TRANSFORMADA CORTA DE FOURIER

ÁLVARO JARAMILLO
Profesor Auxiliar
Licenciado en matemáticas y física
Estudiante de la Maestría en enseñanza de las Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
aljamil@utp.edu.co

RICARDO LOPEZ VARONA
Ingeniero Electricista, M.Sc Física
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
rilopez@utp.edu.co

RESUMEN
En este documento se muestran aspectos generales acerca de la transformada de Fourier, definida como un operador entre espacios de Hilbert y finalmente se presenta el concepto de transformada corta de Fourier como respuesta a las funciones de frecuencia variable con el tiempo, como lo es la función Chirp.

PALABRAS CLAVES: Espacios de Hilbert, transformada de Fourier, función chirp.

ABSTRACT
This document shows general aspects about Fourier`s Transform ,as operator between Hilbert spaces,finally,it shows the concept of Fourier´s Short Transform as an answer to the functions of variable frequency with time, like chirp function is.

KEYWORDS: *Hilbert space, Fourier Transform, chirp function.*

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los aportes más importantes de las matemáticas que permitió un gran avance de la ciencia y en particular de la tecnología, en cuanto al estudio de las comunicaciones y las señales es el análisis de Fourier. Aunque es una herramienta altamente utilizada para resolver problemas de ingeniería, presenta algunas limitantes cuando las funciones varían abruptamente con el tiempo. Es por ello que se implementó la Transformada corta de Fourier (ventaneo), teoría que se desarrolló gracias a los avances dela mecánica cuántica alrededor de 1945 por Gabor (átomos de Gabor); esta transformada permite analizar funciones que con la antigua teoría de Fourier no se pueden trabajar, es decir, funciones de frecuencia variable, como lo es la función chirp, que en el presente documento es el ejemplo que se presenta.

En el análisis que se presenta de la Short time transform (Transformada corta de Fourier) de la función chirp se hace una presentación del espectrograma de dicha función donde se hace evidente la importancia de esta herramienta para estudiar este tipo de funciones. Además se realizan algunos cálculos que facilitan el estudio de funciones que no encajan con el análisis tradicional de Fourier.

Un párrafo que describa la tesis en la cual se señala el método seguido para obtener la solución del problema o tratamiento u organización de la temática, la cual será coherente con el contenido.

2. RESEÑA HISTÓRICA

A finales del siglo XIX, el matemático francés Joseph Fourier, desarrolló una teoría matemática que establece que una función o señal, puede ser expresada como una serie posiblemente infinita de senos y cosenos. Esto es lo que se denomina como la serie de Fourier, que es una herramienta altamente utilizada en la resolución de problemas científicos de ingeniería, física cuántica, óptica y acústica. Las señales pueden ser interpretadas como una combinación lineal de ondas armónicas o tonos puros, lo que se observa de manera casi intuitiva es que la señal en un instante de tiempo puede reemplazarse como la suma de varios tonos puros. La serie de Fourier utiliza dos funciones bases, las cuales son seno y coseno, para poder expandir o representar una función en términos de ella. Estas funciones tienen algunas características importantes como su suavidad, (diferenciables y continuas), y además no son localizables en el tiempo (su dominio es $\left(-\infty,+\infty\right)$.

Es por esto que adquiere una gran importancia en el estudio de fenómenos periódicos, de tiempo invariante o estacionarios; sin embargo, se presentan grandes dificultades en el manejo de esta serie cuando las funciones varían abruptamente con el tiempo, lo cual permitió presentar una mejora sustancial al estudio tradicional de señales: éste nuevo tratamiento se conoce como la Transformada corta de Fourier (ventaneo) que permite el estudio de estas funciones. Finalmente se muestran algunas aplicaciones de la Transformada corta de Fourier, particularmente la función gaussiana Chip y la gaussiana.

