

**SINTONIZACIÓN DE UN CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO CON COMPUTACIÓN
EVOLUTIVA PARA UN PUENTE GRÚA**

CARLOS EDUARDO BETANCUR PARRA

LEONARDO TAFUR CORREALES



**PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
PEREIRA
2008**

**SINTONIZACIÓN DE UN CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO CON COMPUTACIÓN
EVOLUTIVA PARA UN PUENTE GRÚA**

CARLOS EDUARDO BETANCUR PARRA

LEONARDO TAFUR CORREALES

Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero Electricista

Director

M.Sc. Eduardo Giraldo Suárez

**PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
PEREIRA
2008**

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Pereira, noviembre de 2008

A Dios por siempre estar a mi lado desde el comienzo de mis días, guiándome, dándome sabiduría y entendimiento para todos los proyectos que he emprendido, llenándome de bendiciones a todo instante y acompañándome en todo sueño y anhelo. Poniendo en mi vida a tres personas fundamentales; mi madre la cual con su esfuerzo y ejemplo me enseñó a que todo sueño es posible, con su amor y entrega permitió que yo triunfara, siendo un apoyo incondicional y una guía terrenal, también doy gracias a mi abuelita quien me dio grandes valores y me guió en los primeros años de mi vida siendo esto un pilar fundamental para ser quien soy. Y por último doy gracias a mi novia quien llegó después a convertirse en un apoyo incondicional para mi vida y complemento para la misma. Y a mis amigos con quien compartí toda mi vida universitaria, Carlos Eduardo por ser mi amigo durante tantos años y aguantarme, a Eduardo Giraldo por depositar su confianza en mí.

Leonardo Tafur C

Mamá gracias por todo lo enseñado en los años de vida, por toda esa sabiduría que a diario es entregada con todo el amor, por el sacrificio y por querer siempre lo mejor para mí. A mi hermano Gustavo por entenderme y apoyarme siempre que lo he necesitado. A mi familia por siempre darme ánimos y creer en mí. A la otra familia: Victor, Nestor, Oscar, Claudia, Dayana, Julián, JuanGa y el resto, perdonen si no los nombro, por creer y confiar siempre en mí además dejarme ser su maestro. Leonardo por vincularme en la realización de este trabajo. A Eduardo Giraldo ya que sus aportes claves permitieron el correcto desarrollo de este trabajo. Y por último y no por eso menos importante a Dios, gracias por todo lo que tengo y en especial por todas las personas nombradas anteriormente. Gracias a todos.

Carlos Eduardo

ÍNDICE GENERAL

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)	1
1.1. Información general del fabricante del puente grúa	2
1.1.1. Parámetros entregados por el fabricante	3
1.2. Modelo no lineal del sistema	3
1.3. Modelo linealizado del sistema	6
1.4. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo continuo	7
1.4.1. Ecuaciones de estado a partir de los datos del manual	8
1.4.2. Ecuaciones de estado a partir de los datos reales (ajustados)	9
1.5. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo discreto	11
1.5.1. Ecuaciones de estado a partir de los datos del manual	14
1.5.2. Ecuaciones de estado a partir de los datos reales (ajustados)	15
1.6. Respuesta en lazo abierto frente a una entrada impulso	16
1.6.1. Respuesta a partir de los datos del manual	16
1.6.2. Respuesta a partir de los datos reales (ajustados) y los del modelo a escala del puente grúa	17
2. Control Óptimo Cuadrático LQR	21
2.1. Control óptimo	21
2.2. Modelado	22
2.3. Optimización en sistemas de control automático	23
2.4. Función objetivo (Índice de desempeño)	25
2.4.1. Problemas de tiempo mínimo	26
2.4.2. Control terminal	26
2.4.3. Esfuerzo mínimo	26
2.4.4. Problema del seguimiento (Tracking Problem)	26
2.4.5. ITAE	26
2.5. Regulador lineal cuadrático LQR	27
2.5.1. LQR Continuo	29
2.5.2. LQR Discreto	32
2.6. Control y estimación de las variables de estados	37
2.6.1. Controlabilidad	37
2.6.2. Observabilidad	38
3. Algoritmos Genéticos	45
3.1. Ventajas	45
3.2. Desventajas	46
3.3. Terminología	46
3.4. Representación o codificación	48
3.5. Tamaño de la población	48
3.6. Población inicial	48

Índice general

3.7. Función objetivo o de adaptación	49
3.8. Selección	49
3.8.1. Método de la ruleta o selección proporcional	50
3.8.2. El método del torneo o selección por concurso	50
3.9. Operadores genéticos	51
3.9.1. Operador de cruce	51
3.9.2. Mutación	52
3.10. Criterio de parada	53
3.11. Parámetros de un algoritmo genético	53
3.12. Teorema de los esquemas	53
3.12.1. Orden de un esquema	53
3.12.2. Longitud de definición de un esquema	53
4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos	55
4.1. Procedimiento de diseño del controlador LQR	57
4.1.1. Controlabilidad y Observabilidad para el modelo del puente grúa	58
4.1.2. Obtención de la matriz $K(t)$	59
4.1.3. Índice de desempeño del LQR continuo y discreto o digital	59
4.1.4. Determinación de las matrices Q y R	60
4.1.5. Diseño del observador de orden reducido	63
4.2. Contribución del Algoritmo genético para la sintonización del LQR	64
4.2.1. Configuración de los individuos de la población	64
4.2.2. Población	65
4.2.3. Función objetivo	65
4.2.4. Evaluación	66
4.2.5. Restricciones	66
4.2.6. Selección	66
4.2.7. Cruce	67
4.2.8. Mutación	67
4.2.9. Criterio de parada	68
5. Resultados	71
5.1. Respuestas del sistema en tiempo continuo	71
5.1.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R	72
5.1.2. Q con los elementos de la diagonal y R	75
5.1.3. Q con todos los elementos y R	78
5.1.4. Evolución del genético para la matriz Q completa y R	81
5.2. Respuestas del sistema en tiempo discreto	83
5.2.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R	84
5.2.2. Q con los elementos de la diagonal y R	86
5.2.3. Q con todos los elementos y R	88
5.3. Respuestas del sistema en tiempo continuo con observador de orden reducido	91
5.3.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R	91
5.3.2. Q con los elementos de la diagonal y R	94
5.3.3. Q con todos los elementos y R	96
5.4. Respuestas del sistema en tiempo discreto con observador de orden reducido	98
5.4.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R	98
5.4.2. Q con los elementos de la diagonal y R	101

5.4.3. Q con todos los elementos y R	103
5.5. Comparación de las respuestas del sistema en tiempo continuo ante las diferentes penalizaciones	105
5.6. Respuestas y validación del vector de realimentación obtenido en simulaciones, para el modelo a escala del puente grúa	107
5.6.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R	107
5.6.2. Q con los elementos de la diagonal y R	108
5.6.3. Q con todos los elementos y R	110
A. Generalidades de control	115
A.1. Un poco de historia	115
A.2. Teoría de control	116
A.3. Tipos de sistemas de control	116
A.4. Servomecanismos y reguladores	117
A.5. Señales de entrada	118
A.6. Función de transferencia	119
A.6.1. Sistema en lazo abierto	120
A.6.2. Sistema en lazo cerrado	120
A.7. Respuesta dinámica de un sistema	121
A.7.1. Respuesta a escalón unitario de un sistema de segundo orden	123
A.8. Tipos de controladores clásicos	124
A.9. Espacio de estados	124
A.9.1. Espacio de estados en tiempo continuo	126
A.9.2. Espacio de estados en tiempo discreto	127
Bibliografía	133

Índice general

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Foto del sistema real	1
1.2. Esquema sistema real.	1
1.3. Sensor de posición.	2
1.4. Sensores de puntos límite.	3
1.5. Diagrama del sistema (puente grúa).	4
1.6. Diagrama de cuerpo libre del carro.	4
1.7. Diagrama de cuerpo libre de la carga.	5
1.8. Polos del sistema en lazo abierto continuo (Datos manual)	9
1.9. Polos del sistema en lazo abierto continuo (Datos Reales)	11
1.10. Retenedor de orden 0	13
1.11. Polos del sistema en lazo abierto discreto (Datos manual)	14
1.12. Polos del sistema en lazo abierto discreto (Datos Reales)	16
1.13. Salida de la posición ante la entrada impulso.	17
1.14. Salida del ángulo ante la entrada impulso.	18
1.15. Salida de la posición ante la entrada impulso con parámetros ajustados.	18
1.16. Salida del ángulo ante la entrada impulso con parámetros ajustados.	19
1.17. Salida de la posición ante la entrada impulso del modelo a escala del Puente Grúa.	19
1.18. Salida del ángulo ante la entrada impulso del modelo a escala del Puente Grúa.	20
2.1. Braquistocrono.	21
2.2. Sistema con realimentación de estado observado, con un observador de orden reducido continuo.	41
2.3. Sistema con realimentación de estado observado, con un observador de orden reducido discreto	44
4.1. Diagrama de flujo del LQR y Algoritmo Genético	56
4.2. Diagram de bloques del sistema continuo.	57
4.3. Diagram de bloques del sistema discreto.	57
4.4. Cromosomas padres.	67
4.5. Cromosomas hijos.	67
4.6. Cromosoma a mutar.	68
4.7. Cromosoma mutado.	68
4.8. Diagrama de flujo del algoritmo genético.	69
5.1. Diagrama analógico para el sistema continuo en Matlab-Simulink.	72
5.2. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 2 estados	74
5.3. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 2 estados	74
5.4. Señal de Control en tiempo continuo penalizando 2 estados	75
5.5. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados	77
5.6. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados	77
5.7. Señal de Control en tiempo continuo penalizando 4 estados	78
5.8. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus productos	80

Índice de figuras

5.9. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones	80
5.10. Señal de Control en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones	81
5.11. Evolución de la posición del carro en tiempo continuo para penalización de los 4 estados y sus relaciones.	82
5.12. Evolución de la oscilación en tiempo continuo para penalización de los 4 estados y sus relaciones.	82
5.13. Evolución de la Señal de Control en tiempo continuo para penalización de los 4 estados y sus relaciones.	83
5.14. Diagrama analogico para el sistema discreto en Matlab-Simulink.	83
5.15. Posición del carro en tiempo discreto penalizando 2 estados.	85
5.16. Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados.	85
5.17. Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados.	86
5.18. Posición del carro en tiempo discreto penalizando 4 estados.	87
5.19. Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados.	87
5.20. Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados.	88
5.21. Posición del carro en tiempo discreto penalizando 4 estados y sus relaciones.	89
5.22. Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados y sus relaciones.	90
5.23. Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados y sus relaciones.	90
5.24. Diagrama analogico para el sistema discreto en Matlab-Simulink.	91
5.25. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 2 estados para el observador reducido.	92
5.26. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 2 estados para el observador reducido.	93
5.27. Señal de Control en tiempo continuo penalizando 2 estados para el observador reducido.	93
5.28. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados para el observador reducido.	94
5.29. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados para el observador reducido.	95
5.30. Señal de Control en tiempo continuo penalizando 4 estados para el observador reducido.	95
5.31. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.	96
5.32. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.	97
5.33. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.	97
5.34. Diagrama analogico para el sistema discreto en Matlab-Simulink.	98
5.35. Posición del carro en tiempo discreto penalizando 2 estados para el observador reducido	99
5.36. Posición angular en tiempo discreto penalizando 2 estados para el observador reducido	100
5.37. Señal de control en tiempo discreto penalizando 2 estados para el observador reducido	100
5.38. Posición del carro en tiempo discreto penalizando 4 estados para el observador reducido.	101
5.39. Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados para el observador reducido.	102
5.40. Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados para el observador reducido.	102
5.41. Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.	103
5.42. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.	104
5.43. Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.	104
5.44. Posición del carro para las diferentes penalizaciones.	105
5.45. Posición Angular para las diferentes penalizaciones.	106
5.46. Señal de control para las diferentes penalizaciones.	106
5.47. Posición del carro penalizando 2 estados para el modelo real.	107

5.48. Posición angular del péndulo penalizando 2 estados para el modelo real.	108
5.49. Posición del carro penalizando 4 estados para el modelo real.	109
5.50. Posición angular del péndulo penalizando 4 estados para el modelo real.	109
5.51. Posición del carro penalizando 4 estados y sus relaciones para el modelo real.	110
5.52. Posición angular del péndulo penalizando 4 estados y sus relaciones para el modelo real.	111
A.1. Sistema de primer orden.	116
A.2. Sistema de segundo orden.	116
A.3. Servomecanismo y regulador.	118
A.4. Escalón de magnitud A donde $f = 0$ para $t < 0$ y $f = A$ para $t \geq 0$	118
A.5. Función rampa donde $f = 0$ para $t < 0$ y $f = kt$ para $t \geq 0$	119
A.6. Función pulso de magnitud A y duración T , donde $f = A$ para $0 \leq t \leq T$ y $f = 0$ para cualquier otro tiempo.	119
A.7. Función senoidal de magnitud A y de frecuencia angular ω ($\frac{rad}{s}$) donde $f = A \sin(\omega t)$	119
A.8. Sistema de primer orden.	120
A.9. Sistema de control en lazo abierto, no automático.	120
A.10. Sistema de control en lazo cerrado, automático.	121
A.11. Respuesta dinámica sin amortiguar.	122
A.12. Respuesta dinámica subamortiguada.	122
A.13. Respuesta dinámica críticamente amortiguada.	122
A.14. Respuesta dinámica sobreamortiguada.	123
A.15. Respuesta a escalón unitario de un sistema de segundo orden.	123
A.16. Sistema dinámico con salida en espacio de estados.	125
A.17. Sistema lineal en espacio de estados continuo.	126
A.18. Esquema de un sistema realimentado de control.	127
A.19. Diagrama de bloques de un sistema de control discreto.	128
A.20. Estructura interna del bloque A/D.	128
A.21. Diagrama de bloque de un sistema en tiempo discreto	129

Índice de figuras

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Parámetros del puente grúa dados por el fabricante.	3
1.2. Parámetros del puente grúa reales.	10
5.1. Resultados de diez ejecuciones del algoritmo genético para posición y ángulo.	72
5.2. Resultados óptimos para posición y ángulo.	72
5.3. Resultados de diez ejecuciones del algoritmo genético para posición, ángulo , velocidad del carro y velocidad angular.	75
5.4. Resultados óptimos para posición, ángulo , velocidad del carro y velocidad angular.	75
5.5. Resultados de diez ejecuciones del algoritmo genético para posición, ángulo y todas las relaciones.	78
5.6. Resultados óptimos para posición, ángulo y todas las relaciones.	78
5.7. Índices de evolución del algoritmo genético para la solución penalizando los estados 4 y sus relaciones.	81
5.8. Comparación entre las penalizaciones.	105
A.1. Tipos de controladores clásicos.	124

Índice de tablas

Introducción

El diseño y sintonización del regulador óptimo cuadrático LQR se hace buscando los elementos de las matrices Q y R que lo caracterizan. Normalmente la búsqueda de los parámetros de dichas matrices se hace a prueba y error de modo que encontrar un punto de operación adecuado para este controlador se vuelve tedioso y en la mayoría de las veces ineficiente. Surge así la necesidad de implementar una metodología iterativa autónoma que sea capaz de entregar los valores de las matrices Q y R en forma rápida y que cumplan con condiciones de diseño impuestas. Debido a lo anterior se propone un método llamado algoritmos genéticos.

Los algoritmos genéticos son una técnica de búsqueda y optimización basada en la selección natural de las especies, expuesta por Darwin. Gracias a la robustez que presentan estos algoritmos son aplicados a un sin fin de problemas con tiempo de respuesta muy competitivos con otras técnicas de optimización, Sin dar mucha importancia que tan compleja sea la función a optimizar.

Por lo anteriormente expuesto se decide orientar este trabajo aplicando los algoritmos genéticos a la sintonización del regulador óptimo cuadrático LQR :

Capítulo 1: se realiza el modelo matemático de la planta (puente grúa), se obtiene además, las ecuaciones de espacio de estados tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Por ultimo se obtendrá la respuesta en lazo abierto de la planta ante una entrada escalón unitario para el sistema.

Capítulo 2: en este capítulo se mostrará el desarrollo del controlador LQR , porque debe ser sintonizado, índices de desempeño, su descripción por medio de las matrices Q y R y por ultimo la forma de ser implementa tanto en tiempo continuo como discreto.

Capítulo 3: se da conocer los conceptos generales de los algoritmos genéticos, su forma de operar, porque son eficientes como técnica de optimización y lo que se debe tener en cuenta al momento de implementar estos algoritmos, para hacer de ellos técnicas eficientes y que las respuestas halladas sean "óptimas".

Capítulo 4: se aplica la sintonización del controlador LQR . Primero se hará a prueba y error, propio de las técnicas de diseño LQR para la determinación de las matrices de peso Q y R ., luego serán los algoritmos genéticos que sustituyen al procedimiento de prueba y error. Se hará una descripción de la forma en la cual el algoritmo genético encuentra los mejores valores que componen las matrices Q y R .

Capítulo 5: se mostrará los resultados con la sintonización del LQR dada por los algoritmos genéticos. Se hará una comparación de los diferentes resultados y se concluirá de acuerdo a estos.

Índice de tablas

1. MODELO MATEMÁTICO DE LA PLANTA FÍSICA (PUENTE GRÚA)

En la figura 1.1 se muestra una foto del modelo a escala y en la figura 1.2 se presenta un esquema del sistema real del puente grúa, en el cual se llevarán a cabo las pruebas de sintonización del controlador LQR por medio de los algoritmos genéticos y se harán las pruebas sobre el sistema real.

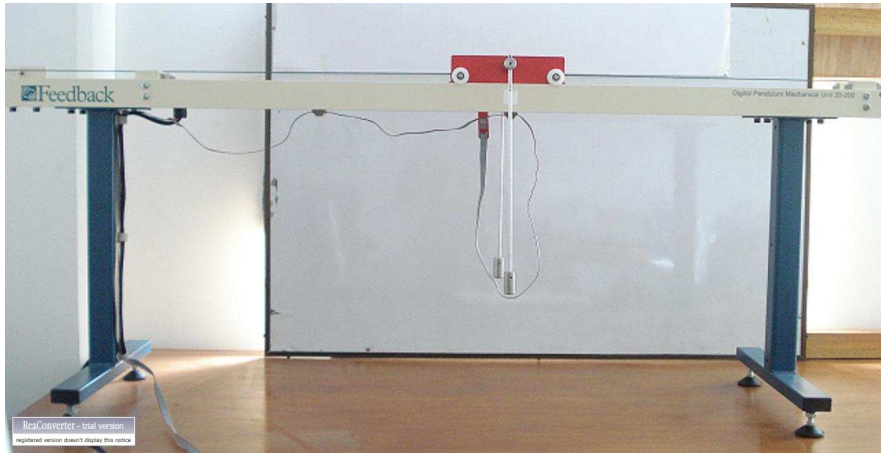


Figura 1.1.: Foto del sistema real

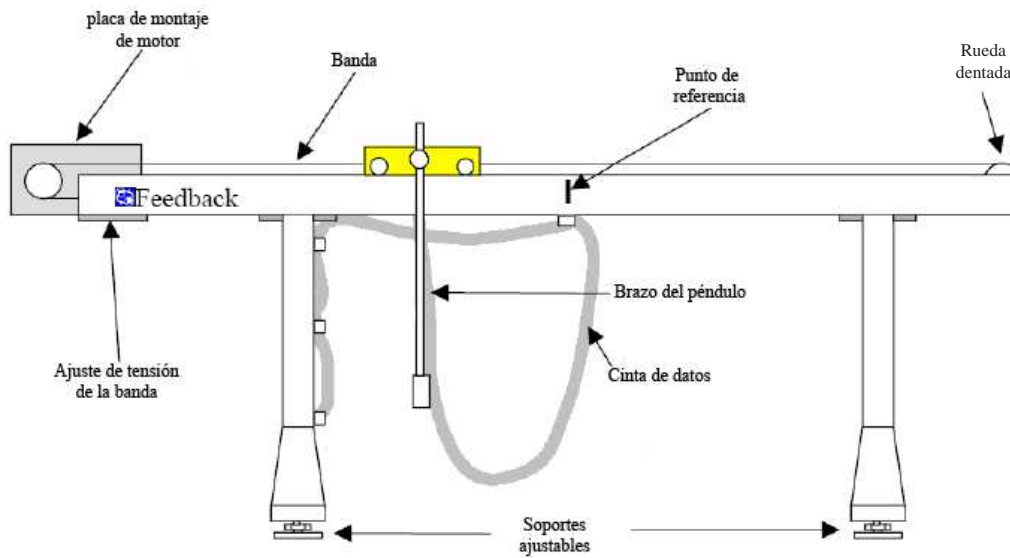


Figura 1.2.: Esquema sistema real.

1.1. Información general del fabricante del punto grúa

El modelo a escala del punto grúa es la unidad de la empresa FeedBack Instruments Ltd. Este sistema consiste en una barra montada en un carro que a su vez se desplaza sobre un riel cuando es impulsado por un motor de corriente continua a través de una banda. Para controlar la oscilación de la carga el carro es impulsado hacia adelante y hacia atrás a través del riel el cual contiene finales de carrera para limitar el movimiento horizontal del carro.

El modelo del punto grúa hace uso de encoders incrementales de naturaleza óptica para determinar la posición del carro y el ángulo del péndulo. Esta lectura de la posición se realiza por medio de dos ases de luz, emitidos desde las fuentes (A y B) a través de un disco con ranuras. Las ranuras tienen una diferencia de fase, de modo que las señales eléctricas de los receptores (A y B) son ondas rectangulares con una diferencia de fase. El signo de la diferencia de fase permite conocer la dirección de movimiento del carro.

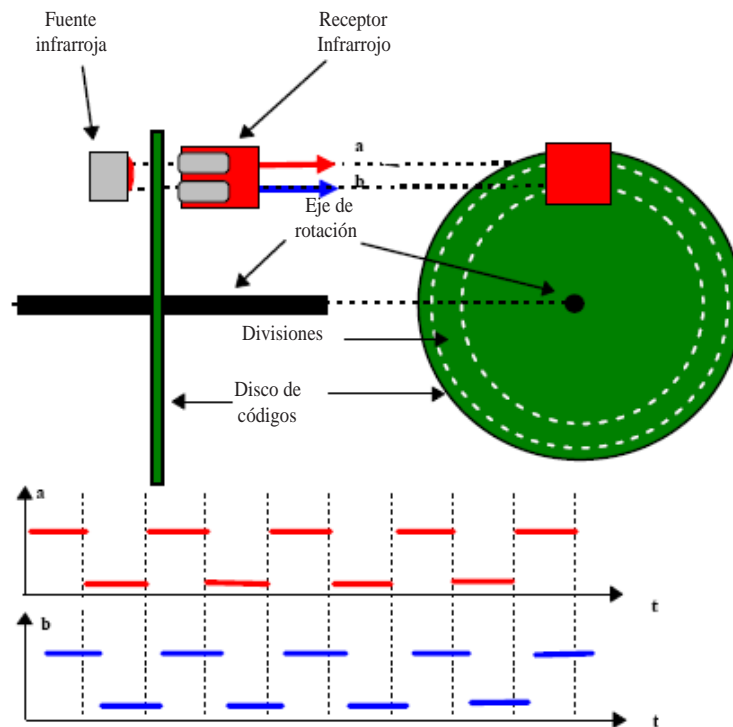


Figura 1.3.: Sensor de posición.

La señal de control se envía desde el computador hacia el convertidor de la tarjeta de adquisición de datos. La salida del convertidor **D/A** va a la entrada de amplificador que impulsa el motor de corriente continua. La interfaz del amplificador y codificador se encuentran en el bloque de control del péndulo. Que está equipada con dos interruptores: el interruptor principal de alimentación y el interruptor para cortar la potencia de motor de corriente continua. En los extremos del riel hay dos finales de carrera que cortan la alimentación del motor cuando el carro alcanza estos puntos.

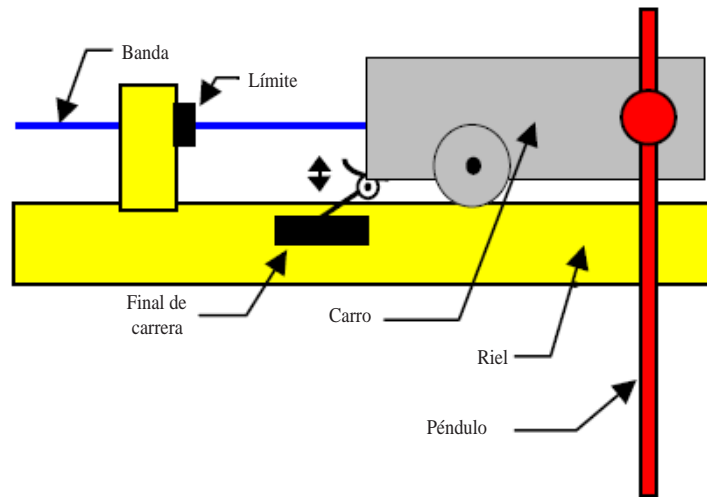


Figura 1.4.: Sensores de puntos límite.

1.1.1. Parámetros entregados por el fabricante

Los parámetros dados en la tabla 1.1 son los encontrados en el manual de la unidad 33-200 (Digital Pendulum Mechanical Unit), son dichos parámetros los usados para el modelado matemático del sistema y posteriores simulaciones y sintonizaciones para la implementación del controlador.

Parámetro	Valor
Límites del riel	$\pm 0.5 [m]$
Gravedad (g)	$9.81 \frac{m}{s^2}$
Distancia del eje de rotación al centro de masa (l)	$0.3434 [m]$
Masa del carro (M_c)	$1.12 [Kg]$
Masa de la carga (m_l)	$0.11 [Kg]$
Magnitud de la fuerza de control	$17.0 [N]$
Momento de inercia (J)	$0.0136 [Kgm^2]$
Coefficiente de fricción de rotación (f_p)	$0.007 \left[\frac{Kgm^2}{rad \cdot s}\right]$
Coefficiente de fricción del carro (f_c)	$0.05 \left[\frac{Ns}{m}\right]$

Tabla 1.1.: Parámetros del puente grúa dados por el fabricante.

1.2. Modelo no lineal del sistema

El siguiente modelo matemático representa la dinámica del sistema (Puente grúa) por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales que con un detalle lo bastante cercano al modelo exacto describen el funcionamiento de la planta. Dichas ecuaciones se obtienen aplicando las leyes físicas que rigen los diferentes componentes, para el sistema de la figura 1.5 planteado en este trabajo se empleará la segunda ley Newton ($\sum F_x = ma$). Se realiza un análisis de diagrama de cuerpo libre. Separando para este caso el diagrama de fuerzas del carro del diagrama de fuerzas de la carga. Esta descomposición del sistema se puede apreciar en las figuras 1.6 y 1.7.

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

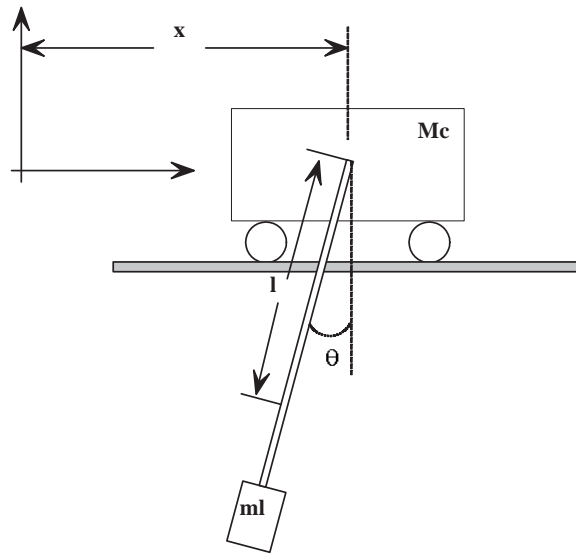


Figura 1.5.: Diagrama del sistema (puente grúa).

La figura 1.6 muestra el diagrama de cuerpo libre del carro

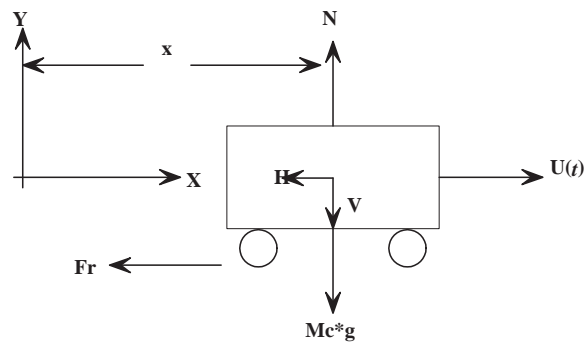


Figura 1.6.: Diagrama de cuerpo libre del carro.

Realizando suma de fuerzas en x en el carro se tiene

$$\sum^{\pm} F_x = ma$$

$$U(t) - F_r - H = M_c \ddot{x} \tag{1.1}$$

La figura 1.7 muestra el diagrama de cuerpo libre de la carga

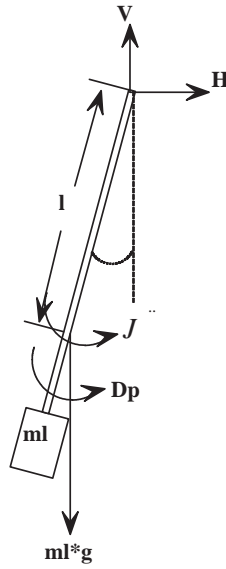


Figura 1.7.: Diagrama de cuerpo libre de la carga.

Realizando suma de fuerzas en x en la carga se tiene

$$\sum^{\pm} F_x = ma$$

$$H = m_l \frac{d^2}{dt^2} (x - l \sin \theta) \quad (1.2)$$

Realizando suma de fuerzas en y en la carga se tiene

$$+ \uparrow \sum F_y = ma$$

$$V - m_l g F_y = m_l \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (1.3)$$

Donde

$$\frac{d^2}{dt^2} (x - l \sin \theta) = \ddot{x} - l \ddot{\theta} \cos \theta + l \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = -l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

Haciendo suma de momentos en el centro de masa de la carga se tiene

$$\sum M = J \ddot{\theta}$$

$$J \ddot{\theta} + D_p - H l \cos \theta + V l \sin \theta = 0 \quad (1.4)$$

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

Donde D_p es la fricción rotacional

$$D_p = f_p \dot{\theta}$$

Despejando H de las ecuaciones (1.1) y (1.2) e igualando se tiene:

$$U(t) - F_r = (M_c + m_l)\ddot{x} + m_l l(\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta - \ddot{\theta} \text{cos}\theta) \quad (1.5)$$

Donde F_r es la fricción rotacional

$$F_r = f_c \dot{x}$$

Despejando H de las ecuaciones (1.2) y (1.3) y reemplazándolas en la ecuación (1.4) se tiene:

$$J\ddot{\theta} + f_p \dot{\theta} - m_l l \text{cos}\theta (\ddot{x} - l\ddot{\theta} \text{cos}\theta + \dot{\theta}^2 l \text{sen}\theta) + l \text{sen}\theta [m_l g + m_l l (\ddot{\theta} \text{sen}\theta + \dot{\theta}^2 \text{cos}\theta)] = 0 \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6) describen el modelo del sistema, el cual es claramente no lineal debido a las multiplicaciones entre las variables de estados y los términos al cuadrado que tienen las mismas. Para plantear un esquema de control lineal es necesario linealizar el sistema alrededor de un punto de operación, es decir, utilizando el controlador LQR y así obtener las respuestas deseadas.

1.3. Modelo linealizado del sistema

El sistema se puede linealizar reemplazando $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ de las ecuaciones (1.5) y (1.6), por el primer término que se obtiene de la serie de Taylor de estas funciones. Las series de Taylor para las funciones seno y coseno alrededor de cero son:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \\ \text{cos}\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Suponiendo que el ángulo θ no es mayor a 15° , se puede decir que:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\theta &\cong 0 \\ \text{sen}\theta &\cong \theta \\ \text{cos}\theta &\cong 1 \\ \dot{\theta}^2 &\cong 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones que se obtienen del sistema linealizado son las ecuaciones (1.7) y (1.8):

$$U(t) - f_c \dot{x} = (M_c + m_l)\ddot{x} - m_l l \ddot{\theta} \quad (1.7)$$

$$J\ddot{\theta} + f_p \dot{\theta} - m_l l \ddot{x} + m_l l^2 \ddot{\theta} + l \theta m_l g = 0 \quad (1.8)$$

1.4. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo continuo

Despejando \ddot{x} de la ecuación (1.7) se tiene:

$$\ddot{x} = \frac{U(t)}{M_c + m_l} - \frac{f_c}{M_c + m_l} \dot{x} + \frac{m_l l}{M_c + m_l} \ddot{\theta} \quad (1.9)$$

Despejando $\ddot{\theta}$ de la ecuación (1.8) se tiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{m_l l}{J + m_l l^2} \ddot{x} - \frac{lm_l g}{J + m_l l^2} \theta - \frac{f_p}{J + m_l l^2} \dot{\theta} \quad (1.10)$$

Se simplifica las ecuaciones con las siguientes constantes

$$a = \frac{1}{M_c + m_l}$$

$$b = \frac{f_c}{M_c + m_l}$$

$$c = \frac{m_l l}{M_c + m_l}$$

$$d = \frac{m_l l}{J + m_l l^2}$$

$$e = \frac{lm_l g}{J + m_l l^2}$$

$$f = \frac{f_p}{J + m_l l^2}$$

Renombrando las ecuaciones (1.9) y (1.10) a partir de las constante anteriormente nombradas se tiene:

$$\ddot{x} = aU(t) - b\dot{x} + c\ddot{\theta} \quad (1.11)$$

$$\ddot{\theta} = d\ddot{x} - e - f\dot{\theta} \quad (1.12)$$

De las ecuaciones (1.11) y (1.12) se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{a}{1 - cd} U(t) - \frac{b}{1 - cd} \dot{x} - \frac{cf}{1 - cd} \dot{\theta} - \frac{ce}{1 - cd} \theta \quad (1.13)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ad}{1 - cd} U(t) - \frac{bd}{1 - cd} \dot{x} - \frac{f}{1 - cd} \dot{\theta} - \frac{e}{1 - cd} \theta \quad (1.14)$$

1.4. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo continuo

A partir de lo expuesto en el apéndice A.9.I se puede representar las ecuaciones diferenciales expuestas anteriormente en un sistema de ecuaciones en el espacio de estados, para simplificar en gran medida la representación

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

matemática de los sistemas de control.

Definiendo las variables de estado para el sistema del puente grúa:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{x} \\ \\ x_2 &= \theta \\ \dot{x}_2 &= \dot{\theta} = x_4 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Lo cual corresponde a tener:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ v_{\text{puente}} \\ \omega_{\text{pendulo}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Posicion(Carro)} \\ \text{Angulo(Pendolo)} \\ \text{Velocidad(Carro)} \\ \text{Velocidad(Angular)} \end{array} \quad (1.15)$$

Se obtiene el sistema en ecuaciones de estado (1.16):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{ce}{1-cd} & -\frac{b}{1-cd} & -\frac{cf}{1-cd} \\ 0 & -\frac{e}{1-cd} & -\frac{bd}{1-cd} & -\frac{f}{1-cd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{1-cd} \\ \frac{ad}{1-cd} \end{bmatrix} U(t) \quad (1.16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.17)$$

1.4.1. Ecuaciones de estado a partir de los datos del manual

De la ecuación de estados (1.16) y los valores de los parámetros de la tabla 1.1 se obtiene las ecuaciones de espacio de estados en su valor numérico.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4473 & -0.0425 & -0.0085 \\ 0 & -14.5813 & -0.0604 & -0.2758 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8501 \\ 1.2084 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.19)$$

1.4. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo continuo

Los polos del sistema en lazo abierto se muestran en la figura 1.8, los cuales presentan la inestabilidad del sistema, por estar ubicados sobre el eje imaginario.

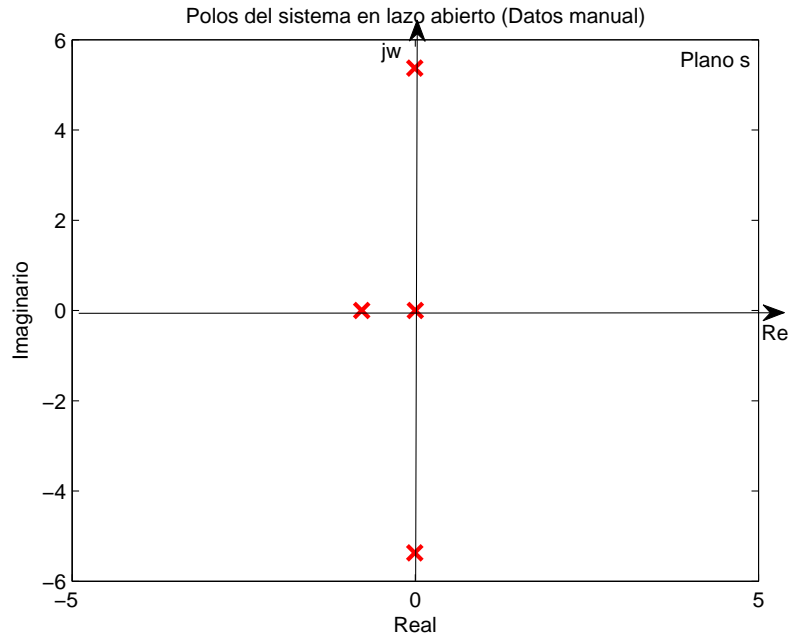


Figura 1.8.: Polos del sistema en lazo abierto continuo (Datos manual)

Los valores de los polos de la figura 1.8 son: Y de las ecuaciones en el espacio de estados se puede obtener las funciones de transferencia del sistema:

Función de transferencia de la posición con respecto a la entrada $U(s)$:

$$\frac{x(s)}{U(s)} = \frac{0,8132s^2 + 1,0943}{s^4 + 0,0407s^3 + 1,346s^2 + 0,0547s}$$

Función de transferencia del ángulo con respecto a la entrada $U(s)$:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{0,1116s^2}{s^4 + 0,0407s^3 + 1,346s^2 + 0,0547s}$$

Aunque en la ecuación salida del sistema en espacio de estados se tienen dos salidas, hay que aclarar que la salida será la variable posición y el ángulo es una variable que será regulada en este caso.

1.4.2. Ecuaciones de estado a partir de los datos del reales (ajustados)

De la ecuación de estados (1.16) y los valores de los parámetros de la tabla 1.2 se obtiene las ecuaciones de espacio de estados en su valor numérico. Los valores nuevos de los parámetros se muestran en la tabla 1.2

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

Parámetro	Valor
Límites del riel	$\pm 0.5 [m]$
Gravedad (g)	$9.81 \frac{m}{s^2}$
Distancia del eje de rotación al centro de masa (l)	$0.3434 [m]$
Masa del carro (M_{carro})	$619.25 [g]$
Masa de la tapa (M_{tapa})	$90.55 [g]$
Masa de los posicionadores ($M_{posicionadores}$)	$134.05 [g]$
Masa del carro Total (M_c)	$0.84385 [Kg]$
Masa de la carga (m_l)	$0.013 [Kg]$
Magnitud de la fuerza de control	$17.0 [N]$
Momento de inercia (J)	$0.00001 [Kgm^2]$
Coefficiente de fricción de rotación (f_p)	$0.0000093 [\frac{Kgm^2}{rad \cdot s}]$
Coefficiente de fricción del carro (f_c)	$0.67 [\frac{Ns}{m}]$

Tabla 1.2.: Parámetros del puente grúa reales.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1501 & -0.7939 & 0 \\ 0 & -28.8497 & -2.2995 & -0.0061 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1849 \\ 3.4322 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.20)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.21)$$

Los polos del sistema en lazo abierto se muestran en la figura 1.9, los cuales presentan la inestabilidad del sistema, por estar ubicados sobre el eje imaginario.

1.5. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo discreto

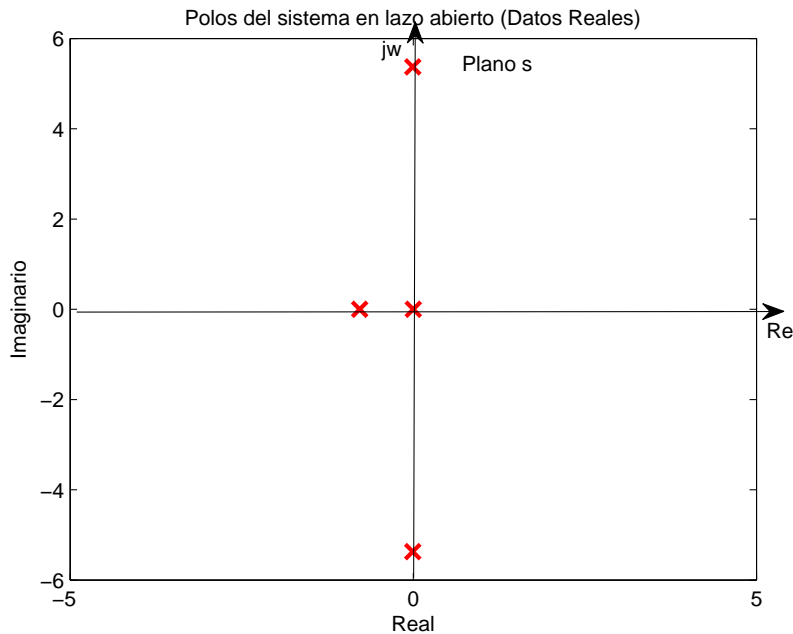


Figura 1.9.: Polos del sistema en lazo abierto continuo (Datos Reales)

De las ecuaciones en el espacio de estados se puede obtener las funciones de transferencia del sistema:

Función de transferencia de la posición con respecto a la entrada $U(s)$:

$$\frac{x(s)}{U(s)} = \frac{1.18s^2 + 0.007158s}{s^4 + 0.8s^3 + 28.85s^2 + 22.56s}$$

Función de transferencia del ángulo con respecto a la entrada $U(s)$:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{3.432s^2}{s^4 + 0.8s^3 + 28.85s^2 + 22.56s}$$

Aunque en la ecuación salida del sistema en espacio de estados se tienen dos salidas, hay que aclarar que la salida será la variable posición y el ángulo es una variable que será regulada en este caso.

1.5. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo discreto

Dado que el control se realizara mediante un computador, y que éste sólo puede operar con datos discretos, es necesario discretizar el sistema continuo expuesto en la sección anterior.

A partir de lo expuesto en el apéndice A.9.2 podemos matemáticamente describir el sistema discreto con base al sistema continuo, de modo que utilizando las ecuaciones para transformar el sistema a tiempo discreto, obtendremos lo necesario para poder realizar un control digital.

Matlab permite realizar el procedimiento del apéndice A.9.2 de manera fácil utilizando el *toolbox de control*, el cual discretiza el sistema a partir de la ecuaciones en tiempo continuo mostradas anteriormente.

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es convertir el sistema de ecuaciones de continuo a discreto.

Para ello, utilizaremos la función de Matlab `c2dm`. La función `c2dm` convierte las matrices que definen un sistema continuo en variables de estado, en uno discreto, asumiendo una frecuencia y un método de muestreo determinado.

Para usar `c2dm`, se debe especificar seis argumentos: cuatro matrices de variables de estado $[A, B, C, D]$, el periodo de muestreo (T_m en sec/muestra), y el método de muestreo.

Periodo de muestreo

La selección apropiada del periodo de muestreo es una decisión muy importante en sistemas controlados por computador.

Los tiempos cuando las señales medidas se convierten a la forma digital son llamados los instantes de muestreo; el tiempo entre las muestras sucesivas se llama el **período de muestreo**.

Un período de muestreo demasiado largo hará imposible reconstruir la señal en tiempo continuo. La opción del período de muestreo depende en gran medida del propósito del sistema.

