reglas de derivación

A continuación damos las propiedades de las derivadas con respecto a las operaciones entre funciones.

Sean f, g: (a, b)⟶ R funciones derivables en un punto x_0 Є (a, b) entonces:

$$(c.f)'(x_0) = c.f'(x_0) \qquad (2.1)$$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad (2.2)$$

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \qquad (2.3)$$

$$(\mathbf{f.g})'(\mathbf{x_0}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x_0})\mathbf{g}(\mathbf{x_0}) + \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\mathbf{g}'(\mathbf{x_0}) \qquad \textbf{(2.4)}$$

Si $\mathbf{g}(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{0}$, entonces.

$$\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)'(\mathbf{x_0}) = \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x_0})\mathbf{g}(\mathbf{x_0}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\mathbf{g}'(\mathbf{x_0})}{\mathbf{g}(\mathbf{x_0})^2} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Estas propiedades se obtienen directamente de la definición de derivada.

Con respecto a la composición de funciones, la regla de la cadena da la respuesta a cómo calcular la derivada de composiciones de funciones.

Proposición: Sean **f: (a, b) —>(c, d) y g: (c, d) -> R** funciones reales de variable real, sea **x_0 Є (a, b)** tal que f es derivable en x_0 y g es derivable en **f(x_0).** Entonces es derivable en **x_0** y la derivada se obtiene mediante la expresión ***g o f***

En esta parte de la guía calculará derivadas aplicando las reglas de derivación. Introduciremos éstas de forma progresiva y para cada una de ellas algunos

Ejemplos de aplicación. Utilizando las reglas de derivación, la regla de la cadena y la tabla que mostramos a continuación procederemos a mostrar distintos ejemplos del cálculo de las mismas.

Se analizará cada una de las fórmulas que aparecen en la tabla. Dichas fórmulas se obtienen como consecuencia de la definición de derivada.

Función	Derivada
1. $y = x^n$	$y' = nx^{(n-1)}$
2. $y = (f(x))^n$	$y' = n(f(x))^{(n-1)}f'(x)$
3. $y = e^{(f(x))}$	$y' = e^{f(x)}f'(x)$
4. $y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}f'(x)lna$
5. $y = \ln(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
6. $y = log_a(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}log_a e$
7. $y = sen(f(x))$	$y' = f'(x)\cos(f(x))$
8. $y = \cos(f(x))$	$y' = -f'(x)sen(f(x))$
9. $y = \tan(f(x))$	$y' = f'(x)sec^2(f(x))$
10. $y = senh(f(x))$	$y' = f'(x)\cosh(f(x))$
11. $y = \cosh(f(x))$	$y' = f'(x)\text{senh}(f(x))$
12. $y = \tanh(f(x))$	$y' = f'(x)\text{sech}^2(f(x))$
13. $y = arcsen(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
14. $y = arccos(f(x))$	$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
15. $y = arctan(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{(f(x))^2+1}$
16. $y = arcsenh(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2+1}}$
17. $y = \text{arccosh}(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\left(\sqrt{f(x)+1}\right)\sqrt{f(x)-1}}$
18. $y = \text{arctanh}(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}$

Cuadro 10: Derivadas de las Funciones fundamentales.

Nota: Observe que en las fórmulas, siempre que aparece una función de f(x), en la derivada correspondiente aparece el factor f(x). Ello es consecuencia de aplicar la regla de la cadena**.**

Ejemplo

Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$

Solución:

Observemos que tenemos dos procedimientos para el cálculo de esta derivada.

• Primer procedimiento. Utilizando exponentes negativos,

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}}$$

Se tiene que luego

$$\boldsymbol{y' = (-2)x^{-2-1} = (-2)x^{-3}}$$

Una vez que hemos finalizado el cálculo de la derivada, el exponente negativo nos ha servido como herramienta para obtener la derivada, pero ahora daremos una expresión de la derivada evitando usar exponentes negativos.

Así, dado $\boldsymbol{x^{-3} = \frac{1}{x^3}}$ que obtenemos

$$\boldsymbol{y' = (-2)\frac{1}{x^3} = \frac{-2}{1}.\frac{1}{x^3} = \frac{-2}{x^3}}$$

Segundo procedimiento. A partir de la fórmula de la derivada de un cociente, **(2.5).**

Aplicando dicha fórmula se tiene que:

$$\boldsymbol{y' = \frac{(1)'x^2 - 1(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0.x^2 - 1(2x)}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}}$$

Evidentemente, el resultado después de aplicar ambos procedimientos es el mismo.

Ejemplo

Calcula la derivada de la función

$$\boldsymbol{y = \frac{x^4 - 5}{x^3 + 6}}$$

Solución:

Para el cálculo de esta derivada aplicaremos la fórmula de la derivada de un cociente de funciones, **(2.5)**, obteniendo

$$\boldsymbol{y' = \frac{(x^4 - 5)'(x^3 + 6) - (x^4 - 5)(x^3 + 6)'}{(x^3 + 6)^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(4x^3)'(x^3 + 6) - (x^4 - 5)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}}$$

Y en este punto debemos tener mucho cuidado con el signo menos indicado, ya que afecta a todo lo que sigue. Lo mejor, dejar el menos e incluir dentro de un paréntesis la operación que le sigue.

$$\boldsymbol{= \frac{4x^6 + 24x^3 \ - (3x^6 - 15x^2)}{(x^3 + 6)^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{4x^6 + 24x^3 \ - 3x^6 + 15x^2}{(x^3 + 6)^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{x^6 + 24x^3 + 15x^2}{(x^3 + 6)^2}}$$

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO: **CONCENTRESE MATEMÁTICO**

Aunque en las matemáticas lo ideal es aprender conceptos y recordar estructuras a veces se necesita de la memoria ya que no en todo momento se tiene que deducir, es este el caso de las derivadas básicas, es importante saber la deducción por la definición pero a veces es más práctico para derivadas más complejas, recordar las básicas; por ende este material ofrece la posibilidad de que el alumno cree relaciones de la función con su respectiva derivada y así poder usarla en el momento que requiera de ellas, sin necesidad de recurrir a tablas de derivadas y a partir de esto recordar las estructuras de razonamientos que actúan en estos casos particulares.

