UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

EXPERIENCIA TOPOLÓGICA EN GRADOS CUARTO, QUINTO Y SEXTO DE LA EDUCACION BASICA

ANDRÉS TRUJILLO ARIAS
DIANA MARÍA OSORIO CARDONA

PEREIRA, de 2013

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TÍTULO

EXPERIENCIA TOPOLÓGICA EN GRADOS CUARTO, QUINTO Y SEXTO DE LA EDUCACION BASICA

Trabajo presentado para optar al título de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

ANDRÉS TRUJILLO ARIAS
DIANA MARÍA OSORIO CARDONA

DIRECTOR DEL TRABAJO:
JULIAN GUZMÁN BAHENA

PEREIRA, de 2013

PEREIRA, DE 2013

NOTA DE ACEPTACION

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL DIRECTOR

PEREIRA, DE 2013

Contenido

1. Introducción

Al hablar de “la Educación Matemática” que diariamente reciben nuestros estudiantes pasamos por alto la importancia que tiene para su formación el conocimiento de la Topología; dar a conocer al estudiante un concepto topológico sin duda alguna resulta “tenebroso”, aún más cuando se trata de un teorema o de un problema que tomó alrededor de cientos de años para lograr darle solución e incluso para demostrar que no es posible su solución. Sin duda alguna, cuando se trata de la enseñanza de las matemáticas en los niños y pre-adolescentes, es inevitable no observar en su comportamiento diversas nociones topológicas como pintar, colorear, unir, dibujar, estirar, encoger, etc, todas las anteriores nociones importantísimas que forman parte del diario vivir de los estudiantes. Vemos diariamente maestros en las escuelas enseñando a los estudiantes “empíricamente” nociones bellísimas de la Topología; vemos a los estudiantes coloreando un mapa o recortando figuras en las revistas y vemos como estas actividades en los estudiantes causan gran furor, aun así, con este gran acercamiento que los estudiantes tienen a diario con una rama tan abstracta de las matemáticas (la Topología), no se logra encontrar una manera de vincular estas actividades **tan matemáticas** y tan innatas de los niños y pre-adolescentes con su vida cotidiana y menos con la estructura matemática que estas mismas poseen.

En la actualidad nos encontramos escasos con metodologías de enseñanza y mucho más en el área de las matemáticas, por tanto en virtud de que los niños en sus primeras etapas “gran etapa escolar" (la escuela y el colegio) se caracterizan por su gran actividad física, por la permanente interacción que establecen con su medio, por la constante investigación que emerge de su intuición infantil donde el docente desde los primeros años tiene bajo su responsabilidad la selección y desarrollo de itinerarios y actividades escolares que favorezcan a los estudiantes su conocimiento matemático, es esto lo que nos da la autoridad de recrear las matemáticas con nuevos métodos de enseñanza, en este caso con un enfoque constructivismo socio empírico matemático para que los estudiantes desde edades tempranas tengan la posibilidad de contemplar la grandeza de las matemáticas inmersas en su diario vivir.

Este trabajo consistió en realizar algunas actividades topológicas con los niños de los grados 4°, 5° Y 6° de la escuela LA BOLIVARIANA y el colegio Camilo Torres de Manizales, con el fin de evidenciar en los estudiantes como las matemáticas se desprenden de todo su rigor y logicismo para adaptarse a un entorno más social, todo con el gran fin de despertar actitudes matemáticas en los niños que se desprendieran no desde un ámbito riguroso sino desde un ámbito natural y muy conocido por ellos: la experimentación y comprobación. Cabe nombrar una de las actividades que los estudiantes realizaron: la cinta de Möbius. Actividad fantástica que causo en los estudiantes gran impacto animándolos a indagar por propia cuenta aspectos más relevantes de las matemáticas tales como investigar que es un teorema, Cómo surgen estos problemas topológicos y cómo se evidencian las matemáticas en sus vidas.

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Despertar el espíritu intuitivo y heurístico en los estudiantes a partir de problemas interesantes de la topología en los grados cuarto, quinto y sexto de la educación básica.

2.2. Objetivos Específicos

- Mostrar la topología como ayuda para facilitar la motivación y el interés de los estudiantes en los grados 4°, 5° y 6° de la educación básica primaria a la hora de afrontar sus clases de Matemáticas.

- Valorar la importancia de trabajar en equipo para la discusión de las ideas, para la resolución de los problemas y para la realización de las construcciones, con actitud de cooperación, tolerancia y solidaridad.

- Utilizar la Historia de las Matemáticas como herramienta de apoyo para las clases de Matemáticas.

- Evaluar los resultados obtenidos teniendo en cuenta las estrategias metodológicas aplicadas para dejar evidencia sobre los resultados obtenidos.

- Examinar algunos experiencias topológicas heurísticas como: Cinta de Mobius, Trabajando con Poliedros, Botella de Klein, Transformaciones Topológicas, entre otros.

3. Marco Conceptual

Esta sección consta de los siguientes apartes: ¿Qué es la topología? Ya que conociendo el significado de topología, de esta manera podremos entender de una forma más sencilla cada una de la actividades antes mencionadas, potencializando las habilidades de tipo topológico. Después, un breve recorrido histórico por cada experiencia topológica como: los poliedros, la cinta de mobius, la botella de Klein, los puentes de Königsberg, la teoría de los nudos y el teorema de los cuatro colores de igual forma se explicará cada uno de ellas para así dar un mejor entendimiento al proceso de esta investigación.

3.1 ¿Qué es topología?

La Topología es la disciplina Matemática que estudia las propiedades en los espacios topológicos y las funciones continuas. Se interesa por conceptos como proximidad, tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, compara objetos y los clasifica entre múltiples atributos de los que destacan conectividad, compacidad, metricidad, etcétera. Son relevantes las propiedades de los objetos que permanecen invariables bajo un estado de deformación constante[1].

3.1.1 La Topología es la geometría de la goma elástica.

Con una goma elástica (de pelo) podemos formar un triángulo, un cuadrado, una circunferencia o una elipse, la estiramos, la encojemos o la doblamos. Desde el punto de vista topológico, se trata del mismo objeto, una goma que tiene la forma de una circunferencia. En Topología se permite doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., siempre que los objetos no se rompan ni se separen las uniones iniciales. Ejemplo: un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero

[1] Obtenido de: http://www.topologia.org/historia_de_la_topologia.htm, Historia de la topología, (Amsterdam, 1999), ver también http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/HISTORIADELATOPOLOGIA.pdf.

una circunferencia no es lo mismo que un segmento ya que habría que cortarla en algún punto.

3.1.2 Los puzzles de alambre como estructuras topológicas métricas

En la clave de solución que identifica a cualquier tipo de puzzle, se encuentra precisamente la vinculación entre ellos y el conocimiento matemático. Dado que los puzzles de alambre pueden ser definidos como "estructuras topológico–métricas" (Flores 2002) la posibilidad de resolver un puzzle requiere que se cumplan determinadas condiciones en su estructura que remiten a problemas estudiados por la topología y la geometría (Montoya y Gómez, 2002)[2].

Como ya escribimos, la topología es la rama de la matemática que estudia las propiedades del espacio que permanecen inalteradas cuando en éste se producen determinadas alteraciones llamadas transformaciones topológicas. Del conjunto de transformaciones topológicas posibles, los estiramientos, contracciones o torceduras reciben el nombre de transformaciones continuas, dado que no se contemplan cortes ni auto-intersecciones. El juego con los puzzles de alambre no admite estas transformaciones, pero tomarnos momentáneamente la libertad de imaginarlos flexibles nos ayudará a analizar su estructura.

La impresión de que estos puzzles de alambre son estructuras cerradas sólo se debe a la rigidez del material con los que están construidos. Para ver esto con más claridad, tomemos como ejemplo un puzzle cualquiera e imaginemos por un momento que los alambres son elásticos (como se ilustra en la figura). Esto permitiría separar sus partes mediante transformaciones continuas y comprobar que se trata de una estructura compuesta por piezas individuales e independientes, que no forman un encadenamiento. Podríamos decir, en cierto sentido, que la pieza problema, en la posición inicial del juego, ya se encuentra separada de la estructura soporte, puesto que el estado inicial del puzzle de la

[2] Obtenido de: http://www.urg.es/~pflores/texto/aRTICULOS/Propuestas/Articulo_Gaceta_Montoya_flores.pdf: recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, por Carlos Montoya y Pablo Flores.

Figura es topológicamente equivalente al estado final, al cual se llegó sin necesidad de cortar ningún segmento. Esto representa una condición topológica necesaria que deben cumplir los puzzles para poder ser resueltos, que no siempre suele reconocerse a simple vista, aunque enunciada parezca trivial.

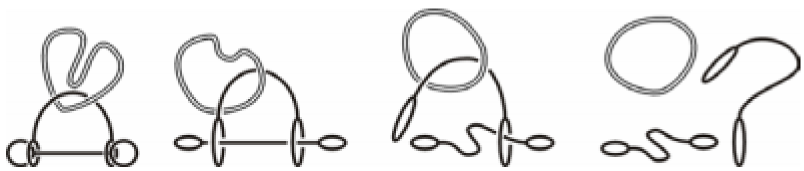


Figura 1. Descomposición de un puzzle de alambre mediante transformaciones continúas.

Un detenimiento topológico acerca de los puzzles no explica todo lo que encierran los puzzles de alambre, pues sus materiales no admiten las deformaciones que son el objeto de la geometría elástica. Es en este punto donde nos encontramos con ciertas condiciones que imponen al juego aspectos geométricos.

La geometría es la rama de la matemática que se encarga del estudio de las formas y sus medidas. En este caso, las piezas de los puzzles de alambre tienen formas y medidas determinadas, que deben guardar una cierta relación entre ellas, para cumplir con una doble y paradójica función: determinar el grado de dificultad del puzzle, a la vez que hacer posible su resolución.

Planteadas las condiciones topológicas y geométricas para la construcción y solución de los puzzles de alambre, es posible combinarlas imaginativamente para obtener nuevos modelos de puzzles o explorar posibles soluciones a puzzles complejos a partir de otros más sencillos.

Mientras se mantengan las relaciones geométricas entre el sector clave de la pieza problema y el lugar crítico de la estructura soporte (las condiciones geométricas) un puzzle podrá tomar diferentes formas mediante transformaciones continuas sin que se altere su clave de solución (como se observa en la figura).

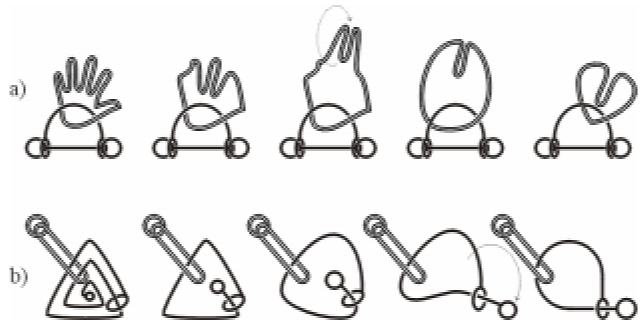


Figura 2. Comparación y obtención de nuevos puzzles mediante transformaciones topológicas continuas.

a. **Transformaciones continúas de la anilla problema conservando las condiciones geométricas del sector clave.**
b. **Transformaciones continúas de la estructura base conservando las condiciones geométricas del lugar crítico.**

3.2. Los puentes de Königsberg

El término topología lo acuña por primera vez Johan Bennedict Listing, en 1836 en una carta a su antiguo profesor Müller, y posteriormente en su libro Vorstudien zur Topologie (estudios previos a la topología), publicado en 1847. Anteriormente se la denominaba analysis situs.

Leibniz fue el primero en utilizar el término, "analysis situs", que luego se utilizaría en el siglo XIX para referirse a lo que se conoce como topología. Sin embargo, el origen de la topología como disciplina científica lo inaugura de modo lúdico la resolución por parte de Euler del problema de los Puentes de Königsberg, en 1735. Ciertamente la resolución de Euler del problema utiliza un planteamiento topológico.

Fue el matemático y físico Leonard Euler (1707-1783), que entonces trabajaba en la corte rusa, quien dio presentación formal a algunos aspectos de la topología tal como hoy se la concibe.

Esto fue realizado en un famoso estudio sobre los puentes de Königsberg, ciudad alemana-rusa (también llamada Kaliningrado) en cuya universidad trabajó, más o menos contemporáneo, el filósofo alemán Emmanuel Kant (1721-1804).

La ciudad de Kaliningrado se encuentra a orillas del Mar Báltico, en territorio Ruso y a unos 50 kilómetros de la frontera con Polonia. En el pasado perteneció a Prusia y tenía el nombre de Königsberg. En Kaliningrado/Königsberg se juntan dos ríos, formando una isla en su confluencia. Siete puentes unían (ya no, pues la ciudad fue parcialmente destruida durante la segunda Guerra Mundial) las diferentes partes de la ciudad.

Se dice que sus habitantes intentaron durante años encontrar una ruta por la que cruzando una sola vez cada puente se pudiese regresar al punto de partida. Nunca lo encontraron. La cuestión es ¿existe tal camino? Alguno dirá: ¡eso es posible, sin duda!, otros que: ¡no, eso es imposible! Pero… ¿cómo demostrar quién tiene razón?

El problema, formulado originalmente de manera informal, consistía en responder a la siguiente inquietud:

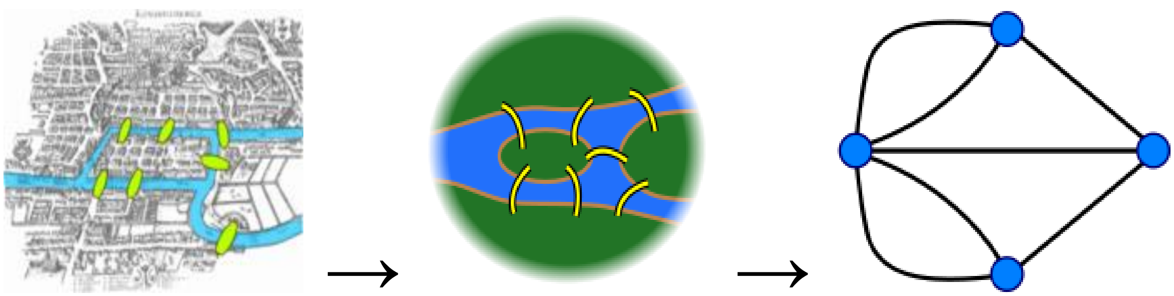
> "*En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes que cruzan los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes una sola vez*"[3].

La respuesta es negativa, es decir, no existe una ruta con estas características. El problema puede resolverse aplicando un método de fuerza bruta, lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Euler en 1736 en su publicación *«Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis»* demuestra una solución generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en

[3] Extraído del libro Topología desde la infancia, en la lección 1 Los inicios de la Topología, escrito por Julián Guzmán y Fernando Mesa, en el 2010.

que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg.

Para dicha demostración, Euler recurre a una abstracción del mapa, enfocándose exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre ellas. Cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos azules, transite por todas las líneas una única vez, y regrese al mismo punto de partida.



Lo primero que hizo Euler para resolver el problema fue eliminar todo lo que no era importante. Convirtió las cuatro zonas (marcadas en verde) en puntos (los llamados vértices o nodos), y cada uno de los puentes (líneas amarillas) en líneas (aristas o arcos) que conectan los nodos (zonas). De esta manera obtuvo el gráfico indicado en la figura. El problema lo redujo a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos azules, transite por todas las líneas una sola vez, y regrese al mismo punto de partida.