Es útil caracterizar el período de muestreo con una variable que sea de libre dimensión y que tenga una buena interpretación física. Para los sistemas oscilatorios, es natural normalizar con respecto al período de oscilación; para los sistemas nonoscilatorios, el tiempo de subida es un factor natural de la normalización. Ahora introducimos N , como el número de períodos de muestreo por tiempo de subida, donde el tiempo T_m , será el periodo de muestreo, se tiene la ecuación que determina la selección del periodo de muestreo.

$$N = \frac{T_m}{h} \quad (1.22)$$

De lo anteriormente expuesto surge el criterio de Shannon, el cual expresa que es conveniente elegir una frecuencia de Shannon ($f_s h = f_m / 2$) entre 5 y 10 veces superior a la frecuencia de corte del filtro antialiasing.

A su vez, el filtro antialiasing debe tener un ancho de banda unas 10 veces mayor que el ancho de banda del sistema para no alterar significativamente el margen de fase del sistema comprometiendo la oscilación o incluso la estabilidad.

Entonces utilizando la ecuación (1.22) y corroborando el criterio de Shannon, se supondrá que el tiempo de establecimiento en lazo cerrado es muy cercano al propuesto por el diseño, se obtendría un tiempo de muestreo de $T_m = 50ms$

Método de muestreo

El método que se usará será el retenedor de orden cero “zoh” (zero-order hold). Es el más usado en la práctica; recibe como entrada una señal analógica y mantiene dicha señal en un valor constante durante un tiempo específico, es decir mantiene la salida constante entre instantes de muestreo.

1.5. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo discreto

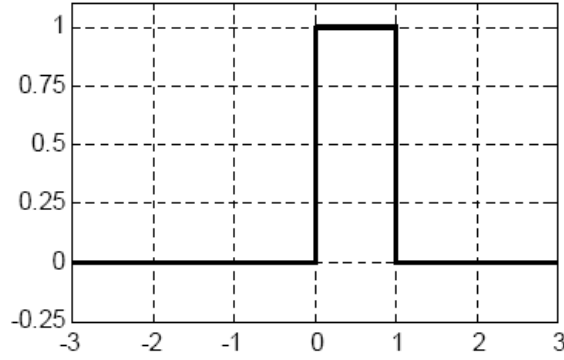


Figura 1.10.: Retenedor de orden 0

La respuesta impulsional, figura 1.10, puede descomponerse en un escalón menos un escalón retrasado T_m . Su transformada de Laplace es la función de transferencia:

$$R_0(s) = \frac{1 - e^{-T_m s}}{s}$$

Su respuesta en frecuencia, corresponde a un filtro pasa-baja, aunque ni mucho menos ideal. La ganancia estática es T_m , y la fase varía linealmente con la frecuencia: “retardo de grupo $T_m/2$ ”.

El resultado de $c2dm$ serán cuatro matrices $[F, G, H, J]$ que definen el sistema introducido pero en tiempo discreto.

Definiendo las variables de estado para el sistema del puente grúa:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x \\ \dot{x}_1(k) &= \dot{x} = x_3(k) \\ \dot{x}_3(k) &= \ddot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(k) &= \theta \\ \dot{x}_2(k) &= \dot{\theta} = x_4(k) \\ \dot{x}_4(k) &= \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Lo cual corresponde a tener:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ v_{\text{puente}} \\ \omega_{\text{pendulo}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Posicion(Carro)} \\ \text{Angulo(Pendolo)} \\ \text{Velocidad(Carro)} \\ \text{Velocidad(Angular)} \end{array} \quad (1.23)$$

Se obtiene el sistema en ecuaciones de estado (1.24):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{ce}{1-cd} & -\frac{b}{1-cd} & -\frac{cf}{1-cd} \\ 0 & -\frac{e}{1-cd} & -\frac{bd}{1-cd} & -\frac{f}{1-cd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{1-cd} \\ \frac{ad}{1-cd} \end{bmatrix} U(k) \quad (1.24)$$

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.25)$$

1.5.1. Ecuaciones de estado a partir de los datos del manual

De la ecuación de estados (1.24) y los valores de los parámetros de la tabla 1.1 se obtiene las ecuaciones de espacio de estados en su valor numérico.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.006 & 0.0499 & 0 \\ 0 & 0.9819 & -0.0001 & 0.0494 \\ 0 & -0.0221 & 0.9979 & -0.0010 \\ 0 & -0.7196 & -0.0030 & 0.9683 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.0015 \\ 0.0424 \\ 0.0596 \end{bmatrix} U(k) \quad (1.26)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(k) \quad (1.27)$$

Los polos del sistema en lazo abierto se muestran en la figura 1.11, los cuales presentan la inestabilidad del sistema, por estar ubicados sobre el círculo unitario.

De las ecuaciones en el espacio de estados se puede obtener las funciones de transferencia del sistema:

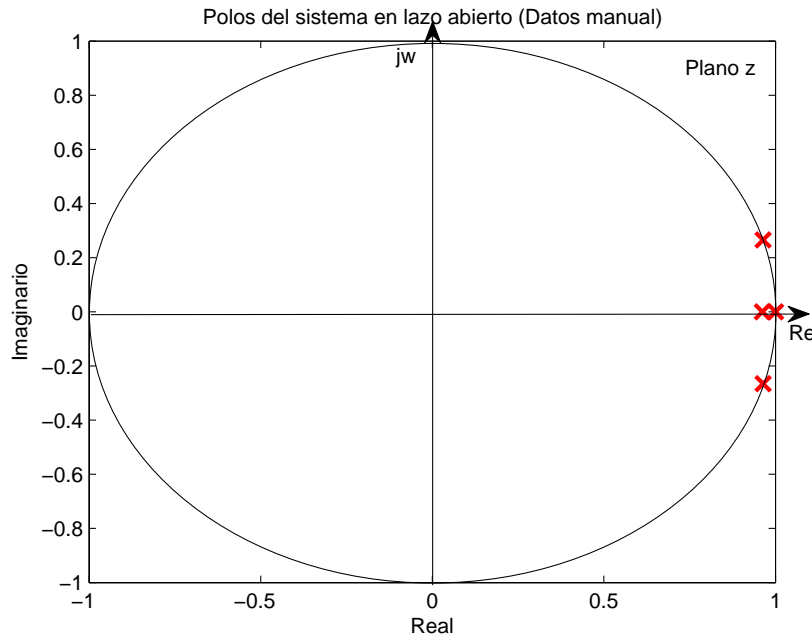


Figura 1.11.: Polos del sistema en lazo abierto discreto (Datos manual)

Función de transferencia de la posición con respecto a la entrada $U(S)$:

1.5. Modelo lineal del sistema en ecuaciones de estado en tiempo discreto

$$\frac{x(z)}{U(z)} = \frac{0.001061z^3 - 0.001012z^2 - 0.001023z + 0.001047}{z^4 + 0,0407z^3 + 1,346z^2 + 0,0547z}$$

Función de transferencia del ángulo con respecto a la entrada $U(S)$:

$$\frac{\theta(z)}{U(z)} = \frac{0.001498z^3 - 0.001506z^2 - 0.001482z + 0.00149}{z^4 - 3.948z^3 + 5.88z^2 - 3.917z + 0.9842}$$

Aunque en la ecuación salida del sistema en espacio de estados se tienen dos salidas, recordando que la salida será la variable posición y el ángulo es una variable que será regulada en este caso.

1.5.2. Ecuaciones de estado a partir de los datos reales (ajustados)

De la ecuación de estados (1.24) y los valores de los parámetros de la tabla 1.2 se obtiene las ecuaciones de espacio de estados en su valor numérico.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0002 & 0.0490 & 0 \\ 0 & 0.9642 & -0.0028 & 0.0494 \\ 0 & -0.0073 & 0.9611 & -0.0002 \\ 0 & -1.4246 & -0.1113 & 0.9639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.0042 \\ 0.0581 \\ 0.1662 \end{bmatrix} U(k) \quad (1.28)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(k) \quad (1.29)$$

Los polos del sistema en lazo abierto se muestran en la figura 1.12, los cuales presentan la inestabilidad del sistema, por estar ubicados sobre el círculo unitario.

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

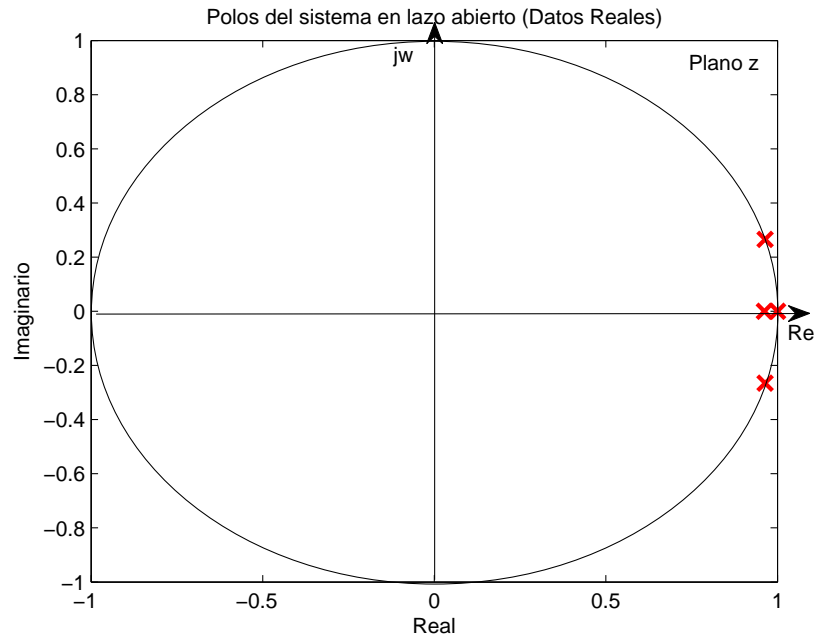


Figura 1.12.: Polos del sistema en lazo abierto discreto (Datos Reales)

De las ecuaciones en el espacio de estados se puede obtener las funciones de transferencia del sistema:

Función de transferencia de la posición con respecto a la entrada $U(z)$:

$$\frac{x(z)}{U(z)} = \frac{0.001462z^3 - 0.001377z^2 - 0.001321z + 0.001442}{z^4 - 3.889z^3 + 5.742z^2 - 3.813z + 0.9608}$$

Función de transferencia del ángulo con respecto a la entrada $U(z)$:

$$\frac{\theta(z)}{U(z)} = \frac{0.004208z^3 - 0.004264z^2 - 0.004097z + 0.004153}{z^4 - 3.889z^3 + 5.742z^2 - 3.813z + 0.9608}$$

Aunque en la ecuación salida del sistema en espacio de estados se tienen dos salidas, recordando que la salida será la variable posición y el ángulo es una variable que será regulada en este caso.

1.6. Respuesta en lazo abierto frente a una entrada impulso

Estas respuestas son usadas para analizar el comportamiento físico real del sistema ante una determinada entrada, en este caso un impulso. Además puede ser de gran ayuda como un análisis inicial al sistema de control que se quiere implementar.

1.6.1. Respuesta a partir de los datos del manual

La respuesta del puente grúa ante un impulso teniendo en cuenta los valores de los parámetros dados en la tabla 1.1 entregados por el manual, se muestra en las figuras 1.13 y 1.14: Esta entrada impulso ocasiona un

1.6. Respuesta en lazo abierto frente a una entrada impulso

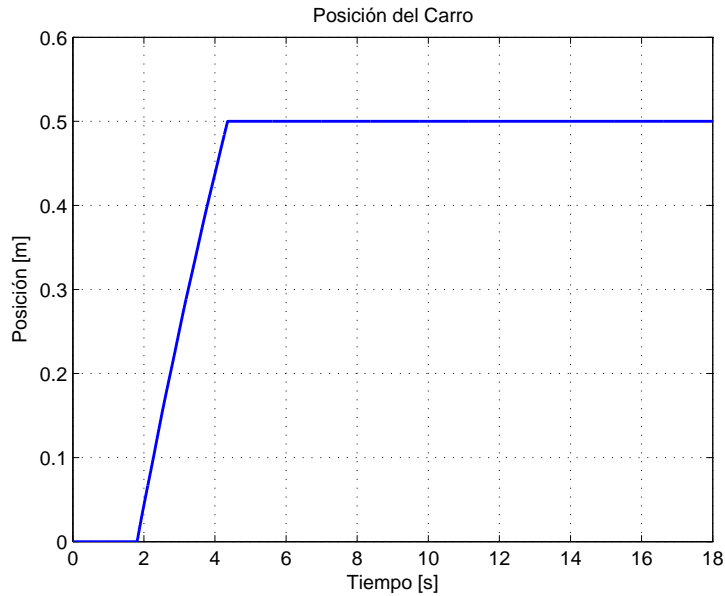


Figura 1.13.: Salida de la posición ante la entrada impulso.

movimiento del carro el cual puede ser visto en la figura 1.13, al tiempo que en el péndulo (carga) se genera oscilación como se ve en la figura 1.14.

La saturación de la figura 1.13 se debe a los límites físicos del modelo a escala del puente grúa. En la figura 1.14 se observa una oscilación que se atenúa a medida que pasa el tiempo debido al coeficiente de fricción angular que posee la polea en el eje de rotación.

1.6.2. Respuesta a partir de los datos reales (ajustados) y los del modelo a escala del puente grúa

La respuesta del puente grúa en lazo abierto ante un impulso en el modelo real era diferente que la respuesta anteriormente mostrada, en consecuencia se debe reparametrizar los valores de los parámetros entregadas por el manual para poder tener respuestas similares entre el modelo real y el simulado.

Los valores de las masas fueron obtenidos pesando cada componente móvil del puente grúa “El carro” y “El péndulo” por separado.

Los valores del momento de inercia del péndulo, la fricción para el carro y del péndulo se obtuvieron a partir de simulaciones hasta obtener un comportamiento parecido al del modelo real. Lo cual entrega un sistema de ecuaciones en el espacio de estado diferente del sistema de ecuaciones obtenidos a partir de los datos del manual, tanto para el caso continuo como para caso el caso discreto.

Este nuevo sistema de ecuaciones se muestra en las ecuaciones (1.20) y (1.28). Las respuestas obtenidas del modelo simulado reparametrizado y del modelo real, se muestra en las figuras 1.15 y 1.16 para el sistema simulado y en las figuras 1.17 y 1.18 para el sistema real.

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

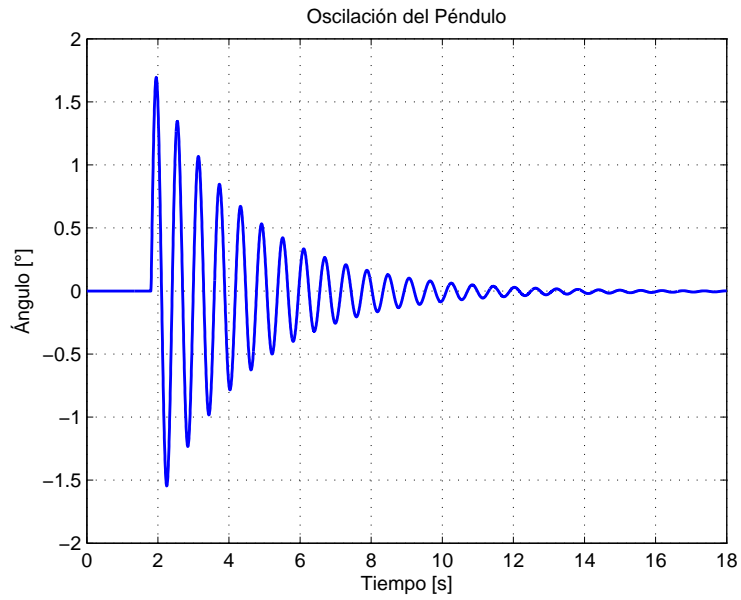


Figura 1.14.: Salida del ángulo ante la entrada impulso.

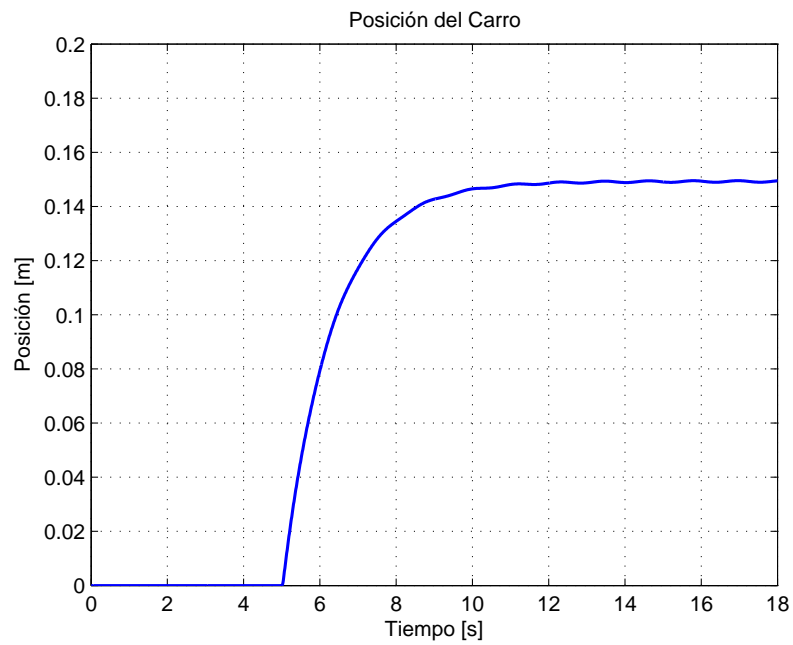


Figura 1.15.: Salida de la posición ante la entrada impulso con parámetros ajustados.

1.6. Respuesta en lazo abierto frente a una entrada impulso

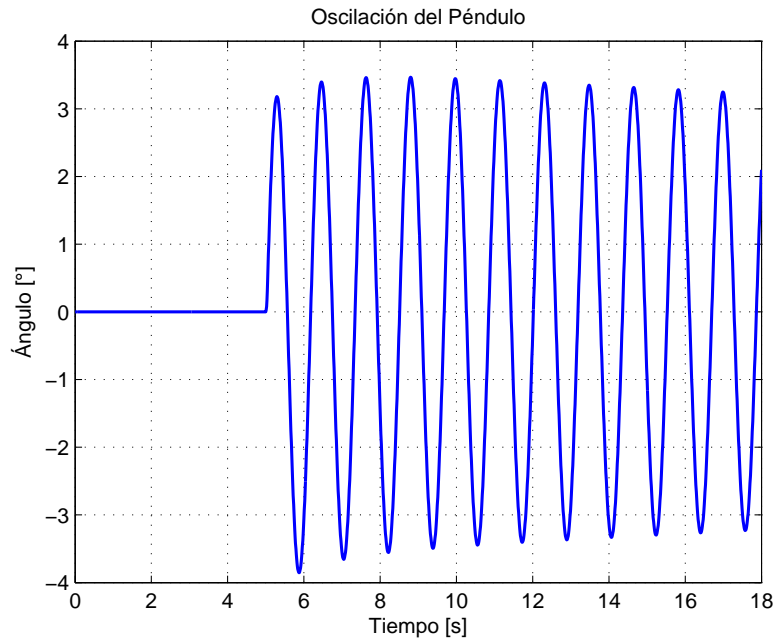


Figura 1.16.: Salida del ángulo ante la entrada impulso con parámetros ajustados.

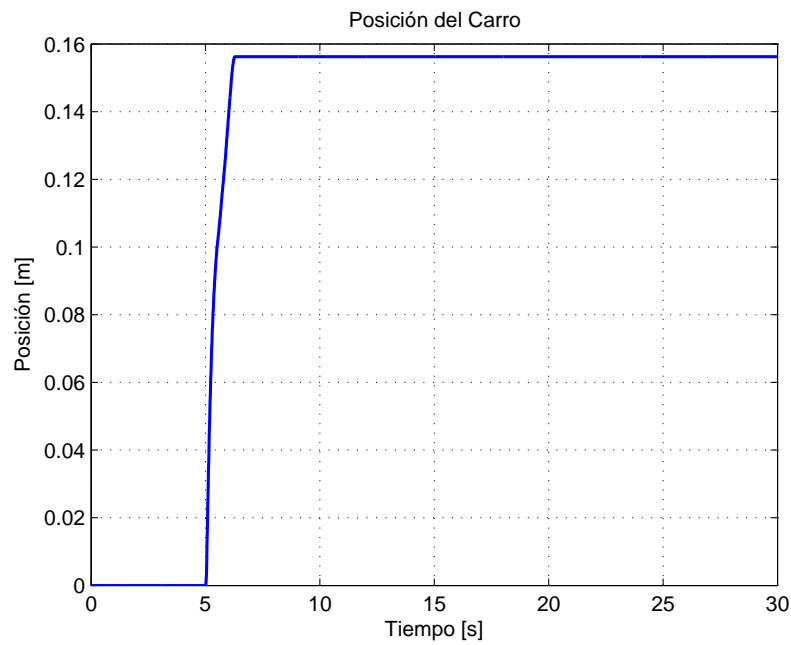


Figura 1.17.: Salida de la posición ante la entrada impulso del modelo a escala del Puente Grúa.

1. Modelo matemático de la planta física (Puente grúa)

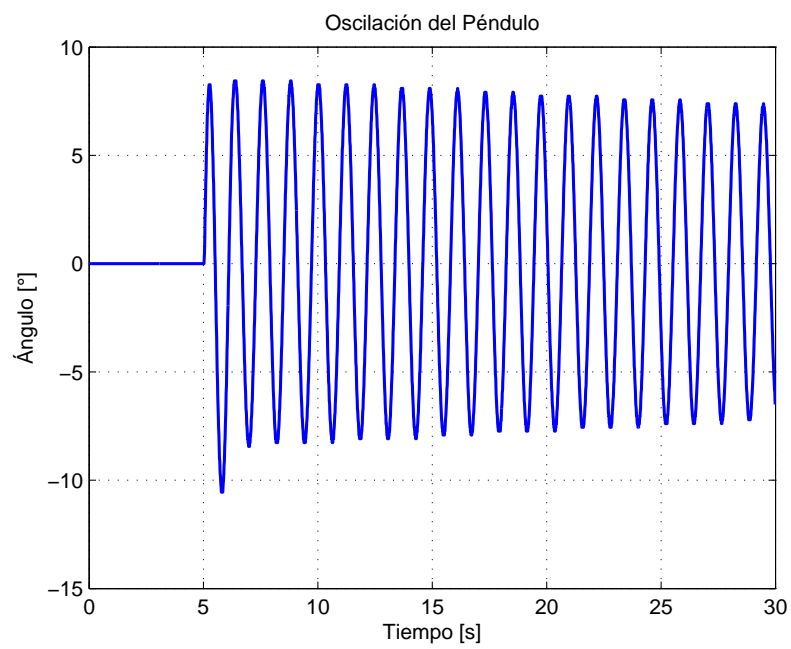


Figura 1.18.: Salida del ángulo ante la entrada impulso del modelo a escala del Puente Grúa.

2. CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO *LQR*

2.1. Control óptimo

Los Ingenieros están capacitados para resolver problemas que resultan diariamente en la industria, los cuales son variantes de soluciones ya encontradas de modificaciones que surgen para los diferentes procesos. De manera que las nuevas soluciones deben ser mejores, más eficientes y menos costosas que las anteriores, para que de esta forma puedan superar las anteriores y a su vez solucionar los nuevos problemas que se presenta.

Con la utilización de herramientas matemáticas, y simulaciones se pueden encontrar las soluciones buscadas de manera interactiva de evaluación y error, hasta encontrar una solución que se ajuste a la búsqueda. Pero esto también se ha vuelto un problema en el camino de la búsqueda de las soluciones, por el alto esfuerzo matemático que se debe realizar, el tiempo que demoran estos cálculos debido a que hay que evaluar y descartar un gran espacio de soluciones y volver a retomar el problema hasta ir acotando este espacio y al final decidirse por una solución que cumpla con lo deseado, aunque no se tenga conocimiento sobre si esta será la óptima. Por esta razón el ingeniero se ha preocupado por buscar métodos matemáticos que puedan usarse para encontrar las mejores soluciones entre muchas a escoger sin tener que enumerar y evaluar explícitamente todas las alternativas que se le presenten, resultando así las técnicas de optimización, las cuales, además de entregar resultados buenos, estos serán los “óptimos” para un problema específico.

La necesidad de optimizar los sistemas de control fue surgiendo debido a que los problemas que tenían estos sistemas eran solucionados de forma interactiva sin tener certeza si la respuesta encontrada aunque fuera buena y cumpliera con la solución del problema (especificaciones de diseño) fuera la óptima. El principio de optimización nació en el siglo XVII cuando se vio la necesidad de determinar cuál, entre todas las trayectorias posibles, era la que llevaba a una partícula (sin rozamiento) en el menor tiempo posible, desde un punto *A* a un punto *B* en el mismo plano vertical y sujeta a la acción de la gravedad; éste fue llamado el problema del **Braquistocrono**, el cual también dio paso al nacimiento del **CONTROL ÓPTIMO**. Cuando se desea optimizar un resultado que hace parte de un sistema, en lo primero que se debe pensar es en tener una “función objetivo”, la cual ayudará a encontrar el resultado que más se ajuste a las necesidades de diseño, como lo pueden ser: el costo, el tiempo de diseño, la rapidez en la respuesta de un sistema, etc., tal que las variables

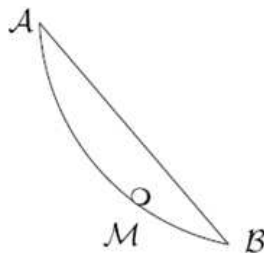


Figura 2.1.: Braquistocrono.

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

asociadas a este sistema, expresadas en forma de ecuaciones e inecuaciones algebraicas, relacionadas mediante expresiones matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico, minimicen o maximicen esa función objetivo.

El control óptimo es una teoría que tiene como propósito la **maximización** o la **minimización** de un índice de desempeño que tenga que ver con algún proceso. Es decir, lo que se pretende es encontrar unas condiciones de funcionamiento óptimas para el sistema, la cual este sujeta a determinada función de costo (índice de desempeño) y que debe cumplir con un conjunto de restricciones dependiendo del sistema a optimizar.

Una de las grandes ventajas del control óptimo es la capacidad que tiene para ser implementado en la solución de problemas con modelos que poseen múltiples entradas y salidas, además de condiciones iniciales diferentes de cero.

La finalidad que tiene el control óptimo en los sistemas de control automático es poder determinar qué señales de control van a causar que el proceso satisfaga ciertas restricciones físicas, y al mismo tiempo algún criterio de desempeño, donde la búsqueda de estas señales puede ser descrita por una curva o trayectoria, ya sea continua o discreta, la cual será la solución óptima bajo un determinado índice de desempeño J descrito de la forma de una función real definida sobre un determinado dominio de funciones, y la cual optimiza una determinada función, que normalmente está definida por medio de una integral. De manera que la aplicación de las matemáticas a la teoría de control, se convierte en un pilar fundamental para la búsqueda de soluciones a problemas diversos, donde lo primero que se debe tener en cuenta al momento de buscar soluciones, es analizar una situación determinada la cual permita identificar el problema y las posibles variantes que se pueden plantear para la búsqueda de una solución que conlleve un buen desempeño del proceso o planta a controlar. [21, 22, 23]

2.2. Modelado

En este punto, los métodos matemáticos permitirán encontrar un modelo del sistema o de la planta estudiada y analizar sus propiedades, para poder compararlo con la realidad y ver qué tan preciso es con respecto al verdadero comportamiento de esta planta. Pero, existe el problema de que, en cuanto más realista sea un modelo, más complicado será y por consiguiente los medios de estudio serán insuficientes y se dificultará resolver las ecuaciones matemáticas que lo describen.

Comúnmente, para cualquier sistema controlado se puede escoger que camino se desea seguir para pasar de un estado inicial hasta otro, mediante dispositivos de control. Para elegir entre los diferentes caminos, se puede asignar algún valor para pasar por cada uno de ellos, tal como el tiempo transcurrido en alcanzar el objetivo, el gasto de combustible y la cantidad de energía utilizada. De esta forma lo más lógico, es seleccionar el camino por el que se deba incurrir con el menor precio posible y se cumpla con las restricciones físicas e impuestas por el diseño. Lo cual da la propiedad de los problemas de **Control Óptimo**.

Para la utilización de las técnicas de control óptimo, primero se debe tener un modelo matemático en la forma de variables de estado, el cual dispone de una infraestructura adecuada para el estudio de sistemas lineales y no lineales, y que a su vez describa el sistema a tratar. Utilizando medios matemáticos básicos, es imposible tratar de solucionar un problema de control automático, cuando este es de tipo MIMO (Múltiples entradas, múltiples salidas), así que se debe delimitar el problema para tratar de obtener sólo cierta información acerca de su comportamiento, lo suficiente para que se pueda conformar un modelo matemático fiable y sencillo que reduzca los cálculos y escoger una técnica de control óptimo apropiada.

2.3. Optimización en sistemas de control automático

El estado de un sistema es un conjunto de valores $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ los cuales son determinados para $t \geq t_0$ conociendo sus valores iniciales en $t = t_0$ y especificando las entradas del sistema para $t \geq t_0$; y así tener las herramientas con las cuales se podrá describir el sistema físico en forma matemática, donde hay que tener en cuenta, el incluir en el modelado y en el diseño del controlador todas las variables que afectan las operaciones del sistema; ya que al dejar de lado las variables importantes, esto puede llevar a soluciones erróneas contrarias al sistema real. El propósito del control automático esta dado por el deseo de llevar un proceso, mediante el cual, se ejerza una influencia sobre su comportamiento dinámico (que varia con el tiempo) de un estado a otro, para alcanzar un propósito previamente fijado. Una clase importante de modelos de sistemas dinámicos controlados, se representan matemáticamente por una ecuación diferencial en R^n de la forma:

$$\dot{X}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0$$

Donde la dinámica f es una función que satisface condiciones adecuadas y la señal de control u pertenece a una familia especial U de funciones con valores en un subconjunto U de R^n . Una vez elegido un control u , el sistema de la ecuación (2.1) determina una trayectoria o estado x con condición inicial x_0 en el momento t_0 . Lo cual se representa para sistemas de control lienal por variables de estado de la forma de las ecuaciones (2.2) y (2.3):

$$\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.3)$$

2.3. Optimización en sistemas de control automático

Después de obtener el modelo matemático bajo las especificaciones de la representación de sistemas en el espacio de estados, el cual da una descripción aproximada del modelo real, y teniendo en cuenta las propiedades que esta representación tiene, la cual se plantea en el *Anexo*, se entra a describir de qué forma el control óptimo entra a hacer parte de la forma de búsqueda de nuevas soluciones para el control de sistemas dinámicos, donde ya no solo se desea controlar dichos sistemas, si no que estas acciones de control se vuelvan las óptimas, es decir, que la **Medida de rendimiento** sea un parámetro para el diseñador donde éste debe escogerlo a su criterio para optimizar un sistema. De manera que un **control óptimo** se define como aquel que minimiza (ó maximiza) la medida de rendimiento.

Entonces los sistemas de control óptimo se basan fundamentalmente en las técnicas de optimización, las cuales consisten en la búsqueda del espacio de los parámetros variables del controlador “Que para este caso es el LQR” en función de algún índice de desempeño, con el objetivo de minimizarlo o maximizarlo; donde la mayoría de los problemas de control automático en los que se aplica una técnica de control óptimo consisten en encontrar un control admisible u^* que cause una trayectoria óptima x^* que minimice la medida de rendimiento J . y que a su vez se mantengan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un control adecuado, con unicidad, y estabilidad para el sistema.

La forma más utilizada para obtener una función objetivo, es ajustar en el sistema real o utilizando un modelo, las entradas y los parámetros de los controladores. El modelo a construir también debe poseer ecuaciones de equilibrio, relaciones de diseño y ecuaciones de propiedades físicas que describan los fenómenos

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

físicos que tienen lugar en el sistema.

En tal caso, se requiere que el estado final se de en un tiempo mínimo y con el mínimo uso de energía, es decir, se desea minimizar una función que depende del estado del sistema \dot{x} y del control u ; la cual es llamada la **función de desempeño**:

$$J^{u(\cdot)}(t_0, x_0) = \ell(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt \quad (2.4)$$

Donde L y ℓ son funciones que satisfacen condiciones adecuadas. La función L representa el costo incurrido por el desplazamiento de \dot{x} y por la fuerza realizada de u , mientras que la función ℓ representa la penalización por la desviación del estado x_f en el instante final t_f de un estado deseado x_f .

Los tipos de sistemas que se trabajan en problemas de control automático están caracterizados por ser sistemas dinámicos, es decir, que sus respuestas son variables con el tiempo. Entonces las técnicas fundamentales de optimización que trabajan para sistemas estáticos “optimización exacta” impiden que puedan ser aplicadas para sistemas dinámicos, ya que es imposible de obtener respuestas que aseguren intertemporalmente el óptimo en una función objetivo. La optimización dinámica, en cambio, resuelve este problema al obtener trayectorias temporales de cada variable en un período previamente definido.

Uno de los métodos mas utilizados por los investigadores para esta optimización, es el método de Programación Dinámica desarrollado por Bellman en 1957. La preferencia por este método ha sido determinada por su facilidad para incorporar a los modelos la influencia de perturbaciones estocásticas.

Desafortunadamente no siempre los problemas de control planteados tienen una solución cerrada, en general, debido a las formas funcionales habitualmente utilizadas para modelar la evolución del sistema, esto presenta una falencia en la utilización de este tipo de técnicas de optimización, resultando así la necesidad de buscar nuevas soluciones para este problema.

Una forma de resolver esta dificultad es utilizar los algoritmos genéticos, los cuales son técnicas de búsqueda y optimización para resolver problemas dinámicos en donde no existen técnicas matemáticas especializadas para resolverlos y donde las técnicas de optimización clásicas “exactas” no funcionaran de manera apropiada.

La utilización de estas técnicas nuevas de optimización requieren un tipo específico de función a optimizar “índice de desempeño” el cual tendrá parámetros que serán hallados a partir de dichas técnicas de optimización dinámica, debido a naturaleza variable de las salidas del sistema. Surgiendo así la llamada aproximación lineal cuadrática, la cual hace parte de un índice cuadrático de desempeño, que da inicio a un tipo de control denominado **controlador lineal óptimo cuadrático (LQR)**.

Que fundamentalmente consiste en evaluar la solución de una expansión cuadrática de la función objetivo en un entorno del estado estacionario del modelo, linealizando además la ecuación de movimiento del problema.

De manera que la vinculación de un criterio de desempeño para los sistemas dinámicos de control automático, con el cual se busca sujetar el sistema a un criterio de optimización que entreguen respuestas óptimas, consiste en poder implementar un tipo de controlador que tenga una dinámica parecida a la del índice de desempeño propuesto y haga parte de la ley de control de realimentación de variables de estado, el cual permita hacer uso de las técnicas de optimización dinámica para encontrar “Sintonizar” los parámetros que lo conforman, y devuel-

va los valores del vector de ganancias de realimentación de estados K pertenecientes a la ley de control utilizada.

La forma de obtener los valores de K , después de haber conseguido los parámetros del controlador mediante las técnicas de optimización dinámica que para el problema de este trabajo serán los algoritmos genéticos; esta dada por la utilización de una función objetivo cuadrática y el uso de la ecuación de movimiento lineal del sistema, en donde dicha función, por medio del problema de optimización dinámica para horizonte infinito, tiene solución cerrada (dada por la solución de una ecuación algebraica de Ricatti). Se habrá aproximado de esta forma el problema del controlador LQR a otro de solución relativamente sencilla, dependiendo de los parámetros del mismo, obtenidos por los algoritmos genéticos.

Adicionalmente, el problema lineal-cuadrático tiene la propiedad de cumplir con el principio de equivalencia cierta. Por lo cual resulta sencillo resolver problemas estocásticos que se presenten en forma adecuada, por ejemplo como una perturbación aleatoria aditiva en la ecuación de movimiento.

2.4. Función objetivo (Índice de desempeño)

La formulación del control óptimo anteriormente descrita, se ha definido para satisfacer un índice de desempeño en el tipo de controlador a utilizar y el cual hace parte de la ley de realimentación de variables de estado. Por la naturaleza del problema a tratar se ha optado por la utilización de un controlador multivariable, el cual tiene como característica principal la minimización de una función cuadrática, y es llamado **Regulador Lineal Cuadrático (LQR)**.

El índice de desempeño utilizado por el LQR puede tener diferentes formas de representación sin salirse de su objetivo principal que es determinar una trayectoria óptima para la variable de control $u(t)$, que garantice la regulación de los estados o el seguimiento de los mismo para una señal de referencia, y al mismo tiempo comprometa el óptimo de la función objetivo.

Estos índices de desempeño definen la medida de la desviación del comportamiento del sistema controlado real con respecto al ideal. Esta medida determina la naturaleza del control óptimo resultante, el cual puede ser lineal, no lineal, estacionario o variable en el tiempo, según la forma del índice de desempeño, en general, la elección de este índice se hace después de haber delimitado el sistema (modelo matemático), y de haber definido un criterio sobre el cual basar la evaluación del diseño. Resultando así varios criterios para basarse, por ejemplo, criterios de minimización de tiempo, criterios energéticos y de producción, criterio de minimización de la suma de los esfuerzos de control y las desviaciones de la señal de salida de su valor deseado. Sin embargo, es imposible poder seguir todos los criterios al mismo tiempo, así que lo más común es escoger uno de los criterios como primario y el resto como secundarios, creando ámbitos aceptables estableciendo así el diseño. En este trabajo se escogerá el índice de desempeño cuadrático que hace parte del controlador LQR como primario, y el que hace parte del algoritmo genético como secundario, para de esta forma involucrar un compromiso entre una evaluación del comportamiento del sistema y el correcto desempeño del algoritmo genético.

Algunos de los posibles índices de desempeño que se introducen en el problema de control óptimo LQR se exponen en este trabajo como parte de la función objetivo del controlador y como función objetivo del algoritmo genético, serán los siguientes:

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

2.4.1. Problemas de tiempo mínimo

Este índice tiene el objetivo de encontrar el control u que conduce el sistema desde un estado inicial dado x_0 hacia un estado final x_f en el menor tiempo posible y tiene la forma de la ecuación (2.5).

$$j = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \quad (2.5)$$

2.4.2. Control terminal

Este índice tiene el objetivo de minimizar el error incurrido al pasar de un estado inicial a otro y tiene la forma de la ecuación (2.6).

$$e^T(t_1)Qe(t_1) \quad (2.6)$$

Donde $e(t)=x(t)-r(t)$ y Q es una matriz $n \times n$ simétrica real definida positiva.

2.4.3. Esfuerzo mínimo

Este índice tiene el objetivo de minimizar la energía utilizada en el control para llegar de un estado inicial a un estado final y tiene la forma de la ecuación (2.7).

$$J = \int u^T R u dt \quad (2.7)$$

2.4.4. Problema del seguimiento (Tracking Problem)

Este índice será el utilizado por el tipo de controlador que se aplicara en este trabajo. Tiene como objetivo principal, seguir lo más rápido posible el cambio en la entrada $r(t)$ de un sistema en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$. Y tiene la forma de la ecuación (2.8).

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (e^T Q e) dt \quad (2.8)$$

Donde Q es real, simétrica y semidefinida positiva. Si las funciones $u(t)$ son no acotadas entonces la minimización del índice de la ecuación anterior puede conducir a un vector de control con componentes infinitas. Este hecho es inaceptable en problemas cotidianos. Por tanto, para restringir el esfuerzo total del control, se puede utilizar una combinación de (2.7) y (2.8) para obtener la ecuación (2.9).

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (2.9)$$

Entonces para la parte del controlador LQR lo mas importante será minimizar el error que se presente en las variables de estado ante una referencia y el esfuerzo de la señal control. Es decir, si lo más importante son los estados, se debe elegir Q grande, mientras que si es esencial que la energía empleada en el control sea pequeña, entonces debe tomarse grande el valor de R .

2.4.5. ITAE

Este es un índice de desempeño cuantitativo del sistema, el cual tiene como objetivo la minimización del error a medida que varia en el tiempo, es decir, se hace una multiplicación del error por el tiempo con el fin de reducir la contribución del error en el intervalo $[0, T]$. Es un índice necesario para la operación de sistemas en control

moderno. Y tiene la forma de la ecuación (2.10). [17]

$$J = \int_0^T (|e(t)|) dt \quad (2.10)$$

2.5. Regulador lineal cuadrático LQR

Como se describe en el apéndice A, los métodos de control basados en realimentación de estados son más flexibles y potentes que los correspondientes a la teoría del control clásico. En particular, permiten la asignación de los polos en lazo cerrado a “voluntad”. También se ha discutido cómo estos métodos pueden ser complementados con técnicas de optimización de estados para mejorar el desempeño de los mismos, a partir de algunos cuestionamientos enunciados a continuación:

Ni en los métodos de diseño de control clásico, ni en los de realimentación de estados para la asignación de polos, se expone explícitamente el compromiso que existe entre las especificaciones dinámicas y el “costo” para poder cumplirlas (por ejemplo, entre el tiempo de respuesta de la variable controlada y la acción de control necesaria).

Las restricciones en el control pueden imposibilitar un diseño de polos dominantes. Esto puede dificultar seriamente la selección de los polos de lazo cerrado para cumplir determinadas especificaciones de diseño (como las que vinculan el sobrepaso, el tiempo de establecimiento, etc). Adicionalmente, si existe un espacio no controlable, sólo algunos valores propios podrían ser asignados, y por consiguiente, difícilmente pueda hacerse un diseño con polos dominantes.

En sistemas MIMO no existe una correspondencia entre la respuesta temporal y la localización de los polos. Efectivamente, en estos sistemas, la misma asignación de polos puede hacerse con distintos juegos de ganancias, y de hecho, dan lugar a distintas respuestas temporales. Con las ganancias de realimentación obtenidas, se puede mejorar la respuesta de seguimiento de un sistema, al asociarlas a la amplitud del error.

De estos cuestionamientos se da la motivación para el desarrollo de la teoría de control óptimo, expuesta en la sección inicial de este capítulo.

La configuración del modelo del puente grúa presentado en el capítulo de modelado del sistema presentado en este trabajo es multivariable, por tener una entrada y dos salidas; aunque una de las salidas sea para regulación.

Además, este modelo es no lineal, debido a que las variables de estado están multiplicadas entre ellas, por sus derivadas y multiplicaciones por funciones seno y coseno. De manera que por lo anterior, resulta un sistema a controlar multivariable y no lineal.

Para la realización de este trabajo se empleara un controlador lineal multivariable con realimentación de estado, y se propone el denominado control óptimo lineal cuadrático (Linear Quadratic Regulator). La elección de este tipo de control se basa en su relativa sencillez mediante la utilización de la herramienta computacional MatLab. Al ser un controlador lineal, su cálculo se efectúa sobre el modelo, previamente linealizado, y como las técnicas lineales para modelos de estados, propone una ley de control ($u = -K\Delta x$), muy robusta, tanto en tiempo continuo como para tiempo discreto, lo que permite su implementación en sistemas de control digital.

El controlador permite la solución del problema conocido como LQR el cual es un problema de regulación. Este controlador trata de mantener al sistema en un estado lo más cercano al de reposo $x=0$, haciendo uso

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

mínimo de la señal de control u . El problema de regulación se resuelve a partir de la optimización de un índice de desempeño cuadrático, usando la ecuación algebraica de Ricatti, dando lugar a una solución lineal, la cual es considerada como el vector de ganancias de realimentación de estados K . El índice de desempeño cuadrático que caracteriza al LQR se presenta en la ecuación (2.11). [17]

$$J = x^T(t_f)P_0x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (2.11)$$

En muchos problemas se considera $t_f \rightarrow \infty$, en este caso el índice de desempeño se reduce a la ecuación (2.12).

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (2.12)$$

Los términos que hacen parte del índice de desempeño se interpretan de la siguiente manera:

$[x]^T \cdot [Q] \cdot [x]$: es una medida de la desviación de los estados respecto los estados deseados.

$[u]^T \cdot [R] \cdot [u]$: es una medida del esfuerzo del control.

$[x(t_f)]^T \cdot [P_0] \cdot [x(t_f)]$: es una medida de la desviación de los estados respecto los estados deseados en el instante final del intervalo de optimización.

