PUNTOS MÁXIMOS DE UNA DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

Maximum point of a distribution multinomial

RESUMEN

En este artículo se caracteriza el punto donde la distribución multinomial alcanza la probabilidad máxima.

PALABRAS CLAVES: Probabilidad, Multinomial.

ABSTRACT

In this article characterizes the point where the distribution multinomial achieves the maximum probability

KEYWORDS: Probability, Multinomial.

EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO
Profesor Auxiliar, Magíster en Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

DOCIER MARINO CEBALLOS
Profesor Titular, Magister en Enseñanza de las Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
dceballos@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Una de las distribuciones más importantes que se estudian en estadística por sus diferentes aplicaciones es la distribución multinomial. En el estudio de esta distribución, consideramos que tenemos un experimento aleatorio con un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y $A_1, \ldots, A_k$ son k eventos tales que $A_j \in \Im$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k$, $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \Omega$ y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$, es decir, estos eventos forma una partición de Ω.

Supongamos que el experimento aleatorio se repite n veces y uno y sólo uno de los eventos A_j ocurre, y que las n repeticiones son independientes del experimento, esto es

$$P(A_j) = p_j, \; p_j \geq 0 \text{ para todo } j \text{ y } \sum_{j=1}^{k} p_j = 1. \quad (1)$$

Además supongamos que p_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ permanece constante durante las n repeticiones del experimento. Bajo estas suposiciones se define la distribución multinomial y se presenta su función de distribución de masa.

En este artículo se encuentra la forma de los puntos que hacen máxima la distribución multinomial.

Fecha de Recepción: 8 de junio de 2009
Fecha de Aceptación: 23 de Agosto de 2009

2. DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

La distribución multinomial es una generalización de la distribución binomial y su definición la presentamos como en **[3]**.

Definición 1 Sea $(X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio tal que se determina en n repeticiones del experimento aleatorio antes mencionado. Sea x_1 el numero de veces que aparece el evento A_1, x_2 el numero de veces que aparece el evento A_2, x_j el numero de veces que aparece el evento A_j, con $x_j = 0, 1, \ldots, n$.

Observe que el suceso A_k aparecerá $n - \sum_{j=1}^{k} x_j$ veces ya que $\sum_{j=1}^{k} x_j = n$. El vector aleatorio, o variable aleatoria k dimensional antes definido $(X_1, \ldots, X_k)$ con $X_j = x_j$ significa que el suceso A_j ha ocurrido x_j veces $x_j = 0, 1, \ldots, n$ recibe el nombre de variable aleatoria multinomial de parámetros $n,\ p_1,\ldots,\ p_k$ y se escribirá

$$(X_1,\ldots,X_k)=MB(n,\ p_1,\ldots,\ p_k). \quad (2)$$

Teorema 2 La función de masa del vector aleatorio $(X_1,\ldots,X_k)=MB(n,\ p_1,\ldots,\ p_k)$ será

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k)=\frac{n!\,p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots\,p_k^{x_k}}{x_1!\,x_2!\ldots\,x_k!} \quad (3)$$

si $\sum_{j=1}^{k} x_j = n$ y cero en otro caso.

La demostración se puede ver en **[1]** o en **[2]**.

Observación 3 Recordemos que los términos de la distribución binomial se obtiene del desarrollo de la expresión binomial

$$1=(p+(1-p))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \quad (4)$$

De manera análoga, las probabilidades anteriores pueden obtenerse de un desarrollo de la expresión multinomial

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots\,p_k^{x_k}}{x_1!\,x_2!\ldots\,x_k!}=(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n=1. \quad (5)$$

Demostremos el resultado principal de este articulo, el cual esta planteado en **[4]**, y consiste en caracterizar los puntos máximos de la distribución multinomial de finida anteriormente.

Teorema 4 La probabilidad máxima de la distribución multinomial $(X_1,\ldots,X_k)=MB(n,\ p_1,\ldots,\ p_k)$ es obtenida en los puntos $(y_1,\ldots,y_k)$ que satisfacen la desigualdad

$$np_j-1<y_j\le(n+k-1)p_j;\quad j=1,2,\ldots,k. \quad (6)$$

Demostración Escojamos y_1, y_2 fijos tales que $y_1+y_2=n^*$ y $p_1+p_2=p^*$.

