FACTORIZACIÓN DE ISOMETRÍAS EN $\mathbb{R}^n$

RESUMEN
En este artículo mostramos de una manera elemental que una isometría en $\mathbb{R}^n$ puede ser escrita como la composición de una rotación y una traslación. Como aplicación hacemos una prueba explícita de que dos curvas planas con la misma curvatura son isométricas.

PALABRAS CLAVES: Isometría, grupo, transformación ortogonal, rotación, traslación.

ABSTRACT
We show, in an elementary and direct manner, that any isometry on $\mathbb{R}^n$ can be written as the composition of a rotation and a translation. As an application, we give an explicit proof that two plane curves with the same curvature are isometric.

KEYWORDS*:* *Isometry, group, orthogonal transformation, rotation, translation*

CARLOS A. MORA CEBALLOS
Ph.D. en Matemáticas
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
morac@utp.edu.co

MARIA JULIANA OSORIO M.
Lic. En Matemáticas y Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
yuligan@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que una isometría en $\mathbb{R}^n$ es la composición de una translación seguida de una rotación o reflexión. Este resultado, aunque clásico, no es fácilmente accesible en los textos de Geometría elemental. En este artículo presentamos una prueba elemental y razonablemente completa de este hecho. Una muestra de la importancia de esta factorización es la caracterización, módulo isometrías, de las curvas planas con una misma función curvatura.

2. CONTENIDO

Definición. Una isometría en $\mathbb{R}^n$ es una función $f : R^n \to R^n$ tal que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es decir, una isometría es una función que preserva distancias.

Proposición 1.

i) Si f es una isometría, entonces f es inyectiva.
En efecto, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $\| x_1 - x_2 \| = \| f(x_1) - f(x_2) \| = 0$, luego $x_1 = x_2$.

i) Si f es una isometría, entonces f es sobreyectiva. Se probará posteriormente.

i) Si f es una isometría, entonces f es continua:
$$\lim_{x\to a}\|f(x) - f(a)\| = \lim_{x\to a} \| x - a \| = 0 .$$

Teorema 1.

f es una isometría que fija el origen, si y solo si f preserva el producto punto, ($f \in O(n)$: el grupo de matrices ortogonales).

Demostración.

Si $f(0) = 0$ y $v \in \mathbb{R}^n$ entonces
$$\| f(v) \| = \| f(v) - f(0) \| = \| v - 0 \| = \| v \|$$
Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ entonces
$$\begin{aligned}\| u \|^2 + \| v \|^2 - 2f(u)\cdot f(v) &= \| f(u) \|^2 + \| f(v) \|^2 - 2f(u)\cdot f(v)\\ &= \| f(u) - f(v) \|^2\\ &= \| u - v \|^2\\ &= \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2u\cdot v\end{aligned}$$
Por consiguiente $f(u)\cdot f(v) = u\cdot v$.

Corolario 1. Si f es una isometría que fija el origen entonces
$$(f(u) + f(v))\cdot f(u + v) = f(u + v)\cdot f(u + v)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(f(u) + f(v))\cdot f(u + v) &= u\cdot(u + v) + v\cdot(u + v)\\ &= \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2\\ &= \|u + v\|^2\\ &= \|f(u + v)\|^2\end{aligned}$$

Fecha de Recepción: 31 Agosto de 2006
Fecha de Aceptación: 30 Enero de 2006

Corolario 2. Si f es una isometría de $\mathbb{R}^n$ que fija el origen, entonces f es lineal y biyectiva.

Demostración.

Veamos que f es lineal.

i)

$$\begin{aligned}\|f(u)+f(v)-f(u+v)\|^2 &= \|f(u)+f(v)\|^2 \\ &\quad +\|f(u+v)\|^2 - 2(f(u)+f(v))\cdot f(u+v) \\ &= \|f(u)\|^2+\|f(v)\|^2+2f(u)\cdot f(v) \\ &\quad +\|u+v\|^2 - 2f(u+v)\cdot f(u+v) \\ &= \|u\|^2+\|v\|^2+2u\cdot v+\|u\|^2+\|v\|^2+2u\cdot v \\ &\quad -2(u+v)\cdot(u+v) \\ &= 2\|u+v\|^2 - 2(u+v)\cdot(u+v) \\ &= 0\end{aligned}$$

Como $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal e inyectiva, consecuentemente f es sobreyectiva. □

Proposición 2.

Si f es una isometría en $\mathbb{R}^n$ que no fija el origen, también es biyectiva.
En efecto, sea $f(0)=w$ y definamos $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $g(u)=f(u)-w$, entonces, es fácil verificar que g es una isometría que fija al origen. Por el corolario anterior g es biyectiva y como $f(u)=g(u)+w$, entonces f es biyectiva.

Teorema 2.

Si f es una isometría en $\mathbb{R}^n$, entonces $f=T\circ R$, donde T es una traslación y R una rotación alrededor del origen, $R\in O(n)$.

Demostración.

Sea $f\in E(n)$ y sea $f(0)=c$. Definimos $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $T(x)=x-c$. (T es una traslación). Entonces $g=T\circ f$ es una isometría que fija el origen. Por el corolario 2, se tiene que $g\in O(n)$, entonces $f=T^{-1}\circ f$ es la composición de una traslación y un elemento de $O(n)$.

Corolario 3. El conjunto $E(n)$ de todas las isometrías en $\mathbb{R}^n$ es un grupo bajo la composición.