Este índice de desempeño esta compuesto por dos partes; [17] una trata de transferir al sistema (El puente grúa para este trabajo) desde un estado inicial x_0 a un estado deseado x_f (normalmente el estado de equilibrio o reposo del sistema $x_f=0$) con un costo mínimo del valor cuadrático medio del error, es decir, que la relación $x-x_f$ se puede considerar como el error instantáneo del sistema. Pero si $x_f=0$ (regulación del estado), entonces x_0 es el mismo error. De manera que el costo correspondiente a las desviaciones del estado de reposo se expresa por el índice de la ecuación (2.13).

$$J_1 = \int_0^T (x^T Qx) dt \quad (2.13)$$

Donde Q es una matriz hermitica definida positiva (o semidefinida positiva) y simétrica real; donde sus elementos penalizan respectivamente el error del estado x . De modo que el producto de $x^T x$ es un escalar de valor $|x^2| = x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2$, que representa la energía normalizada de x ; el subíndice n indica el número de estados. La forma más simple de Q es diagonal.

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Donde q_{ii} representa el peso que se le da al estado al momento de evaluar su contribución al índice de desempeño J y el producto de $x^T Qx$ queda de la forma (2.14).

$$x^T Qx = q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + \dots + q_{ii}x_i^2 \quad (2.14)$$

Cuanto mayor es el valor de q_{ii} , mayor es la penalización o peso que se le dará al estado x_j para regularlo (llevarlo a cero). Dado que Q es diagonal, esta penalización se hace para cada variable de estado de forma

independiente. Pero cuando la matriz Q esta de la forma completa.

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1j} \\ q_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_{j1} & & & q_{ij} \end{bmatrix}$$

Se hace la penalización a cada una de las variables de estado, y a su vez a las relaciones que existen entre ellas.

El segundo término que compone el índice de desempeño de la ecuación (2.12) hace parte del esfuerzo de control que se aplica al sistema; el cual trata de transferir el estado de un sistema desde x_0 hasta x_f con un gasto mínimo de energía, y una buena medida para este gasto de energía, esta dado por el índice.

$$J_2 = \int_0^T (u^T R u) \quad (2.15)$$

Donde R es una matriz hermitica definida positiva y simétrica real. Esta matriz determina el costo energético de la acción de control y los valores que se le dan a esta; representan el peso que se asigna a cada variable de control en el gasto de energía. Las dimensiones de la matriz R dependen del número de variables de control, que para este caso es un único valor; debido a que solo se tiene una señal de control proveniente del motor DC.

Si los valores de R son mucho mayores que los valores de Q : La contribución del control u es muy grande comparada con la contribución del estado x . Pero esto hace empeorar el comportamiento de los estados. Si los valores de Q son mucho mayores que los valores de R : Mejora la respuesta del sistema. El vector de variables de estado será penalizado, pero las señales de control u pueden ser muy grandes.

En general, cuanto mayor sean los coeficientes, más se optimiza la variable que corresponda. En la mayoría de las aplicaciones, las matrices Q y R son matrices diagonales, por lo que los funcionales J_1 y J_2 adoptan la forma (2.16) y (2.17).

$$J_1 = \int_0^T (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \cdots + q_n x_n^2) dt \quad (2.16)$$

$$J_2 = \int_0^T (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \cdots + r_n u_n^2) dt \quad (2.17)$$

Para un sistema con n variables de estado y m señales de entrada. Si el sistema posee una sola entrada, entonces la matriz R se convierte en un escalar, como es el caso del sistema tratado en este trabajo. Luego, si se suman las ecuaciones (2.16) y (2.17), se obtiene la ecuación (2.12) que describe el LQR. [17, 20, 21]

A continuación se hará una descripción del controlador LQR en tiempo continuo y discreto. Para darle una mejor continuidad en la lectura y comprensión de este capítulo.

2.5.1. LQR Continuo

Dado el sistema lineal determinístico en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.18)$$

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.20)$$

Se usará el segundo método de Lyapunov para resolver el problema del control óptimo formulado. Primero se fijan las condiciones de estabilidad y luego se diseña el controlador dentro de esas condiciones. El método supone que el sistema es controlable. Si se reemplaza la ecuación (2.20) en la ecuación (2.18) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \quad (2.21)$$

Retomando la ecuación (2.12) del índice de desempeño de LQR que tiene la forma:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}) dt \quad (2.22)$$

y asumiendo que $(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})$ es estable, es decir, tiene todos los polos con parte real negativa, se sustituye (2.20) en (2.22) para obtener

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x}) dt \Rightarrow J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K}) \mathbf{x}) dt \quad (2.23)$$

Usando las condiciones, para que la candidata

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (2.24)$$

donde P es una matriz hermitica definida positiva, si se verifica que esta matriz es definida positiva el sistema es estable.

sea Función Lyapunov, entonces su derivada temporal deberá ser definida negativa. Derivando en el tiempo a la función candidata $V(x)$,

$$\dot{\mathbf{V}}(x) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \quad (2.25)$$

reemplazando la ecuación (2.21) en la derivada temporal de x , se tiene que

$$\dot{\mathbf{V}}(x) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} - \mathbf{x}^T (\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (2.26)$$

El primer término entre paréntesis requiere que sea definido por una matriz negativa para que la candidata $V(x)$ propuesta sea función de Lyapunov. Por lo tanto debe cumplirse que

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \quad (2.27)$$

donde Q debe ser definida positiva. Para verificar la existencia de P , se hace el estudio sobre $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}) = -\mathbf{I}$, igualando a la matriz identidad. Obteniendo así las relación existente entre la función Lyapunov $V(x)$ y su derivada temporal de la forma de la ecuación (2.28)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (2.28)$$

Retomando la ecuación (2.26) el segundo término, debe ser definido positivo, y se hará la igualdad

$$\mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} \quad (2.29)$$

teniendo en cuenta la ecuación (2.22), la derivada temporal de $V(x)$ deberá cumplir con la relación

$$\dot{V}(x) = -\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} \quad (2.30)$$

Igualando las expresiones, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} \quad (2.31)$$

Derivando respecto a t , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \mathbf{x} &= -\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.32)$$

que debe resolverse en P simétrica y definida positiva. Como la condición (2.32) debe cumplirse para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se resuelve la ecuación igualando las matrices de ponderación de la forma cuadrática. Por lo tanto,

$$-[(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \quad (2.33)$$

corresponde al argumento del funcional de costos a minimizar, y definiendo a la función ζ como

$$\zeta = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \quad (2.34)$$

Para hallar K , se minimiza la expresión (2.34) respecto de K , teniendo en cuenta las reglas de derivación matricial e igualando a 0 el resultado verificando que la derivada segunda de (2.34) sea positiva para que el extremo sea un mínimo. Dada una matriz X y dos vectores x , y se verifica

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{y})}{\partial x} = \mathbf{X} \mathbf{y}; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{y})}{\partial y} = \mathbf{X}^T \mathbf{x}; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{x})}{\partial x} = 2\mathbf{X} \mathbf{x}; \quad (2.35)$$

pero la tercera propiedad sólo es válida si X es simétrica. Derivando la ecuación (2.34) respecto a K , se tiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} + 2\mathbf{R} \mathbf{K} \quad (2.36)$$

y la derivada segunda de la ecuación (2.34) es

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial K^2} = 2\mathbf{R}^T \quad (2.37)$$

que es definida positiva, lo que indica que el extremo de la derivada primera es un mínimo. Por lo tanto, igualando a cero la derivada primera y despejando K se tiene que

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.38)$$

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

La ley de control será, entonces

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (2.39)$$

Reemplazando el valor de K en la igualdad (2.38) se obtiene el valor mínimo de la función implícita. Así:

$$0 = \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \mathbf{Q} = \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} - (\mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{Q}$$

reemplazando, entonces, K por la ecuación (2.38), se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - (\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T\mathbf{P} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \\ 0 &= (\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T(\mathbf{R}^{-1})^T\mathbf{B}^T\mathbf{P} - (\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T(\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1})^T\mathbf{P} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \end{aligned}$$

que operando, se llega a

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.40)$$

que es la Ecuación de Riccati reducida. [20, 21, 22, 21]

2.5.2. LQR Discreto

La formulación del problema de control para el Regulador Óptimo lineal en tiempo discreto es la siguiente. Dado el sistema lineal determinístico en las ecuaciones (2.41) y (2.42)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k \quad (2.41)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k\mathbf{u}_k \quad (2.42)$$

Se desea encontrar una ley de control u_k que haga evolucionar al proceso desde $x(0) \neq 0$ a $x(N)=0$ minimizando el funcional de costo de la ecuación (2.43).

$$J(x, u) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T\mathbf{R}\mathbf{u}_k] + \mathbf{x}_N^T\mathbf{S}\mathbf{x}_N \quad (2.43)$$

con S y Q simétricas y semidefinidas positivas y R simétrica y definida positiva.

Para encontrar la ley de control u_k , existen diversos métodos, entre los más difundidos están los basados en el principio de optimalidad de Bellman y los que emplean los multiplicadores de Lagrange. Para el caso en que N tienda a infinito en la definición del funcional (2.43), se tiene una formulación del problema conocida como de estado estacionario donde pierde sentido el término $\mathbf{x}_N^T\mathbf{S}\mathbf{x}_N$ ya que al ser estable el sistema controlado este siempre será nulo, la cual admite un procedimiento de cómputo basado en la Teoría de Lyapunov.

Formulación del problema de estado estacionario

Se propone formular el problema de control óptimo para emplear la Teoría de Lyapunov, que considera un sistema dinámico en estado estacionario. Dado el modelo dinámico de las ecuaciones (2.41) y (2.42), se desea encontrar una ley de control u_k [15, 16, 18, 24]

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_k \quad (2.44)$$

que haga evolucionar el sistema para $k = 0$ hasta $k = \infty$, minimizando el funcional de costos

$$J(x, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (2.45)$$

donde \mathbf{Q} es simétrica y semidefinida positiva, y \mathbf{R} es simétrica y definida positiva. Para resolver éste problema, se empleará el Teorema de estabilidad de Lyapunov.

Estabilidad en tiempo discreto

El análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov sirve para sistemas lineales o no lineales de tiempo discreto, variantes o invariantes en el tiempo. Se basa en el segundo método de Lyapunov.

Teorema:

Sea el sistema en tiempo discreto

$$\mathbf{x}_{(k+1)T} = f(\mathbf{x}_{kT}) \quad (2.46)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$, y T es el período de muestreo. Se emplea una función que contempla la energía del sistema, y de ésta función se calcula la diferencia temporal, es decir, que dada

$$V(\mathbf{x}_{kT}) = \text{Funcion candidata}$$

y la función diferencia para dos intervalos de muestreo se define como

$$\Delta V(\mathbf{x}_{kT}) = V(\mathbf{x}_{(k+1)T}) - V(\mathbf{x}_{kT}) \quad (2.47)$$

Si existe una función escalar continua $V(x)$ tal que:

1. $V(x) > 0 \forall x \neq 0$
2. $\Delta V(x) < 0$, $\Delta V(x) = V(f(x_{kT})) - V(x_{kT})$
3. $V(0) = 0$
4. $V(x) \rightarrow \infty$ con $\|x\| \rightarrow \infty$

entonces el estado de equilibrio $x = 0$ es asintótica-globalmente estable y $V(x)$ es una función de Lyapunov.

Nótese que 2 puede ser reemplazado por $\Delta V(x) \leq 0 \forall x$, y $\Delta V(x)$ no se hace cero para toda secuencia x_{kT} solución de (2.46).

Suponiendo que en el sistema de la ecuaciones (2.41) y (2.42) se hace $u_k = 0$, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x_k) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k \quad (2.48)$$

donde \mathbf{P} es simétrica y definida positiva. Entonces, se calcula

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = V(\mathbf{A}\mathbf{x}_k) - V(\mathbf{x}_k)$$

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

Reemplazando en (2.48) se tiene

$$\begin{aligned}\Delta V(\mathbf{x}_k) &= (\mathbf{A}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}\mathbf{x}_k \\ \Delta V(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{x}_k^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k\end{aligned}\quad (2.49)$$

Para asegurar estabilidad asintótica, se impone que la función en (2.49) sea definida negativa, y se puede escribir

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}\mathbf{x}_k \quad (2.50)$$

donde \mathbf{Q} es definida positiva, da la condición suficiente para estabilidad asintótica

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} \quad (2.51)$$

Es conveniente especificar \mathbf{Q} simétrica y definida positiva, y luego verificar que \mathbf{P} - determinada por la (2.51)- es definida positiva o no. Si \mathbf{P} es definida positiva, entonces la $V(x)$ propuesta por (2.48) es función de Lyapunov y se demuestra estabilidad.

Por otro lado, nótese que de la ecuación (2.48), al calcular su diferencia temporal como

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k)$$

resulta

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}\mathbf{x}_k \quad (2.52)$$

y a su vez al igualar al lado derecho de la ecuación (2.48), resulta

$$-\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}\mathbf{x}_k \quad (2.53)$$

Problema de control óptimo discreto estacionario

Reemplazando la ley de control (2.44) en la expresión del funcional de costos (2.45), se obtiene

$$J(x, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K}) \mathbf{x}_k \quad (2.54)$$

Ahora se busca la solución al problema de control en tiempo discreto en estado estacionario, que se basa en la ecuación (2.44), pero si la acción de control no es nula, aparece la modificación de incorporar el controlador. Así, para el caso en que $u_k \neq 0$ en (2.42), se reemplaza la ley de control (2.44), y se tiene que la ecuación (2.53) se transforma en

$$-\mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K}) \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}\mathbf{x}_k \quad (2.55)$$

si se hace coincidir a la matriz \mathbf{Q} en (2.53) con el argumento de ponderación de la forma cuadrática de la ecuación (2.54).

De aquí que minimizando (2.54) con respecto a \mathbf{K} , se encuentra la ley de control óptima (2.44). Para

ello, se opera en la igualdad (2.55) que puede escribirse como:

$$-\mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^T ((\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k \quad (2.56)$$

Ésta última igualdad debe cumplirse para todo valor de x_k , por lo tanto, se tiene que minimizar

$$\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{P} \quad (2.57)$$

con respecto a K es lo mismo que hacerlo en la ecuación (2.54). Para ello, se define una función a partir de la ecuación (2.57) como

$$\zeta = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) - \mathbf{P} \quad (2.58)$$

Se procede minimizando a la ecuación (2.58) respecto a K , derivando miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{\partial (F_{(x)}^T \cdot X \cdot F_{(x)})}{\partial x} = \frac{\partial F_{(x)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial F^T(x) \cdot X \cdot F_{(x)}}{\partial x} \quad (2.59)$$

Para minimizar a la expresión de la ecuación (2.58), se deriva respecto a K , se iguala a cero y se despeja K en el extremo. Para demostrar que es un mínimo, se hace la derivada segunda de la ecuación (2.58) respecto a K , que deberá ser positiva. Entonces, derivando respecto a K a la ecuación (2.58), se tiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial K} = 2\mathbf{R} \mathbf{K} + (-\mathbf{B})^T \cdot 2\mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$$

La derivada segunda será

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial K^2} = \frac{\partial [2\mathbf{R} \mathbf{K} - 2\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K}]}{\partial K} = 2\mathbf{R}^T + 2(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^T$$

cuyo resultado es una matriz definida positiva. Por lo tanto, el extremo en cuestión es un mínimo. Operando para despejar K de la derivada primera

$$\mathbf{R} \mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K}$$

es decir

$$\mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

y de aquí

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.60)$$

Reemplazando el valor de K óptimo encontrado en la ecuación (2.57), se llega a la Ecuación de Riccati de estado estacionario. Para ello, se reemplaza entonces la (2.60) en la (2.58). Entonces, operando primero a la ecuación (2.58):

$$\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} - (\mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} = \mathbf{P} \quad (2.61)$$

donde el lado derecho y los primeros dos términos del lado izquierdo no dependen de K , pero sí los términos desde el tercero hasta el sexto.

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

Reemplazando K de la ecuación (2.60) en el tercer término, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} &= \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^T \mathbf{R} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{R} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo con el cuarto término:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

Con el quinto

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} \mathbf{A} &= \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{A} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\end{aligned}$$

y con el sexto término, se tiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} &= \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{P} \mathbf{A})^T \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \right)^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\end{aligned}$$

Nótese que todos los términos se expresaron como una forma cuadrática de $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, por lo tanto, se puede hacer la suma de los términos y agruparlos reemplazándolos en la ecuación (2.61), entonces operando se tiene

$$\begin{aligned}P &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T \left(\left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{R} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} - (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} - (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T + \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)\end{aligned}$$

que operando con el primer y cuarto término dentro del paréntesis, para agrupar como forma cuadrática, se tiene

$$\left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} - (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} - \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T$$

y ahora se puede simplificar ya que las inversas existen

$$\left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T - (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} - \left((\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \right)^T = -(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1}$$

que será el término medio de la forma cuadrática en $B^T P A$, finalmente, la ecuación (2.61) queda

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.62)$$

que es la ecuación de Riccati de estado estacionario en tiempo discreto. A su vez, operando se llega a

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{I} + \mathbf{B}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{A} \quad (2.63)$$

o equivalente

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \quad (2.64)$$

Para el diseño del controlador, debe resolverse la Ecuación de Riccati en P . [18, 21, 22, 23]

2.6. Control y estimación de las variables de estados

Cuando se utiliza la representación de variables de estados para controlar un sistema, dicho controlador es el llamado control por realimentación de variables de estado, el cual tiene como condición indispensable que el sistema tenga las propiedades de ser completamente controlable y para usar observador.

La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas, mientras que la observabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento interno del sistema puede detectarse en sus salidas.

Estos conceptos describen la interacción entre el mundo externo (entradas y salidas) y las variables internas del sistema (estados). [15, 16]

2.6.1. Controlabilidad

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier estado final $x(t_f)$ en un intervalo de tiempo finito, no importando que trayectoria se siga. Un sistema exhibe controlabilidad completa si todos los estados son controlables.

Caso en tiempo continuo

Considerando el sistema en tiempo continuo defino por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.66)$$

La condición para que el sistema dado por la ecuaciones (2.65) y (2.66) sea completamente controlable, es que la matriz de controlabilidad C sea de rango completo, es decir, el rango de C es igual a n ; el número de estados.

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

C se construye de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Caso en tiempo discreto

Considerando el sistema en tiempo discreto defino como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \quad (2.68)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (2.69)$$

Se asume que $u(k)$ es constante para $k \leq t \leq (k+1)$. Se dice que el sistema muestreado dado por la ecuación (anterior) es controlable de estado completo si existen r secuencias de control continuo a trozos $u_i(k)$ definida sobre un número finito de periodos de muestreo, iniciando desde cualquier estado $x(k)$, este pueda ser transferido a el estado deseado x_f en n periodos de muestreo. Puede probarse que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de n filas y nr columnas (matriz de controlabilidad).

$$C = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \text{ sea de rango completo} \quad (2.70)$$

2.6.2. Obsevabilidad

Hay que señalar que la función principal de un observador es la de estimar las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y del control de los sistemas.

Ya que, en la práctica, no todas las variables están disponibles para su realimentación. Entonces, se necesita estimar las que no están disponibles. Es importante señalar que se debe evitar diferenciar una variable de estado para generar otra que se necesita para cumplir con la totalidad de todas las variables de estado. La diferenciación de una señal siempre decrementa la relación señal a ruido. En ocasiones, la relación señal a ruido se decrementa varias veces mediante un proceso único de diferenciación. Entonces por lo anterior se ha buscado otros métodos para estimar las variables de estado que no sean a través de un proceso de diferenciación. La estimación de las variables de estado por lo general se denomina observación. Un dispositivo (o un programa) que estima u observa las variables de estado se llama observador de estado o simplemente observador.

El problema es que no teniendo acceso a todos los estados, no es posible conocer todas sus condiciones iniciales. Entonces la función del observador es ir reduciendo a medida que avanza el tiempo, la diferencia entre los estados reales y los estados estimados producto de esa diferencia en las condiciones iniciales.

Si el observador de estado capta todas las variables del sistema, sin importar si algunas están disponibles para una medición directa, se denomina observador de estado de orden completo. Para cuando no hay necesidad de hacer observación de todas las variables de estado, si no solo de las que no se miden. Como por ejemplo, dado que las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no se necesita observar todas las variables de estado, sino sólo las $n-m$ variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida. Un observador que estima menos de n variables de estado, se denomina observador de orden reducido.

Este último será el empleado en este trabajo. Debido a que dos de las variables de estados son medi-

bles, las cuales son la posición (carro) y el ángulo (péndulo). La estimación se realizara para las otras dos variables, las cuales son la Velocidad del puente (carro) y la velocidad angular. [1, 15, 16, 17, 18, 24, ?]

Caso en tiempo continuo

La condición para que el sistema dado por las ecuaciones (2.65) y (2.66) sea completamente observable, es que la matriz de observabilidad O sea de rango completo, es decir, el rango de O es igual a n ; el número de estados. O se construye de la siguiente manera

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Observador de orden reducido continuo

En el modelo de espacio de estados de las ecuaciones (2.18) y (2.19) es posible conocer algunas de las variables del vector de estado \mathbf{x} directamente. Por tanto, se puede diseñar un observador de estado de orden reducido, donde se estimen únicamente las variables de estado restantes. [15] Sean

\mathbf{x}_1 : vector de estado que se puede medir directamente.

\mathbf{x}_2 : vector de estado que no se puede medir directamente.

se puede dividir el modelo de espacio de estados de las ecuaciones (2.18) y (2.19) como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.72)$$

y con la ecuación de salida:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

donde \mathbf{C}_1 es cuadrada y no singular, por lo que se puede obtener \mathbf{x}_1 directamente con la relación

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{y} \quad (2.74)$$

y si las variables de estado corresponden directamente a las salidas del sistema, se tiene que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{I}$. A partir de la ecuación (2.72) se pueden escribir las ecuaciones para \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 como

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \quad (2.75)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (2.76)$$

y de la ecuación (2.75) se puede obtener la ecuación de salida dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{u} = \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 \quad (2.77)$$

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

donde los términos $\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u}$ corresponden a cantidades conocidas. La ecuación (2.94) se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.78)$$

donde los términos $\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}$ son cantidades conocidas. La ecuación (2.94) describe la dinámica de cambio de las variables que no pueden ser medidas directamente. Para estas variables se puede formular un observador como

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y}' - \mathbf{C}'\tilde{\mathbf{x}}_2) \quad (2.79)$$

donde \mathbf{y}' son las variables conocidas de la ecuación (2.77) dadas por

$$\mathbf{y}' = \dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \quad (2.80)$$

y con $\mathbf{C}' = \mathbf{A}_{12}$. Se tiene entonces la ecuación para el observador de orden reducido como

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{L}(\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u} - \mathbf{A}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2) \quad (2.81)$$

Reescribiendo la ecuación (2.81) se tiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{L}(\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u}) \quad (2.82)$$

donde los términos $\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{L}(\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u})$ son conocidos. Sin embargo, en la ecuación (2.82) se tiene el término $\dot{\mathbf{x}}_1$. Para eliminarlo, se reescribe como

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\tilde{\mathbf{x}}_2 + (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1)\mathbf{u} \quad (2.83)$$

se le suma el término $(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L}\mathbf{x}_1$ a la ecuación (2.83) y se reescribe como

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})(\tilde{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{L}\mathbf{x}_1) + [(\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11}) + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L}]\mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1)\mathbf{u} \quad (2.84)$$

y si se considera $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{L}\mathbf{x}_1)$ se puede plantear la ecuación (2.84) como

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11}) + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L}]\mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1)\mathbf{u} \quad (2.85)$$

La ecuación (2.85) describe la dinámica del observador de orden reducido. En la figura 2.2 se muestra el esquema del observador de orden reducido para el caso de regulación por realimentación de variables de estado de acuerdo a la ecuación (2.85).

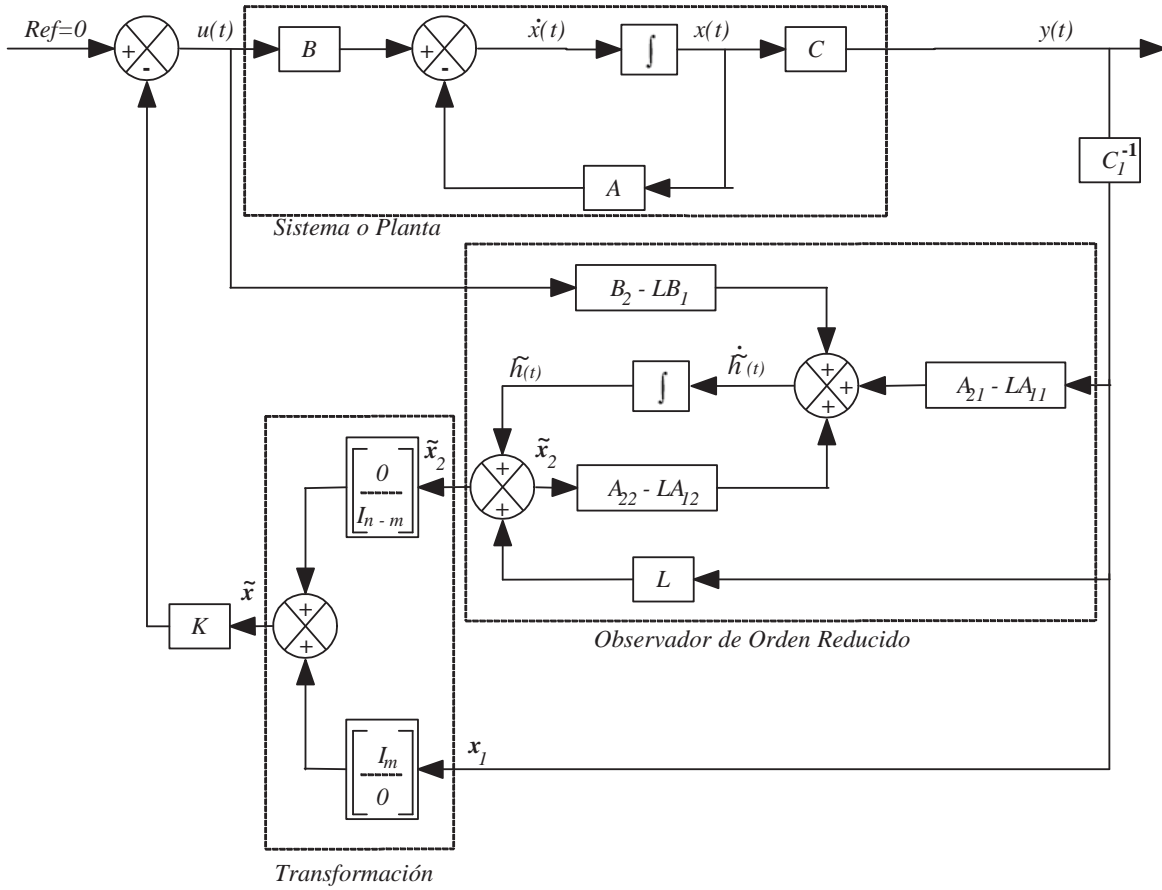


Figura 2.2.: Sistema con realimentación de estado observado, con un observador de orden reducido continuo.

El vector de estados estimado $\tilde{\mathbf{x}}$ se construye como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (2.86)$$

Si se define el error como

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_2 = \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.87)$$

se tiene que la dinámica del error está dada por:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12}) \mathbf{e} \quad (2.88)$$

y donde \mathbf{L} se calcula en el sistema dual $\mathbf{A}_{22}^T - \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{L}^T$ igual que para el observador de orden completo.

Caso en tiempo discreto

La condición para que el sistema dado por las ecuaciones (2.68) y (2.69) sea observable de estado completo, es verificar que la matriz \mathbf{O} de $n \times m$ filas y n columnas es de rango n . Si es posible determinar el estado $\mathbf{x}(0)$ a partir de las observaciones de $y(k)$ sobre un número finito de periodos de muestreo. El sistema es observable si

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

cada transición de estado afecta eventualmente a la salida. [16]

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Observador de orden reducido discreto

En el modelo de espacio de estados de las ecuaciones (2.41) y (2.42) es posible conocer algunas de las variables del vector de estado $x(k)$ directamente. Por tanto, se puede diseñar un observador de estado de orden reducido, donde se estimen únicamente las variables de estado restantes. [16]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (2.90)$$

y con la ecuación de salida

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

donde \mathbf{C}_1 es cuadrada y no singular, por lo que se puede obtener \mathbf{x}_1 directamente con la relación

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{y}(k) \quad (2.92)$$

y si las variables de estado corresponden directamente a las salidas del sistema, se tiene que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{I}$. A partir de la ecuación (2.90) se pueden escribir las ecuaciones para $\mathbf{x}_1(k+1)$ y $\mathbf{x}_2(k+1)$ como

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{G}_{11} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{G}_{12} \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{H}_1 \mathbf{u}(k) \quad (2.93)$$

$$\mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{G}_{21} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{G}_{22} \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{H}_2 \mathbf{u}(k) \quad (2.94)$$

y de la ecuación (2.93) se puede obtener la ecuación de salida dada por:

$$\mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{G}_{11} \mathbf{x}_1(k) - \mathbf{H}_1 \mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{12} \mathbf{x}_2(k) \quad (2.95)$$

donde los términos $\mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{G}_{11} \mathbf{x}_1(k) - \mathbf{H}_1 \mathbf{u}(k)$ corresponden a cantidades conocidas. La ecuación (2.95) se puede reescribir como:

$$\dot{\mathbf{x}}_2(k+1) = \mathbf{G}_{22} \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{G}_{21} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{H}_2 \mathbf{u}(k) \quad (2.96)$$

donde los términos $\mathbf{G}_{21} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{H}_2 \mathbf{u}(k)$ son cantidades conocidas. La ecuación (2.95) describe la dinámica de cambio de las variables que no pueden ser medidas directamente. Para estas variables se puede formular un observador como

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) = \mathbf{G}_{22} \tilde{\mathbf{x}}_2(k) + \mathbf{G}_{21} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{H}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{L} (\mathbf{y}'(k) - \mathbf{C}' \tilde{\mathbf{x}}_2(k)) \quad (2.97)$$

donde $\mathbf{y}'(k)$ son las variables conocidas de la ecuación (2.93) dadas por:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{G}_{11} \mathbf{x}_1(k) - \mathbf{H}_1 \mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{12} \mathbf{x}_2(k) \quad (2.98)$$

y con $\mathbf{C}' = \mathbf{G}_{12}$. Se tiene entonces la ecuación para el observador de orden reducido como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) = \mathbf{G}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2(k) + \mathbf{G}_{21}\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{H}_2\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{G}_{11}\mathbf{x}_1(k) - \mathbf{H}_1\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2(k)) \quad (2.99)$$

Reescribiendo la ecuación (2.99) se tiene:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) = (\mathbf{H}_{22} - \mathbf{LH}_{12})\tilde{\mathbf{x}}_2(k) + \mathbf{H}_{21}\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{H}_2\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{G}_{11}\mathbf{x}_1(k) - \mathbf{H}_1\mathbf{u}(k)) \quad (2.100)$$

donde los términos $\mathbf{G}_{21}\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{H}_2\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{G}_{11}\mathbf{x}_1(k) - \mathbf{H}_1\mathbf{u}(k))$ son conocidos. Sin embargo, en la ecuación (2.100) se tiene el término $\mathbf{x}_1(k+1)$. Para eliminarlo, se reescribe la ecuación (2.100) como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) - \mathbf{Lx}_1(k+1) = (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{LG}_{12})\tilde{\mathbf{x}}_2(k) + (\mathbf{G}_{21} - \mathbf{LG}_{11})\mathbf{x}_1(k) + (\mathbf{H}_2 - \mathbf{LH}_1)\mathbf{u}(k) \quad (2.101)$$

se le suma el término $(\mathbf{G}_{22} - \mathbf{LG}_{12})\mathbf{Lx}_1(k)$ a la ecuación (2.101) y se reescribe como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) - \mathbf{Lx}_1(k+1) = (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{LG}_{12})(\tilde{\mathbf{x}}_2(k) - \mathbf{Lx}_1(k)) + [(\mathbf{G}_{21} - \mathbf{LG}_{11}) + (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{LG}_{12})\mathbf{L}]\mathbf{x}_1(k) + (\mathbf{H}_2 - \mathbf{LH}_1)\mathbf{u}(k) \quad (2.102)$$

y si se considera $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{Lx}_1(k))$ se puede plantear la ecuación (2.102) como:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) = (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{LG}_{12})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{21} - \mathbf{LG}_{11}) + (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{LG}_{12})\mathbf{L}]\mathbf{x}_1(k) + (\mathbf{G}_2 - \mathbf{LG}_1)\mathbf{u}(k) \quad (2.103)$$

La ecuación (2.103) describe la dinámica del observador de orden reducido.

2. Control Óptimo Cuadrático LQR

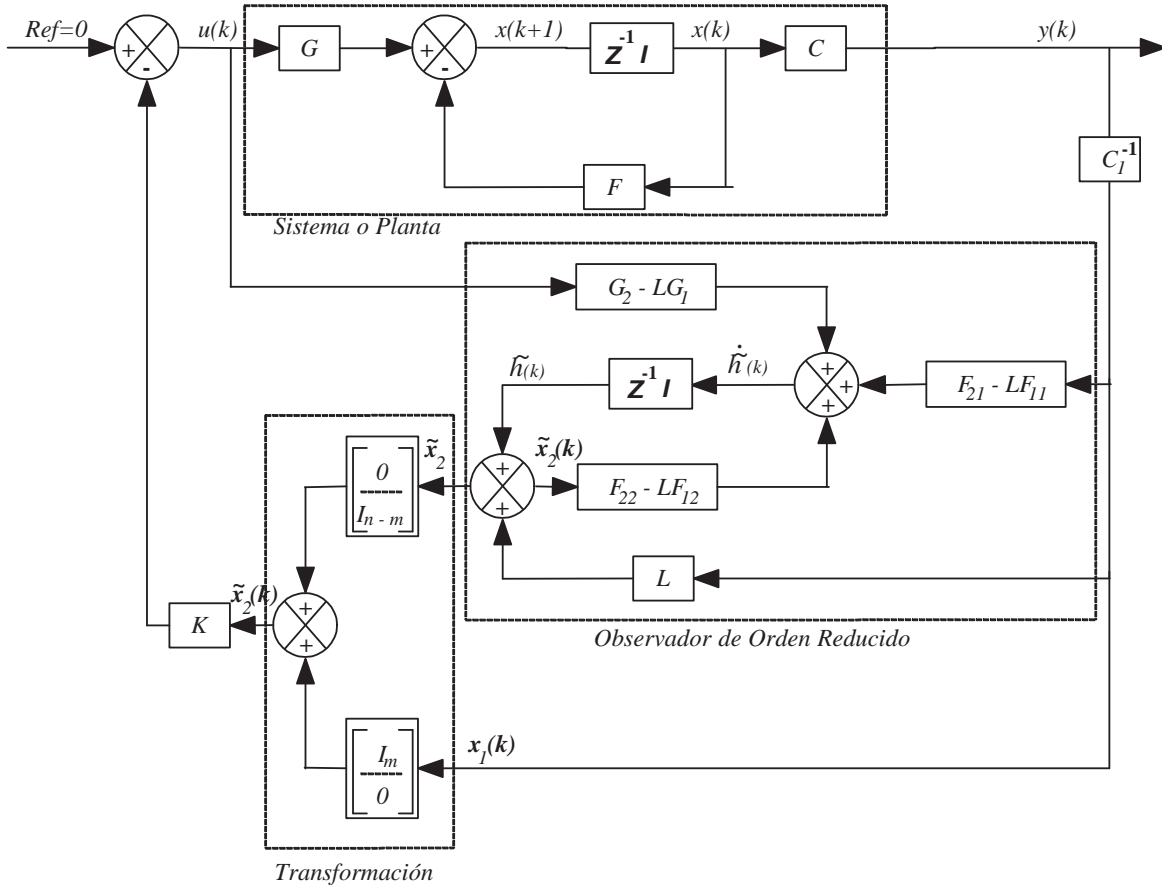


Figura 2.3.: Sistema con realimentación de estado observado, con un observador de orden reducido discreto

En la figura 2.3 se muestra el esquema del observador de orden reducido para el caso de regulación por realimentación de variables de estado de acuerdo a la ecuación (2.103), y donde el vector de estados estimado $\tilde{\mathbf{x}}$ se construye como:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \quad (2.104)$$

Si se define el error como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_2(k) - \tilde{\mathbf{x}}_2(k) = \boldsymbol{\eta}(k) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (2.105)$$

se tiene que la dinámica del error está dada por:

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{G}_{12}) \mathbf{e}(k) \quad (2.106)$$

y donde \mathbf{L} se calcula en el sistema dual $\mathbf{G}_{22}^T - \mathbf{G}_{12}^T \mathbf{L}^T$ igual que para el observador de orden completo.

3. ALGORITMOS GENÉTICOS

Tomando como ejemplo la selección natural de las especies, que dice, la supervivencia de una determinada especie depende en gran medida de la adaptación a un ambiente natural que no siempre es amigable, se hace necesario que los individuos “más fuertes” o mejor adaptados hagan parte fundamental de la evolución de dicha especie y así garantizar la existencia de la misma. La supervivencia de las especies se lleva a cabo haciendo que el material genético de los individuos más aptos sea heredado por su descendencia y a su vez que el número de hijos de estos individuos sea alto en la próxima generación.

Fue Darwin quien planteó la teoría sobre la selección natural y la expone en su libro “Sobre el origen de las especies por medio de la evolución natural” (1859). Estos trabajos fueron complementados por Mendel, con sus aportes acerca de genética introduciendo conceptos claves como: gen, cromosoma y herencia. Permitiendo aclarar y darle fuerza a la teoría de la selección natural de las especies, explicando como se transmiten y se preservan los mejores cromosomas entregados a sus descendientes asegurando así la preservación de su especie.

Los algoritmos genéticos fueron desarrollados por John Holland en 1965. Son algoritmos de búsqueda y optimización usados para resolver problemas matemáticos en los cuales no existe técnicas especializadas para solucionarlos. Estos algoritmos imitan la selección natural de las especies, adaptando los conceptos de la evolución natural al desarrollo de programas de optimización por medio de un computador. Para implementar los algoritmos genéticos se deben tener en cuenta varios conceptos fundamentales que hacen que el desarrollo del algoritmo sea muy aceptable, es decir, aunque la solución encontrada no es la mejor es una solución “óptima” del problema tratado.

Los algoritmos genéticos se hacen fuertes debido a que se trata de una técnica robusta, es decir, difícilmente quedan atrapados en un óptimo local, son muy flexibles; pueden ser aplicados a un sin número de tareas y en diversas áreas. Trabajan con un conjunto de puntos, no con un único punto y su entorno (su técnica de búsqueda es global). Utilizan un subconjunto del espacio total, para obtener información sobre el universo de búsqueda, a través de las evaluaciones de la función a optimizar. Aunque se debe tener en cuenta que el algoritmo genético no garantiza la solución más óptima al problema, se tiene evidencia empírica de que la solución hallada es muy aceptable en un tiempo competitivo con el resto de algoritmos de optimización combinatoria [9, 10, 11, 12].

3.1. Ventajas

- La más importante ventaja de los algoritmos genéticos se debe al paralelismo intrínseco que ellos poseen; lo que les posibilita realizar una búsqueda multidireccional, es decir, le permite explorar el espacio de soluciones en múltiples direcciones al tiempo. Este paralelismo le permite al algoritmo realizar evoluciones explícitas a un número pequeño de individuos mientras realiza una evaluación implícita a un grupo de individuos mas grande. Esto es argumentado por el teorema de los esquemas del cual se fundamenta los algoritmos genéticos para su funcionamiento.
- Permiten realizar búsquedas y evaluaciones en donde el número de soluciones es bastante grande, lo

3. Algoritmos Genéticos

suficiente como para que un método de búsqueda exhaustiva no lo haga en un tiempo razonable, mientras que de los algoritmos genéticos lo harían en un tiempo relativamente pequeño.

- Otra ventaja notable de los Algoritmos genéticos es que se desenvuelven bien en problemas con un paisaje adaptativo complejo; aquéllos en los que la función objetivo es discontinua, ruidosa, cambia con el tiempo o tiene muchos óptimos locales. Los algoritmos evolutivos han demostrado su facilidad de escapar de los máximos locales y encontrar el óptimo global incluso en espacios de soluciones muy complejos.
- Otra característica por la que se destacan los algoritmos genéticos es su habilidad para manipular muchos parámetros simultáneamente.
- Por último los algoritmos genéticos pueden ser implementados sin que se sepa nada del problema al cual se enfrenta, lo que les permite tener un panorama muy abierto de acuerdo al número de soluciones que pueden encontrar. En comparación con otras técnicas que necesitan un punto de partida o información específica conocida a priori, que de entrada descartaran caminos que pueden llevar a soluciones de muy buena calidad o que posiblemente les de solución al problema tratado.

3.2. Desventajas

- Se debe tener en cuenta una muy buena representación de las soluciones candidatas, esta tiene que ser robusta; es decir, debe ser capaz de tolerar cambios aleatorios que no produzcan constantemente errores fatales o resultados sin sentido.
- El problema de cómo escribir la función objetivo debe considerarse cuidadosamente para que se pueda alcanzar una mayor aptitud y verdaderamente signifique una mejor solución para el problema dado. Si se elige mal una función objetivo o se define de manera inexacta, puede que el algoritmo genético sea incapaz de encontrar una solución al problema, o puede acabar resolviendo el problema equivocado.
- También deben elegirse cuidadosamente los otros parámetros de un algoritmo genético; el tamaño de la población, el ritmo de mutación y cruzamiento, el tipo de selección.
- Un problema muy conocido que puede surgir con un algoritmo genético se conoce como convergencia prematura. Si un individuo que es más apto que la mayoría de sus competidores emerge muy pronto en el curso de la ejecución, se puede reproducir tan abundantemente que merme la diversidad de la población demasiado pronto, provocando que el algoritmo converja hacia el óptimo local que representa ese individuo, en lugar de rastrear el paisaje adaptativo lo bastante a fondo para encontrar el óptimo global.
- Finalmente, varios investigadores aconsejan no utilizar algoritmo genético en problemas resolubles de manera analítica. No es que los algoritmos genéticos no puedan encontrar soluciones buenas para estos problemas; simplemente es que los métodos analíticos tradicionales consumen mucho menos tiempo y potencia computacional que los algoritmos genéticos y, a diferencia de estos, a menudo está demostrado matemáticamente que ofrecen la única solución exacta [11].

3.3. Terminología

La terminología empleada por los algoritmos genéticos, procede de la genética y la evolución natural. Entre los términos más empleados se encuentran los siguientes:

Cromosoma

Constituye una posible solución al problema, codificada de una forma adecuada.

Gen

Son los elementos de los que están compuestos los cromosomas.

Alelo

Valor adoptado por un gen determinado dentro del cromosoma.

Población

Conjunto de cromosomas que representan soluciones potenciales al problema, y que son tratadas de forma simultánea por el algoritmo.

Generación

Conjunto de cromosomas que componen la población en un instante t determinado.

Aptitud

También conocida como adecuación. Es una medida de que tan bueno es un cromosoma como solución al problema a resolver.

Individuo

Es empleado en ocasiones representando el mismo concepto que el término cromosoma.

Función de evaluación o adecuación

Función encargada de medir la aptitud de los distintos cromosomas.

Operadores genéticos

Se encargarán de realizar transformaciones oportunas en los cromosomas padres, para obtener la descendencia. Los más empleados son los operadores de mutación y cruce.

Los pasos generales de un algoritmo genético pueden resumirse en:

1. Creación, de forma aleatoria, de la población inicial de cromosomas.
2. Evaluación de la aptitud de cada cromosoma de la población.
3. Si se cumplen las condiciones de finalización, se detiene el algoritmo y se toma el mejor cromosoma como solución al problema. Si no, el proceso continúa.
4. Selección de las parejas de cromosomas que formarán el conjunto de padres de la nueva generación.
5. Aplicación de los operadores de cruce y mutación para obtener una nueva generación de cromosomas hijos.

