ANALES
DE LA
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

AÑO XIV ☙ 1933-1934

CUADERNO 105

El Azar y los Fundamentos del Cálculo de probabilidades

DISCURSO LEIDO EN LA SOLEMNE APERTURA
DEL CURSO ACADÉMICO DE 1933 A 1934

Por SIXTO CÁMARA TECEDOR

CATEDRÁTICO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

EXCELENTÍSIMO SR.:

EXCELENTÍSIMOS E ILMOS. SRES.:

SEÑORAS Y SEÑORES:

OTRO ciclo anual de enseñanza inauguramos con este acto, presididos y alentados por las autoridades, representantes de corporaciones, entidades y centros oficiales e intelectuales y distinguidas personas de todas clases, amantes de la cultura que manifiestan su simpatía por el cultivo de la inteligencia dando brillantez a la fiesta que celebramos.

Lamento que mi pobre voz no sepa elevarse al nivel y tono que exige esta solemnidad en correspondencia con la altura de vuestras mentalidades y de vuestra adhesión universitaria. Pero si el cumplimiento del deber eleva a los humildes al plano de los poderosos y borra las diferencias entre los pobres de espíritu y los espíritus selectos, confío en él y en vuestra benevolencia, para disculpar mi discurso, comenzando por saludaros cordialmente a todos en nombre de la Universidad, que os agradece esta muestra de interés por la cultura nacional.

Variaciones en el personal docente

El sentimiento y el afecto dictan mis primeras palabras en memoria de los que rindieron tributo a la muerte después de una larga vida de colaboración en las tareas docentes.

D. Fermín Villarroya, Doctor en Filosofía y Letras, Archivero y Bibliotecario desde sus 26 años, auxiliar numerario de esta Universidad desde 1912, Profesor de Latín en la Facultad de Filosofía y Letras y Director de la Biblioteca General de esta Universidad en sus últimos 10 años de vida era un apasionado del Latín, que cultivaba con profundo dominio, dejando impresas su inspiración y la erudición de sus conocimientos en innumerables lápidas conmemorativas de fastos, fundaciones y homenajes, repartidas por toda la población. Era D. Fermín un sibarita de las delicadezas del pensamiento almacenado en los clásicos.

No es extraño que de su magisterio emanase aroma de intelecto depurado, tan limpio como las mismas fuentes en que bebía sin contaminación. Con un corazón desbordante de ternura para el desvalido y el pobre, practica la caridad como una satisfacción interior de su conciencia cristiana, todo amor. Este fué D. Fermín Villarroya (q. e. p. d.).

Otro tributo a la muerte lo rindió el auxiliar jubilado de la Facultad de Ciencias, D. Casimiro López Chavarri. Representa D. Casimiro toda una vida austera regida por una idea firme que le hizo desdeñar una posición económica, al renunciar al ejercicio de la Medicina que para él hubiera sido segura fuente de ingresos por sus dotes intelectuales, afable trato y sus muchas relaciones. Pero prefirió a esto el estudio y la enseñanza de la Química, a la que se entregó por completo oficial y privadamente, como uno de tantos pedagogos que en silencio cultivan la enseñanza.

Sirvan estas pocas líneas de ferviente homenaje a la memoria del profesor que supo cumplir sus deberes con entusiasmo hasta el último momento en que la enfermedad y la vejez rindieron la entereza de su carácter fuerte para la lucha y condescendiente en el trato con sus discípulos.

La Universidad conservará vivo el recuerdo de tan beneméritos profesores que a ella dedicaron sus afanes y su cariño.

Y cumplido este piadoso recuerdo debiera hacer, como es de rigor, el elogio del catedrático Dr. Bartual Moret, que por una disposición legal ha cesado, oficialmente, en la regencia de su cátedra de Histología y Anatomía patológica, que ha desempeñado por espacio de 45 años. Pero ni reuno condiciones para analizar una vida científica como la del Dr. Bartual, ni considero oportuno hablar del cese de un compañero que en la plenitud de su vitalidad física y mental está en condiciones de rendir sus mejores frutos. Su consejo, el amplio dominio de la ciencia médica en que durante tantos años se ha movido su poderosa inteligencia, quedan como siempre, al servicio de la Universidad. No hay, pues, razón para hablar en realidad de una terminación en sus actividades universitarias. Homenaje, sí, al maestro y al sabio y el mejor que podría tributársele, si mis condiciones y las dimensiones del discurso lo permitieran, sería un recuerdo de su vida científica, de su prestigio y de sus triunfos de todas clases. Alumno predilecto de Cajal, llega, por oposición, en plena juventud a desempeñar, en la Universidad de Sevilla, la cátedra del mismo nombre que después, día tras día, ha venido explicando en esta Universidad durante toda su vida académica con celo y claridad insuperables. De inteligencia sutil, palabra fácil y percepción rápida y con la claridad peculiar de las grandes mentalidades para la exposición de las teorías biológicas, que tanto se prestan a la sugestión de la fantasía, no es de extrañar que el Dr. Bartual haya sabido dar a sus discursos, preñados de convicción filosófica, un atrevido aire de positivismo. Año tras año va encaneciendo en la Facultad de

Medicina, dejando una legión de discípulos, que le recuerdan con admiración y cariño. En otros aspectos, preside la ponencia del estatuto que esta Universidad elaboró para su régimen autonómico y todos recordamos aquellas sesiones en que el Dr. Bartual, con tanto entusiasmo como acierto, rebatía las impugnaciones que se hacían a la obra de la ponencia. Como Decano de la Facultad de Medicina, destaca su figura de gran señor, a pesar de la democracia de sus ideas, aconsejando, en todo momento, prudencia y calma a los alumnos. Como médico y especialmente como Otorrinolaringólogo, su nombre y fama han pasado al dominio público. A la Universidad le cabe el honor de contar entre sus miembros una mentalidad de su altura.

Muy sentida ha sido por la Universidad, la baja en el pasado curso del prestigioso catedrático de Derecho civil Dr. Castán Tobeñas, por nombramiento de Magistrado del Tribunal Supremo. Aparte su gran capacidad demostrada en notables publicaciones, de su tacto y acierto indiscutibles como Presidente de comité paritario y como Decano de la Facultad de Derecho, por su ecuanimidad y espíritu Universitario y por su compañerismo y afabilidad de trato, tiene mucho que sentir la Universidad de que el azar de la vida le haya separado de nuestro lado.

Cúmpleme manifestar ahora, la satisfacción con que todos hemos visto la incorporación a este claustro de los catedráticos Doctores: D. José Viñas Mey, que viene a sustituir en la cátedra de Derecho civil a D. José Castán; don Carlos Sanz Cid, sucesor en la cátedra de Derecho político de D. Mariano Gómez; D. Dámaso Alonso y Fernández de las Redondas, que en la Facultad de Filosofía y Letras es el nuevo titular de la cátedra de Lengua y Literatura Española, desempeñada hasta su jubilación por D. José Ventura Traveset; D. Luis Urtubey Rebollo, que por traslado desde la Facultad de Medicina de Cádiz, ha venido a sustituir en la de Valencia a D. Juan Bartual. La más cordial bienvenida a tan queridos compañeros que sabrán poner al servicio de la

Universidad su alto prestigio, hasta ahora mantenido por sus especiales dotes.

Un índice de la valía científica y profesional de los auxiliares temporales de esta Universidad es la brevedad de su paso por ella a causa de su rápida elevación a Catedráticos numerarios y otros cometidos mediante oposición. A ello es debido que en el pasado curso hayan sido nombrados nuevos auxiliares temporales en las vacantes producidas. D. Pedro Alvarez Rubiano y D. Julio Feo García, de la Facultad de Filosofía y Letras; D. Juan Campos Pérez y don Juan José López Ibor, de la de Medicina; D. Modesto Quilis Pérez y D. Octavio Foz Gazulla, de la Facultad de Ciencias. Con la cordial bienvenida que a todos damos en nombre de la Universidad, espera ésta un intenso y fructífero trabajo que, sirviéndoles de preparación para luchas definitivas, les estimule en la investigación en sus respectivas especialidades, contribuyendo a una de las finalidades perseguidas por este centro. De su entusiasmo y de las condiciones estimadas para sus nombramientos, esperan las respectivas Facultades un óptimo rendimiento docente.

Saludo a los estudiantes y a los nuevos bachilleres

Muy especialmente debo dirigir el saludo de bienvenida a todos los estudiantes y en particular al nuevo plantel de jóvenes bachilleres que llegan a estas aulas pletóricos de vida, de ilusiones y esperanzas puestas en un porvenir prometedor de triunfos y glorias sin cuento y de nobles emulaciones de las grandes figuras históricas.

La Universidad, madre eternamente joven, porque cual los dioses de la fábula, también se alimenta de la ambrosía, pero de la ambrosía de las teorías puras y de la abstracción del espíritu, os acoge con todo amor, puestas también sus ilusiones y esperanzas en el porvenir que vuestra juventud le da derecho a esperar.

Lo único que os pide es fe en el ideal y constancia en el trabajo, con el lema de un sabio por norte: «Cualquier hombre, decía el lema de Young, puede llegar a hacer lo que haga otro cualquiera». Y tened presente que supo hacer honor al lema, venciendo en cuantas actividades acometió como músico, políglota, médico, filósofo, egiptólogo, físico... en fin, en todo lo que se propuso [59].

Hay que elevar la vista hacia los genios de la ciencia, ya que no para emular sus altos vuelos, que esto es don de pocos escogidos, para imitarlos en la sencillez y modestia de sus vidas, en general, en el entusiasmo por la investigación, en la preocupación por la verdad científica, y, sobre todo, en la constancia y actividad en el trabajo, que más que nunca exige el ritmo acelerado actual de tantos descubrimientos. Tened presente que el tiempo no espera, que el camino es largo y que los años de la juventud tienen un valor inapreciable para desperdiciarlos inconscientemente. Casi todos los progenitores de la Ciencia actual comenzaron a realizar sus grandes descubrimientos en edades como las vuestras. ¡Pero qué ejemplos de afán investigador! Ved a

Galileo Galileo a sus 19 años clavada la vista en las oscilaciones de la lámpara de la catedral de Pisa controlando la igualdad rítmica de las mismas y concibiendo en el péndulo el

Newton [73] instrumento ideal para medir el tiempo. Ved a Newton a vuestra misma edad que, ciego ante la inmensidad que la Geometría de Descartes le descubre, no le queda tiempo para satisfacer el ansia de ordenar, deducir, enlazar, sus ideas en tropel, contruyendo a borbotones teorías analíticas. Baste deciros que esta fiebre de estudios comenzada a sus 18 años, da como fruto a los 21 la famosa fórmula del binomio que todos conocéis; a los 23 la teoría de las fluxiones o cálculo infinitesimal con todas sus investigaciones de análisis matemático; a los 24 descubre la gravitación universal y la teoría de la descomposición de la luz, y así sigue.

Alembert A los 22 años comienza D'Alembert (que para resolver el problema de la vida se había hecho perito, abogado y médico), a presentar memorias y más memorias a la Academia de Ciencias de París sobre el movimiento de sólidos y sobre el cálculo integral; a los 23 le abre sus puertas la Academia; a los 25 publica su tratado de Dinámica; a los 27 su gran tratado de fluídos.

