

**ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS FUNDAMENTADAS EN LOS NIVELES DE  
VUSIALIZACIÓN Y ANÁLISIS DE LA TEORIA DE LOS ESPOSOS VAN HIELE**

**ANGELICA LILIANA MEJIA GIL  
LEIDY MIRYAM RESTREPO RESTREPO**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL  
PEREIRA  
2013**

**ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS FUNDAMENTADAS EN LOS NIVELES DE  
VUSIALIZACION Y ANÁLISIS DE LA TEORIA DE LOS ESPOSOS VAN HIELE**

**ANGELICA LILIANA MEJIA GIL  
LEIDY MIRYAM RESTREPO RESTREPO**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de  
Licenciatura en Pedagogía Infantil**

**HECTOR GERARDO SANCHEZ**

**Magister**

**Co-investigador**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL**

**PEREIRA**

**2013**

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

---

Firma del presidente del jurado

---

Firma del jurado

Pereira, Noviembre de 2013

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por darnos la vida, la fortaleza, la salud y la sabiduría para seguir adelante siempre en lo que nos proponemos sin decaer.

A la Universidad Tecnológica de Pereira, a la facultad de Ciencias de la Educación y a los docentes, quienes con su profesionalismo y ética nos brindaron sus conocimientos que nos servirán como futuras maestras.

A nuestro profesor y asesor, Héctor Gerardo Sánchez, por la inmensa paciencia y experiencia como docente e investigador, quien ha sido guía durante todo este proceso, brindando el tiempo necesario y la información requerida para culminar satisfactoriamente este proyecto.

A todo el personal de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento, y en especial a la docente titular y a los estudiantes de grado tercero de primaria por su disposición, apoyo y participación en el desarrollo de las pruebas y las estrategias didácticas.

A nuestras familias, quienes velaron por nuestros estudios y formarnos como personas con buenos valores éticos y morales, por su apoyo incondicional que nos permitió culminar con éxito este proyecto.

Y por último, agradecerles a las compañeras no solo del grupo de investigación, sino también a las de la carrera y a todas las demás personas que de alguna u otra forma contribuyeron para alcanzar esta meta tan esperada.

Siéntanse acreedores de nuestro especial agradecimiento, Dios los Bendiga.

*Dedicamos este trabajo especialmente a Dios, por darnos la vida y la sabiduría necesaria para culminarlo. A los docentes quienes a partir de ahora cuentan con otra herramienta que les posibilita generar estrategias encaminadas a mejorar la enseñanza del pensamiento espacial y por ende, transformar sus prácticas buscando la formación de seres íntegros.*

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	8
INTRODUCCIÓN	10
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
Pregunta de investigación	12
2. OBJETIVOS	13
2.1. Objetivo general	13
2.2. Objetivos específicos	13
3. REFERENTE TEÓRICO	14
3.1. Antecedentes	14
3.2. Marco Conceptual	16
3.3. Marco teórico de macro proyecto	18
3.4. Marco Disciplinar	35
4. METODOLOGÍA	44
4.1. Técnicas e instrumentos de recolección de información	44
4.2. Procedimiento de recolección de datos	45
4.3. Procedimiento de análisis de datos	45
5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	52
6. DISCUSIONES E INTERPRETACIONES	64
7. CONCLUSIONES	82
8. RECOMENDACIONES	84
9. BIBLIOGRAFÍA	85
10. ANEXOS	87

## CONTENIDO DE TABLAS

	Pág.
TABLA 1: Niveles de razonamiento	45
TABLA 2: Fases de aprendizaje	49
TABLA 3: Cuadro general análisis prueba inicial	58
TABLA 4: Cuadro general análisis prueba final	61

## RESUMEN

La presente investigación es realizada como parte del macro proyecto titulado “Estrategias didácticas fundamentadas en los niveles de razonamiento de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de los esposos Van Hiele, que fortalecen el desarrollo del pensamiento espacial a través de procesos de enseñanza y aprendizaje implementados por las estudiantes de décimo semestre del programa de licenciatura en pedagogía infantil en instituciones educativas del Departamento de Risaralda”; investigación realizada con base en una metodología de enfoque cualitativo, en la que se estudia la teoría de los esposos Van Hiele y aspectos de Piaget y Gardner que aportan al desarrollo del pensamiento espacial en los niños y niñas y se aplica una serie de estrategias didácticas creadas para trabajar y desarrollar la construcción y caracterización del paralelepípedo y basadas en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele.

Se hace uso de unas pruebas inicial y final, diseñadas cuidadosamente con base en los estándares, las pruebas saber y la teoría de Van Hiele, para evaluar los aspectos necesarios en los estudiantes que den cuenta de los conocimientos previos con la prueba inicial y de los conocimientos adquiridos luego de la aplicación de las estrategias didácticas en la prueba final. Además de estas pruebas, también se aplican unas estrategias didácticas que diseñadas con base en los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de la teoría de los esposos Van Hiele y que al ser creadas, aplicadas y analizadas, ayudan a los estudiantes a avanzar en los niveles de razonamiento.

**PALABRAS CLAVES:** Pensamiento espacial, cognición, estructuras mentales, aprendizaje, enseñanza, Van Hiele, razonamiento.



## ABSTRACT

This research is conducted as part of the macro project entitled " Teaching Strategies substantiated levels of reasoning visualization and analysis and in the learning stages proposed in the theory of spouses Van Hiele , which strengthen the development of spatial thinking through teaching and learning processes implemented by the students in the tenth semester of degree program in early childhood education in educational institutions of the Department of Risaralda " ; investigation based on a methodology of qualitative approach , in which theory is studied Van spouses Ice and aspects of Piaget and Gardner contributing to the development of spatial thinking in children and a number of teaching strategies created to work and develop the construction and characterization of paralelepípedo and levels based visualization and analysis is applied and the learning phases of the Van Hiele theory .

Using a first and last tests, carefully designed based on the standards is made, testing knowledge and Van Hiele theory to evaluate the necessary aspects in students realize the background with the initial test and knowledge acquired after implementing teaching strategies in the final test. In addition to these tests, some teaching strategies designed based on the levels of reasoning and learning phases of the theory of Van Hiele and husbands to be created, applied and discussed also apply, help students advance levels of reasoning.

**KEYWORDS:** Spatial thinking, cognition, mental structures, learning, teaching, Van Hiele, reasoning.

## INTRODUCCION

Actualmente los procesos educativos se encuentran en constantes cambios, a diario nacen nuevas teorías y métodos de enseñanza, que permiten mejorar la interacción estudiantes – docentes – saber. Este constante cambio hace que los docentes y todos los profesionales involucrados en el ámbito educativo deban estar al tanto de esas nuevas teorías y métodos, y los maestros del campo de las matemáticas a nivel educativo no son la excepción, por ello lo que se hace en este trabajo de investigación es analizar las estrategias didácticas que fundamentadas en la teoría de los Esposos Van Hiele, inciden positivamente en el desarrollo del razonamiento espacial, por lo tanto lo que se encuentra en este documento es la recopilación de dicho trabajo.

Al iniciar la investigación es debido estudiar a fondo la teoría propuesta por los esposos Van Hiele, la cual se centra en dos aspectos fundamentales como son las fases de aprendizaje y los niveles de razonamiento, teoría que es muy interesante y provechosa, además de servir para el resto del trabajo de investigación.

Durante los siguientes pasos se construyen las estrategias didácticas y se aplican a los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento, con edades comprendidas entre los 8 y 9 años. Después de esto y haciendo uso de transcripciones de las secciones de clase y la teoría de los esposos Van Hiele se realiza el análisis, interpretación, conclusiones y recomendaciones del trabajo de investigación.

Este trabajo de investigación permite entonces conocer la teoría planteada por los esposos Van Hiele, conocer también ejemplos de estrategias realizadas de acuerdo a esta teoría y por otra parte, enterarse de la incidencia de dicha teoría en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El área de las matemáticas en Colombia y en general en toda Latinoamérica, es un área en la cual la mayoría de estudiantes presenta dificultades, esto se ve reflejado en las pruebas PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) donde los estudiantes latinoamericanos obtuvieron un puntaje muy bajo; lo más preocupante es que no solo se evidencia en las pruebas PISA o en las pruebas SABER en Colombia, sí no que también en los salones de clase los docentes manifiestan que sus estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en general, y los mismos estudiantes reconocen estas mismas dificultades, pero hay un problema mayor y es que los docentes centran su atención en el pensamiento numérico, preocupados porque sus estudiantes se desenvuelvan y resuelvan con destreza las operaciones básicas, descuidando los otros pensamientos y reduciendo su importancia dentro de las competencias y contenidos a trabajar en el año escolar. Uno de los pensamientos más olvidados es el pensamiento espacial que es reducido a la simple memorización de nombres de figuras geométricas y fórmulas para hallar el área de dichas figuras, dejando de lado la comprensión desde el mismo espacio y desde la realidad y el contexto en el que se encuentran los y las estudiantes; en contra de lo planteado por los esposos Van Hiele en los niveles de razonamiento que son: visualización, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y nivel de rigor y las fases para el aprendizaje de la geometría, las cuales son: preguntas/información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

Según el modelo de los esposos Van Hiele, es muy importante que los y las estudiantes desarrollen los niveles de manera secuencial, puesto que las habilidades a desarrollar en un nivel dependen de las habilidades adquiridas en el anterior. Por ejemplo: el primer nivel (visualización) parte precisamente de la realidad, el espacio alrededor. Ignorar este nivel hace que se les dificulte la aplicación en el contexto real, lo cual no le permitiría al estudiante desarrollar las habilidades del siguiente nivel donde comprende que el espacio que lo rodea tiene unos componentes. También se estaría actuando en contra de los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional que sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad de los y las estudiantes y su interacción con el mundo.

Ya en el contexto y específicamente en Pereira al hablar con los docentes, manifiestan que: “los estudiantes no logran hallar el área de una figura geométrica, aunque les entreguemos las fórmulas”, sin tener en cuenta que los estudiantes no logran esto porque se ha dejado de lado el desarrollo de los niveles anteriores que son necesarios para llegar a adquirir las habilidades que requiere dicho nivel; o más preocupante aun, dicen que: “en este periodo no vimos geometría porque los estudiantes tiene muchos vacíos en las operaciones básicas y todo el periodo dedicamos las clases a reforzarlos”, ignorando que el pensamiento espacial contribuye al desarrollo del pensamiento lógico, que a su vez aporta al desarrollo del pensamiento numérico.

Partiendo de todo lo anterior se realizan algunos interrogantes tales como: ¿Para qué crear teorías si no van a ser aplicadas?, ¿dónde queda entonces el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes?, ¿De qué manera los docentes están trabajando la geometría en el aula de clase?, ¿Será la metodología utilizada por los docentes la que hace que se presenten dificultades en el aprendizaje de la geometría? Partiendo de estas preguntas se quiere guiar esta investigación poniendo la mirada en la relación existente entre la teoría de Van Hiele y las estrategias que utilizan los docentes en el aula de clase para el desarrollo del pensamiento espacial; teniendo como problema la ausencia de la aplicación de la teoría de Van Hiele sobre el desarrollo del pensamiento espacial en las clases de geometría, se desea indagar acerca de: ¿Qué estrategias didácticas fundamentadas en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de los Esposos Van Hiele, favorecen la construcción y caracterización del paralelepípedo en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento?

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1. OBJETIVO GENERAL**

Interpretar las estrategias didácticas que fundamentadas en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de los Esposos Van Hiele, favorecen la construcción y caracterización del paralelepípedo en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento

### **2.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS**

- Construir una propuesta basada en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele para la construcción y caracterización del paralelepípedo en los niños de grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento.
- Aplicar una estrategia basada en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele para la construcción y caracterización del paralelepípedo en los niños de grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento.
- Identificar por medio de la observación los resultados obtenidos de la propuesta basada en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele para la construcción y caracterización del paralelepípedo en los niños de grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento.
- Contrastar lo propuesto en la teoría de Van Hiele para el desarrollo del pensamiento espacial con los hallazgos de la implementación de una propuesta didáctica en los niños de grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento.

### 3. REFERENTE TEORICO

#### 3.1. ANTECEDENTES

En la actualidad la enseñanza de las matemáticas es un tema de diversos artículos e investigaciones; las dificultades presentes son muy nombradas tanto por docentes en ejercicio como por docentes en formación, esta preocupación guía el interés hacia dicho tópico, las dificultades en el área de las matemáticas. Teniendo en cuenta que el área de las matemáticas es muy amplia puesto que está dividida en cinco pensamientos (numérico, métrico, variacional, aleatorio y espacial) se centra esta investigación en el pensamiento espacial, sobre el cual se han encontrado diversas investigaciones, tales como:

- ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometría?, realizada por el Licenciado en Educación Matemática Rider Goncalves Tavares<sup>1</sup>; en dicha investigación se plantea como problema las dificultades que presentan los estudiantes para comprender la geometría y la necesidad de los docente de encontrar una forma adecuada para desarrollar el pensamiento espacial de los estudiantes; para esto, el objetivo de esta investigación, es defender una propuesta como recurso eficaz para el aprendizaje de la geometría. En esta investigación, el Licenciado Rider realizó un análisis de la teoría de Van Hiele, proporcionando una explicación detallada y clara acerca de la misma, con el fin de informar a los docentes sobre la propuesta de Van Hiele, explicando cada aspecto de manera detallada y mostrando los beneficios que ésta tiene para lograr un aprendizaje eficaz de la geometría, explicando la importancia de aplicar este modelo, teniendo en cuenta las características, explica también la diferencia entre la teoría de Van Hiele y la de Piaget, al finalizar, el licenciado Rider concluye que esto es importante porque le permite a los docentes tener claridad en el modelo para crear y diseñar nuevas estrategias que le permitan a los estudiantes el desarrollo y razonamiento intelectual.

---

<sup>1</sup> GONCALVES TAVARES, Rider. ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. Valencia, Estado Carabobo, Venezuela, 16 h. Investigación (Licenciado en Educación Matemática). Disponible en: <<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2212894>>

- Diseño de actividades geométricas interactivas en el marco conceptual del modelo de Van Hiele, realizada por el Profesor e ingeniero Sergio Adolfo Rizzolo<sup>2</sup>; en este trabajo de investigación, se puede evidenciar como objetivo, estudiar la teoría de Van Hiele y diseñar una unidad didáctica sobre cuadriláteros, que le permita a los estudiantes de grado 8º completar la adquisición del nivel 2 de razonamiento para lograr avanzar al nivel 3. Sergio Adolfo, inicialmente estudió la teoría de Van Hiele, dando una explicación detallada y a partir de lo planteado en dicho modelo, diseñó una unidad didáctica sobre cuadriláteros para los estudiantes de grado 8º; en este trabajo de investigación se tenía como problema que los estudiantes, habían alcanzado los procesos y las habilidades propias del primer nivel del modelo de Van Hiele, pero no lograban alcanzar las del nivel 2, es por esto, que Sergio diseña la unidad didáctica que está acorde a los procesos que deben realizar los estudiantes en el nivel 2 para alcanzar el nivel 3, para esto, se integraron las TIC al modelo de Van Hiele, utilizando como recurso la Webquest. En esta investigación, se explica detalladamente cómo se diseña la unidad didáctica, los recursos a utilizar y las actividades y evaluación a realizar en la unidad didáctica.
- Estrategias lúdicas aplicando el modelo de Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría, realizada por Claudia J. Pérez O. y María Eugenia Ruiz<sup>3</sup>; este trabajo de investigación , tiene como objetivo diseñar estrategias lúdicas aplicando el modelo de Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría en los alumnos del séptimo grado de educación básica, Claudia y María Eugenia, aplicaron estas estrategias para el trabajo con el pensamiento espacial, dichas estrategias partieron del juego para lograr el interés y la atención de los estudiantes, motivándolos en el proceso de aprendizaje. Las estrategias de aplicaron a 17 estudiantes de grado séptimo de educación básica en la unidad Educativa Eloy Aredes, al finalizar y evaluar el alcance de las estrategias se evidenció un nivel de razonamiento geométrico más elevado en estos

---

<sup>2</sup> RIZZOLO, Sergio Adolfo. Diseño de actividades geométricas interactivas en el marco conceptual del modelo de Van Hiele. Trabajo final académico (Profesor). Disponible en: <[http://www.coopvgg.com.ar/sergiorizzolo/trabajo/trabajo\\_final.pdf](http://www.coopvgg.com.ar/sergiorizzolo/trabajo/trabajo_final.pdf)>

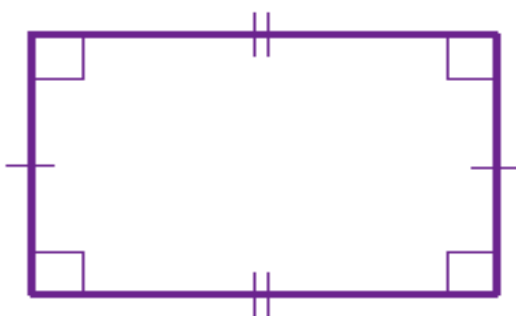
<sup>3</sup> PÉREZ O, Claudia J. y RUIZ, María Eugenia. Estrategias lúdicas aplicando el modelo de Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría. Trabajo final académico. Disponible en: Biblioteca Digital Universidad de los Andes, en: [http://tesis.ula.ve/pregrado/tde\\_busca/archivo.php?codArquivo=2151](http://tesis.ula.ve/pregrado/tde_busca/archivo.php?codArquivo=2151)

estudiantes, ya que estuvieron en la capacidad de visualizar, analizar, clasificar y resolver problemas sencillos y términos nuevos.

### 3.2. MARCO CONCEPTUAL.

Las figuras geométricas se representan siempre en una misma posición, el cuadrado por ejemplo, solo puede representarse apoyado en un lado, pues si la figura se apoya en uno de sus vértices, deja de llamarse cuadrado y pasa a llamarse rombo; este tipo de representaciones hace que el alumno piense que la posición también es una de las características de la figura y que esto hace que en otras construcciones o situaciones no se puedan reconocer fácilmente; con base en esto, el hecho de que un alumno aprenda aspectos de geometría, va más allá de que pueda reconocer, nombrar y representar figuras y cuerpos, sino que también incluye que debe propiciarse la búsqueda de relaciones entre los elementos, por medio de la observación, la comparación, la clasificación y la construcción.

Para que los alumnos logren avances en estos aspectos de la geometría, esta investigación, se centra en el rectángulo para llegar al paralelepípedo, donde el rectángulo es denominado como un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos internos rectos, tiene cuatro lados que son opuestos y paralelos dos a dos.

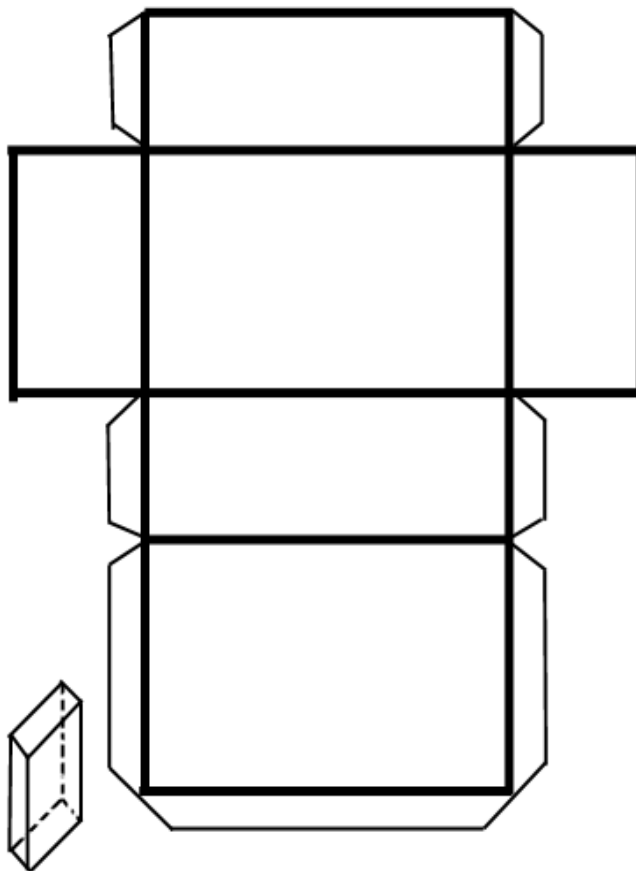
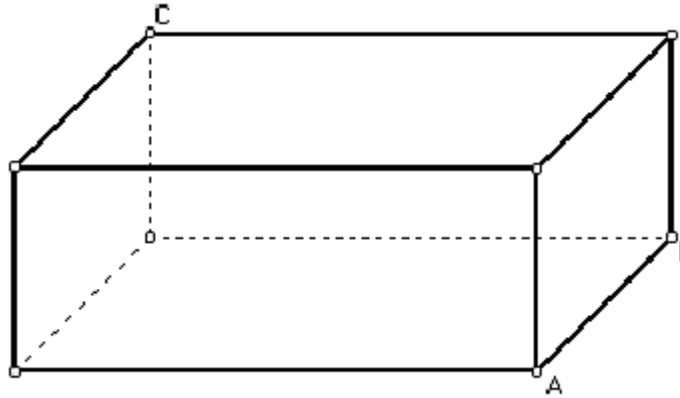


Luego de tomar el rectángulo, se puede llegar al centro de esta investigación, el paralelepípedo, denominado como aquellos prismas cuyas bases son paralelogramos como por ejemplo una caja de cerillas, un edificio, etcétera.

Se comprende fácilmente que un paralelepípedo tiene seis caras (dos correspondientes a las bases que son paralelogramos y dos a las caras laterales). Las caras de un paralelepípedo son respectivamente iguales y paralelas dos a dos. Todo paralelepípedo tiene ocho vértices y doce aristas.



Dentro de los paralelepípedos encontramos el paralelepípedo ortoedro que es el más común, y es un paralelepípedo cuyas seis caras son rectángulos (dos de ellas pueden ser cuadrados) y es conocido también con el nombre de paralelepípedo rectángulo.