La conclusión básica de su teoría es muy sencilla: *Para cumplir con las condiciones del problema, si uno llega a un nodo (zona) a través de una arista (puente) debe salir de él por una arista distinta (puente), lo que nos lleva a que en cada nodo (zona) el número de aristas que confluyen debe ser par*[4].

[4] Extraído de: https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg, observar también la página web http://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2011/12/01/euler-y-los-siete-puentes-de-konigsberg/ donde se puede comprender la solución de los puentes de Königsberg.

En el caso de los puentes de Königsberg esta premisa no se cumple en ningún caso, según la conclusión de Euler se trata de un problema irresoluble**:** no existe solución que permita hacer el recorrido pasando una sola vez por cada uno de los puentes.

3.3. Los poliedros.

Un poliedro es un cuerpo geométrico en tres dimensiones cuyas caras son planas y que encierra un volumen finito. Los segmentos que unen dos caras se llaman aristas y los puntos en los que se cortan varias aristas se llaman vértices.[5]

De entre todos los poliedros hay un conjunto de ellos que es especialmente interesante: los poliedros convexos**.** Este tipo de poliedros cumple que para cada par de puntos que se encuentran dentro del poliedro, el segmento que los une se encuentra también dentro del mismo. Por ejemplo, una caja de zapatos.
La "fórmula" de Euler relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo (en particular, homeomorfo a una esfera). Esta fórmula se llama "Fórmula de Euler" a raíz de que el matemático suizo Leonard Euler la descubriera en 1752. Euler demostró que la fórmula es válida para cualquier poliedro convexo, sea o no regular.

En 1750 en una carta a su colega Christian Goldbach, que estaba empezando a estudiar los poliedros y sus propiedades, Euler escribió:

> …*Recientemente se me ha ocurrido determinar propiedades generales de los sólidos limitados por superficies planas, porque no hay duda de que se podrían encontrar teoremas generales sobre ellos. Así como para figuras planas rectilíneas hay propiedades como las siguientes:*

[5] Obtenido de: Articulo de la fórmula de Euler donde nos explica lo que es un poliedro y su aplicabilidad. Por la información.com http://gaussianos.com/la-formula-de-euler-una-maravilla-matematica/.

1. *en cada figura plana, el número de lados es igual al número de ángulos, y*
2. *la suma de todos los ángulos interiores es igual a dos rectos por el número de lados menos cuatro rectos.*

En esta carta, Euler consideraba la posibilidad de tener en cuenta las caras del poliedro, sus ángulos sólidos, los ángulos planos, los vértices y lados de cada cara, las aristas del poliedro. Así, Euler obtuvo:

> *…En cada cara, el número de lados es igual al número de ángulos planos. Dos caras se encuentran en un lado, entonces la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro. Por lo tanto, la cantidad total de lados de todas las caras es siempre un número par. Cada cara tiene por lo menos tres lados, entonces la cantidad total de lados de todas las caras es mayor o igual que tres veces el número de caras…*

De donde llegó a la siguiente propiedad:

> *…La cantidad de ángulos sólidos más la cantidad de caras es igual a la cantidad de aristas del poliedro más dos…*

El resultado que esta fórmula arroja es muy interesante y visualmente sorprendente. Considere un poliedro *P* no importa si este es regular o irregular. La "fórmula" de Euler indica que si *C* representa el número de caras del poliedro, *A* representa el número de aristas y *V* representa el número de vértices del poliedro entonces se cumple que C+V=A+2.[6]

---

[6] Información extraída de: Articulo del mundo de las Matemáticas, volumen 5, publicado en junio de 2004. http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/Vol5n1Jun2004/node11.html. Se sugiere también ver el siguiente link http://topologia.wordpress.com/2008/10/23/8-la-formula-de-euler-para-poliedros-v-ac2/ .

3.4. Teorema de los cuatro colores.

Breve historia del problema para los niños.

Los orígenes de este problema son muy antiguos. Los cartógrafos renacentistas sabían ya con cuatro colores diferentes bastaba para iluminar sus mapas de manera que dos países vecinos quedaran iluminados de distintos color, logrando así que sus mapas fueran claros y fáciles de entender.

Sin embargo, hasta el siglo XIX, a nadie se le había ocurrido que este hecho tuviera que ver con matemáticas y mucho menos que se podía o debía demostrar.

Parece ser que esta situación se convirtió formalmente en un problema matemático cuando en 1850 un estudiante inglés, Francis Guthrie, a quien le gustaba dibujar y colorear mapas, se dio cuenta de que siempre podía iluminar correctamente los mapas usando siempre cuatro colores diferentes. Intuyendo que esto podía ser demostrado, se lo contó a su hermano Frederick, quien había estudiado con un prestigioso matemático inglés de la época llamado Augustus De Morgan. De Morgan no supo solucionar el problema pero le pareció suficientemente interesante como para enviarle una carta a otro prestigiado matemático inglés: Sir William Hamilton, quien decidió no hacerle caso al problema, hecho que nunca sabremos si sucedió porque no pudo resolverlo o porque le pareció intrascendente.

Durante muchos años, matemáticos y no matemáticos, expertos y novatos, intentaron resolver este problema, es decir, demostrar que bastan 4 colores diferentes para dar una coloración correcta a cualquier mapa. Este problema se hizo tan famoso en el medio matemático, que en 1878 el matemático inglés Arthur Cayley lo propuso oficialmente a la Sociedad Matemática de Londres (London Mathematical Society), una de las sociedades de matemáticos más importantes del mundo en esa época, como un problema a resolver.

Hubo que esperar hasta el año 1976 cuando los matemáticos Kenneth Appel (americano) y Wolfgang Haken (alemán) pudieron demostrar la validez de dicho resultado: “Es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color”[7]

3.5. La cinta de Mobius.

Inicialmente pensemos en superficies que realizamos con papel o con otro material, común y corrientes para nosotros, y a las cuales les quitamos dos caras (la superior e inferior) como los cilindros, los troncos de pirámides y conos, los paralelepípedos, los octaedros, los dodecaedro, los icosaedros, la misma esfera sin dos casquetes (uno arriba y otro abajo, en forma de ollas sin base inferior). Podemos notar que estas poseen las propiedades de tener dos bordes y dos partes (exterior e interior, “caras”) que se pueden reconocer por colores distintos.

Desde luego, observamos que tienen un borde superior y un borde inferior.

En el siglo XIX los matemáticos, entre ellos Ferdinand Möbius (1790-1868) y Johann Benedict Listing (1808 – 1882) , se inquietaron por la existencia de superficies “no muy normales”, superficies de una sola cara y un solo borde, y lograron encontrar una primera: La cinta o banda de Möbius[8].

La banda de Möbius es una superficie (con borde) que, por sus sorprendentes propiedades, es utilizada en campos tan dispares como la matemática, el arte, la ingeniería, la magia, la ciencia, la arquitectura, la música, el diseño, la literatura, etc., ya sea de manera explícita o simplemente como una metáfora.

La banda de Möbius es, desde el punto de vista topológico, una superficie (dimensión dos), con un único borde y una única cara; es además no orientable: todas las propiedades singulares de la banda de Möbius (y de cualquier otro

---

[7] Obtenido del libro Topología desde la infancia, escrito por Julián Guzmán y Fernando Mesa, publicado en el año 2010 lección 3 teorema de los cuatro colores.
[8] Obtenido del libro Topología desde la infancia, escrito por Julián Guzmán y Fernando Mesa, publicado en el año 2010 lección 5, la cinta de mobius

objeto que esté formado por una o varias de estas bandas) se derivan de la falta de orientabilidad.

Algunas aplicaciones de la banda de Möbius:

En 1923, Lee De Forest obtuvo una patente norteamericana referente a una película cerrada en forma de banda de Möbius sobre la cual podía grabarse el sonido por ambas caras, o mejor dicho, por su única cara. Más recientemente, la misma idea ha sido aplicada a cintas magnetofónicas, con lo que la cinta retorcida puede funcionar el doble de tiempo que lo que duraría otra normal.

En 1963, Richard L. Davis, físico de Sandia Corporation de Alburquerque, inventó una resistencia desprovista de reactancia, fundada en la banda de Möbius. Adosando finas tiras metálicas a las dos caras de la cinta aislante y formando con ellas una banda de Möbius de triple capa, Davis descubrió que, al fluir impulsos eléctricos en ambos sentidos en torno a la banda, ésta adquiría todo tipo de propiedades eléctricas deseables.

Los artistas gráficos también se han valido de esta banda tanto para fines publicitarios como artísticos. La banda de Möbius ha tenido también un papel destacado en numerosos cuentos de ciencia ficción.

También se sabe de mecanógrafos muy rápidos que encontrando fastidioso tener que detenerse a meter en la máquina hojas nuevas en blanco, han optado por utilizar papel en rollo. Si hubieran usado un largo bucle de retorcido habrían podido además escribir por ambos lados del papel.

La banda de Möbius es también utilizada en las correas de transmisión de los coches, como por ejemplo, en la correa del ventilador. Con una correa ordinaria sólo se desgastaría la parte en contacto con las ruedas (la interior), por lo que ésta se estropearía antes que la parte exterior. Como la banda de Möbius tiene una sola cara, su recubrimiento dura más y los desgarros en la correa son menos frecuentes haciendo que dure más.

Sin embargo, una de las aplicaciones más curiosas de esta superficie es la denominada Casa Möbius, un proyecto de vivienda que representa ciertos aspectos característicos de la arquitectura de finales del siglo XX.[9]

3.6. La botella de Klein.

En matemáticas, la botella de Klein es un ejemplo de una superficie no orientable, informalmente, es una superficie en la que las nociones de derecha e izquierda no se pueden definir de forma coherente.

La botella de Klein fue descrita por primera vez en 1882 por el matemático alemán Félix Klein. El nombre original del objeto no fue el de botella de Klein (en alemán Kleinsche Flasche), sino el de superficie de Klein (en alemán Fläche). El traductor de la primera referencia al objeto del alemán al inglés confundió las palabras. Como la apariencia de la representación tridimensional recuerda a una botella, casi nadie se dio cuenta del error.

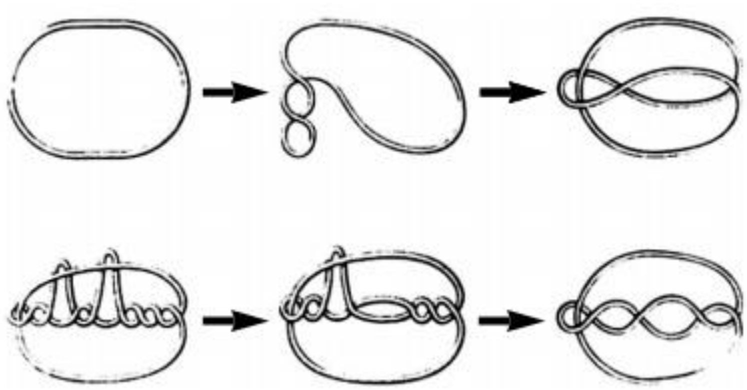
Al igual que la banda de Möbius, la botella de Klein es una variedad diferenciable de dos dimensiones que no es orientable. A diferencia de la banda de Möbius, la botella de Klein es una variedad cerrada, lo que significa que es una variedad compacta y sin límite. Mientras que la banda de Möbius puede ser embebido en tres dimensiones euclidianas del espacio R^3, la botella de Klein no puede. Se puede incrustar en R^4, sin embargo.[10]

3.7. La teoría de los nudos.

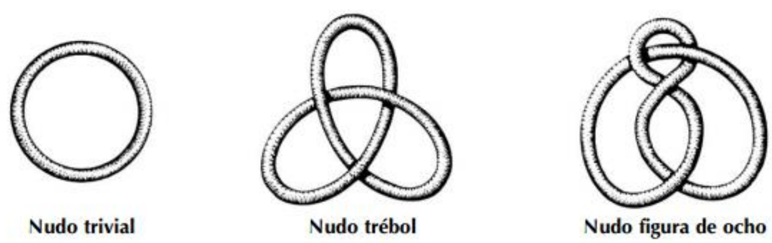
Para el matemático, un nudo es una curva continua, cerrada y sin puntos dobles. Esta curva está situada en un espacio de dimensión tres y se admite que pueda ser deformada, estirada, comprimida, pero está prohibido hacer cortes. Cuando se puede, a través de manipulaciones de este tipo (es decir, por medio un

[9] Extraída del PDF Suma, la banda de mobius, publicado en febrero de 2007. http://revistasuma.es/IMG/pdf/54/015-022.pdf.
[10] Obtenido del libro topología desde la infancia, escrita por Julián Guzmán y Fernando Mesa, publicado en el 2010, lección 7 la botella de Klein.

homeomorfismo) pasar de un nudo a otro, se dice que son equivalentes. En general, es muy difícil decidir cuando dos nudos son equivalentes, y gran parte de la teoría de nudos está precisamente dedicada a intentar resolver esa cuestión. Por ejemplo, el nudo trivial (no hay nudo) equivale a este otro de apariencia complicada:



Los nudos están catalogados teniendo en cuenta su complejidad. Una medida de la complejidad es el número de cruce, es decir,, el número de puntos dobles en la proyección plana más simple del nudo. El nudo trivial tiene número de cruce cero. El trébol y la figura de ocho son los únicos nudos con número de cruce tres y cuatro, respectivamente.



Los nudos se pueden sumar, restar, multiplicar e incluso dividir (el álgebre de los nudos). Pero cuando los nudos se complican, su simple descripción no basta para distinguirlos. Así, partiendo de su forma (la geometría del nudo), se han desarrollado fórmulas que funcionan para todos los nudos, hay invariantes topológicos que se obtienen al estudiar el complementario del nudo.

La técnica de tejido, que precisa cruces y anudados de hilos, se conoce ya en el neolítico. Aún en épocas anteriores, existen ya métodos que permiten unir una lámina de silex a su mango, con tripas, nervios de animales o fibras vegetales. Lamentablemente, la descomposición de todas estas ligaduras orgánicas no permitirá nunca conocer con precisión la edad de los primeros nudos. En la época actual, los marinos se han apropiado de esta técnica, esencial para su trabajo. En 1944, el pintor C.W. Ashley (1881-1947) describe y dibuja en su libro “The Ashley Book of Knots” exactamente 3.854 nudos.

Los nudos están presentes en ámbitos tan dispares como la decoración, la industria textil, la magia, el alpinismo o la cirugía. Su estudio matemático permite en la actualidad ver su relación con la física, la química o la biología molecular.

4. Referentes Teóricos y metodológicos

4.1. Algunas Investigaciones en este Campo.

A continuación se dará a conocer una serie de investigaciones y trabajos que a juicio son importantes nombrar como casos en común durante el proceso de este proyecto:

- En la Universidad de los Andes Táchira radica una investigación en el 2004 realizada por: Jeannett Castro Bustamante Licenciada en Matemáticas, con Maestría en Gerencia Educativa y Doctorado en Pedagogía, titulada como: “El desarrollo de la noción de espacio en el niño de educación inicial”. En dicha investigación trata “La Noción de espacio la cual constituye uno de los marcos lógico-matemáticos fundamentales, que ha de servir para estructurar el futuro pensamiento abstracto-formal. En tal sentido, resulta imperioso el conocimiento de tal proceso por parte de los docentes que atienden a grupos de niños en sus primeros años de vida escolar esencialmente en el nivel de pre-escolar, pues de ello dependerá la adecuada selección de estrategias de enseñanza y de actividades de aprendizaje que fomenten el desarrollo de las nociones de carácter topológico”.

