

CÁLCULO DEL FACTOR DE CONCENTRADOR DE ESFUERZOS EN  
PLACAS PLANAS VARIANDO LAS ECUACIONES DE FORMA POR  
MEDIO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

JUAN SEBASTIAN CLAVIJO GONZALES  
CÉSAR DANIEL MONTOYA OSORIO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA  
PEREIRA, RISARALDA  
MAYO DE 2015

CÁLCULO DEL FACTOR DE CONCENTRADOR DE ESFUERZOS EN PLACAS  
PLANAS VARIANDO LAS ECUACIONES DE FORMA POR MEDIO DEL  
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

JUAN SEBASTIAN CLAVIJO GONZALEZ

1 088 277 138

CÉSAR DANIEL MONTOYA OSORIO

1 088 289 107

Director:

LUIS CARLOS FLÓREZ GARCÍA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

PEREIRA, RISARALDA

MAYO DE 2015

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

---

Firma del jurado

---

Firma del director

Pereira, 15 de mayo de 2015

## DEDICATORIAS

*A mis padres, por su apoyo, paciencia, amor, y sacrificios en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar a convertirme en lo que soy, gracias por sus consejos, los valores el tiempo y la motivación que me han transmitido.*

*A mi tío Alejandro González que en paz descanse, que siempre me inculcó lo importante del estudio y la trascendencia del trabajo.*

*Mi novia y compañera Lina, que siempre me acompañó, me motivó y estuvo presente para ayudarme en todo lo que necesitase para no perder el rumbo y la motivación en este camino.*

*Juan Sebastián Clavijo González*

*El constante apoyo y la fortaleza que siempre me ha brindado mi mamá es el impulso que siempre he tenido en todos estos años de formación, ella siempre estuvo ahí desde mis primeros años de escuela hasta las largas noches realizando trabajos de la universidad; por ello, este proyecto de grado es un logro obtenido con la ayuda de ese ser tan importante para mí.*

*A mi hermana Sandra, mi tía Doria y mi novia Yessica, por ser las mujeres que siempre estuvieron en los momentos difíciles y fueron el motor para sobrepasar los obstáculos que aparecían en el camino.*

*César Daniel Montoya Osorio*

## AGRADECIMIENTOS

A nuestro director de proyecto, Ing. Luis Carlos Flórez, por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia y motivación ha logrado que saquemos este proyecto adelante.

A mi compañero Cesar Daniel Montoya, por la paciencia que me tuvo en este largo camino, su trabajo y por ser un gran amigo.

Al amparo incondicional de mi familia, quienes en todo momento estuvieron junto a mi este importante proceso.

**Juan Sebastian Clavijo Gonzalez**

A mi mamá, por la compañía, la fortaleza y el apoyo que siempre me ha dado en todos los aspectos de mi vida, con ella siempre estaré agradecido.

A nuestro director de proyecto, Ing. Luis Carlos Flórez, por estar siempre pendiente de nuestro trabajo y los avances en cada etapa del desarrollo, por su disposición para resolver todas las dudas que surgieron en el camino.

A mi compañero de proyecto, Juan Sebastian, por su enorme sacrificio al viajar desde su pueblo para poder hacer un trabajo en conjunto, por su paciencia y su motivación constante para alcanzar la meta final.

**Cesar Daniel Montoya Osorio**

## Tabla de contenido

OBJETIVOS .....	11
OBJETIVO GENERAL.....	11
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	11
INTRODUCCIÓN .....	12
CAPÍTULO 1 .....	14
MARCO TEÓRICO.....	14
1.1 RESISTENCIA DE MATERIALES.....	14
1.1.1 Esfuerzo .....	14
1.1.2 Tensión plana .....	16
1.1.3 Deformación .....	17
1.1.4 Diagrama esfuerzo-deformación y ley de Hooke .....	19
1.1.5 Relación de Poisson .....	20
1.1.6 Ley de Hooke en el plano .....	21
1.2 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS .....	22
1.2.1 Principio de Saint – Venant .....	23
1.2.2 Factores de la concentración de esfuerzos .....	25
CAPÍTULO 2 .....	28
MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS .....	28
2.1 RESEÑA HISTÓRICA DEL MEF.....	29
2.2 MEF EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL .....	31
2.2.1 Desplazamiento, esfuerzo y deformación.....	31
2.2.2 Funciones de desplazamiento e interpolación .....	32
2.2.3 Definición de la matriz de rigidez.....	33
2.3 ELEMENTOS LINEARES TRIANGULARES “CST” .....	34
2.3.1 Derivación de elementos de matriz de rigidez .....	35

2.4	ELEMENTOS CUADRATICO TRIANGULARES “LST” .....	36
2.5	ELEMENTOS CUADRILÁTERO BILINEAL “Q <sub>4</sub> ” .....	38
2.6	ELEMENTOS CUADRILÁTERO CUADRÁTICO “Q <sub>8</sub> ” .....	40
2.7	INTEGRACIÓN NUMÉRICA .....	42
CAPÍTULO 3 .....		44
PROGRAMAS COMPUTACIONALES UTILIZADOS .....		44
3.1	MATLAB.....	44
3.1.1	Manipulación de matrices .....	44
3.1.2	Operaciones con matrices .....	46
3.1.3	Conversión de tipos de datos .....	47
3.1.4	Tratamiento de datos.....	48
3.2	COMSOL MULTIPHYSICS .....	48
CAPÍTULO 4 .....		50
GENERACIÓN DE MALLAS .....		50
4.1	CARACTERÍSTICAS DEL MODELADO DE ELEMENTOS FINITOS .....	50
4.1.1	Relación de aspectos AR .....	51
4.1.2	Simetrías .....	51
4.1.3	Tamaño de elementos y métodos de refinamiento <b><i>h</i></b> , <b><i>p</i></b> y <b><i>r</i></b> .....	51
4.1.3.1	<i>Método de refinado h</i> .....	52
4.1.3.2	<i>Método de refinado p</i> .....	52
4.1.3.3	<i>Método de refinado r</i> .....	52
4.2	MALLADO CON COMSOL.....	52
4.2.1	Diseño de la geometría.....	54
4.2.2	Mallado .....	55
CAPÍTULO 5 .....		58

ANÁLISIS DETALLADO DEL CUADRILÁTERO CUADRÁTICO SERENDÍPITO $Q_8$	58
5.1 TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA	58
5.2 CONVERGENCIA	58
5.2.1 Requisitos de consistencia	59
5.2.2 Complitud	60
5.2.3 Compatibilidad	60
5.2.4 Estabilidad	60
5.2.5 Suficiencia de rango	61
5.3 INTEGRACIÓN COMPLETA	62
5.4 INTEGRACIÓN REDUCIDA	62
5.5 ESFUERZO EN EL CENTROIDE DEL ELEMENTO	63
5.6 ESFUERZO EN LOS NODOS DEL ELEMENTO	64
5.7 SIMULACIONES PARA LAS PLACAS DE ESTUDIO	65
5.7.1 Factor $k$ en placa plana	65
5.7.2 Factor $k$ en placa con acanaladuras	66
5.7.3 Factor $k$ en placa con agujero centrado	69
5.7.4 Factor $k$ en placa con cambio de sección	72
5.7.5 Análisis de curvas	75
CAPÍTULO 6	77
PRUEBAS Y SIMULACIÓN	77
6.1 PASOS GENERALES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	78
6.2 CONDICIONES INICIALES	81
6.3 VALIDACIÓN DE RESULTADOS	82
6.3.1 Factor $k$ placa con acanaladuras	87



6.3.2	Factor $k$ placa con cambio de sección .....	89
6.3.3	Factor $k$ placa con agujero centrado .....	89
6.4	PRUEBAS .....	90
6.5	CARACTERISTICAS DE LOS MALLADOS .....	90
6.5.1	Mallado para placa plana con acanaladura semicircular .....	91
6.5.2	Mallado para placa plana con agujero centrado .....	94
6.5.3	Mallado para placa plana con cambio de sección centrado .....	97
1.5.4	Análisis de mallas .....	100
1.6	Determinación del esfuerzo máximo usando Comsol .....	101
CAPÍTULO 7 .....		103
ANÁLISIS DE RESULTADOS .....		103
7.1	PLACA PLANA CON ACANALADURA SEMICIRCULAR .....	103
7.1.1	Refinado uniforme.....	103
7.1.2	Refinado medio.....	105
7.1.3	Refinado fino.....	107
7.2	PLACA PLANA CON AGUJERO CENTRADO .....	110
7.2.1	Refinado uniforme.....	110
7.2.2	Refinado medio.....	112
7.2.3	Refinado fino.....	114
7.3	PLACA PLANA CON CAMBIO DE SECCIÓN CENTRADO .....	116
7.3.1	Refinado uniforme.....	116
7.3.2	Refinado medio.....	118
7.3.3	Refinado fino.....	120
CAPÍTULO 8 .....		123
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....		123

RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS .....	126
CAPÍTULO 9 .....	128
BIBLIOGRAFÍA .....	128

# CÁLCULO DEL FACTOR DE CONCENTRADOR DE ESFUERZOS EN PLACAS PLANAS VARIANDO LAS ECUACIONES DE FORMA POR MEDIO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

## OBJETIVOS

### OBJETIVO GENERAL

Calcular la variación del factor de concentrador de esfuerzos de una placa plana por medio de un software en Matlab, realizando cálculos de diferentes elementos de aproximación de elementos finitos.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación se plantean los objetivos específicos para el desarrollo del proyecto:

- Seleccionar el tipo de material y los concentradores de esfuerzos a emplear en el cálculo.
- Seleccionar los elementos diferenciales y discretizar por nodos las placas a analizar.
- Desarrollar el código en Matlab para generar las matrices de esfuerzos y deformación de la placa para cada tipo de elemento de aproximación.
- Analizar el comportamiento del concentrador de esfuerzos variando el número de nodos en cada elemento diferencial.
- Comparar los resultados arrojados por el código desarrollado en Matlab con otro programa de simulación de elementos finitos (Comsol Multiphysics) y la literatura (Pilkey<sup>1</sup> o Norton<sup>2</sup>).

---

<sup>1</sup> PILKEY, Walter D., Deborah F. "Peterson's Stress Concentration Factors". 3ª Ed. Wiley Inc, 2008.

<sup>2</sup> NORTON, Robert L. "Diseño de máquinas un enfoque integrado" 4ª Ed. Prentice hall, México 2011.

## INTRODUCCIÓN

*“La mecánica de materiales es la rama de la mecánica que se encarga del estudio de los efectos internos del esfuerzo y la deformación en un cuerpo sólido que está sometido a una carga externa. El esfuerzo se encuentra asociado con la resistencia del material del que está hecho el cuerpo, mientras que la deformación es una medida de la elongación (cambio en tamaño y forma) que experimenta éste”* Hibbeler<sup>3</sup>.

Temas como el esfuerzo, la deformación, propiedades mecánicas, concentradores de esfuerzo, carga axial, elementos finitos, etc. Son, entre otros, los que desarrollaremos en este proyecto investigativo, acogiendo los postulados enunciados en los manuales de ingeniería. La generación de diseño de nuevas tecnologías de la información y la comunicación en la estructuración y selección de los modelos matemáticos computarizados que agilicen los cálculos y la solución de problemas sobre manejo a placas, mediante el análisis de elementos finitos, son básicos en la aplicación de materiales de ingeniería. De ahí la importancia de conocer la incidencia de los factores que se han de tener en cuenta al realizar un estudio ingenieril, y las aplicaciones tecnológicas que coadyuvan a la celeridad y eficiencia en los cálculos y diseños metodológicos.

En el primer capítulo se desarrollan los conceptos básicos de la estática y los de la resistencia de materiales que son fundamentales en el estudio de elasticidad, además, se presenta una introducción de los principales aspectos necesarios para el estudio de los concentradores de esfuerzos.

El siguiente capítulo se dedica al estudio del método de elementos finitos que es un método numérico por el cual se pueden resolver problemas científicos e ingenieriles

---

<sup>3</sup>HIBBELER Russell C, “MECÁNICA DE MATERIALES”, 8ª Ed. Pearson Education, México, 2011.

muy complejos; este método está basado en la representación de un cuerpo por un ensamblaje de subdivisiones llamados elementos finitos y estos elementos están conectados por nodos. En éste capítulo se expondrá: una reseña histórica sobre el MEF, el desarrollo del método para elasticidad bidimensional, el desarrollo para diferentes elementos de aproximación y una introducción a la integración numérica.

El tercer capítulo expone los aspectos y funciones principales de los programas computacionales utilizados para desarrollar el proceso de elementos finitos.

En el capítulo cuatro se expondrá lo concerniente a la generación de mallados para las placas, empezando con algunos de las principales características del mallado; Continuando con los principales aspectos de Comsol para realizar mallados triangulares y cuadriláteros.

En el capítulo cinco se realiza un análisis más profundo del elemento cuadrilátero cuadrático serendípito  $Q_8$ , donde se introduce a la convergencia, integración reducida y completa.

Las pruebas y simulación se desarrollan en el capítulo seis, donde se mostrará el planteamiento del problema, la metodología utilizada para llegar a la solución, los métodos de validez esperados y las tablas de mallados base.

Finalmente en el capítulo siete se muestran y analizan los resultados de las pruebas planteadas en el capítulo seis.

# CAPÍTULO 1

## MARCO TEÓRICO

Este capítulo introductorio se subdivide en dos grandes secciones, la primera es un repaso de estática y resistencia de materiales donde la segunda introduce los aspectos más importantes de los concentradores de esfuerzos. En este capítulo se repasan factores como resistencia, fuerza de masa, fuerza de superficie, tensiones, esfuerzos, deformación, elasticidad y concentradores de esfuerzos, que son entre otros factores, aspectos fundamentales para la comprensión de cálculos y elaboración de diseños metodológicos, para el estudio de la mecánica y la dinámica de materiales utilizados por la ingeniería.

### 1.1 RESISTENCIA DE MATERIALES

#### 1.1.1 Esfuerzo

Para comprender mejor el concepto de esfuerzo, revisaremos analíticamente las Figura 1 y Figura 2. La Figura 1 representa los efectos resultantes de la distribución de fuerzas verdaderas que actúa sobre el área seccionada y la Figura 2 nos induce a entender la idea de esfuerzo. Se considera que el área seccionada está subdividida en áreas pequeñas tal como el área  $\Delta A$  de la Figura 2. Para el análisis, se sustituye  $\Delta F$  por sus componentes:  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$  y  $\Delta F_z$  que se toman normal para la componente  $z$  y tangente para las componentes  $x$  y  $y$ . Cuando  $\Delta A$  se aproxima a cero, tanto  $\Delta F$  como sus componentes hacen lo mismo; sin embargo, el cociente de la fuerza y el área tenderán al límite infinito. Este cociente se llama esfuerzo y describe la intensidad de la fuerza interna sobre un plano específico (área) que pasa a través de un punto.

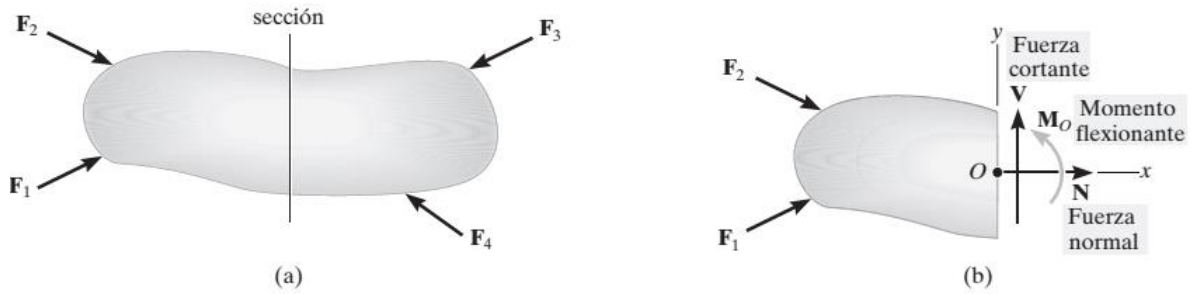


Figura 1. HIBBELER Russell C, "Mecánica de materiales" (2011). Octava edición. Pearson Educación de México, pág. 9.

Es importante tener en cuenta que existen dos formas de esfuerzo:

a) Esfuerzo normal ( $\sigma$ ), que es aquel en el cual la intensidad de la fuerza actuante es perpendicular a  $\Delta A$ . Como  $\Delta F$  es normal al área, entonces:

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (1)$$

Si la fuerza o el esfuerzo normal "hala" al elemento  $\Delta A$ , como se muestra en la Figura 2.a, se le denomina esfuerzo de tensión, mientras que si "empuja" a  $\Delta A$ , se llama esfuerzo a compresión.

b) Esfuerzo cortante ( $\tau$ ), que es aquel en el cual la intensidad de la fuerza actúa tangente a  $\Delta A$ . A continuación se muestran las componentes del esfuerzo cortante:

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad (2)$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad (3)$$

El subíndice  $z$  indica la orientación del área  $\Delta A$ ,  $x$  y  $y$  se usan para especificar los ejes a lo largo de los cuales actúa cada esfuerzo cortante.

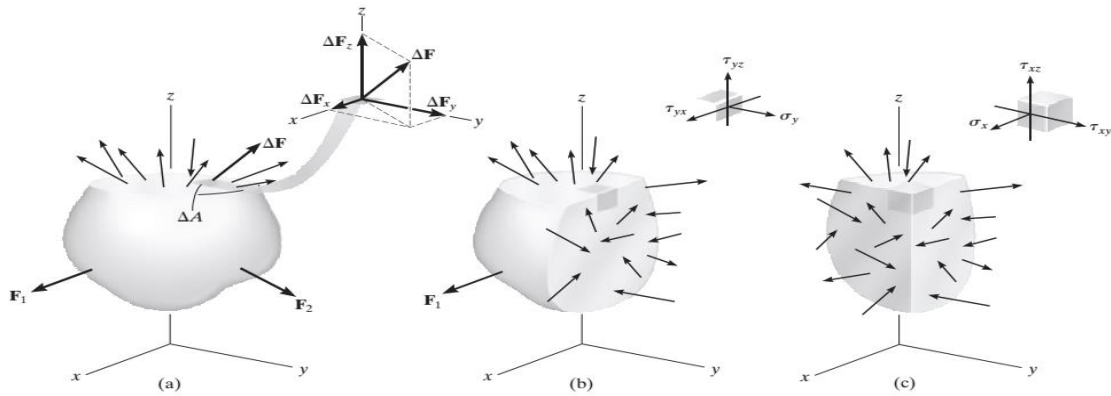


Figura 2. Cargas internas resultantes, Hibbeler<sup>3</sup>

Para analizar placas planas se debe definir el esfuerzo plano, el cual se produce cuando el material en un punto infinitesimal está sometido a dos componentes de esfuerzo normal  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , y una de esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  como se puede observar en la Figura 3, Gere<sup>4</sup>.

### 1.1.2 Tensión plana

La tensión plana se define como un estado de esfuerzos en el que la tensión normal y la tensión cizallante dirigidas perpendicular al plano se supone que son cero. Por lo tanto existe una deformación unitaria  $\epsilon_z$  que no es nula en dicha dirección.

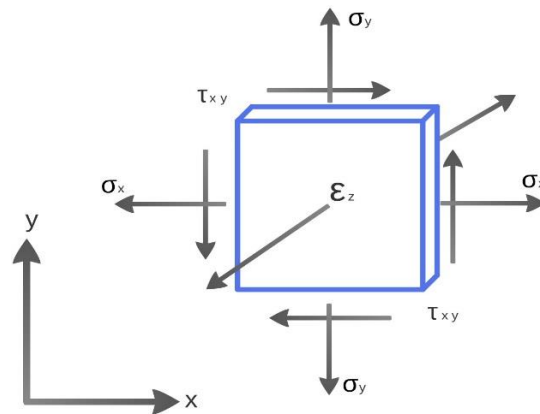


Figura 3. Estado de tensiones plano.

<sup>4</sup> GERE James M., GOODNO Barry J., "Mecánica de materiales". Séptima edición. Cengage Learning 2009



### 1.1.3 Deformación

Otro aspecto fundamental de la ingeniería, es la deformación de un cuerpo, la cual se especifica mediante los conceptos de deformación unitaria y cortante. Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, éste tiende a cambiar la forma y el tamaño del cuerpo. Estos cambios se conocen como deformación y pueden ser visibles o casi imperceptibles.

Para describir la deformación de un cuerpo, considere un segmento de línea corto imaginario  $\overline{AB}$  dentro de un cuerpo de referencia Figura 4.a, donde su longitud es  $\Delta s$ ; al cuerpo se le aplican cargas externas de tal forma que la línea imaginaria tiene un cambio en su tamaño y dirección, contrayéndose o estirándose adquiriendo una nueva longitud  $\Delta s'$  (ver Figura 4.b). La deformación unitaria  $\epsilon$  es el cambio que presenta la línea  $\Delta s$  y se define como la diferencia de la longitud inicial con respecto a la final, dividido la longitud inicial (ecuación 4), Bedford<sup>5</sup>.

$$\epsilon = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \quad (4)$$

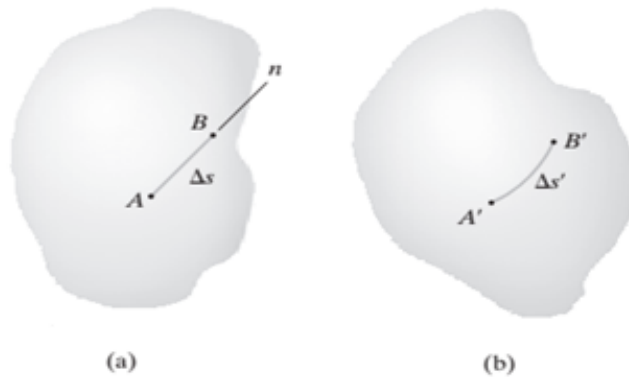


Figura 4. Cuerpo no deformado (a) y cuerpo deformado (b), Hibbeler<sup>3</sup>

También es importante analizar la deformación angular causada por el esfuerzo cortante. Ahora considérese dos líneas  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  perpendiculares entre sí en el cuerpo de referencia (Figura 5.a), por efecto de las fuerzas externas el ángulo de

---

<sup>5</sup> BEDFORD Anthony, LIECHTI Kenneth M. "Mecánica de materiales". Primera edición. Prentice Hall 2002

$90^\circ$  o  $\pi/2$  que hay entre las dos líneas cambia, disminuyendo o aumentando en un ángulo  $\gamma$ . El ángulo  $\gamma$  se define como la deformación angular causada por los esfuerzos cortantes que se presentan en el cuerpo con referencia a las direcciones  $n$  y  $t$  (Figura 5.b). Por consiguiente, la deformación angular es la medida del cambio del ángulo entre dos líneas que eran perpendiculares.

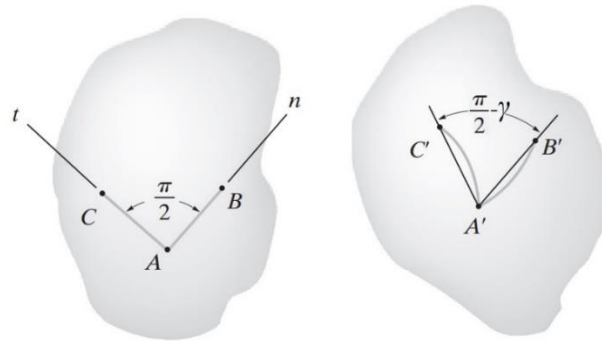


Figura 5. Líneas de referencia para la deformación angular en un cuerpo, Hibbeler<sup>3</sup>

Tomando un elemento infinitesimal cúbico del cuerpo en el estado de referencia, la deformación angular es igual en todos los vértices del cubo y su estado final se muestra en la Figura 6.

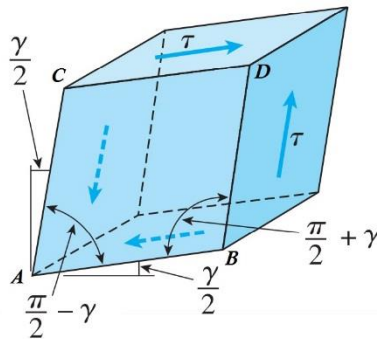


Figura 6. Deformación angular, Gere<sup>4</sup>

### 1.1.3.1 Deformación plana

La deformación plana se define como un estado en donde la deformación  $\epsilon_z$  normal al plano  $x - y$  y las deformaciones de cizallamiento  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  se suponen que son cero. Si el sentido del espesor del sólido no da posibilidad de deformación, o sea que  $\epsilon_z = 0$ , se genera un esfuerzo en dicha dirección  $\sigma_z$  no nula.

### 1.1.4 Diagrama esfuerzo-deformación y ley de Hooke

En el siguiente punto nos ocuparemos de las propiedades mecánicas de los materiales, las cuales relacionan esfuerzo y deformación, mediante el uso de métodos experimentales que permiten determinar diagramas de esfuerzo-deformación, en materiales específicos usados en ingeniería y en la mecánica de materiales.

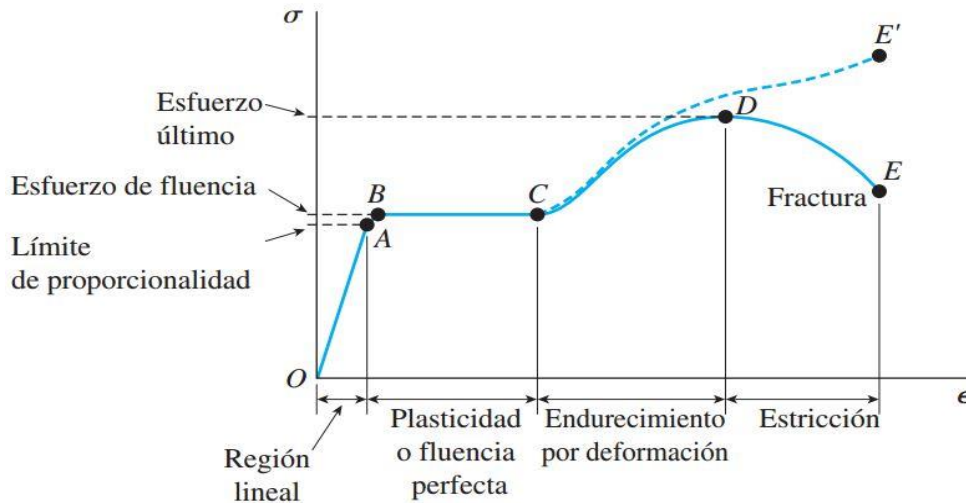


Figura 7. Diagrama de esfuerzo deformación unitario para un acero estructural sometido a tensión, Gere<sup>4</sup>

Mediante el diagrama de esfuerzos convencional, se puede determinar el esfuerzo nominal o de ingeniería de una probeta sometida a una prueba experimental de tracción; al dividir la carga aplicada  $P$  entre el área  $A_0$  de la sección transversal original de la probeta, suponiendo un efecto constante en dicha sección y en toda la longitud calibrada. Se tiene entonces:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (5)$$

Del mismo modo, la deformación nominal o de ingeniería se determina directamente al leer el medidor de deformación o al dividir el cambio  $\delta$  en la longitud calibrada de la probeta entre la longitud calibrada original  $L_0$  de la probeta. Aquí se supone que la deformación es constante a lo largo de la región entre los puntos marcados. Por lo tanto:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_o} \quad (6)$$

En la gráfica de la Figura 7, se puede observar que desde el origen  $O$  hasta el límite de proporcionalidad, el diagrama esfuerzo-deformación es un segmento rectilíneo, de donde se deduce la relación de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación (ley de Hooke), en la sección elástica. En consecuencia un aumento en el esfuerzo ocasiona un aumento proporcional en la deformación. De donde:

$$\sigma = E\epsilon \quad (7)$$

Los experimentos hechos con diversos materiales sometidos a tracción han puesto de manifiesto que dentro del margen de comportamiento elástico del material, el alargamiento  $\delta$  es directamente proporcional a la fuerza de tracción  $P$  y a la longitud de la barra  $L$ ; a su vez es inversamente proporcional al área de la sección recta  $A$  de la barra, donde  $E$  es una constante para cada material y se le llama módulo de elasticidad o módulo de Young del material a tracción.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (8)$$

Donde:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (9)$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (10)$$

### 1.1.5 Relación de Poisson

La relación de Poisson afirma que las deformaciones laterales que se producen tienen una relación constante con las deformaciones axiales. Mientras que el material se mantenga dentro del rango elástico de esfuerzos, esta relación es

constante. La relación de Poisson tiene un único valor para cada material particular que sea homogéneo e isotrópico Fitzgerald<sup>6</sup>. Su expresión es:

$$\nu = - \frac{\text{Deformación lateral}}{\text{Deformación axial}} \quad (11)$$

### 1.1.6 Ley de Hooke en el plano

La ley de Hooke se puede generalizar para los estados bidimensionales, de tal manera que los esfuerzos normales se pueden hallar en términos de las deformaciones del elemento para cada eje por separado y posteriormente sumándolos algebraicamente. Para realizar este procedimiento se deben cumplir dos condiciones del principio de superposición:

- a) Cada efecto está relacionado linealmente con la carga que lo produce.
- b) El efecto de la primera carga no cambia significativamente al efecto de la segunda carga.

Cuando un elemento se encuentra bajo el efecto de la tensión  $\sigma_x$ , existe una deformación unitaria  $\sigma_x/E$  para el eje coordenado  $x$  y una compresión unitaria  $\nu\sigma_x/E$  para el eje coordenado  $y$ . Cuando se producen estas deformaciones en el elemento infinitesimal se genera un estiramiento en una cantidad  $(\sigma_x/E)dx$  en dirección  $x$  y una contracción  $(\nu\sigma_x/E)dy$  en dirección  $y$ .

Las deformaciones por efecto de los esfuerzos se representan paso a paso en la Figura 8, y sus expresiones de cálculo se determinan en las ecuaciones 12 a 17.

$$d\delta_x = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx - \frac{\nu\sigma_y}{E} dx \quad (12)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (13)$$

---

<sup>6</sup> FITZGERALD Robert W. "Mecánica de materiales". Edición revisada. Alfaomega. 1996

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (14)$$

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (15)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (16)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (17)$$

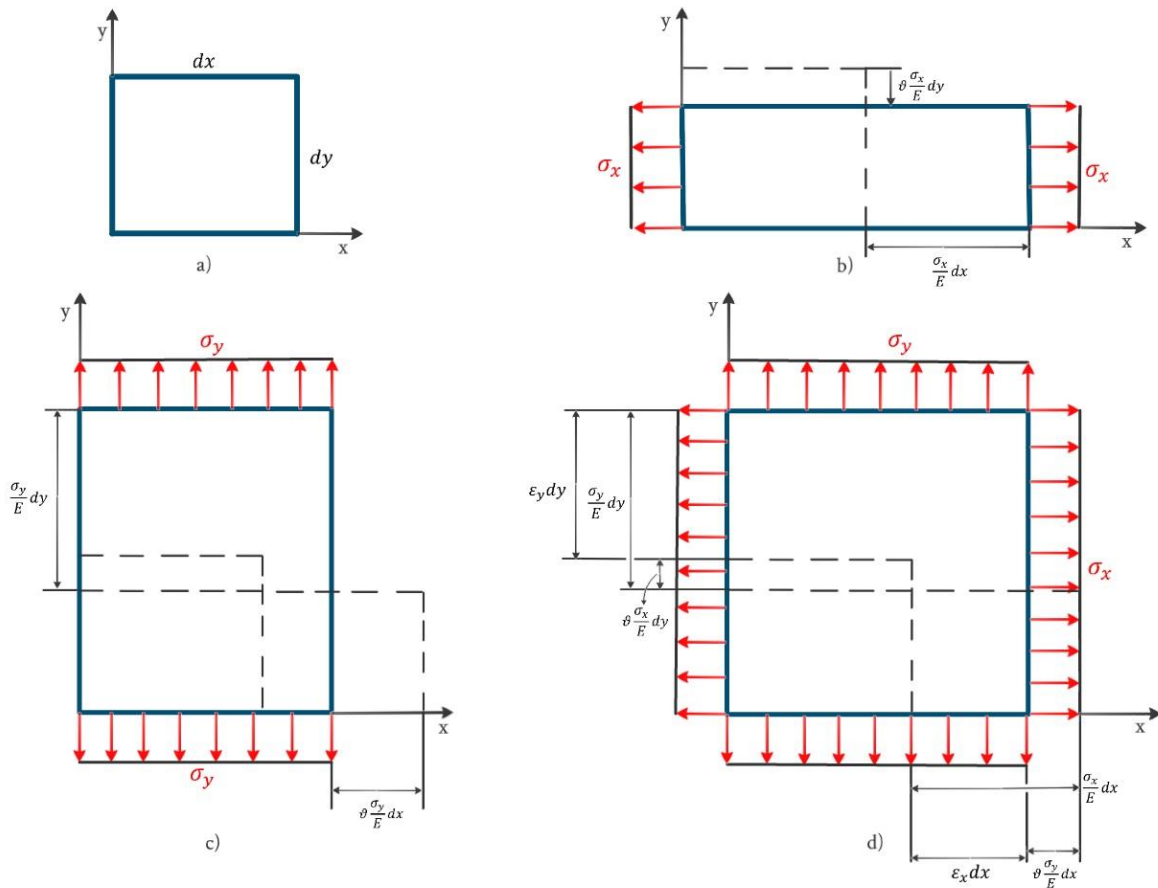


Figura 8. Superposición de la deformación bajo carga biaxial

## 1.2 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Dado que en la realidad, las barras y elementos mecánicos tienen agujeros, ranuras, muescas, chaveteros, filetes, entallas y otros cambios bruscos en su geometría, (ver Figura 9), los cuales crean perturbaciones en el patrón uniforme de esfuerzos y

complican los cálculos. Dichas discontinuidades en las piezas generan aumentos en los costos, y hacen aumentar el tamaño y masa de las piezas que se diseñan. Además causan altos esfuerzos en regiones muy pequeñas de la barra y se conocen como concentraciones de esfuerzos; que hacen que se presenten cambios en el flujo de esfuerzos en el elemento sometido a carga. Las discontinuidades se llaman elevadores de esfuerzos.

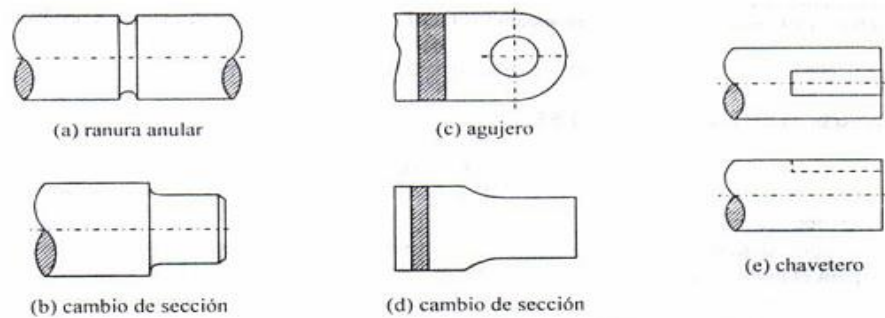


Figura 9. Discontinuidades comunes en elementos de máquina. VANEGAS, Libardo, (19/11/2012). "Carga estática simple", Pág. 34. Disponible en: <http://blog.utp.edu.co/lvanegas/files/2011/08/Cap3.pdf>, (29/05/2013).

Los concentradores de esfuerzos pueden o no ser significativos, todo depende de la geometría, tipo de concentrador y de las cargas a las que será sometido. En el caso de los materiales frágiles, si en algunas de las fibras con la mayor carga se alcanzara el esfuerzo último, estas se romperán, aunque la intensidad del esfuerzo promedio quede por debajo del esfuerzo último. Las fibras rotas forman una grieta diminuta que disminuye el área neta de la sección. Esta reducción de área hace que más fibras se sobrecarguen hasta fallar. Produciendo rápidamente una grieta progresiva haciendo que se fracture todo el miembro.