3. Algoritmos Genéticos

6. Se vuelve al paso 2.

A continuación se dará a conocer los conceptos que se deben tener en cuenta en la implementación de un algoritmo genético [10].

3.4. Representación o codificación

Desde sus inicios los algoritmos genéticos han usado generalmente codificación binaria para los cromosomas, esto se debe a su creador John Holland; quien dio una explicación teórica basada en el teorema de los esquemas que hacen que el paralelismo implícito de estos algoritmos se alto, y de esa manera permitir que mientras se evalúa la aptitud de un individuo se estima de forma implícita la aptitud de un grupo mayor en la población.

Se debe tener en cuenta que dependiendo de la naturaleza del problema la codificación binaria se hace poco eficaz, lo que hace necesario el uso de otras representaciones como lo son: la representación entera y la representación real.

En general, una representación ha de ser capaz de identificar las características constituyentes de un conjunto de soluciones, de forma que distintas representaciones dan lugar a distintas perspectivas y por tanto distintas soluciones.

Ejemplos de los diferentes tipos de representaciones:

- Representación binaria: Cada gen es un valor 1 ó 0.
1 0 1 1 0 1
- Representación entera: Cada gen es un valor entero.
1 0 3 -1 0 4
- Representación real: Cada gen es un valor real.
1,78 2,6 7 0 -1,2 6,5

3.5. Tamaño de la población

El tamaño de la población es un parámetro importante. Un tamaño demasiado pequeño traerá consigo una convergencia demasiado rápida y que ésta se produzca hacia un óptimo local, mientras que un tamaño demasiado grande requerirá un enorme costo computacional.

3.6. Población inicial

Esta población esta conformada por N cromosomas que harán parte de un conjunto de posibles soluciones al problema, codificadas de forma útil para el algoritmo. Normalmente esta se hace creando los genes de los cromosomas de forma aleatoria, haciendo que estos tomen valores al azar.

Los cromosomas deberán contener la información correspondiente a todas las incógnitas del problema, teniendo asociado cada una de dichas incógnitas un número de genes del cromosoma, dependiendo dicho número de la precisión deseada.

La población también puede ser generada partiendo de una técnica heurística o de alguna otra que dé como punto de partida un óptimo local del problema, esto con el fin de acelerar la convergencia del algoritmo.

3.7. Función objetivo o de adaptación

La función de adaptación será la función a optimizar por medio del algoritmo. Mediante la función de adaptación se obtiene una medida de lo adecuadas que son las distintas soluciones al problema. Esta medida se conoce como *aptitud*.

El diseño de una función objetivo depende del conocimiento del problema que se va a resolver, teniendo como regla general que esta función de adaptación refleje el valor del individuo en una forma “real” [8,9,10].

Al evaluar la función de adaptación se debe prestar atención a los individuos o cromosomas que violen las restricciones que pueda presentar el problema, ya que aquí es posible encontrar soluciones factibles y otras no factibles, dependiendo si violan o no dichas restricciones, lo cual conlleva a plantear una serie de formas de tratar el problema:

- No permitir la presencia de cromosomas no factibles, eliminando de la población a aquellos cromosomas que no satisfagan las restricciones. Tiene el inconveniente de eliminar posibles caminos para la convergencia, no permitiendo la presencia en la población de individuos que, si bien no cumplen las restricciones, pueden contener genes con características beneficiosas que serán transmitidas a la descendencia durante la fase de reproducción. Además, en algunos casos puede ocurrir que el algoritmo no sea capaz de obtener soluciones válidas al problema, pues si éstas presentan una probabilidad de ocurrencia baja, no se dispondrá de una forma de hacer converger las soluciones hacia regiones favorables del espacio de búsqueda.
- Permitir la presencia en la población de los cromosomas que infrinjan las restricciones, pero asignándoles una penalización en la función de evaluación. Este método soluciona los problemas mencionados en el punto anterior, presentando a cambio un incremento del costo computacional, ya que se puede perder mucho tiempo en evaluar soluciones no válidas al problema. La forma habitual de aplicar la penalización será mediante la inclusión de un término aditivo en la función de evaluación. Así la función de evaluación $f(x)$ original, se transformaría en otra función de la forma:

$$F(x) = f(x) + Q(x)$$

Donde el término $Q(x)$ representa la penalización.

- Diseñar esquemas de representación y operadores específicos, de forma que todas las posibles soluciones al problema que se generen sean factibles. El problema de este método es que no es de aplicación general. El tipo de representación y los operadores dependerán del problema a resolver. Se deberá comenzar generando una población inicial de soluciones factibles.
- Convertir la solución no válida en otra que sí lo sea, por medio de un algoritmo reparador. Este método también puede requerir un alto costo computacional y será fuertemente dependiente del problema particular a resolver. El buen funcionamiento de este método depende de encontrar una heurística de reparación adecuada. Habrá problemas en los que no resulte viable la reparación de soluciones no factibles.

3.8. Selección

Este operador es el encargado de llevar las características de los mejores cromosomas a través de las siguientes generaciones, basándose especialmente de la función de adaptación para hacer la selección. Los individuos con mayor aptitud son quienes tienen mejor probabilidad de ser seleccionados para reproducirse y darle paso

3. Algoritmos Genéticos

a la siguiente generación. Aunque se debe tener en cuenta algunos cromosomas que se puedan considerar menos aptos (función de adaptación baja) para esta selección; ya que pueden contener alguna característica beneficiosa para generaciones siguientes; por esta razón se debe mantener algunos, además es una buena forma de conservar la diversidad dentro de la población a través de la evolución de la misma y a su vez evitar la convergencia prematura del algoritmo.

A continuación se verán los dos métodos de selección más empleados.

3.8.1. Método de la ruleta o selección proporcional

Este método es aleatorio en donde la probabilidad que tiene un individuo de reproducirse es proporcional al valor de su función de evaluación. Al aplicar este procedimiento durante varias generaciones, se irán eliminando las características de los cromosomas menos aptos, permitiendo que el material genético de aquellos miembros de la población con una aptitud mayor se conserve.

El método de la ruleta consiste básicamente en lo siguiente:

1. Se suman los índices de aptitud de todos los miembros de la población, llamando al resultado aptitud total.
2. Se genera n , un número real aleatorio comprendido entre 0 y la aptitud total.
3. Se selecciona el primer miembro de la población cuya aptitud, añadida a las aptitudes de los miembros precedentes de la población sea mayor o igual que n .
4. Se repite el procedimiento desde el paso 2, hasta obtener el número de padres deseados.

Este método de selección tiene problemas al momento en el cual la población presenta un alto grado de dispersión en la aptitud de los miembros de la misma; un individuo con muy buena función objetivo hace que la probabilidad de selección del resto de menor valor de aptitud se haga remota, ocasionando una rápida convergencia de la población hacia las características de este supercromosoma, que por otro lado no será necesariamente el óptimo global buscado.

Para solucionar este problema, se podría modificar la función de evaluación o adaptación, de forma que diera lugar a resultados más homogéneos y evitando de esta forma el dominio ejercido por unos pocos cromosomas [10].

3.8.2. El método del torneo o selección por concurso

Este método es fácil de implementar y el recurso computacional que usa es relativamente bajo, además al no estar basado directamente en las aptitudes de los cromosomas se evitan algunos inconvenientes que con el método de la ruleta se presentaban. El procedimiento es el siguiente:

1. Se elige de forma aleatoria un número de concursantes de entre los cromosomas que componen la población.
2. Se selecciona como padre al más apto de todos los concursantes.
3. Se vuelve al paso 1 hasta completar la población de padres.

El número de concursantes es un parámetro importante a tener en cuenta al aplicar esta técnica, pues un aumento en el número de concursantes hace aumentar la probabilidad de que los mejores cromosomas

sean seleccionados, con el consiguiente incremento de la presión selectiva. Lo más habitual es utilizar dos concursantes por torneo.

Esta selección permite cierto grado de elitismo, es decir, los mejores van a tener una posibilidad muy alta de reproducirse con la ventaja de evitar una convergencia prematura del algoritmo, permitiendo a su vez tener dentro de la población un grado de diversidad en los cromosomas que la conforman [8, 10].

3.9. Operadores genéticos

Los operadores genéticos son los encargados de obtener los descendientes a partir de los cromosomas padres. Los dos operadores principales son: el cruce o recombinación y la mutación.

Los operadores genéticos pueden aplicarse en forma conjunta, es decir, hacer un cruce y después sobre los cromosomas resultantes realizar mutaciones. O en forma individual; decidiendo de alguna forma qué operador aplicar sobre un cromosoma y aplicar únicamente ese. La aplicación por separado presenta algunas ventajas como: es más fácil de implementar y se puede ampliar la lista de operadores genéticos cuando se trabaja con codificación real.

3.9.1. Operador de cruce

Este es el operador genético principal, permite realizar una exploración de toda la información almacenada hasta el momento en la población y combinarla para crear mejores individuos.

El operador de cruce consiste en elegir dos individuos seleccionados aleatoriamente y generar a partir de ellos dos nuevos individuos donde que parte de los dos cromosomas originales (padres).

Generalmente, cada operador genético tendrá asignado un parámetro con el valor de la probabilidad de ser utilizado. Suponiendo que p_c es la probabilidad de un determinado operador de cruce y N el tamaño de la población, el número esperado de cromosomas que sufrirán cruce será $p_c N$. Para cada cromosoma de la población se generará un número aleatorio $0 \leq r \leq 1$, si $r < p_c$ el cromosoma sufrirá cruce [8, 10, 25].

Cruce en un punto

Es la forma más sencilla de cruce y consiste en elegir un único punto para realizar el cruce. Este operador puede ser aplicado a cromosomas con codificación binaria o real, funciona de la siguiente manera:

1. Se seleccionan dos padres de la población.
2. Se obtiene, de forma aleatoria, un número entero comprendido entre 1 y la longitud del cromosoma menos 1.
3. Se intercambian los genes de los cromosomas padres situados en las posiciones siguientes al número aleatorio obtenido en el paso anterior. Los cromosomas obtenidos serán los cromosomas hijos [8, 10, 25].

Cruce de n puntos

Es una generalización del método anterior. Se seleccionan varias posiciones (n) en las cadenas de los padres y se intercambian los genes a ambos lados de estas posiciones [8, 10, 25].

3. Algoritmos Genéticos

Cruce uniforme

El operador de cruce uniforme también es aplicable tanto a cromosomas con codificación binaria, como a aquellos codificados en forma de números reales. Trabaja de la siguiente forma:

1. Se seleccionan dos padres de la población.
2. Se obtienen, de forma aleatoria, varios números enteros entre 1 y la longitud del cromosoma.
3. Se intercambian los genes de los cromosomas padres situados en las posiciones de los números aleatorios obtenidos en el paso anterior. Los cromosomas obtenidos serán los cromosomas hijos [10].

3.9.2. Mutación

En los inicios se consideraba a la mutación como un operador secundario pero al pasar del tiempo se ha consolidado y ahora se tiene tan en cuenta como el operador de cruce. Este operador aporta diversidad a la población permitiendo la exploración de nuevas regiones en el espacio de búsqueda.

Este operador es aplicable tanto a cadenas de bits como a vectores de números reales. En el caso de la codificación binaria el proceso consiste en reemplazar algunos de los genes de forma aleatoria haciéndolos igual a 1 si su valor original era 0 y viceversa. Por otro lado, en el caso de la codificación en forma de números reales, el procedimiento consiste en seleccionar de forma aleatoria los genes a cambiar y asignarles un nuevo valor también aleatoriamente [8, 10, 25].

Las probabilidades de mutación p_m de un cromosoma se consideran entre el 0,1% y el 5%, siendo estas probabilidades bastante menores a las probabilidades de que se produzca un cruce. La mutación funciona de la siguiente manera:

1. Se elige una tasa de mutación p_m .
2. Se hacen pruebas pasando por todos los genes de todos los cromosomas, generando un número aleatorio. Si este número es menor que la probabilidad p_m entonces se ejecuta la mutación en ese gen.

Se debe tener en cuenta que esta forma de implementar la mutación requiere un costo computacional muy alto para espacios de búsqueda grandes. Aunque se ha desarrollado una forma rápida y práctica de realizar la mutación, esta es teniendo en cuenta el total de los genes de la población. La forma práctica de realizar la mutación es la siguiente:

1. Se elige una tasa de mutación p_m .
2. Se multiplica la tasa de mutación por el número de cromosomas de la población y por la cantidad de genes de cada cromosoma. El número obtenido indica cuantas mutaciones se debe realizar.
3. Se generan números aleatorios entre 1 y el total de genes de toda la población, esto me indica los genes que deben ser mutados. La cantidad de números aleatorios generados debe ser igual al número obtenido en el paso 2.

El coste computacional aplicando el operador genético de la forma anteriormente descrita es bastante bajo y en poblaciones grandes no existe diferencia entre las dos formas de realizar la mutación [8, 10, 25].

3.10. Criterio de parada

Estos criterios indican en que momento se debe dar por terminado la evolución del algoritmo genético, en otras palabras, la solución encontrada es la “óptima” para el problema tratado. Estos criterios son los siguientes:

- En muchos casos se da por terminado el algoritmo al haber realizado un número específico de generaciones.
- Otra opción de parada se da en el momento en el cual la diferencia entre las soluciones obtenidas es muy pequeña, es decir, la población de soluciones es muy homogénea y las posibilidades de evolución son mínimas.
- También puede emplearse un método interactivo, en el que el usuario compruebe la evolución del algoritmo tras un número de generaciones y decida si debe seguir ejecutándose por haber posibilidad de nuevas mejoras.

3.11. Parámetros de un algoritmo genético

El conjunto de parámetros de un algoritmo genético define en gran parte el comportamiento de este. Los parámetros a tener en cuenta son: el tamaño de la población, la tasa de cruce y la tasa de mutación.

Algunos valores recomendados por estudios y experimentos hechos, indican que los valores recomendados para estos parámetros son los siguientes:

- Población: entre 30 y 200 individuos siendo 100 un valor “óptimo”.
- Tasa de cruce: entre 50 % y 100 %.
- Tasa de mutación: entre 0,1 % y 5 %.

3.12. Teorema de los esquemas

Es la justificación teórica del funcionamiento de los algoritmos genéticos. Se debe tener en cuenta la noción de esquema. Los esquemas se construyen tras añadir el carácter comodín (*) al alfabeto de los genes (0 y 1). Un esquema representa a todas las cadenas que tienen, todos los bits que son distintos de *, iguales. Por ejemplo, las cadenas 10100011 y 01100111 están representadas por el esquema $**100*11$ y el esquema $*****$ representa a todos los esquemas de longitud 8.

3.12.1. Orden de un esquema

El orden del esquema S es el número de caracteres con valor 0 o 1, que aparecen en la cadena que compone el esquema, es decir, el número de caracteres del esquema que son diferentes del comodín. Por ejemplo, el esquema $S1 = *01*01*1$ posee orden 5.

La noción de orden es útil para el cálculo de las probabilidades de supervivencia de los esquemas durante las mutaciones.

3.12.2. Longitud de definición de un esquema

La longitud definida de un esquema S es la distancia entre el primero y el último de los caracteres no comodines. Por ejemplo, el esquema $S1 = *10*10*1$ tiene longitud $8 - 2 = 6$.

3. Algoritmos Genéticos

La noción de longitud definida es útil para el cálculo de las probabilidades de supervivencia de los esquemas durante los cruces.

Esquemas con elevado valor de la función de adaptación y pequeña longitud de definición crecen exponencialmente de una generación a la siguiente. Los cromosomas con excelentes esquemas son los principales participantes en la conformación de la nueva generación [8,9,10,25].

4. SINTONIZACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL *LQR* POR MEDIO DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

El desarrollo del modelo del puente grúa presentado en el capítulo de modelado de la planta, demostró que esta clase de sistemas son no lineales; lo cual compromete una mayor dificultad en la búsqueda de una estrategia de control, teniendo que recurrir a la simplificación del modelo del sistema mediante la linealización del mismo, alrededor de un punto de operación, y de esta forma poder utilizar estrategias de control propias de los sistemas lineales multivariados. La estrategia elegida para el control del Puente Grúa fue la ley por realimentación de variables de estados, y el tipo de control que entregará los valores de las ganancias de realimentación que caracteriza esta ley de control fue el *LQR* expuesto en el capítulo del controlador. [15, 16, 18, 24]

El procedimiento para el cálculo del controlador propuesto en el presente trabajo, está sujeto a la determinación de algunos parámetros del mismo, donde se podrá ver más adelante que el criterio del diseñador será esencial en la determinación de estos parámetros.

La verificación de la efectividad del controlador, una vez calculado, es uno de los pilares claves para el procedimiento de diseño. Esta tarea se realiza mediante simulación, cuyos resultados aportan la información necesaria para que se pueda recalcular el controlador con parámetros modificados y mejorar su efectividad. En sucesivas simulaciones, se corrigen y ajustan los parámetros del controlador a partir de los datos suministrados por las señales de salida de la posición y del ángulo dadas por el modelo, las cuales se evalúan en el Algoritmo Genético encargado de las condiciones de diseño y de entregar los valores de los parámetros del controlador que mejoren las respuestas hasta llegar a la mejor solución posible, sujeta a los siguientes criterios de diseño: ($t_{ss} \leq 4s$); ($E_{ss} \leq 10\%$); ($\theta \leq 3^\circ$); ($M_p=0$).

De acuerdo a lo anterior, se puede decir, que el procedimiento de diseño contiene una componente iterativa. La figura 4.1 muestra el diagrama de flujo del proceso de diseño.

El controlador se basa en la técnica *LQR*, y el aporte importante del Algoritmo Genético está en la elección de las matrices *Q* y *R*.

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

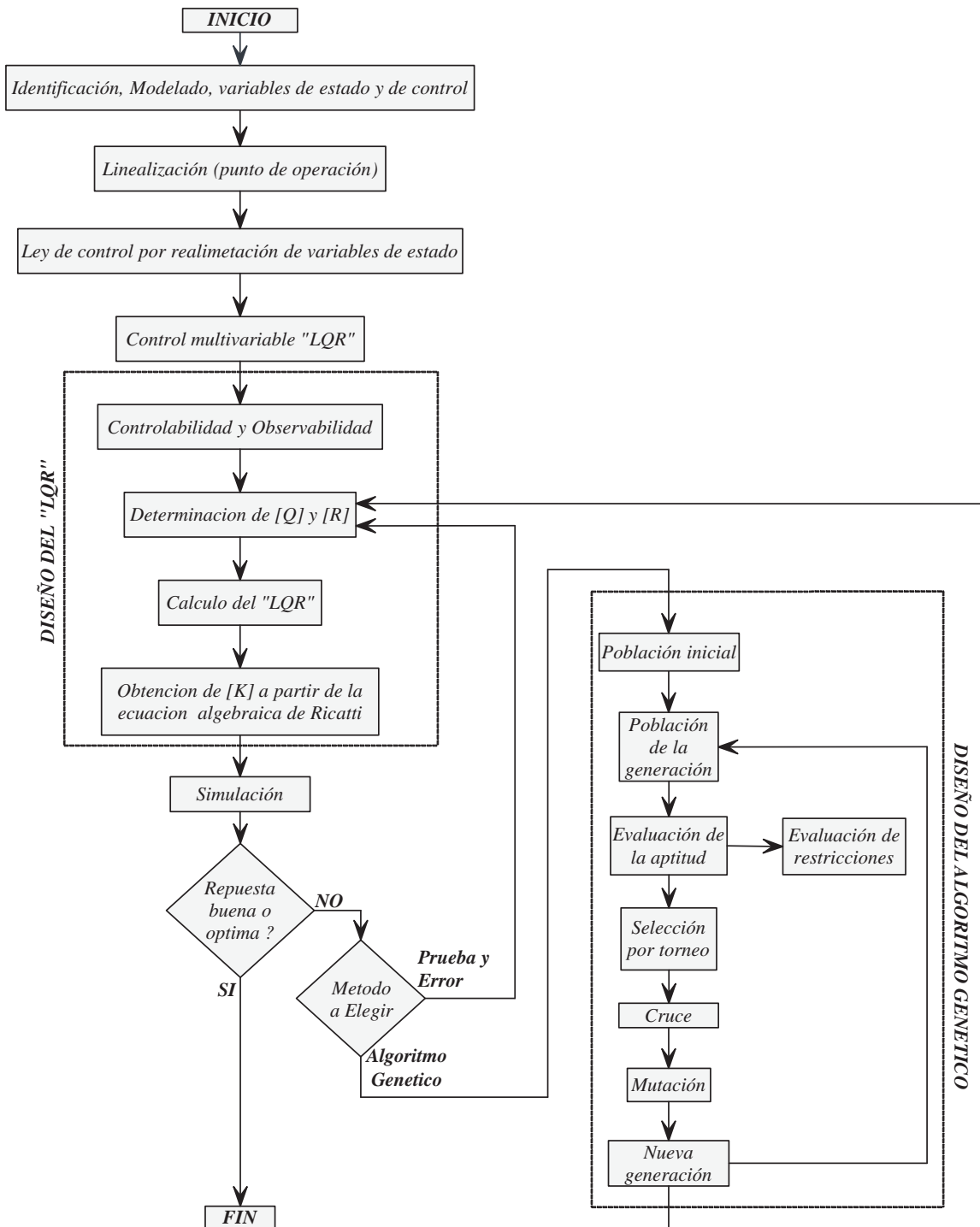


Figura 4.1.: Diagrama de flujo del LQR y Algoritmo Genético

4.1. Procedimiento de diseño del controlador LQR

El esquema de un sistema de realimentación de variables de estado en tiempo continuo y discreto es mostrados en la figuras 4.2 y 4.3

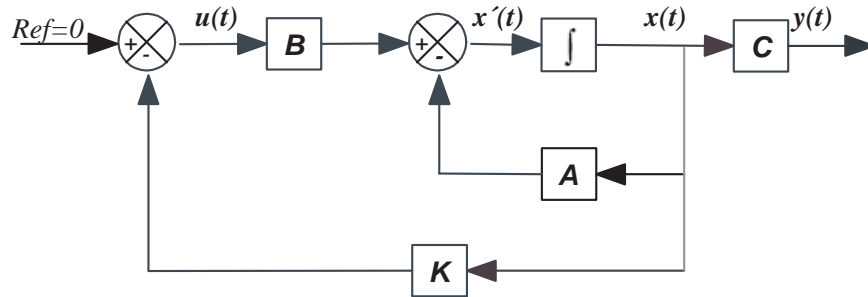


Figura 4.2.: Diagram de bloques del sistema continuo.

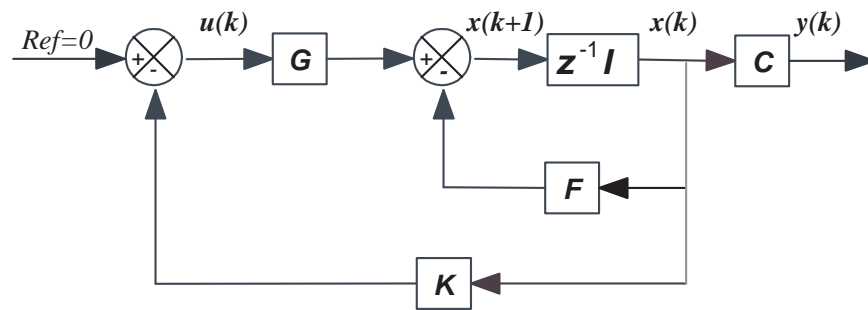


Figura 4.3.: Diagram de bloques del sistema discreto.

El esquema obedece al sistema de ecuaciones lineales en la representación de variables de estado.

Para tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

La ley de realimentación de variables de estado tiene como ecuación característica

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (4.3)$$

en donde si se reemplazamos la ecuación (4.3) en la ecuación (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \quad (4.4)$$

Para tiempo discreto Convirtiendo las ecuaciones para tiempo continuo, en ecuaciones para tiempo discreto,

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

se obtiene la ecuación (4.5):

$$\mathbf{x}(\mathbf{k} + 1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + \mathbf{G}\mathbf{u}(\mathbf{k}) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{k}) \quad (4.6)$$

Las matrices F y G dependen del periodo de muestreo (T_m), el cual se determino en el capítulo de modelado de la planta, al igual que dichas matrices; mientras que las matrices C y D no cambian respecto al modelo en tiempo continuo.

La ecuación que describe la ley de realimentación de variables de estado, es la misma, tanto para tiempo continuo, como para tiempo discreto.

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{k}) \quad (4.7)$$

Si se reemplaza la ecuación (4.7) en la ecuación (4.5), se obtiene:

$$\mathbf{x}(\mathbf{k} + 1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(\mathbf{k}) - \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{k}) = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x}(\mathbf{k}) \quad (4.8)$$

En la figura 4.2 y 4.3, representa la señal de referencia (posición deseada del carro), que para este caso es cero, debido a que solo se esta haciendo regulación ante una condición inicial de $X_0 = -0.5m$. u es la señal de control que se introduce al sistema definido por las matrices $[A, B, C, D]$ para el sistema en tiempo continuo, y para el sistema en tiempo discreto, se tienen las matrices $[F, G, H, J]$. K es la matriz de control, x el vector de variables de estado y el vector que contiene las salidas del sistema.

El paso a seguir es encontrar la matriz de control (K), pero antes se debe cumplir con las dos condiciones exigidas para poder aplicar la ley de realimentación de variables de estados. Las condiciones son que el sistema sea de estado completamente controlable y completamente observable.

Como en el caso de aplicación de este trabajo, el sistema solo tiene dos variables medibles, es necesario observar las otras dos variables, debido a que el modelo de la planta consta de cuatro variables de estado. Para poder cumplir con la condición de observabilidad, es indispensable utilizar un observador de estado, pero como solo se necesita observar dos de las variables de estado, se utilizara un observador de orden reducido, el cual se diseñará más adelante, a partir de la teoría expuesta en el capítulo del controlador.

4.1.1. Controlabilidad y Observabilidad para el modelo del puente grúa

La prueba para determinar la controlabilidad del sistema, para tiempo continuo y discreto, se realiza a partir de las ecuaciones (2.67), y (2.70); las cuales entregan la matriz C y de esta forma verificar que el sistema cumple con la condición de controlabilidad. [15, 16]

Se utilizó la función *ctrb* del toolbox de control de Matlab y luego se evaluó el rango de la matriz de controlabilidad a partir de la función *rank*, el cual da igual al número de variables de estado, así confirmando que el sistema es de estado completamente controlable.

$$\text{Rango}[C]_{\text{continua}} = 4 \quad \text{Rango}[C]_{\text{discreta}} = 4 \quad (4.9)$$

Para la prueba de condición de observabilidad del sistema, para tiempo continuo y discreto, se hace uso de las ecuaciones (2.71), y (2.89), que entregan la matriz O con la cual se puede verificar que el sistema cumple con la condición de observabilidad. Se hizo uso de la función *obs* del toolbox de control de Matlab y luego se evaluó el rango de esta matriz de observabilidad a partir de la función *rank*, el cual da igual al número de variables de estado, así confirmando que el sistema es de estado completamente observable.

$$\text{Rango}[O]_{\text{continua}} = 4 \quad \text{Rango}[O]_{\text{discreta}} = 4 \quad (4.10)$$

4.1.2. Obtención de la matriz $K(t)$

Para encontrar los valores de K , se usara un **Regulador Lineal Cuadrático (LQR)**. Este es un tipo de controlador que utiliza la minimización de un índice de desempeño, el cual resulta de balancear los errores del sistema y el esfuerzo de control, para poder obtener una solución óptima.

Una matriz Q de peso para los estados y una matriz índice de control R , hacen parte del índice de desempeño.

$$J = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \int_0^T (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.11)$$

Este índice de desempeño tiene la característica de ser cuadrático, de manera que una de las soluciones de optimización para esta clase de índices se desarrolla por medio del segundo método de Lyapunov, el cual busca una matriz P que lleve el sistema de un estado inicial a un estado final por la trayectoria óptima, convirtiéndose la demostración final del método de Lyapunov en una ecuación algebraica, denominada ecuación **algebraica de Ricatti**. [17, 20, 21, 22]

A partir de la ley de realimentación de variables de estados de (4.12), se puede encontrar un vector de control óptimo (u); el cual requiere de la realimentación del vector de estados a través de la ganancia variable en el tiempo $K(t)$.

La determinación de la matriz de ganancias de realimentación óptima K de la ecuación (4.13) se puede obtener resolviendo la ecuación de Ricatti para una matriz P definida positiva y teniendo la matriz Q de peso para los estados y la matriz índice de control R , las cuales se obtendrán a partir del algoritmo genético. (La solución de la ecuación de Ricatti se demostró en el capítulo (2)).

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}(\mathbf{t}) \quad (4.13)$$

4.1.3. Índice de desempeño del LQR continuo y discreto o digital

Índice continuo

Al considerar que el intervalo de optimización es infinito, el tiempo T en la ecuación (4.11) es infinito. De

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

manera que la matriz solución de la ecuación de Riccati P es constante y, por tanto, la matriz de control K también es constante. El controlador óptimo es invariante frente al tiempo en régimen estacionario como se expresa en la ecuación (4.12).

La solución de la ecuación de Riccati en régimen estacionario es independiente de la matriz M . Es decir, si se desea calcular la matriz K de control para régimen estacionario, se puede reducir la expresión de la función de coste J de la ecuación (4.11) a la ecuación (siguiente), al poder prescindir del término $[x(T)]^T M x(T)$. En este caso, sólo es necesario definir las matrices Q y R . [17]

$$J = \int_0^T (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.14)$$

El cálculo de la matriz de control K , a partir del modelo en el espacio de estado y una vez definidas las matrices Q y R , es muy sencillo al emplearse el toolbox de control para Matlab.

Índice discreto

La planta a controlar en este trabajo es analógica y, en consecuencia, se ha optado por el desarrollo del control LQR en tiempo continuo que, además de resultar más familiar e intuitivo, facilita su comprensión. No obstante, el control se realiza sobre una plataforma digital. Por esta razón, es necesario detallar las expresiones y el diseño del controlador LQR en tiempo discreto.

Convirtiendo la ecuación del sistema en el espacio de estado en tiempo continuo ecuación (4.1) a tiempo discreto, se obtiene la ecuación (4.5). [16]

La expresión general de función de coste J en tiempo discreto se muestra en ecuación (4.15), la cual se simplifica en la ecuación (4.16) si se considera régimen estacionario ($N \rightarrow \infty$), donde además se verifica que las matrices $Q_d=Q$, $R_d=R$, y $M=0$

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) M x(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k) Q_d x(k) + u^T(k) R_d u(k)) \quad (4.15)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k) Q_d x(k) + u^T(k) R u(k)) \quad (4.16)$$

Al igual que el controlador óptimo es invariante en tiempo continuo en régimen estacionario, para tiempo discreto se cumple de la misma forma, por lo tanto, la matriz de control ($K_d(k)$) es constante. De manera similar que en el caso continuo, para el cálculo del LQR, Matlab incorpora una función que permite calcular el controlador LQR discreto a partir del modelo en tiempo discreto, las matrices de pesos Q y R , y el periodo de muestreo (T_m), haciendo el cálculo del controlador discreto igualmente sencillo que como para el caso continuo.

4.1.4. Determinación de las matrices Q y R .

El cálculo presentado para el controlador LQR no considera ninguna restricción en los valores de las variables de control ni las variables de estado. De manera que cuando por criterio del diseñador se desea introducir restricciones para una o varias variables de estado o de control, sin necesidad de aumentar la complejidad del problema, se pueden tener en cuenta estas restricciones y proponer las matrices Q y R apropiadas para que en ningún caso, se alcancen los límites permitidos de diseño o saturación física de las variables de estado y de control. La determinación de estas matrices puede ser intuitiva en mayor o menor medida dependiendo del control que se quiera sobre cada variable; pero la magnitud de los valores asignados influye decisivamente en

la respuesta de las acciones de control y de los estados.

Será necesario, por tanto, proponer diferentes valores para las matrices Q y R , simular el comportamiento del sistema y escoger aquel control para el cual las variables de control y de estado se mantengan dentro de los límites permitidos de diseño.

Lo primero que se debe tener en cuenta para determinar las matrices Q y R consiste en decidir la configuración que tendrán dichas matrices, esta configuración depende principalmente del orden del sistema, el cual determinara el tamaño de la matriz Q y de la cantidad de señales de control se determinara el tamaño para la matriz R

Las dos configuraciones más importantes para estas matrices tanto para la matriz Q como para la matriz R son:
 Q diagonal

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

R diagonal

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Q completa

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{ij} \\ q_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_{ji} & & & q_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

R completa

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{ij} \\ q_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{ji} & & & r_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

en donde q_{ii} representa el peso que se le da al estado x_i y r_{ii} representa el peso que se le da a la señal de control.

A partir de las configuraciones expresadas anteriormente para la matriz Q y R se escogerá la configuración deseada por el diseñador dependiendo de las variables que desea minimizar.

Para el caso de este trabajo las configuraciones que se implementaran serán las siguientes:

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[R] = [r_1]$$

Q con los elementos de la diagonal y R

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$[R] = [r_1]$$

Q con los elementos de la diagonal, las relaciones de posición-velocidad y ángulo-velocidad angular, y, R

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_5 & 0 \\ q_5 & q_2 & 0 & q_5 \\ q_3 & 0 & q_3 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$[R] = [r_1]$$

Q con todos los elementos y R

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_1 & q_5 & q_6 & q_7 \\ q_5 & q_2 & q_8 & q_9 \\ q_6 & q_8 & q_3 & q_{10} \\ q_7 & q_9 & q_{10} & q_4 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$[R] = [r_1]$$

Los valores de Q y R deben ser siempre positivos o cero. El conocimiento que se posea del sistema resulta fundamental en la selección de estas matrices. Aun así, es conveniente calcular diferentes matrices de control K , con base en distintos valores para las matrices Q y R , y verificar su efectividad mediante simulación.

Una ventaja importante del control LQR es que, independiente al valor de las matrices Q y R , se preserva la estabilidad asintótica y la robustez del controlador.

Para la determinación de las matrices Q y R después de tener en cuenta lo anterior, no existen métodos analíticos simples que ayuden al diseñador a definir los valores que harán parte de dichas matrices, las cuales están en función del sistema, del control que se desee realizar y de los esfuerzos de las variables de control.

4.1. Procedimiento de diseño del controlador LQR

De modo que no existe más opción que proponer unas matrices Q y R , calcular el controlador y comprobar el comportamiento del sistema en lazo cerrado mediante simulación. Luego verificando los resultados, se modifican los valores de las matrices, se recalcula el controlador y se simula de nuevo. Este proceso se repite el número de veces necesario hasta llegar al comportamiento de diseño especificado del sistema. En conclusión, se trata de un proceso iterativo, en donde el conocimiento de la planta, por parte del diseñador puede ser decisivo a la hora de reducir el número de iteraciones. El proceso de simulación, efectuado con una herramienta informática (Matlab), es simple pero puede ser extenso y tedioso en términos de tiempo cuando es necesario realizar un número elevado de simulaciones. Este es probablemente, el principal inconveniente que presenta el diseño del control LQR .

Se buscaron nuevas alternativas para volver el procedimiento anterior más efectivo tanto en tiempo como en diseño; y que a su vez, acotara el espacio de búsqueda de los parámetros del controlador LQR en función de su índice de desempeño. Resultando una técnica de búsqueda y optimización llamada algoritmos genéticos, la cual podía ser programada en función de un índice de desempeño propio ITEA asociado a las respuestas obtenidas de la planta; y a partir de esta optimización ir evaluando diferentes valores de Q y R , los cuales entregarán mediante simulación, los valores de realimentación con los cuales se comprueba el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Se realizará la verificación de estos resultados ante las restricciones de diseño y la minimización del índice de desempeño propio del algoritmo genético. Si los resultados no cumplen en conjunto con los criterios de diseño y la minimización del índice ITAE se vuelven a evaluar otros valores de Q y R pero ya acotados por la iteración anterior, hasta que se cumplan con todos los criterios expuestos.

La implementación del Algoritmo Genético para la búsqueda de los parámetros del controlador, aunque sigue siendo una forma interactiva, ya no es función del diseñador, buscar los valores de Q y R y evaluar. Ahora el Algoritmo Genético se encarga de esta función y a la vez minimiza una función objetivo que permite acotar el espacio de búsqueda internamente de los parámetros del controlador; evaluando al mismo tiempo el desempeño de la planta y parar la búsqueda en el momento que se cumpla con todos los criterios de diseño propuestos, y con la minimización de la función objetivo del Algoritmo Genético que es dependiente de las respuestas obtenidas de la planta.

Es más sencillo hacer las simulaciones del sistema a controlar en tiempo continuo. Sin embargo, la implementación del control se realiza sobre un sistema digital, donde las acciones de control discretas se actualizan cada periodo de muestreo (T_m). Con el objetivo de que las simulaciones respondan de la mejor forma al sistema real en lazo cerrado, es conveniente incorporar el efecto del control digital en las simulaciones, haciendo la discretización del sistema y del controlador como previamente se ha señalado, para adecuar el sistema de control en la simulación. Además, es mejor calcular el controlador en tiempo discreto para el momento en que se va hacer la implementación en el sistema real, debido a que un controlador calculado en tiempo continuo, con simulaciones que no consideran el control digital, puede resultar inapropiado cuando se aplica sobre el sistema real. Porque el tiempo de muestreo el cual se utiliza para controladores digitales hace responder al sistema más lento que en tiempo continuo.

4.1.5. Diseño del observador de orden reducido

El objetivo del control es mantener el valor de θ entre $-5^\circ \leq \theta \leq 5^\circ$, partiendo de un determinado vector de condiciones iniciales. Para realizar el control se eligió la ley de realimentación de estados y la utilización del controlador LQR para la obtención de los valores de la matriz K .

La evolución temporal de las variables de estado y la señal de control, ante un vector de condiciones

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

iniciales dado, serán las que muestren las respuestas del sistema. Como se muestra en el capítulo del controlador, es necesario tener acceso a todos los estados para poder realimentar y cerrar el lazo de control. [15,16,18,24]

En el modelo a escala solo se miden la posición del carro y del péndulo, por lo que es necesario construir un observador de estados que estime el resto de las variables. Pero como solo es necesario estimar dos (2) de las cuatro (4) variables de estado. Se utilizara el diseño del observador de orden reducido, el cual se describió en el capítulo del control óptimo.

Se diseñará el estimador y se incluirá en el lazo de control. Se deben obtener las curvas de evolución temporal de las variables de estado y sus estimaciones. Además se debe comparar el funcionamiento sin y con observador y la influencia del valor inicial del error de estimación.

Este diseño del observador de estados, debe tener una dinámica tan rápida como sea posible, pero sin que resulten valores demasiado grandes para la matriz L , pues ello implicaría amplificar el ruido del sensor de medida de la posición.

Para ello se debe elegir una distancia entre los polos del observador y los del controlador entre 2 y 10. Los polos del estimador deben permitir que el error de estimación tenga un tiempo de asentamiento menor que 0.5s, con una sobreelongación mínima. Sin importar las condiciones iniciales en los estados internos del observador, con el tiempo, los estados estimados que entrega el mismo deberán converger a los reales del sistema.

Un observador que es capaz de llevar el estado de las variables estimas del sistema a cero en un número finito de pasos igual al orden del sistema es denominado "Dead-Beat", o de tiempo de establecimiento finito. el cual permite llevar los polos del sistema en tiempo discreto al centro del círculo unitario, donde esto permite que la ganancia de realimentación del observador lleve las variables estimas a tener un error igual a cero en un tiempo mínimo. Por consiguiente este fue el tipo de metodología que se utilizo para obtener las ganancias de realimentación para el observador de orden reducido en tiempo discreto utilizado en este trabajo para la estimación de las dos variables restantes.

4.2. Contribución del Algoritmo genético para la sintonización del LQR

El algoritmo genético es el encargado de encontrar los parámetros de las matrices Q y R que componen al controlador LQR . Los valores que obtiene el algoritmo son óptimos para el funcionamiento del controlador. El uso de los algoritmos genéticos para este trabajo se llevo a cabo debido a que se trata de un sistema dinámico o variable con el tiempo, además, no se sabe el punto al cual se debe llegar, es decir, el valor de las variables de estado no se conoce y varia con cada nuevo valor de los parámetros de Q y R . A continuación se da una descripción del funcionamiento del algoritmo genético en la consecución de los parámetros de las matrices nombradas anteriormente, en otras palabras, la correcta sintonización para el controlador.

4.2.1. Configuración de los individuos de la población

Cada individuo o cromosoma de la población esta conformado por los valores de la matrices Q y R . La longitud del individuo variará según el número de elementos que constituyan la matriz Q , es decir, si solo se tiene en cuenta las primeros dos elementos de la diagonal de Q , si se considera toda la diagonal de dicha matriz, si está conformada por todos los elementos de la diagonal más las relaciones posición-velocidad y ángulo-velocidad angular o si la matriz Q contará con todos sus parámetros.

4.2. Contribución del Algoritmo genético para la sintonización del LQR

En este trabajo se optó por implementar la codificación o representación real para los cromosomas de la población; por la naturaleza del problema tratado resulta más eficiente dicha codificación, además, los valores de los elementos de las matrices Q y R son valores reales en algunos casos “grandes”, los que en codificación binaria requerirían de muchos bits para ser representados incrementando así el costo computacional.

Q con dos elementos:

Para este caso el cromosoma tiene una longitud de tres genes, dos correspondientes a los elementos de la matriz Q y uno que representa el único valor que tiene la matriz R . El individuo queda definido como $[q_1 \ q_2 \ r_1]$.

Q con los elementos de la diagonal:

El tamaño del cromosoma que se tiene en cuenta en este punto es de cinco genes, cuatro para representar Q y el quinto gen que le da valor a R . El individuo queda definido como $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ r_1]$.

Q con todos los elementos

Se tiene un tamaño del individuo de once genes, diez que representan todos los parámetros de la matriz Q , y el último gen que representa el valor de R . El individuo queda definido como $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ r_1]$.

4.2.2. Población

La población inicial estará conformada por 100 cromosomas creados cada uno en forma aleatoria. El tamaño de la población permanece constante a través del paso y la evolución de las distintas generaciones.

Cada individuo de la población se encuentra definido por la siguiente ecuación, tomando como ejemplo el caso para el cual la longitud de los cromosomas es mayor, es decir, los individuos tendrán un tamaño de once genes.

$$ind_n = rand(1, 11) \cdot (1000 - 0.0001) + 0.0001$$

La matriz que contiene a todos los individuos de la correspondiente generación se define de la siguiente forma:

$$Poblacion = \begin{bmatrix} ind_1 \\ ind_2 \\ \vdots \\ ind_{100} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.2.3. Función objetivo

La función objetivo o de adaptación del algoritmo genético está basada en el índice de desempeño ITAE, contemplando en ella los errores de la posición, el ángulo y la señal de control.

En la función de adaptación se suma los valores de los tres errores obtenidos de la simulación, dándoles peso a cada uno de los errores; con el fin de que los tres tengan un efecto semejante al momento de evaluar dicha función. La función objetivo para el algoritmo es la que se muestra en la ecuación (4.26).

$$J_{AG} = K_p \int_0^t |e_p| dt + K_a \int_0^t |e_\theta| dt + K_u \int_0^t |e_{U(t)}| dt \quad (4.26)$$

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

El algoritmo genético se encarga de encontrar los valores de los parámetros de las matrices Q y R del controlador LQR, logrando que el valor de la función objetivo sea mínimo.

4.2.4. Evaluación

Se hace a cada uno de los cromosomas que componen una población. El método para llevar a cabo la evaluación es sencillo; con cada individuo se construyen las matrices Q y R , con los valores de dichas matrices se obtiene el vector de realimentación de variables de estados K por medio de la ecuación de Ricatti, se evalúa el desempeño del LQR de acuerdo al vector K , se obtiene las señales de salida y de control del sistema, se calcula la función objetivo (aptitud) de acuerdo a la ecuación (4.26). Al terminar el recorrido por todas las generaciones del algoritmo la solución será dada por el cromosoma cuya aptitud sea la más baja, siendo este individuo la solución óptima al problema.

