

COMPARACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DE DIFERENTES HERRAMIENTAS
PARA MODELAR EL PRECIO DEL MERCADO DE ELECTRICIDAD EN
COLOMBIA.

Carlos Alberto Ramírez Vanegas

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ingenierías

Programa de Ingeniería Eléctrica

2013

COMPARACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DE DIFERENTES HERRAMIENTAS
PARA MODELAR EL PRECIO DEL MERCADO DE ELECTRICIDAD EN
COLOMBIA.

Carlos Alberto Ramírez Vanegas

Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de
ingeniero electricista

Director:

Ph.D Carlos Arturo Mora Ceballos

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ingenierías

Programa de Ingeniería Eléctrica

2013

A los que creyeron y no lo vieron

A los que creyeron y lo vieron

Y a Oro

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Harold Salazar por la libertad de desarrollar este trabajo , al profesor Carlos Mora por su apoyo , a Mauricio Álvarez por su disposición.

Y a ellos E-244

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. MERCADO ELECTRICO COLOMBIANO.....	2
2.1 CARACTERÍSTICAS DEL MERCADO ELÉCTRICO.....	2
2.2 FORMACIÓN DEL PRECIO DE BOLSA.....	9
2.3 DINÁMICA DE PRECIOS DEL SECTOR ELÉCTRICO COLOMBIANO.....	10
2.4 EVENTOS PROPIOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO COLOMBIANO.....	13
2.5 CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA ELÉCTRICO COLOMBIANO.....	15
2.6 MERCADO SPOT O BOLSA DE ENERGÍA.....	15
2.7 CONTRATOS BILATERALES.....	17
3. METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN.....	18
3.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.....	18
3.2 SERIES DE TIEMPO.....	18
3.3 METODOLOGÍA PROPUESTA.....	19
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	19
4.1 MODELO CON ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.....	20
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	24
6. BIBLIOGRAFIA.....	25
7. ANEXOS.....	25
SERIES DE TIEMPO.....	26
TEORIA DE LA PROBABILIDAD.....	31
PROCESOS ESTOCÁSTICOS.....	34

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura: 2.1 precio combustibles	3
Figura: 2.2 precipitacion anual	4
Figura: 2.3 crecimiento de la demanda.....	5
Figura: 2.4 esquema institucional del mercado electrico.....	6
Figura: 2.5 Diagrama sistema electrico colombiano.....	8
Figura 2:6 variaciones de contratos vs precio bolsa.....	17
Figura: 4.1 precio de la energía	19
Figura: 4.2 seguimiento al precio de la energía.....	20
Figuras: 4.3 seguimiento al precio de la energía diferentes ventanas de tiempo.....	21
Figura: 4.4 seguimiento al precio de la energía.....	22
Figura: 4.5 seguimiento al precio de la energía con la serie de tiempo.....	23
Figura: A Trayectoria estocástica.....	35
Figura: B Trayectoria determinística	36

1. INTRODUCCIÓN

Las principales reformas desde hace tres décadas en el sector eléctrico han sido: la separación vertical de los sectores competitivos, la creación de mercados mayoristas, los nuevos esquemas regulatorios con incentivos en los sectores monopólicos y la privatización del sector estatal, en algunos casos la creación de mercados minoristas.

En su versión pionera sobre la desregularización en el sector eléctrico, Joskow y Schmalensee (1993) señalan que la literatura existente prioriza a donde se llega, más que como hacerlo. Las alternativas consideradas por Joskow y Schmalensee (1993) enfatizan la competencia en el mercado mayorista y por ende las relaciones contractuales factibles dentro de cada segmento de la industria, estas alternativas no especificaban los mecanismos de precios ni tampoco las reformas contractuales que regían las actividades entre las empresas en la industria (contratos de largo plazo o mercado spot por ejemplo)

A lo largo de la década de los ochenta y los noventa se iniciaron procesos de reestructuración del sector a nivel internacional. Estas experiencias han sido sujetas a análisis en por ejemplo Green y Newbery 1995. Una clasificación de estas experiencias y de los modelos adoptados fue hecha por Hunt y Shuttleworth 1996 y retomada después por Hunt 2002 Este último distingue cinco funciones en la cadena de valor del sector eléctrico: generación, transmisión, operación del sistema, distribución y comercialización, la primera y la última son definidas como competitivas, mientras que las restantes tienen el carácter de monopolio.

En la actividad de generación, la introducción de competencia es posible, en parte, por la reducción de las barreras a la entrada debido al avance tecnológico, lo que ha permitido contar con centrales térmicas con menores costos de inversión

En el problema de estimación de precios de mercados eléctricos se han propuesto diferentes modelos de pronóstico para el corto plazo, entre los más destacados se encuentran los trabajos de, Francisco Nogales el cual utiliza metodología ARIMA para analizar series de tiempo en el mercado de California y la España peninsular [1]. Nogales y Contreras utilizan modelos de series de tiempo aplicados a los mercados de California y España, las series aplicadas se realizaron para estimación del precio horario del día siguiente utilizando dos metodologías, la primera una regresión dinámica y la segunda modelos de función de transferencia [2]. En [3] propone una predicción sobre la base de modelos GARCH (generalizada Heteroscedasticidad autorregresiva

condicional) Conejo usa la transformada wavelet para descomponer la serie de datos, aplicando luego un modelo ARIMA a la serie transformada, aprovechando así las ventajas existentes en el dominio de la frecuencia [4].

El artículo Lucia y Schwartz [5] propone modelos para precios eléctricos basándose en el artículo Schwartz y Smith [6] Y usando datos históricos de precios spot, forward y futuros del Nord Pool (es el mercado eléctrico competitivo de los países nórdicos, se encuentra altamente desarrollado y está integrado por Dinamarca, Finlandia, Noruega y Suecia) para estimar y calibrar los procesos. La investigación en Lucia y Schwartz [5] desarrolla un modelo de un factor estocástico con reversión a la media.

2. MERCADO ELECTRICO COLOMBIANO

2.1 CARACTERÍSTICAS DEL MERCADO ELÉCTRICO

A continuación se revisan los distintos factores de riesgo e incertidumbre que influyen directa o indirectamente en las decisiones de inversión en mercados energéticos.

- Factores Directos

- a) Precios de Combustibles

La variación en los costos de abastecimiento de combustibles fósiles como carbón, gas natural o petróleo reflejan normalmente la disponibilidad de dichos commodities, el nivel de exploración y producción o las variaciones en la demanda mundial. En el corto plazo, afectan directamente los costos de operación de las centrales térmicas nuevas y las existentes, influyendo en los precios de la electricidad del mercado, puesto que la teoría económica estipula que en mercados competitivos los precios deben ser iguales a los costos marginales de producción.

Los precios de largo plazo de los combustibles son reflejo además de las expectativas de los distintos mercados donde se transan diferentes instrumentos sobre dichos activos. Por otra parte, el mencionado grupo de commodities energéticos actúa como potencial sustituto de largo plazo para la electricidad, en particular a nivel industrial, por ejemplo, si el precio del gas natural es bajo los grandes usuarios de energía pueden tener incentivos a

preferir o cambiar su suministro energético por dicho hidrocarburo en vez de la electricidad.

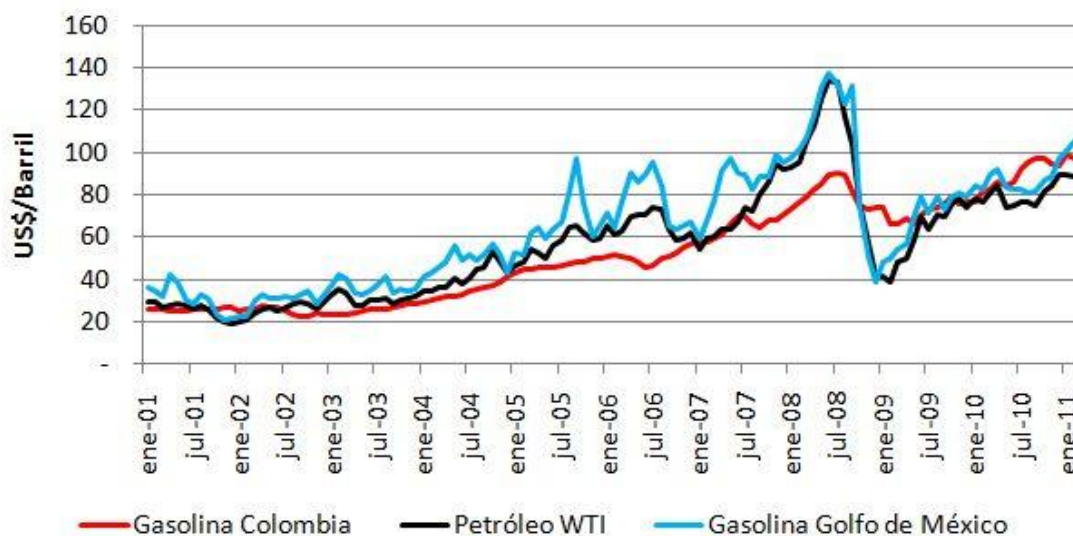


Figura: 2.1 precio combustibles

b) Variabilidad hidrológica

Afecta directamente a los mercados con alta participación de energía hidroeléctrica, en particular en zonas donde pueden existir fuertes diferencias estacionales y anuales en los caudales afluentes y los embalses. Debido al bajo costo variable de operación de las plantas hidráulicas, en épocas con hidrológicas húmedas o normales los sistemas eléctricos dependientes presentan bajos costos marginales de energía, por el contrario, en épocas donde se enfrentan condiciones climáticas secas que disminuyen el nivel de los caudales y bajan las cotas de los embalses, aumentan los costos de generación de los sistemas eléctricos respectivos.