### 1.2.1 Principio de Saint - Venant

El científico francés Barré de Saint-Venant en 1855 estableció, que el esfuerzo y la deformación que se producen en los puntos de un cuerpo lo suficientemente alejados de la región donde se aplican las cargas serán iguales al esfuerzo y la deformación producidos por cualesquiera cargas aplicadas que tengan la misma resultante estáticamente equivalente, y que se apliquen al cuerpo dentro de la

misma región. El esfuerzo máximo directamente debajo de la carga puede ser varias veces mayor al esfuerzo promedio calculado con la sección transversal, dependiendo del área donde se aplica la carga.

La ecuación 4 define los esfuerzos axiales sobre una sección transversal de la barra sólo cuando la sección está alejada al menos una distancia  $b$  de cualquier carga concentrada o discontinuidad en su forma, donde  $b$  es la dimensión lateral más grande de la barra (como el ancho o el diámetro). Ver Figura 10.

En tanto que el principio de Saint-Venant permite reemplazar una carga dada por una más sencilla con el propósito de calcular los esfuerzos en un elemento estructural, deberán recordarse dos puntos importantes al aplicar este principio:

1. La carga real y la utilizada para calcular los esfuerzos deben ser estáticamente equivalentes.
2. Los esfuerzos no pueden calcularse, de esta manera, en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Deben utilizarse métodos teóricos o experimentales avanzados para determinar la distribución de esfuerzos en estas áreas.

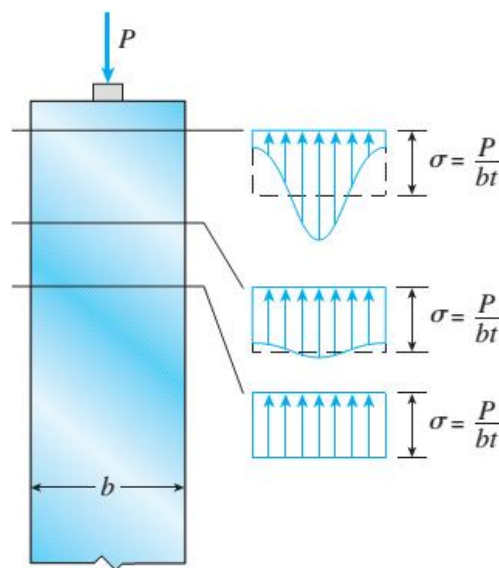


Figura 10. Distribuciones de esfuerzos cerca del extremo de una barra con sección transversal rectangular (espesor  $t$ ) sometida a una carga concentrada  $P$  que actúa sobre un área pequeña. Gere<sup>4</sup>.



### 1.2.2 Factores de la concentración de esfuerzos

En la práctica de ingeniería, las distribuciones de esfuerzo reales no tienen que determinarse. La resultante  $P$  debe actuar a través del centroide de cada volumen. Sólo es necesario conocer el esfuerzo máximo en las secciones y se diseña el elemento para resistir dicho esfuerzo, aplicando la carga axial  $P$  y los valores específicos de este esfuerzo normal máximo. Se usa un factor de concentración del esfuerzo  $k$ , definido como una relación entre esfuerzo máximo y esfuerzo normal promedio que actúa en la sección transversal y se puede determinar mediante métodos experimentales o técnicas matemáticas avanzadas utilizadas en la teoría de la elasticidad.

$$k = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_{prom}} \quad (18)$$

Siempre que  $k$  se conozca y que el esfuerzo normal haya sido calculado a partir de  $\sigma_{prom} = P/A$ , donde  $A$  es el área más pequeña de la sección transversal, en la Figura 11.c, el esfuerzo normal máximo en la sección transversal será una  $\sigma_{m\acute{a}x} = k(P/A)$ . Los resultados obtenidos son independientes del tamaño del elemento y del material utilizado.

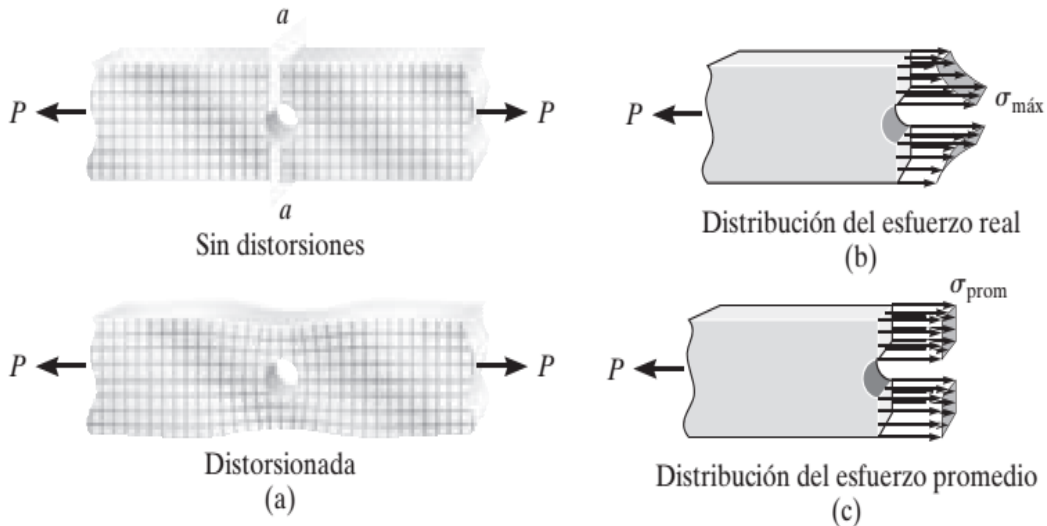


Figura 11. HIBBELER Russell C, "Mecánica de materiales" (2011). Octava edición. Pearson Educación de México, pág. 158

Los factores de concentración de esfuerzo pueden calcularse de una vez por todas en términos de las razones de los parámetros geométricos involucrados, y los resultados obtenidos pueden ser expresados en la forma de tablas o gráficas. Como se puede ver Figura 12.

La intensidad de las concentraciones de esfuerzos se puede reducir si las partes tienen una proporción adecuada. Los filetes de buen tamaño reducen las concentraciones de esfuerzos en las aristas reentrantes. Las superficies lisas en puntos de esfuerzo elevado, como en el interior de un agujero, inhiben la formación de grietas. Hay muchas otras técnicas para uniformar las distribuciones de los esfuerzos en un elemento estructural y debido a esto se puede reducir el factor de concentración de esfuerzos. En la Figura 13 se pueden observar los cambios en la sección transversal de las fibras.

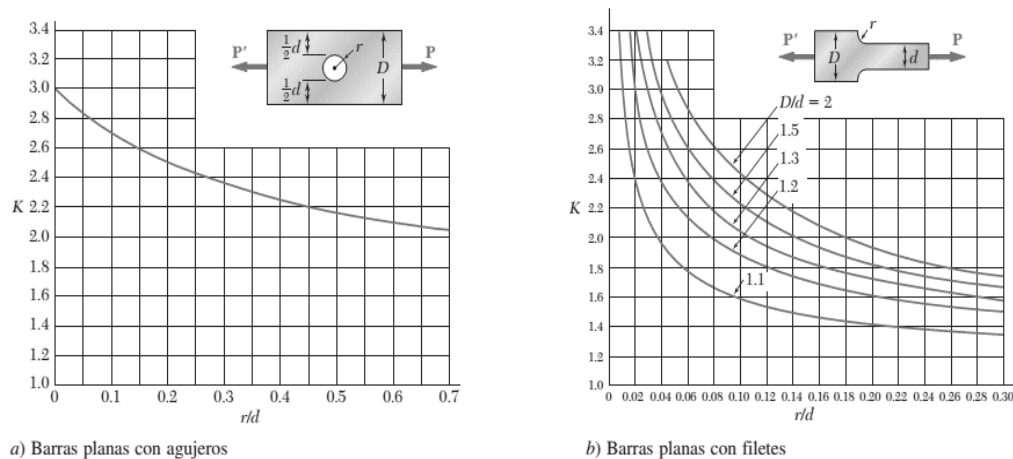


Figura 12. Factores de concentración de esfuerzos para barras planas bajo carga axial. BEER Ferdinand, JOHNSTON Russell, "Mecánica de materiales" (2009). Quinta edición. McGraw-Hill México, pág. 108

En este orden de ideas, podemos destacar ideas como:

- Las concentraciones de esfuerzos se producen en los segmentos donde el área de la sección transversal cambia de manera súbita. Cuanto más grande es el cambio, mayor será la concentración de esfuerzos.
- Para el diseño o análisis, solo es necesario determinar el esfuerzo máximo que actúa sobre la sección transversal con el área más pequeña. Para ello

se emplea un factor de concentración de esfuerzos  $k$ , que se determina mediante experimentación y es sólo función de la geometría de la probeta.

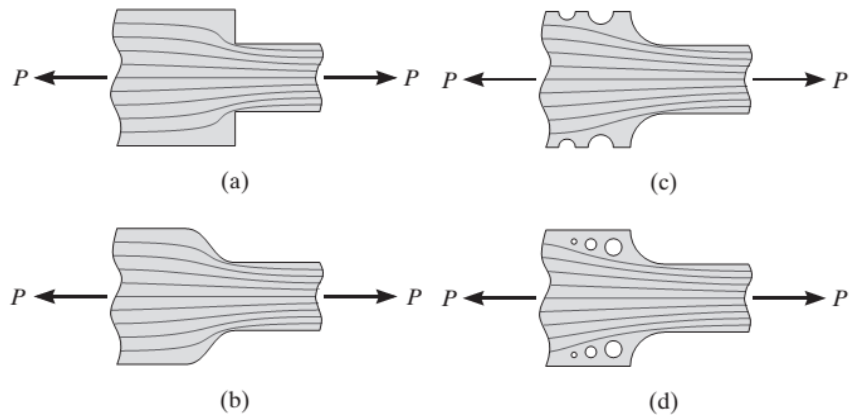


Figura 13. HIBBELER Russell C, "Mecánica de materiales" (2011). Octava edición. Pearson Educación de México, pág. 160

## CAPÍTULO 2

### MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El uso del método de elementos finitos (MEF) pretende efectuar un análisis minucioso y confiable sobre sistemas modelados, siendo lo suficientemente versátil y flexible para aplicarlo a diversas geometrías y campos. Igualmente las características de fácil modelado de cuerpos con formas irregulares, condiciones de carga, diversidad de materiales, condiciones de frontera, tamaño de los elementos, además del manejo sencillo y económico del método, permiten soluciones muy aproximadas para un amplio rango de problemas.

El método de elementos finitos implica el modelado de la estructura utilizando pequeños elementos interconectados llamados elementos finitos. Una función de desplazamiento está asociada con cada elemento finito. Cada elemento interconectado está vinculado, directa o indirectamente, a cualquier otro elemento a través de interfaces comunes (o compartidos), incluyendo nodos y/o líneas de contorno y/o superficies. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada uno. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales.

Este capítulo se desarrollará en varias secciones, comenzando brevemente con el desarrollo que ha tenido el MEF desde su inicio en los años 50's. Luego, se mostrará una introducción al MEF aplicado a problemas de elasticidad bidimensional. Para la tercera sección, se relaciona las ecuaciones a utilizar en un elemento linear triangular. En las últimas secciones del capítulo se muestra un resumen de ecuaciones para analizar el elemento cuadrático triangular, cuadrilátero bilineal, cuadrilátero cuadrático y además una corta introducción de integración numérica.

## 2.1 RESEÑA HISTÓRICA DEL MEF

El concepto de elementos finitos fue utilizado desde la época de los egipcios, como una ayuda para la construcción de las pirámides, valiéndose de métodos de discretización, obtenían un valor aproximado del volumen total de las pirámides, la técnica empleada consiste en dividir un cuerpo total en pequeños cuerpos de dimensiones conocidas para obtener un resultado cercano del volumen real de las pirámides.

Luego en 1909, Ritz presenta sus trabajos en el área de la mecánica del continuo. En este método, se asume la “forma” de las variables desconocidas que intervienen en el problema, en términos de unos parámetros a determinar y unas funciones de aproximación conocidas. La principal limitación del método de Ritz radica en que las funciones de aproximación deben verificar unas condiciones de contorno específicas, lo cual restringe el método a problemas de geometrías simples.

En 1943 el matemático Courant<sup>7</sup> planteó una solución a la limitación del método de Ritz, introduciendo funciones seccionalmente continuas definidas sobre áreas triangulares, de la mano del principio de mínima energía potencial, para el posterior análisis de los problemas de torsión. Después añadió la aplicación del método de funciones interpolares sobre sub-regiones triangulares que conformaban una región entera obteniendo resultados numéricos aproximados.

Los esfuerzos empleados en la solución de problemas continuos de elasticidad dieron sus frutos cuando en los años 50's, el uso de pequeños elementos para describir el comportamiento de una barra elástica arrojaron resultados favorables. El método de rigidez y desplazamiento, vio luz cuando en 1953 fuera publicado por Levy<sup>8</sup> como consecuencia de sus trabajos anteriores sobre el método de flexibilidad y fuerza, siendo una alternativa del análisis estático hasta ahora planteado y desarrollado; sin embargo, debido al laborioso procedimiento para su solución a

---

<sup>7</sup> Hughes, Thomas “The Finite Element Method”. Prentice Hall, United Stated. 1987

<sup>8</sup> Levy, S. “Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings”. Journal of aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 7, pp449.454, July 1953.

mano, debió esperar unos años más hasta la llegada de las computadoras digitales de alta velocidad para ser un método realmente aplicable.

Los primeros intentos para analizar los cuerpos en 2 dimensiones fueron realizados en el año de 1956 por Turner, en su trabajo introdujo las matrices de rigidez empleando elementos bidimensionales como rectángulos y triángulos sometidos a esfuerzo simple, para la determinación de armaduras y elementos conformados por vigas.

A lo largo de esta década la evolución del método continuó, y no fue hasta el año 1960 donde Clough<sup>9</sup> sugirió el nombre en una publicación como “Método de elementos Finitos”.

La aplicación de las técnicas de elementos finitos dejó de ser de uso exclusivo para problemas estructurales y sus afines, cuando Zienkiewicz y Cheung<sup>10</sup> publicaron el método de elementos finitos aplicado a problemas de campo, en él se expuso que las ecuaciones de los elementos finitos pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales como son el método de Galerkin y el de mínimos cuadrados.

Luego de los años 60 se empezó a hacer modelación matemática a través de métodos energéticos, su principal aplicación se fundamenta en las fallas de material, tomando como ejemplo el criterio de falla Von Mises, o también conocido dentro de la literatura como, "criterio de máxima energía de distorsión".

Hoy en día este método se localiza en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria para reducir los costos, elaborar productos más confiables y eficaces. Por esto continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido

---

<sup>9</sup>Turner, Clough, Martin, “Stiffness and deflection analysis of complex structures”. Journal of Aeronautical Sciences, 23, 805-824. 1956.

<sup>10</sup> Zienkiewicz y cheung “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics”, Mc Graw-Hill, London. 1967

caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados.

## 2.2 MEF EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Esta sección trata del análisis estático a los sólidos bidimensionales, sometidos a tensión plana; lo cual se refiere a problemas donde el espesor o grosor es bastante reducido en comparación con otras dimensiones en el plano de referencia  $x - y$ . Igualmente, las cargas y condiciones de contorno se aplican en la referencia o plano medio de la estructura. De otra parte, los desplazamientos se calculan en el plano de referencia.

Los problemas de elasticidad en dos dimensiones son bastante frecuentes en ingeniería y es en ellos donde se aplicó por primera vez el MEF. Para ello se utiliza el análisis a través del plano cartesiano en el cual se sitúan las coordenadas  $x - y$ .

### 2.2.1 Desplazamiento, esfuerzo y deformación

La posición de un punto está determinada por las coordenadas  $(x, y)$  y su desplazamiento presenta dos componentes  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. En tal sentido, el campo de desplazamientos es un vector:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Para calcular los esfuerzos en función de la deformación se emplea la ecuación 20

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (20)$$

La deformación es todo cambio que se produce en un cuerpo debido a las fuerzas externas o cualquier fenómeno físico que altere la geometría original del cuerpo. Las deformaciones son el resultado de la derivación de los desplazamientos, lo cual se expresa así:

$$\epsilon(x, y) = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Para determinar las tensiones para un material elástico lineal se aplica la ecuación:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Así mismo, para un material elástico lineal e isótropo la matriz elástica  $D$  es constante. Su expresión asume criterios diferentes para resolver problemas de elasticidad plana.

Para tensión plana, es decir  $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$

$$[D] = \frac{E}{1-\vartheta^2} \begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Donde  $E, \vartheta$  son el modulo de elasticidad y la relación de Poisson, que considera las propiedades inherentes al material.

Para deformación plana, cuando  $\epsilon_z = 0, \nu_{xz} = 0$  y  $\nu_{yz} = 0$ :

$$[D] = \frac{E}{(1-2\vartheta)(1+\vartheta)} \begin{bmatrix} 1-\vartheta & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1-\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\vartheta}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 2.2.2 Funciones de desplazamiento e interpolación

Las funciones de desplazamiento para cada elemento son:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (25)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y \quad (26)$$



El campo de las deformaciones dentro del elemento se puede aproximar a través de la expresión:

$$u = \sum N_i U_i \quad (27)$$

$$v = \sum N_i V_i \quad (28)$$

Donde  $N_i$  son las funciones de interpolación del elemento, que son en general funciones de las coordenadas  $x, y$ . Nótese que se emplean las mismas funciones para interpolar los desplazamientos  $u$  y  $v$ , y que ambos desplazamientos se interpolan por separado, el campo  $u$  mediante las  $U_i$  y el campo  $v$  mediante las  $V_i$ .

La matriz de funciones de interpolación  $[N]$  posee dos filas y tantas columnas, como grados de libertad existan entre todos los nodos de un elemento. De ahí que la estructura de la matriz de interpolación siempre es la misma:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (29)$$

### 2.2.3 Definición de la matriz de rigidez

Familiarizarnos con la matriz de rigidez es el paso esencial para la comprensión del método de rigidez. La matriz de rigidez puede definirse de la siguiente manera, para un elemento:

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (30)$$

Donde  $[k]$  relaciona el desplazamiento nodal  $\{d\}$  y la fuerza nodal  $\{f\}$ .

La expresión obtenida del principio de energía potencial mínima para la matriz de rigidez de un elemento plano cualquiera, por Daryl<sup>11</sup> es:

---

<sup>11</sup> DARYL Logan, "A first course in the Finit Element Method". Fifth edition. Cengage learning 2012.

$$[k] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (31)$$

En ésta ecuación la matriz  $[B]$ , que se obtiene derivando la matriz de funciones de interpolación  $[N]$  respecto a las coordenadas  $x$  e  $y$ . La matriz  $k$  se puede subdividirse en  $2n \times 2n$  submatrices, que relacionan todos los  $n$  nodos que hay entre ellos:

$$[k] = \begin{bmatrix} k^{1,1} & \dots & k^{1,2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k^{2n,1} & \dots & k^{2n,2n} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Ahora la matriz de rigidez global  $[K]$  relaciona a su vez las coordenadas globales  $(x, y)$  al desplazamiento  $\{d\}$  y a la fuerza global  $\{F\}$ , así.

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (33)$$

### 2.3 ELEMENTOS LINEALES TRIANGULARES “CST”

El elemento triangular lineal es el elemento finito que asume las dos dimensiones de las coordenadas globales y locales. Su característica es que representa varias funciones lineales en el plano. Dicho elemento se utiliza para tensión plana o deformación plana, en problemas de elasticidad. También se le denomina triángulo de tensión constante. Cada triángulo lineal presenta tres nodos, cada uno de estos posee dos grados de libertad, como se muestra en la Figura 14.

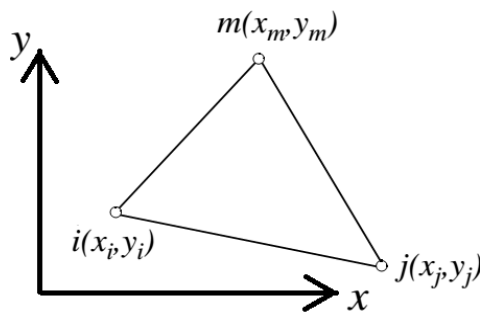


Figura 14. Elemento triangular lineal

### 2.3.1 Derivación de elementos de matriz de rigidez

Partiendo del principio de energía potencial mínima según Daryl<sup>11</sup>, se puede obtener la ecuación para un elemento triangular típico de deformación constante, en el cual, la energía potencial está dada por:

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (34)$$

En el cual  $U$ : Energía de deformación

$\Omega_b$ : Energía potencial de las fuerzas en el cuerpo, está dada por fuerza por unidad de volumen

$\Omega_p$ : Energía potencial de las cargas concentradas

$\Omega_s$ : Energía potencial de las cargas distribuidas que se mueven a través de la correspondiente superficie de desplazamiento

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$\{f\} = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} \quad (35)$$

Que en el caso de elementos triangulares de espesor constante, resolviendo se tiene que:

$$[k] = tA[B]^T [D] [B] \quad (36)$$

Donde el área del elemento se obtiene por:

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j) \quad (37)$$

La matriz gradiente es:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (38)$$

Y los valores de  $\beta$  y  $\gamma$  están dados por

$$\beta_i = y_j - y_m \quad (39)$$

$$\beta_j = y_m - y_i \quad (40)$$

$$\beta_m = y_i - y_j \quad (41)$$

$$\gamma_i = x_m - x_j \quad (42)$$

$$\gamma_j = x_i - x_m \quad (43)$$

$$\gamma_m = x_j - x_i \quad (44)$$

Es claro que el CST tiene seis grados de libertad. Consecuentemente para una estructura con  $n$  nodos, la matriz de rigidez global  $[K]$  tendrá un tamaño de  $2n \times 2n$ .

Utilizando las condiciones de frontera para resolver la ecuación 30 se pueden calcular las reacciones y desplazamientos desconocidos para la placa. Finalmente, una vez se encuentran los desplazamientos y reacciones desconocidas, el vector de esfuerzos se obtiene para cada elemento de la siguiente manera:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (45)$$

## 2.4 ELEMENTOS CUADRATICO TRIANGULARES “LST”

El elemento triangular cuadrático se caracteriza por funciones de forma cuadráticas. También se conoce como el triángulo de tensión lineal. Cada triángulo cuadrático tiene seis nodos con dos grados de libertad en cada nodo, como se muestra en la Figura 15. El orden de los nodos en cada elemento debe de figurar en dirección antihorario a partir de los nodos de esquina y siguiendo con los intermedios.

Las funciones de desplazamiento para cada elemento son:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (46)$$

$$v(x, y) = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2 \quad (47)$$

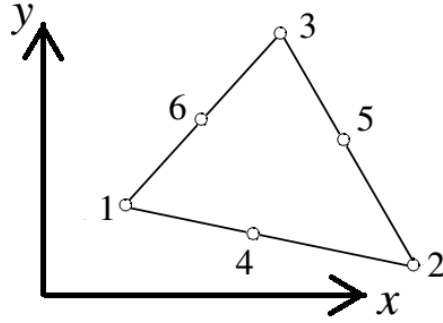


Figura 15. Elemento cuadrático triangular

Las funciones de interpolación para dicho elemento son:

$$N_1 = \frac{((x_{23}(y-y_3)-y_{23}(x-x_3))(x_{46}(y-y_6)-y_{46}(x-x_6)))}{(x_{23}y_{13}-y_{23}x_{13})(x_{46}y_{16}-y_{46}x_{16})} \quad (48)$$

$$N_2 = \frac{((x_{31}(y-y_1)-y_{31}(x-x_1))(x_{54}(y-y_4)-y_{54}(x-x_4)))}{(x_{31}y_{21}-y_{31}x_{21})(x_{54}y_{24}-y_{54}x_{24})} \quad (49)$$

$$N_3 = \frac{((x_{21}(y-y_1)-y_{21}(x-x_1))(x_{56}(y-y_6)-y_{56}(x-x_6)))}{(x_{21}y_{31}-y_{21}x_{31})(x_{56}y_{36}-y_{56}x_{36})} \quad (50)$$

$$N_4 = \frac{((x_{31}(y-y_1)-y_{31}(x-x_1))(x_{23}(y-y_3)-y_{23}(x-x_3)))}{(x_{31}y_{41}-y_{31}x_{41})(x_{23}y_{43}-y_{23}x_{43})} \quad (51)$$

$$N_5 = \frac{((x_{31}(y-y_1)-y_{31}(x-x_1))(x_{21}(y-y_1)-y_{21}(x-x_1)))}{(x_{31}y_{51}-y_{31}x_{51})(x_{21}y_{51}-y_{21}x_{51})} \quad (52)$$

$$N_6 = \frac{((x_{21}(y-y_1)-y_{21}(x-x_1))(x_{23}(y-y_3)-y_{23}(x-x_3)))}{(x_{21}y_{61}-y_{21}x_{61})(x_{23}y_{63}-y_{23}x_{63})} \quad (53)$$

Donde los términos se calculan de la siguiente manera

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (54)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (55)$$

La matriz  $[B]$  tiene las siguientes componentes:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (56)$$

La matriz de rigidez para un elemento LST está escrita en términos de la doble integral de la siguiente manera:

$$[k] = t \iint_A [B]^T [D][B] dx dy \quad (57)$$

El vector de esfuerzos es calculado por medio de la ecuación 45, de la misma forma que en el CST.

## 2.5 ELEMENTOS CUADRILÁTERO BILINEAL “Q<sub>4</sub>”

El elemento cuadrilátero bilineal se caracteriza por funciones de forma lineales en cada una de las direcciones  $x$  y  $y$ . Cada elemento cuadrilátero bilineal tiene cuatro nodos con dos grados de libertad en cada nodo como se muestra en la Figura 16.a. El elemento es mapeado en un rectángulo mediante el uso de las coordenadas naturales  $\xi$  y  $\eta$  como se muestra en la Figura 16. Las funciones de desplazamiento para cada elemento son:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (58)$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (59)$$

Las cuatro funciones de forma para este elemento se enumeran explícitamente como sigue:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (60)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (61)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (62)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (63)$$

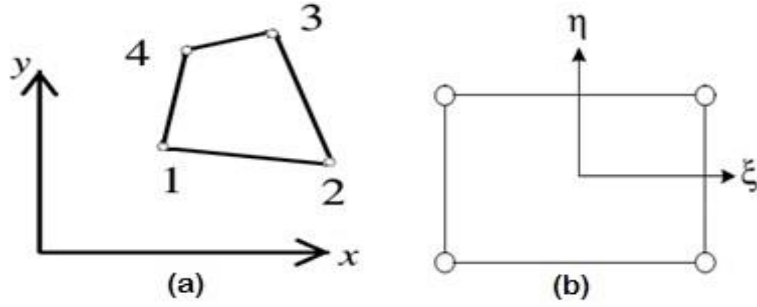


Figura 16. Elemento cuadrilátero bilineal(a), elemento cuadrilátero de cuatro nodos

En la cual la matriz  $[B]$ :

$$[B] = \frac{1}{|J|} [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \quad (64)$$

Donde cada una de las componentes de  $[B]$  esta dada por

$$[B_i] = \begin{bmatrix} a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ c \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Los parámetros a, b, c y d son:

$$a = \frac{1}{4} [y_1(\xi - 1) + y_2(-1 - \xi) + y_3(1 + \xi) + y_4(1 - \xi)] \quad (66)$$

$$b = \frac{1}{4} [y_1(\eta - 1) + y_2(1 - \eta) + y_3(1 + \eta) + y_4(-1 - \eta)] \quad (67)$$

$$c = \frac{1}{4} [x_1(\eta - 1) + x_2(1 - \eta) + x_3(1 + \eta) + x_4(-1 - \eta)] \quad (68)$$

$$d = \frac{1}{4} [x_1(\xi - 1) + x_2(-1 - \xi) + x_3(1 + \xi) + x_4(1 - \xi)] \quad (69)$$

El determinante  $|J|$

$$|J| = \frac{1}{8} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \begin{bmatrix} 0 & 1 - \eta & \eta - \xi & \xi - 1 \\ \eta - 1 & 0 & \xi + 1 & -\xi - \eta \\ \xi - \eta & -\xi - 1 & 0 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \xi + \eta & -\eta - 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (70)$$

La matriz de rigidez para un  $Q_4$  está escrita en términos de la doble integral de la siguiente manera:

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] |J| d\xi d\eta \quad (71)$$

Luego, el vector de esfuerzos es calculado por medio de la ecuación 45, de la misma forma que en el CST.

## 2.6 ELEMENTOS CUADRILÁTERO CUADRÁTICO “ $Q_8$ ”

El elemento cuadrilátero cuadrático se caracteriza por funciones de forma cuadrática en cada una de las direcciones  $x$  y  $y$ . Cada elemento cuadrilátero cuadrático tiene ocho nodos con dos grados de libertad, como se muestra en la Figura 17. El elemento es mapeado de la misma forma que el  $Q_4$  por medio de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ . Y el orden de los nodos aplica de la misma forma que en el LST. Las funciones de desplazamiento para cada elemento son:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 \quad (72)$$

$$v(x, y) = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}x^2 + a_{13}xy + a_{14}y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}xy^2 \quad (73)$$

Las funciones de forma para este elemento se enumeran explícitamente como sigue:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \quad (74)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (75)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (76)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \quad (77)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 + \xi)(1 - \xi) \quad (78)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \quad (79)$$



$$N_7 = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 + \xi)(1 - \xi) \quad (80)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \quad (81)$$

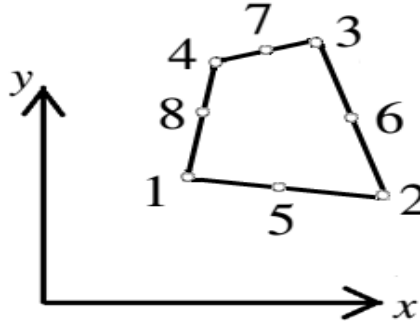


Figura 17. Elementos cuadrilátero cuadrático

La matriz Jacobiano se define como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Donde  $x$  y  $y$

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 + N_5x_5 + N_6x_6 + N_7x_7 + N_8x_8 \quad (83)$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5 + N_6y_6 + N_7y_7 + N_8y_8 \quad (84)$$

La matriz  $[B]$

$$[B] = [D'] [N] \quad (85)$$

Y  $[D']$  y  $[N]$

$$[D'] = \frac{1}{[J]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (87)$$

La matriz de rigidez para un Q<sub>8</sub> está escrita en los mismos términos del Q<sub>4</sub> por medio de la ecuación 65. Finalmente, el vector de esfuerzos es calculado por medio de la ecuación 45, de la misma forma que en el CST.

## 2.7 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Existen diversos métodos de integración numérica para dar solución a funciones polinómicas que se deseen integrar, pero es conveniente para el MEF usar el método expuesto por Gauss y que emplea polinomios ortogonales de Legendre y, por consiguiente, lleva por nombre Método de Gauss – Legendre o cuadratura de Gauss.

La integral definida de la ecuación 65 se puede expresar de la forma:

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (88)$$

Donde la función  $f(\xi, \eta)$  representa un polinomio, de tal forma que los métodos analíticos de integración actuales no le pueden dar solución. Dado este motivo es pertinente plantear un método numérico que permita resolver la integral.

Considérese la integral en el dominio  $[-1, 1]$  de  $\xi$  de la forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_1^n W_i f(\xi_i) \quad (89)$$

Se puede ver que para  $n$  puntos deseados habrán  $2n$  incógnitas  $(W_i, \xi_i)$ , con lo cual se puede obtener un polinomio de grado  $2n - 1$  y hallar su integral exacta (Figura 18).  $W_i$ , es una función de peso que permite eliminar las singularidades en la integración;  $\xi_i$  son las raíces del polinomio ortogonal de Legendre.

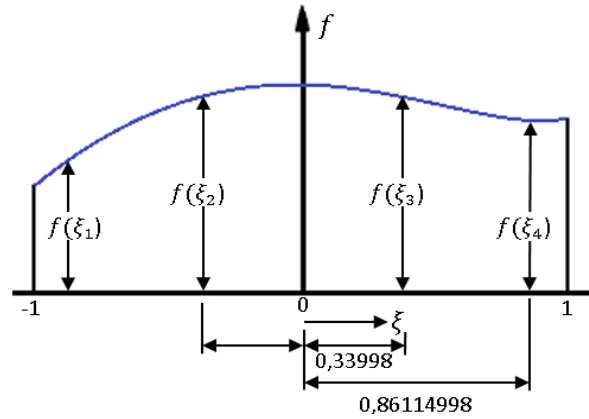


Figura 18. Integración de Gauss

En la Tabla 1 se muestran los coeficientes de peso y las abscisas para la cuadratura de Gauss.

$n$	$\pm \xi_i$	$W_i$
1	0	2
2	0.577350269189626	1
3	0.774596669241483	0.5555555555555556
	0	0.8888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0	0.5688888888888889

Tabla 1. Abscisas y coeficientes de peso de la fórmula de la cuadratura de Gauss

Aplicando la cuadratura de Gauss a la ecuación 89, se deduce una expresión para dos dimensiones. Inicialmente se resuelve la integral interior para  $\xi$  dejando constante  $\eta$ , luego, se integra la nueva expresión para  $\eta$ . La ecuación 90 representa la integral en dos dimensiones.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j f(\xi_j, \eta_i) \quad (90)$$

## CAPÍTULO 3

### PROGRAMAS COMPUTACIONALES UTILIZADOS

Este capítulo se encuentra dividido en dos partes de acuerdo a los programas computacionales que son utilizados en el desarrollo del trabajo de grado. En la primera parte, se proporcionan un resumen corto de algunas nociones básicas, comandos y funciones necesarias en la resolución de un problema de elementos finitos en Matlab. La segunda sección del capítulo es un resumen de las características y herramientas que ofrece Comsol Multiphysics para realizar mallados en dos dimensiones.

#### 3.1 MATLAB

“Matlab es un paquete de software matemático muy utilizado en distintos ámbitos profesionales y científicos. Matlab, cuyo nombre proviene de MATrix LABoratory (“laboratorio de matrices”), ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) e incluye un lenguaje de programación propio (el lenguaje M). Web” The MathWorks, Inc<sup>12</sup>

##### 3.1.1 Manipulación de matrices

Las operaciones con matrices son frecuentemente utilizadas en el MEF y Matlab ofrece un entorno de trabajo basado en matrices numéricas rectangulares. La sintaxis que se emplea para crear matrices se listan a continuación:

- Los componentes de una fila deben estar separados por espacios o comas.

---

<sup>12</sup>MATLAB OVERVIEW. The MathWorks, Inc. Fecha de revisión: 7 de Febrero de 2015. Disponibilidad web: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>>

- En el final de cada fila se emplea punto y coma (;) para separar ésta de la siguiente.
- El argumento de la matriz debe estar encerrado entre corchetes “[ ]”.

Ejemplo: Sea la matriz  $M$

$\gg M = [1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6; 7\ 8\ 9]$

$$M = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Los índices entre paréntesis se emplean para llamar a elementos individuales de la matriz, ejemplo:

$\gg M(3,1)$

$ans = 7$

Para referirse a toda una fila o a toda una columna se emplean los dos puntos (:), ejemplo, para la segunda columna de la matriz  $M$  tenemos:

$\gg v1 = M(:,2)$

$$v1 = \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}$$

Para añadir una fila a la matriz  $M$  se referencia la matriz y se escribe cada dato de la nueva fila que se añadirá al final. Se sigue un procedimiento similar para añadir una fila al comienzo de la matriz, como se muestra en el siguiente ejemplo.

$\gg M = [M; 10\ 11\ 12]$

$$M = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{matrix}$$

### 3.1.2 Operaciones con matrices

Las operaciones aritméticas básicas están definidas en la Tabla 2. Las operaciones suma (+) y resta (-) son definidas para las matrices siempre y cuando éstas tengan la misma dimensión. La operación de multiplicación de matrices está definida siempre que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. En la división, si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces  $A \setminus B$  y  $B / A$  corresponden a la multiplicación izquierda y derecha de  $B$  por el inverso de  $A$ , esto es,  $inv(A) * B$  y  $B * inv(A)$  respectivamente.