Las instrucciones de este juego fueron extraídas de: *http://www.memo-juegos.com/*

Para comenzar la partida, el profesor debe mezclar todas las cartas y colocarlas en cada rejilla, de manera que las imágenes no se vean. El primer jugador dará la vuelta a dos cartas, si son iguales se las lleva, sino las vuelve a voltear. Luego, le toca hacer lo mismo al siguiente jugador, y etc...

El objetivo es lograr memorizar la ubicación de las diferentes cartas con el fin de voltear sucesivamente las 2 cartas idénticas que formen pareja, para llevárselas. La partida se terminará cuando estén todas las parejas encontradas. El jugador que más cartas haya conseguido llevarse, ganará la partida.

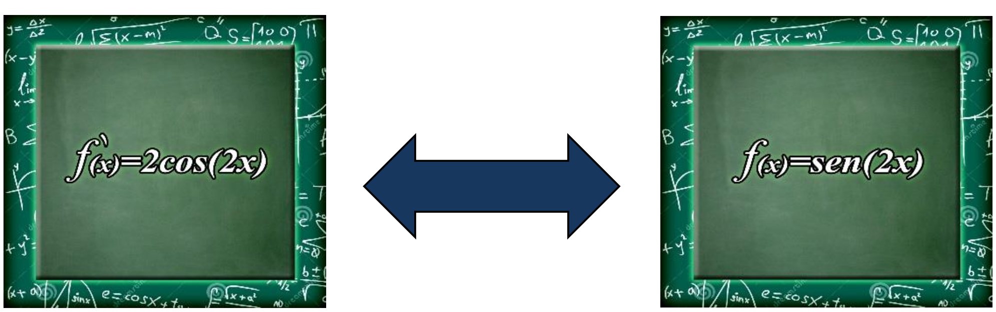


Imagen 17: Ejemplo del uso de Concéntrese Matemáticos

FASE PROPOSITIVA:

Actividad

1. Se propone que se divida el grupo en cuatro equipos, cada equipo tendrá un líder el cual va a voltear las figuras (el equipo no puede ayudar a su líder en ningún momento).
2. Repetir el juego cuatro veces, en cada juego tener un líder diferente.
3. Gana el equipo que tenga más parejas descubiertas.
4. En caso de empate de partidas ganadas, los equipos que estén en esta situación jugaran una vez más para desempatar.
5. Si persiste el empate se dejará al azar el ganador.

Al final de esta actividad, prosigue la realización del siguiente taller. Pero antes el profesor debe realizar el ejemplo dado en esta guía.

EJERCICIOS: Con ayuda del material didáctico "El Concéntrese Matemático" realizar los siguientes ejercicios, aplicando la definición de derivada.

Ejemplo

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = sen\, x}$ entonces

Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{f(x)}$ por la definición.

Aplicar la regla de la cadena para la función $\boldsymbol{f(x) = sen\ 2x}$.

Generalizar el resultado para la función $\boldsymbol{f(x) = sen\, ax}$ donde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$

Solución

1. La función $\boldsymbol{f(x) = sen\ 2x}$ a trabaja se encuentra en el concéntrese

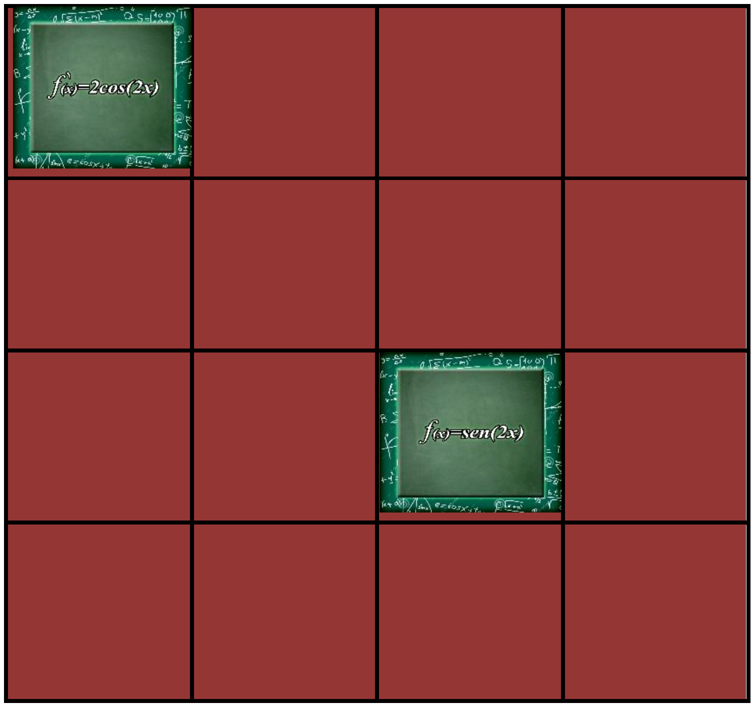


Imagen 18: Representación de la solución en el Concéntrese Matemático

A partir de la definición de la derivada de una función $f(x)$:

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Por tanto si $\boldsymbol{f(x) = sen\ x}$

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x + h) - sen(x)}{h}}$$

A partir de la identidad trigonométrica

$$\boldsymbol{sen(A + B) = (sen(A)\cos(B) + \cos(A)\, sen(B))}$$

se puede escribir

$$\mathbf{f'(\,x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h) - sen(\,x)}{h}}$$

Agrupando los términos $\boldsymbol{sen(x)}$ y $\boldsymbol{cos(x)}$, la derivada pasa a ser

$$\mathbf{f'(\,x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)sen(h) - sen(\,x)(1 - cos(h))}{h}}$$

Reordenando los términos y el límite se obtiene

$$\mathbf{f'(\,x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)sen(h)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)(1 - cos(h))}{h}}$$

Ahora, como sin(x) y cos(x) no varían al variar h, se pueden sacar fuera del límite para obtener

$$\mathbf{f'(\,x) = cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} - sen(x) \lim_{h\to 0} \frac{(1 - cos(h))}{h}}$$

El valor de los límites $\mathbf{\lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h}}$ y $\mathbf{\lim_{h\to 0} \frac{(1-cos(h))}{h}}$

Son 1 y 0 respectivamente por la regla de l'Hópital. Por tanto, si $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$

$$\mathbf{f'(\,x) = cos(x)}$$

2. Aplicamos la regla de la cadena en la función $\boldsymbol{f(x) = sen(2x)}$

$$\boldsymbol{f(x) = goh\,(x) = g(h(x))}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = g'\big(h(x)\big)h'(x)}$$

De esto tenemos entonces que:

$$\boldsymbol{f'(x) = \big(sen(2x)\big)'(2x)'}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = cos(2x)(2)}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = 2cos(2x)}$$

Es esta respuesta la que se tiene en el concéntrese, y así corroboramos entonces la información dada en el material didáctico.

