SOLUCION DE LA ECUACION CON RETARDO DE PRIMER ORDEN POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Solution of the first order equation with retard using de Laplace´s transform

CAMPO ELIAS GONZALEZ PINEDA
Magíster en Matemáticas
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
cegp@utp.edu.co

RESUMEN
En la modelación en diversos fenómenos de la naturaleza ha demostrado que las ecuaciones con retardo son una herramienta poderosa que muestra datos que en general co n las ecuaciones de tiempo presente no se tienen. En general el estudio cualitativo es la herramienta que aborda el estudio de las ecuaciones, sin embargo, a veces algunas ecuaciones se pueden resolver utilizando diversas herramientas matemáticas. En este artículo utilizamos la Transformada de Laplace para resolver un caso particular de la ecuación con retardo constante de primer orden.

PALABRAS CLAVES: Ecuación con retardo, Estabilidad, Sistemas dinámicos.

ABSTRACT
In the modeling in diverse phenomena of the nature it has demonstrated that the equations with retardation are a powerful tool that shows data that in general with the equations of present time are not had. In general the qualitative study is the tool that undertakes the study of the equations, nevertheless, sometimes some equations can be solved using diverse mathematical tools. In this article we used the Transformed one of Laplace to solve a particular case of the equation with constant retardation of first order.

KEYWORDS: Delay equations, Dynamics system, Solutions,.

0. INTRODUCCIÓN

Los modelos que se trabajan en la dinámica de poblaciones asumen generalmente que los organismos que interactúan reaccionan en forma inmediata ante la presencia de estímulos o agresiones de que son objeto. Los modelos de: Verhulst, Lotka-Volterra, Schafer, Smith, Gordon, Gompertz, etc. son ejemplos conocidos en la literatura. Sin embargo, sabemos que esto no es cierto en la realidad. Por ejemplo, las plantas que son atacadas por herbívoros necesitan tiempo para recuperar su follaje, el depredador necesita cierto tiempo para consumir a su presa, los juveniles necesitan un tiempo para ingresar como individuos a la población (reclutamiento), etc. Además, las poblaciones generalmente no se acercan asintóticamente al punto de equilibrio, sino que, presentan oscilaciones alrededor del mismo. Este comportamiento se puede modelar introduciendo retardos en el tiempo de reacción (por ejemplo en la tasa intrínseca de crecimiento o en la densidad de la población). Las ecuaciones que captan mejor este tipo de comportamiento son las ecuaciones con tiempo de retardo, tanto en ecuaciones en diferencias como en ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales con retardo son un caso particular de las ecuaciones diferenciales funcionales, tema que se ha desarrollado durante los últimos años [1],[8]. El nombre de retardo proviene del hecho de que la o las incógnitas o algunas de sus derivadas (si las hay) están evaluadas en t o en tiempos anteriores a t.

Por ejemplo, el modelo de Verhuslt con retardo viene dado por

$$x' = rx(t)\left[1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right] \qquad (1)$$

donde r, k y τ son constantes positivas y x es la densidad de la población. Obsérvese que las densidad de la población aparece evaluada en t y en $t-\tau$. Una discusión más general para el modelo anterior involucra la ecuación integro diferencial

$$x' = rx(t)\left[1 - k^{-1}\int_{-\infty}^{t} w(t-s)x(s)ds\right] \qquad (2)$$

donde w es una función de peso.

La teoría de las ecuaciones ordinarias, puede extenderse a las ecuaciones diferenciales con retardo, y su estudio merece una seria revisión. En [2] e hace una buena introducción al tema

Fecha de Recepción: 26 de enero de 2009
Fecha de Aceptación: 15 de mayo de 2009

En este artículo centraremos la atención en un caso particular de (2). Es claro que el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y con retardo es en general cualitativo, sin embargo, a veces se logran descubrir cuadraturas o formulas que resuelven algunos casos particulares. En este artículo, utilizando la Transformada de Laplace resolvemos lo que en la teoría de las ecuaciones con retardo se llama “problema de función inicial.”

1. COMENTARIOS GENERALES

Sabemos del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de su gran aplicabilidad a diversos fenómenos de la Naturaleza. Sin embargo, existe otro tipo especial de ecuación diferencial llamada ***ecuación diferencial funcional*** de las cuales las anteriores son un caso particular. En este tipo de ecuación, la función incógnita y sus derivadas están evaluadas en argumentos distintos. Así por ejemplo:

$$x'(t) = x(t+1)$$

$$x'(t-\pi) = x(t)x''(t)$$

son ecuaciones diferenciales funcionales. Un caso particular de las ecuaciones diferenciales funcionales, se conocen con el nombre de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo, esto quiere decir, que los argumentos que aparecen en la ecuación son en la variable t y en tiempos anteriores a t. Nosotros centramos la atención en un tipo especial de ecuación con retardo, para ellos definimos los siguiente.

1.1 Definición. Llamaremos ecuación diferencial normal con retardo o simplemente ecuación diferencial con retardo, a aquellas en la cual, la derivada de más alto orden está evaluada en t y la función y algunas de las derivadas de orden menor (si las hay) están evaluadas en argumentos anteriores a t. Cuando los argumentos son de la forma $t-a$ donde $a>0$, la ecuación se llama: ecuación diferencial con retardo constante. La derivada de más alto orden, define el orden de la ecuación diferencial mencionada.