Operación	Operador	Ejemplo
Suma	+	A+B
Resta	-	A-B
Multiplicación escalar	*	k*B
Multiplicación elemento a elemento	.*	A.*B
División elemento a elemento	./	A./B
Transposición	'	A'

Tabla 2. Operaciones aritméticas básicas definidas en Matlab

Además de las operaciones básicas, Matlab incluye una amplia biblioteca de funciones. Algunas de éstas son:

Funciones de Matlab	Símbolo
Matriz inversa	inv
Tamaño de la matriz	size
Integral	int
Derivada	diff
Sustitución simbólica	subs
Elemento más pequeño en la matriz	min
Elemento más grande en la matriz	max
Localizar elementos que cumplan una condición	find
Resuelve un sistema de ecuaciones simbólica	solve

Tabla 3. Funciones Matlab

### 3.1.3 Conversión de tipos de datos

Matlab incorpora una diversidad de tipos de datos o clases, integrados en su entorno de trabajo, en total hay 16 clases fundamentales como se muestran en la Figura 19.

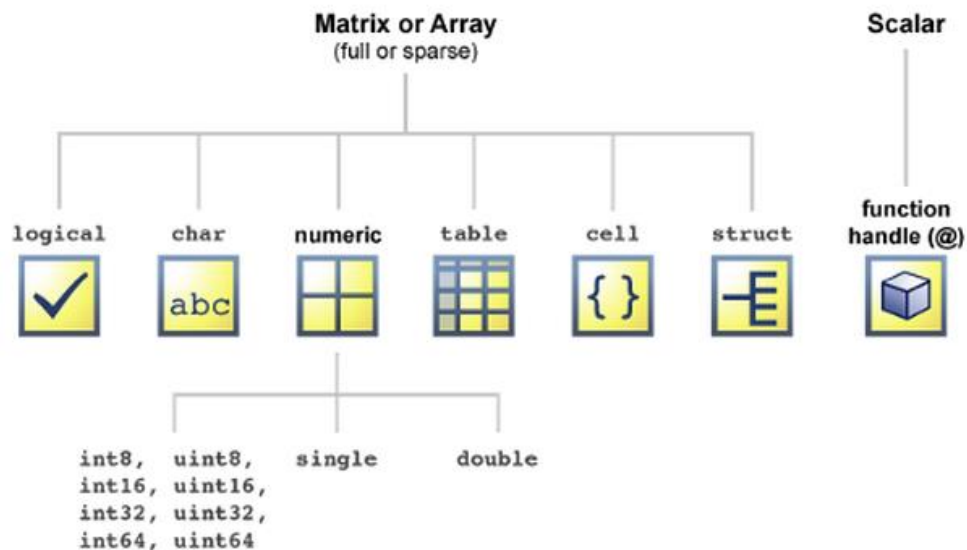


Figura 19. Tipos de datos Matlab. MATLAB. The MathWorks, Inc. Fecha de revisión: 7 de Febrero de 2015.  
Disponibilidad web: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>>

En la Tabla 4 se referencian algunas funciones que fueron utilizadas en el presente trabajo para analizar los tipos de datos.

Funciones de Matlab	Símbolo
Determina la clase del objeto	class
Convierte a double	double
Convierte a carácter	char
Compara un string	strcmp
Convierte de string a double	str2double
Convierte de struct a cell	struct2cell
Retorna el nombre del campo de una estructura	fieldname
Variable de precisión	vpa
Creación de un objeto simbólico	sym

Tabla 4. Funciones para manejo de clases de datos.

### 3.1.4 Tratamiento de datos

La interacción de Matlab con otros programas o aplicaciones se hace por medio de sentencias que permiten la importación y exportación de datos, abrir y cerrar ficheros, escribir, borrar o leer de ellos.

En programación es común ordenar todos los archivos en carpetas según el tipo de archivo, funciones de una sección específica, etc., con Matlab se puede añadir una carpeta para que ésta quede nativa para la función o script sobre el cual se está llamando y así poder usar cualquier función que haya en este directorio como si estuviese en el mismo directorio de la función o script. La sentencia es:

***addpath*** NombreDeLaCarpeta;

***addpath*** RutaCompleta;

Comandos principales para abrir y cerrar un fichero:

- Abrir un fichero  
Var=***fopen*** ('fichero','atributo');
- Cerrar un fichero  
***fclose***(Var)
- Escribir en un archivo:  
***fprintf*** (Var,'format', A,...)
- Leer un archivo  
Var2 = ***textscan*** (Var,'format')

## 3.2 COMSOL MULTIPHYSICS

“Comsol es una plataforma de software de propósito general, basado en métodos numéricos avanzados, para el modelado y la simulación de problemas basados en la física (modela cualquier proceso físico que se pueda describir mediante ecuaciones en derivadas parciales). Comsol es capaz de dar solución a fenómenos acoplados o multifísicos. Posee una plataforma de simulación con interfaces



dedicadas a la física y herramientas para el flujo eléctrico, mecánicos, de fluidos y aplicaciones químicas” Comsol, Inc. <sup>13</sup>

El software se caracteriza por estar dividido en módulos que se definen en base al tipo de análisis que se pretenda realizar (eléctrico, mecánico, fluidos, químicos o de usos múltiples); cada módulo incluye una extensa gama de físicas para realizar simulaciones multifísicas. Este brinda al usuario una interfaz de fácil manejo y comprensión, aparte de acoplar sus físicas, también puede importar y exportar elementos indispensables en la simulación (geometrías, ecuaciones y parámetros) a través de sus módulos.

Las prestaciones de multifísica integradas en Comsol capacitan al usuario para modelar simultáneamente cualquier combinación de fenómenos. A través de estas prestaciones, se integran las dos formas posibles de modelar (a través de aplicaciones predefinidas que permiten crear el modelo, fijando las cantidades físicas que caracterizan el problema, y a través de las ecuaciones que modelan el problema) y permite combinarlas.

Comsol permite realizar múltiples simulaciones mediante el MEF. “El proceso que se lleva a cabo para realizar un modelado se define a través de los siguientes pasos: la creación de una geometría, la creación de una malla, la especificación de una física(s), la elección del tipo de solución y la visualización de los resultados” Mendoza<sup>14</sup>.

En este trabajo de grado se emplea este programa para realizar los mallados de las placas a analizar, como se podrá ver más adelante en el capítulo CAPÍTULO 4 y para calcular los esfuerzos máximos de cada placa analizada.

---

<sup>13</sup> COMSOL Multiphysics, the platform for physics-based modeling and simulation. COMSOL Inc. Fecha de revisión: 7 de Febrero de 2015. Disponibilidad web: <<http://www.comsol.com/comsol-multiphysics>>

<sup>14</sup>MENDOZA Adriana "introducción al uso del software COMSOL Multiphysics" Universidad Veracruzana. 2013

## **CAPÍTULO 4**

### **GENERACIÓN DE MALLAS**

Por lo general, la generación del mallado es un proceso de alta complejidad y los pocos códigos que se consiguen se deben de utilizar como si fueran “cajas negras”, es decir, que no se conoce su funcionamiento interno y que debemos confiar en que el algoritmo arroja resultados correctos.

La generación de mallados consiste en discretizar los dominios en elementos de malla (triangulares, cuadriláteros o tetraédricos), en donde los límites definidos en la geometría se discretizan (aproximadamente) en los bordes de malla, conocidos como elementos de contorno, en otras palabras, si el límite es una curva estos elementos representarán una aproximación de la geometría original.

Para el análisis del MEF, la discretización de piezas no uniformes constituyen un reto de difícil manejo y de alta complejidad; empero, el mallado ofrece alternativas de refinamiento en la simetría de los cuerpos, atendiendo a parámetros como tamaño, forma, posición de cargas, propiedades de los materiales y condiciones de frontera para lograr mayores aproximaciones en los cálculos. Este capítulo se subdividirá en dos partes, comenzando con las principales características o aspectos del modelado del MEF y finalmente se presenta el proceso de mallado para elementos triangulares y cuadriláteros en Comsol.

#### **4.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELADO DE ELEMENTOS FINITOS**

El proceso de modelado de elementos finitos es una praxis orientada parcialmente hacia la visualización de las interacciones físicas que ocurren al interior de un cuerpo. El manejo práctico del modelado constituye un verdadero reto para la

persona que lo asume, ya que a veces se torna difícil comprender el comportamiento físico que se genera y entender las variaciones físicas de los elementos disponibles para el uso. Es preciso seleccionar los elementos apropiados que se ajusten de la mejor manera posible al desarrollo y solución de los problemas. Sólo así podrá llegar a una solución efectiva por MEF en la cual se tienen en cuenta factores que se referencian a continuación.

#### **4.1.1 Relación de aspectos AR**

La relación de aspecto establece la razón entre la dimensión mayor de un elemento con respecto a la dimensión menor de este. En términos generales, un elemento puede rendir mayores resultados si su forma es compacta y regular. Cuando se incrementa la AR, aumenta el margen de error de la solución.

#### **4.1.2 Simetrías**

Las simetrías son la correspondencia que se presenta en tamaño, forma, posición de cargas, propiedades del material y condiciones de frontera que se viabilizan en lados opuestos a una línea o plano que los divide. La simetría favorece la solución de problemas, ya que permite minimizar los cálculos a partir de finas subdivisiones de los elementos, reduciendo las tareas y costos de cómputo.

#### **4.1.3 Tamaño de elementos y métodos de refinamiento $h$ , $p$ y $r$**

El objetivo del análisis sobre el tamaño de cada elemento y de los métodos de refinamiento es alcanzar la mayor precisión posible considerando tantos grados de libertad como sean necesarios. Tales parámetros se usan al revisar o pulir un mallado de elementos finitos para ofrecer mejores resultados.

#### **4.1.3.1 Método de refinado $h$**

El método de refinado de  $h$  consiste en partir de una malla base para alcanzar una solución inicial al problema; esto permite estimar márgenes de error y proveer una guía para la revisión del mallado. Después se adicionan nuevos elementos del mismo tipo para refinar los elementos base. El proceso de refinamiento continúa hasta lograr que los resultados de una malla se equiparen estrechamente a los elementos de la malla previamente refinada. El elemento de estudio se compara en función de forma para dicho elemento, como se demuestra en la Figura 20.b y la Figura 20.c.

#### **4.1.3.2 Método de refinado $p$**

Este método consiste en suministrar grados de libertad a los nodos preexistentes, agregando nuevos nodos entre los elementos de la frontera, y/o adicionando internamente grados de libertad. (Ver Figura 20.d).

#### **4.1.3.3 Método de refinado $r$**

En el método de refinado de  $r$ , los nodos pueden ser reorganizados o reorientados, sin alterar el número de elementos o el grado del polinomio que resulta de la relación entre las magnitudes de su propio campo. (Ver Figura 20.e).

## **4.2 MALLADO CON COMSOL**

Como se comentó en el capítulo anterior para realizar un modelado con Comsol se deben seguir los siguientes pasos:

- El diseño de la geometría
- La creación (seleccionar y generar) del mallado
- La especificación de una o más físicas
- La elección del tipo de solución
- La visualización de los resultados

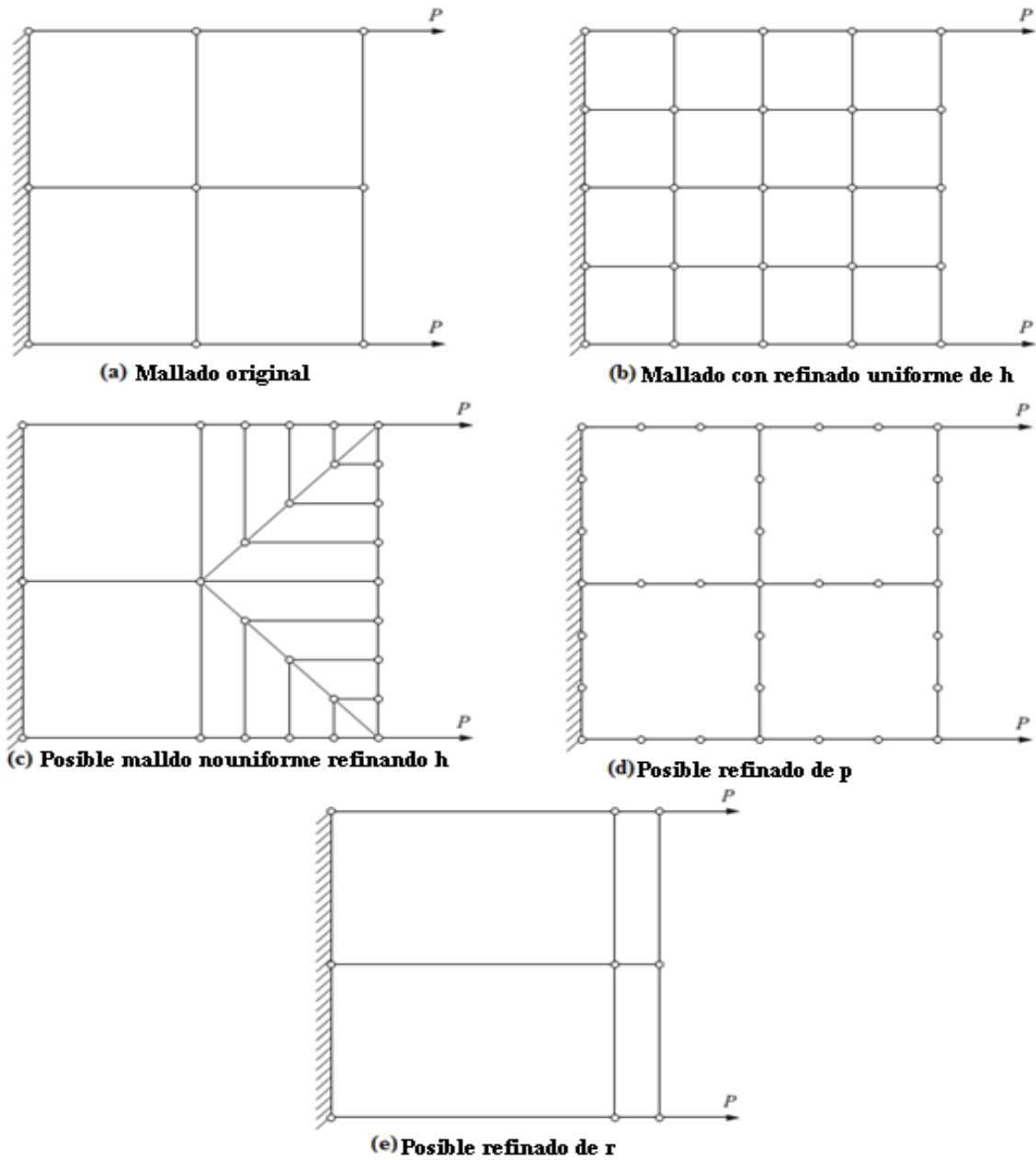


Figura 20. Ejemplos de los métodos de refinado  $h$ ,  $p$  y  $r$ . DARYL Logan, "A first course in the Finit Element Method" Cengage learning 2012

Para este trabajo de grado se considerará de manera global los dos primeros pasos, que son necesarios para generar los mallados de los diferentes elementos a analizar. Luego, estos mallados serán exportados a un archivo de texto (.mphtxt) para posteriormente importar las coordenadas ( $p$ ) y los elementos ( $t$ ) en Matlab de este archivo de texto.

### 4.2.1 Diseño de la geometría

En Comsol el primer pasó que se debe de generar es el diseño de la figura geométrica o modelo para realizar la simulación. Ésta puede ser creada desde su entorno de trabajo, o bien, puede importarse desde otro software de CAD. La geometría posee las siguientes características:

- Parámetros, funciones y variables.
- Dimensión de la geometría (1D, 2D o 3D).
- Diseño de la geometría. El diseño se establece a partir de todas aquellas magnitudes que delimitaran a nuestra geometría en una forma específica.

Las partes del software que se utilizan para agregar, definir y formar el diseño del modelo se presentan en la Tabla 5.




Nombre de la carpeta o subcarpeta	Símbolo	Característica o función
<i>Model Wizard</i>		Permite agregar la física, el tipo de estudio y la dimensión
<i>Model Builder</i>		Muestra las carpetas que se adicionan al modelo
<i>Global Definitions</i>		Permite anexar al modelo parámetros, variables y funciones
<i>Geometry</i>		Define si el modelo se realizará en el programa o será importado
<i>Bézier Polygon</i>		Sirve para realizar una geometría
<i>Work plane</i>		Define el plano de trabajo
<i>Intersection</i>		Sirve para crear objetos nuevos
<i>Mesh1</i>		Crea una malla en la geometría
<i>Form Union</i>		Finaliza el diseño de la geometría
<i>Discretization</i>		Sirve para seleccionar el orden del elemento

Tabla 5. Lista de carpetas y sub carpetas de la etapa de geometría. Mendoza<sup>14</sup>

### 4.2.2 Mallado

Las técnicas de mallado utilizadas se pueden dividir en un mallado controlado por la física y en un mallado controlado por el usuario. El primero es utilizado por el programa de manera predeterminada de tal forma que la malla se adapte a la configuración física actual en el modelo. Alternativamente, se puede utilizar una malla controlada por el usuario dependiendo de si el modelo puede contener un mallado estructurado o un mallado no estructurado. Es entonces posible construir y editar la secuencia de mallados usando las técnicas anteriores para crear una malla en 2D y 3D automática o manualmente, haciendo uso de la carpeta *Mesh1*, la cual contiene una lista de opciones para seleccionar la técnica de mallado. En la Tabla 6 se ilustran algunas de las técnicas utilizadas; la elección de la técnica depende de la dimensión del plano para la geometría.





Nombre de la carpeta o subcarpeta	Símbolo	Característica o función
<i>Size</i>		Proporciona acceso a los ajustes predefinidos de tamaño y de elementos a medida.
<i>Free Triangular</i>		Técnica de generación de una malla no estructurada con elementos triangulares para los modelos 2D o 3D.
<i>Free Quad</i>		Técnica de generación de una malla no estructurada con elementos cuadriláteros para los modelos 2D o 3D.
<i>Refine</i>		Para refinar elementos de la malla

Tabla 6. Botones de la barra de herramientas de mallado

El mallado libre es utilizado para resolver problemas no estructurados y está disponible en todas las dimensiones, y se puede utilizar para todo tipo de geometrías, independientemente de su topología o forma.

Por otra parte, se puede controlar el tamaño de los elementos de la malla generada por medio de los ajustes del mallado en el botón *size* de la barra de herramientas

de mallado. En la Figura 21 se muestran los parámetros que se pueden ajustar en el mallado. Algunos de estos parámetros son:

La *resolución de curvatura* determina el número de elementos en los límites de las curvas; un valor inferior da una malla más fina. La resolución de las regiones estrechas funciona de una manera similar al factor de curvatura.

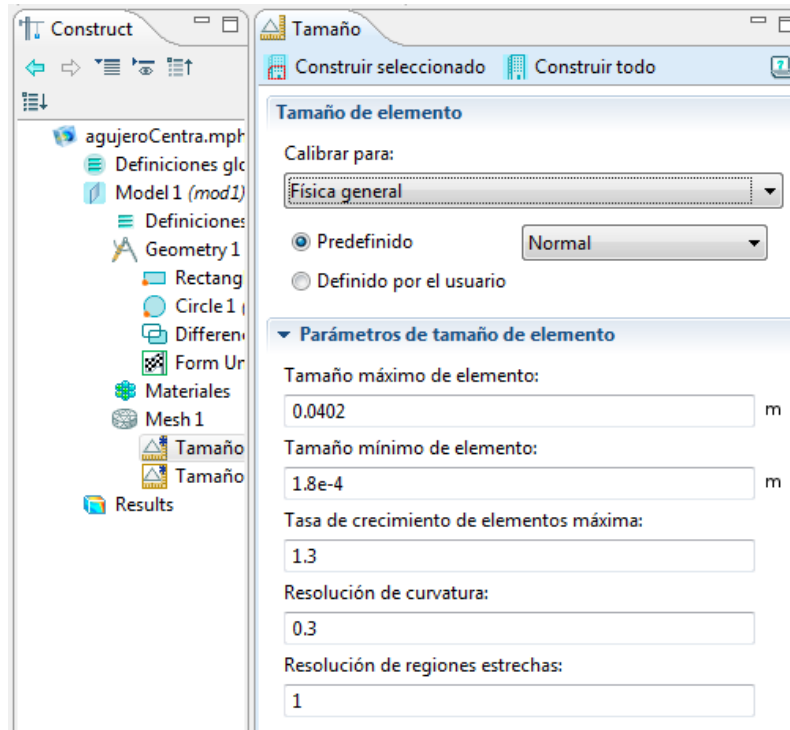


Figura 21. Sección para elegir los ajustes de tamaño de la malla.

La *tasa de crecimiento de elementos máxima* determina la velocidad con la que los elementos deben crecer de pequeño a grande sobre un dominio.

“Para el mallado triangular Comsol posee la opción *Configuración avanzada*, en donde se puede especificar el método de triangulación que es utilizado por la función en el momento de crear la malla triangular. *Automático* (predeterminado) para dejar que el software utilice el método más adecuado, Delaunay (que es una red de triángulos que cumple la condición de Delaunay, esta condición dice que la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la red no debe contener ningún



vértice de otro triángulo) para utilizar un método basado en un algoritmo de Delaunay, o *Avance frontal* Comsol<sup>15</sup>.

Para terminar, es posible exportar un mallado a un archivo de texto (.mphtext) por medio de la opción *Export mesh*.

---

<sup>15</sup> Comsol Multiphysics, "Introduction to Comsol Multiphysics" Versión 4.4 , 2013

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISIS DETALLADO DEL CUADRILÁTERO CUADRÁTICO SERENDÍPITO $Q_8$

El elemento  $Q_8$  merece un estudio exhaustivo por la variedad de resultados y las diferentes formas de calcular sus variables principales. La principal característica del elemento rectangular serendípito mapeado en las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$  se basa en que el polinomio que define las funciones de forma no contiene el término  $\xi^2\eta^2$  del triángulo de Pascal; esta característica permite que la integración numérica se pueda dar en menor número de puntos de Gauss para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento.

#### 5.1 TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA

El mapeo realizado sobre la geometría del elemento se realiza con el fin de normalizar las coordenadas de los nodos desde el sistema cartesiano  $(x, y)$  al sistema natural  $(\xi, \eta)$  en los límites  $[-1, 1]$  para cada eje coordenado natural; quedando un cuadrilátero cuadrado normalizado (Figura 22).

#### 5.2 CONVERGENCIA

La convergencia de la solución para problemas desarrollados por el MEF implica que a mayor refinamiento de la malla en todo el dominio del problema, la solución se aproxima más a la solución real del modelo. Para que haya convergencia se debe cumplir los siguientes requisitos:

- **Complitud:** Las funciones de forma son polinomios completos que tienen la potestad de obtener la solución exacta para elementos en los que su tamaño se aproxima a cero.
- **Compatibilidad:** Las funciones de forma permiten modelizar una solución aproximada en la continuidad para elementos adyacentes.
- **Estabilidad:** Garantiza la unicidad en la solución, lo que da por entendido que las ecuaciones del MEF están bien planteadas.

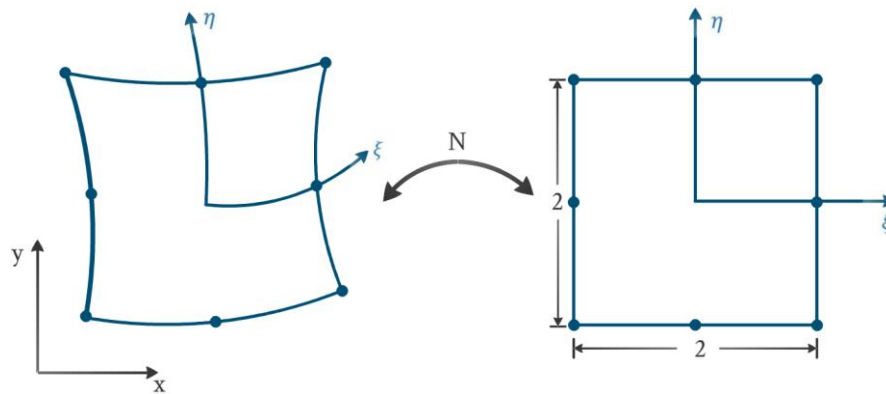


Figura 22. Transformación geométrica del elemento  $Q_8$

Asegurar el cumplimiento de los requisitos de complitud y compatibilidad garantizan la consistencia en la formulación del modelo discreto con respecto al modelo continuo. La compatibilidad y la estabilidad no son estrictamente necesarias para que haya convergencia (un problema donde sólo se cumpla la complitud puede converger), sin embargo, si se cumplen las tres condiciones, se garantiza la convergencia de la solución.

### 5.2.1 Requisitos de consistencia

La consistencia se expresa en las funciones de forma por medio del índice variacional  $m$ , quien es el orden de la mayor derivada de la variable primaria (desplazamiento, temperatura, etc).

### 5.2.2 Complitud

Cualquier polinomio de grado  $m$  o menor que define las funciones de forma del elemento se deben poder expresar de forma exacta. En la modelización de problemas mecánicos, la complitud se define como la capacidad que tienen las funciones de forma de expresar en forma exacta los movimientos de sólido rígido (traslación y rotación) y los estados de deformación constante.

### 5.2.3 Compatibilidad

Considérese el nodo  $i$  de un mallado, el cual es compartido por una parcela de elementos, los elementos tienen geometría y funciones de forma distintas. El conjunto de funciones de forma se denomina parcela de funciones de formas correspondientes al nodo  $i$ .

Para que haya compatibilidad en los elementos de la parcela para un problema con índice variacional  $m$ , las funciones de forma tienen que ser continuas de clase  $C^{m-1}$  entre los elementos adyacentes al nodo  $i$  y continua de clase  $C^m$  en el interior del elemento.

El conjunto de funciones de forma que satisfacen la condición  $C^{m-1}$  se denominan funciones de forma conformes; las funciones de forma que satisfacen la segunda condición de  $C^m$  se denominan funciones de forma de energía finita.

### 5.2.4 Estabilidad

La estabilidad para problemas de elasticidad se cumple cuando la matriz de rigidez global  $K$  es no singular (debe tener suficiencia de rango); así la solución de la ecuación  $Kd = F$  se garantiza.

### 5.2.5 Suficiencia de rango

Considérese la matriz de rigidez local de un elemento  $k^e$ , la suficiencia de rango determina que no debe haber más modos cinemáticos de energía nula que los del sólido rígido de dicho elemento. El rango  $r$  de  $k^e$  será:

$$r = n_{ne}n_{gdl} - n_{sr} \quad (91)$$

Donde:

$n_{ne}$ : Número de nodos del elemento

$n_{gdl}$ : Grados de libertad de cada nodo

$n_{sr}$ : Modos de sólido rígido

La suficiencia de rango para la matriz de rigidez  $k^e$  se define como:

$$n_{pg}n_{str} \geq n_{ne}n_{gdl} - n_{sr} \quad (92)$$

Donde:

$n_{pg}$ : Puntos de Gauss necesarios para la integración

$n_{mc}$ : Tamaño de la matriz constitutiva del material

Para el elemento cuadrangular cuadrático de 8 nodos, la suficiencia de rango se satisface para:

$$3n_{pg} \geq 8 \cdot 2 - 3 \quad (93)$$

De esta forma, la integración numérica debe tener al menos 5 puntos de integración en la cuadratura de Gauss, así, la integración común de  $3 \times 3$  puntos suple la suficiencia de rango, mientras que con  $2 \times 2$  puntos, el elemento queda subintegrado.

La integración de la cuadratura de Gauss para el elemento  $Q_8$  se da para los puntos del cuadrilátero normalizado que se muestran en la Figura 23, donde los rombos

significan puntos de Gauss, los círculos son los nodos del elemento y el rombo encerrado en el círculo azul es el punto de Gauss que se puede eliminar.

### 5.3 INTEGRACIÓN COMPLETA

Integra de forma exacta la matriz de rigidez de un elemento con Jacobiano constante. La integración completa garantiza elementos conformes.

Para Q8: 3x3 en los puntos de Gauss

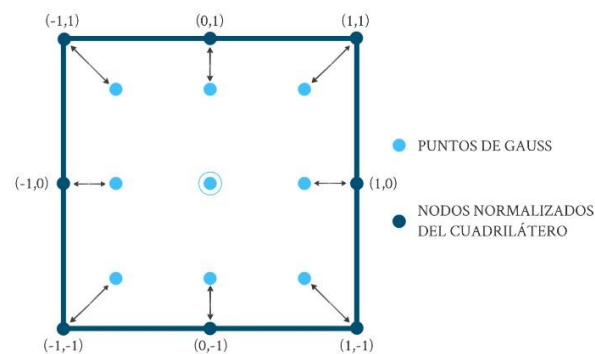


Figura 23. Distribución nodal y de los puntos de Gauss para Q8

### 5.4 INTEGRACIÓN REDUCIDA

La integración reducida emplea menor cantidad de puntos de Gauss para evaluar la integral, siempre y cuando la cantidad de puntos sea mayor o igual al número de puntos necesario para que la matriz de rigidez tenga suficiencia de rango. Para el elemento Q8, la cantidad de puntos de Gauss que se pueden emplear para una integración reducida  $n_{pgir}$  son:

$$5 \leq n_{pgir} < 9 \quad (94)$$

Partiendo del hecho que el elemento cuadrangular cuadrático serendípito tiene 8 nodos con distribución como se muestra en la Figura 22 y la integración completa genera una distribución de puntos de Gauss dentro del elemento como se muestra en la Figura 23; se interpreta que la mejor integración reducida que se puede

obtener se da al eliminar el punto de Gauss central, para que de esta forma, cada punto de Gauss corresponda con cada nodo del elemento; así, la integración se hace para 8 puntos de Gauss, donde se desprecia la integración para el punto de Gauss (0,0) de coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$ .

La integración reducida genera elementos no conformes, se da el caso que los elementos no conformes converjan más rápidamente que los elementos conformes. Los elementos no conformes con insuficiencia de rango son divergentes. En la Figura 24 se comparan las tendencias de los resultados para elementos conformes, no conformes convergentes y no conformes divergentes.

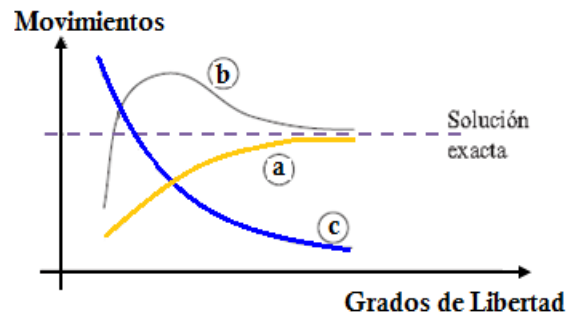


Figura 24. Convergencia para elementos conformes (a), no conformes convergentes (b) y no conformes divergentes (c).

## 5.5 ESFUERZO EN EL CENTROIDE DEL ELEMENTO

Dada la expresión para el cálculo del esfuerzo de un elemento:

$$S^e = D \cdot B(\xi, \eta) \cdot u \quad (95)$$

Donde:

B: Matriz de derivadas de las funciones de forma en las coordenadas naturales

D: Matriz constitutiva del elemento

$u$ : Vector con los desplazamientos nodales del elemento

El esfuerzo en el centroide del elemento se resuelve para  $S_{cent}^e = D \cdot B(0,0) \cdot u$

## 5.6 ESFUERZO EN LOS NODOS DEL ELEMENTO

A partir de la ecuación 95 para el esfuerzo en el elemento, se calculan los esfuerzos en los puntos de Gauss:

$$S_{pg}^e = D \cdot B(\xi_i, \eta_j) \cdot u \quad (96)$$

Se extrapolan las funciones de forma evaluando las funciones para las inversas de los puntos de Gauss:

$$N_{extrap} = N\left(\frac{1}{\xi_i}, \frac{1}{\eta_j}\right) \quad (97)$$

Es importante resaltar que el orden de los nodos del elemento no es el mismo al orden de los puntos de Gauss, debido a que la extrapolación en cada punto de Gauss se realiza para cada nodo correspondiente, tal como se muestra en la Figura 23 finalmente:

$$S_{nodos} = \left(N_{extrap} \cdot (S_{pg}^e)^T\right)^T \quad (98)$$

Para el procedimiento descrito, se debe descartar de los cálculos al punto de Gauss correspondiente a la coordenada natural (0,0), por varios motivos:

- La extrapolación se evalúa para valores infinitos:  $N\left(\frac{1}{0}, \frac{1}{0}\right)$
- El producto  $\left(N_{extrap} \cdot (S_{pg}^e)^T\right)^T$  no se puede obtener por las dimensiones de las matrices:

$$\left(DIM(N_{extrap}) \cdot (DIM(S_{pg}^e))^T\right)^T = ((9 \times 8) \cdot (3 \times 9)^T)^T = ((9 \times 8) \cdot (9 \times 3))^T \quad (99)$$

El centroide del cuadrilátero cuadrado normalizado es el mismo para el cuadrilátero “cartesiano”, siendo innecesaria la extrapolación, ya que el punto de Gauss en las coordenadas naturales (0,0) es el centroide del elemento y el esfuerzo se calcula con la ecuación 95.



## 5.7 SIMULACIONES PARA LAS PLACAS DE ESTUDIO

Con el objetivo de determinar cuál es el mejor comportamiento con respecto a la teoría que puede brindar el elemento cuadrilátero cuadrático serendípito, se simulan todas las placas de estudio para integración completa e integración reducida en el cálculo de las matrices de rigidez elemental. Además, se hallan los esfuerzos en el centroide y en los nodos, tomando el esfuerzo máximo en todo el dominio para cada uno (en los nodos y en el centroide). Finalmente se calcula el factor de concentración de esfuerzo.

Desde la Tabla 7 a Tabla 16 se tabulan los coeficientes de concentración de esfuerzo  $k$  para cada esfuerzo obtenido por integración completa e integración reducida, para el centroide y para los nodos.

### 5.7.1 Factor $k$ en placa plana

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
43	1,005	1,093	0,810	1,039	0,960
55	1,000	1,302	0,806	1,178	0,942
67	1,182	1,288	0,910	1,098	1,079
75	1,157	1,277	0,895	1,181	1,125
87	1,124	1,225	0,880	1,097	1,184
98	1,101	1,238	0,890	1,135	1,221
112	1,117	1,170	0,901	1,040	1,259
122	1,132	1,192	0,912	1,078	1,280
138	1,108	1,148	0,893	1,023	1,333
157	1,106	1,129	0,891	1,008	1,398

Tabla 7. Factor  $k$  para placa plana utilizando  $Q_8$

Los resultados obtenidos para una placa plana con  $Q_8$  (ver Figura 25) alcanzan la estabilidad a partir de 70 elementos, desde este punto comienza la convergencia con respecto al factor  $k$  teórico demostrando que a mayor cantidad de elementos,

más aproximada es la solución. La mejor tendencia se produjo utilizando integración completa extrapolado a los nodos.