- En la Revista de Didáctica de las Matemáticas Volumen 76 del 10 de marzo de 2011, radica un Artículo escrito por: Rafael Andrés y Estrella Jornet. Titulada “La fascinante matemáticas de los nudos”. En dicho artículo aborda “El estudio analítico y topológico de las curvas anudadas en el seno de variedades multidimensionales, ha permitido vislumbrar un insospechado horizonte de resultados matemáticos así como de sorprendentes implicaciones físicas”. Donde resalta la importancia de los Nudos, la Topología y el Análisis.

- Existe un Artículo en la Revista Iberoamericana de Educación escrito por: Edgar Oliver Cardoso Espinosa y María Trinidad Cerecedo. Titulado: “El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia, el cual habla sobre “El enfoque en lo primordial que los alumnos de la Primera Infancia aprendan sobre la asignatura de matemáticas, debido a la gran importancia que tiene como herramienta que posibilita no solo la resolución de problemas sino también el planteamiento de nuevas situaciones generadoras de conocimientos en los diversos ámbitos del mundo laboral, profesional y personal de los individuos.

4.2. Metodologías de Enseñanza

Las diversas estrategias metodológicas son aquellas que conducen al docente a organizar sus contenidos a partir de los objetivos. De esta manera se ira trazando un camino individual según las necesidades de los estudiantes, favoreciendo el desarrollo de las habilidades y conocimientos, ahorrando así esfuerzos al momento de involucrar nuevos ideales a los estudiantes.

El presente trabajo nace con la necesidad de descubrir un espíritu más intuitivo al momento de abordar una rama de las Matemáticas como lo es la Topología donde se quiere mostrar que los niños pueden aprender de diversas maneras, entre ellas manipulando, pintando, recortando, etc. La investigación se efectúa en una Institución educativa de bajos recursos ubicada en la ciudad de Manizales en el barrio Fátima llamada “LA BOLIVARIANA”. En dicha Institución se puede evidenciar una método tradicionalista el cual está trayendo graves problemas a nivel de aprendizaje en los grados cuarto y quinto de básica primaria. En dicha Institución manifiestan el bajo nivel de los últimos años en las notas del área de Matemáticas, entonces estos indicios dan pie a idear nuevas estrategias metodológicas para la ayuda tanto de estudiante como de docentes de dicha Institución.

4.2.1. TIC (Tecnologías de la comunicación y la información)

Las TIC en la Básica Primaria.

Las tecnologías han sido incorporadas en la educación con el fin de envolver a los alumnos en una realidad indiscutible, ya que nuestra sociedad actual requiere un poco de conocimiento informático para así descubrir múltiples manifestaciones (textos, sonidos, imágenes, etc.). Durante varios estudios no se ha garantizado que las TIC sean la solución a los problemas de la enseñanza. Las TIC se conocen como una herramienta facilitadora para el docente, el cual con diversas estrategias, podrán aumentar la motivación y el interés en el aprendizaje.

Los estudiantes en esta época pueden familiarizarse rápidamente con este tipo de instrumentos adquiriendo así, estrategias útiles que con el paso del tiempo se podrán ir afianzando para contribuir a las diversas metodologías de enseñanza.

Como podemos darnos cuenta, la computación intenta acercar al alumno al conocimiento y manejo de modernas herramientas tecnológicas y de cómo el estudio de estas tecnologías contribuye a potenciar y a expandir la mente, de esta manera los aprendizajes serán más significativos y creativos, además preparan a los estudiantes para enfrentar las diversas necesidades de una sociedad.

Esta metodología de enseñanza se ha convertido indispensable para aumentar la calidad del proceso enseñanza-aprendizaje. Donde no podemos desconocer que en un aula de clase donde su metodología de enseñanza sea las TIC el aprendizaje es más autónomo y más divertido. Incrementando la motivación y ganando una nueva destreza como herramienta de estudio y de superación.

Las TIC las podemos dividirlas en cuatro campos argumentando las diversas necesidades de los docentes y estudiantes.

- **Colaboración:** Gracias a las TIC podremos abolir el individualismo entre las aulas, extender el deseo de compartir diversas informaciones relevantes en un determinado aprendizaje (Trabajo en grupo).

- **Comunicación:** Tal como su nombre lo indica Tecnologías de la Comunicación y la Información, nos ofrece la ventaja de poder fortalecer el área comunicativa. Rama fundamental en la educación, ya que es necesario que exista una comunicación confiable entre estudiante-profesor. De esta manera los estudiantes y los profesores podrán compartir experiencias, informaciones de una manera más rápida y fácil, dando como resultado una retroalimentación que a la larga favorecerá a la sociedad.

- **Análisis:** En este campo podemos reflejar la importancia de la autorreflexión de los estudiantes, por ejemplo: cuando quieren explicar un determinado fenómeno; por ende surge una serie de preguntas que podrán responder a medida que sepa explotar dichos recursos que tiene a su lado.

- **Creatividad:** Debido al uso de las TIC, podremos dejar a un lado en muchas ocasiones el tablero, marcadores, cuadernos, lápices, etc. y dar pasó a diversos software educativos que pueden ser instalados de manera sencilla a los computadores. De esta manera motivar al estudiante en no dejar de usar la imaginación para volver la clase convencional en una clase virtual.

En conclusión podemos afirmar que las TIC hace en gran medida que los conocimientos lleguen de una manera más rápida y ágil, dándoles siempre espacio a los estudiantes que estén informados de los nuevos avances tecnológicos como un objeto de aprendizaje. Además proporciona un aprovechamiento de los recursos, por ejemplo: el simple hecho de poder reproducir un video en ocasiones puede bastar para que los estudiantes tengan un buen aprendizaje.

4.2.2. Actividades Manipulativas.

Las actividades manipulativas, son estrategias que ayudan al estudiante a adquirir un aprendizaje táctil, dando como resultado fomentar una mayor comprensión de los diferentes temas. Además, pueden hacer que el aprendizaje sea más interesante y divertido. Los materiales manipulativos nos ayuda a fortalecer la importancia que los estudiantes puedan asociar los diversos aprendizajes con su vida cotidiana, este tipo de actividades hace que el niño se entusiasme y quiera empezar a indagar en diversos temas o en cuestionamientos que puedan surgir al abarcar un aprendizaje.

Actividades Manipulativas y las Matemáticas

Cuando hablamos de actividades manipulativas se entiende que es una serie de actividades en forma práctica, para así motivar al estudiante hacer una parte importante del aprendizaje a través de la experiencia y la manipulación de diversos materiales didácticos.

Esta es otra de las metodologías necesarias en la enseñanza de las Matemáticas y vital para el área de la Topología, ya que con esta podremos evidenciar nuevas estrategias de aprendizaje, dándoles a los estudiantes la oportunidad de adquirir conocimientos de una manera más activa de igual forma poder practicar las matemáticas mientras juegan con atractivos artículos manuales. De esta manera podemos darle un giro a la manera convencional de enseñar las Matemáticas, desarrollando el razonamiento de los estudiantes mediante diversos estímulos visuales u objetos que sean conocidos por los estudiantes.

Cuando los estudiantes manipulan diversos materiales didácticos para llegar a conclusiones de un determinado tema se puede ver reflejado como los estudiantes dejan a un lado la pasividad y se involucran notoriamente en cada uno de los procesos de aprendizaje. Desarrollando satisfactoriamente los contenidos seleccionados obteniendo mejores resultados después de pocas secciones de manipulación de materiales didácticos.

Según diversos estudios la metodología de la manipulación, es una de las estrategias más acertadas en la educación, ya que al usarlas de manera continua proporciona al estudiante una herramienta que podrán utilizar en cualquier momento para ayudarlos a pensar, reflexionar, razonar y resolver problemas. Por ejemplo: “Burns dice que una de las ventajas de utilizar variedades, es que los niños pueden pensar en ideas de diferentes maneras". Es un pensamiento muy propio ya que cuando ofrecemos diversas herramientas a los estudiantes podremos observar cómo su entusiasmo se va en aumento.

4.2.3 Juegos Didácticos

Esta estrategia metodológica que se puede utilizar en cualquier nivel o modalidad educativa, por lo regular se utiliza en pocas ocasiones, porque en algunas de estas se desconoce cómo diseñar el juego apropiado para un determinado aprendizaje. Cada vez que se emplea un juego didáctico en el aula de clase podemos observar las múltiples ventajas, ya que esta nos proporciona una acción reflexiva y simbólica, fomentando el desarrollo continuo de la creatividad.

Observemos las múltiples ventajas que nos ofrece la metodología de los juegos didácticos:

- Aumentar la creatividad, la imaginación y la curiosidad
- Activar el pensamiento autónomo.
- Facilitar la convivencia.
- Fortalecer el trabajo en grupo.
- Aumentar la comunicación entre alumnos y profesor-alumno.
- Estimula la observación.
- Ejercita habilidades, entre otras.

El desarrollo de las clases debe plantearse de tal forma que el estudiante juegue el papel principal, de esta manera podremos hacer parte activa de cada actividad. En el aula de clase debemos motivar al estudiante a cuestionarse y proporcionar ideas para un futuro, con estas estrategias podremos conducir a un conocimiento profundo y agradable.

Además utilizando este tipo de estrategias, podremos pensar en numerosas alternativas para un problema, desarrollar diferentes modos y estilos de pensamiento, y favorecen el cambio de conducta que se enriquece y diversifica en el intercambio grupal.

Este método puede llegar a ser un método muy eficaz en la solución de problemas como por ejemplo: los encuentros de conocimientos (Olimpiadas). Este tipo de juegos profundizan los hábitos de estudio ya que el alumno siente mayor interés por dar una solución correcta a los problemas planteados para salir victorioso, de igual manera este tipo de actividades pueden llegar hacerse manera grupal. Esta actividad grupal también juega hoy por hoy un papel vital en la educación.

4.2.4. Trabajo Colectivo.

El trabajo colectivo es una metodología esencial en cualquier tipo de aprendizaje, es el momento en que cada integrante podrá intercambiar sus experiencias, respetando sus diversos roles para conseguir unos objetivos comunes al ser enfrentados a una tarea conjunta.

Esta metodología es poco empleada en las aulas de clase, pero son muy importantes a la hora de involucrar a los estudiantes a una actitud más participativa a la hora adquirir determinados conocimientos. Algunas ventajas del trabajo colectivo son:

- Aumenta el liderazgo.
- Otorga la posibilidad de un aprendizaje mutuo.
- Juega un papel activo continuamente los estudiantes.
- Desarrolla la autocrítica.
- Se ejercita la comunicación entre los miembros, además la comunicación entre alumno-profesor
- Desarrolla la solución de problemas, entre otras.

El trabajo en grupo tiene como objetivo principal aumentar la interacción que se produce al realizar dichos trabajos en colaboración, y de esta manera acelerar el aprendizaje, mejorar las destrezas sociales y solucionar problemas individuales de manera rápida y eficiente. Desarrollando estas habilidades en los estudiantes estaremos aportando seres que podrán enfrentarse a una sociedad que continuamente esta en cambio.

4.3. Cuadro de ventajas y desventajas y similitudes de las diferentes metodologías propuestas.

METODOLOGÍA / CARACTERÍSTICA	JUEGOS DIDÁCTICOS	TIC´S	TRABAJO COLECTIVO	ACTIVIDADES MANIPULATIVAS
Metodología activa	X	X	X	X
El docente es orientador, un guía, un mediador para la adquisición del conocimiento	X	X	X	X
Utiliza material manipulativo	X	X	X	X
Metodología que se desarrolla a través de la experiencia o experimentación	X	X		
Metodología que permite el trabajo en equipo	X	X	X	X
Metodología que se desarrolla con mas de una actividad	X	X	X	X
Metodología que involucra a otras	X	X	X	X

ESTRATEGÍAS METODOLÓGICAS	VENTAJAS	DESVENTAJAS
TIC´S	El conocimiento se obtiene de manera más autónoma, propicia para estar conectados con la realidad. Siempre el estudiante formando parte activa dentro del aula de clase.	Se requiere necesariamente recursos para poder contar con computadores y una sala adecuada en cada Institución Educativa, además contar con diversos software educativos.
JUEGOS DIDÁCTICOS	Posibilita al estudiante a ser más activo en el aula de clase y llegar al conocimiento en una forma experimental y divertida.	Se convierte en un arma de doble filo ya que genera demasiada flexibilidad a la hora de aplicar una evaluación cuantitativa.
ACTIVIDADES MANIPULATIVAS	Posibilita la construcción del conocimiento por medio de diversos materiales, generando un conocimiento más autónomo, de manera que los estudiantes puedan experimentar con su vida cotidiana.	Requiere de mucho más tiempo en las aulas y de un currículo no tan acelerado y contar con diversos objetos que nos sirvan como herramienta.
TRABAJO COLECTIVO	Se accede al conocimiento de una manera autónoma permitiendo que los estudiantes entiendan la importancia del trabajo en grupo, respetando sus múltiples diferencias, pero llegando a una solución a un determinado problema.	Se convierte en una herramienta facilitadora que ayuda en algunos momentos del aprendizaje.

5. Metodología del Proyecto

La metodología de la presente investigación ha sido mixta, ya que hemos realizado una investigación exhaustiva acerca de cómo enseñar la topología a los niños y la otra parte ha sido un trabajo de campo. Nos hemos basado en la teoría existente de algunos autores entre ellos esta: el matemático Julián Guzmán Baena con uno de sus libros "Topología desde la Infancia", el cual nos ha aportado diversas estrategias y metodologías para realizar el marco teórico entre otros aspectos de dicha investigación.

Por otra parte, en el trabajo de campo se realizó una investigación cuantitativa, con una muestra de estudiantes significativa, de los grados cuarto y quinto de básica primaria. Con niños entre los 9 y 11 años de clase social baja y con graves problemas de aprendizaje como por ejemplo: síndrome de desatención, autismo, entre otras, también se podía evidenciar que la mayoría de los estudiantes tenían diversos problemas intrafamiliares, aunque no en todos los estudiantes, en muchas ocasiones se podía evidenciar muchas capacidades y habilidades a la hora de proponer y participar en cada uno de las actividades aplicadas.

La investigación fue realizada en la "Institución Educativa La Bolivariana" en la ciudad de Manizales en el tercer trimestre del 2012, donde su pudo implementar diversas estrategias metodológicas para enseñarles a los estudiantes un mundo diferente donde podemos combinar el aprendizaje con el juego, la manipulación, la reflexión y el poder proporcionar posibles soluciones.

Al enfrentarnos a una realidad nos permite unir la teoría y la práctica con el aprendizaje. Cuando se inicia el proceso de la investigación se puede evidenciar como el problema puede tener varios puntos de vista, diversas estrategias, y cantidades de soluciones que ayudaron a contribuir en cada parte de los resultados de esta investigación.

Entonces para alcanzar el objetivo principal nos basamos en las siguientes fases que darán un orden al proyecto:

Fase 1: Reconocimiento de los aspectos teóricos.

En esta primera fase nos concentramos a identificar los contenidos, los autores, observando muy bien la parte bibliográfica para después de hurgar en diversas opiniones, poder escoger las diversas actividades propicias para estudiantes de grado 4° y 5° de Básica Primaria, ya que en estos grados se enfatizara la investigación. Después de tener claridad podremos trazar un camino donde nos facilitara la enseñanza de la Topología en los niños, donde recurriremos en utilizar diversas estrategias metodológicas que en dicha Institución no se han implementado, dejando así varias opciones a los docentes donde podrán recurrir durante el proceso del aprendizaje de las diversas ramas de las matemáticas.

