

**ESTRATEGIA DIDÁCTICA FUNDAMENTADA EN LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO  
Y LAS FASES DE APRENDIZAJE DE LA TEORÍA DE VAN HIELE EN LA ENSEÑANZA  
DE LOS ATRIBUTOS Y CLASIFICACIÓN DEL TRIÁNGULO SEGÚN SUS LADOS,  
USANDO LA TÉCNICA DEL ORIGAMI**

**DIANA ISABEL RAMÍREZ NAVARRETE  
ALEXANDRA RENDÓN VEGA**

**Proyecto de grado para optar el título de:  
Licenciadas en Pedagogía Infantil**

**Asesor:  
Héctor Gerardo Sánchez  
Magister en Comunicación Educativa**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE PSICOPEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL  
PEREIRA  
2012**

**Nota de aceptación:**

---

---

---

---

---

---

---

---

\_\_\_\_\_  
**Firma del presidente del jurado**

\_\_\_\_\_  
**Firma del jurado**

\_\_\_\_\_  
**Firma de jurado**

**Pereira, \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /**

## **Texto de dedicatoria**

Dedicamos este trabajo de investigación, primero a Dios por habernos permitido llegar a la culminación de un capítulo más de nuestras vidas y dejarnos finalizar con éxito y triunfo nuestra carrera universitaria, haciendo de nuestro mayor deseo una realidad alcanzada con esfuerzo y dedicación.

Dedico este trabajo de investigación a mi madre: Beatriz Vega, por sus numerosos esfuerzos y sacrificios, por creer cada día en mí, por brindarme siempre su confianza y por ser testigo de todos mis logros y metas; por apoyarme en cada paso que daba sin importarle cuantos obstáculos pudieran existir. Gracias por ser mi pilar fundamental en mi formación y educación como persona.

A mi abuela Nely Puerta por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor. Y a todos aquellos que contribuyeron y fueron participe en este logro hoy alcanzado mil y mil gracias.

*Alexandra Rendón Vega*

A mi tía Gloria Ramírez por el apoyo incondicional brindado en cada una de las etapas de mi vida, por estar siempre apoyándome y brindándome toda su ayuda, mil y mil gracias por ser portadora de este gran sueño. A mi madre, Cristina Navarrete por contribuir en cuanto le fue posible para hacer de mí la mujer que soy, por ayúdame a alcanzar mi sueño de ser hoy una gran profesional, por sus incontables sacrificios y por ayudarme a lograr mis metas tanto personales como académica.

A mi hijo Juan José por ser mi mayor motivación, mi polo a tierra, porque al llegar a mi vida me dio toda la energía para poder culminar mi carrera y llegar a una de mis metas más anheladas. A mi papá: Hernán Darío por tantos esfuerzos y sacrificios, por contribuir a este nuevo logro de mi vida y por estar siempre que lo he necesitado.

A mi hermana: Juliana Ramírez N., por ser parte esencial en mi vida, por compartir conmigo las buenas y las malas, por condescender el honor de ser su amiga, su más cercano ejemplo a seguir y por aportar felicidad a mis días. A mi abuelo Jesús Ramírez, que aunque ya no este conmigo, siento que desde el cielo se siente feliz por ver uno de sus sueños hechos realidad. Ver a su nieta mayor hecha una profesional, y a todos los que de forma indirecta contribuyeron a este proyecto mil y mil gracias.

*Diana Isabel Ramírez Navarrete*

## **Texto de agradecimiento**

Este proyecto es el resultado del esfuerzo conjunto de todos los que hacen parte de él como: La Universidad Tecnológica de Pereira, específicamente la Facultad de Educación, a la cual agradecemos profundamente.

Muy especialmente agradecemos también a todos nuestros docentes, porque con su esmero y orientación han contribuido significativamente en nuestra formación académica y profesional. Esencialmente a los docentes: Claudia Inés López, Geoffrin Ninoska Gallego, Andrés Ramos y Mirian Ruiz, por su entrega en su labor docente, su profesionalismo, por guiarnos durante todo el proceso de asesoría y formación como futuros docentes dejando en cada una de nosotras un huella imborrable. Sin ustedes nada de esto hubiera sido posible, gracias por contribuir a esta gran logro.

También agradecemos al asesor Héctor Gerardo Sánchez por su apoyo en la elaboración de este trabajo de grado para la culminación de nuestros estudios profesionales.

# CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>4</b>
<b>2. OBJETIVOS</b>	<b>6</b>
<b>2.1. OBJETIVO GENERAL</b>	<b>6</b>
<b>2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS</b>	<b>6</b>
<b>3. REFERENTE TEÓRICO CONCEPTUAL</b>	<b>7</b>
<b>3.1. MARCO MACRO-PROYECTO</b>	<b>7</b>
3.1.1. la noción de espacio. El espacio es el entorno de todos, con el cual se puede interactuar de diversas formas; según Piaget "el espacio lo constituye aquella extensión proyectada desde el cuerpo, y en todas direcciones, hasta el infinito"	8
<b>3.2. ESTADO DEL ARTE</b>	<b>24</b>
<b>3.3. De las percepciones a las representaciones figurativas</b>	<b>25</b>
<b>3.4. El origami</b>	<b>28</b>
3.4.1. Historia del origami.	29
3.4.2. Origami como técnica para la enseñanza de las matemáticas.	29
<b>3.5 EL TRIÁNGULO</b>	<b>31</b>
3.5.1 Atributos del triángulo	31
3.5.2. Clasificación de los triángulos según sus lados	31
<b>4. METODOLOGÍA</b>	<b>33</b>

<b>4.1. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN</b>	<b>33</b>
4.1.1. Antes de la aplicación de la estrategia	33
4.1.2. Durante la aplicación de la estrategia	34
4.1.3. Después de la aplicación de la estrategia	34
<b>4.2. PROCEDIMIENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS</b>	<b>34</b>
4.2.1. Fundamentación teórica	34
4.2.2. Logística	35
4.2.3. Diseño de herramientas	35
4.2.4. Aplicación de herramientas	35
<b>5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN</b>	<b>36</b>
<b>5.1. PRE-TEST: NIVELES DE RAZONAMIENTO (VISUALIZACIÓN)</b>	<b>36</b>
<b>5.2. Fases de enseñanza</b>	<b>44</b>
5.2.1. Docente 1	44
5.2.2. Docente 2	48
<b>5.3. Pos-test: Niveles de razonamiento (Análisis)</b>	<b>49</b>
<b>6. DISCUSIÓN E INTERPRETACIÓN</b>	<b>66</b>
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>81</b>
<b>8. RECOMENDACIONES</b>	<b>82</b>
<b>9. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>83</b>
<b>0. ANEXOS</b>	<b>86</b>

## LISTA DE IMÁGENES

	<b>pág.</b>
Imagen 1 pre-test, pregunta 8	37
Imagen 2 pre-test, pregunta 3	38
Imagen 3 pre-test, pregunta 2	39
Imagen 4 pre-test, pregunta 6	40
Imagen 5 pre-test, pregunta 8	41
Imagen 6 pre-test, pregunta 3	41
Imagen 7 pre-test, pregunta 3	42
Imagen 8 pre-test, pregunta 5	43
Imagen 9 sesión 1	47
Imagen 10 pre-test, pregunta 8	51
Imagen 11 pre-test, pregunta 3	52
Imagen 12 pre-test, pregunta 2	53
Imagen 13 pre-test, pregunta 6	54
Imagen 14 pre-test, pregunta 8	55
Imagen 15 pre-test, pregunta 3	56
Imagen 16 pre-test, pregunta 3	56
Imagen 17 pre-test, pregunta 5	58
Imagen 18 pos-test, pregunta 5	59
Imagen 19 pos-test, pregunta 2	60
Imagen 20 pre-test, pregunta 3	61
Imagen 21 pre-test, pregunta 7	62

Imagen 22 pos-test, pregunta 8	63
Imagen 23 pos-test, pregunta 6	64
Imagen 24 pos-test, pregunta 4	65
Imagen 25 pre-test, pregunta 1	66
Imagen 26 pre-test, pregunta 4	67
Imagen 27 ficha 1	68
Imagen 28 pos-test, pregunta 8	78



## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Resultado pre-test (visualización)	36
Tabla 2. Resultados del pos-test (visualización)	50
Tabla 3. Resultados del pos-test (análisis)	50

## LISTA DE ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo 1. Pre-test	84
Anexo 2. Estrategia didáctica	91
Anexo 3. Pos-test	105

## RESUMEN

Esta investigación interpretó, estudio, categorizó y analizó, las acciones de aula basadas en la técnica del origami, fundamentada en los niveles de razonamiento (visualización ya análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele en el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de básica primaria del grado segundo del Colegio los Ángeles del Departamento de Risaralda; donde los aportes principales fueron la utilización del origami vinculado con la teoría de los esposos Van Hiele. El primero proporciona al docente y al estudiante un recurso atractivo y motivador para la enseñanza que tradicionalmente se ha usado para otros propósitos, ya que el origami permite al alumno “palpar” sus construcciones geométricas. Es soporte que le brinda la teoría da pie y permite que el proceso pedagógico adquiriera una gran solidez y se asegure que el estudiante construya su conocimiento de una manera diferente y efectiva.

Tomando en cuenta lo anterior, surgió la pregunta de investigación: ¿Qué estrategia didáctica basada en la técnica del origami y fundamentada en los niveles de razonamientos (visualización y análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele, contribuyen al desarrollo del pensamiento espacial de los niños y niñas de segundo de primaria del Colegio Los Ángeles de la ciudad de Pereira?

Es preciso señalar entonces que el origami ofrece la posibilidad de explorar un territorio geométrico con herramientas accesibles al estudiante tanto desde un punto de vista material como cognitivo.

Palabras clave: Geometría, pensamiento espacial, origami, niveles de razonamiento (visualización y análisis), fases de razonamiento, teoría de Van Hiele, Teoría de Piaget.

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación, como propuesta de grado para optar al título de Licenciadas en Pedagogía infantil, tiene como propósito contribuir al desarrollo del pensamiento espacial en las niñas y niños de grado segundo del colegio Los Ángeles en el departamento de Risaralda; para ello está fundamentada en los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele, con una estrategia didáctica basada en el origami.

En primer lugar se realizó el planteamiento del problema, en el cual se argumenta que por la falta de la implementación de estrategias didácticas por parte de los docentes, los estudiantes han perdido el interés hacia el aprendizaje de la geometría, ante lo cual se plantea la necesidad de encontrar una estrategia didáctica que involucre material concreto en una técnica motivadora que genere expectativa en los estudiantes. De esto surgieron unos objetivos donde planteó con claridad y precisión qué es lo que se busca con la realización de este trabajo.

En segundo lugar se realizó un marco teórico compuesto por dos momentos. Por un lado, se encuentra el marco teórico del macro-proyecto, donde se tratan temas como: Geometría y pensamiento espacial, Teoría de Van Hiele y Teoría de Piaget en lo relacionado con el pensamiento espacial y el aprendizaje del niño. Por otro lado, se encuentra el marco teórico referente a esta investigación, en el cual se profundiza acerca de las aportaciones de Piaget a la geometría y se aborda el tema del origami, mencionando sus beneficios para la práctica educativa.

En un tercer lugar, se habla sobre el tipo de investigación que se trabajó, siendo ésta de corte cualitativo, haciendo alusión a la población, las técnicas e instrumentos de recolección de información y el procedimiento de recolección de datos para el cual se realizó primero la aplicación del prest-test, luego la aplicación de una unidad didáctica apoyada por la elaboración de fichas de trabajo durante las sesiones de clases, y por último la ejecución de un post-test, para poder llegar a la recopilación de la información y poder realizar las interpretaciones pertinentes frente a los niveles de por los que pasaron los niños y las fases de enseñanza propuestas por van hiele para los docentes.

En el siguiente apartado, se realizó un análisis de la información, la interpretación y discusión de la misma, la cual estuvo enfocada hacia las acciones presentadas en el aula durante el desarrollo de la unidad didáctica, triangulando esta información bajo la luz de las teorías de Van Hiele y Piaget.

Finalmente se determinaron las conclusiones, recomendaciones y contribuciones de carácter teórico y didáctico que el proyecto logró evidenciar durante todo el proceso de la investigación.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad existen esfuerzos del Ministerio de Educación que pretenden dar respuesta, por medio de la propuesta de Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias, a cada una de las demandas nacionales e internacionales que tienen que ver con una educación de calidad para todos los colombianos, siendo ésta la que comprende una formación integral en competencias que posibilite a los ciudadanos desenvolverse en la vida cotidiana.

No obstante, podemos evidenciar en las aulas que aún cuando los docentes son conocedores de dichos documentos desarrollados por el Ministerio de Educación, no se preocupan por buscar estrategias didácticas, en especial para la enseñanza de la matemática, que hagan de ésta una asignatura significativa para los estudiantes, desarrollando sus competencias en el pensamiento espacial, logrando en ellos un razonamiento crítico y analítico sobre su entorno. En lugar de esto, se preocupan más por responder a asignaturas en las que los estudiantes tengan una mayor receptividad, como lo son las enfocadas en lenguaje y sociales, dejando de lado la matemática como una asignatura con poca trascendencia para los estudiantes.

Esta falta de empatía es generada en los estudiantes por las clases de matemáticas, ya que incluso los mismos docentes que “dictan” la asignatura, más específicamente los de geometría, indican que habitualmente se enfocan en la presentación de las definiciones como conceptos, clasificaciones mecánicas de las figuras, realización de dibujos descontextualizados en planos, para finalizar con la manipulación algorítmica o rutinaria y memorística de las propiedades geométricas. De ahí que las recientes investigaciones educativas se estén centrando en buscar causas, y a partir de ellas soluciones para abolir dicha monotonía, estableciendo propuestas didácticas para la enseñanza de la geometría en la escuela.

A partir de esto surge el interés por encontrar una estrategia didáctica, que involucre material concreto y una técnica llamativa que genere expectativa e interés por parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de la geometría. Y en vista de que el origami es una técnica que puede trabajarse de manera sencilla y que no requiere de cambios radicales en las mallas curriculares, se muestra como la opción más acertada para generar una transformación en la forma como aprenden los estudiantes en las aulas, forjando una perspectiva diferente y más agradable frente a ésta asignatura, iniciando con el proceso de generar “amor por el aprendizaje de las matemáticas”.

De esta manera, el **origami** no solo contribuye al aprendizaje de la geometría de una manera más significativa y comprensiva, sino que también posibilita el desarrollo de competencias matemáticas, puesto que se generan ambientes de aprendizaje donde a partir de metas definidas se logra atravesar niveles de

exigencia cada vez mas complejos. Así, los estudiantes parten de sus preconcepciones acerca de las nociones geométricas, mediante actividades que les permiten generar hipótesis y comprobarlas por si mismos a medida que manipulan el material concreto, dando paso al docente para cuestionar los procedimientos ejecutados, de manera que se incrementen todas aquellas potencialidades que el estudiante posee, tornando su actitud de posible temor en una actitud segura y confiada, que le permita al estudiante ser consiente de sus posibilidades de avance hacia nuevos conocimientos.

No obstante, aunque el desarrollo de las competencias matemáticas, están ligados a la construcción de procesos de aprendizaje dinámicos, no parece tener mucha importancia para los docentes una actividad tan enriquecedora como lo es el **origami**, puesto que no lo conocen o no lo ven como una herramienta eficaz de enseñanza y aprendizaje, tomándolo como una simple actividad de esparcimiento limitada a la clase de “artes”, desperdiciando el gran potencial que tiene como estrategia didáctica en las aulas para la enseñanza de la geometría de una manera innovadora, negándole a los estudiantes la posibilidad de aprender la geometría de una manera mas atractiva y motivadora que sea además manipulable, graficable y razonable desde el punto de vista de los estudiantes.

Por esto, el gran interés de generar un proceso de investigación entorno a la implementación de la técnica del origami como estrategia para el aprendizaje de la geometría. Debido a que es una herramienta que contribuye al desarrollo integral del estudiante, puesto que comprende los conceptos mediante la generación de procesos que le permitan desarrollar de manera transversal su imaginación, su creatividad, su flexibilidad, su coordinación, sus habilidades motoras, su capacidad de concentración, su autorregulación, su lógica y su pensamiento abstracto. Todo esto, mientras se desempeña en un ambiente colaborativo, de expresión y de ayudas ajustadas que le permiten llegar a los objetivos planteados por si mismo, asegurando la comprensión y la apropiación de los aprendizajes logrados en el camino.

Para ser posible el avance progresivo hacia conceptos más elaborados se propuso una temática que responda a las concepciones iniciales y más básicas de los estudiantes; por lo tanto lo ideal sería iniciar con la diferenciación de atributos y propiedades de objetos bidimensionales como el triángulo, asegurándonos de propiciarle al estudiante una iniciación en el proceso que no genere un choque con sus preconcepciones.

Teniendo lo anteriormente enunciado como marco de referencia, se propone la siguiente pregunta de investigación ¿Qué estrategia didáctica basada en la técnica del origami y fundamentada en los niveles de razonamientos (visualización y análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele, contribuyen al desarrollo del pensamiento espacial de los niños y niñas de segundo de primaria del Colegio Los Ángeles de la ciudad de Pereira?

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1. OBJETIVO GENERAL**

Interpretar la estrategia didáctica basada en la técnica del origami para la enseñanza de los atributos y clasificación del triángulo según sus lados, que se generan en una propuesta fundamentada en los niveles de razonamiento (visualización y análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele, en el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes de grado segundo del colegio Los Ángeles en la Ciudad de Pereira.

### **2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estudiar las acciones de aula basadas en la técnica del origami y fundamentada en los niveles de razonamiento (visualización ya análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele en la enseñanza de los atributos y clasificación del triángulo.
- Categorizar la estrategia didácticas basada en la técnica del origami y fundamentada en los niveles de razonamiento (visualización ya análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele en la enseñanza de los atributos y clasificación del triángulo.
- Analizar las acciones de aula, generadas en una estrategia didáctica basada en la técnica del origami y fundamentada en los niveles de razonamiento (visualización ya análisis) y las fases de aprendizaje propuestas en la teoría de Van Hiele en la enseñanza de los atributos y clasificación del triángulo.

### 3. REFERENTE TEÓRICO CONCEPTUAL

#### 3.1. MARCO MACRO-PROYECTO

El desarrollo de las competencias que tienen que ver con el pensamiento espacial, conocidas generalmente dentro de los contenidos de geometría, en los últimos años ha tenido un abandono en su desarrollo dentro del currículo escolar colombiano. Quizás por su formalismo o generalización a través de expresiones algebraicas, o por la falta de conocimiento de estrategias didácticas que le permita al maestro hacer de su proceso de enseñanza y aprendizaje más significativo para el estudiante, en fin son muchos los factores que pueden intervenir en este planteamiento. El desconociendo del aporte que brinda la capacidad espacial al desarrollo de las representaciones mentales, influye notablemente en el pensamiento lógico matemático. Por otra parte, durante muchos años el trabajo de la geometría se ha minimizado al conocimiento de las figuras, dibujos, diagramas, etc. Como instrumentos de ayuda para facilitar los conceptos geométricos.

Sin embargo, en las últimas investigaciones tomadas por Ángel Gutiérrez (1998) se afirma que en todos los campos de las matemáticas escolares, el aprendizaje y la enseñanza resultan más fáciles y profundos cuando se evita la abstracción innecesaria y se apoya en la representación o modelización, en donde los estudiantes pueden observar, construir, modelar y transformar. Pero aquellas representaciones que se están usando en las aulas de clase son tomadas de libros que representan figuras bidimensionales que sin dudar le supone a los estudiantes una dificultad adicional en el proceso de comprensión; dado que las representaciones resultan demasiado complejas para los estudiantes, transmitiéndoles los conceptos de forma parcial, o lo que es peor, generando concepciones erróneas y representaciones inadecuadas.

Al respecto Piaget e Inhelder<sup>1</sup> plantean la distinción entre percepción y representación. La percepción es el conocimiento de los objetos desde un contacto directo con ellos, en cambio, la representación o imaginación implica la evocación de los objetos en su ausencia o cuando corre paralelo a la percepción en su presencia. Así, la representación mental de una figura, es decir, su imagen, es vista como una imitación interna de acciones.

---

<sup>1</sup> PIAGET e INHELDER, 1956 Y BOWER 1974 “una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial”. (Citado el 2 de Abril de 2012). Disponible en: <http://dspace.usc.es/handle/10347/3692>.



**3.1.1. la noción de espacio.** El espacio es el entorno de todos, con el cual se puede interactuar de diversas formas; según Piaget "el espacio lo constituye aquella extensión proyectada desde el cuerpo, y en todas direcciones, hasta el infinito"<sup>2</sup>

La importancia de una noción espacial estable, es vital en la medida en que por medio del espacio y las relaciones espaciales, como observamos las relaciones entre las cosas y objetos en nuestro desarrollo. Podemos observar tales relaciones en la medida en que podamos localizar en el espacio y mantenerlas en esa relación espacial mientras la observamos.<sup>3</sup>

El niño asciende a la estructuración espacial a través de un proceso de desarrollo. En primer lugar localiza los objetos con relación a sí mismo y solo más tarde desarrolla un sistema de coordenadas objetivas por medio de las cuales puede manipular números, objetos en el espacio a través de un sistema de direcciones fijas<sup>4</sup>.

**3.1.2. Como se desarrolla la noción de espacio en el infante.** Por otro lado, es importante destacar la teoría del desarrollo Arnold Gesell, este autor se dedicó especialmente a estudiar la interacción entre el desarrollo físico y mental, concluyendo que se produce una secuencia definida. Gesell sostenía que cada niño es único, con un código genético individual heredado con la capacidad de aprender. La teoría de Gesell es biológica considerando que el aprendizaje depende de la biología y fisiología del desarrollo y no a la inversa.

Siguiendo en la misma línea, la teoría de Arnold Gesell describe en forma sistemática el crecimiento y desarrollo humano desde el nacimiento hasta la adolescencia, este autor decía que el crecimiento mental es un amoldamiento progresivo de las pautas de conducta mediante la diferenciación e integración, que incluye la complementación de herencia y ambiente. El ambiente estimula el desarrollo pero para ello necesita de la maduración adecuada. La maduración se verifica por medio de los genes o sea que la naturaleza determina el orden de aparición de los factores de crecimiento; o sea que la madurez de las estructuras nerviosas es un prerrequisito esencial del aprendizaje.

Las etapas de Gesell tienen en cuenta el desarrollo intelectual, la motricidad, el lenguaje y las relaciones sociales. La mayor parte de las situaciones referidas a las diferentes fases de desarrollo fue rigurosamente caracterizada. Las etapas

---

<sup>2</sup> PIAGET, Jean (1948). Pág. 112

<sup>3</sup> DA FONSEC Víctor. Manual de observación psicomotriz

<sup>4</sup> PIAGET e INHELDER, 1956 Y BOWER 1974 "una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial". (Citado el 2 de Abril de 2012). Disponible en: <http://dspace.usc.es/handle/10347/3692>.

definidas por Gesell no solamente examinan el comportamiento del niño según la madurez de su desarrollo sino que permiten determinar, para cada nivel de edad, un grupo de elementos que constituyen una "constelación" del comportamiento normal<sup>5</sup>

Gracias a la observación y descripción que hace Arnold Gesell de las etapas por las que pasa el niño acerca de la noción de espacio, en la cual se trata de un estudio realizado en otra cultura y hace muchos años; a continuación se mencionan algunos datos:<sup>6</sup>

A los 4 años. Sus conceptos espaciales, como tantos otros, están relativamente poco diferenciados, aprende a distinguir su mano derecha y la izquierda, y aunque ya usa cada una para determinadas acciones, no puede diferenciarlas en otra persona.

Le gusta recorrer una y otra vez el barrio donde vive. Conoce los nombres de ciertas calles de la vecindad y la ubicación de algunos puntos de interés como la dulcería, el cine, o la casa de sus amigos. Puede incluso tener tanta conciencia de las relaciones espaciales que teme perderse si no va por un camino específico conocido.

A los 5 años. Se preocupa fundamentalmente de lo que está aquí. El niño es focal, está interesado en el espacio que él ocupa en forma inmediata. Tiene escasa percepción de las relaciones geográficas, pero reconoce algunas señales específicas de lugares y le agrada dibujar caminos en mapas sencillos.

Puede cruzar las calles del barrio en el que vive y le gusta ir a cumplir encargos a la tienda próxima. Su interés por lugares más distantes depende de sus asociaciones personales con esos lugares.

A los 6 años. Gesell menciona que a esta edad el espacio sufre un definido proceso de expansión con respecto al año anterior. Ahora el niño quiere saber no sólo de lugares específicos, sino las relaciones entre la casa, la vecindad y la comunidad, incluyendo la escuela. Es muy probable, aunque no hay estudios realizados con niños mexicanos actuales, que este último punto se dé en años previos, precisamente cuando el pequeño comienza a ir al colegio e incluso antes, si el niño asiste a una guardería, es entonces cuando este proceso expansivo y

---

<sup>5</sup> GESELL Arnold, FRANCES L. Ilg y Louise Bates Ames: "el niño de cinco a diez años". 3 era. Edición, Argentina, Editorial Paidós, 1977. (Citado EL 2 de Abril de 2012) Disponible en: <http://es.scribd.com/doc/49886991/desarrollo-espacio-tiempo>.

<sup>6</sup> MARTÌNEZ ZANANDONA. Irene. "concepto de espacio de los niños". (Citado el 14 de Marzo de 2012). Disponible en: [http://www.sepiensa.org.mx/sepiensa2009/padres/familia/crecimiento/f\\_espacionino/espninos1.html](http://www.sepiensa.org.mx/sepiensa2009/padres/familia/crecimiento/f_espacionino/espninos1.html)

relacional, que menciona Gesell, se dé al tener necesidad de reconocer y ubicarse en varios espacios.

A los 7 años. Piensa en el espacio como elemento que le brinda su lugar en el mundo. Incluso niños que reciben educación religiosa creen que Dios tiene su lugar en el cielo. En esta edad le intrigan los objetos en el espacio sideral, la corteza terrestre, las piedras, las cascadas y el mar. Le interesa también el uso de algunos elementos, el petróleo de la Tierra, la energía del agua y el calor del fuego<sup>7</sup>.

Muestra mayor comprensión de los puntos cardinales. Aunque aún no distingue derecha de izquierda, excepto en relación con su propio cuerpo. No le interesan todavía los lugares distantes de la Tierra a menos que haya tenido oportunidad de viajar u oír acerca de parientes y amigos que viven en otras ciudades; pero su afán por conocer las diversas partes de su comunidad se halla en aumento.

A los 8 años. El espacio personal donde él se ubica se expande. Puede regresar en autobús desde un punto distante si alguien lo recibe al llegar a su destino. En sus caminatas, recorre una zona tan extensa de la vecindad que puede resultar difícil ubicarlo. Comienza a conocer tan a fondo su barrio, que se interesa por nuevos caminos, especialmente los atajos y puede extraviarse en este proceso de descubrimiento propuesto por Hall, Edward t.<sup>8</sup>

Empieza a sentir impaciencia por viajar a ciudades nuevas, por visitar museos, zoológicos y lugares de interés. Su mundo espacial se expande aún más debido a su interés por la geografía. Dibuja mapas con gran dedicación.

Así mismo para Piaget, adquirir la noción espacial está intrínsecamente ligado a la adquisición del conocimiento de los objetos y a través del desplazamiento de éstos que el niño de meses empieza a desarrollarlo. El objeto está aquí y luego ahí, se mueve y cambia, se aleja al igual que la mano que lo sostiene y ambos le muestran distancias, acomodos, desplazamientos y rotaciones, mientras desarrolla sus actividades de juego.

---

<sup>7</sup> PIAJET Jean “Teoría y práctica psicomotora de la orientación y localización espacial”. (Consultado el 4 DE Junio de 2012). Disponible en: <http://www.efdeportes.com/efd59/espac.htm>.

<sup>8</sup> HALL, Edward t., La dimensión oculta, México, Siglo XXI Editores, 1986. (Consultado el 10 de Mayo de 2012). Disponible en: [http://www.sepiensa.org.mx/sepiensa2009/padres/familia/crecimiento/f\\_espacionino/espninos2.html](http://www.sepiensa.org.mx/sepiensa2009/padres/familia/crecimiento/f_espacionino/espninos2.html)

En la teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial, de Esperanza Osaidita Alderete<sup>9</sup>, se expone las consideraciones generales del “libro las representaciones del espacio en el niño” de Piaget e Inhelder, el cual se ocupa de conocer cómo surgen en el desarrollo ontogénico las relaciones espaciales, topológicas, proyectivas y euclidianas.

La autora resalta tres aspectos fundamentales de la teoría de Piaget del conocimiento espacial:

1. En el marco teórico piagetiano el conocimiento no viene dado “a priori” surgiendo de la mera percepción, sino, que ha de irse elaborando poco a poco, jugando un papel decisivo en la actividad del sujeto. El conocimiento del espacio proviene del principio de la actividad sensorio motriz, y, posteriormente a un nivel representativo, la actividad real o imaginada, irá flexibilizando, coordinando y haciendo reversible las imágenes espaciales para convertirlas en operaciones.

2. Se establecen tres tipos de relaciones espaciales, topológicas, proyectivas y euclidianas. Las propiedades topológicas tienen en cuenta el espacio dentro de un objeto o figura particular, y comprenden relaciones de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad. Por el contrario los espacios proyectivo y euclidianos, consideran los objetos y sus representaciones, teniendo en cuenta a las relaciones ente esos objetos de acuerdo con sistemas proyectivos, (espacio proyectivo) o de acuerdo con ejes de coordenadas (espacio euclidiano y métrico) el desarrollo ontogénico de estas relaciones sigue un orden inverso al desarrollo epistemológico, ya que el niño primero desarrollo espacio topológico, tanto en el nivel de la acción, como en el nivel de la representación, las relaciones proyectivas y Euclidianas, se desarrollan paralelamente, aunque el equilibrio de la segunda se consiguen mas tarde.

Como en el resto de los aspectos del desarrollo intelectual, también en los referentes al conocimiento espacial nos encontramos con tres grandes periodos o estadios: periodo sensoriomotor, periodo de las operaciones concretas (que se subdivide, a su vez, en un subperiodo preoperativo y otro de operaciones concretas propiamente dichas), y periodos de las operaciones formales.

#### I. Estadio sensorio-motor

Desde el nacimiento hasta aproximadamente un año y medio a dos años. En tal estadio el niño usa sus sentidos (que están en pleno desarrollo) y las habilidades motrices para conocer aquello que le circunda, confiándose inicialmente en sus reflejos y, más adelante, en la combinatoria de sus capacidades sensoriales y motrices. Así, se prepara para luego poder pensar con imágenes y conceptos.

---

<sup>9</sup> OSAIDITA ALDERETE. Esperanza “Estudios de Psicología”, ISSN 0210-9395, Nº 14-15, 1983, págs. 93-108. (Citado el 25 de Julio de 2012). Sacado de: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=65886>

## II. Estadio preoperatorio

El estadio preoperatorio es el segundo de los cuatro estados. Sigue al estado sensorio motor y tiene lugar aproximadamente entre los 2 y los 7 años de edad.

Este estadio se caracteriza por la interiorización de las reacciones de la etapa anterior dando lugar a acciones mentales que aún no son categorizables como operaciones por su vaguedad, inadecuación y/o falta de reversibilidad.

Son procesos característicos de esta etapa: el juego simbólico, la centración, la intuición, el egocentrismo, la yuxtaposición y la irreversibilidad (inhabilidad para la conservación de propiedades).