De los 17 a los 19 años se hace Lagrange con todo el caudal científico de su época. No es extraño que se lamentase de haber llegado tarde para la explicación del sistema del mundo del que decía con cierto dejo de tristeza hablando del descubrimiento de la gravitación universal por Newton [73]: «*esta suerte no se encuentra todos los días*». A los 26 años había escrito su Mecánica Analítica que es el instrumento actual de la Física Matemática. *Lagrange*

Y así podríamos continuar con lista interminable pasando por Laplace, por Galois, que muere a sus 19 años dejando escrita la noche antes de su muerte en pocas líneas la concepción moderna del Algebra con la teoría de grupos; por Abel, que muere a los 27 años, por Cauchy, por Rieman que a sus 27 años lanza las ideas madres de tanta actualidad hoy en las teorías del campo único de la física, etcétera, etc.

Pero los campeones de la precocidad son Pascal y Gauss. Se dice de Gauss que comenzada su historia científica a los 3 años y teniendo como profesor a sus 8 años a Bartells, que solo tenía 16, es calificado por Laplace como «el mayor matemático del universo (cuando solo contaba 20 años), porque Bartells, era, el mayor matemático de Europa». Ahí tenéis un buen ejemplo de actividad estudiantil. *Gauss* [9]

Se disputan a Gauss el emperador de Rusia, el Observatorio y la Universidad de Goetingen, optando por no salir de su patria. Bartells pasa a la Universidad de Kazan donde había de tener otro discípulo predilecto: Lobatchewsky.

Espíritu selecto y estético, hace desaparecer Gauss de sus escritos el proceso seguido en ellos para llegar al fin, pues según su lema *«pauca sed matura»* impreso en su sello bajo un árbol con algunos frutos maduros, los monumentos deben presentarse al público acabados y limpios de andamiajes y manchones que oculten su belleza; prurito de perfección que nos impide a los mortales que vamos al ras del suelo seguir con facilidad sus escritos por la dificultad de lectura que la excesiva condensación contiene. A este prurito es debido, a no dudarlo, el hecho de no haber dado a luz la Geometría no Euclidiana mucho antes que Lobatchewsky y Bolyay, indirectamente discípulos suyos por intermedio de Bartells el primero, y por medio de su padre, íntimo amigo de Gauss, el segundo.

Pascal 67 ¿Qué he de deciros de Pascal, que no conozcáis por la divulgación de la biografía escrita por su hermana Mad. Perier, sobre su pequeño tratado acerca del sonido, escrito a los 11 años con motivo del choque producido por un cuchillo con un plato, ni de la construcción de los principios básicos de la Geometría, acerca de la cual no tenía noticia alguna por el cuidado que ponía su padre en ocultarle todo lo referente a esta ciencia temiendo una polarización en un sentido abstracto, ni del asombro producido por tan profundo descubrimiento que terminó con su incorporación, de hecho, a los 12 años, a la Academia libre del P. Mersena, la que con el tiempo había de ser la actual Academia de Ciencias de París? Gracias a esta inteligencia privilegiada, aunque se hubiera perdido la ciencia de los egipcios y de los griegos, tan cuidadosamente recogida en el Euclides, y sobre cuyo conocimiento hizo inscribir Platón en el frontis de su Academia la famosa frase «Nadie entre que no sepa Geometría» como condición indispensable para el ingreso en ella, este niño de 12 años nos la hubiera restituído. A sus 16 de edad escribe el Ensayo sobre las cónicas, en el que aparece el notable teorema del exágono, germen de la teoría proyectiva de dichas curvas, trabajo que nunca pudo hacerse creer a Descartes que pudiera ser obra de un muchacho, atribuyéndolo al padre que se despoja de la gloria en favor del hijo. A los 19 inventa una máquina calculadora de la que son hijas las actuales máquinas registradoras. Después es el que da el primer paso en la fundación sistemática del Cálculo de Probabilidades.

Un acontecimiento feliz para la historia de esta Universidad sería que los que escucháis fuerais mentalidades cumbres como estas pocas que acabo de citar; pero los genios sólo aparecen esporádicamente, de vez en cuando, entre las grandes masas de colectividad y en el transcurso del tiempo.

La inventiva y potencia de digestión de ideas ajenas del intelectual medio no puede medirse con el mismo metro que los cerebros privilegiados en que nacieron las grandes concepciones científicas; ni siquiera en la intensidad del esfuerzo podemos compararnos con ellos los de mediana inteligencia. El ascenso a las cumbres del conocimiento humano, la llegada a los últimos peldaños de la investigación exige la cooperación de capacidad, penetración aguda, e intensidad en el trabajo. La subida a las altas cumbres inexploradas, según un hermoso símil de Balmes en «El Criterio», se presenta lleno de asperezas y dificultades capaces de desalentar al más esforzado; sólo al llegar a lo alto se descubren de golpe los caminos fáciles, se perciben, con detalle, los precipicios y las bellezas del panorama divisándose nuevas perspectivas. Lo incomprensible se ve sencillísimo, lo confuso queda iluminado con claridad meridiana, surgen ideas nuevas y el espíritu se conforta. La hermosura de las teorías desconocidas no es de baladí adquisición; no se trata de discusiones ni esparcimientos fáciles de tertulia sin importancia. Los sutiles hilos de la red que une las verdades científicas son más difíciles de percibir y los enlaces de más difícil comprensión que las reglas y entrenamientos de los juegos. Es preciso acostumbrarse al medio científico (por algo se llaman disciplinas científicas a las teorías), para llegar a respirar con facilidad y gusto en él. Pero no hay que desanimarse por las dificultades, manteniendo la confianza de que la constancia todo lo vence, sustituyendo los ambientes fáciles y poco a poco atrofiadores de la inteligencia por los del seminario, la Biblioteca, el coloquio, sin pretensiones de ser los primeros en la discusión, sino con el afán de penetrar cada vez más en los conceptos, todo con sencillez y siempre en plano de discípulos de cualquiera. Sin la constancia, ni Bernouilli nos hubiera legado la ley de los grandes números, eje alrededor del cual gira la Economía, la Política, y toda la ciencia experimental, ni Gauss ni Lobatschewsky hubieran descubierto, quizá, las geometrías no euclidianas, ni nuestro compatriota La Cierva

Símil de Balmes

Constancia en el trabajo

hubiera llegado al camino de la solución, al parecer definitiva, de la locomoción aérea dando lustre y gloria a su nombre y a su patria.

¡Cuántas mentalidades jóvenes se desvían del camino que corresponde a su capacidad por impaciencias e insignificantes molestias que, vencidas con un poco de voluntad, hubieran sido de gran provecho!

Tema del discurso

Y aquí debiera dar por terminado este discurso, después de haber fatigado bastante vuestra atención, si el deber de llevar la voz de la Facultad de Ciencias en la forzosa rotación de Facultades no coartara mi voluntad exigiéndome la exposición de algún tema de carácter general universitario o, por lo menos, lo que es más sencillo para mí, propio de las disciplinas que en ella se cultivan. Para salir del paso me acojo a lo último, esbozando a continuación algunas consideraciones sobre EL AZAR Y LOS FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES.

Previsión

¿Qué no daríamos por una visión del porvenir? En él están nuestras esperanzas, ilusiones, desengaños, aciertos, dolores, descubrimientos, evolución de nuestras ideas... El porvenir es el enigma que, excepto a los inconscientes, más interesa a todo sér humano. La previsión nos hace trabajadores, económicos, buenos... La imprevisión puede decirse que representa la inconsciencia, la ineptitud, la dejadez, la ignorancia...

Pero la providencia sabia nos ha cubierto la visión del porvenir con espeso velo a través del cual nada percibimos, si no es alguna confusa silueta más adivinada que percibida por algunos sagaces privilegiados. Todo son obscuridades y confusión. El único auxiliar que tenemos en el buceo de ese obscuro caos es la experiencia de lo ocurrido a los que pasaron por este mundo antes que nosotros. Experiencia que no viene a ser otra cosa que un recuento de desengaños, equivocaciones, desaciertos, sufrimientos... La previsión es la encargada de recoger la tradición, de ordenarla en normas y reglas de conducta conducentes a evitar, en lo posible, lo espinoso y amargo de la vida, dentro de límites discretos.

Determinismo

Para la ciencia clásica el porvenir es una consecuencia del principio de causalidad. Si las causas de los fenómenos físicos existen, deberán producirse éstos en un sentido determinado y único. En dicha concepción está la base de las ciencias deductivas que explican los fenómenos naturales.

Pero la fantasía humana, abusando de esa chispa que la divinidad ha puesto en nuestro cerebro, sale de su cauce y se hace fatalista. Para los fatalistas no tiene el futuro mas que un solo camino en el panorama de la existencia. Hagamos lo que hagamos no podremos salirnos de él. La fatalidad nos lleva de la mano y nos fuerza, según ellos, a seguir dicha senda. La voluntad no cuenta, está inconscientemente sujeta a una trayectoria. En términos matemáticos, la trayectoria del Universo en su evolución es análoga a la de una partícula dotada de una velocidad inicial a partir de una posición sometida a un campo de fuerzas. Y en apoyo de esta tesis sacan a relucir la concepción determinista de Laplace. Si las leyes de la dinámica son ciertas (y hay que contar con que están basadas en postulados innegables para nuestra comprensión), si en un instante determinado un sér omniscente conociese las posiciones y velocidades de todos los corpúsculos (electrones, fotones...), con las fuerzas a que están sometidos, podría predecir, para una época futura cualquiera, las posiciones y velocidades de todos los elementos constitutivos del Universo. Pero, es más todavía: suponiendo que el pensamiento y la voluntad no fuesen otra cosa que un fenómeno físico resultante de los ciclos ultramicroscópicos descritos por dichos elementos puntuales en las células, el estado de todo el Universo con el pensamiento, los dolores, los goces, etc. de todos los seres biológicos y no biológicos, en una época futura cualquiera estaría previamente determinado. Concebido así el Universo, hay que reconocer que el fatalismo sería un dogma incontrovertible.

Pero la misma realidad física, la que está al alcance de nuestros sentidos en los laboratorios, es la que en sus lentos avances por las obscuridades que rodean el misterio de la materia ha llegado, paso a paso, a la necesidad de introducir entes nuevos y modificar concepciones arraigadas, creando primero los quantos de energía, después los fotones y electrones para llegar, finalmente, a la imprescindible necesidad de modificar la concepción determinista del mundo físico, viniendo a afirmar la improcedencia de dicha visión fatalista. El enigma que parecía empezar a descubrirse en el ritmo acelerado de la evolución de las ideas ha vuelto a quedar, puede decirse que definitivamente por ahora, en el misterio de la obscuridad.

