ACCIÓN DE GRUPOS, DE LAGRANGE A NUESTROS DÍAS

Group Actions, since Lagrange to present time

OSCAR FERNÁNDEZ SÁNCHEZ
M.Sc. Matemáticas, Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

LUIS EDUARDO OSORIO ACEVEDO
M.Sc. Enseñanza de las Matemáticas, Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
leosorio@utp.edu.co

RESUMEN
En este artículo se muestra como la acción de grupos aparece desde los inicios de la teoría de grupos con los trabajos en teoría de permutaciones de Lagrange y la teoría de Galois, se pasa por los aportes a la teoría de grupos continuos finitos de transformaciones de Sophus Lie y los aportes hechos a la solución del quinto problema de Hilbert propuesto en 1900 sobre la teoría de grupos de Lie, hasta las investigaciones en el campo de C^*-álgebras y geometría pseudo-Riemanniana, donde aparece el concepto de acción propia, la cual permite generalizar algunos resultados obtenidos para grupos compactos.

PALABRAS CLAVES: acción de grupos, acción propia, grupos de Lie.

ABSTRACT
In this article show as group action appears from the beginnings of group theory with works in Lagrange's permutations theory and Galois theory, through by contributions in finite continuous transformation group theory of Sophus Lie and contributions done to the solution of the fifth Hilbert's problem proposed in 1900 on Lie groups theory, until arriving at the investigations in the field from C^**-algebras and pseudo-Riemannian geometry, where appears involved the concept of proper group actions, which allows to generalize some results that had been obtained for compact groups.*

KEYWORDS: *groups action, Lie group, proper action.*

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de acción de grupos no es profundizado dentro de la teoría de grupos, es común que aparezca como herramienta en otras ramas, algunas de ellas como la teoría de ecuaciones algebraicas, sistemas dinámicos, variedades diferenciales, entre otros; esto debido a la aplicación del concepto en dichas ramas, por ejemplo, algunas variedades diferenciales son construidas como cocientes por acciones de grupos en otras variedades. Para tener una idea básica, la botella de Klein se puede definir como el cociente de $S^1 \times S^1$ por la acción de un grupo de orden 2, el grupo se puede asumir como el grupo $\mathbb{Z}_2$.

Con Lagrange se vislumbra la acción de un grupo de permutaciones sobre las raíces de un polinomio, lo cual fue clave para resolver el problema de la solución por radicales de las ecuaciones polinomiales. Entonces se tiene que la acción de grupos es un concepto anterior a la noción de grupo, a partir de ciertas acciones se abstrajo el concepto moderno de grupo. La acción de un grupo es un concepto simple, pero esta misma sencillez ha permitido que se haya expandido a varias ramas de la matemática y ha sido usado para la solución del quinto problema de Hilbert formulado en 1900, *el concepto de Lie sobre grupo continuo de transformaciones sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo*.

Fecha de Recepción: 26 de enero de 2009
Fecha de Aceptación: 27 de marzo de 2009

Para ampliar resultados sobre grupos compactos, se introduce la noción de acción propia, que actualmente es necesaria en áreas como teoría de C^*-algebras, geometría Riemanniana o geometría pseudo-Riemanniana.

En la sección 2 se muestran algunas definiciones y resultados relevantes sobre las acciones de grupos. En la sección 3, se hace una presentación de la evolución que ha tenido el concepto de la acción de grupos desde los trabajos de Lagrange hasta los aportes de investigadores como P. Baum, A. Connes, N. Higson y T. Kobayashi, en el área de las C^*-álgebras, los tres primeros y la geometría pseudo-Riemannianas, el último.

2. PREELIMINARES

Definición 1. Sea X un conjunto y G un grupo. Una acción de G en X es una función $\theta : G \times X \to X$, tal que satisface las siguientes dos condiciones:

1. $\theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G y
2. $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$ para todo $x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$.

Ejemplo 2. Considérense las raíces n-ésimas de la unidad $\omega_0 = e^{0i}$, $\omega_1 = e^{i/n}, \ldots, \omega_{n-1} = e^{(n-1)i/n}$.