**3.1.3. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje.** Una de las variables que se debe tener en cuenta en el proceso de adquisición del dominio de las relaciones con el espacio es la dimensión física del ámbito con el que el sujeto entra en relación. Las investigaciones psicológicas muestran que el niño va estructurando sectores más amplios del espacio a medida que incrementa la magnitud de sus propios desplazamientos. Brousseau distingue tres valores de la variable “tamaño del espacio” con el que interactúa el sujeto. Estos valores implican modos diferentes de relaciones con los objetos incluidos en ese sector del espacio y, en consecuencia modelos conceptuales diferentes para orientar la acción del sujeto. Esta variable interesa segmentarla en tres valores expuestos por Gálvez G<sup>10</sup>: micro-espacio, meso-espacio y macro-espacio, cuyas características describimos a continuación:

**3.1.3.1. El micro-espacio.** Corresponde a un sector del espacio próximo al sujeto y que contiene objetos accesibles tanto a la visión, como a la manipulación. En este sector el sujeto puede mover el objeto o bien moverse a sí mismo prácticamente en cualquier dirección. El juego de desplazamientos de sujeto y objeto, permite restablecer cualquier perspectiva, mediante inversiones o compensaciones de las transformaciones anteriores. Puesto que todas las posiciones relativas entre sujeto y objeto son igualmente posibles y fáciles de obtener la percepción del objeto puede ser caracterizada como exhaustiva. Por otra parte, el sujeto obtiene una información abundante e inmediata de los resultados de las acciones que ejerce sobre el objeto. El sujeto controla plenamente sus relaciones espaciales con el objeto, debido a la abundancia de recursos de transformación con que cuenta.

---

<sup>10</sup> Gálvez, G. (1985) El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela. Tesis Doctoral. Centro de Investigación del IPN. México. (p.49). (Citado el 19 de Septiembre de 2012)

En el micro-espacio el dominio de las relaciones con el objeto se adquiere a través de un proceso largo y difícil, pero bastante temprano (según los trabajos de Piaget<sup>11</sup>). Este proceso se realiza “espontáneamente”, en el sentido de que no requiere de intervención intencional (institucional) para producirse, aunque sí oportunidades para ejercitar las manipulaciones de que el sujeto va siendo capaz. Posteriormente, el trabajo escolar impone cierta reestructuración del micro-espacio al introducir dos direcciones ortogonales para orientar el papel (y otros materiales) sobre el pupitre.

**3.1.3.2. El meso-espacio.** Es una parte del espacio accesible a una visión global, obtenida a partir de percepciones sucesivas, pero con desfases temporales mínimos. Contiene objetos fijos, no manipulables. Como un ejemplo de meso-espacio, podemos citar el espacio que contiene a un edificio, que puede ser recorrido por el sujeto tanto interior como exteriormente.

En este sector del espacio, puesto que los objetos permanecen fijos, funcionan como puntos de referencia para el sujeto (en nuestro ejemplo, los muebles, puertas, paredes), mientras que el sujeto sí puede desplazarse, pero con restricciones, derivadas de dos condiciones:

1. La posición erecta del sujeto, que genera una experiencia diferencial respecto a las direcciones horizontal y vertical. Estas constituyen las direcciones básicas para la organización del meso-espacio.
2. La necesidad de acomodar los desplazamientos en función de la localización de los objetos. Resultan de aquí trayectos obligados, como los determinados por corredores o escaleras, que implican la diferenciación de espacios vacíos y llenos.

Podemos decir que el meso-espacio es el espacio de los desplazamientos del sujeto. La experiencia está aquí restringida a los puntos de vista obtenibles a través de los desplazamientos posibles del sujeto, manteniendo su postura erecta. Esto no significa que sea imposible para el sujeto adoptar otras perspectivas, sino que, en la medida en que éstas no son usuales, no contribuyen significativamente a la estructura del meso-espacio.

Para organizar sus desplazamientos dentro del meso-espacio el sujeto necesita orientarlo, atribuyéndole tres dimensiones respecto a un sistema de referencia fijo. También le ha atribuido extensión, con lo que las distancias entre objetos pasan a tomar una relevancia de la que carece el micro-espacio. Los ángulos son muy

---

<sup>11</sup> BROITMAN, C, (2000) Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio En Educación matemática, 0 a 5 La Educación en los primeros años N° 22. Ediciones Novedades Educativas, Bs. Aires

importantes, puesto que están a la base de cambios de perspectiva muy económicos, que corresponden a giros del sujeto mientras conserva su posición (giros que incluso puede efectuar moviendo solamente su cabeza)

**3.1.3.3. El macro-espacio.** Corresponde a un sector del espacio cuya dimensión es tal que sólo puede abarcarse a través de una sucesión de visiones locales, separadas entre sí por desplazamientos del sujeto sobre la superficie terrestre. En el macro-espacio es imposible obtener una visión global simultánea del sector del espacio con el que se interactúa, a menos que el sujeto se eleve en el aire, experiencia a la que raras veces se recurre para estructurar el espacio terrestre a nivel de experiencia cotidiana.

Al igual que en el meso-espacio, en el macro-espacio los objetos permanecen fijos, es el sujeto el que se desplaza. Para orientar sus desplazamientos debe construir una representación global del macro-espacio, ligando sus visiones parciales para recuperar la continuidad del espacio recorrido. La conceptualización es imprescindible para la construcción de una imagen de conjunto, inaccesible a la percepción directa.

Podemos distinguir tres tipos de macro-espacio: el urbano, el rural y el marítimo. En el macro-espacio urbano y rural, existen múltiples objetos que pueden ser utilizados por el sujeto como puntos de referencia para estructurar su representación. La posibilidad de utilizarlos dependerá tanto de las características específicas del sector considerado como de la experiencia previa del sujeto. Aunque, en general, el macro-espacio urbano suele ser más pródigo en objetos que pueden funcionar como signos para la diferenciación precisa de sus partes (por ejemplo, la información escrita contenida en nombres de calles y comercios, en letreros de propaganda, etc.). A diferencia de lo que ocurre en los otros dos, en el macro-espacio marítimo, particularmente en la navegación en alta mar, no es posible recurrir a una sucesión de encuentros con determinados objetos para replicar un trayecto.

**3.1.3. Desarrollo histórico del modelo de van hiele para la enseñanza de la geometría.** La Teoría de Niveles de Van Hiele, fue desarrollada por Pierre María Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en disertaciones doctorales separadas en la Universidad de Utrecht en Holanda en 1957. Usiskin<sup>12</sup> relata el desarrollo histórico de esta teoría, donde indica que Dina, murió poco después que su disertación fue terminada, por lo cual fue Pierre el que ha

---

<sup>12</sup> USISKIN, Z (1991). Apuntes para la enseñanza. El Modelo de enseñanza-aprendizaje de Van Hiele. Signos, Teorías y Practicas. Volumen 4. Disponible en [http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act\\_permanentes/mate/mate5f.htm](http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate5f.htm). Consultado el 18-09-2003

explicado el trabajo. Entre los años 1958 y 1959, éste escribió tres ensayos, que recibieron poca atención en Occidente, pero fueron aplicados en el desarrollo de currículos por la academia soviética Pyshkalo desde 1968. Freudenthal, el mentor de Van Hiele, publicó la teoría en su muy conocido libro *La matemática como una labor educacional* en 1973. A través de Freudenthal y los soviéticos, el trabajo de Van Hiele llamó la atención de Wirszup, quien fue el primero en hablar de la Teoría de Van Hiele en Occidente en el año 1974. Posteriormente, los ensayos de Wirszup, generaron interés y auge con los trabajos de Hoffer, Burger, Geddes y Senk.

**3.1.4. Bases psicológicas del modelo de van hiele.** El trabajo de Dina consiste en el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza, y Pierre Van Hiele incorpora a la teoría, las interacciones que ocurren en un salón de clases.

Los Van Hiele<sup>13</sup> se interesaron en la enseñanza real de las matemáticas y no proporcionaron ningún relato psicológico detallado de la enseñanza de las matemáticas, sin embargo sus propuestas tienen arraigadas bases psicológicas. Por ejemplo, la cognición para Pierre procede, recursivamente de la construcción de una percepción global, hasta la formación de una estructura mental, su progresiva diferenciación y con su reestructuración final a una nueva estructura mental. Para los Van Hiele, así como para la psicología Gestalt, no existen objetos aislados ni conceptos “per se”, al contrario, todas las entidades existen en un contexto, una estructura en términos de Pierre Van Hiele. En este punto, Pierre no proporciona una definición de estructuras, en cambio explica algunas de sus características, describe tipos de estructuras y da algunos ejemplos.

La formación de las estructuras mentales demanda cambios rápidos entre momentos receptivos y activos. Los momentos receptivos permiten la absorción de las estructuras espontáneas que emanan de los materiales. Durante los momentos activos el individuo se concentra en el análisis y modificación de estas estructuras.

**3.1.5. El aprendizaje y las estructuras mentales según van hiele.** El aprendizaje, para los Van Hiele, citados por Shaughnessy y Burger<sup>14</sup>, es una diferenciación y reestructuración progresiva de campos que produce estructuras mentales nuevas y más complejas. Los niveles altos son alcanzados si

---

<sup>13</sup> VAN HIELE, P. M. (1987). Un método para facilitar el descubrimiento de niveles de pensamiento en Geometría por la práctica de Niveles en Aritmética. Conferencia sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría: Procederes para Investigación y Práctica. Universidad de Syracuse. Mimeo.

<sup>14</sup> SHAUGHNESSY, J. M. y BURGER, W. F. (1985). Spadework Prior to Deduction in Geometry. *Mathematics Teacher*. p.p 419-427. (Citado el 18 de Nov. De 2012)



las reglas que rigen a las estructuras más bajas se han hecho explícitas y han sido estudiados, llevando esto, al desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas.

El desarrollo mental se produce a medida que el estudiante transforma gradualmente sus estructuras (transtructuración) o sustituye una estructura por otra (reestructuración). La transtructuración ocurre, por ejemplo, cuando las estructuras visuales originales son transformadas gradualmente en estructuras abstractas. Momentos en los cuales una reestructuración ocurre son: (a) una reestructuración del campo de observación que lleva a la integración de varias estructuras que han sido desarrolladas independientemente y (b) la solución de un problema que exige varias estructuras.

Por otro lado, la intuición es para Pierre Van Hiele, un mecanismo clave que permite a los estudiantes visualizar campos diferentes (estructuras en su terminología) los cuales permiten construir conceptos más complejos. Él utiliza la idea Gestalt de que la intuición puede ser entendida como el resultado de la percepción de una estructura y sugiere que está caracterizada por las siguientes propiedades:

1. La intuición requiere adecuación, ya sea a una nueva situación o dentro de una estructura establecida. Esta adecuación demanda un mecanismo social que establezca criterios de objetividad.
2. La intuición requiere intención, es decir, la persona actuará en concordancia con la estructura percibida y no de otra manera
3. La intuición no puede ser planeada.

El cultivo de la intuición debe enfocarse en el desarrollo de la habilidad de los estudiantes para ver las estructuras como parte de otras estructuras superiores, o como parte de estructuras más inclusivas.

Como se puede percibir en los párrafos anteriores, Van Hiele sugiere que el aprendizaje es un proceso que recursivamente progresa a través de niveles discontinuos de pensamiento (saltos en la curva de aprendizaje), que puede ser mejorado por un procedimiento didáctico adecuado. Parte del hecho de que existen varios niveles de aprendizaje geométrico y que el paso de un nivel al siguiente debe ocurrir a través de una secuencia de estados de instrucción.

**3.1.6 los niveles de van hiele.** Según este modelo, el razonamiento geométrico se desarrolla en una secuencia de niveles, en la que cada nivel es un refinamiento del anterior y está caracterizado por un lenguaje particular, por unos símbolos y unos métodos de inferencia específicos. Debido a las particularidades de cada nivel, la instrucción es más efectiva si está cuidadosamente dirigida a cada uno.

Los niveles de razonamiento describen los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que va desde el razonamiento intuitivo de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las Facultades de Ciencias. De acuerdo con el modelo de van Hiele si el aprendiz es guiado por experiencias instruccionales adecuadas, avanza a través de los cinco niveles de razonamiento, empezando con el reconocimiento de figuras como todos (nivel 1), progresando hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras y hacia el razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3), y culminando con un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 4 y 5). Los niveles se clasifican, según Gutiérrez y Jaime<sup>15</sup>, como sigue:

- 1 Nivel 1 (de Reconocimiento Visual o Visualización). Las figuras son juzgadas por su apariencia.
2. Nivel 2 (de Análisis o Descripción). Las figuras son mensajeros de sus propiedades.
3. Nivel 3 (de Clasificación y Relación o Teórico). Las propiedades son ordenadas lógicamente.
4. Nivel 4 (de Deducción Formal o Lógica Formal). La Geometría es entendida como un sistema axiomático.
5. Nivel 5 (de Rigor). La naturaleza de la lógica formal, en la cual los sistemas axiomáticos son estudiados.

Como se indicó al comienzo, las raíces de este modelo están presentes en los trabajos de Piaget, aunque con diferencias relevantes según Graterol y Andonegui<sup>16</sup> aún cuando en ambos casos se admite la existencia de varios niveles de pensamiento. En este sentido, tenemos:

1. Piaget piensa que el paso de un nivel de pensamiento a otro es función del desarrollo; Van Hiele, del aprendizaje; la preocupación de éste estriba en cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente.
2. Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de Van Hiele sólo se

---

<sup>15</sup> GUTIÉRREZ, A. y A Jaime, "Educación Matemática en Secundaria".  
Barcelona: Editorial Síntesis.

<sup>16</sup> GRATEROL, E. y ANDONEGUI, M (2003). Incidencia de un software educativo en la evolución del razonamiento geométrico de estudiantes de educación superior. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 16, tomo 1.

alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura.

3. Piaget no da importancia al lenguaje en el paso de un nivel al otro. En Van Hiele, cada nivel desarrolla su propio lenguaje característico.

En relación a esto, es importante subrayar que el progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel, y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes. Para que los estudiantes se desempeñen adecuadamente en uno de los niveles avanzados deben haber dominado los niveles previos. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada nivel lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

A continuación se presenta una descripción resumida de las principales características de los cinco niveles de razonamiento, citado por Gutiérrez y Jaime,

**3.1.6.1. Nivel 1 (Reconocimiento).** Aquí los conceptos geométricos son considerados como entes globales más que como entes con componentes y atributos. Las figuras geométricas se reconocen por su forma, por su apariencia física y no por sus partes y propiedades. El alumno aprende algo de vocabulario, identifica diferentes figuras y reproduce una figura dada. Por ejemplo, un estudiante reconocerá el dibujo de un rectángulo pero quizás no sea consciente de muchas propiedades de los rectángulos.

**3.1.6.2. Nivel 2 (Análisis).** En este nivel comienzan a analizarse los conceptos geométricos, aparecen propiedades que permiten conceptualizar los tipos de figuras. Se reconoce que las figuras geométricas tienen partes o elementos, e incluso las figuras pueden ser reconocidas por sus partes, aunque no identifican las relaciones entre ellas. Por ejemplo, el estudiante identifica un rectángulo como un polígono dotado de un número de propiedades matemáticas: tiene 4 lados paralelos dos a dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales, etc. Pero no se da cuenta que algunas propiedades están relacionadas con otras. El razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de la observación de unos pocos casos; así, si les pide la demostración de la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ , los estudiantes de este nivel se limitarán a dibujar uno o dos triángulos y a medir sus ángulos. La deducción de las propiedades se hace mediante la experimentación. Se generalizan dichas propiedades a todas las figuras de una misma familia.

**3.1.6.3. Nivel 3 (Clasificación).** En este nivel se realizan clasificaciones lógicas de los objetos y se descubren nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal; por ejemplo, el estudiante en este nivel clasifica los cuadriláteros a partir de sus propiedades y

reconoce que cualquier cuadrado es un rectángulo pero que no todos los rectángulos son cuadrados. El alumno entiende y puede reproducir una demostración formal, no compleja, cuando se le va explicando paso a paso, pues sólo necesita la implicación directa entre una situación y otra. Sin embargo, no comprende en su totalidad el significado de la deducción de las demostraciones o el papel de los axiomas.

**3.1.6.4. Nivel 4 (Deducción Formal).** En este nivel se comprende ahora la relación existente entre términos indefinidos, axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones, así como el papel que desempeñan dentro de la geometría. Aquí el estudiante tiene capacidad para realizar razonamientos lógicos formales, construye sin tener que memorizar las demostraciones, desarrolla demostraciones de más de una forma, entiende la interacción de las condiciones necesarias y suficientes. Asimismo puede comprender la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas.

**3.1.6.5. Nivel 5 (Rigor).** En este último estadio, el alumno puede trabajar en distintos sistemas axiomáticos; pueden ser estudiadas las geometrías no Euclídeas y se pueden comparar los diferentes sistemas. La Geometría se estudia desde un punto de vista totalmente abstracto.

**3.1.7 descriptores característicos de los niveles de van hiele.** Considerando todo lo expuesto en líneas precedentes, el proceso de determinación de la ubicación de un alumno en un determinado nivel del Modelo de Van Hiele, como lo establece Pérez<sup>17</sup>, debe centrarse en indagar la presencia de los descriptores característicos de dichos niveles que son:

Los descriptores característicos para cada nivel son:

Nivel 1 (Visualización). En este nivel los alumnos: Manejan objetos reales observados globalmente y como unidades.

Identifican figuras o relaciones geométricas en: dibujos, en conjuntos determinados, con orientaciones variadas y en objetos físicos que rodean al alumno.

Describen figuras geométricas por su aspecto físico.

Diferencian o clasifican en base a semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos.

Crean formas: usando papel cuadriculado, papel isométrico, geoplanos, etc., construyendo figuras con fósforos, palillos, plastilina, etc.

---

<sup>17</sup> PÉREZ, J. (2003). Análisis de los contenidos geométricos de los libros de texto de matemática de educación básica a la luz de los planteamientos teóricos del modelo de van Hiele. Tesis de Maestría. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. (Citado el 14 de Octubre de 2012)

Utilizan vocabulario geométrico para hablar de las figuras o describirlas, acompañado de otros términos de uso común que sustituyen los geométricos.

Trabajan con problemas que pueden ser resueltos manipulativamente. Realizan actividades de manipular, colorear, doblar, cortar y modelar figuras.

Nivel 2 (Análisis). En este nivel los alumnos:

Identifican y comprueban relaciones entre elementos de una figura. Recuerdan y usan vocabulario apropiado para los elementos y sus relaciones. Comparan dos figuras de acuerdo a las relaciones entre sus componentes. Clasifican figuras de acuerdo a ciertas propiedades, incluyendo una clasificación de todas las cosas de una clase y de las que no están en ella. Identifican y dibujan figuras dando indicaciones de sus propiedades.

Descubren propiedades de figuras específicas, empíricamente y generalizan propiedades para esa clase de figura.

Describen una clase de figuras en términos de sus propiedades.

Resuelven problemas geométricos por el conocimiento y uso de propiedades de figuras o por intuición.

Formulan y usan generalizaciones acerca de propiedades de figuras mediante comprobaciones en uno o pocos casos.

Nivel 3 (Deducción Informal). En este nivel los alumnos:

Relacionan propiedades de una figura entre sí o con otras figuras. Establecen un mínimo número de propiedades para describir una figura. Desarrollan y usan definiciones para explicar el porqué de una clase de figura. Utilizan diagramas que permiten hacerse una idea del razonamiento.

Siguen razonamientos geométricos buscando en ellos algunos pasos que falten.

Descubren nuevas propiedades usando razonamientos deductivos.

Usan el dibujo y cierta información para justificar conclusiones con relaciones lógicas. (Dar argumentos informales).

Suministran situaciones para dar más de una explicación o aproximación.

Trabajan y discuten situaciones que presenten proposiciones y sus inversas.

Nivel 4 (Deducción Formal). En este nivel los alumnos:

Establecen la necesidad de los términos indefinidos, definiciones y suposiciones básicas.

Reconocen características de una definición formal (condición necesaria y suficiente) y equivalencias de definiciones.

Prueban en una axiomática el marco de relaciones que se trataron informalmente en el nivel.

Prueban relaciones entre un teorema y proposiciones relacionadas (recíproco, inverso y contraejemplo).

Establecen interrelaciones entre una red de teoremas.

Comparan y contrastan diferentes demostraciones de teoremas.

Crean demostraciones de un sencillo conjunto de axiomas, usando frecuentemente un modelo para sustentar los argumentos.

Dan argumentos deductivos formales pero no investigan los axiomas entre ellos mismos ni comparan sistemas axiomáticos.

Nivel 5 (Rigor). En este último nivel los alumnos: Trabajan en distintos sistemas axiomáticos.

Estudian las geometrías no Euclídeas y pueden comparar los diferentes sistemas.

Desarrollan la Geometría desde un punto de vista totalmente abstracto.

**3.1.8. Fases de aprendizaje del modelo de van hiele.** Van Hiele sostiene, según Usiskin<sup>18</sup>, que su teoría tiene una propiedad que establece, que la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; se da bajo la influencia de un programa de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las Fases de Aprendizaje es favorecer el desplazamiento del alumno(a) de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Estos dos elementos, la teoría y el método, ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países.

La organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje del método de fases de aprendizaje, comprende una secuencia precisa de cinco fases o estados de aprendizaje, resumidos como sigue.

**3.1.8.1. Fase Primera: Información.** Su finalidad es la de obtención de información recíproca profesor-alumno. El propósito de la actividad a realizar es doble, que el profesor conozca los conocimientos que los alumnos poseen del tópico a tratar y que los alumnos sepan qué dirección se dará al estudio a realizar, los tipos de problemas que se vayan a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

**3.1.8.2 Fase Segunda: Orientación Dirigida.** Los alumnos exploran el tópico a estudiar empleando los materiales que el profesor secuencía cuidadosamente. Van Hiele (1986) señala esta fase como fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente y si las actividades se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento del nivel superior. El propósito es guiar a los

---

<sup>18</sup> USISKIN, Z (1991). Apuntes para la enseñanza. El Modelo de enseñanza-aprendizaje de Van Hiele. Signos, Teorías y Practicas . Volumen 4. Disponible en [http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act\\_permanentes/mate/mate5f.htm](http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate5f.htm). Consultado el 18-09-2003

estudiantes a través de la diferenciación de nuevas estructuras basadas en aquellas observadas en la primera fase.

**3.1.8.3. Fase Tercera: Explicitación.** Su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente y que consoliden el vocabulario propio del nivel. En esta fase es fundamental el diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario. Este debate entre compañeros enriquecerá notablemente el conocimiento de cada estudiante, pues los obliga a organizar sus ideas y expresarlas con rigor, pone de relieve los métodos y resultados incorrectos y afianza los correctos. El profesor es ahora cuando introduce todo el lenguaje técnico. Van Hiele condiciona el entendimiento real al éxito de esta fase.

**3.1.8.4. Fase Cuarta: Orientación Libre.** En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores, y generalmente, más complejos. Las actividades deben permitir resolver situaciones nuevas con los conocimientos que adquirieron previamente. No deben orientarse a la consecución de ningún objetivo básico de ese nivel, puesto que éstos ya se deben haber obtenido en la segunda fase. Son adecuadas situaciones abiertas, en las que el estudiante pueda explorar diversas posibilidades pero siempre utilizando lo que aprendió anteriormente.

**3.1.8.5. Fase Quinta: Integración.** Los estudiantes revisan y resumen en esta fase lo que han aprendido, con el objetivo de formarse una visión general del nuevo conjunto de objetos y relaciones construidas. El profesor puede ayudar a realizar esta síntesis, pero sin introducir nada nuevo.

Resumiendo las características fundamentales de cada fase tenemos: en la primera se pone a discusión del alumno (a) material clarificador del contexto de trabajo. En la segunda fase se proporciona material por medio del cual el alumno/a aprenda las principales nociones del campo de conocimiento que se está explorando. El material y las nociones a trabajar, se seleccionarán en función del nivel de razonamiento de los alumnos (as). En la tercera fase conduciendo las discusiones de clase, se buscará que el alumno/a se apropie del lenguaje geométrico pertinente. En la cuarta fase se proporcionará al alumno/a materiales con varias posibilidades de uso y el profesor/a dará instrucciones que permitan diversas formas de actuación por parte de los alumnos (as). En la quinta fase se invitará a los alumnos (as) a reflexionar sobre sus propias acciones en las fases anteriores. Como resultado de esta quinta fase, los autores entienden que el alumno/a accede a un nuevo nivel de razonamiento. El estudiante adopta una nueva red de relaciones que conecta con la totalidad del dominio explorado. Este nuevo nivel de pensamiento ha sustituido al dominio de pensamiento anterior.

Cómo lo establece Braga<sup>19</sup>, de la revisión de los trabajos realizados a nivel internacional sobre el modelo de Van Hiele, se puede deducir también un conjunto de principios de procedimiento, entendidos éstos como "normas dirigidas al profesor indicándole actitudes en su trabajo", estas se resumen así:

1. El profesor(a) partirá del hecho de que los estudiantes poseen un almacén significativo de concepciones y propiedades de los objetos materiales.
2. El profesor(a) procurará, a partir de la experiencia previa de los alumnos(as) (es decir, de la observación de figuras concretas), que formen estructuras geométricas, y pondrá en relación estas observaciones con una forma "geométrica" de verlas.
3. El profesor(a) diseñará actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula teniendo en cuenta el nivel lingüístico y de razonamiento de los alumnos(as).
4. El profesor(a) procurará conocer de qué forma es estructurado el espacio espontáneamente por los alumnos/as, para, partiendo de esa percepción, diseñar actividades que permitan al estudiante construir estructuras visuales geométricas y por último razonamiento abstracto. Para ello el profesor/a modificará progresivamente el contexto en el que aparecen los objetos en una dirección matemática alejándose del empirismo.
5. El profesor(a) estará atento a la adquisición del "insight" por parte de los alumnos(as), para lo cual es necesario que el diálogo sea la pieza clave de la enseñanza. El profesor(a) animará a los alumnos/as a hablar acerca de los conceptos geométricos y a desarrollar un lenguaje expresivo, respetando en un primer momento sus propias expresiones y lenguaje, para ir introduciendo progresivamente el lenguaje geométrico.
6. El profesor(a) procurará conocer el correlato mental de las palabras y conceptos que utilizan los alumnos/as y que él necesita, por medio de actividades diseñadas a tal fin y por medio del uso continuo del diálogo en el aula.
7. El profesor(a) diseñará actividades de clarificación y complementación de dicho correlato mental que permitan que éste coincida con el significado de la palabra en la disciplina.
8. El profesor(a) fomentará el trabajo consciente e intencional de los alumnos/as con la ayuda de materiales manejables. El material ha de poseer el fundamento del desarrollo lógico de la geometría y ha de ser auto correctivo.

---

<sup>19</sup> BRAGA, M (1991). Signos, Teorías y Prácticas de la educación. Número 4, páginas 52 - 57. Julio - Diciembre de 1991.



9. El profesor(a) permitirá a los alumnos/as trabajar con material concreto sólo cuando sea necesario para construir la teoría. El periodo de acumulación de hechos de forma inductiva no debe ser prolongado demasiado. El alumno(a) debe y puede usar la deducción.

### 3.2. ESTADO DEL ARTE

Nombre del documento	Autor	Resumen
<p>Revista Colombiana de Educación, N.º 60. Primer semestre 201</p> <p>*El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría</p>	<p>Leonor Camargo Uribe</p>	<p>La columna del legado de Piaget, presenta una revisión que no pretende ser exhaustiva, de algunas de sus ideas y de cómo estas han sido germen de estudios posteriores relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Expone dos hipótesis centrales de los estudios de Piaget sobre el desarrollo de la concepción del espacio en los niños. Muestran el punto de vista de Piaget acerca de la competencia que tienen los niños en tareas de: discriminar figuras geométricas, representar figuras geométricas, construir sistemas de referencia bi o tridimensionales y justificar afirmaciones sobre hechos Geométricos. Al respecto de cada tarea, hacen referencia a estudios posteriores, la mayoría hechos en el contexto escolar, que confirman las ideas de Piaget o sugieren una revisión de las mismas.</p>
<p>Libro: Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele</p>	<p>Adela Jaime Pastor Ángel Gutiérrez Rodríguez</p>	<p>Este libro habla sobre la introducción a lo que es un modelo, en que consiste el modelo, la explicación de cada uno de los niveles de razonamiento propuestos por la teoría de Van Hiele y de igual manera muestra aquella relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento y el proceso de aprendizaje según este mismo modelo.</p>
<p>Artículo: Jean piaget y su influencia en la pedagogía</p>	<p>Por Lic. Cibeles Lorenzo Viego</p>	<p>Los temas a tratar y desarrollar en este apartado son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Concepciones teóricas de Jean Piaget sobre el desarrollo cognitivo</li> <li>- La teoría de Piaget y la educación.</li> <li>- Influencia de la teoría de Piaget sobre la Pedagogía.</li> </ul>

### 3.3. DE LAS PERCEPCIONES A LAS REPRESENTACIONES FIGURATIVAS

En uno de los experimentos, Piaget e Inhelder (1967) pedían a los niños palpar, con los ojos cerrados (percepción háptica), algunos sólidos geométricos y luego escoger, entre un conjunto de sólidos, aquel que fuera igual al que exploraban manualmente. Según estos investigadores, los niños diferenciaban los objetos inicialmente con base en propiedades que Piaget e Inhelder denominaban topológicas, tales como: cerradura, continuidad o conectividad. Después, podían diferenciar los objetos con base en propiedades de sus caras o lados, que los investigadores calificaban como proyectivas, como la rectilinealidad o curvilinealidad. Finalmente, la diferenciación se hacía teniendo en cuenta propiedades que denominaron euclideas, como el paralelismo o perpendicularidad de los lados y la congruencia de los lados o los ángulos<sup>20</sup>.

La hipótesis de la primacía topológica en la diferenciación de formas tenía que ver con la hipótesis constructivista, pues Piaget e Inhelder (1967) encontraron que el orden lógico de diferenciación dependía de un incremento sistemático de la coordinación de las acciones que realizaban. Como lo explican Clements y Battista (1992), Piaget e Inhelder (1967) afirmaban que en los primeros estadios del desarrollo los niños eran pasivos en sus exploraciones. Tocaban solo una parte del sólido y generaban una percepción táctil; después, tocaban otra parte y generaban una nueva percepción, no necesariamente ligada a la primera. Una vez lograban establecer relaciones entre ambas percepciones táctiles podían construir una primera representación del sólido. Esto se hacía evidente cuando los niños hacían movimientos repetitivos de manera sistemática y reproducían los movimientos desde el punto inicial en el que comenzaban a palpar el sólido. Por ejemplo, para identificar un lado recto, los niños movían la mano sin cambiar de dirección de manera repetida. Estas observaciones llevaron a Piaget a afirmar que la representación mental de una forma geométrica no era un asunto de retener en la memoria una figura que se observaba pasivamente, sino el resultado de acciones coordinadas. Este es un resultado vigente en didáctica, pues probablemente ningún investigador afirmaría lo contrario respecto a los primeros acercamientos de los estudiantes a la discriminación de sólidos geométricos.

Estudios posteriores a los realizados por Piaget e Inhelder (1967) corroboraron la hipótesis constructivista, pero la hipótesis de la supremacía topológica se puso en duda, ya que los resultados investigativos no son concluyentes. Por ejemplo, Lovell (1959; citado en Clements y Battista, 1992), a partir de una réplica de los experimentos de Piaget e Inhelder, reportó que, al contrario a lo que decían Piaget e Inhelder (1967), niños de preescolar, de dos o tres años, eran capaces de diferenciar caras curvilíneas de rectilíneas en algunos sólidos. En cambio, una réplica del experimento realizada por Laurendeau y Pinard (1970), también con estudiantes de

---

<sup>20</sup> Camargo, L. Revista Colombiana de Educación. Bogotá, Colombia. N.º 60. pág. 43

preescolar, mostró que sí era posible concluir una predisposición de los alumnos a diferenciar formas con propiedades topológicas primero que aquellas con propiedades euclideas.

Además de ponerse en duda la hipótesis de la primacía topológica, algunos investigadores cuestionaron el uso dado por Piaget e Inhelder a los términos topológico, proyectivo y euclideo en la discriminación de propiedades geométricas de sólidos y figuras planas. Por ejemplo, Martin (1976) y Darke (1982) sugirieron que el uso de dichos términos no era correcto de acuerdo a las Matemáticas. En ese sentido, los términos quizás estaban haciendo referencia a nociones psicológicas más que matemáticas y no se habían definido con suficiente claridad.