3. Generalizando para una constante $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\boldsymbol{f'(x) = \big(sen(ax)\big)'(ax)'}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = cos(ax)(a)}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = acos(ax)}$$

Ya queda concluido el ejercicio.

Ejercicios

Realizar el mismo procedimiento anterior para las siguientes funciones :

$\boldsymbol{f(x) = arcsen(x)}$: $\boldsymbol{f(x) = arcsen(2x)}$: $\boldsymbol{f(x) = arcsen(ax)}$
$\boldsymbol{f(x) = a^{x}}$: $\boldsymbol{f(x) = a^{2x}}$: $\boldsymbol{f(x) = a^{kx}}$
$\boldsymbol{f(x) = x^{2}}$: $\boldsymbol{f(x) = x^{4}}$: $\boldsymbol{f(x) = x^{n}}$
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[2]{x}}$: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[2]{ax}}$: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{ax}}$
$\boldsymbol{f(x) = sec(x)}$: $\boldsymbol{f(x) = sec(4x)}$: $\boldsymbol{f(x) = sec(ax)}$
$\boldsymbol{f(x)}$ =**ln (x-1)** **:** $\boldsymbol{f(x)}$ =**ln (x-1)** **:** $\boldsymbol{f(x)}$ =**ln (ax-a)**
$\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$: $\boldsymbol{f(x) = e^{2x}}$: $\boldsymbol{f(x) = e^{kx}}$
$\boldsymbol{f(x) = tan(x)}$: $\boldsymbol{f(x) = tan(4x)}$: $\boldsymbol{f(x) = tan(ax)}$

EVALUACIÓN

La idea principal es el reconocimiento y memorización de las derivadas de funciones fundamentales, es por esto que la evaluación debe ser procedimental, realizando derivadas compuestas, es importante también que se haga una evaluación de la actividad como también el desempeño y la actitud individual frente al uso del material.

BIBLIOGRAFÍA

Rouger, E. Memojuegos. Francia. Extraída de *(http://www.memo-juegos.com/instrucciones-del-juego-de-memoria).*

Molina, J.y Muñoz, M. (2012). DERIVADAS: Cálculo y Aplicaciones. Recuperado de *https://books.google.com.co/books?id=SejjPZg0jz8C&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false.*

3.3.4 Guía: Dominó Matemático:

Guía de Aprendizaje Para el Fortalecimiento del Pensamiento Lógico Matemático para el docente.

TEMA:	Multi-tema
GRADO:	Décimo y once
DURACIÓN:	2 horas
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
MATERIAL DIDACTICO	Dominó Matemático
GUIA PRACTICA PARA EL DOCENTE	

PRESENTACIÓN

Este material pretende desarrollar habilidades de reconocimiento de funciones matemáticas con sus respectivas operaciones o variaciones, el nombre hace alusión al famoso juego de domino donde se relacionan siete números, en este material se relacionan funciones, graficas, límites de funciones, derivadas, antiderivada, Etc.

OBJETIVO GENERAL:	Lograr la adquisición de un pensamiento más amplio de la representación de una función en todo tipo de diversidad de expresiones para poder así llegar a un dominio más general del contenido allí propuesto.
OBJETIVOS ESPECIFICOS:	Asociar expresiones algébricas con gráficos coordenados por medio del uso repetitivo del material didáctico Dominó Matemático. Memorizar un concepto y sus diferentes representaciones a partir de uso repetitivo del material didáctico Dominó Matemático. Crear procesos mentales de asociación a partir del uso del dominó matemático para facilitar el dominio en matemáticas de los estudiantes.
CONTENIDOS:	Limites. Derivadas. Integrals. Funcione..

FASE INTERPRETATIVA
Las **funciones matemáticas** se utilizan en muchos aspectos de nuestras vidas. Desde negocios a centros de noticias, las funciones matemáticas se utilizan para representar las tendencias económicas, los precios que suben y bajan, y muchas más situaciones. **Definición** Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B. el conjunto A se denomina dominio de la función y el rango de la función es un subconjunto de B formado por todos los valores asignados Ser capaz de **graficar funciones matemáticas** nos permite tener una mejor y más profunda comprensión de cómo estas funciones se comportan. La **representación gráfica de funciones matemáticas** también nos permite practicar muchos otros conceptos matemáticos, como las operaciones, los valores informáticos y los pares. En matemáticas, la factorización es una técnica que consiste en la descripción de una expresión matemática (que puede ser un número, una suma, una matriz, un polinomio, etc.) en forma de producto. Existen distintos métodos de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es simplificar una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales», que recibe el nombre de factores, como por ejemplo un número en números primos, o un polinomio en polinomios irreducibles.

El teorema fundamental de la aritmética cubre la factorización de números enteros, y para la factorización de polinomios, el teorema fundamental del álgebra. La factorización de números enteros muy grandes en producto de factores primos requiere de algoritmos sofisticados, el nivel de complejidad de tales algoritmos está a la base de la fiabilidad de algunos sistemas de criptografía asimétrica como el RSA.

Factorizar un polinomio

Una factorización de un polinomio de grado n es un producto de como mucho $m \leq n$ factores o polinomios de grado$n_k \leq n$ con $1 \leq k \leq$. Así por ejemplo el polinomio $P(x)$ degrado 5 se puede factorizar como producto de un polinomio de grado 3 y un polinomio de grado 2:

$$P(x) = x^5 - x^3 + 69x^2 - 20x + 16 = (x^3 + 4x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 16)$$

Los primeros puntos de la gráfica que se pueden hallar, son los puntos de la función que pertenecen a los ejes coordenados.