Sea $G = \mathrm{Z}_n$ el grupo de los enteros módulo n bajo la adicción y $X = \mathrm{X}$. La aplicación $\theta: \mathrm{Z}_2 \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ dada por $\theta(k, z) = \omega_k z$ con $0 \le k < n$, define una acción de Z_n sobre X, la cual rota en sentido horario a z sobre una circunferencia de radio $|z|$ al número z un ángulo $2k\pi / n$ (figura 1).

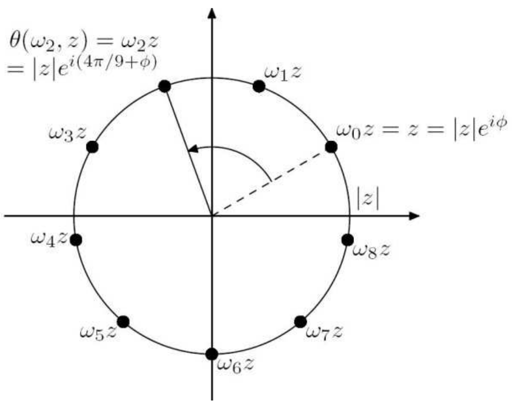

Figura 1: Acción aplicada a $z \in \mathrm{X}$, para n=9.

En efecto es una acción, porque

1. Se cumple que el neutro $0 \in \mathrm{Z}_n$ actúa como la identidad, $\theta(0, z) = \omega_0 z = z$ y,
2. Si se rota por $2k_1\pi / n$, y después por $2k_2\pi / n$, es la misma rotación hecha directamente por $2(k_1 + k_2)\pi / n$.

Cuando el grupo G es grupo topológico y X es un espacio topológico, se puede reemplazar $End(X)$ por $Hom(X)$ el conjunto de los homeomorfismos de X. De manera similar, cuando el grupo G es grupo de Lie, y X es variedad suave, se puede reemplazar $Hom(X)$ por $Dif(X)$, el conjunto de los difeomorfismos de X. Desde este último caso, se dará la definición de acción propia, con la cual se extendieron teoremas sobre grupos compactos, a grupos no compactos.

3. RECORRIDO HISTÓRICO DE LAS ACCIONES DE GRUPOS

Cuando se busca sobre el origen de la teoría de grupos, se pone en evidencia (sin haberse definido para la época) la acción de un grupo sobre un conjunto. Se podría decir que el primer matemático que estudió los problemas de teoría de grupos fue Lagrange, cuando estudiaba las permutaciones de las variables en un polinomio, en su memoria de 1771, "*Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations*", que trata sobre los métodos para resolver por radicales las ecuaciones polinómicas de grado menor que 4 que no valen para ecuaciones de grado mayor. Esto lleva a considerar funciones racionales de las raíces y su comportamiento bajo permutaciones de las raíces. En el caso general del polinonio de grado n, la idea de Lagrange es considerar funciones racionales de las raíces y los coeficientes. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces del polimonio de grado n, dos funciones racionales de estas raíces $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se dice que son similares si todas las permutaciones de las raíces que dejan invariante a g también dejan invariante a h. En terminología actual la pregunta de Lagrange se puede formular de la siguiente manera: Sea $\sigma \in S_n$, donde S_n es el grupo de permutaciones, defínanse los polinomios:

$$p^{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = p(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}),$$

dado el polinomio p, cuántos polinomios distintos p^{σ} existen?. Obsérvese que esta es la acción del grupo de simetrías sobre el conjunto de polinomios de n variables. Luego desde sus inicios, la teoría de grupos estaba relacionada con la acción de grupo sobre un conjunto. Aunque Lagrange no dio una prueba para la no solución por radicales de la quintica, sus ideas fueron fuente de inspiración para Evaristo Galois. La resolución de ecuaciones fue el problema para el que Galois desarrolló la teoría de grupos. Se podría decir que históricamente la primera acción de grupo estudiada fue la acción del grupo de Galois en las raíces de un polinomio.