Por ejemplo, en uno de los experimentos llevados a cabo por Piaget e Inhelder (1967), en los que pedían a los niños señalar, entre un conjunto de figuras planas, la que más se pareciera a la forma geométrica que les pedían palpar con los ojos cerrados, los investigadores consideraban las figuras a, b y c como formas euclideas y d, e y f como formas topológicas (Figura 1). Como los niños reconocían más fácilmente el parecido que tenían las formas topológicas, Piaget e Inhelder corroboraban con ello la hipótesis de la primacía topológica. Pero Martin (1976) y Darke (1982) señalaron que no era posible hacer una clasificación exclusiva de las figuras usadas, pues algunas de ellas (como las figuras a y d) eran topológicamente equivalentes, desde el punto de vista matemático. En ese sentido, no era posible afirmar que los niños se basaban principalmente en las propiedades topológicas de las figuras en su diferenciación.

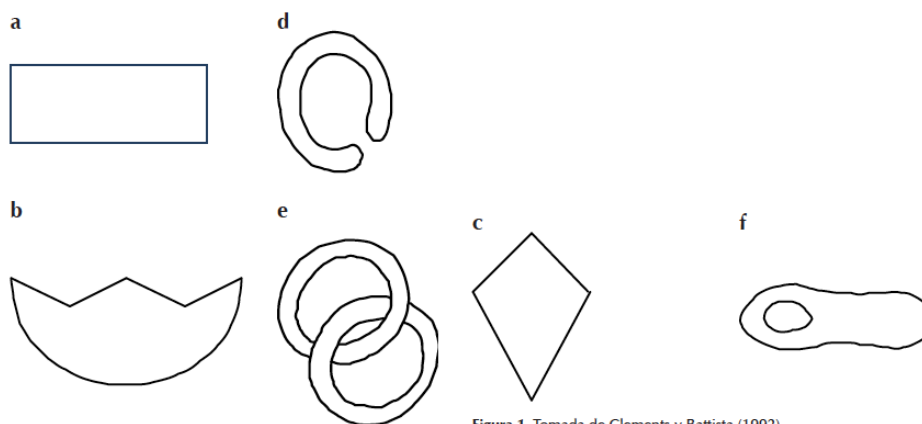


Figura 1. Tomada de Clements y Battista (1992)

Para tratar de aminorar el problema de la falta de claridad en la clasificación de las figuras usadas en los experimentos, algunos investigadores se dieron a la tarea de construir conjuntos de figuras geométricas planas estableciendo criterios específicos para determinar su equivalencia topológica o euclidea con relación a un modelo que se le pedía palpar a los estudiantes. Por ejemplo, Martin (1976) usó tres conjuntos diferentes de figuras: el primer conjunto incluyó figuras topológicamente equivalentes al

modelo, pero que no preservaban propiedades euclideas tales como la longitud de los lados o la abertura de los ángulos; en el segundo conjunto incluyó figuras equivalentes al modelo desde el punto de vista euclideo pero que no tenían la misma conectividad entre los lados; y en el tercer conjunto, incluyó figuras equivalentes al modelo desde el punto de vista euclideo pero que no preservaban la misma conectividad entre los lados ni la propiedad de clausura. Al usar el material en sus experimentos con estudiantes de preescolar y primaria, pidiendo a los niños señalar cuáles eran las mejores o peores copias del modelo, Martin (1976) concluyó que la hipótesis de la primacía topológica no se sostenía, pues estudiantes de cuatro años tendían a señalar las copias topológicamente equivalentes como las peores copias del modelo, además de sacrificar la equivalencia de propiedades topológicas en pro de las euclideas más frecuentemente que estudiantes de ocho años.

Otros investigadores se dieron a la tarea de establecer criterios para diferenciar el grado de distorsión de una figura topológicamente equivalente a un modelo, pues parecía ser que los estudiantes de preescolar, de cuatro años, podían reconocer como equivalentes formas muy parecidas al modelo pero no aquellas con grandes distorsiones. Por ejemplo, Geerslin y Shar (1979) construyeron modelos de figuras usando como vértices puntos de una hoja cuadriculada y establecieron el grado de distorsión topológica según el número de movimientos rígidos y dilataciones que se debían realizar mentalmente para superponer el modelo sobre la figura e identificar así la equivalencia. El uso de ese material confirmó que los niños reconocían más fácilmente como equivalentes al modelo aquellas figuras con menos distorsiones. Sin embargo, como lo señalan Clements y Battista (1992), la distorsión es un concepto métrico que envuelve la medida, lo cual no tiene que ver con propiedades topológicas. En ese sentido, la diferenciación de figuras geométricas parece ser un asunto que combina propiedades topológicas, proyectivas y euclideas, más que una evolución en el reconocimiento de cada tipo de propiedades.

La hipótesis de la supremacía topológica no se sostuvo, pero los intentos de confirmarla dieron lugar a la creación de diversos materiales que se han introducido en las clases de Geometría para enriquecer las experiencias de los estudiantes con las formas bi y tridimensionales.

Como lo señala Fisher (1965, citado en Clements y Battista, 1992), los intentos de demostrar la supremacía topológica condujeron a prestar atención a la identificación de una serie de propiedades de las figuras, tales como la existencia de esquinas y curvas, la simplicidad y la familiaridad de los estudiantes con ellas, que sirvieron de base para la creación de material educativo.

En otros experimentos llevados a cabo por Piaget en colaboración con Inhelder (1967) con el objetivo de confirmar sus hipótesis (constructivista y de supremacía topológica) les pedían a los niños dibujar figuras geométricas planas copiando un modelo que los investigadores les mostraban. Según

ellos, la inexactitud de los dibujos realizados por los niños –que simultáneamente mostraban habilidad motora para pintar casas con esquinas rectas y árboles con troncos rectilíneos-, era un reflejo de la falta de herramientas de pensamiento adecuadas para poder representar el espacio.

Piaget e Inhelder aseguraban que al dibujar, los niños privilegiaban primero las características topológicas, de la misma manera que en las tareas de discriminación. Por ejemplo, al pedirles dibujar un círculo, un cuadrado o un triángulo, los niños de tres años generalmente dibujaban una curva irregular en la que se notaba el esfuerzo por obtener una figura cerrada, pero sin tener en cuenta las características de los lados. Más adelante, hacia los cuatro años, era posible observar en los dibujos el esfuerzo por hacer una distinción entre cuadrados y rectángulos de otras figuras, centrando la atención en el paralelismo de los lados. Y posteriormente, hacia los seis o siete años, los dibujos reflejaban la atención que los niños prestaban a relaciones euclideas, tales como la abertura de los ángulos o la congruencia de los lados.

Estudios posteriores en donde se replicó el experimento de pedir a estudiantes de preescolar dibujar figuras con base en un modelo, no permitieron confirmar la hipótesis de la supremacía topológica. Por ejemplo, los estudios realizados por Martin (1976) mostraron que no siempre los niños pequeños privilegiaban las propiedades topológicas. Por el contrario, este autor sugiere que la posibilidad de dibujar figuras parecidas a modelos depende de un incremento en la coordinación de la atención puesta a las propiedades proyectivas y euclideas y que la conservación de estas conduce a preservar las propiedades topológicas.

A partir de los resultados de Martin (1976), Rosser, Lane y Mazzeo, (1988, citados en Clements y Battista, 1992) propusieron una secuencia de enseñanza para favorecer la coordinación de las propiedades euclideas y proyectivas en los niños de preescolar.

La secuencia implica pedirles:

- Reproducir figuras a partir de un modelo que siempre tienen a la vista.
- Reproducir figuras a partir de un modelo que se esconde.
- Reproducir una figura después de que esta es objeto de una transformación rígida o un cambio en la perspectiva visual<sup>21</sup>.

### **3.4. EL ORIGAMI**

Siendo el origami, la técnica a utilizar durante toda la investigación, se hace necesario profundizar acerca del tema. Para ello se realizará un acercamiento a su historia, su uso en la educación y sus beneficios y cualidades.

---

<sup>21</sup> Ibíd. p. 44

### 3.4.1. Historia del origami.

Haciendo alusión a lo mencionado por José Ignacio Royo Prieto<sup>22</sup>, los orígenes del origami o papiroflexia están situados en Japón, no obstante, su historia comienza a la par con la del papel en China en el siglo I, y no llega a Japón sino hasta el siglo VI, donde se usaba como pasatiempo exclusivo de las clases altas, puesto que solo ellos tenían acceso al papel por su alto costo, lo que lo constituía un artículo de lujo.

En un inicio, el origami era utilizado a manera de regalo por los guerreros Samurái, los cuales usaban el origami *Noshi* (trozos de papel doblados en abanicos). Hoy en día, este uso ha evolucionado hasta pasar de ser simples regalos, a ser “Certificados” mediante la técnica *Tsuki* la cual garantiza que una vez desdoblado el papel, no podrá volverse a plegar sin dejar nuevas cicatrices en el papel, de esta manera, podían crearse documentos garantizados como diplomas para ceremonias.

Ya en el año 1338 (Periodo Muromachi) el papel se tornó más accesible por lo tanto surgieron adornos basados en origami para revelar la clase social. Sin embargo, en el año 1603 (Periodo Tokugawa) se dio la “democratización” del origami dando paso al surgimiento de un gran bagaje cultural. Tan pronto como sucedió dicho hecho, surgieron la base *pájaro*, la misma usada por *la grulla*, que es la figura más popular en Japón.

A principios del siglo XX, el gran promotor del origami fue Miguel de Unamuno y Jugo, quién descubrió el origami en una exposición mientras visitaba Paris para la inauguración de la Torre Eiffel, y después creó su propia escuela de plegadores. El pionero de la papiroflexia moderna es Akira Yoshizawa, el japonés a quien debemos la simbología actual de las instrucciones de plegado de los modelos (Sistema Yoshizawa-Randlett, 1956). Esto ha constituido, sin lugar a duda, la aportación más importante a la papiroflexia desde la invención del papel, ya que ha permitido la difusión internacional de las distintas creaciones, al no importar el idioma en el que estén escritos los desarrollos.

### 3.4.2. Origami como técnica para la enseñanza de las matemáticas.

El origami es uno de los diversos lenguajes que permite un aprendizaje dinámico de la geometría, donde los conceptos aparecen y reaparecen integrando manipulación, teoría y arte, facilitando así la consolidación y estimulando mayores niveles de abstracción. Razonar correctamente, representar, abstraer, investigar, conjeturar y demostrar son actividades medulares del pensamiento matemático. Si

---

<sup>22</sup> Royo, J. Matemáticas y papiroflexia. Universidad del país de Vasco. SIGMA, No. 21, octubre de 2002.

bien la esencia de la papiroflexia desde este punto de vista, es descubrir elementos geométricos y sus relaciones, conjuga además arte y ciencia, creatividad y diversión, motricidad y perseverancia.

Ya que el origami es de gran ayuda en la educación, es pertinente mencionar algunos de los beneficios y cualidades de esta actividad.

- Da al profesor de geometría una herramienta pedagógica que le permita desarrollar diferentes contenidos no solo conceptuales, sino también procedimentales, también desarrolla habilidades motoras finas y gruesas que a su vez permitirá al alumno desarrollar otros aspectos, como lateralidad, percepción espacial y la psicomotricidad.
- Desarrollar la destreza manual y la exactitud en el desarrollo del trabajo , exactitud y precisión manual.
- Desarrolla la interdisciplinar de la matemática con otras ciencias como las artes por ejemplo.
- Motiva al estudiante a ser creativo ya que puede desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana sino también espacial.<sup>23</sup>

Además, tal como lo menciona Jesús Victoria Flórez Salazar, a través de la actividad con el papel y el doblado y manipulación de éste, los alumnos utilizan sus manos para seguir un conjunto específico de pasos en secuencia, produciendo un resultado visible que es al mismo tiempo llamativo y satisfactorio. Los pasos se deben llevar a cabo en cierto orden para lograr el resultado exitoso: una importante lección no sólo en geometría sino para la vida. Piaget sostenía que “ la actividad motora en la forma de movimientos coordinados es vital en el desarrollo del pensamiento intuitivo y en la representación mental del espacio.”<sup>24</sup>

El plegado de papel es un aprendizaje a través de la repetición de acciones. Para lograr el éxito, el alumno debe observar cuidadosamente y escuchar atentamente las instrucciones específicas que luego llevará a la práctica. Este es un ejemplo en el cual los logros del alumno dependen más de su habilidad en sí que del profesor. Para muchos estudiantes el origami requiere de un nivel de paciencia que brindará orgullo con el resultado, la habilidad de enfocar la energía y un incremento en la auto-estima<sup>25</sup>.

---

<sup>23</sup> Flórez, J. El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. Newton College, Lima, Perú. Pág. 5.

<sup>24</sup> *Ibíd.* P. 6.

<sup>25</sup> Leal, C. El plegado en la geometría, líneas notables del triángulo. Colegio Rafael Reyes y Silva Plazas, Duitama, 2008. Pág. 8.

Así mismo, menciona que muchos maestros han observado que los alumnos que no se destacan en otras actividades, son generalmente los más rápidos en aprender con plegado y ayudar a sus compañeros. Se presta para una mayor socialización dentro del desarrollo de cada actividad<sup>26</sup>.

Después de haber conocido la teoría a tratar a lo largo de la presente investigación, es pertinente dar paso a la parte práctica de la misma, en la cual se realizarán las acciones necesarias que darán paso al cumplimiento de los objetivos propuestos.

### 3.5 EL TRIÁNGULO

El triángulo es un polígono de tres lados. Los triángulos se nombran, o bien por tres letras mayúsculas ABC situadas en sus vértices, y que representan a sus ángulos, o por las tres letras minúsculas abc que indican las respectivas longitudes de sus tres lados.<sup>27</sup>

#### 3.5.1 Atributos del triángulo

Los triángulos se componen de ciertos atributos propios de los polígonos, estos son:

**Base:** uno cualquiera de sus lados (lado opuesto al vértice).

**Vértice:** la intersección de los lados congruentes (que conforman el ángulo)

**Altura:** es elemento perpendicular a una bases o a su prolongación, trazada desde el vértice opuesto.

**Lados:** son tres y conjuntamente con los ángulos definen las clases o tipos de ángulos.

Así mismo, los triángulos tienen algunas características, como:

- Son figuras planas
- Tienen área pero no volumen.
- Los triángulos son polígonos
- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es de  $180^\circ$

#### 3.5.2. Clasificación de los triángulos según sus lados

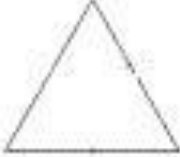
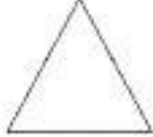

Los triángulos pueden clasificarse según sus ángulos o según sus lados, en este caso se tomarán sus lados como atributo para su clasificación.

---

<sup>26</sup> *Ibíd.* P. 8.

<sup>27</sup> BONET, A. Biblioteca práctica de consulta del nuevo milenio. Editorial Zamora. Colombia, 2012. Pág. 183



<p><b>Triángulo equilátero:</b> los tres lados iguales.</p>	
<p><b>Triángulo isósceles:</b> dos lados iguales y uno desigual.</p>	
<p><b>Triángulo escaleno:</b> sus tres lados son desiguales.</p>	 <p style="text-align: right;">28</p>

---

<sup>28</sup> Matemáticas, clases de triángulos. Tomado el 26 de enero de 2013 de:  
<http://www.estudiantes.info/matematicas/geometria/triangulos.htm>

## 4. METODOLOGÍA

La investigación se sitúa en el enfoque Interpretativo de origen constructivista (Denzin y Lincoln, 2000), la finalidad de la investigación es la comprensión de los fenómenos, teniendo en cuenta el contexto como parte fundamental de su interpretación y donde los aspectos singulares de lo estudiado son importantes para comprender el sentido de las relaciones que se establecen.

El diseño es un estudio de caso único sencillo, el cual se refiere según Stake (2007) al estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes<sup>29</sup>, donde se profundiza en las estrategias didácticas del docente, fundamentadas en los niveles de visualización y análisis y las fases de aprendizaje propuesta por Van Hiele en una clase de matemáticas.

La unidad de observación, análisis e interpretación, son las fases de aprendizaje que aplica el docente en una propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial.

El grupo que conformó la unidad de trabajo esta compuesto por cinco estudiantes, con una edad que oscila entre los seis y siete años, y una docentes, del grado segundo, del Colegio los Ángeles del municipio de Pereira.

### 4.1. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

#### 4.1.1. Antes de la aplicación de la estrategia

- Pre test: Se utilizó como una herramienta para conocer el estado inicial de los estudiantes en cuanto a los niveles de visualización y análisis en la teoría de Van Hiele. Como cualquier instrumento de medición el cuestionario tuvo validación de expertos y se probó antes de su aplicación definitiva (pilotaje), para ello se escogió una pequeña muestra de estudiantes de iguales caracterizas que la población de estudio, con el objetivo de evaluar la adecuación y pertinencia de cada una de las preguntas del cuestionario. Luego de su aplicación fueron analizados los resultados mediante una rejilla con una escala de evaluación cualitativa (nunca – algunas veces – siempre), en la cual se analizó cada estudiante para luego analizar el grupo completo.

---

<sup>29</sup> STAKE, Robert. Investigación con estudios de caso. Editorial Morata. Madrid. 2007. P. 11

#### **4.1.2. Durante la aplicación de la estrategia**

- Grabación de video: Todas las clases fueron grabadas en video de manera que se evidenciara claramente el discurso y las acciones del docente como las acciones y aportes de los estudiantes. Luego de las grabaciones se extrajo cada una de las intervenciones orales del docente y los estudiantes, de manera que se pudieran analizar las primeras en una rejilla donde se estableció una relación directa entre cada una de las intervenciones con las fases de enseñanza propuestas en la teoría de Van Hiele.

#### **4.1.3. Después de la aplicación de la estrategia**

- Pos test: Se utilizó como una herramienta para conocer el estado final de los estudiantes en cuanto a los niveles de visualización y/o análisis en la teoría de Van Hiele. Luego de su aplicación fueron analizados los resultados mediante una rejilla con una escala de evaluación cualitativa (nunca – algunas veces – siempre), en la cual se analizó cada estudiante para luego analizar el grupo completo (muestra).

### **4.2. PROCEDIMIENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

#### **4.2.1. Fundamentación teórica**

Para la realización de la investigación hubo una construcción constante del marco teórico, por medio de la investigación y la búsqueda de información relacionada con la teoría de Van Hiele desde su propuesta tanto de Niveles de Razonamiento como Las Fases de aprendizaje, la geometría, estrategia didácticas basadas en origami y estudios a fines como tesis y trabajos de grado que ayudaron a afianzar la investigación. Esto, se realiza en diversas fuentes tales como revistas, tesis recopiladas, proyectos de grado, propuestas de investigación, internet, biblioteca, libros, programas de capacitación e informes.

Primero se realizó una construcción colectiva del marco teórico, junto con todos los grupos pertenecientes al Macro-proyecto, de manera que todas contaras con la misma base teórica para cada una de las investigaciones. Este marco se realizó tomando las teorías de Van Hiele y Piaget como base para el desarrollo del mismo. Una vez creado dicho marco teórico general, cada grupo debió realizar un marco teórico que tuviera la especificidad requerida para cada uno de los temas abordados en las investigaciones, en este caso, el origami.

#### **4.2.2. Logística**

Solicitud de permiso escrito de la Universidad Tecnológica de Pereira, dirigido a la coordinadora del colegio los Ángeles y la docente titular del grado 2º, con el fin de dar a conocer el propósito de la investigación y así formalizar el proceso.

Reunión con la coordinadora y la docente titular del colegio los Ángeles, con el fin de dejar constancia acerca de la confiabilidad de la información recopilada durante el proceso investigativo, teniendo claro que cualquier publicación que se haga, deberá contar con el permiso de las dos partes.

#### **4.2.3. Diseño de herramientas**

Diseño de cada una de las herramientas necesarias para llevar a cabo la investigación, tales como:

- Pre-test: Es una prueba escrita que mide los conocimientos previos de los estudiantes acerca de los conceptos involucrados en la presente investigación.
- Estrategia didáctica: Es una unidad didáctica basada en la técnica del origami para la enseñanza de los atributos y clasificación del triángulo según sus lados.
- Herramientas de recolección de datos: Realización de una serie de fichas de seguimiento en las cuales se pretende evaluar el proceso que van llevando los estudiantes y las destrezas que van adquiriendo.
- Pos-test: Es una prueba escrita que mide los conocimientos adquiridos por los estudiantes al finalizar el proceso, acerca de los saberes trabajados durante la aplicación de la estrategia.

#### **4.2.4. Aplicación de herramientas**

Aplicación de las herramientas diseñadas a los estudiantes de grado segundo del Colegio Los Ángeles, con el fin de llevar a cabo el proceso de la investigación; donde se dieron dos sesiones de dos horas de clase comprendidas entre la última semana de octubre y primera semana de noviembre de 2012; en cada una de las sesiones se recolectó la información con las herramientas pertinentes.

## 5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

A continuación se presenta un análisis de los resultados obtenidos en el pre-test y pos-test, por los estudiantes del colegio Los Ángeles de la ciudad de Pereira, en cuanto al nivel de razonamiento (visualización y análisis) de la teoría de Van Hiele, tomando cada una de las características de dichos niveles como indicadores fundamentales para la evaluación de los mismos.

### 5.1. PRE-TEST: NIVELES DE RAZONAMIENTO (VISUALIZACIÓN)

**Tabla 1. Resultado Pre-test (Visualización)**

Indicadores	Escala		
	Siempre	Algunas veces	Nunca
1. Compara y clasifica objetos	0	5	0
2. Posee percepción visual global	3	2	0
3. Usa las propiedades físicas	0	5	0
4. Usa un lenguaje no técnico	0	4	1
5. Identifica o describe atributos físicos	0	5	0
6. No identifica componentes de un todo	0	5	0
7. Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor	2	3	0
8. Reproduce figuras a partir de modelos	0	5	0
<b>TOTAL</b>	5	34	1

Al realizar el respectivo análisis del pre-test de los estudiantes del Colegio Los Ángeles de grado segundo, se pudieron realizar diversas afirmaciones en relación a cada uno de los indicadores del nivel de razonamiento, en éste caso, visualización.

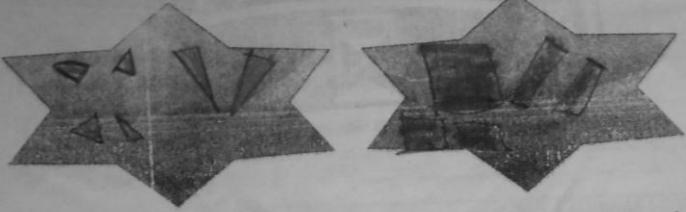
Para el indicador número uno “Compara y clasifica objetos” se puede afirmar que todos los estudiantes algunas veces lo cumplían, lo cual pudo verse en las respuestas dadas por ellos a las preguntas 2, 7 y 8; donde la pregunta 8 específicamente apuntaba a que los estudiantes clasificaran las figuras que conformaban una imagen en grupos, dependiendo las características de las figuras geométricas.

8. El muñeco favorito de TRIO es su robot .

a. ¿Describe el muñeco de TRIO?  
tiene ropa es grande  
tiene botines.

b. Ayúdale a TRIO a organizar las figuras geométricas escondidas en su muñeco dibujándolas en cada estrella.

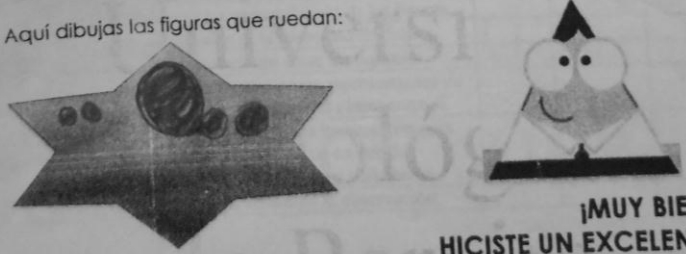
Aquí dibujas las figuras con 3 lados: Aquí dibujas las figuras con 4 lados:



¿Qué nombre le darías al grupo? super triangulo

¿Qué nombre le darías al grupo? mega cuadrado

Aquí dibujas las figuras que ruedan:



¿Qué nombre le darías al grupo? circosuper

**¡MUY BIEN!  
HICISTE UN EXCELENTE  
TRABAJO**

Imagen 1 Pre-test, pregunta 8

Como se puede notar en la imagen anterior, el estudiante logra una clasificación correcta de las figuras geométricas según las características proporcionadas, además de darles el nombre correcto a cada uno de los grupos que se establece, según la clasificación que él mismo hace. Esto fue lo que se presentó en la mayoría de ocasiones, puesto que todos los estudiantes lograban algunas veces realizar clasificaciones de este tipo. En el siguiente diálogo presentado en clase, se puede evidenciar como los estudiantes realizan comparaciones de las figuras geométricas obtenidas en el material con algunos elementos cotidianos.

E C- Mira así. Lo abres. Lo abres y lo doblas. Lo doblas- Le muestra a Kamil cómo plegar el papel.

E J.A –Miren la cresta! – Le muestra a Juliana y Carlos

E J- Ay si la cresta.. O un gorro. ¿Si ves?... Así, ¿Si ves?

D- ¿Todos tienes esta figura? – Muestra la figura terminada

EE- Si

D- ¿Qué figura es ésta?

EE- Un triángulo

Seguidamente se pudo evidenciar que en el indicador dos “Posee percepción visual global”, que algunos estudiantes siempre realizaban las acciones indicadas, mientras que otros algunas veces lo hacían (Ver preguntas 2, 3 y 8 del pre-test).

En la pregunta dos, la segunda parte le indica a los estudiantes que busquen dos elementos de su entorno que tengan figuras específicas, y los estudiantes lograban buscar los elementos basándose solo en su percepción, concibiendo los objetos encontrados como un todo y relacionándolos con las figuras geométricas determinadas, tal como se ve en la imagen dos, a continuación.

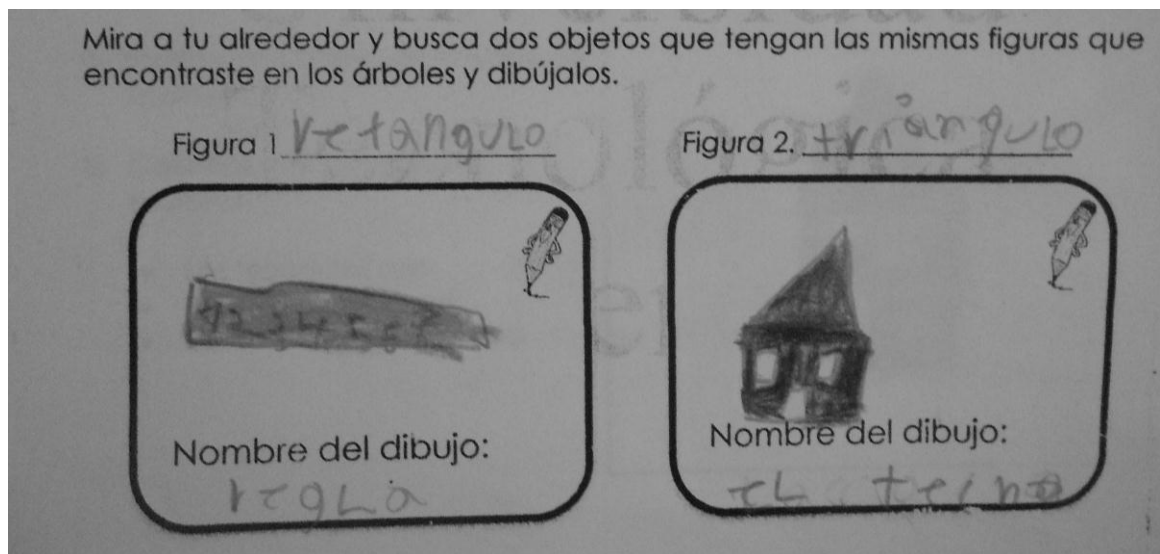


Imagen 2 Pre-test, pregunta 3

De la misma manera, este tipo de razonamiento se puede evidenciar durante las clases cuando los estudiantes hablan acerca de sus creaciones en papel, en las cuales logran identificar las figuras geométricas más comunes para ellos:

E J –Mira, lo tienes así ¿Cierto? Y lo doblas así- Le muestra a Juan Andrés cómo doblar la hoja.

D –Listo, súper bien. Lo tienes así y lo aplastas así- Le explica a Mariana- ¿Y qué figura nos volvió a quedar?

EE –Un triángulo

En el indicador número tres, “Usa las propiedades físicas” se pudo ver que todos los estudiantes algunas veces las usaban (ver las preguntas 2, 3 y 8), ya que al pedirles que describieran las figuras que encontraban en las imágenes propuestas, algunos usaban propiedades, mientras que otros usaban

características irrelevantes (Ej. –Tiene botones...). Esto se puede evidenciar claramente en la pregunta dos donde los estudiantes hacía uso de propiedades como forma, tamaño, etc. Para describir las figuras dadas:

2. Indica qué figuras conforman el perro de TRIO y descríbela.

¿Qué figura viste?	Describe la figura
triángulo	es puntiguda tiene 3 lados
rectángulo	es ancho tiene 4 lados
círculo	es redondo no tiene lados

Imagen 3 Pre-test, pregunta 2

Sin embargo, durante las clases, todos los estudiantes paulatinamente aprendieron a usar propiedades físicas siempre al describir o referirse a una figura geométrica, tal como se nota en el siguiente diálogo, que se presentó en el transcurso de la sesión uno.

D –Y ¿Qué dijimos que cómo era un triángulo?

E Carlos – De tres lados.

E Mariana –Tres lados y tres vértices.

D –Tres lados y tres vértices. Vamos a ver ¿Cómo se llama esta parte del triángulo? –Señala un lado

E Mariana –lado

Para el indicador cuatro, “Usa un lenguaje no técnico” la mayoría de los estudiantes mostraron ir en contra de éste, ya que usaban un lenguaje técnico a la hora de dar respuesta a las preguntas y describir figuras durante la clase (ver preguntas 1, 2 y 6). Un ejemplo claro se nota en la pregunta numero seis, donde los estudiantes debían buscar una figura geométrica en su entorno y llenar los datos correspondientes, entre los cuales estaba Nombre de la figura y Descripción de la figura, tal como se ve a continuación.



6. Identifica 3 figuras geométricas en tu entorno y llena el cuadro con los datos.




<p>Nombre de la figura: <i>circulo</i></p> <p>Describe la figura: <i>es redondo</i> <i>no tiene</i> <i>lados</i></p> <p>Dibuja el objeto:</p>  <p>Nombre del objeto: <i>rueda</i></p>	<p>Nombre de la figura: <i>cuadrado</i></p> <p>Describe la figura: <i>tiene 4 lados</i></p> <p>Dibuja el objeto:</p>  <p>Nombre del objeto: <i>cuadro</i></p>	<p>Nombre de la figura: <i>rectangulo</i></p> <p>Describe la figura: <i>es largo</i> <i>tiene 4 lados</i></p> <p>Dibuja el objeto:</p>  <p>Nombre del objeto: <i>mesa</i></p>
--	--	--

Imagen 4 Pre-test, pregunta 6

En la imagen se puede observar como el estudiante se refiere a atributos como los son el número de lados y la forma, para describir los elementos de su entorno. De la misma manera que lo hacen durante la clase, cuando al hablar de la figura de origami trabajada utilizan palabras técnicas acerca de ella.

D –Muy bien, entonces tiene tres lados. ¿Alguien me quiere decir algo más de los triángulos? ¿Quién sabe algo más de los triángulos? –Le da la palabra a Mariana.

E Mariana – Tiene tres vértices

D –¿Cuáles son los tres vértices? –Extiende la hoja para que Mariana señale

E Mariana –Esta –Señala un vértice –Esta –Señala otro vértice –Y esta –Señala el tercer vértice.

Para el indicador número cinco, “Identifican y describen atributos físicos” pudimos comprobar que todos los estudiantes logran hacerlo algunas veces, ya que al presentarse una imagen pueden extraer, en ocasiones, cada una de las figuras geométricas que en ella se encuentren (ver preguntas 1, 2 y 8). Un ejemplo claro se muestra en la pregunta número 8, donde se les presenta una imagen de un robot, el cual está conformado por figuras geométricas y los estudiantes deben describirlo, a lo cual algunos de los estudiantes responden con descripciones acerca de su forma.