Para hallar el punto donde la función corta al eje de ordenadas (eje Y) se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Para hallar los puntos donde la función corta al eje de abscisas (eje X) se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplo:

$$y = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$$

Punto de corte con el eje OY: $\left.\begin{array}{r} y = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 2 \Rightarrow A(0,2)$

Puntos de corte con el eje OX : $\left.\begin{array}{r} y = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 = 2x^3 - 5x^2 + x$

$$\Longrightarrow (\textbf{resolvemos la ecuacion por Rffini}) \Longrightarrow \begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1/2 \end{array}$$

$$B(1,0); C(2,0); D(-\frac{1}{2}, 0)$$

Por tanto los puntos de corte con los ejes de coordenadas son:

Tabla de valores	
x	y
0	2
1	0
2	0
-1/2	0

Cuadro 11: Las raíces de un polinomio

Instrucciones

1. Dibuje un sistema de coordenadas en el papel cuadriculado para empezar a **graficar funciones matemáticas**. Nombre el eje vertical Y, y el eje horizontal X. Dependiendo de la ecuación, es posible que necesite utilizar una escala diferente. Las gráficas de la mayoría de las ecuaciones muestran la forma general de la gráfica y puntos de interés entre $[-5, 5]$ y $[-10, 10]$ para ambos ejes. Etiquete la intersección "0".

2. Dibuje un gráfico T para los valores en la ecuación. Un gráfico T fijará los valores de X y los valores correspondientes de Y. No pierda de vista los valores, cuando $X = 0, y/o\ Y = 0$. Por ejemplo, si la ecuación es: $Y = 2x + 1$

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-3	1	1	3	5	7

Cuadro 12: Tabla para gráficar

Escriba sus coordenadas basado en la tabla T. La tabla T

Se generan las siguientes coordenadas dando valores cercanos en la "X" cercanos a 0: $(-2,-3), (-1,-1), (0,1), (1,3), (2,5)\ y\ (3,7)$.

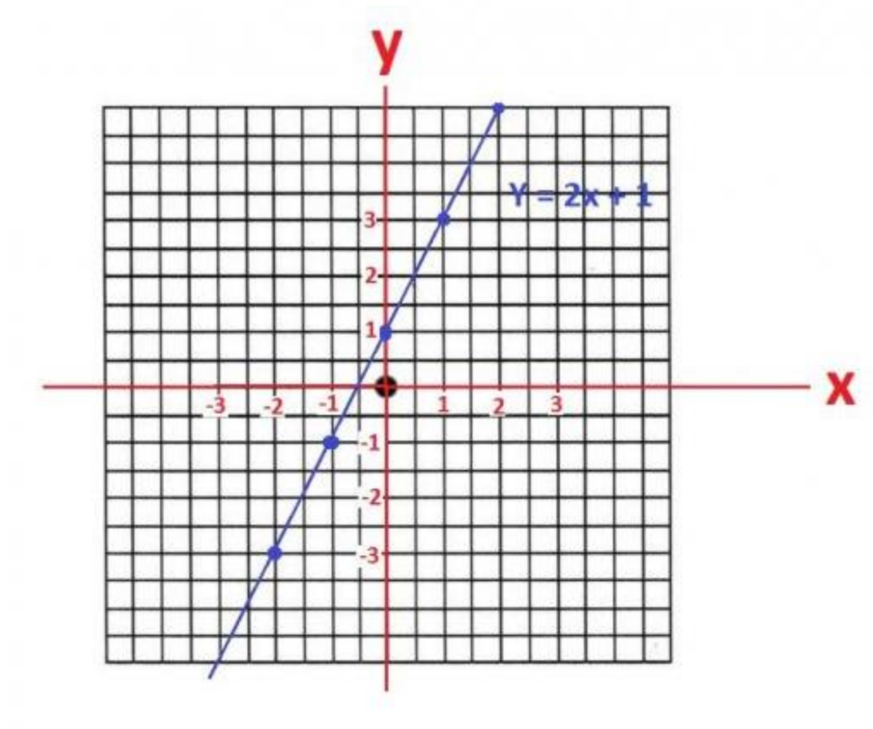


Figura 44: Recta $Y = 2x + 1$ Tomada de: http://educacion.uncomo.com/articulo/como-graficar-las-funciones-matematicas-basicas-1320.html#ixzz3aD6tVWI4

3. Dibuje puntos en el diagrama de ejes que coincidan con sus pares de coordenadas. Empiece con los puntos que tienen un cero en cualquiera de los componentes (cero significa que están directamente encima del eje). En el ejemplo, vamos a comenzar con (0,1) y seguir dibujando los puntos en cualquier orden.
4. Revise los patrones en el gráfico. Si el patrón no está claro, repita los pasos $2, 3\ y\ 4$ hasta que pueda ver un patrón. El número de coordenadas puede variar dependiendo de la complejidad de su **gráfico**.
5. Utilice el lápiz para dibujar una curva que conecta todos los puntos. Asegúrese de que su

curva sigue el esquema de eje. Trate de hacer la curva lo más suave posible.

6. Escriba la fórmula de la ecuación en la esquina superior derecha de su **diagrama**. En el ejemplo, la ecuación será $y = 2x + 1$, también se puede escribir $F(x) = 2x + 1$.

FASE ARGUMENTATIVA

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo:

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

Son las siguientes funciones:

La función seno, coseno, tangente, cosecante, secante y Cotangente. Todas ellas pueden entenderse como Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo. Veamos las expresiones de cada una de ellas referidas a los ángulos a y p del triángulo rectángulo aquí representado:

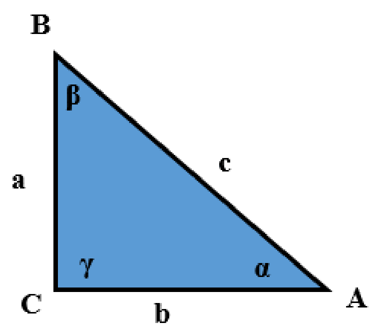


Figura 45: Razones

función seno	función coseno	función tangente
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{a}$	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$	$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{b}{a}$

Cuadro 13 : Relaciones trigonométricas Para el ángulo α :

JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.1.

función seno	función coseno	función tangente
$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{b}$	$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$	$\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{b}$

Cuadro 14: Relaciones trigonométricas Para el ángulo β

JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.2

ángulo		sen	cos	tg	ángulo		sen	cos	tg
0°	0 rad	0	1	0	60°	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
30°	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	90	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞
45°	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	180°	π rad	0	-1	0

Cuadro 15: Valores del seno, coseno y tangente para ciertos ángulos significativos en grados y radianes JUAN JESUS PASCUAL, TIMONMATE, P.2.