4.2.5. Restricciones

Además de tener una aptitud o valor de función objetivo pequeña, los individuos deben cumplir algunas restricciones. Estas restricciones están determinadas por: los límites de físicos de la planta entregados por el fabricante del puente grúa y, adicionalmente se debe tener en cuenta las restricciones de diseño impuestas, como lo son:

Repuesta transitoria:

Es el tiempo requerido por la señal de salida para alcanzar y mantenerse dentro de un determinado rango alrededor del valor final. Este rango generalmente se especifica en porcentaje absoluto del valor final. Para este caso el tiempo de establecimiento fue fijado en cuatro segundos ($t_{ss} \leq 4s$).

Error de estado estable:

Este error es especificado como un porcentaje del valor final de señal de salida con respecto a una referencia. El error de establecimiento fue impuesto en diez por ciento ($E_{ss} \leq 10\%$).

Oscilación:

La oscilación es el movimiento de un lado a otro de un cuerpo alrededor de un punto de equilibrio. Este punto es uno de los objetivos de este trabajo, la oscilación de la barra esta limitada a tres grados ($\theta \leq 3^\circ$).

Sobrepaso:

El sobrepaso es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo. El valor de sobrepaso para este diseño es cero ($M_p=0$).

4.2.6. Selección

Para el proceso de selección de los cromosomas se escogió el método de selección por torneo; ya que el coste computacional asociado a este método es muy bajo comparado con la ruleta, además, permite cierto grado de elitismo y de diversidad en la población. Los individuos seleccionados serán los padres del proceso de reproducción.

En el método del torneo se escogen dos individuos aleatoriamente, los cuales compiten entre sí, el ganador será el que tenga menor valor de aptitud que es determinada con la ecuación (4.26). El grupo de ganadores

conforman los individuos seleccionados.

El número de torneos realizados es igual al número de individuos que conforman la población, garantizando así que dicha población se mantenga constante.

4.2.7. Cruce

Este es el operador que en gran parte ayudará a la reproducción de los padres anteriormente seleccionados. Debido a que los cromosomas son de longitud relativamente pequeña, se optó por implementar cruce en un solo punto; ya que un cruce en n puntos o un cruce uniforme no proporcionarían buenos resultados. La tasa o probabilidad de cruce p_c aplicada en el algoritmo genético es del 90%, esto quiere decir, que de los cien individuos que conforman la población 90 serán cruzados para darle paso a una nueva población.

Para realizar el cruce, se eligen dos padres al azar de los seleccionados previamente, se genera un número aleatorio si este número es menor que la probabilidad de cruce p_c se continúa con el proceso de reproducción, se crea un número entero aleatorio que se esté entre 1 y la longitud del cromosoma menos 1 y a partir de ese punto se realiza el cruce de los dos padres dándole paso a dos cromosomas hijos. Este proceso se realiza hasta que se tiene de nuevo el número de individuos de la población. Las figuras 4.4 y 4.5 muestran como se hace el cruce de los dos padres.

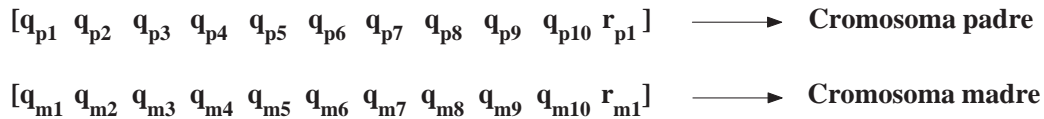


Figura 4.4.: Cromosomas padres.

Suponiendo que el cruce se hace a partir del cuarto gen, se tiene:

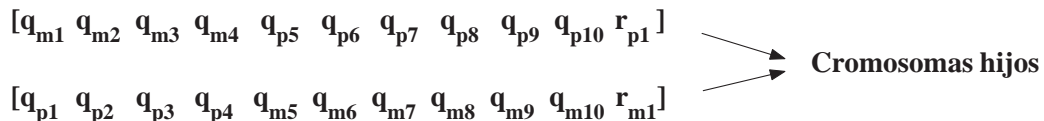


Figura 4.5.: Cromosomas hijos.

4.2.8. Mutación

La mutación es aplicada como un operador de respaldo al cruce, la posibilidad de mutación p_m aplicada es del 10%. Todos los cromosomas resultantes luego de realizarse el cruce serán sometidos a la posibilidad de ser mutados.

Para realizar la mutación se hará un barrido por toda población, se genera un número aleatorio, si ese número es menor que la probabilidad de mutación p_m se ejecutará el proceso de mutación al cromosoma correspondiente, se crea un número entero al azar que corresponde al gen que será mutado, se obtiene un nuevo número al azar comprendido entre (1000 y 0.0001) y este nuevo número reemplazará el gen correspondiente a la mutación. Las figuras 4.4 y 4.5 muestran el proceso de mutación de los cromosomas.

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

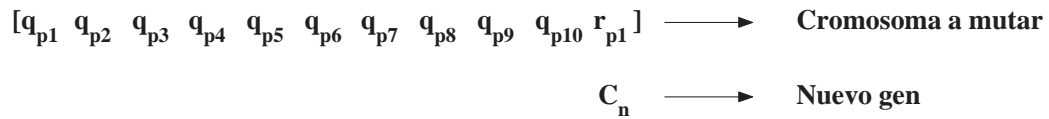


Figura 4.6.: Cromosoma a mutar.

Suponiendo que el cromosoma sufrirá una mutación en el gen nueve, se obtiene la figura 4.7:

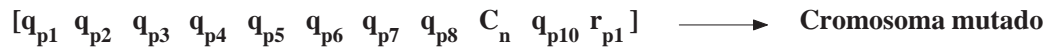


Figura 4.7.: Cromosoma mutado.

4.2.9. Criterio de parada

Para aplicar este criterio se optó por tomar un número determinado de generaciones el cual fue fijado en cincuenta (50), después de experimentar con diferentes valores de dicho número, se concluye que con este se obtiene los mejores resultados del algoritmo.

Las matrices Q y R seleccionadas por el algoritmo genético serán las matrices que al ser evaluadas entreguen un valor de función de adaptación menor descrita en la ecuación (4.26), además, no viole las restricciones de diseño impuestas. En la Figura 4.8 se muestra un diagrama de flujo del algoritmo genético.

4.2. Contribución del Algoritmo genético para la sintonización del LQR

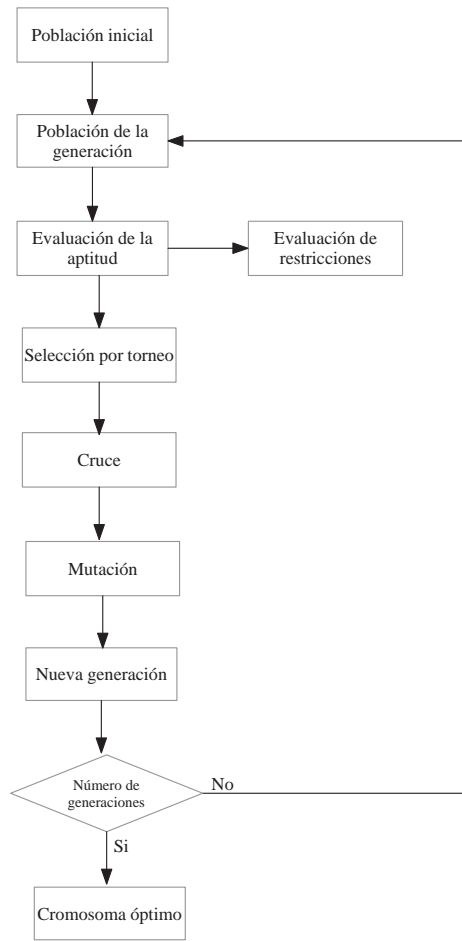


Figura 4.8.: Diagrama de flujo del algoritmo genético.

4. Sintonización de los parámetros del LQR por medio de los algoritmos genéticos

5. RESULTADOS

Los resultados siguientes fueron obtenidos a partir del análisis anterior, con la utilización del modelo presentado en las ecuaciones (1.18) y (1.19) para el caso continuo y de las ecuaciones (1.28) y (1.29) para el caso discreto, el cual fue obtenido a partir del manual del modelo real a escala del “Digital Pendulum Unit 33-200” desarrollado por Feedback Instruments Ltd.

Este capítulo busca probar la eficiencia y eficacia de los métodos previamente mencionados, y permite exponer las simulaciones del control para el sistema del puente grúa ante una condición inicial. También se expondrán los diversos cálculos, respuestas y análisis de los diferentes casos de penalización para las variables de estado, a fin de apreciar las ventajas que ofrecen y de elaborar una comparación general para determinar cual es el mejor enfoque de diseño en cuanto a desempeño ante las diversas variaciones expuestas.

El cálculo de las ganancias utilizadas por la ley de realimentación de estados, se realizó mediante la sintonización del controlador LQR expuesto en el capítulo (2), con la ayuda de un algoritmo genético, el cual fue acondicionado en el capítulo (4), para que por medio de la sintonización este entregara las matrices Q y R , las cuales serian evaluadas por la ecuación de Ricatti perteneciente al controlador LQR , obteniéndose así los valores óptimos del vector de realimentación de estados K , y así poder cumplir con las especificaciones de diseño dadas.

Realizando varias ejecuciones del algoritmo genético para las diferentes penalizaciones, es decir, para las distintas matrices Q expuestas en las ecuaciones (4.21), (4.22) y (4.24), donde se le dan pesos a los estados y teniendo en cuenta el valor de la matriz R , se han obteniendo valores diferentes del índice ITAE, escogiendo así el índice “óptimo” (menor), que a su vez entregaría los valores de Q y R que hacen que la salida sea la mejor ante las restricciones de diseño impuestas al algoritmo genético. Las matrices Q y R obtenidas son las siguientes:

5.1. Respuestas del sistema en tiempo continuo

A partir de las ecuaciones en el espacio de estado continuo, obtenemos el diagrama analógico necesario para realizar la simulación en *MatlabTM-Simulink* figura 5.14

5. Resultados

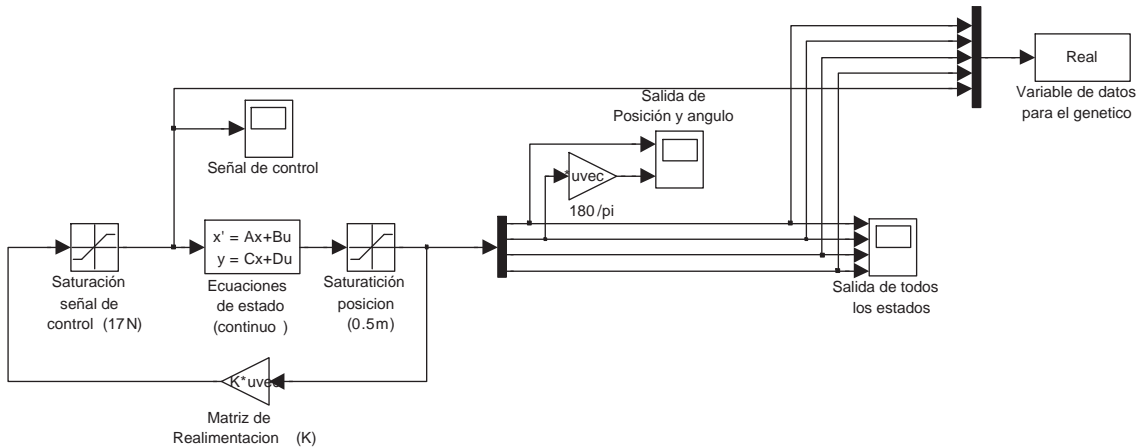


Figura 5.1.: Diagrama analógico para el sistema continuo en Matlab-Simulink.

Los resultados muestran regulación de la posición del puente y del ángulo ante una condición inicial de la posición del carro de $(-0.5m)$.

Las diferentes ejecuciones del algoritmo genético entregaron los valores del índice de desempeño (ITAE) que se muestran en las tablas 5.1, 5.3, 5.5, para los diferentes tipos de penalizaciones. Estos valores son los mismo para tiempo continuo como para tiempo discreto. Luego se escogió los resultados del proceso que tuviera el menor valor de este índice, y en consecuencia la que tenía los valores de las matrices Q y R óptimos para el controlador.

5.1.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R

J_{AG}	Cor1	Cor2	Cor3	Cor4	Cor5	Cor6	Cor7	Cor8	Cor9	Cor10
J	1176	1205	1556	1391	929	1207	1205	1275	851	972
J	1090	1091	823	1095	841	968	898	921	758	573
J	1042	965	754	841	582	889	754	781	706	553
J	788	728	605	688	513	792	647	626	616	
J	736	601	596	578		638	634	568	599	
J		586	531	545		575	601	557		
J		546		537		567		543		

Tabla 5.1.: Resultados de diez ejecuciones del algoritmo genético para posición y ángulo.

La tabla 5.2 muestra el índice de desempeño óptimo y en que generación sucedió.

J_{AG}	Cor5	Generación	Individuo
J	929	1	1
J	841	1	22
J	582	1	65
J	513	13	27

Tabla 5.2.: Resultados óptimos para posición y ángulo.

Los siguientes parámetros de las matrices Q y R penalizan solo dos de las variables de estado: la posición y en ángulo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 32.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 939.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{R} = [5.07]$$

Los polos del sistema en lazo cerrado son

$$-1.9335 + j4.2664 \quad -1.9335 - j4.2664 \quad -0.8050 + j0.8521 \quad -0.8050 - j0.8521$$

El vector de realimentación K se obtiene a partir de la evaluación de la ecuación de Ricatti aplicada por el LQR

$$\mathbf{K} = [2.5433 \quad 9.9635 \quad 3.3301 \quad 1.9265] \quad (5.2)$$

Y el valor del índice de desempeño del genético, ecuación (ITAE) que entrego estos valores de Q y R fue $J_{AG}=513,0634$.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.2, 5.3 y 5.4. De la figura 5.2 se observa un pequeño sobrepaso, ya que al momento de colocar la restricción de sobrepaso en el algoritmo genético en donde se quería que este fuera nulo, el algoritmo genético no convergía, es decir, no encontraba soluciones para el problema, teniendo en cuenta esta restricción. De manera que se optó por incrementar el sobrepaso hasta el 5%. Dando como resultado una respuesta muy aceptable. El tiempo de establecimiento cumplió con los parámetros expuestos en la sintonización, al igual que el error de establecimiento. La figura 5.3 muestra la oscilación de la carga, la cual no excede los 3° impuestos por el diseño. Los objetivos se cumplieron sin que la señal de control realizara un esfuerzo fuera de los límites físicos establecidos por el fabricante.

5. Resultados

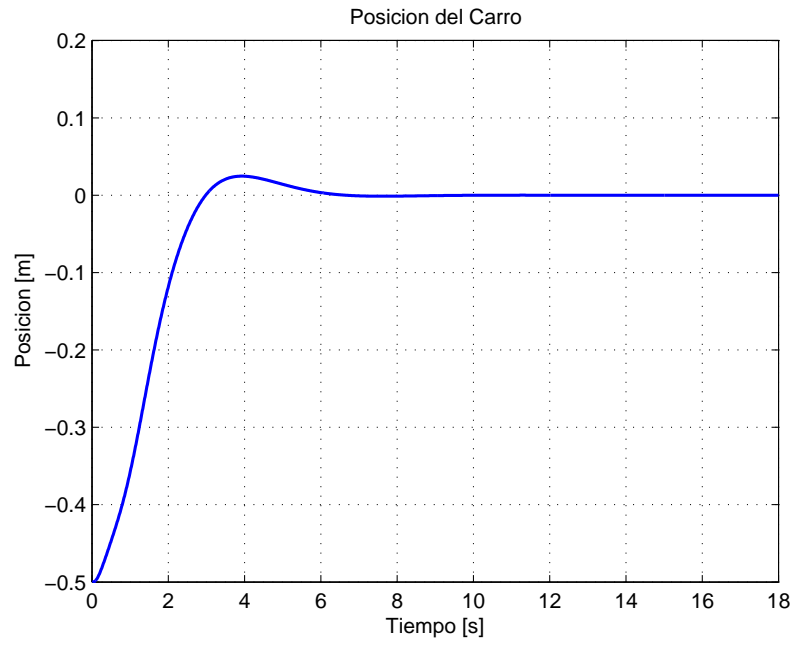


Figura 5.2.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 2 estados

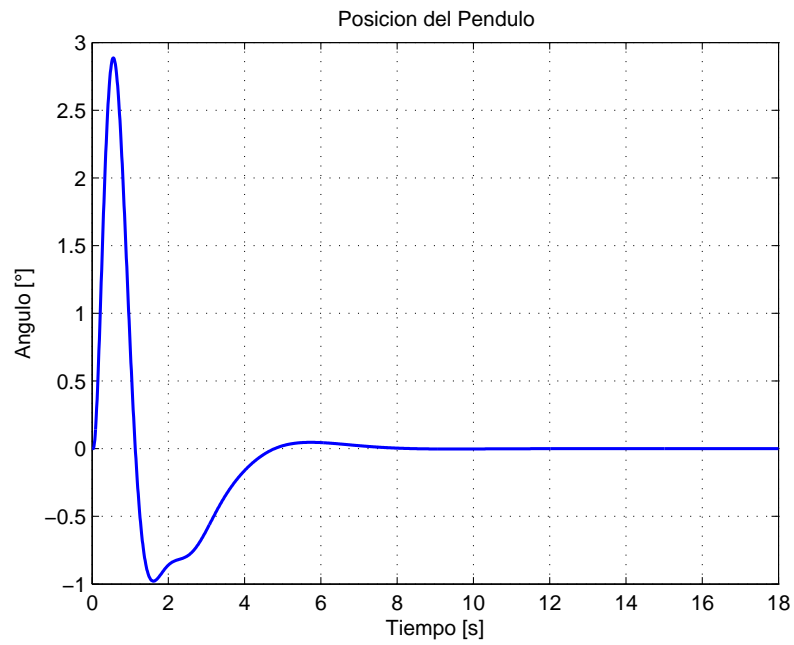


Figura 5.3.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 2 estados

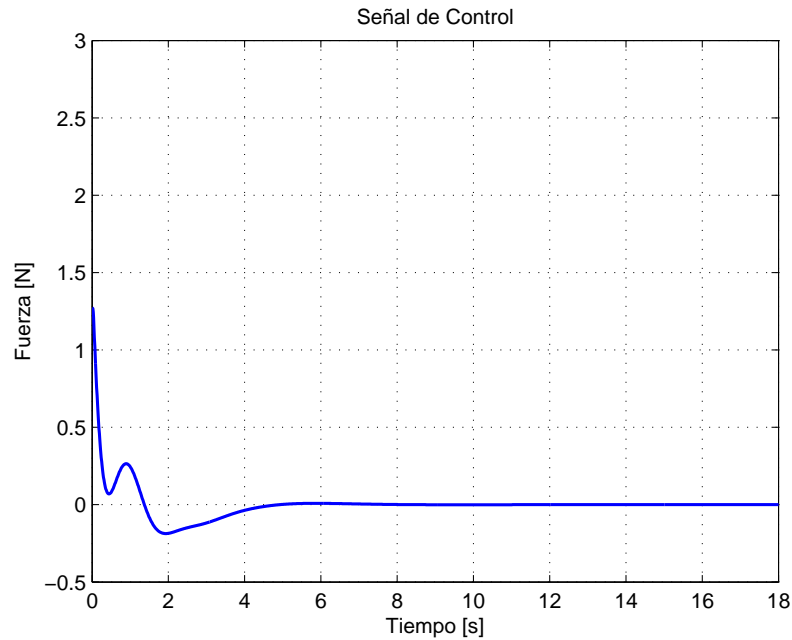


Figura 5.4.: Señal de Control en tiempo continuo penalizando 2 estados

5.1.2. Q con los elementos de la diagonal y R

J_{AG}	Cor1	Cor2	Cor3	Cor4	Cor5	Cor6	Cor7	Cor8	Cor9	Cor10
J	607	1489	1489	1489	1118	705	1761	1215	541	1619
J	550	1079	1079	1079	709	640	914	672	506	644
J	544	899	899	899	628	631	550	544	504	608
J	541	521	521	521	531	570	547	503		573
J	533	491	491	491	480	515	504	488		534
J	498	464	464	464	461	469	494	483		448
J	473				947	462	481	476		

Tabla 5.3.: Resultados de diez ejecuciones del algoritmo genético para posición, ángulo, velocidad del carro y velocidad angular.

La tabla 5.4 muestra el índice de desempeño óptimo y en que generación sucedió.

J_{AG}	Cor10	Generación	Individuo
J	1619	1	10
J	644	1	14
J	608	1	36
J	573	1	64
J	534	1	79
J	448	1	97

Tabla 5.4.: Resultados óptimos para posición, ángulo, velocidad del carro y velocidad angular.

5. Resultados

Los siguientes valores en las matrices Q y R penalizan todas las variables de estado.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 462.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120.90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 312.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 928.87 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{R} = [31.48]$$

Los polos del sistema en lazo cerrado son, en este caso

$$-4.6833 \quad -1.3625 \quad -1.7050 + j2.0524 \quad -1.7050 - j2.0524$$

El vector de realimentación K se obtiene a partir de la evaluación de la ecuación de Ricatti aplicada por el LQR

$$\mathbf{K} = [3.8323 \quad 12.4697 \quad 5.3440 \quad 3.8023] \quad (5.4)$$

Y el valor del índice de desempeño del genético, ecuación (ITAE) que entrego estos valores de Q y R fue $J_{AG}=448.7612$.

Las respuestas obtenidas se presentan en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7. De la figura 5.5 muestra la respuesta de la regulación de la posición del puente ante la condición inicial de $(-0.5m)$, las cuales se obtuvieron a partir de los valores de Q y R mostrados en la ecuación (5.3) donde solo se penaliza las cuatro variables de estado. Estos valores de Q y R fueron entregados por el algoritmo genético, y de la evaluación de estos valores en el LQR , se calculó el vector de ganancias K , los resultados cumplen con las características propias del diseño impuesto; como lo es el sobrepaso ($Mp=0$), un tiempo de establecimiento (t_{ss}) de $4s$ y asociado a este, el error de establecimiento menor al (10%). Además, logrando que la oscilación del ángulo no sea mayor a (3°) como se observa en la figura 5.6.

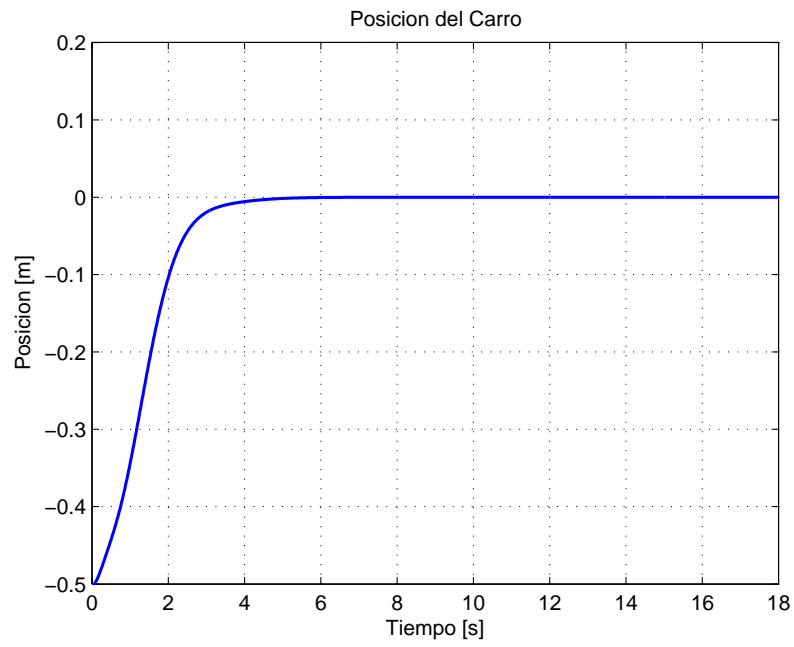


Figura 5.5.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados

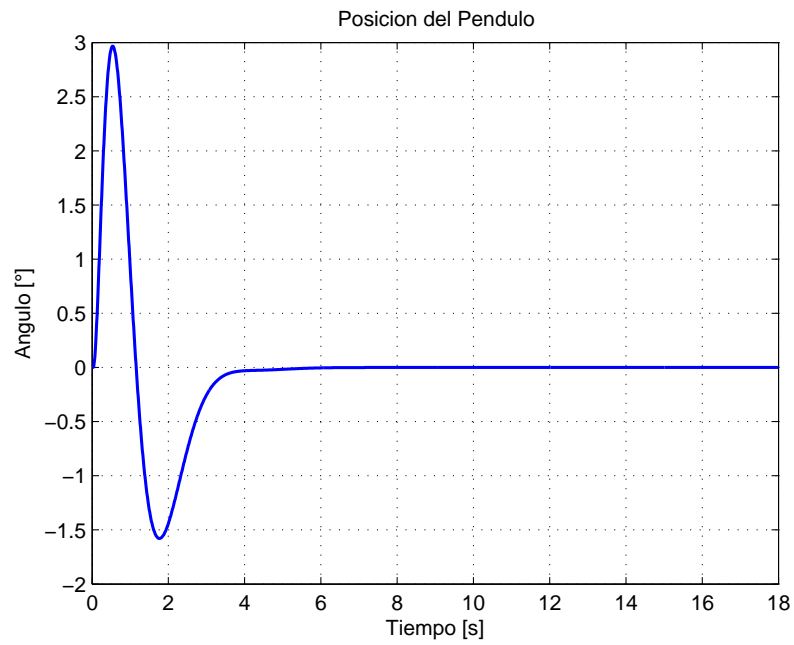


Figura 5.6.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados

5. Resultados

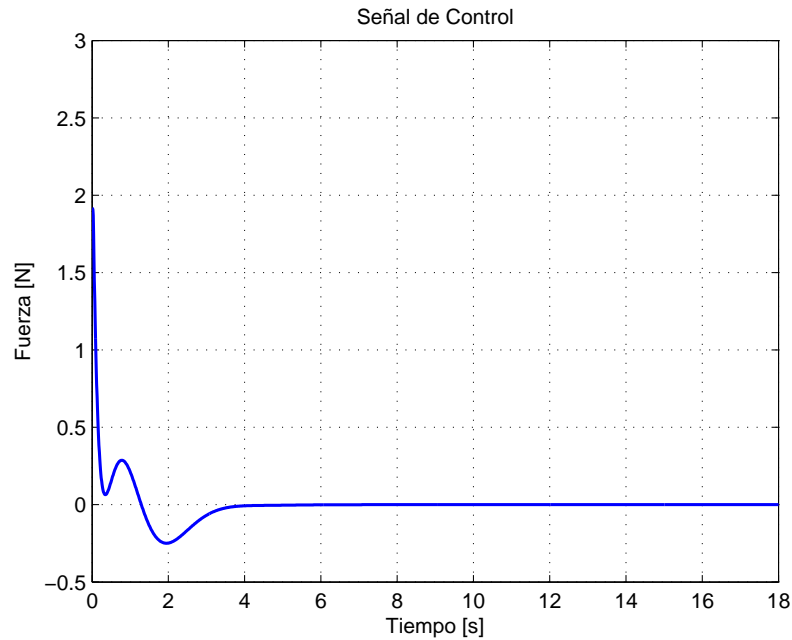


Figura 5.7.: Señal de Control en tiempo continuo penalizando 4 estados

5.1.3. Q con todos los elementos y R

J_{AG}	Cor1	Cor2	Cor3	Cor4	Cor5	Cor6	Cor7	Cor8	Cor9	Cor10
J	1606	522	1854	1687	1915	1112	947	1219	1040	837
J	784	492	1071	1427	1281	892	712	713	565	683
J	720	489	637	644	716	749	639	610	539	670
J	592	947	512	563	638	541	544	518	522	643
J	511	947	486	511	509	484	512	477	519	552
J	488	947	477	486	487	479	475		514	487
J		947	462	481	474		457		504	468

Tabla 5.5.: Resultados de diez ejecuciones del algoritmo genético para posición, ángulo y todas las relaciones.

La tabla 5.6 muestra el índice de desempeño óptimo y en que generación sucedió.

J_{AG}	Cor7	Generación	Individuo
J	947	1	1
J	712	1	7
J	639	1	53
J	544	1	92
J	512	4	27
J	475	36	57
J	457	47	71

Tabla 5.6.: Resultados óptimos para posición, ángulo y todas las relaciones.

Estos parámetros de Q penalizan las variables de estado y los productos entre ellas.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 509,50 & 165,90 & 267,06 & 253,23 \\ 165,90 & 987,85 & 946,86 & 57,28 \\ 267,06 & 946,86 & 425,47 & 57,24 \\ 253,23 & 57,28 & 57,24 & 984,40 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{R} = [29,48]$$

Los polos del sistema en lazo cerrado son, en este caso

$$-6.0403 \quad -1.2099 \quad -1.5517 + j2.0823 \quad -1.5517 - j2.0823$$

El vector de realimentación K se obtiene a partir de la evaluación de la ecuación Ricatti aplicada por el LQR

$$\mathbf{K} = [4.1571 \quad 14.1506 \quad 5.9087 \quad 4.1478] \quad (5.6)$$

Y el valor del índice de desempeño del genético, ecuación (ITAE) que entrego estos valores de Q y R fue $J_{AG}=457,2944$.

Las respuestas obtenidas se muestran en las figuras 5.8, 5.9 y 5.10. De la figura 5.8 muestran la respuesta de la regulación de la posición del puente ante la condición inicial de $(-0.5m)$, las cuales se obtuvieron a partir de los valores de Q y R mostrados en la ecuación ecuación (5.5) donde se hace penalización de todas las variables de estado y las relaciones que se establecen entre ellas, estos valores de Q y R fueron entregados por el algoritmo genético, y de la evaluación de estos valores en el LQR , se calculó el vector de ganancias K , los resultados cumplen con las características propias del diseño impuesto; como lo es el sobrepaso ($Mp=0$), un tiempo de establecimiento (t_{ss}) de 4s y asociado a este, el error de establecimiento menor al (10%). Además, logrando que la oscilación del ángulo no sea mayor a (3°) como se observa en la figura 5.9.

También se puede observar que las figuras tiene un comportamiento muy parecido aunque se halla penalizado en un caso, solo cuatro estados y para en el otro todos los estados y sus relaciones; de lo que se puede concluir que lo más importante es la penalización de los cuatro estados según las restricciones impuestas.

Las figuras 5.4, 5.7 y 5.10 muestran la señal de control dentro de los límites expuestos por los parámetros del fabricante.

5. Resultados

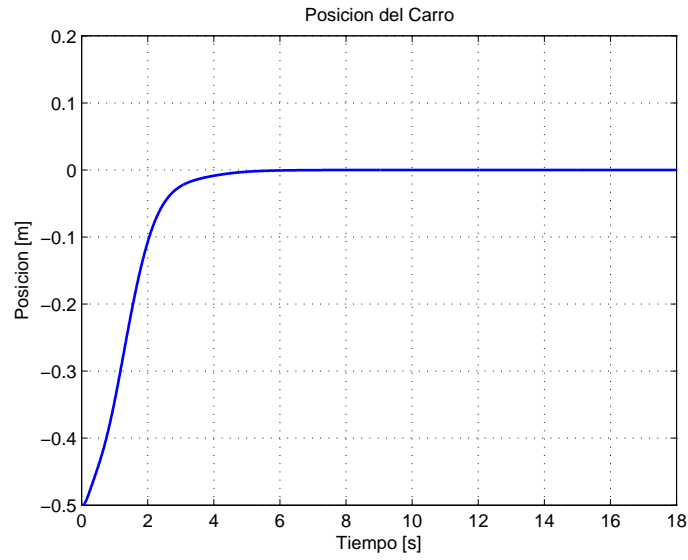


Figura 5.8.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus productos

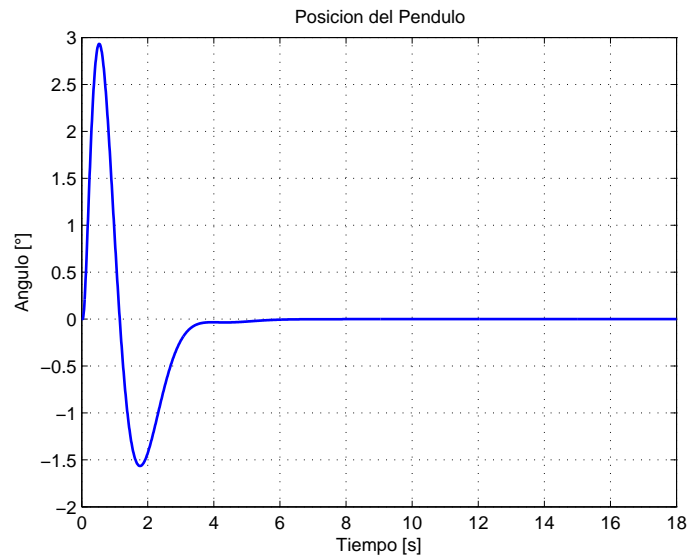


Figura 5.9.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones

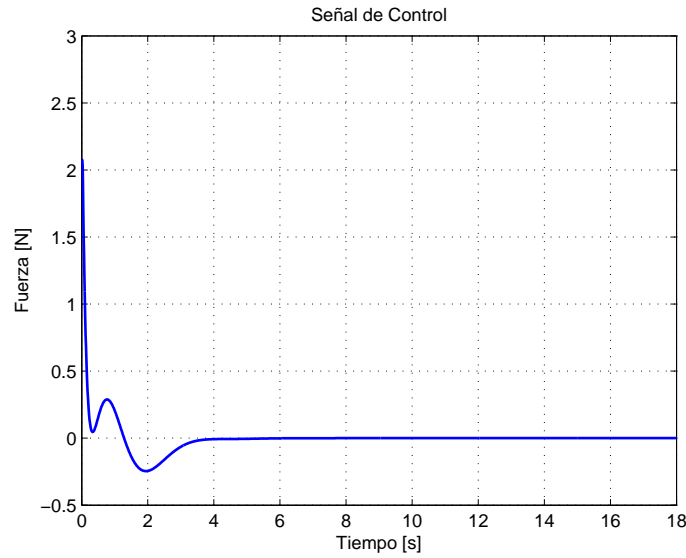


Figura 5.10.: Señal de Control en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones

5.1.4. Evolución del genético para la matriz Q completa y R

A continuación se muestra gráficamente la evolución que tuvo el algoritmo genético para encontrar los valores de Q y R con los cuales se llega a las mejores respuestas en el tiempo (respuesta óptima), mostradas en las figuras 5.11, 5.12 y 5.13 para el sistema planteado.

	J_{AG}	Iteración
J_1	947.34	1
J_2	712.15	7
J_3	592,73	83
J_4	503,47	334
J_{5Opt}	457,29	4671

Tabla 5.7.: Índices de evolución del algoritmo genético para la solución penalizando los estados 4 y sus relaciones.

La figura 5.11 muestra como mejora la respuesta de la posición del carro por medio de la evolución que realiza el algoritmo genético por el paso de las diferentes generaciones y en la búsqueda de la respuesta óptima, tanto en tiempo de respuesta como en minimización del error. De la figura 5.12 se aprecia que lo que es respuesta óptima para la posición no lo es para el ángulo, aunque este cumple con la restricción que dice que dicho ángulo no sea mayor a tres grados (3°). La señal de control en todo momento de la evolución del algoritmo se encuentra dentro de los límites de diseño entregados por el fabricante del puente grúa, esto se observa en la figura 5.13.

5. Resultados

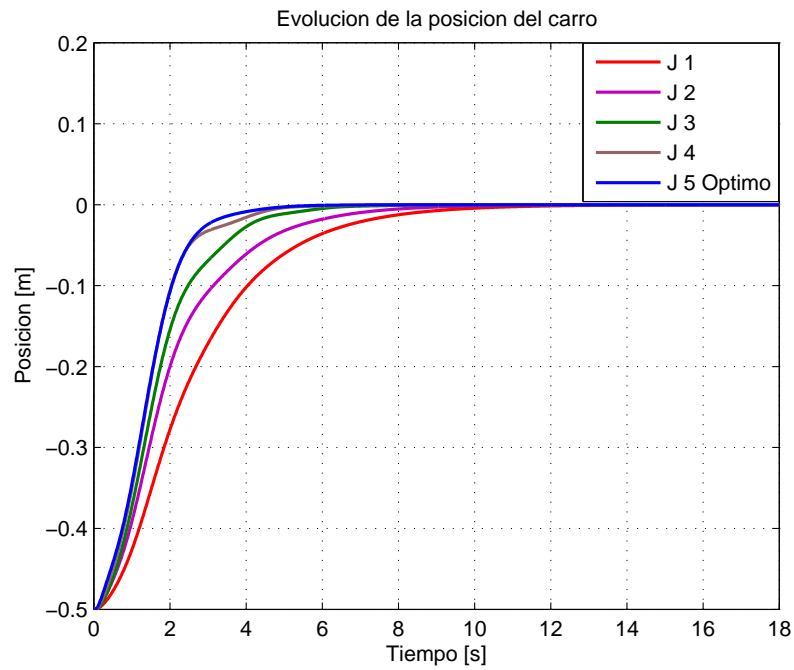


Figura 5.11.: Evolución de la posición del carro en tiempo continuo para penalización de los 4 estados y sus relaciones.

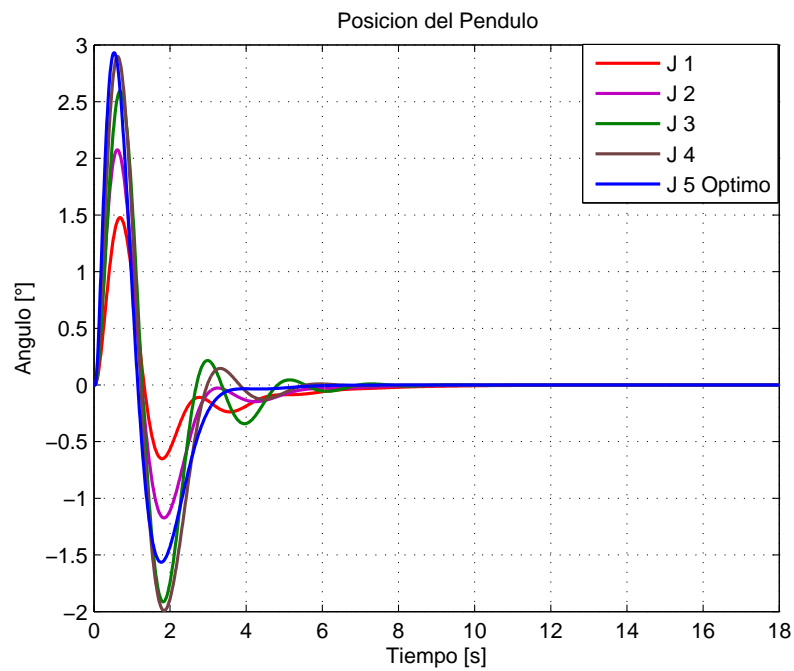


Figura 5.12.: Evolución de la oscilación en tiempo continuo para penalización de los 4 estados y sus relaciones.

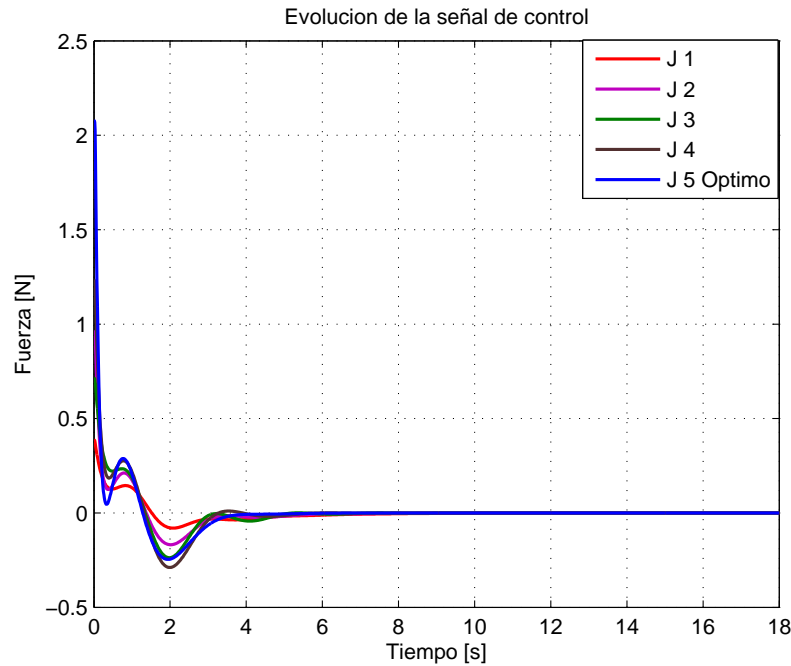


Figura 5.13.: Evolución de la Señal de Control en tiempo continuo para penalización de los 4 estados y sus relaciones.

5.2. Respuestas del sistema en tiempo discreto

A partir de las ecuaciones en el espacio de estado discreto, obtenemos el diagrama analógico necesario para realizar la simulación en *MatlabTM-Simulink* figura 5.14

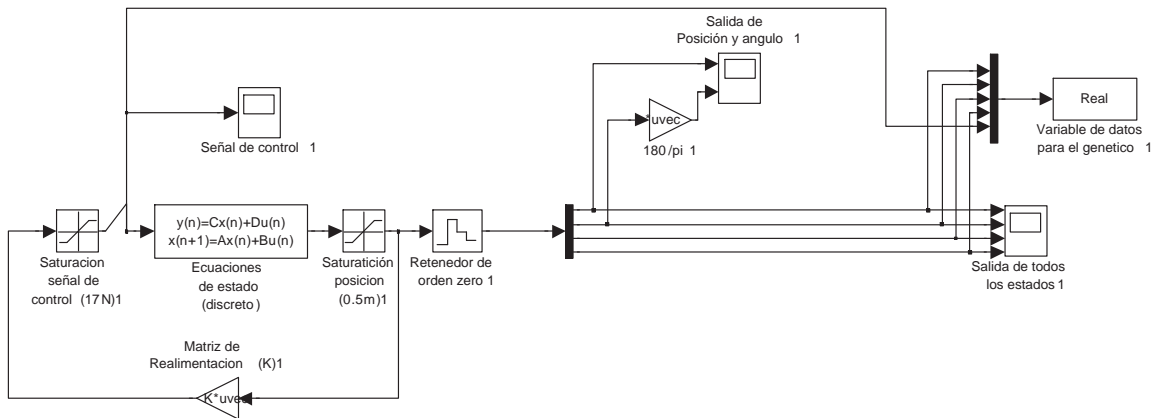


Figura 5.14.: Diagrama analogico para el sistema discreto en Matlab-Simulink.

Los siguiente resultados son para el sistema en tiempo discreto, por consiguiente se toma el modelo de la planta discretizado de las ecuaciones (1.28) y (1.29), el tiempo de muestreo definido en el capítulo (1) al igual que el controlador discreto de la ecuación (4.7) el cual nos entregara los valores del vector de realimentación K discretos. Teniendo en cuenta que la robustez del controlador nos permite tener los valore de las matrices Q y R

5. Resultados

en tiempo discretos iguales que en tiempo continuo, no es necesario que estas se discreticen y serán las mismas que las utilizadas en el apartado anterior para los diferentes casos. Estos resultados muestran regulación de la posición del puente y del ángulo ante una condición inicial de la posición del carro de $(-0.5m)$.

5.2.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R

Los siguientes parámetros de las matrices Q y R ya mostrados en (5.1) penalizan solo dos de las variables de estado: la posición y en ángulo.