Por otro lado tendremos que tomarnos un tiempo en conocer las estrategias utilizadas hasta ahora por los docentes, observando qué debilidades y fortalezas tiene dichas metodologías para así poder aplicar metodologías nuevas dándole otra visión a las matemáticas y además contribuyendo a que los docentes aumenten su nivel de estrategias y puedan llevar diversas aplicaciones a sus aulas de clase.

Fase 2: Banco de actividades.

En la fase dos nos concentramos a realizar las diversas actividades que ayudaran a los estudiantes apropiarse de conocimientos Topológicos, por medio de las metodologías ya planteadas, llegando a comprender conceptos matemáticos como: frontera, uniones, intersecciones, grafos, entre otros, dando así como resultado la creación del banco de actividades.

Fase 3: Aplicación de las estrategias metodológicas.

En esta tercera fase, será aplicada en el Institución Educativa La Bolivariana ubicada en la Ciudad de Manizales, en los grados 4° y 5° de básica primaria, donde aplicaremos varias experiencias Topológicas, ayudándonos a obtener unos resultados cualitativos como cuantitativos, observando, manipulando e interactuando con los estudiantes para descubrir su gran mundo topológico que poseen los niños de esas edades. De igual manera poder fomentar a los docentes una nueva cultura de enseñar las matemáticas, olvidando un poco el formalismo y aumentando la motivación al enseñar las Matemáticas.

Fase 4: Evaluación de las estrategias metodológicas.

En esta fase se podrán obtener las diferentes conclusiones de esta investigación, como por ejemplo:

¿Qué tan efectivas fueran estas estrategias metodológicas utilizadas?

¿Se cumplieron los objetivos propuestos en cada una de las actividades que se plantearon?

¿Qué tan importante es enseñar la Topología a los niños y pre-adolescencia?

Cada una de estas respuestas se dará más adelante al obtener los resultados cualitativos y cuantitativos de la investigación.

Para investigar se ha seguido los siguientes pasos dentro de la Institución:

1. Contacto con el Rector de la Institución: Se mantiene una reunión con el Rector de la Institución Bolivariana, se le plantea los objetivos de la investigación, informándole que es nuestro trabajo grado. Se pueden concretar un plan de trabajo de cuatro horas diarias divididas en dos para el grado 4° y dos horas para el grado 5°. Además, se acuerda una reunión con los docentes titulares de dichos grados.
2. Reunión con los docentes: Se mantiene una reunión con los docentes titulares en presencia del señor Rector, se exponen de nuevo los objetivos de la investigación. Les parece interesante las ideas y deciden modificar

sus calendarios para darle paso a las actividades que estamos proponiendo.

3. Segunda reunión con los docentes: Se procede a conocer el número de estudiantes de cada curso y a su vez programar de manera prudente las horas asignadas por el Rector de la Institución.
4. Preparación del material: Se diseña el material propicio para cada una las actividades y se lleva el material de cada alumno que se necesita para llevar acabo la experiencia Topológica.
5. Secciones de trabajo: En cada sección de trabajo se proporcionará el material suficiente donde se extraerá varias conclusiones que los niños escribirán en hojas durante el desarrollo de cada actividad. De igual manera, se observara y se tomará apuntes de los diversos sucesos de casa sección.

5. Dinámica del Proyecto por actividades

5.1. Actividad 1

Nombre de la actividad: Transformaciones topológicas.

Nivel de escolaridad: Básica primaria y secundaria.

Grado de aplicación: 4°, 5° y 6°

Enfoque temático: La geometría de la goma elástica.

Estándar: Comprendo intuitivamente la noción de conservación de las propiedades topológicas durante transformaciones continuas.

Objetivos:

- Comprender que todas las superficies orientables pueden obtenerse pegando asas a una esfera.
- Incorporar a la formación matemática de los estudiantes a través de juegos matemáticos, nuevos conceptos como superficie orientable, invariante, proximidad, transformación.

Tiempo aproximado: 4 horas

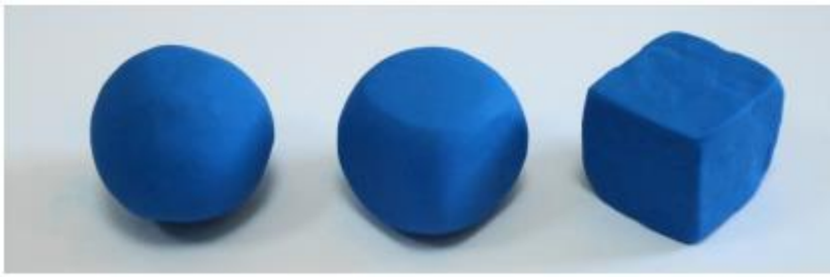
Materiales:

- Plastilina
- Alambre dulce

Desarrollo de la actividad:

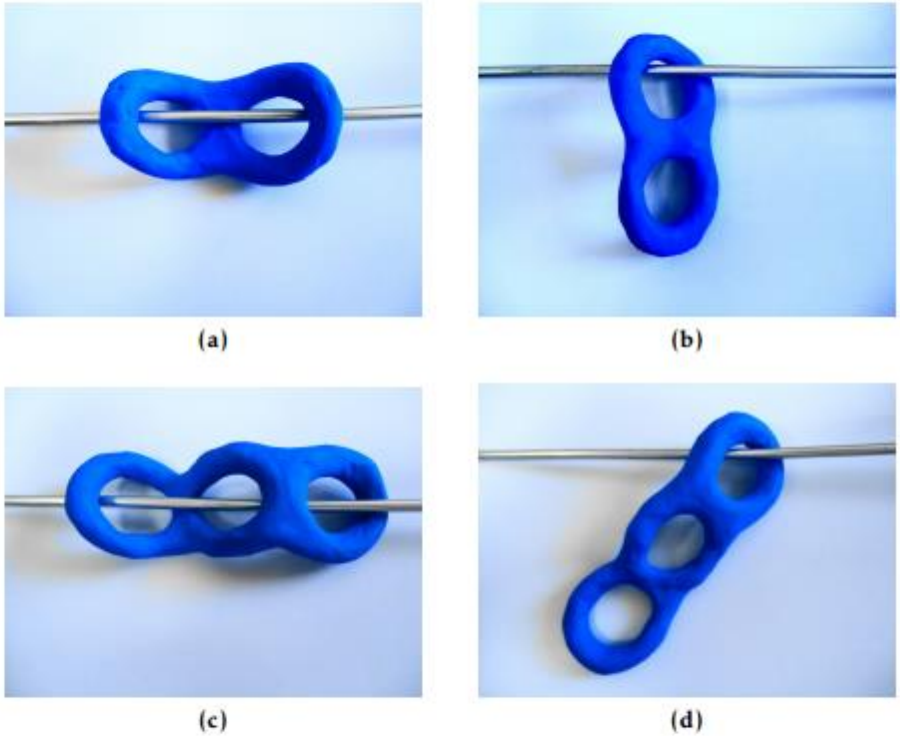
1. Se iniciará la clase con una introducción acerca de que es la topología y que estudia.
2. Se proyectará un video que evidenciará la transformación topológica de una esfera en un cubo manipulando plastilina.
3. Se pedirá a los estudiantes que conformen grupos (3-4 niños) para el desarrollo de la clase.
4. Se pedirá a los estudiantes que realicen la comprobación de esta transformación topológica (esfera en cubo) utilizando plastilina.
5. Se explicará a los estudiantes que es un toro y se pedirá a los niños su construcción en plastilina.
6. Se pedirá a los estudiantes construir un toro doble en plastilina.
7. Los estudiantes deberán realizar transformaciones no topológicas al toro doble de plastilina.
8. Se proyectará un video que evidenciará una transformación topológica del toro doble en plastilina incrustado en una varilla o alambre.
9. Apoyados en el video, los estudiantes realizarán transformaciones topológicas con el toro doble.
10. Los estudiantes construirán un toro doble en plastilina a partir de una esfera a la que se le pegan asas, igualmente para el toro triple.
11. Se proyectará a los estudiantes un video de juegos topológicos con alambres, en donde los niños evidenciarán situaciones topológicas semejantes.
12. Apoyados en el video, los estudiantes deberán construir en alambre un juego topológico.
13. Los estudiantes comprobarán si el juego topológico que construyeron con alambre, cumple con lo visto en el video (situaciones topológicas semejantes).
14. Finalmente, los estudiantes anotarán sus conclusiones.

Actividad planteada para los estudiantes: Los estudiantes formarán grupos (3 a 4 niños) para iniciar con la actividad. Manipulando plastilina, se pedirá a cada grupo comprobar que una esfera se puede transformar en un cubo como se ilustra en la siguiente figura.



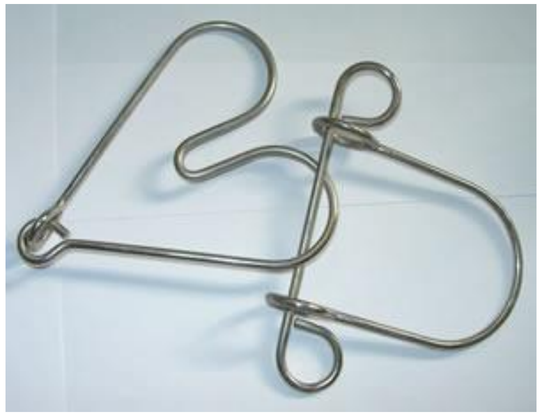
Manipulando plastilina, se pedirá a cada grupo construir un toro doble y hacerle una transformación topológica, como se ilustra en la siguiente figura.

De nuevo manipulando plastilina, se pedirá a cada grupo construir un toro doble y triple de dos maneras equivalentes, como se ilustra a continuación. Además, cada grupo contestará la siguiente pregunta: ¿Es posible pasar de *c* a *d* en el toro triple?



(a) (b) (c) (d)

Basados en esta idea de transformaciones topológicas, los estudiantes diseñarán un juego topológico con alambres en donde comprobarán que la posición de la figura inicial es topológicamente equivalente a una nueva figura, en la cual, un corazón se desenlazará (se soltará por completo) de la figura inicial. El juego consistirá en que los estudiantes deberán desenlazar el corazón de los alambres, sin realizar ningún tipo de corte o quiebre en el alambre. Después de desenlazar el corazón, los estudiantes deberán llevar la figura a su posición inicial. A continuación, se ilustra el esquema que los estudiantes deberán realizar con el alambre dulce.



Evaluación

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes dándole prioridad a los siguientes aspectos:

  a. Motivación.
  b. Creatividad.
  c. Liderazgo.
  d. Participación en clase.
  e. Cooperación entre otros.

5.2. Actividad 2

Nombre de la actividad: Los puentes de Königsberg

Nivel de escolaridad: Básica primaria y secundaria.

Grado de aplicación: 4°, 5° y 6°

Enfoque temático: Conocer la disciplina topológica

Estándar: Identifico el origen de la disciplina topológica a partir de un problema cotidiano.

Objetivos:

- Desarrollar intuitivamente en los estudiantes el concepto de grafo.
- Descubrir que no todo problema de las matemáticas tiene solución.
- Comprobar que tipo de situaciones son topológicamente iguales.

Tiempo aproximado: 1 hora

Materiales:

- Tijeras
- Colores
- Hojas de block

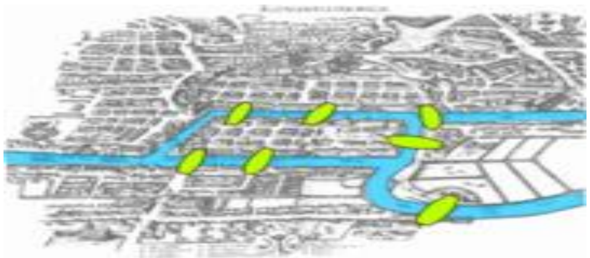
Desarrollo de la actividad:

1. Se inicia con una breve reseña acerca de los inicios de la topología hasta tocar el punto de interés: los puentes de Königsberg.
2. Se explica en que consiste la situación problema y como buscar su solución.

3. Se realiza el bosquejo de los puentes de Königsberg en la pizarra y posteriormente los estudiantes lo dibujan en hojas de block.
4. Se trabaja inicialmente de forma individual durante 10 minutos.
5. Pasados los 10 minutos se organizan grupos (aproximadamente 3-4 estudiantes).
6. Se entrará en discusión dentro de los grupos acerca de las posibles soluciones para cruzar los puentes.
7. Si existe algún integrante de cada grupo que sugiera que el problema no se puede solucionar, este deberá explicar dentro del grupo porque no existe solución, y viceversa.
8. Transcurridos 20 minutos más los estudiantes que se ofrezcan para salir a explicar sus soluciones al tablero lo podrán hacer.
9. Después de escuchar a los estudiantes que brindan posibles soluciones se escuchará a los esrudiantes que opinan que no existe una solución a este problema.
10. Luego se les dará a conocer que la solución a este problema es que no tiene solución más no se explicara aun el porqué.
11. Se escucharan las opiniones de los niños del porque ellos creen no es posible una solución.
12. Se explicará porque este problema no presenta solución.
13. Finalmente, se pedirá a cada estudiante que escriba en una hoja la conclusión o las conclusiones que tengan sobre lo aprendido y lo que más le gusto de la clase.

Actividad planteada para los estudiantes :

En una hoja de papel los estudiantes realizarán un dibujo de la siguiente figura:



Después, tendrás que encontrar un camino donde recorras una sola vez todos los puentes, pero con la condición que no podrás cruzar dos veces el mismo puente.

Evaluación

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes dándole prioridad a los siguientes aspectos:

f. Motivación.
g. Creatividad.
h. Liderazgo.
i. Participación en clase.
j. Cooperación entre otros.

5.3. Actividad 3

Nombre de la actividad: Trabajando con poliedros.

Nivel de escolaridad: Básica primaria y secundaria.

Grado de aplicación: 4°, 5° y 6°.

Enfoque temático: La "fórmula" de Euler para poliedros.

Estándar: Mejoro la capacidad visual, la motora y los procesos aritméticos a través de la construcción de poliedros.

Objetivos:

- Comprender la relación que existe entre el número de vértices, aristas y caras de un poliedro.
- Descubrir por propia cuenta la "fórmula" de Euler para poliedros y comprobarán que es válida para cualquier poliedro convexo.
- Sumergir a los estudiantes de manera informal en el concepto de frontera a partir del uso de colores para pintar las caras de los poliedros.

Tiempo aproximado: 3 horas

Materiales:

- Cartulina
- Colores
- Pegamento
- Escuadras

Desarrollo de la actividad:

1. Se iniciará la clase con una pequeña introducción acerca de que es la característica de Euler.
2. Se hablará acerca de que es un poliedro, nombraremos algunos y se indagará si alguien conoce otro diferente a los que nombramos.
3. Se explicará que es la arista, el vértice y la cara de un poliedro.
4. Se explicará que existe una relación numérica entre las caras, las aristas y vértices de los poliedros.
5. Se formaran grupos (3-4 niños) para comenzar con los trazos de los poliedros.
6. Cada grupo tendrá que construir poliedros convexos diferentes.
7. Los trazos de los poliedros convexos se realizaran en cartulina que nosotros proporcionaremos para esta actividad.
8. Los estudiantes deben pintar cada cara de los poliedros convexos con un color diferente respetando los límites de frontera.
9. Al terminar la construcción de los poliedros, los estudiantes contarán el número de caras, de vértices, y de aristas de cada uno de los poliedros que construyeron.
10. Los niños almacenarán en una tabla los datos obtenidos para cada uno de los poliedros.
11. Los estudiantes deberán realizar operaciones aritméticas usuales para ellos; sumarán y restarán bajo diferentes combinaciones (aristas, vértices y caras) hasta encontrar una fórmula que proporcione la misma respuesta para los poliedros que ellos construyeron.
12. Cuando cada grupo verifique que existe una misma relación para cada uno de los poliedros que construyeron, pasaran a comprobar tal relación con los demás poliedros hechos por sus compañeros.