Funciones de variable Real

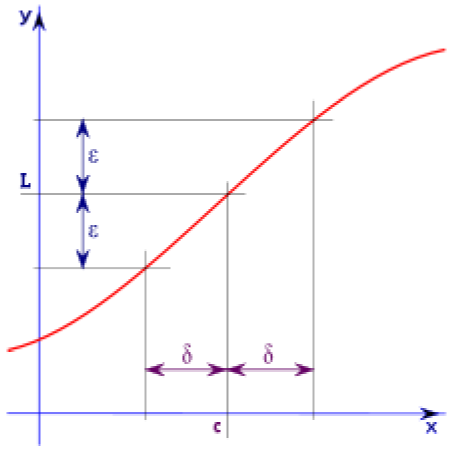


Figura 46: Definición de Limite tomada de: http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n

Si la función $\boldsymbol{f}$ tiene límite $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{c}$ podemos decir de manera informal que la función $\boldsymbol{f}$ tiende hacia el límite $\boldsymbol{L}$ cerca de $\boldsymbol{c}$ si se puede hacer que $\boldsymbol{f(x)}$ esté tan cerca como queramos de $\boldsymbol{L}$ haciendo que $\boldsymbol{x}$ esté suficientemente cerca de $\boldsymbol{c}$ siendo $\boldsymbol{x}$ distinto de $\boldsymbol{c}$.

Los conceptos cerca y suficientemente cerca son matemáticamente poco precisos. Por esta razón, se da una definición formal de límite que precisa estos conceptos. Entonces se dice:

> "El límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a c es L si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un$\delta > 0$ tal que para todo número real x en el dominio de la función $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$".

Definición limite de una función tomada de:
http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n

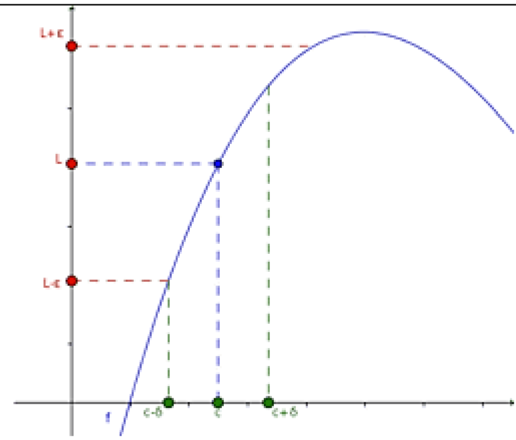


Figura 47: Límite tomada de:
http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n

Tomando valores arbitrarios de ε, podemos elegir un δ para cada uno de estos, de modo que f(x) y L se acerquen a medida que x se acerca a c.

Lo importante es comprender que el formalismo no lo hacen los símbolos matemáticos, sino, la precisión con la que queda definido el concepto de límite. Esta notación es tremendamente poderosa, pues, nos dice que si el límite existe, entonces se puede estar tan cerca de él como se desee. Si no se logra estar lo suficientemente cerca, entonces la elección del δ no era adecuada. La definición asegura que si el límite existe, entonces es posible encontrar tal δ.

Derivada de una Función

Definición de derivada de una función en un punto

Comenzamos, como no podía ser de otra forma, introduciendo la definición formal de derivada de una función $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{x_0}$

Definición: Sea $\boldsymbol{f} : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ Se define la derivada de la función $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{x_0}$ y se representa por $\mathbf{f}'(\boldsymbol{x_0})$ como el límite (si existe):

$$\mathbf{f}'(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{x_0})}{\mathbf{h}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

En el caso de que ese límite exista, diremos que $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{x_0}$.

Una función $\boldsymbol{f} : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathbb{R}$ se dice derivable si es derivable en cada uno de Los puntos de su dominio. Si $\boldsymbol{f}$ es una función derivable, podemos definir a partir De ella una nueva función que recibe el nombre de función derivada. Dicha función se denota por $\boldsymbol{f}'$ y su definición es la siguiente:

$$\boldsymbol{f}' : \,]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\, \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$$

Aunque veremos más adelante, existen fórmulas y reglas que permiten calcular las derivadas de algunas funciones sin tener que recurrir al cálculo del límite que aparece en la definición de derivada anteriormente presentada. Sin embargo, en ocasiones estas reglas no pueden ser aplicadas, y en esos casos resulta necesario el cálculo del límite. Por ello, repasemos con algunos ejemplos el cálculo de derivadas utilizando la definición anterior.

Ejemplo

Dada la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$, calcula $\boldsymbol{f}'(-\mathbf{3})$ usando la definición de derivada.

Solución:

Utilizando la definición de derivada **(1.1)** se tiene que

$$\mathbf{f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Calculando los elementos que aparecen en el numerador

$$\mathbf{f(-3+\boldsymbol{h}) = (-3+h)^2 + 1 = (-3)^2 + h^2 + 2(-3)h + 1}$$

$$\mathbf{= 9 + h^2 - 6h + 1} \qquad \textbf{(1.3)}$$

$$\mathbf{= h^2 - 6h + 10}$$

Y

$$\mathbf{f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en **(1.3)** y **(1.4)** en la ecuación **(1.2)** obtenemos

$$\mathbf{f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 6h + 10 - 10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{h}^2 - 6\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}}}$$

Si en este punto sustituimos h por 0 obtenemos como resultado la indeterminación Sin embargo, en el numerador de la fracción anterior no aparece término independiente. Entonces podemos sacar factor común de h en el numerador y simplificar con la h que aparece en el denominador obteniendo

$$\mathbf{= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{h} - 6)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (\boldsymbol{h} - 6) = 0 - 6 = -6}$$

Siempre que calculamos la derivada de un polinomio usando la definición llegamos a la situación anterior, es decir, indeterminación de la forma £ donde podremos sacar factor común de h y simplificar.

Se analiza cada una de las fórmulas que aparecen en la tabla. Dichas fórmulas se obtienen como consecuencia de la definición de derivada.