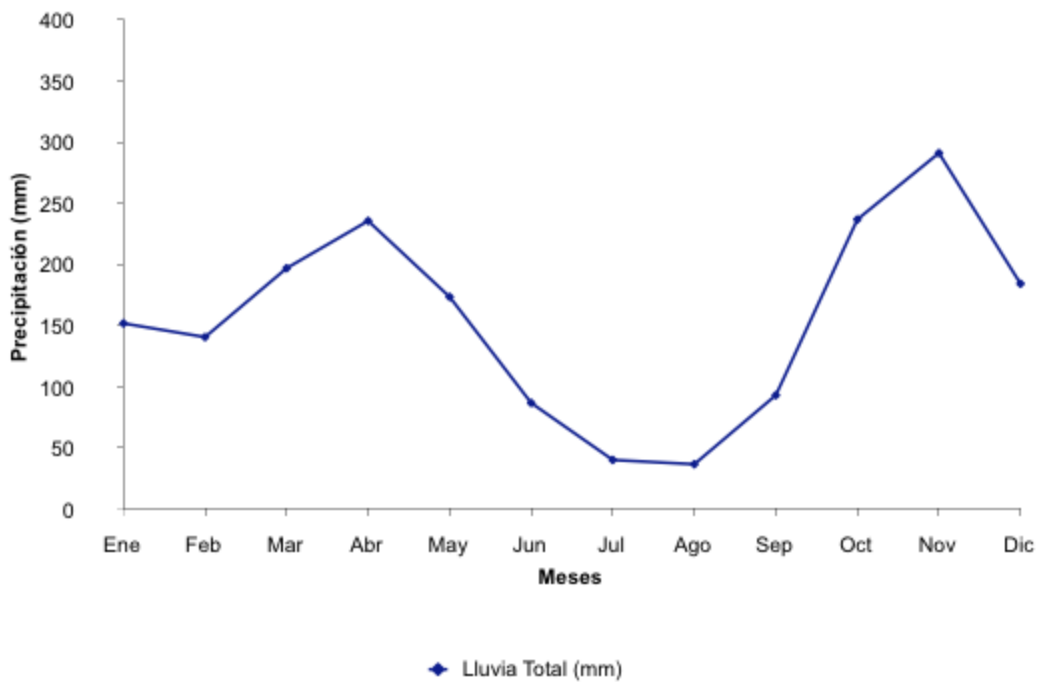


Figura: 2.2 precipitacion anual

c) Restricciones de transmisión

Los precios eléctricos en áreas de déficit de energía suelen ser más altos que en zonas excedentarias, así como los pagos por el uso de los sistemas de transmisión. La dependencia en la congestión de redes de transmisión y en las metodologías de tarificación de las mismas origina incertidumbre en las señales de localización para los inversionistas que influyen en las decisiones de inversión.

d) Crecimiento y variabilidad de la demanda

La aceleración o estancamiento en las tasas de crecimiento anuales de la demanda de energía eléctrica y la variabilidad temporal en la demanda de energía de los sistemas eléctricos influyen sobre los precios, las proyecciones del mercado y las decisiones de inversión. Lo anterior crea la necesidad de los servicios complementarios (estabilización de la tensión y frecuencia, coordinación de despacho) que garanticen la confiabilidad del suministro.

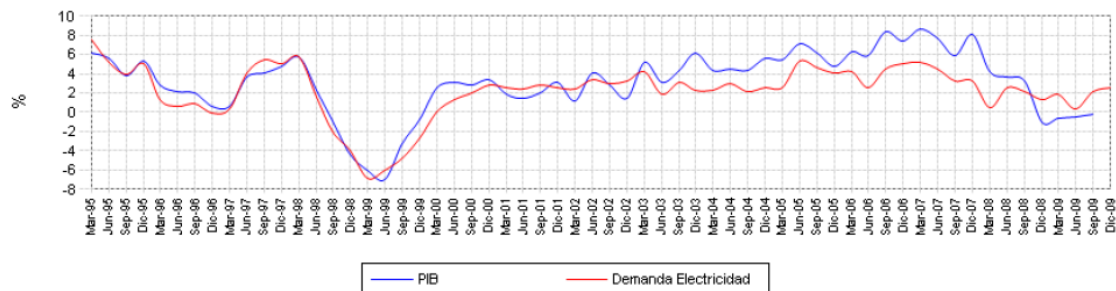


Figura: 2.3 crecimiento de la demanda

e) Regulación gubernamental

Los mercados eléctricos suelen estar sujetos a cambios regulatorios e intervenciones gubernamentales por conflictos de interés técnico/económico o político, así como de modificaciones “de emergencia” a la regulación existente en alguno de los segmentos del sector que afectan directamente las decisiones de los agentes del mercado.

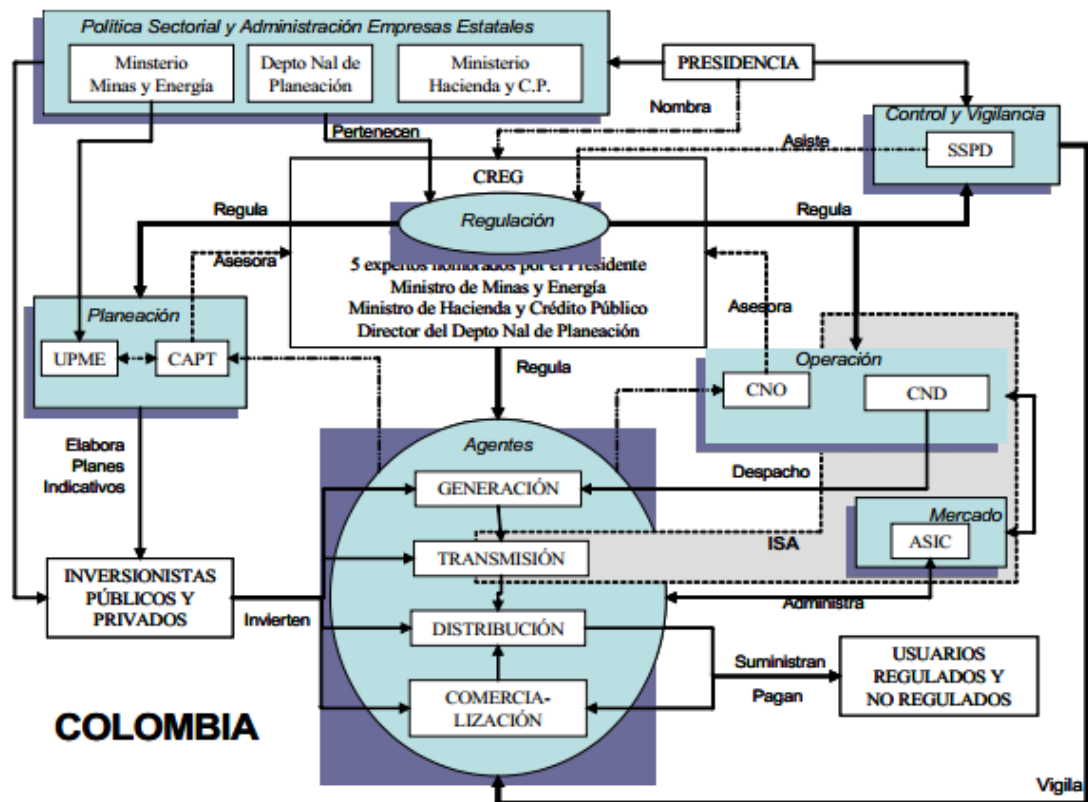


Figura: 2.4 esquema institucional del mercado eléctrico

f) Agentes y mecanismos del mercado

El comportamiento de agentes competidores, contrapartes o proveedores, así como el nivel de independencia de las organizaciones encargadas de la coordinación del mercado y de la operación del sistema son claves en las decisiones del sector. La resolución de divergencias, las sanciones y la fiscalización de las instituciones respectivas son parte de los mecanismos del mercado que afectan su dinámica.

g) Confiabilidad

La electricidad no se puede almacenar en grandes cantidades a costos razonables, es por esta razón que la demanda se debe garantizar en todo momento. Este hecho implica la necesidad de contar con una capacidad instalada y una capacidad de reserva, esta última en el caso de eventos extremos. Estas características le dan un alto grado de seguridad al sistema.

h) Intemporalidad del precio

no es posible medir el consumo real por lo tanto no se puede cobrar a los usuarios distinguiendo su consumo por bloque horario este inconveniente causa la falta de respuesta ante variaciones en los precios, por este motivo es necesario controlar las fluctuaciones del precio (Price Spikes).

j) Operación del sistema

Una vez se inyecta la energía al sistema es imposible determinar su origen y su destino y tampoco se puede guiar su trayectoria. Esto debido a leyes físicas así que solo se conoce las cantidades entregadas y retiradas del sistema, es difícil controlar el flujo de energía para algunos consumidores específicos en tiempo real, esta imperfección de la demanda no permite garantizar la ejecución física de los contratos bilaterales pues no se puede distinguir quien retira energía de quien, esta es una de las razones de que exista un operador del sistema que resuelva dichos problemas

k) Limitaciones físicas

Existen limitaciones de la capacidad de transporte de la energía. Esto puede beneficiar a algunos agentes, los cuales no tendrán incentivos a contribuir en el desarrollo de la red si tiene la posibilidad de beneficiarse libremente de la nueva capacidad. Estos problemas son difícilmente solucionables mediante la operación de forma independiente de las empresas.

b) Factores económicos exógenos

En términos macroeconómicos, el crecimiento del país, la estabilidad monetaria y la situación fiscal afectan las decisiones de los inversionistas, en particular en países en vías de desarrollo, al igual que el nivel de apertura comercial, los convenios o tratados internacionales y en general la vulnerabilidad a factores externos.

c) Factores políticos y sociales

El nivel de gobernabilidad de los países, los periodos electorales o la independencia y funcionamiento de los procesos judiciales y las instituciones fiscalizadoras pueden ejercer un impacto importante en los inversionistas, de la misma forma, la opinión pública y política en temas ambientales o de elección de tecnologías.

2.2 FORMACIÓN DEL PRECIO DE BOLSA [12]

En la generación de energía eléctrica participa un grupo reducido de empresas, algunas de las cuales representan un porcentaje importante de la oferta total. Los mercados en que hay un reducido número de oferentes se denominan mercados oligopólicos y se analizan tradicionalmente mediante teoría de juegos.

El análisis tradicional del oligopolio reconoce dos posibles soluciones: la solución de Cournot, y la solución de Bertrand. De acuerdo a la primera, las empresas en un oligopolio determinan la cantidad ofrecida, de forma tal que maximizan su beneficio, dado que sus competidores elijan la cantidad que a su vez, maximiza también sus beneficios. Este equilibrio de Nash, en el modelo de Cournot, lleva en general a soluciones en las que el precio de equilibrio de mercado se separa del costo marginal, generando pérdidas irrecuperables de eficiencia para la sociedad.

La diferencia entre el precio y el costo marginal es inversamente proporcional al número de empresas y a medida que aumenta el número de participantes en el mercado, el precio se aproxima al costo marginal y el juego oligopólico da lugar al tradicional análisis competitivo, en el que los oferentes son tomadores de precios y el equilibrio de mercado es óptimo paretiano, con el precio igual al costo marginal.

La solución alternativa es el modelo de Bertrand, en la cual se asume que los oligopolistas determinan el precio y no las cantidades a ofrecer. En el caso más simple posible, en el que cada oferente puede ofrecer una cantidad ilimitada a un precio dado con un costo marginal constante, el equilibrio de Nash del juego lleva a que el precio ofertado sea igual al costo marginal, en el que la empresa con el costo marginal más bajo termina por atender la totalidad del mercado, o se reparte el mercado entre las empresas, si el costo marginal es igual para todos los participantes.