13. Los estudiantes comprobaran que para todos los poliedros convexos trabajados la “fórmula” de Euler se cumple.
14. Se escucharán las opiniones de los estudiantes sobre este suceso y se debatirá un poco sobre cada una de sus opiniones.
15. Finalmente, se pedirá a cada estudiante que escriba en una hoja su conclusión o sus conclusiones sobre lo aprendido y sobre lo que más le gusto de la clase.

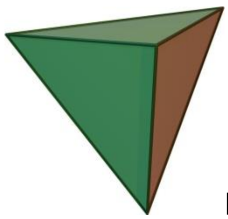
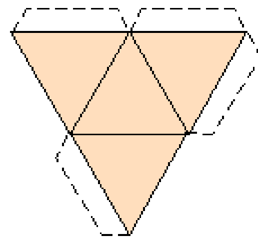
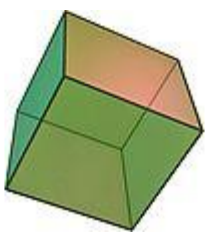
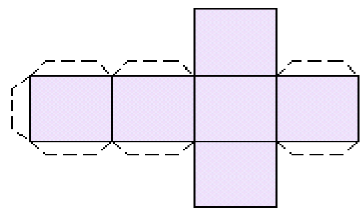
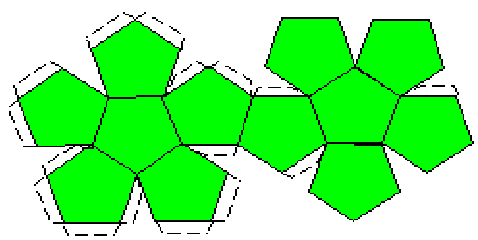
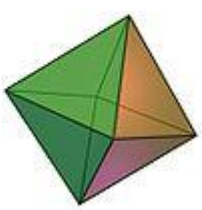
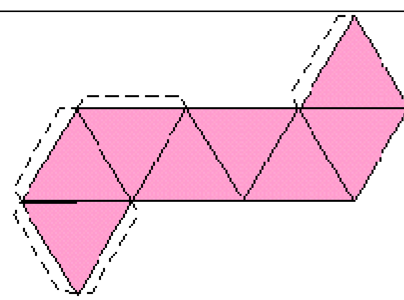
Actividad planteada para los estudiantes:

En grupos conformados por cuatro estudiantes construir diferentes poliedros. Registrar en la tabla que se mostrará a continuación (puede ser en una hoja) el número de caras, el número de vértices y el número de aristas que tienen cada uno de los poliedros construidos en tu grupo. A continuación, encuentra el comportamiento aritmético similar que tiene cada uno de los poliedros que construiste. Construcciones de los poliedros (entre otros).

TABLA 1 (Característica de Euler).

Posibles poliedros construidos	Caras	Aristas	Vértices
Tetraedro			
Octaedro			
Hexaedro (cubo)			
Icosaedro			
Dodecaedro			
Prisma triangular			
Prisma pentagonal			
Pirámide pentagonal			

TABLA 2 (Construcción de los poliedros)[11]

POLIEDROS REGULARES	CONSTRUCCION DE LOS POLIEDROS
 El Tetraedro	
 El Hexaedro	
 El dodecaedro	
 El octaedro	

[11] Dibujos obtenidos del libro topología desde la infancia, escrito por Julian Guzman y Fernando Mesa, publicado en 2010, leccion 1 Inicios de la topología.

Evaluación

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes.

- La evaluación cuantitativa se realizará basados a los resultados esperados en la actividad planteada, donde podremos socializar a nivel grupal que conclusiones se pueden obtener al finalizar el desarrollo de cada uno de los poliedros. De esta manera podremos optimizar las metodologías de enseñanza, descubriendo las fortalezas y dificultades para que en próximas ocasiones sea más efectiva la aplicación de la actividad.

5.4. Actividad 4

Nombre de la actividad: ¡Matemáticas con colores!

Nivel de escolaridad: Básica primaria.

Grado de aplicación: 4° y 5°

Enfoque temático: El teorema de los cuatro colores.

Estándar: Descubro que cualquier mapa geográfico con regiones continuas puede ser coloreado con cuatro colores diferentes de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.

Objetivos:

- Los niños incorporarán en su quehacer matemático conceptos como frontera, no frontera y región adyacente.
- Los niños comprobarán por propia cuenta el teorema de los cuatro colores.
- Los niños identificarán al teorema como un pilar indiscutible de las matemáticas.

Tiempo aproximado: 4 horas

Materiales:

- Colores
- Dibujos
- Mapas
- Hojas de block.

Desarrollo de la actividad:

1. Se iniciará la clase con una explicación a los niños acerca de que es un teorema.

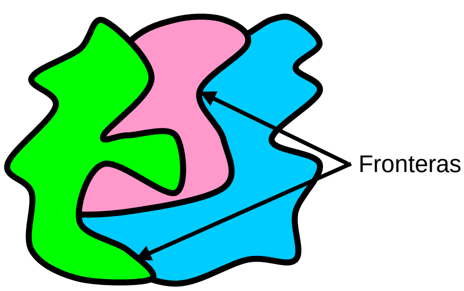
2. Se dará una reseña histórica acerca del teorema de los cuatro colores.
3. Se explicará a los niños que es una región, que es frontera y que no es frontera y cuando se habla de regiones adyacentes.
4. Se trabajará inicialmente de manera individual; alrededor de 25 minutos tomará colorear los dos primeros dibujos.
5. Se dejará a libre elección de los niños la cantidad de colores usados en estos dos dibujos, claro está que no deben quedar regiones adyacentes coloreadas con el mismo color.
6. Se organizarán grupos de tres o cuatro niños para comenzar con un nivel de exigencia más alto.
7. Se entregarán otros dos dibujos para colorear, pero esta vez, se le pide a cada grupo que en sus dibujos usen la menor cantidad de colores que sea posible.
8. Se entrega un nuevo dibujo pero esta vez se exige que sea coloreado utilizando ocho colores diferentes.
9. Se entrega un nuevo dibujo pero esta vez se exige que sea coloreado utilizando siete colores diferentes.
10. Se entrega un nuevo dibujo pero esta vez se exige que sea coloreado utilizando seis colores diferentes.
11. En este punto se les pide a los niños que de nuevo intenten colorear el primer dibujo que se entregó al grupo, esta vez usando la menor cantidad de colores con que ellos crean es posible colorear cualquier mapa geográfico con regiones continuas.
12. Para finalizar, se pedirá colorear un último dibujo usando primero cuatro y luego tres colores diferentes, teniendo en cuenta que no deben quedar regiones adyacentes coloreadas con el mismo color.

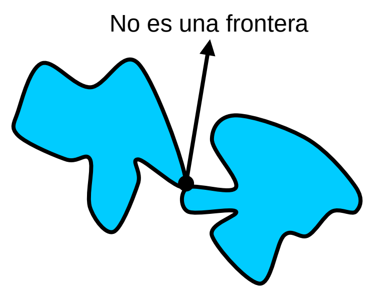
13. Se escucharán las opiniones de los niños acerca de cuantos colores diferentes necesitamos para colorear cualquier mapa geográfico con regiones continuas.
14. Se les dará a conocer la solución a esta inquietud.
15. Finalmente, se pedirá a cada niño que escriba en una hoja su conclusión o sus conclusiones sobre lo aprendido y cuales conceptos nuevos vistos en clase fueron los más llamativos y porque.

Actividad planteada para los estudiantes:

Se le dará inicio a la actividad realizando una mesa redonda donde escucharemos diversas opiniones de que es un teorema de esta manera los estudiantes se irán entusiasmando en la actividad.

Empecemos a colorear mapas de regiones cuyas fronteras o partes comunes son líneas y no puntos, de esta manera los estudiantes podrán empezar a entender el concepto de frontera:[12]





Después de manera individual pintaran un dibujo libre que ellos desarrollaran en las hojas de block que previamente fueron repartidas, pero teniendo en cuenta las regiones adyacentes.

[12] Extraído del libro topología desde la infancia, escrito por Julián Guzmán y Fernando Mesa, en 2010, lección 3 teorema de los cuatro colores.

Luego, se formaran grupos de cuatro estudiantes donde tendrá que colorear diversas imágenes y mapas que se mostraran a continuación. Donde la actividad central es colorear y resolver dos inquietudes:

1. Pintar los mapas de modo tal que dos regiones que tengan frontera en común resulten con colores diferentes
2. Pintar los mapas con la menor cantidad de colores posibles.

Ilustración 1

Para estas ilustraciones se trabajará en forma individual donde podrán utilizar el número de colores que deseen pero cumpliendo la regla de las regiones adyacentes.

Ilustración 2

En estas ilustraciones se trabajará en forma grupal donde podrán utilizar el menor número posible de colores, pero claro está, teniendo en cuenta las regiones adyacentes de los dibujos.

Ilustración 3

En estas ilustraciones se trabajará en forma grupal donde podrán utilizar solo ocho colores diferentes, pero claro está, teniendo en cuenta las regiones adyacentes de los dibujos.

Ilustración 4

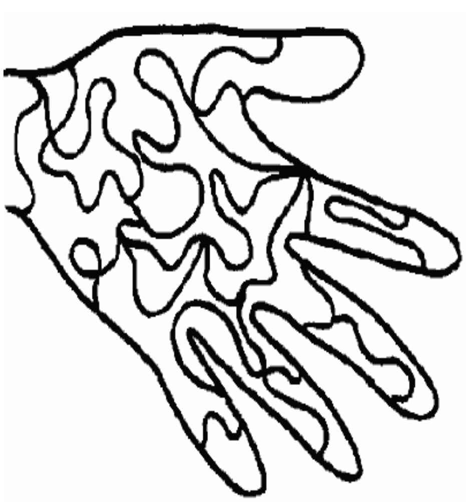
En estas ilustraciones se trabajará en forma grupal donde podrán utilizar solo siete colores diferentes, pero claro está, teniendo en cuenta las regiones adyacentes de los dibujos.

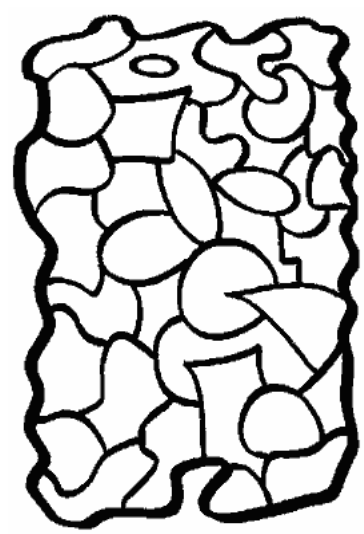
Ilustración 5

En estas ilustraciones se trabajará en forma grupal donde podrán utilizar solo seis colores diferentes, pero claro está, teniendo en cuenta las regiones adyacentes de los dibujos.

Ilustración 6

En estas ilustraciones se trabajará en forma grupal donde podrán utilizar primero cuatro y después tres colores diferentes, pero claro está, teniendo en cuenta las regiones adyacentes de los dibujos.





Para finalizar se plantearon una serie de preguntas para sacar las conclusiones del teorema.

Colorea de las ilustraciones y para cada uno de ellos contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos colores usaste para colorear la ilustración?
- ¿Cuál es el mínimo número de colores que se puede usar para colorear la ilustración?
- ¿Cuáles fueron las ilustraciones más sencillas de colorear?
- ¿Cuáles fueron los más difíciles?
- ¿Qué cambios podrías hacerle a las ilustraciones para que se necesitaran menos colores al colorearlo?

Evaluación

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes. Aprovechando de esta actividad fortalecer:

  a. El trabajo en grupo.
  b. La creatividad.
  c. El liderazgo.
  d. Motivación.

- La evaluación cuantitativa se realizará basados a los resultados esperados en la actividad planteada, donde podremos socializar a nivel grupal que conclusiones se pueden obtener al finalizar el desarrollo de la actividad. De esta manera podremos optimizar las metodologías de enseñanza, descubriendo las fortalezas y dificultades para que en próximas ocasiones sea más efectiva la aplicación de dicha actividad.

5.5. Actividad 5

Nombre de la actividad: La cinta de Mobius y sus propiedades.

Nivel de escolaridad: Básica primaria y secundaria.

Grado de aplicación: 4°, 5° y 6°

Enfoque temático: La cinta de Mobius.

Estándar: Comprendo que en las matemáticas existen cuerpos geométricos que aún sometidos a transformaciones continuas, sus propiedades siguen siendo inalteradas.

Objetivos:

- Comprobar que la cinta de Möbius solo puede ser pintada con un mínimo de seis colores respetando las condiciones de frontera trabajadas anteriormente.
- Interpretar nuevos conceptos matemáticos como superficie no orientable, invariante y dimensión.
- Comprobar que existen superficies que tienen un solo borde y una sola cara.

Tiempo aproximado: 4 horas

Materiales:

- Hoja de papel o cinta
- Colores
- tijeras
- Escuadras
- Cinta adhesiva o pegante.

Desarrollo de la actividad:

1. Se iniciará la clase con una introducción acerca de que es la cinta de Möbius.
2. Se explicarán los conceptos requeridos a los estudiantes para la comprensión de la cinta de Möbius; superficie, cara, no orientable, borde y dimensión.
3. Se formarán grupos (3-4 estudiantes) para comenzar con la construcción de la cinta de Möbius.
4. Ya construida la cinta de Möbius, los estudiantes deberán construir un cilindro para comprobar algunas propiedades de la cinta de Möbius.
5. Los estudiantes realizarán varios cortes a la cinta de Möbius para comprobar algunas de sus propiedades.
6. Los estudiantes discutirán en sus respectivos grupos lo sucedido con la cinta de Möbius.
7. Los estudiantes deberán construir una cinta rectangular de dimensiones 24cm x 3cm.
8. En esta nueva cinta los estudiantes deberán pintar un mapa con un mínimo de seis colores (al respaldo y al frente de la cinta de forma simétrica).
9. Pintadas de esa manera las dos caras del rectángulo los estudiantes diseñarán la cinta de Möbius.
10. Los estudiantes discutirán en sus grupos porque el teorema de los cuatro colores no cumple para la cinta de Möbius.
11. Los estudiantes darán sus opiniones a los demás compañeros sobre el porqué la inconsistencia del teorema de los cuatro colores en la cinta de Möbius. Además, darán sus opiniones de lo ocurrido con los cortes que se hicieron a la primera cinta de Möbius.
12. Después de escuchar las opiniones de los grupos, a los estudiantes se les explicará cual es el fenómeno que ocurre con la cinta de Möbius en la aplicación de este teorema y posteriormente con los cortes hechos en la primera cinta de Möbius.

13. apoyándonos en el uso de las TIC´S, se proyectarán algunos videos acerca de la cinta de Möbius y sus propiedades para clarificar cualquier tipo de duda al respecto.
14. Seguido de los videos se procederá a mencionar algunas de las increíbles aplicaciones de la cinta de Möbius en la sociedad.
15. Finalmente, los estudiantes deberán anotar en una hoja las conclusiones que ellos percibieron acerca de la cinta de Möbius.