El vector de realimentación K se obtiene a partir de la evaluación de la ecuación de Ricatti aplicada por el LQR

$$\mathbf{K} = [2.2359 \quad 8.0463 \quad 2.9791 \quad 1.8976] \quad (5.7)$$

Y el valor del índice de desempeño del genético, ecuación (ITAE) que entrego estos valores de Q y R fue $J_{AG}=513,0634$.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.15, 5.16 y 5.17. De la figura 5.15 se observa un pequeño sobrepaso, ya que al momento de colocar esta restricción el algoritmo genético en donde (se quería que este fuera nulo), el algoritmo no encontraba soluciones para el problema. De manera que se optó por incrementar el sobrepaso hasta el (5%). Dando como resultado una respuesta muy aceptable. El tiempo de establecimiento cumplió con los parámetros expuestos en la sintonización, al igual que el error de establecimiento. La figura 5.16 muestra la oscilación de la carga, la cual no excede los (3°) impuestos por el diseño. Los objetivos se cumplieron sin que la señal de control realizara un esfuerzo fuera de los límites físicos establecidos por los parámetros dados por el fabricante.

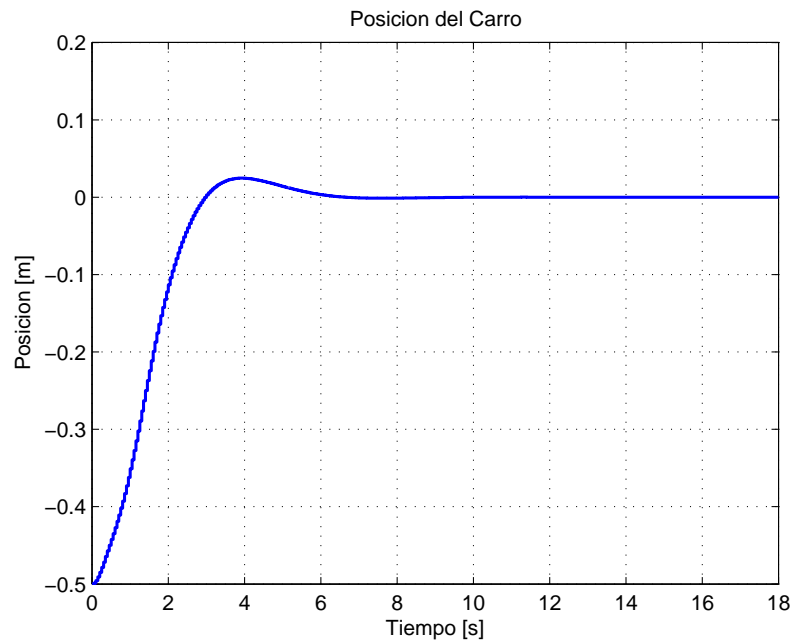


Figura 5.15.: Posición del carro en tiempo discreto penalizando 2 estados.

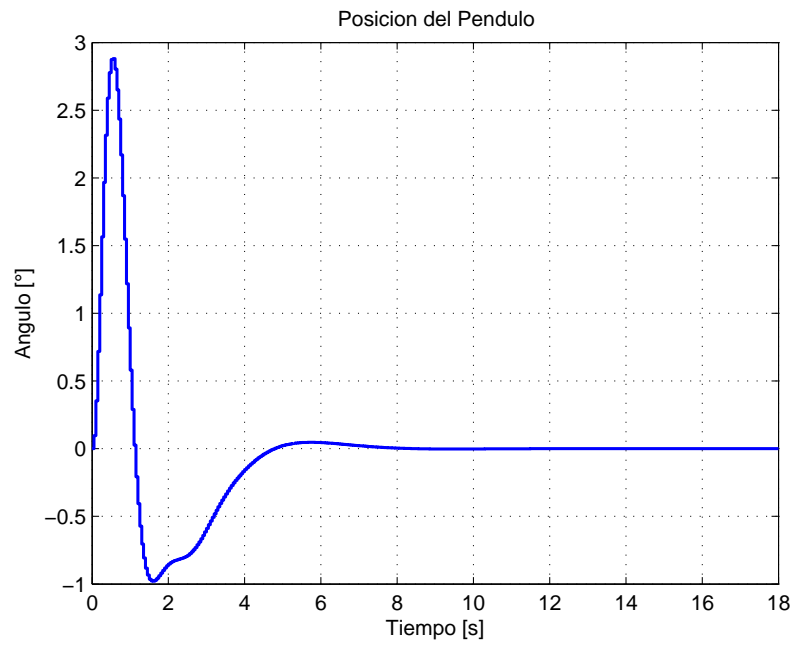


Figura 5.16.: Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados.

5. Resultados

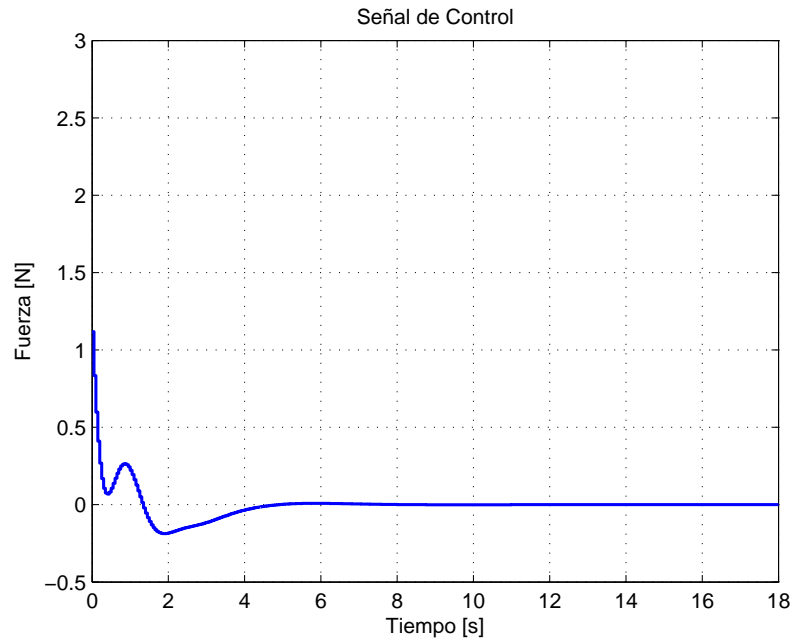


Figura 5.17.: Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados.

5.2.2. Q con los elementos de la diagonal y R

Los siguientes valores en las matrices Q y R mostrados en (5.3) penalizan todas las variables de estado.

El vector de realimentación K se obtiene a partir de la evaluación de la ecuación de Ricatti aplicada por el LQR

$$\mathbf{K} = [3.0531 \quad 8.6138 \quad 4.3294 \quad 3.2601] \quad (5.8)$$

Y el valor del índice de desempeño del genético, ecuación (ITAE) que entrego estos valores de Q y R fue $J_{AG}=448.7612$.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.18, 5.19 y 5.20:

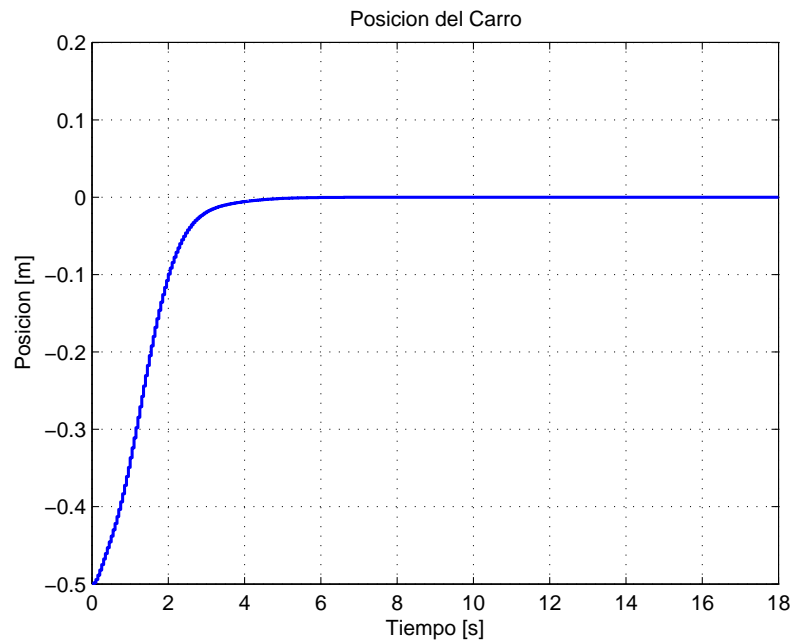


Figura 5.18.: Posición del carro en tiempo discreto penalizando 4 estados.

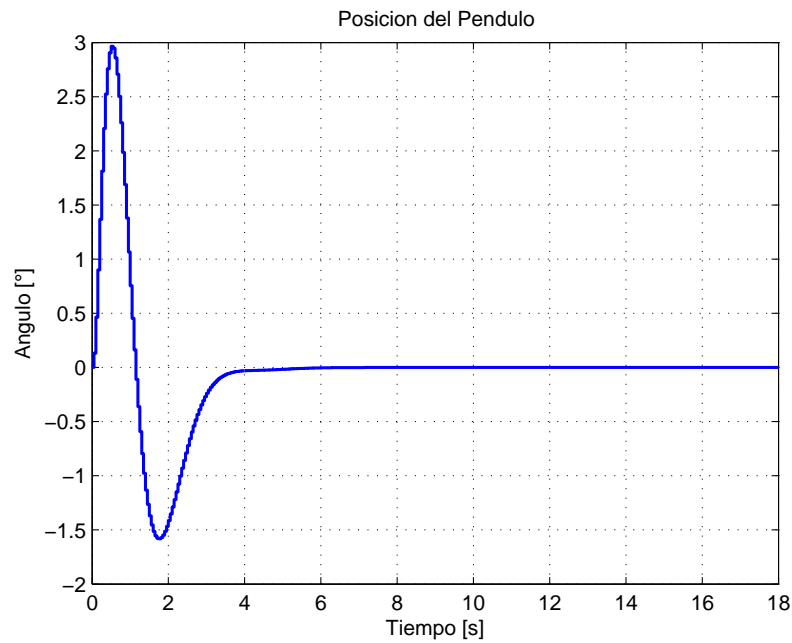


Figura 5.19.: Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados.

5. Resultados

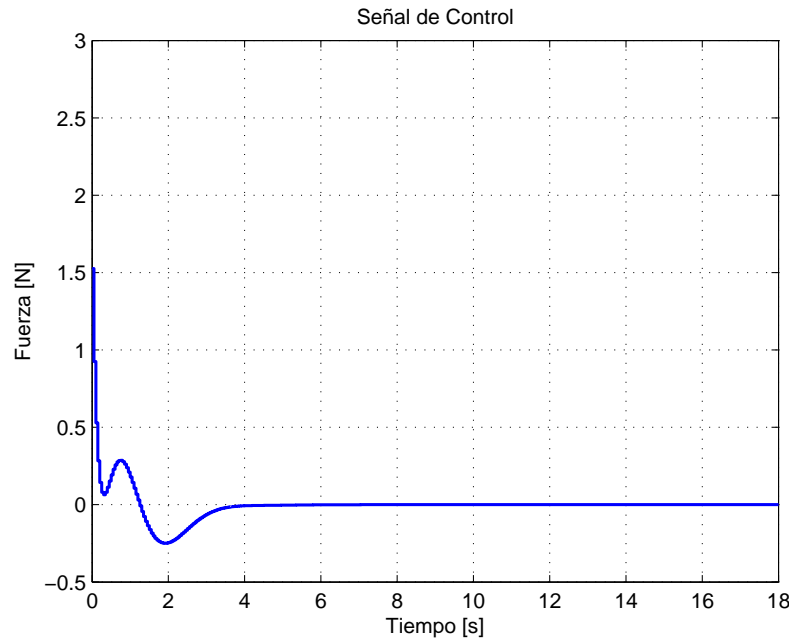


Figura 5.20.: Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados.

5.2.3. Q con todos los elementos y R

Estos parámetros de Q mostrados en (5.5) penalizan las variables de estado y sus relaciones con las demás variables de estado.

Los polos del sistema en lazo cerrado son

$$0.7418 \quad 0.9413 \quad 0.9202 + j0.0964 \quad 0.9202 - j0.0964$$

El vector de realimentación K se obtiene a partir de la evaluación de la ecuación Ricatti aplicada por el LQR

$$\mathbf{K} = [3.2397 \quad 9.6035 \quad 4.6818 \quad 3.4927] \quad (5.9)$$

Y el valor del índice de desempeño del genético, ecuación (ITAE) que entrego estos valores de Q y R fue $J_{AG}=457,2944$.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.21, 5.22 y 5.23. Las gráficas 5.18 y 5.21 muestran la respuesta de la regulación del puente ante la condición inicial de $(-0.5m)$, las cuales se obtuvieron a partir de los valores de Q y R mostrados en la ecuación (5.3) donde solo se penaliza las cuatro variables de estado y en la ecuación (5.5) donde se hace penalización de todas las variables de estado y las relaciones que se establecen entre ellas, estos valores de Q y R fueron entregados por el algoritmo genético, y de la evaluación de estos valores en el LQR , se obtuvo el vector de ganancias K , donde este permite obtener las figuras 5.18 y 5.21 las cuales muestran características propias del diseño impuesto; como lo es el sobrepaso ($Mp=0$), un tiempo de establecimiento ($t_{ss}=4s$) y asociado a este, el error de establecimiento menor al (10%). Además, logrando que la oscilación del ángulo no sea mayor a (3°) como se observa en las figuras 5.19 y 5.22. También se puede observar que las gráficas tiene un comportamiento muy parecido aunque se halla penalizado para unas, solo los

estados y para las otras todos los estados y sus relaciones; lo cual da a entender que lo mas importante es la penalización de los estados como tal.

Las figuras 5.17, 5.20 y 5.23 muestran la señal de control dentro de los limites expuestos por los parámetros del fabricante.

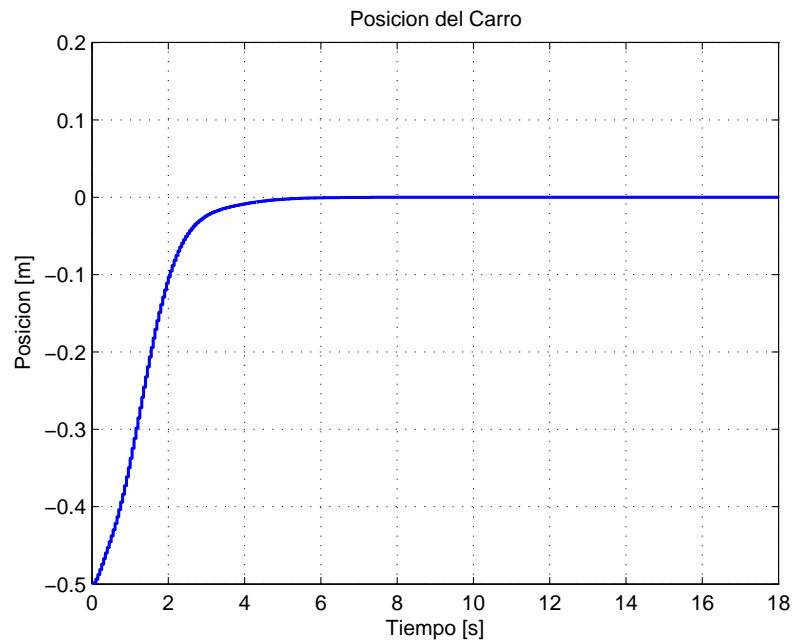


Figura 5.21.: Posición del carro en tiempo discreto penalizando 4 estados y sus relaciones.

5. Resultados

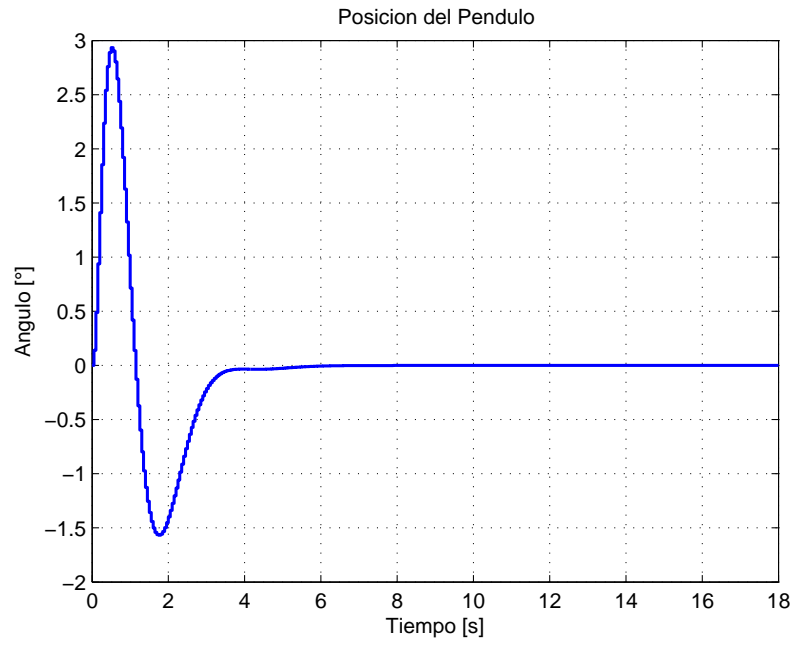


Figura 5.22.: Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados y sus relaciones.

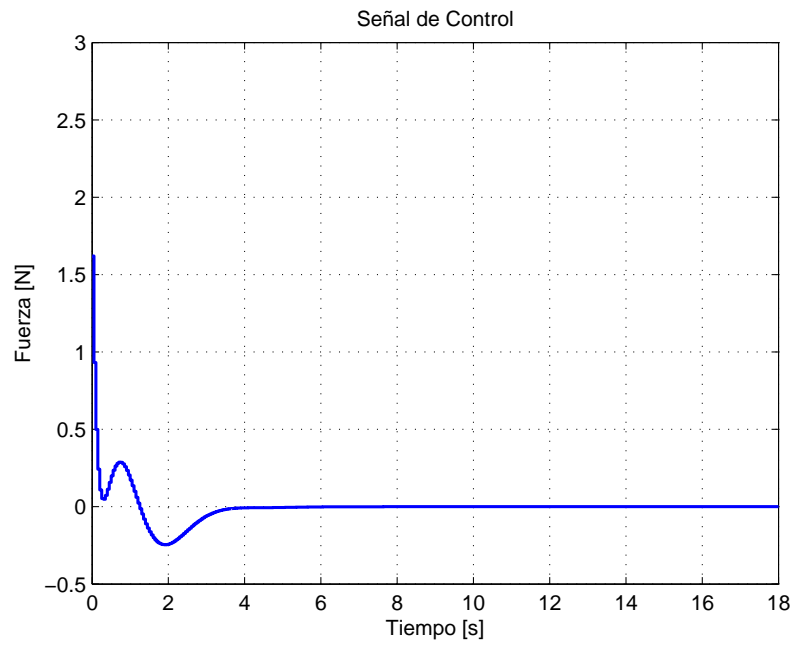


Figura 5.23.: Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados y sus relaciones.

5.3. Respuestas del sistema en tiempo continuo con observador de orden reducido

En esta sección se mostrara los resultados, a partir de los datos mostrados en la sección *Respuestas del sistema en tiempo continuo*, pero utilizando el observador de orden reducido, a partir del diseño expuesto en el capítulo de sintonización, de manera que la ganancia de realimentación se hallo corriendo los polos del sistema en lazo cerrado 10 veces hacia la izquierda en el plano S . obteniendo así las respuestas para los diferentes caso de penalización de los estados.

A partir de las ecuaciones en el espacio de estado para el sistema con observador reducido en tiempo continuo, se obtiene el diagrama analógico necesario para realizar la simulación en *MatlabTM-Simulink* (figura 5.24)

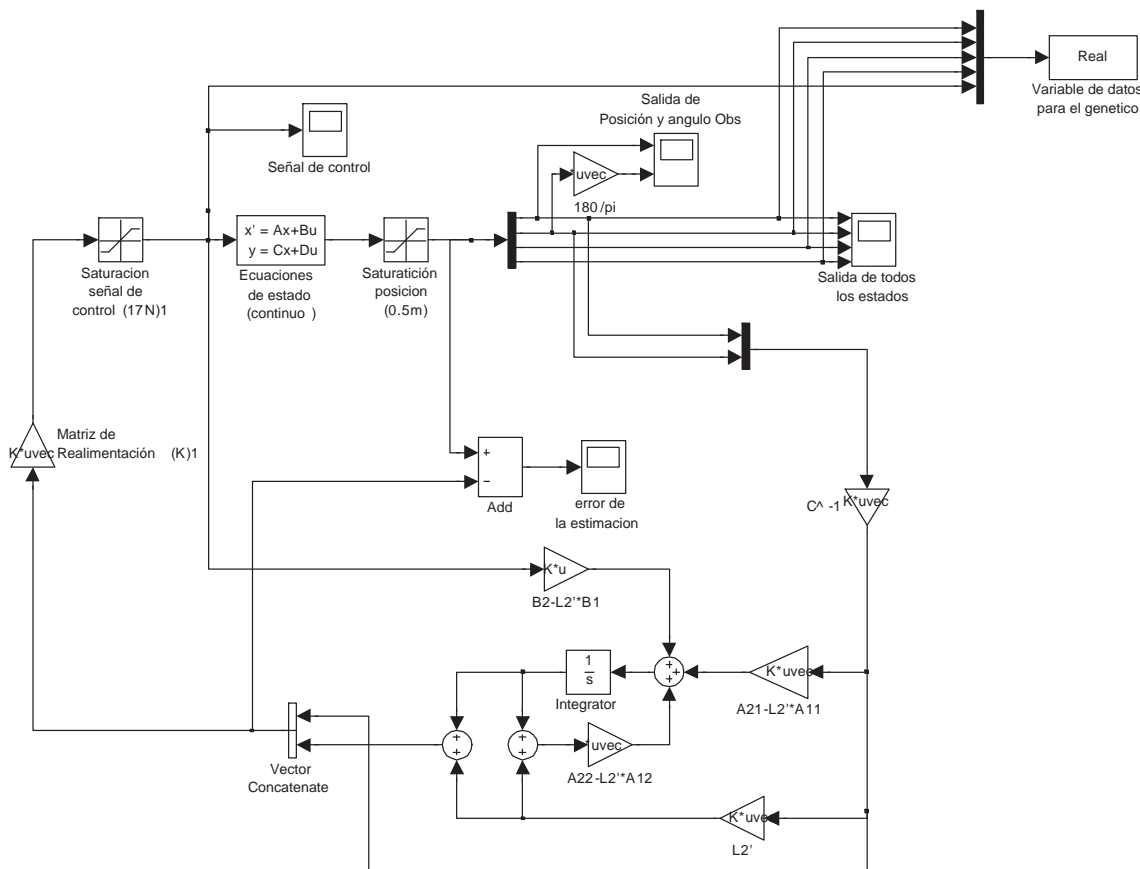


Figura 5.24.: Diagrama analógico para el sistema discreto en Matlab-Simulink.

5.3.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R

Estos parámetros de Q penalizan solo dos de las variables de estado: la posición y en ángulo. Los polos se ubica en:

$$-8.0504 + j8.5209$$

$$-8.0504 - j8.5209$$

5. Resultados

La matriz de realimentación del observador L es

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8.0079 & 8.4604 \\ -8.5293 & 7.7746 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.25, 5.26 y 5.27. En la figura 5.25 se nota un sobrepaso mayor que el obtenido al realimentar las variables de estado directamente, también se debe tener en cuenta la saturación en la señal de control. Este sobrepaso más grande es debido al error de estimación de las dos variables estimadas variables. La figura 5.26 muestra que la oscilación de la carga, es mayor que la mostrada sin el observador, de igual manera esto es debido al error de estimación. Pero este incumplimiento de los criterios de diseño es de duración muy corta ya que el diseño del observador se hizo de tal manera que este respondiera en menos de 1s para obtener las respuestas muy similares a las obtenidas sin el observador.

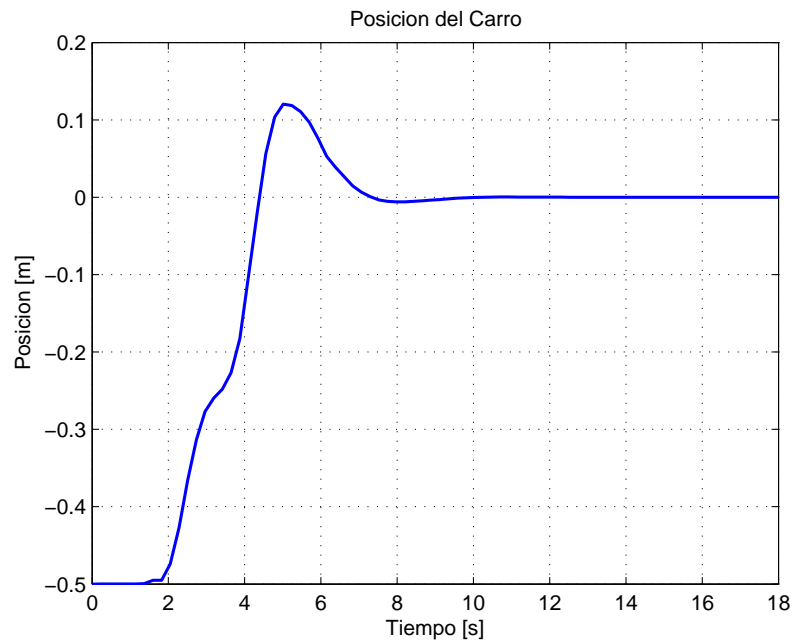


Figura 5.25.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 2 estados para el observador reducido.

5.3. Respuestas del sistema en tiempo continuo con observador de orden reducido

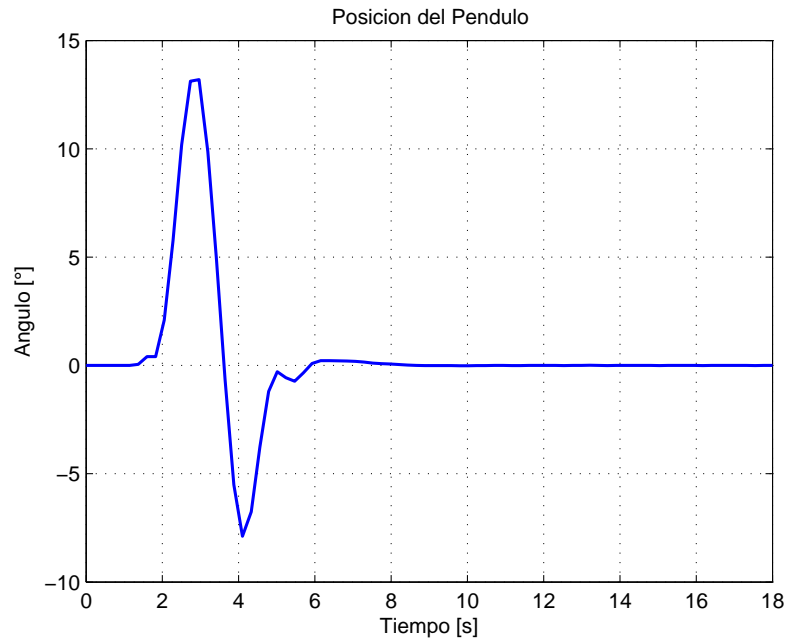


Figura 5.26.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 2 estados para el observador reducido.

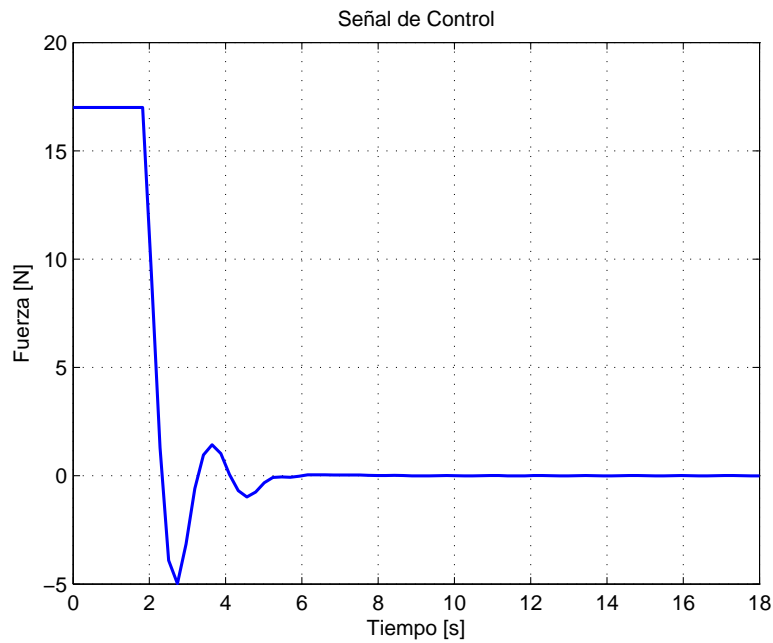


Figura 5.27.: Señal de Control en tiempo continuo penalizando 2 estados para el observador reducido.

5. Resultados

5.3.2. Q con los elementos de la diagonal y R

Estos parámetros de Q penalizan todas las variables de estado.

Los polos se ubica en:

$$-17.0501 + j20.5244$$

$$-17.0501 - j20.5244i$$

La matriz de realimentación del observador L es

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 17.0076 & 20.4640 \\ -20.5329 & 16.7744 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.28, 5.29 y 5.30:

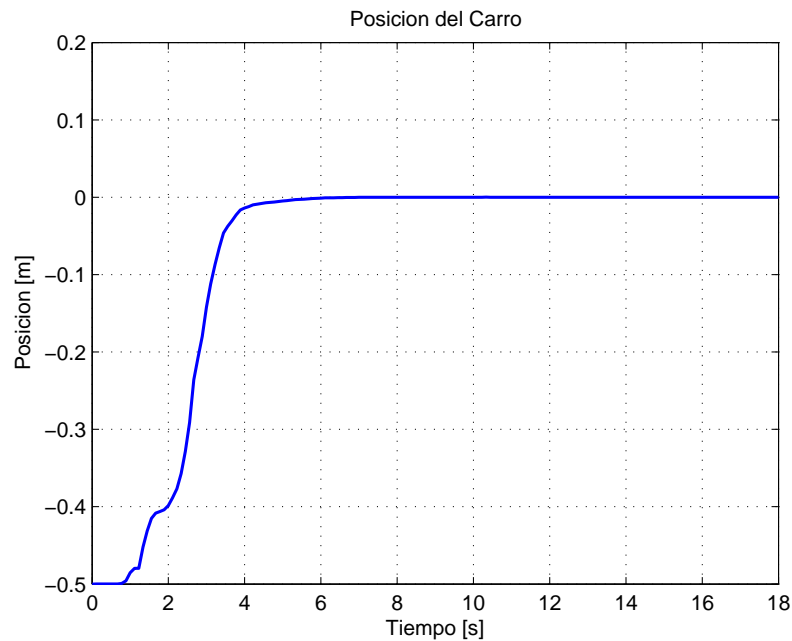


Figura 5.28.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados para el observador reducido.

5.3. Respuestas del sistema en tiempo continuo con observador de orden reducido

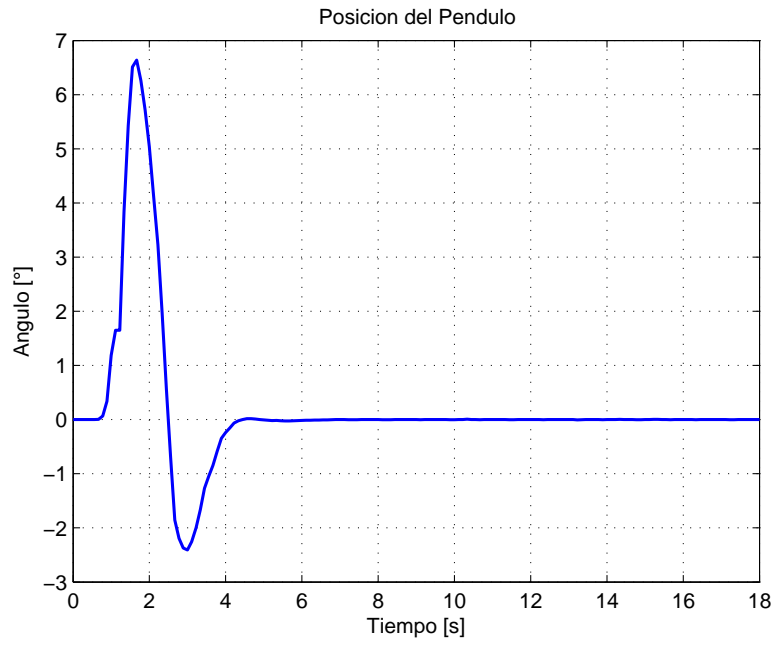


Figura 5.29.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados para el observador reducido.

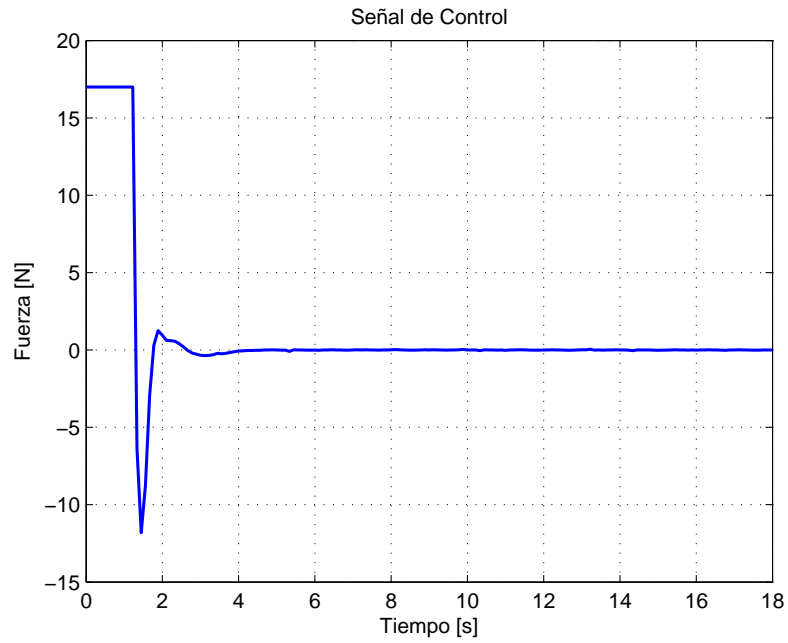


Figura 5.30.: Señal de Control en tiempo continuo penalizando 4 estados para el observador reducido.

5. Resultados

5.3.3. Q con todos los elementos y R

Los siguientes parámetros de Q y R penalizan las variables de estado y sus relaciones con las demás variables de estado.

Los polos se ubica en:

$$-15.5166 + j20.8227 \qquad -15.5166 - j20.8227$$

La matriz de realimentación del observador L es:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 15.4741 & 20.7623 \\ -20.8312 & 15.2408 \end{bmatrix} \qquad (5.12)$$

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.31, 5.32 y 5.33. Las figuras 5.28 y 5.31 muestran la respuesta con el observador de orden reducido que cumplen con el criterio del sobrepaso ($Mp=0$), pero para las figuras 5.29 y 5.32 se observa una violación del criterio de diseño del ángulo, debido al error de estimación, lo cual se da solución en menos de 0.5s correspondiente al diseño impuesto para el observador.

Observando así las respuestas con el observador y sin él, dentro de lo estipulado por el diseño. Las figuras 5.27, 5.30 y 5.33 muestran la señal de control sobre pasando el limite, pero en un tiempo muy pequeño, el cual corresponde a tiempo de establecimiento del error de estimación, por lo tanto con un esfuerzo mayor debido a dicho error.

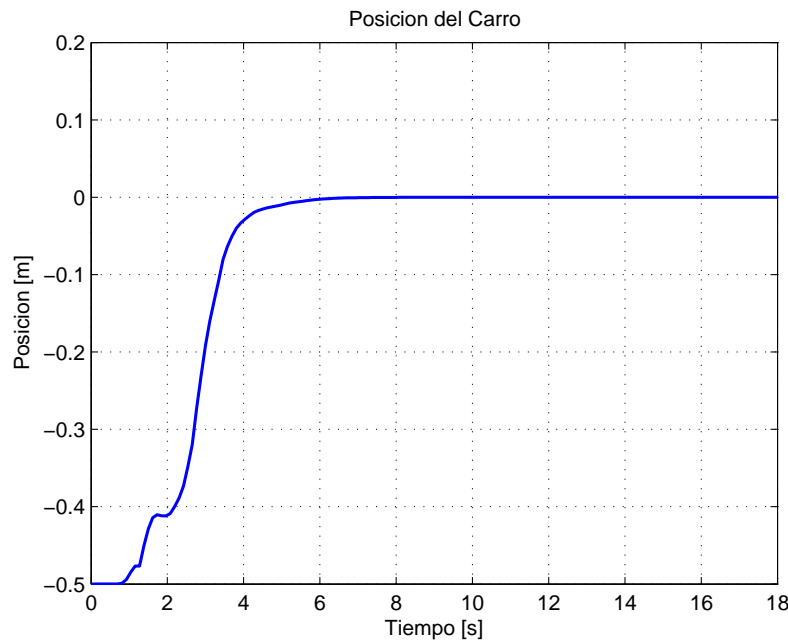


Figura 5.31.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.

5.3. Respuestas del sistema en tiempo continuo con observador de orden reducido

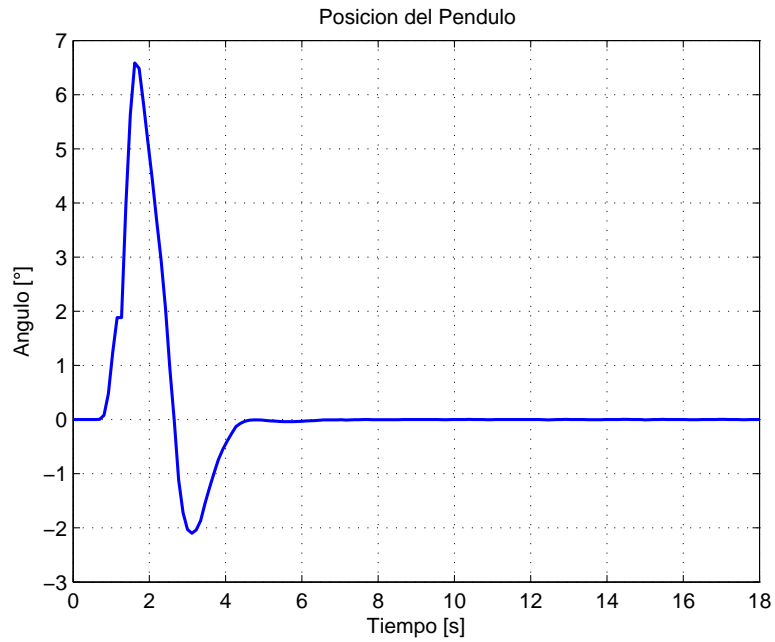


Figura 5.32.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.

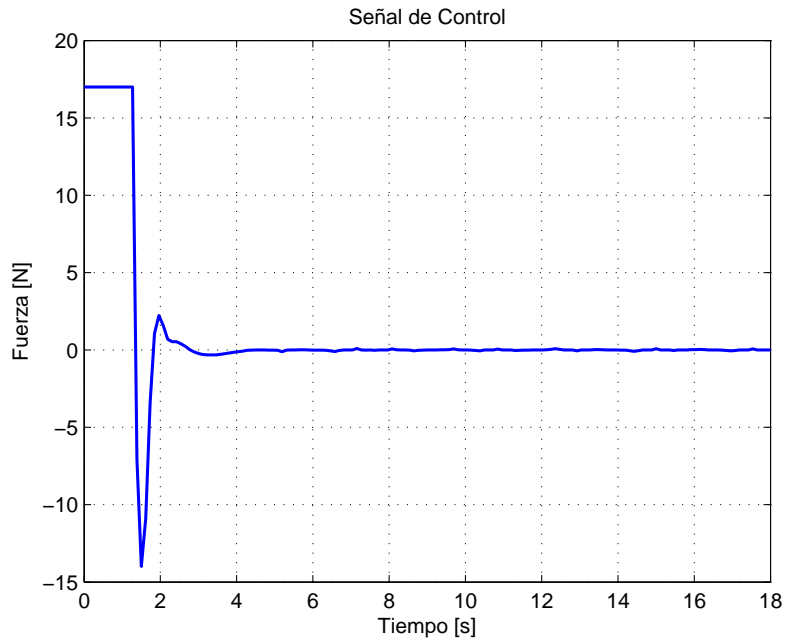


Figura 5.33.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.

5. Resultados

5.4. Respuestas del sistema en tiempo discreto con observador de orden reducido

En esta sección se mostrara los resultados, a partir de los datos mostrados en la sección *Respuestas del sistema en tiempo discreto*, pero utilizando el observador de orden reducido discreto, y con el diseño propuesto en el capítulo de sintonización, donde la utilización del observador *Dead-Beat* entrega un error de estimación igual a cero 0, lo cual permitirá observar respuestas sin retardo en acción de control.

La ganancia de realimentación se hallo corriendo los polos del sistema discretos en lazo cerrado al centro del círculo unitario, lo cual indica que los polos para las diferentes penalizaciones serían 0. Pero esto no quiere decir que la matriz de realimentación del observador L sea cero, esta tiene un valor de:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 19.9788 & -0.0302 \\ -0.0117 & 19.6188 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Para todas las penalizaciones de los estados.

A partir de las ecuaciones en el espacio de estado para el sistema con observador reducido en tiempo discreto, se obtiene el diagrama analógico necesario para realizar la simulación en *MatlabTM-Simulink* figura 5.34

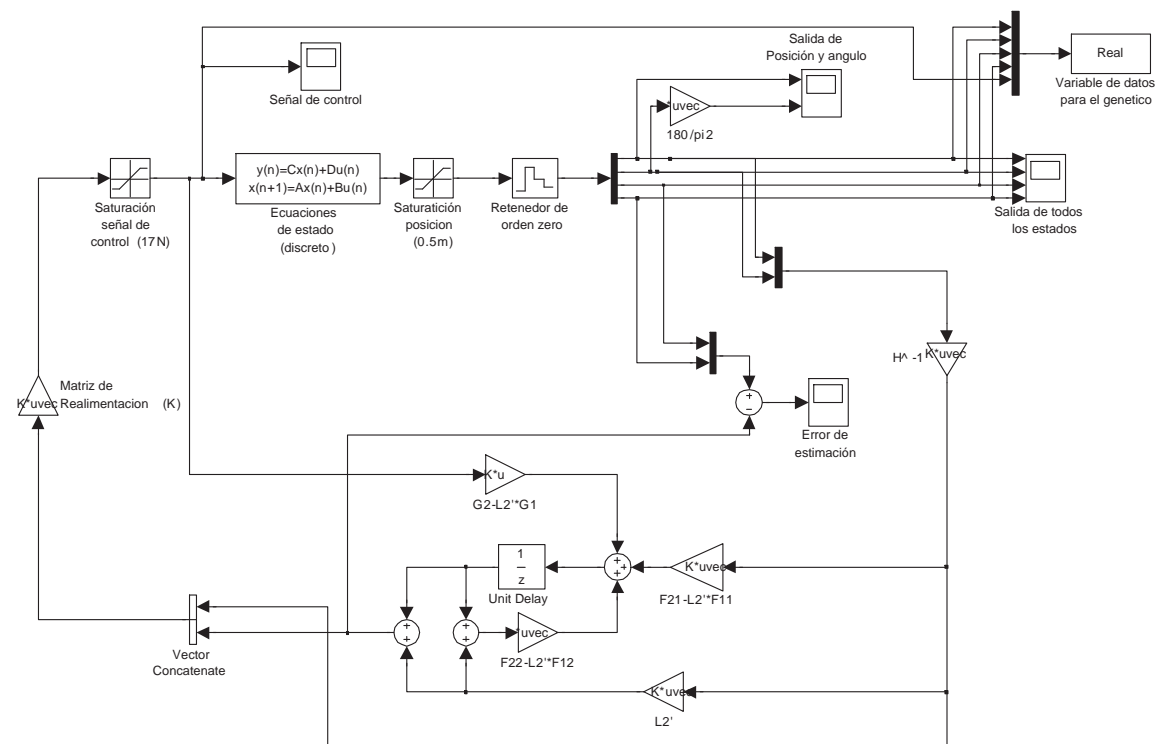


Figura 5.34.: Diagrama analógico para el sistema discreto en Matlab-Simulink.

