

# Estudio y Comparación de Modelos de Gravedad Modificada $f(R)$ en un Universo de-Sitter

JOHNY ALEJANDRO ARTEAGA GUARUMO  
DUVAN RICARDO HERRERA HERRERA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Facultad de Ingenierías  
Programa de Ingeniería Física

PEREIRA, 2012

# Estudio y Comparación de Modelos de Gravedad Modificada $f(R)$ en un Universo de-Sitter

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO POR

**Johny Alejandro Arteaga Guarumo**  
**Duvan Ricardo Herrera Herrera**

COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE INGENIERO FÍSICO

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO

**PhD. John Quiroga Hurtado**

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Facultad de Ingenierías  
Programa de Ingeniería Física

PEREIRA, 2012

## **Nota de Aceptación**

---

---

**M.Sc Hoover Orozco  
Director de Programa**

---

**PhD. Gonzalo García Reyes  
Jurado**

---

**M.Sc Luis Enrique Llamosa  
Jurado**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**  
Facultad de Ingenierías  
Programa de Ingeniería Física

**PEREIRA, 27 DE AGOSTO DE 2012**



*A nuestros padres por su confianza y  
su apoyo incondicional.*

# Agradecimientos

Agradecemos a los profesores que contribuyeron para bien en nuestra formación académica y social.

# Índice general

<b>1. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
1.1. Cosmología Newtoniana . . . . .	8
1.1.1. Materia . . . . .	9
1.1.2. Radiación . . . . .	9
1.1.3. Velocidad y ecuaciones de aceleración . . . . .	10
1.1.4. Constante cosmológica . . . . .	11
1.2. Cosmología relativista . . . . .	12
1.2.1. Métrica de FLRW . . . . .	12
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>20</b>
2.1. Acción de Einstein-Hilbert . . . . .	20
2.2. Teorías de gravedad modificada $f(R)$ . . . . .	21
<b>3. Modelos de Teorías <math>f(R)</math></b>	<b>26</b>
3.1. Primer Modelo . . . . .	26
3.2. Segundo Modelo . . . . .	32
3.3. Tercer Modelo . . . . .	36
<b>4. Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>A. Variación de la acción Gauss-Bonnet-<math>f(R)</math></b>	<b>40</b>
<b>B. Identidades de Bianchi</b>	<b>50</b>
<b>C. Solución de las ecuaciones de movimiento</b>	<b>53</b>

D. Ecuaciones de movimiento para el campo escalar $\phi$	59
--	----



# Índice de figuras

1.1.	Parámetro de escala $a$ vs. $t$ , para $\ddot{a} = 0$ (línea punteada), $\ddot{a} < 0$ (línea continua)	16
1.2.	Parámetro de escala $a(t)$ para un universo abierto( $k = -1$ ), plano( $k = 0$ ) y cerrado( $k = +1$ ) [1]	17
3.1.	$V(A)b$ versus $Ab$ para $ab^2 = \frac{1}{10}$ . Figura tomada de [2]	29
3.2.	$V(A)b$ versus $Ab$ para $ab^2 = \frac{1}{10}$ para la región $Ab \sim 0,5$ . Figura tomada de [2]	29
3.3.	Potencial $V(A)$ con $\alpha' > 0$ .	34

# Resumen

Se presenta una revisión a la teoría de gravedad modificada la cual consiste básicamente en adicionar una función  $f(R)$  que depende únicamente de la curvatura escalar a la acción de Einstein-Hilbert. Se discuten tres modelos en específico inspirados en teorías de cuerdas M, donde la función  $f(R)$  está compuesta por términos logarítmicos y polinómicos del escalar de Ricci. Los modelos en consideración satisfacen de antemano las condiciones de estabilidad impuestas en los modelos de gravedad  $f(R)$ .

Al considerar un universo con curvatura constante y libre de campos de materia (de-Sitter) se solucionan las ecuaciones de campo a partir de la métrica plana FRLW, para obtener la dinámica que rige cada modelo. La métrica es transformada del marco de Jordan al marco de Einstein para determinar la evolución del parámetro de escala  $a(t)$  y el parámetro de estado asociado; donde principalmente se trata de verificar la posibilidad de predecir una etapa de inflación temprana para curvaturas muy grandes y una etapa actual de expansión acelerada dominada por energía oscura para curvaturas pequeñas.

# Introducción

En 1998, dos equipos de científicos estudiaron las lejanas supernovas tipo Ia, presentando de una manera independiente evidencias de que el universo se expande con aceleración positiva [5, 6]; un resultado sorprendente y controversial, ya que la teoría general de la relatividad predice que un universo dominado por materia ó radiación acelera de manera negativa debido a la atracción gravitacional<sup>1</sup>. La fuente de esta aceleración es atribuida a la energía oscura [7, 8], un misterioso fluido cósmico, el cual presenta una distribución de densidad uniforme y una presión negativa, cuya ecuación de estado es  $\omega_{DE} = -1$ .

Distintos datos y observaciones astronómicas procedentes de la radiación cósmica de fondo (CMBR), supernovas SN Ia y las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO), revelan que la densidad de energía del universo está distribuida de la siguiente manera: 4% corresponde a la materia bariónica (u ordinaria), 20% a la materia oscura y el 76% a la energía oscura [9]. El término de materia oscura se refiere a una forma de materia desconocida que posee propiedades similares a la de materia ordinaria, sin embargo ésta no ha sido detectada aún en los laboratorios.

Tanto la materia ordinaria como la materia oscura satisfacen la condición fuerte de energía ( $\rho + 3P \geq 0$ ) por ende generan una atracción gravitacional; por otro lado, la energía oscura no cumple dicha condición, por consiguiente, genera una repulsión gravitacional (lo cual puede generar una aceleración positiva del universo, ya que la energía oscura predomina en la actualidad).

Los datos astronómicos recopilados de las diversas observaciones y los distintos desarrollos teóricos, indican que después de la gran explosión (Big Bang) el universo debió pasar por cinco eras cosmológicas. La primera es la era de la inflación [10], en donde el universo se expande aceleradamente de forma muy rápida; debido a la inflación se predice que el universo es espacialmente plano. La segunda era cosmológica corresponde a la era de la radiación en donde el universo se expande con aceleración negativa y en donde se produce el Bin Bang Nucleosynthesis (BBN) [11, 12]. La tercera era, es la correspondiente a la materia, en donde se forman las diversas estructuras que existen en el universo actual, en ésta era también hay una expansión desacelerada del universo. La cuarta era corresponde a la era actual, en la cual ocurre una expansión cósmica acelerada del universo. La última era es la era futura, en la que se trata de evadir la singularidad del Big Rip (la cual indica que sí el universo contiene

---

<sup>1</sup>ver Marco Teórico, ecuación (1.7)

suficiente energía oscura, podría acabar en un desgarramiento de toda la materia), o bien, se busca una solución del universo tipo atractor de Sitter.

Una primera solución al problema, es considerar la energía oscura como un efecto de las fluctuaciones asociadas al vacío cuántico, denominada constante cosmológica  $\Lambda$ , cuya ecuación de estado obedece a un parámetro de estado (EoS)  $\omega_{DE} = -1$ ; esto es, una energía del vacío con presión negativa, y por ende con efectos antigravitacionales. Si la constante cosmológica proviene de estas fluctuaciones, su escala de energía es por un gran número de ordenes de magnitud mayor a la densidad de energía oscura actual ( $\rho_{DE}^{(0)} \simeq 10^{-47} GeV^4$ ), lo que es un grave problema para la física de partículas actual [13].

Otra manera de abordar el problema, es considerar la energía oscura como efectos puramente geométricos del universo [3]. Este supuesto es estimado como punto de partida para este trabajo, y genera una alternativa gravitacional para la energía oscura, denominada gravedad  $f(R)$ ; basada fundamentalmente en considerar términos no lineales de la curvatura escalar. Por simplicidad no se considerarán términos del tipo  $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ <sup>2</sup>, de hecho, las funciones que sólo dependen de  $R$ , son lo suficientemente generales para envolver algunas de las características básicas de la gravedad de orden superior; además de que es la única de las teorías de orden superior de gravedad que evitan la inestabilidad de Ostrogradski [14]. Por otro lado, los términos de orden superior en la curvatura pueden ser predichos en el proceso de compactificación de Teoría de Cuerdas M [3].

Cronologicamente se estudiaron términos no lineales de la curvatura en la acción gravitacional para el estudio de campos gravitacionales fuertes en escalas cercanas a la escala de Planck; esto es, en el universo temprano y en cercanías a singularidades tipo agujeros negros, uno de ellos, el escenario de inflación temprana de Starobinsky [15]. Empero, no se esperaba que dichas estimaciones afectaran la fenomenología gravitacional a bajas energías, esto es, a grandes escalas del universo. Además es de destacar que para obtener una teoría normalizable de la gravedad, necesariamente la acción de Einstein-Hilbert (2.1) debe involucrar términos de orden superior en la curvatura [16].

En los modelos  $f(R)$  de gravedad modificada la aceleración cósmica es obtenida sin la necesidad de incluir términos complejos en el tensor momentum-energía, por esta razón, se puede aseverar que las teorías de gravedad modificada, ofrecen de manera natural una alternativa gravitacional para la energía oscura, ya que la aceleración cósmica es explicada por el simple hecho de que el universo se expande.

En las teorías de gravedad modificada se presenta de manera natural la unificación de la inflación y la aceleración cósmica, gracias a los roles gravitacionales que juegan los términos en pequeñas curvaturas (potencias negativas del escalar de curvatura) y en grandes curvaturas (potencias positivas del escalar de curvatura).

Las teorías de gravedad modificada pueden servir de base para la explicación integral de la

---

<sup>2</sup>ver apéndice A

energía oscura y la materia oscura, ya que algunos efectos cosmológicos (como la rotación de galaxias) pueden ser explicados en el marco de dichas teorías.

Asumiendo que el universo está entrando en la fase fantasma, esto es  $\omega_{DE} < -1$ , las teorías de gravedad modificada pueden explicar satisfactoriamente la transición de la fase no fantasma  $\omega_{DE} > -1$  a la fantasma sin necesidad de introducir materia exótica representada por campos escalares con términos cinéticos negativos o fluidos ideales con  $\omega < -1$ ; además de evitar la singularidad Big Rip [17].

Es por esto, que la descripción de la transición desaceleración - aceleración en la evolución del universo y el dominio de la energía oscura, son fenómenos que puede ser asistidos por las teorías de gravedad modificada. Por otra parte, se espera que dichas teorías sean utilizadas y puestas a prueba en la física de altas energías, principalmente para explicar el problema de Hierarchy.

No obstante, este tipo de teorías afrontan problemas tales como, inconsistencias a restricciones provenientes de los tests de gravedad local [18], inestabilidades por perturbaciones de densidad de materia [19], y la ausencia de la época dominada por la materia [20]. Es por esto, que se han establecido ciertas condiciones para construir modelos satisfactorios  $f(R)$ , las cuales son:

1.  $f_{,R} > 0$  para  $R \geq R_0$
2.  $f_{,RR} > 0$  para  $R \geq R_0$
3.  $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$  para  $R \gg R_0$
4.  $0 < Rf_{,RR}/f_{,R} < 1$  cuando se satisface  $Rf_{,R} = 2f$

Donde  $R_0$  es la curvatura escalar observada actualmente. Aparte de exhibir una dinámica cosmológica correcta, el modelo debe tener la capacidad de reproducir las eras intermedias, es decir, generar perturbaciones cosmológicas compatibles con las restricciones provenientes de la radiación cósmica de fondo, el Big Bang Nucleosynthesis, las estructuras a gran escala y las ondas gravitacionales.

Para el desarrollo de este trabajo, se adoptará un espacio vacío ( $\rho = 0$ ) con curvatura constante de-Sitter, lo cual ha sido corroborado experimentalmente ( $R_0 = cte$ ). Este escenario es importante, ya que de por si un universo deSitter predice una etapa de inflación, y en virtud de la similitud de la expansión actual con el período de inflación temprana, el rol de esta solución es imprescindible para ambas etapas.

Con este propósito, se estudian tres tipos de modelos  $f(R)$  [2, 21, 22], los cuales no presentan las inestabilidades anteriormente mencionadas. En este sentido, se considera una solución en el punto de-Sitter<sup>3</sup> y una transformación conforme al marco de Einstein<sup>4</sup>, para evaluar bajo qué parámetros la inflación temprana y la expansión acelerada actual son predichas.

---

<sup>3</sup>ver ecuación (2.6)

<sup>4</sup>sección 2.2

# Capítulo 1

## Marco Teórico

### 1.1. Cosmología Newtoniana

Partiendo de los conocimientos de la física clásica, fue establecido un modelo simple del universo, en el cual se tuvo en cuenta que la masa o la energía están distribuidas de una manera uniforme en todo el universo, por consiguiente, éste está caracterizado por una cierta densidad de masa o de energía  $\rho$ . El principio cosmológico se introduce cuando se tiene en cuenta que el universo tiene una simetría esférica desde cierto punto (origen) y por lo tanto, cualquier porción de masa de éste, puede ser distinguida por un vector posición radial  $r$ . También se establece que entre estas porciones de masas existe una presión  $P$ , originada por la interacción gravitacional entre éstas.

Para la descripción de este modelo es necesario establecer una relación entre la presión  $P$ , la densidad de masa o de energía  $\rho$  y su variación con el tiempo  $\dot{\rho}$ , partiendo de la primera ley de la termodinámica, la cual expresa la conservación de la energía de un sistema macroscópico (en este caso el universo) cuya expresión es:

$$dU + dW = dQ,$$

donde  $U$  es la energía interna;  $W$  es el trabajo y  $Q$  el calor transferido. Al tener en cuenta la relación del trabajo en función del volumen y la presión:

$$dW = F dr = P dV$$

donde  $F$  es la fuerza,  $dr$  el desplazamiento,  $P$  la presión ejercida por la materia y  $V$  el volumen que ocupa el universo, que en este caso es proporcional a  $r^3$ .

Al expresar la energía total en forma de su distribución volumétrica

$$U = \rho V,$$

y al considerar que el universo es un sistema cerrado, es decir, no intercambia calor con ningún medio externo ( $dQ = 0$ ); se obtiene la siguiente relación

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{r}}{r}, \quad (1.1)$$

la cual representa la ecuación de estado y permite a su vez considerar diferentes tipos de densidad de energía; como se realiza a continuación.

### 1.1.1. Materia

Es posible establecer una ecuación de estado para un universo el cual esté sustancialmente ocupado de materia, al considerar una densidad de materia de la forma,

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3};$$

donde  $M$  representa la masa total de universo. Inmediatamente se sigue que,

$$\dot{\rho} = -3\rho\frac{\dot{r}}{r}$$

Al comparar la expresión anterior con (1.1), se concluye que la ecuación de estado para la materia se satisface para una presión nula  $P = 0$ ; este resultado coincide con el caso de la ley de un gas ideal a temperatura cero.

### 1.1.2. Radiación

Al asumir un universo esencialmente dominado por radiación (fotones), es posible establecer una ecuación de estado; para esto se consideran los modos de vibración en una cavidad resonante análoga a una cuerda de violín. Una onda estacionaria sobre una cuerda fija en sus extremos satisface la siguiente relación,

$$L = \frac{n\lambda}{2};$$

siendo  $L$  la longitud de la cuerda,  $\lambda$  la longitud de onda y  $n$  un número entero ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Usando el hecho de que la radiación se propaga a la velocidad de la luz  $c$  en la expresión anterior, se obtiene la ecuación para las frecuencias propias de vibración de la cavidad  $\nu = \frac{n}{2L}c$ , a su vez empleando ésta en la ley de radiación de Planck ( $U = h\nu$ ), se satisface que:

$$U = \frac{nhc}{2} \frac{1}{L} \propto V^{-\frac{1}{3}}$$

Sí se considera el trabajo de expansión  $dU = -PdV$  y la relación  $U = \rho V$ , la presión se transforma en  $P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$ ; por lo tanto se concluye que la ecuación de estado para la radiación es:

$$P = \frac{1}{3}\rho \quad (1.2)$$

Se puede obtener una ecuación que represente ambas ecuaciones de estado (materia y radiación) de la forma

$$P = \frac{\gamma}{3}\rho; \quad (1.3)$$

donde  $\gamma = 1$  corresponde al caso de la radiación y  $\gamma = 0$  al caso de la materia.

Estas ecuaciones de estado son necesarias para la distinción entre las épocas de dominio de la radiación y de la materia, que dan lugar a la evolución del universo.