Actividad planteada para los estudiantes:

En grupos conformados por 3-4 estudiantes se iniciará con la construcción de las cinta de Möbius. Los estudiantes deberán cortar una o cinta hoja en varias tiras de papel y unirlas formando dos cintas del mismo tamaño, es importante colocarle cinta adhesiva a ambos lados del papel para que las puedan formar en círculos y no se quiebre el papel. Ver figura.

Con la primera cinta los estudiantes formarán un cilindro normal uniendo las dos puntas del papel con cinta; con las otras banda de papel girarán uno de los extremos (180º) y los unirán como se ve en la fotografía (deberán construir tres cintas de Möbius).

Parte experimental 1.

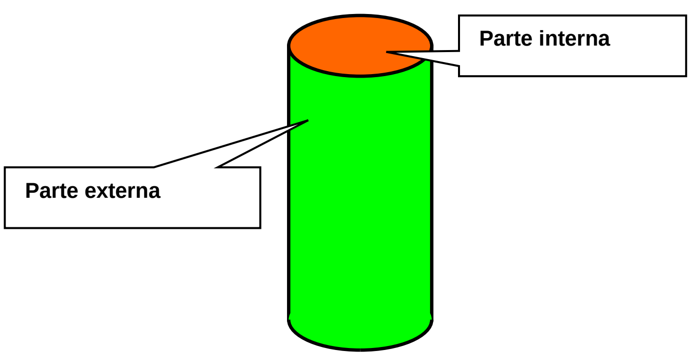
Los niños deberán recorrer los bordes de las figuras construidas usando el dedo índice para responder a las preguntas: ¿Cuántos bordes tiene el cilindro? ¿Cuántos bordes tiene la cinta de Möbius?

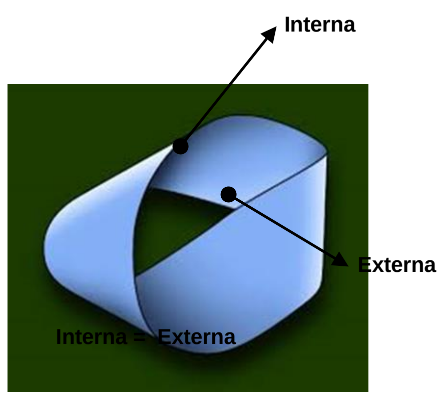
Parte experimental 2.

Los estudiantes deberán recorrer con la palma de la mano la parte externa de las figuras construidas para responder a las preguntas: ¿podrá recorrer la parte interna sin necesidad de parar ese movimiento externo y sin necesidad de pasar por el borde superior o inferior del cilindro? ¿Puede llegar a la parte interna, partiendo de la externa, sin pasar por el borde en la cinta de Möbius? ¿Cuántas caras tiene el cilindro? ¿Cuántas caras tiene la cinta de Möbius?

Refuerzo para las partes experimentales

Los estudiantes deberán pintar con dos colores las partes interna y externa del cilindro (para pintar esas partes no puede pasar por el borde) y con un solo color toda la cinta de Möbius como se ve en la figura.





Parte experimental 3.

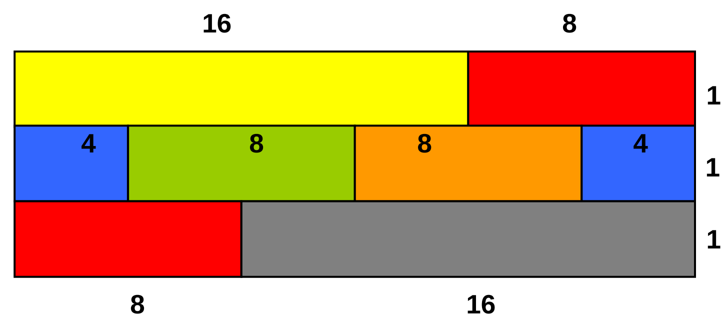
Con un color o lápiz los estudiantes trazarán una línea por dentro de las dos superficies hasta llegar al punto donde comenzaron como lo ilustra la figura.

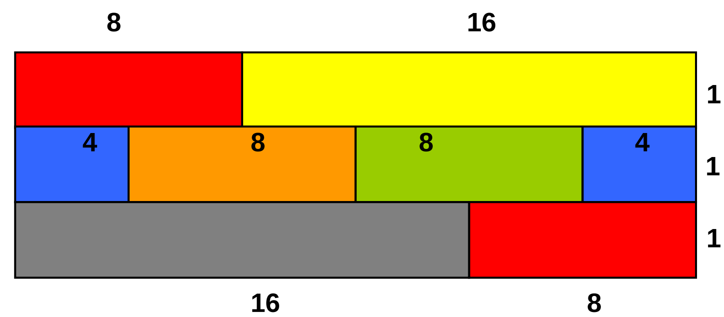
Parte experimental 4.

Los estudiantes deberán hacer cortes con las tijeras a las dos superficies por la mitad. Luego, a las otras cintas de Möbius ya construidas les harán cortes por cada uno de los lados, es decir, sin cortar por el centro.

Parte experimental 5.

Los estudiantes deberán colorear un mapa con un mínimo de seis colores. Al respaldo de esta cara deberán graficar un mapa simétrico al anterior, luego, pintadas de esa manera las dos caras del rectángulo, los estudiantes diseñaran la cinta de Möbius. Los mapas que los estudiantes deben colorear se muestran a continuación.





Evaluación

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes.

- La evaluación cuantitativa se realizará basados a los resultados esperados en la actividad planteada, donde podremos socializar a nivel grupal que conclusiones se pueden obtener al finalizar el desarrollo de la actividad. De esta manera podremos optimizar las metodologías de enseñanza, descubriendo las fortalezas y dificultades para que en próximas ocasiones sea más efectiva la aplicación de dicha actividad.

5.6. Actividad 6

Nombre de la actividad: Una Botella estrafalaria

Nivel de escolaridad: Básica primaria.

Grado de aplicación: 5°

Enfoque temático: La botella de Klein.

Estándar: Comprendo que en las matemáticas existen superficies abiertas " raras " , sin borde, sin interior y sin exterior (el interior coincide con su exterior).

Objetivos:

- Comprobar que si en una botella de Klein se introduce una canica hasta el fondo , y luego si rota la superficie 180º , la canica no sale del reciento (cosa que no sucede con una botella normal abierta).
- Comprobar, aunque de modo rápido y muy intutitvo, que si comenzamos a pintar una botella de Klein desde afuera como se hizo con la cinta de Mobius podemos pintarla de modo completo (externa e internamente) sin problema alguno y sin pasar por borde alguno (pues este no existe, cosa contraria al de la cinta de Mobius que si lo posee)**.** Esto sirve para entender que tal botella no tiene interior ni exterior, no los podemos distinguir (¿interior = exterior?)**.**

Tiempo aproximado: 4 horas

Materiales:

- Cartulina
- Colores
- Tijeras
- Escuadras
- Cinta adhesiva
- Pegamento

Desarrollo de la actividad:

1. Se iniciará la clase con una introducción acerca de que es la botella de Klein; abarcando un poco de historia.
2. Se proyectarán algunos videos sobre la botella de Klein.
3. Se explicarán los conceptos requeridos en los estudiantes para la comprensión de la botella de Klein.
4. Se formarán grupos (6 niños) para dar inicio a la construcción de la botella.
5. Cada niño por grupo se hará responsable de construir una pieza de la botella de Klein.
6. Cada niño deberá colorear la pieza que se le encargó; todas las piezas por grupo deben ser coloreadas con un mismo color.
7. Terminada la construcción de las seis piezas se unirán todas para construir la botella de Klein.
8. A cada botella de Klein, los niños deberán introducirle una canica o piedra para luego sacarla realizando volteretas con la botella.
9. Finalmente, los niños anotarán sus conclusiones.

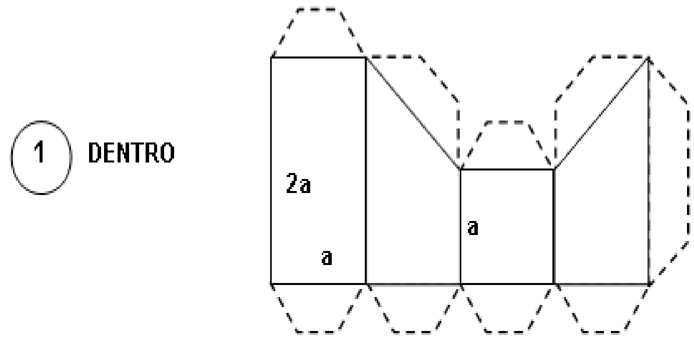
Actividad planteada para los niños:[13]

Los estudiantes formarán grupos (seis niños por grupo) para iniciar con la actividad. Se entregará a cada grupo de niños los planos necesarios para la construcción de la botella de Klein.

Plano 1.

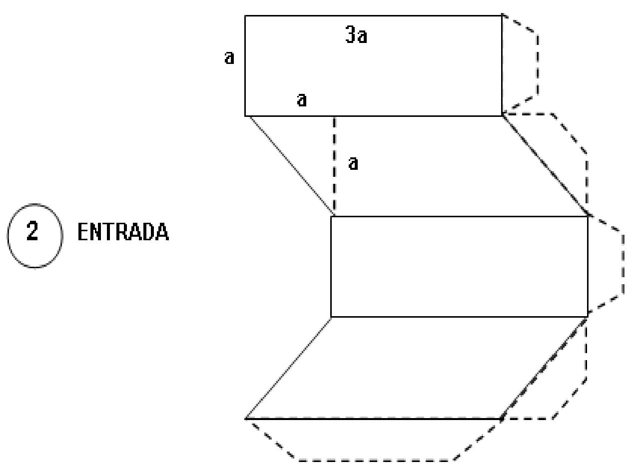
Diseñada esta parte 1 los niños unirán los bordes izquierdo y derecho.

[13] Construcción extraída del libro topología desde la infancia, escrita por Julián Guzmán y Fernando Mesa, en 2010 lección 7 Botella de Klein.



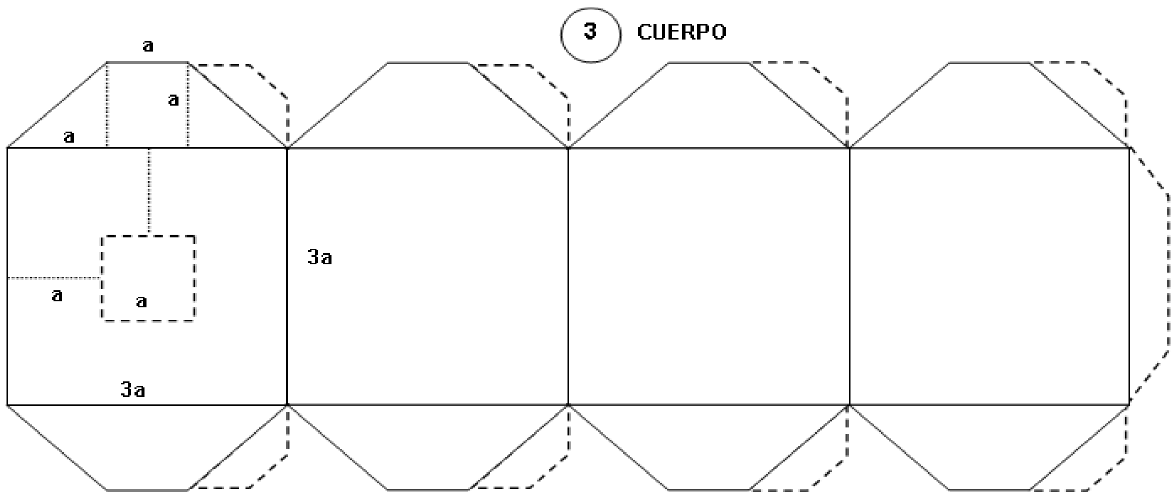
Plano 2.

Diseñada esta parte 2 los niños unirán sus bordes superior e inferior. Y luego**,** unirán esta parte 2 con la parte 1.



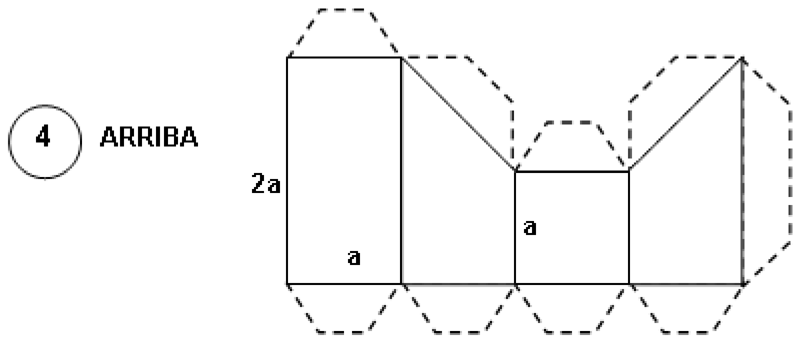
Plano 3.

Diseñada esta parte 3, los niños introducirán por su cuadradito de lado **a** las partes 1 y 2 ya unidas. Luego unirán los bordes izquierdo y derecho; y por último se unirán las pestañas de la base inferior. De esa unión surgirá un orificio cuadrado de lado **a;** por donde introducirán las pestañas de la base inferior de la parte (1) dentro, y las pegarán en el borde de dicho orificio. Por último unirán las pestañas de la parte superior (De esa unión surgirá un orificio cuadrado de lado **a**)



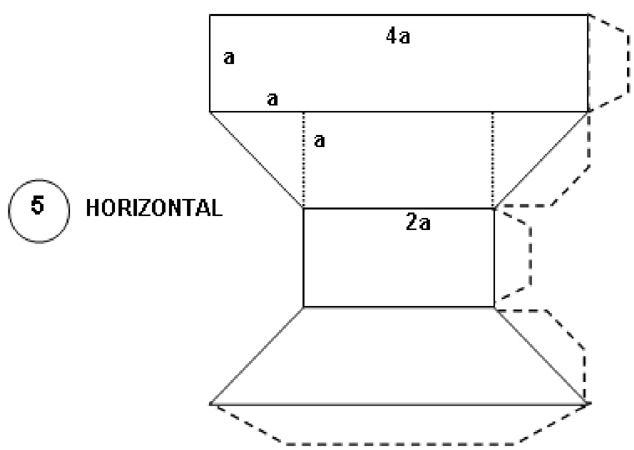
Plano 4.

Diseñada esta parte 4, los niños unirán los bordes izquierdo y derecho; luego pegarán las pestañas de la base inferior en el borde del orificio cuadrado del lado **a** que se forma en la base superior del cuerpo



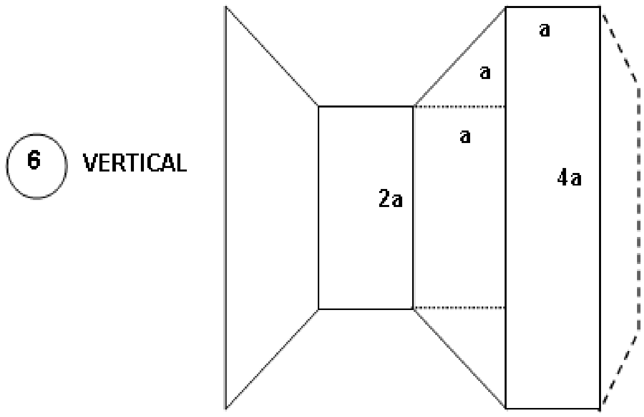
Plano 5.