Principio de causalidad

Fué en el V Congreso del Instituto internacional de Física de Solvay [79] reunido en Bruselas del 24 al 29 de Octubre de 1927 donde los orientadores del pensamiento físico, Lorentz, Born, Heissenberg, Bhor, de Broglie, Schroedinger, Einstein, Dirac, Compton... discutieron las nuevas ideas e interpretaciones resultantes de la teoría de los quantas en su conexión con las ondas clásicas del éter. Sirven de base a la discusión trabajos, a modo de ponencias, de Bhor sobre *el postulado de los quantas;* de Born y Heissenberg sobre *la mecánica de los quantas;* de Schroedinger sobre *la mecánica de las ondas;* de Broglie sobre la *nueva dinámica de los quantas;* de Compton sobre la *discordancia entre la experiencia y la teoría electromagnética de la radiación.*

Desde la introducción de los quantas por Planck en 1905 en que comienza la demolición del antiguo apotegma *natura no facit saltus,* va adueñándose del pensamiento de los físicos la necesidad de una revisión de los fundamentos. Las nociones físicas aplicables a los fenómenos atómicos experimentan una limitación como consecuencia de la teoría de los quantas, cuyo postulado afirma que *todo proceso atómico lleva en sí un sello de discontinuidad o de individualismo caracterizado por el quantum de acción de Planck.*

La descripción causal en el tiempo y en el espacio de los fenómenos atómicos, se funda, según Bhor, en la hipótesis de que éstos puedan ser observados sin que influyamos sobre ellos por el hecho de la observación. Mas, por el contrario, la acción recíproca entre el objeto observado y el instrumento de medida no puede despreciarse, o bien, no existe independencia en la realidad física entre los medios de observación y los fenómenos observados. Por otra parte, no es posible dar una definición no equívoca del estado de un sistema si admitimos la existencia de interacciones eventuales con los instrumentos de medida exteriores al fenómeno.

¿Qué parte del estado subsiguiente se debe atribuir a las causas propias y cuál a la perturbación introducida? No es posible separar unas de otras. El principio de causalidad y la representación del fenómeno en el espacio tiempo deben considerarse como partes complementarias, que mutuamente se excluyen, de la descripción simbolizada en la definición y en la idealización de las posibilidades de observar.

Puede decirse que el descubrimiento de la teoría de los quantas ha puesto en evidencia que nuestra concepción causal en el espacio tiempo no está regida más que por la pequeñez del quantum de acción que viene a ser una especie de invariante absoluto frente a las acciones que entran en consideración por nuestras sensaciones ordinarias.

El postulado de los quantas nos enfrenta con el problema de construir una teoría complementaria en la que la ausencia de contradicción no pueda juzgarse mas que por una estimación de las posibilidades de definir y observar, posibilidades que se presentan en la naturaleza de la luz y en los elementos constitutivos de la materia.

En el afán natural de dar interpretación real a los símbolos matemáticos y ante el desconcierto de los resultados teóricos con las posibles interpretaciones, imagina de Broglie el corpúsculo como una singularidad de la onda asociada o como un centro de condensación de energía arrastrado en el movimiento ondulatorio; concepción que hay que desechar por incompatibilidad con los movimientos no uniformes. Por otra parte, Schroedinger sustituye el corpúsculo por un tren de ondas de frecuencias muy próximas; pero las confirmaciones experimentales de la difracción de los electrones obtenida por Davison y Germer obliga a abandonar esta hipótesis por la necesidad de conservar el postulado de la estabilidad y de la existencia del electrón. Para conciliar los dos aspectos de propagación, según la teoría electromagnética y el principio de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento en las interacciones entre la radiación y la materia, se llega a la conclusión que para estudiar las leyes de propagación de la luz hay que recurrir a consideraciones estadísticas. Y en este camino aparece por vez primera el concepto de onda de probabilidad lanzado por Max Born; como última trinchera en defensa de la naturaleza física de la onda le asigna de Broglie el papel de onda piloto, con el único objeto de servir de guía al corpúsculo móvil. Según Born, las funciones continuas no permiten decidir dónde se encuentra el corpúsculo. Las ondas no dan más que una visión de conjunto o bien una representación estadística de los hechos. El principio de causalidad es atacado a fondo por esta atrevida concepción. En lo sucesivo ya no se hablará de movimientos de corpúsculos individuales, sino de movimientos y trayectorias de elementos de probabilidad, lo que equivale a hablar de grados de verosimilitud acerca de afirmaciones relativas a celdillas móviles en el espacio en el transcurso del tiempo. Hay que desistir del empeño de dar interpretación real física al simbolismo matemático que define la onda clásica para dejarle un significado más abstracto y no por eso menos real. Nada de ondas efectivas sugeridas por la deformación elástica de ese éter sutil en imagen copiada de los círculos concéntricos descritos en la superficie tranquila del agua cuando en ella cae una piedra. El concepto abstracto ha sustituído a la imagen física.

Relaciones de incertidumbre

En su memoria sobre la mecánica de los quantas persiguen Born y Heissenberg formar «una teoría intuitiva y completa de los procesos micromecánicos» introduciendo nociones nuevas en Cinemática y en Mecánica en sustitución de las clásicas mediante un análisis de lo que esencialmente es observable. El elemento abstracto nuevo serán las matrices que sintetizan el conjunto de todos los posibles estados de un sistema atómico.

Una parte esencial de las bases de la mecánica del átomo es el elemento estadístico introducido por la discontinuidad; resultando que los estados subsiguientes a condiciones iniciales determinadas no pueden deducirse sino de una manera estadística. Parece, pues, que no haya ningún argumento de orden empírico que se oponga a que se admita en principio la indeterminación del microcosmos.

«¿Cómo puede conservarse el orden determinista a que estamos acostumbrados en vista de la determinación únicamente estadística de los procesos individuales?» Esta es la pregunta que se hacen Born y Heissenberg; y siguen: «El paso más importante para la verificación del nuevo sistema de conceptos consiste en la fijación de los límites en los cuales es lícita la aplicación de los términos y conceptos antiguos como lugar, velocidad, impulsión, energía, etc., de una partícula. Estas magnitudes tomadas separadamente pueden ser medidas y definidas con precisión, como en la teoría clásica; pero cuando se quiere medir simultáneamente magnitudes conjugadas no se puede pasar de un límite de indeterminación característico». Puede partirse del dualismo empíricamente establecido entre ondas y corpúsculos.

De la reducción de un tren de ondas a un grupo, mediante la condición de que las dimensiones del tren y la duración del tiempo considerado sean grandes, respecto de la longitud de onda y del período, se llega a la consecuencia que para poder llegar a tal representación es preciso imponer a los intervalos de integración limitaciones determinadas que en esencia no son otras que las llamadas relaciones de incertidumbre de Heissenberg. Si W es la energía, p la componente de la cantidad de movimiento o impulso y q la correspondiente coordenada, dichas relaciones son:

$$dW \,.\, dt \geqslant h \qquad , \qquad dp \,.\, dq \geqslant h$$

en las que h es la constante o invariante universal de la indeterminación. Resulta de estas desigualdades que si *dq* se reduce tendiendo a cero, lo que significa que se determina la posición del corpúsculo cada vez con más precisión tendiendo al conocimiento exacto de la misma, como el producto del error *dq* por el *dp* ha de ser superior a *h*, resultará que al tender *dq* a cero crecerá *dp* y, recíprocamente; por lo que es teóricamente imposible tener simultáneamente la posición y velocidad iniciales del corpúsculo para poder fijar, en consecuencia, la trayectoria que éste ha de describir en lo futuro. A medida que consiga fijarse con más precisión la posición inicial quedará más imprecisa e ignorada la velocidad inicial y recíprocamente. Es decir, que si levantamos el velo del arcano que nos descubre uno de los datos necesarios para el planteo del problema cubrimos automáticamente con el mismo velo otro de los datos indispensables para la resolución del mismo. El enigma se burla de nuestra previsión. La trayectoria única con que contábamos queda oculta entre las de una madeja complicadísima de una multiplicidad 3 veces infinita. Hemos llegado a una mayor obscuridad de lo que esperábamos. La frase *si fijamos la posición y velocidad inicial...* en que se apoya el determinismo de la Mecánica Racional no tendrá ya sentido mas que en el campo de la abstracción matemática, pero sin conexión con el mundo de los electrones y fotones, si éstos tienen existencia real.

Reacción de los deterministas

Pero no es fácil abandonar ideas engendradas en nuestro cerebro a través del transcurso de nuestra formación conceptual y arraigadas con clara evidencia en nuestra mente. Frente a la negación del determinismo científico de Laplace se encuentran al lado del mismo otras figuras de su talla, como Einstein, Lorentz, Langevin y otros. Lorentz, que con su famosa transformación dió el golpe de gracia al absolutismo del tiempo, es el que en la famosa discusión afirma que sin las nociones de espacio y tiempo no podría hacerse a una idea física [79]; «si el electrón, dice, ocupa en una época una posición y otra en fecha posterior, siendo un corpúsculo necesita describir una trayectoria; en los nuevos principios ésta se esfuma. Si se me prohibe investigar en qué ocasión se produce esto, invocando un principio, sentiré contrariedad. Me parece que se puede siempre esperar que llegue a hacerse más tarde lo que no podemos hacer ahora. ¿Es que un espíritu más profundo no podría darse cuenta de los movimientos de estos electrones? ¿No podría conservarse el determinismo haciéndole objeto de una creencia? ¿Es preciso erigir el determinismo como principio?»

Los indeterministas

A lo que contesta Bohr con un *non posumus* exponiendo su punto de vista expresado en su trabajo sobre el postulado de los quantas que niega la conservación del principio determinista. Por su parte Heissenberg y Born se expresan así: «El determinismo que hasta aquí ha sido admitido como base de las ciencias exactas parece no poderse admitir sin debate. Cada nuevo progreso en la interpretación de las fórmulas de la mecánica de los quantas no puede ser interpretado sin contradicción más que desde el punto de vista de un indeterminismo fundamental, pero también que el conjunto de los hechos que pueden ser establecidos por la experiencia pueden obtenerse por el sistema de la teoría».

Para Einstein la cuestión es si el corpúsculo puede ser localizado o si no es localizable, y la dificultad está en separar el punto de vista estadístico del individual, separación en las antiguas teorías pero no en las nuevas. Para Langevin se trata de una cuestión de representación y la actual parece insuficiente para decidir.

En la extrema izquierda de los indeterministas está Dirac que al opinar que un sistema aislado es inobservable (porque observar es perturbar), concluye que «como la física no se ocupa sino de magnitudes observables, la teoría determinista clásica es indefendible». Por ahora puede decirse que para la previsión humana ha quedado el azar como dueño y señor en el problema de la evolución del Cosmos.

El azar y los entes colectivos

¿Qué es el azar? ¿Puede formarse una teoría científica acerca de la sistemación del azar? ¿No es el azar la antítesis de toda ley, dice Bertrand en su discurso acerca del mismo?

¿Puede el capricho de una persona estar sometido a leyes? ¿Es que la aparición de un número en un juego de dados, el sexo de un sér antes de nacer, la estatura del mismo en su mayor edad, si llega a ella, la historia de la vida de un microorganismo o de un sér cualquiera puede preverse? ¿Quién afirmaría, por otra parte, que las cifras decimales de un número irracional como $\sqrt{2}$ o del número π estén sembradas al azar cuando es indudable que la cifra de cierto lugar es una perfectamente determinada, y no puede ser otra? Y si esto es así, ¿qué intervención puede tener el azar en las ciencias abstractas deductivas en las que reina el determinismo más absoluto?