### 1.1.3. Velocidad y ecuaciones de aceleración

Es de vital importancia establecer la dinámica del sistema físico en consideración [23], por ende es necesario determinar las ecuaciones que describan la velocidad y la aceleración del universo. Para obtener dichas expresiones se parte de la energía total del universo; es decir, la suma de la energía potencial y las energía cinética debida a la interacción mutua, cuya expresión está dada por:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \left( H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \right), \quad (1.4)$$

donde  $H \equiv \frac{\dot{r}}{r}$  es llamada constante de Hubble (la cual indica la rapidez de expansión del universo),  $m$  es la masa de una partícula de prueba en un campo de energía potencial gravitacional rodeado por un gas de polvo (que no interactúa) de masa  $M$  y  $r$  es la distancia desde el centro hasta la partícula de prueba (radio del universo). La ecuación (1.4), se puede reescribir como,

$$H^2 = \frac{2E}{mr^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (1.5)$$

Al definir  $k \equiv -\frac{2E}{ms^2}$ , la distancia  $r$  en términos de un factor de escala  $a$  (proporcional al radio del universo) y una constante de longitud  $s$  como  $r(t) \equiv a(t)s$ , se sigue  $\dot{r}/r = \dot{a}/a$  y  $\ddot{a}/a = \ddot{r}/r$ ; por consiguiente la ecuación de Friedmann es obtenida,

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.6)$$

Esta ecuación determina la rapidez de recesión; el factor escala es introducido porque en Relatividad General el espacio mismo se expande. A pesar de que esta ecuación se obtiene para la materia, también es válida para la radiación. (En efecto también es válida para el vacío).  $K$  puede ser reescalado de tal manera que en lugar de tomar valores negativo, cero ó valores positivos tome los valores de  $-1, 0$  ó  $+1$ . Desde el punto de vista Newtoniano, esto corresponde a trayectorias infinitas, críticas ó finitas. La aceleración del universo (válida tanto para la materia como para la radiación) se obtiene al derivar respecto al tiempo la ecuación de Friedmann (1.6), de tal manera que,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) = -\frac{4\pi G}{3}(1 + \gamma)\rho. \quad (1.7)$$



### 1.1.4. Constante cosmológica

Tanto en la cosmología de Newton como en la relativista, el universo es inestable ante un colapso gravitacional. Newton como Einstein creían que el universo era estático, para esto, Einstein introdujo una fuerza gravitacional *repulsiva*, llamada constante cosmológica, la cual corresponde a la adición de un término positivo (convencionalmente se considera de la forma  $\frac{\Lambda}{3}$  [24] ) a la ecuación (1.7)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.8)$$

(esta ecuación aparecerá de nuevo en la solución de las ecuaciones de campo de Einstein); siendo totalmente equivalente a adicionar una fuerza gravitacional repulsiva a la 2<sup>da</sup> Ley de Newton, de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{\ddot{r}}{r} \equiv \frac{F_{repulsiva}}{mr} \equiv \frac{\Lambda}{3}, \\ F_{repulsiva} &= \frac{\Lambda}{3}mr \equiv -\frac{dU}{dr}; \end{aligned}$$

donde la energía potencial es

$$U_{repulsiva} = -\frac{1}{2} \frac{\Lambda}{3} mr^2,$$

la cual representa un oscilador armónico simple repulsivo. Al sustituir en la ecuación de conservación de la energía (1.4) se tiene,

$$E = \frac{1}{2}mr^2\left(H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\Lambda}{3}\right);$$

por lo tanto, se obtiene,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.9)$$

## 1.2. Cosmología relativista

Como su nombre lo indica la cosmología relativista se basa en la teoría general de la relatividad para plantear modelos físicos del universo. En esta sección se estudiará la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), la cual, al ser introducida en las ecuaciones de campo de Einstein proporciona información sobre el parámetro principal que rige la dinámica del universo en consideración ( $a(t)$ ).

### 1.2.1. Métrica de FLRW

En virtud de satisfacer el principio cosmológico se considera un espacio-tiempo de la forma  $\mathbf{R} \times \Sigma$  [25], donde  $\mathbf{R}$  representa la dirección del tiempo y  $\Sigma$  una tres-variedad homogénea e isotrópica. La utilidad de homogeneidad e isotropía implica que  $\Sigma$  sea un espacio máximamente simétrico ( isotrópica en el sentido de que es invariante bajo rotaciones y homogénea en el sentido de que es invariante bajo traslaciones). Por lo tanto se adopta una métrica de la forma,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} du^i du^j, \quad (1.10)$$

donde  $t$  representa la coordenada temporal (tipo tiempo),  $(u^1, u^2, u^3)$  son las coordenadas en  $\Sigma$  y  $\gamma_{ij}$  es la métrica máximamente simétrica en  $\Sigma$ . La función  $a(t)$  es el factor de escala que representa la medida en la variedad, el cual se considera dependiente del tiempo. Una métrica máximamente simétrica satisface,

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (1.11)$$

donde  $k$  es una constante y el superíndice  ${}^{(3)}$  en el tensor de Riemann, indica que éste, está asociado con la tres-métrica  $\gamma_{ij}$ , y no a la métrica de todo el espacio-tiempo; así, el tensor de Ricci es entonces [1],

$${}^{(3)}R_{jl} = 2k\gamma_{jl}. \quad (1.12)$$

Un tipo de espacio máximamente simétrico es el esféricamente simétrico [26], donde la métrica puede tomar la forma

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (1.13)$$

Al hallar las componentes del tensor de Ricci y emplear la ecuación (1.12); se obtiene,

$$\beta = -\frac{1}{2} \ln(1 - kr^2), \quad (1.14)$$

que proporciona una métrica en el espacio-tiempo de la forma

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right], \quad (1.15)$$

llamada métrica de **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker**.

Las siguientes sustituciones dejan la ecuación (1.15) invariante,

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow \frac{k}{|k|} \\ r &\longrightarrow \sqrt{|k|}r \\ a &\longrightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}} \end{aligned}$$

Es por esto que se puede reescalar el parámetro  $k$  por  $\frac{k}{|k|}$ ; donde se presentan tres casos de interés:  $k = -1$ ,  $k = 0$  y  $k = +1$ . El caso  $k = -1$  corresponde a una curvatura negativa constante en  $\Sigma$  y es llamado **abierto**, el caso  $k = 0$  corresponde a un espacio plano en  $\Sigma$ , es decir, con curvatura nula; el caso  $k = +1$  corresponde a una curvatura positiva en  $\Sigma$  y es llamado **cerrado**.

Al calcular el escalar de Ricci para la métrica FLRW se obtiene

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (1.16)$$

El universo no es vacío, por lo tanto las soluciones vacías de la ecuaciones de campo de Einstein no son consideradas; por este motivo y como primera aproximación, se considera el universo constituido por un fluido perfecto. El tensor momentum-energía para un fluido perfecto está descrito por,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

donde  $\rho$  y  $p$  corresponden respectivamente a la densidad de energía y presión del fluido medidas en un marco de referencia en reposo respecto al fluido (sistema coordenado comóvil) y  $U_\mu$  es la cuadri-velocidad del fluido. Es claro que, sí  $U_\mu$  es un tensor, por el principio de equivalencia éste es invariante en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial. La cuadri-velocidad es entonces [27]

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (1.18)$$

y el tensor momentum-energía es

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Donde la traza está dada por

$$T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p; \quad (1.19)$$

la ecuación de conservación de la energía del elemento de fluido adquiere su forma tensorial por  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , de donde se obtiene,

$$-\partial_t \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.20)$$

Lo que se trata de buscar, es una **ecuación de estado** que relacione la densidad de energía  $\rho$  y la presión  $p$ ; esencialmente todos los fluidos perfectos relevantes en cosmología obedecen a

la simple ecuación de estado  $p = \omega\rho$  [28], donde  $\omega$  es un parámetro independiente del tiempo; es por esto que (1.20) está dada por

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}; \quad (1.21)$$

esta expresión puede ser integrada para obtener lo siguiente,

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (1.22)$$

Los dos ejemplos más populares de fluidos cosmológicos son los compuestos por **polvo** y **radiación**. El fluido de polvo (presión nula) obedece a  $\omega = 0$  [29]; por ejemplo, las estrellas y galaxias ordinarias para las cuales la presión es despreciable en comparación con la densidad de energía. El fluido de polvo se puede asociar con el comportamiento de la materia y los universos para los cuales la densidad de energía es en su mayoría debida a este fluido se les denomina **universos dominados por materia**. La densidad de energía en la materia decae como  $\rho_{polvo} \propto a^{-3}$ , esto se interpreta como el decremento en la densidad del número de partículas a medida que el universo se expande.

El otro tipo de fluido, la radiación, puede ser empleado para describir la radiación electromagnética o partículas masivas moviéndose a velocidades suficientemente cercanas a la de la luz, que son indistinguibles, para propósitos prácticos de los fotones; por lo tanto, el tensor momentum-energía puede ser expresado en términos del tensor de Maxwell, donde la traza está dada por [30],

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^{\mu\eta} F_{\mu\eta} - \frac{1}{4}(4)F^{\eta\sigma} F_{\eta\sigma} \right] = 0; \quad (1.23)$$

pero, (1.23) también es igual a (1.19), por tanto la ecuación de estado, es

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (1.24)$$

Un universo, en el cual, la mayor parte de la densidad de energía está compuesta por radiación, se le denomina **universo dominado por radiación** y cuya densidad de energía decae como  $a^{-4}$ . La energía del vacío también se puede considerar, ello implica que en las ecuaciones de campo de Einstein se introduzca la constante cosmológica, por lo tanto,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

De donde, se obtiene que el tensor momentum-energía para el vacío es,

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}; \quad (1.26)$$

éste posee la forma de un fluido perfecto con

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.27)$$

Por lo tanto, se obtiene que  $\omega = -1$  y la densidad de energía del vacío es independiente del parámetro de escala  $a$ . Ahora, sí la densidad de energía y de radiación decaen a medida que el universo se expande, la densidad del vacío tenderá a crecer, si ésto sucede, se dice que el universo se encuentra **dominado por el vacío**.

Al solucionar las ecuaciones de Einstein con la métrica FLRW, la ecuación para  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  es igual a:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (1.28)$$

La ecuación con  $(\mu, \nu) = (i, j)$ , viene dada por,

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.29)$$

Al sustituir (1.28) en (1.29) se obtiene,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.30)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.31)$$

denominadas ecuaciones de Friedmann. Se establecen 3 parámetros cosmológicos, los cuales pueden ser incluidos en las ecuaciones de Friedmann; estos son: El parámetro de Hubble,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.32)$$

el cual indica la tasa de expansión del universo. El parámetro de desaceleración

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (1.33)$$

el cual indica la tasa de cambio de la expansión del universo y por último el parámetro de densidad

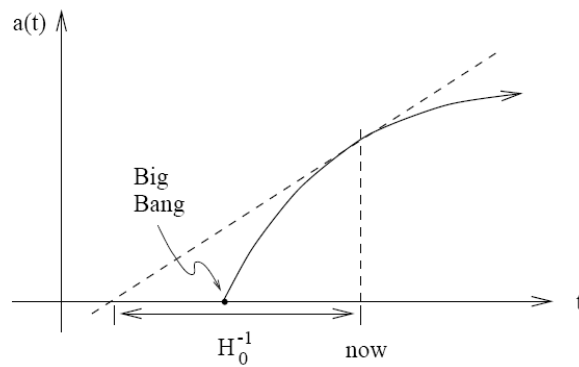
$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (1.34)$$

cuya densidad crítica se define como

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.35)$$

La ecuación de Friedmann (1.31) puede ser reescrita como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (1.36)$$



**Figura 1.1:** Parámetro de escala  $a$  vs.  $t$ , para  $\ddot{a} = 0$  (línea punteada),  $\ddot{a} < 0$  (línea continua)

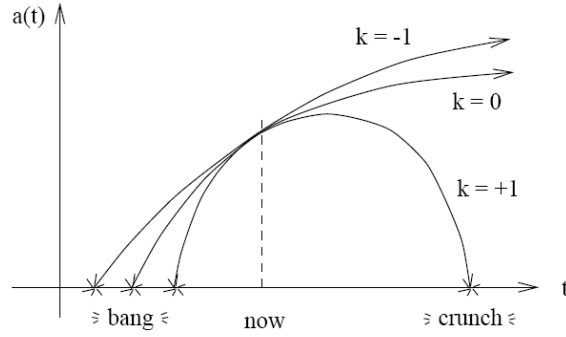
donde, el signo  $k$  determina si  $\Omega$  es mayor, igual ó menor a uno y se describen a continuación [7]:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{crit} &\leftrightarrow \Omega < 1 &\leftrightarrow k = -1 &\leftrightarrow \text{abierto} \\ \rho = \rho_{crit} &\leftrightarrow \Omega = 1 &\leftrightarrow k = 0 &\leftrightarrow \text{plano} \\ \rho > \rho_{crit} &\leftrightarrow \Omega > 1 &\leftrightarrow k = +1 &\leftrightarrow \text{cerrado} \end{aligned}$$

Por consiguiente, el parámetro de densidad, indica la geometría del universo (abierto, plano, cerrado). Ahora, al considerar el valor de la constante cosmológica  $\Lambda$  igual a cero y el universo como un fluido bien comportado, es decir, con una energía positiva ( $\rho > 0$ ) y una presión no negativa ( $p \geq 0$ ); debido a (1.30), se obtiene que  $\ddot{a} < 0$ , lo cual significa que el universo se encuentra desacelerando; un resultado esperado, ya que la atracción gravitacional de la materia en el universo es contraria a la expansión de éste. El hecho de que el universo sólo pueda desacelerar, significa que en el pasado éste se expandió de una manera más rápida que en la actualidad. Entonces, si se traza una evolución hacia atrás en el tiempo, inevitablemente se llega a una singularidad  $a = 0$ . Sí  $\ddot{a} = 0$  entonces  $a(t)$  es una línea recta y por lo tanto la edad del universo podría ser  $H_0^{-1}$ ; en el tiempo actual, para el tipo de densidad de energía en consideración,  $\ddot{a}$ , es negativa; por ende la edad del universo es sorpresivamente, menor al tiempo en el que ocurrió esta singularidad [31].

La singularidad en  $a = 0$  se denomina **Big-Bang**, la cual representa el surgimiento del universo; es de aclarar que las teorías de singularidades predicen que universos con densidad de energía  $\rho > 0$  y presión  $p \geq 0$ , deben surgir a través de una singularidad [32]; por otro lado, a medida que  $a$  tiende a cero, la densidad de energía crece indefinidamente, algo que no puede ser explicado por la relatividad general clásica. En ciertos casos, vale la pena considerar las soluciones exactas de las ecuaciones de Friedmann, las cuales describen diferentes modelos de universos. Para el caso en que  $k \leq 0$  y  $\rho > 0$ , la ecuación (1.31) implica que,

$$\dot{a} = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + |k|; \quad (1.37)$$



**Figura 1.2:** Parámetro de escala  $a(t)$  para un universo abierto ( $k = -1$ ), plano ( $k = 0$ ) y cerrado ( $k = +1$ ) [1]

el término de la derecha siempre será positivo, lo cual indica que  $\dot{a}$  nunca pasará por cero; esto tiene como significado, que un universo abierto ó plano se expandirá por siempre. Por la ecuación de conservación de la energía (1.20) se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= a^3 \left( \dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ &= -3pa^2 \dot{a}; \end{aligned} \quad (1.38)$$

el término de la derecha siempre es cero o negativo; por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) \leq 0 \quad (1.39)$$

e implica que  $\rho a^2 \rightarrow 0$ ; esto determinará una expansión constante del universo cuando  $a(t) \rightarrow \infty$ . Para el valor de  $k = -1$  y al tener en cuenta (1.37),  $a(t) \rightarrow \infty$ , se obtiene la expansión con  $\dot{a} \rightarrow 1$ ; mientras que para el valor de  $k = 0$ , el universo se sigue expandiendo, pero de una forma cada vez más lenta. Para un universo cerrado  $k = +1$  con ( $\rho > 0$ ), (1.31) se convierte en,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - 1; \quad (1.40)$$

el argumento de que  $\rho a^2 \rightarrow 0$  cuando  $a(t) \rightarrow \infty$  también es válido, pero en este caso (1.40) puede ser negativo, algo que no puede suceder; por lo tanto el universo no se expande indefinidamente y  $a$  tiende a un valor máximo  $a_{max}$  y (1.30) implica que,

$$\ddot{a} \rightarrow \frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) a_{max} < 0; \quad (1.41)$$

por consiguiente  $\ddot{a}$  es finita y negativa en  $a_{max}$ . Cuando el parámetro  $a$  supera a  $a_{max}$ , éste empieza a decrecer (con  $\ddot{a} < 0$ ) hasta llegar a ser cero, esta fase es denominada (**Big Crunch**). Para un universo dominado por la materia y abierto, las soluciones de las ecuaciones de Friedmann son [1],

$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{2} (\cosh \phi - 1) \\ t &= \frac{c}{2} (\sinh \phi - \phi). \end{aligned} \quad (1.42)$$

En un universo plano y dominado por materia, las soluciones de las ecuaciones de Friedmann son,

$$a = \left(\frac{9c}{4}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}; \quad (1.43)$$

y para un universo dominado por materia y cerrado estas ecuaciones quedan de la forma,

$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{2}(1 - \cosh \phi) \\ t &= \frac{c}{2}(-\sinh \phi + \phi), \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde  $C$  está definida como,

$$C = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3 = \text{constante}. \quad (1.45)$$

Para un universo dominado por la radiación y abierto, las soluciones de las ecuaciones de Friedmann son,

$$a = \sqrt{C'} \left[ \left(1 + \frac{t}{\sqrt{C'}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.46)$$

Para un universo plano, dominado por radiación, se obtiene,

$$a = (4C')^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}. \quad (1.47)$$

Para un universo cerrado dominado por radiación, éstas toman la forma,

$$a = \sqrt{C'} \left[ -\left(1 - \frac{t}{\sqrt{C'}}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.48)$$

donde  $C'$  está definida como

$$C' = \frac{8\pi G}{3}\rho a^4 = \text{constante} \quad (1.49)$$

En un universo dominado por el vacío  $\rho$  o  $p$  pueden ser negativos; si se considera  $\Lambda < 0$  implica que  $\Omega$  sea negativo y esto solo ocurre cuando  $k = -1$ ; por lo tanto, en este caso las soluciones son:

$$a = \sqrt{\frac{-3}{\Lambda}} \sin \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{-3}} t \right). \quad (1.50)$$

Para un universo dominado por el vacío, abierto y con  $\Lambda > 0$  las soluciones son [28]:

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left( \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} t \right) \quad (1.51)$$



para un universo dominado por el vacío, plano y con  $\Lambda > 0$  las soluciones son [1]:

$$a \propto \exp\left(\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) \quad (1.52)$$

y para un universo dominado por el vacío, cerrado y con  $\Lambda > 0$  las soluciones son [1]:

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}t\right) \quad (1.53)$$

Las soluciones para  $\Lambda > 0$  representan un mismo espacio, pero en diferentes coordenadas; este espacio es máximamente simétrico y es denominado **espacio de-Sitter**; la solución para  $\Lambda < 0$  también es un espacio máximamente simétrico denominado **espacio anti-de Sitter** [25].