Diseñada esta parte 5, los niños unirán los bordes inferior y superior, y luego la pegarán a la parte 4 (arriba).



Plano 6.

Diseñada esta parte 6, los niños unirán los bordes izquierdo y derecho, y luego la pegarán a las partes 5 y 2, obteniéndose la botella de Klein.



Evaluación:

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes. A Aprovechando en esta actividad fortalecer:

  a. El trabajo en grupo.
  b. La creatividad.
  c. El liderazgo.
  d. Motivación.

5.7. Actividad 7

Nombre de la actividad: El mundo de los nudos.

Nivel de escolaridad: Básica primaria.

Grado de aplicación: 4° y 5°

Enfoque temático: Los nudos en la topología.

Estándar: Compruebo que existe una técnica topológica que permite leer los nudos.

Objetivos:

- Clasificar los nudos, saber cuántos nudos hay y de qué tipo son.
- Comprender que todo nudo tiene un proceso topológico.

Tiempo aproximado: 4 horas

Materiales:

- Pita
- Corbatas
- tijeras

Desarrollo de la actividad:

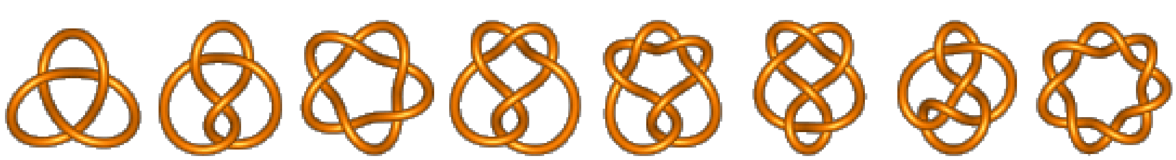
1. Se iniciará la clase con un poco de historia del principal nudo en el mundo de los niños el nudo Gordiano.
2. Se explicará la importancia de la teoría de los nudos en la topología.
3. Se les pedirá a los estudiantes formar grupos (3 estudiantes), para iniciar la construcción de los nudos.

4. Cada integrante del grupo se hará cargo de elaborar un nudo diferente.
5. Se le pedirá a cada grupo elaborar con la pita tres nudos topológicos diferentes.
6. Uno de los miembros del grupo tendrá la responsabilidad de explicar cómo realizaron cada nudo.
7. Se explicará algunas aplicaciones de la vida cotidiana.
8. Se les pedirá a cada grupo ahora realizar cuatro nudos diferentes de corbata.
9. Cada grupo tendrá que explicar cómo realizaron cada nudo con la corbata y desatar la corbata sin quedar nudos.
10. Finalmente, los estudiantes deberán anotar en una hoja las conclusiones que ellos percibieron acerca de la teoría de los nudos.

Actividad planteada para los estudiantes:

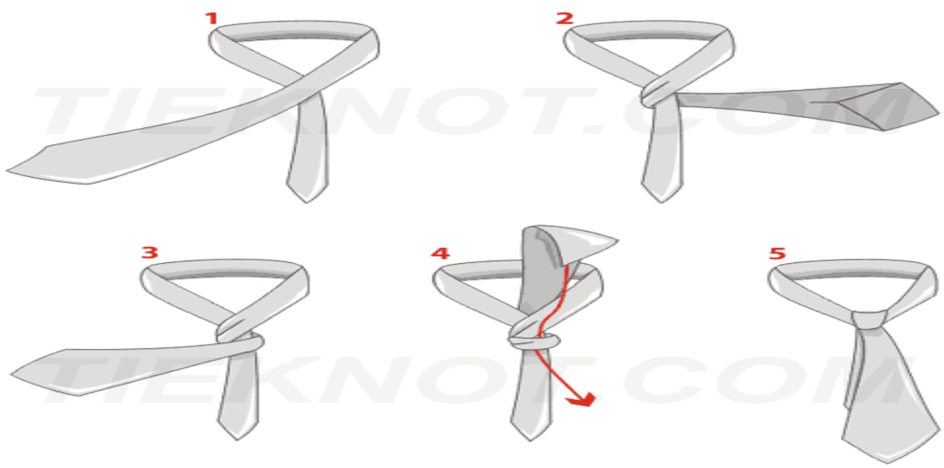
Se formaran grupos de tres estudiantes donde se les entregará tres metros de pita gruesa, una corbata y una hoja donde encontraran los nudos y los pasos a seguir para construir cada uno de los nudos, de esta manera se podrá dar inicio a la actividad.

Los estudiantes tomaran la pita y construirán tres nudos topológicos diferentes de los ocho que muestra la figura:

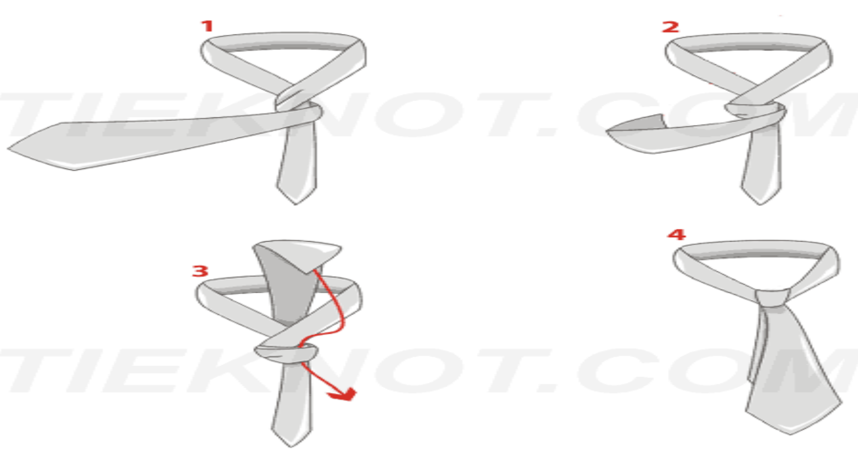


Después de que los estudiantes hayan resuelto los tres nudos, se procederá a realizar los cuatro nudos de la corbata como se muestra en las siguientes figuras:[14]

El nudo simple:

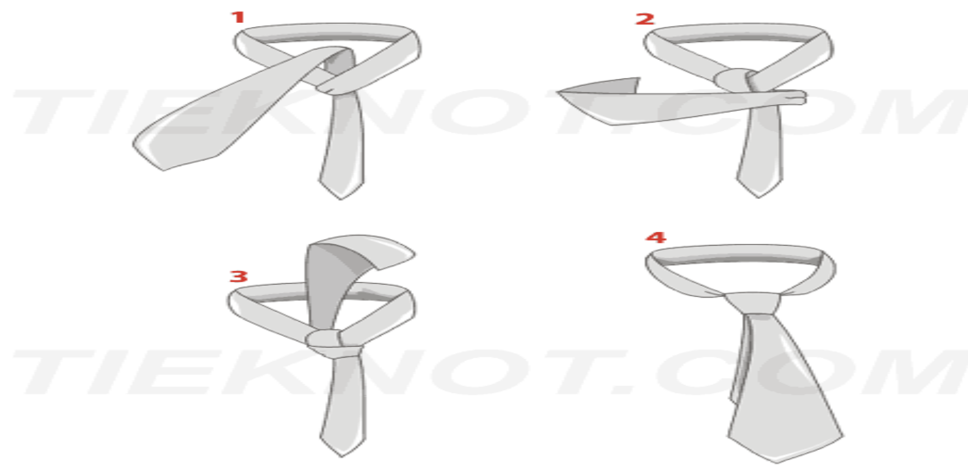


El nudo doble:

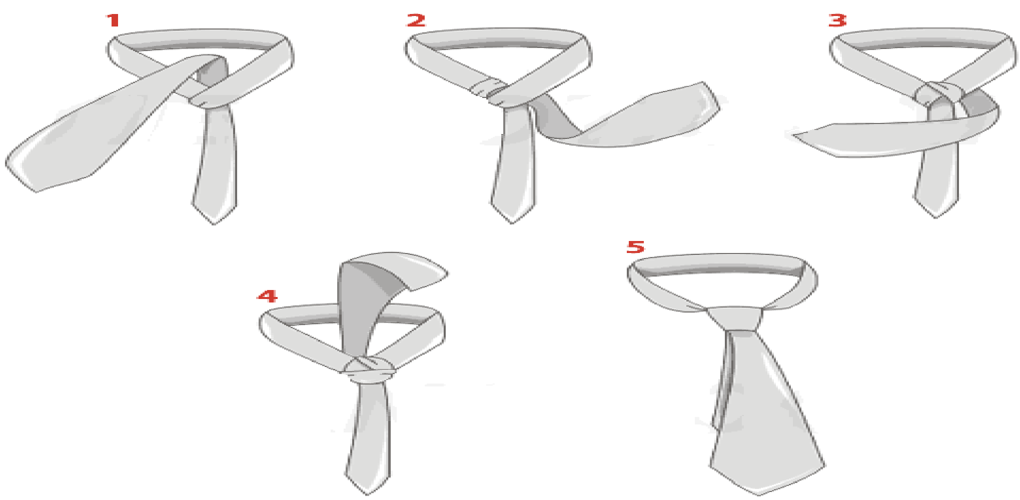


[14] Dibujos extraídos del libro topología desde la infancia, escrito por Julián Guzmán y Fernando Mesa, publicado en el 2010, lección 10 Teoría de los Nudos.

El nudo medio Windsor:



El nudo Windsor:



Evaluación

- La evaluación cualitativa será un proceso dinámico y continuo donde se podrá analizar la actitud del estudiante a la hora de abordar la actividad, donde se valorará el aprovechamiento del aprendizaje de los estudiantes.

- La evaluación cuantitativa se realizará basados a los resultados esperados en la actividad planteada, donde podremos socializar a nivel grupal que conclusiones se pueden obtener al finalizar el desarrollo de la actividad. De esta manera podremos optimizar las metodologías de enseñanza, descubriendo las fortalezas y dificultades para que en próximas ocasiones sea más efectiva la aplicación de dicha actividad.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Diario de campo.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Actividades manipulativas	Quinto	Transformaciones topológicas	8 Agosto 10 de Agosto de 2012	Desde el inicio de las practicas se pudo evidenciar el gran interés por los niños por conocer nuevas metodologías propuestas para comprender las matemáticas, de esta manera se creó un ambiente muy ameno el cual se hizo propicio para la actividad. Debemos confesar que al estar enfrentados a un grupo de 38 estudiantes, pensamos que no sería sencilla la tarea, entonces se decidió en tomar diversas estrategias para envolver a los estudiantes y siempre obtener su atención, por esta razón se utilizarán en cada una de las actividades materiales tales como: pinturas, colores, cartulina, plastilina, hojas, etc. Al iniciar con la actividad de las transformaciones topológicas se podía notar que ellos no estaban de acuerdo que de una rosquilla de plastilina se pudiera realizar

				una transformación a una taza con la condición que no se podía romper y que de una esfera pudieras transformarla en un cubo y en diversos ejemplos que se pudieron señalar durante el transcurso de estas dos secciones. Al finalizar la actividad pudimos notar la gran satisfacción de los estudiantes al poder transformar con sus manos y con un trozo de plastilina una esfera a un cubo o la parte que más les llamo la atención transformar un toro simple a un toro doble y a su vez a un toro triple. Al ver la gran satisfacción de cada uno de los estudiantes quedamos muy satisfechos de esta primera sección y con demasiadas expectativas para las siguientes secciones.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Actividades manipulativas	Cuarto	Transformaciones topológicas	8 Agosto 10 de Agosto de 2012	Desde el inicio de las practicas se pudo evidenciar un poco desinterés por los estudiantes por conocer nuevas metodologías propuestas para comprender las matemáticas, ya que la mayoría del grupo era muy apático a las matemáticas, entonces esto nos condujo a incorporar nuevas estrategias metodológicas, por ejemplo: se acordó que en cada inicio de las clases se traería una corta historia acerca del tema pero realizándole una adaptación para niños para que se les haga más ameno y así crear un entorno más propicio para cada una de las siguientes secciones. Debemos confesar que al estar enfrentados a un grupo de 41 estudiantes, de igual forma utilizamos materiales como: pinturas, colores, cartulina, plastilina, hojas, etc. Al iniciar con la actividad de las transformaciones topológicas se podía notar que ellos no estaban de acuerdo que no se pudiera

				cortar ya que en su mundo existen transformaciones cuando cortamos. Se pudo evidenciar que ellos se entusiasmaron un poco más, al observar que si se podía, automáticamente se notó el cambio, continuando con la siguiente pregunta ¿Esto es matemáticas?, los estudiantes no podían creer que actividades tan manipulativas se pudieran implementar al enseñar las matemáticas. Al finalizar la actividad pudimos notar la gran satisfacción de los estudiantes al poder transformar con sus manos y con un trozo de plastilina una esfera a un cubo o la parte que más les llamo la atención el transformar una dona en una taza de café, "*el chiste más común entre los topólogos*".

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Juegos Didácticos	Quinto	Los puentes de Konigsberg	13 Agosto 2012	En esta sección se decide iniciar con los puentes de Konigsberg, ya que tratamos en darle un orden a las actividades, además darles a conocer a los estudiantes el inicio de la Topología, dándole a conocer a los estudiantes la necesidad que surgió a los matemáticos de la época a empezar a investigar esta rama tan importante como lo es la Topología. Esta actividad fue muy divertida para los estudiantes ya que pudimos añadir un nuevo componente a las actividades, el trabajo en grupo, fue un componente vital los estudiantes se sintieron muy a gusto, de esta manera se estaba dando a conocer lo importante de aprender a respetar la opinión del compañero y tratar de solucionar un determinado problema. Al finalizar la actividad se podía evidenciar el gran asombro de los estudiantes en comprender que también en las matemáticas existían teoremas sin resolver, se evidenciaba que para ellos era un

				suceso casi imposible ya que es costumbre decir que las matemáticas son unas ciencias exactas donde todo es demostrable, esto ayudo a realizar una gran discusión y llevar a los estudiantes a realizar una gran cantidad de pruebas para determinar la veracidad de nuestras palabras. Esta actividad fue muy enriquecedora tanto para los estudiantes como para nosotros, ya que se puede concluir lo versátil que puede llegar hacer las matemáticas a la hora de ser enseñada.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Juegos Didácticos	Cuarto	Los puentes de Konigsberg	13 Agosto 2012	En esta sección se decide iniciar con los puentes de Konigsberg, ya que tratamos en darle un orden a las actividades, además darles a conocer a los estudiantes el inicio de la Topología, dándole a conocer a los estudiantes la necesidad que surgió a los matemáticos de la época a empezar a investigar esta rama tan importante como lo es la Topología. Esta actividad fue muy enriquecedora para los estudiantes ya que pudimos añadir un nuevo componente a las actividades, el trabajo en grupo, aunque al principio se presentaron varios inconvenientes, ya que los estudiantes no estaban acostumbrados a realizar trabajos en grupo, entonces empezar a socializar un problema para darle una solución era muy complicado porque cada estudiante quería tener la razón y esto llevaba a que los estudiantes cayeran en discusiones. Se decide en darles algunas tic´s del trabajo en grupo y poder facilitar esta nueva situación

				para ellos, los estudiantes al empezar aplicar dichas recomendaciones se pudo evidenciar notablemente el cambio de actitud de cada uno de los grupos, convirtiéndose entonces esta nueva metodología en un componente vital para los estudiantes. Se podía notar que se estaban sintiendo muy a gusto, y de esta manera se estaba dando a conocer lo importante de aprender a respetar la opinión del compañero y buscar una solucionar en conjunto a un determinado problema. El grupo al versen enfrentados a este tipo de pregunta, de si un teorema matemático tenia solución, se sintieron comprometidos a llegar de cualquier modo a una respuesta afirmativa, aunque observamos que siempre que realizaban las pruebas llegaban que no eran capaz o asimilaban nuevas reglas para poder decir que si era posible dicho teorema. Después de incontables pruebas para encontrar la respuesta del teorema