Aunque la idea fundamental para el concepto de grupo abstracto fue sembrada en muchas ramas de matemáticas como la geometría, la teoría de números; pero fue en la teoría de ecuaciones, en la búsqueda de soluciones radicales a ecuaciones algebraicas, donde los grupos abstractos evolucionaron con las ideas de Lagrange, Abel y Galois. Al observar que existen propiedades de los objetos que permanecen invariantes respecto a algunos movimientos o transformaciones, la noción básica de grupo abstracto evoluciona a la teoría del grupo de transformaciones. Reconocer la importancia de describir un conjunto de transformaciones como un grupo se originó en la teoría de Galois. La noción moderna de grupo se puede remontar a dicha teoría donde fue por vez primera introducido el concepto en su forma presente. Si se considera un conjunto X dotado con alguna estructura matemática, el grupo de transformaciones, es el conjunto de transformaciones que preservan esta estructura. En la teoría de Galois, por ejemplo, el conjunto X es también un campo, y cada transformación es un automorfismo del campo. Como otro ejemplo, X puede ser un espacio topológico y cada transformación una aplicación continua. Recíprocamente cuando estudiamos un grupo en sí mismo, a menudo se puede obtener mucha información haciéndolo operar en varios conjuntos de diferentes maneras, como un grupo

de transformaciones. A partir de los grupos de transformaciones no solo se estudian los elementos geométricos, sino también los algebraicos o analíticos.
El párrafo anterior es un preámbulo para adentrarse en los trabajos de Sophus Lie y Felix Klein. El primero de ellos quería conseguir para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales una teoría semejante a la que Galois había conseguido para las ecuaciones algebraicas, es decir, relacionar la teoría de grupos con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Pensó en obtener una teoría geométrica a partir de encontrar invariancias por ciertas transformaciones que caracterizaran a estas ecuaciones. A una ecuación diferencial en derivadas parciales le asoció una familia finita de transformaciones, de esta manera Lie desarrollo su teoría de grupos continuos finitos de transformaciones, (llamadas así por el mismo Lie), en los años 1874-1893. Es de anotar que para Lie, un grupo de transformaciones es una familia de aplicaciones $y = f(x,a)$, donde x es la variable independiente, varía sobre una región en un espacio euclidiano real o complejo, para cada valor fijo a, la identidad $y = f(x,a)$ describe una aplicación invertible, la colección de parámetros a también varía en una región de P^n o X^n, y f como función de ambos x y a, es analítica real o compleja. Más importante aún, la familia es cerrada bajo la operación composición. Para dos parámetros distintos a, b la composición de las correspondientes aplicaciones pertenece a la familia, es decir $f(f(x,a),b) = f(x,c)$ con $c = \varphi(a,b)$ que depende analíticamente de a y b, pero no de x.
Las familias que Lie había encontrado son lo que actualmente se conocen con el nombre de grupos de Lie (todos ellas de dimensión finita). De este modo, buscaba una clasificación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a partir de los grupos continuos finitos de transformaciones. Referente a Klein cabe resaltar la famosa e importante conferencia "*A Comparative Review of Recent Researches in Geometry*", que entregó en 1872 para su admisión a la facultad de la universidad de Erlangen. Dicha conferencia ahora clamada como *el programa de Erlangen*, era la clasificación de la geometría como el estudio de las propiedades que son invariantes bajo un grupo de transformaciones dado (otra forma de decirlo es el estudio de las propiedades que son invariantes bajo cierta acción de grupo). De esta manera, Klein usó los grupos, dio orden y definió lo que se entendía por geometría.
Los grupos continuos finitos de transformaciones, introducidos por Sophus Lie, llamados actualmente grupos de Lie pueden definirse como aquellos grupos que admiten un sistema de coordenadas locales respecto del cual las operaciones de grupo multiplicación e inversión son analíticas, han abarcado ramas diversas de las matemáticas y la física, mucho más de lo esperado por el mismo Lie. Esta teoría ha despertado grandes inquietudes, por ejemplo *el quinto problema de Hilbert*, de la lista de problemas de Hilbert dada en el año 1900 en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Paris, titulada "*Problemas Matemáticos*". Hilbert presentó una lista de problemas extraídos de diversas ramas de la matemática que, según él, sus soluciones significarían un gran avance para la ciencia. De los problemas propuestos por Hilbert el quinto problema se relaciona con la clasificación de los grupos de Lie, y fue enunciado por él así[1]: *El concepto de Lie sobre grupo continuo de transformaciones sin asumirla diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo*[2].
Si se toman literalmente los detalles técnicos que acompañan el enunciado de este problema, lo preguntado por Hilbert es falso, (si se considera que faltaron 50 años más para que estuviera lista la definición de variedad, la cual es fundamental para la noción actual de grupo de Lie), en [50] pg. 144 aparece una explicación de esta aseveración. En consecuencia, por consenso general, lo que la comunidad matemática asumió como el quinto problema de Hilbert dice en términos simples: ¿Es cualquier grupo localmente euclídeo un grupo de Lie?.
En los años veinte del siglo *XX* se introduce el concepto general de grupo topológico. El primer resultado importante a la solución del quinto problema de Hilbert lo dio John von Neumann "*Die Einf uhrung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math.34 (1933), 170-190*" para grupos compactos, los cuales ya en este instante habían sido bastante estudiados. El caso de grupos abelianos localmente compactos fue solucionado en 1934 por Lev Pontryagin "*Topological Groups, Princeton Univ. Press, 1939*" y la resolución final, al menos en esta interpretación de lo que Hilbert quiso decir, apareció en dos artículos publicados en el Annals of Mathematics de 1952, uno por Andrew Gleason "*Groups without small subgroups, Ann. of Math. 56 (1952), 193-212*", y otro por Deane Montgomery y Leo Zippin "*Small subgroups of finite-dimensional groups, Ann. of Math. 56(1952), 213-241*". Una versión un poco distinta y más general del problema formulado por Hilbert, es enunciada de la siguiente manera: Suponga que G es un grupo topológico localmente euclídeo y M es un espacio topológico localmente euclídeo, sea $\theta : G \times M \to M$ una acción continua de G en M. ¿Es posible entonces elegir las coordenadas en G y M de tal modo que la acción θ sea analítica real?. En otras palabras: ¿Es posible dar a las variedades topológicas G y M estructuras analíticas reales de manera que θ sea analítica real? Para el caso especial de