# Capítulo 2

## Estado del Arte

### 2.1. Acción de Einstein-Hilbert

Existen gran variedad de sistemas físicos cuyas ecuaciones dinámicas pueden ser derivadas a partir del principio variacional, el cual expresa que para cierto funcional de variables dinámicas, la acción no cambia con respecto a pequeñas variaciones de dichas variables.

En relatividad general el principio variconal procede con la especificación de una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la cual se asume como un funcional dependiente de la métrica y sus derivadas; es decir,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \nabla_\rho g_{\mu\nu}, \nabla_\sigma \nabla_\rho g_{\mu\nu}, \dots).$$

Se requiere que  $\mathcal{L}$  sea una cantidad escalar de peso +1, tal que se pueda construir la acción en forma integral

$$I = \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega,$$

sobre una región  $\Omega$  de cierta variedad. El principio de mínima acción establece, que al realizar una variación arbitraria de la métrica,  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  la cual es nula en la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , entonces  $I$  debe ser estacionaria; es decir  $\delta I = 0$ . El tensor que posee a la métrica y a sus derivadas, es el tensor de curvatura  $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$ , donde la única cantidad escalar posible de construir a partir de éste es el escalar de Ricci  $R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  [26]. Por lo tanto, se establece la acción de Einstein-Hilbert [33],

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g}(R + \mathcal{L}_m) d^4x, \quad (2.1)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $g^{\mu\nu}$ ,  $R$  es el escalar de Ricci,  $\kappa^2 = 8\pi Gc^{-4}$  ( $G$  es la constante gravitacional y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío) y  $\mathcal{L}_m$  es la densidad lagrangiana correspondiente a los campos de materia integrados sobre la variedad espaciotemporal.

Al variar (2.1) respecto a la métrica  $g^{\mu\nu}$  y a través del principio de mínima acción ( $\delta g^{\mu\nu} = 0$ )

se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

## 2.2. Teorías de gravedad modificada $f(R)$

Las teorías de gravedad modificada o teorías  $f(R)$  como se les conoce, consisten en modificar o generalizar la acción de Einstein - Hilbert (2.1) por una función  $f(R)$  de la curvatura escalar  $R$ , por lo tanto dicha acción toma la forma,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m. \quad (2.3)$$

Donde  $S_m$  es la acción correspondiente a los campos de materia.

Al variar (2.3) respecto a la métrica  $g^{\mu\nu}$ <sup>1</sup> se obtiene :

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Donde  $f' = \frac{\partial f}{\partial R}$  y como es usual

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Es interesante notar que para el caso particular cuando  $f(R) = R + 2\Lambda$ , (2.4) describe las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica dadas por (1.25) de la forma,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Multiplicando (2.4) por la métrica  $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} f'(R)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}[\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) &= \kappa^2 g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ f'(R)R - \frac{4}{2}f(R) - [\square - 4\square] f'(R) &= \kappa^2 T \end{aligned}$$

Se obtiene la traza de dicha ecuación, la cual esta dada por:

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa^2 T \quad (2.6)$$

Donde  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\rho_m + 3P_m$  es la traza del tensor momentum - energía;  $\rho_m$  y  $P_m$ , son la densidad de energía y la presión de la materia respectivamente. Cuando la solución de la

---

<sup>1</sup>ver Apéndice A.

ecuación (2.6) es una constante [8], es decir  $R = cte$  ( lo cual implica que  $\square f'(R) = 0$  ) y  $T_{\mu\nu} = 0$  ( que indica que el universo está vacío o sin materia ) ésta se reduce a:

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \quad (2.7)$$

Sí  $R = 0$  es una raíz de (2.7), la ecuación (2.4) se reduce a  $R_{\mu\nu} = 0$ , por lo tanto la solución es el espacio - tiempo de Minkowski [34]. Por otro lado, cuando la raíz es  $R = C$  en donde  $C$  es una constante [34], (2.4) se reduce a  $R_{\mu\nu} = \frac{C}{4}g_{\mu\nu}$ , por lo tanto la solución es un espacio de Sitter (sí  $C > 0$ ) ó anti-de Sitter (sí  $C < 0$ ).

Al introducir la métrica espacialmente plana **FLRW** ( $k = 0$ ) en las ecuaciones de campo (2.4) se obtienen las ecuaciones que rigen la dinámica del universo en consideración, estas son<sup>2</sup>:

$$3f'H^2 = \kappa^2\rho_m + \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'', \quad (2.8)$$

$$-2\dot{H}f' = \kappa^2(\rho_m + P_m) + \dot{R}^2 f''' + \ddot{R}f'' - H\dot{R}f'' \quad (2.9)$$

Una motivación importante en los modelos de las teorías  $f(R)$ , es explicar la expansión acelerada del universo sin necesidad de incluir términos de energía oscura (o un campo inflatón); una forma fácil para realizar ésto, es definir una densidad de energía efectiva  $\rho_{eff}$  y una presión efectiva  $P_{eff}$  de la geometría como [8, 34] :

$$\kappa^2\rho_{eff} = \frac{Rf' - f}{2f'} - \frac{3H\dot{R}f''}{f'}, \quad (2.10)$$

$$\kappa^2 P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{f-Rf'}{2}}{f'} \quad (2.11)$$

Donde  $\rho_{eff}$  tiene que ser estrictamente positiva, al inspeccionar la ecuación (2.8).

Sí se considera un universo vacío, las ecuaciones (2.8) y (2.9) toman la forma estándar de las ecuaciones de Friedmann

$$3H^2 = \kappa^2\rho_{eff}, \quad (2.12)$$

$$6\frac{\ddot{a}}{a} = \kappa^2(\rho_{eff} - 3P_{eff}) \quad (2.13)$$

Por lo tanto, la corrección de la curvatura puede ser vista como un fluido efectivo. La ecuación de estado  $\omega_{eff}$  para dicho fluido es:

$$\omega_{eff} = \frac{P_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{f-Rf'}{2}}{\frac{Rf'-f}{2} - 3H\dot{R}f''} \quad (2.14)$$

Notesé que para un espacio de - Sitter ( $R = cte$ )  $\omega_{eff} = -1$ ; para que suceda lo anterior se debe cumplir

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{\dot{R}H - \ddot{R}}{\dot{R}^2}$$

---

<sup>2</sup>ver Apéndice C

En términos de la cantidad  $\phi(R) \equiv f'(R)$  la ecuación (2.14) se puede escribir como:

$$\omega_{eff} = -1 + \frac{\kappa^2(\ddot{\phi} - H\dot{\phi})}{3\phi H^2} \quad (2.15)$$

Las cantidades  $\rho_{eff}$  y  $p_{eff}$  están relacionadas mediante la siguiente ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_{eff} + 3H(\rho_{eff} + p_{eff}) = 0 \quad (2.16)$$

Al tomar una solución vacía ( $T_{mat} = 0$ ) y la ecuación(2.16), se obtiene la siguiente relación para el parámetro de estado [8],

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}, \quad (2.17)$$

el cual será importante para determinar el tipo de fluido presente en un universo vacío, nótese que cuando  $\omega_{eff} = -1$  la energía oscura es considerada.

Los modelos  $f(R)$  que se estudian [2, 21, 22], están determinados por una acción que tiene la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (2.18)$$

Sin embargo las ecuaciones dinámicas resultantes son complicadas; por este motivo es necesario reescribir la acción (2.18) introduciendo los campos auxiliares  $A$  y  $B$  [2, 35] de la forma:

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \{B(R - A) + f(A)\} \quad (2.19)$$

Con la ayuda de las ecuaciones de Euler- lagrange, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.20)$$

Variando (2.19) con respecto a  $B$ , da como resultado  $R = A$ , al reemplazar ésto en (2.19) se reproduce la acción (2.18). Al variar (2.19) con respecto a  $A$  se obtiene:

$$B = f'(A) \quad (2.21)$$

que al resolver con respecto a  $A$  se llega a:

$$A = g(B) \quad (2.22)$$

(2.19) se puede escribir como:

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \{f'(A)(R - A) + f(A)\} \quad (2.23)$$

La acción (2.23) es llamada acción en el marco de Jordan con campos auxiliares. Sin embargo, resulta más conveniente trabajar en el marco de Einstein. Bajo la transformación conforme [25]

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Upsilon g_{\mu\nu} = e^{-\sigma} g_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})_E$$

La cual implica que :

$$\begin{aligned}
R &= \Upsilon [R_E + 3\Box_E(\ln \Upsilon) - \frac{3}{2}(g^{\mu\nu})_E \partial_\mu \ln \Upsilon \partial_\nu \ln \Upsilon] \\
e^\sigma ds^2 &= (ds^2)_E = -(dt)_E^2 + (a)_E^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \\
(dt)_E &= e^{\frac{-\sigma}{2}} dt \\
(a)_E &= e^{\frac{-\sigma}{2}} a \\
\sqrt{-g} &= \sqrt{-(g)_E} e^{\frac{3\sigma}{2}} \\
\sigma &= -\ln f'(A)
\end{aligned}$$

Donde el subíndice  $E$  en las variables, indica que éstas forman parte del marco de Einstein [36]. Así, la acción (2.23) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\kappa^2} \int dt d^3x \sqrt{-g_E} e^{\frac{3\sigma}{2}} \left[ e^{-2\sigma} (R_E - 3\Box_E \sigma - \frac{3}{2}(g^{\mu\nu})_E \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) - A e^{-\sigma} + f(g(e^{-\sigma})) \right] \\
S &= \frac{1}{\kappa^2} \int (dt)_E d^3x \sqrt{-g_E} e^{2\sigma} \left[ \frac{R_E - \frac{3}{2}(g^{\mu\nu})_E \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - A e^{-\sigma} + f(g(e^{-\sigma})) e^{-2\sigma}}{e^{-2\sigma}} \right]
\end{aligned}$$

dando como resultado la acción  $S_E$ , la cual está dada en el marco de Einstein como:

$$S_E = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{3}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right] \quad (2.24)$$

En donde,  $V(\sigma)$  corresponde a :

$$V(\sigma) = e^\sigma g(e^{-\sigma}) - e^{2\sigma} f(g(e^{-\sigma})) = \frac{A}{f'(A)} - \frac{f(A)}{(f'(A))^2} \quad (2.25)$$

Lo anterior muestra la relación entre las teorías  $f(R)$  y la teoría escalar-tensor [37]. Para obtener las ecuaciones dinámicas se varía respecto a la métrica  $g_{\mu\nu E}$  la acción (2.24); al considerar la métrica **FRLW** las componentes  $(\mu, \nu) = (t, t)$  y  $(\mu, \nu) = (i, j)$ <sup>3</sup> de dichas ecuaciones son como sigue,

$$3H_E^2 = \frac{3}{4} \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} V(\sigma) \equiv \frac{\kappa^2}{2} (\rho_{(\sigma E)}), \quad (2.26)$$

$$(\rho_{(\sigma E)}) = \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{3}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\sigma) \right), \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\kappa^2} (2\dot{H}_E + 3H_E^2) + \frac{3}{4} \dot{\sigma}^2 = \frac{V(\sigma)}{2}; \quad (2.28)$$

el campo escalar  $\sigma$  satisface la ecuación de Klein Gordon<sup>4</sup>

$$3(\ddot{\sigma} + 3H_E \dot{\sigma}) - V'(\sigma) = 0 \quad (2.29)$$

<sup>3</sup>ver Apéndice C.

<sup>4</sup>ver Apéndice D.

Donde  $H_E$  es el parámetro de Hubble en el marco de Einstein, definido por  $H_E \equiv \frac{\dot{a}_E}{a_E}$ . Finalmente, combinando (2.26) y (2.28) se obtiene una ecuación diferencial la cual, una vez es obtenida la solución para el campo  $\sigma$ , se usa para obtener la solución del parámetro de escala  $a(t)$ , que viene dada por:

$$2\frac{\dot{H}_E}{\kappa^2} = -\frac{3}{2}\dot{\sigma}^2 \quad (2.30)$$

# Capítulo 3

## Modelos de Teorías $f(R)$

Existen diversos modelos de teorías  $f(R)$  [7, 3, 38, 17, 18, 4, 8, 39]. En este trabajo se consideran algunos de los más exitosos, inspirados en los modelos de cuerdas M.

### 3.1. Primer Modelo

Considérese la función  $f(R)$  [2]

$$f(R) = R - \frac{a}{(R - \Lambda_1)^n} + b(R - \Lambda_2)^m \quad (3.1)$$

donde los coeficientes  $n, m, a, b > 0$ , pero  $n, m$  pueden tomar valores fraccionarios. Dependiendo de los valores  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$ , se puede observar en (3.1) que para grandes curvaturas los términos con potencias positivas dominan; por otro lado para curvaturas pequeñas los términos dominantes son aquellos que poseen potencias negativas.

Usando la ecuación de movimiento (2.7) se obtiene:

$$0 = -R + \frac{(n+2)a}{(R - \Lambda_1)^n} + (m-2)b(R - \Lambda_2)^m \quad (3.2)$$

Cuando  $n = 1$  y  $m = 2$  (3.2) se convierte en:

$$R^2 - R\Lambda_1 - 3a = 0 \quad (3.3)$$

Solucionando (3.3) se llega a:

$$R = R_{\pm} = \frac{\Lambda_1 \pm \sqrt{\Lambda_1^2 + 12a}}{2} \quad (3.4)$$

Sí  $a > 0$ , la solución  $R_+$  corresponde a un espacio deSitter y  $R_-$  corresponde a un espacio anti-deSitter. Por otro lado si se considera



$$\begin{aligned} \Lambda_1^2 + 12a > 0 & \quad \Lambda_1 > \sqrt{\Lambda_1^2 + 12a} \\ a > -\frac{\Lambda_1^2}{12} & \quad a < 0 \end{aligned}$$

Las dos soluciones corresponderán a un espacio deSitter si  $-\frac{\Lambda_1^2}{12} < a < 0$ . Al examinar el caso cuando  $n = 1$ ,  $m = 3$  y  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$  la ecuación (3.2) se convierte en:

$$0 = -R + \frac{3a}{R} + bR^3 \quad (3.5)$$

Para  $a$  y  $b$  positivos, la ecuación (3.2) tiene dos soluciones en general [2]. Existe una solución cuando la curvatura,  $a$  y  $b$  toman valores pequeños; por lo tanto (3.5) se transforma en:

$$0 = -R + \frac{3a}{R} \quad (3.6)$$

cuya solución que expresa un espacio deSitter es  $R_s = \sqrt{3a}$ . La otra solución se obtiene cuando la curvatura es grande, por ende (3.5) se transforma en:

$$0 = -R + bR^3 \quad (3.7)$$

cuya solución, la cual representa un espacio deSitter es  $R_l = b^{-\frac{1}{2}}$ . Ya que la raíz cuadrada del escalar de curvatura corresponde a la tasa de expansión de un universo deSitter ( $R = 12H^2$ ), la inflación podría ser generada por la solución  $R_l$ , mientras que la aceleración actual podría ser generada por  $R_s$  [2].

El potencial (2.25) para este caso está dado por:

$$V(A) = \frac{\frac{a\{(n+1)A-\Lambda_1\}}{(A-\Lambda_1)^{n+1}} + b\{(m-1)A + \Lambda_2\}(A - \Lambda_2)^{m-1}}{\left\{1 + \frac{an}{(A-\Lambda_1)^{n+1}} + bm(A - \Lambda_2)^{m-1}\right\}^2} \quad (3.8)$$

Cuando  $A \rightarrow \pm\infty$

$$V(A) \rightarrow \frac{m-1}{bm^2} A^{-m+2} \quad (3.9)$$

Por consiguiente si  $m < 2$ ,  $V(A) \rightarrow \infty$ , si  $m = 2$ ,  $V(A) \rightarrow \frac{1}{4b}$  y si  $m > 2$ ,  $V(A) \rightarrow 0$ . Por otro lado cuando  $A \rightarrow \Lambda_1$

$$V(A) \rightarrow \frac{\Lambda_1}{an} (A - \Lambda_1)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

Ya que el potencial (3.8) es complicado, considérese el caso en donde  $n = 1$ ,  $m = 2$  y  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ , por lo tanto se encuentra que:

$$V(A) = \frac{\frac{2a}{A} + bA^2}{\left(1 + \frac{a}{A^2} + 2bA\right)^2} \quad (3.11)$$

Cuando  $A \rightarrow \pm\infty$ ,  $V(A) \rightarrow \frac{1}{4b}$ . Si  $V(A) = 0$  se obtiene

$$A = 0 \quad , \quad A = -\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.12)$$

El potencial diverge cuando el denominador es igual a cero, esto es:

$$1 + \frac{a}{A^2} + 2bA = 0 \quad (3.13)$$

Al denominar la solución de (3.13) como  $A_0$ , se puede notar que  $A_0 < 0$  si  $a, b > 0$ . La derivada del potencial está dada por:

$$V'(A) = \frac{2(-\frac{a}{A^2} + bA)(1 - \frac{3a}{A^2})}{(1 + \frac{a}{A^2} + 2bA)^3} \quad (3.14)$$

$V(A)$  tiene puntos estacionarios, donde  $V'(A) = 0$ , estos son:

$$A = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad A = \pm\sqrt{3a} \quad (3.15)$$

El análisis anterior fue un simple bosquejo del potencial. Este es cero cuando  $A = 0$  y  $A = -\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ , tiene un valor asintótico dado por  $\frac{1}{4b}$ . El potencial es singular cuando  $A$  toma un valor negativo  $A = A_0$ . El potencial tiene tres puntos extremos, dos de estos están dados cuando  $A$  toma los valores positivos de  $A = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$  y  $\sqrt{3a}$ , el otro extremo está dado por el valor negativo  $A = -\sqrt{3a}$ .