Así por ejemplo, la ecuación

$$u'(t) + u(t-3) = 0$$

Es una es una ecuación diferencial de primer orden con retardo constante, mientras que la ecuación

$$u''(t-1) + u'(t-3) = sen(t)$$

Es una ecuación de segundo orden con retardo constante pero no es normal.

Al igual que para ecuaciones ordinarias, a las funciones que acompañan a la función incógnita y a sus derivadas, se llaman coeficientes.

El concepto de solución de ecuación de este tipo de ecuación es similar al conocido para ecuaciones ordinarias y se describe así: Una función definida en un intervalo I, es solución de una ecuación con retardo, si al sustituirla en la ecuación reduce ésta a una identidad. Así por ejemplo, la función

$$f(t) = t^2 + 1$$

es solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) + x(t-1) = t^2 + 2$$

en todo R.

El estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo es más complejo que el de las ecuaciones ordinarias elementales. De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, sabemos fácilmente resolver la ecuación

$$x' = x$$

Sin embargo, resolver la ecuación similar

$$x'(t) = x(t-r),$$

Donde r y es una constante positiva conduce a resolver la ecuación

$$\lambda = e^{-\lambda r}$$

Ecuación inofensiva pero que requiere de toda la variable compleja para su solución.

Con estos simples cometarios generales, se muestra la diferencia fundamental entre las ecuaciones ordinarias y las ecuaciones diferenciales funcionales. Existe teoría en cuanto a teoremas de existencia y unicidad que el lector interesado pude consultar en la bibliografía.

2. PROBLEMA DE FUNCION INICIAL

2.1 Definición. Un problema de función inicial viene dado por

$$\begin{aligned} &\text{Resolver: } x'(t) == ax(t) + bx(t-r) + f(t) \\ &\text{sujeto a:} x(t) = g(t), \ \ -r \le t \le 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Donde f, g son en general funciones continuas función continua y admiten transformada de Laplace. Para resolver este problema tomando transformada de Laplace en la ecuación tenemos,

$$\pounds\{x'(t)\} = a\pounds\{x(t)\} + b\pounds\{x(t-r)\} + \pounds\{f(t)\}$$

$$s\pounds\{x(t)\} - x(0) = a\pounds\{x(t)\} + b\int_{0}^{\infty} e^{-st} x(t-r)dt + \pounds\{f(t)\}$$

Ahora,

1. $x(0) = g(0)$
2. $\int_{0}^{\infty} e^{-st} x(t-r)dt = \int_{0}^{r} e^{-st} x(t-r)dt + \int_{r}^{\infty} e^{-st} x(t-r)dt$

Si hacemos $u = t - r$ entonces,

$$\int_{0}^{r} e^{-st} x(t-r)dt = \int_{-r}^{0} e^{-s(u+r)} x(u)du = e^{-sr} \int_{-r}^{0} e^{-su} g(u)du$$

$$\int_{r}^{\infty} e^{-st} x(t-r)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-s(u+r)} x(u)du = e^{-sr} \int_{0}^{\infty} e^{-su} x(u)du$$

$$= e^{-sr} \pounds\{x(t)\}$$

Reemplazando tenemos,

$$s\pounds\{x(t)\} - x(0) = a\pounds\{x(t)\} + be^{-sr} \int_{-r}^{0} e^{-su} g(u)du$$

$$+ be^{-rs} \pounds\{x(t)\} + \pounds\{f(t)\}$$

Es decir,

$$x(t) = \pounds^{-1} \left\{ \frac{g(0) + be^{-sr} \int_{-r}^{0} e^{-su} g(u)du + \pounds\{f(t)\}}{s - abe^{-sr}} \right\} \tag{4}$$

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La Transformada de Laplace, sigue siendo muy útil para resolver ecuaciones diferenciales de otra índole. Se recomienda buscar casos particulares donde se aplique la ecuación (4). En [6] hay un caso particular.
Para un estudio más profundo de las ecuaciones con retardo se recomienda revisar la bibliografía.. Es conveniente mencionar que toda la teoría de las ecuaciones ordinarias puede extenderse a la teoría de las ecuaciones diferenciales funcionales.
Ahora definiremos lo que se entiende por problema de valor inicial, y se mostrará como resolver utilizando la transformada de Laplace un caso particular de ecuación.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1]. Cushing, Integrodifferential equations and delay model in populations, Lectures notes in biomathematics, Spring-Verlag, 1977.

[2]. Driver,R.D., Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag, 1976.

[3]. May, R. M. and Simon A., A note on difference-delay Equations Theorical Population Biology, Vol 9 \#2, 178-186. 1976.

[4]. May, R. M., Time-delay versus stability inpopulation models with two and three trophic levels, Ecology 54, #2,315-325, 1973.

[5]. Verhulst, F., Nonlinear Differential Equations and Dinamical Sistem, Springer-Verlag, 1989.

[6]. Murray Spigel. Transformadas de Laplace. MACGRAW-Hill. 1974.

[7]. Campo Elías González Pineda. Algunos modelos matemáticos en la dinámica de poblaciones con tiempo de retardo. Tesis. Universidad del Valle 2000.