5.4.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R

Estos parámetros de Q penalizan solo dos de las variables de estado: la posición y en ángulo.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.35, 5.36 y 5.37. La figura 5.35 se observa un sobrepaso mayor que el mostrado en la sección sin el observador. Este sobrepaso mas grande es debido al error de estimación

5.4. Respuestas del sistema en tiempo discreto con observador de orden reducido

de las dos variables estimadas variables. La figura 5.36 muestra que la oscilación de la carga, es mayor que la mostrada sin el observador, de igual manera esto es debido al error de estimación. Pero este incumplimiento de los criterios de diseño es de duración muy corta ya que el diseño del observador se hizo de tal manera que este respondiera en menos de 1s para obtener las respuestas muy similares a las obtenidas sin el observador.

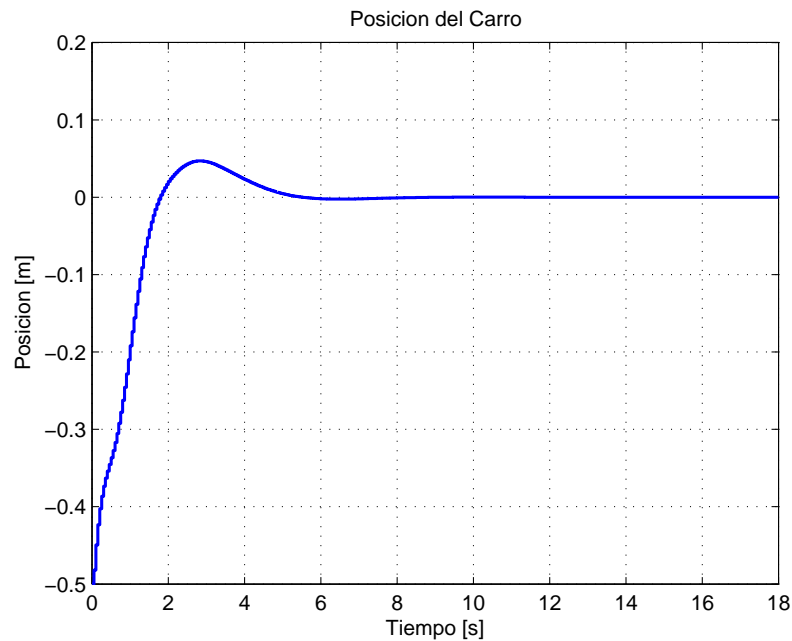


Figura 5.35.: Posición del carro en tiempo discreto penalizando 2 estados para el observador reducido

5. Resultados

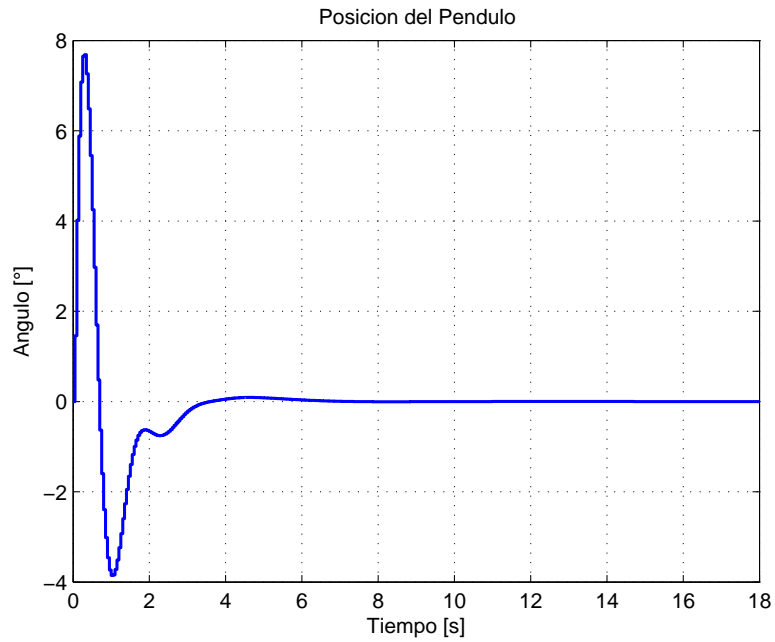


Figura 5.36.: Posición angular en tiempo discreto penalizando 2 estados para el observador reducido

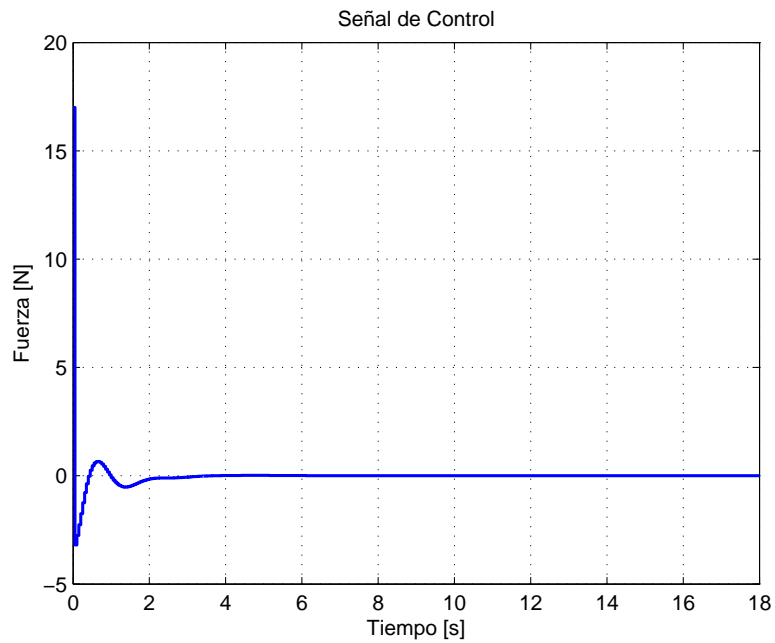


Figura 5.37.: Señal de control en tiempo discreto penalizando 2 estados para el observador reducido

5.4.2. Q con los elementos de la diagonal y R

Estos parámetros de Q penalizan todas las variables de estado.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.38, 5.39 y 5.40:

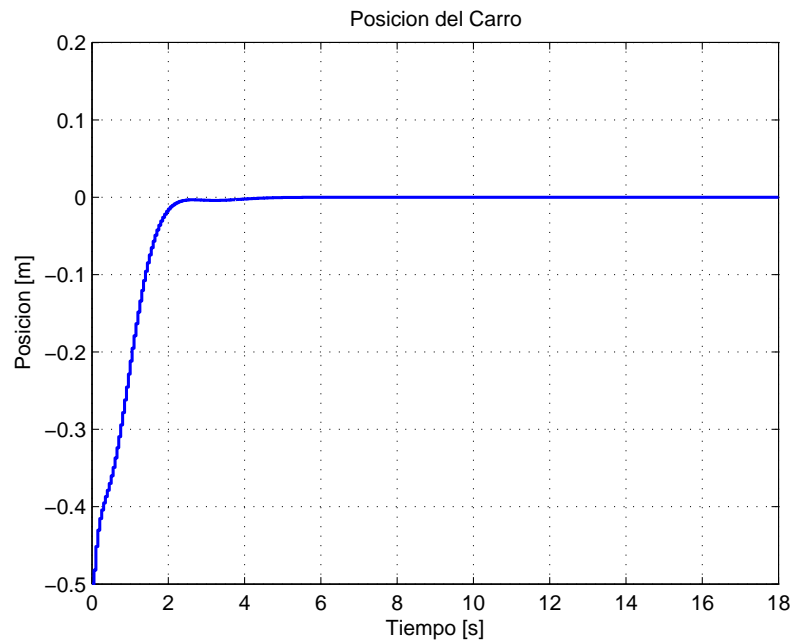


Figura 5.38.: Posición del carro en tiempo discreto penalizando 4 estados para el observador reducido.

5. Resultados

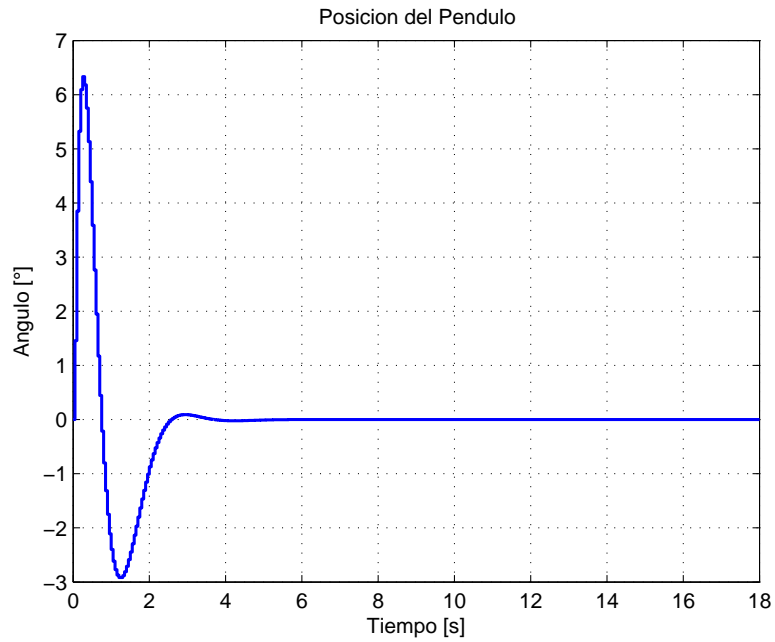


Figura 5.39.: Posición Angular en tiempo discreto penalizando 4 estados para el observador reducido.

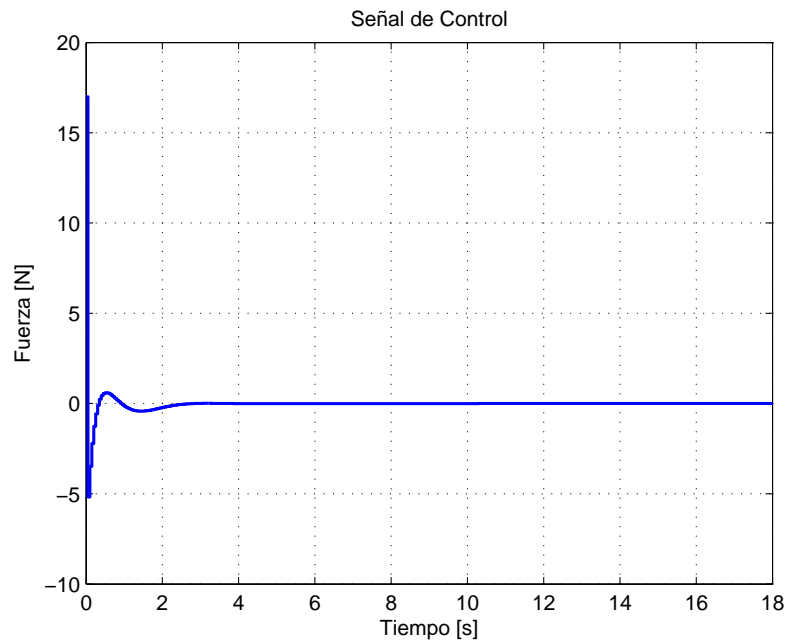


Figura 5.40.: Señal de Control en tiempo discreto penalizando 4 estados para el observador reducido.

5.4.3. Q con todos los elementos y R

Estos parámetros de Q penalizan las variables de estado y sus relaciones con las demás variables de estado.

Las respuestas obtenidas son las figuras 5.41, 5.42 y 5.43. Las figuras 5.38 y 5.41 muestran la respuesta con el observador de orden reducido que cumplen con el criterio del sobrepaso ($Mp=0$), pero para las figuras 5.39 y 5.42 se observa una violación del criterio de diseño del ángulo, debido al error de estimación, lo cual se da solución en menos de 0.5s correspondiente al diseño impuesto para el observador.

Observando así las respuestas con el observador y sin él, dentro de lo estipulado por el diseño.

Las figuras 5.37, 5.40 y 5.43 muestran la señal de control sobre pasando el limite, pero respondiendo de forma instantánea debido a la utilización del observador *Dead-Beat*, lo cual corresponde a que el esfuerzo de la señal de control no se incremento como sucedió para el caso del observador de orden reducido continuo.

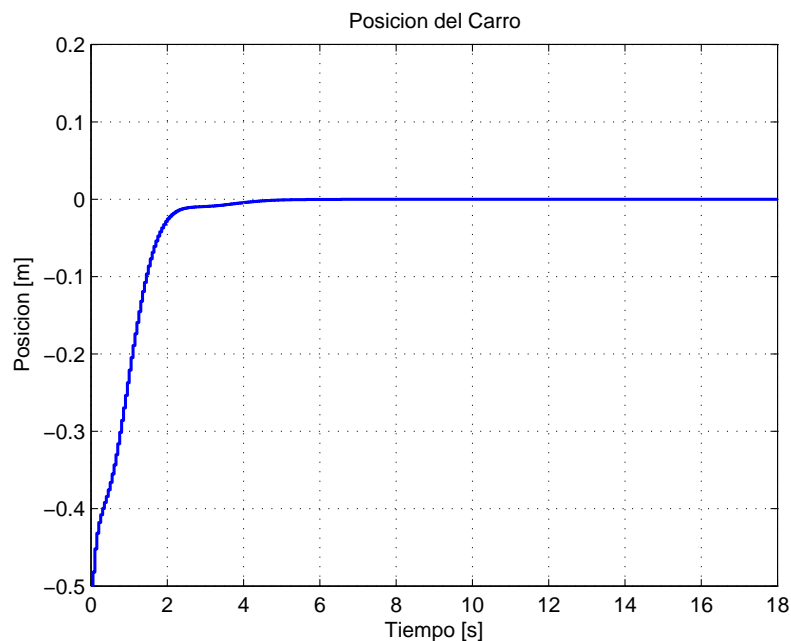


Figura 5.41.: Posición del carro en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.

5. Resultados

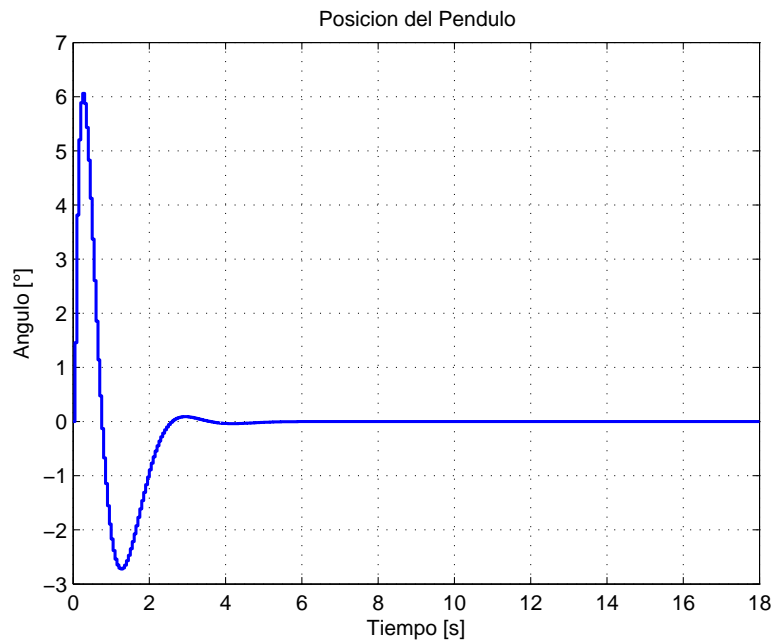


Figura 5.42.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.

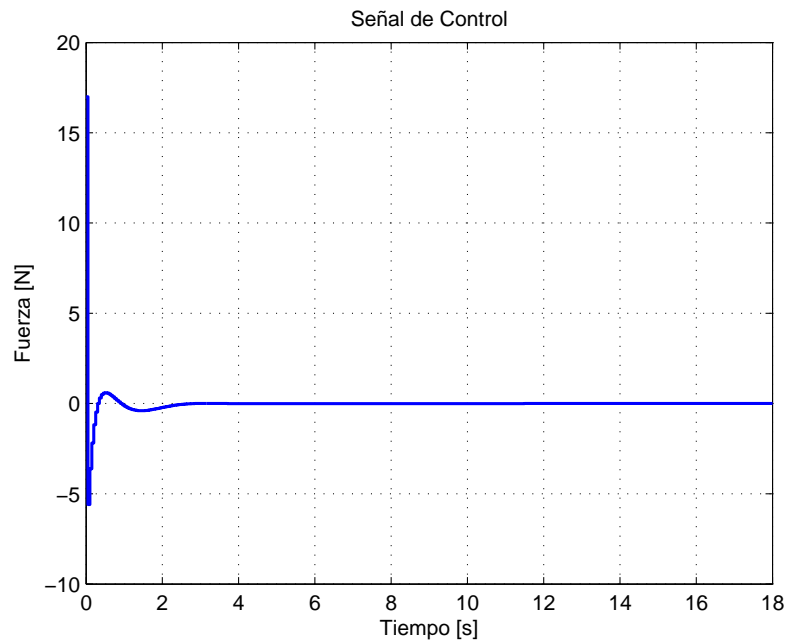


Figura 5.43.: Posición Angular en tiempo continuo penalizando 4 estados y sus relaciones para el observador reducido.

5.5. Comparación de las respuestas del sistema en tiempo continuo ante las diferentes penalizaciones

Los siguiente resultados son la comparación entre la diferentes penalizaciones presentadas en este trabajo, y de los cuales se podrán observar que tan importante puede ser lo pesos de cada estado con respecto a los otros. También se observara la efectividad de dichas penalizaciones.

	Estados Penalizados
$Q(2)$ y $R(1)$	2 estados y 1 Señal de control
$Q(4)$ y $R(1)$	4 estados y 1 Señal de control
$Q(4$ con $R)$ y $R(1)$	4 estados, las relaciones y 1 Señal de control

Tabla 5.8.: Comparación entre las penalizaciones.

La figura 5.44 muestra la respuesta del carro penalizando los diferentes estado, de la cual se observa que la penalización de solo dos estados presenta menor efectividad que cuando se penaliza todos los estados, aunque la respuesta entre la penalización de todos los estados y la penalización de todos los estados y sus relaciones son casi iguales el costo computacional si es mayor para la penalización de la matriz Q completa, observando que esto es innecesario debido a lo parecida de las respuesta, lo cual indica que lo mas importante es la penalización de todas las variables de estado que hagan parte del sistema.

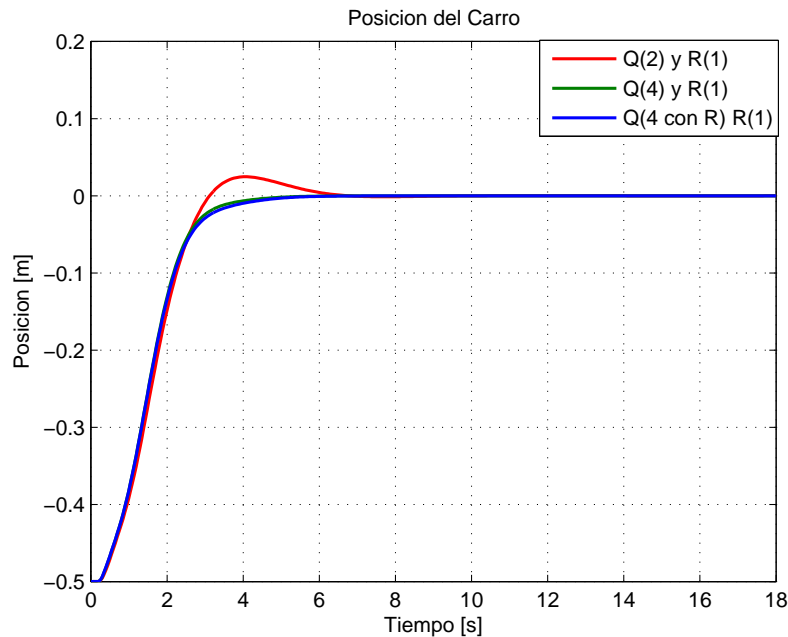


Figura 5.44.: Posición del carro para las diferentes penalizaciones.

La figura 5.45 muestra la respuesta del ángulo penalizando los diferentes estados, observándose que la penalización de solo dos estados genera una respuesta con un tiempo de establecimiento mayor debido a la oscilación que produce el carro al momento de regular su posición, pero las respuestas para las penalizaciones de la Q diagonal y la Q completa muestran respuestas con un tiempo de establecimiento y un ángulo entre los límites impuestos por el diseño

5. Resultados

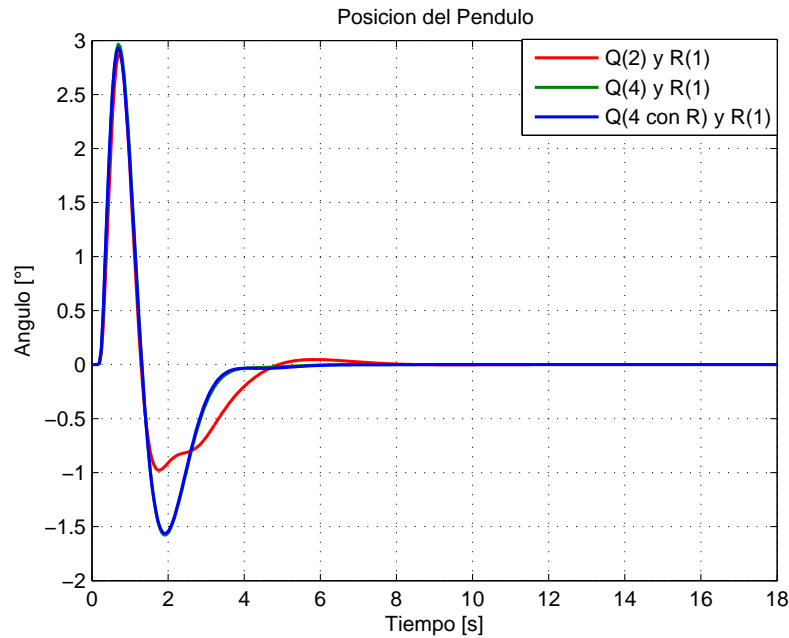


Figura 5.45.: Posición Angular para las diferentes penalizaciones.

La figura 5.46 muestra la señal de control la cual para las diferentes penalizaciones no excede los límites de los parámetros entregados por el fabricante, y en donde se puede observar que a medida que se incrementa el grado de las variables de penalización crece el esfuerzo de control, aunque para el sistema tratado en este trabajo este incremento no es muy significativo para otros sistema de mayor orden si lo puede ser.

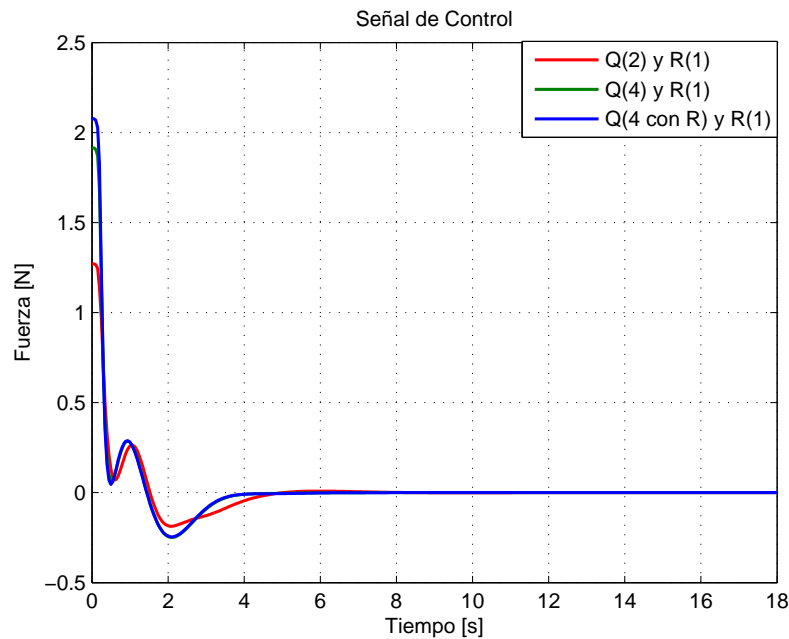


Figura 5.46.: Señal de control para las diferentes penalizaciones.

5.6. Respuestas y validación del vector de realimentación obtenido en simulaciones, para el modelo a escala del puente grúa

Las respuestas obtenidas con el modelo discretizado con observador de orden reducido, permiten observar el comportamiento del puente grúa ante la condición inicial de (-0.5m) para el carro. Ahora en esta sección se pretende ilustrar los resultados correspondientes para las diferentes penalizaciones de los estados, utilizando el modelo real a escala. Es necesario tener en cuenta que el modelo del motor DC que hace parte del sistema de control del modelo real no se incluyó en el modelado del sistema en lazo cerrado, por consecuencia se presenta en este una *zona muerta* de operación, lo que hace que ante señales pequeñas de control no se generen voltajes considerables para que el motor DC responda. Causando así un desplazamiento de la referencia del sistema (condición de equilibrio $x=0$).

5.6.1. Q teniendo en cuenta solo posición, ángulo y R

Las figuras 5.47 y 5.48 muestran las respuestas de posición y ángulo respectivamente, en ellas se puede observar que el desplazamiento del carro y la oscilación de péndulo que se asemejan a las respuestas simuladas. De la figura 5.47 se nota que el carro no es llevado a la posición de referencia debido a la zona muerta definida anteriormente, aunque el tiempo de respuesta cumple con las especificación de diseño. De la figura 5.48 se puede ver que el ángulo al empezar el movimiento de regulación este excede el limite de (5°) pero en poco tiempo es llevado al rango de oscilación impuesto, aunque esta dentro del intervalo de $[-3 \leq \theta \leq 3]$. Pese a que el ángulo se encuentra dentro los limites este no puede ser regulado ($\theta=0$), a causa de la zona muerta por lo tanto quedará oscilando siendo atenuado más por la fricción rotacional que por la propia acción del controlador.

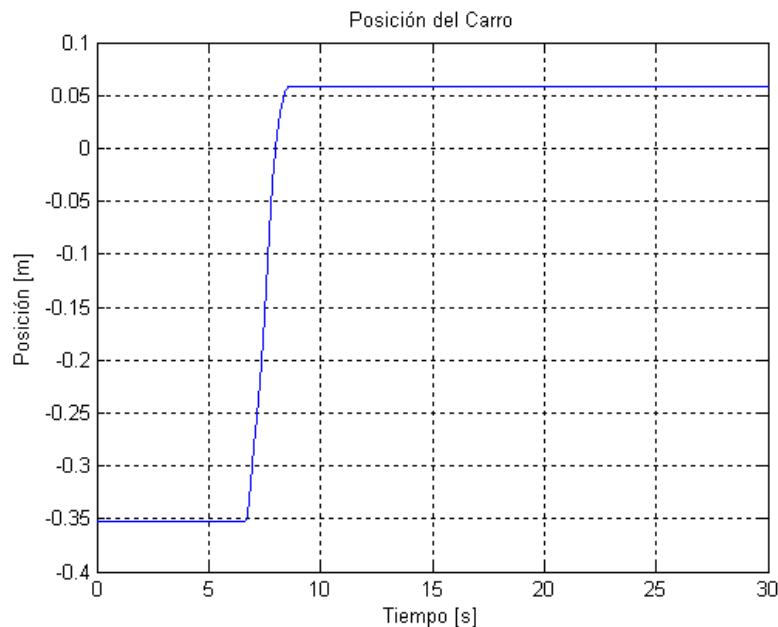


Figura 5.47.: Posición del carro penalizando 2 estados para el modelo real.

5. Resultados

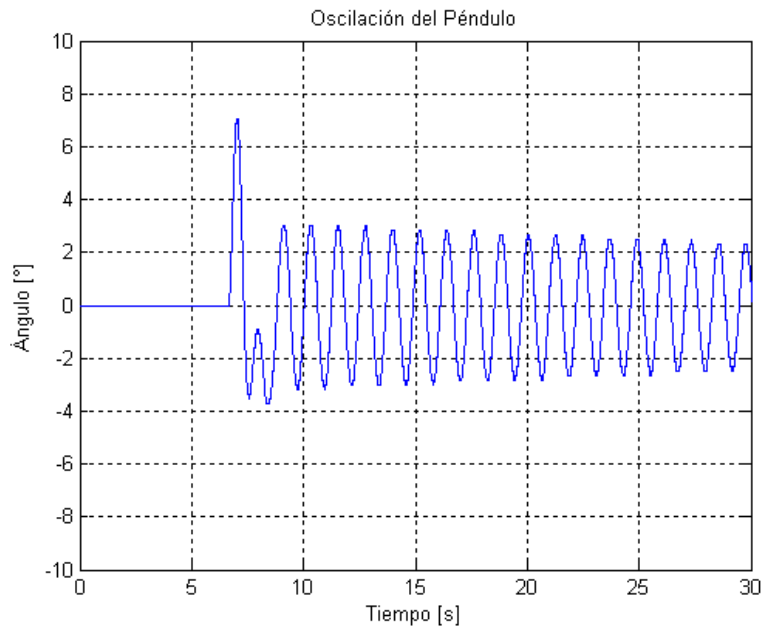


Figura 5.48.: Posición angular del péndulo penalizando 2 estados para el modelo real.

5.6.2. Q con los elementos de la diagonal y R

Las figuras 5.49 y 5.49 muestran las respuestas de posición y ángulo respectivamente, en ellas se puede observar que el desplazamiento del carro y la oscilación de péndulo que se asemejan a las respuestas simuladas. De la figura 5.49 se nota que el carro no es llevada a la posición de referencia debido a la zona muerta definida anteriormente, aunque el tiempo de respuesta cumple con las especificación de diseño, también se puede apreciar un pequeño sobrepeaso debido a las diferencias existentes entre el modelo realizado con los parámetros entregados por el fabricantes y el modelo real del sistema. De la figura 5.50 se puede ver que el ángulo al empezar el movimiento de regulación este excede el limite de (5°) pero en poco tiempo es llevado al rango de oscilación impuesto, aunque esta dentro del intervalo de $[-2 \leq \theta \leq 2]$. Pese a que el ángulo se encuentra dentro los limites este no puede ser regulado ($\theta=0$), a causa de la zona muerta por lo tanto quedará oscilando siendo atenuado más por la fricción rotacional que por la propia acción del controlador.

5.6. Respuestas y validación del vector de realimentación obtenido en simulaciones, para el modelo a escala del puente grúa

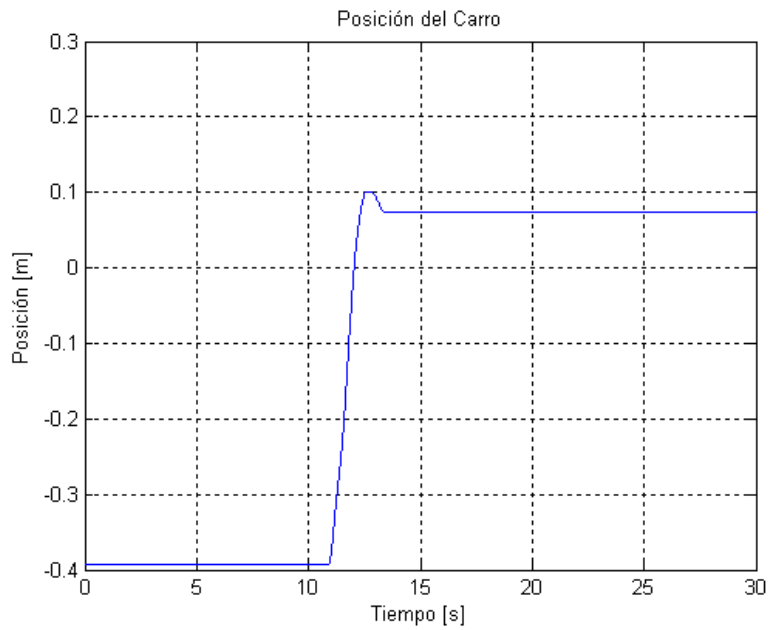


Figura 5.49.: Posición del carro penalizando 4 estados para el modelo real.

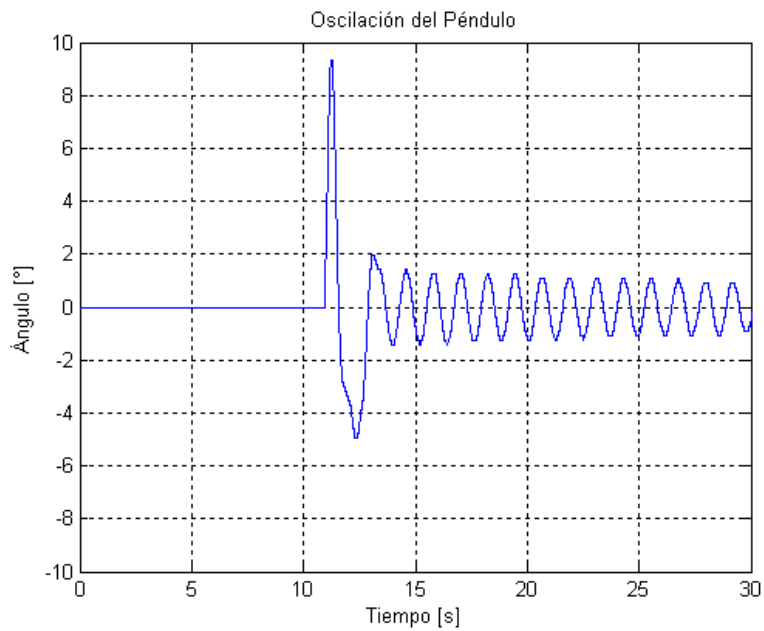


Figura 5.50.: Posición angular del péndulo penalizando 4 estados para el modelo real.

5. Resultados

5.6.3. Q con todos los elementos y R

Las figuras 5.51 y 5.51 muestran las respuestas de posición y ángulo respectivamente, en ellas se puede observar que el desplazamiento del carro y la oscilación de péndulo que se asemejan a las respuestas simuladas. De la figura 5.51 se nota que el carro no es llevada a la posición de referencia debido a la zona muerta definida anteriormente, aunque el tiempo de respuesta cumple con las especificación de diseño, también se puede apreciar un pequeño sobrepaso debido a las diferencias existentes entre el modelo realizado con los parámetros entregados por el fabricantes y el modelo real del sistema. De la figura 5.52 se puede ver que el ángulo al empezar el movimiento de regulación este excede el limite de (5°) pero en poco tiempo es llevado al rango de oscilación impuesto, aunque esta dentro del intervalo de $[-2 \leq \theta \leq 2]$. Pese a que el ángulo se encuentra dentro los limites este no puede ser regulado ($\theta=0$), a causa de la zona muerta por lo tanto quedará oscilando siendo atenuado más por la fricción rotacional que por la propia acción del controlador.

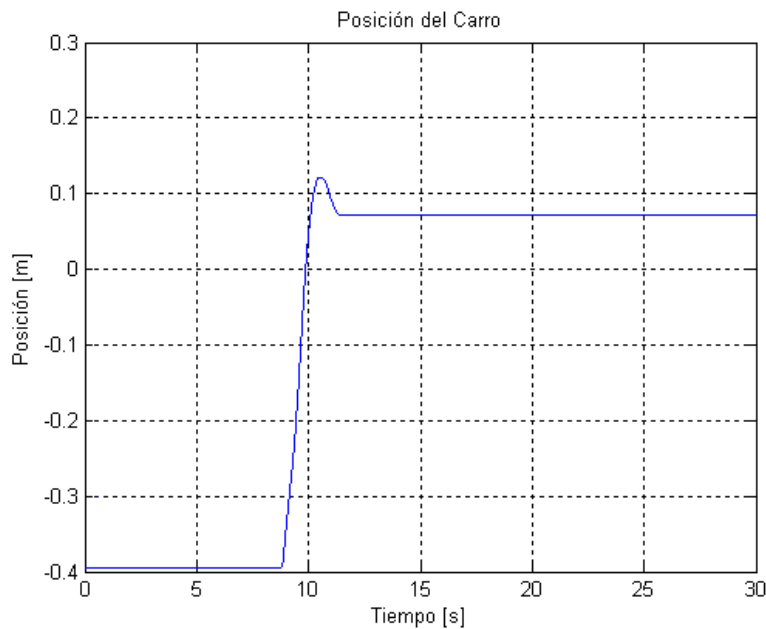


Figura 5.51.: Posición del carro penalizando 4 estados y sus relaciones para el modelo real.

5.6. Respuestas y validación del vector de realimentación obtenido en simulaciones, para el modelo a escala del puente grúa

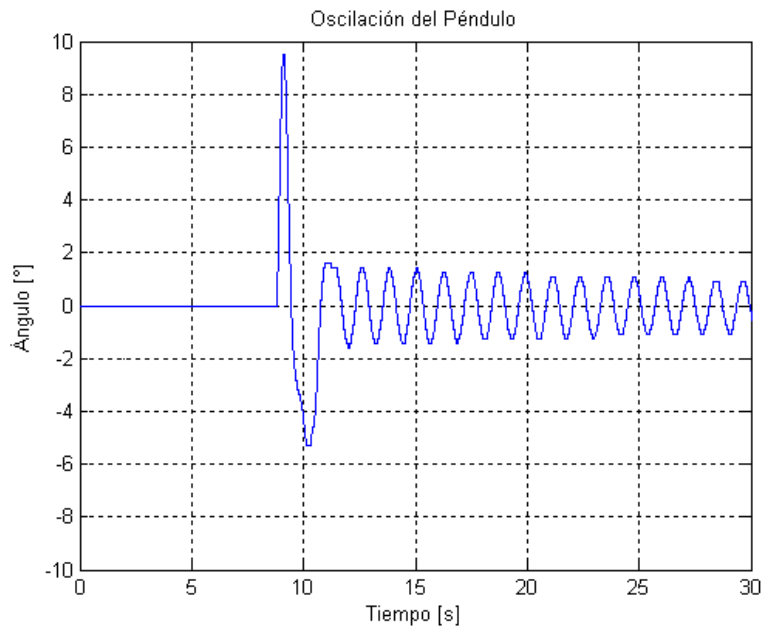


Figura 5.52.: Posición angular del péndulo penalizando 4 estados y sus relaciones para el modelo real.

Al igual que en las respuestas obtenidas en las simulaciones haciendo penalización de cuatro (4) estados y de cuatro (4) estados y sus relaciones de la matriz Q , se observaban respuestas muy similares, tanto para la posición como para el ángulo. En las pruebas hechas en el sistema real se obteniendo salidas iguales que las descritas anteriormente cumpliéndose así la validación de las ganancias de realimentación obtenidas a partir de las simulaciones.

5. Resultados

CONCLUSIONES

- En este trabajo se ha conseguido el objetivo principal, y por tanto se ha implementado con éxito un controlador sobre un modelo real de puente grúa a escala que permite regular la posición y el ángulo en función de la señal de control “La fuerza entregada por el motor”.
- Los sistemas de control óptimo se basan en las técnicas de optimización las cuales determinan los parámetros variables del controlador, éstas se encuentran en función de algún índice de desempeño, las cuales pretenden la minimización o maximización de este.
- Los métodos para determinar el punto de funcionamiento óptimo, son básicamente los de prueba y corrección. Es importante destacar como ventaja del método de control óptimo es que éste no presenta restricciones a la planta, es decir, puede ser no lineal, múltiples entradas y salidas, variable en el tiempo.
- La teoría del control óptimo es aplicable únicamente en sistemas realimentados. Puede ser clasificado según el índice de costo esperado y puede ser de tiempo mínimo, esfuerzo mínimo, y problemas de seguimiento.
- El efecto del tiempo de muestreo también conlleva una pérdida de rapidez en la respuesta del controlador. Así, si la entrada de control es proporcionada cada T segundos, durante ese intervalo se mantiene constante y por tanto con un valor diferente de los que tendría si fuera tiempo continuo y sin retraso. Esta pérdida de rapidez, de precisión, afecta al comportamiento del sistema en bucle cerrado disminuyendo la rapidez de la acción. Claramente cuanto más grande es el tiempo de muestreo y el retraso, mayor es el efecto de éstos.
- Al concluir este trabajo se han podido obtener importantes conclusiones, como el desarrollo de algoritmos para la sintonización de los parámetros de un tipo de controlador, el cual es utilizado para la automatización de un proceso, y donde este permite hacer comparaciones con cualquier aplicación de control existente en la industria, logrando una solución óptima en comparación con las implementadas, proporcionando así un fácil manejo y siendo flexible a modificaciones.
- Una característica importante de los algoritmos evolutivos son su flexibilidad y adaptabilidad al tipo de problema a resolver. La metodología desarrollada permite trabajar directamente con las especificaciones de diseño e incluir en la función de evaluación todos los parámetros que se consideren oportunos. Para obtener los parámetros del controlador *LQR*, únicamente hubo que incluirlos en el desarrollo del algoritmo y ser evaluados a partir de el cálculo de las ganancias de realimentación obtenidas con la evaluación del controlador a partir de la ecuación de Ricatti.

5. Resultados

- La metodología desarrollada fue aplicada a un problema de control concreto, adaptándose el algoritmo genético al problema en cuestión. Esta vez se utilizó para la determinación de las matrices de peso Q y R propias del método LQR , obtenidas normalmente por procedimientos de prueba y error. Los algoritmos evolutivos probaron su flexibilidad al ser aplicados a cualquier tipo problema, en este caso realizar la sintonización completa del controlador, sin apoyarse en ningún otro método. Se trabajó con una estructura de controlador predeterminada y el algoritmo se encargó de la obtención de los parámetros de dicha estructura.
- Dado que un sistema de control óptimo basado en un índice de comportamiento cuadrático es una función lineal de sus respectivas variables de estado, se necesita realimentarlas todas. Por lo tanto, estas variables deben estar disponibles para realimentarse. Se debe evitar derivar una variable de estado para generar otra, pues la derivación de una señal siempre disminuye la relación entre la señal y el ruido, ya que este generalmente fluctúa más rápido que la señal de mando. Siempre que sea posible, es mejor evitar estos procesos de derivación. Si se desea obtener cierta aceleración de un determinado proceso, es mejor medir directamente esta aceleración utilizando un instrumento apropiado, que derivar la señal de la velocidad, pero cuando es imposible de medir esta variable se puede utilizar la técnica de estimación de las variables a través de el procedimiento de observabilidad el cual nos entrega las variables estimadas con la propiedad de que el diseñador puede actuar sobre la rapidez de respuesta de este para así disminuir el error de las variables observadas y que esto no afecte el funcionamiento de la planta en lazo cerrado.
- Se escogieron los algoritmos genéticos por sus características intrínsecas. El hecho de trabajar de forma simultánea con un conjunto de posibles soluciones al problema, permite explorar a la vez distintas regiones del espacio de búsqueda, de esa manera acelerar el proceso y encontrar respuestas más rápido.
- Se comprobó varias de las ventajas de los algoritmos genéticos, ya que se implementó en un problema sin un conocimiento previo acerca de este, aun así el algoritmo encontró valores para las matrices Q y R que optimizaban las salidas de posición y ángulo en un tiempo de respuesta pequeño.
- El diseñador juega un papel importante en la implementación de un algoritmo genético, ya que depende de este escoger la codificación adecuada para el problema a tratar, además, una definición correcta de la función objetivo del algoritmo, pues ya que si esta no es correctamente definida las respuestas obtenidas no serán las deseadas o erróneas en la solución del problema a tratar.
- No es recomendable implementar algoritmos genéticos en problemas en donde ya se conozca otras técnicas para optimizarlas ya que están entregando las soluciones exactas o óptimas y posiblemente en un tiempo mejor a lo que lo pueden hacer los algoritmos genéticos.

A. GENERALIDADES DE CONTROL

A.1. Un poco de historia

El control automático ha ido evolucionando desde el comienzo de nuestra historia. Se comenzó de forma empírica, en los tiempos en donde el control no se consideraba un área de la ingeniería y los aportes al control eran sólo esporádicos y nacían con la intención de solucionar algunos problemas práctico.