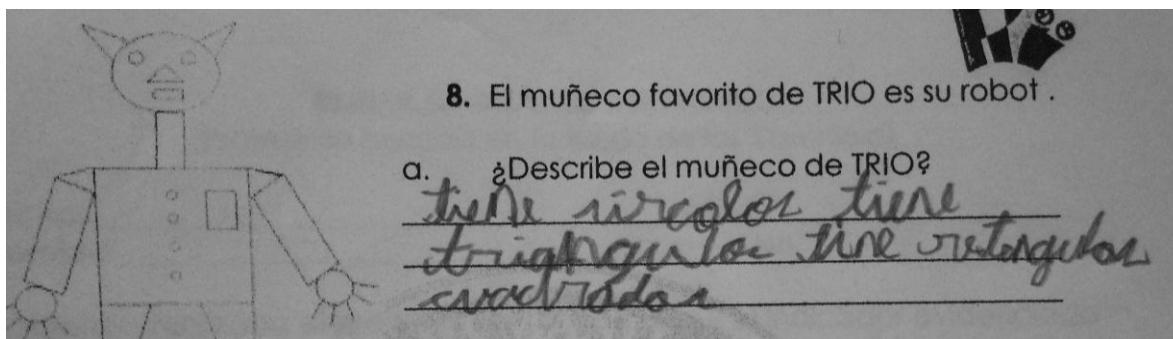


Imagen 5 Pre-test, pregunta 8

Es así como se puede evidenciar la identificación y descripción de atributos físicos de las figuras por parte de los estudiantes en algunas ocasiones, puesto que este tipo de respuesta se presenta reiterativamente a lo largo del pre-test. Así mismo, durante la sesión uno, los estudiantes respondían con éstas características ante preguntas del docente, como se muestra a continuación:

D –Queda así paradito ¿Cierto? –Mirando el triángulo– Entonces vamos a ver una cosa, cuándo los triángulos se paran así –Para el triángulo en uno de sus lados –Mírame. Cuándo los triángulos se paran así, en la parte que están paraditos se llama “base” ¿Cómo se llama?

EE –Base

D –Y si lo paramos así ¿Cuál es la base?

EE –Ésta –Algunos se acercan y señalan la base y otros lo hacen desde lejos.

D –La de abajo, en donde está paradito el triángulo ¿Cierto?. Juan, si para el triangulito así ¿Cuál es la base? –Para el triángulo en otro de sus lados.

En el indicador 6 “No identifica componentes de un todo” se pudo notar que los estudiantes algunas veces lo cumplen, es decir algunas veces se fijan en detalles o partes del espacio (ver preguntas 1, 2, 3 y 8), un ejemplo se encuentra en la pregunta número tres, en la cual se les pedía identificar las partes de una figura, a lo que algunos de los estudiantes respondieron, de manera correcta.

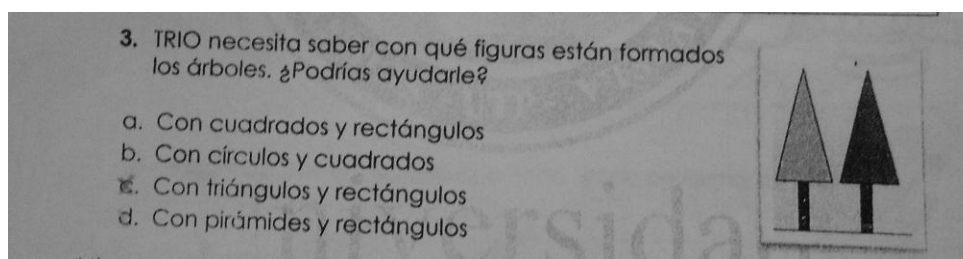


Imagen 6 Pre-test, pregunta 3

En la imagen se puede evidenciar como el estudiante logra identificar las partes que conforman el dibujo, eligiendo correctamente las figuras que hay en él, entre una serie de opciones que se le dan. De la misma manera, los estudiantes

demuestran fijarse en componentes o partes del espacio cuando en algunas ocasiones durante la clase, identifican los triángulos como componentes de una figura formada en origami.

D –Todos vamos a poner... Todos vamos a poner a Triangulitos en el suelo. Pongamos todos a Triangulitos en el suelo, rápido, rápido, pongamos a Triangulitos en el suelo. Y vamos a mirar todos la cara de triangulitos, del de cada uno, todos van a mirar la carita de triangulitos y me van a decir ¿Cuántos triángulos ven?

E –Tres

E –Dos

E –Tres

E Juan Manuel –Ah no dos.

D -¿Cuántos vemos?

EE –Dos

En el indicador siete “Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor”, podemos decir que algunos estudiantes algunas veces tienen dicha conciencia, mientras que otros siempre la tienen (ver preguntas 1, 3, y 6). Esto se puede evidenciar en la pregunta número tres, entre otras, ya que allí se ve claramente cómo el estudiante busca respuestas en el entorno, haciendo uso del espacio para ejemplificar lo aprendido, en este caso, en cuanto a figuras.

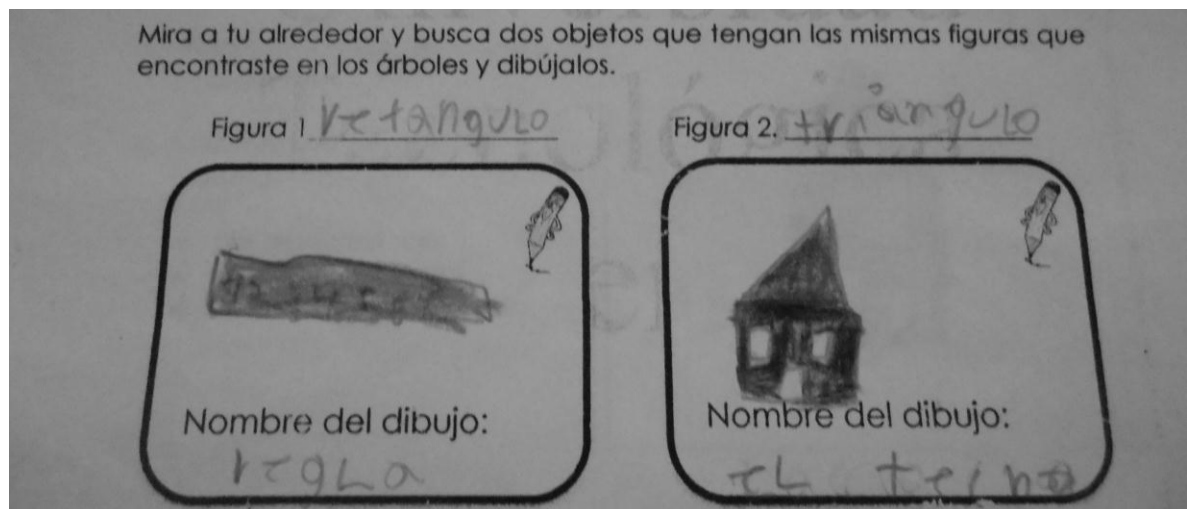
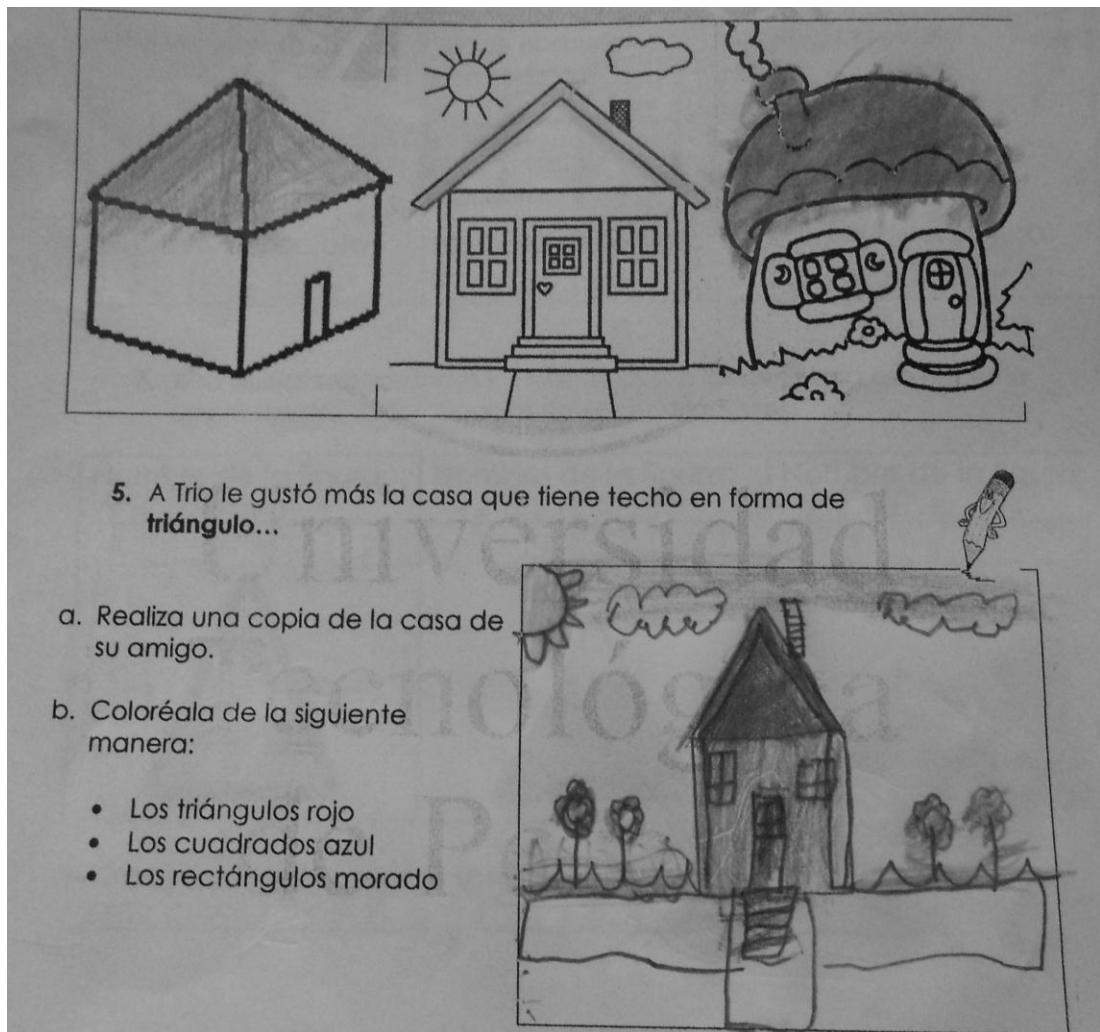


Imagen 7 Pre-test, pregunta 3

Tal como se ve en la imagen, en las preguntas 1 y 6, los estudiantes lograron encontrar en su entorno las figuras relacionadas con las preguntas trabajadas en el momento de la realización del pre-test, de la misma manera que lo hicieron durante las clases al trabajar los triángulos como tema principal, puesto que la docente les pedía buscar triángulos en su entorno o en el material trabajado

El indicador 8 “Reproduce figuras a partir de modelos”, los estudiantes algunas veces lograron cumplirlo (ver preguntas 5 y 8), ya que en algunas ocasiones se les dificultó reproducir exactamente el modelo mostrado, no obstante, en la mayoría de ocasiones daban respuesta a lo propuesto por la docente. Es el caso de la pregunta cinco, donde se les pide que reproduzcan una casa a partir de la muestra dada en la misma página, para luego colorearla según características específicas mencionadas:



5. A Trio le gustó más la casa que tiene techo en forma de triángulo...

a. Realiza una copia de la casa de su amigo.

b. Coloréala de la siguiente manera:

- Los triángulos rojo
- Los cuadrados azul
- Los rectángulos morado

**Imagen 8 Pre-test, pregunta 5**

Lo anterior no solo se pudo evidenciar durante la realización del pre-test, sino también durante el desarrollo de todas las clases, ya que al trabajarse el origami como técnica base, los estudiantes debieron realizar constantemente modelos de lo representado por la docente, para lograr con ello, la obtención de la figura deseada para el trabajo en la clase; por lo tanto, los estudiantes todo el tiempo debieron realizar copias y pedir orientaciones no solo de la docentes sino de sus

compañeros para la realización de los modelos requeridos, tal como se evidencia a continuación:

...La docente les explica a los estudiantes cómo hacer a Trio (triángulo de papel).  
E Juliana- Mira, lo tienes así ¿Cierto? Y lo doblas así- Le muestra a Juan Andrés cómo doblar la hoja.  
D- Listo, súper bien. Lo tienes así y lo aplastas así- Le explica a Mariana- ¿Y qué figura nos volvió a quedar?  
EE- Un triángulo  
E Carlos- Pro, así ¿cierto?.

Luego del análisis de todos los indicadores del nivel de visualización y sabiendo que la mayoría de los estudiantes se encuentran ubicados en la escala de algunas veces, nos podemos arriesgar a afirmar que todos los estudiantes están ligados a dicho nivel, ya que se debe recordar que no se puede pasar a una fase superior, en este caso análisis, sin haber superado todas las características de la fase anterior.

## **5.2. FASES DE ENSEÑANZA**

De igual manera se da a conocer el análisis de las acciones de aula de las docentes que aplicaron la estrategia didáctica basada en origami para la enseñanza de atributos y propiedades del triángulo, haciendo uso de las grabaciones de video para la realización de las transcripciones pertinentes y la posterior categorización de las mismas según las fases de enseñanza, construyendo una rejilla donde se relacionó cada una de las intervenciones con las fases correspondientes.

### **5.2.1. Docente 1**

#### **5.2.1.1. Fase 1: información**

De la docente uno se puede decir que en su actuar docente realiza acciones que pertenecen a la presente fase, no obstante, no se cumplen a cabalidad todas las características de la misma. No se demuestra una introducción al objeto de conocimiento, puesto que en un inicio solo se indaga por la técnica a trabajar durante el día. Sin embargo, da una breve reseña de los problemas a resolver sin mencionar el tema de la geometría propiamente, sino haciendo alusión nuevamente a la técnica y a las manualidades que se van a realizar. Por otro lado, dedica una buena parte del tiempo a indagar por los conocimientos previos de los estudiantes, de manera que pueda determinar el punto de partida de los mismos en cuanto a la técnica a trabajar y al tema de la clase. Lo anterior se afirma por cuanto la docente hizo varias intervenciones como las siguientes:

D –Voy a dibujar acá a Trio- Comienza a dibujar en el tablero- Éste es Trio- señala el tablero- Resulta que Trio tiene tres amiguitos: Tiene un amiguito perro – Continúa dibujando en el tablero el perro – que se llama Triangulitos , así se llama el amiguito perro de Trio. Tiene un amiguito Gato –Dibuja al gato en el tablero- y tiene un amiguito – Dibuja en el tablero-... ¿Qué será eso?

D –Y vamos a hacerlos durante todas las clases, vamos a ir haciéndolos y al final vamos a tener a todos estos amigos construidos en papel. Vamos a aprender a hacer... Vamos a aprender a hacer un perro, un gato y un pato. Vamos a aprender a hacerlos en papel, ¿Bueno?. Entonces vamos a correr las sillas alrededor del salón

D -¿Quién había escuchado el nombre de origami?

D –Se llama origami cuando uno hace figuritas con papel, doblando el papel... Entonces, vamos a ver las figuras que podemos formar con el origami.

Además, en diversos momentos de la clase realiza preguntas que le permiten analizar el nivel de razonamiento del grupo de manera que logre tomar eso como punto de partida para la clase. Asimismo, la docente uno menciona los materiales que se van a usar durante la clase y los elementos que construirán con el material mencionado:

D –Se llama origami cuando uno hace figuritas con papel, doblando el papel... Entonces, vamos a ver las figuras que podemos formar con el origami.

### **5.2.1.2. Fase 2: Orientación dirigida**

La docente muestra su capacidad didáctica al proponer actividades para que los estudiantes exploren con su dirección, siempre llevando a los estudiantes hacia la ejecución de actividades concretas y bien secuenciadas. No obstante, la mayor parte de sus intervenciones van dirigidas entorno a los alumnos, quienes deben resolver problemas y actividades basadas en el material proporcionado por el profesor, siempre contando con el apoyo y la guía de éste. Esta afirmación se ve sustentada por diversas intervenciones de la docente, de las cuales se muestran algunas a continuación:

D –Ahora, si lo vamos a decorar pero ahora. Ahora vamos a llenar unas fichas que yo tengo por acá, yo se las voy a leer y les voy a decir qué nos toca hacer. ¿Todos saben utilizar la regla?

D –Todos vamos a poner... Todos vamos a poner a Triangulitos en el suelo. Pongamos todos a Triangulitos en el suelo, rápido, rápido, pongamos a Triangulitos en el suelo. Y vamos a mirar todos la cara de triangulitos, del de cada



uno, todos van a mirar la carita de triangulitos y me van a decir ¿Cuántos triángulos ven?

De la misma manera, contribuye a que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades clave, mediante el apoyo ante las confusiones, ayudando a los estudiantes a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general, permitiendo que puedan desarrollar las estructuras propias de la presente fase, tal como se muestra en el párrafo siguiente:

D –Entonces, si yo te pongo este triángulo acá así ¿Cuál es la base? –Le pregunta a Juliana –Muéstrame con el dedo –Juliana señala una punta –No, recuerda que la base es donde esté parado, la parte de abajo ¿Te acuerdas? ... Ahora otra vez, mírame, si yo pongo el triángulo así ¿Cuál es la base? –Cambia el triángulo de posición –Señálame con el dedito en el triángulo –Juliana señala correctamente –¿Y la altura? –La altura es la parte alta, por eso se llama altura porque es la parte alta, la que está más arriba.

#### **5.2.1.3. Fase 3: Explicitación**

En esta fase la docente continúa invirtiendo un buen tiempo a las preguntas y la interacción docente-estudiante, asegurando la realización de actividades donde los estudiantes logren adquirir un lenguaje matemático característico del nivel de razonamiento respectivo. Una de las actividades evidenciadas con mayor frecuencia durante las clases son las descripciones, en las cuales la docente les muestra a los estudiantes una figura o una parte de la figura y les pide que la describan, diciendo todo lo que saben sobre la misma.

Adicionalmente, la docente involucra las interacciones estudiante-estudiante, de manera que entre ellos mismos solucionen dudas y pidan instrucciones sobre el trabajo que se realiza en el momento. Ejemplo de ello, lo podemos ver en la siguiente nota:

D –muy bien. Juan Ayúdale a Kamil, enséñale cómo se hace. Juliana ayúdale a Carlos para que las orejitas le queden bien hacia fuera. Muéstrame cómo lo estás haciendo –Se dirige a Juan Andrés –Muy bien!

Por otro lado, no se muestra durante la clase, espacios proporcionados por la docente en los cuales los estudiantes puedan explicar la manera en que resolvieron sus dificultades, o llevaron a cabo los ejercicios propuestos.

#### **5.2.1.4. Fase 4: Orientación libre**

Para esta fase la docente no proporcionó actividades complejas en las que les permitiera a los estudiante aplicar y combinar los conocimientos adquiridos, por el

contrario, siempre hizo uso de las mismas actividades, ejercicios y ejemplos para explicar, desarrollar, socializar y evaluar los temas. Un ejemplo se muestra en la imagen a continuación, donde se muestran los estudiantes trabajando al final de la clase sobre las mismas fichas y la misma figura de origami con la que se inició.



**Imagen 9 Sesión 1**

No obstante, dichas actividades se establecieron de manera abierta, permitiéndole al estudiante experimentar por si solo, aunque siempre con la dirección constante de la docente que les indicaba paso a paso cómo llegar al objetivo.

D –No, no te equivocaste, simplemente no viste algunos. Algunos encontraron los seis triángulos, otros encontraron: uno, y éste grandotote dos , tres, y éste grandotote cuatro. Algunos vieron los 6 triángulos y otros solo vieron estos cuatro que hay acá, los cuatro grandes.

Sin embargo, una vez ejecutadas las actividades, no se proporcionó un espacio para indagar por la realización de las mismas, sino que se pasó inmediatamente a la socialización, de manera que los estudiantes mostraron lo que hicieron más no cómo lo hicieron.

#### **5.2.1.5. Fase 5: integración**

Para la presente fase la docente dedicó poco tiempo al planteamiento de situaciones en las que el estudiante aplicara los conocimientos y el lenguaje adquirido, además se finalizó la clase sin una síntesis apropiada de los contenidos trabajados durante la misma.



## **5.2.2. Docente 2**

### **5.2.2.1. Fase 1: información**

En la presenta fase, la docente realizó diversas intervenciones con el fin de informar a los estudiantes sobre el campo que se iba a trabajar durante la clase, aunque no hizo referencia a los problemas a resolver durante la sesión de clase, ni dedicó algún espacio de la clase para averiguar los conocimientos previos de los estudiantes. No obstante, se preocupó por averiguar el nivel de razonamiento del grupo, mediante preguntas acerca del tema a tratar, como la siguiente:

D –Muy bien, ¿será que ahí tenemos alguna figura?

D -¿todos los triángulos son iguales? ¿Exactamente iguales?

Adicionalmente, les recordó a los estudiante la técnica que se venía trabajando desde clases anteriores y el material usado (origami), asegurando que los estudiantes estuvieran preparados para trabajar durante la jornada.

### **5.2.2.2. Fase 2: Orientación dirigida**

La docente dedica algún tiempo a proponer actividades y las dirige para que los estudiantes exploren, comprendan y apliquen los conceptos y propiedades mencionados en la fase de información. Así mismo, dedicó gran parte de la clase a proporcionar espacios y actividades donde los estudiantes tuvieran que resolver problemas haciendo uso del material proporcionado, en éste caso las hojas de origami y las construcciones con las mismas, sirviendo de guía a los estudiantes mediante preguntas que los dirijan hacia el objetivo planteado, haciendo que los estudiantes logren delimitar los elementos principales del tema. De la misma manera, contribuye a que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades clave, mediante el apoyo ante las confusiones, ayudando a los estudiantes a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general, permitiendo que puedan desarrollar las estructuras propias de la presente fase, como se puede apreciar en la siguiente intervención:

D –Este triángulo tiene todos sus lados diferentes, porque este lado (señalando) mide diferente a este y mide diferente a este. ¿Carlos, porque ese triangulo tiene sus lados diferentes?

### **5.2.2.3. Fase 3: explicitación**

Se puede evidenciar que la docente proporcionó actividades para que los estudiantes adquirieran un lenguaje matemático característico del nivel de razonamiento respectivo, ya que en diversos momentos de la clase la docente realizaba preguntas que apuntaban a que los estudiantes respondieran con el

lenguaje adquirido, de manera que se apropiaran de él y lo interiorizaran como parte de su propio vocabulario, tal como se ve en el ejemplo a continuación:

Listo entonces voy a tapar el tablero, ¿Cómo se llama el triangulo que tiene los tres lados iguales?

Estudiante 6: mm equilátero

Profesora: ¿como se llama el triangulo que tiene los lados diferentes?

Estudiante 2: escalera, ve escaleno

Profesora ¿Cómo se llama el triangulo que tiene dos lados iguales?

Estudiante 3: isósceles

Profesora: muy bien,

Además en algunos momentos de la clase dio paso a que los estudiantes realizaran actividades mediante las cuales los estudiantes pudieran intercambiar de experiencias entre ellos mismos. Sin embargo, no proporcionó espacios de reflexión para que expresaran sus conclusiones frente a los trabajos realizados, ni indagó por las explicaciones de los mismos acerca de el proceso que siguieron al desarrollar las actividades, dando la oportunidad de evidenciar cómo llegaron a determinadas respuestas.

#### **5.2.2.4. Fase 4: Orientación dirigida**

Durante la clase la docente no proporciona actividades para que los estudiantes apliquen y combinen los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades más complicadas, por el contrario, siempre hizo uso de las mismas actividades, ejercicios y ejemplos para explicar, desarrollar, socializar y evaluar los temas. Adicionalmente, realizó actividades objetivas, con una única respuesta, de manera que los estudiantes no tuvieron la oportunidad de realizar tareas que llevaran a diferentes soluciones, ni tampoco indagó por las explicaciones de las actividades realizadas.

#### **5.2.2.5. Fase 5: integración**

La docente no planteó situaciones en las que el estudiante aplicara los conocimientos y lenguaje adquirido, sin embargo dedicó algunos momentos al final de la clase a proporcionar una síntesis estructurada acerca de lo trabajado durante las sesiones de clase, y la unidad didáctica en general.

D -Listo entonces voy a tapar el tablero, porque quiero que para finalizar me respondan una preguntica ¿Cómo se llama el triangulo que tiene los tres lados iguales?, ¿y como se llama los que tienen los dos lados iguales?

### **5.3. POS-TEST: NIVELES DE RAZONAMIENTO (ANÁLISIS)**

Seguidamente se presenta un análisis de los resultados obtenidos en el pos-test, en cuanto al nivel de razonamiento (análisis) en la teoría de Van Hiele, tomando

cada una de las características de dicho niveles como indicadores fundamentales para la evaluación de los mismos.

**Tabla 2. Resultados del Pos-test (Visualización)**

Indicadores	Escala		
	Siempre	Algunas veces	Nunca
1. Compara y clasifica objetos	5	0	0
2. Posee percepción visual global	5	0	0
3. Usa las propiedades físicas	6	0	0
4. Usa un lenguaje no técnico	0	0	5
5. Identifica o describe atributos físicos	5	0	0
6. No identifica componentes de un todo	0	0	5
7. Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor	4	1	0
8. Reproduce figuras a partir de modelos	5	0	0
<b>TOTAL</b>	24	1	10

**Tabla 3. Resultados del Pos-test (Análisis)**

Indicador	Escala		
	Siempre	Algunas veces	Nunca
1. Identifica componentes de un todo pero no los relaciona entre ellos.	5	0	0
2. No diferencia cuerpos de figuras	4	1	0
3. Mediante la observación y la experimentación inicia a distinguir las características de las figuras	4	1	0
4. No se ven las interrelaciones entre las figuras	0	0	5
5. Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí.	5	0	0
6. Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.	0	0	5
7. Puede hacer conjeturas mediante la observación.	5	0	0
<b>TOTAL</b>	18	2	10

Al realizar el respectivo análisis del pos-test de los estudiantes del Colegio Los Ángeles de grado segundo, se pudieron realizar diversas afirmaciones en relación a cada uno de los indicadores del nivel de razonamiento, en éste caso, análisis.

Para el indicador número uno “Compara y clasifica objetos” se puede afirmar que todos los estudiantes lo cumplían, lo cual pudo verse en las respuestas obtenidas a las preguntas 2, 7 y 8; donde la pregunta 8 concretamente apuntaba a que los estudiantes clasificaran las figuras que conformaban una imagen propuesta (un perro hecho en figuras geométricas), dependiendo las características de las figuras encontradas.

8. Trianguitos, el perro de TRIO tiene un amigo que se llama cuadrículado.

a. ¿Describe al perro cuadrículado?  
 tiene muchas cuadrículas  
 2 círculos y 2 rectángulos

b. Ayúdale a TRIO a organizar las figuras geométricas escondidas en el perro cuadrículado dibujándolas en cada estrella.

Aquí dibujas las figuras con 3 lados: Aquí dibujas las figuras con 4 lados:

¿Qué darías al grupo? nombre le ¿Qué darías al grupo? nombre le

Trianguito Cuadrado

Aquí dibujas las figuras que ruedan:

¿Qué nombre le darías al grupo? nombre le

Círculos

¡MUY BIEN!  
 HICISTE UN EXCELENTE TRABAJO

Imagen 10 Pre-test, pregunta 8

Como se puede notar en la imagen anterior, el estudiante clasifica de manera correcta las figuras geométricas que encuentra en el perro dibujado, según las características proporcionadas para cada uno de los grupos, además de darles el nombre correcto a cada uno de ellos, según la clasificación que él mismo hace.

Este es el panorama que se presenta en todos los pos-test, puesto que todos los estudiantes logran realizar una clasificación correcta de cada una de las figuras. Así mismo, durante las clases, se pudo evidenciar la correcta clasificación y comparación por parte de los estudiantes en algunos aportes de los mismos, como se muestra a continuación:

D -¿todos los triángulos son iguales? Exactamente iguales

E -No

D -¿por qué no?

E -Porque algunos son volteados y algunos son chiquitos

D -Y algunos son chiquitos, muy bien. Ahora muéstrame tu Cami, tu gatico y los triángulos que tiene

E -Este, este y este (señalando cada una de las figuras)

D -Tres. Súper. ¿Por qué crees que son diferentes?

E -Porque este es más grande que este.

Seguidamente se pudo evidenciar en el indicador dos “Posee percepción visual global”, que todos los estudiantes realizaban las acciones indicadas (Ver preguntas 2, 3 y 8 del pre-test), lo cual se muestra claramente en la pregunta número dos, puesto que la segunda parte le indica a los estudiantes que ubiquen dos elementos en su entorno que tengan las figuras que seleccionaron en la pregunta anterior (Cuadrados y triángulos) y los estudiantes lograron encontrar los elementos correctos que cumplían con las características de las figuras mencionadas, concibiendo los objetos encontrados como un todo y relacionándolos con las figuras geométricas determinadas, tal como se ve en la imagen a continuación.

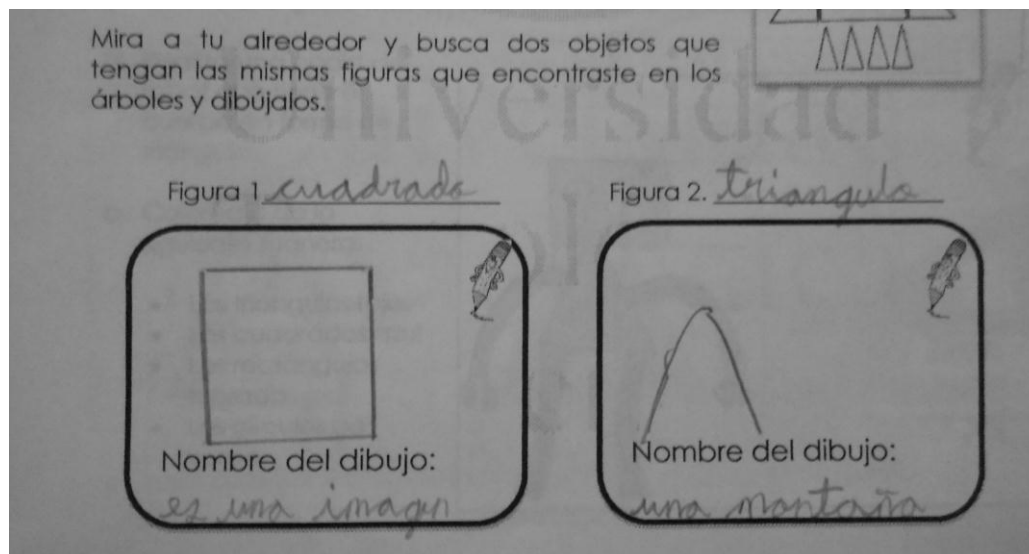


Imagen 11 Pre-test, pregunta 3

Durante la clase, los estudiantes también demostraron ésta facultad, ya que realizaron algunos aportes que permitían evidenciar la percepción visual global que poseían, puesto que lograban identificar las formas como un todo en los elementos que tenían en su entorno, comprendiendo tanto los objetos del salón como el material trabajado. Así se evidencia a continuación:

D –Que tenemos todos aquí (mostrando la hoja de papel origami)

E –Un cuadrado

D –Listo vamos a mirar todos, tenemos todos el mismo cuadrado

E –Si

En el indicador número tres, “Usa las propiedades físicas” se pudo ver que todos los estudiantes las usaban al tener que detallar las características de determinada figura, principalmente de los triángulos (ver las preguntas 2, 3 y 8), lo cual se evidencia durante las clases cuando los estudiantes van usando cada vez más propiedades en sus descripciones y en sus diálogos a la hora de referirse a las figuras geométricas trabajadas, tal como se muestra en el siguiente diálogo:

D -¿y cuantos lados tiene un triangulo?

E –Tres lados tiene un triangulo y 3 vértices y tiene una base

D –Entonces esto es un triangulo?