**Diseño de un  
paralelepípedo:  
Paralelepípedo ortoedro**

### **3.3. MARCO TEÓRICO DEL MACRO PROYECTO**

El desarrollo de las competencias que tienen que ver con el pensamiento espacial, conocidas generalmente dentro de los contenidos de geometría, en los últimos años ha tenido un abandono en su desarrollo dentro del currículo escolar colombiano. Quizás por su formalismo o generalización a través de expresiones algebraicas, o por la falta de conocimiento de estrategias didácticas que le permita al maestro hacer de su proceso de enseñanza y aprendizaje más significativo para el estudiante, en fin son muchos los factores que pueden intervenir en este planteamiento. El desconociendo del aporte que brinda la capacidad espacial al desarrollo de las representaciones mentales, influye notablemente en el pensamiento lógico matemático. Por otra parte, durante muchos años el trabajo de la geometría se ha minimizado al conocimiento de las figuras, dibujos, diagramas, etc. Como instrumentos de ayuda para facilitar los conceptos geométricos.

Sin embargo, en las últimas investigaciones tomadas por Ángel Gutiérrez (1998) se afirma que en todos los campos de las matemáticas escolares, el aprendizaje y la enseñanza resultan más fáciles y profundos cuando se evita la abstracción innecesaria y se apoya en la representación o modelización, en donde los estudiantes pueden observar, construir, modelar y transformar. Pero aquellas representaciones que se están usando en las aulas de clase son tomadas de libros que representan figuras bidimensionales que sin dudar le supone a los estudiantes una dificultad adicional en el proceso de comprensión; dado que las representaciones resultan demasiado complejas para los estudiantes, trasmitiéndoles los conceptos de forma parcial, o lo que es peor, generando concepciones erróneas y representaciones inadecuadas.

Al respecto Piaget e Inhelder (Piaget e Inhelder 1956, p. 18) plantean la distinción entre percepción y representación. La percepción es el conocimiento de los objetos desde un contacto directo con ellos, en cambio, la representación o imaginación implica la evocación de los objetos en su ausencia o cuando corre paralelo a la percepción en su presencia. Así, la representación mental de una figura, es decir, su imagen, es vista como una imitación interna de acciones.

## **NOCIÓN DE ESPACIO:**

El espacio es el entorno de todos, con el cual se puede interactuar de diversas formas; según Piaget "el espacio lo constituye aquella extensión proyectada desde el cuerpo, y en todas direcciones, hasta el infinito"(Piaget Jean, 1958).

El niño asciende a la estructuración espacial a través de un proceso de desarrollo. En primer lugar localiza los objetos con relación a sí mismo y solo más tarde desarrolla un sistema de coordenadas objetivas por medio de las cuales puede manipular números, objetos en el espacio a través de un sistema de direcciones fijas (Piaget e Inhelder, 1956 y Bower 1974).

## **CÓMO SE DESARROLLA LA NOCIÓN DE ESPACIO EN EL INFANTE**

Para Piaget, adquirir la noción espacial está intrínsecamente ligado a la adquisición del conocimiento de los objetos y a través del desplazamiento de éstos que el niño de meses empieza a desarrollarlo. El objeto está aquí y luego ahí, se mueve y cambia, se aleja al igual que la mano que lo sostiene y ambos le muestran distancias, acomodados, desplazamientos y rotaciones, mientras desarrolla sus actividades de juego (Cruz Torres Erica).

En la teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial, de Esperanza Osaidita Alderete, se expone las consideraciones generales del "libro las representaciones del espacio en el niño" de Piaget e Inhelder (1956), el cual se ocupa de conocer cómo surgen en el desarrollo ontogénico las relaciones espaciales, topológicas, proyectivas y euclidianas.

La autora resalta tres aspectos fundamentales de la teoría de Piaget del conocimiento espacial:

1. En el marco teórico piagetiano el conocimiento no viene dado “a priori” surgiendo de la mera percepción, sino, que ha de irse elaborando poco a poco, jugando un papel decisivo en la actividad del sujeto. El conocimiento del espacio proviene del principio de la actividad sensorio motriz, y, posteriormente a un nivel representativo, la actividad real o imaginada, irá flexibilizando, coordinando y haciendo reversible las imágenes espaciales para convertirlas en operaciones.
  
2. Se establecen tres tipos de relaciones espaciales, topológicas, proyectivas y euclidianas. Las propiedades topológicas tienen en cuenta el espacio dentro de un objeto o figura particular, y comprenden relaciones de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad. Por el contrario los espacios proyectivo y euclidianos, consideran los objetos y sus representaciones, teniendo en cuenta a las relaciones ente esos objetos de acuerdo con sistemas proyectivos, (espacio proyectivo) o de acuerdo con ejes de coordenadas (espacio euclidiano y métrico) el desarrollo ontogénico de estas relaciones sigue un orden inverso al desarrollo epistemológico, ya que el niño primero desarrollo espacio topológico, tanto en el nivel de la acción, como en el nivel de la representación, las relaciones proyectivas y Euclidianas, se desarrollan paralelamente, aunque el equilibrio de la segunda se consiguen más tarde.
  
3. Como en el resto de los aspectos del desarrollo intelectual, también en los referentes al conocimiento espacial nos encontramos con tres grandes periodos o estadios: periodo sensoriomotor, periodo de las operaciones concretas (que se subdivide, a su vez, en un subperiodo preoperativo y otro de operaciones concretas propiamente dichas), y periodos de las operaciones formales.

#### **I. Estadio sensorio-motor**

Desde el nacimiento hasta aproximadamente un año y medio a dos años. En tal estadio el niño usa sus sentidos (que están en pleno desarrollo) y las habilidades

motrices para conocer aquello que le circunda, confiándose inicialmente en sus reflejos y, más adelante, en la combinatoria de sus capacidades sensoriales y motrices. Así, se prepara para luego poder pensar con imágenes y conceptos.

## **II. Estadio preoperatorio**

El estadio preoperatorio es el segundo de los cuatro estados. Sigue al estado sensorio motor y tiene lugar aproximadamente entre los 2 y los 7 años de edad.

Este estadio se caracteriza por la interiorización de las reacciones de la etapa anterior dando lugar a acciones mentales que aún no son categorizables como operaciones por su vaguedad, inadecuación y/o falta de reversibilidad.

Son procesos característicos de esta etapa: el juego simbólico, la centración, la intuición, el egocentrismo, la yuxtaposición y la irreversibilidad (inhabilidad para la conservación de propiedades).

## **DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE**

Las primeras nociones de posición relativa que aprenden los niños pequeños son las de encima, debajo, detrás, delante, entre. Más tarde pueden usar rejillas rectangulares para localizar objetos y medir la distancia entre puntos según direcciones horizontales y verticales. Las experiencias con el sistema de coordenadas rectangulares serán útiles a medida que resuelven una variedad de problemas de geometría y álgebra. En los niveles superiores de primaria y en secundaria el sistema de coordenadas puede ser útil para explorar y descubrir propiedades de las figuras. Encontrar distancias entre puntos del plano usando escalas en mapas es importante en estos niveles.

Las investigaciones psicológicas muestran que el niño va estructurando sectores más amplios del espacio a medida que incrementa la magnitud de sus propios desplazamientos. Brousseau distingue tres valores de la variable “tamaño del espacio” con el que interactúa el sujeto. Estos valores implican modos diferentes de relaciones con los objetos incluidos en ese sector del espacio y, en

consecuencia modelos conceptuales diferentes para orientar la acción del sujeto. Esta variable interesa segmentarla en tres valores: microespacio, mesoespacio y macroespacio, cuyas características describimos a continuación Gálvez, G. (1985).

### **El microespacio:**

Corresponde a un sector del espacio próximo al sujeto y que contiene objetos accesibles tanto a la visión, como a la manipulación. En este sector el sujeto puede mover el objeto o bien moverse a sí mismo prácticamente en cualquier dirección. El juego de desplazamientos de sujeto y objeto, permite reestablecer cualquier perspectiva, mediante inversiones o compensaciones de las transformaciones anteriores. Puesto que todas las posiciones relativas entre sujeto y objeto son igualmente posibles y fáciles de obtener la percepción del objeto puede ser caracterizada como exhaustiva. Por otra parte, el sujeto obtiene una información abundante e inmediata de los resultados de las acciones que ejerce sobre el objeto. El sujeto controla plenamente sus relaciones espaciales con el objeto, debido a la abundancia de recursos de transformación con que cuenta.

En el microespacio el dominio de las relaciones con el objeto se adquiere a través de un proceso largo y difícil, pero bastante temprano (según los trabajos de Piaget). Este proceso se realiza “espontáneamente”, en el sentido de que no requiere de intervención intencional (institucional) para producirse, aunque sí oportunidades para ejercitar las manipulaciones de que el sujeto va siendo capaz. Posteriormente, el trabajo escolar impone cierta reestructuración del microespacio al introducir dos direcciones ortogonales para orientar el papel (y otros materiales) sobre el pupitre.

### **El mesoespacio:**

Es una parte del espacio accesible a una visión global, obtenida a partir de percepciones sucesivas, pero con desfases temporales mínimos. Contiene objetos fijos, no manipulables. Como un ejemplo de mesoespacio, podemos citar el espacio que contiene a un edificio, que puede ser recorrido por el sujeto tanto interior como exteriormente.

En este sector del espacio, puesto que los objetos permanecen fijos, funcionan como puntos de referencia para el sujeto (en nuestro ejemplo, los muebles, puertas, paredes), mientras que el sujeto sí puede desplazarse, pero con restricciones, derivadas de dos condiciones:

1. La posición erecta del sujeto, que genera una experiencia diferencial respecto a las direcciones horizontal y vertical. Estas constituyen las direcciones básicas para la organización del mesoespacio.
2. La necesidad de acomodar los desplazamientos en función de la localización de los objetos. Resultan de aquí trayectos obligados, como los determinados por corredores o escaleras, que implican la diferenciación de espacios vacíos y llenos.

Podemos decir que el mesoespacio es el espacio de los desplazamientos del sujeto. La experiencia está aquí restringida a los puntos de vista obtenibles a través de los desplazamientos posibles del sujeto, manteniendo su postura erecta. Esto no significa que sea imposible para el sujeto adoptar otras perspectivas, sino que, en la medida en que éstas no son usuales, no contribuyen significativamente a la estructura del mesoespacio.

Para organizar sus desplazamientos dentro del mesoespacio el sujeto necesita orientarlo, atribuyéndole tres dimensiones respecto a un sistema de referencia fijo. También le ha atribuido extensión, con lo que las distancias entre objetos pasan a tomar una relevancia de la que carece el microespacio. Los ángulos son muy importantes, puesto que están a la base de cambios de perspectiva muy económicos, que corresponden a giros del sujeto mientras conserva su posición (giros que incluso puede efectuar moviendo solamente su cabeza)

### **El macroespacio**

Corresponde a un sector del espacio cuya dimensión es tal que sólo puede abarcarse a través de una sucesión de visiones locales, separadas entre sí por desplazamientos del sujeto sobre la superficie terrestre. En el macroespacio es

imposible obtener una visión global simultánea del sector del espacio con el que se interactúa, a menos que el sujeto se eleve en el aire, experiencia a la que raras veces se recurre para estructurar el espacio terrestre a nivel de experiencia cotidiana.

Al igual que en el mesoespacio, en el macroespacio los objetos permanecen fijos, es el sujeto el que se desplaza. Para orientar sus desplazamientos debe construir una representación global del macroespacio, ligando sus visiones parciales para recuperar la continuidad del espacio recorrido. La conceptualización es imprescindible para la construcción de una imagen de conjunto, inaccesible a la percepción directa.

## **DESARROLLO HISTÓRICO DEL MODELO DE VAN HIELE PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA**

La Teoría de Niveles de Van Hiele, fue desarrollada por Pierre María Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en disertaciones doctorales separadas en la Universidad de Utreht en Holanda en 1957. Usiskin (1991) relata el desarrollo histórico de esta teoría, donde indica que Dina, murió poco después que su disertación fue terminada, por lo cual fue Pierre el que ha explicado el trabajo. Entre los años 1958 y 1959, éste escribió tres ensayos, que recibieron poca atención en Occidente, pero fueron aplicados en el desarrollo de currículos por la academia soviética Pyshkalo desde 1968. Freudenthal, el mentor de Van Hiele, publicó la teoría en su muy conocido libro *La matemática como una labor educacional* en 1973. A través de Freudenthal y los soviéticos, el trabajo de Van Hiele llamó la atención de Wirszup, quien fue el primero en hablar de la Teoría de Van Hiele en Occidente en el año 1974. Posteriormente, los ensayos de Wirszup, generaron interés y auge con los trabajos de Hoffer, Burger, Geddes y Senk (Usiskin, 1991).

## **BASES PSICOLÓGICAS DEL MODELO DE VAN HIELE**

El trabajo de Dina consiste en el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza, y Pierre Van Hiele incorpora a la teoría, las interacciones que ocurren en un salón de clases.



Los Van Hiele se interesaron en la enseñanza real de las matemáticas y no proporcionaron ningún relato psicológico detallado de la enseñanza de las matemáticas, sin embargo sus propuestas tienen arraigadas bases psicológicas. Por ejemplo, la cognición para Pierre procede, recursivamente de la construcción de una percepción global, hasta la formación de una estructura mental, su progresiva diferenciación y con su reestructuración final a una nueva estructura mental. Para los Van Hiele, así como para la psicología Gestalt, no existen objetos aislados ni conceptos “per se”, al contrario, todas las entidades existen en un contexto, una estructura en términos de Pierre Van Hiele. En este punto, Pierre no proporciona una definición de estructuras, en cambio explica algunas de sus características, describe tipos de estructuras y da algunos ejemplos.

La formación de las estructuras mentales demanda cambios rápidos entre momentos receptivos y activos. Los momentos receptivos permiten la absorción de las estructuras espontáneas que emanan de los materiales. Durante los momentos activos el individuo se concentra en el análisis y modificación de estas estructuras.

## **EI APRENDIZAJE Y LAS ESTRUCTURAS MENTALES SEGÚN VAN HIELE**

El aprendizaje, para los Van Hiele, citados por Shaughnessy y Burger (1985), es una diferenciación y reestructuración progresiva de campos que produce estructuras mentales nuevas y más complejas. Los niveles altos son alcanzados si las reglas que rigen a las estructuras más bajas se han hecho explícitas y han sido estudiados, llevando ésto, al desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas.

El desarrollo mental se produce a medida que el estudiante transforma gradualmente sus estructuras (transtructuración) o sustituye una estructura por otra (reestructuración). La transtructuración ocurre, por ejemplo, cuando las estructuras visuales originales son transformadas gradualmente en estructuras abstractas. Momentos en los cuales una reestructuración ocurre son: (a) una reestructuración del campo de observación que lleva a la integración de varias estructuras que han sido desarrolladas independientemente y (b) la solución de un problema que exige varias estructuras.

Por otro lado, la intuición es para Pierre Van Hiele, un mecanismo clave que permite a los estudiantes visualizar campos diferentes (estructuras en su

terminología) los cuales permiten construir conceptos más complejos. Él utiliza la idea Gestalt de que la intuición puede ser entendida como el resultado de la percepción de una estructura y sugiere que está caracterizada por las siguientes propiedades:

1. La intuición requiere adecuación, ya sea a una nueva situación o dentro de una estructura establecida. Esta adecuación demanda un mecanismo social que establezca criterios de objetividad.
2. La intuición requiere intención, es decir, la persona actuará en concordancia con la estructura percibida y no de otra manera.
3. La intuición no puede ser planeada.

El cultivo de la intuición debe enfocarse en el desarrollo de la habilidad de los estudiantes para ver las estructuras como parte de otras estructuras superiores, o como parte de estructuras más inclusivas.

Como se puede percibir en los párrafos anteriores, Van Hiele sugiere que el aprendizaje es un proceso que recursivamente progresa a través de niveles discontinuos de pensamiento (saltos en la curva de aprendizaje), que puede ser mejorado por un procedimiento didáctico adecuado. Parte del hecho de que existen varios niveles de aprendizaje geométrico y que el paso de un nivel al siguiente debe ocurrir a través de una secuencia de estados de instrucción.

## **LOS NIVELES DE VAN HIELE**

Según este modelo, el razonamiento geométrico se desarrolla en una secuencia de niveles, en la que cada nivel es un refinamiento del anterior y está caracterizado por un lenguaje particular, por unos símbolos y unos métodos de inferencia específicos. Debido a las particularidades de cada nivel, la instrucción es más efectiva si está cuidadosamente dirigida a cada uno.

Los niveles de razonamiento describen los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que va desde el razonamiento intuitivo de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las Facultades de Ciencias. De acuerdo con el modelo de van Hiele si el aprendiz es guiado por experiencias instruccionales

adecuadas, avanza a través de los cinco niveles de razonamiento, empezando con el reconocimiento de figuras como todos (nivel 1), progresando hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras y hacia el razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3), y culminando con un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 4 y 5). Los niveles se clasifican, según Gutiérrez y Jaime, (1996), como sigue:

1. Nivel 1 (de Reconocimiento Visual o Visualización). Las figuras son juzgadas por su apariencia.
2. Nivel 2 (de Análisis o Descripción). Las figuras son mensajeros de sus propiedades.
3. Nivel 3 (de Clasificación y Relación o Teórico). Las propiedades son ordenadas lógicamente.
4. Nivel 4 (de Deducción Formal o Lógica Formal). La Geometría es entendida como un sistema axiomático.
5. Nivel 5 (de Rigor). La naturaleza de la lógica formal, en la cual los sistemas axiomáticos son estudiados.

Como se indicó al comienzo, las raíces de este modelo están presentes en los trabajos de Piaget, aunque con diferencias relevantes según Graterol y Andonegui (2003), aún cuando en ambos casos se admite la existencia de varios niveles de pensamiento. En este sentido, tenemos:

1. Piaget piensa que el paso de un nivel de pensamiento a otro es función del desarrollo; Van Hiele, del aprendizaje; la preocupación de éste estriba en cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente.
2. Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de Van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura.
3. Piaget no da importancia al lenguaje en el paso de un nivel al otro. En Van Hiele, cada nivel desarrolla su propio lenguaje característico.

En relación a esto, es importante subrayar que el progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel, y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes. Para que los estudiantes se desempeñen adecuadamente en uno de los niveles avanzados deben haber dominado los niveles previos. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada nivel lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

A continuación se presenta una descripción resumida de las principales características de los cinco niveles de razonamiento, citado por Gutiérrez y Jaime, (1996):

**Nivel 1 (Reconocimiento).** Aquí los conceptos geométricos son considerados como entes globales más que como entes con componentes y atributos. Las figuras geométricas se reconocen por su forma, por su apariencia física y no por sus partes y propiedades. El alumno aprende algo de vocabulario, identifica diferentes figuras y reproduce una figura dada. Por ejemplo, un estudiante reconocerá el dibujo de un rectángulo pero quizás no sea consciente de muchas propiedades de los rectángulos.

**Nivel 2 (Análisis).** En este nivel comienzan a analizarse los conceptos geométricos, aparecen propiedades que permiten conceptualizar los tipos de figuras. Se reconoce que las figuras geométricas tienen partes o elementos, e incluso las figuras pueden ser reconocidas por sus partes, aunque no identifican las relaciones entre ellas. Por ejemplo, el estudiante identifica un rectángulo como un polígono dotado de un número de propiedades matemáticas: tiene 4 lados paralelos dos a dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales, etc. Pero no se da cuenta que algunas propiedades están relacionadas con otras. El razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de la observación de unos pocos casos; así, si les pide la demostración de la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ , los estudiantes de este nivel se limitarán a dibujar uno o dos triángulos y a medir sus ángulos. La deducción de las propiedades se hace mediante la experimentación. Se generalizan dichas propiedades a todas las figuras de una misma familia.

**Nivel 3 (Clasificación).** En este nivel se realizan clasificaciones lógicas de los objetos y se descubren nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal; por ejemplo, el estudiante en este nivel clasifica los cuadriláteros a partir de sus propiedades y reconoce que cualquier cuadrado es un rectángulo pero que no todos los rectángulos son cuadrados. El alumno entiende y puede reproducir una demostración formal, no compleja, cuando se le va explicando paso a paso, pues sólo necesita la implicación directa entre una situación y otra. Sin embargo, no comprende en su totalidad el significado de la deducción de las demostraciones o el papel de los axiomas.

**Nivel 4 (Deducción Formal).** En este nivel se comprende ahora la relación existente entre términos indefinidos, axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones, así como el papel que desempeñan dentro de la geometría. Aquí el estudiante tiene capacidad para realizar razonamientos lógicos formales, construye sin tener que memorizar las demostraciones, desarrolla demostraciones de más de una forma, entiende la interacción de las condiciones necesarias y suficientes. Asimismo puede comprender la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas.

**Nivel 5 (Rigor).** En este último estadio, el alumno puede trabajar en distintos sistemas axiomáticos; pueden ser estudiadas las geometrías no Euclídeas y se pueden comparar los diferentes sistemas. La Geometría se estudia desde un punto de vista totalmente abstracto.

## **DESCRIPTORES CARACTERÍSTICOS DE LOS NIVELES DE VAN HIELE**

Considerando todo lo expuesto en líneas precedentes, el proceso de determinación de la ubicación de un alumno en un determinado nivel del Modelo de Van Hiele, como lo establece Pérez (2003), debe centrarse en indagar la presencia de los descriptores característicos de dichos niveles que son:

**Los descriptores característicos para cada nivel son:**

**Nivel 1 (Visualización).** En este nivel los alumnos: Manejan objetos reales observados globalmente y como unidades.

Identifican figuras o relaciones geométricas en: dibujos, en conjuntos determinados, con orientaciones variadas y en objetos físicos que rodean al alumno.

Describen figuras geométricas por su aspecto físico.

Diferencian o clasifican en base a semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos.

Crean formas: usando papel cuadriculado, papel isométrico, geoplanos, etc., construyendo figuras con fósforos, palillos, plastilina, etc.

Utilizan vocabulario geométrico para hablar de las figuras o describirlas, acompañado de otros términos de uso común que sustituyen los geométricos.