Evidentemente que ni un capricho aislado, ni el sexo, ni la estatura, ni un solo detalle de la vida futura de un sér, podrá predecirse nunca. Todos estos accidentes no dudamos en atribuirlos al azar. En cambio, todo el mundo afirmará que las cifras decimales del número π o de $\sqrt{2}$, así como la teoría de los números, la de conjuntos, la de funciones, donde todo está precisado con la rigidez inmutable de la matemática, nada tiene que ver con el azar. No obstante la distribución de cifras de los números irracionales, así como la clasificación de éstos, la teoría de conjuntos, y, en general, toda cuestión en que intervengan infinitos elementos o un número grandísimo de ellos con caracteres de diversas clases, puede decirse que tiene tanto que ver con el azar como el juego de la lotería. La teoría de conjuntos está tan íntimamente unida al azar que puede decirse que viene a ser la teoría de la sistematización del azar.

Más adelante nos ocuparemos del concepto para precisarlo; por ahora nos limitaremos a indicarlo como elemento de enlace entre el individuo, el caso concreto, aislado, el detalle insignificante y la colectividad de individuos; entre las propiedades individuales y las propiedades y líneas generales que delinean esta colectividad. Aunque los hechos aislados no puedan preverse, sea por la causa que fuere, su conjunto viene a constituir un ente colectivo sujeto a leyes que suelen llamarse *leyes del azar*.

Así, un número muy grande de caprichos de una persona, de jugadas, de nacimientos, de estaturas, de enfermedades, de observaciones, en general, servirán para fijar ciertos caracteres específicos del ente colectivo que vendrán a determinar ciertos detalles de la personalidad psicológica del individuo en relación con su voluntad; o nos definirán la configuración geométrica del dado; o nos descubrirán ciertas leyes biológicas que la medicina o la agronomía o la economía pueden aprovechar. Y se da el caso que la distribución de las cifras de los números irracionales como el π es análoga a la de los números obtenidos en un sorteo; es decir, que obedece a las mismas leyes, habiéndose utilizado como argumento lógico dicha distribución de cifras por Borel y Perrin para el estudio de la evolución de los sistemas gaseosos hacia los estados de máxima entropia [10].

De estadísticas formadas con estaturas de hijos en relación con las de los padres dedujo Galton la *ley de regresión de las estaturas,* sin la cual existirían razas de gigantes y de enanos.

Asociaciones biológicas

¿Hay nada más complejo que la asociación de dos colectividades biológicas de incontables individuos de distinta especie que viven mezclados en un mismo medio a expensas unos de otros? La historia de un individuo de tal colectividad no interesa, como tampoco interesa la trayectoria seguida por una molécula de aire que atribuímos al azar. Sin embargo, ese caos de parásitos o insectos que se reproducen, luchan y mueren con asombrosa rapidez, obedece a leyes estadísticas estudiadas con auxilio del Cálculo de Probabilidades por W. T. Thomsom, Ross, Lotka, y, principalmente, por Volterra, mediante la aplicación de las ecuaciones integrales, en las que se hace intervenir no sólo el estado del sistema en la época inicial, sino la historia de los estados anteriores que tienen intervención en la multiplicación o destrucción de la aglomeración de individuos. Y no hay que esperar fantasías matemáticas de la aplicación de este complicado instrumento matemático, sino leyes concretas confirmadas por los resultados estadísticos de la pesca en el Adriático, previstos por el Cálculo [85].

Cinemática del vuelo o del crecimiento de una especie [57]

Imaginad una multitud de gaviotas volando, de cuya banda se saca una fotografía o varias instantáneas. Aparecen en ellas muchas aves con las alas en la misma posición: unas en actitud de posarse en el agua, otras iniciando el vuelo; otras con las alas completamente extendidas. Numeradas todas ellas y sacado un número a suerte es un hecho casual la fase del vuelo en que se encuentra dicho número. ¿Qué consecuencia podemos sacar de este capricho de la suerte que podríamos imaginar producido por tantas fotografías como aves en épocas distintas sin relación unas con otras? Pues bien; de esta multitud de casos elegidos al azar puede deducirse todo el proceso cinemático del vuelo. Análogo resultado puede obtenerse con una o varias fotografías de un bosque para estudiar el proceso del crecimiento de una especie determinada.

Teoría de los gases

Supone Bernoulli que las moléculas gaseosas son esferas elásticas dotadas de movimientos rectilíneos rapidísimos que cual enjambre de locas abejas vuelan chocando innumerables veces unas con otras, describiendo al azar líneas quebradas de complejidad imposible de prever. La energía cinética del sistema de tales moléculas no es otra cosa que la energía calorífica; y la temperatura observada con el termómetro está en íntima correspondencia con la velocidad media de este enjambre molecular. Descompuesto el espacio en celdillas pequeñísimas concluye la lógica que deben existir diferencias de calor y temperatura de unas celdillas a otras; y si el termómetro más sensible no las registra al variarlo de posición es porque las dimensiones del termómetro son inmensamente grandes respecto de las de las celdillas. El termómetro viene a ser un juez imparcial que compensando extremismos resume la opinión de la mayoría en un justo término medio.

Las leyes de los gases, presión, densidad, calor específico, ley de acción de masas, etc., de las reacciones químicas observadas en los laboratorios no son sino leyes de colectividades que no sirven para los individuos aislados, ni siquiera para agrupaciones poco numerosas de éstos. El desorden en el comportamiento de los individuos entre sí, y particularmente considerados, obedece a leyes que definen el modo peculiar de actuar el azar en los individuos y que se resumen en las leyes observadas por la experiencia.

L'esprit de finesse de Pascal

L'esprit de finesse [67] de Pascal, es el don que algunos economistas, directores de masas, políticos de talla, hombres de negocios, industriales, comerciantes, etc., poseen y que les permite distinguir en las colectividades complejas esas propiedades y caracteres de conjunto que los demás necesitamos que se nos pongan en la mano por estadísticas pacientes.

Postulado del caos molecular y de la indeterminación de los datos físicos

Maxwell, el descubridor de esas ondas eléctricas que nos reproducen la voz y los conciertos dados a miles de kilómetros, fué el primero de los físicos teóricos que partiendo de la hipótesis de simetría en las velocidades posibles de las moléculas encuentra la ley de distribución de velocidades que lleva su nombre. Después se crea la Mecánica Estadística por Gibs, Boltzman y Jeans, en la que partiendo del choque de esferas elásticas y de la perturbación introducida por una inapreciable variación en los choques, se demuestra la evolución de los sistemas gaseosos hacia un estado de máxima probabilidad que corresponde a la distribución uniforme u homogénea del gas, siendo entonces la distribución de velocidades la obtenida por Maxwell. Hay, pues, una tendencia expontánea hacia el desorden y la confusión en los comportamientos de sus individuos entre sí y aisladamente considerados, y, precisamente a este caos de comportamientos microscópicos corresponde una máxima uniformidad u homogeneidad macroscópica. A la tendencia expontánea hacia este caos microscópico ya se consideren dotadas las moléculas de velocidades iguales, o no, es a lo que suele llamarse el *Postulado del Caos molecular*. Precisando más los conceptos diremos que este principio, que viene a ser el de irreversibilidad, es consecuencia a su vez del de *indeterminación de los datos físicos* en el que se admite la alta improbabilidad, que equivale a una negación, de que en la práctica puedan considerarse dos posiciones y velocidades de una molécula teóricamente iguales. Basta una variación infinitesimal para que la evolución del sistema dinámico haya variado por completo.

Puntualizando más los conceptos se sustituye el principio de irreversibilidad por el de *la improbabilidad de la reversibilidad.*

Construcción de una teoría

En la construcción de una teoría científica, cuyo objeto sea la explicación de hechos observados, tras un período de experiencia o descriptivo más o menos largo, el espíritu humano procede a ordenar las observaciones agrupándolas dentro de leyes empíricas que la experiencia subsiguiente se encarga de seguir confirmando o de rectificar; las causas productoras quedan en el misterio. La experiencia sólo nos da impresiones que registran nuestros sentidos. Después, mediante la admisión de un pequeño número de principios básicos, lo más sencillos posibles, se pasa a un segundo plano en el que por vía deductiva se infieren los hechos experimentales. El manantial de la verdad no está ni en los principios básicos, aunque metafóricamente se diga a veces que la verdad está en ellos, ni en el instrumento matemático que deduce de los mismos consecuencias lógicas, sino en la experiencia; según frase de Duhem, [23] está «en los extremos de las últimas consecuencias resultantes de la teoría y de las leyes experimentales». La matemática nada tiene que ver con la verdad, o mejor dicho, nada tiene que ver con el acuerdo o desacuerdo que pueda existir entre los principios de que se parte y entre las conclusiones a que se llega y los resultados experimentales. Su papel queda reducido a deducir consecuencias lógicas de las premisas sentadas.

La verdad

La verdad es la realidad de las cosas, dice Balmes [2] en *El Criterio;* y Einstein [26]: «Con la palabra cierto entendemos expresar la correspondencia de una afirmación con un ente real, siendo por tanto dicho concepto inaplicable a las proposiciones de la Geometría pura, que no se ocupa de la correspondencia entre sus conceptos y los objetos de la experiencia, sino solamente de la dependencia lógica de dichos conceptos entre sí». Por lo mismo dice Russell que la matemática pura es una ciencia «en que no se sabe si lo que se dice es verdad».

Sin embargo, de las conclusiones de las geometrías euclidianas y no euclidianas, como de toda afirmación que sea consecuencia forzosa de las premisas de una proposición y, en último extremo, del sistema de postulados básicos, suele decirse que es una afirmación cierta o verdadera y, por el contrario, si dicha afirmación está en contradicción con los postulados se dice que es falsa. Pero conviene advertir la impropiedad del adjetivo verdadero o falso, si no se refiere a una concordancia con hechos o fenómenos del mundo sensible, que es a lo que se refieren Balmes, Einstein y Russell.

Estabilidad de las construcciones axiomáticas

Repetimos, que la matemática no tiene por qué buscar concordancia o desacuerdo de sus conclusiones con el mundo real y, por esto, las ciencias deductivas, cuya base es un sistema de postulados, son inmutables mientras la lógica quede en pie; la experiencia nunca podrá ponerlas en peligro de derrumbamiento. La teoría de las ecuaciones diferenciales y toda la mecánica racional clásica, relativista y ondulatoria quedan incólumes a pesar del principio de indeterminación de Heissenberg que niega la posibilidad de fijar, simultáneamente, la posición y velocidad inicial del corpúsculo con la exactitud supuesta en la dinámica y a pesar de todas las modificaciones que el progreso exija introducir en nuestra concepción del universo de la materia. Una cosa es que en la realidad no pueda hablarse de un movimiento determinado de un electrón y otra que en el campo de la abstracción no existan tales movimientos; lo mismo que en la realidad no existen el sólido rígido ni la línea ni superficie abstracta de la Geometría.

Ciencia deductiva

Hay que distinguir, pues, la ciencia abstracta desligada del mundo sensible, de la ciencia deductiva que, construída a base de axiomas, tiene por objeto dar una explicación de los fenómenos naturales sin perder nunca el contacto con la realidad.