				se dieron cuenta que de cualquier forma este teorema no tenía solución posible, lo que les sorprendió un poco pero se les notaba una cierta satisfacción de haber podido comprobar este teorema. Esta actividad nos dejó muchas enseñanzas como por ejemplo: la importancia del trabajo en grupo, y lo satisfactorio que puede llegar a hacer que los estudiantes estén enfrentados a diversas situaciones y con poco de ayuda del docente ellos puedan llegar a conclusiones coherentes.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Actividades manipulativas	Quinto	Trabajando con los poliedros	14 Agosto al 15 de Agosto del 2012	Esta actividad fue muy entretenida para los estudiantes debido a que en la mayoría tenían una gran habilidad para el dibujo, entonces el construir los diversos poliedros se convirtió en una actividad muy amena, de igual manera se trabajó en grupo para seguir fortaleciendo esta metodología. La actividad consistía en formar cinco grupos los cuales cada uno tenían la responsabilidad de formar los poliedros y con ayuda del conteo de las caras. Aristas y vértices encontrar un acertijo el cual nos conducía a interpretar una de las propiedades de los poliedros. Este nuevo reto para los estudiantes como siempre lo asumieron con una gran responsabilidad y entrega, aunque les costó un poco poder entender que con simples sumas y restas entre las caras, vértices y aristas el resultado de cada uno de los poliedros trabajados por ellos era dos. Aunque al final pudieron comprender sin mayores inconvenientes la finalidad de esta

				actividad. Al finalizar la actividad todos los estudiantes concordaron que se debería utilizar más a menudo este tipo de actividades tan manipulativas al explicar diversos temas de las matemáticas.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Actividades manipulativas	Cuarto	Trabajando con los poliedros	14 Agosto al 15 de Agosto del 2012	Esta actividad fue muy entretenida para los estudiantes, aunque causo algo de dificultad en la elaboración de los poliedros ya que los estudiantes tenían poco conocimiento del manejo de las escuadras, este inconveniente lo solucionamos rápidamente y pudimos proseguir con la actividad. Durante el desarrollo de la actividad no tuvimos más inconvenientes, aunque algo nos causó mucha curiosidad, la facilidad que tuvieron los estudiantes en encontrar el acertijo tardó muy pocos minutos en darnos la respuesta correcta. Fue una gran sorpresa para nosotros ya que en anterioridad habíamos aplicado esta misma actividad y les había costado un poco más en comprender lo que se quería dar a entender, fue muy satisfactorio tanto para ellos como para nosotros poder ver como estudiantes con edades entre 8 y 9 años pudieran absorber conceptos tan abstractos que hasta a nosotros mismos como docentes a

				veces nos causa dificultades. Esta actividad nos ayudó a comprender a un más lo importante y lo vital que es implementar estas metodologías en los estudiantes desde tempranas edades, ya que con ellas estamos proporcionándoles más herramientas para descubrir el hermoso mundo de las matemáticas.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Juegos didácticos	Quinto	Matemáticas con colores	16 Agosto al 17 de Agosto del 2012	Esta actividad fue una de las más admiradas hasta el momento tanto por estudiantes como por los docentes de la Institución, ya que fue una actividad que los estudiantes disfrutaron mucho tanto por su manipulación como por sus maravillosas propiedades. La actividad consistía en comprobar un teorema, descubrir que era posible pintar toda clase de dibujo, mapa, tan solo con cuatro colores. Vaya que sorpresa eso no es imposible eso fue la primera percepción de los estudiantes. Durante el desarrollo de la actividad se pudo notar mucho entusiasmo y un gran respeto por el compañero ya los estudiantes se estaban acostumbrando a realizar cada actividad en grupo. Al finalizar esta actividad pudimos notar gran variedad de conclusiones como por ejemplo: - Las matemáticas se pueden relacionar con diversas materias entre ellas sociales por que podemos pintar los

				mapas con solo cuatro colores y estamos utilizando un teorema de las matemáticas - Podemos combinar el arte con las matemáticas. - Vaya ya sabemos que es un teorema y como comprobarlo. Cada una de estas conclusiones son muy satisfactorias ya que los estudiantes están absorbiendo cada uno de los diversos conocimientos de una rama tan abstracta, pero ellos la convierten en un juego que cada vez se interesan más. .

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Juegos didácticos	Cuarto	Matemáticas con colores	16 Agosto al 17 de Agosto del 2012	Esta actividad fue una de las más admiradas hasta el momento tanto por estudiantes como por los docentes de la Institución, ya que fue una actividad que los estudiantes disfrutaron mucho tanto por su manipulación como por sus maravillosas propiedades. La actividad consistía en comprobar un teorema, descubrir que era posible pintar toda clase de dibujo, mapa, tan solo con cuatro colores. Vaya que sorpresa eso no es imposible eso fue la primera percepción de los estudiantes. Durante el desarrollo de la actividad se pudo evidenciar la gran acogida de los estudiantes donde mostraban un cuidado extremo en cada uno de los dibujos donde tenían que aplicar el teorema, no se notó ninguna dificultad, además podemos resaltar que en la actividad, el mejor estudiante que realizo la actividad sin desmeritar a sus compañeros fue un niño muy recordado por nosotros por su

				discapacidad era un niño autista y se pudo involucrar de tal manera que pudo colorear sin ayuda el mapamundi con cuatro colores. Tanto para el niño como para nosotros fue un hecho inolvidable que no quisimos dejar de mencionar, para dejarlo como una pequeña reflexión.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Juegos didácticos	Sexto	Transformaciones topológicas	7 de noviembre de 2013	Al inicio de estas prácticas se pudo evidenciar un gran desinterés por parte de los estudiantes por asumir clases extras de matemáticas, ya que la mayoría no le gusta estudiarla. Al principio creímos que la experiencia en el grado sexto seria asumida de igual modo que los estudiantes de quinto grado, pero nos encontramos con una gran sorpresa, ya que fue un poco más difícil en organizarlos e incentivarlos al trabajo en grupo, gran inconveniente ya que la mayoría de las actividades están desarrolladas para fortalecer el trabajo en grupo que es de vital importancia en nuestra sociedad. La actividad consistía en realizar diversas transformaciones donde los estudiantes podrían entender como una esfera es igual a un cuadrado, manipulando plastilina y unos puzles. Durante el desarrollo de la actividad se pudo evidenciar el gran asombro de cada uno de los estudiantes, al afirmar que esto era una rama de las matemáticas, poco a poco la actitud fue más

				amena y más comprometida con la actividad. Después de un rato de realizar varias transformaciones los estudiantes se interesaron un poco más por conocer que era la topología y en nuestro vida cotidiana en donde podríamos evidenciarla. Al finalizar la actividad se pudo evidenciar el gran cambio de actitud de los estudiantes, pero como reflexión muy personal se puede citar la gran importancia de implementar actividades manipulativas a los estudiantes desde edades tempranas de esta manera se podrá despertar un espíritu más intuitivo hacia las matemáticas.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Juegos didácticos	Sexto	Puentes de königsberg	8 de noviembre de 2013	En esta actividad se pudo evidenciar mucho más entusiasmo al inicio de esta práctica, ya que tenían gran habilidad en el dibujo y esto les favorecía al inicio de la actividad, después se tornó un poco complicado ya que es un grupo de 42 estudiantes y poseen un alto grado de indisciplina que hace que las actividades se tornen un poco más complicadas. La actividad consistía en realizar un mapa donde existían siete puentes diferentes donde los estudiantes tenían que encontrar un camino donde bebían recorrer todos los puentes sin repetir puente, fue un gran reto ellos ya que las conclusiones hacían disputar diversas opiniones, por ejemplo: si hay solución, no hay solución, está mal enunciado el problema entre otras. Después de un rato de escuchar varias opiniones, realizamos una mesa redonda donde se pudo discutir las diversas conclusiones y poco a poco se les otorgo pautas para que ellos llegaran a la conclusión verdadera, de esta

				manera después de unos 10 minutos aproximadamente pudieron entender que este problema matemático en su época no tenía solución y de esto empezó a surgir la necesidad de la Topología. Al concluir la actividad pudimos evidenciar el gran asombro de los estudiantes por encontrar un problema de la matemática sin resolver, de igual manera en los demás grados surgió esta misma actitud.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Actividades Manipulativas	Sexto	Trabajando con los poliedros	12 de noviembre de 2013	En esta actividad se pudo evidenciar mucho más entusiasmo y mucha más participación ya que como son actividades manipulativas, los estudiantes del grado sexto tienen una mayor agilidad a la hora de dibujar y realizar trazos con la escuadra y demás utensilios olvidados para explicar las matemáticas. Fue una actividad que los estudiantes disfrutaron mucho ya que como habíamos aclarado en actividades anteriores poseen una gran habilidad para el dibujo y en estas actividades se aprovechan al máximo. Al finalizar la actividad se pudo evidenciar que a pesar de tener tanta destreza por el dibujo les causo un poco más de dificultad que a los grados cuarto y quinto en entender que se quería dar a conocer con esta maravillosa actividad.

Metodología	Grado	Temáticas	Fecha	Observaciones
Actividades Manipulativas	Sexto	La cinta de Mobius	13 de noviembre de 2013	En esta última actividad con el grado sexto se pudo evidenciar lo fantástico que es poder manipular la cinta de mobius, fue una gran actividad todos los estudiantes se interesaban por conocerla y saber cuáles eran sus maravillosas propiedades, aunque en momentos se perdía el interés por la actividad, entonces tratábamos de involucrarlos de nuevo, pero en ocasiones se tornaba algo difícil ya que los estudiantes no les gusta mucho los temas matemáticos. Esta actividad consistía en elaborar la cinta y poder conocer sus tres propiedades, donde podríamos entender que un elemento topológico no se puede cortar. Al momento de concluir la actividad se pudo notar una gran dificultad para llegar a una conclusión de la actividad, en esta ocasión tratamos que las conclusiones fueran individuales para comprender que pensaban los estudiantes de grado sexto de la topología.

				Cabe nombrar que las actividades que fueron implementadas en el grado sexto fueron muy productivas, que nos ayudaran a tomar un rumbo diferente a las conclusiones de este trabajo de investigación.

6.2 CONCLUSIONES GENERALES.

- Aunque inicialmente los conocimientos topológicos de los estudiantes eran nulos, el diseño manipulativo de las actividades topológicas permitió que ellos absorbieran ideas o nociones principales de la topología, como: que estudia, para que sirve y en que se evidencia la topología.

- Resaltamos que algunas de las actividades que se realizaron en este proyecto han sido foco de estudio de algunas universidades españolas con estudiantes de escuela secundaria con edades entre los 12 y 15 años, siendo este un proyecto que a pesar de realizarse con estudiantes de edades menores a las recomendadas por estas universidades, logró captar el total interés de estos estudiantes arrojando excelentes resultados.

- La realización de actividades topológicas con un fuerte componente histórico facilitó el desarrollo de las actividades diseñadas, ya que se pudo evidenciar en los estudiantes un alto grado de interés por los hechos cronológicos que desarrollan todo un marco teórico, logrando así, involucrar totalmente a los estudiantes en cada una de las actividades, impulsándolos a la indagación e investigación por cuenta propia.

- Cabe resaltar que en la institución Bolivariana las actividades grupales no eran tenidas en cuenta por ningún docente en el área de matemáticas, por lo cual, la implementación de nuestras prácticas tomó mayor relevancia puesto que todas las actividades que realizamos eran de índole grupal, logrando fortalecer en los estudiantes auténticos valores como la tolerancia, el respeto, la cooperación, la solidaridad entre otros y logrando la percepción de las matemáticas no solo como un pilar numérico para los estudiantes, sino también como un pilar social y moral.

- Resaltamos que las actividades topológicas trabajadas en los grados cuarto y quinto fueron realizadas con mayor facilidad en comparación a las actividades trabajadas en los grados sexto, dejando en evidencia que la formación matemática que nosotros deseamos para nuestros estudiantes se debe trabajar y fortalecer desde edades tempranas, y no esperar para realizar actividades que fortalezcan su formación matemática cuando la pereza hacia las matemáticas este arraigada de manera tal que sea imposible impactar, motivar e involucrar a los estudiantes con el mundo tan maravillo que las matemáticas nos ofrecen.

6.3 RECOMENDACIONES.

- Es de vital importancia realizar actividades donde los estudiantes puedan adquirir un pensamiento más autónomo, conduciéndolos a construir su conocimiento propio.

- Implementar continuamente actividades a nivel grupal, para fortalecer continuamente el respeto y la tolerancia.

- Para experiencias topológicas futuras, es importante planear un orden cronológico en las actividades.

- Diseñar diferentes actividades topológicas para grados 4° y 5° de básica primaria o para grados superiores e inferiores a estos.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Libro de Topología desde la infancia. Acerca de didáctica topológica. Publicado por Correa Vélez, German en el 2010. Escrito por Julián Guzmán Baena y Fernando Mesa. (citado en julio de 2012).

2. José Luis Rodríguez Blancas. PDF acerca de los juegos topológicos. Publicado en Universidad de Almería en 2011. (citado en agosto de 2012). http://topologia.files.wordpress.com/2011/01/i-jornada-profesores-matematicas-almeria.pdf

3. Carlos Montoya y Pablo Flores. PDF acerca Puzzles en alambre. (citado en agosto de 2012). http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Articulo_Gaceta_Montoya_Flores.pdf.

4. Página web Wikipedia. (citado en julio de 2012). https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg.

5. Artículo sobre los siete puentes de Königsberg, publicado en el 2011. (citado en julio de 2012) http://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2011/12/01/euler-y-los-siete-puentes-de-konigsberg/.

6. Articulo juegos topológicos. Acerca la fórmula de Euler publicado en octubre 23 de 2008. (citado en julio de 2012). http://topologia.wordpress.com/2008/10/23/8-la-formula-de-euler-para-poliedros-v-ac2/

7. Artículo de la información.com. Acerca de la fórmula de Euler. (citado en agosto de 2012). http://gaussianos.com/la-formula-de-euler-una-maravilla-matematica/.

8. Centro virtual de divulgación de las matemáticas. Publicado por la RSME (Real Sociedad Matemática Española). (citado en agosto de 2012). http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=12401&directory=67

9. Revista digital de las matemáticas. Articulo acerca de la fórmula de Euler en las matemáticas. (citado en agosto 2012). http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/Vol5n1Jun2004/node11.html

10. Macho Stadler Marta. Articulo acerca la banda de Mobius. Publicado en Universidad del País Vasco-Euskal. (citado en agosto 2012). http://revistasuma.es/IMG/pdf/54/015-022.pdf

11. Johann Benedict Listing. Articulo acerca de la historia de la Topología (online). Publicado en Amterdam en 1999. (citado en julio de 2013). http://www.topologia.org/historia_de_la_topologia.htm.

12. David Garro Moreno. Historias de las matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid (online). (citado en julio de 2013). http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/HISTORIADELATOPOLOGIA.pdf

13. Gustavo A. Sanabria. Articulo Orígenes de la Topología. Publicado en Cañaveral - Tubarco noviembre de 2011 (Online). (citado en agosto de 2013). http://es.slideshare.net/gsanabria73/orgenes-e-historia-de-la-topologa-14442942