Trabajan con problemas que pueden ser resueltos manipulativamente. Realizan actividades de manipular, colorear, doblar, cortar y modelar figuras.

## **Nivel 2 (Análisis). En este nivel los alumnos:**

Identifican y comprueban relaciones entre elementos de una figura. Recuerdan y usan vocabulario apropiado para los elementos y sus relaciones. Comparan dos figuras de acuerdo a las relaciones entre sus componentes. Clasifican figuras de acuerdo a ciertas propiedades, incluyendo una clasificación de todas las cosas de una clase y de las que no están en ella. Identifican y dibujan figuras dando indicaciones de sus propiedades.

Descubren propiedades de figuras específicas, empíricamente y generalizan propiedades para esa clase de figura.

Describen una clase de figuras en términos de sus propiedades.

Resuelven problemas geométricos por el conocimiento y uso de propiedades de figuras o por intuición.

Formulan y usan generalizaciones acerca de propiedades de figuras mediante comprobaciones en uno o pocos casos.

**Nivel 3 (Deducción Informal).** En este nivel los alumnos:

Relacionan propiedades de una figura entre sí o con otras figuras. Establecen un mínimo número de propiedades para describir una figura. Desarrollan y usan definiciones para explicar el porqué de una clase de figura. Utilizan diagramas que permiten hacerse una idea del razonamiento.

Siguen razonamientos geométricos buscando en ellos algunos pasos que falten.

Descubren nuevas propiedades usando razonamientos deductivos.

Usan el dibujo y cierta información para justificar conclusiones con relaciones lógicas. (Dar argumentos informales).

Suministran situaciones para dar más de una explicación o aproximación. Trabajan y discuten situaciones que presenten proposiciones y sus inversas.

**Nivel 4 (Deducción Formal).** En este nivel los alumnos:

Establecen la necesidad de los términos indefinidos, definiciones y suposiciones básicas.

Reconocen características de una definición formal (condición necesaria y suficiente) y equivalencias de definiciones.

Prueban en una axiomática el marco de relaciones que se trataron informalmente en el nivel.

Prueban relaciones entre un teorema y proposiciones relacionadas (recíproco, inverso y contraejemplo).

Establecen interrelaciones entre una red de teoremas.

Comparan y contrastan diferentes demostraciones de teoremas.

Crean demostraciones de un sencillo conjunto de axiomas, usando frecuentemente un modelo para sustentar los argumentos.

Dan argumentos deductivos formales pero no investigan los axiomas entre ellos mismos ni comparan sistemas axiomáticos.

**Nivel 5 (Rigor).** En este último nivel los alumnos: Trabajan en distintos sistemas axiomáticos.

Estudian las geometrías no Euclídeas y pueden comparar los diferentes sistemas.

Desarrollan la Geometría desde un punto de vista totalmente abstracto.

### **FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO DE VAN HIELE**

Van Hiele sostiene, según Usiskin (1991), que su teoría tiene una propiedad que establece, que la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; se da bajo la influencia de un programa de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las Fases de Aprendizaje es favorecer el desplazamiento del alumno(a) de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Estos dos elementos, la teoría y el método, ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países.

La organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje del método de fases de aprendizaje, comprende una secuencia precisa de cinco fases o estados de aprendizaje, resumidos como sigue.

**Fase Primera: Información.** Su finalidad es la de obtención de información recíproca profesor-alumno. El propósito de la actividad a realizar es doble, que el profesor conozca los conocimientos que los alumnos poseen del tópico a tratar y que los alumnos sepan qué dirección se dará al estudio a realizar, los tipos de problemas que se vayan a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.



**Fase Segunda: Orientación Dirigida.** Los alumnos exploran el t3pico a estudiar empleando los materiales que el profesor secuencia cuidadosamente. Van Hiele (1986) se3ala esta fase como fundamental, ya que en ella se construyen los elementos b3sicos de la red de relaciones del nivel correspondiente y si las actividades se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento del nivel superior. El prop3sito es guiar a los estudiantes a trav3s de la diferenciaci3n de nuevas estructuras basadas en aquellas observadas en la primera fase.

**Fase Tercera: Explicitaci3n.** Su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las caracter3sticas y propiedades aprendidas anteriormente y que consoliden el vocabulario propio del nivel. En esta fase es fundamental el di3logo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario. Este debate entre compa3eros enriquecer3 notablemente el conocimiento de cada estudiante, pues los obliga a organizar sus ideas y expresarlas con rigor, pone de relieve los m3todos y resultados incorrectos y afianza los correctos. El profesor es ahora cuando introduce todo el lenguaje t3cnico. Van Hiele condiciona el entendimiento real al 3xito de esta fase.

**Fase Cuarta: Orientaci3n Libre.** En esta fase se debe producir la consolidaci3n del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deber3n utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores, y generalmente, m3s complejos. Las actividades deben permitir resolver situaciones nuevas con los conocimientos que adquirieron previamente. No deben orientarse a la consecuci3n de ning3n objetivo b3sico de ese nivel, puesto que 3stos ya se deben haber obtenido en la segunda fase. Son adecuadas situaciones abiertas, en las que el estudiante pueda explorar diversas posibilidades pero siempre utilizando lo que aprendi3 anteriormente.

**Fase Quinta: Integraci3n.** Los estudiantes revisan y resumen en esta fase lo que han aprendido, con el objetivo de formarse una visi3n general del nuevo conjunto de objetos y relaciones construidas. El profesor puede ayudar a realizar esta s3ntesis, pero sin introducir nada nuevo.

Resumiendo las caracter3sticas fundamentales de cada fase tenemos: en la primera se pone a discusi3n del alumno (a) material clarificador del contexto de trabajo. En la segunda fase se proporciona material por medio del cual el alumno/a aprenda las principales nociones del campo de conocimiento que se est3 explorando. El material y las nociones a trabajar, se seleccionarn en

función del nivel de razonamiento de los alumnos (as). En la tercera fase conduciendo las discusiones de clase, se buscará que el alumno/a se apropie del lenguaje geométrico pertinente. En la cuarta fase se proporcionará al alumno/a materiales con varias posibilidades de uso y el profesor/a dará instrucciones que permitan diversas formas de actuación por parte de los alumnos (as). En la quinta fase se invitará a los alumnos (as) a reflexionar sobre sus propias acciones en las fases anteriores. Como resultado de esta quinta fase, los autores entienden que el alumno/a accede a un nuevo nivel de razonamiento. El estudiante adopta una nueva red de relaciones que conecta con la totalidad del dominio explorado. Este nuevo nivel de pensamiento ha sustituido al dominio de pensamiento anterior.

Cómo lo establece Braga (1991), de la revisión de los trabajos realizados a nivel internacional sobre el modelo de Van Hiele, se puede deducir también un conjunto de principios de procedimiento, entendidos éstos como ``normas dirigidas al profesor indicándole actitudes en su trabajo'', estas se resumen así:

1. El profesor(a) partirá del hecho de que los estudiantes poseen un almacén significativo de concepciones y propiedades de los objetos materiales.
2. El profesor(a) procurará, a partir de la experiencia previa de los alumnos(as) (es decir, de la observación de figuras concretas), que formen estructuras geométricas, y pondrá en relación estas observaciones con una forma "geométrica" de verlas.
3. El profesor(a) diseñará actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula teniendo en cuenta el nivel lingüístico y de razonamiento de los alumnos(as).
4. El profesor(a) procurará conocer de qué forma es estructurado el espacio espontáneamente por los alumnos/as, para, partiendo de esa percepción, diseñar actividades que permitan al estudiante construir estructuras visuales geométricas y por último razonamiento abstracto. Para ello el profesor/a modificará progresivamente el contexto en el que aparecen los objetos en una dirección matemática alejándose del empirismo.
5. El profesor(a) estará atento a la adquisición del ``insight'' por parte de los alumnos(as), para lo cual es necesario que el diálogo sea la pieza clave de la enseñanza. El profesor(a) animará a los alumnos/as a hablar acerca de los conceptos geométricos y a desarrollar un lenguaje expresivo, respetando en

un primer momento sus propias expresiones y lenguaje, para ir introduciendo progresivamente el lenguaje geométrico.

6. El profesor(a) procurará conocer el correlato mental de las palabras y conceptos que utilizan los alumnos/as y que él necesita, por medio de actividades diseñadas a tal fin y por medio del uso continuo del diálogo en el aula.

7. El profesor(a) diseñará actividades de clarificación y complementación de dicho correlato mental que permitan que éste coincida con el significado de la palabra en la disciplina.

8. El profesor(a) fomentará el trabajo consciente e intencional de los alumnos/as con la ayuda de materiales manejables. El material ha de poseer el fundamento del desarrollo lógico de la geometría y ha de ser auto correctivo.

9. El profesor(a) permitirá a los alumnos/as trabajar con material concreto sólo cuando sea necesario para construir la teoría. El periodo de acumulación de hechos de forma inductiva no debe ser prolongado demasiado. El alumno(a) debe y puede usar la deducción.

### **3.4. MARCO DISCIPLINAR**

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, (1998) se inicia hablando del conocimiento matemático escolar, desde su relación con los números y las operaciones matemática y el papel que juega las matemáticas en la escuela que se refleja en la utilización de las matemáticas en la vida cotidiana resolviendo problemas, para procedimientos algorítmicos y el desarrollo de pensamiento lógico formal; además desde la perspectiva didáctica se considera que la enseñanza debe ser aquella que privilegie el aprendizaje antes que los contenidos, no significa esto que los contenidos no sean importantes, sino que es más importante el aprendizaje del estudiante y lo que logre hacer con los contenidos; se expone además la importancia del aprendizaje teniendo en cuenta la demisión social de los sujetos a educar y del papel del docente no como un transmisor de conocimientos, si no como aquel que procura situaciones adecuadas para que el estudiante aprenda. Se conceptualiza además del conocimiento de las competencias como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y

psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. acerca de la enseñanza de las matemáticas plantea la división en cinco pensamientos: numérico, métrico, variacional, aleatorio y el pensamiento espacial, iniciando con una definición: “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y diversas traducciones a representaciones materiales” (p. 37); es decir el pensamiento espacial no se reduce solo a las representaciones materiales, como se hace comúnmente en la escuela, si no que abarca todos los procesos cognitivos que permiten comprender e interactuar con el espacio que percibimos, y los objetos que lo componen; en este proceso cognitivo de construcción del espacio influyen las características cognitivas del individuo y el entorno físico, cultural, social e histórico.

Se plantea que el pensamiento espacial debe desarrollarse a partir de la interacción con el espacio, de manera que argumenten las acciones utilizando modelos, figuras, gestos, palabras, lenguaje ordinario y movimientos corporales que permitan al niño desarrollar estructuras mentales que le ayuden a potenciar su comprensión del espacio y los objetos que lo componen.

Howard Gardner define inteligencia como una capacidad para resolver problemas o crearlos, Gardner identifica nueve tipos de inteligencias: lógica-matemática, musical, verbal lingüística, kinestésica, intrapersonal, interpersonal, naturalista, emocional y visual espacial que es la que nos compete en este caso es la habilidad de pensar y formar un modelo mental del mundo en tres dimensiones, es decir que tiene la capacidad de percibir el mundo que lo rodea, hacer ajustes o modificaciones a esas percepciones cuando se necesario, y recrear esas percepciones; también afirma que la inteligencia espacial siempre está ligada a lo concreto, ya que todo el tiempo se realiza una relación entre lo concreto, los objetos y lugares y las representaciones mentales que se tiene de ellos. Esta capacidad implica la manipulación presentada de forma visual diagramas, gráficos esto en contraste con la modalidad verbal es por eso que Gardner afirma que el pensamiento espacial es muy importante para el desarrollo del pensamiento científico ya que es usado para representar y manipular información en el

aprendizaje y la resolución de problemas<sup>4</sup>. Partiendo de lo anterior se pretende indagar ¿Cómo influye la teoría de Van Hiele para el desarrollo del pensamiento espacial en los niños de grado tercero de primaria?

Teniendo en cuenta el anterior interrogante nos surge la siguiente pregunta ¿Cómo se desarrolla el pensamiento espacial en los niños? Piaget<sup>5</sup> plantea que el desarrollo del pensamiento espacial es un proceso que no se da solo por la percepción, sino que se da a lo largo de las interacciones del sujeto con el medio que lo rodea, recopilando y manipulando imágenes mentales a partir de la actividad del sujeto y volviéndolas reversibles creando nuevas estructuras cognitivas; Este proceso es largo ya que se da según Piaget<sup>6</sup> desde el mismo nacimiento hasta la adolescencia; esta última afirmación es contradictoria a lo que afirman los esposos Van Hiele<sup>7</sup> cuando plantean el aspecto de la continuidad donde dicen que el desarrollo puede darse durante años, pero de forma continua y que hay casos en los que no se llegue a alcanzar el nivel cuatro que es el más complejo. Debido a este tipo de contradicciones se tendrá en cuenta algunos aportes de la teoría de Piaget y Howard Gardner, pero se centrará esta investigación en los aportes de los esposos Dina y Pierre Van Hiele.

Desde la perspectiva Piagetiana, se tendrá en cuenta, la importancia de la actividad del sujeto con su entorno y los objetos que lo componen, ya que la actividad (manipulación, exploración) es la que favorece el desarrollo del conocimiento espacial<sup>8</sup>. De otro lado, de la teoría de Inteligencias Múltiples de

---

<sup>4</sup> Serie Lineamientos curriculares de matemáticas MEN

<sup>5</sup> OCHAÍTA ALDERETE, Esperanza. La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. En: Revista Estudios de Psicología. No 14-15 (1983); p. 93- 108. ISSN 0210-9395.

<sup>6</sup> OCHAÍTA ALDERETE, Esperanza. La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. En: Revista Estudios de Psicología. No 14-15 (1983); p. 93- 108. ISSN 0210-9395.

<sup>7</sup> GUTIERREZ, A. Y JAIME, A El modelo del razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: los giros. En: Revista Educación Matemática. Vol 3 No 2 (agosto 1991).

<sup>8</sup> OCHAÍTA ALDERETE, Esperanza. La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. En: Revista Estudios de Psicología. No 14-15 (1983); p. 93- 108. ISSN 0210-9395.

Howard Gardner<sup>9</sup>, se hará referencia a lo planteado sobre la inteligencia espacial, la cual tiene en cuenta la sensibilidad que tiene el niño frente al color, la línea, la figura, la forma y todo lo relacionado con las concepciones de espacio; Gardner también afirma que ésta inteligencia beneficia el pensamiento científico, ya que es necesario para el manejo de los datos en la resolución de problemas.

Los esposos Van Hiele coinciden con Piaget en concebir el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos hacia formas de razonamiento más deductivas y abstractas<sup>10</sup>. Por otra parte, Piaget en su teoría plantea que los diferentes niveles de desarrollo se van presentando de acuerdo a unas edades establecidas, contrario a lo planteado por los esposos Van Hiele, quienes afirman que para pasar de un nivel a otro, es necesario que el niño adquiera las habilidades propias de cada nivel, las cuales son necesarias en el siguiente.

Como se mencionó anteriormente, en ésta investigación se hará énfasis en la teoría de los esposos Van Hiele,<sup>11</sup> organizada de la siguiente manera: los postulados de Pierre Van Hiele, trataban de explicar por qué los estudiantes tienen problemas para aprender geometría, por su parte Dina Van Hiele, exponía un experimento de enseñanza sobre el orden del contenido geométrico y las actividades de aprendizaje de los estudiantes, lo que convierte a la teoría de los Van Hiele en una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Así el modelo de los Van Hiele considera el aprendizaje de la geometría como un proceso secuencial que va de lo general a lo específico, desde el todo que vemos a las cualidades y propiedades de ese todo, es un proceso secuencial donde lo concreto va convirtiéndose en abstracto, y se va dando el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos. De forma que se hace diferenciación y

---

<sup>9</sup> Dr. HERNANDEZ GONZALEZ, Eduardo R. Las Inteligencias Múltiples (en línea). <[http://www.psicologia-online.com/infantil/inteligencias\\_multiples.shtml](http://www.psicologia-online.com/infantil/inteligencias_multiples.shtml)> (citado el 5 de julio de 2012)

<sup>10</sup> GONCALVES TAVARES, Rider. ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. En: Revista Ciencias de la Educación. Vol. 1 No 27 (Enero-Junio 2006); p. 83-98.

<sup>11</sup> BRESSAN, Ana. El modelo del desarrollo del pensamiento geométrico de Dina y Pierre Van Hiele (en línea). <[http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/internas\\_modelovanhiele.pdf](http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/internas_modelovanhiele.pdf)> (citado el 21 de junio de 2012)

reestructuración progresiva de conceptos, generando estructuras mentales nuevas y cada vez más complejas, el avance o progreso en estos niveles depende de la instrucción adecuada; Para lo cual se considera que la enseñanza (aquí se incluye las fases de aprendizaje) de los contenidos debe darse de forma espiral continua, es decir, que cada contenido debe volver a un contenido anterior para apoyarse en él y a su vez ser apoyo de un contenido posterior. De otra parte se plantea que no se puede enseñar a razonar, si no que se le debe guiar mediante una enseñanza adecuada.

Adicionalmente en su teoría los esposos van Hiele le otorgan mucha importancia al papel del lenguaje en la estructuración del pensamiento en cada nivel, es decir que para cada nivel de desarrollo hay un nivel de dominio del lenguaje matemático, se irá entonces de un lenguaje más simple a un lenguaje más complejo, estructurado y abstracto. Al mismo tiempo agregan otro elemento importante, la significatividad de los contenidos, este hace referencia a que debe respetarse el nivel de razonamiento del individuo es decir se debe enseñar aquel contenido para el cual el individuo está preparado para que lo pueda asimilar.<sup>12</sup>

De igual manera, en su modelo<sup>13</sup>, plantean 5 niveles de comprensión:

- Visualización y reconocimiento: En este nivel el estudiante percibe el espacio como una totalidad, no identifica diferentes componentes de un todo, es decir el estudiante concibe los espacios y su entorno como algo completo y no se fija en detalles, partes o propiedades del espacio, pueden reconocer figuras, objetos y formas por la percepción visual que tiene de las mismas, pero no tienen en cuenta que tienen unas partes que las conforman y unas propiedades. Las descripciones que se realizan en este nivel son de forma muy visual comparándose con objetos conocidos del entorno. Aquí al igual que en los niveles siguientes es muy importante que

---

<sup>12</sup> GONCALVES TAVARES, Rider. ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. En: Revista Ciencias de la Educación. Vol. 1 No 27 (Enero-Junio 2006); p. 83-98.

<sup>13</sup> BERRITZEGUNE DE DONOSTI, Fernando Fouz. Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. (En línea). <[http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.\\*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.\\*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf)> (citado el 22 de junio de 2012)

se trabaje usando la manipulación de objetos para que el estudiante se prepare y vaya adquiriendo herramientas para el siguiente nivel.

- **Análisis:** el estudiante identifica los componentes generales de un todo y sus características, pero aun no hace relaciones entre ellos, es decir puede identificar que un cuadrado o un rectángulo tiene lados y ángulos pero aun no es capaz de establecer la relación existente entre los lados y los ángulos de ese cuadrado o rectángulo, ni la relación existente entre el cuadrado y el rectángulo o clasificarlos según las propiedades que comparten, el estudiante aun no clasifica ni diferencia las figuras de los cuerpos o lo tridimensional de lo bidimensional.
- **Ordenación o clasificación:** el estudiante comprende las características de los componentes de un todo y los clasifica de teniendo en cuenta dichas características, En este nivel el estudiante ya realiza clasificaciones teniendo en cuenta las propiedades de las figuras y cuerpos y comprende las relaciones existentes entre las propiedades y sus consecuencias, lo que le permite comprender las definiciones geométricas y empezar a desarrollar conceptos básicos de la geometría formal.
- **Deducción formal:** el estudiante hace relación entre las características de los componentes del todo, comprende la importancia y necesidad de las demostraciones para justificar planteamientos, además comprende y comienza a buscar nuevas formas de llegar a resultados, comprobando su eficacia haciéndose consciente que puede partir de distintas proposiciones a la misma conclusión. Ten este nivel el estudiante ya tiene un alto nivel de razonamiento lógico, comprende y utiliza definiciones de la geometría como verdaderas e irrefutables, adquiere una visión globalizada de las matemáticas teniendo en cuenta axiomas (verdades no refutables) y el carácter axiomático mismo de las matemáticas.
- **Nivel de rigor:** en este nivel el estudiante reconoce y comprende sistemas de teorías y axiomas referentes a la geometría y tiene la capacidad de comprender la geometría de forma abstracta, sin necesidad del trabajo concreto o gráfico.

El avance en estos niveles, no depende de la edad, sino de las estrategias y materiales que utiliza el docente para desarrollar las estructuras cognitivas propias



de cada nivel; para esto, es necesario que el docente tenga en cuenta las fases del aprendizaje:

- Preguntas/información: en esta fase el docente propicia actividades (observaciones, conversaciones, preguntas, entrevistas) en las cuales, puede indagar conocimientos previos que tiene el estudiante sobre el contenido a tratar, para iniciar con el objeto de estudio, acercándose a las situaciones reales de los mismos estudiantes y va introduciendo un vocabulario pertinente al contenido, para determinar el punto de partida y las actividades siguientes para los diferentes niveles, en los cuales se evidencia un desarrollo de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes.
- Orientación dirigida: en esta fase se requiere que el docente sea creativo y didáctico, puesto que debe secuenciar las actividades y los diferentes materiales a utilizar de una manera lógica y con una intencionalidad clara, procurando que a través de ellas los estudiantes vayan desarrollando las estructuras características del nivel, como son, descubrir, comprender, asimilar, aplicar ideas, propiedades, conceptos. Cada una de las actividades planteadas por el docente, debe estar encaminada a un objetivo corto y claro, y debe asegurarse de la comprensión en los estudiantes.
- Explicación: en esta fase los estudiantes comienzan a trabajar en el contenido de acuerdo a las actividades planteadas en la fase anterior. Ésta fase se basa en las interacciones que tienen los estudiante entre sí, compartiendo sus experiencias, ideas y conocimientos sobre las actividades y contenidos, haciendo procesos de análisis, reflexión y expresión de los mismos; aquí, el docente es mediador y solo interviene cuando es necesario abordar temáticas nuevas o conceptos del lenguaje requerido para dicho nivel.
- Orientación libre: en esta fase el docente plantea actividades que generen conflicto cognitivo, que demande del estudiante aplicar los conocimientos adquiridos en niveles anteriores y un mayor nivel de exigencia. Las actividades planteadas para este nivel, deben ser, además de complejas, con varios pasos a seguir y abiertas, para que le permita a los estudiantes explorar diferentes formas de solucionar, obteniendo diferentes resultados que luego deben ser justificadas utilizando el lenguaje desarrollado hasta dicho nivel; estas actividades abiertas, le permiten a los estudiantes dar cuenta de los conocimientos adquiridos hasta este momento y adquirir

nuevas experiencias mientras van buscando las diferentes formas de solucionar las actividades.