E –Moviendo la cabeza expresa que no.

D –Entonces cuantos triángulos ves ahí?

E -“dos”

Esto se ve reflejado en la pregunta número dos principalmente, puesto que allí, los estudiantes debían describir la figura que encontraban en un dibujo. Este dibujo se realizó solo a base de triángulos por lo cual los estudiantes debieron describir de manera detallada, únicamente ésta figura. Para ello, los estudiantes hicieron uso de todos aquellos atributos y propiedades enseñadas durante el desarrollo de la unidad didáctica.

2. Indica qué figuras conforman el gato de TRIO.

¿Qué figura viste?	Describe la figura
triangulo	tiene una base y tiene 3 lados y tiene una altura y los triángulos son diferentes en color

Imagen 12 Pre-test, pregunta 2

Para el indicador cuatro “Usa un lenguaje no técnico” se evidenció que los estudiantes no cumplían con éste indicador, puesto que todos ellos hacía uso del lenguaje técnico enseñado durante la unidad didáctica para hacer referencia a los triángulos y en ocasiones a otras figuras geométricas (ver preguntas 1, 2 y 6). Un ejemplo claro se nota en la pregunta numero seis, donde los estudiantes debían buscar tres figuras geométricas en su entorno y llenar una tabla. En la imagen a continuación se puede observar como el estudiante se refiere al número de lados para describir los objetos que encontró.

6. Identifica 3 figuras geométricas en tu entorno y llena el cuadro con los datos.

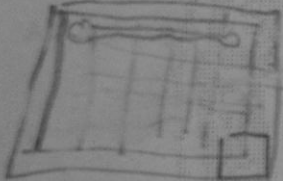
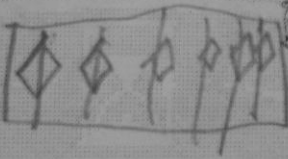
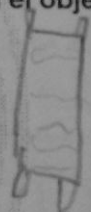
<p>Nombre de la figura: cuadrado</p> <p>Describe la figura: tiene 4 lados</p>	<p>Nombre de la figura: rombo</p> <p>Describe la figura: rombo tiene 4 lados</p>	<p>Nombre de la figura: rectángulo</p> <p>Describe la figura: tiene 4 lados</p>
<p>Dibuja el objeto:</p> 	<p>Dibuja el objeto:</p> 	<p>Dibuja el objeto:</p> 
<p>Nombre del objeto: cuadro</p>	<p>Nombre del objeto: ventana</p>	<p>Nombre del objeto: mesa</p>

Imagen 13 Pre-test, pregunta 6

Para el indicador número cinco, “Identifican y describen atributos físicos” pudimos comprobar que todos los estudiantes logran hacerlo, ya que al presentarse una imagen pudieron extraer cada una de las figuras geométricas que en ella se encontraban (ver preguntas 1, 2 y 8), tal como se mostró durante las clases, cuando se entablaron conversaciones con los estudiantes y ellos respondían describiendo cada uno de los atributos físicos que identificaban en las figuras, así:

D –y cual es la altura.

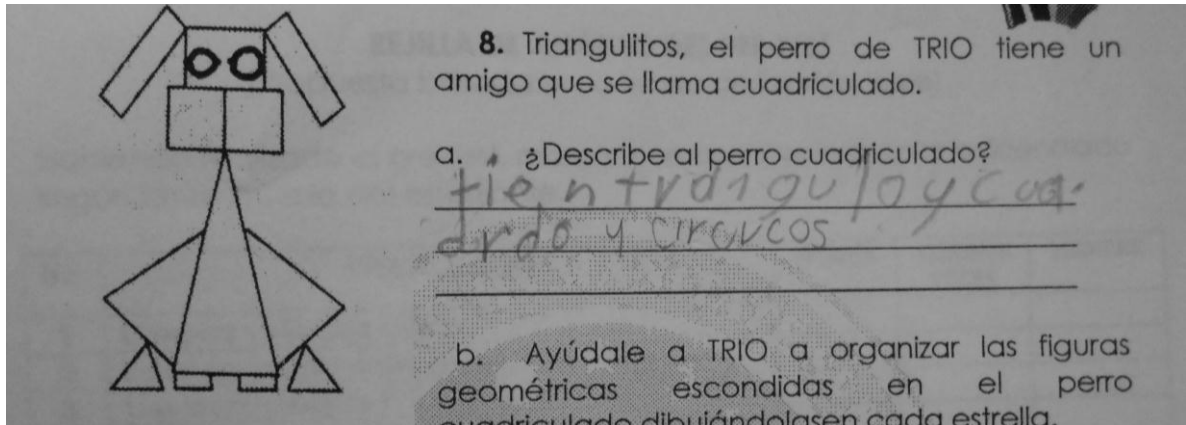
E –esta es la altura (señalando la altura) y esta es la base del triangulo

D –y si lo paro así (cambiando la posición de la figura)

E –esta (señalando)



Un ejemplo claro se muestra en la pregunta número 8, donde se les presenta una imagen de un perro, el cual estaba conformado por figuras geométricas y los estudiantes debían describirlo, tal como se muestra en la imagen a continuación, en la cual se evidencia como los estudiantes logran identificar correctamente las figuras geométricas que encuentra en una imagen completa.



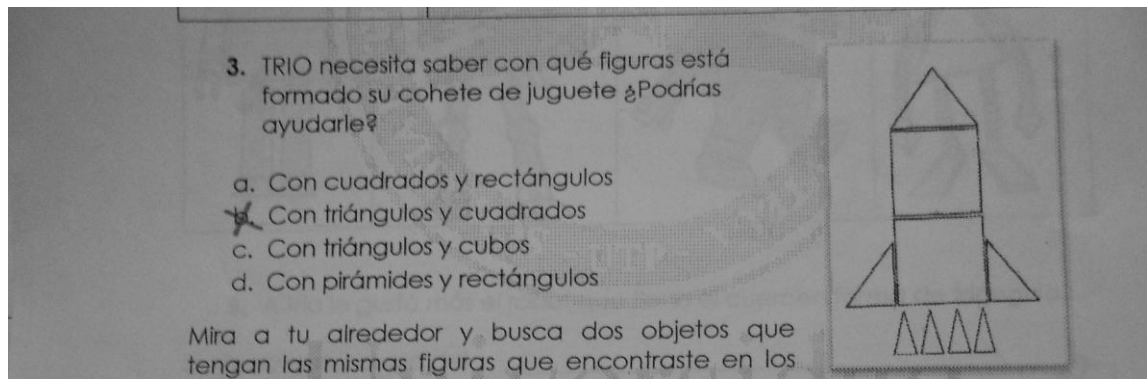
**Imagen 14 Pre-test, pregunta 8**

En el indicador 6 “No identifica componentes de un todo” se pudo notar que los estudiantes nunca lo cumplen, es decir, siempre los identifican, puesto que se fijan en detalles o partes del espacio (ver preguntas 1, 2, 3 y 8), esto se puede notar en las clases cuando los estudiantes buscan figuras dentro de sus construcciones en origami, así:

- D –Que tenemos todos aquí (mostrando la hoja de papel origami)
- E –Un cuadrado
- D –Listo vamos a mirar todos, tenemos todos el mismo cuadrado
- E –Si
- D –Cógelo tu para que lo mires (diciéndole al estudiante 6)
- E –Yo tengo puros cuadrados
- D –Entonces nosotros vamos a comenzar hacer
- E –Tengo un rombo gigante

Un ejemplo se encuentra en la pregunta número tres, en la cual se les pedía identificar las partes de una figura, a lo que todos los estudiantes respondieron de manera correcta.

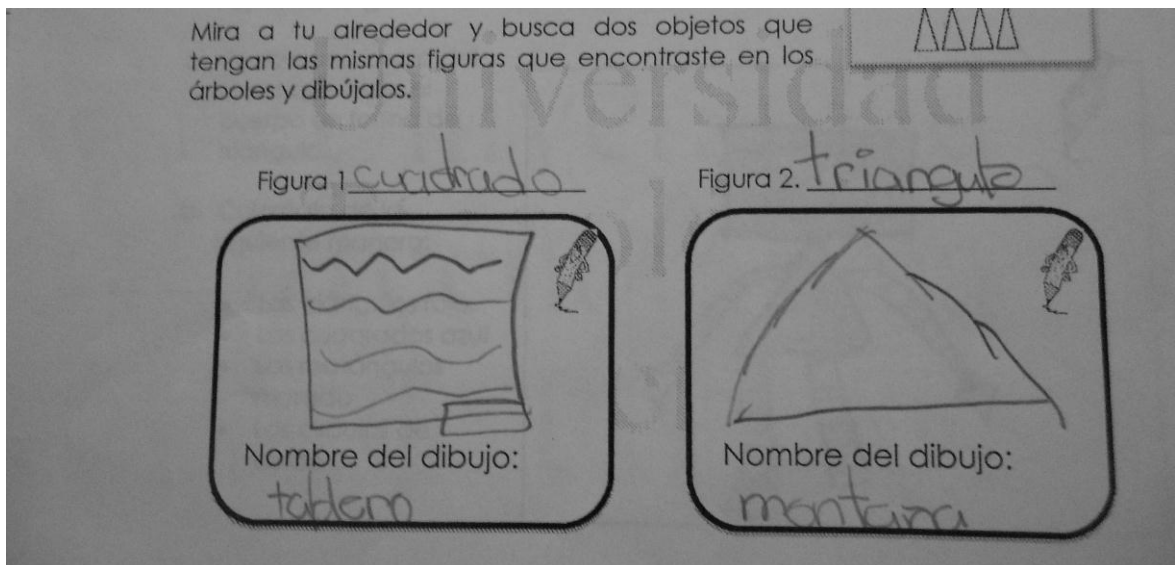




**Imagen 15 Pre-test, pregunta 3**

En la imagen se puede evidenciar como el estudiante logra identificar las partes que conforman el dibujo, eligiendo correctamente las figuras que hay en él, entre una serie de opciones que se le proporcionan.

En el indicador siete “Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor”, podemos decir que la mayoría de los estudiantes tienen dicha conciencia, (ver preguntas 1, 3 y 6). Esto se puede evidenciar en la pregunta número tres, ya que allí se ve claramente cómo el estudiante busca respuestas en el entorno, haciendo uso del espacio para ejemplificar lo aprendido, en este caso, en cuanto a las figuras.



**Imagen 16 Pre-test, pregunta 3**

De la misma manera, lo hacen en las preguntas 1 y 6, donde los estudiantes lograron encontrar en su entorno las figuras relacionadas con las preguntas trabajadas en el momento de la realización del pos-test, de la misma manera que lo hicieron durante las clases al trabajar los triángulos como tema principal, puesto

que la docente les pedía buscar triángulos en su entorno o en el material trabajado y ellos lo hacían de inmediato actuando de la manera correcta. Así mismo, al realizar construcciones en origami, puede predecir qué figuras geométricas se formarán a partir de los dobleces realizados, de manera que muestran un conocimiento y una conciencia total del espacio en el que se mueven y más aún, del espacio en el que trabajan y aprenden.

D –A bueno entonces ponemos todas las hojas así que nos quede el cuadrado.

E –Y hacemos un triangulo... (doblando la hoja)

El indicador 8 “Reproduce figuras a partir de modelos”, todos los estudiantes lograron cumplirlo (ver preguntas 5 y 8), ya que conseguían dar respuesta a lo propuesto por la docente. Por ejemplo, durante la clase los estudiantes intentaban constantemente seguir a la docente en sus construcciones en origami, continuando paso a paso cada una de las instrucciones que ella daba, de manera que reprodujeran lo más fielmente posible los modelos en origami que ella intentaba trabajar.

D –entonces vamos a comenzar hacer a nuestro gato triangulado listo, entonces lo primero que vamos hacer es doblar la hoja (haciéndolo ella en una hoja para explicar a los estudiantes) de esta puntica hasta la otra, ah pero como lo queremos hacer, que nos quede por este lado o por este.

E –Por este (señalando el lado de color morado)

D –a bueno entonces ponemos todas las hojas así que nos quede el cuadrado.

E –y hacemos un triangulo (doblando la hoja)

Es el caso de la pregunta cinco, donde se les pide que reproduzcan un robot a partir de la muestra dada en la misma página, para luego colorearlo según características específicas mencionadas:

5. A Trio le gustó más el robot que tiene el cuerpo en forma de **triángulo**...

a. Realiza una copia del robot que tiene el cuerpo en forma de triángulo.

b. Coloréala de la siguiente manera:

- Los triángulos rojo
- Los cuadrados azul
- Los rectángulos morado
- Los círculos de verde

**Imagen 17 Pre-test, pregunta 5**

Se puede terminar este análisis de visualización diciendo que en este ejercicio del pos-test, los estudiantes se encuentran ubicados en la escala de siempre, respondiendo a los ocho indicadores mencionados con anterioridad basándonos en el nivel de razonamiento de visualización propuesto por Van Hiele.

De igual manera se revisaron los indicadores del nivel de análisis propuesto por Van Hiele, siguiendo el mismo parámetro por el cual se tomaban cada una de las características de dicho nivel como indicadores guía.

Revisando los indicadores se puede decir que en el número uno “Identifica componentes de un todo pero no los relaciona entre sí” todos los estudiantes lograban un siempre (ver preguntas 5, 6 y 8), esto se puede evidenciar en las

clases cuando se toman las construcciones en origami para encontrar en ellas figuras geométricas que lo componen, tal como se muestra en el diálogo a continuación:

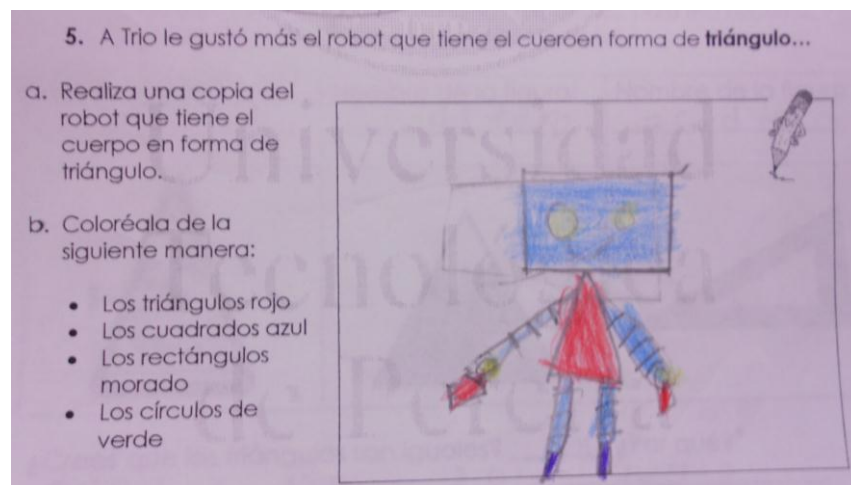
D –¿Cuántos triángulos hay ahí?

E -Tres

D –Muéstrame los tres que ves

E -(señala con el dedo los triángulos que ve)

De la misma manera, en la pregunta número cinco, los estudiantes demostraron su habilidad para identificar los componentes de un todo, puesto que debían colorear una imagen basándose en cada una de las figuras geométricas que la conformaban. A esto, todos los estudiantes respondieron de manera correcta, tal como lo muestra la imagen.



**Imagen 18 Pos-test, pregunta 5**

En el indicador dos “No diferencia cuerpos de figuras”, la mayoría de los estudiantes mostraban respuestas correctas (ver preguntas 2 y 4), no solo en el pos-test, sino también durante la clase, cuando al trabajar con figuras geométricas, los estudiantes hacía mención de algunos cuerpos, pero inmediatamente caían en cuenta de su error o bien, durante la acción, corregían lo mencionado, así:

D –Estábamos haciendo figuras de triangulitos y ¿como es que se llama nuestro personaje maravilloso?

E –Trio.

D -¿Y trio es un que?

E –Una pirámide.. ah, un triángulo.

Así mismo, en la pregunta número dos, los estudiantes tuvieron que discriminar entre cuerpos y figuras ya que se les pedía que compararan una imagen

conformada por figuras geométricas con unas figuras y cuerpos que se le presentaban a un lado. Los estudiantes lograron responder la figura de manera adecuada, tal como se presenta en la imagen a continuación:

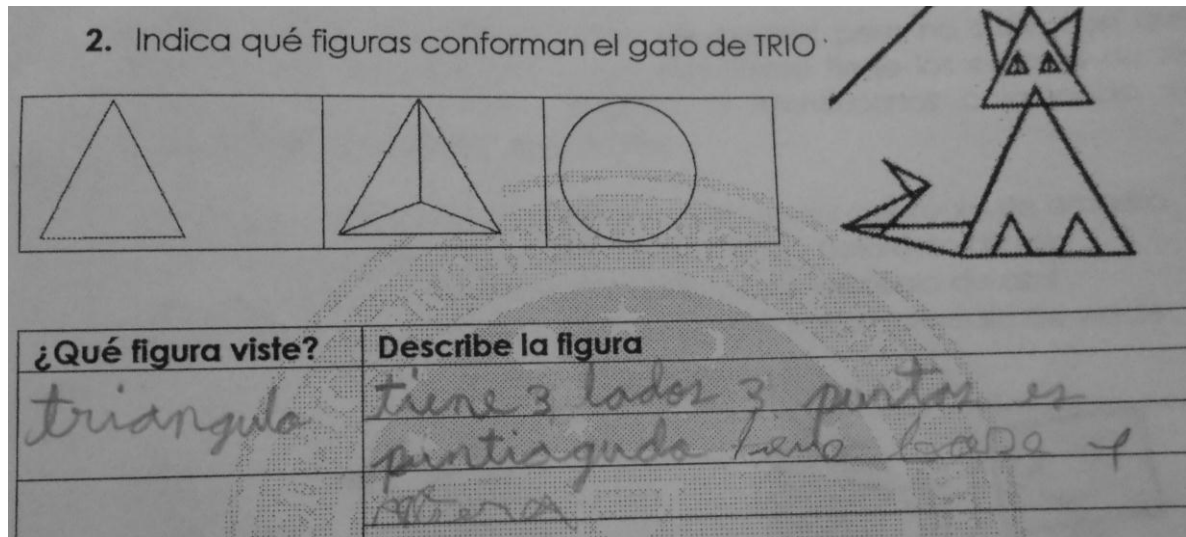


Imagen 19 Pos-test, pregunta 2

En el indicador tres “Mediante la observación y la experimentación, inician a distinguir las características de las figuras”, la mayoría de los estudiantes lograron cumplir con el objetivo (ver preguntas 2, 3 y 4). Esto se ve claramente durante la clase, cuando exploran el material trabajado en búsqueda de características propias de las figuras trabajadas, a continuación se muestra un ejemplo:

D –Están en diferente posición los triángulos.

E –Si como grande, grande y pequeño.

D –O sea que hay uno mas grande y otro mas pequeño

E –Oigan ¿Y si vemos estos tres?

D -Y si vemos estos tres ¿Qué diferencia vemos?

E -(Los estudiantes se reúnen a observar sobre el piso las figuras.

D –Todos los triángulos son iguales

E –No

D –No son iguales o si son iguales

E –Si, pero mire que o son iguales porque este esta mas pequeño y este esta mas grande (señalando la figura)

E –Y este es un triangulísimo (sosteniendo en la mano la figura)

O –O sea que son triángulos diferentes porque tiene tamaños diferentes cierto.

De la misma manera, en la pregunta número tres, los estudiantes muestran su capacidad para distinguir características de las figuras, como lo son aquellas de las que se componen algunos dibujos como se muestra en la pregunta. Allí, se les pide a los estudiantes que distingan las figuras que conforman un cohete, y



posteriormente con esas mismas figuras, busque algunos elementos de su entorno. Tal como se muestra en la imagen:

3. TRIO necesita saber con qué figuras está formado su cohete de juguete ¿Podrías ayudarlo?

a. Con cuadrados y rectángulos  
b. Con triángulos y cuadrados  
c. Con triángulos y cubos  
d. Con pirámides y rectángulos

Mira a tu alrededor y busca dos objetos que tengan las mismas figuras que encontraste en los árboles y dibújalos.

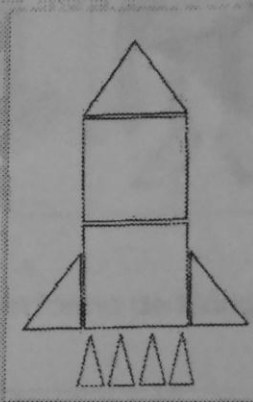
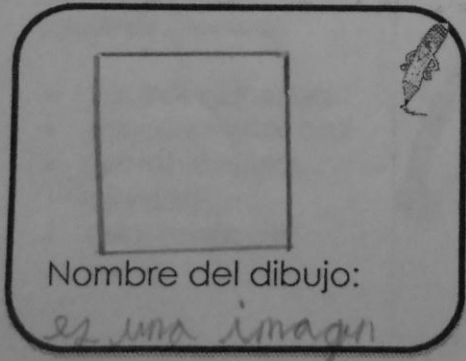
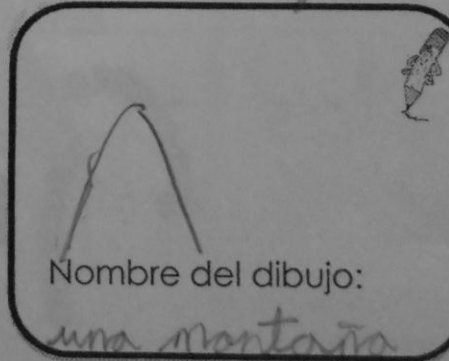


Figura 1. cuadrado



Nombre del dibujo:  
es una imagen

Figura 2. triángulo



Nombre del dibujo:  
una montaña

Imagen 20 Pre-test, pregunta 3

En el indicador cuatro “No se ven las interrelaciones entre las figuras” se muestra que ningún estudiante cumple con dicha característica puesto que, por el contrario, todos ven las interrelaciones de figuras (Ver preguntas 7 y 8), esto se ve reflejado durante la realización de las fichas de trabajo, cuando la docente les dice que pinten cada triángulo de un color determinado, lo cual los obliga a interrelacionar las figuras encontradas por medio de la medición de sus lados y la comparación de los mismos.

D –Muy bien, ahora dice colorea los triángulos que encontraste en tus líneas de la siguiente manera: los triángulos equiláteros se pintan de rojo.

E -¿como así?

D –Entonces mira en los triángulos que dibujaste, cuales triángulos ves que son iguales

E –Este y este

D –Bueno entonces van de rojo, si los triángulos tienen dos lados iguales los pintan de azul y si tienen los lados diferentes los pintan de verde.

E –Profe todos son diferentes

D –Entonces si todos son diferentes, ¿entonces de qué color son? De color verde.

Así mismo, en la pregunta número siete los estudiantes debían identificar qué forma tenían algunos dibujos propuestos. Una vez identificaron que todos tenían forma de triángulo, debían interrelacionarlos, definiendo si todos eran diferentes o si tenían algo en común, a lo cual todos respondieron de manera correcta, identificando que aunque todos eran triángulos, cada uno era de un tipo diferente, según lo aprendido durante las clases.

7. TRIO quiere saber si todos los triángulos son iguales, para eso necesita que le ayudes a identificar los siguientes triángulos.


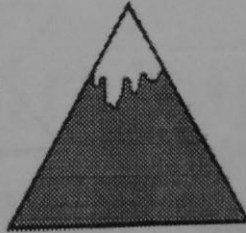
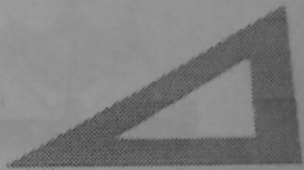
Nombre de la figura: <u>isósceles</u>	Nombre de la figura: <u>equilátero</u>	Nombre de la figura: <u>Escaleno</u>
		
¿Crees que los triángulos son iguales? <u>no</u> ¿Por qué? <u>por que todos miden diferentes</u>		

Imagen 21 Pre-test, pregunta 7

En el indicador cinco “Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí”, todos los estudiantes cumplían con la característica (ver preguntas 3 y 8). Puesto durante la clase, por ejemplo, al explorar el material, los estudiantes encontraban algunos elementos como representantes de una clase “Las figuras geométricas”, ya que cuando la docente les menciona el término, los estudiantes dicen varios elementos que encuentran en las hojas de origami, pertenecientes a él.

E –Hojas de origami que bacano.

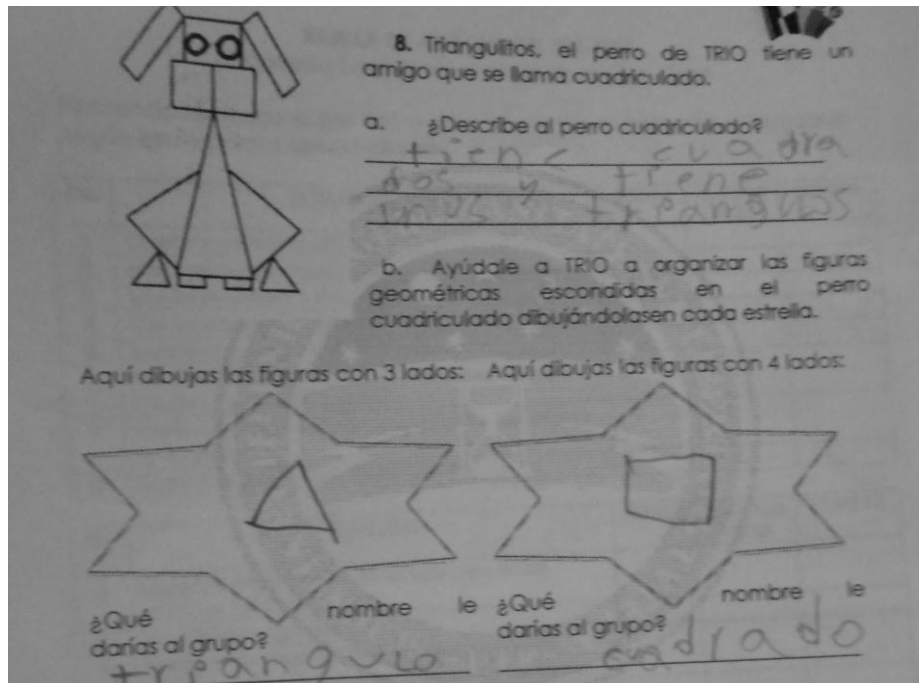
E –Hay que lindo, yo no conocía estas hojas

E –Eso parece como un sobre de papel también.

D –Hay muchas figuras en esas hojas

- E -Si. Tan bacano. Hay muchas formas
- E –Hay triángulos y cuadrados.
- E –Y un rombo

Esto se puede evidenciar también en la preunta número 8, donde los estudiantes clasifican elementos basados en algunos características que proporciona el docente. Esta pregunta, es resuelta por todos los estudiantes de manera correcta, tal como se muestra en la imagen a continuación:



**Imagen 22 Pos-test, pregunta 8**

En el indicador 6 “Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes”, se muestra que ningún estudiante cumple dicha característica, ya que por el contrario, todos enuncian propiedades suficientes y necesarias a la hora de identificar figuras geométricas (ver preguntas 2-6-8). Esto se puede evidenciar durante la clase cuando mientras se realizan las construcciones en origami, la docente entabla diálogos con los estudiantes, indagando sobre los conocimientos que estos tienen acerca de las propiedades de las figuras geométricas trabajadas, en éste caso, del triángulo, así:

- D –Listo hacemos el doblado, quien me quiere decir que formamos cuando doblamos la hoja.
- E –Un triangulo
- D –Y porque es un triangulo.
- E –Porque tiene tres lados.



D –Muy bien, porque tiene tres lados. Y quien me quiere decir porque mas es un triangulo.

E –Porque tiene tres puntas.

D –Porque tiene tres puntas

E –Y tiene una base.

De la misma manera, se puede evidenciar en la pregunta número seis, donde se les pide describir algunas figuras geométricas hayadas en su entorno, realizando una lista de propiedades acordes a lo que se describe, tal como se ve en la imagen:

6. Identifica 3 figuras geométricas en tu entorno y llena el cuadro con los datos.



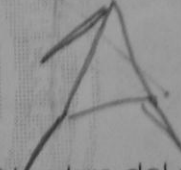
Nombre de la figura: <u>rombo</u>	Nombre de la figura: <u>rectángulo</u>	Nombre de la figura: <u>triángulo</u>
Describe la figura: <u>esta en una</u> <u>ventana tiene 4</u> <u>vertices.</u>	Describe la figura: <u>tiene 4 venti-</u> <u>cos y todos</u> <u>es para escribir</u>	Describe la figura: <u>tiene 3</u> <u>lados 3</u> <u>vertices.</u>
Dibuja el objeto: 	Dibuja el objeto: 	Dibuja el objeto: 
Nombre del objeto: <u>ventana</u>	Nombre del objeto: <u>cuaderno</u>	Nombre del objeto: <u>mesa</u>

Imagen 23 Pos-test, pregunta 6

En el indicador siete “Puede hacer conjeturas mediante la observación”, se puede decir que todos los estudiantes logran hacerlo (ver preguntas 1-3-4-8), lo cual se ve claramente durante la clase, por ejemplo en el siguiente diálogo:

D –Mira bien

E –Mira ya hicimos este.

E –Ya hicimos a Trio

D –A ver muéstrame los tres que tu viste

E -Este, este y este (señalando con el dedo las partes que observa)

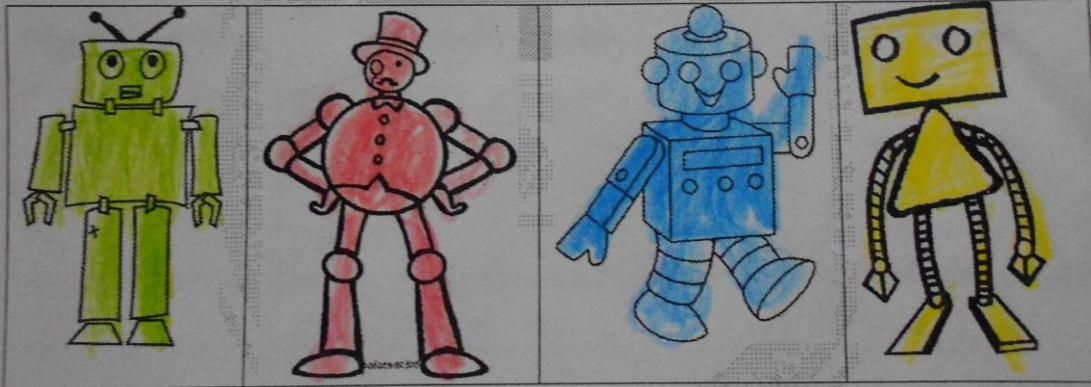
D –Ay! mira que ella vio tres triángulos

E –Ah, yo también

En la conversación se puede evidenciar como el estudiante a partir de una imagen que muestra la docente, puede hacer inferencias respecto a lo que ve, dando a conocer lo que en su momento observa, como los triángulos que ve en ella y la diferencia de estos. Tal como lo realiza en la pregunta cuatro donde el estudiante compara diferentes formas con las que están hechos los cuerpos de los robots y los identifica, coloreándolos con las indicaciones que allí se le dan, para de esa forma mirar si los niños realizan una buena deducción acerca de lo que observa; ver a continuación el ejemplo:

4. TRIO quiere comprar un robot de juguete pero no sabe con qué forma, así que necesita saber qué forma tiene los cuerpos de los robots de sus amigos. Ayúdalo a identificarlos coloreando los cuerpos con los siguientes colores.

- a. El robot con cuerpo en forma de triángulo coloréalo de amarillo
- b. El robot con cuerpo en forma de círculo coloréalo de rojo
- c. El robot con cuerpo en forma de cubo coloréalo de azul
- d. El robot con cuerpo en forma de cuadrado coloréalo de verde



The image shows four robots in a row, each with a different body shape. From left to right: 1. A green robot with a square body. 2. A red robot with a circular body. 3. A blue robot with a cube body. 4. A yellow robot with a triangular body. The robots are drawn in a simple, cartoonish style with various limbs and heads.