Cuando  $A$  es pequeño, se tiene que:

$$e^{-\sigma} = \frac{a}{A^2} + 2bA \sim \frac{a}{A^2} \quad (3.16)$$

de lo anterior se concluye que:

$$A = \sqrt{ae^{\frac{1}{2}\sigma}} \quad (3.17)$$

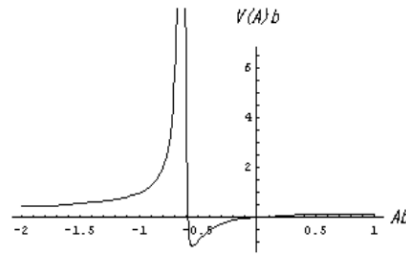
Sí  $A$  es pequeño, el potencial (3.11) toma la forma:

$$V(A) \sim \frac{2}{a}A^3 \sim 2\sqrt{ae^{\frac{3}{2}\sigma}} \quad (3.18)$$

En la región donde  $A$  es pequeño, el universo evoluciona según la ley de potencias para la inflación, lo cual se demostrará más adelante. Se puede considerar el siguiente escenario cosmológico: Supóngase que el universo comienza con un grande pero finito valor de  $A$ , debido a que  $A$  corresponde físicamente al escalar de curvatura  $R$ . Entonces el universo se expande rápidamente porque  $\sqrt{R}$  es la tasa de expansión del espacio deSitter. Cuando  $A$  llegue a valores pequeños, la tasa de expansión se vuelve pequeña; en este momento el universo empieza a expandirse según la ley de las potencias [2].

A continuación algunas formas típicas de  $V(A)$  son consideradas. En la figura 3.1, cuando  $A \rightarrow \pm\infty$ ,  $V(A)$  se aproxima a el valor constante  $\frac{1}{4b}$ ;  $V(A)$  es cero en  $A = 0$  y  $A = -\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} < 0$ . Cuando  $A \rightarrow A_0 < 0$  el potencial diverge. Existe un mínimo negativo en  $A = -\sqrt{3a}$ . En la figura 3.2 se muestra la región en donde  $A \sim 0,5$ , en ésta existen dos puntos extremos, los cuales corresponden a  $A = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$  y  $A = \sqrt{3a}$  ( $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} < \sqrt{3a}$ ). Sí el universo comienza con  $A = \sqrt{3a}$ , el cual es un valor localmente estable, éste estaría en una fase deSitter. El universo puede comenzar con  $A = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$  en donde es inestable [2].

Con base en la ecuaciones (2.26, 2.28, 2.29), las cuales, expresan la dinámica del campo  $\sigma$  y considerando el potencial  $V(\sigma)$  para curvaturas pequeñas dado por (3.18), es posible obtener una



**Figura 3.1:**  $V(A)b$  versus  $Ab$  para  $ab^2 = \frac{1}{10}$ . Figura tomada de [2]

solución para  $\sigma$  recurriendo a la simetría Noether para las teorías  $f(R)$  [40], la cual reduce la no-linealidad de las ecuaciones; una solución es:

$$\sigma = -\frac{4}{3} \ln \frac{t_E}{t_0} \quad (3.19)$$

Resolviendo (2.30) se encuentra que:

$$a_E = a_{E0} \left( \frac{t_E}{t_0} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (3.20)$$

$t_E$  es la coordenada temporal en el marco de Einstein, la cual está relacionada con la coordenada temporal en el marco de Jordan mediante  $e^{\frac{\sigma}{2}} dt_E = dt$ , por lo tanto:

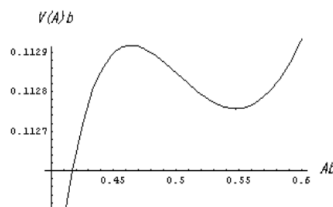
$$3t_E^{\frac{1}{3}} = t \quad (3.21)$$

Así la ley de potencias para la inflación ocurre en el marco de Jordan

$$a = e^{\frac{\sigma}{2}} a_E \propto t_E^{\frac{2}{3}} \propto t^2 \quad (3.22)$$

Por consiguiente en pequeñas curvaturas, la aceleración cósmica es prevista por términos que contienen potencias negativas de  $R$  [2], y el universo presente podría evolucionar según la ley anterior (3.22).

Al considerar el caso cuando la curvatura es grande, el potencial tiende a un valor constante  $V(A) \rightarrow \frac{1}{4b}$ . Entonces de (2.26) se puede estimar que  $\dot{\sigma}$  es pequeño, por lo tanto la ecuación (2.30) se convierte en:



**Figura 3.2:**  $V(A)b$  versus  $Ab$  para  $ab^2 = \frac{1}{10}$  para la región  $Ab \sim 0,5$ . Figura tomada de [2]

$$3H_E^2 \sim \frac{\kappa^2}{8b} \quad (3.23)$$

$$H_E = \sqrt{\frac{\kappa^2}{24b}} \quad (3.24)$$

Lo cual muestra que el espacio-tiempo es deSitter y por lo tanto el universo se expande exponencialmente. Examinando el caso general  $R = A \sim \Lambda_1$ , se obtiene que:

$$e^{-\sigma} \sim an(A - \Lambda_1)^{-n-1} \quad (3.25)$$

Cuando  $e^{-\sigma} \rightarrow +\infty$

$$V(\sigma) \sim -(an)^{\frac{1}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{n+2}{n+1}\sigma} \quad (3.26)$$

Solucionando las ecuaciones de movimiento (2.26, 2.28, 2.29), con el potencial dado por (3.26) se llega a:

$$a_E = a_{E0} \left(\frac{t_E}{t_0}\right)^{\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)^2}}, \quad \sigma = -\frac{2(n+1)}{(n+2)} \ln \frac{t_E}{t_0} \quad (3.27)$$

La coordenada temporal en el marco de Jordan está dada por:

$$(n+2)t_E^{\frac{1}{n+2}} = t \quad (3.28)$$

Por consiguiente la ley de potencias para la aceleración cósmica ocurre en el marco de Jordan:

$$a \propto t^{\frac{(n+1)(2n+1)}{n+2}} \quad (3.29)$$

Por otro lado cuando la curvatura  $R = A$  es grande

$$e^{-\sigma} \sim bm(A - \Lambda_2)^{m-1} \quad (3.30)$$

Cuando  $e^{-\sigma} \rightarrow +\infty$

$$V(\sigma) \sim -(bm)^{-\frac{1}{m-1}} \left(1 + \frac{1}{m}\right) e^{\frac{m-2}{m-1}\sigma} \quad (3.31)$$

Ahora se solucionan de nuevo las ecuaciones dinámicas para el potencial dado por (3.31), donde se obtiene:

$$a_E = a_{E0} \left(\frac{t_E}{t_0}\right)^{\frac{(m-1)(2m-1)}{(m-2)^2}}, \quad \sigma = -\frac{2(m-1)}{(m-2)} \ln \frac{t_E}{t_0}, \quad (m-2)t_E^{-\frac{1}{m-2}} = t \quad (3.32)$$

Así en el marco de Jordan el universo se contrae mediante la ley de potencias, sí  $m > 2$

$$a \propto t^{-\frac{(m-1)(2m-1)}{m-2}} \quad (3.33)$$

Por supuesto, si se cambia el tiempo  $t$  por  $t \rightarrow t_0 - t$ , la inflación ocurre con el inverso de la ley de las potencias y en  $t = t_0$  el tamaño del universo diverge [2]. Por último se analiza el parámetro de estado  $\omega_{eff}$  para tener alguna idea sobre el comportamiento de la energía oscura. Sí el universo está en fase deSitter el parámetro de estado toma el valor  $\omega_{eff} = -1$ , por lo tanto se tiene un

universo dominado totalmente por energía oscura. Cuando el factor de escala está dado por (3.22), el parámetro de estado  $\omega_{eff}$  está determinado por:

$$\omega_{eff} = -\frac{2}{3} \quad (3.34)$$

Considerando lo anterior se propone el siguiente escenario cosmológico. Supóngase que el universo empieza con una gran curvatura, el cual está dominado por la energía oscura (puede ser un espacio deSitter); cuando la curvatura se vuelve pequeña el universo empieza a evolucionar según la ley de potencias (3.22); debido a (3.34) se infiere que el campo escalar  $\sigma$  es del tipo de quinta-esencia.

## 3.2. Segundo Modelo

Considerese la función [21]

$$f(R) = R + \alpha' \ln\left(\frac{R}{\mu^2}\right) + \beta R^m, \quad (3.35)$$

donde los coeficientes  $\alpha'$  y  $\beta$  pueden tomar valores en todos los reales. Se asume una solución tipo de-Sitter ( $R = R_0 = cte$ ) que de acuerdo con la ecuación (2.7) se obtiene:

$$0 = R + 2\alpha' \ln \frac{R}{\mu^2} - \alpha' \equiv F(R) \quad (3.36)$$

Si se considera  $\alpha' = 0$ , es decir, no se tiene en cuenta el aporte de  $\ln R$ ; la única solución es para  $R = 0$ ; por lo tanto, si el punto de partida es una solución para  $R$  grande correspondiente a la inflación temprana,  $R$  decrecería hasta estabilizarse en el punto de-Sitter, deteniéndose la inflación.

Para  $m = 2$ , (3.36) se simplifica y se obtiene

$$F(R) = R + 2\alpha' \ln \frac{R}{\mu^2} - \alpha'. \quad (3.37)$$

Si  $\alpha' > 0$ ,  $F(R)$  incrementa monótonamente, esto es,

$$\lim_{R \rightarrow 0} F(R) = -\infty, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = +\infty,$$

es decir, sólo existe una solución de (3.36), la cual podría coincidir con el período de inflación temprana [10].

Si ahora  $\alpha' < 0$ ,

$$\lim_{R \rightarrow 0} F(R) = +\infty, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = +\infty.$$

El punto crítico de  $F$  es,

$$F'(R) = 1 + \frac{2\alpha'}{R} = 0 \rightarrow R = -2\alpha';$$

si  $F(-2\alpha') > 0$ , entonces no existe solución alguna para el punto de-Sitter. Para  $F(-2\alpha') = 0$ , existe sólo una solución. Si  $F(-2\alpha') < 0$  existen dos soluciones con la restricción de que  $-\frac{2\alpha'}{\mu^2} > 4,48$ , donde posiblemente la solución grande para  $R$  corresponda a la inflación en el universo temprano y la más pequeña a la aceleración actual.

Ahora bien, es necesario realizar una transformación conforme a la métrica para analizar los resultados desde otro marco, que en nuestro caso es el marco de Einstein (2.24), con el propósito de verificar los resultados que se obtuvieron y obtener mayor información sobre el factor de escala  $a(t)$  puesto que (3.36) es una ecuación trascendental. Continuando con  $m = 2$  y de acuerdo a (2.21),

$$B = e^{-\sigma} = 1 + \frac{\alpha'}{A} + 2\beta A; \quad (3.38)$$

se resuelve para  $A$ ,

$$A = \frac{-(1 - e^{-\sigma}) \pm \sqrt{(1 - e^{-\sigma})^2 - 8\beta\alpha'}}{4\beta}. \quad (3.39)$$

el potencial (2.25) toma la forma

$$V(A) = \frac{\alpha'(1 - \ln \frac{A}{\mu^2}) + \beta A^2}{(1 + \frac{\alpha'}{A} + 2\beta A)} \quad (3.40)$$

el cual puede ser expresado usando a (3.39) en términos de  $\sigma$ , como sigue:

$$V(\sigma) = e^{2\sigma} \left\{ \alpha' \left( 1 - \ln \frac{-(1 - e^{-\sigma}) \pm \sqrt{(1 - e^{-\sigma})^2 - 8\beta\alpha'}}{4\beta} \right) + \beta \left( \frac{-(1 - e^{-\sigma}) \pm \sqrt{(1 - e^{-\sigma})^2 - 8\beta\alpha'}}{4\beta} \right)^2 \right\} \quad (3.41)$$

Si se considera  $A$  pequeño, de (3.38) se obtiene que  $A \simeq \pm \alpha' e^\sigma$ ; donde  $+$ ( $-$ ) corresponde al caso  $\alpha' > 0$ ( $\alpha' < 0$ ). Por lo tanto cuando  $A \rightarrow 0$  corresponde a  $\sigma \rightarrow -\infty$  y

$$V(A) \sim -\frac{A^2}{\alpha'} \ln \frac{A}{\mu^2}, \quad V(\sigma) \sim -\alpha' \sigma e^{2\sigma}$$

Por otro lado, cuando  $A$  es grande, se obtiene

$$V(A) \rightarrow \frac{1}{4\beta} \left( 1 - \frac{2}{\beta A} \right), \quad (3.42)$$

donde  $V(A)$  es una función que incrementa monótonamente si  $\beta > 0$  y tiende a estabilizarse en  $1/4\beta$ . Para hallar los extremos de  $V(A)$ , se deriva (3.40) y se iguala a cero, esto es,

$$V'(A) = \frac{\left( 2\beta - \frac{\alpha'}{A^2} \right) \left( -\alpha' + 2\alpha' \ln \frac{A}{\mu^2} + A \right)}{\left( 1 + \frac{\alpha'}{A} + 2\beta A \right)^3} = 0; \quad (3.43)$$

donde

$$-\alpha' + 2\alpha' \ln \frac{A}{\mu^2} + A = 0, \quad (3.44)$$

corresponde a la ecuación del punto de-Sitter (3.36). Además si  $\alpha'$  y  $\beta$  son positivos, se obtiene que

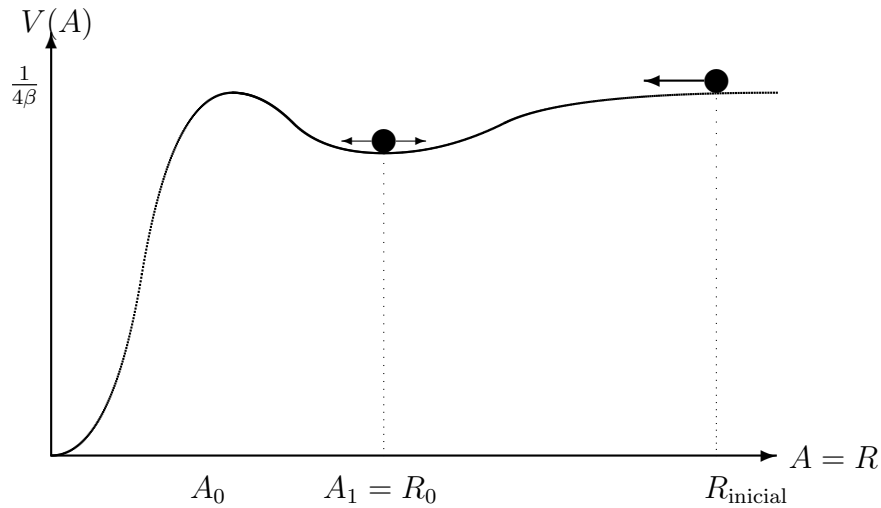
$$2\beta - \frac{\alpha'}{A^2} = 0 \rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha'}{2\beta}} \equiv A_0. \quad (3.45)$$

La solución  $A_0$  podría ser producto del reescalamiento de la métrica, debido a que no es una solución propia de (3.36). De hecho,  $A_0$  corresponde a el punto en que el mapping (3.38) es degenerado, esto es,

$$\frac{de^{-\sigma}}{dA} = 0 = -\frac{\alpha'}{A^2} + 2\beta \rightarrow A_0 \quad (3.46)$$

Se encuentra para el caso de  $\alpha', \beta > 0$ , que si  $A_0 < A_1$  ( $A_0 > A_1$ ) la solución  $A_1$  es localmente estable (inestable), donde  $A_1$  es la solución de (3.44).

Por otro lado, si  $\alpha' < 0$  y  $\beta > 0$ , existe una singularidad en  $V(A)$  cuando  $1 + \frac{\alpha'}{A} + 2\beta A = 0$ , que de



**Figura 3.3:** Potencial  $V(A)$  con  $\alpha' > 0$ .

(3.38) equivale a  $\sigma \rightarrow +\infty$ .

Para  $\alpha' > 0$ , se mencionó anteriormente que sólo existía una solución, la figura 3.3 representa el potencial  $V(A)$  el cual inicia con una curvatura  $A = R = R_{inicial}$  grande, donde el potencial  $V(A)$  se hace máximo, representando el escenario de inflación temprana. Después, la curvatura decrece suavemente con el potencial y se detiene en el punto estable  $R_0$ , el cual puede corresponder a la aceleración actual en (3.36). Se puede notar que el potencial  $V(A)$ , juega el rol de constante cosmológica, siendo el encargado de conducir el universo por sus diferentes etapas.