En esta última, si la contradicción con los principios o axiomas fundamentales surge como consecuencia de hechos nuevos, se presenta el dilema y, o se amplían los postulados de modo que después de la ampliación comprendan a los anteriores, como ha ocurrido con los postulados de la emisión y de las ondulaciones en la concepción de la luz que han debido modificarse concibiendo en el corpúsculo dos aspectos distintos, o se abandonan, como ha tenido que hacerse con la hipótesis del éter, cuya inutilidad se ha hecho patente en la nueva interpretación de las interferencias.

Construcción axiomática [43]

Para la elaboración axiomática de una ciencia pura, se exige:

1.º Que a todo objeto o hecho de la disciplina en cuestión corresponda un concepto único.

2.º Que a un estado de hechos corresponda una relación lógica entre los conceptos.

La base o fundación de todo el edificio ha de consistir en un pequeño número de proposiciones, llamadas axiomas o postulados, que deben cumplir estas dos condiciones:

Ser independientes unos de otros.
Que no exista contradicción entre dos cualquiera de ellos.

El cálculo de Probabilidades, como disciplina matemática, puede construirse axiomáticamente prescindiendo de la experiencia, con títulos análogos a los de cualquier otra rama de la matemática, como la Geometría o la Mecánica racional; pero la aspiración es que el enlace con la realidad sea tan íntimo como el que existe entre la Geometría Euclidiana y nuestra concepción del espacio físico.

El centro alrededor del cual han girado todos los desvelos de los matemáticos por dar una base firme a este Cálculo es el concepto de probabilidad del que vamos a ocuparnos repasando las diversas fases del mismo y examinando los principios lógicos en que se funda.

Proceso histórico del período matemático

En la construcción científica del cálculo de probabilidades, se da el caso paradójico de comenzar por el segundo período, que Du Pasquier [25] llama el período matemático, una ciencia «sin raíces en el pasado y del más brillante porvenir», según frase de Gouroud, [40] para retroceder, decimos nosotros, al período experimental con la creación de la Estadística como consecuencia de la demografía, los seguros, la economía y, finalmente, la biometría.

Aparte de algunos trazos sueltos relativos a cuestiones del azar que aparecen en la *Divina Comedia* y de otras tratadas por Cardano y Tartaglia y algunos problemas sueltos vistos por Galileo, no aparece el comienzo de la sistematización de la teoría de los juegos de azar hasta el verano de 1654, en que M. de Meré, amigo de Pascal, hubo de consultar a éste sobre los dos problemas siguientes:

Problemas de Meré [67]

1.° ¿Cuántas jugadas hay que hacer para apostar con ventaja 1 contra 1 de obtener al mismo tiempo dos caras con el 6 con dos dados jugados al mismo tiempo?

2.° *Problemas de las partidas.*—Dos jugadores, A y B, igualmente hábiles, o sea, sin que en el juego haya ventaja de uno por su mayor destreza sobre el otro, han comenzado por hacer una misma puesta antes de empezar las partidas, conviniendo en que el primero que gane cierto número de ellas, 3 en el caso propuesto por de Meré, será el dueño de las dos puestas. Ahora bien; antes de haber llegado ninguno de los dos jugadores a ganar las tres partidas necesarias, se ven en la precisión de suspender el juego y distribuir las dos puestas. ¿En qué proporción deberá hacerse la distribución si se suspende el juego antes de haber llegado uno de los jugadores a ganar tres partidas? ¿Qué parte de las puestas corresponde en justicia a cada jugador?

Solución de Pascal [67]

«Ningún precedente, dice Du Pasquier [25], autorizaba a pensar que fuese posible emplear la Aritmética para un uso tan atrevido» como la medida del grado de verosimilitud de una afirmación que había de ser decidida por el azar. Pascal resuelve los problemas razonando así en el segundo:

Si yo llevo un punto más (una partida ganada más) que mi contrario y pierdo la siguiente, en la hipótesis de que continuase el juego, tendremos igual número de partidas ganadas, correspondiéndonos a cada uno la mitad de la puesta; luego cualquiera que sea el resultado de la cuarta partida me corresponde, ya, desde luego, la mitad de la puesta (32 pistoles de las 64, dice en la carta de 29 de Julio a Fermat). Falta distribuir la otra mitad de la puesta; pero como la cuarta partida lo mismo puedo ganarla yo que mi contrario *«le hasar est égal»*, dice, nos corresponde a cada uno la mitad de dicha mitad o sea 1/4 de la puesta total. Luego me corresponde a mí 3/4 y a mi contrario 1/4. La contestación de Fermat a la carta en que le comunica el problema y la solución no se hace esperar. En ella da la siguiente solución:

Solución de Fermat

Si tengo dos partidas ganadas y mi contrario una, en otras dos partidas, a lo sumo, quedará decidido el juego. Sólo son posibles estos cuatro casos: *aa, ab, ba, bb,* significando la letra *a* el caso de ganancia y la *b* el de pérdida.

Cualquiera de los tres primeros que se verifique ganaré y sólo si se verifica el último perderé. Mi probabilidad de ganar es 3/4 y la de perder 1/4. Luego la distribución debe hacerse proporcional a estas probabilidades, o sea 3 partes para mí y una para mi contrario.

Generalización

Lanzada la idea se generaliza fácilmente el razonamiento. Pascal lo acepta pero hace objeciones respecto de la validez para el caso de tres jugadores, quedando por fin convencido contestándole en 27 de Octubre la famosa frase en que le dice que no puede sentir por sus invenciones numéricas mas que admiración. El resultado de estas investigaciones es la creación de la Coordinatoria, pero no se publica nada de ellas. Entre los cultivadores de la teoría en esta primera época figuran Huygens, Sauveur, Motte, y por los años

Ars Conjectandi[3]

de 1685 prepara Bernoulli en silencio su *Ars Conjectandi* que no había de publicarse hasta el 1713 después de la muerte del autor. Esta obra constituye una de las piedras angulares del edificio, viéndose en la ley de los grandes números una ley natural a la que, según frase que creo de

Poison, «debían obedecer las grandes colectividades con la misma rigidez que los astros obedecen a la de la gravitación Universal». Prescindiendo del apasionamiento y de la manía a que condujo en aquella época, es indudable su capital transcendencia, tanto en Estadística como en la actual orientación del Cálculo de Probabilidades.

Contribuyen a la teoría por estos años Montmort y Moivre el que, con métodos distintos de los anteriores, da la probabilidad compuesta como producto de las independientes simples. El problema de las partidas es la preocupación a que dedican atención preferente los matemáticos de primera fila. «Todos los grandes hombres del siglo XVIII, dice Pasquier, descienden a la arena y llenan no sólo en la teoría, sino en la del pensamiento humano, una página que el tiempo no borrará jamás». Moivre, Bernoulli, d'Alembert, Bufon, Euler, Lagrange, Laplace, etc., acuden al torneo y forman una ciencia que asombra por los resultados positivos que obtiene en las ciencias experimentales y en la astronomía.

Essai philosophique de Laplace

Laplace escribe su célebre *Theorie Analytique des probabilités,* en la que une los trozos sueltos hasta entonces formando un cuerpo de doctrina admirable, completado más tarde con una magistral lección dada en 1795 sobre *Essai philosophique sur les probabilités.* De la importancia de esta obra dice Pasquier: «El éxito de este *essai philosophique* fué muy grande...; por este ensayo Laplace ha influído poderosamente sobre la corriente filosófica... sus profundos estudios han comunicado a la corriente sociológica un impulso que no ha cesado de aumentar». Puede decirse que el comienzo del siglo XIX es una de las épocas de manía comparable a la que siguió al *Ars Conjectandi.* Se aplica el Cálculo de probabilidades a la economía, la política y las ciencias sociales, considerando a Laplace como el precursor de la Psicofísica. «Las cuestiones de la vida, dice Laplace, no son en su mayoría mas que problemas de probabilidad. Hablando con rigor, puede decirse que casi todos los conocimientos no son mas que probables; y en el pequeño número de las cosas que podemos saber con certidumbre, en las ciencias matemáticas mismas, los principales medios de llegar a la verdad, la inducción y la analogía están fundadas en las probabilidades, de modo que el sistema entero de conocimientos humanos está ligado a esta teoría».

El principio de indiferencia como base del período matemático

Pero el soberbio edificio construído se apoya en el *principio de indiferencia* relativo a la equiposibilidad contenido en la frase de Pascal *le hasar est égal* fundado, a su vez, en el que Du Pasquier llama *principio de la ausencia de razón justificante,* rey y señor del Universo de lo desconocido. Laplace se expresa así: «casos igualmente posibles, es decir, que estemos igualmente indecisos sobre su existencia» cuya «justa apreciación es uno de los puntos más delicados de la teoría del azar». Nuestro subjetivismo es el que decide esta igualdad o indiferencia, que en realidad está cubierta por la ignorancia. De aquí el que se haya calificado dicho principio como el «principio de la distribución uniforme de la ignorancia» [56] y al cálculo de probabilidades como una «metodización de la ignorancia». El cálculo de probabilidades así construído «es un coloso con pies de barro», como dice Rey Pastor [1] en un discurso de la Academia de Ciencias.

He afirmado antes que este cálculo ha comenzado su historia por su segundo período con el estudio de los juegos de azar en los que nuestra experiencia acepta sin dificultad la equiposibilidad de casos. Pero la gran amplitud contenida en las frases de Laplace no pueden aceptarse sino como una sugestión sin valor absoluto en el terreno conquistado mientras la experiencia no nos informe más concretamente.

Principio de la razón perentoria [49]

Ya hemos dicho, antes de ahora, que para la construcción axiomática es indiferente que exista o no acuerdo con la realidad; pero para la sistematización deductiva de los resultados experimentales es fundamental el acuerdo con la misma. Hay que sustituir el *Principio de la ausencia de razón justificante* por el *Principio de la razón perentoria* [49] de Juan de Kries. Los casos equiposibles han de estar fundados en realidades que nos permitan considerarlos así; como dice Rey

Pastor hablando de las ciencias positivas en una conferencia en el Ateneo de Madrid, «hay que interrogar a la naturaleza en vez de razonar sobre ella sin preguntarla»; hay que apoyarse en conocimientos que excluyan la arbitrariedad de modo que no estaremos autorizados a decir que es igualmente posible el que salga una bola blanca o una negra de una urna mientras no sepamos que existe el mismo número de cada clase además de reunirse otras condiciones relativas a la distribución de las mismas, igualdad de volumen, calor especlfico, peso, etc. Y es que tratándose de aplicaciones teóricas a problemas concretos el enlace entre la teorla y los hechos concretos exigen la determinación de las circunstancias ontológicas que no vienen a ser sino las leyes sacadas de la experiencia.

Ninguna compañla de seguros decidirá operar sobre accidentes de un tipo determinado mientras no cuente con estadlsticas que la informen suficientemente del fenómeno en cuestión. Y este es el camino seguido por los iniciadores de la estadlstica en Inglaterra y en Holanda.