3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

El operador lineal invariante en el tiempo L, especificado por $\hat{h}(\omega)$ se define como:

$$\mathrm{L}\, e^{i\omega t} = \hat{h}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$\mathrm{L}e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{i\omega(t-u)}du$$

$$\mathrm{L}e^{i\omega t} = e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\omega u}du$$

Fecha de Recepción: 09 Febrero de 2007
Fecha de Aceptación: 24 Abril de 2007

Ahora: $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\omega u}du$

$$L e^{i\omega t} = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$$

Al aplicar Lf, la función f es descompuesta como una suma de antofunciones sinusoidales $\{e^{i\omega t}\}_{\omega\in R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Ahora se define el operador Transformada de Fourier de la función $h(t)$

$$Le^{i\omega t} = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Donde ω representa la frecuencia de h. Además h debe ser la representación de un sistema real, es decir, cuando $t \to +\infty$, $f \to 0$.Dependiendo del espacio al cual pertenezcan las funciones tendremos formalmente que:

Si $h \in L^1(R)$, la integral converge y

$$\left|\hat{h}(\omega)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt < +\infty$$

La desigualdad indica que la Transformada de Fourier existe, pero veremos posteriormente que existen funciones que no son absolutamente integrables, aunque si tienen Transformada de Fourier, un ejemplo clásico y muy importante es la función $sen(t)$. Es decir la integrabilidad absoluta de $h(t)$ es condición suficiente, pero no necesaria, para la existencia de la transformada de Fourier de la función $h(t)$ .Además este operador es continuo y acotado[1].

Ahora se define la Transformada de Fourier en espacios $L^2(R)$ (Espacios de Hilbert), como el producto interno de dos funciones f y g que $\in L^2(R)$.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt$$

Con norma

$$\langle f, f\rangle = \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

Si $h \in L^1(R)$ y $\hat{h}$ $L^1(R)$ entonces, se define el operador inverso, como:

$$(Le^{i\omega t})^{-1} = h(t)e^{-i\omega t}$$

$$(Le^{i\omega t})^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\overline{u})e^{i\omega(t-\overline{u})}d\overline{u}$$

$$(Le^{i\omega t})^{-1} = \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\overline{u})e^{i\omega\overline{u}}d\overline{u}$$

Ahora: $h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\overline{u})e^{i\omega\overline{u}}d\overline{u}$

$$(Le^{i\omega t})^{-1} = h(t)e^{-i\omega t}$$

A continuación se presentan algunas aplicaciones importantes y de gran utilidad de la transformada de Fourier.

- Función Chirp

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a-ib)t^2-i\omega t}\, dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a-ib)(t^2+\frac{i\omega}{a-ib}t)}dt$$

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4(a-ib)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a-ib)(t+\frac{i\omega}{2(a-ib)}t)^2}\, dt$$

Tomo: z=a-ib

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{z\omega^2}{4z\overline{z}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overline{z}(t+\frac{iz\omega}{2z\overline{z}}t)^2}dt$$

Ahora tomo:

$$\varphi = t + \frac{iz\omega}{2z\overline{z}} \qquad d\varphi = dt$$

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{z\omega^2}{4z\overline{z}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overline{z}\varphi^2}d\varphi$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a-ib}}e^{-\frac{(a+ib)}{4(a^2+b^2)}\omega^2}$$

4. TRANSFORMADA DE FOURIER CON VENTANAS

En 1946, Gabor[2] introduce la Transformada con ventanas en el análisis de Fourier para estudiar las variaciones de las frecuencias que se presentan en el sonido. Para ello define una ventana real y simétrica de la forma $g(t) = g(-t)$ que es trasladada por u y modulada en frecuencia en $\xi : g_{u,\xi} = e^{i\omega t}g(t-u)$ con norma tal que $\|g\| = 1$, tal que $\|g_{u,\xi}\| = 1$ para $(u,\xi) \in L^2(R)$

Este resultado estructura en forma apropiada lo que en la actualidad se conoce como transformada de Fourier de f con ventanas, con $f \in L^2(R)$,

Definida por:

$$Sf(u,\xi) = \langle f, g_{u,\xi}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt$$

Esta transformada es llamada también Transformada corta de Fourier.

[1] Para mayor claridad en estos conceptos consulte el libro Introductory Functional análisis with Applications, Edwin Kreyszig,pagina 91

[2] Se recomienda consultar la teoría sobre mecánica cuántica y en particular el principio de incertidumbre.