Este último resultado aplica sólo al caso en el que no se dan restricciones de capacidad y el costo marginal sea constante. Un modelo más realista, en el que haya restricciones de capacidad o diferenciación de producto, arroja resultados equivalentes a los que se obtienen en el modelo de Cournot: los oferentes se comportan estratégicamente, buscando fijar el precio que maximice su beneficio, dado que sus competidores fijan también su precio óptimo y los resultados son equivalentes a los que obtendría eligiendo cantidades. Las diferencias reales, en este caso, aparecen cuando se consideran situaciones de incertidumbre: las decisiones arrojan resultados distintos, cuando hay algún componente aleatorio en la demanda, ya que el oligopolista preferirá fijar las cantidades (los precios) cuando la pendiente de la curva de costo marginal es creciente (decreciente), siendo indiferente si el costo marginal es constante.

Pero más importante aún, es que las consecuencias del modelo simple de Bertrand son difícilmente aplicables al mercado de generación: no hay ofertas ilimitadas a un precio único. En consecuencia, las empresas retienen algún poder, para optimizar los resultados de su participación en el juego oligopolístico.

En Colombia, muy probablemente los generadores más importantes operan como oligopolistas líderes, en tanto que los demás son seguidores. Así, el mercado debería representarse como una mezcla del modelo de función de oferta (modelo Cournot- Bertrand) y del modelo líder y seguidor de Stackelberg. Los líderes cuentan con varias plantas de generación, lo que les permite establecer su función de oferta creciente que resuelva adecuadamente su problema de maximización, generando un equilibrio de Nash en el juego con los demás líderes.

2.3 DINÁMICA DE PRECIOS DEL SECTOR ELÉCTRICO COLOMBIANO

- Modelamiento y Dinámica de Precios

La teoría de valorización de activos derivados financieros y reales está estrechamente ligada con el estudio del comportamiento de variables aleatorias, curvas de tasas de interés, precios spot o curvas de precios de contratos forward o futuros sobre commodities de distintos mercados. En este sentido, se han desarrollado diversos modelos de comportamiento que toman en cuenta la dinámica temporal y la volatilidad de los precios de dichos activos. En finanzas, los procesos de precios con incertidumbre son modelados con ecuaciones diferenciales estocásticas similares a las ecuaciones diferenciales parciales pero con variables aleatorias en parte de las ecuaciones. El trabajo pionero en el área es nuevamente el artículo Black y Scholes (1973), que modela el precio spot de una acción a través de un proceso con un sólo factor estocástico llamado movimiento Browniano geométrico.

Los precios spot eléctricos tienen un comportamiento dinámico muy distinto a los precios spot de commodities tradicionales (petróleo, cobre, etc.); debido a la naturaleza física de la energía eléctrica ya explicada.

El estudio sobre dinámica de precios spot de electricidad y su modelamiento a través de procesos estocásticos es relativamente novedoso, en general, se concentra en tomar modelos desarrollados en finanzas para precios de commodities y efectuar variaciones que permitan modelar las características generales del comportamiento de los precios eléctricos, estimando y calibrando los modelos con datos de mercados eléctricos con estructuras e instrumentos sofisticados

- Comportamiento Dinámico de Precios Eléctricos

Se ha estudiado empíricamente el comportamiento dinámico y estadístico de precios eléctricos en distintos mercados eléctricos competitivos; en León y Rubia (2001) se analiza el comportamiento del precio y la volatilidad en el mercado eléctrico español; el artículo Escribano et al. (2002) realiza un análisis comparativo para los mercados eléctricos competitivos de Argentina, Australia (Victoria), Nueva Zelanda (Hayward), los países nórdicos (Nord Pool) y España, incluyendo la presentación de un modelo general de comportamiento; en Lucia y Schwartz (2002) se estudian los precios del Nord Pool y su efecto en la valorización de activos derivados de electricidad; por su parte, en Knittel y Roberts (2005) se analiza el mercado californiano enfocándose en deducir sofisticados modelos de precios que tratan de incluir en detalle las características propias de su dinámica. Finalmente, en Geman y Roncoroni (2006) se presenta un modelo de precios calibrado con datos de mercados eléctricos norteamericanos: COB (California Oregon Border), PJM (Pennsylvania-New Jersey-Maryland) y ECAR (East Center Area Reliability). El proceso intenta capturar tanto las características dinámicas como estadísticas del comportamiento de los precios del commodity electricidad. A continuación se revisan los principales elementos que caracterizan el comportamiento dinámico de los precios de la electricidad

- Alta Volatilidad

Las características de la estructura tecnológica en la oferta de generación y la llamada lista de mérito que definen el despacho en los mercados eléctricos contribuyen a la estructura de volatilidad de los precios de la electricidad. En este sentido, los precios en los pools están determinados por la intersección entre la oferta y la demanda, por lo tanto, para bajos niveles de demanda se despachan las centrales de base con bajos costos marginales de producción, y a mayor demanda se despachan las centrales con mayor costo marginal, hasta llegar a las centrales de punta. La definición horaria de los costos marginales, provoca que su evolución temporal dependa de situaciones contingentes que influyen drásticamente en las variaciones de su amplitud, en otras palabras, el precio spot marca el pulso de los mercados eléctricos competitivos.

- Reversión a la media

Los precios spot de la electricidad presentan reversión a la media, es decir, se mueven alrededor de algún nivel de equilibrio o nivel medio. En general, los precios de commodities presentan esta tendencia que se relaciona con los costos marginales de producción de largo plazo, así la dinámica de los precios presenta una oscilación respecto a un nivel medio a largo plazo, al que tienden a converger de forma constante o de alguna forma determinista.

- Puntas y saltos

Las puntas o spikes corresponden a variaciones repentinas anormalmente grandes producidas de forma infrecuente en el comportamiento de los precios spot. Dichas puntas están estructuralmente relacionados con la característica física de no almacenamiento de la electricidad, lo que produce que ante contingencias en el sistema o ciertas situaciones inesperadas o poco previsibles del mercado se produzcan saltos al alza en el precio seguido por una caída significativa para volver a una situación normal. Otra forma de definir los saltos es como precios anormalmente altos producto del desbalance temporal entre la oferta y la demanda en el mercado, los cuales caen abruptamente una vez que se despeja el desbalance.

- Estacionalidad y Efectos Periódicos

El consumo de energía varía de forma estacional según efectos climáticos y las actividades de la vida diaria, por ejemplo, la masiva utilización de sistemas de aire acondicionado en zonas geográficas con altas temperaturas durante el verano provoca que la mayor demanda de electricidad sea en dicha estación, en horarios de alta actividad económica y de mayor temperatura. Además, durante la semana existe un mayor consumo que los días de fines de semana o feriados, y a nivel diario existe una clara diferencia entre la demanda de punta y de valle durante el día y la noche en el consumo eléctrico. En general, las fluctuaciones periódicas de los precios se relacionan directamente con la estacionalidad, los efectos del calendario y el horario de las actividades económicas que influyen en el comportamiento de la demanda de electricidad con distintas amplitudes y frecuencias.

2.4 EVENTOS PROPIOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO COLOMBIANO

- Eventos Externos

Se destacan tres eventos que influyeron en forma importante en el desempeño del mercado y del sector. Fueron ellos la presencia del fenómeno El Niño 1997-1998, conflicto armado y la recesión económica de los años 1998-1999

- Fenómeno El Niño 1997-1998

El calentamiento del Pacífico Sur produjo a finales de 1997 y principios de 1998 una sequía de características de intensidad fuerte, considerada más intensa que las de los años 1991-1992, aunque más corta en duración.

El mecanismo de definición de precios de corto plazo se puso a prueba. Se exigió al máximo la capacidad de respaldo de la generación térmica que alcanzó a generar el 49% de la demanda. Se identificaron limitaciones en el suministro de gas natural pero fueron cubiertas por la utilización de Fuel Oil como combustible alterno

Como se verá en un capítulo posterior de este documento en más detalle, la hidrología alcanzó el 39% de la media histórica del mes de febrero. Esta condición produjo los precios de Bolsa más altos durante la operación del mercado, 258 \$/kWh en septiembre 1997 y 249 \$/kWh en febrero 1998.

Se realizaron ajustes de precios en la regulación, relacionados con la intervención de precios de oferta para embalses cuando ellos se encuentran en nivel inferior al mínimo operativo superior, como se registró en el numeral anterior. Se considera que se sorteó con acierto la prueba.

Este fenómeno fue seguido del fenómeno opuesto de La Niña. Los bajos caudales de principios del año 1998 fueron compensados con los altos caudales durante el resto del año (en septiembre se presentó el 120% del medio histórico), a tal punto, que el promedio anual subió al 90% del histórico. El promedio anual fue del 109% para el año 1999. Los niveles de embalse se recuperaron y la utilización de estas reservas fue mínima durante el verano de este año, el nivel descendió solamente hasta el 70% de la capacidad total. Los precios de Bolsa se mantuvieron en su nivel bajo durante la permanencia del fenómeno.

- Conflicto Armado

Aunque este factor ha afectado la operación del sistema en razón al derribo de torres, produciendo indisponibilidad de líneas del Sistema Interconectado Nacional, en el período de funcionamiento del mercado se

8

Presentó un incremento importante de esta práctica en el año 2000 y principios del año 2001. De acuerdo con las estadísticas disponibles, el número de torres que se derribaron en solo el año 2000 fue de 448, lo cual obligó la operación de generadores fuera de mérito para sostener las condiciones de seguridad de la operación de la red.

Se produjo un incremento importante de las reconciliaciones, como se verá con detalle en un capítulo posterior de este documento. La indisponibilidad de líneas produce islas en el sistema. Algunas de estas islas solo pueden ser atendidas por uno o dos generadores, es decir, sin competencia para atender la demanda. Se incrementan los precios de oferta y con esto los valores de las restricciones. La CREG define un límite para los precios de reconciliación tanto positiva como negativa.

- Recesión Económica 1998-1999

Según información del DANE el PIB de los años 1998 y 1999 fue del 0.56% y -4.2% respectivamente. Una recesión económica que produjo a su vez un efecto importante sobre la demanda de energía eléctrica, la cual a su vez presentó crecimientos de 0.22% y -4.9% para los mismos años con demanda anual en 1999 (41.866 GWh), inferior a la demanda del año 1995 (41.967 GWh).

Esta reducción de demanda tuvo varias implicaciones en el mercado, todas ellas asociadas con el desajuste entre la demanda y la capacidad instalada. La reserva de potencia creció al 61% en 1998 con un valor máximo del 69% en el año 2001, como consecuencia de la entrada de proyectos que habían iniciado su construcción con anterioridad.

2.5 CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA ELÉCTRICO COLOMBIANO

Mercado de energía mayorista colombiano [12]

El Mercado de Energía Mayorista (MEM) puede ser definido como el mercado de grandes bloques de electricidad, en el que generadores y comercializadores venden y compran energía de manera competitiva. Éste, fue creado mediante la reforma eléctrica implantada con las Leyes 142 y 143 de 1994, con el fin de lograr la eficiencia en la prestación del servicio de electricidad y la libre entrada a los agentes interesados en prestarlo. La Figura 2-1 permite observar las interacciones del mercado y sus diferentes agentes participantes dentro del esquema institucional del sector eléctrico colombiano.