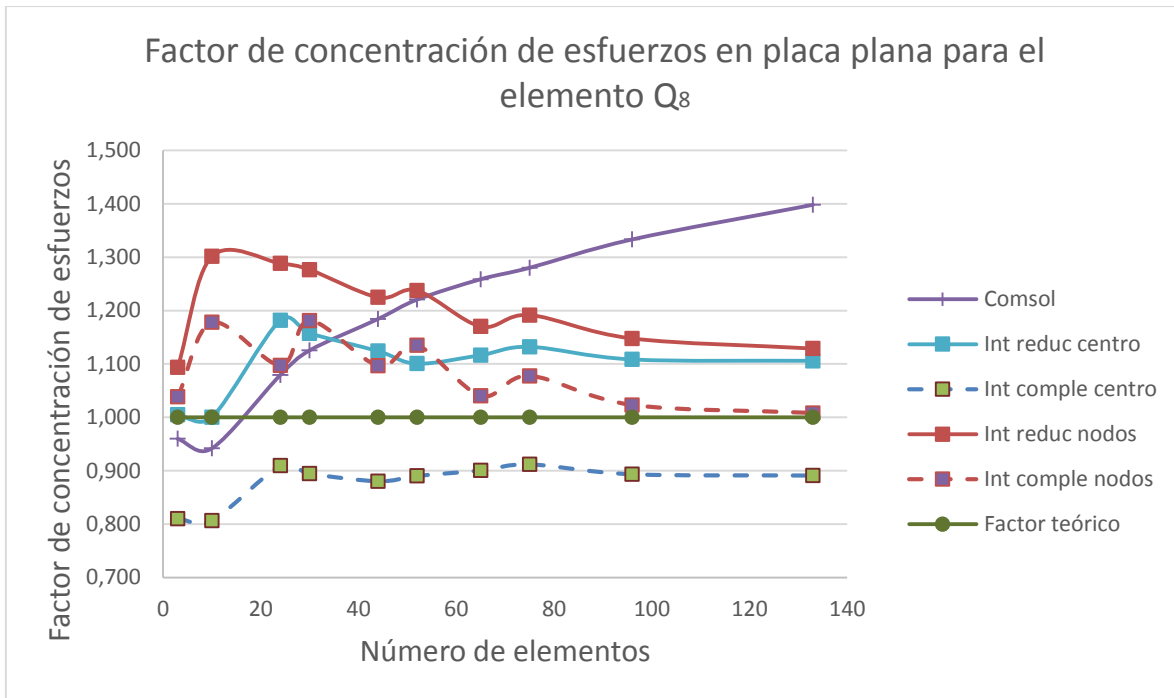


Figura 25. Relación entre el factor  $k$  y el número de elementos en una placa plana con  $Q_8$

## 5.7.2 Factor $k$ en placa con acanaladuras

### 5.7.2.1 Refinado uniforme

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
72	1,662	1,636	1,266	1,345	1,887
82	1,752	1,744	1,357	1,395	1,857
96	1,726	1,735	1,353	1,359	1,919
105	1,714	1,690	1,312	1,350	1,876
116	1,784	1,804	1,359	1,385	1,888
128	1,772	1,715	1,382	1,377	1,953
151	1,769	1,735	1,375	1,363	1,931
171	1,743	1,758	1,330	1,359	1,861
187	1,767	1,723	1,373	1,365	1,937
202	1,734	1,699	1,397	1,342	1,924

Tabla 8. Factor  $k$  para placa plana con acanaladura, usando  $Q_8$  de tamaño de arista uniforme

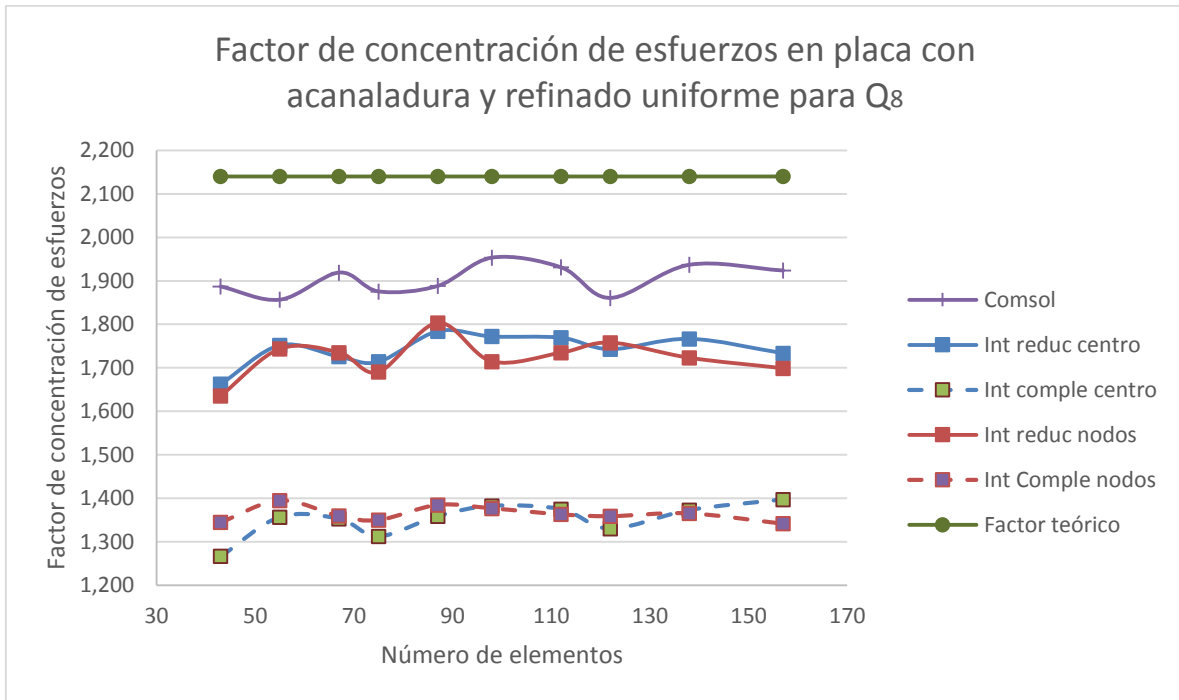


Figura 26. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla uniforme empleando  $Q_8$

### 5.7.2.2 Refinado medio

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
36	1,638	1,720	1,260	1,410	1,778
53	1,731	1,724	1,339	1,367	1,949
66	1,727	1,761	1,334	1,367	1,895
72	1,776	1,704	1,448	1,342	1,963
80	1,852	1,825	1,441	1,440	1,927
90	1,737	1,697	1,354	1,346	1,934
103	1,792	1,688	1,454	1,326	1,966
127	2,155	2,051	1,687	1,630	1,979
144	2,316	2,054	1,835	1,597	2,046
169	2,326	2,023	1,837	1,604	2,043

Tabla 9. Factor  $k$  para placa plana con acanaladura, usando  $Q_8$  de tamaño con refinado medio

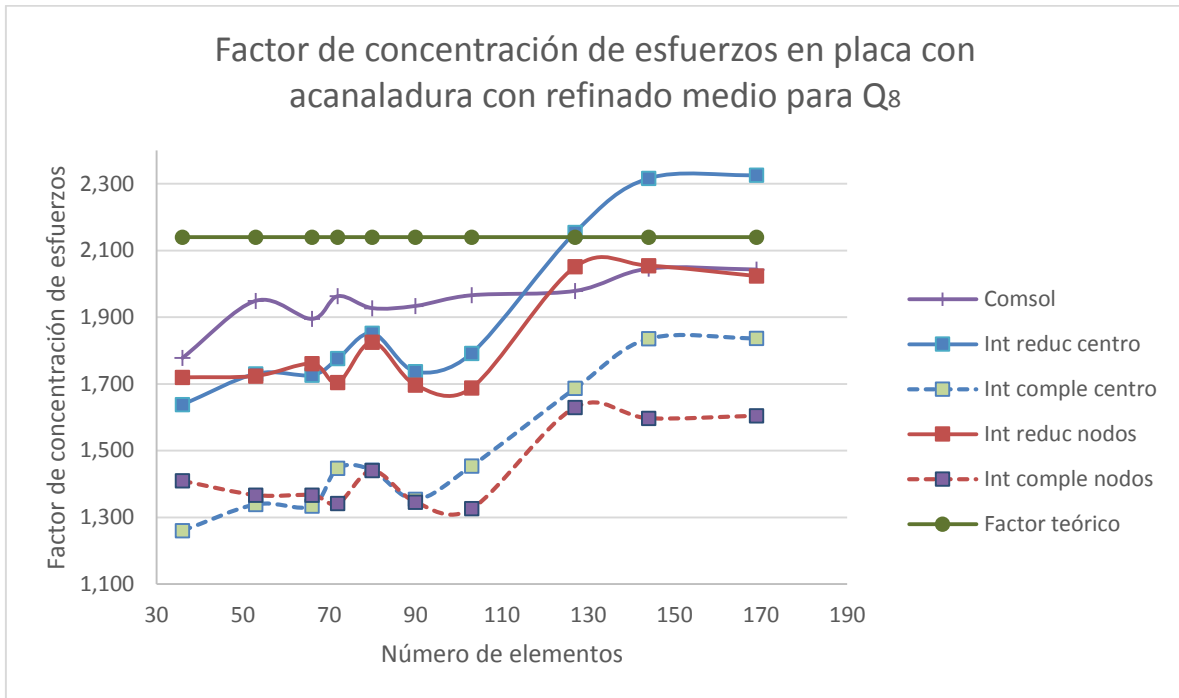


Figura 27. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla medio empleando  $Q_8$

### 5.7.2.3 Refinado fino

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
72	2,099	1,971	1,678	1,615	1,980
82	2,240	1,986	1,791	1,586	2,034
96	2,271	1,984	1,804	1,605	2,040
105	2,244	1,994	1,793	1,602	2,027
116	2,433	2,104	1,947	1,718	2,024
128	2,603	2,099	2,080	1,681	2,044
151	2,581	2,190	2,065	1,762	2,038
171	2,753	2,162	2,204	1,741	2,045
187	2,642	2,228	2,117	1,802	2,039
202	2,781	2,205	2,236	1,778	2,017

Tabla 10. Factor  $k$  para placa plana con acanaladura, usando  $Q_8$  de tamaño con refinado fino

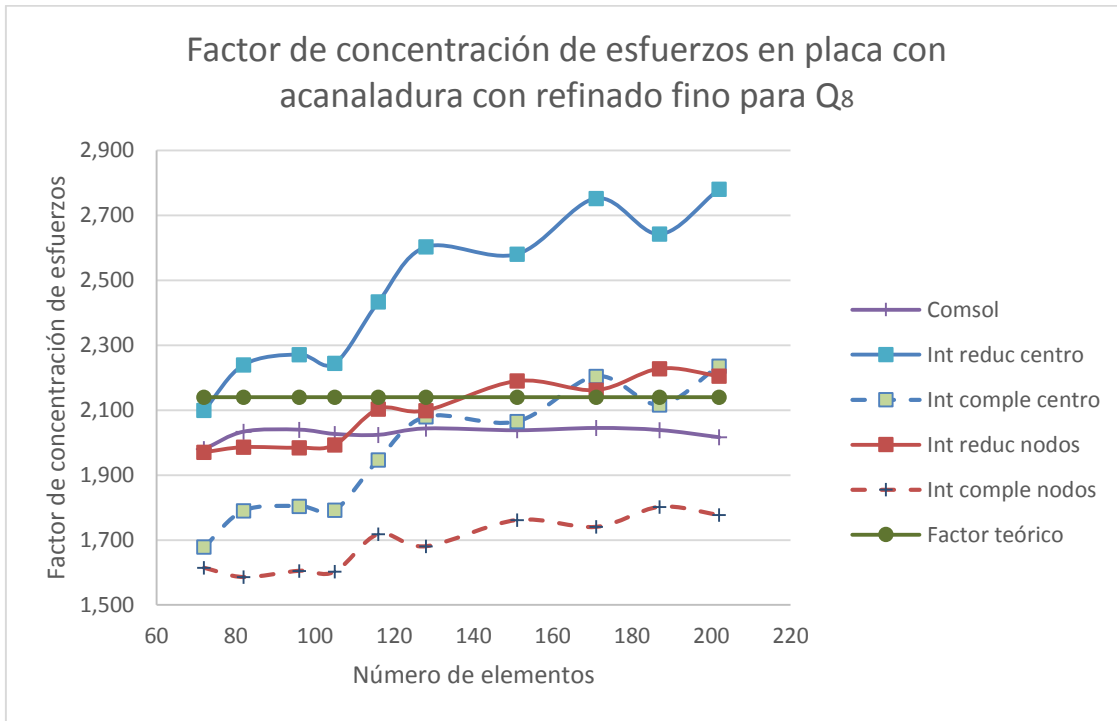


Figura 28. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla fino empleando  $Q_8$

### 5.7.3 Factor $k$ en placa con agujero centrado

#### 5.7.3.1 Refinado uniforme

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Cmsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
48	1,825	1,767	1,436	1,435	1,996
61	1,799	1,725	1,440	1,432	2,046
74	1,739	1,743	1,358	1,420	1,995
88	1,841	1,843	1,454	1,446	2,087
110	1,930	1,783	1,535	1,441	2,085
123	1,852	1,785	1,475	1,447	2,090
151	1,957	1,765	1,564	1,465	2,151
172	1,880	1,752	1,510	1,447	2,134
200	2,062	1,827	1,655	1,464	2,179
230	1,993	1,806	1,591	1,483	2,133

Tabla 11. Factor  $k$  para placa plana con agujero, usando  $Q_8$  de tamaño de arista uniforme

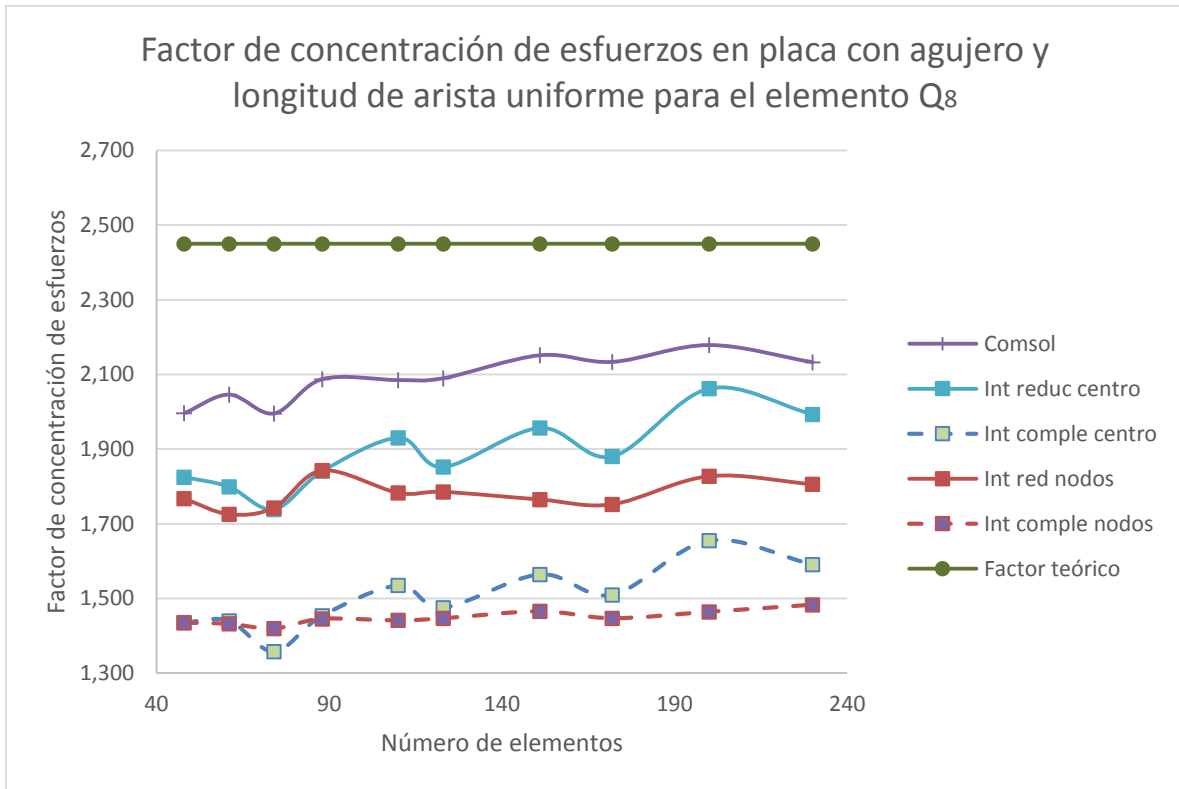


Figura 29. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla uniforme empleando  $Q_8$

### 5.7.3.2 Refinado medio

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
37	1,898	1,713	1,468	1,462	2,080
55	1,728	1,772	1,329	1,440	2,022
73	2,030	2,127	1,618	1,722	2,050
91	2,274	2,111	1,791	1,689	2,119
114	2,259	2,144	1,772	1,716	2,075
128	2,307	2,095	1,836	1,679	2,145
144	2,392	2,087	1,902	1,685	2,144
158	2,412	2,093	1,933	1,693	2,164
164	2,371	2,092	1,900	1,665	2,164
180	2,657	2,201	2,123	1,778	2,160

Tabla 12. Factor  $k$  para placa plana con agujero, usando  $Q_8$  con refinado medio

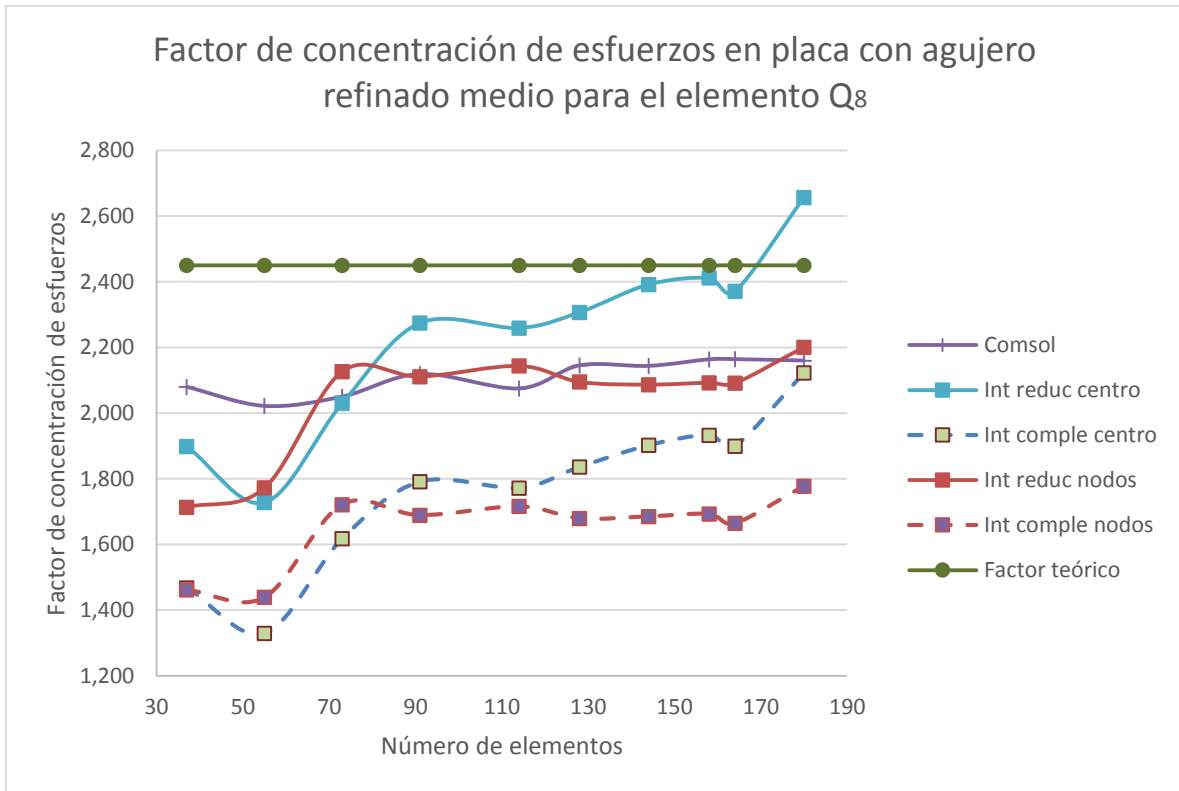


Figura 30. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla medio empleando Q<sub>8</sub>

### 5.7.3.3 Refinado fino

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
58	2,299	2,037	1,837	1,696	2,134
81	2,205	2,084	1,771	1,721	2,111
110	2,654	2,200	2,109	1,765	2,164
132	2,757	2,200	2,183	1,750	2,181
150	2,658	2,210	2,119	1,780	2,166
173	2,726	2,241	2,183	1,773	2,178
187	3,000	2,288	2,395	1,826	2,187
199	2,964	2,305	2,354	1,825	2,188
212	2,969	2,307	2,365	1,831	2,180
223	2,891	2,335	2,317	1,888	2,172

Tabla 13. Factor  $k$  para placa plana con agujero, usando Q<sub>8</sub> con refinado fino

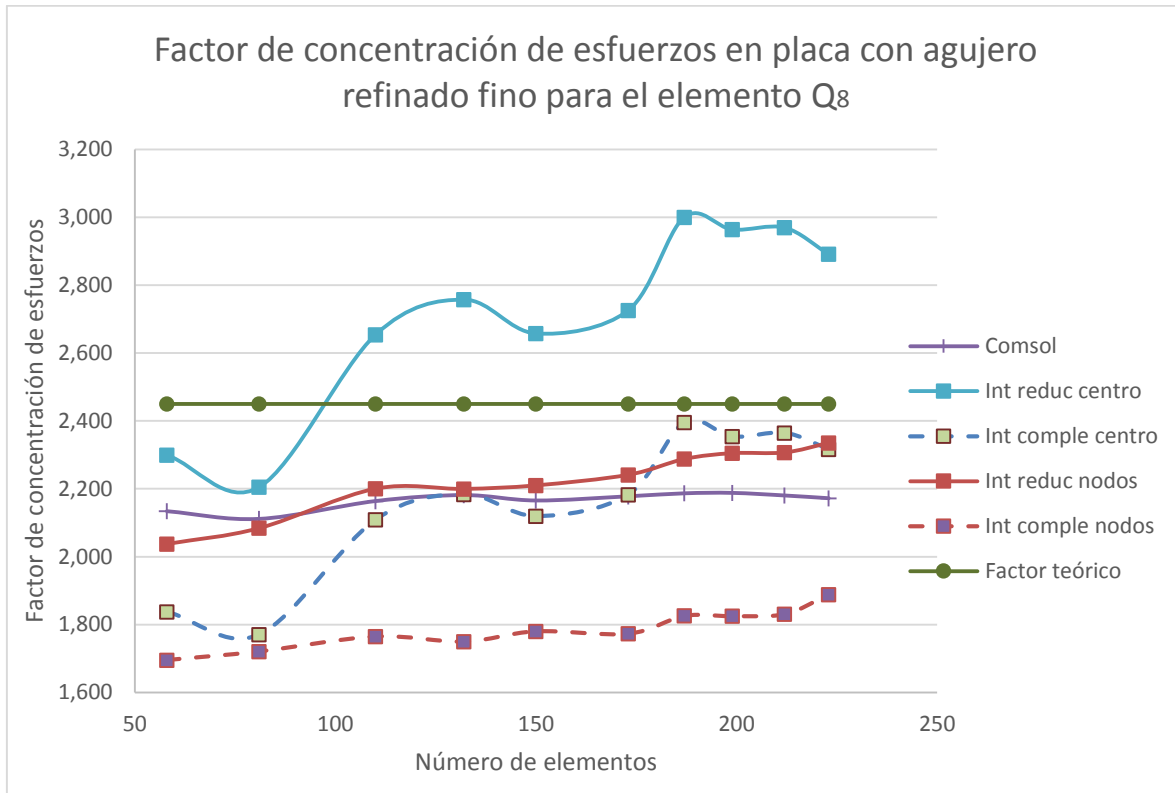


Figura 31. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla fino empleando  $Q_8$

## 5.7.4 Factor $k$ en placa con cambio de sección

### 5.7.4.1 Refinado uniforme

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
30	1,684	1,480	1,299	1,327	1,405
41	1,731	1,421	1,339	1,367	1,444
51	1,899	1,436	1,456	1,118	1,450
65	1,799	1,321	1,421	1,116	1,511
77	1,802	1,320	1,435	1,135	1,480
85	1,823	1,348	1,467	1,100	1,518
97	1,789	1,321	1,439	1,154	1,512
110	1,823	1,348	1,467	1,100	1,502
121	1,809	1,299	1,457	1,078	1,496
148	1,817	1,351	1,448	1,077	1,558

Tabla 14. Factor  $k$  para placa plana con cambio de sección, usando  $Q_8$  de tamaño de arista uniforme



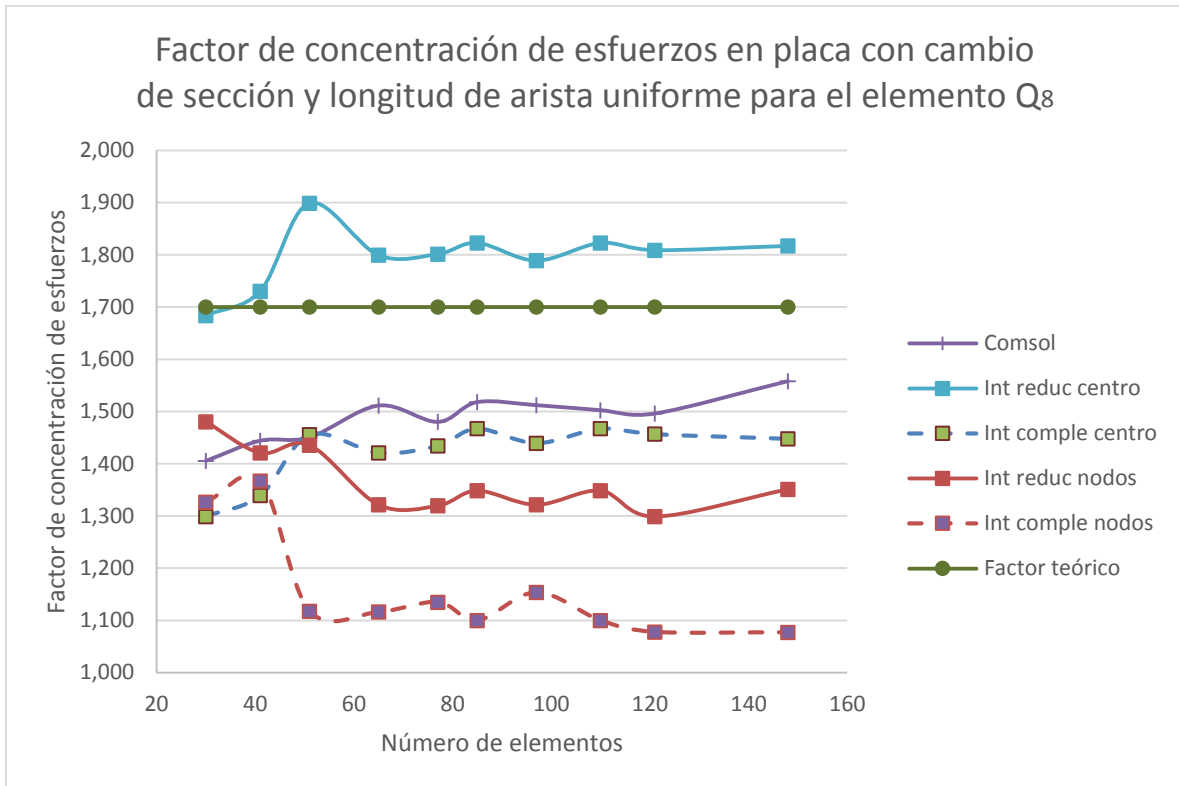


Figura 32. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla uniforme empleando Q<sub>8</sub>

#### 5.7.4.2 Refinado medio

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Cmsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
54	1,955	1,544	1,561	1,284	1,595
70	1,925	1,547	1,545	1,355	1,574
89	1,896	1,692	1,506	1,341	1,581
104	1,918	1,666	1,551	1,337	1,559
116	2,019	1,677	1,615	1,378	1,621
139	2,011	1,659	1,645	1,365	1,622
152	2,009	1,659	1,613	1,475	1,613
166	2,046	1,668	1,636	1,317	1,619
182	2,025	1,672	1,618	1,319	1,613
213	2,022	1,642	1,630	1,430	1,614

Tabla 15. Factor  $k$  para placa plana con cambio de sección, usando Q<sub>8</sub> con refinado medio

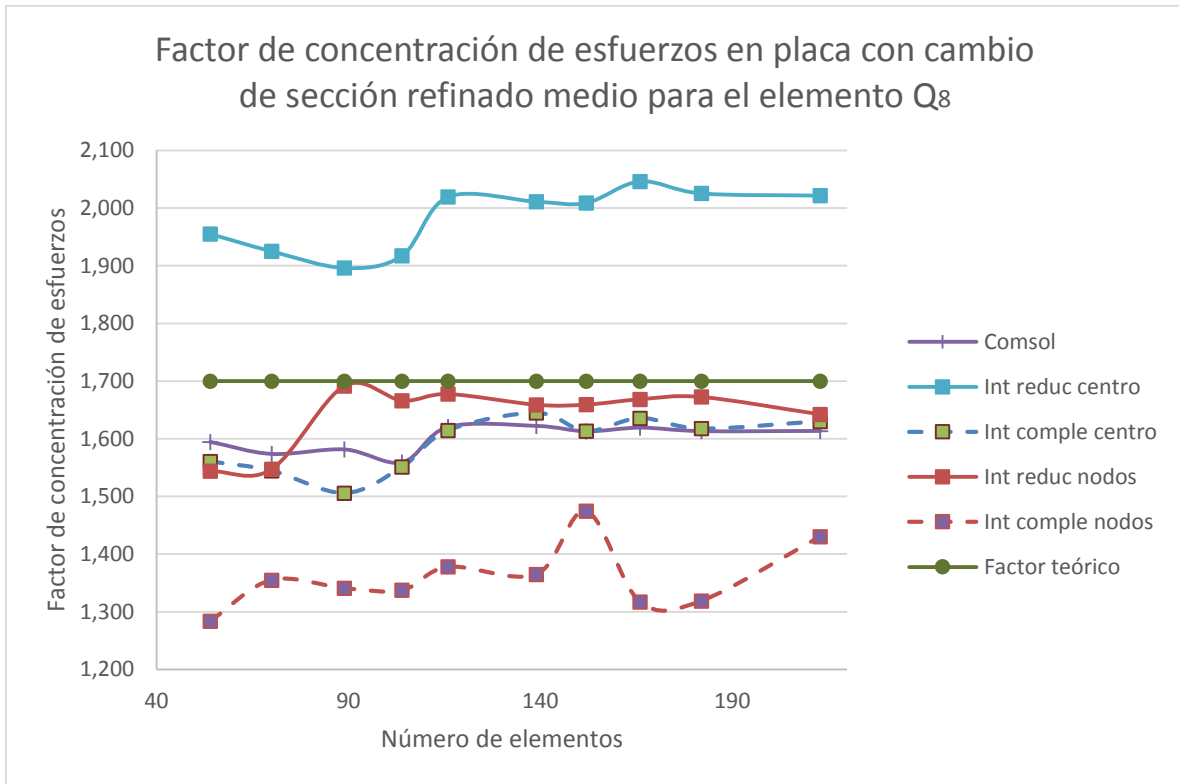


Figura 33. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla medio empleando  $Q_8$

### 5.7.4.3 Refinado fino

Número elementos	Integración reducida		Integración Completa		$k$ Comsol
	$k$ Centroide	$k$ Nodos	$k$ Centroide	$k$ Nodos	
78	1,882	1,759	1,509	1,381	1,587
96	1,901	1,753	1,532	1,375	1,584
115	1,975	1,704	1,627	1,385	1,501
128	2,148	1,626	1,766	1,431	1,656
139	2,013	1,687	1,642	1,418	1,630
158	2,008	1,714	1,616	1,384	1,621
172	2,014	1,713	1,632	1,382	1,629
190	2,089	1,752	1,680	1,374	1,642
201	2,102	1,722	1,687	1,375	1,644
232	2,109	1,716	1,694	1,373	1,644

Tabla 16. Factor  $k$  para placa plana con cambio de sección, usando  $Q_8$  con refinado fino

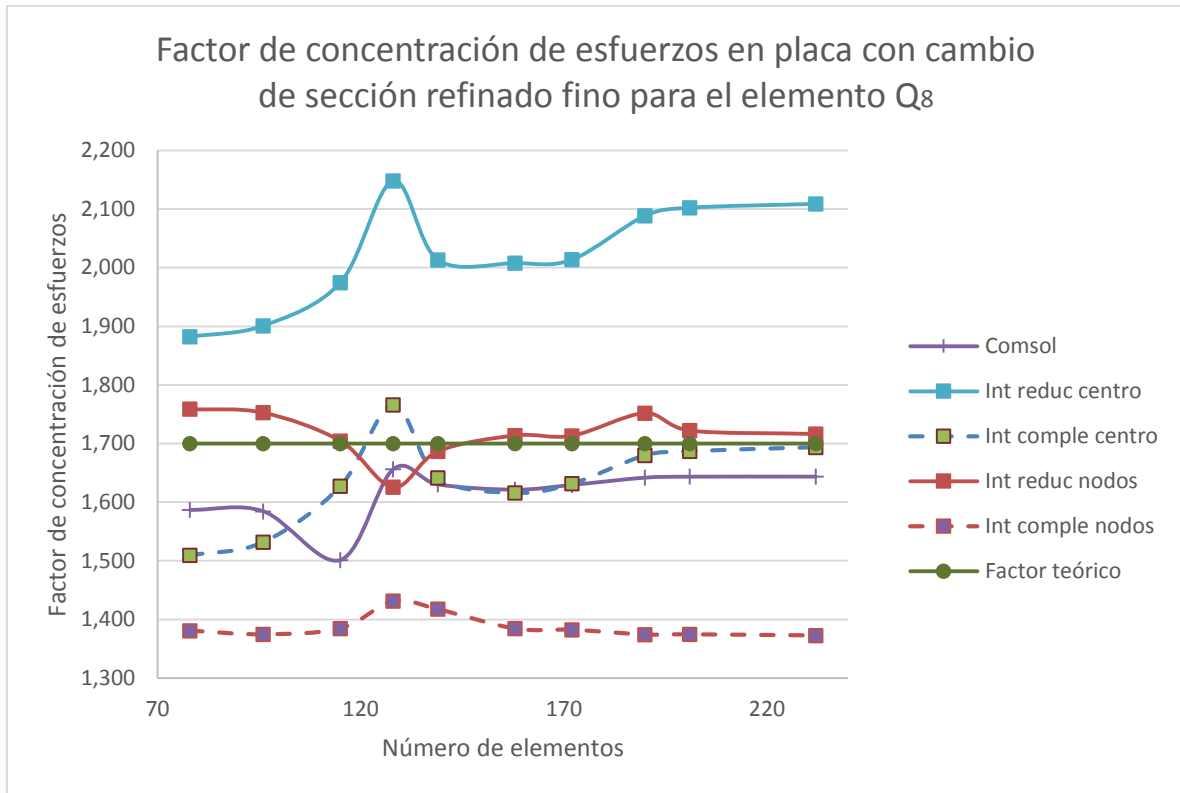


Figura 34. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla fino empleando  $Q_8$

### 5.7.5 Análisis de curvas

La integración reducida con el cálculo del esfuerzo en el centroide del elemento converge para las placas con elementos uniformes y diverge cuando la degradación de los elementos aumenta.

La integración completa con el cálculo del esfuerzo en los nodos para los tres tipos de refinado se aleja del factor teórico, por ende no se recomienda utilizarla para ningún problema de elasticidad.

La integración reducida con cálculo del esfuerzo en el centroide presenta buenas aproximaciones para elementos uniformes.

La integración completa con el cálculo del esfuerzo en el centroide y en los nodos del elemento para placas con elementos uniformes presenta las aproximaciones más alejadas del factor teórico entre los casos de estudio.

La integración reducida con cálculo del esfuerzo en los nodos presenta el resultado más cercano al factor teórico, además tiene estabilidad en el rango estudiado. Éste comportamiento es debido a que al realizar la integración sin el punto de gauss central, la geometría del elemento queda mejor representada; y al calcular los esfuerzos en los nodos se asimila de forma óptima la variación nodal a lo largo del dominio. Se selecciona para el estudio de este proyecto.

La convergencia se garantiza para un buen nivel de refinamiento en la geometría y a mayor cantidad de elementos.