Demostración.

en efecto, dadas $f,g,h\in E(n)$,

i) $f\circ g$ es isometría.

$$\begin{aligned}\|(fog)(x)-(fog)(y)\| &= \|f[g(x)]-f[g(y)]\| \\ &= \|g(x)-g(y)\| \\ &= \|x-y\|\end{aligned}$$

ii) $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ para toda $f,g,h\in E(n)$. Esta última es inmediata puesto que la composición de funciones es asociativa.

iii) Sea la isometría I la función identidad de $\mathbb{R}^n$, tenemos que $f\circ I = I\circ f = f$.

iv) Si $f\in E(n)$, y f, entonces $f^{-1}\in E(n)$.

En efecto, Sean $x,y\in R^n$, por ser f isometría, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right\| &= \left\|f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(y))\right\| \\ &= \left\|x-y\right\|\end{aligned}$$

luego $f^{-1}\in E(n)$.

Corolario 4. La factorización $f=T\circ R$ del teorema 2 es única.
En efecto, si $T\circ R = T^*\circ R^*$, con T,T^* traslaciones y R,R^* rotaciones alrededor del origen

$$c^* = T^*(0) = T^*(R^*(0)) = T(R(0)) = T(0) = c$$

Entonces $T=T^*$ y como las traslaciones son invertibles, se sigue que $R=R^*$

Ejemplo 1.

Mostremos que un difeomorfismo entre superficies $\varphi:S\to\overline{S}$ es una isometría si y sólo si la longitud de arco de cualquier curva parametrizada en S es igual a la longitud de arco de la curva imagen por φ.

Demostración.

$\Rightarrow)$ Sea $\alpha(t)\in S$ una curva parametrizada, y su imagen $\varphi(\alpha(t))$, debemos probar que

$$\int_a^b \left\|\alpha'(t)\right\| dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left\|\varphi'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\right\| dt$$

Dado que φ es una isometría.
Así

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \|\varphi'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\|dt = \int_a^b \|\varphi'(u)\|du$$
$$= \int_a^b \|u\|dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$$

Donde se realizó el cambio $u(t)=\alpha(t)$.

$\Leftarrow)$ Es inmediato.

Ejemplo 2.
Dada una función diferenciable $\kappa(s)$, $s \in S$, entonces la curva plana parametrizada por la longitud de arco y con curvatura $\kappa(s)=\kappa$, está dada por

$$\alpha(s) = \left(\int\cos\theta(s)ds + C_1, \int\sin\theta(s)ds + C_2\right)$$

donde $\theta(s) = \int\kappa(s)ds + \varphi$.

Demostración.

Puesto que la curva está parametrizada por la longitud de arco tenemos que el vector tangente unitario está dado por

$$T(s) = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

Luego

$\alpha(s) = \left(\int\cos\theta(s)ds + C_1, \int\sin\theta(s)ds + C_2\right)$ además se sabe que la curvatura es la variación del ángulo respecto de la longitud de arco, i.e,

$$\theta'(s) = \kappa(s)$$

luego $\theta(s) = \int\kappa(s)ds + \varphi$

Observación 2. Nótese que la curva está determinada por una traslación del vector (C_1, C_2) y la rotación del ángulo φ. Además que este resultado se conoce como el ***Teorema Fundamental de las curvas planas***.

Teorema 4.

Si $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ son dos curvas en $\mathbb{R}^2$ con la misma función de curvatura $\kappa(s)$, entonces existe una isometría $f = T \circ R$ tal que $\beta = f \circ \alpha$. Ver [1]

Demostración.

Puesto que α y β tienen igual curvatura, sea ésta κ, luego, por el teorema anterior tenemos lo siguiente:

$$\theta = \theta_1 + \varphi$$

donde θ, θ_1 son los ángulos de α y β respectivamente, y tenemos lo siguiente:

$$\alpha(s) = \left(\int\cos\theta(s)ds + A_1, \int\sin\theta(s)ds + A_2,\right)$$
$$\beta(s) = \left(\int\cos(\theta(s)+\varphi)ds + B_1, \int\sin(\theta(s)+\varphi)ds + B_2,\right)$$

Luego

$$\beta(s) = \cos\varphi\left(\int\cos\theta(s)ds, \sin\theta(s)ds\right) +$$
$$\sin\varphi\left(-\int\sin\theta(s)ds, \int\cos\theta(s)ds\right) +$$
$$(B_1, B_2)$$
$$= \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int\cos\theta(s)ds \\ \int\sin\theta(s)ds\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C_1 \\ C_2\end{bmatrix}$$

Con $C_i = B_i - A_i$, $i = 1, 2$

3. CONCLUSIONES

En $\mathbb{R}^n$ una función que preserve la distancia es siempre la composición de una traslación y una rotación.
De lo anterior se sigue que dos curvas planas con la misma curvatura en cada punto, coinciden módulo una isometría del plano.

El teorema fundamental de curvas planas **teorema 4.** se puede extender a superficies en $\mathbb{R}^3$ y es conocido como el teorema fundamental de superficies, donde la curvatura K de Gauss es un invariante bajo isometrías. Un ejercicio interesante para el lector es mostrar que en efecto esto se cumple, donde las funciones diferenciables que caracterizan la superficie son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental. Ver [1]

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Do Carmo, M.; "Differential geometry of curves and surfaces", Prentice Hall, 1976.