Las transacciones realizadas entre generadores y comercializadores en el MEM, se efectúan bajo dos modalidades:

Mediante la suscripción de contratos financieros bilaterales de compra y venta de energía cuyos precios y magnitudes son establecidos libremente entre compradores y vendedores. Por medio de transacciones directas en la Bolsa de Energía, en la cual los precios se determinan mediante una subasta de precios de generadores tal que los intercambios comerciales son definidos en el contexto de un mercado spot con resolución horaria.

2.6 MERCADO SPOT O BOLSA DE ENERGÍA

La Bolsa de Energía en Colombia es considerada un mercado de diferencias en el cual el operador determina hora a hora las transacciones correspondientes a la diferencia entre las obligaciones de compra y/o atención de la demanda, en caso de los comercializadores, y de venta y/o de entrega de energía, en el caso de los generadores, valorados al precio de mercado o precio de bolsa. La formación del precio de bolsa se realiza mediante una subasta de precio, en la cual los agentes generadores diariamente y en un bloque de oferta único realizan day-ahead ofertas de precio y disponibilidad con resolución horaria; por otro lado, la demanda, representada por los agentes comercializadores, es tomadora de precios en lo que respecta a la energía comprada en la bolsa. [12]

A partir de las ofertas presentadas por los generadores se realiza un despacho económico de la energía, denominado despacho ideal, el cual determina los recursos disponibles de menor precio requeridos para atender la demanda total, obteniéndose como resultado el precio de bolsa, correspondiente al precio de oferta de la planta de generación despachada con máximo precio de oferta en la hora respectiva

Estos valores son causados en parte debido a las características del mercado descritas anteriormente. Adicionalmente es necesario reconocer que los

precios reales de oferta a la bolsa no siempre reflejan los costos verdaderos de generación, sino que pueden responder a estrategias de cada generador asociadas a la gran cantidad de distorsiones presentes en el mercado, siendo éstas bien de tipo estructural (por ejemplo, oligopolios, etc.) o regulatorio y por supuesto a la estrategia particular del agente.

Por los motivos anteriormente expuestos, se hará el estudio si tener en cuenta los contratos con los que dispone cada generador, pero se puede deducir algunas maneras de actuar por parte de los generadores como se muestra a continuación

1. Los precios de los contratos resultan explicativos de la oferta. A mayor precio de los contratos se aumenta el precio de la oferta en Bolsa, como consecuencia de valorar más el recurso cuando los contratos aumentan de precio. También a mayor precio de los contratos se reduce el precio de oferta en Bolsa, como posible estrategia para asegurar la venta de excedentes en Bolsa e incrementar ingresos. Esta estrategia, de efecto contrario a la anterior, está presente simultáneamente en generadores diferentes.

2. Las ventas en Bolsa orientan el precio de oferta, máxime cuando se realizan con valor igual para todas las horas del día, estrategia que corresponde a una optimización de ventas en Bolsa.

3. Aumento del precio de oferta ante la disminución de las ventas en Bolsa refleja Una estrategia de baja participación en Bolsa. Esta estrategia, de efecto contrario a la anterior, está presente en generadores diferentes

4. Para algunas plantas térmicas, un aumento del embalse ofertable del sistema conlleva a un aumento del precio de oferta, lo cual es estrategia para inducir un precio de Bolsa mayor y maximizar ingresos por reconciliación positiva.

5. Aumento del precio de oferta como resultado de aumento de los ingresos por reconciliación positiva, es una estrategia razonable para maximizar ingresos por generación de seguridad.

6. Disminución del precio de oferta como resultado de un aumento de los ingresos por reconciliación negativa, es una estrategia utilizada en plantas cuya generación es desplazada por generaciones forzadas

7. Aumento del precio de oferta como respuesta a una disminución en los ingresos por reconciliación negativa, es una estrategia que puede ocurrir en plantas hidráulicas de tamaño importante, cuando son indiferentes a la reconciliación negativa ya que esta pierde importancia ante el objetivo de maximizar ingresos por ventas en Bolsa.

8. El aumento de las inflexibilidades induce aumento del precio de oferta, como estrategia para compensar, cuando genera por mérito, el menor precio reconocido por la generación inflexible

9. Los precios de oferta de otra u otras plantas de la misma empresa con independencia física de generación (no pertenecen a una misma cadena hidráulica, o sus aportes hidrológicos son independientes, o es de tipo térmica), presentan efectos contrarios debido a una posible estrategia de remplazo de precios entre recursos del mismo propietario.

2.7 CONTRATOS BILATERALES [12]

Las compras de energía efectuadas por comercializadores con destino a Usuarios Regulados, mediante la suscripción de contratos bilaterales, se rigen por las disposiciones establecidas en la regulación, las cuales garantizan la competencia en este tipo de transacción.

Las compras de energía efectuadas por comercializadores con destino a Usuarios No Regulados, mediante la suscripción de contratos bilaterales, no están reguladas y se negocian a precios y condiciones pactadas libremente. Igual condición rige para compras entre agentes generadores y entre agentes comercializadores.

No hay restricción sobre el horizonte de tiempo que deben cubrir los contratos bilaterales, ni sobre la capacidad que un agente generador o comercializador, puede comprometer en ellos. Es decisión de los agentes comercializadores y generadores su grado de exposición a la Bolsa

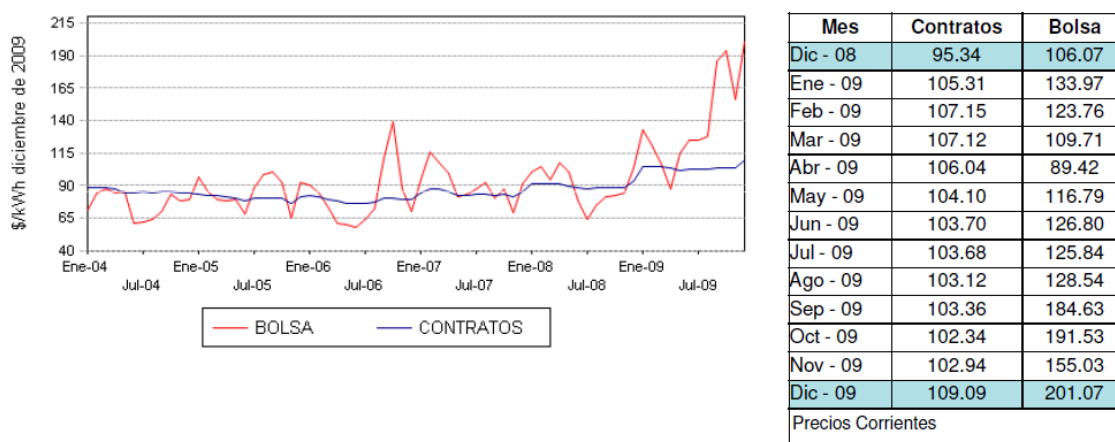


Figura 2:6 variaciones de contratos vs precio bolsa

3. METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

3.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Newton y Leibniz pusieron las bases del que ahora llamamos cálculo diferencial y este es útil para abordar problemas que modelan sistemas físicos o leyes que determinan un sistema dinámico a este tipo de ecuaciones se les llama ecuaciones diferenciales, pero a medida que maduraron algunos problemas o en casi todos hay información parcial que se desconoce.

El ejemplo fundamental para abordar este tipo de problemas sin realizar suposiciones es el caso del movimiento browniano este es el caso de una partícula inmersa en un fluido, si describiéramos su movimiento notaríamos que se mueve a altas velocidades y de manera irregular en todas las direcciones, para este caso el cálculo diferencial clásico poco puede ayudar al estudio de dicho movimiento, solo fue hasta la década de los 50s que el matemático kiyoshi Ito desarrollo las ideas sobre análisis estocástico y formalizo la integral estocástica, una integral que se ajusta a problemas donde la regularidad movimiento no es muy clara. En uno de los anexos si el lector lo desea podrá encontrar un desarrollo algo más formal y menos discursivo

3.2 SERIES DE TIEMPO

Es una serie cronológica de datos bajo algunas propiedades a las que se les puede extraer información considerando que entre ellas existe una correlación que valide nuestro supuesto. La literatura habla de componentes aditivos multiplicativos etc. pero todo esto es posible por las propiedades de la operación suma y producto de la teoría de números

En la década de los 70 con la obra de Box Jenkins "Time Series Analysis: Forecasting and Control" inicio lo que hoy una amplia gama de estadísticos utilizan dotándolo con el nombre de series de tiempo

Al día de hoy existen una gran cantidad de modelos, pues el objeto es modificado cada vez que el sujeto lo interpreta, pero las más reconocidas son los modelos AR, MA, ARMA, ARIMA, ARCH, GARCH y todas ellas con variantes de orden, al igual que con el tema anterior se invitan al lector a mirar los anexos

3.3 METODOLOGÍA PROPUESTA

De los modelos de series que la literatura reproduce solo se contara con el modelo AR (auto regresivo) el modelo MA (medias móviles) y su hibrido ARIMA (autor regresivo y de media móvil diferenciable), en cuanto a las ecuaciones deferenciales estocásticas se utilizara un modelo de Wiener y luego se utilizara el modelo de Ornstein-Uhlenbeck, se tomaran los datos de la base de X.M Expertos en Mercados filial de ISA.

Finalmente se hará una comparación entre los dos tipos de modelos

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la siguiente grafica se muestra el precio de la energía en la ventana de tiempo tomada (120 datos que corresponden a 120 meses)

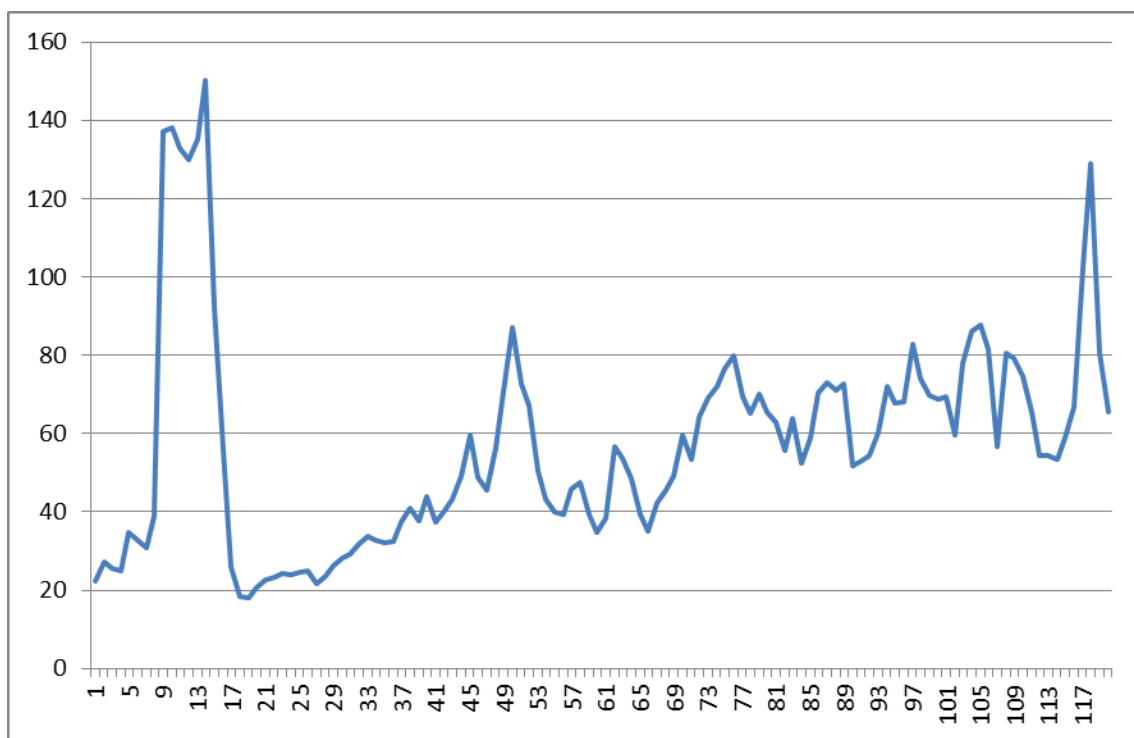


Figura: 4.1 precio de la energía [11]