Con el pasar del tiempo el progreso de la teoría del control realimentado, se dio a partir de algunas tendencias principales y avances claves, convirtiéndose en una disciplina de la ingeniería; por lo tanto, su progreso estaba sujeto a los problemas prácticos que tuvieron que ser solucionados en su momento.

Teniendo en cuenta la ubicación en el tiempo, se pueden resaltar algunos aportes importantes que se dieron para que el control se convirtiera en una rama de la ingeniería y cómo este solucionó problemas como respuesta a las diferentes necesidades que surgieron durante cada época. Como lo fue el periodo de la Revolución Industrial, en el cual se inició la aplicación del control a procesos industriales, y en donde se dieron los mayores avances en las investigaciones y desarrollos de la teoría en control.

En 1922 se presentó lo valioso de un controlador PID para el control de los procesos industriales, el cual había sido mostrado por Minorsky. La función proporcional se conocía desde el comienzo del relé. Sin embargo, la parte integral se conoció hasta los años 1920s y la derivativa en los años 1930s.

El periodo posterior a La Segunda Guerra Mundial se le bautizó como “el periodo clásico de la teoría de control” en el cual se utilizaban como herramientas matemáticas los métodos de Transformación de Laplace y Fourier y la descripción externa de los sistemas. Y donde el estímulo para los avances que se dieron lo constituyeron las guerras, debido a la necesidad de diseñar servomecanismos que prestaran funciones de ataque y defensa para el hombre.

De la mano con el desarrollo de la teoría de control estaban las computadoras las cuales fueron brindando contribución durante el progreso de alguna función, que era parte del control de procesos. Pero surgió un inconveniente, los computadores son elementos que trabajan por ciclos. No trabajan en tiempo continuo sino en tiempo discreto, es decir estos necesitan un tiempo para adquirir las entradas, evaluar las acciones, entregar las soluciones sobre el sistema, y realizar el proceso de conversión digital-analógico. Por lo tanto estos trabajan en un intervalo de tiempo o período de muestreo y el control expuesto hasta ese momento solo estaba propuesto de manera continua.

Las bases para los sistemas muestreados fueron establecidas por Hurewicz, quien desarrolló una extensión apropiada del criterio de estabilidad de Nyquist para este tipo de sistemas.

Salzer en 1954 introduce la transformada Z, la cual permite que los resultados obtenidos en el estudio de los sistemas continuos se puedan aplicar a los sistemas discretizados en el tiempo. Mediante esto, los desarrollos hechos en tiempo continuo puedan ser trasladados a tiempo discreto, para ser implementados y

A. Generalidades de control

utilizados en el computador.

La teoría moderna tiene como fundamento la teoría de control clásico. Esta unión permitió extender las técnicas clásicas del dominio de la frecuencia y el lugar de las raíces para resolver sistemas multivariables. Mostrando la importancia del “valor singular” de los gráficos versus la frecuencia en el diseño de sistemas multivariables robustos. Dándose que con el uso de estos gráficos, las técnicas clásicas del dominio de la frecuencia, podían ser incorporadas hacia el diseño moderno. Convirtiéndose esta unión en el resultado de una nueva teoría de “control digital”, que mezcla lo mejor de las técnicas del control clásico y moderno.

El control moderno digital tiene sus inicios con el filtro de Wiener Kolmogoroff y sigue con el filtro de Kalmann. Los cuales continuaron con el desarrollo teórico originalmente propusieron Bode y Shannon, y que luego presentó en su forma moderna Kailath. Kalmann continúa con el problema de la linealidad cuadrática Gaussiana del control estocástico, en donde este problema puede ser resuelto separadamente; una estimación de los problemas de estados y un problema determinístico de control óptimo.

Todos estos avances, desarrollos y trabajos realizados por los diferentes artífices enunciados anteriormente y otros no enunciados durante toda la historia y hasta nuestros días han formado una teoría de control muy sólida, la cual ha ayudado de gran manera a la industria y al desarrollo tecnológico del mundo.

A.2. Teoría de control

Todo proceso industrial esta ligado con la ingeniería de manera directa, ya que es precisamente esta la que aporta el desarrollo, diseño e implementación de técnicas, métodos y tipos de sistemas de control para las plantas, que serán utilizadas en diferentes campos de la ciencia y la tecnología.

A.3. Tipos de sistemas de control

Existen 2 tipos de sistemas de control.

- Sistema de control en lazo abierto.
- Sistema de control en lazo cerrado.



Figura A.1.: Sistema de primer orden.

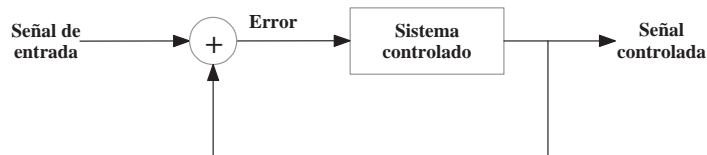


Figura A.2.: Sistema de segundo orden.

Los sistemas de control en lazo abierto constan de la señal de entrada al sistema, el sistema controlado y la señal controlada. Pero tienen un gran inconveniente, al no poder variar la respuesta del sistema al momento de presentarse un error de la variable controlada; por esta razón se presentó la necesidad de buscar una solución, y fue con la llegada del control por realimentación (Sistemas en lazo cerrado) que el estancamiento sería solucionado.

La principal característica de los sistemas de lazo cerrado, es que cuentan con una señal de realimentación, la cual será tomada de la variable controlada a través de un sensor y será comparada con la señal deseada; para poder generar lo que se llamara señal de error. Esta señal será procesada por el controlador y generará otra señal que es la que provoca un cambio real sobre el sistema, para poder lograr que la señal de salida del sistema sea igual a la deseada.

El control en lazo cerrado es el más utilizado en las diferentes aplicaciones industriales y en la ingeniería, debido a las ventajas que este ofrece frente al control en lazo abierto. Algunas de las características del control en lazo cerrado son:

1. Todos los sistemas de control son sistemas dinámicos, “cambian con el tiempo”, por lo tanto esto es una característica muy importante en su desempeño, y su descripción se hace por medio de ecuaciones diferenciales en donde la variable independiente es el tiempo.
2. Los sistemas de control tienen como analogía un sistema de procesamiento de información, se reciben una información, la procesa, se actúan sobre dicha información y al final la generan la respuesta como varios tipos de señales.
3. Los sistemas de control están integrados por componentes que actúan en su comportamiento y estos pueden ejecutar algún proceso que intervenga sobre la señal a lo largo del proceso.
4. Los sistemas de control son retroalimentados, en donde las señales pueden ir por diferentes caminos para controlar el comportamiento del sistema.
5. La existencia de este lazo de retroalimentación, permite que el sistema controlado, sea robusto ante perturbaciones.

A.4. Servomecanismos y reguladores

Es de vital importancia denotar que en control existen dos tipos de sistemas automáticos. Los servomecanismos y reguladores.

En la figura [A.3](#) se muestra el diagrama de bloques de estos dos sistemas, teniendo en cuenta que en el servomecanismo se encarga del seguimiento de la referencia R , mientras que en el regulador elimina condiciones iniciales y las perturbaciones que puedan afectar al sistema.

A. Generalidades de control

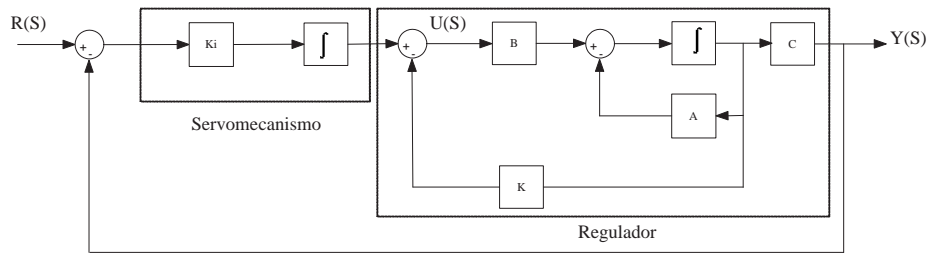


Figura A.3.: Servomecanismo y regulador.

Estos sistemas deben tener un muy buen desempeño y diseño para responder ante diferentes perturbaciones u otros tipos de señales. Para los sistemas dinámicos es el análisis del comportamiento en el tiempo el que permite diseñar un buen control sobre el proceso ante algún evento inesperado. Ya que este comportamiento es la respuesta dinámica del sistema, dado por la manipulación que se le da a la señal de entrada “señal de referencia o forzada” para los servomecanismos y reguladores y en donde la respuesta importante es el valor real de la variable controlada. La señal forzada y la respuesta son funciones del tiempo y están relacionadas únicamente por las características del sistema y por el diseño de control.

El estudio de problemas para sistemas dinámicos tiene como objetivo definir las características del sistema a controlar por medio de la respuesta de éste, a partir de cierto tipo de entradas. De manera que se puedan determinar las características del controlador a instalar en el sistema y el cual permita llevar la señal de salida del proceso a una respuesta deseada, con base en las entradas normales que en él se puedan presentar y buscando una respuesta satisfactoria ante perturbaciones.

A.5. Señales de entrada

Para esto es necesario conocer la respuesta del sistema para cierto tipo de entradas, y determinar en cuanto esta variando el valor deseado al valor observado, y así proceder a sintonizar el controlador dependiendo del error mostrado entre la entrada (valor de referencia) y la salida (valor real).

Función escalón

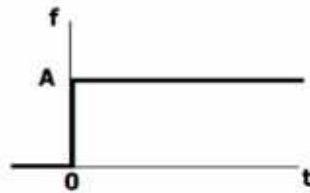


Figura A.4.: Escalón de magnitud A donde $f = 0$ para $t < 0$ y $f = A$ para $t \geq 0$.

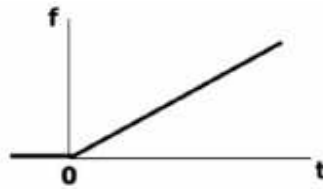
Función rampa

Figura A.5.: Función rampa donde $f = 0$ para $t < 0$ y $f = kt$ para $t \geq 0$.

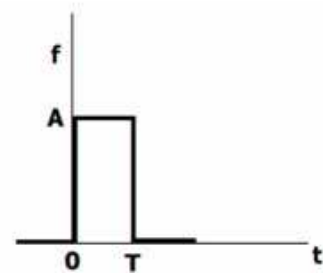
Función pulso

Figura A.6.: Función pulso de magnitud A y duración T , donde $f = A$ para $0 \leq t \leq T$ y $f = 0$ para cualquier otro tiempo.

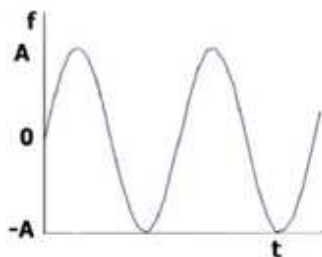
Función senoidal

Figura A.7.: Función senoidal de magnitud A y de frecuencia angular ω ($\frac{rad}{s}$) donde $f = A \sin(\omega t)$.

A.6. Función de transferencia

Para representar la planta y el controlador, matemáticamente existe la función de transferencia de un sistema lineal dada por la teoría de control clásico como herramienta a utilizar, para trabajar sistemas complejos de manera más fácil. Con la ayuda de la transformada de Laplace se pueden realizar procedimientos matemáticos, solo algebraicos, para cuando la representación de los sistemas han quedado en forma de ecuaciones integro-diferenciales. El cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, da dos polinomios expresados en el dominio del plano complejo “S” y considerando las condiciones iniciales como nulas, entrega dicha función de transferencia.

A. Generalidades de control

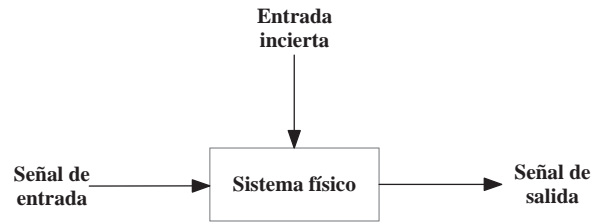


Figura A.8.: Sistema de primer orden.

$$H(S) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{j=0}^n a_j s^j} = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{K_0(S+z_1)(S+z_2)\cdots(S+z_m)}{(S+p_1)(S+p_2)\cdots(S+p_n)} \quad (\text{A.1})$$

Las características de $H(s)$ dependen sólo de las propiedades de los componentes del sistema, reflejadas en los coeficientes de la ecuación. Para los sistemas causales $n > m$. El denominador $U(s)$ es llamado polinomio característico y a la ecuación (A.2) se le denomina Ecuación Característica del sistema. Su importancia reside en que sus raíces determinan la estabilidad del mismo y el comportamiento dinámico del sistema. De manera que si las raíces de la ecuación anterior ecuación (A.2) tienen parte real negativa, el sistema será estable.

$$\text{Den}(S) = a_n S^n + a_1 S_{n-1} \dots a_{n-1} S + a_0 = 0 \quad (\text{A.2})$$

A.6.1. Sistema en lazo abierto

Un sistema de control en lazo abierto es denotado de la siguiente manera:



Figura A.9.: Sistema de control en lazo abierto, no automático.

y su función de transferencia se escribe como la ecuación (A.3).

$$H(S) = G_c(S)G_p(S) \quad (\text{A.3})$$

Donde $G_c(S)$ denota la función de transferencia del controlador y $G_p(S)$ denota la función de transferencia de la planta.

A.6.2. Sistema en lazo cerrado

Un sistemas en lazo cerrado, es un sistema automático, debido que este utiliza la señal de salida para realimentarse continuamente. Este es menos sensible a las perturbaciones externas, pero más complejo de instalar ya que puede provocar inestabilidad si no se sintoniza adecuadamente. Un sistema de control en lazo cerrado se denota de la siguiente manera:

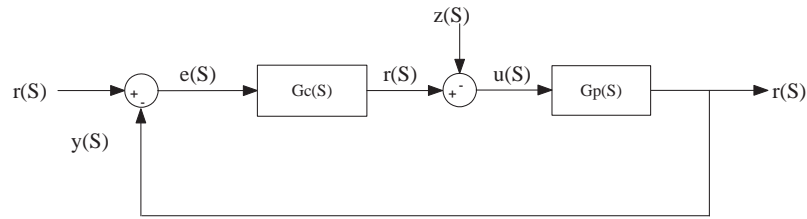


Figura A.10.: Sistema de control en lazo cerrado, automático.

- c(s): variable controlada.
- e(s): error (diferencia entre el valor deseado y la variable controlada).
- Gc(s): función de transferencia del controlador.
- Gp(s): función de transferencia de la planta.
- r(s): valor deseado.
- u(s): variable actuante.
- y(s): señal realimentada.
- z(s): perturbaciones del sistema.

Su función de transferencia se escribe como:

$$Y(S) = \frac{G_c(S)G_p(S)}{1 + G_c(S)G_p(S)}R(S) + \frac{G_p(S)}{1 + G_c(S)G_p(S)}Z(S) \quad (A.4)$$

De modo que todos los sistemas utilizaran el control en lazo cerrado, y su función de transferencia dependerá de establecer si es un servomecanismos o regulador para que así la ecuación anterior tenga o no el segundo termino es decir ($Z = 0$).

A.7. Respuesta dinámica de un sistema

La estabilidad de estos sistemas de control dependerá fundamentalmente del tipo de control y su debida sintonización, de modo que para determinar la estabilidad de un sistema existen tres tipos de comportamiento bien definidos: control sub-amortiguado, control con amortiguamiento crítico y control sobreamortiguado.

Se toma un sistema de segundo orden cuya función de transferencia en lazo cerrado se muestra en la ecuación.

$$H(S) = \frac{K\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} \quad (A.5)$$

Donde:

ξ : Coeficiente o factor de amortiguamiento relativo del sistema.

ω_n : Frecuencia natural no amortiguada del sistema.

K : Ganancia.

$\xi\omega_n$: Constante de amortiguamiento.

$\omega_d = (1 - \xi^2)^{1/2}$: frecuencia amortiguada.

A. Generalidades de control

La solución de la ecuación característica esta dada por:

$$S_1 = -\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$S_2 = -\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Dependiendo del valor que tome el parámetro ξ las raíces (S_1 y S_2) serán reales o complejas conjugadas:

- a. Si $\xi = 0$; las raíces serán imaginarias conjugadas, el sistema se denomina en este caso “*sin amortiguar*”. Esta condición no es recomendable, ya que una perturbación mínima podría mover las raíces hacia el semiplano positivo, provocando inestabilidad.

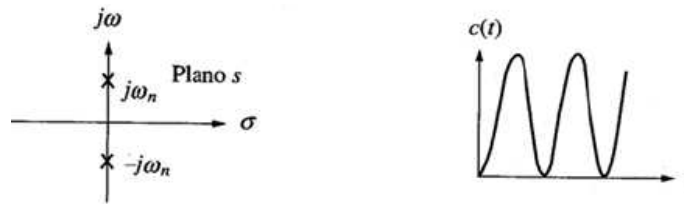


Figura A.11.: Respuesta dinámica sin amortiguar.

- b. Si $0 < \xi < 1$; las dos raíces son complejas conjugadas. El sistema se dice que es “*subamortiguado*”. Es la respuesta más común en los sistemas dinámicos.

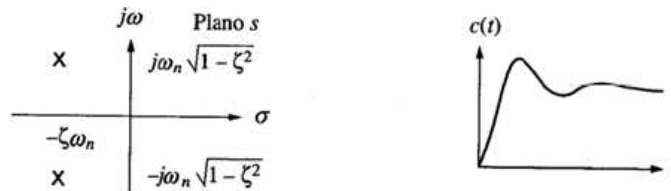


Figura A.12.: Respuesta dinámica subamortiguada.

- c. Si $\xi = 1$; existirá una raíz doble en $S = -\omega_n$. El sistema es “*críticamente amortiguado*”.

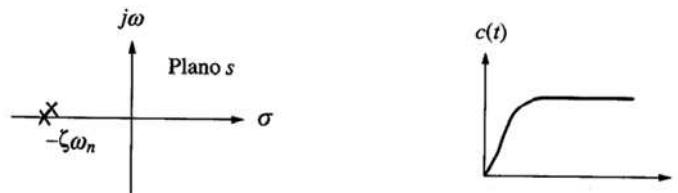


Figura A.13.: Respuesta dinámica críticamente amortiguada.

- d. Si $\xi > 1$, las dos raíces son reales y negativas. El sistema es “*sobreamortiguado*”.

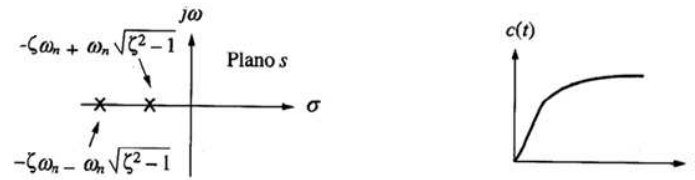


Figura A.14.: Respuesta dinámica sobreamortiguada.

A.7.1. Respuesta a escalón unitario de un sistema de segundo orden

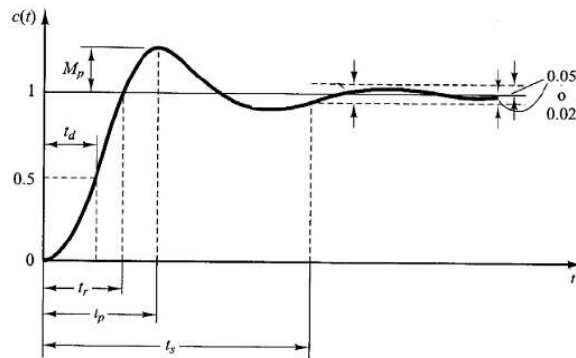


Figura A.15.: Respuesta a escalón unitario de un sistema de segundo orden.

Tiempo de Retardo (t_d)

Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

Tiempo de Levantamiento (t_r)

Es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90 %, del 5 al 95 % o del 0 al 100 % de su valor final. Para sistemas subamortiguados suele usarse un tiempo de levantamiento de 0 a 100 por ciento; y para sistemas sobreamortiguados del 10 a 90 %.

Tiempo Pico (t_p)

Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso.

Sobrepaso máximo (M_p)

Es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobre paso máximo.

Tiempo de Asentamiento (T_s)

Es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final y permanezca dentro de él.

A.8. Tipos de controladores clásicos

Se tiene que determinar la forma de tratar la señal de error para ejecutar las correcciones, de manera que la señal de salida sea la deseada, para que el sistema funcione adecuadamente. Por lo tanto la función principal de un controlador es la regulación, donde este tiene como objetivo cambiar la salida tantas veces como sea necesario para mantener la variable controlada en el valor deseado. Los diferentes controladores se mostrarán de manera resumida en la tabla A.1.

Tipo de control	Relación $\frac{u(t)}{e(t)}$	Función de transferencia
Controlador proporcional	$u(t) = K_p e(t)$	$\frac{U(S)}{E(S)} = K_p$
Controlador integral	$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$	$\frac{U(S)}{E(S)} = \frac{K_i}{S}$
Controlador PI	$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_i}{T_i} \int_0^t e(t) dt$	$\frac{U(S)}{E(S)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i S} \right)$
Controlador PD	$u(t) = K_p e(t) + K_d T_d \frac{de(t)}{dt}$	$\frac{U(S)}{E(S)} = K_p (1 + T_d S)$
Controlador PID	$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$	$\frac{U(S)}{E(S)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$

Tabla A.1.: Tipos de controladores clásicos.

A.9. Espacio de estados

La teoría de control moderno presenta una forma distinta de representar matemáticamente un sistema, debido a que la función de transferencia presentada en la teoría clásica no permitía interactuar con los parámetros de la planta, de modo que solo se tiene acceso a una sola variable a controlar y como los controladores clásicos solo permiten controlar una variable de salida, entonces estos se convierten en una limitante muy grande para sistemas de varias salidas. Dichos controladores no tienen en cuenta la dinámica de las otras variables diferentes a la controlada, ya que estas están ligadas directamente al sistema y donde estas afectan también el comportamiento del mismo, de manera que los controladores clásicos hacen un sacrificio en el comportamiento satisfactorio de unas variables del sistema para poder sostener el comportamiento deseado en la variable a controlar.

Debido a estos inconvenientes surge el concepto de *estado del sistema*, el cual, si permite la interacción del controlador directamente con los parámetros de la planta.

El aporte que realizó R. Kalman en 1960 al introducir el álgebra lineal y los modelos con variables de estado en la teoría de sistemas, permitió la solución a problemas lineales o no lineales, invariantes o variantes en el tiempo, con una o varias entradas y una o varias salidas; lo que en la teoría de control clásico está limitado y solo está permitido para sistemas lineales, invariantes en el tiempo, con una entrada y una salida.

Los diferentes tipos de sistemas se clasifican siempre en algunas de las siguientes alternativas:

1. Estático / Dinámico: Un sistema es estático si la salida en el tiempo t sólo depende del valor de la entrada en el mismo tiempo t , y es dinámico si la salida depende del valor de la entrada en ese tiempo y de la historia de la entrada, es decir, de lo que pasó previamente al tiempo t .
2. Escalar / Multivariable: Se dice que un sistema es escalar si se trata de un sistema que posee una entrada y una salida. Y se habla de un sistema multivariable si está definido para varias entradas y varias salidas.
3. Lineal / No Lineal: Un sistema es lineal si cumple con el teorema de superposición. Este dice que dado

el sistema cuya salida $y(t)$ esta descrita por una función de la entrada $u(t)$ de la forma $y(t)=f(u(t))$ entonces si $y_1(t)=f(u_1(t))$, e $y_2(t)=f(u_2(t))$ entonces $y_1(t) + y_2(t)=f(u_1(t) + u_2(t))$.

4. Variante en el tiempo / Invariante en el tiempo: El sistema es variante en el tiempo si sus parámetros varían con el tiempo. Si los parámetros son constantes en el tiempo, el sistema es invariante en el tiempo.

Luego de tener la clasificación del sistema, se puede hablar de espacio de estado, el cual esta ligado directamente con la derivación, y donde esta usa el Lagrangiano o el Hamiltoniano, los cuáles dependen directamente de las energías cinética y potencial del sistema, para la identificación y descripción del modelo en términos de variables de estado.

Entonces, esta nueva representación de los modelo dinámicos basada en los estados del sistema, se puede exponer de manera general en la figura A.16.

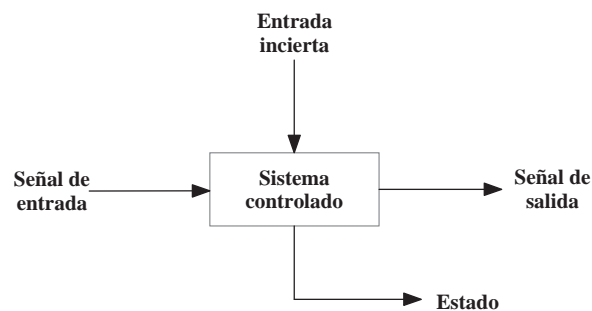


Figura A.16.: Sistema dinámico con salida en espacio de estados.

Dicha representación la componen diferentes elementos, los cuales son definidos a continuación:

- Estado: el estado de un sistema dinámico expone las condiciones pasadas, presentes y futuras, las cuales describen el comportamiento del mismo, en cualquier $t > t_0$
- Variable de Estado: Son las variables que componen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado dinámico del sistema en un instante dado. También se puede decir que las variables de estado pueden ser medibles o no, representar magnitudes físicas o solo matemáticas. Pero sin olvidar que deben ser equivalentes a los n elementos de almacenamiento de energía para sistemas dinámicos físicos de orden n .
- Vector de Estado: Es el vector que contiene como componentes las n variables de estado necesarias para describir el comportamiento de un sistema dinámico en un instante dado.
- Espacio de Estado: Es el espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por las variables de estado. eje x_1 , el eje x_2 , \dots , el eje x_n . De manera que cualquier estado se puede representar por un punto en el espacio de estado.
- Estado Inicial: Es definido por las variables de estado $x_1(t_0); x_2(t_0); \dots , x_n(t_0)$ para cualquier tiempo inicial $t = t_0$.
- Punto de Equilibrio: se define como punto(S) de equilibrio a todos aquellos valores de x para los cuales $f(t, x, u) = 0$.

A. Generalidades de control

- Salidas del Sistema: son las variables que pueden ser medidas y para los sistemas de control, son las variables seleccionadas para ser controladas. Estas salidas pueden representarse como la combinación lineal de variables de estado.
- Ecuaciones de Estado: Son ecuaciones diferenciales de primer orden utilizadas para modelar sistemas dinámicos.

A.9.1. Espacio de estados en tiempo continuo

El sistema en ecuaciones de espacio de estados queda como la muestra las ecuaciones (A.6) y (A.7).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (\text{A.7})$$

Donde:

$\dot{\mathbf{x}}(t)$ = vector n (vector de estado).

$\mathbf{y}(t)$ = vector m (vector de salida).

$\mathbf{u}(t)$ = vector r (vector de entrada).

\mathbf{A} = matriz $n \times n$ (matriz de estado o del sistema).

\mathbf{B} = matriz $n \times r$ (matriz de entrada o de control).

\mathbf{C} = matriz $n \times m$ (matriz de salida o de medición).

\mathbf{D} = matriz $m \times r$ (matriz de transmisión directa).

En la figura A.17 se muestra el sistema de control en tiempo continuo definido por las ecuaciones (A.6) y (A.7).

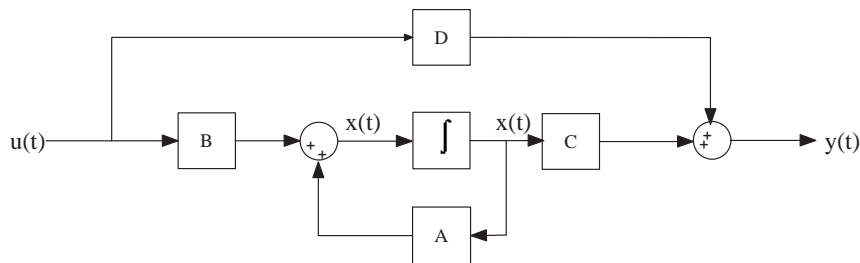


Figura A.17.: Sistema lineal en espacio de estados continuo.

Partiendo de las definiciones anteriores y la descripción de un sistema dinámico de control, se puede introducir el concepto de control por medio de la realimentación de variables de estado, y el cual tiene como diagrama de bloques la figura A.18.

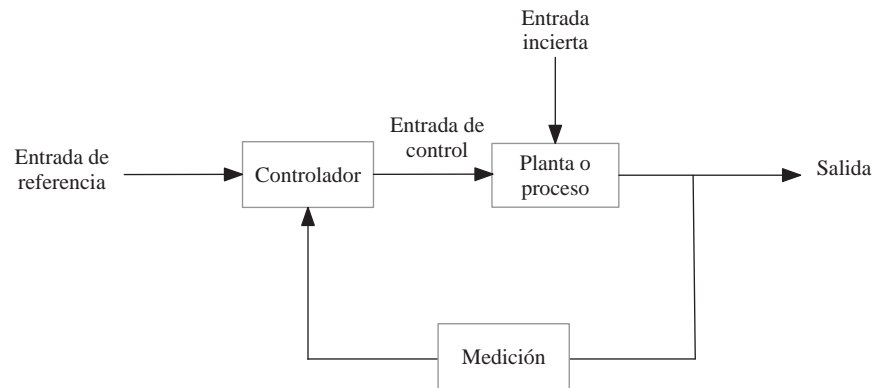


Figura A.18.: Esquema de un sistema realimentado de control.

El diagrama de bloques ofrece la solución a los inconvenientes y limitaciones que se presentan en el control clásico, y así reducir el problema de control al encontrar y seleccionar el mejor sistema de medición, el cual también se describe por medio de las ecuaciones de estado. El diseño del controlador busca definir la relación funcional más adecuada para generar la entrada de control u , de manera que el modelo del sistema, sometido a entradas de referencia y probablemente a perturbaciones, entregue una respuesta del estado $x(t)$ o una respuestas en la señal de salida $y(t)$ con características específicas (deseadas) o comportamiento aceptable.

El enigma principal para la solución de problemas de control en el modelo de espacio de estados, consta en la transferencia de estado del sistema $x(t)$ a otros valores definidos o cercanos (pasar de un estado a otro). Si el valor definido es constante (localización permanente) este problema es llamado control de regulación, si por lo contrario el valor es variante en el tiempo el problema es llamado control de seguimiento.

A.9.2. Espacio de estados en tiempo discreto

Los sistemas en tiempo discreto, los cuales involucran señales de datos muestreados o señales digitales y posiblemente señales en tiempo continuo, se pueden describir mediante ecuaciones en diferencias después de la apropiada discretización de las señales en tiempo continuo.

El muestreo de señales, reemplaza la señal en tiempo continuo por una secuencia de valores en puntos discretos de tiempo. esto se realiza siempre que un sistema de control involucra un controlador digital, puesto que es necesaria una operación de muestreo y una de cuantificación para ingresar datos a ese controlador. También, se da un proceso de muestreo cuando las mediciones necesarias para control se obtienen en forma intermitente.

El proceso de muestreo es seguido por un proceso de cuantificación, en donde la amplitud analógica muestreada se reemplaza por una amplitud digital (representada mediante un número binario). Entonces la señal digital se procesa por medio de un computador. La salida de la computador es una señal muestreada que se alimenta a un circuito de retención. La salida del circuito de retención es una señal en tiempo continuo que alimenta al actuador.

El término “discretización” en lugar de “muestreo” se utiliza con frecuencia en el análisis de sistemas con entradas y salidas múltiples, aunque ambos significan básicamente lo mismo.

En la figura [A.19](#) se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control discreto

A. Generalidades de control

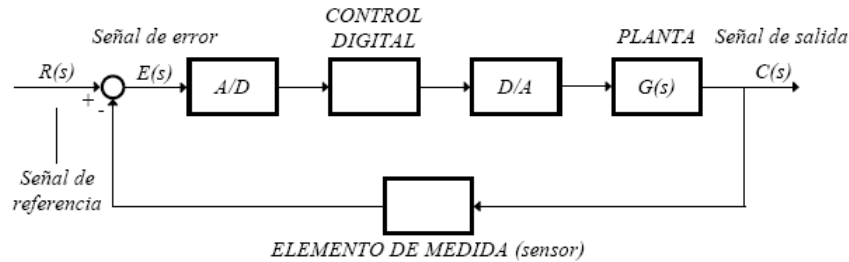


Figura A.19.: Diagrama de bloques de un sistema de control discreto.

- Control digital o discreto: Sistema procesador diseñado para que el sistema de control logre las especificaciones requeridas. Este sistema trabaja u opera en instantes de tiempo predeterminados, múltiplos del periodo de muestreo y es, por tanto, un sistema síncrono. La operatividad del sistema o su funcionamiento de procesado queda caracterizada plenamente mediante su ecuación en diferencias.
- Necesidad de interfaces A/D y D/A para convertir señales continuas en señales discretas y señales discretas en señales continuas, respectivamente. También es el elemento encargado de muestrear, mantener y codificar la señal continua para lograr una señal digital que actuará como señal de entrada del controlador digital. Su estructura se muestra en la figura A.20.

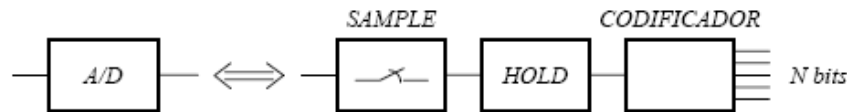


Figura A.20.: Estructura interna del bloque A/D.

El circuito de muestreo y retención (S/H, del inglés Sample-and-Hold) y el convertidor analógico-digital (A/D) convierten la señal en tiempo continuo en una secuencia de palabras binarias codificadas numéricamente. Dicho proceso de conversión A/D se conoce como codificación. La combinación del circuito S/H y el convertidor analógico-digital se puede visualizar como un interruptor que cierra instantáneamente en cada intervalo de tiempo T y genera una secuencia de números en código numérico. La computadora procesa dichos números en código numérico y genera una secuencia deseada de números en código numérico. El proceso de conversión digital-analógico (D/A) se denomina decodificación.

La mayoría de los conceptos de Espacio de estados para sistemas lineales continuos puede trasladarse directamente a sistemas discretos, descritos por ecuaciones en diferencia. En este caso la variable temporal t sólo asume valores en un conjunto denumerable (cuyos elementos pueden “contarse”).

Cuando el sistema discreto se obtiene a partir de un muestreo de un sistema continuo, vamos a considerar sólo el caso de muestreo regular, donde $t=kT$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, donde T es el período de muestreo. En este caso se denotará las variables discretas (secuencias) como $u[k]$, o $u(kT)$.

Los conceptos de dimensión finita, causalidad, linealidad y el principio de superposición de las respuestas debido a condiciones iniciales y entradas, son exactamente como en el caso continuo.

Nota: a diferencia del caso continuo, retardos puros no dan lugar a un sistema de dimensión infinita si el retardo es un múltiplo del período de muestreo T_m .

Todo sistema discreto lineal finito-dimensional puede describirse mediante Espacio de estados (en diferencias)

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= f(x(kT), u(kT)) \\ y(kT) &= g(x(kT), u(kT)) \end{aligned}$$

donde $x(kT)$, $u(kT)$ e $y(kT)$ son los vectores de estado, de entrada y de salida respectivamente.

A partir de estas ecuaciones vemos que, dado el estado inicial $x(0)$ y los valores de las entradas $u(0)$, $u(T)$, $u(2T), \dots, u(kT)$, se puede deducir unívocamente la evolución del estado $x(T)$, $x(2T), \dots, x((k+1)T)$ y la evolución de la salida $y(0)$, $y(T), \dots, y(kT)$.

La forma general del modelo de estado para un sistema de tiempo discreto queda como la muestra las ecuaciones (A.8) y (A.9).

$$X(k+1) = \mathbf{F}x(k) + \mathbf{G}u(k) \tag{A.8}$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k) \tag{A.9}$$

Donde:

- $x(k)$ = vector n (vector de estado).
- $y(k)$ = vector m (vector de salida).
- $u(k)$ = vector r (vector de entrada).

- F = matriz $n \times n$ (matriz de estado o del sistema).
- G = matriz $n \times r$ (matriz de entrada o de control).
- C = matriz $n \times m$ (matriz de salida o de medición).
- D = matriz $m \times r$ (matriz de transmisión directa).

En la figura A.21 se muestra el sistema de control en tiempo continuo definido por las ecuaciones (A.8) y (A.9).

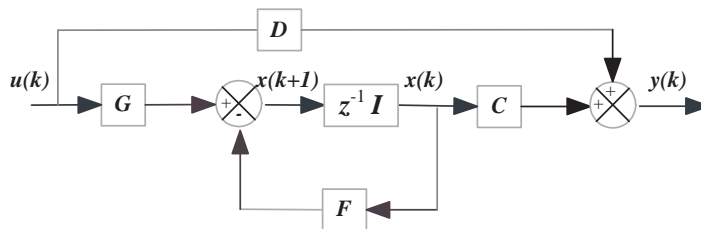


Figura A.21.: Diagrama de bloque de un sistema en tiempo discreto

Se presentara un procedimiento para la discretización de las ecuaciones en el espacio de estado en tiempo continuo.

A. Generalidades de control

Las matrices $[F]$ y $[G]$ dependen del periodo de muestreo T , Pero una vez fijo el periodo de muestreo, F y G son matrices constantes.

Para determinar $F(T)$ y $G(T)$, se utiliza la ecuación (A.10), solución (A.6).

$$x(T) = e^{AT}x(0) + \int_0^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (\text{A.10})$$

Se supone que la entrada $u(t)$ es muestreada y alimentada a un retenedor de orden cero, de forma que todos los componentes de $u(t)$ sean constantes en el intervalo entre dos instantes de muestreo consecutivo cualesquiera, es decir:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT), \text{ para } kT \leq t \leq kT + 1 \quad (\text{A.11})$$

En vista de que:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{A(k+1)T}\mathbf{x}(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{A.12})$$

y

$$\mathbf{x}(kT) = e^{AkT}\mathbf{x}(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{A.13})$$

al multiplicar la ecuación (A.13) por e^{At} y restarla de la ecuación (A.12) se tiene:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{AT}\mathbf{x}(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Dado que la ecuación (A.11), se puede sustituir $\mathbf{u}\tau=\mathbf{u}(kT)=\text{constante}$ en esta última ecuación. (Se observa que $\mathbf{u}\tau$ puede tomar un valor en $t=kT + T$, es decir, $\mathbf{u}(kT + T)$, que puede ser distinto de $\mathbf{u}kT$. Este valor en $\mathbf{u}\tau$ con $\tau=kT + T$, que es el limite superior de la integración, no afecta el valor de la integral en esta última ecuación, ya que el integrando no incluye funciones impulso). Por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{AT}\mathbf{x}(kT) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)dt \\ &= e^{AT}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{-A\lambda}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde $\lambda=T - t$. Si se definen:

$$\mathbf{G}(T) = e^{AT} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) \mathbf{B} \quad (\text{A.16})$$

entonces la ecuación (A.14) se convierte:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \quad (\text{A.17})$$

Entonces de las ecuaciones (A.15) y (A.16) dan las matrices deseadas $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$. Se puede notar que $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$ dependen del periodo de muestreo T . Con referencia a la ecuación (A.7), la ecuación de salida se convierte en:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \quad (\text{A.18})$$

donde las matrices \mathbf{C} y \mathbf{D} son matrices constantes y no dependen del tiempo de muestreo T . Si la matriz \mathbf{A} es no singular, entonces $\mathbf{H}(T)$ dada por la ecuación (A.16) se puede simplificar a:

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}T} \right) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{B} = (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{A.19})$$

A. Generalidades de control

BIBLIOGRAFÍA

- [1] DIDIER GIRALDO Ing Electricista, MEE, EDUARDO GIRALDO Ing Electricista, M.Sc. (Grupo de Investigación en Control Automático) “ APLICACIÓN DE UN CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO USANDO UN OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO SOBRE UN PUENTE GRÚA.” *Scientia et Technica* Año XIII, No x, Mes de 200x. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701 1
- [2] Zhonghua Wang, Brian W. (Mem. ASME) “A Problem With the LQ Control of Overhead Cranes” *Department of Mechanical and Materials Engineering, Queen’s University, Kingston, Ontario, K7L 3N6, Canada*
- [3] Ziyad N. Masoud and Mohammed F. Daqaq “A Graphical Approach to Input-Shaping Control Design for Container Cranes With Hoist” *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, VOL. 14, NO. 6, NOVEMBER 2006
- [4] Giorgio Corriga, Alessandro Giua, Member, IEEE, and Giampaolo Usai “An Implicit Gain-Scheduling Controller for Cranes” *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, VOL. 6, NO. 1, JANUARY 1998 15
- [5] ARTO MARTTINEN, JOUKO VIRKKUNEN, AND RIKU T. SALMINEN “Control Study with a Pilot Crane” *IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION*, VOL. 33, NO. 3, AUGUST 1990
- [6] Cheng-Yuan Chang “The Switching Algorithm for the Design of Crane Controller” *Department of Electronic Engineering Ching Yun University Chung-Li, Taiwan 320, R.O.C.*
- [7] J.W. Auernig and H. Troger, “Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the load” *Automatica*, vol. 23, no. 4, pp. 437-447, 1987.
- [8] Carlos A. Coello Coello, “Introducción a la computación evolutiva (Notas de Curso)” *CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica Sección de Computación Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508 Col. San Pedro Zacatenco, México, D.F., 2004.*
- [9] Mitchell Melanie, “An Introduction to Genetic Algorithms” *Massachusetts Institute of Technology Massachusetts - London, 1999.*
- [10] Manuel Parrilla Sanchez, “Desarrollo e implementación de una metodología para el diseño de sistemas de control mediante algoritmos evolutivos multiobjetivo (Tesis doctoral)” *UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA, ETS de Ingeniería Informática, Departamento de Informática y Automática Madrid - España, 2006.*
- [11] Natyhelem Gil Londoño, “Algoritmos Genéticos (Monografía)” *Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Estadística Medellín - Colombia, 2006.*
- [12] Coello Coello, Carlos A.: Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 1245-1287, 2002.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] Coello Coello, C. A.; Van Veldhuizen, D. A, and Lamont, G. B.: ” *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. New York: Kluwer Academic, 2002.
- [14] Coello Coello, C. A.; Hernández Aguirre, Arturo, and Zitzler, Eckart (Eds.): ’ *Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Proceedings of the Third Internacional Conference, EMO 2005, Guanajuato, Mexico, March 9-11, 2005*. Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3410. Springer. 2005.
- [15] Ogata, K.: ’ *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice-Hall, 4 edición, 2003.
- [16] Ogata, K.: *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice-Hall, 2 edición, 1996. Capítulos 5 y 6
- [17] Javier Aracil Fabio Gomez-Estern *Apuntes de Regulación Automática* Ingeniera Electrónica
- [18] Astrom, Wittenmark *Computer Controlled Systems (3rd edition)*
- [19] Spartacus Gomáriz - Domingo Biel José Matas - Miguel Reyes *Teoría de control Diseño electrónico (2 edición) 2001*
- [20] Ollero B. , Aníbal *CONTROL POR COMPUTADOR: Descripción interna y Diseño Optimo* Marcombo B. E., 1991
- [21] Ricardo Julian Mantz *Introducción al control optimo* universidad nacional de la plata
- [22] Lawrence C. Evans *AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL OPTIMAL CONTROL THEORY* Department of Mathematics University of California, Berkeley
- [23] BRIAN D. O. ANDERSON JOHN B. MOORE *Optimal Control LINEAR QUADRATIC METHODS* Department of Systems Engineering Australian National University, Canberra
- [24] Kuo B. C., *Sistemas de Control Digital*, CECSA, 1992, Capítulo 10.
- [25] Ramon A. Gallego Rendon - Antonio H. Escobar Zuluaga - Ruben A. Romero Lazaro *TECNICAS DE OPTIMIZACION COMBINATORIAL* Universidad Tecnológica de Pereira (1 Edicion) 2006