## CAPÍTULO 6

### PRUEBAS Y SIMULACIÓN

El modelamiento numérico asumido en la etapa de diseño parte de ideas previas que se van refinando a través de ensayos y procedimientos, hasta obtener una forma definitiva. Así, el diseñador puede realizar pruebas mecánicas virtuales de modelos preliminares con el fin de reducir costos totales en el diseño final.

Como se había planteado anteriormente, se desea conocer la variación del valor de los concentradores en placas planas bidimensionales con:

- Agujero centrado
- Acanaladuras semicircular
- Cambios de sección

Haciendo uso del MEF bidimensional para elasticidad utilizando tensión plana, con cuatro tipos de elemento de aproximación del mallado:

- Elemento triangular de 3 nodos CST, Figura 14.
- Elemento triangular de 6 nodos LST, Figura 15.
- Elemento cuadrilátero de 4 nodos Q<sub>4</sub>, Figura 16.
- Elemento cuadrilátero de 8 nodos Q<sub>8</sub>, Figura 17.

Además será factor de estudio, si el refinamiento de las aristas en las cercanías al concentrador afecta el valor del factor de concentrador de esfuerzos.

Para alcanzar este objetivo se empieza por plantear la geometría y se realiza un mallado del modelo, luego un análisis de MEF y finalmente se calcula el valor del factor de los concentradores de esfuerzos. Un objetivo es exhibir la variación de los

factores de concentración de esfuerzo partiendo del método de elementos finitos a través de los programas computacionales Matlab y Comsol.

En este capítulo se exponen los tipos de concentradores, las condiciones de la placa, los pasos generales para resolver un problema estructural, la validación de los métodos, las pruebas a realizar y finalmente las características de los mallados que se utilizarán.

## **6.1 PASOS GENERALES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

A continuación se presentan los pasos, que se utilizan en la formulación de elementos finitos y la solución de un problema estructural.

1. Discretización del dominio.
2. Selección de la función de desplazamiento.
3. Definición de las relaciones entre deformación/desplazamiento y esfuerzo/deformación.
4. Derivación de los elementos de la matriz de rigidez y ecuaciones.
5. El montaje de las ecuaciones de cada elemento para obtener las ecuaciones globales.
6. La imposición de condiciones de contorno.
7. Solución de la ecuación global para hallar las fuerzas y los desplazamientos.
8. Cálculo de los esfuerzos.

El analista debe tomar decisiones con respecto a la división de la estructura en elementos finitos y seleccionar el o los tipos de elementos que se utilizarán en el análisis (paso 1), además de las cargas que han de aplicarse, y las condiciones de contorno o apoyos para ser aplicados (paso 6).

El primer paso consiste en la selección de los elementos del mallado y su construcción en todo el dominio; la numeración de los elementos se debe hacer en sentido antihorario para cada elemento y de cada nodo se debe obtener sus

respectivas coordenadas, asimismo, en el proceso de construcción se debe de tener presente si existen zonas críticas donde se requiera refinar el mallado.

En este trabajo se utilizan cuatro tipos de elementos de aproximación con el fin de observar cómo se ve afectado el cambio del valor de  $k$  en placas planas variando las ecuaciones de forma empleando el MEF. Como se planteó en las secciones anteriores se usan dos tipos de elementos triangulares (CST, ver Figura 14 y LST, ver Figura 15) y dos elementos cuadriláteros ( $Q_4$ , ver Figura 16 y  $Q_8$ , ver Figura 17).

Con el fin de conocer cuál es la variación del factor  $k$  al refinar el mallado en las cercanías del concentrador de esfuerzos, se realizan tres tipos de pruebas o simulaciones para cada placa teniendo como parámetro el refinamiento de las aristas en las cercanías del concentrador:

- Mallado uniforme, donde la longitud de arista es aproximadamente la misma a través del dominio.
- Mallado con refinado medio, donde se realiza una reducción de las aristas en las zonas críticas a nivel medio.
- Mallado con refinado fino, donde se realiza una reducción de las aristas en las zonas críticas a un nivel más fino.

Los pasos restantes comprenden el análisis en elasticidad por el MEF (éstos fueron descritos en el capítulo CAPÍTULO 2) para cada elemento de aproximación, los cuales son desarrollados con un algoritmo en Matlab (ver Anexo 1 Códigos) y simulaciones realizadas en Comsol.

En la Figura 35 se presenta el diagrama de flujo utilizado para resolver problemas estructurales en placas planas mediante el MEF bidimensional, empleando la tensión plana. Se utiliza Comsol para discretizar la placa con los elementos de aproximación lineal CST y  $Q_4$ , y para los elementos cuadráticos LST y  $Q_8$  se recurre a las ecuaciones de punto medio para definir los nodos intermedios de cada elemento. El análisis por elementos finitos, el cálculo de los esfuerzos máximos y la determinación del factor de concentración de esfuerzos se realiza con Matlab.

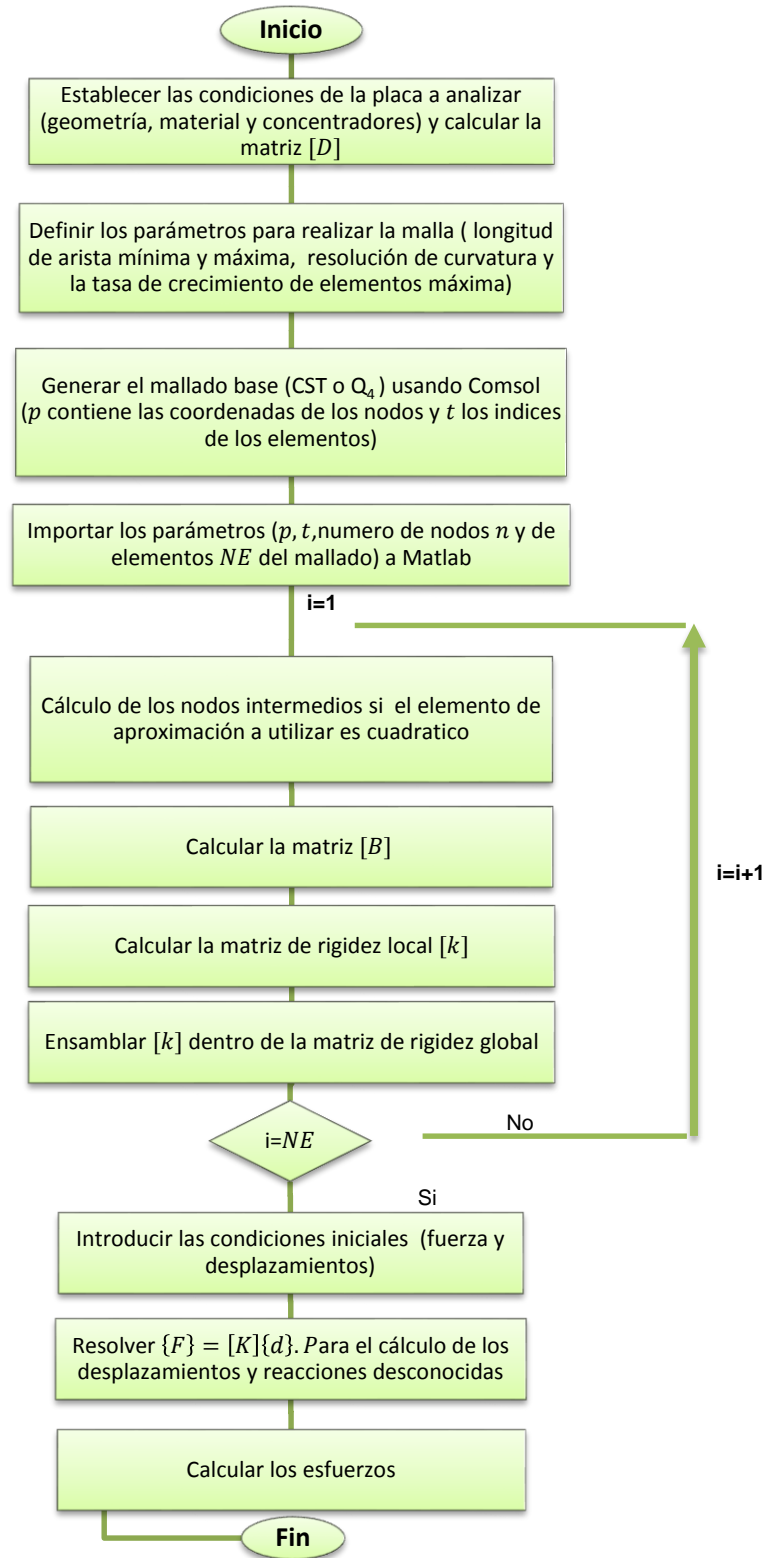


Figura 35. Diagrama de flujo para resolver un problema de elasticidad utilizando MEF



## 6.2 CONDICIONES INICIALES

Para la selección de los concentradores de esfuerzos se acude a elementos de máquinas y piezas estructurales que sean de uso común en el proceso de diseño, por lo anterior, en este trabajo investigativo se analizan placas planas con los siguientes concentradores:

- Cambio de sección.
- Agujero centrado.
- Acanaladura semicircular.

El comportamiento del factor de concentrador de esfuerzo se ve reflejado en la literatura mediante curvas (ver Pilkey<sup>1</sup>, Norton<sup>2</sup> entre otros). Estos factores de concentración dependen directamente de la geometría, el tipo de carga aplicada y el tipo de concentrador. En la Tabla 17 se encuentran contenidas las condiciones de contorno y del material que se utilizan para realizar las simulaciones. Las dimensiones se pueden referenciar en la Figura 36 y las propiedades del material corresponden a un acero AISI 4340.

Variable	Cantidad
Espesor $h$	0.0250 $m$
Largo	0.6000 $m$
Ancho $H$	0.2000 $m$
Radio $r$	0.0231 $m$
Módulo de Young $E$	205 $GPa$
Relación de Poisson $\nu$	0.28

Tabla 17. Condiciones iniciales

La condición de frontera para la placa en las simulaciones es la siguiente:

- La placa a analizar es empotrada en el extremo izquierdo.
- El extremo derecho es sometido a una carga tensionante de 100N.
- La carga tensionante se divide en

$$T = 100 / (\text{Núm nodos}_{\text{del extremo derecho}} - 2.5)$$

- La carga es distribuida para todos los nodos del extremo derecho que forman parte de  $H$  como se muestra en la Figura 36; tomando un cuarto de  $T$  para los nodos superior e inferior, un medio para los nodos siguientes y el resto de nodos que pudiesen existir se dividen en  $T$ .

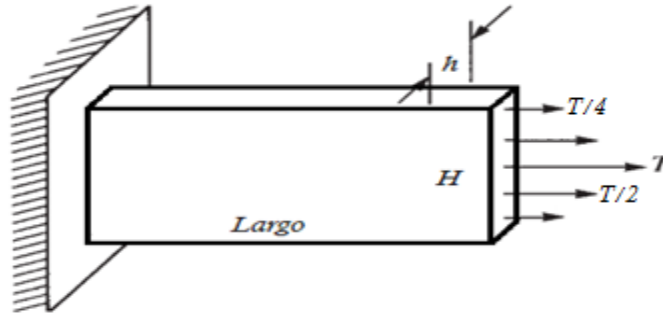


Figura 36. Placa plana sometida a tensión

### 6.3 VALIDACIÓN DE RESULTADOS

La validación de resultados del análisis de MEF empleando Comsol y Matlab se realiza a través de la comparación de los resultados con el método analítico. Para esta validación se utiliza una placa plana (ver Figura 36) sometida a tensión empleando los parámetros de la Tabla 17.

Con el fin de validar los resultados se realizan diez (10) simulaciones para cada elemento de aproximación (CST, LST, Q<sub>4</sub> y Q<sub>8</sub>) en Matlab y de igual forma para Comsol, generándose así 80 datos los cuales se agrupan en ocho curvas. La Tabla 18, referencia las características del mallado para una placa plana utilizando el mallado de Comsol para elementos triangulares, mientras la Tabla 19 ilustra los parámetros obtenidos del mallado para una placa con elementos cuadriláteros, con diez cantidades de nodos diferentes utilizando elementos cuadriláteros. Los parámetros del mallado son:

- La *calidad de un elemento* es un valor entre 0 y 1, donde 0.0 representa un elemento degenerado y 1.0 representa un elemento completamente simétrico.
- La *relación de aspecto AR*

- La tasa de crecimiento máxima

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
4	2	0.4619	0.4619	1.0000	1.000	1.000
6	4	0.6855	0.7097	0.8365	1.000	1.000
10	10	0.6137	0.6900	0.4998	1.999	1.996
17	20	0.7263	0.8649	0.2858	2.061	1.671
21	26	0.8709	0.9365	0.3245	1.545	1.394
28	38	0.8700	0.9265	0.5737	1.624	1.246
32	44	0.8873	0.9483	0.5905	1.576	1.239
40	56	0.8666	0.9534	0.3951	1.612	1.257
45	66	0.8812	0.9391	0.5552	1.519	1.186
50	74	0.9090	0.9689	0.6442	1.440	1.115

Tabla 18. Placa plana con elementos triangulares

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
8	3	1.0000	1.0000	0.9950	1.000	1.000
18	10	0.9570	0.9663	0.9290	1.035	1.027
36	24	0.9721	0.9857	0.9550	1.016	1.009
44	30	0.9860	0.9931	0.9715	1.004	1.001
60	44	0.9800	0.9923	0.9655	1.010	1.005
70	52	0.9860	0.9942	0.9748	1.007	1.001
84	65	0.9582	0.9824	0.9413	1.017	1.006
96	75	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	1.000
119	96	0.9707	0.9895	0.9517	1.015	1.004
160	133	0.9773	0.9937	0.9571	1.013	1.003

Tabla 19. Placa plana con elementos cuadriláteros

De estas tablas se puede concluir que al ser un dominio sin discontinuidades la calidad de los elementos tiende a ser uno para los elementos cuadriláteros mientras que para los elementos triangulares a medida que aumenta la cantidad de elementos se mejora la calidad mínima, por otra parte, Comsol para cada mallado genera un histograma de calidad de los elementos como se puede observar en la Figura 37. La Figura 37.a, muestra el histograma para una placa plana de elementos cuadriláteros con 96 nodos y la Figura 37.b para una placa con elementos triangulares con 40 nodos. En el primer histograma se puede ver un comportamiento ideal en el cual los mallados son uniformes de calidad uno, mientras en el segundo se puede ver una distorsión de los elementos triangulares a través del dominio.

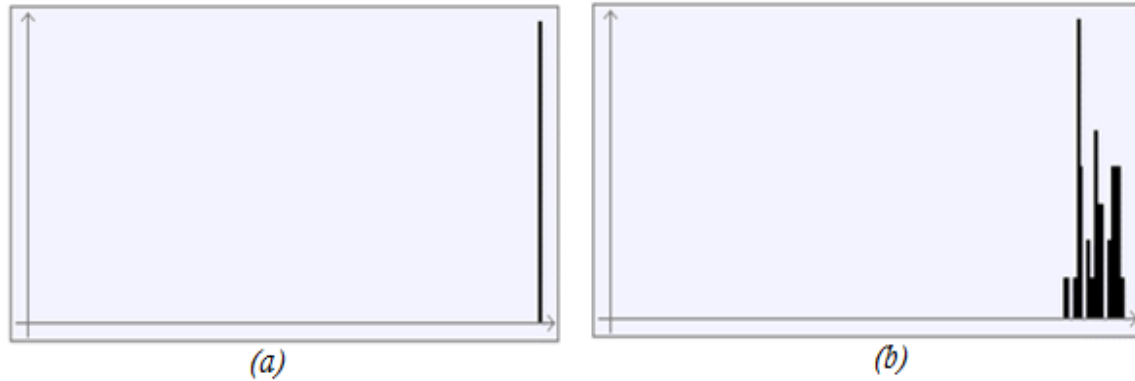


Figura 37. Histogramas de calidad de mallados con elementos cuadrilátero ideal (a) y triangulares (b)

Una vez obtenidos los resultados del análisis de los concentradores de esfuerzos de Matlab y Comsol se procede a realizar la comparación de dichos resultados con los obtenidos por el método analítico. Así, para una placa plana con las condiciones de la Tabla 17, se tiene que el esfuerzo nominal es:

$$\sigma_{nom} = \frac{T}{A} = \frac{100N}{0.2m \times 0.025m} = 20\,000 \frac{N}{m^2}$$

Empleando la ecuación 16 en una placa plana por medio del método analítico se debe cumplir que  $k$  debe ser igual a 1, es decir que el  $\sigma_{max} = \sigma_{nom}$

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
2	1,023	1,007	0,858	1,099
4	1,006	1,027	0,894	1,090
10	1,025	1,077	0,914	1,008
20	1,055	1,040	0,940	0,936
26	1,045	1,463	0,935	0,928
38	1,038	1,433	0,930	0,958
44	1,034	1,481	0,923	0,984
56	1,054	1,373	0,912	1,039
66	1,051	1,349	0,912	1,027
74	1,058	1,196	0,913	1,041

Tabla 20. Resultados para placa plana utilizando elementos triangulares y Matlab y Comsol

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
3	1,029	1,093	0,928	0,960
10	1,043	1,302	0,933	0,942
24	1,066	1,288	0,921	1,079
30	1,074	1,277	0,916	1,125
44	1,131	1,225	0,932	1,184
52	1,164	1,238	0,937	1,221
65	1,116	1,170	0,961	1,259
75	1,121	1,192	0,963	1,280
96	1,141	1,148	0,994	1,333
113	1,166	1,129	1,020	1,398

Tabla 21. Resultados para placa plana utilizando elementos cuadriláteros y Matlab y Comsol

En la Tabla 20 se pueden observar los factores  $k$  obtenidos por la solución de MEF en Matlab y en Comsol, para elementos de formas triangulares y en la Tabla 21 se presentan los cuadriláteros, lineales y cuadráticos al variar el número de elementos.

Con el fin de hacer la comparación y validación entre las curvas del coeficiente teórico de concentración de esfuerzo y las curvas realizadas con la ayuda del método de elementos finitos por medio de Comsol y Matlab, se sobreponen en una misma gráfica los resultados obtenidos como se puede ver en la Figura 38 para elementos triangulares y la Figura 39 para los elementos cuadriláteros. Estas se construyen a partir de los datos consignados en la Tabla 20 y Tabla 21 respectivamente. La línea verde representa el resultado obtenido de  $k$  teórico, las líneas continuas los resultados obtenidos a través de Matlab, las discontinuas los resultados de Comsol y las curvas de un solo color hacen referencia al mismo tipo de elemento.

En la Figura 38 se puede observar que los resultados de Matlab se encuentran los dos por encima del factor teórico, dando mejores resultados en CST llegando a una tendencia de 1.05, Por otra parte el resultado de CST simulado en Comsol da por debajo del factor teórico con una tendencia de 0.9 mientras que el resultado de LST para los primeros resultados no muestra un comportamiento definido sin embargo a medida que se aumenta la cantidad de nodos tiende a 1.4.

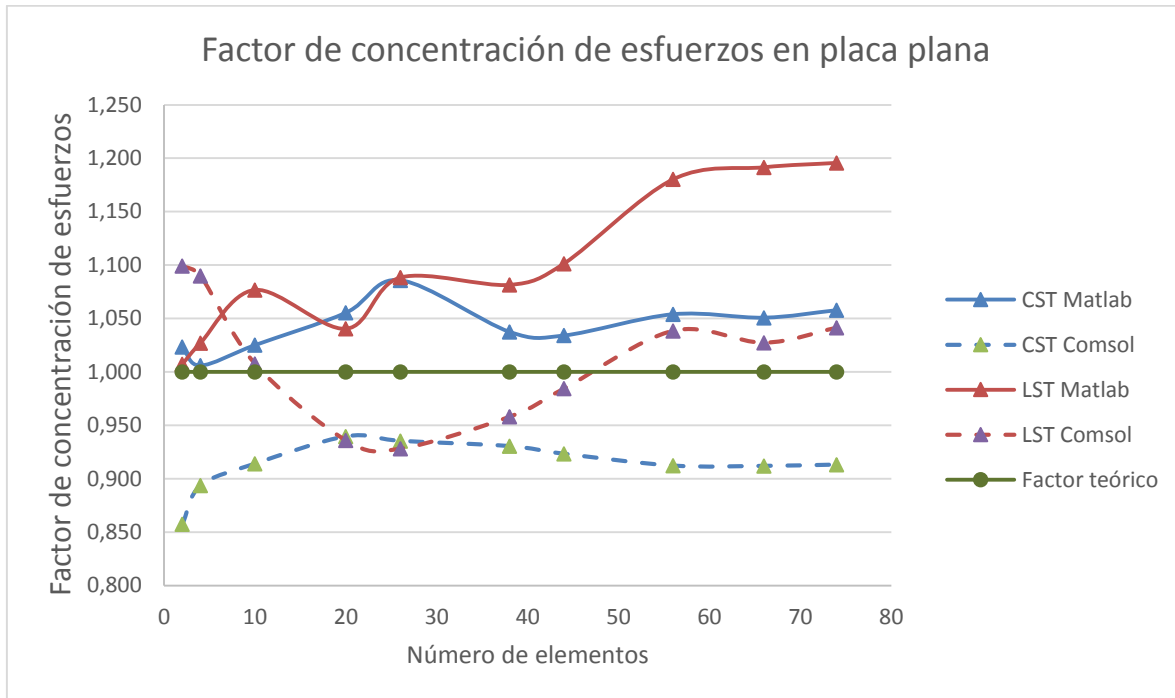


Figura 38. Relación entre el factor  $k$  y el número de elementos en una placa plana con elementos triangulares

De la Figura 39 se puede observar que el resultado más cercano al teórico es el  $Q_4$  simulado en Comsol con una tendencia a 1, mientras el resultado de  $Q_8$  aumenta de forma parabólica sin mostrar una tendencia fija. Por otro lado el resultado de  $Q_4$  programado en Matlab tiende a 1.15 y el resultado de  $Q_8$  muestra una tendencia a 1.2.

De ambas curvas se puede observar que el comportamiento tanto teórico como el arrojado por Matlab y Comsol tienen comportamientos similares, por ende el método se puede validar.

Una vez obtenidos los resultados del análisis de los concentradores de esfuerzos de Matlab y Comsol (esfuerzo máximo) se procede a realizar la comparación de dichos resultados con los resultados que se encuentren en Norton<sup>2</sup>, con este fin se emplean las curvas mostradas en la Figura 40, Figura 41 y Tabla 42 como referencia para validar los métodos de solución.

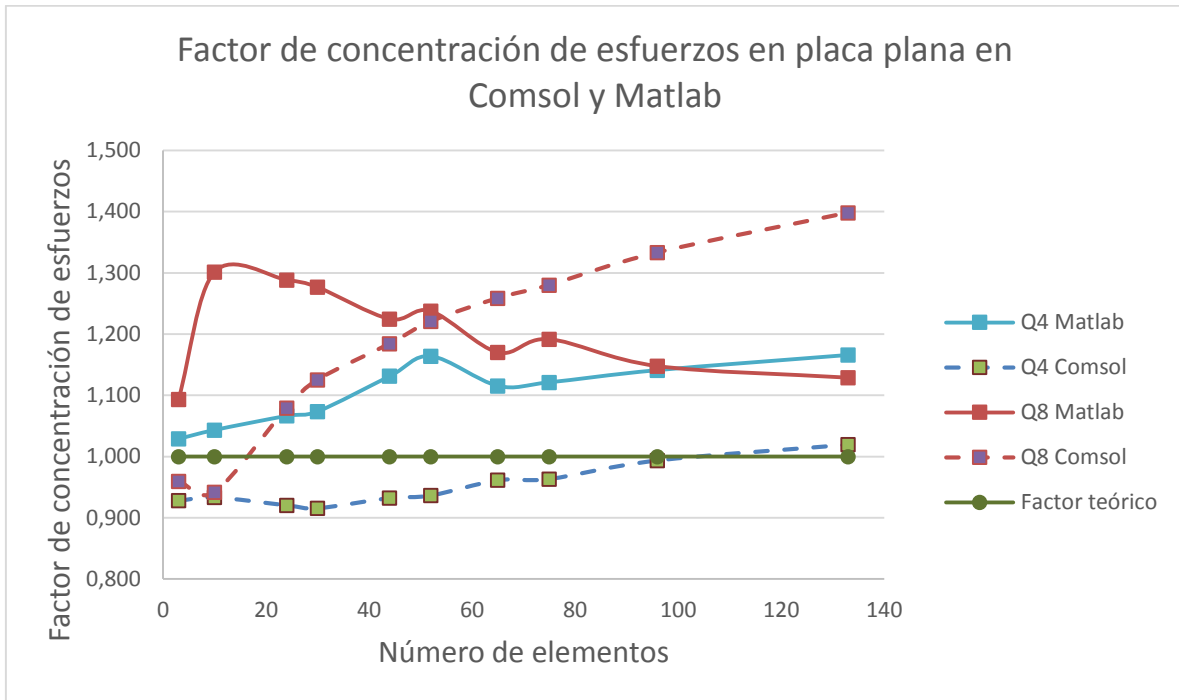


Figura 39. Relación entre el factor  $k$  y el número de elementos en una placa plana con elementos cuadriláteros

### 6.3.1 Factor $k$ placa con acanaladuras

Utilizando los parámetros de la Tabla 17 y haciendo uso de la curva en la Figura 40 se calcula el  $k$  para una placa con acanaladuras semicirculares:

$$\frac{r}{d} = \frac{0.0231 \text{ m}}{0.1538 \text{ m}} = 0.15$$

$$\frac{D}{d} = \frac{0.2 \text{ m}}{0.1538 \text{ m}} = 1.3$$

En la Figura 40 se obtiene el valor de  $k = 2.15$  para los resultados hallados.

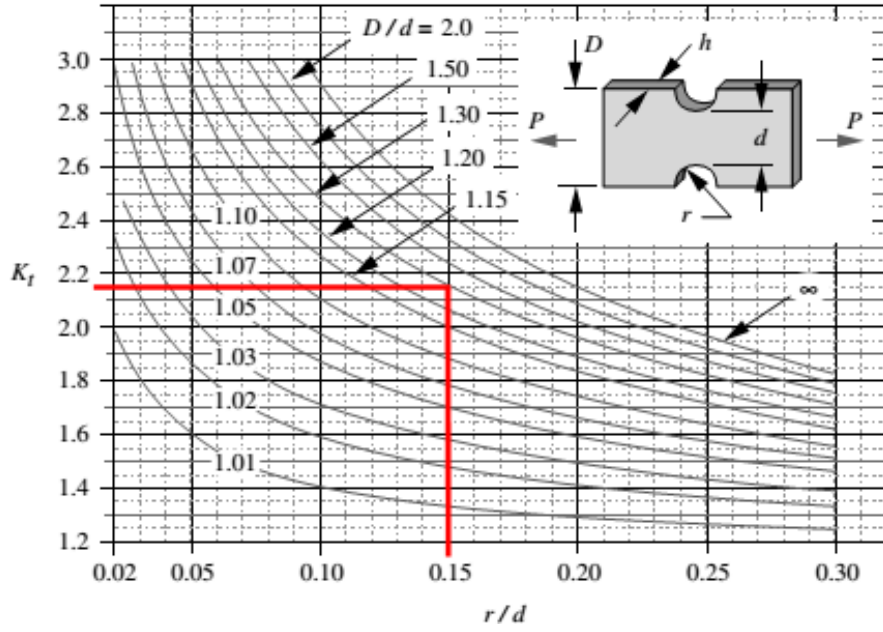


Figura 40. Factor de concentración de esfuerzos  $k$  para una placa con acanaladuras semicirculares. Norton<sup>2</sup>

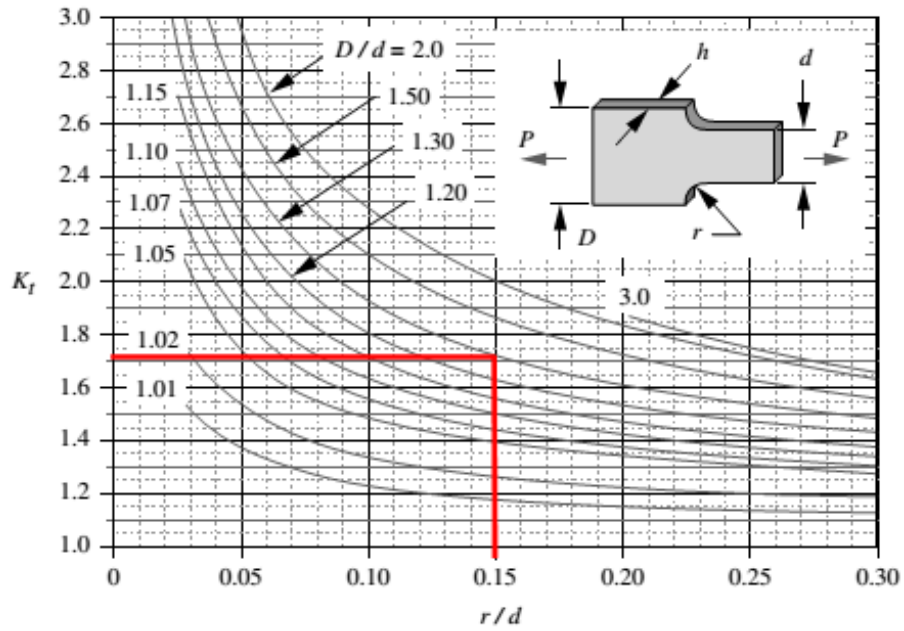


Figura 41. Factor de concentración de esfuerzos  $k$  para una placa con cambio de sección. Norton<sup>2</sup>



### 6.3.2 Factor $k$ placa con cambio de sección

Haciendo uso de la Figura 41 se calcula el  $k$  para una placa con cambio de sección tomando las condiciones de la Tabla 17 se tiene que los parámetros:

$$\frac{r}{d} = \frac{0.0231 \text{ m}}{0.1538 \text{ m}} = 0.15$$

$$\frac{D}{d} = \frac{0.2 \text{ m}}{0.1538 \text{ m}} = 1.3$$

Y empleando la Figura 41 en la curva  $H/d=1.3$  y la relación  $r/d = 0.15$  se obtiene un valor de  $k = 1.7$ .

### 6.3.3 Factor $k$ placa con agujero centrado

Finalmente para la placa con agujero centrado mostrada en Figura 42 se tiene que:

$$\frac{d}{W} = \frac{0.0462 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} = 0.231$$

Empleando la curva de Figura 42 con este parámetro se tiene que el valor de  $k = 2.45$ .

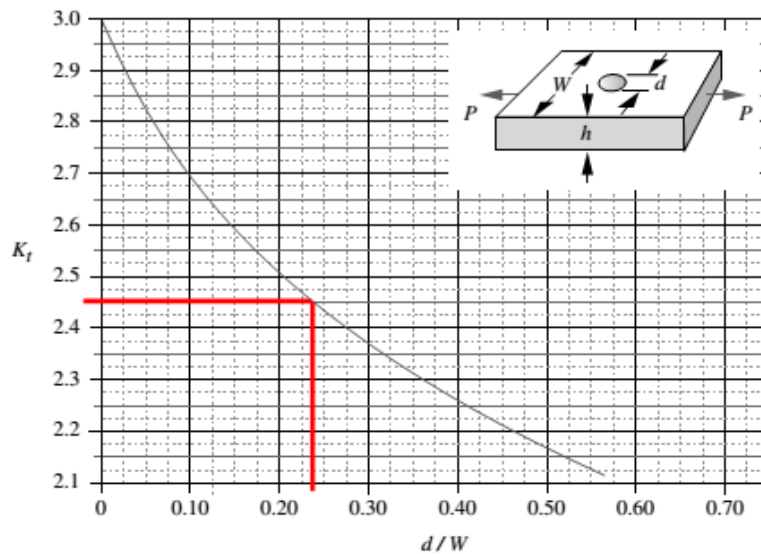


Figura 42. Factor de concentración de esfuerzos  $k$  para una placa con agujero centrado. Norton<sup>2</sup>

## 6.4 PRUEBAS

Las pruebas a realizar se dividen de acuerdo al tipo de concentrador, el refinado y el tipo de elemento de aproximación, así para cada concentrador (acanaladura, agujero centrado y cambio de sección) corresponden tres tipos de refinamientos (uniforme, medio y fino) y a su vez, cada refinado conlleva cuatro tipos de elementos (CST, LST, Q<sub>4</sub> y Q<sub>8</sub>). En total se realizan diez pruebas variando el número de elementos de aproximación para cada elemento, generando cuarenta resultados para cada refinado y ciento veinte para cada concentrador estudiado. Este proceso se realiza paralelamente en Matlab y en Comsol con las condiciones previamente definidas en el capítulo.

## 6.5 CARACTERÍSTICAS DE LOS MALLADOS

Para la construcción del mallado influyen los siguientes parámetros: la longitud de arista mínima y máxima, la resolución de curvatura y la tasa de crecimiento de elementos máxima (definidos previamente en el capítulo CAPÍTULO 4). Además se debe tener presente que para la construcción del mallado los elementos cuadráticos LST y Q<sub>8</sub> poseen nodos intermedios entre sus aristas y el orden de los nodos en cada elemento debe figurar en dirección antihorario. Para realizar el mallado de estos elementos se utiliza una malla base en CST o Q<sub>4</sub> dependiendo de si es un elemento triangular o cuadrilátero, ésta es realizada en Comsol y mediante la ecuación de punto medio son generados los nodos intermedios para cada arista en Matlab.

En el menú *mesh* de Comsol se obtienen las características del mallado y un histograma de calidad (los histogramas de calidad mostrados en las figuras de esta sección hacen referencia a la séptima simulación de cada grupo de simulaciones, los histogramas (a) analizan elementos triangulares y los (b) cuadriláteros). Las características del mallado están tabulados de la Tabla 22 a Tabla 39 y los histogramas de la Figura 43 a Figura 51.