Se procede ahora con la solución de las ecuaciones dinámicas para el campo  $\sigma$ , a partir de las ecuaciones (2.26, 2.28, 2.29), y el campo  $V(\sigma)$  para cuando  $A \rightarrow 0$  ( $\sigma \rightarrow -\infty$ ), puesto que es la solución de mayor interés ( época correspondiente al período actual que atraviesa el universo). Es así, donde al tener en cuenta la no-linealidad de las ecuaciones para  $\sigma$ , se recurre a métodos autosimilares, cuyas soluciones son expresadas en términos de una variable auto-similar  $\hat{t} = \frac{t_E}{t_0}$ , de la siguiente manera [21]:

$$\sigma \sim -\ln \frac{t_E}{t_0} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{t_E}{t_0} + \dots \quad (3.47)$$

Obtenida la solución para  $\sigma$ , se recurre a (2.30) para hallar la respectiva forma del parámetro de escala en el marco de Einstein  $\hat{a}_E$ , esto es,

$$a_E \propto t_E^{\frac{3}{4}} + \dots \quad (3.48)$$

La coordenada temporal  $t_E$  en el marco de Einstein está relacionada con el tiempo  $t$  en el marco de Jordan (que corresponde al marco físico), por la relación  $e^{\frac{\sigma}{2}} dt_E = dt$ ; por lo tanto, el tiempo físico



es  $t \propto t_0^{\frac{1}{2}} t_E^{\frac{1}{2}}$ , obteniendo para el factor de escala la siguiente ley de potencias [37]

$$\hat{a} = e^{\frac{\sigma}{2}} \hat{a}_E \propto t_E^{\frac{1}{4}} \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (3.49)$$

Por lo tanto, se obtiene que  $\dot{\hat{a}} > 0$  con  $\ddot{\hat{a}} < 0$ , lo que produce una desaceleración en el parámetro de escala. Del resultado anterior se infiere que, en un universo sin materia, a medida que la curvatura  $R$  ( $R \rightarrow 0$ ) decrece, justo después del período de inflación donde la curvatura es infinita, se produce una etapa de expansión acelerada; es aquí donde el campo escalar  $\sigma$  domina en la solución a razón en que el tiempo  $t_E$  transcurre y se acerca al tiempo  $t_0$  y produce la desaceleración de la expansión. Por lo anterior, se considera el tiempo  $t_0$  perteneciente a la variable auto-similar de la solución del campo escalar, como el tiempo transcurrido entre la inflación y la etapa actual del universo.

Resulta de interés conocer el tipo de densidad de energía asociado al campo escalar  $\sigma$ , de modo que pueda conducir al universo de una época acelerada a una época de desaceleración; para esto, primero se calcula el valor de  $H$  y  $\dot{H}$  en el marco de Jordan,

$$H = \frac{\dot{\hat{a}}}{\hat{a}} = \frac{1}{2t} \rightarrow \dot{H} = -\frac{1}{2t^2};$$

con lo anterior, se recurre a (2.17) donde se obtiene  $\omega = \frac{1}{3}$ , el cual es el correspondiente a un fluido en forma de radiación (1.2), a pesar de no haber considerado campos de materia en las ecuaciones de campo.

### 3.3. Tercer Modelo

El tercer modelo a considerar está determinado por una función,  $f(R)$  [22], de la forma,

$$f(R) = R + f_{HS}(R) \quad (3.50)$$

Donde,  $f_{HS}(R)$  está definida como:

$$f_{HS}(R) = -\frac{m^2 c_1 (R/m^2)^n}{c_2 (R/m^2)^n + 1} \quad (3.51)$$

La cual satisface las siguientes condiciones:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f_{HS}(R) = \text{const}; \quad (3.52)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} f_{HS}(R) = 0 \quad (3.53)$$

Los coeficientes  $c_1, c_2, m$  y  $n$  son positivos. Para ser consistentes con la condición (3.52) se asume que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f_{HS}(R) = -\Lambda_i \quad (3.54)$$

Cuando la curvatura  $R$  es muy grande, la ecuación de movimiento (2.7) toma la forma:

$$0 = 2(R - \Lambda_i) - R \quad (3.55)$$

$$R = \Lambda_i \quad (3.56)$$

La solución anterior expresa un espacio deSitter solo si  $\Lambda_i > 0$ . A su vez  $\Lambda_i$  podría ser una constante cosmológica del universo temprano con la cual se puede generar la inflación [22]. Ahora consideremos que la función  $f_{HS}(R)$  toma un valor muy pequeño en el universo actual (para ser consistentes con (3.53)), esto es:

$$f_{HS}(R_0) = -2R_0; \quad f'_{HS}(R_0) \sim 0 \quad (3.57)$$

$R_0$  representa la curvatura actual del universo. Cuando la curvatura es pequeña la ecuación (2.7) toma la forma

$$0 = 2(R - 2R_0) - R \quad (3.58)$$

$$R = 4R_0 \quad (3.59)$$

La solución anterior puede expresar la aceleración actual y representa un espacio deSitter. Considerando las estimaciones realizadas en [38], en donde  $m^2/R \rightarrow 0$  (lo cual no significa que  $R$  sea grande), la función (3.51) se puede expandir como:

$$\lim_{m^2/R \rightarrow 0} f(R)_{HS} \approx -\frac{c_1}{c_2} m^2 + \frac{c_1}{c_2} m^2 \left( \frac{m^2}{R} \right)^n \quad (3.60)$$

Cuando el valor de  $m^2$  es muy pequeño comparado con el valor de  $R$ , (3.60) toma la forma:

$$f(R)_{HS} = -\frac{c_1}{c_2} m^2 \quad (3.61)$$

Por lo tanto la función  $f(R)$  es:

$$f(R) = R - \frac{c_1}{c_2} m^2 \quad (3.62)$$

Para el caso anterior el potencial (2.25) es:

$$V(\sigma) = \frac{c_1}{c_2} m^2 \quad (3.63)$$

Al resolver las ecuaciones de movimiento (2.25, 2.27, 2.28) se obtiene que:

$$H_E^2 \sim \kappa^2 \frac{c_1}{c_2} m^2 \quad (3.64)$$

Por lo tanto

$$R \sim \kappa^2 \frac{c_1}{c_2} m^2 \sim R_0 \sim (10^{-33} eV)^2 \quad (3.65)$$

Lo cual es consistente con [22]. Así se puede considerar el valor  $\kappa^2 \frac{c_1}{c_2} m^2$  como una constante cosmológica, con la cual se puede generar la aceleración cósmica actual. Además, se puede considerar una época intermedia en donde la densidad  $\rho$  de materia es más grande que dicha constante cosmológica,

$$\rho > \kappa^2 \frac{c_1}{c_2} m^2 \quad (3.66)$$

por lo tanto, aparece la etapa en donde domina la materia y el universo comienza a desacelerar. Cuando la curvatura es muy grande el potencial toma la forma:

$$V(\sigma) = \Lambda_i \quad (3.67)$$

Resolviendo las ecuaciones de movimiento, se obtiene:

$$R \sim \Lambda_i \quad (3.68)$$

Considerando la curvatura pequeña, el potencial es:

$$V(\sigma) = 2R_0 \quad (3.69)$$

De nuevo se resuelven las ecuaciones de movimiento, donde se encuentra que:

$$R \sim R_0 \quad (3.70)$$

Del anterior análisis, se puede considerar el siguiente escenario cosmológico:

El universo se inicia con inflación, la cual es impulsada por la constante cosmológica  $\Lambda_i$ ; en esta primera etapa, la curvatura es muy grande. Como la curvatura se vuelve pequeña, dicha constante cosmológica también se vuelve pequeña; posteriormente la etapa de dominio de la materia aparece y el universo empieza a desacelerar; cuando la densidad de materia se vuelve pequeña y la curvatura tiende a  $R_0$ , aparece una pequeña constante cosmológica dada por (3.64), produciendo así la aceleración cósmica.

# Capítulo 4

## Conclusiones

El análisis realizado a los modelos cosmológicos estudiados en este trabajo, conducen a una explicación de la evolución del universo y a una interpretación acerca de la naturaleza de la energía oscura; por lo tanto, se concluye:

- En el régimen de pequeñas curvaturas, los tres modelos presentan un universo con geometría de-Sitter.
- Al considerar un universo vacío domina un tipo de energía de la forma de energía oscura, cuya densidad y presión son determinadas por términos puramente geométricos. Esto sugiere, que de acuerdo con los modelos estudiados, la energía oscura está íntimamente ligada a la geometría del universo. Esto es sustentable por el hecho de que para curvaturas grandes, el parámetro de estado  $\omega = -1$ , sin embargo, a medida que la curvatura empieza a decrecer, el parámetro de estado  $\omega$  empieza a aumentar.
- Universos vacíos con curvatura constante, son dominados completamente por la energía oscura.
- En el marco de Einstein las teorías  $f(R)$  toman la forma de las teorías escalar-tensor, en donde surge un potencial  $V(\sigma)$  el cual sólo depende de la geometría y la función  $f(R)$ .
- Para el primer modelo, las etapas de inflación y expansión acelerada son predichas; donde la inflación es obtenida para potencias positivas de la curvatura escalar  $R$  y la expansión acelerada para potencias negativas. El segundo modelo predice una etapa de desaceleración para curvaturas pequeñas, siendo antecedida por una época de expansión acelerada. El tercer modelo predice la etapa de inflación temprana que es conducida por una constante cosmológica  $\Lambda_i$ , seguida a esta etapa se pronostica una época intermedia dominada por materia y la etapa actual de aceleración es predicha mediante una pequeña cosmológica. Es importante recalcar que el tercer modelo confirma la hipótesis de que la constante cosmológica es una fuerte candidata para ser la energía oscura.
- Al realizar una transformación conforme en los modelos  $f(R)$  se llega a al marco de Einstein, donde surge un campo escalar  $\sigma$ ; dicho campo escalar es del tipo de quinta-esencia. Cuando el

potencial  $V(\sigma)$  es mayor que el término cinético  $\dot{\sigma}^2$  ocurre la aceleración o inflación temprana como se puede notar en el modelo 1; por otro lado, el segundo modelo predice una etapa de desaceleración en el instante en que  $\dot{\sigma}^2 > V(\sigma)$ .

# Apéndice A

## Variación de la acción Gauss-Bonnet- $f(R)$

Dada la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (F(G, R) + \mathcal{L}_m) \quad (\text{A.1})$$

Donde  $G$  es el invariante Gauss-Bonnet:  $G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\xi\sigma}R^{\mu\nu\xi\sigma}$ . Variando A.1 respecto a  $g_{\mu\nu}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} (F(G, R) + \mathcal{L}_m)) \\ \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F(G, R)) + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \\ \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F(G, R)) + \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Tomando la primera integral se tiene:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F(G, R)) \\ \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F(G, R) + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(F(G, R)) \\ \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F(G, R) + \int d^4x \sqrt{-g} \{F_G \delta(G) + F_R \delta(R)\} \\ \delta S &= \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} F(G, R) g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) + \int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(G) + \int d^4x \sqrt{-g} F_R \delta(R) \end{aligned}$$

Aquí  $T^{\mu\nu}$  es el tensor momentum-energía y

$$F_G = \frac{\partial F(G, R)}{\partial G} \qquad F_R = \frac{\partial F(G, R)}{\partial R}$$

Al considerar la expresión:

$$\int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(G) = \int d^4x \sqrt{-g} F_G (\delta(R^2) - 4\delta(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) + \delta(R_{\mu\nu\xi\sigma} R^{\mu\nu\xi\sigma}))$$

Estimando el término:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R^2) &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R \delta(R) \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R [R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} \{\nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)\}] \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R [-R_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta(g_{\rho\sigma}) + g^{\mu\nu} \{\delta \nabla_\lambda (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)\}] \\ &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R R^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) + 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\ &\quad - 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión,

$$2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} \{g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda (\nabla_\nu \delta(g_{\mu\eta}) + \nabla_\mu \delta(g_{\nu\eta}) - \nabla_\eta \delta(g_{\mu\nu}))\}$$

Usando integración por partes y asumiendo que en los límites de integración  $\delta(g_{\mu\nu})$  es cero se tiene:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta(g_{\mu\eta}) &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\nu \nabla_\lambda F_G R) \delta(g_{\mu\eta}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu \nabla^\nu F_G R) \delta(g_{\mu\nu}) \\ \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta(g_{\nu\eta}) &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\mu \nabla_\lambda F_G R) \delta(g_{\nu\eta}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu \nabla^\nu F_G R) \delta(g_{\mu\nu}) \\ - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\eta \delta(g_{\mu\nu}) &= \int -d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\eta \nabla_\lambda F_G R) \delta(g_{\mu\nu}) \\ &= \int -d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_G R) \delta(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Tomando la expresión,

$$\begin{aligned} -2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} \{g^{\lambda\eta} \nabla_\nu (\nabla_\lambda \delta(g_{\mu\eta}) + \nabla_\mu \delta(g_{\lambda\eta}) \\ &\quad - \nabla_\eta \delta(g_{\mu\lambda}))\} \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
-\int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\lambda \delta(g_{\mu\eta}) &= \int -d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\lambda \nabla_\nu F_G R) \delta(g_{\mu\eta}) \\
&= \int -d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\nu \nabla^\mu F_G R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
-\int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta(g_{\lambda\eta}) &= \int -d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\mu \nabla_\nu F_G R) \delta(g_{\lambda\eta}) \\
&= \int -d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_G R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\eta \delta(g_{\mu\lambda}) &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\eta \nabla_\nu F_G R) \delta(g_{\mu\lambda}) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\nu \nabla^\mu F_G R) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R^2) = \int d^4x \sqrt{-g} \{-2F_G R R^{\mu\nu} + 2(\nabla^\mu \nabla^\nu F_G R) - 2g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_G R)\} \delta(g_{\mu\nu})$$

Considerando el término:

$$\begin{aligned}
-4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G [\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} + \delta(R^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}] \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G [\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} + \delta(g^{\rho\mu} g^{\xi\nu} R_{\rho\xi}) R_{\mu\nu}] \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G [\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} R_{\rho\xi} \delta(g^{\rho\mu} g^{\xi\nu}) + g^{\rho\mu} g^{\xi\nu} R_{\mu\nu} \delta(R_{\rho\xi})] \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G [2\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} R_{\rho\xi} g^{\xi\nu} \delta(g^{\rho\mu}) + R_{\mu\nu} R_{\rho\xi} g^{\rho\mu} \delta(g^{\xi\nu})] \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G [2\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} - R_{\mu}^{\xi} R_{\rho\xi} g^{\rho\beta} g^{\mu\alpha} \delta(g_{\beta\alpha}) - R_{\nu}^{\rho} R_{\rho\xi} g^{\xi\beta} g^{\nu\alpha} \delta(g_{\beta\alpha})] \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G [2\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} - 2R^{\nu\rho} R_{\rho}^{\mu} \delta(g_{\mu\nu})]
\end{aligned}$$

Tomando la expresión:

$$-4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G 2\delta(R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} = -8 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} \{\nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)\}$$

se sigue que:

$$\begin{aligned}
-8 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda (\nabla_\nu \delta(g_{\mu\eta}) + \nabla_\mu \delta(g_{\nu\eta}) \\
&\quad - \nabla_\eta \delta(g_{\mu\nu}))
\end{aligned}$$



De la expresión anterior se deduce:

$$\begin{aligned}
-4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta(g_{\mu\eta}) &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} (\nabla_\nu \nabla_\lambda F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\mu\eta}) \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla^\nu F_G R^{\mu\eta}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
-4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta(g_{\nu\eta}) &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} (\nabla_\mu \nabla_\lambda F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\nu\eta}) \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla^\mu F_G R^{\nu\eta}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\eta \delta(g_{\mu\nu}) &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} (\nabla_\eta \nabla_\lambda F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
&= 4 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^2 F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu (\nabla_\lambda \delta(g_{\mu\eta}) + \nabla_\mu \delta(g_{\lambda\eta}) \\
&\quad - \nabla_\eta \delta(g_{\mu\lambda}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\lambda \delta(g_{\mu\eta}) &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} (\nabla_\lambda \nabla_\nu F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\mu\eta}) \\
&= 4 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\nu \nabla_\eta F_G R^{\mu\eta}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta(g_{\lambda\eta}) &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} (\nabla_\mu \nabla_\nu F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\lambda\eta}) \\
&= 4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \nabla_\eta F_G R^{\lambda\eta}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
-4 \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\eta \delta(g_{\mu\lambda}) &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} (\nabla_\eta \nabla_\nu F_G R^{\mu\nu}) \delta(g_{\mu\lambda}) \\
&= -4 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\nu \nabla_\lambda F_G R^{\mu\lambda}) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta(g_{\mu\nu}) [8F_G R^{\nu\rho} R_\rho^\mu - 4(\nabla_\eta \nabla^\nu R^{\mu\eta} F_G) \\
&\quad - 4(\nabla_\eta \nabla^\mu R^{\nu\eta} F_G) + 4\nabla^2(F_G R^{\mu\nu}) + 4g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\eta (F_G R^{\lambda\eta})]
\end{aligned}$$