Imagen 24 Pos-test, pregunta 4

## 6. DISCUSIÓN E INTERPRETACIÓN

A partir de la unidad didáctica desarrollada en la institución educativa Los Ángeles con los estudiantes de grado 2º, se realizó un análisis de las fases de aprendizaje y los niveles de enseñanza propuestos por Van Hiele. Con base en esto, de la mano con la teoría de Van Hiele y apoyándonos en la teoría de Jean Piaget, se procede entonces a realizar una triangulación donde se realiza una contrastación de los datos recopilados tanto desde fases como desde los niveles.

Se puede afirmar que en el desarrollo del pre-test los estudiantes mostraron un desempeño intermedio en el nivel de Visualización, ya que aunque casi todos poseían una percepción visual global y todos identificaban y describían atributos físicos; solo algunas veces utilizaban las propiedades físicas, identificaban componentes de un todo, tenían conciencia del espacio, reproducían figuras a partir de modelos y clasificaban y comparaban objetos, además pocos utilizaban un lenguaje técnico tal como se ve en la imagen a continuación, donde se muestra como los estudiantes hacen uso de palabras cotidianas para explicar sucesos matemáticos.

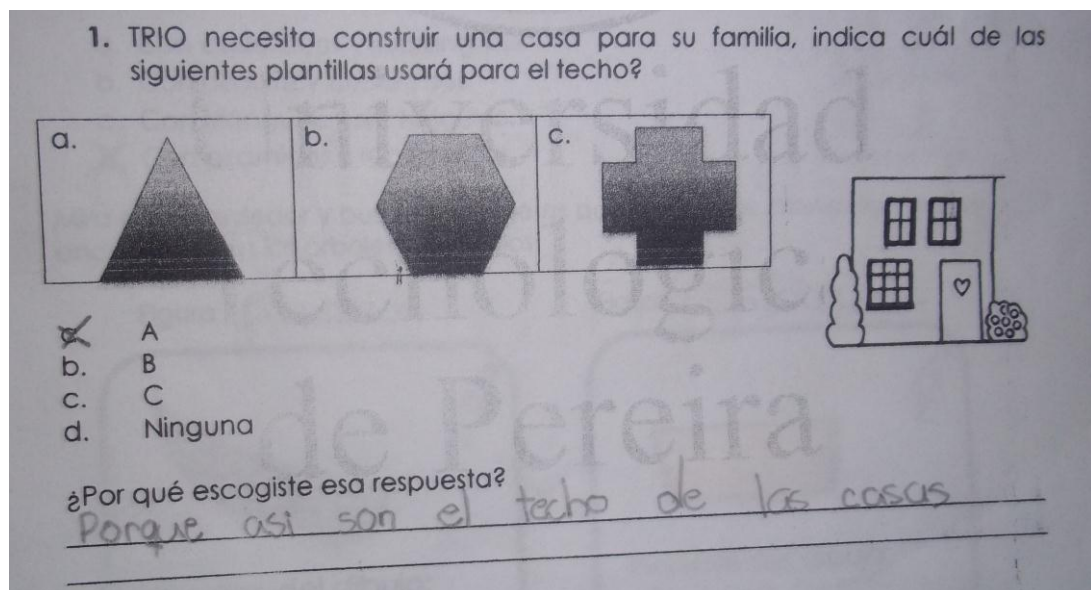


Imagen 25 Pre-test, pregunta 1

Esto significa que los estudiante se encontraban en el nivel de “Visualización” entendido en la teoría de Van Hiele como aquel nivel inicial donde los estudiantes tienen conciencia del espacio como algo que existe alrededor de ellos y los conceptos geométricos se ven como entidades totales más no se ven sus componentes o atributos.

La imagen a continuación es una muestra fiel de la visión que tiene los estudiantes en esta etapa, puesto que ven los objetos o figuras como un todo sin tener en cuenta sus atributos o propiedades más específicas, como lo son, los lados, los vértices, etc. Sino, tomando en cuenta adjetivos de uso cotidiano, en un intento de caracterizar las figuras presentadas.

2. Indica qué figuras conforman el perro de TRIO y descríbela.

¿Qué figura viste?	Describe la figura
un círculo	el pequeño es circular
rectángulo	abajo cortico
triángulo	abajo es largo y hacia arriba tiene punta

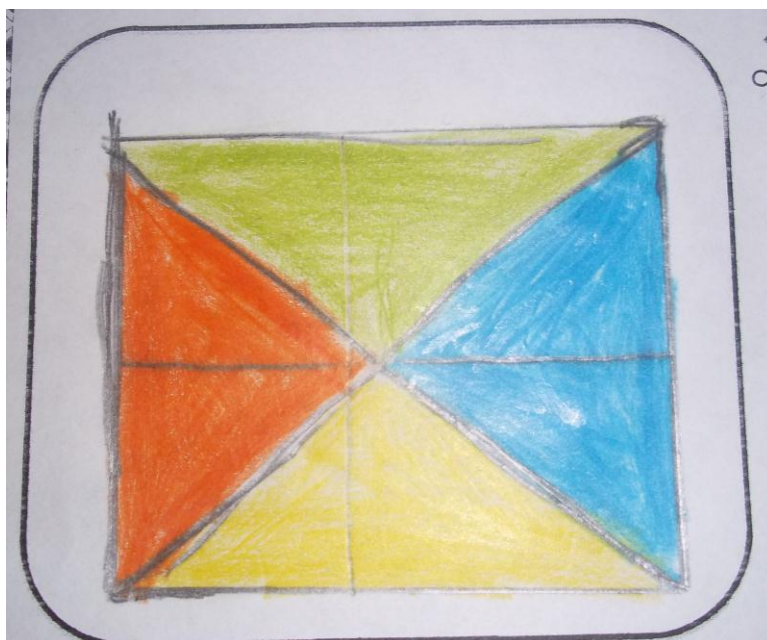
3. TRIO necesita saber con qué figuras están formados

Imagen 26 Pre-test, pregunta 4

Lo anterior concuerda con la teoría de Piaget (1967)<sup>30</sup> puesto que éste dice que el dibujo de los estudiante hacia los seis o siete años refleja la intención de los niños hacia relaciones elucídela tales como la abertura de los ángulos, o la congruencia de los lados. Lo cual cumplen la mayoría de los niños, indicando que ambas teorías concuerdan en el primer nivel. Es decir, tanto Van Hiele como Piaget están de acuerdo con que los estudiantes inician el desarrollo del pensamiento espacial siguiendo unas características específicas, que cada uno define según corresponda con su teoría.

<sup>30</sup> Camargo, L. Revista Colombiana de Educación. Bogotá, Colombia. N.º 60. Pág. 7





**Imagen 27 Ficha 1**

En la imagen anterior se muestra como los estudiantes logran realizar modelos de figuras, tal como lo indica Van Hiele para ésta etapa, haciendo uso de las propiedades mencionadas por Piaget, al dibujar triángulos que se muestran iguales entre sí. En este sentido, los estudiantes dan ejemplo de lo que estos dos autores sugieren para esta etapa de aprendizaje, o en términos de Van Hiele, en este nivel de razonamiento.

Lo anterior, nos lleva a reflexionar acerca de que el docente debe ser conocedor de estas etapas, para que a partir de ellas la enseñanza de los conceptos se haga, tal como se hizo en la aplicación de la unidad didáctica. Tenemos pues, que en la primera sesión la docente inició la aplicación de la unidad didáctica teniendo en cuenta el nivel de razonamiento de los estudiantes, de manera que cada una de las intervenciones apuntaban al afianzamiento del mismo, contribuyendo al desarrollo de su lenguaje en cuanto al uso de definiciones, la descripción de las figuras, las clasificaciones y demostraciones de las mismas.

En este orden de ideas, a continuación se presenta una mirada crítica de los hallazgos encontrados en la implementación de la propuesta.

Inicialmente tomaremos la “Fase de Información” en la cual se pudo evidenciar como la docente realizó acciones pertinentes a la misma ya que como lo dice Van Hiele , en esta etapa inicial el profesor y los estudiantes deben participar en la conversación y actividad sobre los objetos de estudio de este nivel. Las observaciones se realizan y las preguntas se plantean, y los problemas tienen como finalidad revelar a los estudiantes cuál será el área de la geometría que van

a estudiar, además se trata de determinar, o acercarse lo más posible, a la situación real de los alumnos/as en cuanto a sus conocimientos previos y también en cuanto a su nivel de razonamiento ya que esta fase es oral y mediante las preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes; por otro lado se deben dar a conocer los materiales a los estudiantes puesto que en la teoría de Piaget sobre el desarrollo cognitivo, se habla sobre la importancia de que los estudiantes conozcan y manipulen el material con el cual se va a trabajar, puesto que estos se encuentran en la etapa donde se consolidan las estructuras cognitivas del pensamiento concreto.

Ahora bien, aunque no se demostró una introducción al objeto de conocimiento, puesto que en un inicio solo se indagó por la técnica a trabajar durante el día; sí se dio una breve reseña de los problemas a resolver, sin mencionar el tema de la geometría propiamente, sino haciendo alusión nuevamente a la técnica y a las manualidades que se van a realizar.

D –Y vamos a hacerlos durante todas las clases, vamos a ir haciéndolos y al final vamos a tener a todos estos amigos contruidos en papel. Vamos a aprender a hacer... Vamos a aprender a hacer un perro, un gato y un pato. Vamos a aprender a hacerlos en papel, ¿Bueno?. Entonces vamos a correr las sillas alrededor del salón

Por otro lado, se dedicó una buena parte del tiempo a indagar por los conocimientos previos de los estudiantes:

D –Ustedes saben ¿Cómo se llama cuando uno dobla el papel?

D -¿Quién había escuchado el nombre de origami?

D –Entones cuando lo tengamos así en el suelo. Juan, en el suelo, Mari. Cuando lo tengamos así vamos a ver... ¿Esta parte de abajo cómo se llama? –Señala la base del triángulo.

Además, se proporcionaron diversos momentos de la clase para realizar preguntas acerca del nivel de razonamiento del grupo y para mencionar los materiales que se usaron durante la clase y los elementos que se construyeron con el material mencionado:

D –Se llama origami cuando uno hace figuritas con papel, doblando el papel... Entonces, vamos a ver las figuras que podemos formar con el origami.

D –Y ¿Qué dijimos que cómo era un triángulo?

D –Muy bien, pero vamos a ver una cosa. ¿Si paramos el triángulo así se para? – Para el triángulo en una punta.

D –Muy bien, entonces tiene tres lados. ¿Alguien me quiere decir algo más de los triángulos? ¿Quién sabe algo más de los triángulos? –Le da la palabra a Mariana.

Por otra parte, de la fase dos “Orientación dirigida” podemos decir que la docente le dio especial importancia ya que enfatizó la mayor parte de la clase en las acciones que ésta comprende, en las cuales según la teoría de Van Hiele la docente debe proponer actividades y problemas dirigidas concretas y bien secuenciadas, para que los estudiantes exploren, descubran, comprendan, aprendan, asimilen y apliquen, las ideas, conceptos, propiedades y relaciones, que serán motivo de su aprendizaje en determinado nivel; además, el trabajo se debe presentar de manera que los conceptos y las estructuras a alcanzar aparezcan de manera progresiva, para así construir los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

En coherencia con la teoría, la docente propone actividades para que los estudiantes exploren con su dirección. No obstante, la mayor parte de sus intervenciones van dirigidas entorno a los alumnos, quienes deben resolver problemas y actividades basadas en el material proporcionado por ella, siempre contando con su apoyo y su guía:

D –Todos vamos a poner... Todos vamos a poner a Triangulitos en el suelo. Pongamos todos a Triangulitos en el suelo, rápido, rápido, pongamos a Triangulitos en el suelo. Y vamos a mirar todos la cara de triangulitos, del de cada uno, todos van a mirar la carita de triangulitos y me van a decir ¿Cuántos triángulos ven?

De la misma manera, contribuye a que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades clave, mediante el apoyo ante las confusiones, ayudando a los estudiantes a superar las dificultades y dirigir el trabajo hacia el objetivo general.

D –Entonces, si yo te pongo este triángulo acá así ¿Cuál es la base? –Le pregunta a Juliana –Muéstrame con el dedo –Juliana señala una punta –No, recuerda que la base es donde esté paradito, la parte de abajo ¿Te acuerdas? ... Ahora otra vez, mírame, si yo pongo el triángulo así ¿Cuál es la base? –Cambia el triángulo de posición –Señálame con el dedito en el triángulo –Juliana señala correctamente –¿Y la altura? –La altura es la parte alta, por eso se llama altura porque es la parte alta, la que está más arriba.

En cuanto a la fase tres “Explicitación”, Van Hiele plantea que el docente debe conocer el nivel de dominio del lenguaje geométrico de sus alumnos y adaptarse a él, procurando que éste avance en complejidad hacia un lenguaje más estructurado y abstracto, proporcionando actividades en donde los alumnos requieran del manejo de lenguaje matemático preciso y apropiado al nivel de razonamiento en el que se encuentra. Por medio de la estrategia didáctica desempeñada y el acompañamiento de la docente en cuanto al tema de los atributos y propiedades del triángulo, se nota el intento de estas por llevar al estudiante de manera paulatina de un lenguaje común a un lenguaje técnico,

entendiendo como lenguaje técnico a todos aquellas palabras propias del tema trabajado.

Asimismo, se deben proporcionar actividades en donde los estudiantes hagan uso de experiencias previas, pues de esta manera expresan e intercambian su visión emergente de las estructuras que acaban de observar, es decir, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es así como las docentes procuraron establecer las clases de manera colaborativa y no como una clase magistral, de manera que los estudiantes pudieran interactuar entre sí, compartiendo sus experiencias; esto se pudo ver desde la ubicación de los estudiantes, puesto que se rompió el esquema de filas, para pasar a una “mesa redonda” en donde todos quedarán al mismo nivel y pudieran interactuar de esa misma manera.

Por esto es que se llama esta fase, la fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/as y en la que el papel del profesor/a se reduce en cuanto a contenidos nuevos. La interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás. Por ende, es interesante que surjan puntos de vista divergente, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o la de sus compañeros). Donde la docente al finalizar la clase proporciona un espacio para que los estudiantes expliquen cómo han resuelto las actividades<sup>31</sup>.

Así pues, luego del análisis se pudo notar que pocas veces se manifestaron intervenciones que apuntaran a esta fase, puesto que solo se hizo uso de las descripciones de los estudiantes, donde la docente les mostraba una figura o una parte de la figura y les pedía que la describieran, diciendo todo lo que sabían sobre la misma.

D –Tiene tres puntas. ¿Qué me puedes decir tu del triángulo? –Señala a Kamil – Mari ya dijo que tenía tres puntas, ahora tu ¿Qué me puedes decir?

Además, en algunas ocasiones, la docente involucraba las interacciones estudiante-estudiante, de manera que entre ellos mismos solucionaran dudas y pidieran instrucciones sobre el trabajo que se realizaba en el momento:

D –muy bien. Juan Ayúdale a Kamil, enséñale cómo se hace. Juliana ayúdale a Carlos para que las orejitas le queden bien hacia fuera. Muéstrame cómo lo estás haciendo –Se dirige a Juan Andrés –Muy bien!

---

<sup>31</sup> Pastor, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo Van Hiele. Pág. 37.



Por otro lado, no se muestra durante la clase, espacios proporcionados por la docente en los cuales los estudiantes puedan explicar la manera en que resolvieron sus dificultades, o llevaron a cabo los ejercicios propuestos.

Haciendo alusión a la fase cuatro “Orientación libre” en la cual según Van Hiele los problemas no deben ser rutinarios, deben ser más complejos que en la parte anterior, y deben obligar a los estudiantes, a combinar sus conocimientos y a ampliarlos en situaciones diferentes de las que sirvieron para el aprendizaje inicial. Pueden volver a plantearse los problemas que en la fase uno eran irresolubles. Ante esto se vio una falencia de las docentes en cuanto a la innovación o la búsqueda de este tipo de espacios para dejar que los estudiantes aplicaran sus conocimientos adquiridos en nuevos contextos, demostrando que el aprendizaje no fue algo mecánico, sino por el contrario, algo que ellos hubieran interiorizado, tanto desde sus acciones, como desde su lenguaje.

Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado, sin embargo se deben colocar indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente<sup>32</sup>.

Al respecto podemos decir que la docente hizo intervenciones pertinentes muy pocas veces puesto que no proporcionó actividades complejas en las que les permitiera a los estudiante aplicar y combinar los conocimientos adquiridos, por el contrario, siempre hizo uso de las mismas actividades, ejercicios y ejemplos para explicar, desarrollar, socializar y evaluar los temas. No obstante, dichas actividades se establecieron de manera abierta, permitiéndole al estudiante experimentar por si solo, aunque siempre con la dirección constante de la docente que les indicaba paso a paso cómo llegar al objetivo.

D –No, no te equivocaste, simplemente no viste algunos. Algunos encontraron los 6 triángulos, otros encontraron: uno, y éste grandotote dos, tres, y éste grandotote cuatro. Algunos vieron los 6 triángulos y otros solo vieron estos cuatro que hay acá, los cuatro grandes.

---

<sup>32</sup> Ibíd. P. 38.

D –Si tu la llamarías triángulo, coloca triángulo. Pero primero, responde la primera pregunta. Vamos a responder las preguntas en orden.

Sin embargo, una vez ejecutadas las actividades, no se proporcionó un espacio para indagar por la realización de las mismas, sino que se pasó inmediatamente a la socialización, de manera que los estudiantes mostraron lo que hicieron más no cómo lo hicieron.

Finalmente en la fase cinco “Integración” Van Hiele indica que los problemas deben plantear situaciones amplias, en las que no haya predominio de ninguna de las partes que se acaban de integrar, sino que intervengan varias de ella. La primera idea importante es que, en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía, ayudados por la docente la cual realiza una síntesis de lo trabajado durante la jornada<sup>33</sup>.

Así pues, analizando la sesión uno de clase, se pudo comprobar que la docente casi nunca utilizó actividades que condujeran al desarrollo de esta fase, puesto que dedicó poco tiempo al planteamiento de situaciones en las que el estudiante aplicara los conocimientos y el lenguaje adquirido, además se finalizó la clase sin una síntesis apropiada de los contenidos trabajados durante la misma.

No obstante, en la sesión dos la docente inició la clase retomando los temas de la clase anterior, de manera que fue coherente con la teoría de Van Hiele cuando menciona que los niveles no plantean rupturas en el proceso de aprendizaje, por lo que una vez completado un nivel, se debe extender el trabajo de la última fase del nivel anterior con la primera fase del nivel siguiente, representando así un proceso continuo.

De éste modo, en la presenta fase de Información la docente realizó diversas intervenciones con el fin de informar a los estudiantes sobre el campo que se iba a trabajar durante la clase, aunque no hizo referencia a los problemas a resolver durante la misma, ni dedicó algún espacio de la clase para averiguar los conocimientos previos de los estudiantes acerca del nuevo tema a trabajar. No obstante, se preocupó por averiguar el nivel de razonamiento del grupo, mediante preguntas acerca de lo enseñado la clase anterior:

D: ¿Quién se acuerda lo que estábamos viendo ayer?

D: Y ¿Se acuerdan de lo que la profe Alexa nos enseñó ayer? Lo de la base... lo de la altura.

D: muy bien, ¿será que ahí tenemos alguna figura?

---

<sup>33</sup> Ibíd. P, 38.

Adicionalmente, les recordó a los estudiantes la técnica que se venía trabajando desde clases anteriores y el material usado (origami), asegurando que los estudiantes estuvieran preparados para trabajar durante la jornada.

D: listo ahora, resulta que le voy a pasar a cada uno, pásenme a triangulito, a trio. Resulta que les voy a pasar a cada uno los materiales, resulta que estas se llaman hojas de origami, para que hagamos las figuras de hoy listo

En cuanto a la fase dos “Orientación dirigida”, la docente dedica algún tiempo a proponer actividades y las dirige para que los estudiantes exploren, comprendan y apliquen los conceptos y propiedades mencionados en la fase de información. Así mismo, dedicó gran parte de la clase a proporcionar espacios y actividades donde los estudiantes tuvieran que resolver problemas haciendo uso del material proporcionado, en éste caso las hojas de origami y las construcciones con las mismas. De la misma manera, contribuye a que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades clave, mediante el apoyo ante las confusiones, permitiendo que puedan desarrollar las estructuras propias de la presente fase.

D –Este triangulo tiene todos sus lados diferentes, porque este lado (señalando) mide diferente a este y mide diferente a este. ¿Carlos, porque ese triangulo tiene sus lados diferentes?

D –Listo vamos a mirar todos, tenemos todos el mismo cuadrado entonces vamos a comenzar hacer a nuestro gato triangulado listo, entonces lo primero que vamos hacer el doblar la hoja (haciéndolo ella en una hoja para explicar a los estudiantes) de esta puntica hasta la otra... ah ¿Pero como lo queremos hacer? ...que nos quede por este lado o por este, ah bueno entonces ponemos todas las hojas así que nos quede el cuadrado.

De la misma manera en la fase tres “Explicitación”, se puede evidenciar que la docente proporcionó actividades para que los estudiantes adquirieran un lenguaje matemático característico del nivel de razonamiento respectivo. Además en algunos momentos de la clase dio paso a que los estudiantes realizaran actividades mediante las cuales los estudiantes pudieran intercambiar experiencias entre ellos mismos. Sin embargo, no proporcionó espacios de reflexión para que expresaran sus conclusiones frente a los trabajos realizados, ni indagó por las explicaciones de los mismos acerca de el proceso que siguieron al desarrollar las actividades, dando la oportunidad de evidenciar cómo llegaron a determinadas respuestas.

D –Listo hacemos el doblado, quien me quiere decir que formamos cuando doblamos la hoja.

D -Tu miras por allá, míralo bien, toquen la figura, toquen el papel. Pásalo al amiguito (le dice a la estudiante que esta a su lado)

Por otro lado, hablando de la fase cuatro “Orientación dirigida” podemos decir que durante la clase la docente no proporciona actividades para que los estudiantes apliquen y combinen los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades más complicadas, por el contrario, siempre hizo uso de las mismas actividades, ejercicios y ejemplos para explicar, desarrollar, socializar y evaluar los temas. Adicionalmente, realizó actividades objetivas, con una única respuesta, de manera que los estudiantes no tuvieron la oportunidad de realizar tareas que llevaran a diferentes soluciones, ni tampoco indagó por las explicaciones de las actividades realizadas.

De la misma manera, en la fase cinco “Integración” La docente no planteó situaciones en las que el estudiante aplicara los conocimientos y lenguaje adquirido, sin embargo dedicó algunos momentos al final de la clase a proporcionar una síntesis estructurada acerca de lo trabajado durante la sesión, y la unidad didáctica en general.

D –Entonces para terminar hagamos este ejercicio en el tablero, si la base de este triangulo es 19, para mirar que clase de triangulo es este mide trece y este mide trece (refiriéndose a cada uno de los lados), cuando tiene dos lados iguales

D -Listo entonces voy a tapar el tablero, porque quiero que para finalizar me respondan una preguntica ¿Cómo se llama el triangulo que tiene los tres lados iguales?, ¿y como se llama los que tienen lo dos lados iguales?

En consecuencia con lo anterior podemos decir que la fase dos “Orientación dirigida” de la teoría de Van Hiele, va de la mano con lo planteado por Piaget en cuanto a la función del docente como orientador del aprendizaje, ya que a partir del conocimiento de las características psicológicas del individuo en cada periodo del desarrollo, en este caso los niveles de razonamiento, debe crear las condiciones óptimas para que se produzca una interacción constructiva entre el alumno y el objeto del conocimiento. Por tal razón, es importante tener en cuenta que gracias a que durante el desarrollo de la estrategia didáctica las docentes se preocuparon constantemente por indagar los conocimientos previos de los estudiantes, se permitió un avance en los estudiantes, dando como resultado una clase dinámica.

Otra de las funciones del docente, es hacer que el alumno comprenda que no solo puede llegar a conocer a través de otros (maestros, libros), sino también por si mismo, observando, experimentando, combinando los razonamientos. Tal como lo indica Piaget, cuando afirma que el

conocimiento es una construcción que realiza el individuo a través de su actividad con el medio<sup>34</sup>

Es por esto que surge el interés de las docentes a implementar actividades que requieran de material concreto, lo cual hizo que los estudiantes estuvieran motivados, despertando su curiosidad, aún cuando no se les permitió explorar por si solos propiamente, sino siempre con la ayuda y guía de la docente, lo cual facilitó la comprensión de cada uno de los conceptos por parte del estudiante.

Esto, también lo menciona Van Hiele en la fase de “Orientación libre” cuando asegura que el docente debe dejar que el estudiante resuelva por si solo los problemas, colocando indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores<sup>35</sup>.

Refiriéndose a esta misma fase de razonamiento, Van Hiele le asignan un papel especial al error que el niño comete en su interpretación de la realidad., Del mismo modo que lo hace Piaget cuando indica que los errores no son considerados como faltas, sino pasos necesarios el proceso constructivo, por lo que se contribuirá a desarrollar el conocimiento en la medida en que se tenga conciencia de que los errores del niño forman parte de su interpretación del mundo.

D –No, no te equivocaste, simplemente no viste algunos. Algunos encontraron los seis triángulos, otros encontraron: uno, y éste grandotote dos, tres, y éste grandotote cuatro. Algunos vieron los seis triángulos y otros solo vieron estos cuatro que hay acá, los cuatro grandes.

Al finalizar la aplicación de la unidad didáctica y teniendo clara la estrecha relación entre la teoría de Van Hiele y la teoría de Piaget, se hizo necesaria la aplicación de un pos-test el cual constatará la pertinencia y la efectividad de ambas teorías, principalmente la planteada por Van Hiele, comprobando si los estudiantes evidentemente pasaron del nivel de visualización al nivel de análisis, observando si los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas, si ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades, además, si han desarrollado su capacidad para reconocer que las figuras concretas que manipulen son (o pueden ser) representantes de una familia; verificando si han logrado un razonamiento matemático elemental.

---

<sup>34</sup> Camargo, L. Revista Colombiana de Educación. Bogotá, Colombia. N.º 60. Pág. 4

<sup>35</sup> Pastor, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo Van Hiele. Pág. 39

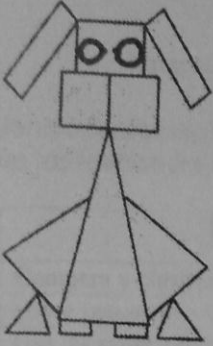
Para lo anterior, se debió primero verificar que los estudiantes hubieran mejorado en cuanto a las falencias que tuvieron en la realización del pre-test en los indicadores de visualización. Acerca de esto, podemos afirmar que todos los estudiante alcanzaron cada una de las características propuestas en este nivel, superando en el pos-test cada una de los indicadores en los que presentaban dificultades respecto a el pre-test, logrando en todas las ocasiones comparar y clasificar los objetos, tener una percepción visual global, usar de propiedades físicas, usar un lenguaje técnico, identificar y describir atributos físicos, y los componentes de un todo, tener una buena conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor y reproducir figuras a partir de modelos.

Ahora bien, sabiendo que los estudiantes superaron todos los indicadores pertenecientes a la visualización, podemos comprobar el desarrollo del nivel de análisis de manera que constatemos el paso de un nivel al otro. Cabe decir entonces que todos los estudiantes lograron identificar siempre los componentes de un todo, aunque sin relacionarlos entre si y considerón elementos como representantes de una clase, pero no relacionaron las clases entre si, además, todos vieron las interrelaciones entre las figuras, distinguieron las características de las mismas y nunca enunciaron propiedades innecesarias para identificar objetos geométricos; así mismo todos los estudiantes pudieron hacer conjeturas mediante la observación y la mayoría diferenciaron cuerpo de figuras.

Esto se evidencia, no solo en el desarrollo del postest, sino también durante el desarrollo de las sesiones, puesto que se vió una transformación en las acciones de los estudiantes, principalmente en su uso del lenguaje, puesto que al finalizar las sesiones, todos ellos hacía uso de un lenguaje técnico para referirse a los triángulos, sus atributos y propiedades, tal como lo enseñaron las docentes a lo largo de la estrategia didáctica trabajada, y como se evidenció también en el análisis de los niveles realizado anteriormente.

Parte de lo anterior, se logra evidenciar en la imagen a continuación, ya que para dar respuesta a ella, los estudiantes debieron hacer uso de sus facultades para clasificar, categorizar, interrelacionar, describir, realizar listas de propiedades, etc. Todas estas, acciones propias del nivel de análisis del razonamiento de Van Hiele que muestran que el niño ha pasado de un nivel a otro.

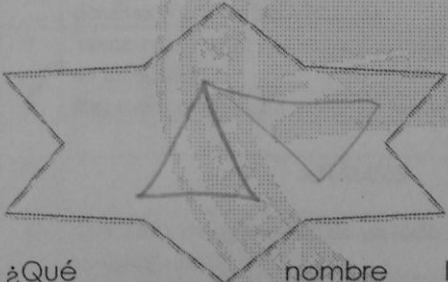
8. Triangulitos, el perro de TRIO tiene un amigo que se llama cuadrículado.



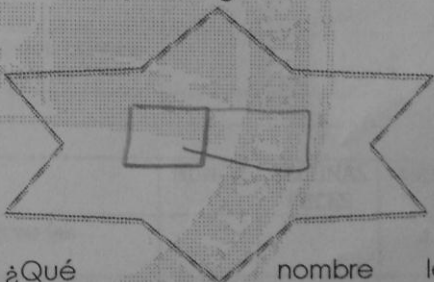
a. ¿Describe al perro cuadrículado?  
tiene muchas figuras  
algunas tienen 3 lados  
y otras tienen 4 lados

b. Ayúdale a TRIO a organizar las figuras geométricas escondidas en el perro cuadrículado dibujándolas en cada estrella.

Aquí dibujas las figuras con 3 lados: Aquí dibujas las figuras con 4 lados:

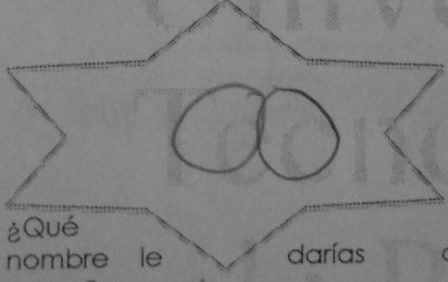


¿Qué nombre le darías al grupo?  
triángulo




¿Qué nombre le darías al grupo?  
cuadrado

Aquí dibujas las figuras que ruedan:



¿Qué nombre le darías al grupo?  
círculo



**¡MUY BIEN!  
HICISTE UN EXCELENTE  
TRABAJO**

Imagen 28 Pos-test, pregunta 8

Lo anterior nos dice que los estudiantes tuvieron un desarrollo en cuanto a su nivel de razonamiento puesto que superaron cada uno de los indicadores de visualización y la mayoría logró alcanzar todos los indicadores de análisis, sin embargo, unos cuantos estudiantes muestran dificultades en algunos de los indicadores, lo cual los obliga a devolverse al nivel de análisis para responder las preguntas planteadas.

Esto concuerda con lo mencionado por Van Hiele acerca de que el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un periodo de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro. La evidencia de éste periodo será que el estudiante mostrará deseos de usar el nivel superior, pero cuando encuentre dificultades o dudas tenderá a refugiarse en la seguridad del nivel inferior, utilizando términos propios del mismo<sup>36</sup>.

Esto se identifica fácilmente puesto a que cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico. Es importante saber que las implicaciones que eso tiene para la actividad de los profesores en sus clases son evidentes y trascendentes: si un profesor quiere hacerse comprender por sus alumnos, debe hablarles en su nivel de lenguaje, es decir, debe amoldarse al nivel de razonamiento de los estudiantes, para a partir de ahí tratar de guiarles para que lleguen al nivel superior, lo contrario provocará en poco tiempo la incompreensión mutua. Por lo tanto, tal como escribe Van Hiele (1984) dos personas que razonan en diferentes niveles no podrán comprenderse. Por ello las docentes al iniciar las clases procuraban hacer uso de una terminología apropiada para los estudiantes, de manera que se pudieran comprender y progresivamente fueron involucrando términos más avanzados del tema tratado, asegurándose de que los estudiantes pudieran comprender lo que la docente decía, al tiempo que iban involucrando nuevos conceptos para dar cuenta del nuevo conocimiento adquirido.