## 6.5.1 Mallado para placa plana con acanaladura semicircular

### 6.5.1.1 Refinado uniforme

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
141	234	0.7198	0.9531	0.0962	2.243	1.300
162	272	0.8293	0.9600	0.1113	1.846	1.243
167	282	0.7963	0.9562	0.1501	1.805	1.267
170	286	0.7623	0.9595	0.1487	2.356	1.271
176	298	0.7632	0.9566	0.1372	2.144	1.268
181	308	0.7023	0.9563	0.1160	2.037	1.266
188	318	0.8019	0.9614	0.1356	2.059	1.265
192	326	0.7692	0.9674	0.1567	1.814	1.215
195	332	0.8509	0.9679	0.1950	1.845	1.206
213	364	0.8419	0.9760	0.1747	1.870	1.189

Tabla 22. Placa plana con acanaladura, con elementos triangulares de tamaño de arista uniforme

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
60	43	0.3564	0.6419	0.0819	3.091	1.613
76	55	0.5004	0.7899	0.0671	2.643	1.482
90	67	0.4263	0.7732	0.1169	2.340	1.359
98	75	0.5147	0.8292	0.1464	2.222	1.293
113	87	0.4391	0.8241	0.1835	2.379	1.185
126	98	0.4966	0.8679	0.1871	2.238	1.196
141	112	0.4514	0.8628	0.2291	2.172	1.149
154	122	0.5271	0.8665	0.1869	2.243	1.207
170	138	0.4484	0.8533	0.1666	2.637	1.262
192	157	0.4255	0.8256	0.1462	2.230	1.191

Tabla 23. Placa plana con acanaladura, con elementos cuadriláteros de tamaño de arista uniforme

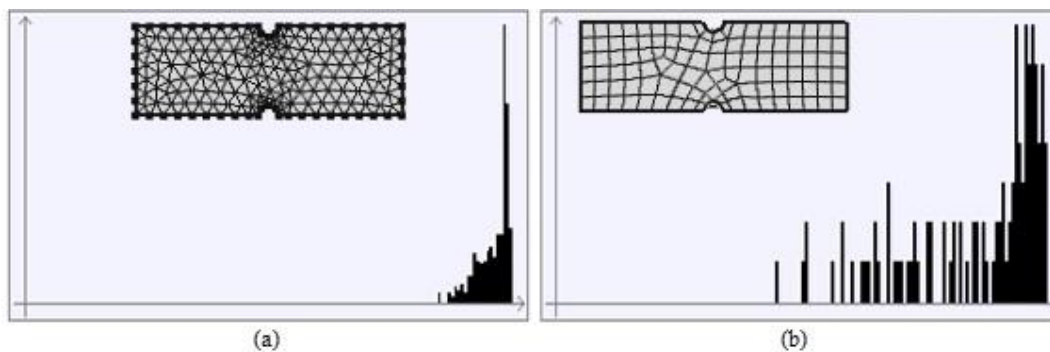


Figura 43. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con acanaladura empleando un refinado uniforme y elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

### 6.5.1.2 Refinado medio

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
52	80	0.5661	0.8387	0.0057	2.656	1.856
68	108	0.7377	0.8818	0.0086	2.100	1.598
74	120	0.6319	0.8871	0.0085	2.019	1.562
85	136	0.7468	0.9188	0.0255	2.294	1.572
94	154	0.7353	0.9022	0.0209	2.036	1.524
114	190	0.8141	0.9351	0.0263	2.059	1.460
122	206	0.8100	0.9529	0.0264	1.718	1.355
140	238	0.7500	0.9571	0.0291	2.080	1.327
171	294	0.8768	0.9683	0.0536	1.728	1.260
211	368	0.8837	0.9742	0.0741	1.548	1.238

Tabla 24. Placa plana con acanaladura, con elementos triangulares con refinado medio

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
54	36	0.4040	0.7908	0.1044	2.536	1.608
72	53	0.3686	0.6298	0.0459	3.695	1.598
88	66	0.4068	0.7804	0.0761	2.170	1.341
94	72	0.4259	0.7623	0.0604	2.143	1.337
103	80	0.4536	0.8173	0.1113	2.065	1.315
116	90	0.4651	0.8109	0.1236	2.569	1.311
131	103	0.4612	0.8168	0.1313	1.834	1.201
157	127	0.4616	0.8348	0.0759	2.055	1.284
177	144	0.4086	0.8096	0.0731	2.171	1.233
202	169	0.4540	0.8428	0.0761	2.359	1.232

Tabla 25. Placa plana con acanaladura, con elementos cuadriláteros con refinado medio

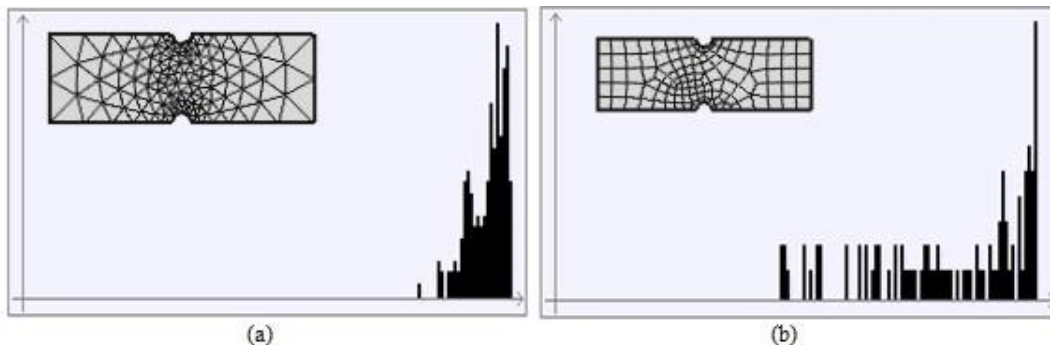


Figura 44. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con acanaladura empleando un refinado medio con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

### 6.5.1.3 Refinado fino

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
82	132	0.5197	0.8601	0.0038	2.705	1.770
96	158	0.5225	0.8511	0.0047	3.269	1.860
136	230	0.6931	0.8984	0.0106	2.307	1.552
157	268	0.7483	0.9276	0.0103	2.177	1.482
173	300	0.7715	0.9394	0.0054	2.255	1.426
201	352	0.7722	0.9419	0.0110	2.141	1.385
230	404	0.8639	0.9565	0.0199	1.705	1.308
260	458	0.7242	0.9396	0.0157	1.797	1.365
281	498	0.7316	0.9175	0.0055	2.173	1.413
367	566	0.7151	0.9196	0.0136	2.127	1.414

Tabla 26. Placa plana con acanaladura, con elementos triangulares y refinado fino

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
97	72	0.5446	0.8877	0.0661	1.942	1.414
107	82	0.4999	0.7369	0.0291	2.444	1.489
123	96	0.4630	0.8322	0.0478	2.030	1.380
134	105	0.5434	0.8798	0.0308	2.080	1.392
143	116	0.4818	0.8260	0.0448	2.439	1.371
160	128	0.4741	0.7943	0.0238	2.224	1.385
185	151	0.5507	0.8633	0.0237	2.528	1.293
207	171	0.4941	0.8668	0.0127	2.390	1.361
225	187	0.4755	0.8868	0.0209	2.589	1.284
242	202	0.7696	0.9479	0.0183	1.657	1.265

Tabla 27. Placa plana con acanaladura, con elementos cuadrilátero y refinado fino

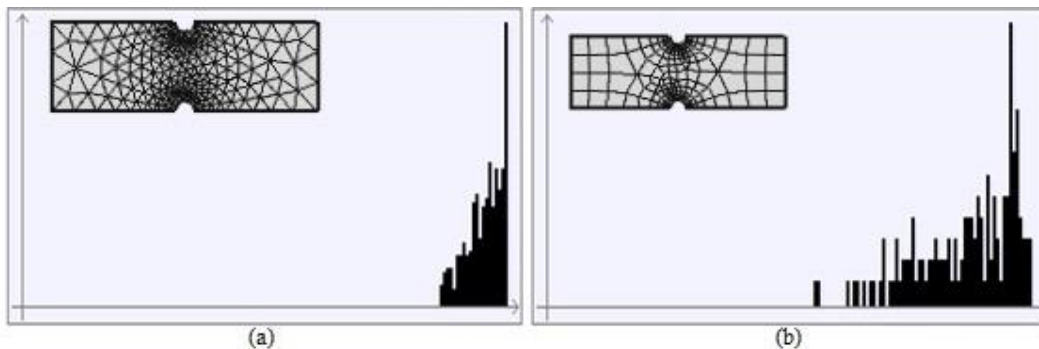


Figura 45. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con acanaladura empleando un refinado fino con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

## 6.5.2 Mallado para placa plana con agujero centrado

### 6.5.2.1 Refinado uniforme

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
103	166	0.6695	0.9332	0.9910	2.196	1.446
120	198	0.7898	0.9420	0.0610	2.332	1.414
126	208	0.5853	0.9395	0.0857	2.373	1.381
128	212	0.7400	0.9419	0.0743	2.416	1.382
135	224	0.8048	0.9453	0.1302	2.132	1.344
144	240	0.8124	0.9535	0.1248	1.999	1.295
149	250	0.6920	0.9387	0.1036	2.004	1.349
156	262	0.7769	0.9524	0.1421	1.847	1.289
167	282	0.8122	0.9543	0.1767	1.876	1.311
174	294	0.7654	0.9542	0.1162	1.918	1.281

Tabla 28. Placa plana con agujero, empleando elementos triangulares de tamaño de arista uniforme

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
66	48	0.3769	0.7744	0.0973	2.350	1.448
79	61	0.3261	0.6691	0.0856	3.634	1.673
97	74	0.4741	0.9031	0.2434	2.032	1.142
112	88	0.4381	0.8278	0.1020	2.408	1.225
135	110	0.3959	0.8104	0.1413	2.646	1.267
151	123	0.4905	0.9066	0.2075	1.961	1.145
182	151	0.4431	0.9186	0.2698	1.788	1.128
205	172	0.4801	0.9081	0.3528	1.885	1.088
235	200	0.4607	0.8885	0.1952	2.173	1.140
268	230	0.3931	0.8965	0.2863	2.052	1.088

Tabla 29. Placa plana con agujero, empleando elementos cuadriláteros de tamaño de arista uniforme

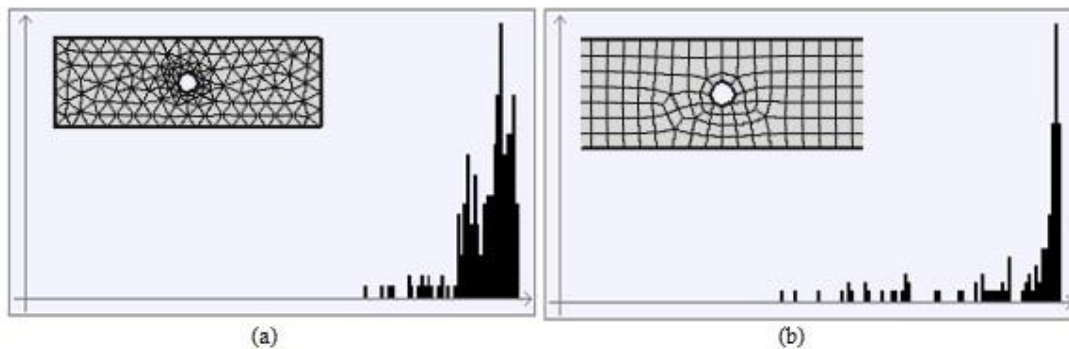


Figura 46. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con agujero centrado empleando un refinado uniforme con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

### 6.5.2.2 Refinado medio

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
39	58	0.5441	0.8227	0.0110	3.042	2.086
49	74	0.6383	0.8597	0.0327	2.836	1.824
65	100	0.5841	0.8648	0.0191	3.012	1.859
91	146	0.6386	0.9150	0.0582	2.332	1.577
111	182	0.7214	0.9231	0.0451	2.545	1.502
128	214	0.5990	0.9329	0.0552	2.475	1.435
150	252	0.5767	0.9489	0.0993	2.144	1.344
171	292	0.7309	0.9401	0.0793	2.162	1.363
185	318	0.7578	0.9571	0.0955	1.809	1.305
219	382	0.7549	0.9625	0.1135	1.705	1.257

Tabla 30. Placa plana con agujero, empleando elementos triangulares con refinado medio

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
52	37	0.3633	0.6420	0.0603	2.940	1.679
74	55	0.3864	0.8004	0.0782	2.601	1.437
95	73	0.3769	0.7628	0.0614	2.372	1.423
116	91	0.3923	0.8058	0.5457	2.264	1.357
139	114	0.3572	0.7448	0.0621	2.293	1.432
153	128	0.4567	0.7577	0.0451	2.576	1.458
171	144	0.4171	0.7724	0.0482	2.574	1.404
185	158	0.4148	0.7493	0.0466	2.674	1.417
193	164	0.4585	0.8159	0.0464	2.764	1.378
212	180	0.4655	0.8249	0.0276	2.339	1.301

Tabla 31. Placa plana con agujero, empleando elementos cuadriláteros refinado medio

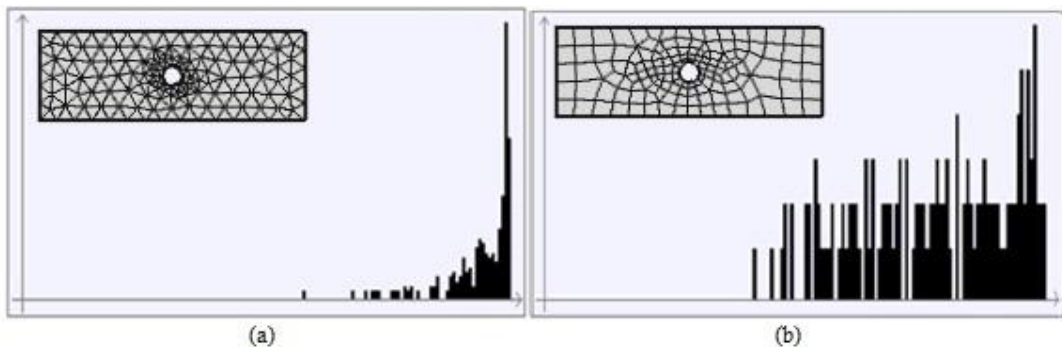


Figura 47. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con agujero centrado empleando un refinado medio con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

### 6.5.2.3 Refinado fino

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
75	118	0.6072	0.8938	0.04344	2.115	1.56
91	146	0.6386	0.915	0.05826	2.332	1.577
113	188	0.6113	0.9208	0.06057	2.674	1.51
133	224	0.6076	0.8977	0.02268	2.992	1.608
156	268	0.6426	0.9071	0.01379	2.686	1.548
173	300	0.632	0.9188	0.01919	2.345	1.49
193	338	0.6521	0.9235	0.01546	2.264	1.457
205	360	0.6797	0.9344	0.02123	2.089	1.421
238	422	0.7378	0.9363	0.02528	2.21	1.39
280	502	0.7587	0.9464	0.02292	2.199	1.346

Tabla 32. Placa plana con agujero, empleando elementos triangulares y refinado fino

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
75	58	0.3828	0.7133	0.0136	2.530	1.657
101	81	0.4261	0.7299	0.0253	2.701	1.576
136	110	0.6155	0.8827	0.0158	1.974	1.398
159	132	0.5275	0.8112	0.0126	2.154	1.392
178	150	0.4897	0.8184	0.0165	2.449	1.382
202	173	0.4158	0.8155	0.0148	2.573	1.341
220	187	0.4212	0.7737	0.0083	3.145	1.384
232	199	0.4920	0.8046	0.0095	2.423	1.356
245	212	0.4202	0.7964	0.0089	2.577	1.357
262	223	0.3998	0.8709	0.0264	2.493	1.297

Tabla 33. Placa plana con agujero, empleando elementos cuadriláteros y refinado fino

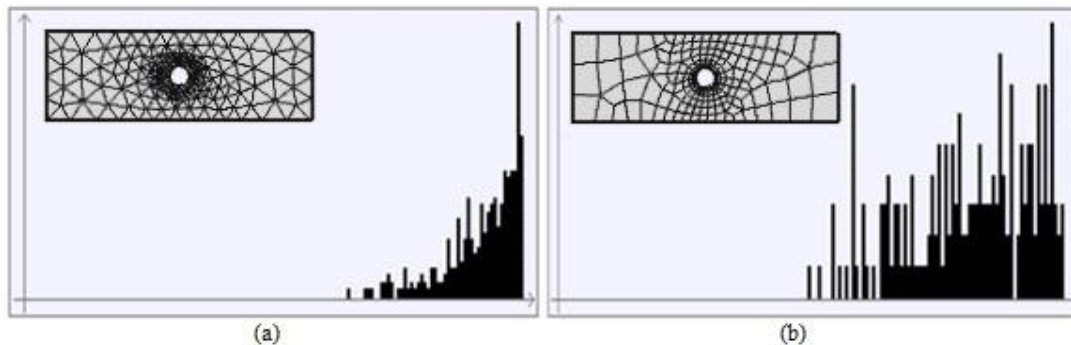


Figura 48. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con agujero centrado empleando un refinado fino con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)



### 6.5.3 Mallado para placa plana con cambio de sección centrado

#### 6.5.3.1 Refinado uniforme

TULO 7	Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
	101	161	0.7838	0.9507	0.1006	1.813	1.296
	110	177	0.7594	0.9445	0.0834	1.976	1.301
	117	190	0.7592	0.9528	0.0815	1.920	1.306
	122	199	0.7705	0.9451	0.1035	2.318	1.327
	129	211	0.8016	0.9515	0.1282	1.707	1.282
	133	219	0.8141	0.9563	0.1563	1.807	1.261
	141	233	0.8176	0.9562	0.1605	1.999	1.270
	150	251	0.7893	0.9535	0.1441	1.960	1.296
	156	266	0.7616	0.9589	0.1939	1.662	1.251
	172	289	0.8516	0.9686	0.2631	1.785	1.212

Tabla 34. Placa plana con cambio de sección, usando elementos triangulares de tamaño de arista uniforme

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
46	30	0.5425	0.8601	0.1060	2.444	1.402
59	41	0.5131	0.8477	0.1365	2.198	1.245
70	51	0.4487	0.8547	0.1166	2.486	1.274
87	65	0.5296	0.8767	0.1634	2.216	1.185
100	77	0.6114	0.9220	0.2879	2.310	1.128
138	85	0.5000	0.8828	0.1888	2.142	1.177
123	97	0.6141	0.9455	0.3180	2.029	1.084
138	110	0.5771	0.9205	0.4202	1.727	1.063
150	121	0.6658	0.9600	0.3895	2.033	1.067
179	148	0.5865	0.9405	0.3511	1.750	1.059

Tabla 35. Placa plana con cambio de sección, usando elementos cuadriláteros de tamaño de arista uniforme

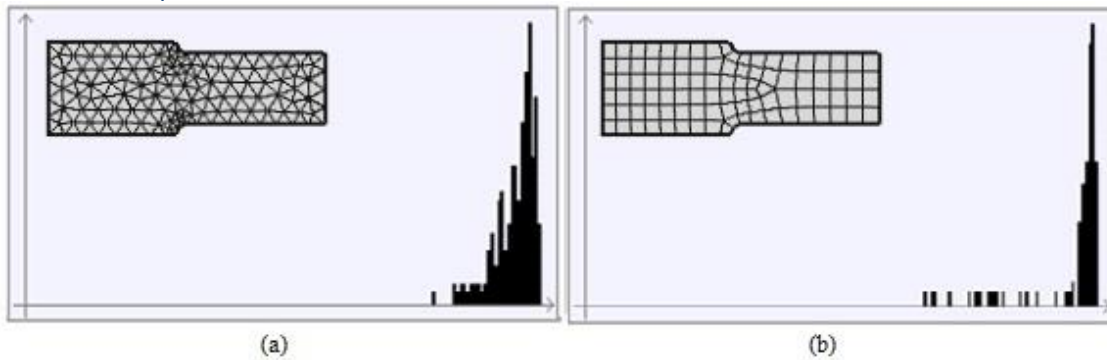


Figura 49. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con cambio de sección empleando un refinado uniforme con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

### 5.5.3.2 Refinado medio

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
43	62	0.6821	0.8888	0.08006	2.411	1.826
47	70	0.6432	0.8626	0.005787	2.429	1.836
53	81	0.6178	0.8878	0.01334	2.264	1.701
73	117	0.7057	0.9147	0.01913	1.942	1.481
87	142	0.6018	0.8935	0.02254	1.97	1.505
98	162	0.5799	0.8909	0.02918	2.012	1.459
112	190	0.6148	0.9107	0.02402	1.973	1.416
134	230	0.555	0.8977	0.01778	1.979	1.462
156	271	0.5854	0.9099	0.03987	1.764	1.384
178	313	0.6422	0.9133	0.04607	2.049	1.361

Tabla 36. Placa plana con cambio de sección, usando elementos triangulares y refinado medio

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
73	54	0.4117	0.7209	0.0241	3.519	1.643
91	70	0.3413	0.6408	0.0186	4.170	1.616
110	89	0.3255	0.6438	0.0088	4.192	1.685
129	104	0.4492	0.8119	0.0285	2.203	1.319
142	116	0.3017	0.7612	0.0138	2.959	1.380
165	139	0.2347	0.6951	0.0138	3.785	1.448
179	152	0.3950	0.8034	0.0132	2.531	1.376
198	166	0.4848	0.8428	0.0265	1.985	1.229
218	182	0.4071	0.8391	0.0670	2.029	1.171
241	213	0.2639	0.7609	0.0083	3.277	1.358

Tabla 37. Placa plana con cambio de sección, usando elementos cuadriláteros y refinado medio

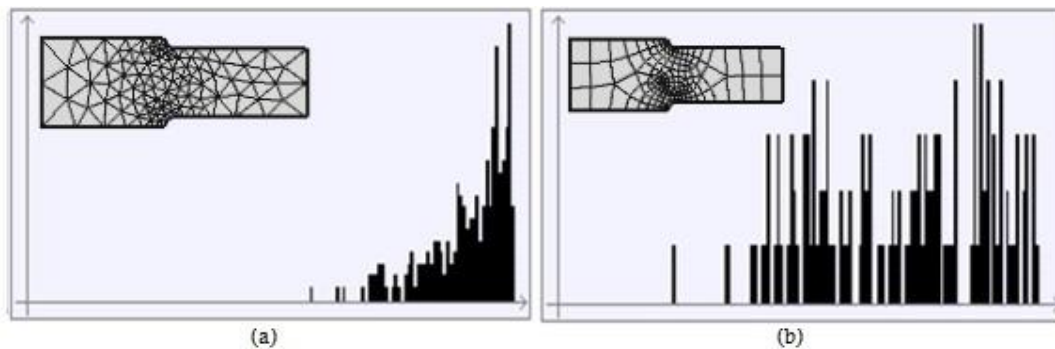


Figura 50. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con cambio de sección empleando un refinado medio con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

### 5.5.3.3 Refinado fino

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
99	159	0.6581	0.9156	0.0312	2.796	1.524
118	193	0.7723	0.9376	0.0267	2.059	1.446
139	231	0.6795	0.9205	0.0147	2.481	1.496
155	261	0.7269	0.9278	0.0153	2.350	1.476
177	299	0.7024	0.9342	0.0247	2.070	1.392
195	333	0.6978	0.9301	0.0257	2.423	1.396
211	363	0.7352	0.9471	0.0235	1.970	1.353
221	385	0.8241	0.9547	0.0438	1.968	1.300
242	427	0.8368	0.9620	0.0260	1.790	1.274
272	477	0.7410	0.9399	0.0083	1.953	1.373

Tabla 38. Placa plana con cambio de sección, usando elementos triangulares y refinado fino

Número de Nodos	Número de elementos	Calidad mín	Calidad prom	AR	Tasa crec máx	Tasa crec prom
99	78	0.3920	0.7003	0.0144	4.095	1.682
120	96	0.4168	0.7883	0.2242	2.546	1.430
139	115	0.3452	0.7133	0.0088	4.013	1.536
153	128	0.2622	0.7059	0.0060	4.844	1.643
164	139	0.3308	0.7461	0.0097	2.692	1.436
189	158	0.3983	0.7739	0.0301	3.239	1.356
201	172	0.4172	0.8029	0.1292	2.512	1.360
221	190	0.3779	0.8331	0.0117	2.631	1.312
235	201	0.4836	0.8836	0.8831	1.956	1.234
270	232	0.4551	0.8813	0.0376	1.941	1.196

Tabla 39. Placa plana con cambio de sección, usando elementos cuadriláteros y refinado fino

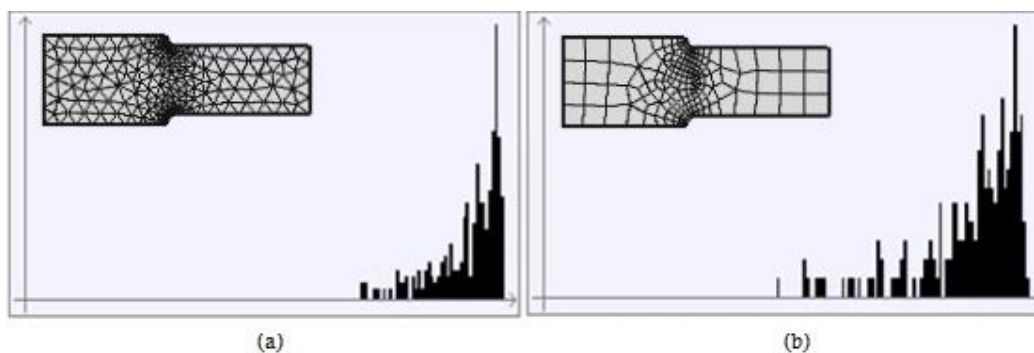


Figura 51. Histogramas de calidad del mallado de una placa plana con cambio de sección empleando un refinado fino con elementos triangulares (a) y cuadriláteros (b)

#### 1.5.4 Análisis de mallas

En las Figura 43, Figura 44 y Figura 45, se presentan los histogramas de calidad para una placa con acanaladura y diferentes refinados.

En los elementos triangulares la calidad promedio se encuentra por encima de 0.9 y la calidad mínima es de 0.7242 para un refinado fino. Así, al tener más del 90% de calidad, los mallados triangulares presentan homogeneidad en sus elementos con la variación del refinamiento.

La menor calidad promedio de los mallados en elementos cuadriláteros es de 0.83 y la calidad mínima es de 0.4616, lo cual demuestra elementos más degenerados en el dominio.

Los histogramas para placas planas con agujero centrado son presentados en las Figura 46, Figura 47 y Figura 48; las placas planas con cambio de sección son presentados en las Figura 49, Figura 50 y Figura 51.

Un análisis similar se realiza para los histogramas faltantes, obteniéndose:

Agujero centrado: Calidad promedio de elementos triangulares por encima de 0.9 y teniendo una calidad mínima de 0.6797 en el refinado fino y para elementos cuadriláteros calidades promedio de 0.8493, y calidad mínima de estos elementos es de 0.4148.

Cambio de sección: Calidad de los elementos triangulares por encima de 0.9 y teniendo una calidad mínima de 0.555 en el refinado medio. Para elementos cuadriláteros la menor calidad promedio es de 0.8332, y calidad mínima 0.3779.

Esto demuestra que los elementos triangulares representan un mejor acoplamiento a geometrías complicadas.

Se puede observar que la calidad de los elementos con refinado uniforme es mejor que la del refinado medio y, a su vez, ésta es mejor que la del refinado fino.

## 1.6 Determinación del esfuerzo máximo usando Comsol

En la Figura 52 se puede observar un mallado con elementos triangulares para la placa de cambio de sección con un refinado fino en las cercanías del concentrador, utilizando Comsol. En la Figura 53 se puede observar los esfuerzos calculados en este programa, en donde se puede observar que el esfuerzo máximo se encuentra en el concentrador y se ve en la leyenda al lado derecho representado en color rojo oscuro.

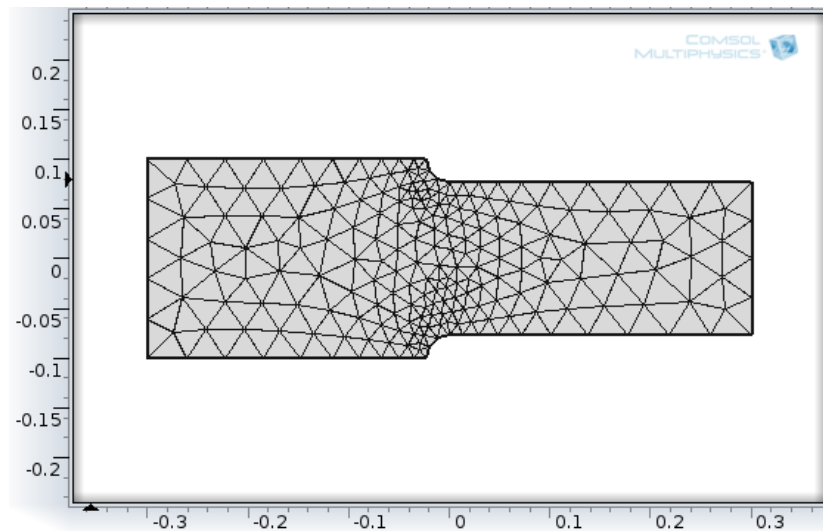


Figura 52. Mallado con elementos triangulares para placa plana con cambio de sección con refinado fino sometido a tracción

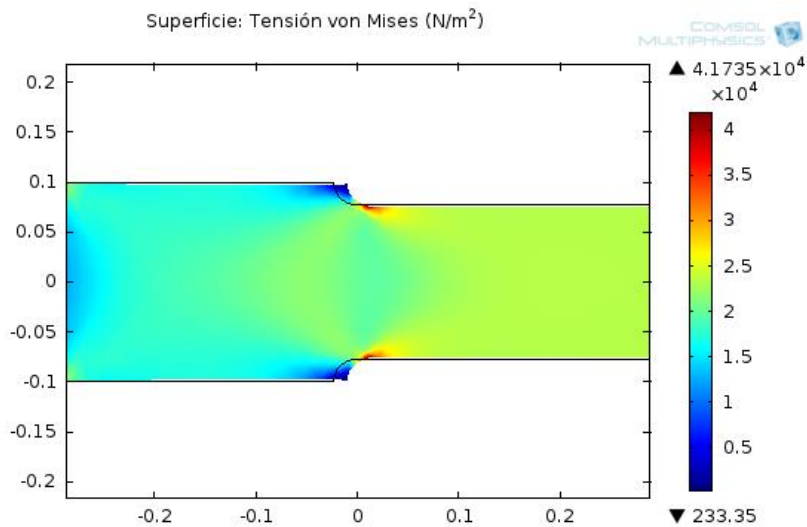


Figura 53. Esfuerzo máximo para placa plana con cambio de sección con refinado fino sometido a tracción

De la misma forma en la Figura 54 se puede observar un mallado con elementos cuadriláteros para una placa con acanaladura empleando un refinado fino en las cercanías del concentrador. En la Figura 55 se puede observar los esfuerzos calculados correspondientes al mallado de la Figura 54, en donde se puede observar que el esfuerzo máximo se encuentra en el concentrador y se ve en la leyenda al lado derecho representado en color rojo oscuro.

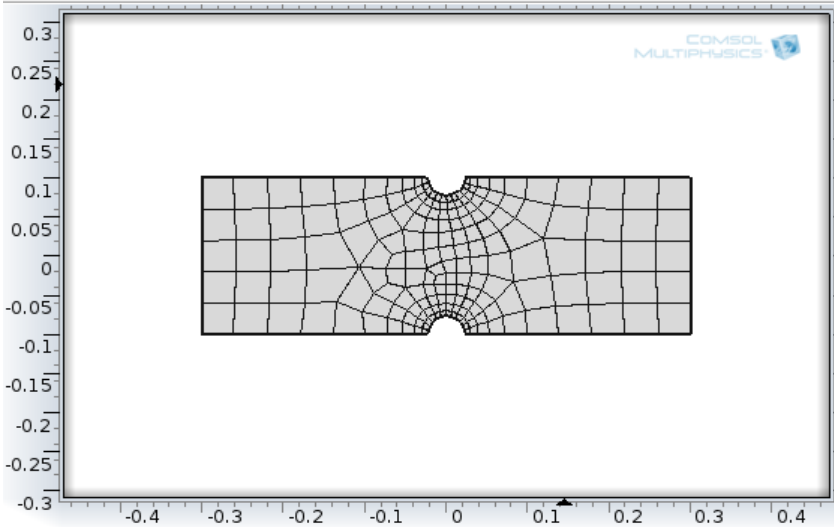


Figura 54. Mallado con elementos cuadriláteros para placa plana con acanaladura con refinado medio sometido a tracción

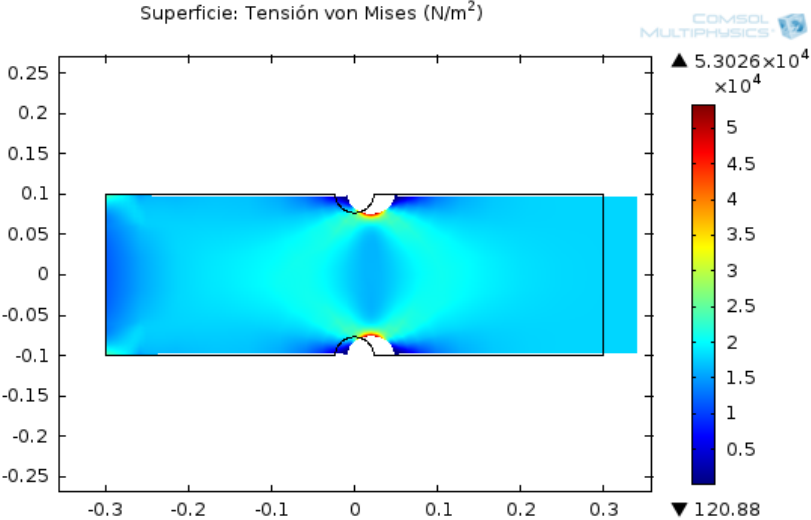


Figura 55. Esfuerzo máximo para placa plana con acanaladura con refinado medio sometido a tracción

## CAPÍTULO 7

### ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan las soluciones del factor de concentración de esfuerzos arrojados por Matlab y Comsol. Los resultados se tabulan desde la Tabla 40 a Tabla 57; las tablas y figuras pares hacen referencia a elementos triangulares y las impares a elementos cuadriláteros. El comportamiento de los factores de concentración se presenta mediante gráficos desde la Figura 56 a la Figura 73 que son las representaciones de los datos tabulados en las tablas anteriormente mencionadas.