Tomando el término

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R_{\mu\nu\xi\sigma} R^{\mu\nu\xi\sigma}) = \int d^4x \sqrt{-g} F_G [\delta(R_{\mu\nu\xi\sigma}) R^{\mu\nu\xi\sigma} + \delta(R^{\mu\nu\xi\sigma}) R_{\mu\nu\xi\sigma}] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F_G [2\delta(R_{\mu\nu\xi\sigma}) R^{\mu\nu\xi\sigma} + \delta(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\kappa} g^{\sigma\eta}) R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma}] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F_G [2\delta(R_{\mu\nu\xi\sigma}) R^{\mu\nu\xi\sigma} + R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} \delta(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\kappa}) \\
&+ R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\kappa} \delta(g^{\sigma\eta})] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F_G [2\delta(R_{\mu\nu\xi\sigma}) R^{\mu\nu\xi\sigma} + R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} \{g^{\sigma\eta} g^{\xi\kappa} g^{\nu\beta} \delta(g^{\mu\alpha}) + g^{\sigma\eta} g^{\xi\kappa} g^{\mu\alpha} \delta(g^{\nu\beta}) \\
&+ g^{\sigma\eta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta(g^{\xi\kappa}) + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\kappa} \delta(g^{\sigma\eta})\}]
\end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} g^{\xi\kappa} g^{\nu\beta} \delta(g^{\mu\alpha}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} g^{\xi\kappa} g^{\nu\beta} g^{\mu\rho} g^{\alpha\lambda} \\
&\delta(g_{\rho\lambda}) \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\rho\sigma\beta} R_{\rho\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} g^{\xi\kappa} g^{\mu\alpha} \delta(g^{\nu\beta}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} g^{\xi\kappa} g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} g^{\beta\delta} \\
&\delta(g_{\rho\delta}) \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\rho\sigma\beta} R_{\rho\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta(g^{\xi\kappa}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\sigma\eta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\rho} g^{\kappa\varphi} \\
&\delta(g_{\rho\varphi}) \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\rho\sigma\beta} R_{\rho\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\kappa} \delta(g^{\sigma\eta}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R_{\alpha\beta\kappa\eta} R_{\mu\nu\xi\sigma} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\xi\kappa} g^{\sigma\varphi} g^{\eta\delta} \\
&\delta(g_{\varphi\delta}) \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\mu\rho\sigma\beta} R_{\rho\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R_{\mu\nu\xi\sigma} R^{\mu\nu\xi\sigma}) = \int d^4x \sqrt{-g} F_G [-4R^{\mu\xi\sigma\beta} R_{\xi\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu}) + 2R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(R_{\mu\nu\xi\sigma})] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F_G [-4R^{\mu\xi\sigma\beta} R_{\xi\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu}) + 2R_{\nu\xi\sigma}^\kappa R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(g_{\mu\kappa}) + 2g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(R_{\nu\xi\sigma}^\kappa)] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F_G [-2R^{\mu\xi\sigma\beta} R_{\xi\sigma\beta}^\nu \delta(g_{\mu\nu}) + 2g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(R_{\nu\xi\sigma}^\kappa)]
\end{aligned}$$

Tomando el término:

$$\begin{aligned}
2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(R_{\nu\xi\sigma}^\kappa) &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} [\nabla_\xi \delta(\Gamma_{\nu\sigma}^\kappa) - \nabla_\sigma \delta(\Gamma_{\nu\xi}^\kappa)] \\
2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \nabla_\xi \delta(\Gamma_{\nu\sigma}^\kappa) &= \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \nabla_\xi [g^{\kappa\eta} (\nabla_\sigma \delta(g_{\nu\eta}) \\
&\quad + \nabla_\nu \delta(g_{\sigma\eta}) - \nabla_\eta \delta(g_{\nu\sigma}))] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \nabla_\xi [\nabla_\sigma \delta(g_{\nu\eta}) + \nabla_\nu \delta(g_{\sigma\eta}) \\
&\quad - \nabla_\eta \delta(g_{\nu\sigma})]
\end{aligned}$$

De la anterior expresión se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \nabla_\xi \nabla_\nu \delta(g_{\sigma\eta}) &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu \nabla_\xi F_G R^{\eta\nu\xi\sigma}) \delta(g_{\sigma\eta}) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla_\xi F_G R^{\mu\eta\xi\nu}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
-\int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \nabla_\xi \nabla_\eta \delta(g_{\nu\sigma}) &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla_\xi F_G R^{\eta\nu\xi\sigma}) \delta(g_{\sigma\nu}) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla_\xi F_G R^{\mu\eta\xi\nu}) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Tomando la expresión:

$$\begin{aligned}
-2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \nabla_\sigma \delta(\Gamma_{\nu\xi}^\kappa) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \nabla_\sigma [g^{\kappa\eta} (\nabla_\xi \delta(g_{\nu\eta}) \\
&\quad + \nabla_\nu \delta(g_{\xi\eta}) - \nabla_\eta \delta(g_{\nu\xi}))] \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \nabla_\sigma [\nabla_\xi \delta(g_{\nu\eta}) \\
&\quad + \nabla_\nu \delta(g_{\xi\eta}) - \nabla_\eta \delta(g_{\nu\xi})]
\end{aligned}$$

De la expresión anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
-\int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \nabla_\sigma \nabla_\nu \delta(g_{\xi\eta}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu \nabla_\sigma F_G R^{\eta\nu\xi\sigma}) \delta(g_{\xi\eta}) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla_\xi F_G R^{\mu\eta\xi\nu}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \nabla_\sigma \nabla_\eta \delta(g_{\nu\xi}) &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla_\sigma F_G R^{\eta\nu\xi\sigma}) \delta(g_{\xi\nu}) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\eta \nabla_\xi F_G R^{\mu\eta\xi\nu}) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}
2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(R_{\nu\xi\sigma}^\kappa) &= \int d^4x \sqrt{-g} [4(\nabla_\eta \nabla_\sigma F_G R^{\mu\eta\sigma\nu}) \delta(g_{\mu\nu}) \\
&\quad + F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \{\nabla_{[\xi} \nabla_{\sigma]} \delta(g_{\nu\eta})\}]
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad:

$$\nabla_{[\rho}\nabla_{\sigma]}A_{\mu} = R_{\mu\sigma\rho}^{\beta}A_{\beta}$$

Se obtiene que:

$$\begin{aligned} 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_G g_{\mu\kappa} R^{\mu\nu\xi\sigma} \delta(R_{\nu\xi\sigma}^{\kappa}) &= \int d^4x \sqrt{-g} [4(\nabla_{\eta}\nabla_{\sigma}F_G R^{\mu\eta\sigma\nu})\delta(g_{\mu\nu}) \\ &\quad + F_G R^{\eta\nu\xi\sigma} \{R_{\nu\xi\sigma}^{\beta}\delta(g_{\beta\eta}) + R_{\eta\xi\sigma}^{\beta}\delta(g_{\beta\nu})\}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} [4(\nabla_{\eta}\nabla_{\sigma}F_G R^{\mu\eta\sigma\nu})\delta(g_{\mu\nu})] \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede deducir que:

$$\int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(R_{\mu\nu\xi\sigma} R^{\mu\nu\xi\sigma}) = \int d^4x \sqrt{-g} [4(\nabla_{\eta}\nabla_{\sigma}F_G R^{\mu\eta\sigma\nu}) - 2R^{\mu\xi\sigma\beta} R_{\xi\sigma\beta}^{\nu}] \delta(g_{\mu\nu})$$

Por ende se llega a que:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F_G \delta(G) &= \int d^4x \sqrt{-g} [-2F_G R R^{\mu\nu} + 2(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu} R F_G) \\ &\quad - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G R) + 8F_G R^{\nu\rho} R_{\rho}^{\mu} - 4(\nabla_{\eta}\nabla^{\nu} R^{\mu\eta} F_G) \\ &\quad - 4(\nabla_{\eta}\nabla^{\mu} R^{\nu\eta} F_G) + 4(\nabla^2 F_G R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu}(\nabla_{\lambda}\nabla_{\eta} F_G R^{\lambda\eta}) \\ &\quad + 4(\nabla_{\eta}\nabla_{\sigma} F_G R^{\mu\eta\sigma\nu}) - 2R^{\mu\xi\sigma\beta} R_{\xi\sigma\beta}^{\nu}] \delta(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Ahora calculando el término:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F_R \delta(R) &= \int d^4x \sqrt{-g} F_R \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} F_R [\delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})] \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F_R R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\rho} g^{\nu\beta} \delta(g_{\rho\beta}) \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_R R^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Tomando la expresión:

$$\int d^4x \sqrt{-g} F_R \delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} [\nabla_{\lambda} \delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu} \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})]$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda [\nabla_\nu \delta(g_{\mu\eta}) + \nabla_\mu \delta(g_{\nu\eta}) \\
&\quad - \nabla_\eta \delta(g_{\mu\nu})] \\
\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta(g_{\mu\eta}) &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\nu \nabla_\lambda F_R) \delta(g_{\mu\eta}) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu \nabla^\nu F_R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta(g_{\nu\eta}) &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\mu \nabla_\lambda F_R) \delta(g_{\nu\eta}) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu \nabla^\nu F_R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\lambda \nabla_\eta \delta(g_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\eta \nabla_\lambda F_R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_R) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Considerando la expresión:

$$\begin{aligned}
-\int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu [\nabla_\lambda \delta(g_{\mu\eta}) + \nabla_\mu \delta(g_{\lambda\eta}) \\
&\quad - \nabla_\eta \delta(g_{\mu\lambda})] \\
-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\lambda \delta(g_{\mu\eta}) &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\lambda \nabla_\nu F_R) \delta(g_{\mu\eta}) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\nu \nabla^\mu F_R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta(g_{\lambda\eta}) &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\mu \nabla_\nu F_R) \delta(g_{\lambda\eta}) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_R) \delta(g_{\mu\nu}) \\
\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_R g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} \nabla_\nu \nabla_\eta \delta(g_{\mu\lambda}) &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\eta} (\nabla_\eta \nabla_\nu F_R) \delta(g_{\mu\lambda}) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\nu \nabla^\mu F_R) \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que:

$$\int d^4x \sqrt{-g} F_R \delta(R) = \int d^4x \sqrt{-g} [-F_R R^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu F_R) - g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_R) \delta(g_{\mu\nu})]$$

Tomando los términos:

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \sqrt{-g} [2(\nabla^\mu \nabla^\nu R F_G) - 2g^{\mu\nu} (\nabla^2 F_G R) - 4(\nabla_\eta \nabla^\nu R^{\mu\eta} F_G) - 4(\nabla_\eta \nabla^\mu R^{\nu\eta} F_G) \\
&\quad + 4(\nabla^2 F_G R^{\mu\nu}) + 4g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \nabla_\eta F_G R^{\lambda\eta}) + 4(\nabla_\eta \nabla_\sigma F_G R^{\mu\eta\sigma\nu})] \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} [2(\nabla^\mu \nabla^\nu F_G)R + 2\nabla^\nu F_G \nabla^\mu R + 2\nabla^\mu F_G \nabla^\nu R + 2F_G(\nabla^\mu \nabla^\nu R) \\
& - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G)R - 2g^{\mu\nu} \nabla_\lambda F_G \nabla^\lambda R - 2g^{\mu\nu} \nabla_\lambda R \nabla^\lambda F_G - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 R)F_G \\
& - 4(\nabla_\rho \nabla^\mu F_G)R^{\nu\rho} - 4\nabla^\mu F_G \nabla_\rho R^{\nu\rho} - 4\nabla_\rho F_G \nabla^\mu R^{\nu\rho} - 4F_G(\nabla_\rho \nabla^\mu R^{\nu\rho}) \\
& - 4(\nabla_\rho \nabla^\nu F_G)R^{\mu\rho} - 4\nabla^\nu F_G \nabla_\rho R^{\mu\rho} - 4\nabla_\rho F_G \nabla^\nu R^{\mu\rho} - 4F_G(\nabla_\rho \nabla^\nu R^{\mu\rho}) \\
& 4(\nabla^2 F_G)R^{\mu\nu} + 4\nabla_\lambda F_G \nabla^\lambda R^{\mu\nu} + 4\nabla_\lambda R^{\mu\nu} \nabla^\lambda F_G + 4(\nabla^2 R^{\mu\nu})F_G \\
& 4g^{\mu\nu} \{R^{\rho\sigma}(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G) + \nabla_\sigma F_G \nabla_\rho R^{\rho\sigma} + \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} \nabla_\rho F_G + F_G(\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma})\} \\
& 4\{R^{\mu\rho\sigma\nu}(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G) + \nabla_\sigma F_G \nabla_\rho R^{\mu\rho\sigma\nu} + \nabla_\sigma R^{\mu\rho\sigma\nu} \nabla_\rho F_G \\
& + F_G(\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\sigma\nu})\} \delta(g_{\mu\nu})]
\end{aligned}$$

Usando las identidades de Bianchi

$$\nabla^\rho R_{\rho\tau\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\nu\tau} - \nabla_\nu R_{\mu\tau}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu R$$

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} = \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - R_\rho^\mu R^{\nu\rho}$$

$$\nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} = \frac{1}{2} [\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R] - 2R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} + 2R_\rho^\mu R^{\nu\rho}$$

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \square R$$

En la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} [2(\nabla^\mu \nabla^\nu F_G)R + 2\nabla^\nu F_G \nabla^\mu R + 2\nabla^\mu F_G \nabla^\nu R + 2F_G(\nabla^\mu \nabla^\nu R) \\
& - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G)R - 2g^{\mu\nu} \nabla_\lambda F_G \nabla^\lambda R - 2g^{\mu\nu} \nabla_\lambda R \nabla^\lambda F_G - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 R)F_G \\
& - 4(\nabla_\rho \nabla^\mu F_G)R^{\nu\rho} - 2\nabla^\mu F_G \nabla^\nu R - 4\nabla_\rho F_G \nabla^\mu R^{\nu\rho} \\
& F_G(-2\nabla^\mu \nabla^\nu R - 2\nabla^\nu \nabla^\mu R + 8R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - 8R_\rho^\mu R^{\nu\rho}) \\
& - 4(\nabla_\rho \nabla^\nu F_G)R^{\mu\rho} - 2\nabla^\nu F_G \nabla_\mu R - 4\nabla_\rho F_G \nabla^\nu R^{\mu\rho} \\
& 4(\nabla^2 F_G)R^{\mu\nu} + 4\nabla_\lambda F_G \nabla^\lambda R^{\mu\nu} + 4\nabla_\lambda R^{\mu\nu} \nabla^\lambda F_G + 4(\nabla^2 R^{\mu\nu})F_G \\
& 4g^{\mu\nu} \{R^{\rho\sigma}(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G) + \frac{1}{2} \nabla_\sigma F_G \nabla^\sigma R + \frac{1}{2} \nabla^\rho R \nabla_\rho F_G + \frac{1}{2} F_G \square R\} \\
& 4F_G(-\nabla^2 R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R - R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} + R_\rho^\mu R^{\nu\rho}) + 4\nabla_\rho F_G(\nabla^\mu R^{\rho\nu} - \nabla^\rho R^{\nu\mu}) \\
& + 4(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G)R^{\mu\rho\sigma\nu} - 4\nabla_\sigma F_G(\nabla^\sigma R^{\nu\mu} - \nabla^\nu R^{\sigma\mu})] \delta(g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Lo cual se reduce a:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} [2(\nabla^\mu \nabla^\nu F_G)R - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G)R - 4(\nabla_\rho \nabla^\mu F_G)R^{\nu\rho} - 4(\nabla_\rho \nabla^\nu F_G)R^{\mu\rho} \\ & + 4(\nabla^2 F_G)R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\sigma}(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G) + 4(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G)R^{\mu\rho\sigma\nu} - 4F_G R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} \\ & - 4F_G R_\rho^\mu R^{\nu\rho}] \delta(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Por lo cual se llega a la conclusión de que:

$$\begin{aligned} \delta(S) = & \int d^4x \sqrt{-g} [T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F(G, R) - 2F_G R R^{\mu\nu} + 4F_G R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} \\ & - 2F_G R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu - 4F_G R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} + 2(\nabla^\mu \nabla^\nu F_G)R - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G)R \\ & - 4(\nabla_\rho \nabla^\mu F_G)R^{\nu\rho} - 4(\nabla_\rho \nabla^\nu F_G)R^{\mu\rho} + 4(\nabla^2 F_G)R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\sigma}(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G) \\ & - 4(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G)R^{\mu\rho\nu\sigma} - F_R R^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu F_R) - g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_R)] \delta(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Como  $\delta(S) = 0$  y en general  $\sqrt{-g}$  y  $\delta(g_{\mu\nu})$  son diferente de cero se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 = & T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F(G, R) - 2F_G R R^{\mu\nu} + 4F_G R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} \\ & - 2F_G R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu - 4F_G R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} + 2(\nabla^\mu \nabla^\nu F_G)R - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G)R \\ & - 4(\nabla_\rho \nabla^\mu F_G)R^{\nu\rho} - 4(\nabla_\rho \nabla^\nu F_G)R^{\mu\rho} + 4(\nabla^2 F_G)R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\sigma}(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G) \\ & - 4(\nabla_\rho \nabla_\sigma F_G)R^{\mu\rho\nu\sigma} - F_R R^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu F_R) - g^{\mu\nu}(\nabla^2 F_R) \end{aligned}$$

En el anterior cálculo se tuvieron en cuenta las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \delta(g^{\mu\nu}) &= -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta(g_{\rho\sigma}) \\ \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(g_{\mu\nu}) \\ \delta(R_{\mu\nu}) &= \nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\nu) \\ \delta(R_{\beta\mu\nu}^\alpha) &= \nabla_\mu \delta(\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) \\ \delta(\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) &= \frac{1}{2}g^{\lambda\eta}[\nabla_\sigma \delta(g_{\nu\eta}) + \nabla_\nu \delta(g_{\sigma\eta}) - \nabla_\eta \delta(g_{\nu\sigma})] \end{aligned}$$