- Integración: en esta fase el estudiante debe realizar retroalimentación de todo el proceso, el docente en esta fase debe realizar síntesis o resumen para apoyar la retroalimentación, no debe introducir o explicar nuevos contenidos, puesto que el estudiante ya adquirió el conocimiento propio de este nivel y está listo para iniciar las fases en el desarrollo de otro nivel. En esta fase también se pueden plantear e integrar actividades de recuperación para los estudiantes que presenten dificultades en la comprensión de los contenidos abordados en este nivel.

Para el desarrollo de los niveles de comprensión es necesario tener en cuenta las propiedades del modelo<sup>14</sup> que le permiten al docente tener una guía para tomar decisiones concernientes a las estrategias.

- Secuencial: propone que el desarrollo de los niveles de comprensión debe darse en orden ascendente, y el estudiante no puede omitir ningún nivel, es decir que debe darse en forma jerárquica, sin alterar su orden.
- Progresivo: el paso de un nivel a otro no depende de la edad ni del tiempo que permanezca en él, sino de la instrucción que se le brinde al estudiante para que alcance las estructuras cognitivas propias que le permitan avanzar en los niveles de comprensión. Es decir que el estudiante que está en un nivel, no está en el de forma estática si no que está viviendo una avance continuo para vivir un progreso en las estructuras cognitivas que hacen que pase de nivel.
- Intrínseco y extrínseco: el conocimiento se adquiere de lo general a lo específico, en cada nivel se adquieren una serie de conocimientos que son la base para comprender los conceptos del siguiente nivel; por ejemplo, en el nivel de análisis, el estudiante ve las características de los componentes de un todo, pero esto aun no son objeto de estudio; ya en el nivel de ordenación o clasificación, esas características pasan a ser objeto de estudio.

---

<sup>14</sup> CENTRO DEL PROFESORADO DEL JEREZ. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN. Los Niveles de Van Hiele (En línea). <<http://www.cepjerez.net/drupal/files/van-Hiele.pdf>> (citado el 22 de junio de 2012)

- Lingüístico: cada nivel tiene sus términos y lenguaje característico, el cual se va complejizando a medida que se avanza de un nivel a otro, es decir que a paso que el estudiante avanza en los niveles va perfeccionando su lenguaje acercándose cada vez más al lenguaje formal de la geometría.
- Emparejamiento: las estrategias y las actividades que el docente utilice, deben ir acordes al nivel en el que se encuentre el estudiante, esto le facilitará la comprensión de los contenidos específicos de cada nivel.

## 4. METODOLOGÍA

En este apartado se exponen los instrumentos utilizados en la recolección de datos y la forma en que se utilizaron.

### 4.1. Técnicas e instrumentos

Este trabajo de investigación es realizado como parte del macro proyecto titulado “estrategias didácticas fundamentadas en los niveles de razonamiento de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele, que fortalecen el desarrollo del pensamiento espacial a través de procesos de enseñanza y aprendizaje implementados por las estudiantes de 10º semestre del programa de licenciatura en Pedagogía Infantil en instituciones educativas del Departamento de Risaralda” realizado por las estudiantes de la licenciatura en pedagogía infantil de decimo semestre como proyecto de grado, teniendo como asesores a los docentes Geoffrin Ninoska Gallego y Héctor Gerardo Sánchez Bedoya.

#### ***Unidad de Análisis***

Este trabajo de investigación es realizado por medio de la aplicación de una serie de estrategias didácticas, donde se trabaja a partir de la construcción y caracterización del paralelepípedo basado en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje planteados por los esposos Van Hiele. Se centra en el análisis e interpretación de dichas unidades didácticas.

#### **Instrumentos**

**Estrategias didácticas:** la investigación se centra en estrategias didácticas las cuales son diseñadas teniendo en cuenta las fases de aprendizaje y los niveles de razonamiento propuestos en la teoría desarrollada por los esposos Van Hiele.

**Prueba inicial:** es diseñada a partir de los estándares, pruebas saber y teoría de los esposos Van Hiele donde se pretende evaluar el estado inicial y conocimientos previos de los estudiantes.

**Prueba final:** es diseñada a partir de los estándares, pruebas saber y teoría de los esposos Van Hiele donde se pretende evaluar el estado final de los estudiantes y la incidencia que tiene la aplicación de las estrategias didácticas en la construcción y caracterización del paralelepípedo.

### ***Unidad de Trabajo***

La población con la que se realiza este trabajo de investigación, son los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento, con edades comprendidas entre los 8 y 9 años.

En este apartado se exponen los instrumentos utilizados en la recolección de datos y la forma en que son utilizados.

#### **4.2 Procedimiento de recolección de datos**

Para esta investigación se realiza la recolección de datos utilizando inicialmente una prueba inicial, que es aplicada a siete niños del grado tercero de la institución educativa Luis Carlos Galán Sarmiento. Con esta prueba, se puede observar el estado inicial de los estudiantes y sus saberes acerca del paralelepípedo y el rectángulo.

Después de esto, se realiza la aplicación de las estrategias didácticas a estos mismos estudiantes en seis sesiones cada una de tres horas aproximadamente. Al finalizar la aplicación de las estrategias se aplica la prueba final con el fin de conocer el estado final de los saberes de los estudiantes después de la aplicación de las estrategias.

#### **4.3 Procedimiento de análisis de datos.**

En la realización del análisis de información se tiene en cuenta las rejillas construidas a partir del macro proyecto donde las variables a tener en cuenta para la observación análisis e interpretación se relacionan a continuación:

Tabla 1: Niveles de razonamiento

<b>VARIABLE: VISUALIZACIÓN</b>	
<b>INDICADORES</b>	
1. Compara y clasifica objetos	Las descripciones que se realizan en este nivel son de forma muy visual comparándose con objetos conocidos del entorno.
2. Posee percepción visual y global	El estudiante percibe el espacio como una totalidad y pueden reconocer figuras, objetos y formas por la percepción visual que tiene de las mismas, pero no tienen en cuenta que tienen unas partes que las conforman y unas propiedades
3. Usa las propiedades físicas	Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras, los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan, se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
4. Usa un lenguaje no técnico	El lenguaje que emplea es confuso y escaso al momento de expresarse sobre alguna figura geométrica.
5. Identifica o describe atributos físicos	Identifica figuras geométricas en dibujos, en conjuntos determinados y en objetos físicos que lo rodean y las describe
6. No formula generalizaciones	No es capaz de extender la característica de una figura a otra, por ejemplo el cuadrado tiene 4 lados y el rectángulo también.
7. No identifica componentes de un todo (no se fija en detalles o partes del espacio)	Identifica algunas figuras de su entorno si observan bien, más no es capaz de decidir cuántos lados tiene, o si tiene ángulos o a que otra figura se asemeja.

8. La palabra demostrar no tiene significado	En matemáticas, un enunciado se asume convencionalmente como verdadero, o bien se deduce de los que le proceden con la ayuda de reglas de deducción tomadas de un conjunto de reglas bien definido cuya validez es socialmente compartida. Para Duval (1993), el objeto de la demostración es la verdad y por lo tanto, obedece a criterios de validez.
9. tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor.	Los estudiantes en este nivel tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor, puesto que el niño a medida que va interactuando con ese espacio va aprender a dominarlo y a familiarizarse, además tiene conciencia de que todo lo que gira alrededor de él, es un espacio.
10. reproduce figuras a partir de modelos	El estudiante está en capacidad de reproducir figuras a través de modelos porque solo con la observación el estudiante está preparado para reproducir la misma figura o reproduce algo nuevo con características similares al modelo.
<b>VARIABLE: ANALISIS</b>	
<b>INDICADORES</b>	
1. identifica componentes de un todo pero no las relaciona entre ellas.	Los estudiantes puede identificar que un cuadrado o un rectángulo tiene lados y ángulos pero aun no es capaz de establecer la relación existente entre los lados y los ángulos de ese cuadrado o rectángulo, ni la relación existente entre el cuadrado y el rectángulo o clasificarlos según las propiedades que comparten.
2. No diferencia cuerpos de figuras.	El estudiante aun no clasifica ni diferencia las figuras de los cuerpos o

	lo tridimensional de lo bidimensional.
3. Mediante la observación y la experimentación inician a distinguir las características de las figuras.	En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades, las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares, por ejemplo identifica paralelogramos en un conjunto de figuras, identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.
4. No comprende el valor de la necesidad de definir.	Los conceptos se entienden a través de los elementos que los componen, identificando y generalizando propiedades del mismo las cuales se utilizan independientemente sin establecer relaciones entre ellas.
5. No explica las relaciones entre propiedades.	Se pueden deducir relaciones o propiedades entre los objetos y sus componentes, pero solo a través de la experimentación.
6. No se ven las interrelaciones entre las figuras.	Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades, sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.
7. Rechaza las definiciones dadas en los libros o profesor, a favor de las definiciones propias	Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones, aunque no las entiende como un todo, ya que con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales.
8. Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí.	De manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras, como muchas definiciones en geometría se elaboran a partir de propiedades no



	pueden elaborar definiciones.
9. Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.	En los niveles de van hiele parten de qué los estudiantes se dan cuenta de qué las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y qué están dotadas de propiedades geométricas están, pueden describir las partes que integran una figura y enuncian sus propiedades siempre de manera informal, lo cual les permite distinguir las partes de un rectángulo, un cuadrado con lados paralelos dos a dos ángulos rectos lados opuestos, iguales.
10. Puede hacer conjeturas mediante la observación	Los estudiantes además de reconocer las propiedades geométricas mediante la observación manipulan algunos rombos y descubren que las diagonales son perpendiculares y extenderán esta propiedad a cualquier otro rombo
11. Hace generalizaciones que ejemplifican y comprueban experimentalmente.	Los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación y teniendo en cuenta la observación y la manipulación usando las propiedades como si fueran independientes entre sí, seguirán considerando al cuadrado y al rectángulo como de dos familias disjuntas

Tabla 2: Fases de aprendizaje

<b>FASES DE APRENDIZAJE</b>
<p><b>Fase 1: Información.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Informa a los estudiantes sobre el campo a trabajar.</li> <li>2. Da a conocer los problemas a resolver.</li> <li>3. Indaga los conocimientos previos</li> <li>4. Averigua el nivel de razonamiento del grupo.</li> <li>5. Se da a conocer los materiales que se van a emplear.</li> </ol>
<p><b>Fase 2: Orientación dirigida.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Propone actividades para que los estudiantes exploren mediante una serie de actividades dirigidas.</li> <li>2. alumnos resuelven problemas y actividades basadas en el material proporcionado por el profesor.</li> <li>3. El estudiante descubre, comprende y aprende los conceptos y propiedades claves</li> <li>4. El profesor ayuda a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general.</li> <li>5. Las actividades permiten que el estudiante infiere las estructuras propias de esta fase.</li> </ol>
<p><b>Fase 3: Explicitación</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Proporcionar actividades para que los estudiantes adquieran un lenguaje matemático característico del nivel de razonamiento respectivo.</li> <li>2. Realizar actividades que proporcionen a los estudiantes intercambios de experiencias.</li> <li>3. Proporcionar un espacio de reflexión para que los estudiantes expresen sus conclusiones frente al trabajo realizado.</li> <li>4. Dedicar un espacio de la clase para que los estudiantes expliquen cómo han resuelto las actividades.</li> </ol>
<p><b>Fase 4: Orientación libre.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Proporcionar actividades para que los estudiantes apliquen y combinen los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades más complicadas.</li> <li>2. Asigna tareas que preferiblemente lleven a diferentes soluciones.</li> <li>3. Indagar por las explicaciones de las actividades realizadas.</li> </ol>
<p><b>Fase 5: Integración.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Plantear situaciones en las que el estudiante aplique los conocimientos y lenguaje adquirido.</li> <li>2. Proporcionar una síntesis de lo trabajado.</li> </ol>

La información obtenida de las pruebas inicial y final es organizada de acuerdo al cuadro de los niveles de razonamiento y organizado en tablas, una tabla por estudiante, luego se organiza esta información sumando los resultados de todos los estudiantes para categorizar la información en una escala de “siempre, algunas veces y nunca” ;después de esto, se realiza un análisis en prosa teniendo en cuenta la operacionalización en cada uno de los indicadores de las fases de aprendizaje; con la prueba final se realiza el mismo proceso de análisis.

Por otra parte la información arrojada por los videos se transcribe y se pasa a categorizar teniendo en cuenta el cuadro de operacionalización de las fases de aprendizaje y se pasa a realizar una relación de lo hecho y dicho por las docentes con lo propuesto en teoría de los esposos Van Hiele sobre las fases de aprendizaje.

A partir de los procesos anteriormente descritos, se realiza el análisis e interpretación de la información.

## 5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este apartado se expone el análisis de los datos recogidos con cada uno de los instrumentos utilizados.

En el momento de analizar los resultados arrojados por las pruebas inicial y final y las estrategias didácticas, se puede destacar que con base en las fases de aprendizaje expuestas por Van Hiele en su teoría, de acuerdo a la fase de información, las docentes hacen mayor énfasis en los indicadores que se refieren a “informar a los estudiantes sobre el campo a trabajar” y “dar a conocer los problemas a resolver”, también, tienen en cuenta “indagar sobre los conocimientos previos” y “averiguar el nivel de razonamiento del grupos”, indicadores que se pueden visualizar en momentos la clase como los siguientes:

*Profesora L: hoy vamos a jugar con unas figuras para ver qué podemos aprender nuevo de ellas (muestra al grupo algunas figuras geométricas). Primero les voy a contar una historia que le sucede a unos niños, (en este momento se cuenta la situación problema)...*

*... les vamos a entregar las figuras y lo que vamos a hacer es ponerle los nombres que ustedes se acuerdan de cada figura*

En esta parte se evidencia como la docente informa a los estudiantes sobre el campo a trabajar, da a conocer los problemas a resolver e indaga sobre los conocimientos previos. Otro fragmento de la clase puede ser donde la docente averigua el nivel de razonamiento del grupo:

*... Profesora A: Carlos ¿dónde van los ángulos?*

*Estudiante 1: aquí (muestra con el dedo la ubicación de los ángulos en el dibujo del rectángulo)...*

*Profesora A: niños, ¿quién me dice cómo se llaman las figuras que están recortando?*

*Niños: geométricas (dicen en coro)*

*Profesora A: pero ¿qué figura es?*

*Estudiante 2: el rectángulo*

*Profesora A: ¿todos son rectángulos?*

Para Van Hiele estos indicadores que se acaban de nombrar y ejemplificar son muy importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, porque es en este momento donde se indagan los conocimientos previos de cada uno de los estudiantes sobre la temática a trabajar, se conoce la claridad que ellos tienen en las diferentes temáticas y al mismo tiempo determinar los conocimientos adquiridos de manera correcta o incorrecta para así mejorarlos y lograr que los estudiantes avancen en su nivel de razonamiento por medio de actividades que impliquen observaciones, conversaciones, preguntas y entrevistas.

De acuerdo a la fase de orientación dirigida, las docentes se preocupan por hacer mayor énfasis en los indicadores relacionados con “el profesor ayuda a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general”, como se puede ver en este ejemplo:

*Estudiante 3: se puede recortar*

*Profesora L: pero ahorita, primero las tiene que trazar para que no te quede torcida al recortar*

*Estudiante 3: ay si.*

También en lo referente al indicador “los estudiantes resuelven problemas y actividades relacionadas con el material proporcionado por el profesor”

*Estudiante 4: ja, eso les quedo malo, les faltan tres porque vea nosotros como lo hicimos (muestra el geoplano con los rectángulos). Estos son los dos grandes, éste y éste, estos los flaquitos de aquí, y estos dos, son lo más pequeñitos (mientras va hablando, va señalando cada uno en el geoplano y en el paralelepípedo)*

*Estudiante 2: no mijito, no está malo*

*Estudiante 5: no está malo porque nosotros hicimos solo uno de cada uno, porque éste es igual a éste, (señalando dos caras del paralelepípedo), entonces para qué íbamos a hacer dos de los mismos.*

*Estudiante 2: ay si, estos están repetidos (señala dos rectángulos iguales pero en diferente dirección)*

Sin dejar de lado indicadores también importantes, como lo son “propone actividades para que los estudiantes exploren mediante una serie de actividades dirigidas”, “el estudiante descubre, comprende y aprende los conceptos y propiedades claves” y “las actividades permiten que el estudiante infiera las estructuras propias de esta fase”, indicadores que se pueden evidenciar en estos fragmentos de clase:

*Profesora: bueno entonces ahora lo que van a hacer es que cada grupo va buscar dentro de este salón que elementos hay que tengan esa misma forma...*

*... Profesora L: bueno entonces ustedes ¿cuáles encontraron? (señalando a uno de los grupos) muéstrenos la figura y nos dicen donde esta*

*Estudiante 4: el cuadrado y entrega la figura a la profesora*

*...Profesora L: (lee el nombre del objeto escrito en la figura) este es el tablero, ¿Cuál tablero? Muestran yo veo, a ver si esta cuadrado...*

*... Estudiante 2: Profe es que esto no es un rectángulo*

*Profesora L: ¿no? Entonces ¿Qué es?*

*Estudiante 2: eso tiene otra formita como así (Con las manos forma un triángulo)...*

De acuerdo con Van Hiele, en esta fase, es muy importante que los docentes brinden espacios que les permitan a los estudiantes descubrir, comprender y aprender nuevos conceptos y propiedades que hacen parte de una gran red mental que va desde el nivel anterior y continúa de un nivel a otro, es decir, es importante que los estudiantes comprendan totalmente cada conocimiento o concepto de acuerdo a las exigencias de cada nivel para que al trabajar con él mientras se va avanzando, pueda utilizarlos de manera adecuada e irlos complementando con los conocimientos nuevos a base de cada concepto.

Teniendo en cuenta esto, es tan importante para Van Hiele, como para Piaget, exponer que los conocimientos no se adquieren ni se organizan de manera lineal, establecidos como reglas, sino que por el contrario, son un sistema de circulación, donde las relaciones entre los conocimientos enlazan conceptos y procesos entre sí, haciendo que los y las estudiantes vayan adquiriendo unos procesos mentales adquiridos en la vida diaria y que les permite realizar diferentes representaciones y así crear nuevos conceptos y conocimientos.

De acuerdo con la fase de explicitación, se puede notar que las docentes trabajan con base a la teoría de Van Hiele, teniendo en cuenta, los indicadores relacionados con “realizar actividades que proporcionen a los estudiantes intercambios de experiencias”, “proporcionar un espacio de reflexión para que los estudiantes expresen sus conclusiones frente al trabajo realizado”, “dedica un espacio de la clase para que los estudiantes expliquen cómo han resuelto las

actividades” y “proporcionar actividades para que los estudiantes adquieran un lenguaje matemático característico del nivel de razonamiento respectivo”:

*...Profesora A: bueno, entonces vengan pues aquí que les vamos a explicar que vamos a hacer. Bueno, escuchemos pues lo que vamos a hacer. ¿ustedes alguna vez han jugado escalera?*

*Niños: ay sí, sí, yo sí...*

*... Estudiante 3: y cuando uno cae en una escalera sube o si no baja...*

*Profesora A: bueno, pero entonces acá no vamos ni a subir ni a bajar, acá para poder seguir, por ejemplo, si yo tiro y cae en el 1, entonces lo que voy a hacer es, voy a coger la ficha que hizo un compañero y explicarla y completarla, si la explica, puede seguir y si no la explica pierde turno...*

*...Profesora L: ah bueno, ¿cuantos rectángulos utilizaron?*

*Estudiante 2: dos, uno para la pared y otro para la puerta*

*Profesora L: y ¿ustedes también lo utilizaron así?*

*Estudiante 5: pues es que solo para la torre, no nosotros no*

*Profesora L: ah entonces ustedes utilizaron diferente los rectángulos*

En este tipo de actividades, para Van Hiele es de valiosa importancia favorecer el dialogo estudiante – estudiante para que puedan dar a conocer y conocer las representaciones mentales de cada uno y así construir o reconstruir los conceptos y conocimientos a adquirir y estudiante – docente, según sea necesario una intervención del docente para corregir o agregar aspectos importantes y hacer énfasis en la adquisición del lenguaje matemático característico de cada nivel de razonamiento.

Según los resultados arrojados en la fase de orientación libre, las docentes trabajan con base en los indicadores de “indagar por las explicaciones de las actividades realizadas” y “proporcionar actividades para que los estudiantes apliquen y combinen los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades más complicadas”; esto se puede notar en este ejemplo:

*Profesora A: bueno, como ya todos terminaron de hacer los bloques, entonces cada grupo va a buscar en éste salón, los elementos que tienen la misma forma de los bloques.*

*Estudiante 6: nosotros vimos la puerta, el tablero*

*Estudiante 5: (interrumpiendo a Sebastián) la mesa, el cuadrito donde está la virgen de Guadalupe*

*Estudiante 2: (interrumpe diciendo) los cositos donde dice evacuación, escaleras y ese que dice BBA (señalando con el dedo algunas señalizaciones que hay en el salón)*

*Estudiante 5: los ladrillos también*

Estos aspectos son importante para Van Hiele, ya que para ellos, se deben proponer actividades o situaciones nuevas con los conocimientos adquiridos en fases anteriores, al igual que plantear situaciones abiertas que permitan a los estudiantes explorar diferentes caminos para llegar a la solución de acuerdo a sus representaciones mentales y la reconstrucción de las mismas según el nivel de razonamiento.