Función	Derivada
19. $y = x^n$	$y' = nx^{(n-1)}$
20. $y = (f(x))^n$	$y' = n(f(x))^{(n-1)}f'(x)$
21. $y = e^{(f(x))}$	$y' = e^{f(x)}f'(x)$
22. $y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}f'(x)lna$
23. $y = \ln(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
24. $y = log_a(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}log_a e$
25. $y = sen(f(x))$	$y' = f'(x)\cos(f(x))$
26. $y = \cos(f(x))$	$y' = -f'(x)sen(f(x))$
27. $y = \tan(f(x))$	$y' = f'(x)sec^2(f(x))$
28. $y = senh(f(x))$	$y' = f'(x)\cosh(f(x))$
29. $y = \cosh(f(x))$	$y' = f'(x)\mathrm{senh}(f(x))$
30. $y = \tanh(f(x))$	$y' = f'(x)\mathrm{sech}^2(f(x))$
31. $y = arcsen(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
32. $y = arccos(f(x))$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
33. $y = arctan(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{(f(x))^2+1}$
34. $y = arcsenh(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2+1}}$
35. $y = \mathrm{arccosh}(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{(\sqrt{f(x)+1})\sqrt{f(x)-1}}$
36. $y = \mathrm{arctanh}(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1-(f(x))^2}$

Cuadro 16: Derivadas de funciones fundamentales.

Nota: Obsérvese que en las fórmulas anteriores, siempre que aparece una función de f(x), en la derivada correspondiente aparece el factor $f(x)$. Ello es consecuencia de aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo

Calcular la derivada de la función $f(x) = \arccos(x)$

Solución

Sabemos que la función inversa de $\cos(x)$ es el $\arccos(x)$, por tanto:

$$f(x) = \arccos(x)$$

$$x = \cos\big(f(x)\big)$$

Derivamos en ambos lados en la segunda ecuación:

$$x' = -f'(x)sen(f(x))$$

Despejando la derivada queda así:

$$f'(x) = -\frac{x'}{sen(f(x))}$$

Usando la identidad trigonometrica

$$sen^2\big(f(x)\big) + cos^2\big(f(x)\big) = 1$$

$$sen^2\big(f(x)\big) = 1 - cos^2(f(x))$$

$$sen(f(x))$$

Despejando

$$sen\big(f(x)\big) = \sqrt{1 - cos^2)}$$

Reemplazamos

$$f'(x) = -\frac{x'}{\sqrt{1 - cos^2(f(x))}}$$

Y como ya sabiamos $x = \cos\big(f(x)\big)$

Luego la derivada de $f(x) = \arccos(x)$ es:

$$f'(x) = -\frac{x'}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La Antiderivada

La antiderivada es la función que resulta del proceso inverso de la derivación, es decir, consiste en encontrar una función que, al ser derivada produce la función dada.

Por ejemplo:

Si $f(x) = 3 \times 2$, entonces $f(x) = x^3$, es una antiderivada de f(x). Observe que no existe una derivada única para cada función. Por ejemplo, si $G(x) = x^3 + 5$, entonces es otra antiderivada de $f(x)$.

La antiderivada también se conoce como la primitiva o la integral indefinida se expresa de la siguiente manera: en donde: $f(x)$ es el integrando; dx, la variable de integración o diferencial de x y C es la constante de integración.

Ejemplo

Hallar la antiderivada de $f(x) = cos(x)$

Solución

Como ya sabemos, la derivada de $f(x) = sen(x)$ es ciertamente la función que se nos está pidiendo hallar su antiderivada, luego nuestra respuesta es $sen(x)$

EXPLICACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO:
DOMINÓ MATEMÁTICO

A continuación se dará las instrucciones para jugar al dominó matemático, la mayor estructura viene dada del juego común domino y las reglas aquí fueron extraídas de: http*://www.mundijuegos.com.co*.

¿Cómo jugar al dominó Matemático?

Cada jugador recibe 7 fichas al empezar una ronda. Si en la partida hay menos de 4 jugadores, las fichas restantes se guardan en el pozo.

Inicia la ronda primer jugador en identificar un doble (si erra queda suspendido en una ronda). En caso de no tener dobles ninguno de los jugadores, comenzará cualquier jugador por decisión unánime. A partir de ese momento, los jugadores realizarán su jugada, por turnos, siguiendo el orden inverso a las manecillas del reloj.
El jugador que inicia la ronda lleva la mano. Este es un concepto importante para la estrategia del dominó, pues el jugador o la pareja que es "mano" normalmente es la que tiene ventaja durante la ronda.

Desarrollo del juego

En su turno, cada jugador debe colocar una de sus fichas en uno de los 2 extremos abiertos, de tal forma que la función de uno de los lados de la ficha coincida o se relacione con la del extremo donde se está colocando. Los dobles se colocan de forma transversal para facilitar su localización.

Una vez que el jugador ha colocado la ficha en su lugar, su turno termina y pasa al siguiente jugador.

Si un jugador no puede jugar, debe “robar” del pozo tantas fichas como sean necesarias. Si no quedan fichas en el pozo, pasará el turno al siguiente jugador.

Final de una ronda

La ronda continúa con los jugadores colocando sus fichas hasta que se presenta alguna de las situaciones siguientes:

Dominó

Cuando un jugador coloca su última ficha en la mesa, se dice que ese jugador dominó la ronda. Si se juega en solitario, el jugador que ha ganado la ronda suma los puntos de todos sus contrincantes. Jugando por parejas, se suman los puntos de todos los jugadores incluso los del compañero (se cuenta dos puntos por ficha).

Cierre

Existen casos donde ninguno de los jugadores puede continuar la partida. Esto ocurre cuando las funciones de los extremos ya han sido jugadas 7 veces. En ese momento se dice que la partida está cerrada. Los jugadores contarán los puntos que les queden; el jugador o pareja con menos puntos es la ganadora y suma los puntos de la manera habitual.

Pudiera darse el caso de tener los mismos puntos por lo que ganaría el jugador o pareja que fuera 'mano' o esté más cerca del jugador que lo fuera.

Siguientes rondas

En las próximas rondas, el jugador que inicia el juego es el siguiente en el turno. Este puede comenzar por la ficha que desee aunque no sea una ficha doble.

Fin de la partida

El juego termina cuando un jugador o pareja consigue la cantidad de puntos necesarios para ganar.