[1] La versión en inglés es: "Lie's concept of a continuous group of transformations without the assumption of the differentiability of the functions defining the group".

[2] La versión más común del quinto problema de Hilbert pregunta si cada grupo topológico localmente euclídeo es un grupo de Lie. Más precisamente, si G es un grupo topológico localmente euclídeo, existe una C^{ω}-estructura en G tal que las operaciones de grupo sean C^{ω}.

$G = M$ y $\theta : G \times G \rightarrow G$ es la operación del grupo G la respuesta a la pregunta de Hilbert es afirmativa y este es el caso descrito previamente. La respuesta a la pregunta si la acción θ puede volverse analítica real, es en general no. R.H. Bing en su artículo "*A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, Ann. of Math.56 (1952), 354-362*" construyó un ejemplo de una acción continua de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{P}^3$ que no podía ser diferenciable y por lo tanto ni siquiera analítica. En 1954 Montgomery y Zippin en el artículo "*Examples of transformation groups, Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954),460-465*" ampliaron el ejemplo de Bing para dar un ejemplo de una acción continua de S^1 en $\mathbb{P}^4$ que no podía ser diferenciable. En efecto la respuesta a la pregunta de Hilbert si se puede volver analítica real es no, inclusive en el caso más simple, cuando G es el grupo trivial $\{e\}$, puesto que existen variedades topológicas que no pueden tener ninguna estructura diferenciable se sigue que no pueden tener ninguna estructura analítica real, M.A. Kervaire muestra esto en "*A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv. 34(1960), 257-270*".

Para ampliar el desarrollo del problema de Hilbert, considérese lo siguiente: Se dice que una acción de un grupo de Lie G, en un espacio localmente compacto X, es propia si el subconjunto

$$G_K = \{g \in G : g \cdot K \cap K \neq \varnothing\}$$

es un subconjunto compacto de G para cada subconjunto compacto K de X. También una acción de G en X es llamada de Cartan, si cada punto en X tiene una vecindad compacta tal que G_K sea compacto, como consecuencia cada acción propia es de Cartan, pero el recíproco no siempre se cumple. Además, en el caso cuando G es un grupo discreto la noción de una acción propia coincide con la noción clásica de una acción propiamente discontinua. En 1995 S. Illman en su artículo "*Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fth problem, Ann. of Math. Stud. 138 (1995), 189-220*". En el cual se formula y demuestra el siguiente teorema:

Teorema. Sea G un grupo de Lie que actúa en una variedad M por una acción suave C^1 y Cartan. Entonces existe una estructura analítica real en M, compatible con la estructura suave dada, tal que la acción de G se vuelve analítica real.

