

## DISIPATIVIDAD DE UNA CLASE DE MODELO DE COMPETENCIA

### Dissipativeness of a class of competition model

#### RESUMEN

En este artículo se muestra la disipatividad en una clase de sistema dinámico que modela la competencia entre  $n$  especies de predadores por una presa singular que se regenera. Este resultado es una generalización de la prueba presentada en [1] para modelos  $n$ -dimensionales con respuesta funcional tipo Holling II

**PALABRAS CLAVES:** Disipatividad, respuesta funcional tipo Holling II, modelo predador-presa

#### ABSTRACT

*In this article is show the dissipativity in a class of dynamic system that models to the competition between  $n$  species of predators by a singular prey that regenerates. This result is a generalization of the test displayed in [ 1 ] for  $n$ -dimensional models with functional responses type Holling II*

**KEYWORDS:** Dissipativity, functional response type Holling II, model predator-prey.

CARLOS M. ESCOBAR C.

Profesor Asistente, Magíster en Matemáticas

Ingeniero Civil

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

ccescobar@utp.edu.co

ABEL E. POSSO A.

Profesor Titular, Ph.D

Matemático

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

possoa@utp.edu.co

JOSÉ R. GONZÁLEZ G.

Profesor Asistente, Ph.D

Matemático

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

jorddryy@utp.edu.co

### 1. Introducción

En ecología, en el estudio de la dinámica de poblaciones, aparece el problema de saber bajo cuales condiciones del ecosistema es posible la coexistencia de especies estrechamente emparentadas o bajo qué circunstancias actúa el principio de exclusión competitiva. En el estudio del problema concerniente a la validez del principio de la exclusión competitiva, para el caso de dos especies predatoras compitiendo por una presa que se regenera, el siguiente modelo ha sido ampliamente considerado por varios autores [Hubbel y Walman 1978 a,b; Koch, 1974 a,b].

$$\dot{s} = \gamma \left(1 - \frac{s}{k}\right) s - \sum_{i=2}^n m_i s \frac{x_i}{a_i + s} \quad (1)$$

$$\dot{x}_i = m_i s \frac{x_i}{a_i + s} - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde el punto sobre la variable indica la derivada con respecto a  $t$ ,  $x_i$  y  $s$  son el tamaño de la población de los predadores  $i$  y el de la presa que se regenera, respectivamente. Un crecimiento logístico de la presa se supone en ausencia del predador; la respuesta funcional es saturada de acuerdo con la cinética de Michaelis-Menten,  $\gamma > 0$  es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa,  $k > 0$  es la capacidad de carga del medio con

respecto a la presa;  $m_i > 0$ ,  $d_i > 0$  y  $a_i > 0$  son la tasa de nacimiento maximal, la tasa de muerte y la constante de saturación media, respectivamente, del predador ( $i = 1, \dots, n$ ). En este modelo las constantes:

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

se introducen teniendo el siguiente significado:  $x_i$  se incrementa si y solo si  $s > \lambda_i$ , según sea  $x_i$  positivo, llegando a ser cero en  $s = \lambda_i$ . Hsu, Hubbel y Waltman [1978a] y [1978b] han mostrado en el caso  $n = 3$  que las soluciones del sistema (1) correspondiente a valores iniciales positivos son acotados y permanecen en el octante positivo y que la especie predatora  $i$ -ésima puede sobrevivir únicamente si  $0 < \lambda_i < k$ , lo cual implica que

$m_i > d_i$ . Posteriormente Ferreira [2007] muestra la disipatividad de este modelo para el caso  $n$ -dimensional. Butler [1983] y Farkas [1985] han mostrado que la mayoría de resultados concernientes al modelo de Hsu y otros pueden ser investigados para toda clase de modelos del tipo *dos-predadores-una-presa*, modelo cuyo característica común es que la tasa de desarrollo de la presa y la respuesta funcional del depredador son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones

naturales. Nosotros en este artículo mostramos la atractividad para una generalización del modelo (1) introducida por Butler y Farkas [6,7] en el caso n-dimensional y realizamos una simulación que ilustra este resultado en un modelo 3-dimensional del tipo exponencial algebraico.