El pozo

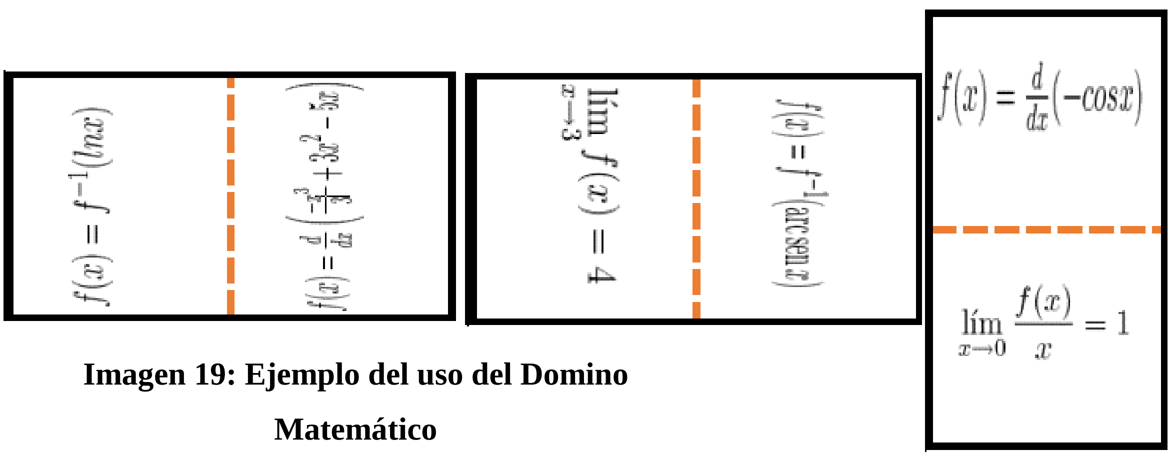
El pozo aparecerá automáticamente cuando un jugador tenga que hacer uso de él. En caso de robar una ficha y seguir sin poder jugar, el pozo continuará visible hasta que se coja una ficha válida o se agoten las fichas del mismo.

En caso de que no queden más fichas y no podamos tirar, el jugador “pasará” automáticamente.

Finalizar la partida de forma amistosa (anular partida)

Algunos juegos tienen la opción de finalizar la partida de forma amistosa. Si esto sucede, la partida se anula. Es decir, los jugadores no suman ni restan puntos, y esa partida no cuenta en la clasificación ni en las estadísticas. Además, las fichas apostadas son devueltas a cada jugador.

Para anular una partida, uno de los jugadores debe proponer esto. Todos los jugadores deben estar de acuerdo en que la partida finalice, de lo contrario la partida continuará.

FASE PROPOSITIVA:
Actividad: **1.** Se forma grupos de cuatro personas. **2.** En cada grupo se da un domino matemático. **3.** Se define una cantidad de puntos para saber cuándo termina y quién gano esto se determina de acuerdo al tiempo que se tenga disponible.
EJEMPLO
Las relaciones no siempre son de igualdad también existen otros como en el ejemplo: un límite de una función  **Imagen 19: Ejemplo del uso del Domino Matemático**
EVALUACIÓN
Al finalizar el juego se hace una retrospección de los temas que no se dominan de una buena manera para saber dónde el profesor debe reforzar. Ya que el domino posee varios temas en matemáticas se presta para eso, se debe valorar la actitud que presenta el estudiante a la hora de desarrollar la actividad, y así como también el comportamiento a nivel grupal.

BIBLIOGRAFIA

Molina, J.y Muñoz, M. (2012). DERIVADAS: Cálculo y Aplicaciones. Recuperado de https://books.google.com.co/books?id=SejjPZg0jz8C&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false.

(s.f.). Obtenido de http://educacion.uncomo.com/articulo/como-graficar-las-funciones-matematicas-basicas-1320.html#ixzz3aD6tVWI4

Matinez, M. (2013). Uncomo Educación . Obtenido de Como Graficar las Funciones Matematicas Basicas: http://educacion.uncomo.com/articulo/como-graficar-las-funciones-matematicas-basicas-1320.html#ixzz3aD6tVWI4

Mundijuegos. (s.f.). Mundijuegos Colombia. Obtenido de Juego de dominó: http://www.mundijuegos.com.co

Victoria, M. (s.f.). Ciens.ula. Obtenido de http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/funciones.pdf

Wikipedia. (s.f.). Obtenido de Definición de Limite de una Función : http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n

Pascual, J. J. (s.f.). Matematicas. Obtenido de TIMONMATE (Ejercicio Resuletos de Trigonometria): http://matematicasjjp.webcindario.com/pitagoras_resueltos.pdf

Pascual, J. J. (s.f.). Matemáticas. Obtenido de TIMONMATE: http://perso.wanadoo.es/timonmate/

Pascual, J. J. (s.f.). TIMONMATE. Obtenido de http://aplicaciones.colombiaaprende.edu.co/red_privada/sites/default/files/problemas_de_aplicacion.pdf

Pascual, J. J. (s.f.). *Matematicas*. Obtenido de TIMONMATE (Ejercicio Resuletos de Trigonometria): http://matematicasjjp.webcindario.com/pitagoras_resueltos.pdf

Pascual, J. J. (s.f.). *Matemáticas*. Obtenido de TIMONMATE: http://perso.wanadoo.es/timonmate/

Pascual, J. J. (s.f.). *TIMONMATE*. Obtenido de http://aplicaciones.colombiaaprende.edu.co/red_privada/sites/default/files/problemas_de_aplicacion.pdf

Capítulo 4

Conclusiones

El objetivo general del trabajo de investigación se cumple con la presentación de los 11 materiales didácticos y las respectivas guías de instrucción para el docente, estos fueron validadas mediante pruebas piloto, pero se requiere de una cuarta fase para que sean aplicados en varias instituciones educativas y realizar la investigación cuantitativa que permitan lograr los objetivos propuestos de macroproyecto del semillero de investigación en educación matemática –SIEM-,La importancia en el buen uso del material didáctico en matemáticas contribuye a la adquisición de los estándares básicos de competencia, desarrollando los pensamientos matemáticos que prorroga en Ministerio de Educación Nacional de Colombia. El pensamiento lógico-matemático se desarrolla inmersamente mediante la ejercitación de los pensamientos (numérico, variacional, aleatorio, espacial y métrico) a través de las guías de instrucción.