Este resultado da una respuesta positiva a la pregunta general en el quinto problema de Hilbert, se hace necesaria la hipótesis ya que existen acciones C^∞ no de Cartan de grupos de Lie que no pueden volverse analíticas reales. Es de anotar que el Teorema en particular se aplica en caso de acciones propias, y así cuando G es un grupo discreto, en el caso de acciones propiamente discontinuas. El caso cuando G es compacto (y así cada acción de G es propia), fue probado por T. Matumoto y M. Shiota en "*Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications in: Homotopy Theory and Related Topics, Adv. Stud. Pure Math., vol. 9, Kinokuniya, Tokyo, 1986, 41-55*", y por R.S. Palais en "*C^1-actions of compact Lie groups on compact manifolds are C^1-equivalent to C^1- actions, Amer. J. Math. 92 (1970), 748-760*", aunque el método de su prueba no puede ser aplicado al caso G no compacto.

Si G es un grupo topológico entonces por un G-espacio se quiere decir un espacio completamente regular X junto con una acción fija de G en X. Al considerar la restricción de que los grupos de Lie sean compactos se desarrolla una teoría importante de los G-espacios. Sin embargo, al eliminar esta restricción y permitir que G sea más que un grupo de Lie compacto, los teoremas sobre los G-espacios dejan de ser ciertos y disminuyen los resultados. Un resultado importante cuando G es un grupo de Lie compacto obtenido por Gleason [16], Koszul [32] Montgomery y Yang [38] y finalmente en plena generalidad por Mostow [41] es la existencia de una "*rebanada*" ("*slice*")[3] por cada punto de un G espacio.

La teoría de acciones propias de grupos de Lie fue introducida en Palais [46] (1961) donde utiliza la definición de acción propia para demostrar el teorema del "*slice*" en el caso cuando el grupo es no compacto. En este artículo demostró que la hipótesis de ser propia es suficiente para afirmar que las propiedades principales de grupos de Lie compactos las acciones se satisfacen, entre ellas el teorema del "*slice*". Dichas propiedades, fueron obtenidas con anterioridad por Gleason, Koszul, Montgomery y Yang, y Mostow.

Se observa así como las acciones propias surgen de la necesidad de extender resultados obtenidos para espacios con acciones de grupos de Lie compactos. Cuando G es un grupo discreto la noción de propia coincide con la noción clásica propiamente discontinua y esto posiblemente condujo a la escogencia de su nombre. En términos de Bourbaki [10], la denominación de acción propia proviene de que la aplicación $\Phi : G \times X \rightarrow X \times X$ que envía el par (g, x) en $(g \cdot x, x)$ es propia en sentido geométrico, es decir, cerrada y tal que la preimagen de cada punto es compacta, esta denominación es más general que la

[3] Para la definición y formulación del teorema del "*slice*"', se puede consultar el artículo de R.S. Palais [46]

presentada por Palais en [46] y más general que la dada en la definición 3[4].
El interés por la teoría de acciones propias aumentó desde la formulación de la conjetura de Baum-Connes, que como es reformulada en [2] establece lo siguiente:
Conjetura. Sea G un grupo topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable, y sea $\underline{E}G$ el ejemplo universal para acciones propias de G, entonces los K-grupos algebraico-topológicos de la C^*-álgebra de G, denotados por $K_j\left(C_r^*(G)\right)$[5], son isomorfos a los grupos de K-homología equivariante de Kasparov, denotados por $K_j^G\left(\underline{E}G\right)$, para $j=0,1$[6].