**2. Disipatividad en el modelo Butler-Farkas**

A continuación se estudia la disipatividad de una clase de modelo en dinámica de poblaciones del tipo (3) el cual es una generalización del modelo tratado por Ferreira [7], éste parte de la hipótesis, de que el ecosistema consiste de tres especies; dos predadores y una presa singular, la cual se regenera.

$$\dot{s} = \gamma g(s, k) - \sum_{i=2}^n p(s, a_i) x_i \tag{3}$$

$$\dot{x}_i = p(s, a_i) x_i - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y  $p(s, a_i)$  representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional del predador  $i$ ,  $g(s, k)$  significa la resistencia ambiental del medio al crecimiento de la presa y  $a_i$  representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del predador  $i$ . Las demás variables y parámetros tienen idéntico significado que en el sistema (1). Se presume además que en el modelo la tasa de desarrollo de la presa  $g$  y la respuesta funcional del depredador  $p$  son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones naturales denominadas de Butler-Farkas:

La función  $g$  satisface las condiciones:

$$g \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty), R), g \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$g(0, k) = 1 \quad g'_s(s, k) < 0 < g''_{sk}, \geq 0, k > 0 \tag{4}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma g(s, k) = \gamma, \quad s \geq 0. \tag{5}$$

A la función  $g$  se le impone condiciones de uniformidad en  $[\delta, s_0]$  para cualquier,  $0 < \delta < s_0$  y, la integral

posiblemente impropia  $\int_0^{s_0} g'(s, k)$  debe ser

uniformemente convergente en  $[k_0, \infty)$ , para cualquier valor  $k_0 > 0$ . Por último se tiene la condición siguiente sobre  $g$ :

$$(k - s)g(s, k) > 0, \quad s \geq 0, k > 0, s \neq k. \tag{6}$$

La función que representa la respuesta funcional del predador  $i$ ,  $p(s, a_i)$  con  $a_i$  constante, ( $i = 1, \dots, n$ ) satisface las siguientes condiciones:

$$p \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty), R), p \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R), p(0, a_i) = 0, \quad p(s, a_i) > 0, \quad s > 0, a_i > 0 \tag{7}$$

$$p_s(s, a) < \frac{p(s, a)}{s}, \quad s > 0, a > 0 \tag{8}$$

$$p_a(s, a) < 0, \quad s > 0, a > 0 \tag{9}$$

Las condiciones de (4) a (9) son condiciones apropiadas para el modelo. A continuación se muestra que el sistema (3) es disipativo para ello se introduce una condición adicional para la tasa de crecimiento de la presa dada por:

$$g_{ss}(s, k) < 0. \tag{10}$$

**Proposición 1. :** *Cualquier solución del sistema (3) con valores iniciales en el octante positivo  $R_+^{n+1}$  es acotada en  $[0, \infty]$ .*

Dado que los planos coordenados son variedades invariantes del sistema (3) por lo tanto soluciones con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen allí. Nosotros probamos que existe un conjunto acotado en  $R_+^3$  el cual atrae la solución con condiciones iniciales en  $R_+^{n+1}$ . Sea  $V(s, x_1, \dots, x_n) = s + x_1 + \dots + x_n$ .

Si  $X(t) = (s(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$  es una solución de (3) entonces a lo largo de ésta se tiene

$$\frac{dV(X(t))}{dt} = \gamma g(s, k) s(t) - \sum_{i=1}^n d_i x_i(t),$$

teniendo en cuenta (4) y (10) se tiene que  $\frac{d^2 g(s, k) s}{ds^2} = g''_{ss} + 2g'_s(s, k) < 0$ , entonces existe

$$\epsilon, \delta, \text{ tal que } \frac{d^2 g(s, k) s}{ds^2} < -\epsilon, s > \delta, k > 0, \text{ existe}$$

$$K_1 \text{ satisfaciendo } g(s, k) s < -\epsilon s + K_1,$$

$s > \delta, k > 0$ , entonces

$$\frac{dV(X(t))}{dt} \leq \gamma \epsilon s(t) - \sum_{i=1}^n d_i x_i(t) + K_1.$$

Tomando  $\beta = \min\{\gamma \epsilon, d_1, d_0\}$ , se tiene que

$$\frac{dV(z(t))}{dt} \leq -\beta(x(t)) + K_1, \text{ a lo largo de la solución}$$

existente. Si  $X(0) \in B \subset R_+^{n+1}$  es un conjunto acotado de  $R_+^{n+1}$ , entonces existe  $K > 0$ , tal que

$$V(X(0)) \leq K. \text{ Tomando } t_0 = \frac{1}{\beta} \log \frac{K_1}{\beta K} \text{ y}$$