Queremos calcular $P(R_1=S_1,R_2=S_2,\ldots,R_k=S_k)$ donde $S_1+S_2=y_1+y_2=n^*$ y $p_1+p_2=p^*$, $S_i\in\{0,1,\ldots,n^*\}$ para $i=1,2$.

Sea

$$f(S_1)=P(R_1=S_1,\ R_2=n^*-S_1,\ R_3=y_3,\ldots,R_k=y_k)$$

Para calcular el máximo de f, definimos $\alpha=\frac{f(S_1+1)}{f(S_1)}$.

$$\alpha=\left(\frac{n!\,p_1^{S_1+1}\,p_2^{n^*-S_1-1}\,p_3^{y_3}\ldots\,p_k^{y_k}}{(S_1+1)!\,(n^*-S_1-1)!\,y_3!\ldots\,y_k!}\right). \quad (7)$$

$$\left(\frac{(S_1)!\,(n^*-S_1)!\,y_3!\ldots\,y_k!}{n!\,p_1^{S_1}\,p_2^{n^*-S_1}\,p_3^{y_3}\ldots\,p_k^{y_k}}\right)=\frac{p_1}{p_2}\frac{(n^*-S_1)}{(S_1+1)}\ge1.$$

La expresión anterior es equivalente a

$$p_1n^*-p_1S_1\ge p_2S_1+p_2. \quad (8)$$

Despejando S_1 obtenemos

$$\frac{p_1n^*-p_2}{p_1+p_2}\ge S_1. \quad (9)$$

Llamamos

$$S_1^*=\frac{p_1n^*-p_2}{p_1+p_2}+1=y_1. \quad (10)$$

De aquí

$$y_1\ge\frac{p_1n^*-p_2}{p_1+p_2}. \quad (11)$$

Como $y_1+y_2=n^*$, entonces

$$p_1(y_1+y_2)-p_2\le y_1(p_1+p_2), \quad (12)$$

por lo tanto $p_1y_2\le p_2(y_1+1)$.

Sin perdida de generalidad tenemos que

$$p_iy_j\le p_j(y_i+1),\quad i\ne j,\quad i,j=1,2,\ldots k, \quad (13)$$

entonces

$$\sum_{j=1,\,i\ne j}^{k}p_iy_j\le(y_i+1)\sum_{j=1,\,i\ne j}^{k}p_j\le(y_i+1)(1-p_i) \quad (14)$$

por consiguiente

$$p_i \sum_{j=1,\, i\neq j}^{k} y_j \leq (y_i+1)(1-p_i). \qquad (15)$$

Como $\sum_{j=1}^{k} y_j = n$, entonces $\sum_{j=1}^{k}(y_j + y_i) = n$, así

$$p_i(n-y_i) \leq (y_i+1)(1-p_i). \qquad (16)$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene

$$np_i - 1 \leq y_i - p_i < y_i. \qquad (17)$$

Ahora fijando j,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,\, i\neq j}^{k} p_i y_j &\leq p_j \sum_{i=1,\, i\neq j}^{k}(y_i+1) \qquad (18)\\ &\leq p_j \sum_{i=1,\, j\neq i}^{k} y_i + (k-1)\\ &\leq p_j (n - y_j + k - 1).\end{aligned}$$

De aquí que

$$(1-p_j)y_j \leq p_j(n-y_j+k-1), \qquad (19)$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos la desigualdad

$$y_j \leq p_j(n+k-1). \qquad (20)$$

Finalmente por las ecuaciones (17) y (20) se concluye el teorema.

5. CONCLUSIÓN

La probabilidad máxima de la distribución multinomial se alcanza en un punto $(y_1, \ldots, y_k)$ donde cada componente satisface una desigualdad donde aparecen los parámetros que determinan la distribución .

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Paul Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Addinson –Wesley Iberoamericana, S. A 1970.

[2] Vicente Quesada y Alfonso Garcia. Lecciones de Calculo de Probabilidad. Días de Santos. 1988.

[3] M. Degroot. Probabilidad y estadistica, Segunda edicion, Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. 1988.

[4] A. N. Shiryaev. Probability. Secod Edition. Academic Press, 1996.