Pero no solo los trabajos de investigación se limitan a la conjetura de Baum-Connes. La teoría de Grupos de Lie tuvo grandes avances en el siglo *XX*, lo que incluye las generalizaciones del caso compacto al no compacto, de variedades Riemannianas a pseudo-Riemannianas, representaciones finitas a representaciones infinitas, que junto con esto y nuevos métodos de investigación, se profundizó en varias áreas de la matemática como ecuaciones diferenciales, análisis funcional, geometría diferencial y geometría algebraica. Con esto se suma el desarrollo de la teoría de grupos cuya acción es propiamente discontinua (grupos discretos cuya acción es propia) en variedades pseudo-Riemannianas inicialmente estudiado por Toshiyuki Kobayashi, a mediados de la década de 1980. Ahora las ideas acerca de la acción de este tipo de grupos en espacios homogéneos no Riemannianos se han relacionado con muchas áreas de las matemáticas, por ejemplo, no solo la teoría de grupos de Lie y la teoría de grupos discretos, sino también geometría diferencial, álgebra, teoría ergódica, sistemas mecánicos, teoría de representación unitaria y otros. Algunos de los artículos de Kobayashi se centran en acciones propias en un espacio homogéneo de tipo reductivo [25], [26], [27], [28], [29], [30] y [31] donde logra dar una caracterización de las acciones propias para este tipo de espacios.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una breve introducción histórica y evolución del concepto de acción de grupos. Como se pasa de la teoría de ecuaciones algebraicas a la teoría de grupos continuos finitos de transformaciones (grupos de Lie) con los aportes de Sophus Lie, cuya teoría a su vez, al requerir la diferenciabilidad de las operaciones de grupo, permite a Hilbert plantear sobre la necesidad de la diferenciabilidad de estas operaciones para que el grupo sea grupo de Lie, en su lista de *problemas matemáticos* en 1900 (quinto problema).
Tanto la formulación como la solución al quinto problema de Hilbert se generaliza, hasta llegar al artículo de S. Illman "*Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fth problem, Ann. of Math. Stud. 138 (1995), 189-220*". En el cual presenta la demostración a un problema más general que el propuesto por Hilbert. En el artículo de Illman aparece el concepto de acción propia, la cual es necesaria para ampliar a grupos no compactos algunos resultados que se habían obtenido para grupos compactos. El interés de la definición acción propia aumenta, al aparecer en la conjetura de Baum-Connes, un tema de la teoría de C^*-álgebras y en las investigaciones de Toshiyuki Kobayashi sobre la caracterización de acciones propias en espacios homogéneos de tipo reductivo.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] M.A. Armstrong. *Topología Básica*. Editorial Reverté S.A, 1987.
[2] P. Baum, A. Connes, N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-Theory of group C^*-Algebras*, Contemp. Math. 167 (1994), pp.241-291.
[3] P. Baum, P. M. Hajac, R. Matthes, W. Szymánski. *Non-commutative geometry approach to principal and associated bundles*. To appear in book Quantum Symmetry and Noncommutative Geometry (ed. By P. M. Hajac), 2006.
[4] A. Becker. *Matrix groups, An Introduction To Lie Groups*. Springer, 2002.
[5] E.T. Bell. *Los Grandes Matemáticos*. Preparado por Patricio Barros. Edición en internet: http://www.geocities.com/grandesmatematicos/index.html.
[6] H. Biller. *Proper actions on cohomology manifolds*, Preprint 2182, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2001. Edición en internet: http://wwwbib.mathematik.tu-armstadt.de/Preprints/shadows/pp2182.html.
[7] H. Biller. Characterizations of Proper *Actions*, Preprint 2211, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2001, Edición en internet: http://wwwbib.mathematik.tu-armstadt.de/Preprints/shadows/pp2211.html.
[8] R.H. Bing. *A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres,* Ann. of Math.56 (1952), 354-362.
[9] F. Brickell, R.S. Clark. *Differentiable Manifolds an introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
[10] N. Bourbaki. *General topology*, Part 1, Hermann, Paris and Addison-Wesley, Reading, 1966, the translation of Topologie Generale, Hermann, Paris.

[4] En este artículo, la noción de **aplicación propia** dada por Bourbaki [10], corresponde a la definición de **aplicación perfecta** que se encuentra por ejemplo en [14] o [42].

[5] $C_r^*(G)$ denota la C^*-álgebra reducida de G.

[6] Para las definiciones respectivas presentadas en esta conjetura se recomiendan leer [2] y [36].