Teniendo en cuenta lo anterior es de resaltar la importancia de que el docente sepa como comunicarse con el estudiante en el nivel en el que están entrando actualmente, en éste caso, el nivel de análisis. Acerca de esto, podemos mencionar con respecto a la construcción y uso de definiciones que los Van Hiele señalaron que en el nivel dos, los estudiantes son capaces de plantear definiciones proponiendo una lista de propiedades de los objetos geométricos a los que acceden perceptualmente gracias a sus representaciones<sup>37</sup>.

Así pues, durante la clase se pudo evidenciar como a medida que los estudiantes aprendían nuevos conceptos, estos los involucraban desmedidamente para hablar acerca de las figuras geométricas trabajadas, sin darse cuenta de que una sola propiedad mencionada era suficiente para dar cuenta de la categorización que recibía dicho objeto.

---

<sup>36</sup> Ibíd. P, 22.

<sup>37</sup> Ibíd. P, 9.



Esta caracterización está en consonancia con la hipótesis constructivista propuesta por Piaget, quien señala que gracias a las acciones que realizan sobre las representaciones, los niños son capaces de identificar propiedades y formarse una representación de los objetos geométricos, en un proceso activo de establecimiento que relacione entre las cualidades perceptuales de los objetos<sup>38</sup>.

Sin embargo, en este proceso de construcción de conocimientos, es importante recordar la idea central del modelo de Van Hiele en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, acerca de que la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento, es fruto de su propia experiencia. Esta experiencia se adquiere muchas veces fuera del aula; la enseñanza adecuada, es por, lo tanto aquella que proporcione esa experiencia. Desde ésta perspectiva cabe mencionar que existe gran variedad de estrategias didácticas de enseñanza que pueden ser válidas a la hora de desarrollar los procesos de razonamiento adecuados en los estudiantes, esto involucra incluso las clases magistrales, aun cuando éstas no tengan una buena acogida en cuanto a los modelos pedagógicos contemporáneos.

Así mismo, lo menciona Piaget cuando expresa que es necesario tener en cuenta que los conocimientos se apoyan en determinadas operaciones intelectuales que son construidas por el individuo. Un aspecto valioso de esta aseveración consiste en subrayar el carácter activo que tiene el sujeto en la obtención de conocimientos, en enfatizar, que la enseñanza debe propiciar las condiciones, para que el sujeto por si mismo, construya los conocimientos, evitando ofrecérselo, como algo terminado<sup>39</sup>.

En vista de esto, y teniendo en cuenta que el paso del nivel uno al nivel dos no es tan traumático de conseguir, pues el tipo de razonamiento es muy simple, y las experiencias en el manejo de figuras, necesarias para que los niños lleguen a poder descubrir sus componentes, los puede proporcionar cualquier tipo de enseñanza, incluso el deductivo. Esto se traduce en que no es demasiado arduo de lograr que en poco tiempo los niños superen el nivel uno y empiecen a utilizar razonamiento del nivel dos.

Lo anterior explica el hecho de que los estudiantes avanzaran en nivel, aún cuando las docentes no ejecutaron la totalidad de las intervenciones que dieran cuenta de las fases planteadas por Van Hiele como necesarias para dicho avance.

---

<sup>38</sup> Camargo, L. Revista Colombiana de Educación. Bogotá, Colombia. N.º 60. Pág. 15

<sup>39</sup> *Ibíd*, p. 4

## 7. CONCLUSIONES

Presentamos las principales conclusiones obtenidas de la investigación a partir de los objetivos específicos, de manera que se determinen los propósitos y el objetivo general de la misma.

- Una estrategia didáctica basada en los niveles y fases de la teoría de Van Hiele asegura el planteamiento de actividades acordes con las capacidades de los estudiantes, contribuyendo así al desarrollo de las competencias de manera secuencial; además, el desarrollarla con la técnica del origami despierta el interés de los estudiantes por conocer acerca de la geometría, generando empatía frente a los temas y facilitando su aprendizaje.
- El buen conocimiento del tema hace que las clases tengan un buen desarrollo y se genere una comprensión significativa al implementar una estrategia novedosa y llamativa para la enseñanza de los atributos y clasificación del triángulo según sus lados usando la técnica del origami.
- Al contrastar la categorización de la estrategia didáctica con el desempeño de los estudiantes se hace notorio que el hacer énfasis en las fases iniciales de la teoría de Van Hiele (información y orientación dirigida), contribuyen a que los estudiantes comprendan el tema estudiado así como también las acciones específicas de la técnica enseñada, favoreciendo el aprendizaje autónomo.
- Aunque la estrategia didáctica construida e implementada impactó positivamente el nivel de razonamiento de los estudiantes, ésta no fue fundamental para dicho acontecimiento, puesto que el paso del nivel uno al nivel dos se presenta casi en forma espontánea siempre que los estudiantes tenga la oportunidad de experimentar con el objeto de conocimiento de manera que genere los procesos de pensamiento adecuado.
- Según el contraste del estado inicial y el estado final de los estudiantes, se puede decir que los desequilibrios a los que se ven enfrentados los estudiantes tienen un papel fundamental en la transición de un nivel de razonamiento a otro, puesto que les genera un choque que los hace desear hacer uso de las estructuras del nivel superior, posibilitando el desarrollo del pensamiento.

## 8. RECOMENDACIONES

A continuación se realizan las siguientes recomendaciones:

- Antes de realizar cualquier intervención con la teoría de Van Hiele, es necesario documentarse al respecto, de manera se pueda realizar una evaluación que permita determinar le punto de partida de las actuaciones del docente, siendo fiel a la teoría pero al mismo tiempo adaptándose al grupo de estudiantes.
- Al momento de realizar otro tipo de investigación se debe tener en cuenta el trabajar sobre el segundo nivel, o posteriores, ya que se encontró que el paso del nivel uno (visualización) al nivel dos (análisis) puede hacerse de manera casi intuitiva, ya que no importa ni una estrategia, ni una metodología didáctica para que esto se logre.
- Hacer uso de una prueba inicial para conocer el nivel de razonamiento de los estudiantes, tomando éste como base fundamental para determinar el tipo de lenguaje que se usará durante las clases, afianzándolo para llegar al lenguaje técnico propio del tema trabajado.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

BONET, A. Biblioteca práctica de consulta del nuevo milenio. Editorial Zamora. Colombia, 2012. Pág. 183

BRAGA, M (1991). Signos, Teorías y Prácticas de la educación. Número 4, páginas 52 - 57. Julio - Diciembre de 1991.

BROITMAN, C, (2000) Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio En Educación matemática, 0 a 5 La Educación en los primeros años N° 22. Ediciones Novedades Educativas, Bs. Aires

Camargo, L. El legado de Piaget a la didáctica de la geometría. Revista colombiana de educación, No. 60. Bogotá, 2011.

Carrascal, K. Y Reyes, D. Niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele estudiantes del grado octavo de la concentración escolar Simón Araujo. Universidad de Sucre, 2002.

DA FONSEC Víctor. Manual de observación psicomotriz

De la Torre, H. Y Vásquez, A. El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. Encuentro Colombiano de matemática educativa. Pág. 1-2

Estándares básicos de competencias, Ministerio de Educación Nacional.

Guillén, G. El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. Educación matemática, diciembre. Santillana, Vol. 16. México, 2004.

HALL, Edward t., La dimensión oculta, México, Siglo XXI Editores, 1986. (Consultado el 10 de Mayo de 2012). Disponible en: [http://www.sepiensa.org.mx/sepiensa2009/padres/familia/crecimiento/f\\_espacionino/espninos2.html](http://www.sepiensa.org.mx/sepiensa2009/padres/familia/crecimiento/f_espacionino/espninos2.html)

Huerta, M. Pedro. Los niveles de Van Hiele y la taxonomía solo: un análisis comparado, una integración necesaria. Universidad de Valencia 1999

Leal, C. Y Suarez, G. El plegado en la geometría, líneas notables del triángulo. El origami en la educación matemática, pág. 7-10

Lineamientos curriculares, Ministerio de Educación Nacional.

Pastor, A Y Gutiérrez A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele.

Matemáticas, clases de triángulos. Tomado el 26 de enero de 2013 de:

<http://www.estudiantes.info/matematicas/geometria/triangulos.htm>

OSAIDITA ALDERETE. Esperanza “Estudios de Psicología”, ISSN 0210-9395, N° 14-15, 1983, págs. 93-108. (Citado el 25 de Julio de 2012). Sacado de:

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=65886>

PIAGET e INHELDER, 1956 Y BOWER 1974 “una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial”. (Citado el 2 de Abril de 2012).

Disponible en: <http://dspace.usc.es/handle/10347/3692>.

PIAGET, Jean. (1981) El desarrollo mental del niño, en: Seis estudios de psicología. Barcelona. Ed. Ariel. (Citado el 15 de Marzo de 2012).

Rizzolo, S. Diseño de actividades geométricas interactivas en el marco conceptual del modelo de Van Hiele.

Royo, J. Matemática y Papiroflexia. Urría, Octubre de 2002.

USISKIN, Z (1991). Apuntes para la enseñanza. El Modelo de enseñanza-aprendizaje de Van Hiele. Signos, Teorías y Practicas. Volumen 4.

Disponible en

[http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act\\_permanentes/mate/mate5f.htm](http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate5f.htm).

Consultado el 18-09-2003

VAN HIELE, P. M. (1986). Structure and insight. A theory of Mathematics Education. London, Academic Press.

VAN HIELE, P. M. (1987). Un método para facilitar el descubrimiento de niveles de pensamiento en Geometría por la práctica de Niveles en Aritmética.

Conferencia sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría: Procederes para Investigación y Práctica. Universidad de Syracuse. Mimeo.

Victoria, J. El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría.

[Viego, L. Jean Piaget y su influencia en la pedagogía. Tomado de:](#)

<http://ebookbrowse.com/jean-piaget-y-su-influencia-en-la-pedagog%C3%8Da-pdf-d312230488> En el mes de Junio de 2012.



## 10. ANEXOS

### A.1 PRE-TEST

### “MI CASA”

Fecha: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_  
Nombre: \_\_\_\_\_ No. \_\_\_\_\_

Durante muchos años los arquitectos e ingenieros han diseñado grandes ciudades, las calles, los puentes, los edificios, los barrios, los estadios, los coliseos, los hoteles, los centros comerciales, los parques, los andenes, y una parte fundamental que son “las casas” las cuales están dentro de un gran espacio y poseen muchas formas.



TRIO es un personaje que necesita información para construir la casa del futuro y tú puedes ayudarlo, señalando con una X la respuesta correcta.

1. TRIO necesita construir una casa para su familia, indica cuál de las siguientes plantillas usará para el techo?



- a. A
- b. B
- c. C
- d. Ninguna

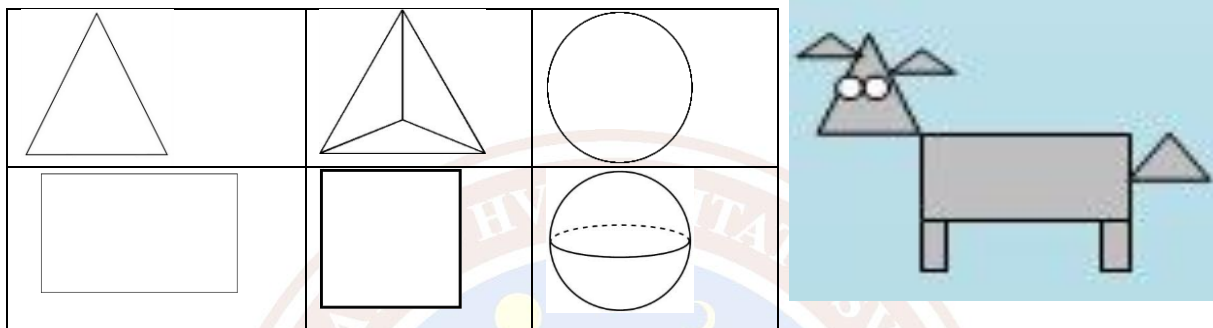


¿Por qué escogiste esa respuesta?

---

---

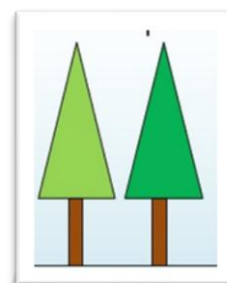
2. Indica qué figuras conforman el perro de TRIO y descríbela.



¿Qué figura viste?	Describe la figura

3. TRIO necesita saber con qué figuras están formados los árboles. ¿Podrías ayudarlo?

- a. Con cuadrados y rectángulos
- b. Con círculos y cuadrados
- c. Con triángulos y rectángulos
- d. Con pirámides y rectángulos




Mira a tu alrededor y busca dos objetos que tengan las mismas figuras que encontraste en los árboles y dibújalos.

Figura 1 \_\_\_\_\_

Figura 2. \_\_\_\_\_



Nombre del dibujo:

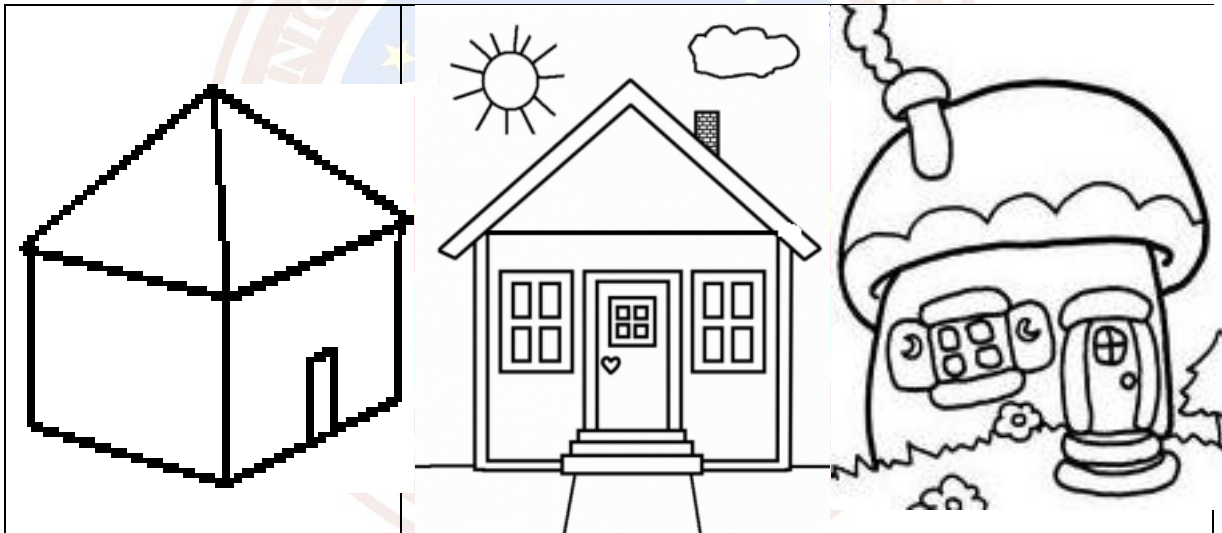


Nombre del dibujo:



4. TRIO necesita saber qué forma tiene los techos de las casas de sus amigos, para tener una idea de cómo construir la suya. Ayúdalo a identificarlos coloreando los techos de las casas con los siguientes colores.

- La casa con el techo en forma de triángulo coloréala de amarillo
- La casa con el techo en forma de pirámide coloréala de azul
- La casa con el techo en forma de semicírculo coloréala de verde






5. A Trio le gustó más la casa que tiene techo en forma de triángulo...




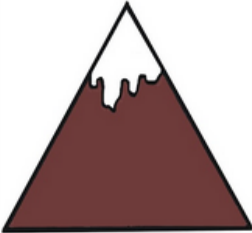
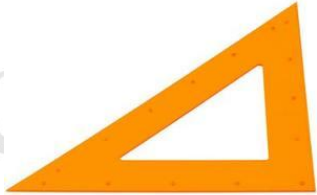
- Realiza una copia de la casa de su amigo.
- Coloréala de la siguiente manera:
  - Los triángulos rojo
  - Los cuadrados azul
  - Los rectángulos morado



6. Identifica 3 figuras geométricas en tu entorno y llena el cuadro con los datos.

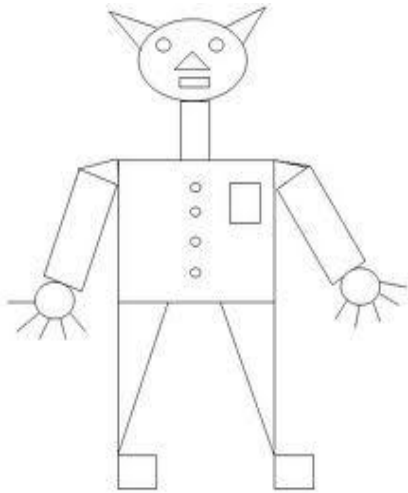
Nombre de la figura: _____ Describe la figura: _____ _____ _____ <b>Dibuja el objeto:</b> 	Nombre de la figura: _____ Describe la figura: _____ _____ _____ <b>Dibuja el objeto:</b> 	Nombre de la figura: _____ Describe la figura: _____ _____ _____ <b>Dibuja el objeto:</b> 
Nombre del objeto:	Nombre del objeto:	Nombre del objeto:

7. TRIO quiere saber si todos los triángulos son iguales, para eso necesita que le ayudes a identificar los siguientes triángulos.

Nombre de la figura: _____	Nombre de la figura: _____	Nombre de la figura: _____
		

¿Crees que los triángulos son iguales? \_\_\_\_\_ ¿Por qué?

\_\_\_\_\_



8. El muñeco favorito de TRIO es su robot .

a. ¿Describe el muñeco de TRIO?

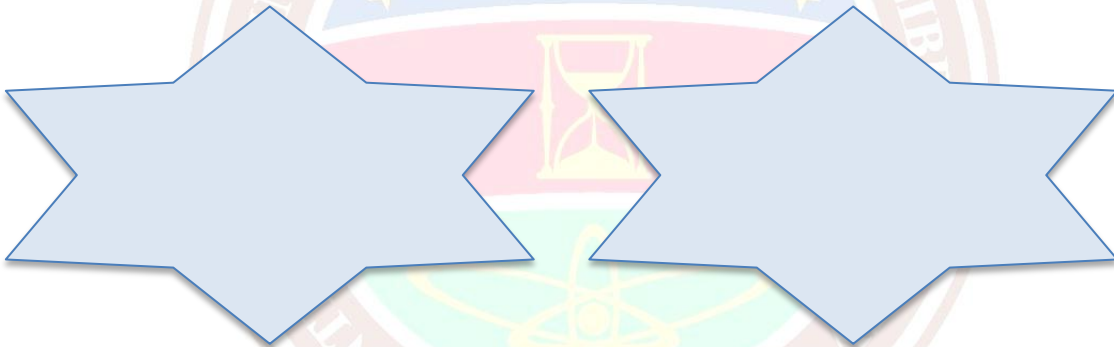
---

---

---

b. Ayúdale a TRIO a organizar las figuras geométricas escondidas en su muñeco dibujándolas en cada estrella.

Aquí dibujas las figuras con 3 lados:      Aquí dibujas las figuras con 4 lados:

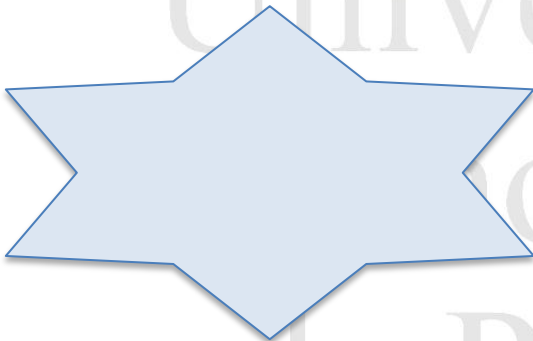


¿Qué nombre le darías al grupo?

¿Qué nombre le darías al grupo?

---

Aquí dibujas las figuras que ruedan:



**¡MUY BIEN!  
HICISTE UN EXCELENTE  
TRABAJO**

¿Qué nombre le darías al grupo?

---

**REJILLA DE ANÁLISIS DEL PRE-TEST**  
(Propuesta basada en la teoría de los Van Hiele)

Habiendo realizado el pre-test, marcar con una X el indicador evidenciado según las respuesta del estudiante.

No.	VISUALIZACIÓN	NUNCA	ALGUNAS VECES	SIEMPRE
1	Compara y clasifica objetos.			
2	posee percepción visual global			
3	Usa las propiedades físicas.			
4	Usa un lenguaje no técnico.			
5	Identifica o describe atributos físicos			
6	No identifica componentes de un todo (no se fija en detalles o partes del espacio)			
7	Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor			
8	Reproduce figuras a partir de modelos			

No.	ANÁLISIS	NUNCA	ALGUNAS VECES	SIEMPRE
1	Identifica componentes de un todo pero no las relaciona entre ellas.			
2	No diferencia cuerpos de figuras			
3	Mediante la observación y la experimentación inician a distinguir las características de las figuras.			
4	No se ven las interrelaciones entre las figuras			
5	Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí			
6	Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.			
7	Puede hacer conjeturas mediante la observación			

- Relación de cada pregunta con la fase/nivel para la realización del análisis.

<b>Visualización</b>		
<b>No.</b>	<b>Indicador</b>	<b>Preguntas</b>
1	Compara y clasifica objetos.	7-2-8
2	posee percepción visual global	1-2-3
3	Usa las propiedades físicas.	2-3-8
4	Usa un lenguaje no técnico.	1-2-6
5	Identifica o describe atributos físicos	1-2-8
6	No identifica componentes de un todo (no se fija en detalles o partes del espacio)	1-2-3-8
7	Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor	1-4-3-6
8	Reproduce figuras a partir de modelos	5-8

<b>Análisis</b>		
<b>No.</b>	<b>Indicador</b>	<b>Preguntas</b>
1	Identifica componentes de un todo pero no las relaciona entre ellas.	5-6-8
2	No diferencia cuerpos de figuras	4-2
3	Mediante la observación y la experimentación inician a distinguir las características de las figuras.	2-3-4
4	No se ven las interrelaciones entre las figuras	7-8
5	Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí	3-8
6	Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.	2-6-8
7	Puede hacer conjeturas mediante la observación	1-3-4-8

Universidad  
Tecnológica  
de Pereira



## A.2 ESTRATEGIA DIDÁCTICA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL  
UNIDAD DIDÁCTICA “EL TRIÁNGULO”

**INSTITUCIÓN:** Colegio Los Ángeles

**FECHA:** Noviembre

**DOCENTES:**

**GRADO:** 2º

**NUMERO DE SESIONES:** 2

Alexandra Rendón Vega

**JORNADA:** Mañana

**HORAS:** 2 Hora por cada sesión

Diana Isabel Ramírez

### Objetivo General

- Al finalizar la unidad didáctica basada en la técnica del origami, los estudiantes tendrán la capacidad de clasificar los triángulos según sus lados, identificando sus atributos y propiedades, con el fin de afianzar los niveles de visualización y análisis planteados en la teoría de Van Hiele.

**Estándar Básico de Competencia 1º a 3º:** Diferencio atributos y propiedades de objetos bidimensionales (Triángulo)

CONTENIDOS		
CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
-Triángulo -Clasificación de los triángulos -Medidas de triángulo -Triángulo equilátero, escaleno e isósceles	-Plegado de papel -Fichas de trabajo -Resolución de problemas	-Trabajo colaborativo -Motivación

TEMA	NIVEL	FASE	DESCRIPCIÓN - SESIÓN 1
Elementos básicos del triángulo	Visualización	Información	Indagación de conocimientos previos mediante preguntas acerca de las expectativas de la clase. Exploración del material (Papel de colores), inferencias sobre las actividades a realizar y las técnicas a utilizar (Origami).
		Orientación Dirigida	Plegado de papel con una forma básica (Ejemplo: Avión). Exploración de los pliegues en búsqueda de figuras con tres lados. Llenado de fichas de trabajo individuales con las figuras halladas. En todo momento se darán ayudas ajustadas.
		Explicitación	Socialización en grupos acerca de los hallazgos, respondiendo a preguntas específicas planteadas por la docente como ¿Cuántas figuras encontraste? ¿Eran todas iguales o diferentes?
		Orientación libre	Despliegado de papel con el fin de ver las huellas de los pliegues en búsqueda de figuras con 3 lados y marcación de dichas figuras en la hoja.
		Integración	Institucionalización de lo visto durante la jornada. Socialización de los hallazgos.
	Análisis	Información	Preguntas sobre conocimientos previos relacionadas con los elementos del triángulo (base, altura, aristas, ángulos). Explicación de las actividades a realizar.
		Orientación Dirigida	Plegado de papel con una forma básica (Ejemplo: Cara de Perro). A medida que se arma se observan las figuras geométricas de 3 lados que se van formando con cada pliegue (triángulos). Al tiempo van llenando una ficha donde se hacen anotaciones sobre los triángulos, diferenciando los tamaños. Se explica a medida que se hace el registro, que cada triángulo consta de una base y una altura.
		Explicitación	Se comenta con el grupo los hallazgos, se solucionan dudas de manera colaborativa entre los mismos estudiantes.
		Orientación libre	Por parejas se realiza un plegado de otra forma simple que escojan (la docente lleva guías con algunas formas para escoger) y llenan una segunda ficha con los mismos datos: Triángulos encontrados y área de cada uno.
		Integración	Cada pareja expone la figura en origami que realizó y da una breve reseña de los triángulos encontrados.

TEMA	NIVEL	FASE	DESCRIPCIÓN SESIÓN 2.
Clasificación del triángulo según sus lados	Visualización	Información	Se informará a los estudiantes la actividad a realizar dentro del salón a partir de imágenes en origami.
		Orientación Dirigida	Se le explicará a los estudiantes que la actividad parte de la observación, el tacto y la traficación. Actividad que se realizará con objetos en origami que allí se encuentren.
		Explicitación	Las docentes y los estudiantes antes del recorrido hablaran un poco acerca de lo que ellos saben de los triángulos y se les pedirá que tengan todo lo que dicen presente para la observación.
		Orientación libre	Al observar las figuras en origami los estudiantes los triángulos que encuentran y las diferencias o semejanzas que ven en ellos. Realicen una figura sencilla en origami donde se puedan evidenciar dos triángulos que tengan lados diferentes
		Integración	Al terminar la observación los estudiantes realizaran un conversatorio acerca de las figuras que vieron en origami, numero de triángulos encontrados en las figuras, características de los lados de los triángulos y se les nombrará la clasificación de los triángulos según sus lados.
	Análisis	Información	Se le explica a los estudiantes el ejercicio a realizar con origami “el origami saltarín” y se les explica cómo se deberá realizar el taller de forma individual.
		Orientación Dirigida	Cada estudiantes contará con sus materiales y una hoja con el taller correspondiente a desarrollar, el cual se irá respondiendo a medida que se vaya realizando los dobles para ir armando el conejo saltarín, el docente irá diciéndoles a los estudiantes paso a paso cada dobles .
		Explicitación	Se le explicara a los estudiantes que a medida que haya que hacer algún dobles para la figura deberán ir respondiendo a lo que le pregunta en taller. ¿Qué figuras vez?, ¿Por qué dices que es un triángulo___?
		Orientación libre	Se realiza un trabajo colaborativo, la docente responderá las dudas y repetirá si es necesario cada dobles para que ellos puedan hacerlo de manera correcta y puedan ver los diferentes triángulos que se encuentran en el conejo saltarín.
		Integración	Se realizará una socialización con la figura del conejo que ya se ha terminado y hablaremos sobre cómo les pareció la actividad y sobre lo que aprendieron y como lo aprendieron sobre la clasificación de los triángulos según sus lados.



## SESIÓN 1

**TEMA:** Elementos básicos del triángulo

### SITUACIÓN PROBLEMA

#### Trio y sus amigos

¿Recuerdas a Trio? Trio es el personaje de nuestra historia y está muy agradecido porque lo ayudaste a responder todas las preguntas que tenía. Ahora él quiere que lo conozcas mejor, además quiere presentarte a sus tres amigos “Perro, Gato y Pato”, juntos podrán pasar momentos muy divertidos mientras aprenden sobre unas figuras geométricas. Pero para eso, debes construir a cada uno de ellos con papel. Vamos a intentarlo! ...

#### ACTIVIDAD 1. Conociendo a Trio

#### NIVEL: VISUALIZACIÓN

**Objetivo:** Diferenciar las propiedades básicas del triángulo por medio la elaboración de figuras en origami, con el fin de afianzar el nivel de visualización de los estudiantes de los grados 1° y 2° del Colegio los Ángeles

Luego de la ambientación de clase pertinente (saludo a los niños, establecimiento de normas, etc.) se inicia la actividad mediante una indagación de conocimientos previos mediante preguntas acerca de las expectativas de la clase, como: ¿Quieres conocer a Trio? ¿Te gustaría construirlo con Papel? ¿Has construido algo con papel antes? ¿Qué sabes construir con papel? ... Luego de la ronda de preguntas, se iniciará con la exploración del material, esto se realizará mostrando a los estudiantes el papel con el que se va trabajar durante la jornada, y realizando preguntas sobre el mismo, como: ¿Has construido figuras con un papel como éste? ¿Qué otros tipos de papel has usado? ¿sabes como se llama cuándo se construyen figuras en papel? ¿Has escuchado hablar del origami? Etc.

Seguidamente se le entregará a cada estudiante un cuadrado de papel con el cual deberán construir a TRIO siguiendo las orientaciones de la docente (Anexo 1). En cada paso de la construcción de TRIO, la docente realizará ayudas ajustadas, además propiciará espacios en los cuales los estudiantes puedan realizar un trabajo colaborativo. Una vez todos hayan realizado el pliegue correctamente la docente los estimulará mediante preguntas como: ¿Qué ves? ¿A qué se te parece la forma que obtuvimos? Etc. Para que busquen figuras con tres lados u otras figuras, identificándolas y nominándolas.

A continuación la docente realizará una socialización en grupo sobre los hallazgos, indicándoles a todos que desplieguen el papel de manera que puedan ver las huellas de los pliegues para así contar las figuras con tres lados que encuentren y luego respondan a preguntas como: ¿Cuántas figuras encontraste? ¿Eran todas iguales o diferentes?...

Seguidamente se les entregará una ficha a cada uno de los estudiantes (Anexo 2), pero antes la docente la leerá y explicará en voz alta, de manera que todos los estudiantes comprendan cómo deben desarrollarla. A medida que los estudiantes van desarrollando la ficha, la docente realizará ayudas ajustadas, además propiciará espacios en los cuales los estudiantes puedan realizar un trabajo colaborativo.

Finalmente la docente recoge las fichas de trabajo ya desarrolladas y dibuja un cuadrado en el tablero con los pliegues encontrados en la hoja donde construyeron a TRIO, basándose en los aportes de los estudiantes, seguidamente llama a un estudiante para que con un marcador de un color diferente al negro marque uno de los triángulos que encontró, luego pregunta a todos si vieron ese triángulo y prosigue llamando a otro estudiante. Este ejercicio continua hasta que todos hayan pasado al tablero. Luego explica a los estudiantes que la figura encontrada se denomina “triángulo” y que todas aquellas figuras con tres lados tienen ese nombre.

Se concluye la clase con el cierre pertinente, realizando una evaluación de la misma con preguntas como: ¿Te gustó la clase?, ¿Te gustó conocer a TRIO?, ¿Cómo nos portamos hoy?, ¿Qué podemos mejorar para la próxima clase?. Terminando con la despedida de los niños y la docente.