Perlodo emplrico y descriptivo

El perlodo emplrico y descriptivo se inicia en 1662 con la publicación por J. Graunt de una tabla cuyo objeto era calcular la mortalidad probable a cada edad.

Las anualidades y las rentas vitalicias de las que se ocupa Witt exigen el conocimiento de las leyes de la mortalidad humana estudiadas por Haley basándose en los registros de Breslau que estima preferibles a los de las grandes ciudades, como Londres, por considerarlos más exentos de espúreos, como dicen los estadlsticos de hoy, a causa de las perturbaciones producidas por la afluencia de personas extrañas y por la aglomeración de seres humanos, utilizando listas de 5 años sucesivos. Halla la probabilidad de vida dentro del año de cada edad, en intervalos de varios años; la mortalidad de grupos de varias personas y las rentas vitalicias, deduciendo útiles consecuencias para la economla polltica.

De las mismas tablas de Haley deduce de Moivre la ley emplrica de extinción de la vida humana fuera de los extre mos de la misma en una progresión aritmética, aproximadamente, y deduce fórmulas sencillas para los valores de las rentas de supervivencia.

Se estudian, comparándolos, la vitalidad y la mortalidad de niños en las grandes poblaciones y del campo, dirigiéndose la investigación experimental al descubrimiento de la ley empírica de mortalidad en condiciones diversas del medio social, higiene, alimentación, morbosidad de enfermedades, etc. Se hacen al efecto por Dupre de Saint Maur trabajos referentes a niños combinando las listas de tres parroquias del centro de París con 12 del campo, para llegar a una ley compensada que se publica en la Historia Natural de Bufón.

Se estudian relaciones entre los sexos, matrimonios, viudedades, con las vitalidades de viudos y viudas, supervivencia de matrimonios, número de hijos en relación con la población, etc. Euler se ocupa de la ley empírica de multiplicación del género humano [28], etc., tendiendo todos los esfuerzos a la creación de una nueva ciencia: la Previsión social. Keersebon en Holanda; Deparcieux, Douvillard, Sipmson y Dormoy en Francia; Vargentín en Suecia; Lexis en Alemania...... figuran entre los colaboradores en este primer período.

Pero no sólo las leyes de mortalidad y supervivencia son las únicas que apasionan a tantos investigadores. Los astrónomos por su parte, obtienen resultados en sus tablas astronómicas que no se adaptan exactamente a los cálculos teóricos, necesitando rectificar y corregir errores. Los geodestas chocan con la imprecisión de sus medidas discordantes de una a otra vez, como los físicos y químicos que buscan comprobaciones de leyes en la concordancia exacta de sus experiencias. Nace así la teoría de errores de observación que Laplace y Gauss culminan en la ley exponencial, creándose además la teoría de los mínimos cuadrados, confirmada por éxitos tan resonantes como el descubrimiento de Neptuno encontrado en el punto preciso del Cielo que Leverrier había señalado aplicando el método de mínimos cuadrados.

En el mismo plano del descubrimiento de leyes empíricas por el camino de la estadística siguen Quetelet y Fechner, que se preocupan de formar estadísticas relativas a caracteres somáticos del hombre, encontrando para muchos la ley normal de Gauss. De esta labor y de la crítica de los errores en que incurren nace la Biometría de Galton y Pearson, que no es sino la estadística aplicada al estudio de los fenómenos vitales, y, finalmente, la Estocástica que es la teoría de las colectividades basada en el Cálculo de Probabilidades.

Aspecto abstracto de un fenómeno o cuestión

En el concepto clásico de probabilidad hay cierta parte abstracta ligada al principio de ausencia de razón justificante y otra objetiva en la que interviene el de la razón perentoria. La equiposibilidad de casos se apoya en el primero, pero el examen de esta equiposibilidad no puede hacerse sin el concurso del segundo.

Abstractamente considerado un fenómeno o cuestión queda reducido [48] a *una proposición de la que se dan ciertas premisas* (que pueden estar completamente desligadas de la realidad física) *y se sientan una o más conclusiones o afirmaciones* (que también pueden ser abstractas).

Conclusiones forzosas y no forzosas

En las ciencias deductivas, construídas con ciertos postulados, las proposiciones suelen ser de consecuencias forzosas, como las de los teoremas de la Aritmética o Geometría. Mas, por el contrario, el conocimiento perfecto de los antecedentes o premisas de los fenómenos del mundo físico no existe y por esto mismo las proposiciones relativas a fenómenos naturales no ofrecen la rigidez lógica de los teoremas de la matemática, sino la incertidumbre de lo fortuito.

Los teoremas de la matemática constituyen ejemplos de proposiciones en que se dan como premisas las hipótesis hechas y los postulados básicos, definiciones y teoremas anteriores ligados a la proposición enunciada. La tesis suele ser forzosa, aunque hay casos en que no lo es. En cambio en los fenómenos físicos, biológicos, sociales, etc., tienen

Valor de las afirmaciones

las proposiciones un número limitado de antecedentes con desconocimiento de otros, por cuyo motivo las conclusiones sólo pueden tener cierto grado de verosimilitud sin ser forzosas. Y esto mismo ocurre en toda proposición en que sólo se conocen ciertas premisas pero se desconocen otras, por lo que la afirmación que se haga sólo podrá ser verosímil sin que pueda graduarse el grado de veracidad o asignar un número a la verosimilitud de la afirmación.

He aquí algunos ejemplos:

Primer ejemplo. a) *Premisas.*—Tenemos un dado de 6 caras. En cada cara hay anotado un número desde el 1 al 6. Se lanza al aire, cae al suelo, y al detenerse presenta un número en la cara opuesta a la de apoyo.

Afirmación.—El número que resulte va a ser entero.

Esta conclusión es forzosa. La proposición es equivalente a un teorema de geometría.

b) *Premisas.*—Las mismas anteriores.

Afirmación.—El número que resulte va a ser par.

Esta conclusión no es forzosa pero tampoco imposible, puesto que puede resultar par o impar.

c) *Premisas.*—Las mismas anteriores.

Afirmación.—Va a salir el número 1.

Tampoco es forzosa pero sí menos verosímil que la anterior.

d) *Premisas.*—Las mismas.

Afirmación.—Va a resultar un número superior a 6.

Esta conclusión es imposible.

Segundo ejemplo. a) *Premisas.*—Tenemos una bolsa con bolas blancas y negras (cuyo tamaño y otros detalles es indiferente siempre que nuestra información no alcance a saber cuáles sean de un color y cuáles de otro). Tomamos una y la sacamos.

Afirmación.—La bola elegida va a resultar blanca.

No es forzosa la conclusión, pero sí verosímil. Pero ¿es más verosímil esta afirmación que la de que va a resultar negra? Nada podemos decir porque la información es insuficiente. No podremos hablar de la probabilidad de salida de la bola blanca, aun cuando sepamos que hay en la urna sólo tres o cuatro bolas.

b) *Premisas.*—A las anteriores añadimos esta nueva: Hay más bolas blancas que negras.

Afirmación.—La bola ha de resultar blanca.

Aunque tampoco es forzosa la conclusión sí es más verosímil que la afirmación contraria. Pero no podremos graduar la verosimilitud asignándole un número. Unicamente podremos decir que la probabilidad de que aparezca bola blanca es probablemente mayor que la de que salga negra.

Y añadimos el, probablemente, porque entre las premisas no figura la hipótesis de indiferencia en la elección. ¿Podremos afirmar que si la elección se hace siempre en el mismo rincón de la urna sería igualmente posible que en este rincón puedan encontrarse una cualquiera de las bolas? ¿O podrá influir en la distribución de las mismas pequeñísimas diferencias, inapreciables para nosotros, de pesos, rozamientos, etc.?

c) *Premisas.*—Las mismas anteriores añadiendo la indiferencia en la elección.

Afirmación.—La misma anterior.

Ahora podremos suprimir el probablemente y decir rotundamente que la probabilidad de resultar bola blanca es mayor que la de que aparezca bola negra.

d) *Premisas.* — Las mismas anteriores añadiendo esta nueva. Por cada bola blanca hay 5 negras.

Afirmación.—La de los casos anteriores.

No sólo podremos decir en éste que la conclusión es menos verosímil que la contraria, sino que es 5 veces menos verosímil, y también que la probabilidad de la afirmación es 1/6 y la de la contraria es 5/6.

c) *Premisas.*—Las anteriores del caso c) añadiendo esta: Por cada bola negra hay 10.000 blancas.

Afirmación.—La misma anterior.

Aunque la conclusión no es forzosa tiene tan grande el grado de verosimilitud, que no dudaremos en decir que la afirmación está muy próxima a la certeza; diremos que *estamos casi seguros de acertar*.

Para un físico en un laboratorio este grado de verosimilitud es la certeza inconcusa. Pero para otra persona para la cual la aparición de bola negra se tradujese en una gran desgracia apreciaría dicha *casi seguridad* de muy distinta manera. Todo depende de la importancia que tenga para nosotros la realización del hecho fortuito. Al físico le ciega la gloria de un descubrimiento y al otro le ciega el temor de la desgracia.

f) *Premisas.*—Además de las del caso anterior c) ésta: Las bolas blancas son todas de mayor tamaño que las negras y esto se distingue al tacto.

La *Afirmación.*—Ha de resultar bola blanca, depende de nuestra voluntad, de modo que estamos seguros de acertar si nos lo proponemos.

Endeblez del principio de indiferencia

La importancia del principio de indiferencia aparece más claro en el ejemplo de la ruleta de Poincaré.

Premisas.—Se tiene un disco circular horizontal con un eje vertical en un centro y una aguja que gira alrededor de dicho eje como en la caja de un barquillero. El disco está dividido en sectores blancos y negros. Damos un impulso a la aguja que, después de dar varias vueltas, se detiene con una de sus puntas, previamente marcada, en uno de los sectores.

Con estas premisas no podremos graduar la verosimilitud de la *Afirmación* que ha de quedar en un sector de color determinado. Es más; aunque añadiésemos la condición de ser iguales todos los sectores y estar alternados los blancos con los negros, seguiremos en la ignorancia del valor de una afirmación concreta. Porque aparte los pequeños rozamientos de la aguja con el eje o pequeños desniveles del aparato entra en juego la sensibilidad del jugador, de la cual no podremos afirmar que en sus diversas tiradas no ha de dejar la aguja en unos sectores del círculo con más frecuencia que en otros.

Lo único que se permite hacer Poincaré es suponer que la probabilidad de detenerse en una posición es una función continua del ángulo de giro. El postulado de indiferencia consistiría en suponer constante la función. Demuestra Poincaré que si los sectores son de ángulo suficientemente pequeño y su número muy grande y están alternados la probabilidad de detenerse en blanco es 1/2. Pero esta conclusión no puede hacerse mas que en dicha hipótesis, a menos que sea constante la función.

En el segundo de los ejemplos anteriores se ve la importancia del conocimiento de los antecedentes o premisas de la proposición; la verosimilitud o veracidad de la afirmación va dibujándose con más precisión a medida que aumenta el número de los antecedentes, desde la imposibilidad de emitir juicio cuando nada se sabe de los mismos hasta la afirmación rotunda cuando no falta ningún dato.