4.1 MODELO CON ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

La siguiente grafica muestra los datos reales (línea verde) y la primera estimacion con el modelo Ornstein-Uhlenbeck (línea azul)

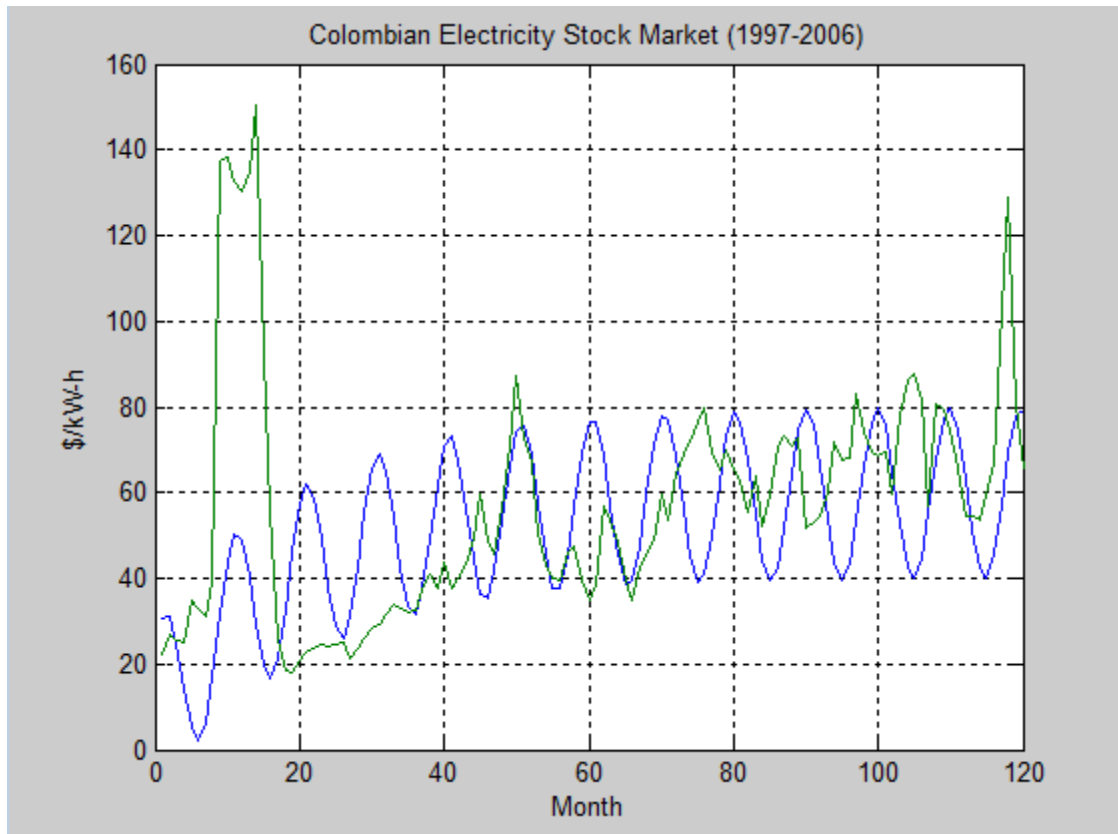
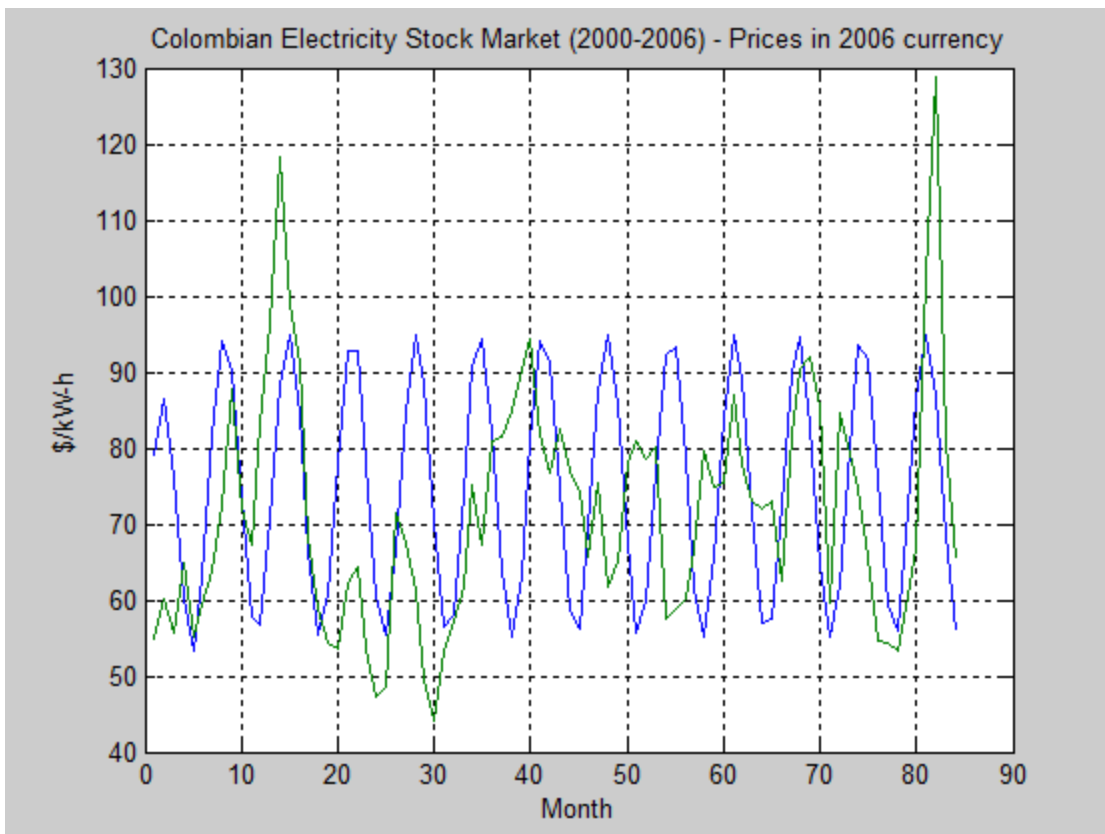
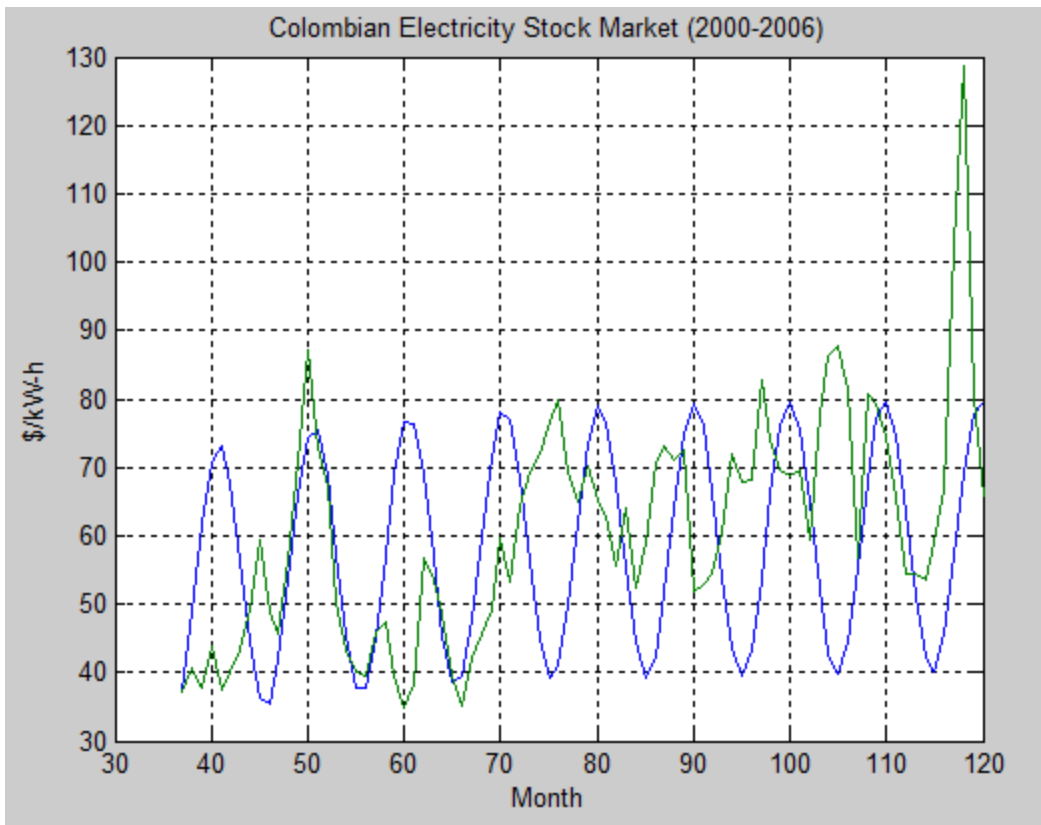


Figura: 4.2 seguimiento al precio de la energía

La serie considerada en la gráfica anterior toma una ventana de tiempo muy grande por lo tanto la estimación no es apropiada.