Finalmente, de acuerdo con los resultados de la fase de integración, las docentes hacen énfasis en los indicadores de “proporcionar una síntesis de lo trabajado” y “plantear situaciones en las que el estudiante aplique los conocimientos y lenguaje adquirido”, como se ve en el siguiente ejemplo:

*Profesora A: no, dijimos que estaba hecho de varios rectángulos, pero todo el cuerpo...*

*Estudiante 5: es como un bloque*

*Estudiante 6: es un cuerpo... un cuerpo geométrico*

*Profesora A: es un cuerpo geométrico...*

*Estudiante 2: que tiene... Que tiene ¿qué?*

*Estudiante 5: lados*

*Estudiante 3: que tiene seis caras*

*Profesora A: que tiene seis caras y las caras son qué*

*Estudiante 4: iguales*

*Profesora L: son iguales ¿y?*

*Estudiante 6: e iguales*

*Profesora A: si, son iguales ¿y qué más?*

*Estudiante 1: opuestas*



*Profesora A: son iguales y opuestas*

*Estudiante 5: y tiene... doce... y tiene doce...*

Otra situación ejemplo es:

*Profesora A: Bueno entonces ahora, en ésta hojita que les vamos a entregar van a escribir todo lo que aprendieron sobre el rectángulo y sobre el paralelepípedo. Lo escriben con letra clara porque eso lo necesitamos para otra cosa ahorita.*

Donde Según Van Hiele (Citado por Gutiérrez y Jaime .1991) las fases tiene carácter cíclico y los estudiantes al alcanzar un nivel de razonamiento superior al que tenían, logran alcanzar un nivel mayor, así se repiten las mismas fases pero con contenidos matemáticos más complejos.

En cuanto a las pruebas inicial y final realizadas, se puede ver que en **la prueba inicial** en el caso de las preguntas 1, 2, 3, 4 y 7 que se refieren a comparar y clasificar objetos, describiéndolos de forma muy visual, comparándolos con objetos de su entorno de acuerdo a sus semejanzas de forma, la mayoría de los estudiantes muestran realizarlo algunas veces.

También en cuanto a las preguntas 3 y 7 referentes a percepción visual global de los objetos donde el estudiante percibe el espacio como una totalidad, algo completo y puede reconocer figuras por como las ve, por la percepción visual de ellas, pero no logra reconocer que dichas figuras están compuestas de muchas partes; en este indicador, la mayoría de los estudiantes muestran realizarlo algunas veces.

En cuanto a las preguntas 1, 2, 3, 4, 6 y 7 referentes al uso de las propiedades físicas de los objetos, donde los estudiantes describen de acuerdo a su aspecto físico, realizando clasificaciones basadas únicamente en las semejanzas físicas globales existentes entre ellas, se puede notar que la mayoría de los estudiantes demuestra presentar algunas veces esta conducta.

Así mismo, en cuanto a las preguntas 2, 4, 5, 6 y 7 referentes al uso de un lenguaje no técnico, donde los estudiantes poseen un lenguaje muy reducido y simple para referirse a cualquier figura geométrica; muchos estudiantes muestran

el uso de este lenguaje no técnico algunas veces, solo unos pocos muestran tenerlo siempre.

De igual manera, en las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6 referentes a identificar o describir atributos físicos, donde los estudiantes ya visualizan figuras geométricas dentro de dibujos o en el mismo espacio que los rodea; en cuanto a estas preguntas la mayoría de los estudiantes muestran realizarlo algunas veces.

También en las preguntas 3, 4, y 7 referentes a no identificar componentes de un todo, donde los estudiantes no se fijan en detalles o partes del espacio, es decir, no reconocen que un todo está compuesto por diferentes partes o figuras que tienen unas características; en este caso muchos de los estudiantes muestran tener esta conducta algunas veces y solo algunos pocos muestran no presentarlo nunca.

En cuanto a las preguntas 1 a 7 que hacen referencia a tener conciencia del espacio como algo existente alrededor, y aprender a moverse en él mediante la interacción; la mayoría de los estudiantes muestran tener esta conducta algunas veces.

De otro lado, en cuanto a la pregunta 3 de la prueba inicial que se refiere a la reproducción de figuras a partir de modelos, y realizar una figura con características similares o iguales, algunos estudiantes muestran siempre esta característica, pocos la muestran algunas veces y otros cuantos muestran no tenerla nunca.

De esta manera, se puede notar que la mayoría de los estudiantes se encuentran ubicados en el nivel de visualización, pero ahora, se analizan de forma detallada las características de los estudiantes referentes al nivel de análisis.

Al iniciar las preguntas correspondientes al nivel de análisis, se puede observar que en cuanto a las preguntas 1, 3 y 7 referentes a identificar componentes de un todo pero no relacionarlos entre ellos, donde los estudiantes pueden identificar las partes de las figuras geométricas, pero no pueden ver la relación entre estas partes, o utilizar estas partes para clasificarlas; en este caso la mayoría de los estudiantes muestran estas características algunas veces.

En el caso de las preguntas 2 y 6 referente a no diferenciar cuerpos de figuras geométricas, muchos estudiantes logran diferenciarlos algunas veces.

De igual manera en cuanto a la pregunta 6, referente a iniciar a distinguir las características de las figuras mediante la experimentación y la observación, donde

los estudiantes reconocen las figuras dentro de dibujos y del mismo espacio y las describen y definen utilizando las semejanzas con elementos de su entorno, la mayoría de estudiantes muestran tener estos aspectos algunas veces.

En cuanto a las preguntas 2, 4 y 6 referentes a enunciar una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes, donde los estudiantes enuncian propiedades poco relevantes de las figuras para identificarlas, en este caso la mayoría de los estudiantes hacen esta lista innecesaria algunas veces.

En el caso de las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6 referentes a hacer conjeturas, mediante la observación donde los estudiantes pueden, a partir de la observación generar hipótesis que aplican a otras figuras, la mayoría de los estudiantes hacen conjeturas algunas veces.

Como explicación, se organiza la información en el siguiente cuadro:

Tabla 3: cuadro general análisis prueba inicial

Nº indicador	Indicador	Nº Pregunta	Siempre	Algunas Veces	Nunca	Total
<b>VISUALIZACION</b>						
1	Compara y clasifica objetos	1,2,3,4,7	0 niños	7 niños	0 niños	7 niños
2	Posee percepción visual global	3,7	0 niños	7 niños	0 niños	7 niños
3	Usa las propiedades físicas	1,2,3,4,6,7	0 niños	7 niños	0 niños	7 niños
4	Usa un lenguaje no técnico	2,4,5,6,7	2 niños	5 niños	0 niños	7 niños
5	Identifica o describe atributos físicos	1,2,3,4,6	0 niños	7 niños	0 niños	7 niños
7	No identifica componentes de un todo	3,4,7	0 niños	5 niños	2 niños	7 niños
9	Tiene conciencia del espacio como	Todas	0 niños	7 niños	0 niños	7 niños

	algo que existe a su alrededor					
10	Reproduce figuras a partir de modelos	3	2 niños	3 niños	2 niños	7 niños
<b>ANALISIS</b>						
1	Identifica componentes de un todo pero no las relaciona entre ellas	1,3,7	0 niños	6 niños	1 niño	7 niños
2	No diferencia cuerpos de figuras	2,6	0 niños	4 niños	3 niños	7 niños
3	Mediante la observación y la experimentación inician el valor a distinguir las características de las figuras	6	0 niños	7 niños	0 niños	7 niños
9	Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes	2,4,6	4 niños	3 niños	0 niños	7 niños
10	Puede hacer conjeturas mediante la observación	1,2,3,4,6	1 niño	6 niños	0 niños	7 niños

Al finalizar la aplicación de las estrategias didácticas, se realiza una prueba final, con el fin de determinar el estado de los estudiantes; luego de realizar dichas

estrategias, los resultados arrojados por esta prueba, permiten analizar los niveles de visualización y análisis de la teoría de Van Hiele con cada uno de los criterios que lo caracterizan.

En las preguntas 1, 2, 3, 4 y 7 que hacen referencia a comparar y clasificar objetos teniendo en cuenta sus características físicas, se puede observar que la gran mayoría de los estudiantes responden satisfactoriamente y muy pocos, responden algunas veces.

En cuanto a las preguntas 3 y 7 de la prueba, se puede decir que todos los estudiantes poseen percepción visual global de las figuras.

En la prueba, en relación con las preguntas 1, 2, 3, 4, 6 y 7 la mitad de los estudiantes responden que siempre utilizan las propiedades físicas de las figuras y los cuerpos geométricos, por otro lado, la mitad más un estudiante restante, solo algunas veces utiliza las propiedades físicas.

Todos los estudiantes utilizan un lenguaje no técnico al referirse a las figuras, cuerpos geométricos y sus características, según las respuestas obtenidas en las preguntas 2, 4, 5, 6 y 7 de la prueba.

En relación con las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6, la mitad de los estudiantes siempre identifican o describen atributos físicos de las figuras y los cuerpos geométricos, y la otra mitad más un estudiante, responden que solo en algunas ocasiones describen e identifican los atributos físicos.

Por otro lado, en cuanto a las preguntas 3, 4 y 7, que tienen que ver con que los estudiantes no identifiquen componentes de un todo, es decir, que no tienen la capacidad de extraer las diferencias de un todo ni reconocer sus características individuales, se encuentra que todos los estudiantes nunca cumplen con esta característica, ya que todos logran identificar los diferentes componentes.

Todas las preguntas de la prueba están relacionadas con que los estudiantes tengan conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor y al finalizar las estrategias, se logra evidenciar que todos los estudiantes cumplen con este indicador satisfactoriamente.

En relación con que los estudiantes logren reproducir figuras a partir de modelos, la pregunta 3 de la prueba, muestra que la mayoría de los estudiantes solo lo logran algunas veces, exceptuando uno de los estudiantes, que logra reproducir las figuras siempre.

Estos fueron los resultados obtenidos en cuanto al nivel de visualización; ahora, en relación con las preguntas que indagan sobre el nivel de análisis, se puede encontrar que, las preguntas 1, 3 y 7, muestran que todos los estudiantes, en algunas ocasiones identifican componentes de un todo, pero no logran relacionarlos entre ellos.

Por otro lado, las preguntas 2 y 6 de la prueba, muestran que la mayoría de los estudiantes, algunas veces no diferencian cuerpos de figuras y el menor número de estudiantes restante, nunca lo logra.

En cuanto a la pregunta 6, la mayoría de los estudiantes siempre logra distinguir las características de las figuras mediante la observación y la experimentación, identificando y reconociéndolas figuras dentro de un todo y en el espacio y describiéndolas con base en semejanzas visuales.

Según los resultados de las preguntas 2, 4 y 6, la mitad de los estudiantes siempre enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar las propiedades necesarias y suficientes para los mismos y la otra mitad más un estudiante restante, solo algunas veces utiliza propiedades innecesarias.

Finalmente, en las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6 se puede ver que la mayoría de los estudiantes puede hacer conjeturas mediante la observación, y un menor número de estudiantes, solo logra hacer dichas conjeturas algunas veces.

De igual manera se añade un cuadro con la información organizada:

Tabla 4: cuadro general análisis prueba final

<b>Nº indicador</b>	<b>Indicadores</b>	<b>Nº Pregunta</b>	<b>Siempre</b>	<b>Algunas veces</b>	<b>Nunca</b>
<b>VISUALIZACIÓN</b>					
1	Compara y clasifica objetos	1,2,3,4,7	5 niños	1 niño	0 niños
2	Posee percepción visual global	3,7	6 niños	0 niños	0 niños
3	Usa las propiedades físicas	1,2,3,4,6,7	3 niños	3 niños	0 niños
4	Usa un lenguaje no técnico	2,4,5,6,7	0 niños	6 niños	0 niños
5	Identifica o describe	1,2,3,4,6	3 niños	3 niños	0

	atributos físicos				niños
7	No identifica componentes de un todo	3,4,7	0 niños	0 niños	6 niños
9	Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor	todas	6 niños	0 niños	0 niños
10	Reproduce figuras a partir de modelos	3	2 niños	4 niños	0 niños
<b>ANALISIS</b>					
1	Identifica componentes de un todo pero no los relaciona entre ellos	1,3,7	0 niños	6 niños	0 niños
2	No diferencia cuerpos de figuras	2,6	0 niños	4 niños	2 niños
3	Mediante la observación y la experimentación inician el valor a distinguir las características de las figuras	6	5 niños	1 niño	0 niños
9	Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes	2,4,6	3 niños	3 niños	0 niños
10	Puede hacer conjeturas mediante la observación	1,2,3,4,6	5 niños	1 niño	0 niños

## 6. DISCUSIONES E INTERPRETACIONES

En este capítulo se pretende aclarar la información suministrada por el análisis de los datos teniendo en cuenta la teoría desarrollada en esta investigación; generando así una relación entre ellos, que permita establecer la pertinencia de la aplicación de la teoría en el aula.

De esta manera, en el análisis de las estrategias basadas en las fases de aprendizaje expuestas por Van Hiele de acuerdo a la fase de información donde el docente debe propiciar a los estudiantes observaciones, conversaciones, preguntas, entre otras actividades que permitan al docente indagar los conocimientos previos e informar a los estudiantes las actividades a realizar y el por qué y para qué de estas; se puede destacar que la docente hace mayor énfasis en los indicadores que se refieren a “informar a los estudiantes sobre el campo a trabajar” y “dar a conocer los problemas a resolver” indicadores evidenciados en el siguiente fragmento de clase:

*Profesora L: hoy vamos a jugar con unas figuras para ver que podemos aprender nuevo de ellas (muestra al grupo algunas figuras geométricas). Primero les voy a contar una historia que le sucede a unos niños, (en este momento se cuenta la situación problema)...*

En este momento de la clase la docente pretende que los estudiantes tengan una visión más clara de lo que se va a hacer en la clase, los problemas que se van a resolver y la secuencia de los mismos, esto permite que el estudiante tenga una visión clara y organizada de la secuencia de clase, además el hecho de conocer los temas a tratar, le permite al estudiante ir haciendo conexiones entre lo que sabe y el tema que propone la docente, además de ir recibiendo vocabulario pertinente al contenido; por otra parte conocer los problemas a resolver permite al estudiante, familiarizarse con el problema, identificar posibles metas e idear estrategias. Para lograr esto es importante que la docente tenga la capacidad de formular las preguntas adecuadas, en el momento oportuno y de la manera conveniente con el fin de que el estudiante comprenda la finalidad de las actividades.

Para Van Hiele esto es importante, ya que el aprendizaje requiere una reestructuración progresiva de campos que lleva a estructuras mentales nuevas y más complejas, por ello al dar a conocer a los estudiantes el campo a trabajar y el problema a resolver, las docentes ayudan a que inicie esa reestructuración de



campos en la mente de sus estudiantes, puesto que ellos, al conocer estos aspectos, empiezan a crear unas nuevas estructuras mentales a partir de lo que ya saben y de lo que la docente les acaba de mostrar.

Además de “informar a los estudiantes sobre el campo a trabajar” y “dar a conocer los problemas a resolver”, las docentes tienen en cuenta otros dos indicadores de esta misma fase de información, cómo son “indagar sobre los conocimientos previos” y “averiguar el nivel de razonamiento del grupo”, indicadores que se pueden visualizar en momentos de la clase como los siguientes:

*... les vamos a entregar las figuras y lo que vamos a hacer es ponerle los nombres que ustedes se acuerden de cada figura y decir por qué lo ponen...*

En este fragmento de clase se logra percibir una actividad donde las docentes pueden ver en las actuaciones de los estudiantes los conocimientos previos que tienen del tema y ver al mismo tiempo el nivel de razonamiento de cada uno de los estudiantes.

Para Van Hiele esto es importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, porque es en este momento donde se indagan los conocimientos previos de cada uno de los estudiantes sobre la temática a trabajar, se conoce la claridad que ellos tienen en las diferentes temáticas y al mismo tiempo determinar los conocimientos adquiridos de manera correcta o incorrecta para así mejorarlos y lograr que los estudiantes avancen en su nivel de razonamiento por medio de actividades que impliquen observaciones, conversaciones, preguntas y entrevistas. Indagar conocimientos previos permite a la docente guiar el proceso de enseñanza acercándose a la situación real de cada estudiante para proporcionarle aquello que necesita para desarrollar el nivel de razonamiento en el que se encuentra y poder pasar al siguiente nivel; por otra parte le permite saber el nivel de complejidad y la exigencia que podrá tener con el grupo o con algunos estudiantes en el momento de desarrollar la temática.

De acuerdo a los planteamientos hechos por Van Hiele, estas actividades también permiten al docente no solo establecer el punto de partida, si no también evidenciar el desarrollo que tienen los estudiantes a lo largo de las actividades de acuerdo a las respuestas dadas en esta primera parte y las que den en el transcurso de las demás actividades del proceso.

Al finalizar la fase de preguntas e información se encuentra la fase de orientación dirigida, donde las docentes se preocupan por hacer mayor énfasis en los

indicadores relacionados con “el profesor ayuda a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general” tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

*Estudiante: ¿se puede recortar?*

*Profesora L: pero ahorita, primero las tiene que trazar para que no te quede torcida al recortar*

*Estudiante: ay sí.*

Aquí se puede notar como la docente le responde a un estudiante una pregunta que le genera dificultad para realizar el trabajo, diciéndole como debe realizarlo para lograr el objetivo, que en este caso es hacer un modelo de un paralelepípedo utilizando rectángulos; para lograrlo, el estudiante debe primero trazar los rectángulos y luego recortarlos, no al revés, la acción de la docente permite, como plantea Van Hiele secuenciar las actividades y materiales de forma lógica y con intencionalidad, ya que la intención es que al realizar el trazo los estudiantes logren identificar los rectángulos que forman el paralelepípedo, se puede entonces notar que la docente a través de su acción, procura que los estudiantes vayan desarrollando las propiedades características del nivel; descubriendo, comprendiendo, asimilando, y aplicando ideas, propiedades y conceptos; en esta actividad se puede notar que la docente procura que los estudiantes desarrollen la capacidad de reproducir figuras a partir de modelos, y realizar una figura con características similares o iguales, como se nota también en la pregunta número 3 de las pruebas inicial y final, donde, en la prueba inicial, algunos estudiantes muestran siempre ésta característica, pocos la muestran algunas veces y otros cuantos muestran no tenerla nunca; y en cuanto a la prueba final se nota que se logran algunos avances, ya que la mayoría de los estudiantes logran cumplir con esta característica algunas veces y uno de ellos, siempre logra reproducir figuras a partir de modelos.

En este tipo de actividades, la docente debe tener muy claro la secuencia que tienen las actividades y el propósito de las mismas para lograr este tipo de avances, ya que son estos dos aspectos, los que le permiten lograr la meta o el objetivo propuesto con los estudiantes, si el docente tiene muy claro el objetivo podrá ser creativo y didáctico para asegurar la comprensión de los estudiantes, ayudándolos a superar las dificultades oportunamente, esto beneficia a los estudiantes ya que es necesario que ellos interactúen y realicen las actividades de una forma ordenada, pero no en cualquier orden, si no en el orden intencionado que le da el docente al conocer las características y habilidades que el estudiante debe desarrollar en el nivel de razonamiento en el que se encuentre.

El docente no solo ayuda al estudiante a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general, si no que en este caso, se puede evidenciar que también procura que el estudiante resuelva los problemas, así como lo indica el indicador “los estudiantes resuelven problemas y actividades relacionadas con el material proporcionado por el profesor” ejemplificado en el siguiente fragmento de clase:

*Estudiante 1: ja, eso les quedo malo, les faltan tres porque vea nosotros como lo hicimos (muestra el geoplano con los rectángulos). Estos son los dos grandes, éste y éste, estos los flaquitos de aquí, y estos dos, son lo más pequeñitos (mientras va hablando, va señalando cada uno en el geoplano y en el paralelepípedo)*

*Estudiante 2: no mijito, no está malo*

*Estudiante 3: no está malo porque nosotros hicimos solo uno de cada uno, porque éste es igual a éste, (señalando dos caras del paralelepípedo), entonces para qué íbamos a hacer dos de los mismos.*

*Estudiante 2: ay si, estos están repetidos (señala dos rectángulos iguales pero en diferente dirección)*

*Profesora. Los observa pero no intervine.*

En el anterior ejemplo de clase, se puede notar como los estudiantes de dos grupos de trabajo discuten en cuanto a la cantidad de rectángulos que se deben hacer en el geoplano para lograr plasmar las caras de un paralelepípedo, y como la docente no interviene en la discusión, como lo plantea Van Hiele permite que los estudiantes descubran, comprendan y asimilen lo concerniente al campo a trabajar, la docente debe permitir que sean los estudiantes quienes por si solos analicen y resuelvan la situación, formando así nuevas estructuras mentales, esto desde las actividades que la docente propone y aquellas situaciones que se dan dentro de la realización de las mismas y que permiten poner a los estudiantes en cuestionamientos que les ayudan a resolver inquietudes e ir afianzando sus conocimientos para desarrollar aquellas habilidades que necesitan en el nivel de razonamiento en que se encuentren. Aquí es importante que la docente esté pendiente de las discusiones de los estudiantes para que no se tornen personales si no, que como lo hicieron los estudiantes del ejemplo, puedan resolver la situación, determinando qué es pertinente y qué no; como se muestra en el ejemplo la docente no interviene en la conversación pero los observa, lo que permite evidenciar que en este caso la docente está pendiente de la situación, pero no la resuelve, si no que deja que los estudiantes discutan el asunto entre ellos, esto permite que como plantea Van Hiele los estudiantes exploren nuevas cosas a partir de las actividades que el docente propone dirigidas al

descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales en el nivel de razonamiento en que se encuentren.