Cuestiones de carácter fortuito inmedibles

Hay muchas cuestiones entre las que pueden incluirse todas las de orden moral y afectivo y muchísimas de orden físico en que no se puede hablar de probabilidad o se habla de ella sin que pueda graduarse por un número.

Si un médico tiene un caso de cierta enfermedad y afirma que el enfermo no llegará a tal día, aunque el pronóstico es verosímil no es medible el grado de veracidad del mismo. La comparación numérica entre esta afirmación y la opuesta de un compañero suyo no es posible. Unicamente cabe dar cierta importancia probable a la opinión de uno respecto de la del otro basada en la capacidad científica, experiencia, etc., pero no puede expresarse por un número el resultado de la comparación mientras no se apoye en una estadística que traduzca la competencia profesional de cada uno en relación con la enfermedad considerada.

Estas consideraciones nos hacen comprender cuán lejos estaban de la realidad los que sugestionados por el *Ars Conjectandi* de Bernoulli y por el *Essai philosophique des probabilités* de Laplace tenían una fe ciega en llegar por conducto del Cálculo de Probabilidades a un orden social científicamente establecido sometiendo a leyes matemáticas la jurisprudencia, la política, la higiene, asistencia social, etcétera. La preocupación de Condorcet de llegar a las probabilidades de error y acierto en los juicios graduando las decisiones de los jurados de un tribunal y reduciendo a números los fallos, estaban muy lejos de traducirse en hechos aceptables, pues todas las cuestiones de orden moral distan mucho de poderse someter a medida en el estado actual de la ciencia. ¿Cómo tener la seguridad de haber reunido todos los antecedentes exactos en cuestiones de esta índole y cómo estar seguros de que nuestro juicio los aprecia en su exactitud cuando tanta parte tiene la sugestión? De análisis en análisis se llega al fondo de las primeras nociones, realidad, ente, etc., para concluir que mientras las premisas no puedan traducirse en números o caracteres comparables cuantitativamente a los que pueda aplicarse el principio de indiferencia, no podrá hablarse de grado de veracidad de una afirmación.

Escuela de Laplace. Principio de causalidad

Cuando la escuela de Laplace define el azar como el nombre que damos a nuestra ignorancia se refiere a los fenómenos del mundo sensible, a pesar de que la equiposibilidad por ella manejada es una abstracción. Esta escuela determinista parte del principio de causalidad. «Todo fenómeno por insignificante que sea, dice Poincaré, [70] tiene una causa y un espíritu infinitamente poderoso e infinitamente bien informado de las leyes de la naturaleza, lo hubiera previsto desde el principio de los siglos».

Si partimos, pues, de la hipótesis que el conocimiento exacto de las causas de un hecho o fenómeno sea suficiente para prever dicho fenómeno bastará el conocimiento de aquellas causas para considerar los efectos consecuencia lógica en virtud de los antecedentes o premisas antepuestos. Así se admite que un físico, que conociese en cada posición las fuerzas que actúan sobre una esferilla de masa conocida que parte de una posición determinada con una velocidad inicial dada, podría fijar con anterioridad al movimiento la posición y velocidad en cada época futura. Si en ciertos instantes del futuro emitiese esta esferilla destellos luminosos, como los cohetes de eclipse, se presentaría su posición para un observador que no conociera los antecedentes como un hecho casual. Si al tirar una moneda al aire conociésemos de antemano toda la trayectoria con las posiciones en cada instante hasta que, chocando en el suelo, se detuviese, nada tendría de casual la última posición. Pero ante esta ignorancia el juego de cara o cruz es un juego de azar. Otro tanto puede decirse si al sacar un número de una urna pudiéramos percibir todos los contenidos en ella, pues en la elección desaparecería el azar. Pero al ser la urna opaca e indistinguibles los números al tacto decimos que el resultado es debido al azar.

Concepto del azar

En consecuencia, conforme a lo antes expuesto, el conocimiento de todos los antecedentes o premisas o causas del fenómeno elimina la imprevisión del resultado; imprevisión que es tanto mayor cuanto mayor sea el desconocimiento de los antecedentes de la cuestión.

El azar en este sentido *no es otra cosa que el nombre que damos a nuestra ignorancia.* Esta es la escuela de Laplace [51]. Y aún precisa más Poincaré [70] al afirmar: *«El azar no es mas que la medida de nuestra ignorancia».*

Pero esta concepción determinista del mundo físico queda comprendida, como un caso particular, dentro del campo de la abstracción, más amplio, en que se coloca Cournot. Este es el campeón que se enfrenta con la escuela de Laplace para negar que el azar no sea otra cosa que nuestra ignorancia.

Según la escuela de Cournot [19], cuyo mantenedor contemporáneo es Urban [83], *la idea de azar va ligada a la de abstracción de un carácter o fenómeno o hecho determinado en la realización de un suceso.* Según Urban, todo carácter distintivo no contenido en la definición de los elementos de un conjunto pero perteneciente a uno, por lo menos, y, en general, a varios, se dice que le pertenece fortuitamente.

Elegir al azar o verificarse al azar un hecho, no significa nada si no nos referimos a un carácter o hecho determinado. Al tomar una bola de una urna no podemos decir que elegimos al azar en cuanto nuestra voluntad guía nuestra mano; pero si nos referimos a que la bola tomada sea blanca o de otro color, podremos decir que la elección la hemos hecho al azar si en dicha elección no hemos tenido en cuenta el carácter color o, lo que es lo mismo, si al elegir hemos prescindido voluntaria o involuntariamente del color estando las bolas a la vista o no.

Análogamente, cuando decimos que se ha producido un accidente casual por el hecho de que al pasar una persona ha sido atropellada por un vehículo, nos referimos al hecho inesperado, sin que esto signifique que de antemano pudiéramos conocer las trayectorias y respectivas velocidades del vehículo y de la persona, lo que equivale al conocimiento del futuro con todos los encuentros que hayan de ocurrir; pero si no fijamos nuestra atención en este último extremo, se producirá el choque que debía producirse, pero en cuyo detalle no habíamos fijado la atención.

En la escuela de Laplace el azar no existe para Dios, lo cual no deja de ser una paradoja. La concepción de Cournot es más amplia. Según ella el azar existe para Dios porque para El existe la abstracción.

Y es que la ignorancia no es mas que una abstracción forzosa, mientras que la abstracción es una ignorancia voluntaria. Era muy humana la visión de Laplace al poner el azar en la ignorancia, porque quizá sea el medio más perfecto de abstraer que tengamos a nuestro alcance.

Probabilidad clásica a priori, lógicamente considerada

Dentro del campo de la abstracción queda comprendido el principio de indiferencia en la definición de un conjunto discreto.

Una colectividad discreta de elementos que poseen un carácter común, a, decimos que constituyen un conjunto C. Así tenemos el conjunto de las bolas de un sorteo, de los mozos de una quinta, etc. Si abstraemos de dichos elementos todos los demás caracteres o atributos fijándonos sólo en el común, a, que los incluye o excluye en el conjunto considerado, nos quedaremos sin elementos de juicio para distinguir un elemento de otro. Por entenderse así, todos los números de un sorteo son equivalentes antes de realizarse éste y tienen el mismo valor en venta.

El postulado de la indiferencia, de Keynes, [47] no es otra cosa que el enunciado de esta propiedad:

Todos los elementos de un conjunto discreto son indistinguibles cuando en ellos no se tiene en cuenta otro carácter que el que los define como elementos de dicho conjunto.

Para establecer una distinción hay que considerar otro carácter, *b,* no común a todos; como premio mayor, color, número inscrito, etc., que pertenecerá por lo menos a uno y podrá pertenecer a varios, pero no a todos. Si el nuevo carácter, *b,* pertenece a uno sólo, al elegir en *C* un elemento al azar respecto de *b,* la posibilidad de que el elemento elegido posea el carácter *b,* se distribuye de modo uniforme o equitativamente entre todos los elementos de *C.* Por esto, si el número total de ellos es *n,* se dice que la parte de participación que corresponde *a priori* a cada uno es $1/n$, o que *la probabilidad de posesión del carácter b* es $1/n$.

Si el nuevo carácter *b* pertenece a ν de los *n* elementos de *C,* la distribución uniforme de la posibilidad se repite ν veces en cada elemento, por lo que se dice que a cada uno corresponde ν/n de dicha posibilidad o que *la probabilidad de poseer el carácter b* en un elemento elegido al azar respecto de dicho carácter es ν/n.

Tenemos así una medida de la posibilidad de posesión de un carácter, o lo que viene a ser lo mismo, una medida del grado de veracidad de una afirmación. Si ningún elemento posee el carácter *b,* la medida es *cero.* Si todos los elementos poseen dicho carácter *b,* la medida de la posibilidad o del grado de veracidad es *uno.* El cero corresponde a la *imposibilidad* y el uno a la *certeza,* y entre estos dos números el grado de veracidad es tanto mayor cuanto más cerca de *uno* esté la probabilidad.

Principio de las probabilidades totales

Si en lugar de un nuevo carácter, *b,* consideramos varios *b, c, d* ... por ejemplo tres (o más) puede ser que dos, tres (o más) se presenten simultáneamente (caso de compatibilidad) o que esto sea imposible. En este último caso en que suelen llamarse incompatibles cada dos en un mismo elemento y distintos los tres con el a común a todos ellos, tendremos en C tres subconjuntos relativos a los nuevos caracteres b, c y d, cuya suma forma a su vez otro subconjunto.

La posibilidad de que un elemento elegido al azar respecto de estos tres caracteres posea uno de los tres o bien que pertenezca a uno de los tres subconjuntos parciales se distribuye uniformemente entre los elementos de C repitiéndose $r + s + t$ veces en cada elemento de C, si r, s y t, son los números de los elementos contenidos en los tres subconjuntos citados. En resumen: que *la probabilidad de que el elemento tomado al azar* respecto de estos tres caracteres *posea uno cualquiera de ellos,* b, c o d, resultará igual a $r/n + s/n + t/n$; a cuya suma se llama *la probabilidad total* relativa a los tres caracteres citados.

Principio de la probabilidad compuesta

Supongamos que además del carácter a tengan ν de los n elementos de C el carácter b y que, a su vez, ν' de éstos ν posean, además, el carácter b'. La probabilidad de que uno de los ν que poseen el carácter b elegido al azar respecto del b' tenga también el carácter b' es: ν'/ν; y la de que un elemento de C elegido al azar respecto de b tenga el b es: ν/n. Por otra parte, la probabilidad de que el mismo elemento de C elegido al azar respecto de b' posea este carácter b' es: ν'/n; y como $\nu'/n = (\nu'/\nu)\ (\nu/n)$ podremos decir que la probabilidad de que a un elemento pertenezca simultáneamente el carácter b y el b' es igual a la probabilidad de que tenga el carácter b prescindiendo del b' multiplicada por la de que posea el b' una vez que le pertenezca el b.

A la probabilidad de que el elemento posea el carácter bb' formado por la superposición de dos se le llama *la probabilidad compuesta* o de simultaneidad o sucesión de caracteres.