La secuencia didáctica se evidencia en la estructura de las propuestas metodológicas plasmadas en las guías de instrucción; es por eso que cada momento de la guía debe ejecutarse adecuadamente para no perder el hilo conductor de la temática.

Una buena orientación y supervisión en la aplicación del material didáctico permite que los objetivos planteados se adquieran satisfactoriamente ya que la presentación del material didáctico es un mediador para la receptividad de una nueva metodología de enseñanza. Los exámenes diagnósticos y las metodologías desarrolladas en trabajos de investigación en las fases 1 y 2 del macroproyecto que está ejecutando el Semillero Interdisciplinar de Educación Matemática -SIEM- contribuyeron significativamente en el desarrollo de esta fase.

La participación en calidad de ponente en eventos académicos como el Congreso Internacional en Modelación de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín donde se presentó este trabajo de investigación tuvo una buena calificación y aceptación por parte de los asistentes. La socialización de ideas en eventos académicos, permite resaltar los aportes significativos que dan expertos en estas líneas de investigación como la de Educación Matemática, facilitan el desarrollo del trabajo de investigación.

El desarrollo de varias asignaturas pedagógicas fueron muy importantes para el desarrollo de la tesis de investigación, en especial la de Didáctica de las Matemáticas, que contribuyo sustancialmente en el momento de presentar las ideas de los materiales didácticos, ya que varios de estos surgieron gracias a la metodología en enseñanza de las matemáticas del Doctor en Educación y matemático Oscar Fernández Sánchez que consiste en los procesos de manipulación, graficación y simbolización.

La conducción de un buen director(a) preparado y experimentado académicamente nivel universitario, permiten que estas propuestas que contribuyen al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas se desarrollen adecuadamente por estudiantes de pregrado. Es así como el uso de materiales resistentes en el momento de construcción de los materiales didácticos ayudan a la conservación, ya que estos requieren usarse permanentemente en las guías de instrucción propuestas. El material didáctico facilita el aprendizaje de las matemáticas, porque su manipulación es un enlace didáctico entre los estudiantes y el conocimiento matemático.

Los altos índices en mortalidad académica en el área de las matemáticas se dan por la falta de tener una versatilidad en las metodologías de aprendizaje; por lo tanto el uso del material didáctico en matemáticas, se convierte en un método que periódicamente se puede aplicar durante el proceso de enseñanza aprendizaje en las instituciones educativas. Desde luego el material didáctico juega un papel importante en el momento del diseño y construcción de los materiales didácticas en matemáticas, porque una falla en este, genera dificultades en el desarrollo de las guías y posteriormente en el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Los software matemáticos, los programas de Microsoft, Wolfram alpha, entre otros; brindan herramientas que inciden en el diseño y presentación de los materiales didácticos, por la calidad de sus imágenes y escritura de símbolos en la presentación de las guías.

Referencias

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoria de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zarzal.

Carrillo, V. (s.f.). Obtenido de http://www.academia.edu/10978107/Modulodidacticaiiascensodenivel2014-140915232821-phpapp02_1_)

CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas. Editorial Pearson Prentice hall. 2006. Madrid – España

Chevellard, Y. (1998). La Transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: AIQUE.

(Corporación Universitaria Antonio de Sucre, 2013, tomado de: http://www.corposucre.edu.co/sites/default/files/Guia%20de%20investigaci%C3%B3n%20institucional.pdf)

F´prima. (2014). MATEMÁTICA 9:Hacia la resolucion de problemas Reforma Matemática Costa Rica. Alajuela: F´prima .

Fernandez, A. (s.f.). Iniciación a la Trigonometria. Obtenido de lectura recomendada(Historia de la Trigonometría): http://perso.wanadoo.es/amiris/trigonometria/documentos/lecturatrigo.html

Gomez, J. M. (s.f.). Matemática, Filosofía,Musica,Cine,Humos...y otra yerbas Digestivas. . Obtenido de Formula de Heron: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/proteo/formulaheron.htm

- ha. PIAGET y Vygotski en el aula: El constructivismo como alternativa de trabajo docente. México : Editorial Limusa S.A de C.V. ; Grupo Noriega Editores, c2010

Javier Martin, J. M. (1998). Poblemas de Probabilidad . Madrid: Paraninfo.

Matinez, M. (2013). Uncomo Educación . Obtenido de Como Graficar las Funciones

Matematicas Basicas: http://educacion.uncomo.com/articulo/como-graficar-las-funciones-matematicas-basicas-1320.html#ixzz3aD6tVWI4

MEN. (2003). Ministerio de educación . Obtenido de estandanres de Competencia: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mundijuegos. (s.f.). Mundijuegos Colombia. Obtenido de Juego de dominó: http://www.mundijuegos.com.co

Pascual, J. J. (s.f.). Matematicas. Obtenido de TIMONMATE (Ejercicio Resuletos de Trigonometria): http://matematicasjjp.webcindario.com/pitagoras_resueltos.pdf

Pascual, J. J. (s.f.). Matemáticas. Obtenido de TIMONMATE: http://perso.wanadoo.es/timonmate/

Pascual, J. J. (s.f.). TIMONMATE. Obtenido de http://aplicaciones.colombiaaprende.edu.co/red_privada/sites/default/files/problemas_de_aplicacion.pdf

Patricia Carrasco, G. G. (2010). Matematicas II. Mexico: Cengange Learning .

Santamaría, T. (s.f.). Obtenido de http://www.monografias.com/trabajos16/teorias-piaget/teorias-piaget.shtml)

Sevilla, D. (19 de JULIO de 2000). MATEMATICA. Obtenido de TIMONMATE: http://perso.wanadoo.es/timonmate/

Vázquez, M. (2010). Fundación Eroski Contigo. Obtenido de www.consumer.es.Madrid: http://www.consumer.es/web/es/educacion/escolar/2010/07/30/194638.php

Victoria, M. (s.f.). Ciens.ula. Obtenido de http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/funciones.pdf

Wikipedia. (s.f.). Obtenido de Definición de Limite de una Función : http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n

(s.f.). Obtenido de http://educacion.uncomo.com/articulo/como-graficar-las-funciones-matematicas-basicas-1320.html#ixzz3aD6tVWI4