Por otra parte al continuar, se puede notar que la docente no deja de lado las actividades de exploración relacionadas con el indicador “propone actividades para que los estudiantes exploren mediante una serie de actividades dirigidas” ejemplificado en el siguiente fragmento de clase:

*Profesora: bueno entonces ahora lo que van a hacer es que cada grupo va buscar dentro de este salón que elementos hay que tengan esa misma forma...*

*Estudiantes: caminan por el salón mirando a los lados*

*Profesora: observa a los estudiantes desde la esquina del salón*

En este fragmento de clase se puede ver como la docente propone una actividad en la que los estudiantes deben caminar por el salón, explorar para poder realizar la actividad, en la cual según Van Hiele se pone a los estudiantes en contacto con el contexto, con su entorno, y donde la docente debe procurar estar pendiente de lo que hacen los estudiantes ya que, aunque son actividades en las que el estudiante es el que hace, el que toma participación, la docente no debe dejar solo al grupo puesto que pueden surgir inconvenientes o el grupo puede desviarse de la meta, por eso el docente debe dirigir las actividades y prestar atención a las actuaciones de los estudiantes.

Este indicador es muy importante porque se deben plantear actividades que permitan la exploración, ya que es en la exploración donde el estudiante va desarrollando los conceptos y habilidades que necesita en el nivel de razonamiento que se encuentra; es importante que la docente en esta fase se asegure de que los estudiantes estén comprendiendo, puesto que la comprensión que logren asegura que alcancen el objetivo o la meta de desarrollar las estructuras propias del nivel; es elemental en este indicador y en todos los demás que las actividades que la docente proponga sean muy creativas y productivas es decir que de verdad pongan al estudiante en situación, depende entonces de la calidad de ellas, la calidad de los avances del estudiante, esto se puede ejemplificar con los resultados obtenidos en las pruebas inicial y final de esta investigación puesto que en la prueba inicial en las preguntas 1 a 7 que tienen que ver con tener conciencia del espacio como algo existente alrededor, y aprender a moverse en él mediante la interacción; la mayoría de los estudiantes muestran tener esta conducta solo algunas veces, mientras que en la prueba final, después

de haber aplicado las estrategias, en las mismas preguntas, referentes a los mismos aspectos todos los estudiantes muestran presentar esta conducta.

Con relación a este indicador, también se puede notar que en cuanto a las mismas pruebas inicial y final, este tipo de actividades influye en las respuestas dadas por los estudiantes, en las preguntas número 1, 2, 3, 4 y 7, relacionadas con comparar y clasificar objetos conocidos del entorno y poseer percepción visual global, puesto que en la prueba inicial, la mayoría de los estudiantes solo logran alcanzar estas acciones algunas veces, pero luego de la aplicación de las estrategias y con este tipo de actividades, se logra que en la prueba final se obtuvieran mejores resultados, y solo pocos estudiantes respondieran a estas preguntas algunas veces. Estas preguntas, permiten a la docente identificar si este tipo de actividades influye o no en el nivel de razonamiento de los estudiantes.

La importancia de las actividades que desarrollen este indicador depende del momento de plantear las actividades que permitan la exploración, es en esa exploración donde el estudiante va desarrollando los conceptos y habilidades que necesita en el nivel de razonamiento que se encuentra, es importante que la docente en esta fase se asegure de que los estudiantes estén comprendiendo ya que la comprensión que logren asegura que se alcance el objetivo o la meta de desarrollar las estructuras propias del nivel, es elemental en este indicador y en todos los demás que las actividades que la docente proponga sean muy creativas y productivas es decir que de verdad pongan al estudiante en situación, depende entonces de la calidad de ellas, la calidad de los avances del estudiante, por eso seguidamente se quiere considerar los siguientes indicadores “el estudiante descubre, comprende y aprende los conceptos y propiedades claves” y “las actividades permiten que el estudiante infiera las estructuras propias de esta fase” ejemplificados en el siguiente fragmento de clase:

*Profesora A: no las hicimos pero si trabajamos con las figuras, bueno y después en las fichitas, ¿qué hicimos en las hojas?*

*Estudiante 1: escribir el nombre y ya*

*Estudiante 2: mire, dibujar el rectángulo y escribirle sus partes*

*Profesora A: y ¿quién se acuerda de cuáles son las partes?*

*Estudiante 1: yo, lados, ehh...*

*Profesora A: muéstrame (le entrega un rectángulo en cartulina)*

*Estudiante 1: lados (desplaza sus dedos por cada uno de los lados)*

*Profesora A: bien*

*Estudiante 3: y lo de por dentro, el ángulo, vértice la punta*

*Estudiante 1: vertici, ángulo (enseña con los dedos cada parte)*

*Estudiante 2: vertici (jajaja- risas)*

*Estudiante 4: nooo, vértice*

*Estudiante 5: lados iguales*

**Otro ejemplo de este indicador es el siguiente:**

*Profesora L: ahora miren aquí (toma todos los rectángulos que recortaron el papel blanco y los pone en el centro) estos todos son rectángulos, son los moldes que ustedes utilizaron.*

*Mírenlas y díganme que tienen en común todas estas figuras, que creen que las hace iguales*

*Estudiante 4: la formita*

*Profesora L: ¿cual formita?*

*Estudiante 4: esta (señala los lados del rectángulo)*

*Estudiante 5: unas rectas*

*Profesora A: ¿Cuáles rectas?*

*Estudiante 5: Estas profe (señala los lados)*

*Profesora A: y que tiene esas rectas de particular, míralas y me dices*

*Estudiante 5: (observa los rectángulos) que están acostadas*

*Profesora A: ¿estás también? (señala los lados opuestos que están verticalmente)*

*Estudiante 5: ah no (observa los lados del rectángulo), entonces nada profe todos tiene las rectas así formando un cuadro.*

*Profesora L: rectángulo*

*Profesora A: bueno, rectángulo pero mira donde se unen las rectas que hay*

*Estudiante 2: unas puntas profe*

*Profesora L: unas puntas muy bien, que más pueden ver, ¿nada más?*

En estas actividades, la docente pide a los estudiantes observar un rectángulo y les realiza una serie de preguntas intencionadas para que los estudiantes identifiquen las partes o características con las que está conformado, y se puede ver como los estudiantes responden a esta actividad notando esas partes utilizando un lenguaje no matemático, pero tratan de hacerlo al notar esas partes. Se ve entonces una combinación de las dos fases de orientación dirigida y explicitación y cómo se puede notar estas dos fases están muy relacionadas entre sí ya que son las que combinadas permiten al estudiante avanzar en los niveles de razonamiento de acuerdo con Van Hiele, aquí con estas dos fases lo que se pretende es que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan las propiedades y conceptos fundamentales, por eso las actividades que la docente proponga deben estar encaminadas a este propósito, Van Hiele afirma que las actividades y la calidad de las mismas en esta fase forman las bases para lograr el avance del pensamiento a un nivel superior, esto, si las actividades son cuidadosamente escogidas y secuenciadas; esta respuesta positiva se puede ver en los resultados de las pruebas inicial y final, en las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6, relacionadas con que los estudiantes logren identificar o describir atributos físicos, ya que en las respuestas de la prueba inicial, los estudiantes solo logran identificar las características físicas algunas veces, pero luego de aplicar este tipo de actividades, en la prueba final, la mayoría de los estudiantes logran mejorar sus respuestas identificando y describiendo las características del rectángulo. Estos aspectos se ven también evidenciados en los resultados de las preguntas 3, 4 y 7, que tienen que ver con que los niños no identifican componentes de un todo, es decir, que no tienen la capacidad de extraer las diferentes partes de un todo ni reconocer sus características individuales, con referencia a este aspecto, se pueden evidenciar avances, ya que en la prueba inicial, muchos estudiantes alcanzan este indicador algunas veces, y en la prueba final, se logra que todos los estudiantes nunca cumplan con esta característica, ya que todos logran identificar los diferentes componentes del todo.

En esta fase, es muy importante que los docentes brinden espacios que les permitan a los estudiantes descubrir, comprender y aprender nuevos conceptos y propiedades que hacen parte de una gran red mental que va desde el nivel anterior y continúa de un nivel a otro, es decir, es importante que los estudiantes comprendan totalmente cada conocimiento o concepto de acuerdo a las exigencias de cada nivel para que al trabajar con él mientras se va avanzando, pueda utilizarlos de manera adecuada e irlos complementando con los conocimientos nuevos a base de cada concepto.

Teniendo en cuenta esto, es tan importante para Van Hiele, como para Piaget, exponer, que los conocimientos no es que se organizan de manera lineal, establecidos como reglas, sino que por el contrario, son un sistema de circulación, donde las relaciones entre los conocimientos enlazan conceptos y procesos entre sí, haciendo que los estudiantes vayan alcanzando unos procesos mentales adquiridos en la vida diaria y que les permite realizar diferentes representaciones y así crear nuevos conceptos y conocimientos.

De acuerdo con la fase de explicitación, se puede notar que las docentes trabajan con base a la teoría de Van Hiele, durante varios momentos de las clases, donde se dedican a realizar actividades en las que los estudiantes puedan explorar, reflexionar, explicar, compartir e intercambiar experiencias con sus demás compañeros para adquirir un conocimiento mucho más completo y claro, ya que es trabajado con base en sus propias experiencias y conocimientos, logrando así que al mismo tiempo ese conocimiento adquirido sea significativo para cada uno de los estudiantes, estas actividades permiten destacar el énfasis que hacen las docentes en la teoría de Van Hiele, teniendo en cuenta, los indicadores “realizar actividades que proporcionen a los estudiantes intercambios de experiencias” y “dedica un espacio de la clase para que los estudiantes expliquen cómo han resuelto las actividades” que se ilustran en el siguiente fragmento de clase:

*Profesora L: bueno, entonces ahora pasemos a otra cosa (les recibe las cartulinas en las cuales están fijados los rectángulos de papel formando las figuras), ahora vamos a analizar las figuras que hicieron nuestros compañeros, cada grupo va a tomar la figura que le di, sin importar de quien sea y van a observar qué figuras utilizaron, cómo los utilizaron, cuántos utilizaron y si los utilizaron igual o diferente que ustedes...*

*Profesora L: bueno ahora si vamos a decir los que notaron en las figuras, empieza el grupo de Estudiante 1, ¿Qué pudieron notar en el dibujo de sus compañeros?*

*Estudiante 1: Profe es que esto no es un rectángulo*

*Profesora L: ¿no? Entonces ¿Qué es?*

*Estudiante 1: eso tiene otra formita como así (Con las manos forma un triángulo)*

*Profesora L: ah entonces ellos utilizaron una figura que no teníamos calcada*

*Estudiante 1: si señora, esta malo porque eso no era*

*Profesora L: pero ¿ellos si utilizaron rectángulos para algo?*

*Estudiante 1: si, para el resto de la casa, las paredes*



*Profesora L: ah entonces solo tenían una figura, que no era de las que colocamos, el triángulo; el resto si son rectángulos, pero hablemos de como utilizaron los rectángulos.*

*Estudiante 1: así acostaditos...*

*(Todos los grupos de clase realizaron el mismo proceso)*

En el fragmento anterior de clase se puede ver que las docentes plantean una actividad en la que los estudiantes por grupos, deben analizar los trabajos realizados por sus compañeros, dando opinión en cuanto a la utilización del material y la forma; según Van Hiele esto debe procurarse porque permite a los estudiantes ver desde las perspectivas de otros, cómo resolvieron la actividad de forma diferente, y que hay diversas formas de resolver una misma actividad, además les permite conocer dificultades ajenas y hacer conocer las propias y la forma cómo fueron superadas, todo esto debe realizarse en un contexto de dialogo donde se pueda aprender de cada una de las intervenciones de los estudiantes y la docente debe servir como mediador, interviniendo solo cuando sea conveniente para abordar temáticas nuevas o conceptos de lenguaje para el nivel en el que se encuentran, y cómo en el caso del fragmento de clase para ayudar a que no se genere conflicto en el aula.

Por otro lado, y con base en los indicadores relacionados con “proporcionar un espacio de reflexión para que los estudiantes expresen sus conclusiones frente al trabajo realizado”, y “proporcionar actividades para que los estudiantes adquieran un lenguaje matemático característico del nivel de razonamiento respectivo” se presentan situaciones que se pueden notar en estos fragmentos extraídos de las clases:

*...Profesora A: bueno, entonces vengan pues aquí que les vamos a explicar que vamos a hacer. Bueno, escuchemos pues lo que vamos a hacer. ¿Ustedes alguna vez han jugado escalera?*

*Niños: ay si, si, yo si...*

*... Estudiante 1: y cuando uno cae en una escalera sube o si no baja...*

*Profesora A: bueno, pero entonces acá no vamos ni a subir ni a bajar, acá para poder seguir, por ejemplo, si yo tiro y cae en el 1, entonces lo que voy a hacer es, voy a coger la ficha que hizo un compañero y explicarla y completarla, si la explica, puede seguir y si no la explica pierde turno...*

**Otro fragmento de clase que ejemplifica estos indicadores:**

*...Profesora L: ah bueno, ¿cuántos rectángulos utilizaron?*

*Estudiante 2: dos, uno para la pared y otro para la puerta*

*Profesora L: y ¿ustedes también lo utilizaron así?*

*Estudiante 3: pues es que solo para la torre, no nosotros no*

*Profesora L: ah entonces ustedes utilizaron diferente los rectángulos*

Para Van Hiele es de valiosa importancia favorecer el dialogo estudiante – estudiante para que puedan dar a conocer y conocer las representaciones mentales de cada uno y así construir o reconstruir los conceptos y conocimientos a adquirir; y estudiante – docente, según sea necesario una intervención del docente para corregir o agregar aspectos importantes y hacer énfasis en la adquisición del lenguaje matemático característico de cada nivel de razonamiento; estos diálogos propuestos por Van Hiele, permiten además que los estudiantes intercambien experiencias y logren comprender mejor, aspectos que aún no están claros para algunos y que otros pueden explicarlos de acuerdo a sus situaciones y experiencias vividas que están desarrolladas en un contexto igual o similar al de los demás compañeros; estos diálogos también ayudan a los estudiantes a perfeccionar sus soluciones de acuerdo a las recomendaciones de los compañeros o docentes. Durante estos diálogos, se presentan puntos de vista diferentes frente a la solución de las actividades planteadas, y esto es enriquecedor para los estudiantes, puesto que cada uno intenta justificar su idea y para ello requiere organizar los conocimientos y experiencias adquiridas con anterioridad para poder dar razones válidas en la solución de las actividades, y mientras cada uno de los estudiantes está explicando sus soluciones, los demás van a ir comprendiendo y reflexionando sobre cada una de ellas, ya sea para hacer cambios en su solución o para perfeccionarla teniendo en cuenta los aportes que les parezcan interesantes de sus compañeros; de esta manera, en esta fase los estudiantes toman por decirlo así el control de los intercambios de saberes y aprenden de la interacción unos con otros, descubriendo nuevas formas y conceptos que les permitirá afianzar todas aquellas habilidades y procesos propios del nivel de razonamiento en que se encuentre e ir desarrollando los que son necesarios para ir avanzando en el siguiente nivel. Estos avances se pueden notar de forma positiva, en las respuestas a las preguntas 2, 4, 5, 6 y 7 de las pruebas inicial y final, donde los estudiantes, por medio de estos intercambios de experiencias y conceptos logran pasar de utilizar siempre un lenguaje no técnico, a aprender conceptos nuevos y dar explicaciones con lenguaje técnico apropiado para cada nivel de razonamiento.

Teniendo en cuenta los resultados arrojados en la fase de orientación libre, se puede notar la importancia que las docentes le brindan a las actividades de exploración libre, en las que el estudiante debe dar cuenta de la forma como es realizada la actividad y de la importancia de que sean aplicados y combinados los conocimientos adquiridos en espacios o actividades anteriores, logrando así llegar a los resultados esperados; según estas actividades, las docentes trabajan con base en el indicador de “indagar por las explicaciones de las actividades realizadas”, este aspecto se puede notar en algunos fragmentos extraídos de las clases realizadas:

*Profesora L: bueno, triángulo, rectángulo, y a este ¿por qué le pusieron rectángulo?*

*Estudiante 1: porque parece la forma como de un, de un edificio*

*Estudiante 2: y de una carretera*

*Profesora L: ¿Por qué más le pusieron rectángulo?*

*Estudiante 3: Porque se parece a una tabla.*

*Profesora L: y el círculo ¿por qué lo pusieron círculo?*

*Estudiante 3: porque es una bola, como la O*

*Profesora L: entonces por eso pusieron círculo, y a este ¿porque le pusieron cuadrado? (mostrando uno de los cuadrados que los niños marcaron)*

*Estudiante 2: porque tiene forma de...*

*Estudiante 3: ...de una ventana*

*Estudiante 4: y también como las fotos.*

En este fragmento de clase se puede notar que las docentes realizan constante indagación por las actividades realizadas, y esto es importante para Van Hiele puesto que este tipo de actividades genera en los estudiantes conflicto cognitivo y para poder dar respuestas a las preguntas realizadas por las docentes, debe combinar los conocimientos adquiridos en actividades y fases anteriores para complementar sus respuestas y lograr llegar a la solución realizando las relaciones necesarias entre sus conceptos adquiridos logrando establecer relaciones más complejas para dar respuestas con aspectos importantes y relevantes; al mismo tiempo que van utilizando las características aprendidas sobre cada figura; la realización de actividades de este tipo, ayuda a los estudiantes a comparar y utilizar las propiedades físicas de las diferentes figuras, tal y como se puede notar

en las preguntas 1, 2, 3, 4, 6 y 7 de las pruebas inicial y final, donde más de la mitad de los estudiantes logran utilizar las características de las figuras, describiéndolas con base en aspectos físicos y clasificándolas con referencia a semejanzas globales y visuales.

Con base en el indicador relacionado con “proporcionar actividades para que los estudiantes apliquen y combinen los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades más complicadas”, se puede notar en las clases que las docentes realizan actividades de este tipo, como lo muestra el siguiente fragmento:

*Profesora A: bueno, como ya todos terminaron de hacer los bloques, entonces cada grupo va a buscar en éste salón, los elementos que tienen la misma forma de los bloques.*

*Estudiante 1: nosotros vimos la puerta, el tablero*

*Estudiante 2: (interrumpiendo a Sebastián) la mesa, el cuadrado donde está la virgen de Guadalupe*

*Estudiante 3: (interrumpe diciendo) los cositos donde dice evacuación, escaleras y ese que dice BBA (señalando con el dedo algunas señalizaciones que hay en el salón)*

*Estudiante 2: los ladrillos también*

Con este tipo de actividades las docentes buscan que los estudiantes logren aplicar sus conocimientos en diferentes situaciones, para lograr algunos de los aspectos importantes para Van Hiele en su teoría, donde dicen que se deben proponer diferentes actividades o situaciones nuevas con los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, al igual que plantear situaciones abiertas que permitan a los estudiantes explorar diferentes caminos para llegar a la solución de acuerdo a sus representaciones mentales y la recolección de las mismas según el nivel de razonamiento de los estudiantes. Por otro lado, Piaget afirma que es muy importante que el docente proponga experiencias de aprendizaje significativo para lograr que los estudiantes realicen las actividades con motivación e interés y al mismo tiempo adquieran los conocimientos requeridos para la solución de cada situación planteada y desarrollada de acuerdo a la experiencia y conocimiento de cada uno de los estudiantes. Con base en esto, es importante tener en cuenta que como lo afirma Rafael Duran Rodríguez, citando a Mockus et al., 1995, p. 75 en un artículo de una revista científica, donde dice que “Entonces es necesario comprender la pedagogía como una disciplina reconstructiva que pretenda transformar un “saber-cómo”, dominado prácticamente, en un “saber-qué”, explícito, constatable con el conocimiento interactivo de los educadores”, es decir

que en general todo el proceso de enseñanza y aprendizaje debe basarse no solo en el “saber que” o en el conocer el concepto simplemente, sino que es mucho más importante llevar a los estudiantes a comprender el “saber cómo” para que puedan llevar los conocimientos adquiridos día a día a las experiencias y situaciones que se presentan a diario.

Finalmente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la fase de integración, las docentes proponen actividades evaluativas, para que los estudiantes den cuenta de lo que aprendieron durante la realización de las actividades propuestas a lo largo de las clases; para realizar estas actividades, las docentes tienen en cuenta el indicador de “proporcionar una síntesis de lo trabajado”, una de las actividades que ejemplifica este indicador está evidenciado en el siguiente fragmento de clase:

*Profesora A: Bueno entonces ahora, en ésta hojita que les vamos a entregar van a escribir todo lo que aprendieron sobre el rectángulo y sobre el paralelepípedo. Lo escriben con letra clara porque eso lo necesitamos para otra cosa ahorita.*

Con esta actividad, las docentes pretenden que los estudiantes den cuenta de lo aprendido durante el desarrollo de las actividades, mientras los estudiantes van realizando la síntesis de lo trabajado, van reajustando sus comprensiones sobre los conceptos y el desarrollo de las actividades, al mismo tiempo, según Van Hiele, los estudiantes van haciendo un proceso involuntario de acumulación, adaptación, comparación y combinación de conceptos que ya conocía y conceptos desarrollados a lo largo de las actividades y esto les permitirá, tener una nueva red de relaciones mentales y un mayor nivel de razonamiento.