# Apéndice B

## Identidades de Bianchi

Se procederá a realizar la demostración de las siguientes identidades:

$$\nabla^\rho R_{\rho\tau\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\nu\tau} - \nabla_\nu R_{\mu\tau} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu R \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} = \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - R_\rho^\mu R^{\nu\rho} \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} = \frac{1}{2} [\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R] - 2R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} + 2R_\rho^\mu R^{\nu\rho} \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \square R \quad (\text{B.5})$$

### 1. Demostración de la identidad B.1

Dada la identidad de Bianchi

$$\nabla_\eta R_{\rho\tau\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\rho\tau\eta\mu} + \nabla_\mu R_{\rho\tau\nu\eta} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Al multiplicar B.6 por  $g^{\eta\rho}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^\rho R_{\rho\tau\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\mu\tau} - \nabla_\mu R_{\nu\tau} &= 0 \\ \nabla^\rho R_{\rho\tau\mu\nu} &= \nabla_\mu R_{\nu\tau} - \nabla_\nu R_{\mu\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

### 2. Demostración de la identidad B.2

Multiplicando B.6 por  $g^{\rho\eta}$  se obtiene

$$\nabla_\eta R_{\tau\mu\nu}^\eta + \nabla_\nu R_{\tau\eta\mu}^\eta + \nabla_\mu R_{\tau\nu\eta}^\eta = 0 \quad (\text{B.8})$$

Al multiplicar B.8 por  $g^{\tau\mu}$  se obtiene

$$\nabla_\mu R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \nabla_\nu R = 0 \quad (\text{B.9})$$



Multiplicando B.9 por  $g^{\lambda\nu}$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu R^{\lambda\mu} &= \frac{1}{2} \nabla^\lambda R \\
g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} \nabla_\mu R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \nabla^\lambda R \\
g^{\lambda\alpha} \nabla^\beta R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \nabla^\lambda R \\
\nabla^\beta R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha R \\
\nabla^\rho R_{\rho\mu} &= \frac{1}{2} \nabla_\mu R
\end{aligned} \tag{B.10}$$

### 3. Demostración de la identidad B.3

Usando B.1 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} &= \nabla_\rho [\nabla^\rho R^{\mu\nu} - \nabla^\mu R^{\rho\nu}] \\
&= \nabla^2 R^{\mu\nu} - \nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} - \nabla^\mu \nabla_\rho R^{\rho\nu} + \nabla^\mu \nabla_\rho R^{\rho\nu}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Usando B.2 en B.11 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 R^{\mu\nu} - \nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} - \nabla^\mu \nabla_\rho R^{\rho\nu} + \nabla^\mu \nabla_\rho R^{\rho\nu} &= \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R \\
&\quad + g^{\mu\alpha} g^{\rho\delta} g^{\nu\sigma} (\nabla_{[\alpha} \nabla_{\rho]} R_{\delta\sigma})
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Por lo tanto se deduce que:

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} &= \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + g^{\mu\alpha} g^{\rho\delta} g^{\nu\sigma} (\nabla_{[\alpha} \nabla_{\rho]} R_{\delta\sigma}) \\
&= \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + g^{\mu\alpha} g^{\rho\delta} g^{\nu\sigma} [R_{\xi\sigma} R_{\delta\rho\alpha}^\xi + R_{\delta\varphi} R_{\sigma\rho\alpha}^\varphi] \\
&= \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - R_\rho^\mu R^{\nu\rho}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

### 4. Demostración de la identidad B.4

Considerando la expresión

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} &= \nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} - \nabla^\mu \nabla_\rho R^{\rho\nu} + \nabla^\mu \nabla_\rho R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} - \nabla^\nu \nabla_\rho R^{\rho\mu} \\
&\quad + \nabla^\nu \nabla_\rho R^{\rho\mu}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

y al aplicar B.2 en B.14 se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} &= g^{\mu\alpha} g^{\rho\beta} g^{\xi\nu} [\nabla_{[\rho} \nabla_{\alpha]} R_{\beta\xi}] + \frac{1}{2} (\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R) \\
&\quad + g^{\nu\alpha} g^{\rho\beta} g^{\xi\mu} [\nabla_{[\rho} \nabla_{\alpha]} R_{\beta\xi}] \\
&= g^{\mu\alpha} g^{\rho\beta} g^{\xi\nu} [R_{\delta\xi} R_{\beta\alpha\rho}^\delta + R_{\delta\beta} R_{\xi\alpha\rho}^\delta] + \frac{1}{2} (\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R) \\
&\quad + g^{\nu\alpha} g^{\rho\beta} g^{\xi\mu} [R_{\delta\xi} R_{\beta\alpha\rho}^\delta + R_{\delta\beta} R_{\xi\alpha\rho}^\delta] \\
&= \frac{1}{2} [\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R] - 2R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} + 2R_\rho^\mu R^{\nu\rho}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

### 5. Demostración de la identidad B.5

Usando B.2 en B.5 se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \nabla_\rho \nabla^\rho R \\
&= \frac{1}{2} \square R
\end{aligned} \tag{B.16}$$

# Apéndice C

## Solución de las ecuaciones de movimiento

Consideremos la siguiente acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa^2} + F(R) - \frac{\eta}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - V(\phi) - \xi(\phi)G + \mathcal{L}_{matter} \right] \quad (\text{C.1})$$

Variando con respecto a  $g_{\mu\nu}$  (C.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2\kappa^2} (-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \eta \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \partial^\nu (\phi) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (-V(\phi) - \xi(\phi)G) \\ & + 2\xi(\phi) R R^{\mu\nu} - 4\xi R_\rho^\mu R^{\nu\rho} + 2\xi R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu + 4\xi R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} - 2(\nabla^\mu \nabla^\nu \xi) R + 2g^{\mu\nu} (\nabla^2 \xi) R \\ & + 4(\nabla_\rho \nabla^\mu \xi) R^{\nu\rho} + 4(\nabla_\rho \nabla^\nu \xi) R^{\mu\rho} - 4(\nabla^2 \xi) R^{\mu\nu} - 4g^{\mu\nu} [\nabla_\rho \nabla_\sigma \xi] R^{\rho\sigma} + 4[\nabla_\rho \nabla_\sigma \xi] R^{\mu\rho\nu\sigma} \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F(R) - F_R R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu F_R - g^{\mu\nu} \nabla^2 F_R + \frac{T^{\mu\nu}}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Donde  $F_R = F'(R)$ , y  $G = R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ .

Asumiendo la métrica FRLW espacialmente plana,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2; \quad (\text{C.3})$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^t &= a^2 H \delta_{ij}, & \Gamma_{jt}^i &= \Gamma_{it}^j = H \delta_j^i, & R_{itjt} &= -a^2 (\dot{H} + H^2) \delta_{ij}, \\ R_{ijkl} &= a^4 H^2 (\delta_{ik} \delta_{lj} - \delta_{il} \delta_{kj}), & R_{tt} &= -3(\dot{H} + H^2), & R_{ij} &= a^2 (\dot{H} + 3H^2) \delta_{ij}, \\ R &= 12H^2 + 6\dot{H}, & G &= 24(\dot{H} H^2 + H^4), & \text{others components} &= 0 \end{aligned}$$

Asumiendo que  $\phi$  sólo depende del tiempo, la componente  $(\mu, \nu) = (t, t)$  en la Eq.(C.2), se obtiene

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa^2}(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) &= \frac{1}{2\kappa^2}(-R^{tt} + \frac{1}{2}g^{tt}R) = \frac{1}{2\kappa^2}[3(\dot{H} + H^2) - \frac{1}{2}(6\dot{H} + 12H^2)] = \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}(-3H^2) \end{aligned}$$

$$\eta \left( \frac{1}{2}\partial^\mu\partial^\nu(\phi) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi \right) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-V(\phi) - \xi(\phi)G) = \frac{V(\phi)}{2} + 12\dot{H}H^2\xi(\phi) + 12H^4\xi(\phi)$$

$$2\xi(\phi)RR^{\mu\nu} = 2\xi[6\dot{H} + 12H^2][-3(\dot{H} + H^2)] = \xi(-36\dot{H}^2 - 108\dot{H}H^2 - 72H^4)$$

$$\begin{aligned} -4\xi R_\rho^\mu R^{\nu\rho} &= -4\xi g_{\rho\beta} R^{\mu\beta} R^{\nu\rho} = 4\xi (R^{tt})^2 = 36\xi(\dot{H} + H^2)^2 = \\ &= \xi(36\dot{H}^2 + 72\dot{H}H^2 + 36H^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\xi R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu &= 2\xi R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\beta\rho\sigma\tau} g^{\nu\beta} = -2\xi g^{\mu\lambda} g^{\alpha\rho} g^{\eta\sigma} g^{\delta\tau} R_{\lambda\alpha\eta\delta} R_{t\rho\sigma\tau} \\ &= -2\xi g^{tt} g^{ij} g^{tt} g^{mn} R_{titm} R_{tjtn} - 2\xi g^{tt} g^{ij} g^{tt} g^{mn} R_{timt} R_{tjnt} \\ &= -4\xi g^{tt} g^{ij} g^{tt} g^{mn} R_{titm} R_{tjtn} = -4\xi \delta^{ij} \delta^{mn} (\dot{H} + H^2)^2 \delta_{im} \delta_{jn} \\ &= -12\xi(\dot{H} + H^2)^2 = -12\xi(\dot{H}^2 + 2\dot{H}H^2 + H^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\xi R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} &= -4\xi g^{\mu\omega} g^{\alpha\rho} g^{\eta\sigma} g^{\nu\delta} R_{\omega\alpha\eta\delta} R_{\rho\sigma} = -4\xi g^{\alpha\rho} g^{\eta\sigma} R_{t\alpha t\delta} R_{\rho\sigma} \\ &= -4\xi g^{im} g^{jn} R_{itjt} R_{mn} = 4\xi \delta^{im} \delta^{jn} (\dot{H} + H^2) \delta_{ij} (\dot{H} + 3H^2) \delta_{mn} \\ &= 12\xi(\dot{H}^2 + 4H^2\dot{H} + 3H^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2(\nabla^\mu\nabla^\nu\xi)R &= -2g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\nabla_\beta\nabla_\alpha\xi)R = -2g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\nabla_\beta\partial_\alpha\xi)R \\ &= -2Rg^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\partial_\beta\partial_\alpha\xi - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda\partial_\lambda\xi) = -2R\ddot{\xi} = 12\ddot{\xi}\dot{H} - 24\dot{\xi}H^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g^{\mu\nu}(\nabla^2\xi)R &= -2(\nabla^\rho\nabla_\rho\xi)R = -2g^{\rho\beta} (\nabla_\beta\nabla_\rho\xi)R = -2g^{\rho\beta} (\partial_\beta\partial_\rho\xi - \Gamma_{\beta\rho}^\lambda\partial_\lambda\xi)R \\ &= -2[g^{tt}\ddot{\xi} - g^{ij}\Gamma_{ij}^t\dot{\xi}]R = -2[-\ddot{\xi} - \delta^{ij}H\delta_{ij}\dot{\xi}]R = (2\ddot{\xi} + 6H\dot{\xi})R \\ &= \ddot{\xi}(12\dot{H} + 24H^2) + \dot{\xi}(36\dot{H}H + 72H^3) \end{aligned}$$

$$4(\nabla_\rho \nabla^\mu \xi)R^{\nu\rho} + 4(\nabla_\rho \nabla^\nu \xi)R^{\mu\rho} = 4(\nabla_\rho \nabla^t \xi)R^{t\rho} + 4(\nabla_\rho \nabla^t \xi)R^{t\rho} = 8(\nabla_\rho \nabla^t \xi)R^{t\rho} \\ = 8R^{t\rho}[\partial_\rho \partial^t \xi + \Gamma_{\rho\eta}^t \partial^\eta \xi] = -8R^{tt}\ddot{\xi} = 24\dot{\xi}\dot{H} + 24\ddot{\xi}H^2$$

$$-4(\nabla^2 \xi)R^{\mu\nu} = 4R^{tt}(\ddot{\xi} + 3H\dot{\xi}) = -12(\dot{H} + H^2)(\ddot{\xi} + 3H\dot{\xi}) \\ = -12\ddot{\xi}\dot{H} - 12H^2\ddot{\xi} - 36\dot{H}H\dot{\xi} - 36H^3\dot{\xi}$$

$$-4g^{\mu\nu}[\nabla_\rho \nabla_\sigma \xi]R^{\rho\sigma} = 4(\nabla_\rho \partial_\sigma \xi)R^{\rho\sigma} = 4R^{\rho\sigma}(\partial_\rho \partial_\sigma \xi - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda \xi) = 4R^{tt}\ddot{\xi} - 4R^{ij}\Gamma_{ij}^\lambda \partial_\lambda \xi \\ = 4R^{tt}\ddot{\xi} - 4R^{ij}a^2 H \delta_{ij} \dot{\xi} = -12\ddot{\xi}(\dot{H} + H^2) - 4g^{im}g^{jn}R_{mn}a^2 H \delta_{ij} \dot{\xi} \\ = -12\ddot{\xi}(\dot{H} + H^2) - 4(\dot{H} + 3H^2)\delta_{mn}H\delta^{mn}\dot{\xi} = -12\ddot{\xi}(\dot{H} + H^2) \\ - 12H(\dot{H} + 3H^2)\dot{\xi} = -12\dot{H}\ddot{\xi} - 12H^2\ddot{\xi} - 12\dot{H}H\dot{\xi} - 36H^3\dot{\xi}$$

$$4[\nabla_\rho \nabla_\sigma \xi]R^{\mu\nu\rho\sigma} = 4[\nabla_\rho \partial_\sigma \xi]g^{t\alpha}g^{\rho\beta}g^{t\gamma}g^{\lambda\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\lambda} = 4[\partial_\rho \partial_\sigma \xi - \Gamma_{\rho\sigma}^\tau \partial_\tau \xi]g^{\rho\beta}g^{\lambda\sigma}R_{t\beta t\lambda} \\ = \frac{4}{a^2}[\partial_i \partial_j \xi - \Gamma_{ij}^t \partial_t \xi] \delta^{ik} \delta^{jl} [-(\dot{H} + H^2)] \delta_{kl} = -4[-H\dot{\xi}\delta_{ij}](\dot{H} + H^2)\delta^{ij} \\ = 12H\dot{H}\dot{\xi} + 12H^3\dot{\xi}$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F(R) = -\frac{1}{2}F(R)$$

$$-F_R R^{\mu\nu} = -F_R R^{tt} = 3F_R(\dot{H} + H^2)$$

$$\nabla^\mu \nabla^\nu F_R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\nabla_\alpha \nabla_\beta F_R = g^{t\alpha}g^{t\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta F_R - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda F_R) = \partial_t^2 F_R$$

$$-g^{\mu\nu}\nabla^2 F_R = -(\partial_t^2 F_R + 3H\partial_t F_R)$$

Sumando todos los términos arriba desarrollados obtenemos:

$$0 = \frac{1}{2\kappa^2}(-3H^2) + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}\right) + \frac{V(\phi)}{2} + \xi[36\dot{H}^2 + 72\dot{H}H^2 + 36H^4 + 12\dot{H}H^2 + 12H^4 \\ - 36\dot{H}^2 - 108\dot{H}H^2 - 72H^4 - 12\dot{H}^2 - 24\dot{H}H^2 - 12H^4 + 12\dot{H}^2 + 48\dot{H}H^2 + 36H^4] \\ + \dot{\xi}[-36\dot{H}H - 36H^3 - 12\dot{H}H - 36H^3 + 12\dot{H}H + 12H^3 + 36\dot{H}H + 72H^3] + \ddot{\xi}[12\dot{H} \\ - 24H^2 + 12\dot{H} + 24H^2 + 24\dot{H} + 24H^2 - 12\dot{H} - 12H^2 - 12\dot{H} - 12H^2] - \frac{F(R)}{2} \\ + 3(\dot{H} + H^2)F'(R) - 3H\partial_t F_R + \frac{T^{tt}}{2}$$

Organizando términos y sustituyendo  $-3H^2 = 3(\dot{H} + H^2) - R/2$ , y  $\dot{R} = 6\ddot{H} + 24\dot{H}H$ ; se llega a lo siguiente:

$$0 = \frac{1}{2\kappa^2}(-R + 6(H^2\dot{H})) - F(R) + 6(\dot{H} + H^2)F'(R) - 36(4\dot{H}H^2 + H\ddot{H})F''(R) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} \\ + V(\phi) + 24H^3\frac{d\xi(\phi)}{dt} - \rho_{matter}$$

(C.4)