[11] W.M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2a Ed. Academic press, inc, 1986.
[12] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1993.
[13] J. Dugundji. *Topology*, Allyn and Bacon, 1970.
[14] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann, 1989
[15] J. Fraleigh. *Algebra Abstracta-3aEd*. Addison Wesley Iberoamérica, 1967.
[16] A. Gleason. *Spaces with a compact Lie group of transformations*, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 35-43.
[17] V. Guillemin, Yael Karshon, Viktor L. Ginzburg. *Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*. AMS, 2002.
[18] I.N. Herstein. *Algebra Moderna* Editorial Trillas México, 1964.
[19] K.H. Hofmann, S.A. Morris. *The structure of compact groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 2006
[20] S. Illman. *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fth problem,* Ann. of Math. Stud. 138 (1995), 189-220.
[21] S. Illman. *Hilbert's fifth problem and proper actions of Lie groups*, Current Trends in transformation groups, 1-23, K-Monogr. Math., 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002
[22] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. press, New York, 1991.
[23] M.A. Kervaire. *A manifold which does not admit any differentiable structure,* Comment. Math. Helv. 34(1960), 257-270.
[24] Kobayashi, Shoshichi- Nomizu, Katsumi. *Foundations of differential geometry*, Vol I, Vol II. John Wiley & Sons, 1963.
[25] T. Kobayashi. *Discontinuous Groups for Non-Riemannian Homogeneous Spaces* -2001. Edición en internet: www.akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/texdvi/Kobaya3.pdf
[26] T. Kobayashi. *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory, 6 (1996), 147-163. Edición en internet: http://www.emis.de/journals/JLT/vol.6 no.2
[27] T. Kobayashi. *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285. (1989), 249-263.
[28] T. Kobayashi. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces-revisited*. Edición en internet: www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/_le/RIMS1537.pdf.
[29] T. Kobayashi. *Deformation of properly discontinuous actions of* $\mathbb{Z}^k$ *on* $\mathbb{P}^{k+1}$, www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/_le/RIMS1536.pdf.
[30] T. Kobayashi. *On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces*, www.kurims.kyotou.ac.jp/preprint/file/RIMS1537.pdf.
[31] T. Kobayashi. *Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Acta Appl. Math., 73 (2002), 115-131.
[32] J.L. Koszul. *Sur certains groupes des transformations de Lie, Colloque de Géométrie Différentielle*, Strasbourg, (1953).
[33] J.M Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2000.
[34] J.M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2003.
[35] T. Matumoto, M. Shiota. *Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications in: Homotopy Theory and Related Topics.* Adv. Stud. Pure Math., vol. 9, Kinokuniya, Tokyo, 1986, 41-55.
[36] J. Milnor. *Introduction to algebraic* K*-theory*. Princeton University Press-1971.
[37] G. Mislin, A. Valette. *Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture*, Advanced Courses in Mathematics, Birkhäuser Barcelona 2003.
[38] D. Montgomery, C.T. Yang. *The existence of a slice*, Ann. of Math., 65 (1957), 108-116.
[39] D. Montgomery, L. Zippin. *Examples of transformation groups,* Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954),460-465.
[40] D. Montgomery, L. Zippin. *Small subgroups of finite-dimensional groups,* Ann. of Math. 56(1952), 213-241.
[41] G.D. Mostow. *Equivariant imbeddings in euclidean space*, Ann. of Math., 65 (1957), 432-446.
[42] J.R. Munkres. *Topología* 2^a *Ed*. Pearson Educación S.A.-2002.
[43] J.V.Neumann. *Die Einf uhrung analytischer Parameter in topologischen Gruppen,* Ann. of Math.34 (1933), 170-190.
[44] S. de Neymet U. *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
[45] R.S. Palais C^1*-actions of compact Lie groups on compact manifolds are* C^1*-equivalent to* C^1*-actions,* Amer. J. Math. 92 (1970), 748-760.
[46] R. S. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2), 73 (1961), 295-323.
[47] R.S. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of Amer. Math. Soc., 36 (1960).
[48] L.S. Pontraguin. *Grupos continuos*. Editorial MIR, 1978.
[49] J.J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*. *4a.Ed*. Springer Verlag, New York, 1995.
[50] B.H. Yandell. *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*. A.K. Peters Ltd., 2002.