Según el indicador relacionado con “plantear situaciones en las que el estudiante aplique los conocimientos y lenguaje adquirido”, las docentes plantean actividades como:

*Profesora A: no, dijimos que estaba hecho de varios rectángulos, pero todo el cuerpo...*

*Estudiante 1: es como un bloque*

*Estudiante 2: es un cuerpo... un cuerpo geométrico*

*Profesora A: es un cuerpo geométrico...*

*Estudiante 3: que tiene... Que tiene ¿qué?*

*Estudiante 1: lados*

*Estudiante 4: que tiene seis caras*

*Profesora A: que tiene seis caras y las caras son qué*

*Estudiante 5: iguales*

*Profesora L: son iguales ¿y?*

*Estudiante 2: e iguales*

*Profesora A: si, son iguales ¿y qué más?*

*Estudiante 1: opuestas*

*Profesora A: son iguales y opuestas*

*Estudiante 1: y tiene... doce... y tiene doce...*

*Estudiante 1 y 5: doce... a... a... ari...*

*Profesora L: aristas*

*Profesora A: como ya dijeron, es un cuerpo geométrico que tiene...*

*Estudiante 6: doce aristas*

*Profesora A: seis caras, doce aristas, que las caras son iguales, opuestas y paralelas, ¿qué más?*

*Los niños empiezan a hablar sobre la hora para salir.*

*Profesora A: bueno, entonces lo que estamos diciendo es que ¿el paralelepípedo está en las fichas?*

*Niños: si señora*

*Profesora A: pero, yo no escuche hablar ni de las aristas, ni de...*

*Estudiante 6: ah...*

*Profesora L: entonces miren que no están completas*

*Profesora A: entonces faltas cosas por agregar*

*Cada uno de los niños toma una ficha y empieza a completarla con referencia a lo que se va diciendo*

*Profesora A: y miren ¿qué más les falta?*

*Profesora L: ¿esto es un paralelepípedo? (señalando la ficha que Sebastián estaba completando, y diciendo la definición del paralelepípedo)*

Actividades en las que los estudiantes deben retomar los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de las actividades para entrelazarlos y obtener una visión global del contenido aprendido relacionándolo siempre con aspectos importantes de sus experiencias tanto en el diario vivir como durante el desarrollo de las situaciones y actividades. En esta fase, se busca que los estudiantes realicen una retroalimentación de todos los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de las clases; con estas actividades se nota que las docentes realizan una síntesis de lo trabajado en conjunto con los estudiantes, que van dando sus aportes para apoyar y complementar la síntesis o retroalimentación. Con este tipo de situaciones o actividades, los estudiantes logran aclarar los contenidos trabajados y van uniendo o entrelazando los conocimientos trabajados en cada una de las fases y actividades anteriores, construyendo así una síntesis clara y completa de lo trabajado a lo largo de la secuencia y alcanzando un alto nivel de razonamiento.

Según Van Hiele (Citado por Gutiérrez y Jaime .1991) las fases tiene carácter cíclico y los estudiantes, al alcanzar un nivel de razonamiento superior al que tenían, logran alcanzar un nivel mayor, así se repiten las mismas fases pero con contenidos matemáticos más complejos. debido a este carácter cíclico es necesario tener en cuenta algunos aspectos de las pruebas inicial y final que no han sido mencionados hasta el momento, como lo son que en cuanto a las preguntas 1, 3 y 7 referentes a identificar componentes de un todo pero no relacionarlos entre ellos, donde los estudiantes pueden identificar las partes de las figuras geométricas, pero no pueden ver la relación entre estas partes, o utilizar estas partes para clasificarlas, en el caso de la prueba inicial la mayoría de los estudiantes muestran estas características algunas veces lo que implica que los estudiantes involucrados en esta prueba se encuentren en el nivel de análisis y desarrollen características propias del nivel, como identificar componentes de un todo; en este caso de las figuras geométricas, donde los estudiantes reconocen los ángulos, los lados, vértices, entre otros pero aun no encuentran relación entre ellos para caracterizar esas figuras geométricas , por lo cual es significativo una intervención de parte de las docentes en este grupo de estudiantes con las estrategias que les permitan avanzar de un nivel de razonamiento a otro superior; resultados evidenciados en la prueba final con relación a las mismas preguntas, donde todos los estudiantes, en algunas ocasiones identifican componentes de un todo, pero no logran relacionarlos entre ellos; con base en actividades de este mismo tipo, se puede tener en cuenta el indicador relacionado con poseer percepción visual y global evidenciado en las preguntas 3 y 7 de las pruebas inicial y final, donde se puede notar un avance, ya que en la prueba inicial la mayoría de

los estudiantes cumplen con este indicador algunas veces, y luego de la aplicación de las estrategias didácticas, todos los estudiantes logran poseer una percepción visual y global, percibiendo el espacio como una totalidad y reconociendo figuras y formas con propiedades similares que conforman el todo.

De otro lado y no menos importante, tanto durante la aplicación de la prueba inicial en las preguntas 2 y 6 referente a no diferenciar cuerpos de figuras geométricas, muchos estudiantes logran diferenciarlos algunas veces. Lo que muestra que los estudiantes aún no tienen conciencia de las diferencias; puesto que al pedirles en la prueba que escriban el nombre a unas imágenes la mayoría de los estudiantes confunden la pirámide con el rectángulo o el paralelepípedo con el rectángulo. Luego en la prueba final se puede notar que en las respuestas a estas mismas preguntas, la mayoría de los estudiantes, algunas veces no diferencian cuerpos de figuras y el menor número de estudiantes restante, nunca lo logra.

De igual manera, en la prueba inicial en las preguntas 2, 4 y 6 referentes a enunciar una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos, en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes, los estudiantes enuncian propiedades poco relevantes de las figuras para identificarlas, en este caso la mayoría de los niños hacen esta lista innecesaria algunas veces, notándose cuando se les pide que describan una figura, como el rectángulo, escribiendo que es un cuadrado, que es como un cuadro, que tiene forma cuadrada como de ventana, redundando y enunciando las mismas cosas sin determinar propiedades necesarias; aspectos que cambian en la aplicación de la prueba final donde en las mismas preguntas, solo la mitad de los niños siempre enuncian una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar las propiedades necesarias y suficientes para los mismos y la otra mitad más un niño restante, solo algunas veces utiliza propiedades innecesarias.

Finalmente en el caso de las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6 referentes a hacer conjeturas mediante la observación donde los estudiantes pueden, a partir de la observación generar hipótesis que sean aplicadas a otras figuras, en el caso de la prueba inicial, la mayoría de los estudiantes logran hacer conjeturas algunas veces lo que muestra que los estudiantes solo algunas veces reconocen las propiedades geométricas mediante la observación, manipulan algunas figuras geométricas; un ejemplo de ello es que cuando se les pide que observen una imagen de algunos edificios y generen un dibujo de cómo creen que se ve desde otro ángulo, la mayoría reproduce el mismo dibujo, sin generar una hipótesis de cómo se ve a



partir de la observación, luego en el caso de la prueba final no se muestran cambios muy significativos puesto que la mayoría de los niños pueden hacer conjeturas mediante la observación, y un menor número de niños, solo logra hacer dichas conjeturas algunas veces.

Finalmente y durante el análisis e interpretación de las estrategias didácticas se puede evidenciar la pertinencia de dichas estrategias para la construcción y caracterización del paralelepípedo en los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento, puesto que al analizar detalladamente las actuaciones de los docentes y estudiantes durante la aplicación de las estrategias didácticas y en los resultados de las pruebas inicial y final, se puede notar que incide positivamente en el desarrollo del razonamiento espacial, por eso es de vital importancia que las docentes se puedan observar o puedan ser observadas para determinar esta incidencia de sus actuaciones y actividades.

## 7. CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta los aspectos trabajados sobre la teoría de los esposos Van Hiele, para desarrollar la pregunta ¿Qué estrategias didácticas fundamentadas en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de los esposos Van Hiele, favorecen la construcción y caracterización del paralelepípedo en los estudiantes de grado tercero de la institución educativa Luis Carlos Galán Sarmiento?, se puede concluir que:

Para construir y aplicar estrategias didácticas, el docente debe tener muy claro la secuencia que tienen las actividades y el propósito de las mismas ya que son estos dos aspectos los que le permiten lograr la meta o el objetivo propuesto con los estudiantes.

Para identificar el avance en el nivel de razonamiento de los estudiantes se debe realizar observación de los momentos de clase para determinar la incidencia de sus actuaciones y estrategias.

Aclarar la información suministrada por el análisis de los datos teniendo en cuenta las teorías desarrolladas en esta investigación; genera una relación entre ellos, que permite establecer la pertinencia de la aplicación de la teoría en el aula.

Al analizar detalladamente las actuaciones de docentes y estudiantes durante la aplicación de las estrategias didácticas y en los resultados de las pruebas inicial y final a la luz de la teoría de los esposos Van Hiele, se puede notar que incide positivamente en el desarrollo del razonamiento espacial.

Se puede evidenciar la pertinencia de las estrategias didácticas basadas en los niveles de visualización y análisis de la teoría de los esposos Van Hiele para la construcción y caracterización del paralelepípedo en los estudiantes del grado

tercero de primaria de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento, con edades comprendidas entre los 8 y 9 años.

## 8. RECOMENDACIONES

Luego de realizar la investigación y teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se puede recomendar que:

Los docentes deben estudiar la teoría de los esposos Van Hiele para favorecer el desarrollo del razonamiento espacial antes de crear e implementar estrategias en el salón de clase.

Es importante que los docentes tengan algún método de observación o auto observación para que puedan analizar sus actuaciones y estrategias didácticas y el beneficio de las mismas para el avance de los estudiantes en el razonamiento espacial

Es pertinente que los docentes tengan en cuenta los niveles de aprendizaje de razonamiento y fases de aprendizaje para implementar sus estrategias didácticas ya que beneficia el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes.

Es necesario destinar tiempo prudente para trabajar en el desarrollo del razonamiento espacial en los estudiantes ya que esto permite que los niños desarrollen más habilidades y capacidades necesarias para avanzar de un nivel a otro.

## 9. BIBLIOGRAFIA

BERRITZEGUNE DE DONOSTI, Fernando Fouz. Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. (En línea). <[http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.\\*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.\\*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf)> (citado el 22 de junio de 2012)

BRESSAN, Ana. El modelo del desarrollo del pensamiento geométrico de Dina y Pierre Van Hiele (en línea). <[http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/internas\\_modelovanhiele.pdf](http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/internas_modelovanhiele.pdf)> (citado el 21 de junio de 2012)

CENTRO DEL PROFESORADO DEL JEREZ. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN. Los Niveles de Van Hiele (En línea). <<http://www.cepjerez.net/drupal/files/van-Hiele.pdf>> (citado el 22 de junio de 2012)

Dr. HERNANDEZ GONZALEZ, Eduardo R. Las Inteligencias Múltiples (en línea). <[http://www.psicologia-online.com/infantil/inteligencias\\_multiples.shtml](http://www.psicologia-online.com/infantil/inteligencias_multiples.shtml)> (citado el 5 de julio de 2012)

GONCALVES TAVARES, Rider. ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. En: Revista Ciencias de la Educación. Vol. 1 No 27 (Enero-Junio 2006); p. 83-98.

GONCALVES TAVARES, Rider. ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. Valencia, Estado Carabobo, Venezuela, 16 h.

Investigación (Licenciado en Educación Matemática). Disponible en:  
<<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2212894>>

GUTIERREZ, A. Y JAIME, A El modelo del razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: los giros. En: Revista Educación Matemática. Vol 3 No 2 (agosto 1991).

OCHAÍTA ALDERETE, Esperanza. La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. En: Revista Estudios de Psicología. No 14-15 (1983); p. 93- 108. ISSN 0210-9395.

PÉREZ O, Claudia J. y RUIZ, María Eugenia. Estrategias lúdicas aplicando el modelo de Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría. Trabajo final académico. Disponible en: Biblioteca Digital de la Universidad de los Andes, en:  
[http://tesis.ula.ve/pregrado/tde\\_busca/archivo.php?codArchivo=2151](http://tesis.ula.ve/pregrado/tde_busca/archivo.php?codArchivo=2151)

RIZZOLO, Sergio Adolfo. Diseño de actividades geométricas interactivas en el marco conceptual del modelo de Van Hiele. Trabajo final académico (Profesor). Disponible en:  
<[http://www.coopvgg.com.ar/sergiorizzolo/trabajo/trabajo\\_final.pdf](http://www.coopvgg.com.ar/sergiorizzolo/trabajo/trabajo_final.pdf)>

Serie Lineamientos curriculares de matemáticas MEN

## 10. ANEXOS

### PRUEBA INICIAL

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL  
PENSAMIENTO ESPACIAL  
PRUEBA INICIAL PROYECTO DE GRADO

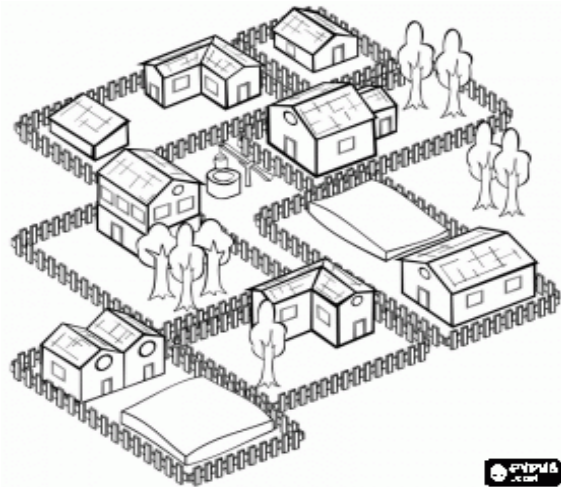
Fecha: \_\_\_\_\_

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

Grado: \_\_\_\_\_

### LACIUDAD

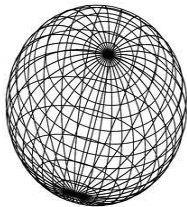


Durante muchos años los arquitectos e ingenieros han diseñado grandes ciudades, las calles, los puentes, los edificios, los barrios, los estadios, los coliseos, los hoteles, los centros comerciales, los parques, los andenes, son parte

fundamental de una ciudad y todas estas construcciones están dentro de un gran espacio y poseen muchas formas.

Pepe necesita poner los cables que llevan la iluminación a las casas:

1) ¿Con cuáles de los siguientes elementos se construirá un poste de la luz?



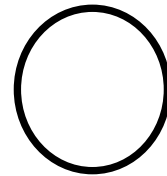
A



B



C



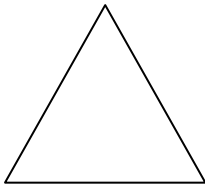
D

- a. Usando A y B
- c. Usando B y C

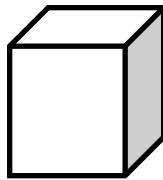
- b. Usando B y D
- d. Ninguna

Dibuje cómo quedaría el poste con los elementos escogidos

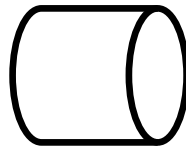
2) Pepe buscará dos objetos iguales para realizar una construcción. ¿Cuáles serán parecidos?



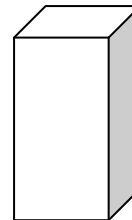
A



B



C



D



E

- a. A y B
- c. B y D

- b. B y C
- d. D y E

¿Por qué crees que son parecidos?

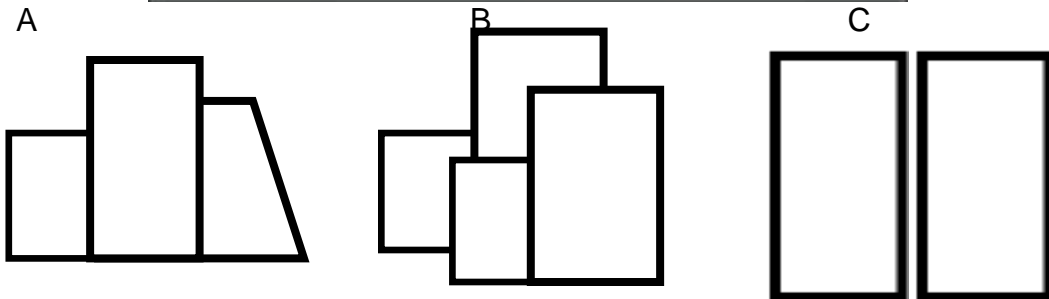
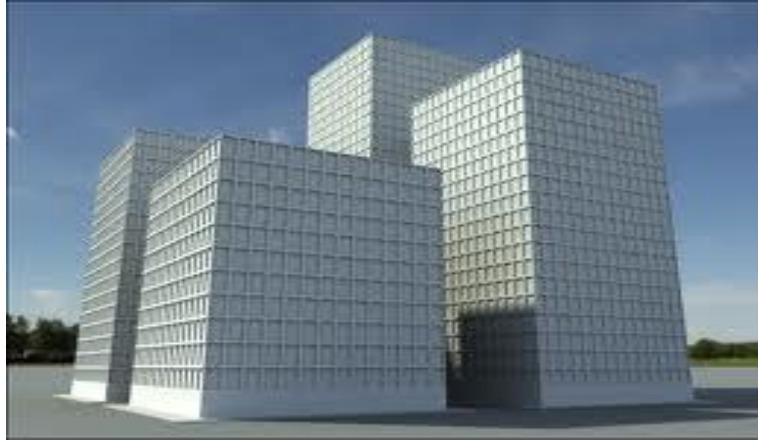
---

---

---



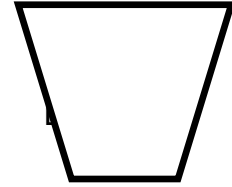
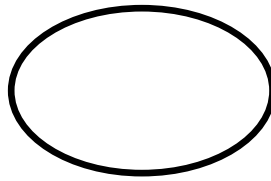
- 3) Pepe necesita dibujar las caras de unos edificios que vio en otra ciudad. Mirando estos edificios, ¿Cuáles serán las caras correctas que debe dibujar?



- a. Las de la figura A
- b. Las de la figura B
- c. Las de la figura C
- d. Las de ninguna figura

¿Cuál sería el dibujo de las caras, si el dibujante se ubicara al lado derecho del edificio de la foto?

4) ¿Cuáles de las siguientes figuras serán parecidas a una ventana?



- a. B y C
- c. C y D

- b. A y B
- d. A y C

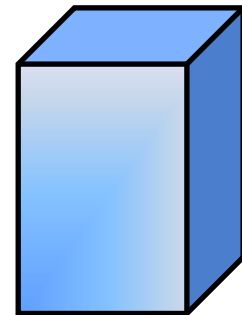
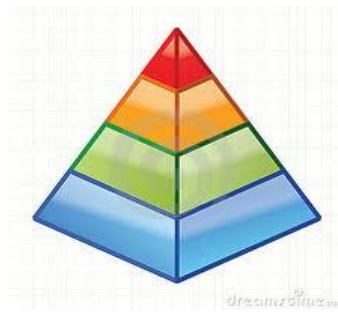
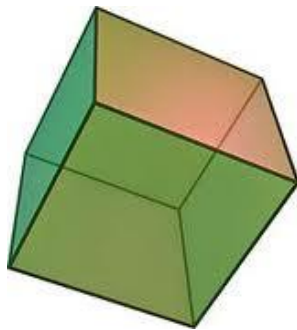
¿Qué sucedería si se hace una ventana con la forma D?

---

---

---

5) Pepe necesita construir la ciudad con diferentes formas pero aun no sabe cuál es el nombre de los cuerpos que usaría para esa construcción. Escribe el nombre de los que conozcas.

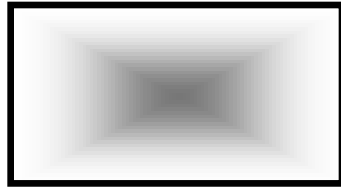


---

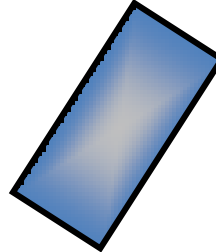
---

---

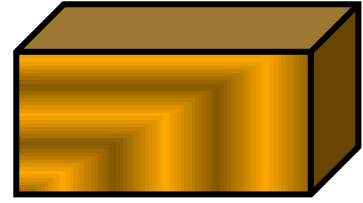
6) ¿Cuál de estos objetos será un rectángulo?



1



2



3

- a. El primero y el segundo
- b. El primero, el segundo y el tercero
- c. El tercero y el segundo
- d. Ninguno

¿Por qué?

---

---

---

7) En la siguiente ciudad encuentras varias formas.

Marca con una X roja los triángulos. Con una X verde los rectángulos. Con una X azul los cuadrados. Con una X negra los círculos.



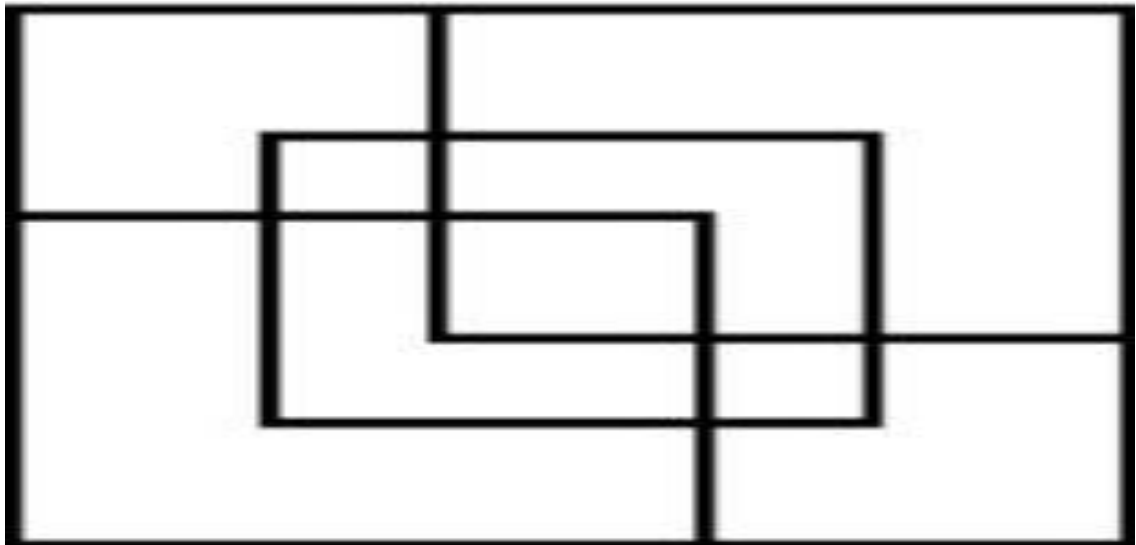
8) ¿qué forma tienen las ventanas de los edificios?