$X(0) \in B$ . Para  $t \geq t_0$  se tiene que

$$V(X(t)) \leq \frac{K_1}{\beta} + \frac{K_1}{\beta} \leq 2 \frac{K_1}{\beta}.$$

Lo cual implica que cualquier solución está definida por todo el tiempo y que el conjunto compacto

$$\Omega = \left\{ (s, x_1, x_2, \dots, x_n) : \begin{aligned} & s \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ & s + x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 2 \frac{K_1}{\beta K} \end{aligned} \right\}$$

atrae la solución con condiciones iniciales en  $\Omega$   $\square$

En Escobar [2003] el autor muestra que la condición (4) se satisface para una generalización del modelo de Gilpin de resistencia ambiental del medio al crecimiento de la presa dado por

$$g(s, k) = 1 - \left( \frac{e^s - 1}{e^k - 1} \right) \left( \frac{s}{k} \right)^m$$

$$u \geq 0, m \geq 0,$$

Lo que demuestra que esta clase de modelos son disipativos con independencia de la clase de respuesta funcional que satisface las condiciones generales de Butler-Farkas.

A continuación se ilustra la disipatividad en estos modelos, se presentan el retrato de fase de un modelo natural en desarrollo de la bifurcación de Zip tomando como parámetro de bifurcación la capacidad de carga del medio con respecto a la presa  $k$ . El modelo viene definido por la resistencia ambiental  $g$  y la respuesta funcional  $p$  de los predadores siguientes:

$$p(s, a) = \frac{s}{1 + \sqrt{a}} + \frac{s}{s + a},$$

$$g(s, k) = 1 - \frac{(-1 + e^s)s}{(-1 + e^k)k}.$$

El retrato de fase es tomado con la condición  $k=14$ . Entonces las ecuaciones paramétricas del segmento de línea  $L_k$  de equilibrios del sistema esta dada por:

$$L_k = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 = 1.4098 - 0.2857 x_1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array} \right\}$$

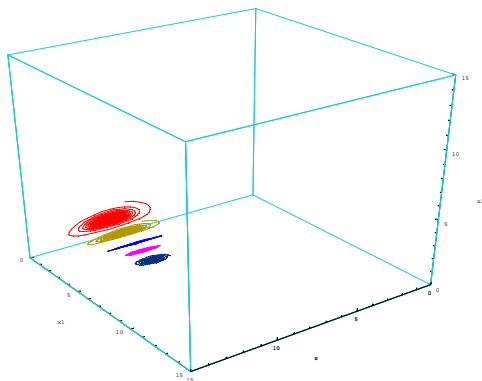


Fig.1 Retrato de fase, con parámetro de bifurcación  $k=14$ .

El conjunto de equilibrios es asintóticamente estable como se observa en la fig.1. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en este y son acotadas y tienden asintóticamente hacia la línea de equilibrios  $L_k$ ; por lo tanto el segmento  $L_k$  es un atractor del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo.

### 3. CONCLUSIÓN GENERAL

Se ha mostrado la disipatividad del modelo (3) el cual extiende las conclusiones sobre disipatividad halladas por Ferreira [1]. También se ha exhibido una subclase de modelos de Butler-Farkas que lo satisfacen los cuales generalizan el modelo de Gilpin de resistencia ambiental el cual tiene aplicación en dinámica de poblaciones. La disipatividad en esta clase de modelo juega un papel importante junto con el teorema de Poincare-Bendixson en la demostración de la existencia de ciclos límite en las variedades bidimensionales del sistema.

### 5. BIBLIOGRAFÍA

[1] FERREIA, J. D. Hopf and zip bifurcation in an specific (n+1)- competitive system, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 2007.

[2] KOCH A. Coexistence resulting from an alteration of density dependent and density independent growth. *J. theoret. Biol.* 44: 373-386. 1974a.

[3] SMITH, H. L. The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two predator-one prey competition model, *SIAM J. appl. Math.* 42: 27-43. 1982.

[4] WILKEN D. R. Some remarks on a competing predators problem, *SIAM J. appl. Math.* 42: 895-902. 1982.

[5] ESCOBAR, C. Modelo original de tipo exponencial algebraico que exhibe la bifurcación zip. Tesis Mg. Universidad de Antioquia, 2003.

[6] BUTLER, G. J. Competitive predator-prey systems and coexistence, in *population Biology Proceedings*, Edmonton: *Lecture Notes in Biomathematics.* 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[7] FARKAS, M. A zip bifurcation arising in population dynamics, in *10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscilations*, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.