En la siguiente grafica se toma una ventana de tiempo más corta y se ve que la estimación mejora pero aún es insuficiente

los datos reales (línea verde) y la primera estimacion con el modelo Ornstein-Uhlenbeck (línea azul)



Figuras: 4.3 seguimiento al precio de la energía diferentes ventanas de tiempo

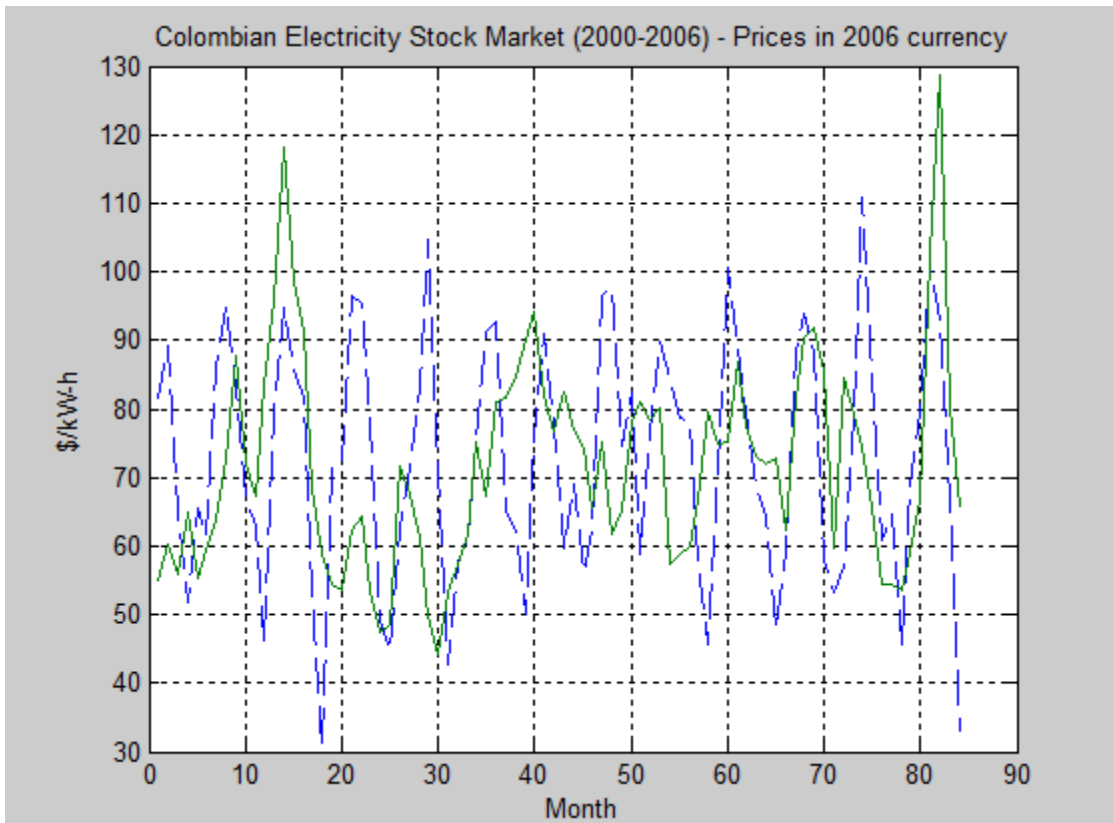


Figura: 4.4 seguimiento al precio de la energía

Resultados luego de aplicar las ecuaciones diferenciales estocásticas

Ella empieza identificado el tipo de datos que debe seguir y se modifican hasta ajustarse al modelo escogido en este caso el modelo Ornstein-Uhlenbeck

4.2 MODELO CON SERIES DE TIEMPO

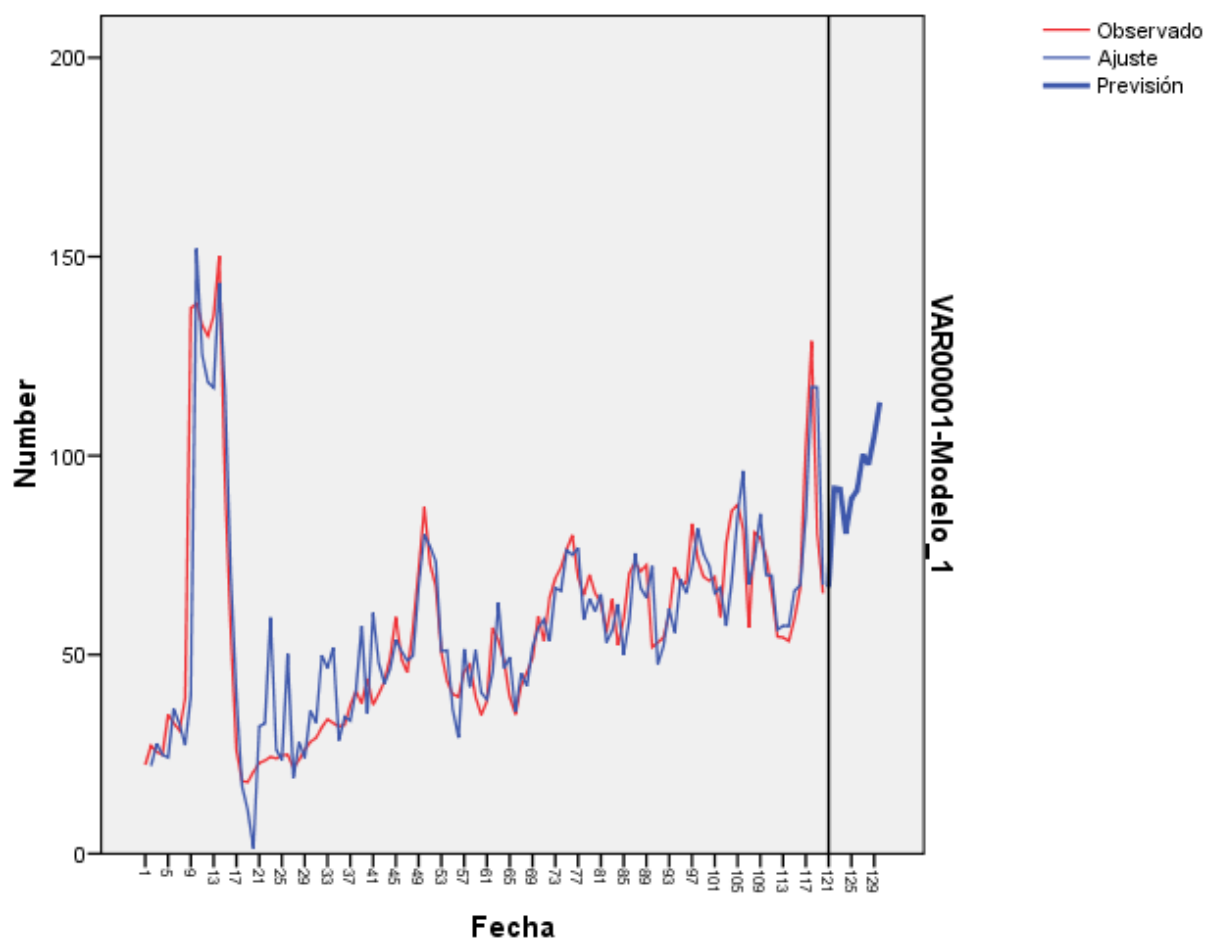


Figura: 4.5 seguimiento al precio de la energía con la serie de tiempo

Resultados utilizando modelos basados en series de tiempo (modelo ARIMA)

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Es claro que los resultados basados en serie de tiempo son mejores que el modelo de ecuaciones estocásticas, pero ello se debe a los supuestos a los que se someten cada una de las metodologías y al tipo de problema que están afrontando en nuestro caso precio de la energía.

Se exploró algunas alternativas para estimar el problema del pronóstico del precio de energía, Con el objetivo de reducir el riesgo para los inversionistas. El modelo fue solucionado mediante técnicas exactas. Los resultados obtenidos con las dos metodologías son defendibles de acuerdo en que lado de la orilla se situó el observador

En trabajos futuros se puede explorar otros modelos a utilizar. Cómo estimadores clásicos o los basados en estimación bayesiana, al igual que realizar un estudio a mayor tiempo para considerar medidas de riesgos y realizar portafolios

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Contreras, R. Espínola, F. J. Nogales, A. J. Conejo. "[ARIMA Models to Predict Next-Day Electricity Prices](#)". IEEE Transactions on Power Systems. Vol.18, pp.1014-1020. August 2003.
- [2] F. J. Nogales, J. Contreras, A. J. Conejo and R. Espínola. "[Forecasting Next-Day Electricity Prices by Time Series Models](#)". IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 17, No. 2, pp. 342-348. May 2002.
- [3] R. C. García, J. Contreras, M. van Akkeren, J. B. C. García. "[A GARCH Forecasting Model to Predict Day-Ahead Electricity Prices](#)". IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 20, No. 2, pp. 867-874. May 2005.
- [4] A. J. Conejo, M. A. Plazas, R. Espínola, A. B. Molina. "[Day-Ahead Electricity Price Forecasting Using the Wavelet Transform and ARIMA Models](#)". IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 20, No. 2, pp. 1035-1042. May 2005.
- [5] J.J Lucia ,E.S. Schwartz, "[Electricity Prices and power Derivatives: Evidence from the Nordic power Exchange](#)" Review of Derivatives Research, pp. 5-50. 2002.
- [6] Schwartz, E.S. and J.E. Smith, "[Short-term Variations and Long-term Dynamics in Commodity Prices](#)" Management Science, 46:7, pp. 893-911 2000.
- [7] G.G Victor. Manuel, "[Análisis Estadístico de series de tiempo económicas-2a edition](#)", Editorial: Thomson, 2003
- [8] W.S. Wei, William, "[Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods](#)", Editorial: Addison Wesley, 1990.
- [9] B. Oksendal, "Stochastic Differential Equations-six edition", Editorial: Springer, 2006
- [10] A. Alabert, "departament de matematiques universitat autònoma de Barcelona", enero 2004. Disponible en: <http://mat.uab.es/~alabert/Docs/teaching/IntroSDE%28Cali%29.pdf>
- [11] Expertos en Mercados XM, "Descripción del Sistema Eléctrico Colombiano". Disponible en: <http://www.xm.com.co/Pages/DescripciondelSistemaElectricoColombiano.aspx>
- [12] Expertos en Mercados XM, "Descripción del Sistema Eléctrico Colombiano". Disponible en: <http://www.xm.com.co>.