Al valor absoluto al cuadrado de la (Short Time Fourier Transform), se le conoce como espectrograma de energía de en tiempo-frecuencia en la vecindad especificada por la caja de Heisenberg.

$$|Sf(u,\xi)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt\right|^2$$

Se presentan algunos cálculos de la *SFT* para algunas funciones importantes en ingeniería:

Una señal lineal chirp $f(t) = e^{-iat^2}$ tiene frecuencia que se incrementa linealmente en el tiempo. Para una ventana gaussiana se tiene que:

$$Sf(u,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat^2} e^{-i\xi t} (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$Sf(u,\xi) = (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2iaut-iau^2} e^{ia(t-u)^2} e^{-i\xi t} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} dt$$

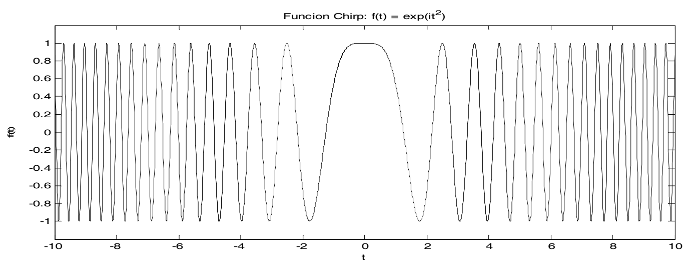
$$Sf(u,\xi) = (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-iau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{1}{2\sigma^2}+ia)(t-u)^2} e^{-i(\xi-2au)t} dt$$

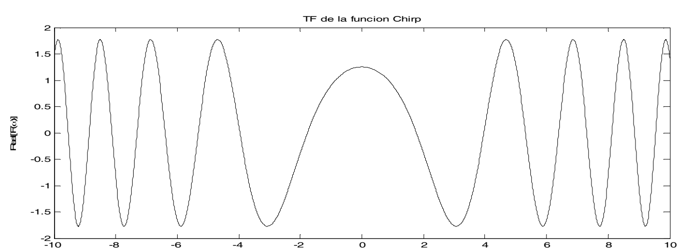
Sea:

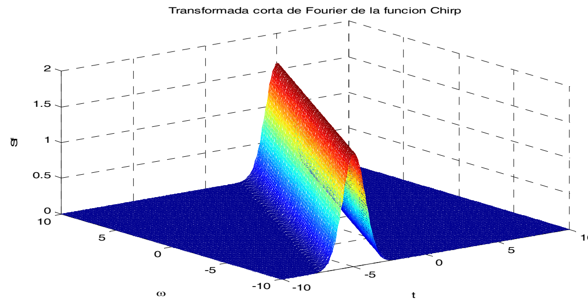
$$a = \frac{1}{2\sigma^2} \quad , \ b = a \quad , \omega = (\xi\text{-}2au)$$

$$Sf(u,\xi) = (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-iau^2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2} - ia}}\, e^{-\frac{(\frac{1}{2\sigma^2}+ia)(\xi-2au)^2}{4\left(\frac{1}{2\sigma^2}+a^2\right)}}$$

$$|Sf(u,\xi)|^2 = \sqrt{\frac{4\sigma^2\pi}{1+4a^2\sigma^4}}\, e^{-\sigma^2\frac{(\xi-2au)^2}{1+4\sigma^4 a^2}}$$







5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta presentación pretende mostrar algunos aspectos importantes de la transformada corta de Fourier en el análisis de señales que sufren variaciones bruscas, como lo es la función chirp. Tanto la transformada de Fourier como la SFT (short time Fourier transform) es un paso que se recomienda como previo para la persona que desee estudiar señales y continuar con el estudio de la transformada Wavelet.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Mallat, S.A Wavelet tour of signal processing, second edition 1999, 2-40, 68-71.

[2] Mark A, P. Introducción al análisis de Fourier y las ondaletas, primera edición, Thomson 2002.

[3] Nava, F. Alejandro. Procesamiento de series de tiempo, Fondo de cultura Económica (México) 2002