#### 7.1 PLACA PLANA CON ACANALADURA SEMICIRCULAR

##### 7.1.1 Refinado uniforme

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
234	1,832	1,616	1,467	2,030
272	1,876	1,640	1,512	2,063
282	1,877	1,608	1,463	1,975
286	1,908	1,629	1,493	1,969
298	1,899	1,635	1,502	1,997
308	1,908	1,641	1,506	1,995
318	1,907	1,623	1,517	1,982
326	2,092	1,811	1,711	2,055
332	2,181	1,937	1,753	2,057
364	2,257	2,012	1,759	2,062

Tabla 40. Resultados para una placa plana con acanaladura empleando un refinado uniforme con elementos triangulares utilizando Matlab y Comsol

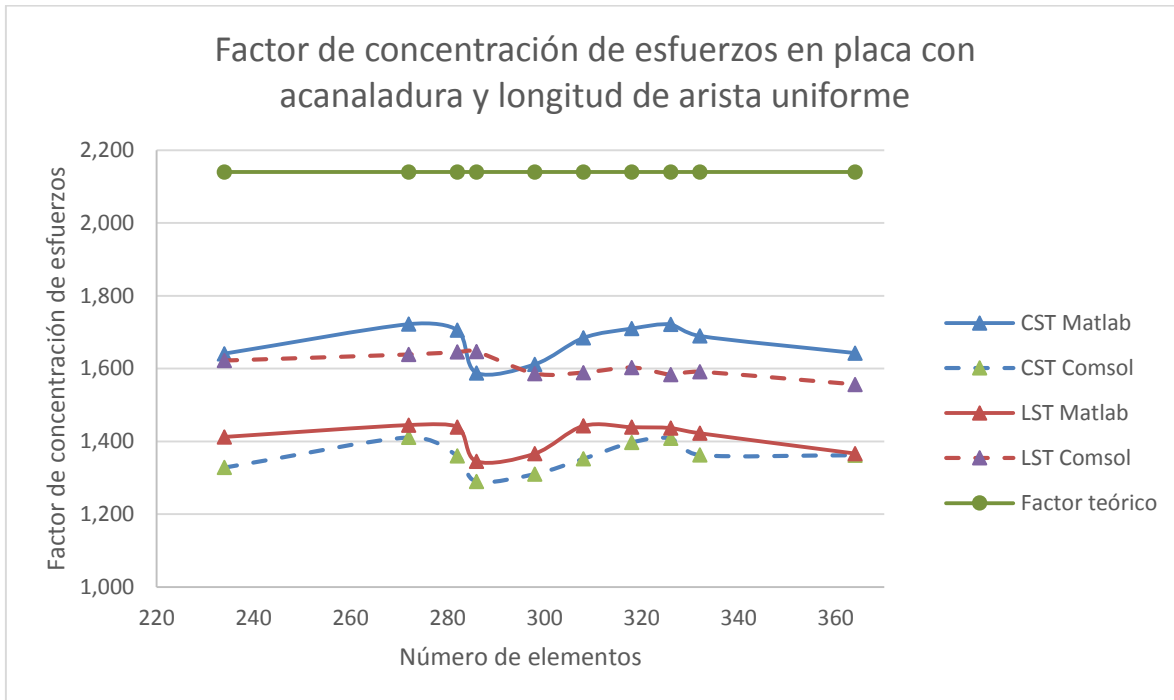


Figura 56. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla uniforme empleando elementos triangulares

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
43	1,259	1,636	1,321	1,887
55	1,227	1,744	1,471	1,857
67	1,242	1,735	1,476	1,919
75	1,247	1,690	1,345	1,876
87	1,305	1,804	1,495	1,888
98	1,328	1,715	1,498	1,953
112	1,268	1,735	1,498	1,931
122	1,285	1,758	1,352	1,861
138	1,262	1,723	1,492	1,937
157	1,269	1,699	1,360	1,924

Tabla 41. Resultados para una placa plana con acanaladura empleando un refinado uniforme con elementos cuadriláteros utilizando Matlab y Comsol



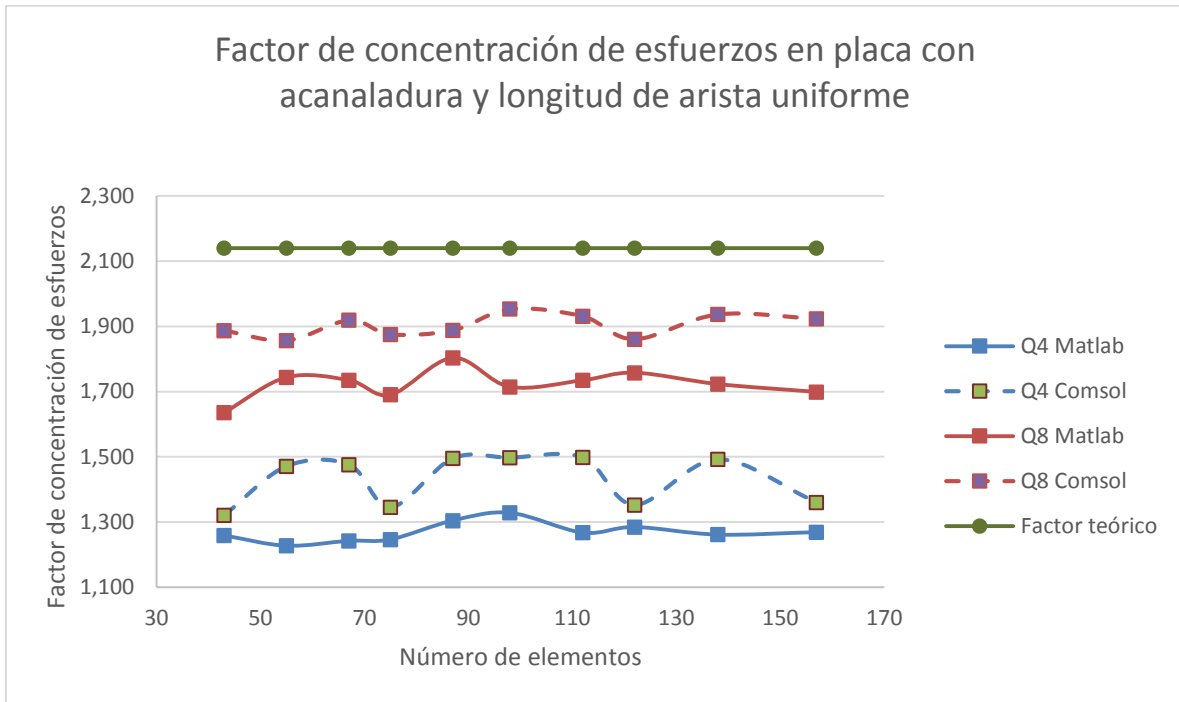


Figura 57. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla uniforme empleando elementos cuadriláteros

### 7.1.2 Refinado medio

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
80	1,619	1,450	1,305	2,008
108	1,664	1,415	1,321	1,989
120	1,668	1,422	1,334	1,990
136	1,595	1,376	1,300	1,958
154	1,679	1,420	1,376	1,972
190	1,655	1,404	1,360	1,985
206	1,674	1,417	1,330	1,912
238	1,659	1,396	1,333	1,941
294	1,651	1,388	1,345	1,942
368	1,650	1,372	1,343	1,952

Tabla 42. Resultados para placa plana con acanaladura refinado medio utilizando elementos triangulares

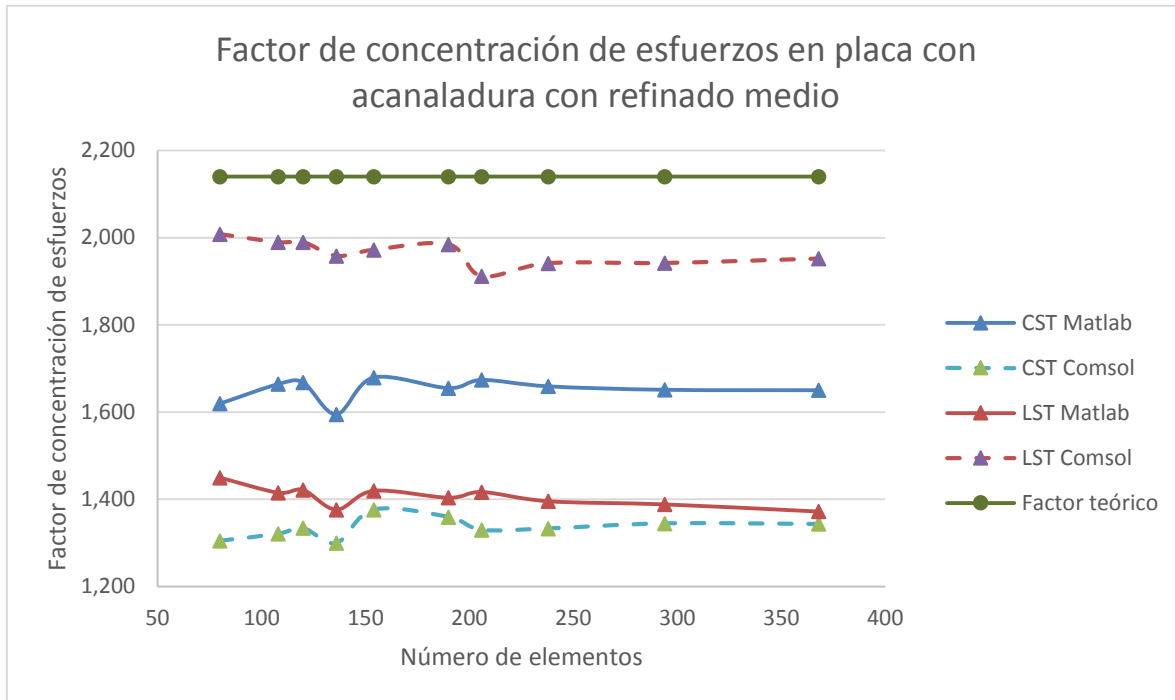


Figura 58. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla medio empleando elementos triangulares

En la Figura 58 se observa que a mayor cantidad de elementos los resultados tanto de Cmsol como de Matlab se acercan entre sí, además el factor teórico también mejora.

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Cmsol	$k_{Q_8}$ Cmsol
36	1,208	1,720	1,422	1,778
53	1,273	1,724	1,395	1,949
66	1,273	1,761	1,361	1,895
72	1,266	1,704	1,366	1,963
80	1,280	1,825	1,478	1,927
90	1,289	1,697	1,372	1,934
103	1,286	1,688	1,369	1,966
127	1,648	2,051	1,666	1,979
144	1,696	2,054	1,715	2,046
169	1,737	2,023	1,716	2,043

Tabla 43. Resultados para placa plana con acanaladura refinado medio utilizando elementos cuadriláteros

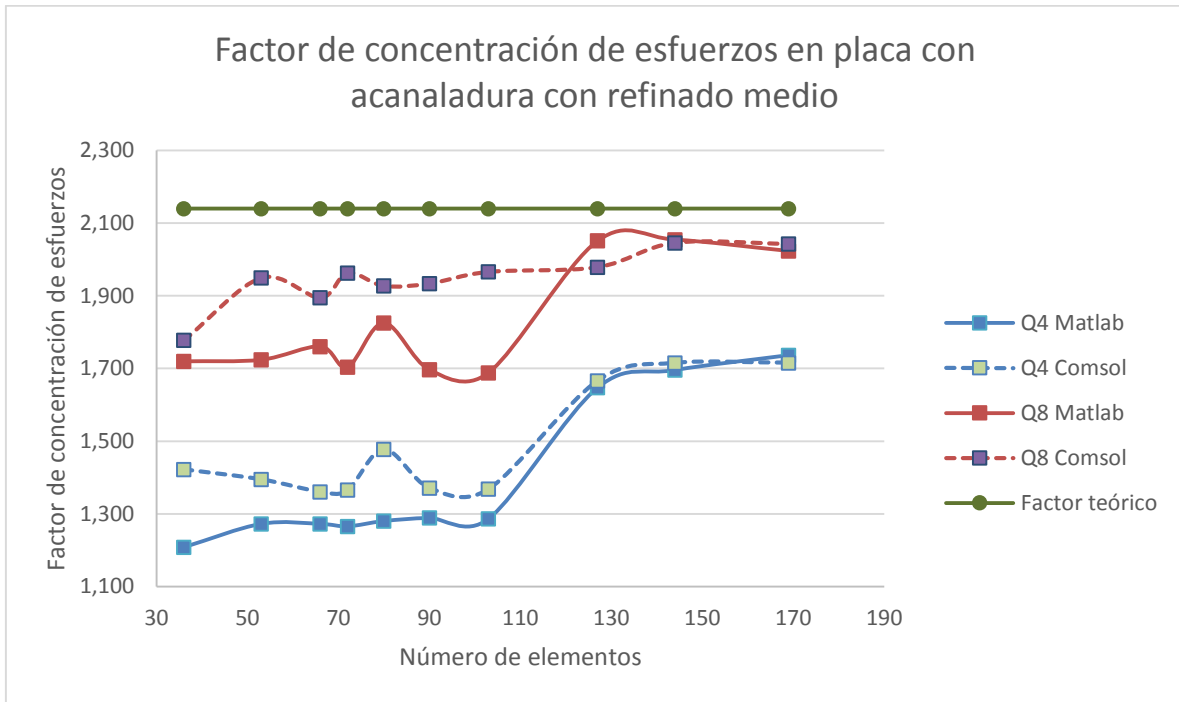


Figura 59. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla medio empleando elementos cuadriláteros

### 7.1.3 Refinado fino

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
1,832	1,832	1,616	1,467	2,030
1,876	1,876	1,640	1,512	2,063
1,877	1,877	1,608	1,463	1,975
1,908	1,908	1,629	1,493	1,969
1,899	1,899	1,635	1,502	1,997
1,908	1,908	1,641	1,506	1,995
1,907	1,907	1,623	1,517	1,982
2,092	2,092	1,811	1,711	2,055
2,181	2,181	1,937	1,753	2,057
2,257	2,257	2,012	1,759	2,062

Tabla 44. Resultados para placa plana con acanaladura refinado fino utilizando elementos triangulares

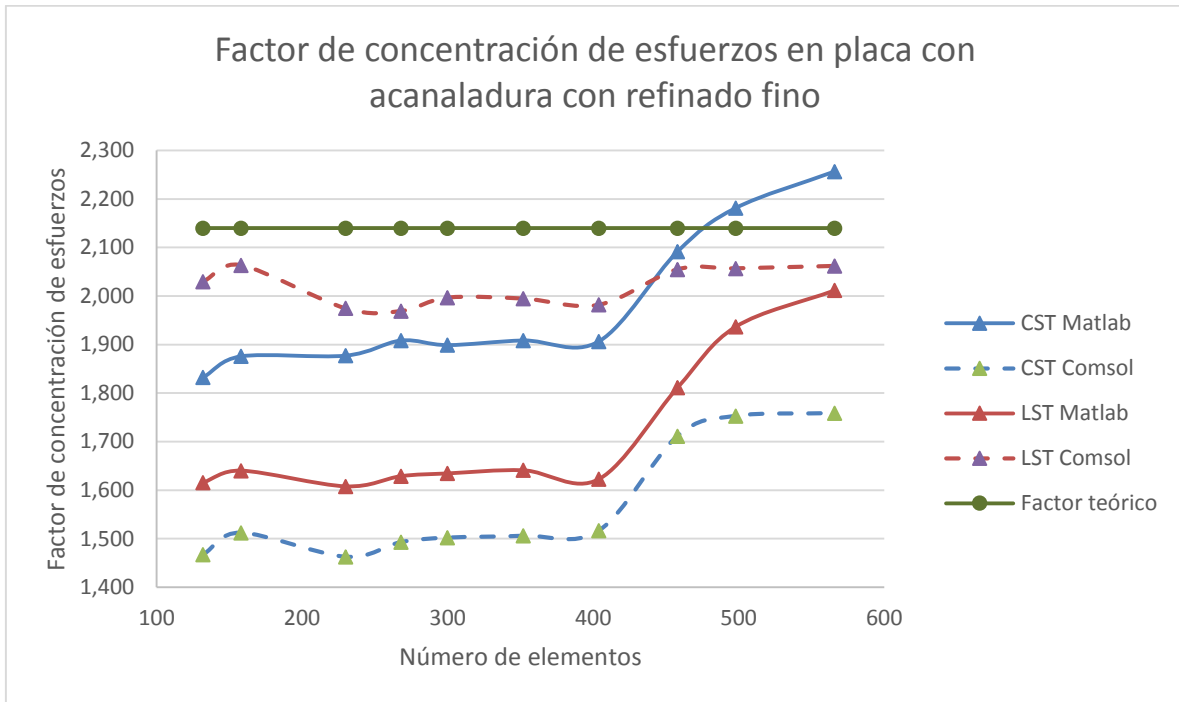


Figura 60. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla fino empleando elementos triangulares

En la gráfica de la Figura 60, se ve que a partir de los 400 elementos existe un escalón que genera un cambio que mejora la tendencia de todas las placas, lo que significa que a partir de esta cantidad de elementos, se produce convergencia.

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
72	1,622	1,971	1,620	1,980
82	1,681	1,986	1,684	2,034
96	1,681	1,984	1,679	2,040
105	1,810	1,994	1,692	2,027
116	1,607	2,104	1,740	2,024
128	1,864	2,099	1,795	2,044
151	1,932	2,190	1,787	2,038
171	1,978	2,162	1,819	2,045
187	1,991	2,228	1,806	2,039
202	2,028	2,205	1,851	2,017

Tabla 45. Resultados para placa plana con acanaladura refinado fino utilizando elementos cuadriláteros

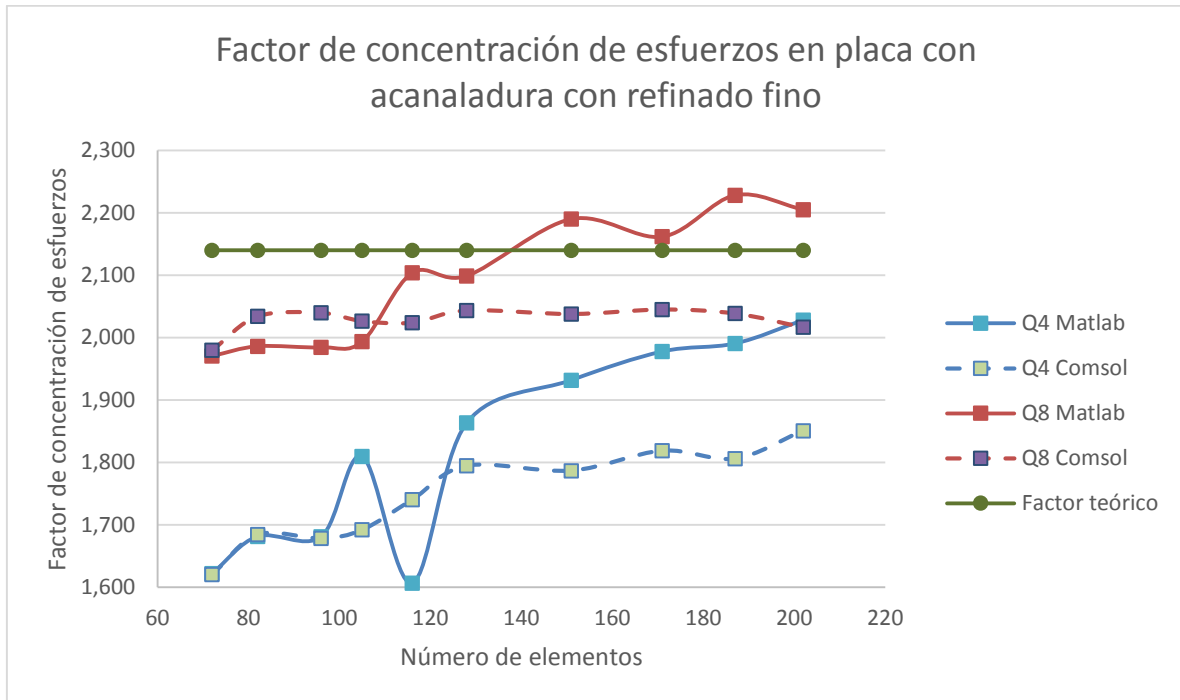


Figura 61. Factor  $k$  para placa con acanaladura, refinado de malla fino empleando elementos cuadriláteros

Para la Figura 61, las curvas tienen un comportamiento ascendente que se aproxima al factor teórico en la medida que aumenta la cantidad de elementos; la única curva que presenta estabilidad es la obtenida de las simulaciones en Comsol con Q8. En Q4 programado en Matlab se presenta un escalón a 130 elementos que aumenta la tendencia de  $k$  al punto de comportarse de forma similar al Q8 simulado en Comsol. Q8 simulado en Matlab obtiene los valores más aproximados al teórico, aunque su comportamiento es oscilatorio.

## 7.2 PLACA PLANA CON AGUJERO CENTRADO

### 7.2.1 Refinado uniforme

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
166	1,602	1,409	1,330	2,001
198	1,694	1,444	1,462	2,159
208	1,689	1,511	1,401	2,029
212	1,772	1,630	1,458	2,129
224	1,675	1,457	1,395	2,013
240	1,624	1,427	1,408	2,065
250	1,626	1,401	1,387	2,029
262	1,623	1,408	1,373	2,013
282	1,684	1,448	1,388	2,009
294	1,655	1,429	1,403	2,039

Tabla 46. Resultados para placa plana con agujero refinado uniforme utilizando elementos triangulares

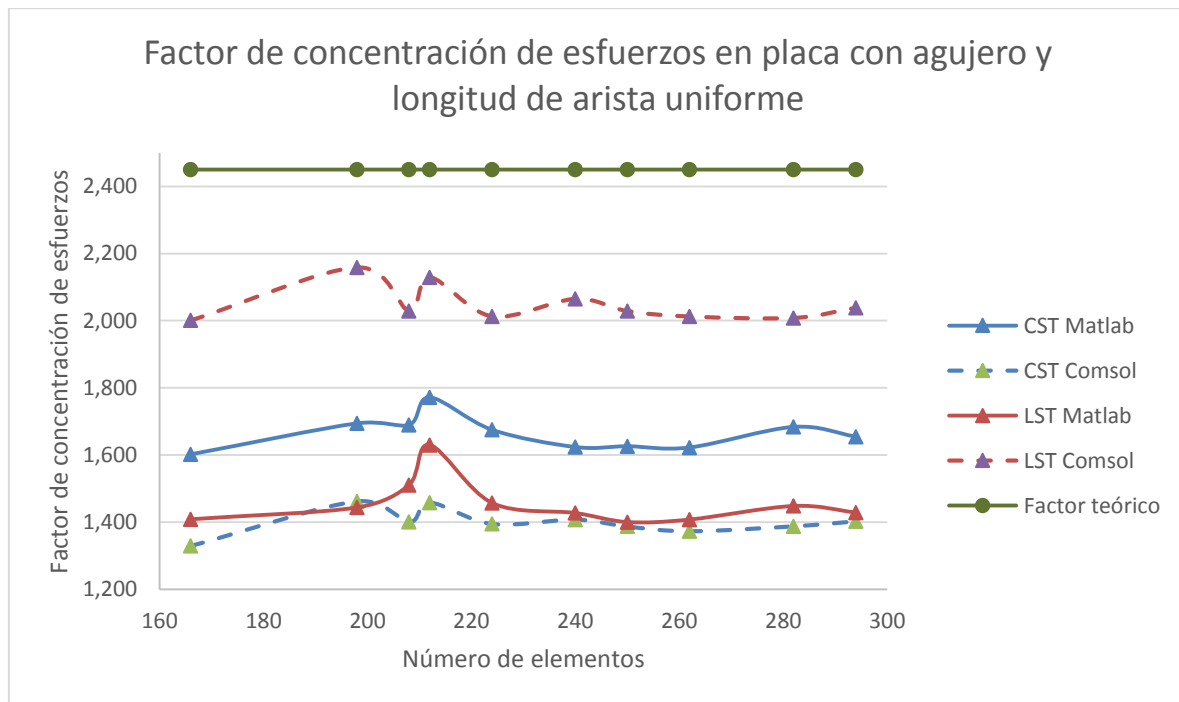


Figura 62. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla uniforme empleando elementos triangulares

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
48	1,312	1,767	1,484	1,996
61	1,251	1,725	1,559	2,046
74	1,251	1,743	1,498	1,995
88	1,388	1,843	1,549	2,087
110	1,456	1,783	1,563	2,085
123	1,394	1,785	1,588	2,090
151	1,366	1,765	1,602	2,151
172	1,353	1,752	1,576	2,134
200	1,557	1,827	1,649	2,179
230	1,489	1,806	1,550	2,133

Tabla 47. Resultados para placa plana con agujero refinado uniforme utilizando elementos cuadriláteros

En las Figura 62, 65 y 66, el comportamiento de las curvas es lineal (aproximadamente) para todas las simulaciones con todos los tipos de elementos, únicamente las curvas de la figura 66 presentan picos para segunda simulación.

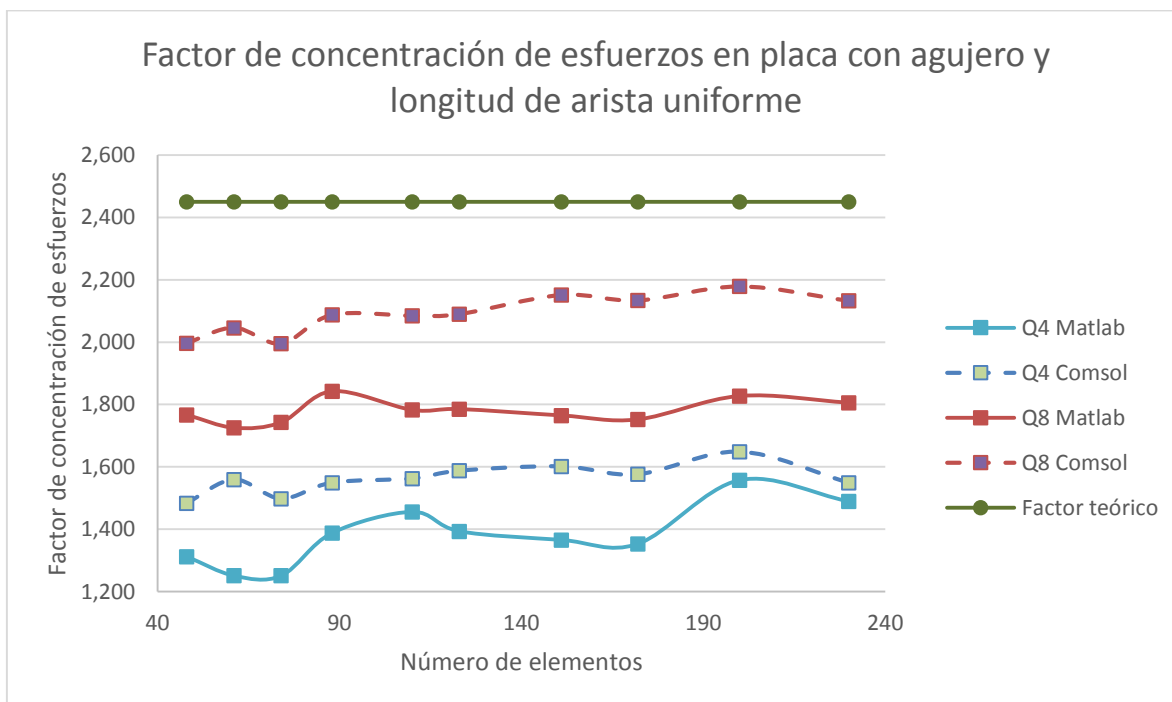


Figura 63. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla uniforme empleando elementos cuadriláteros

## 7.2.2 Refinado medio

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Cmsol	$k$ LST Cmsol
58	1,512	1,375	1,340	1,950
74	1,842	1,278	1,248	2,089
100	1,582	1,389	1,397	2,134
146	1,658	1,470	1,348	2,053
182	1,641	1,471	1,442	2,132
214	1,671	1,447	1,409	2,039
252	1,663	1,437	1,401	2,027
292	1,661	1,412	1,386	1,997
318	1,673	1,472	1,430	2,062
382	1,710	1,477	1,441	2,051

Tabla 48. Resultados para placa plana con agujero refinado medio utilizando elementos triangulares

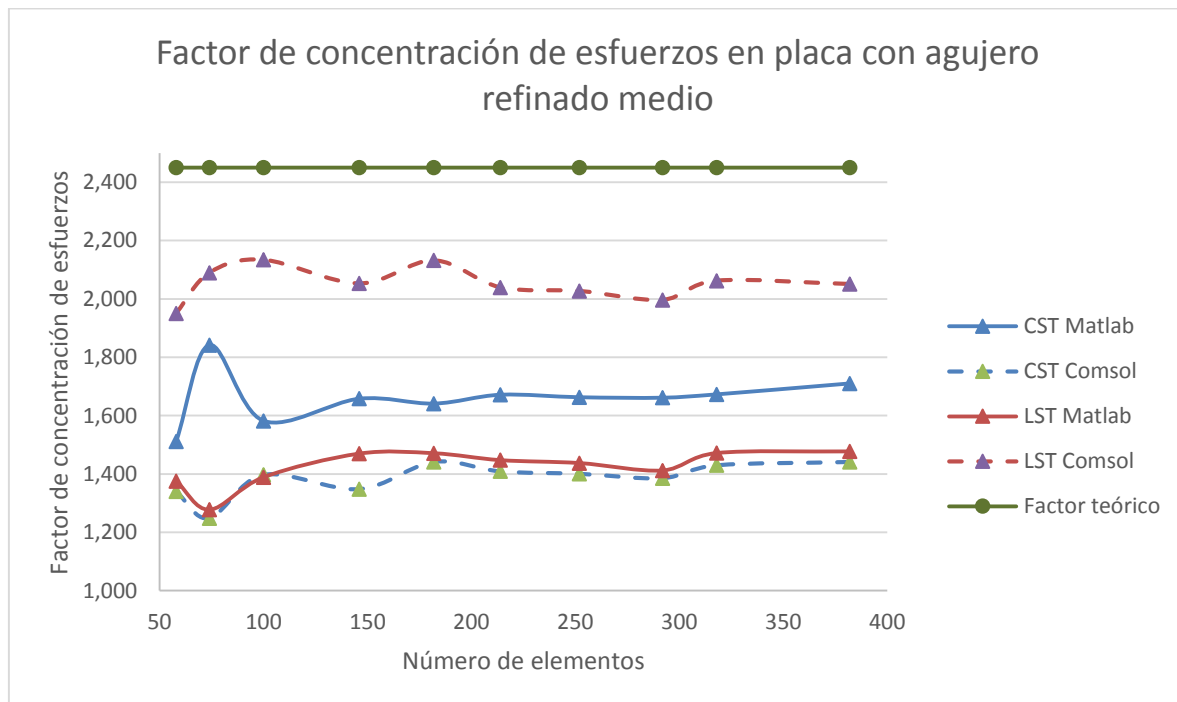


Figura 64. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla medio empleando elementos triangulares



Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
37	1,262	1,713	1,504	2,080
55	1,235	1,772	1,486	2,022
73	1,599	2,127	1,623	2,050
91	1,605	2,111	1,716	2,119
114	1,624	2,144	1,708	2,075
128	1,699	2,095	1,737	2,145
144	1,793	2,087	1,813	2,144
158	1,804	2,093	1,829	2,164
164	1,775	2,092	1,823	2,164
180	1,908	2,201	1,863	2,160

Tabla 49. Resultados para placa plana con agujero refinado medio utilizando elementos cuadriláteros

Para la Figura 65 se observa que entre los mismos tipos de elementos para las simulaciones de Comsol y Matlab, el comportamiento y los resultados son muy similares.

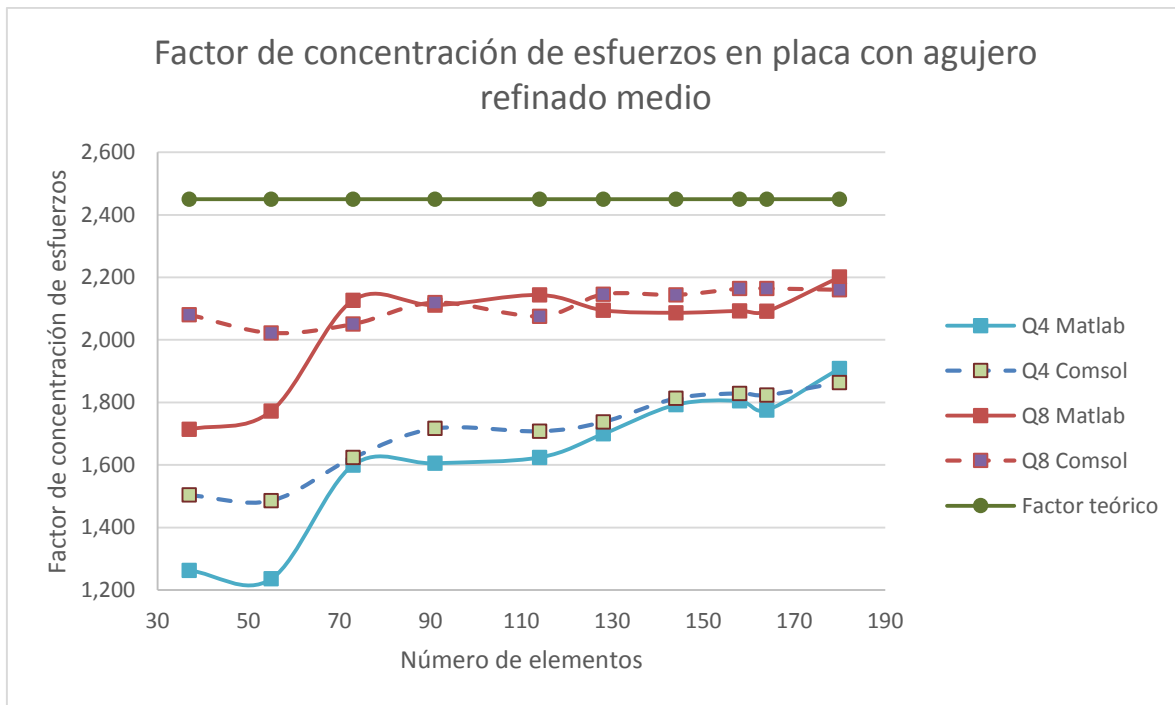


Figura 65. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla medio empleando elementos cuadriláteros

### 7.2.3 Refinado fino

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
118	1,715	1,555	1,392	1,974
146	1,658	1,470	1,348	2,053
188	1,626	1,419	1,387	2,072
224	1,981	1,812	1,630	2,165
268	1,985	1,718	1,625	2,161
300	2,015	1,756	1,626	2,122
338	1,958	1,693	1,582	2,122
360	1,926	1,670	1,541	2,093
422	1,998	1,731	1,674	2,133
502	2,000	1,727	1,618	2,091

Tabla 50. Resultados para placa plana con agujero refinado fino utilizando elementos triangulares

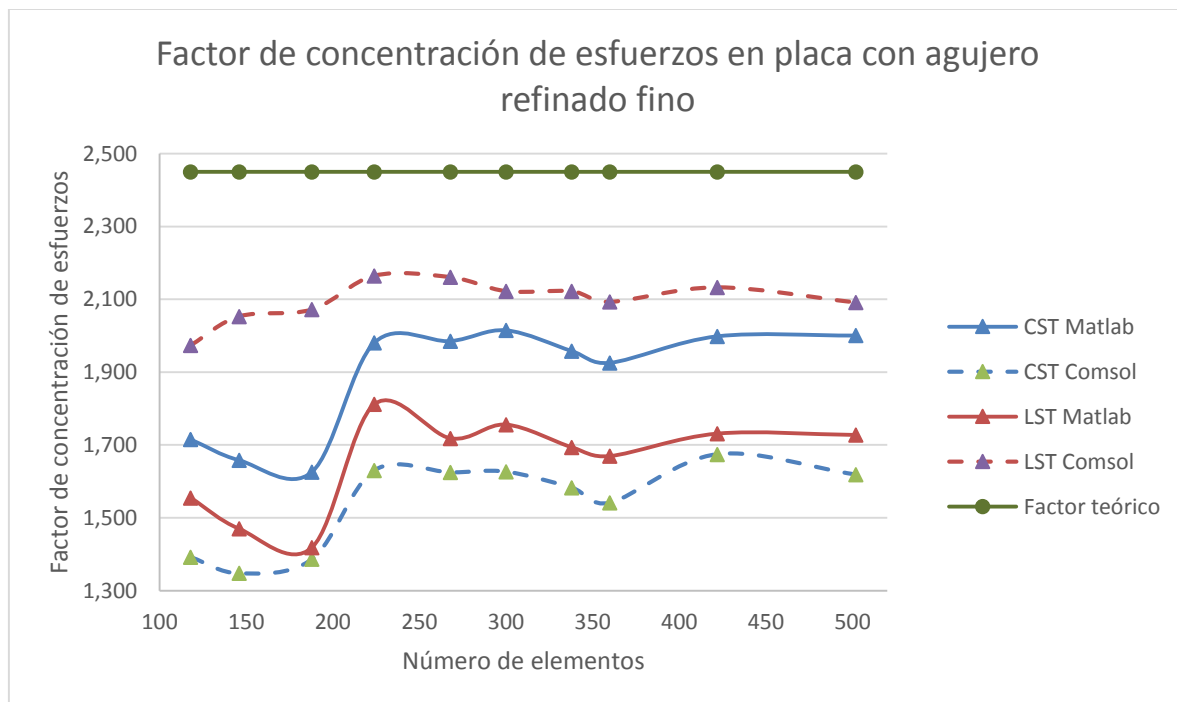


Figura 66. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla fino empleando elementos triangulares

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
58	1,717	2,037	1,757	2,134
81	1,670	2,084	1,706	2,111
110	1,919	2,200	1,856	2,164
132	1,968	2,200	1,893	2,181
150	1,963	2,210	1,882	2,166
173	1,994	2,241	1,889	2,178
187	2,090	2,288	1,950	2,187
199	2,083	2,305	1,947	2,188
212	2,101	2,307	1,960	2,180
223	2,104	2,335	1,935	2,172

Tabla 51. Resultados para placa plana con agujero refinado fino utilizando elementos cuadriláteros

El gráfico de la Figura 66 muestra un escalón que genera un cambio que mejora la tendencia de todas las placas a partir de los 200 elementos.

Las curvas construidas con los esfuerzos obtenidos de Comsol en la Figura 67 son estables a partir de 110 elementos, las curvas obtenidas por Matlab tienen tendencia lineal aproximándose al  $k$  teórico a medida que aumentan la cantidad de elementos.