- a. Círculos
- b. Cuadrados
- c. Rectángulos
- d. Triángulos

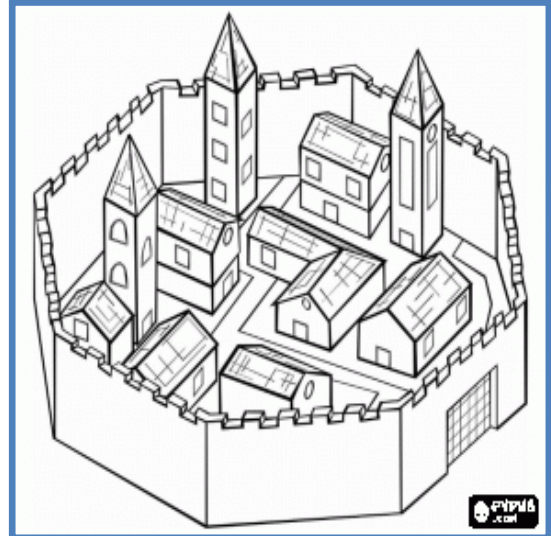
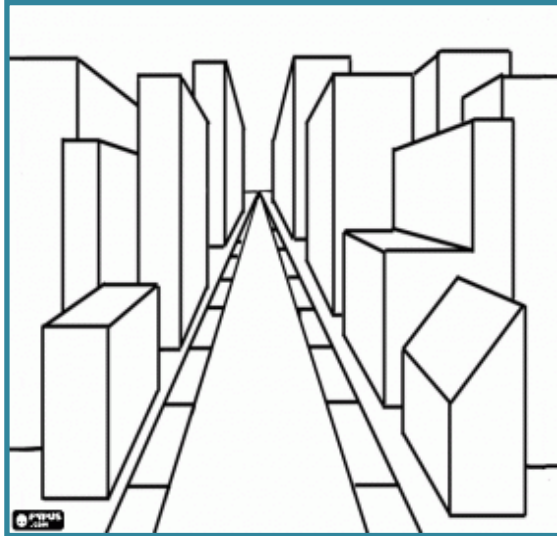


9) Pepe necesita algunos rectángulos para terminar de construir, delinea con diferente color los que encuentres en la siguiente figura y responde, ¿Cuántos son?

- a. 9 rectángulos
- b. 11 rectángulos
- c. 5 rectángulos
- d. 10 rectángulos



10) ¿Qué cuerpos geométricos usaron para la construcción de las siguientes ciudades?



- a. Pirámides y Paralelipípedos
- b. Cilindros y Paralelipípedos
- c. Cilindros y Pirámides
- d. Paralelipípedos y Pirámides

**BUEN TRABAJO, FELICITACIONES**

## PRUEBA FINAL

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL  
PENSAMIENTO ESPACIAL  
PRUEBA FINAL PROYECTO DE GRADO**

### NUESTRA CIUDAD

Fecha: \_\_\_\_\_

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

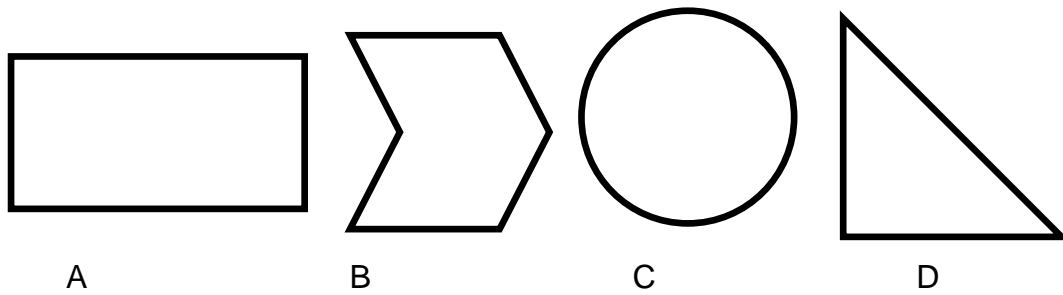
Grado: \_\_\_\_\_



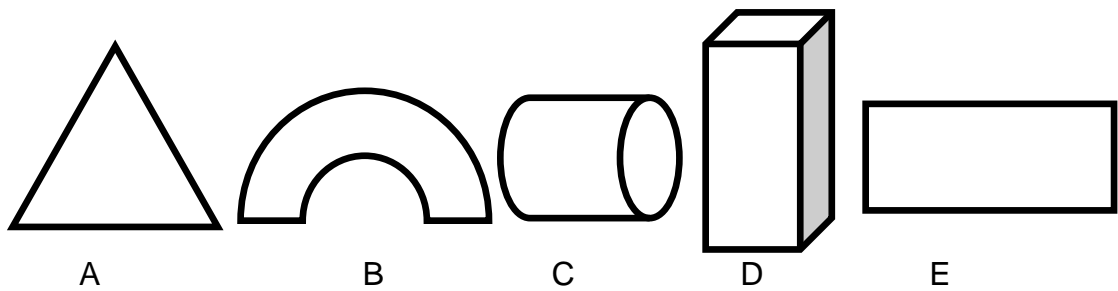
A lo largo de la historia, los seres humanos hemos desarrollado grandes inventos y adelantos, las casas como las conocemos hoy, carros, carreteras para los carros, edificios, ventanales y puertas muy sofisticadas, todos estos objetos se encuentran dentro de un gran espacio y tienen muchas formas.

Susanita quiere ser ingeniera y quiere saber qué necesita el ingeniero para construir una puerta muy sofisticada, el ingeniero necesita indicar la forma de la puerta:

1) ¿Con cuál de los siguientes elementos construirías una puerta?



2) Cuando Susanita va por la calle puede ver variedad de formas en cada construcción, algunas formas son muy parecidas, observa los siguientes elementos y ayuda a Susanita, quiere saber ¿Cuáles son parecidas?



- a. A y B
- b. B y C
- c. B y D
- d. D y E

¿Por qué crees que son parecidos?

---

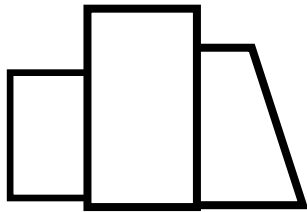
---

---

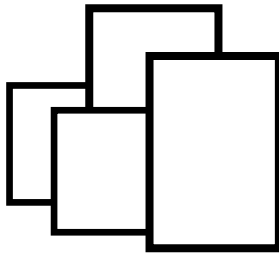
3) Susanita fue de paseo a una ciudad donde hay muchos edificios y quiere que su papá conozca el lugar, así que quiere dibujar las caras de los edificios a los que ella misma le tomo una fotografía. ¿Cuáles serán las caras correctas que debe dibujar?



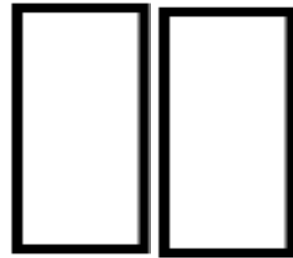
**A**



**B**

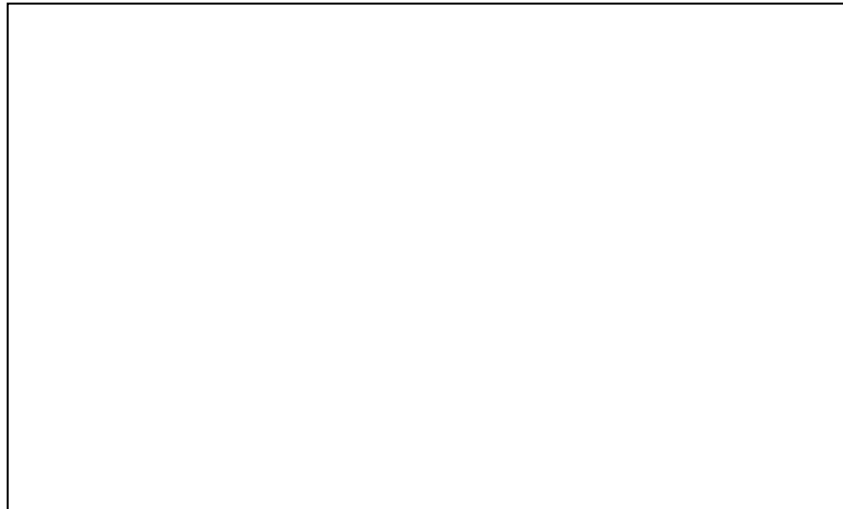


**C**



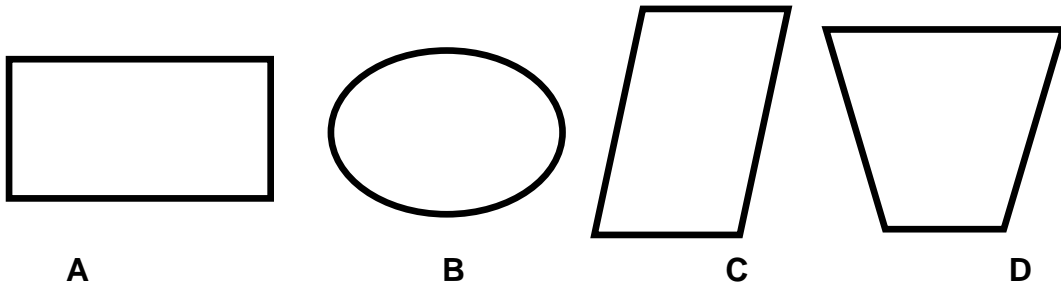
- a. Las de la figura A
- b. Las de la figura B
- c. Las de la figura C
- d. Las de ninguna figura

¿Cuál sería el dibujo de las caras, si Susanita le pidiera a un compañero que también dibujara y se ubicara al lado derecho del edificio de la foto?





- 4) En la construcción de un edificio, el ingeniero decidió hacer las ventanas todas de vidrio azul y no sabe de qué forma cortarlas, ayúdale, seleccionando la figura que puede utilizar para cortar el vidrio



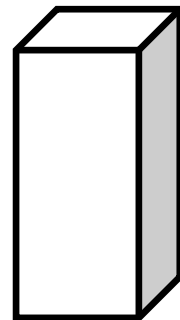
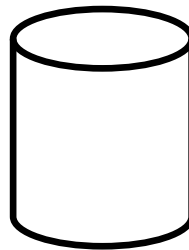
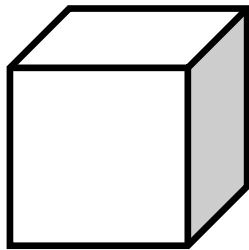
¿Qué sucedería si se hace una ventana con la forma D?

---

---

---

- 5) Susanita en su pase a otra ciudad visitó un parque en el que había muchos cuerpos geométricos y no sabe sus nombres, ayúdale a Susanita escribiendo el nombre de los que conozcas.

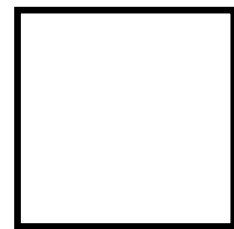
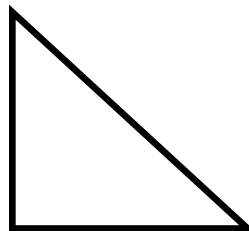


---

---

---

- 6) Susanita también vio en el parque algunas figuras geométricas y no sabe su nombre, ayúdale escribiendo el nombre de las que conozcas.



---

---

---

7) Observa la siguiente imagen e indica el número de figuras según corresponda:

Número de triángulos: \_\_\_\_\_

Número de Rectángulos: \_\_\_\_\_

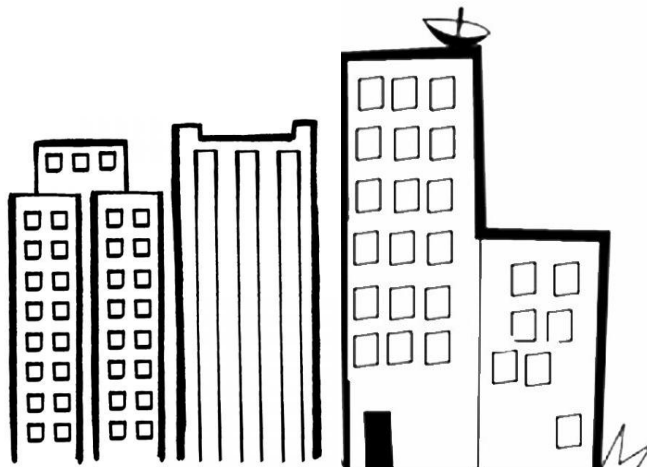
Número de Círculos: \_\_\_\_\_

Número de Cuadrados: \_\_\_\_\_



8) Susanita vio una maqueta de unos edificios en el parque que visitó y se preguntó ¿Qué cuerpo geométrico usaron para la construcción de estos edificios?

- a. Pirámides
- b. Cilindros
- c. Cubos
- d. Paralelepípedos



(Estos edificios fueron mostrados a los estudiantes como una maqueta realizada con los paralelepípedos que ellos mismos hicieron)

**BUEN TRABAJO, FELICITACIONES**

## **ESTRATEGIAS DE MEDIACIÓN**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL  
PENSAMIENTO ESPACIAL  
ESTRATEGIAS DE MEDIACION**

### **Objetivo de la investigación:**

Interpretar las estrategias didácticas que fundamentadas en los niveles de visualización y análisis y en las fases de aprendizaje de la teoría de los Esposos Van Hiele favorecen la construcción y caracterización del paralelepípedo en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento.

**Institución:** Luis Carlos Galán Sarmiento

**Grado:** Tercero (3º)

**Objetivo:** Adquirir conocimiento espacial acerca del paralelepípedo a través de estrategias didácticas basadas en la teoría de los Esposos Van Hiele, con el fin de desarrollar el razonamiento espacial en los niños y niñas de grado tercero.

### **Recursos:**

Cartón paja

Papel periódico

Marcadores

Cinta

Pitillos

Regla

Lápices

Colores

Papeles de colores

Tijeras

Cuerpos geométricos realizados en cartón paja

## Descripción:



Para iniciar, se presentará la siguiente situación problema a los niños y niñas:

Un grupo de niños y niñas necesita realizar algunas construcciones para formar unas torres que su profesora les ha pedido, y para ello tienen muchas figuras en diferentes tamaños y colores; a los niños y niñas les parecen muy bonitas y quieren utilizarlas todas, pero resulta que ellos no conocen los nombres de esas figuras y cuerpos, entonces necesitan de nuestra ayuda para poder conocer todo sobre dichas figuras y armar las torres para la profesora.

### **Nivel 1: Visualización**

#### **Fase 1: Información**

Luego de dar a conocer la situación problema, se contará a los niños y niñas lo que se hará en la clase, mostrándoles imágenes alusivas a cada momento de la misma; después de esto, se pasará a agrupar los niños y niñas de a cuatro y se les entregará varias figuras hechas en cartulina (círculos, rectángulos, triángulos, cuadrados) y un marcador, se les dará la instrucción de que con el marcador le pongan el nombre a las figuras de acuerdo a lo que cada grupo sepa o conozca acerca de esas figuras.

A continuación, se les pedirá que por grupos muestren las figuras y digan los nombres que les han asignado a cada una, así se realizará la socialización, durante ésta, la docente irá haciendo preguntas tales como:

¿Crees que ésta figura tiene ese nombre que le has asignado?

¿Alguien cree que se llama diferente?

¿Todos estamos de acuerdo en que tiene ese nombre?

(Estas preguntas se realizarán con cada una de las figuras, con el fin de que cada figura quede con un solo nombre que es asignado en conjunto con el grupo)

Luego de poner en común los nombres de las figuras, se les pedirá que igual en grupos, ubiquen lugares u objetos del salón de clase que tengan esa misma figura y escriban el nombre dentro de la figura.

Finalmente, se realizará una puesta en común y cada grupo dirá porque cree que ese objeto o lugar tiene esa forma.

### **Fase 2: Orientación Dirigida**

A continuación, se les entregará a los estudiantes algunos paralelepípedos en diferentes tamaños y colores, se les entregará también papel periódico y reglas, con el fin de que cada grupo tome los cuerpos y tracen en el papel cada uno de los rectángulos que encuentren en ellas, para luego recortarlos, y utilizarlos para formar una figura; para ello, se les entregará papel de colores, para que lo utilicen de acuerdo a la figura que quieran lograr, los rectángulos deben ir fijados con cinta en una cartulina.

### **Fase 3: Explicitación**

Luego de que los estudiantes formen las figuras, se sortearán los grupos de forma tal que cada grupo pueda analizar las creaciones de los demás grupos diciendo cómo utilizaron los rectángulos para armar dicha figura. Seguido a esto, se pasará a desarmar las figuras para pegar los rectángulos en un lado del tablero y hacer un conversatorio sobre las características generales de la figura.

### **Fase 4: Orientación Libre**

Las ideas de los estudiantes sobre las características de los rectángulos, se escribirán en el tablero para tenerlas en cuenta en la construcción compartida del concepto de rectángulo, la cual se hará por medio de un conversatorio, en el que todos los estudiantes deben tener en cuenta las características antes mencionadas para llegar a definir el rectángulo entre todos, quedando con una

definición común, en esta definición la docente intervendrá para ir desarrollando un poco el lenguaje adecuado.

### **Fase 5: Integración**

Una vez los estudiantes definan el rectángulo, se les pedirá que realicen un dibujo en el cuaderno y que señalen sus características (partes) para luego compararlo con uno de sus compañeros y completar las características si es necesario.

### **Nivel 2: Análisis**

#### **Fase 1: Información**

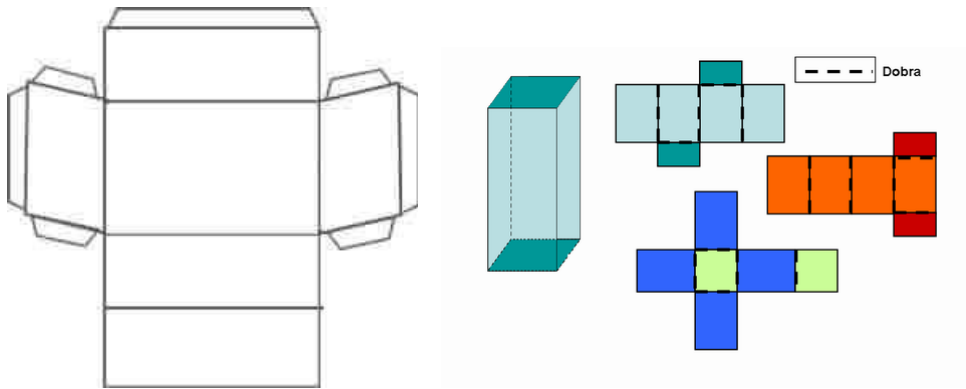
Se iniciará contándoles a los estudiantes lo que se realizará, seguidamente se retomará el dibujo de sesiones anteriores con las características (partes) del rectángulo y se les pedirá que tomen cada una de las características que tienen y traten de mirar que otras figuras pueden tener esas mismas características.

Para esto, se les dará tiempo y se pegarán en el tablero algunas figuras como: triángulos, cuadrados, y círculos, para que así, ellos puedan ir comparando las figuras.

Al final, se hará una puesta en común donde los estudiantes dirán que figuras cumplen con las características del rectángulo y si hay alguna que tenga todas las características; después se tomarán las figuras que hay en el tablero y se compararán para guiar a los estudiantes a que si bien algunas figuras tienen características en común con el rectángulo, no cumplen con todas las características de mismo.

#### **Fase 2: Orientación Dirigida**

Después de comparar las características, se les entregará a los estudiantes materiales para armar Paralelipípedos de diferentes tamaños con cartón paja, cartulina y con pitillos, teniendo estos Paralelipípedos, deben buscarlos en el entorno.



Luego, deben comparar los paralelepípedos con los rectángulos trabajados anteriormente, y hacer unos rectángulos en el geoplano.

### **Fase 3: Explicitación**

Utilizando los paralelepípedos que ya armaron los estudiantes, se les pedirá que por grupos se reúnan y hablen acerca de los posibles nombres que le pondrían a las partes que logren reconocer o identificar de los paralelepípedos. Luego se les entregará cinta de enmascarar y se les pedirá que lleguen a un consenso y cada grupo le ponga los nombres, seguidamente se les pedirá a los estudiantes que organicen los paralelepípedos con las partes en una especie de stand y así, cada uno pasará observando cada uno de los paralelepípedos, la forma en que fue construido y las partes que señalaron los grupos.

### **Fase 4: Orientación Libre**

Seguidamente cada grupo tomara su paralelepípedo y se iniciará un debate donde el primer grupo lo expondrá mostrando y explicando las partes que identificaron en él; con base en esto, los demás grupos irán comparando las partes expuestas con las que ellos identificaron e irán definiendo su posición frente a las partes que identificaron y los nombres que le asignaron.

Mientras los grupos van exponiendo la docente irá escribiendo los nombres dados por los niños y los irá fijando a un paralelepípedo hecho en cartón paja.

Una vez todos los grupos hayan expuesto sus ideas, la docente continua con el debate realizando preguntas que lleven a los estudiantes a analizar los nombres



asignados a las partes del paralelepípedo; para finalmente, determinar los nombres de las diferentes partes.

### **Fase 5: Integración**

A continuación cada estudiante realizara una ficha donde exponga lo que aprendió sobre los rectángulos, desde su definición características y partes, donde incluya un dibujo del mismo; utilizando las fichas realizadas por los estudiantes, se formará una escalera grande en el piso; luego, los estudiantes se organizaran en grupos y uno de los integrantes de cada grupo, lanzará los dados y dependiendo la ficha donde caiga, el grupo deberá tomar la ficha, leerla y explicarla, para poder continuar el juego, de manera que todas las fichas sean explicadas.

Al finalizar de explicar todas las fichas, la docente preguntará si ahora que ya todos comprendieron todo sobre los bloques (paralelipípedos) pueden ayudar a los niños y niñas de la historia del inicio a hacer las torres que la profesora les pidió que hicieran con los bloques, entonces, entre todos, deben tomar los paralelipípedos (bloques) y buscar la manera de armar unas torres para ayudar a los niños a presentar su tarea.