ANEXOS

SERIES DE TIEMPO [7]

$$\text{Operadores } Bz_t = z_{t-1}$$

$$B^k z_t = z_{t-k}$$

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}$$

$$\nabla = 1 - B$$

$$\nabla z_t = (1 - B) z_t$$

$$\nabla^k z_t = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} (-1)^j z_{t-j}$$

$$z_t - \sum_{j=1}^k g_j z_{t-j} = -\sum_{j=0}^k g_j z_{t-j}$$

$$G(B) = 1 - g_1 B - \dots - g_k B^k = 1 - \sum_{j=0}^k g_j B^j$$

$$G(B) = \frac{A(B)}{C(B)}$$

Ejemplo

$$G(B) = (1 + gB + gB^2 + \dots) z_t = \sum_{j=0}^{\infty} g^j z_{t-j}$$

$$z_{t-\mu} = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t \text{ promedios móviles}$$

$$z_{t-\mu} = \theta(B) a_t$$

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) (z_t - \mu) = a_t \text{ modelos auto regresivos}$$

$$\varphi(B) (z_t - \mu) = a_t$$

$$\varphi(B) (z_t - \mu) = \theta(B) a_t \text{ auto regresivo de promedio móvil}$$

$$\varphi(B) \nabla^d z_t = \theta(B) a_t$$

$$z_t = \mu + a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2} - \dots -$$

$$z_t = \mu + \vartheta(B) a_t \text{ ecuación general}$$

Entendiendo

$$\vartheta(B) = \theta(B),$$

$$\vartheta(B) = \frac{1}{\theta(B)}$$

$$\vartheta(B) = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}$$

Teorema de Schur [7]

$$g^p - a_1 g^{p-1} - a_2 g^{p-2} - \dots - a_{p-1} g - a_p = 0$$

Serán menores que la unidad si y solo si los p determinantes que se ven son mayores a cero

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & a_p \\ a_p & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & a_{p-1} \\ a_1 & -1 & 0 & -1 \\ a_p & 0 & -1 & a_1 \\ a_{p-1} & a_p & 0 & -1 \end{vmatrix} \dots$$

$$D_p = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & a_p & a_{p-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_p & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots \\ a_{p-1} & a_{p-1} & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & a_p \\ a_p & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & 0 & a_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_p & a_{p-1} & a_{p-1} & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Recordar que para un proceso de orden p

$$1 - a_1x^{-1} - a_2x^{-2} - a_3x^{-3} - \dots - a_{p-1}x^{-(p-1)} - a_px^{-p} = 0$$

Multiplicando por x^{-1}

$$(x^{-1})^p - a_1(x^{-1})^{p-1} - a_2(x^{-1})^{p-2} - a_3(x^{-1})^{p-3} - \dots - a_{p-1}x^{-1} - a_p = 0$$

Si vemos a x^{-1} como g entonces existe relación para determinar la convergencia del proceso y del teorema de Schur

Para que exista equilibrio en el largo plazo es necesario mas no suficiente que $|a_p| < 1$ y $a_p + \dots + a = 1$

ECUACIÓN EN DIFERENCIA DE ORDEN P [8]

Por el teorema fundamental del algebra se sabe que el polinomio de grado n se puede factorizar en n raíces. De la siguiente manera

$$(1 - g_1B)(1 - g_2B)(1 - g_3B) \dots (1 - g_pB) = G(B)$$

De tal manera que las raíces de la ecuación característica $G(x)=0$ son $x = g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_p^{-1}$.

Si se supone que todas las raíces son distintas entonces la solución general en términos del polinomio G (B) es

$$Z_t = \frac{a_0}{(1-g_1)(1-g_2)(1-g_3)\dots(1-g_p)} + s_1g_1^t + s_2g_2^t + \dots + s_pg_p^t$$

s_i Son constantes que se hallan con base en p condiciones iniciales

Si existen m raíces reales repetidas $1 < m < p$ $g_1 = g_2 = g_3 = \dots = g_m = g$

$$Z_t = \frac{a_0}{(1-g_1)(1-g_2)(1-g_3)\dots(1-g_p)} + s_1 g_1^t + s_2 t g_2^t + \dots + s_p t^{p-1} g_p^t + s_{p+1} g_{p+1}^t + \dots + s_p g_p^t$$

Si $|g| < 1$ entonces $f(g) = \frac{1}{1-g} = \sum_{j=0}^{\infty} g^j$; $f^1(g) = \frac{1}{(1-g)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)g^j$

$f^2(g) = \frac{1}{(1-g)^3} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2}{2} g^j$ entonces

$$\frac{1}{(1-g)^s} = \sum_{j=0}^{\infty} g^j \binom{j+s-1}{s-1} \text{ en general}$$

$$\frac{1}{(1-g)^p} = \sum_{j=0}^{\infty} g^j \frac{(j+p-1)(j+p-2)\dots(j+1)}{(p-1)!}$$

Por lo tanto si $|g| < 1$ la solución es

$$Z_t = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} g^j \frac{(j+p-1)(j+p-2)\dots(j+1)}{(p-1)!} + g^j \sum_{j=1}^p s_j t^{j-1}$$

El que un proceso descrito por una ecuación en diferencias alcance su punto de equilibrio depende del recíproco de su módulo de cada una de las raíces de la ecuación características, sea menor a la unidad.

El Teorema de Schur nos señala que los módulos de las raíces de la ecuación

$g^p - a_1 g^{p-1} - \dots - a_{p-1} g - a_p = 0$ son menores a uno (1) si y solo si los p determinantes siguientes son mayores que cero

MODELO AR [8]

A (B) $z_t = \text{constante}$ representa un polinomio de retraso, una generalización es introducir una variable aleatoria A (B) $z_t = \text{constante} + a_t$ donde el último término es un ruido gaussiano este modelo representa los procesos auto regresivos, para estos se tiene

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) z_t = \text{constante} + a_t$$

$(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)\mu = \text{constante}$, en el caso que el proceso z_t tenga un nivel medio constante dado por $E(z_t) = \mu$

Así $\phi(B)Z_t = a_t$ con $Z_t = z_t - \mu$

El termino autorregresivo (AR) se puede escribir como

$$z_t = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)\mu + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

Donde se ve que es una ecuación de regresión lineal, pero la variable dependiente Z en el periodo t no depende de los valores de un cierto conjunto de variables independientes como sucede en un modelo de regresión, sino de sus propios valores observados en periodos anteriores a t y ponderados con los coeficientes autorregresivos ϕ_p

Ahora para saber si un proceso alcanza equilibrio no se usa la palabra convergente sino estacionalidad. Un proceso AR será estacionario dependiendo de los valores que tome la raíces de la ecuación características $\phi(x)=0$

Es decir $\phi(B) = (1 - g_1 B) (1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B)$ De tal manera que el proceso AR definido por $\phi(B)$ será estacionario siempre que $|g_p| < 1$ para todo p es decir si y solo si las raíces que son g_p^{-1} se encuentran fuera del circulo unitario.

Modelo promedios móviles (MA) [8]

La idea es representar el proceso estocástico $\{z_t\}$ cuyos valores pueden ser dependientes unos de otros como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes $\{a_t\}$

$$Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t$$

Z_t Son sus desviaciones respecto a su nivel medio y θ_q son las ponderaciones asociados a los choques aleatorios

Nota se observa que todo proceso MA es estacionario pues $\sum_{j=1}^q |\theta_j|$ es una constante finita

Note que un proceso AR puede ser representado mediante p parámetros autorregresivos o mediante un número infinito de coeficientes φ asociados con el proceso $\{a_t\}$ pero por fines prácticos se trabaja con números finitos más aun cuando la explicación del fenómeno es la misma, esta es la idea del ahorro de parámetros y se le conoce con el nombre de principio de parsimonia

MODELO ARMA Y ARIMA [7]

Una generalización de los modelos AR y MA consiste en combinar los modelos en uno solo y se conoce como modelo ARMA (p, q)

$$\varphi(B) Z_t = \theta(B) a_t$$

Donde $\varphi(B)$ y $\theta(B)$ son polinomios de retraso de orden p y q , $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco y Z_t es la serie de desviaciones de la variable Z_t respecto a su nivel μ .

Esta generalización se presenta pues en algunas series se presenta tanto el proceso AR como el MA, además el principio de parsimonia así lo indica.

El modelo ARIMA (p, d, q) es la aplicación del operador diferencia al modelo ARMA, esto se realiza para eliminar tendencias polinomiales de orden d , es decir la no estacionariedad puede ser causada por la tendencia polinomial no determinística.

TEORIA DE LA PROBABILIDAD [9]

Un espacio de probabilidad es una terna formada por (Ω, \mathcal{F}, P) .

Ω : Representa el conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio

\mathcal{F} : una familia de subconjuntos de Ω que tiene estructura de σ -álgebra, es decir cumple

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Si $A \in \mathcal{F}$, su complemento A^c también pertenece a \mathcal{F}

$$- A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

P : una aplicación $\mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ que cumple

a) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

b) Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ son conjuntos disjuntos dos a dos (es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Los elementos de la σ -álgebra \mathcal{F} se denominan sucesos y la aplicación se denomina una probabilidad, por lo tanto $P(F) =$ "probabilidad de que el suceso F se realice"

Probabilidad cero, todos los subconjuntos de A pertenecen a la σ -álgebra \mathcal{F} .

Si μ es una familia de subconjuntos de Ω , la **mas pequeña** σ -álgebra que contiene a μ es, por definición

$$\sigma(\mu) = \bigcap \{ \rho, \rho \text{ es una } \sigma\text{-álgebra}, \mu \subset \rho \}$$

Y se denomina la σ -álgebra generada por μ . ejemplo la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos (o por los rectángulos) de R^n se denomina la σ -álgebra de Borel de R^n y se representa por B_{R^n}

Consideremos una partición finita $\rho = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ de Ω . La σ -álgebra generada por ρ esta formada por todas las uniones de los elementos de la partición (2^n *en total*).

Una variable aleatoria es una aplicación $\Omega \rightarrow R$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

Que es \mathcal{F} -medible, es decir, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B de la σ -álgebra de Borel de R .

Una variable aleatoria determina una σ -álgebra $\{X^{-1}(B), B \in B_R\} \subset \mathcal{F}$ que se denomina la σ -álgebra generada por X

Una variable aleatoria determina una probabilidad en la σ – algebra de Borel B_R definida por

$$P_X = P \circ X^{-1} \text{ Es decir } P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega: X(\omega) \in B\})$$

La probabilidad P_X se denomina la ley o distribución de la variable X . Por lo tanto se dice que la variable aleatoria X tiene densidad de probabilidad f_X si $f_X(x)$ es una función positiva, medible respecto de la σ – algebra de Borel tal que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad a < b$$

Ejemplo: una variable aleatoria tiene ley normal $N(m, \sigma^2)$ si

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Esperanza matemática [10]

Es una variable aleatoria X se define como la integral de X respecto de la probabilidad P , considerada como una medida del espacio (Ω, \mathcal{F}) . En particular, si X es una variable elemental que toma los valores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en los conjuntos A_1, \dots, A_n su esperanza valdrá

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i).$$

$$E(x) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x dP_X(x).$$

De manera general, si $g: R \rightarrow R$ es una función medible respecto de la σ – algebra de Borel y $E(|g(x)|) < \infty$, entonces la esperanza de la variable $g(X)$ se puede calcular integrando la función g respecto de la ley de la variable X : $E(g(x)) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP_X(x)$.

La segunda integral se calcula utilizando la densidad o función de probabilidad de la variable X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, & f_X(x) \text{ es la densidad de } X \\ \sum_k^n g(x_k) P(X = x_k), & X \text{ variable discreta} \end{cases}$$

Ejemplo. Si X es una variable aleatoria con ley normal $N(0, \sigma^2)$ y λ es un número real

$$E(\exp(\lambda X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\lambda\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$$

La varianza de una variable aleatoria X se define por

$$\sigma^2_X = \text{var}(x) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

La varianza nos mide el grado de dispersión de los valores de la variable respecto de su esperanza.