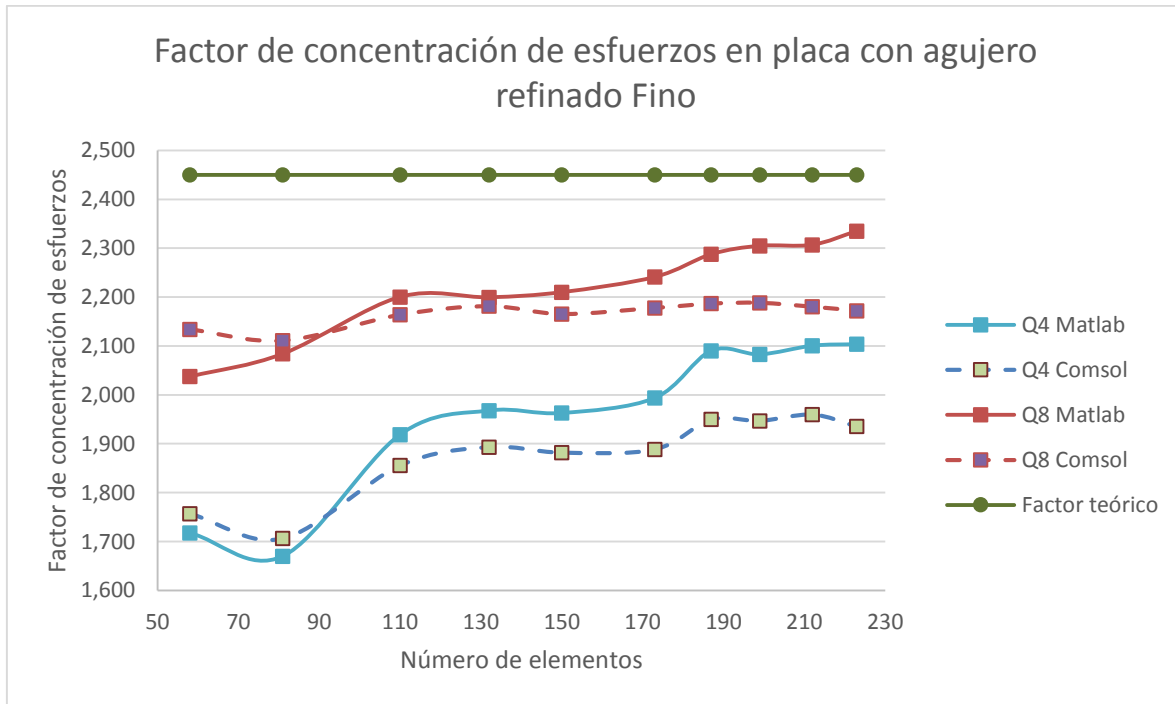


Figura 67. Factor  $k$  para placa con agujero, refinado de malla fino empleando elementos cuadriláteros

## 7.3 PLACA PLANA CON CAMBIO DE SECCIÓN CENTRADO

### 7.3.1 Refinado uniforme

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
161	1,312	1,349	1,144	1,622
177	1,273	1,337	1,140	1,639
190	1,598	1,322	1,141	1,646
199	1,595	1,322	1,142	1,647
211	1,593	1,323	1,112	1,586
219	1,596	1,322	1,106	1,589
233	1,582	1,314	1,112	1,603
251	1,580	1,313	1,118	1,583
266	1,580	1,312	1,109	1,591
289	1,467	1,295	1,104	1,556

Tabla 52. Resultados para placa plana con cambio de sección refinado uniforme con elementos triangulares

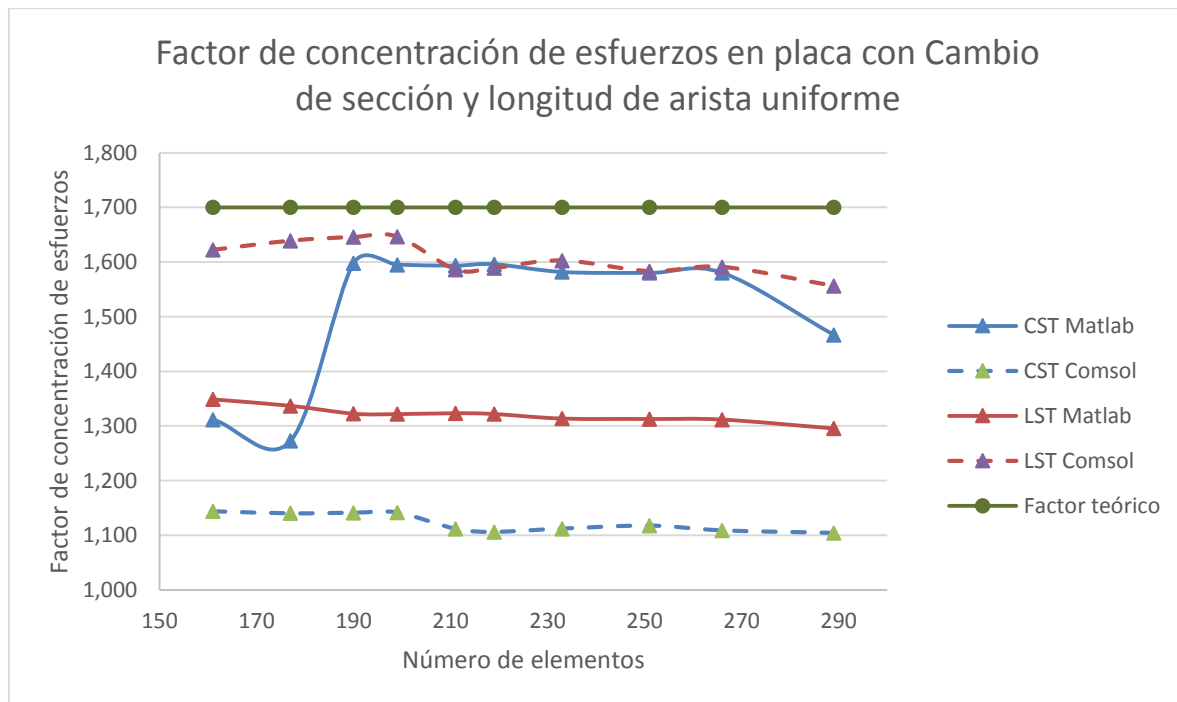


Figura 68. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla uniforme con elementos triangulares

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Comsol	$k_{Q_8}$ Comsol
30	1,094	1,480	1,143	1,405
41	1,163	1,421	1,123	1,444
51	1,135	1,436	1,131	1,450
65	1,424	1,321	1,133	1,511
77	1,449	1,320	1,110	1,480
85	1,488	1,348	1,115	1,518
97	1,502	1,321	1,125	1,512
110	1,488	1,348	1,124	1,502
121	1,474	1,299	1,121	1,496
148	1,377	1,351	1,147	1,558

Tabla 53. Resultados para placa plana con cambio de sección refinado uniforme con elementos cuadriláteros

Figura 68. Se observa un escalón en CST programado en Matlab que mejora los resultados hasta comportarse de forma similar al LST simulado en Comsol, siendo la única curva con comportamiento anormal, ya que las demás tienen tendencia lineal.

Figura 69. El mismo escalón observado para el elemento lineal triangular, se presenta para el elemento cuadrangular lineal simulado en Matlab y, en ambos casos los valores se acercan a los simulados por el elemento cuadrático de Comsol.

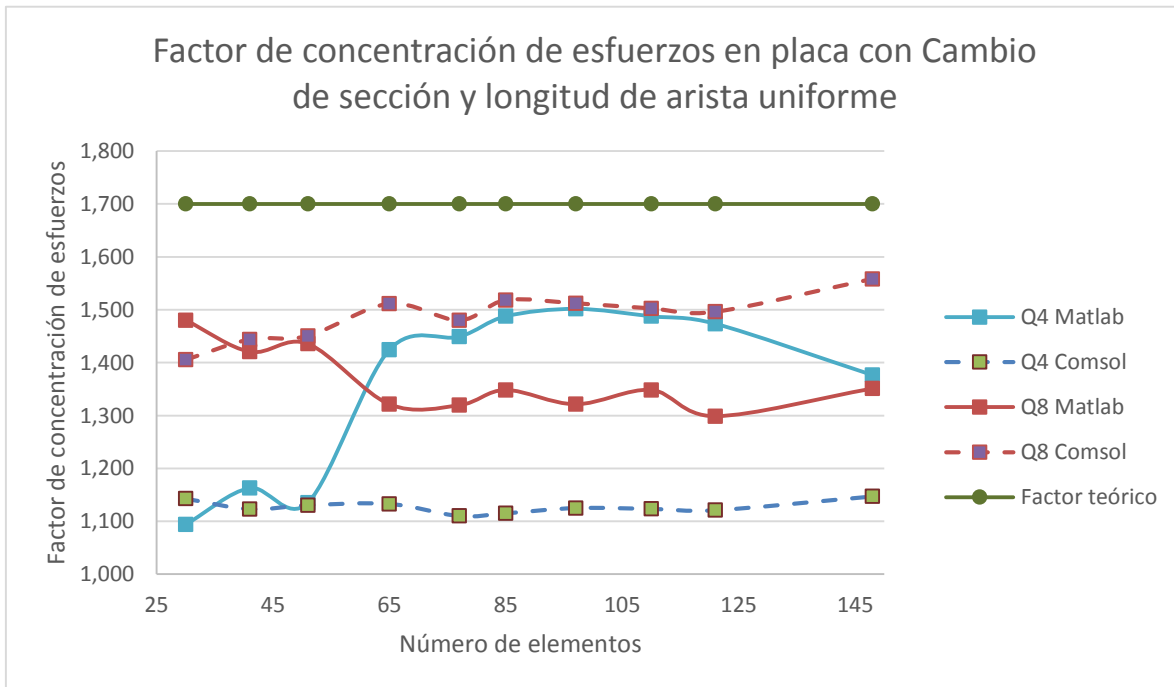


Figura 69. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla uniforme con elementos cuadriláteros

### 7.3.2 Refinado medio

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
62	1,293	1,176	1,139	1,643
70	1,300	1,185	1,136	1,595
81	1,260	1,158	1,104	1,615
117	1,323	1,250	1,140	1,652
142	1,335	1,374	1,161	1,657
162	1,347	1,372	1,176	1,652
190	1,331	1,340	1,162	1,651
230	1,352	1,511	1,158	1,667
271	1,371	1,467	1,199	1,618
313	1,356	1,465	1,162	1,636

Tabla 54. Resultados para placa plana con cambio de sección refinado medio con elementos triangulares

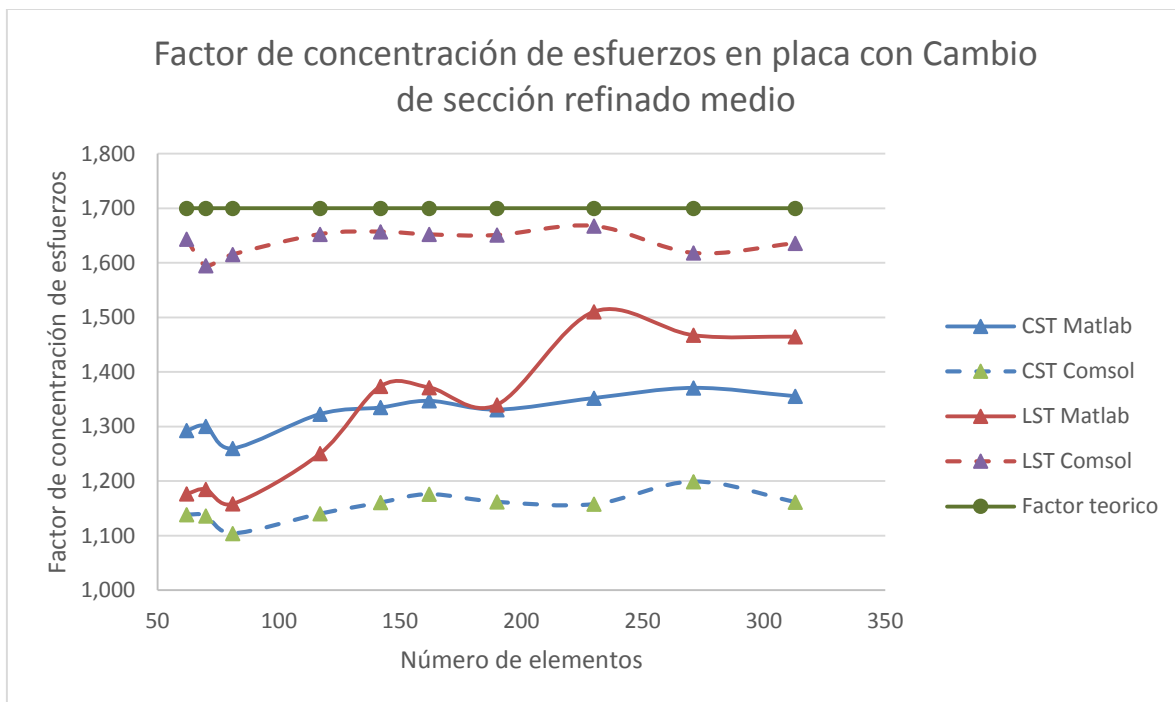


Figura 70. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla medio empleando elementos triangulares

Número elementos	$k_{Q_4}$ Matlab	$k_{Q_8}$ Matlab	$k_{Q_4}$ Cmsol	$k_{Q_8}$ Cmsol
54	1,292	1,544	1,267	1,595
70	1,302	1,547	1,259	1,574
89	1,400	1,692	1,292	1,581
104	1,382	1,666	1,325	1,559
116	1,426	1,677	1,360	1,621
139	1,460	1,659	1,396	1,622
152	1,402	1,659	1,349	1,613
166	1,434	1,668	1,360	1,619
182	1,432	1,672	1,349	1,613
213	1,474	1,642	1,387	1,614

Tabla 55. Resultados para placa plana con cambio de sección refinado medio con elementos cuadriláteros

Figura 71. Los elementos cuadráticos para los dos programas tienen un comportamiento lineal más aproximado al valor teórico, mientras los valores para los elementos lineales generan curvas con tendencia lineal ascendente a medida que aumenta la cantidad de nodos.

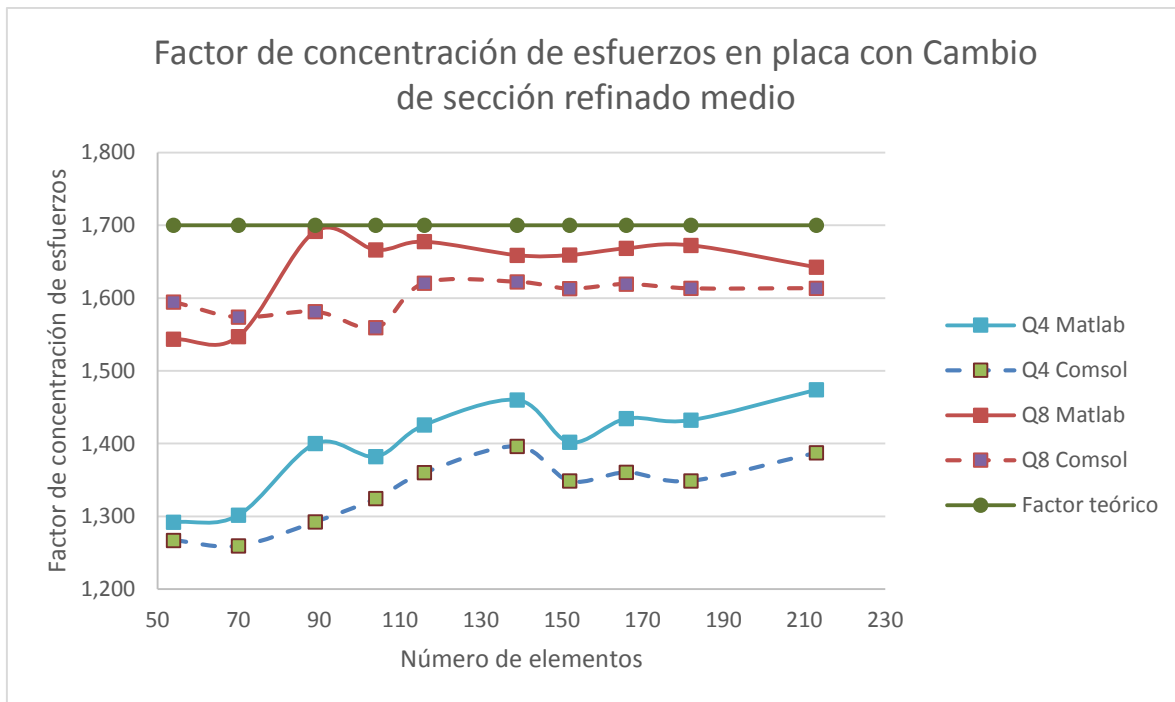


Figura 71. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla medio empleando elementos cuadriláteros

### 7.3.3 Refinado fino

Número elementos	$k$ CST Matlab	$k$ LST Matlab	$k$ CST Comsol	$k$ LST Comsol
159	1,413	1,340	1,175	1,561
193	1,429	1,340	1,193	1,563
231	1,566	1,430	1,325	1,606
261	1,519	1,397	1,270	1,583
299	1,660	1,400	1,282	1,586
333	1,619	1,419	1,315	1,599
363	1,594	1,422	1,319	1,606
385	1,666	1,351	1,228	1,605
427	1,460	1,350	1,256	1,612
477	1,658	1,538	1,319	1,609

Tabla 56. Resultados para placa plana con cambio de sección refinado fino utilizando elementos triangulares

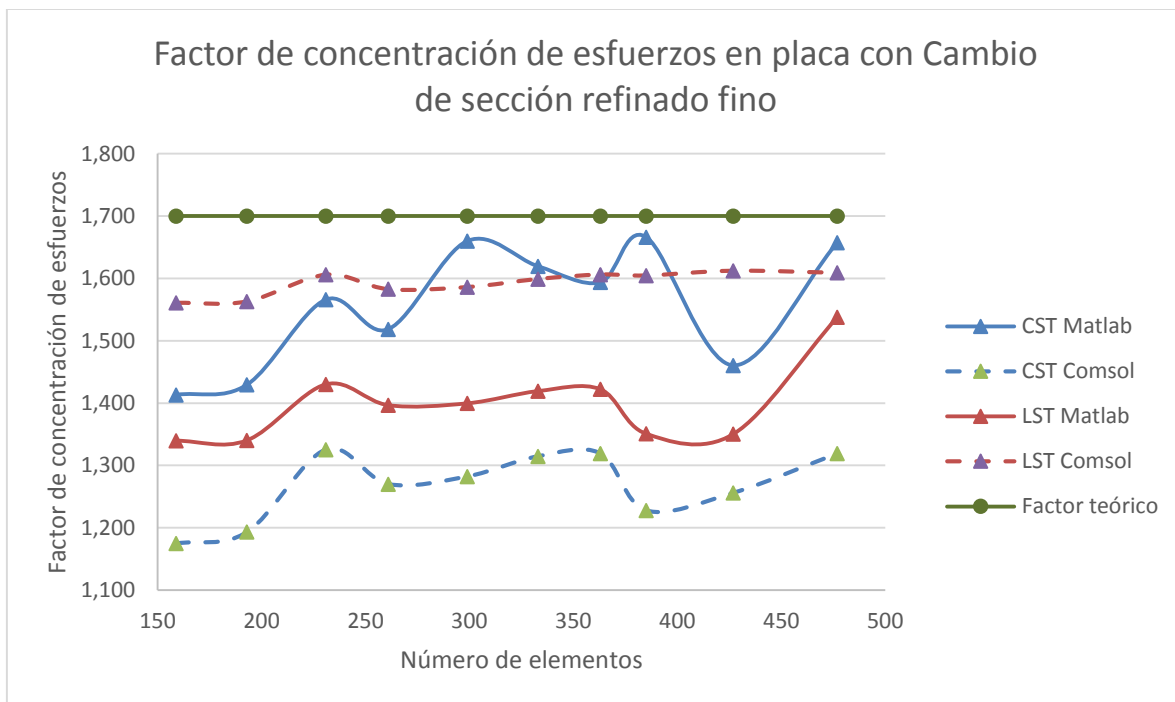


Figura 72. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla fino con elementos triangulares



Número elementos	$k_{Q4}$ Matlab	$k_{Q8}$ Matlab	$k_{Q4}$ Comsol	$k_{Q8}$ Comsol
78	1,413	1,759	1,339	1,587
96	1,436	1,753	1,331	1,584
115	1,510	1,704	1,382	1,501
128	1,563	1,626	1,456	1,656
139	1,476	1,687	1,385	1,630
158	1,502	1,714	1,379	1,621
172	1,478	1,713	1,386	1,629
190	1,507	1,752	1,401	1,642
201	1,511	1,722	1,408	1,644
232	1,511	1,716	1,410	1,644

Tabla 57. Resultados para placa plana con cambio de sección refinado fino utilizando elementos cuadriláteros

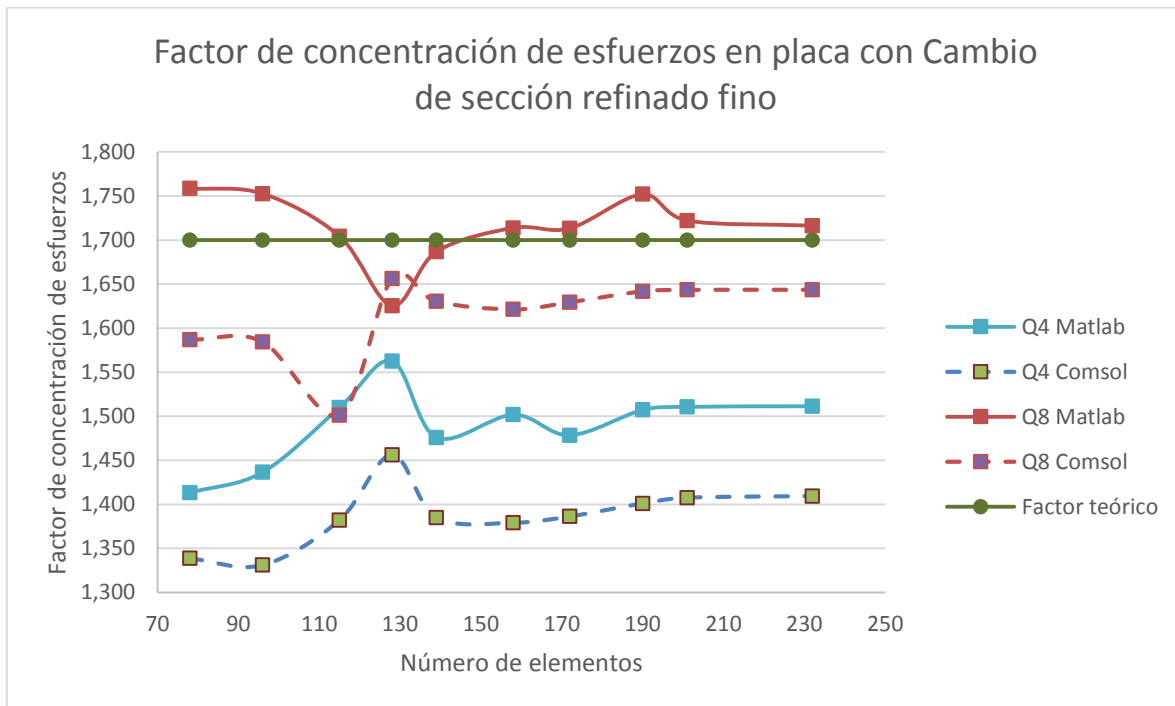


Figura 73. Factor  $k$  para placa con cambio de sección, refinado de malla fino con elementos cuadriláteros




Concentrador	Refinado	Curva más aproximada al factor teórico		Curva más lejana al factor teórico		% error	
						mín	máx
 $k_{teo} = 2,15$	Uniforme	1,7	CST Matlab	1,4	CST Comsol	20,9	34,9
	Medio	2	LST Comsol	1,4	CST Comsol	7,0	34,9
	Fino	2,05	LST Comsol	1,75	CST Comsol	4,7	18,6
 $k_{teo} = 2,45$	Uniforme	2,1	LST Comsol	1,4	CST Comsol	14,3	42,9
	Medio	2,1	LST Comsol	1,4	CST Comsol	14,3	42,9
	Fino	2,15	LST Comsol	1,65	CST Comsol	12,2	32,7
 $k_{teo} = 1,7$	Uniforme	1,6	LST Comsol	1,1	CST Comsol	5,9	35,3
	Medio	1,65	LST Comsol	1,2	CST Comsol	2,9	29,4
	Fino	1,65	LST Comsol	1,3	CST Comsol	2,9	23,5

Tabla 58. Análisis de resultados de las curvas para elementos triangulares

En las Tabla 58 y Tabla 59 se presenta un resumen del comportamiento de las pruebas con mayor cantidad de elementos y la diferencia con el factor teórico para elementos triangulares y cuadriláteros respectivamente.

Concentrador	Refinado	Curva más aproximada al factor teórico		Curva más lejana al factor teórico		% error	
						mín	máx
 $k_{teo} = 2,15$	Uniforme	1,9	Q <sub>8</sub> Comsol	1,3	Q <sub>4</sub> Matlab	11,6	39,5
	Medio	2,05	Q <sub>8</sub> Comsol	1,7	Q <sub>4</sub> Matlab	4,7	20,9
	Fino	2,05	Q <sub>8</sub> Comsol	1,8	Q <sub>4</sub> Comsol	4,7	16,3
 $k_{teo} = 2,45$	Uniforme	2,2	Q <sub>8</sub> Comsol	1,5	Q <sub>4</sub> Matlab	10,2	38,8
	Medio	2,2	Q <sub>8</sub> Comsol	1,8	Q <sub>4</sub> Matlab	10,2	26,5
	Fino	2,3	Q <sub>8</sub> Matlab	1,95	Q <sub>4</sub> Comsol	6,1	20,4
 $k_{teo} = 1,7$	Uniforme	1,6	Q <sub>8</sub> Matlab	1,15	Q <sub>4</sub> Comsol	5,9	32,4
	Medio	1,65	Q <sub>8</sub> Comsol	1,4	Q <sub>4</sub> Comsol	2,9	17,6
	Fino	1,72	Q <sub>8</sub> Comsol	1,4	Q <sub>4</sub> Comsol	1,2	17,6

Tabla 59. Análisis de resultados de las curvas para elementos cuadriláteros

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- El elemento CST programado en Matlab representa una buena aproximación al factor teórico, este elemento de discretización mejora los resultados al refinar el mallado y utilizar una mayor cantidad de elementos.
- El elemento CST programado en Matlab utilizando refinado fino y una cantidad amplia de elementos, presenta un comportamiento similar que el elemento LST programado en Matlab.
- El elemento cuadrático LST programado en Matlab presenta buenas aproximaciones cuando se realiza un refinado fino en las cercanías del concentrador y se trabaja con grandes cantidades de elementos.
- El elemento que más se aleja de los resultados teóricos en los elementos triangulares es CST simulado en Comsol, sin embargo, el proceso de refinamiento en las cercanías del concentrador y utilizar grandes cantidades de elementos mejora el comportamiento de éste.
- El elemento LST simulado en Comsol presenta los resultados más próximos al factor teórico para los elementos triangulares. Además, los resultados no se ven afectados al aumentar la cantidad de elementos (presenta estabilidad) y el grado de mejoramiento al realizar el proceso de refinado es mínimo.
- Los resultados obtenidos de la programación en Matlab (CST y LST) se encuentran intermedios entre los resultados obtenidos de la simulación de Comsol (CST y LST), lo cual valida los resultados simulados en Matlab.
- El elemento cuadrático triangular simulado en Comsol arroja resultados más aproximados al factor teórico que el lineal. Al contrario de lo que se encuentra en la programación en Matlab donde elemento lineal arroja mejores resultados que el cuadrático.

- Los elementos  $Q_4$  programado en Matlab y el  $Q_4$  simulado en Comsol mejoran los resultados al refinar el mallado y utilizar una mayor cantidad de elementos. Para el caso de  $Q_4$  programado en Matlab se hace más próximo hasta el punto de comportarse de forma similar al elemento  $Q_8$  simulado en Comsol.
- En el elemento  $Q_8$  simulado en Comsol no existe una variación significativa al realizar el proceso de refinado y es el elemento de aproximación que genera los resultados más cercanos con respecto al factor teórico.
- Como se estudió en el capítulo 5, los elementos serendípticos cuadráticos pueden generar diferentes curvas de esfuerzos siendo unas mejores para unos refinados o placas y otras para otras configuraciones. Se optó por escoger un solo tipo de resultados, aunque por conveniencia se pudo escoger la curva que mejor se asemejase al factor teórico según la configuración de la placa. Finalmente se decidió seleccionar la curva con más estabilidad independiente de la configuración de la placa y aproximación al resultado teórico.
- El elemento  $Q_8$  programado en Matlab (con integración reducida y esfuerzos en los nodos) presenta resultados inferiores a los simulados por el elemento cuadrático de Comsol en placas con arista de tamaño uniforme y refinado medio, sin embargo, para los refinados finos, la curva es más aproximada al factor teórico y mejor que la generada por Comsol.
- El comportamiento de los resultados obtenidos en Matlab es muy similar a los de Comsol, encontrándose ambas curvas de Matlab contenidas entre las de Comsol para elementos triangulares, lo cual valida el proceso realizado para el cálculo de los factores de concentración.
- Para placas donde el esfuerzo es constante en todo el dominio, alcanzar la convergencia requiere una menor cantidad de elementos que para geometrías más complicadas.
- Cuando se hace un refinamiento en las cercanía de los concentradores, las curvas a cierta cantidad de elementos presentan un cambio de tendencia

(que se puede representar como un escalón) que mejora el resultado haciéndolo más próximo al factor teórico.

- El error mínimo de los elementos cuadriláteros siempre es menor o igual al error mínimo de los elementos triangulares, por lo que se recomienda seleccionar elementos cuadriláteros.
- El error máximo tiene mucha variación entre elementos triangulares y cuadriláteros, el cual se puede mejorar partiendo de una cantidad base de elementos.

## RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS

En el transcurso del desarrollo del proyecto, surgieron diversas interrogantes sobre conceptos, extensión de temas, posibles mejoras en resultados o ampliación a otras ramas de la ingeniería que no abarcaban los objetivos del presente trabajo, y que constituyen un interés especial en el área de los elementos finitos, específicamente en la mecánica computacional.

Se propone como estudio el desarrollo de algoritmos de elementos finitos basados en Matlab para diversas áreas de la ingeniería, para aprovechar un entorno especializado en operaciones de matrices que simplifica y optimiza la memoria de cálculo y, por ende, es ideal para el método de elementos finitos.

La generación de mallados es el primer paso para abordar un problema discretizado. Actualmente los pocos programas que existen se consideran “cajas negras” debido a que su funcionamiento no es conocido por el usuario, y éste debe confiar en que la malla final cumple con todas las condiciones para una buena simulación del dominio. Para Matlab existen librerías de mallados triangulares que cumplen con las condiciones básicas, sin embargo, obtener un mallado cuadrilátero que represente de forma correcta la geometría, es una labor que da lugar a futuros trabajos investigativos.

La selección del tipo de elemento de análisis del mallado incide directamente en la solución final del problema discreto, donde elementos de orden superior obtienen una mejor aproximación a la respuesta real que los elementos lineales; por este motivo se pone en consideración el estudio de problemas de elasticidad para elementos cúbicos, cuárticos y quinticos.

También se puede profundizar en la integración de la matriz de rigidez, haciendo comparativos entre elementos integrados completamente y elementos con integración reducida hasta la mínima cantidad de puntos de Gauss permitidos; inclusive, elementos integrados selectivamente.

Configuraciones de mallas con tipos de elementos combinados (triangulares con cuadráticos) prácticamente son inexistentes, ya que son muy escasos los programas computacionales que lo permiten hacer. El desarrollo de este tipo de mallados, con elementos de transición y funciones de forma especiales para estos nodos exige un estudio detallado, donde posiblemente la convergencia a la solución exacta se dé para muy pocos elementos (o grados de libertad) con errores muy pequeños.

## CAPÍTULO 9

### BIBLIOGRAFÍA

[1] PILKEY, Walter D., Deborah F. "Peterson's Stress Concentration Factors". 3ª Ed. Wiley Inc, 2008.

[2] NORTON, Robert L. "Diseño de máquinas un enfoque integrado". 4ª Ed. Prentice hall, México 2011.

[3] HIBBELER Russell C, "MECÁNICA DE MATERIALES". 8ª Ed. Pearson Education, Mexico, 2011.

[4] GERE James M., GOODNO Barry J., "Mecánica de materiales". Séptima edición. Cengage Learning 2009.

[5] BEDFORD Anthony, LIECHTI Kenneth M. "Mecánica de materiales". Primera edición. Prentice Hall 2002

[6] FITZGERALD Robert W. "Mecánica de materiales". Edición revisada. Alfaomega. 1996.

[7] Hughes, Thomas "The Finite Element Method". Prentice Hall, United Stated.1987.

[8] Levy, S. "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings". Journal of aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 7, pp449.454, July 1953.

[9] Turner, Clough, Martin, "Stiffness and deflection analysis of complex structures". Journal of Aeronautical Sciences, 23, 805-824. 1956.

[10] Zienkiewicz y cheung "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics". Mc Graw-Hill, London. 1967.



[11] DARYL Logan, "A first course in the Finit Element Method". Fifth edition. Cengage learning 2012.

[12] MATLAB OVERVIEW. The MathWorks, Inc. Fecha de revisión: 7 de Febrero de 2015. Disponibilidad web: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>>.

[13] COMSOL Multiphysics, "the platform for physics-based modeling and simulation". COMSOL Inc. Fecha de revisión: 7 de Febrero de 2015. Disponibilidad web: <<http://www.comsol.com/comsol-multiphysics>>.

[14] MENDOZA Adriana, "introducción al uso del software Comsol Multiphysics". Universidad Veracruzana. 2013.

[15] Comsol Multiphysics, "Introduction to Comsol Multiphysics". Versión 4.4, 2013.

[16] BEER Ferdinand, JOHNSTON Russell, "Mecánica de materiales". Quinta edición. McGraw-Hill México 2009.

[17] GONZÁLEZ, Harry, (11/06/2011). "Nociones de resistencia de materiales". Disponible en: <http://arquitecturabuque.blogspot.com/2011/07/esfuerzos-que-esta-sometida-la.html> (28/05/2012).

[18] VANEGAS, Libardo, (19/11/2012). "Carga estática simple". Disponible en: <http://blog.utp.edu.co/lvanegas/files/2011/08/Cap3.pdf>, (29/05/2013).

[19] CELIGÜETA Juan T, "Método de los elementos finitos para análisis estructural". Cuarta edición. Tecnum 2011.

[20] KATTAN Peter I., "Matlab guide to finite elements an interactive approach". segunda edición, Springer 2008.

[21] OLUWOLE Oluleke, "Finite Element Modeling for Materials Engineers Using MATLAB". Springer, Nigeria 2011.

[22] FERREIRA A.J.M. "Matlab Codes for Finite Element Analysis". Springer, Portugal 2011.

[23] CHAVEZ Eduardo W. V., MINGUEZ Roberto. "Mecánica computacional en la ingeniería con aplicaciones en Matlab". Universidad de Castilla-la Mancha, España 2010.

- [24] ZIENKIEWWICZ O.C., TAYLOR R.L. “El método de los elementos finitos formulación básica y problemas lineales”. Volumen 1, Cuarta edición, Mc Graw-Hill, España. 1994.
- [25] ZARATE F., OÑATE E. “MAT-FEM Learning finite element with Matlab and GiD”. CIMNE 2006.
- [26] GABALDON F., GOICOLEA J.L. “Problemas de mecánica (Sólido rígido)”. Servicio de publicaciones de la ETSI de Caminos, C. y P. Madrid.
- [27] RILEY William F., STURGES Leroy D., MORRIES Don H. “Mecánica de materiales”. Limusa Wiley Mexico, 2001.
- [28] KRATZIG Wilfried B.,ZHANG Jian-Wu.1994. A simple four-node quadrilateral finite element for plates. *Journal of computational and applied mathematics*. Vol 50. 361-373.
- [29] TENCHEV Rosen T. 1998. A study of accuracy of some FEM stress recovery schemes for 2D stress concentration problems. *Finite Elements in analysis and design*. Vol 29. 105-119.
- [30] COLBERG O Poul .1999. Evaluation of triangular plate elements in rigid-plastic finite element analysis of reinforced concrete. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol 179. 1-17.
- [31] KIKUCHI Fumio, OKABE Masayuki, FUJIO Hidehiro. 1998. Modification of the 8-node serendipity element. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. . Vol 179. 91-109.
- [32] SADEK Edward A. 1998. Some serendipity finite elements for the analysis of laminated plates. *Computer & structures*. Vol 69. 37-51.