La componente  $(\mu, \nu) = (i, j)$  de la Eq.(C.2), se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa^2}(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) &= \frac{1}{2\kappa^2}(-R^{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}R) = \frac{1}{2\kappa^2}(-g^{ia}g^{jb}R_{ab} + \frac{\delta^{ij}}{2a^2}(6\dot{H} + 12H^2)) \\ &= \frac{1}{2a^2\kappa^2} \left[ -\delta^{ia}\delta^{jb}(\dot{H} + 3H^2)\delta_{ab} + \delta^{ij}(3\dot{H} + 6H^2) \right] = \frac{\delta^{ij}}{2a^2\kappa^2}(2\dot{H} + 3H^2) \end{aligned}$$

$$\eta \left( \frac{1}{2}\partial^\mu\partial^\nu(\phi) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi \right) = \eta \frac{\delta^{ij}}{a^2} \left( -\frac{1}{4}g^{\rho a}\partial_a\phi\partial_\rho\phi \right) = \eta \left( \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 \right)$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-V(\phi) - \xi(\phi)G) = \frac{\delta^{ij}}{a^2} \left( \frac{-V(\phi)}{2} - 12\xi(\dot{H}H^2 + H^4) \right)$$

$$2\xi(\phi)RR^{\mu\nu} = 2\xi(6\dot{H} + 12H^2)g^{ia}g^{jb}a^2(\dot{H} + 3H^2)\delta_{ab} = \frac{\delta^{ij}}{a^2}\xi(12\dot{H}^2 + 60\dot{H}H^2 + 72H^4)$$

$$\begin{aligned} -4\xi R_\rho^\mu R^{\nu\rho} &= -4\xi g^{ia}R_{a\rho}g^{jb}g^{\rho c}R_{bc} = -\frac{4}{a^2}\xi\delta^{ia}\delta^{jb}\delta^{dc}(\dot{H} + 3H^2)^2\delta_{ad}\delta_{bc} \\ &= \frac{\delta^{ij}}{a^2}\xi(-4\dot{H} - 24\dot{H}H^2 - 36H^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\xi R^{\mu\rho\sigma\tau}R_{\rho\sigma\tau}^\nu &= 2\xi g^{ia}g^{\rho\beta}g^{\sigma\lambda}g^{\tau\gamma}R_{\alpha\beta\lambda\gamma}g^{jb}R_{b\rho\sigma\tau} = 2\xi[g^{ia}g^{tt}g^{cd}g^{tt}g^{jb}R_{atct}R_{bttd} \\ &\quad + g^{jb}g^{ia}g^{tt}g^{tt}g^{cd}R_{attd}R_{bttd} + g^{ia}g^{cd}g^{ef}g^{hk}g^{jb}R_{adfk}R_{bceh}] \\ &= \frac{2}{a^2}\xi[\delta^{ia}\delta^{cd}\delta^{jb}2(\dot{H} + H^2)^2\delta_{ad}\delta_{bc} + \delta^{jb}\delta^{ia}\delta^{cd}\delta^{ef}\delta^{hk}H^4(\delta_{af}\delta_{dk} - \delta_{ak}\delta_{fd}) \\ &\quad \times (\delta_{bc}\delta_{ch} - \delta_{bh}\delta_{cd})] \end{aligned}$$

(C.5)

Desarrollando la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \delta^{jb}\delta^{ia}\delta^{cd}\delta^{ef}\delta^{hk}(\delta_{af}\delta_{dk} - \delta_{ak}\delta_{fd})(\delta_{bc}\delta_{ch} - \delta_{bh}\delta_{cd}) &= \delta^{jb}\delta^{ia}\delta^{cd}\delta^{hk}[\delta_{af}\delta_{dk}\delta_{be}\delta_{ch} - \delta_{af}\delta_{dk}\delta_{bh}\delta_{ce} \\ &\quad - \delta_{ak}\delta_{fd}\delta_{be}\delta_{ch} + \delta_{ak}\delta_{fd}\delta_{bh}\delta_{ce}] = \delta^{ie}\delta^{ch}\delta_e^j\delta_{ch} - \delta^{ie}\delta_{ch}\delta_h^j\delta_{ce} - \delta^{ih}\delta^{ce}\delta_e^j\delta_{ch} + \delta^{ih}\delta^{ce}\delta_h^j\delta_{ce} \\ &= 3\delta^{ij} - \delta^{ij} - \delta^{ij} + 3\delta^{ij} = 4\delta^{ij}, \end{aligned}$$

e introduciendola en la Eq.(C.5) se obtiene:

$$2\xi R^{\mu\rho\sigma\tau}R_{\rho\sigma\tau}^\nu = \frac{\delta^{ij}}{a^2}\xi(4\dot{H}^2 + 8\dot{H}H^2 + 12H^4)$$

$$\begin{aligned} 4\xi R^{\mu\rho\sigma\nu}R_{\rho\sigma} &= 4\xi g^{\mu\beta}g^{\alpha\rho}g^{\eta\sigma}g^{\nu\delta}R_{\beta\alpha\eta\delta}R_{\rho\sigma} = 4\xi[g^{im}g^{jn}R_{mttn}R_{tt} + g^{im}g^{ab}g^{cd}g^{jn}R_{macn}R_{bd}] \\ &= \frac{4}{a^2}\xi[-\delta^{im}\delta^{jn}3(\dot{H} + H^2)^2\delta_{mn} + \delta^{im}\delta^{ab}\delta^{cd}\delta^{jn}H^2(\dot{H} + 3H^2)\delta_{bd} \\ &\quad \times (\delta_{mc}\delta_{an} - \delta_{mn}\delta_{ac})] = \frac{\delta^{ij}}{a^2}\xi(-12\dot{H}^2 - 32\dot{H}H^2 - 36H^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2(\nabla^\mu \nabla^\nu \xi)R &= -2R\nabla^\mu \partial^\nu \xi = -2g^{\mu\beta}R\nabla_\beta \partial^\nu \xi = -2g^{\beta\nu}R(\partial_\beta \partial^\nu \xi + \Gamma_{t\beta}^\nu \partial^t \xi) \\
&= 2R\frac{\delta^{im}}{a^2}\Gamma_{tm}^j \partial_t \xi = 2\frac{\delta^{im}}{a^2}\delta_m^j H \dot{\xi} R = \frac{\delta^{ij}}{a^2} \dot{\xi} (12\dot{H}H + 24H^3)
\end{aligned}$$

$$2g^{\mu\nu}(\nabla^2 \xi)R = -2g^{ij}(\ddot{\xi} + 3H\dot{\xi})R = \frac{\delta^{ij}}{a^2} [\dot{\xi}(-12\dot{H} - 24H^2) + \ddot{\xi}(-36\dot{H}H - 72H^3)]$$

$$\begin{aligned}
4(\nabla_\rho \nabla^\mu \xi)R^{\nu\rho} + 4(\nabla_\rho \nabla^\nu \xi)R^{\mu\rho} &= 8(\nabla_\rho \nabla^\mu \xi)g^{\alpha\nu}g^{\rho\beta}R_{\alpha\beta} = 8g^{mj}g^{pn}(\partial_p \partial^i \xi + \Gamma_{tp}^i \partial^t \xi)R_{mn} \\
&= -\frac{8}{a^4}\delta^{mj}\delta^{pn}H\dot{\xi}\delta_p^i a^2(\dot{H} + 3H^2)\delta_{mn} \\
&= -\frac{\delta^{ij}}{a^2} \dot{\xi} (8\dot{H}H + 24H^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4(\nabla^2 \xi)R^{\mu\nu} &= 4(\ddot{\xi} + 3H\dot{\xi})g^{ia}g^{jb}a^2(\dot{H} + 3H^2)\delta_{ab} = \frac{\delta^{ij}}{a^2} [\ddot{\xi}(4\dot{H} + 12H^2) \\
&\quad + \dot{\xi}(12\dot{H}H + 36H^3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4g^{\mu\nu}[\nabla_\rho \nabla_\sigma \xi]R^{\rho\sigma} &= -4\frac{\delta^{ij}}{a^2}(\partial_\rho \partial_\sigma \xi - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda \xi)g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}R_{\alpha\beta} = 4\frac{\delta^{ij}}{a^2}(-4\partial_t \partial_t \xi + 4\Gamma_{tt}^\lambda \partial_\lambda \xi)R_{tt} \\
&\quad + \frac{\delta^{ij}}{a^2}(-4\partial_k \partial_l \xi + 4\Gamma_{kl}^\lambda \partial_\lambda \xi)\delta^{ln}\delta^{km}R_{mn} \\
&= \frac{\delta^{ij}}{a^2} [12\ddot{\xi}(\dot{H} + H^2) + 4H\dot{\xi}\delta^{mn}R_{mn}] \\
&= \frac{\delta^{ij}}{a^2} [\ddot{\xi}(12\dot{H} + 12H^2) + \dot{\xi}(12\dot{H}H + 36H^3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4[\nabla_\rho \nabla_\sigma \xi]R^{\mu\rho\nu\sigma} &= 4[\partial_\rho \partial_\sigma \xi - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda \xi]g^{ia}g^{\rho\alpha}g^{jb}g^{\sigma\beta}R_{a\alpha b\beta} = \frac{4}{a^4}\partial_t^2 \xi \delta^{ia}\delta^{jb}R_{atbt} - \frac{4}{a^2}\delta^{ia}\delta^{ce}\delta^{jb}\delta^{df} \\
&\quad \times \delta_{cd}H^3\xi(\delta_{ab}\delta_{ef} - \delta_{af}\delta_{eb}) = -\frac{4}{a^2}\ddot{\xi}\delta^{ia}\delta^{jb}(\dot{H} + H^2)\delta_{ab} - \frac{4}{a^2}\dot{\xi}H^3(\delta^{ij}\delta^{cd}\delta_{cd} \\
&\quad - \delta^{id}\delta^{cj}\delta_{cd}) = \frac{\delta^{ij}}{a^2} [\ddot{\xi}(-4\dot{H} - 4H^2) + \dot{\xi}(-8H^3)]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F(R) = \frac{1}{2}\frac{\delta^{ij}}{a^2}F(R)$$

$$-F_R R^{\mu\nu} = -\frac{\delta^{ij}}{a^2}F'(\dot{H} + 3H^2)$$

$$\begin{aligned}
\nabla^\mu \nabla^\nu F' &= g^{\mu\beta}\nabla_\beta \partial^\nu F' = g^{ia}(\partial_a \partial^j F' + \Gamma_{at}^j \partial^t F') = \frac{\delta^{ia}}{a^2}H\delta_a^j \left( -\frac{d^2 F}{dR^2} \dot{R} \right) \\
&= \frac{\delta^{ij}}{a^2}F''(-6\dot{H}H - 24\dot{H}H^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-g^{\mu\nu}\nabla^2 F_R &= -\frac{\delta^{ij}}{a^2}(\partial_\rho\partial^\rho F' + \Gamma_{t\rho}^\rho\partial^t F') = \frac{\delta^{ij}}{a^2}(\partial_t\partial_t F' + 3H\partial_t F') = \frac{\delta^{ij}}{a^2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dF}{dR}\right) + 3H\frac{d^2 F}{dR^2}\frac{dR}{dt}\right) \\
&= \frac{\delta^{ij}}{a^2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 F}{dR^2}\frac{dR}{dt}\right) + 3HF''\dot{R}\right) = \frac{\delta^{ij}}{a^2}(F''\ddot{R} + F'''\dot{R}^2 + 3HF''\dot{R}) \\
&= \frac{\delta^{ij}}{a^2}[36F''(\ddot{H} + 4\dot{H}H)^2 + F''(6\ddot{H} + 42\dot{H}H + 24\dot{H}^2 + 72\dot{H}H^2)]
\end{aligned}$$

$$\frac{T^{\mu\nu}}{2} = g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\frac{T_{\beta\alpha}}{2} = g^{ib}g^{ja}\frac{T_{ba}}{2} = g^{ib}g^{ja}g_{ba}\frac{p_{matter}}{2} = \frac{\delta^{ij}}{a^2}\frac{p_{matter}}{2}$$

Sumando los términos anteriormente desarrollados obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\kappa^2}(2\dot{H} + 3H^2) + \frac{\eta}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - 16\frac{d\xi(\phi)}{dt}(\dot{H}H + H^3) - 8H^2\frac{d^2\xi(\phi)}{dt^2} - F'(2\dot{H} + 6H^2) \\
&\quad + 12F''(\ddot{H} + 6\dot{H}H + 8\dot{H}H^2 + 4\dot{H}^2) + 72F'''(\ddot{H} + 4\dot{H}H)^2 + p_{matter}
\end{aligned}$$



# Apéndice D

## Ecuaciones de movimiento para el campo escalar $\phi$

Al variar la acción C.1 respecto al campo escalar  $\phi$ , con ayuda de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.20) se obtiene:

$$\eta\nabla^2\phi - V'(\phi) + \xi'(\phi)G = 0 \quad (\text{D.1})$$

Debido a que el campo escalar  $\phi$  solo depende del tiempo, la componente temporal de (D.1) esta dada por:

$$-\eta(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) - V'(\phi) + 24\xi'(\phi)(\dot{H}H^2 + H^4) = 0 \quad (\text{D.2})$$

# Bibliografía

- [1] Sean M. Carroll. Lectures on general relativity. *NSF-ITP/97-147*, preprint gr-qc/9712019, 1997.
- [2] Shin'ichi Nojiri and Sergei Odintsov. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration. *Phys. Rev. D*, 68:123512, 2003.
- [3] Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden, and Michael S. Turner. Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics? Technical Report SU-GP-03/6-2, 2004.
- [4] Emilio Elizalde, John Quiroga Hurtado, and Hector Ivan Arcos. De Sitter cosmology from Gauss-Bonnet dark energy with quantum effects. *Int.J.Mod.Phys.D*, 17:2159–2170, 2008.
- [5] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiattia, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, J. Spyromilio, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, and John Tonry. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astron.J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [6] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D.E. Groom, I. M. Hook, A.G. Kim, M.Y. Kim, J.C. Lee, N.J. Nunes, R. Pain, C.R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R.S. Ellis, M. Irwin, R.G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B.J. Boyle, A.V. Filippenko, T. Matheson, A.S. Fruchter, N. Panagia, H.J.M. Newberg, and W.J. Couch. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. Technical Report LBNL-41801, 1999.
- [7] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of Dark Energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.
- [8] Shinji Tsujikawa. Dark Energy: investigation and modeling. *preprint astro-ph/1004.1493*, 2010.
- [9] P. Astier et al. The Supernova Legacy Survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $\omega$  from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447:31, 2006.
- [10] A. H. Guth. Inflationary epoch. *Phys. Rev.*, D55:733, 1997.
- [11] Scott Burles and Michael S. Turner Kenneth M. Nollett. Big-Bang Nucleosynthesis Predictions for Precision Cosmology. *Astrophys. J.*, 552:L1–L6, 2001.

- 
- [12] Sean M. Carroll and Manoj Kaplinghat. Testing The Friedmann Equation: The Expansion of the Universe During Big-Bang Nucleosynthesis. *Phys. Rev.*, D65:063507, 2002.
- [13] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, Jan 1989.
- [14] R. P. Woodard. Avoiding Dark Energy with  $1/R$  Modifications of Gravity. *Lect. Notes Phys.*, 720:403, 2007.
- [15] A. A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys.Lett.*, B91:99, 1980.
- [16] Ryoyu Utiyama and Bryce S. DeWitt. Renormalization of a Classical Gravitational Field interacting with Quantized Matter Fields. *J. Math. Phys.*, 3:608, 1962.
- [17] S. Nojiri and Sergei Odintsov. Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 4:115–116, 2007.
- [18] Takeshi Chiba.  $1/R$  gravity and scalar-tensor gravity. *Phys. Lett. B*, 575:1–3, 2003.
- [19] Sean M. Carroll, Ignacy Sawicki, Alessandra Silvestri, and Mark Trodden. Modified-Source Gravity and Cosmological Structure Formation. *New J. Phys.*, 8:323, 2006.
- [20] Luca Amendola, David Polarski, and Shinji Tsujikawa. Power-laws  $f(R)$  theories are cosmologically unacceptable. *Int. J. Mod. Phys*, D16:1555–1561, 2007.
- [21] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Modified gravity with  $\ln R$  terms and cosmic acceleration. *Gen. Rel Grav.*, 36:1765–1780, 2004.
- [22] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Unifying inflation with Lambda-CDM epoch in modified  $f(R)$  gravity consistent with Solar System tests. *Phys. Lett. B*, 657:238–245, 2007.
- [23] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [24] A. Einstein. *Sitzungsber. K. Akad*, 6:142–152, 1917.
- [25] R.M. Wald. *General Relativity*. Physics/Astrophysics. University of Chicago Press, 1984.
- [26] F. de Felice and C.J.S. Clarke. *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1992.
- [27] Matthias Blau. Lectures on general relativity. 2010.
- [28] S. Weinberg. *Cosmology*. OUP Oxford, 2008.
- [29] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [30] L.D. Landau and E.M. Lifshits. *The Classical Theory of Fields*. Number v. 2 in Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann, 1975.
- [31] A.R. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Wiley, 2003.
- [32] J.N. Islam. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambridge University Press, 2001.

- 
- [33] P.A.M. Dirac. *General Theory of Relativity*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1996.
- [34] Thomas P. Sotiriou.  *$f(r)$  theories of gravity*. *preprint gr-qc/0805.1726*, 2009.
- [35] S. Nojiri and S.D. Odintsov. Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy, March 2006.
- [36] Sante Carloni, Emilio ELizalde, and Sergei Odintsov. Conformal Transformations in Cosmology of Modified Gravity: the Covariant Approach Perspective. *preprint gr-qc/0907.3941*, 2009.
- [37] Yasunori Fujii. Conformal Transformation in the scalar-tensor theory applied to the accelerating universe. *preprint gr-qc/0712.1881*, 2007.
- [38] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests. *Phys. Rev. D.*, 76:064004, 2007.
- [39] S. Capozziello and V. Faraoni. *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Fundamental Theories of Physics. Springer, 2010.
- [40] S. Capozziello and G. Lambiase. Higher-Order Corrections to the Effective Gravitational Action from Noether Symmetry Approach. *preprint gr-qc/99120484*, 1999.