PROCESOS ESTOCÁSTICOS [10]

Un procesos estocástico es una familia de variables aleatorias reales $\{X_t, t \geq 0\}$ definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Y una función $X \rightarrow S$ donde S es un espacio topológico.

El conjunto Ω es un espacio abstracto cuyos puntos ω se interpretan como “eventos elementales”. \mathcal{F} es una colección de subconjuntos de que tiene cierta estructura (de σ -álgebra), cuyos elementos se llaman “eventos”. P es una “medida de probabilidad” sobre (\mathcal{F}) , es decir, una función $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ con ciertas propiedades (de medida), en particular $P(\Omega) = 1$.

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS [10]

Algunos fenómenos físicos pueden ser modelados por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias éstas son de la forma

$$\dot{x} = b(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Cuya solución es

$$X(t+\Delta t) - x(t) = b(x(t))\Delta t + o(\Delta t)$$

Y sus soluciones son curvas regulares de hecho $x(t)$ debe cumplir fuertes exigencias para que represente el sistema a modelar, pero en nuestro caso las funciones a estudiar tienen un comportamiento aleatorio que ocasiona que nuestro modelo sea alterado. A través de una perturbación o ruido de la siguiente manera

$$X(t+\Delta t) - x(t) = b(x(t))\Delta t + \text{“ruido”} + o(\Delta t)$$

Es decir

$$\dot{x} = b(x(t)) + \sigma x(t) \xi(t)$$

Esta última ecuación plantea unos nuevos retos, como son el definir el nuevo término agregado y su significado así que antes de volver a abordar el problema necesitamos los siguientes conceptos

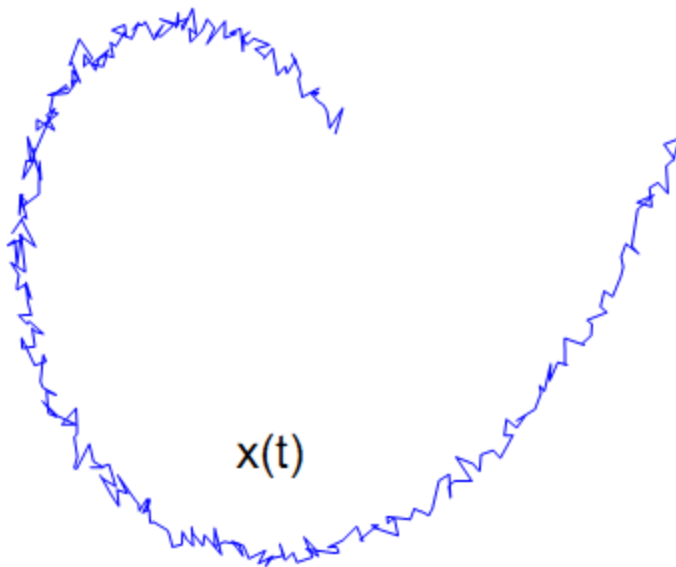


Figura: A Trayectoria estocástica

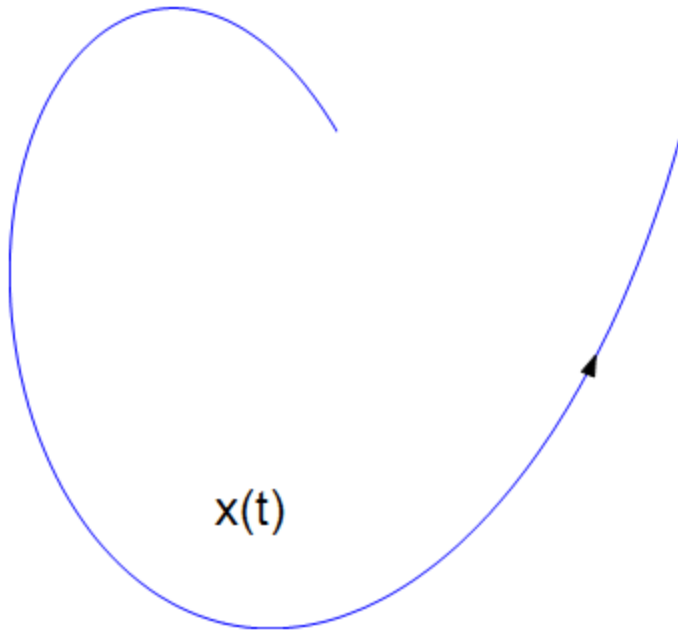


Figura: B Trayectoria determinística

CONSTRUCCIÓN DE LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA [9]

El objetivo es poder definir una integral de la forma $\int_0^t Y(S) dB(S)$

La ecuación $\frac{dx}{dt} = b(t, x_t) + \sigma(t, x_t)$ donde b, σ son funciones dadas así que representa un proceso estocástico, pero si a tal proceso introducimos una variable denominada ruido $W(t)$. Representaremos un proceso estocástico de la forma $\frac{dx}{dt} = b(t, x_t) + \sigma(t, x_t) W(t)$

Diremos pues que $w(t)$ tiene las siguientes propiedades

- $t_1 \neq t_2$ si y solo si w_{t_1} y w_{t_2} son independientes

- $\{w(t)\}$ es estacionario es decir la distribución conjunta de $\{w(t_{1+t}), \dots, w(t_{k+t})\}$ no depende de t
- $E[w(t)]=0$ para todo t

Pero no existe ningún proceso estocástico que cumpla las dos primeras suposiciones tal que $w(t)$ no puede tener trayectorias continuas

Para evitar este problema se escribirá una versión discreta
 $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, y $k=0 \dots m$

$$X(t_{k+1}) - X(t_k) = b(t_k, X(t_k)) \Delta t_k + \sigma(t_k, X(t_k)) U(t_k) \Delta t_k$$

Si reemplazamos $U(t_k) \Delta t_k = \Delta V(t_k) = V(t_{k+1}) - V(t_k)$ debemos garantizar que V tenga incrementos independientes estacionarios de media cero y el único proceso que cumple con lo anterior es el movimiento browniano por lo tanto tendremos

$$X(t_k) = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X(t_j)) \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X(t_j)) \Delta W(t_j)$$

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(u, X(u)) du + \int_0^t \sigma(u, X(u)) dW(u)$$

Del segundo miembro de la ecuaciones se puede observar que el primer termino es una integral de Lebesgue definida trayectoria a trayectoria pero habría que justificar la integral estocástica del segundo término notemos que no se puede definir como una integral de Lebesgue-Stieljes sobre cada trayectoria, pues las trayectorias del movimiento browniano no son de variación acotada

Sea $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, \mathbb{F}; 0 < t < \infty\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ pero es el hecho que el movimiento browniano tenga variación cuadrática finita lo que permite construir la integral estocástica.

La integral estocástica respecto a movimiento browniano estándar w tiene las siguientes propiedades para $0 < s < t < \infty$

-Propiedad martingala $E[I_x(t) / \mathcal{F}_s] = I_x(s)$

-Isometría de Ito $E[I_x(t)^2] = E \int_0^t X(u)^2 du$

-Variación cuadrática $\mathbb{E}[I_x(t) - I_x(s)^2 / \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t X(u)^2 du / \mathcal{F}_s]$

-Variación cruzada $\mathbb{E}[(I_x(t) - I_x(s))(I_Y(t) - I_Y(s)) / \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t X(u)Y(u)du / \mathcal{F}_s]$

-Linealidad $I_{\alpha X + \beta Y} = \alpha I_X + \beta I_Y$

La isometría de Ito anterior sugiere que la integral estocástica $\int_0^t X(u) dW(u)$ se debería definir solo para procesos medibles y adaptados

$\mathbb{E}(\int_s^t X(u)^2 du) < \infty$ Para todo $t > \text{cero}$

Es por este motivo que se transfiere la convergencia sobre un espacio L^2 conveniente de procesos estocásticos a un espacio L^2 de martingalas, además teniendo en la cuenta que las aplicaciones financieras existe un intervalo de tiempo fijo se puede escribir como

$\mathbb{E}(\int_s^T X(u)^2 du) < \infty$

Propiedad se dice que un proceso X pertenece a la clase $L^2 [0, t]$ cuando

$-\mathbb{E}(\int_s^T X(u)^2 du) < \infty$

- x es adaptado a la filtración \mathbb{F}

- x es un proceso $(\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathbb{F})$ medible

Integral de Ito [9]

Dado un proceso $X \in L^2$ se define la integral estocástica de X como el proceso continuo definido mediante

$I_x(t) = \int_0^t X(u) dW(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X_n(u) dW(u)$ limite en L^2

Tal que X_n es cualquier sucesión de procesos simples que verifiquen

$\mathbb{E}[\int_0^t X_n(u) - X(u)^2 du] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

Regla de Ito [9]

Es la herramienta más importante del cálculo estocástico, podríamos decir que es análogo a la regla de la cadena del cálculo clásico, recordemos la anterior regla, dadas f y g funciones diferenciables se define que $[f(g(u))] = f'(g(u)) * g'(u)$

$$\text{O de manera integral } f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(u)) * g'(u) du = \int_0^t f'(g(u)) * dg(u)$$

Si se toma el caso $f(u) = u^2$ con $g(0) = 0$ se tiene que $\frac{1}{2}g(t)^2 = \int_0^t g(u) * dg(u)$

En el cálculo estocástico se vería de la siguiente forma

$$\int_0^t dfw(u) = F(W(t)) - F(W(0)) = \int_0^t f'(W(u)) dW(u) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W(u)) du$$

Ejemplo $f(t) = t^2$ en el caso particular $f'(t) = 2t$ y $f'' = 2$ y la regla de Ito nos lleva a

$$W(t)^2 - W(0)^2 = 2 \int_0^t W(u) dW(u) + \int_0^t du$$

Es decir $\int_0^t W(u) dW(u) = \frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{1}{2} t$

Proceso de Ornstein-Uhlenbeck [9]

$$dX(t) = -\mu X(t) dt + \sigma dw(t) \quad \mu, \sigma > 0$$

Para resolver la ecuación se aplica la fórmula de integración por partes al proceso $e^{\mu t} * X(t)$ y se tiene:

$$D(e^{\mu t} * X(t)) = e^{\mu t} dx(t) + X(t) \mu e^{\mu t} dt + 0 = e^{\mu t} (dX(t) + X(t) \mu dt) = e^{\mu t} \sigma dW(t)$$

Por lo tanto el proceso $x(t) = e^{-\mu t} x(0) + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu u} dw(u)$ resuelve la ecuación diferencial estocástica

Sin embargo es posible presentar a $w(t)$ como un proceso estocástico generalizado que se llama proceso de ruido blanco

Además las anteriores suposiciones sugieren que sea un proceso tenga estacionariedad de incrementos independientes con una medida cero, y el único proceso que cumple con tales condiciones es el movimiento browniano B_t

Por lo tanto $X_k = X_0 + \int_0^t B(s, X_s) dt + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$

Pero realmente existe $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$?