## **ACTIVIDAD 2: Conozcamos a TRIANGULITOS**

**NIVEL:** ANÁLISIS

**TEMA:** Elementos básicos del triángulo

**Objetivo:** Diferenciar las propiedades básicas del triángulo por medio la elaboración de figuras en origami, con el fin de afianzar el nivel de análisis de los estudiantes de los grados 1° y 2° del Colegio los Ángeles

### **SESIÓN 2**

**TEMA:** Clasificación de los triángulos según sus lados

**ACTIVIDAD 1.** Conozcamos al gato Triangulado.

**NIVEL:** Visualización

**Objetivo:** Clasificar los triángulos según sus lados por medio la elaboración de figuras en origami, con el fin de afianzar el nivel de visualización de los estudiantes de los grados 1° y 2° del Colegio los Ángeles

La docente llega al salón de clase a las 10:10 de la mañana, saluda a los estudiantes y antes de dar comienzo al encuadre todos deben ir al baño a lavarse las manos y regresar a cada uno de los puestos. La docente pregunta a los estudiantes ¿cómo han estado?, y comienza a realizar preguntas sobre si recuerdan lo que vimos la clase pasada, que vimos, que hicimos y que aprendimos, después de realizar un repaso de lo visto anteriormente, se le pide a los estudiantes organizar las sillas del salón en la parte de atrás y hacernos todos en círculo para trabajar las actividades de la jornada y se les explica que trabajaremos por medio de la observación, el tacto y la graficación, lo primero que se hace es pasarle a los estudiantes diferentes objetos en origami para que puedan observarlos, tocarlos, ver sus dobles y los objetos como tal. Después de observar

las diferentes objetos realizaremos un “conversatorio” sobre lo que pudieron ver, que objetos en origami vieron (la mayoría son figuras con triángulos diferentes), cual es la figura que más se ve y si creen que esa figura geométrica es igual en todas los objetos, porque es igual, porque es diferente, que tiene de diferente?, cuando finalicemos el conversatorio se les dirá que “TRIO” nos quiere presentar a su segundo amigo; a “Gatico Triangulado”, pero quiere que cada uno tengo a un gatico. La docente le entrega a cada estudiante 1 papel de origami y ella comienza a dar las indicaciones paso a paso para que cada uno comience a realizar a gatico triangulado, mientras se realiza cada paso se pregunta que figura geométrica se está viendo al realizar el doblado de papel, si se ven dos figuras iguales se les pregunta que ven de parecido en las figuras, que ven de diferente, y la docente escribe en el tablero lo que los niños dicen. Cuando se termine de hacer a gatico triangulado se les pide que observen que figuras tiene gatico y si creen que son diferentes y el porqué. Seguidamente se les dice que “TRIO” ha traído un triangu-taller para que le ayuden a resolverlo después de haber conocido a su amigo gato triangulado (ficha 3), en la realización de esta ficha, la docente realizará ayudas ajustadas, además propiciará espacios en los cuales los estudiantes puedan realizar un trabajo colaborativo. Se recogerán los triangu – talleres y concluiremos recordando que vimos en el gato triangulado diferentes triángulos, y que todos no eran iguales.

Se concluye la clase con el cierre pertinente, realizando una evaluación de la misma con preguntas como: ¿Te gustó la clase?, ¿Te gustó conocer a gato triangulado?, ¿Cómo nos portamos hoy?, ¿Qué podemos mejorar para la próxima clase? Terminando con la despedida de los niños y la docente. La clase termina a las 11:15

**ACTIVIDAD 2.** Trio y sus amigos viajando en el avión.

**NIVEL:** Análisis

**Objetivo:** Clasificar los triángulos según sus lados por medio la elaboración de figuras en origami, con el fin de afianzar el nivel de análisis de los estudiantes de los grados 1° y 2° del Colegio los Ángeles

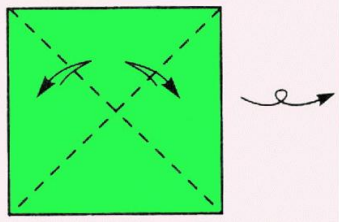
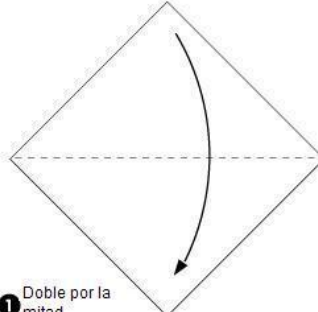
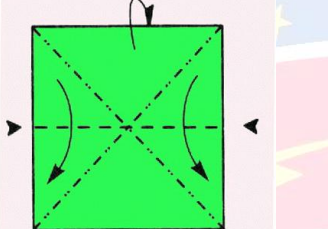
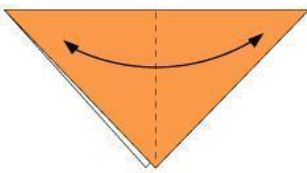
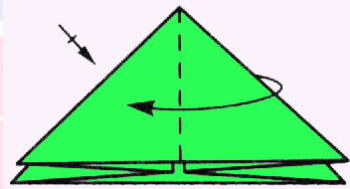
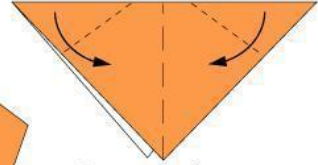
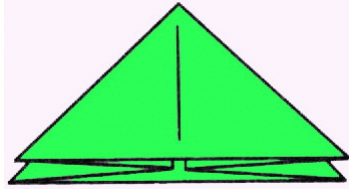
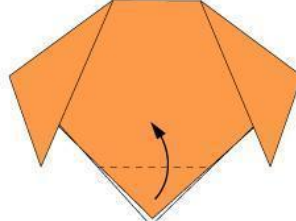
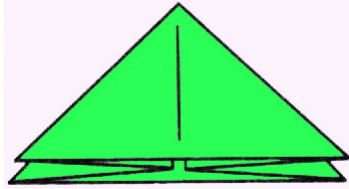
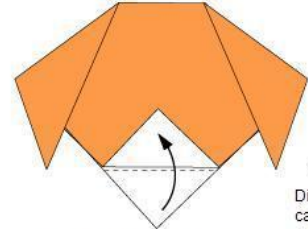
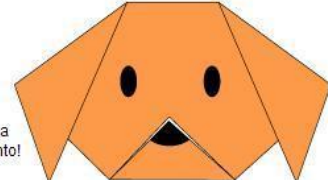


La jornada comienza a las 11: 20, se les pregunta a los niños sobre Trio y los amigos de trio como triangulito y gatico triangulado, hacemos preguntas sobre lo que hemos aprendido de los triángulos. Se le pide a los niños que se sienten en el suelo y se les explica las actividades a realizar durante la clase, y se les cuenta que TRIO quiere que hoy conozcamos tres triángulos los cuales son diferentes ya que tienen como que los lados dispares. A los estudiantes se les muestra en el tablero cada uno de los triángulos, la docente coge una regla y comienza a medir el primer triángulo en el tablero y escribe las medidas y así hace con los dos otros triángulos llevando a los estudiantes a que ellos mismos vean las diferencias de los lados de los triángulos. Cuando hayan visto la diferencia de los triángulos se les contará lo siguiente: TRIO quiere que cada uno de ustedes conozcan los nombres que él le dio a cada uno de esos triángulos para poder diferenciar a cada uno, pero trio se inventó unos nombre súper charros, y quiere que ustedes se los aprendan. A cada triángulo que se encuentra en el tablero se escribe el nombre de cada uno de los triángulos (equilátero, isósceles, escaleno), recordándoles que trio quiere que se los aprendan, y se realizan dos ejercicios en el tablero para que los niños se vayan relacionando. Seguidamente se les entregará a cada uno una hoja de origami, donde realizaremos el avión donde TRIO viaja con sus amigos recorrer Colombia y en este caso irán a visitar a su amigo pato que está enfermo de Bogotá. Nos sentamos en círculo y la docente comenzará paso a paso a guiar a los estudiantes para la realización del avión. Mientras se va haciendo el avión se harán preguntas de que figuras ven y que cuando veamos un triángulo saquemos la regla y midamos para saber que nombre recibe ese triángulo según los nombres que nos enseñó TRIO. Como terminemos de realizar el avión donde TRIO sale con sus amigos se les dirá a los niños que TRIO nos ha traído el triangu – taller (ficha 4), en la realización de esta ficha, la docente realizará ayudas ajustadas, además propiciará espacios en los cuales los estudiantes puedan realizar un trabajo colaborativo. Se recogerán los triangu – talleres y concluiremos recordando todo que vimos en la clase, los nombres de los triángulos e iremos con el avión a dar un paseo por todo el colegio.

Se concluye la clase con el cierre pertinente, realizando una evaluación de la misma con preguntas como: ¿Te gustó la clase?, ¿Te gustó conocer los nombres de los triángulos que TRIO nos enseñó, y hacer el avión?, ¿Cómo nos portamos hoy?, Terminando con la despedida de los niños y la docente. La clase termina a las 12:25

**ANEXOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA**

**SESIÓN 1**

<b>TRIÁNGULO</b>	<b>PERRO</b>
	 <p><b>1</b> Doble por la mitad</p>
	 <p><b>2</b> Doble por la mitad para hacer pliegue</p>
	 <p><b>3</b> Doble en la línea de puntos</p>
	 <p><b>4</b> Doble en la línea de puntos</p>
 <p><b>FIN</b></p>	 <p><b>5</b> Doble en la línea de puntos</p>  <p><b>6</b> Dibujar una cara y ¡pronto!</p>



## FICHA 1 "CONOZCAMOS A TRIO"

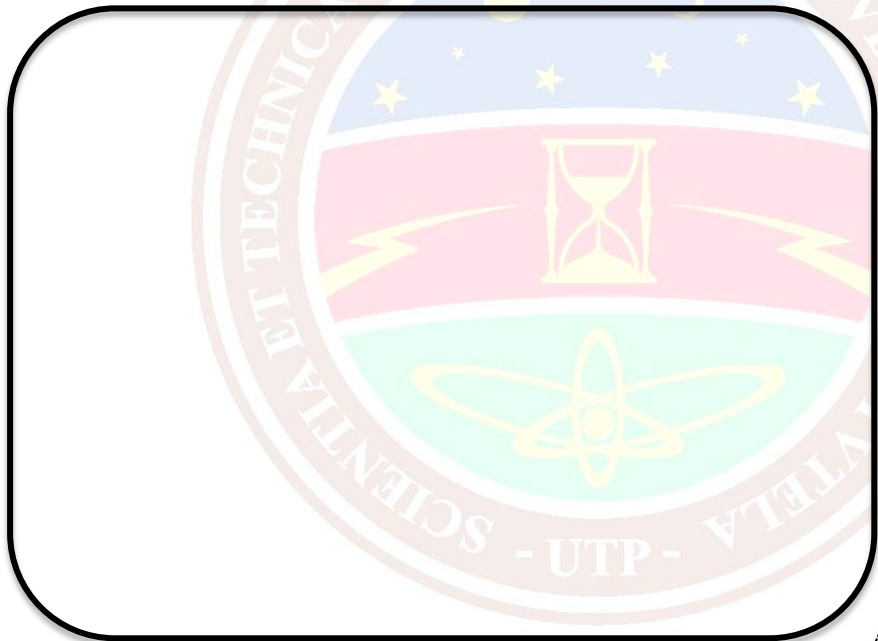
NOMBRE: \_\_\_\_\_

¡Ya conocemos a Trio!

Ahora, ayúdanos a encontrar cuántas figuras con tres lados hay en él...

❖ Desdobra el papel y dibuja cada una de las huellas que dejó el cuerpo de Trio.

❖ Marca los triángulos que se forman y colorea cada uno con un color diferente.



¿Cuántas figuras con 3 lados encontraste? \_\_\_\_\_

¿Cómo llamarías esas figuras?

¿Qué figura forma Trio?

**¡MUCHAS GRACIAS!**

## FICHA 2 “EL PERRO DE TRIO QUIERE CONOCERNOS”



**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

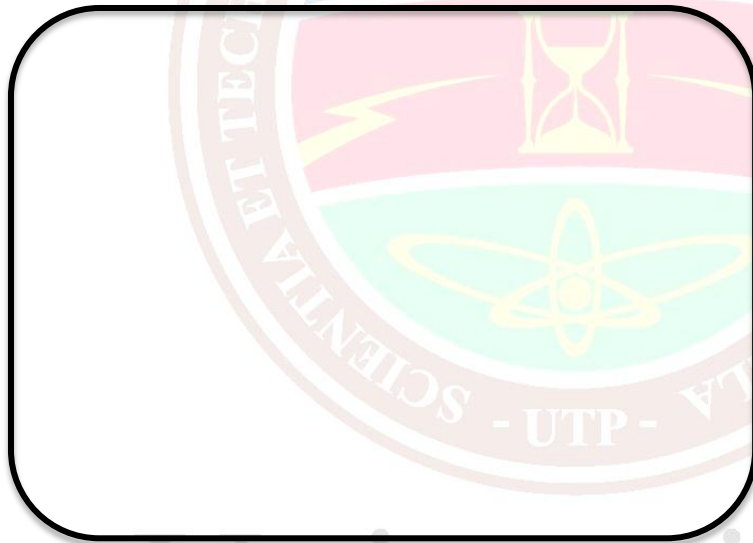
### ¡Te gustó conocer a Triangulitos?

Ahora, ayúdanos a encontrar cuántos triángulos hay en él.

- ❖ Desdobra el papel y dibuja cada una de las huellas que dejó el cuerpo de Trio.



- ❖ Llena el cuadro con los datos encontrados en cada triángulo

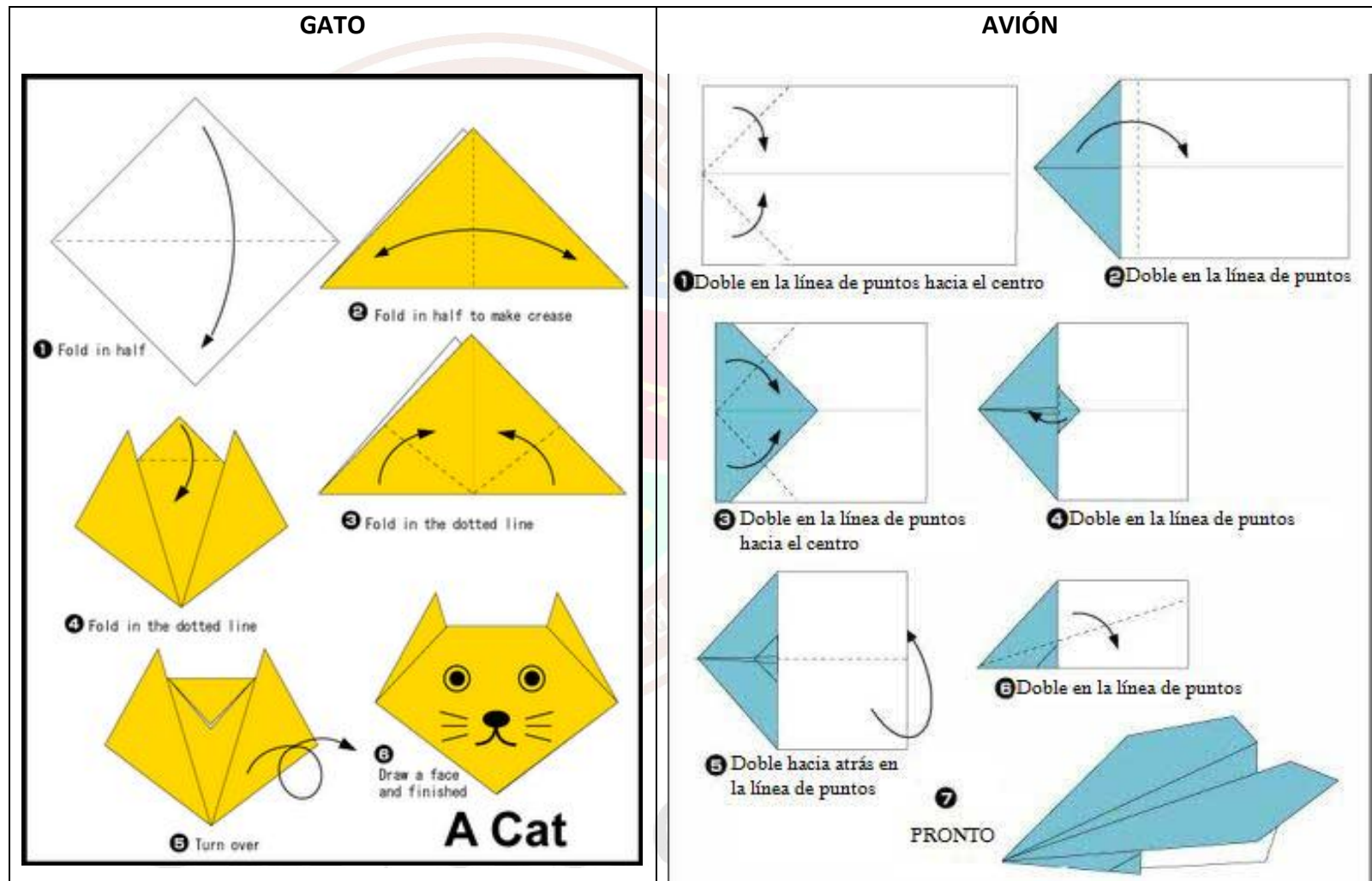


- ❖ Colorea el borde de los triángulos de color rojo.

<p><b>Triángulo 1</b> ¿Dónde está?</p> <p>_____</p> <p>Base _____</p> <p>Altura _____</p>	<p><b>Triángulo 1</b> ¿Dónde está?</p> <p>_____</p> <p>Base _____</p> <p>Altura _____</p>
<p><b>Triángulo 1</b> ¿Dónde está?</p> <p>_____</p> <p>Base _____</p> <p>Altura _____</p>	<p><b>Triángulo 1</b> ¿Dónde está?</p> <p>_____</p> <p>Base _____</p> <p>Altura _____</p>



## SESIÓN 2.



### FICHA 3 "GATO TRIANGULADO"



**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **No.** \_\_\_\_\_

**Gato es muy simpático, y está feliz de conocerte**

Ahora, ayúdanos a mirar si todos sus triángulos tienen lados iguales.

- ❖ Dibuja la cara del gato Triangulado.
- ❖ Colorea los triángulos de la siguiente manera.
  - Si tienen sus 3 lados iguales de rojo
  - Si tienen 2 de sus lados iguales de azul
  - Si tienen sus 3 lados diferentes de verde
- ❖ Responde las preguntas de TRIO



¿Cuántos triángulos encontraste? \_\_\_\_\_

¿Tenían sus 3 lados iguales? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llama el triángulo que tiene sus 3 lados iguales?  
\_\_\_\_\_

**¡MUCHAS GRACIAS!**

## FICHA 4 "EL VIAJE DE TRIO Y SUS AMIGOS"



**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **No.** \_\_\_\_\_

### ¡Llegaron las vacaciones!

Trio y sus amigos se van de paseo, pero luego de construir el avión en que viajarán, ayúdalos a descubrir los diferentes triángulos que podemos encontrar en él

- ❖ Dibuja las líneas que ves al abrir el avión.
- ❖ Llena el cuadro con los datos encontrados



- ❖ Colorea los triángulos de la siguiente manera.
  - Los Triángulos Equiláteros de rojo
  - Los triángulos Isósceles de azul
  - Si Triángulos Escalenos de verde

<p><b>Equilátero</b> Todos los lados iguales</p>	<p><b>Dibujo</b></p>	<p><b>Medidas</b></p> <p>Base: _____</p> <p>Lado 1: _____</p> <p>Lado 2: _____</p>
<p><b>Isósceles</b> Dos de sus lados iguales</p>	<p><b>Dibujo</b></p>	<p><b>Medidas</b></p> <p>Base: _____</p> <p>Lado 1: _____</p> <p>Lado 2: _____</p>
<p><b>Escaleno</b> Los tres lados diferentes</p>	<p><b>Dibujo</b></p>	<p><b>Medidas</b></p> <p>Base: _____</p> <p>Lado 1: _____</p> <p>Lado 2: _____</p>

### A.3 POS-TEST

## “LA CASA DE TRIO Y SUS AMIGOS”

Fecha: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_  
Nombre: \_\_\_\_\_ No. \_\_\_\_\_

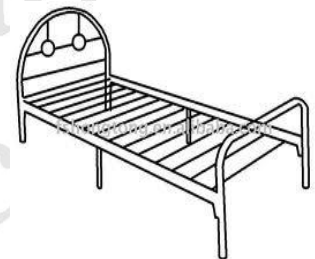
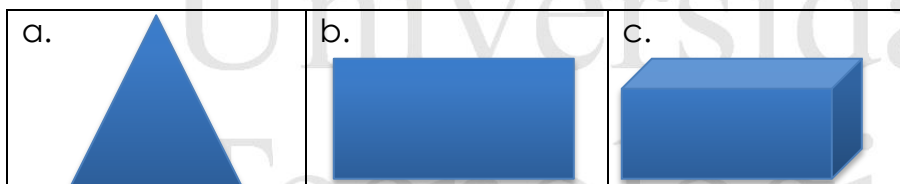
A lo largo de los días, TRIO a buscado maneras de diseñar su casa, la casa del futuro; y con tu ayuda le ha sido mucho más fácil.

Pronto terminará, pero necesita que le sigas ayudando para dar los toques finales. Acompaña a TRIO y a todos sus amigos a terminar con la casa del futuro más hermosa del mundo.



Recuerda que para responder las preguntas debes señalar con una X la respuesta correcta.

1. TRIO necesita construir una cama para su familia, indica cuál de las siguientes plantillas usará para el colchon?



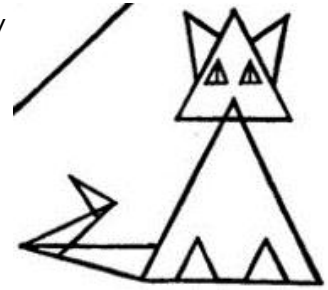
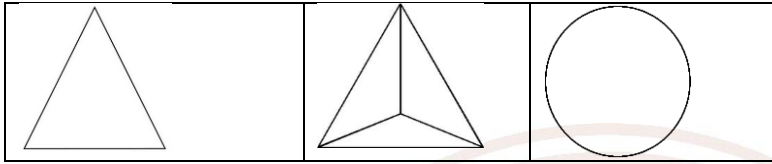
- a. A  
b. B  
c. C  
d. Ninguna

¿Por qué escogiste esa respuesta?

---

---

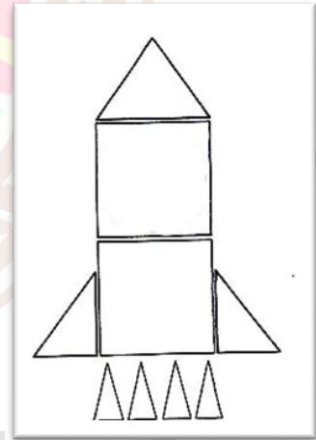
2. Indica qué figuras conforman el gato de TRIO y



¿Qué figura viste?	Describe la figura

3. TRIO necesita saber con qué figuras está formado su cohete de juguete ¿Podrías ayudarlo?

- e. Con cuadrados y rectángulos
- f. Con triángulos y cuadrados
- g. Con triángulos y cubos
- h. Con pirámides y rectángulos



Mira a tu alrededor y busca dos objetos que tengan las mismas figuras que encontraste en los árboles y dibújalos.

Figura 1 \_\_\_\_\_

Figura 2. \_\_\_\_\_



Nombre del dibujo:

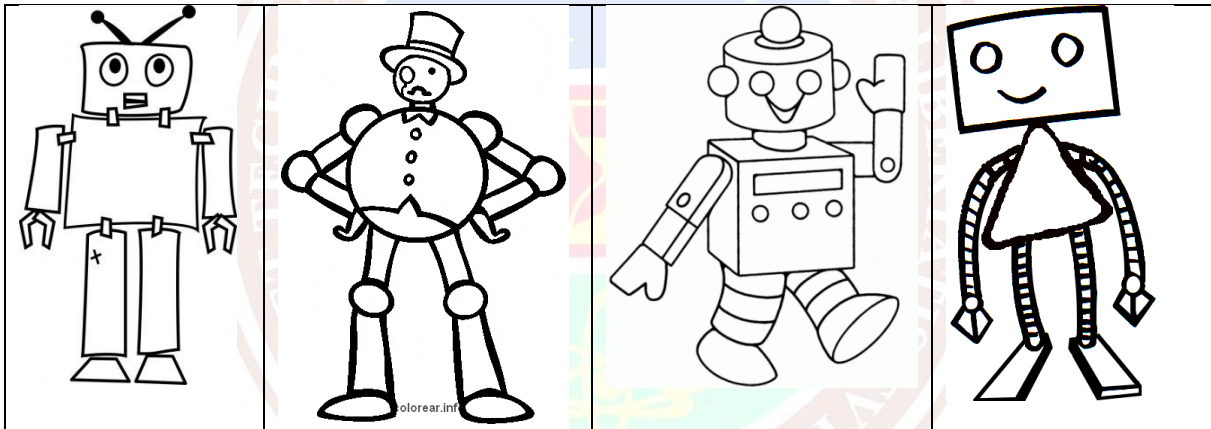


Nombre del dibujo:



4. TRIO quiere comprar un robot de juguete pero no sabe con qué forma, así que necesita saber qué forma tiene los cuerpos de los robots de sus amigos. Ayúdalo a identificarlos coloreando los cuerpos con los siguientes colores.

- El robot con cuerpo en forma de triángulo coloréalo de amarillo
- El robot con cuerpo en forma de círculo coloréalo de rojo
- El robot con cuerpo en forma de cubo coloréalo de azul
- El robot con cuerpo en forma de cuadrado coloréalo de verde



5. A Trio le gustó más el robot que tiene el cuerpo en forma de **triángulo...**




a. Realiza una copia del robot que tiene el cuerpo en forma de triángulo.

b. Coloréala de la siguiente manera:


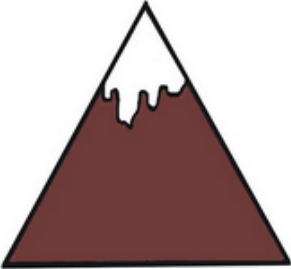
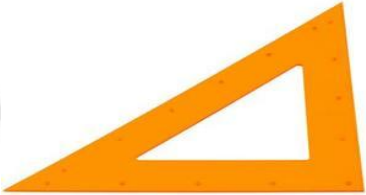
- Los triángulos rojo
- Los cuadrados azul
- Los rectángulos morado
- Los círculos de verde



6. Identifica 3 figuras geométricas en tu entorno y llena el cuadro con los datos.

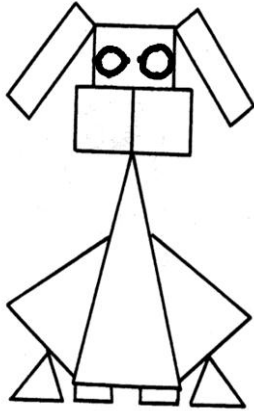
Nombre de la figura: _____ Describe la figura: _____ _____ _____ <b>Dibuja el objeto:</b> 	Nombre de la figura: _____ Describe la figura: _____ _____ _____ <b>Dibuja el objeto:</b> 	Nombre de la figura: _____ Describe la figura: _____ _____ _____ <b>Dibuja el objeto:</b> 
Nombre del objeto:	Nombre del objeto:	Nombre del objeto:

7. TRIO quiere saber si todos los triángulos son iguales, para eso necesita que le ayudes a identificar los siguientes triángulos.

Nombre de la figura: _____	Nombre de la figura: _____	Nombre de la figura: _____
		

¿Crees que los triángulos son iguales? \_\_\_\_\_ ¿Por qué?

\_\_\_\_\_



8. Triángulos, el perro de TRIO tiene un amigo que se llama cuadrículado.

a. ¿Describe al perro cuadrículado?

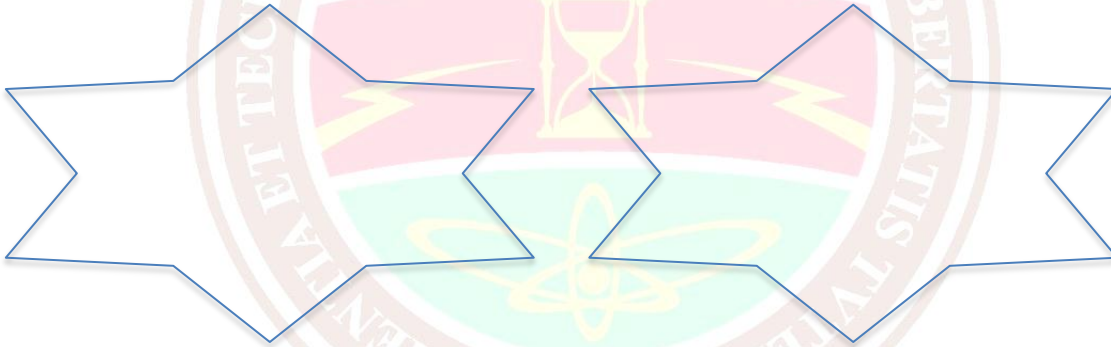
---

---

---

b. Ayúdale a TRIO a organizar las figuras geométricas escondidas en el perro cuadrículado dibujándolas en cada estrella.

Aquí dibujas las figuras con 3 lados: Aquí dibujas las figuras con 4 lados:

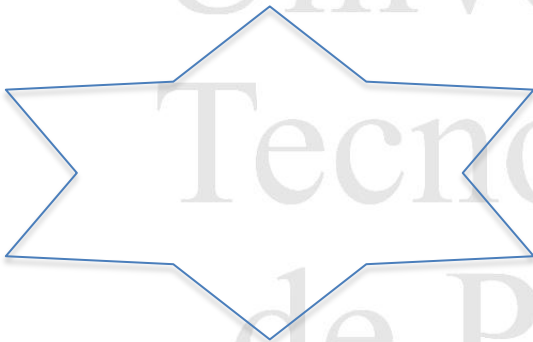


¿Qué nombre le darías al grupo?

¿Qué nombre le darías al grupo?

---

Aquí dibujas las figuras que ruedan:



**¡MUY BIEN!  
HICISTE UN EXCELENTE  
TRABAJO**

¿Qué nombre le darías al grupo?

---



**REJILLA DE ANÁLISIS DEL PRE-TEST**  
(Propuesta basada en la teoría de los Van Hiele)

Habiendo realizado el pre-test, marcar con una X el indicador evidenciado según las respuesta del estudiante.

No.	VISUALIZACIÓN	NUNCA	ALGUNAS VECES	SIEMPRE
1	Compara y clasifica objetos.			
2	posee percepción visual global			
3	Usa las propiedades físicas.			
4	Usa un lenguaje no técnico.			
5	Identifica o describe atributos físicos			
6	No identifica componentes de un todo (no se fija en detalles o partes del espacio)			
7	Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor			
8	Reproduce figuras a partir de modelos			

No.	ANÁLISIS	NUNCA	ALGUNAS VECES	SIEMPRE
1	Identifica componentes de un todo pero no las relaciona entre ellas.			
2	No diferencia cuerpos de figuras			
3	Mediante la observación y la experimentación inician a distinguir las características de las figuras.			
4	No comprende el valor ni la necesidad de definir			
5	No se ven las interrelaciones entre las figuras			
6	Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí			
7	Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.			
8	Puede hacer conjeturas mediante la observación			

- Relación de cada pregunta con la fase/nivel para la realización del análisis.

<b>Visualización</b>		
<b>No.</b>	<b>Indicador</b>	<b>Preguntas</b>
1	Compara y clasifica objetos.	7-2-8
2	posee percepción visual global	1-2-3
3	Usa las propiedades físicas.	2-3-8
4	Usa un lenguaje no técnico.	1-2-6
5	Identifica o describe atributos físicos	1-2-8
6	No identifica componentes de un todo (no se fija en detalles o partes del espacio)	1-2-3-8
7	Tiene conciencia del espacio como algo que existe a su alrededor	1-4-3-6
8	Reproduce figuras a partir de modelos	5-8

<b>Análisis</b>		
<b>No.</b>	<b>Indicador</b>	<b>Preguntas</b>
1	Identifica componentes de un todo pero no las relaciona entre ellas.	5-6-8
2	No diferencia cuerpos de figuras	1-2-4
3	Mediante la observación y la experimentación inician a distinguir las características de las figuras.	2-3-4
5	No se ven las interrelaciones entre las figuras	7-8
6	Puede considerar elementos como representantes de una clase, pero no puede relacionar clases entre sí	3-8
7	Enuncia una lista de propiedades innecesarias para identificar los objetos geométricos en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.	2-6-8
8	Puede hacer conjeturas mediante la observación	1-3-4-8

Universidad  
Tecnológica  
de Pereira