Probabilidad continua. Conjuntos continuos

Si el carácter común a de los elementos del C es una magnitud medible, como un peso, un volumen, etc. o está definida por el concurso de dos o más números, podremos considerar el elemento, a, como perteneciente a una multiplicidad continua de puntos de una, dos o más dimensiones. Por ejemplo: el impacto de un proyectil en un blanco, la posición de una molécula en un matraz, la estatura de un mozo, etc., pueden considerarse como posiciones de un punto en una área, en una celdilla del espacio o en un segmento rectilíneo.

Grados del carácter

Si se trata de una sola variable, lo que se hace es establecer distintos grados en la variación posible, incluyendo en un mismo grado todos los elementos comprendidos entre ciertos límites. Así, en el caso de estaturas los grados pueden ser los intervalos comprendidos entre $(n - 0'5)$ y $(n + 0'5)$ centímetros, siendo n un número entero. Por ejemplo incluiríamos en la estatura de 165 cm. todas las comprendidas entre 164'5 y 165'5 centímetros. Si se trata de áreas puede formarse un cuadriculado de cuadrados iguales trazando paralelas a dos ejes coordenados rectangulares e incluir en cada cuadradito todos sus puntos interiores, más los de los lados del mismo más próximo al origen de coordenadas; y lo mismo si el conjunto continuo es de tres dimensiones por análogo convenio para las caras de las celdillas que utilicemos.

Equiprobabilidad de grados

El carácter b puede consistir en que la medida pertenezca a un cierto grado o a una celdilla determinada. Si se admite que pueda aplicarse el principio de indiferencia al hecho de estar contenido el punto tomado en cualquier celdilla, lo que viene a reducirse a admitir la equiprobabilidad de todas las celdillas, estaremos en las mismas condiciones de las probabilidades discretas antes consideradas.

Negación de la equiprobabilidad

Pero estos conjuntos continuos ofrecen una diferencia esencial respecto de los discretos a que antes nos hemos referido regidos por el principio de indiferencia, porque en los continuos no tiene sentido hablar de la distribución equitativa de la posibilidad de participación del carácter b entre todos los elementos del conjunto cuando éste tiene infinitos, porque el concepto de distribución se refiere a un número entero. Cuando sólo hay un número finito de puntos la equiprobabilidad de las celdillas equivale a una distribución uniforme de puntos en todo el campo de variación. Mantener la equiprobabilidad al aumentar infinitamente el número equivale a sostener esa distribución uniforme, con lo que llegamos a admitir que *la densidad del conjunto es constante* en todo el campo. Pero las estadísticas confirman, precisamente, todo lo contrario. En un blanco se agrupan los impactos con mayor densidad en el centro que en los extremos y bordes del mismo. El conjunto de casos sometido al azar es análogo a una nube de polvo que en unas partes es más densa que en otras. Descompuesto el espacio en celdillas iguales, en unas existen muchísimas partículas y en otras muy pocas. Si todas las partículas de polvo pudiesen numerarse y sacásemos a suerte una en una lotería ideal, no podríamos decir que la probabilidad de pertenecer a una celdilla sea la misma que para otra cualquiera. La probabilidad de que la partícula aparecida al azar se encuentre en las celdillas más densas es mayor que la de que se encuentre en las menos densas. Un razonamiento sencillo nos conduce a la conclusión de que dicha probabilidad debe ser proporcional a la densidad y en estos símiles físicos se funda el nombre de *masa de probabilidad* dada a la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a una celdilla determinada. Pero lo que ahora nos interesa es que la probabilidad depende de la distribución de puntos. El número llamado *moda* en estadística (el que viene a coincidir con el concepto vulgar de moda), se refiere a la parte de dicha distribución en que aparece la densidad máxima, y no es otra cosa que la medida del carácter que se presenta con más frecuencia.

Densidad y masa de probabilidad

Ley de probabilidades o ley del azar

Todo fenómeno natural, como la distribución de pesos o estaturas en una raza, admitimos que tiene su *ley de probabilidad* de los infinitos casos fortuitos que se van presentando, definida, precisamente, por una función que no es mas que la densidad. No es indiferente o igualmente posible que la estatura de un recien nacido cuando cumpla 20 años pueda estar comprendida en uno cualquiera de los diversos grados. Pero es que no sólo cuando el hecho es independiente de nuestra voluntad sino cuando nuestra actuación obedezca a ella el caso fortuito responde a una determinada distribución que da mayor importancia a unos casos que a otros.

Variación de la ley del azar [70]

Se propone Poincairé el siguiente problema:

¿Cuál es la probabilidad de que un punto M tomado al azar en un segmento rectilineo AB esté comprendido en otro, PQ, contenido en AB?

No se dice ni se supone nada acerca del modo de obtener el punto *M* al azar. Lo mismo podría hallarse tirando bolitas a un blanco rectangular construído sobre *AB* apuntando siempre a un punto o unas veces a uno y otras a otro, o disparando con una escopeta de salón proyectando los impactos sobre el segmento *AB* con la única condición de dar en el rectángulo, o bien ordenando a un niño que señalase, a capricho, un punto sobre el mismo segmento, o haciendo rodar una esferilla elástica sobre una canal a lo largo de *AB,* retrocediendo al chocar con los extremos, o determinando el punto por la longitud de un segmento igual a la de un arco marcado por una aguja de una ruleta a partir de un punto fijo de la circunferencia del disco de la misma, o proyectando ortogonalmente el extremo de la aguja sobre *AB* en cada una de sus posiciones finales, etcétera, etc., etc. Hay infinitos procedimientos dependientes de nuestra voluntad para señalar un punto en *AB,* de modo que su posición resulte un hecho fortuito para nosotros. En todos los casos hay infinitas posiciones posibles para el punto *M.* Elegido un procedimiento, al repetir las pruebas se apreciará, en general, una distribución desigual y en unas partes se acumularán más los resultados que en otras. Un grandísimo número de pruebas hechas en las mismas condiciones nos daría una distribución estadística de la que podríamos deducir una ley empírica del modo peculiar de actuar el azar en dicho procedimiento; ley empírica que consideramos como una primera aproximación de una ley natural ligada a las causas desconocidas que producen tales resultados. De dicha estadística podremos deducir conjeturas aceptables respecto de la probabilidad buscada.

Variación de la probabilidad con la ley del azar

Al pasar de una ley, o procedimiento, a otra, variará la distribución y la probabilidad dependerá del modo peculiar de actuar el azar. No obstante, podrán existir y existen, en general, diversas leyes en las que se conserva la probabilidad, y todas estas leyes tienen un enlace común; pues todas pertenecen al mismo grupo.

Pero en el problema enunciado nada se dice respecto del procedimiento, que se deja arbitrario, por lo que nada se puede afirmar respecto de la distribución. Por esto dice Poincaré contestando a su pregunta, que «no sabemos nada absolutamente» de dicha probabilidad.

Postulados de la probabilidad continua

Pero hay algo común a todas las leyes o procedimientos de actuación del azar y este algo común está en la continuidad y en los dos principios de las probabilidades totales y compuestas que pueden sentarse como postulados:

1.° *La probabilidad de que un punto M tomado al azar sobre AB pertenezca a PQ, cualquiera que sea el procedimiento seguido en la elección, es una función de los extremos P y Q, con un valor positivo o nulo.*

Es decir, que si p y q son las abscisas de dichos puntos, se tendrá para esta probabilidad:

$$f(p\,,q) \geqslant 0$$

2.° *Si C es un punto de PQ de abscisa c se deberá tener:*

$$f(p\,,q) = f(p\,,c) + f(c\,,q).$$

Con este postulado afirmamos que la probabilidad es una función aditiva monótona y creciente con la amplitud del intervalo.

3.° *Si C y D son dos puntos del segmento PQ, la probabilidad, π, de que perteneciendo M a PQ pertenezca también a CD cumplirá la relación*

$$f(c\,,d) = f(p\,,q)\cdot\pi \quad ;\text{ o bien: } \quad \pi = \frac{f(c\,,d)}{f(p\,,q)}.$$

Si, en particular, se toma como unidad el valor de $f(p\,,q)$, tendremos para la probabilidad π el valor de $f(c\,,d)$.

Del segundo postulado y tomando como origen de abscisas A se deduce que es

$$f(p, q) = f(0, q) - f(0, p).$$

Tomando, ahora, dos puntos muy próximos de abscisas x y $x + dx$ será

$$f(x, x + dx) = f(0, x + dx) - f(0, x) = \Delta f(0, x)$$

en la que $\Delta f(0, x)$ es el incremento de f correspondiente al Δx.

Si esta función f es derivable en todo el intervalo AB podremos escribir:

$$f(x, x + dx) = \frac{df}{dx} dx$$

y designando la derivada por $\varphi(x)$

$$f(x, x + dx) = \varphi(x) dx.$$

Diagrama acumulativo y función de probabilidad total

Observemos ahora que la función $f(0,x)$ que expresa la probabilidad para que el punto elegido al azar pertenezca al intervalo $(0, x)$ viene a sustituirse en Estadística por el llamado *diagrama acumulativo* en que el valor de la ordenada en un punto x es proporcional al número total de puntos u observaciones comprendidos en el intervalo $(0,x)$. Luego $\Delta f(0,x)$ viene a representar indirectamente en dicho diagrama el número de puntos comprendidos en el intervalo Δx localizado su origen en el punto de abscisa x; y la razón $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ será la *densidad media* de la distribución en dicho intervalo. Si el conjunto de observaciones tuviese la potencia del continuo, y siempre en la hipótesis de existir la derivada, representaría ésta, que designamos por $\varphi(x)$, *la densidad del conjunto en el punto de abscisa* x, por lo que se llama también *densidad de probabilidad.*

Conocida dicha función $\varphi(x)$, tendremos para la $f(0, x)$, llamada *función de probabilidad, total* una suma de elementos de la forma $\int_0^x \varphi(x)\, dx$; y para la $f(p,q)$ esta otra: $f(p,q) = \int_p^q \varphi(x)\, dx$.

Esta función $\varphi(x)$ debe ser tal que sea $f(o,b) = \int_o^b \varphi(x) dx = 1$ porque expresará la posibilidad de que aparezca un punto de AB y esto es forzoso si la elección se hace en AB.

Probabilidad elemental. Imposibilidad y certeza

La expresión $\varphi(x) dx$, llamada *probabilidad elemental,* expresa la probabilidad de aparición del punto en el intervalo dx localizado en la posición x. Cuando dx tiende a cero esta probabilidad tiende también a cero, a menos que fuese $\varphi(x)$ infinito en el punto x, en cuyo caso se dice que en dicho punto hay concentrada una masa finita de probabilidad, lo que es una excepción, puesto que la masa finita de probabilidad está extendida a lo largo de un segmento pero la parte correspondiente a un punto es nula. Por esto se dice que en las probabilidades continuas es nula la probabilidad de que aparezca un punto determinado, suponiendo factible la posibilidad de que pueda fijarse un solo punto de un intervalo, porque, en realidad, lo único que podemos fijar al azar es intervalos pero no puntos. Pero continuando dentro del campo de la abstracción resultará nula la de que aparezca uno cualquiera de un número finito de puntos o infinito siempre que dicho conjunto de puntos tenga su medida nula, puesto que esta medida es lo que sustituye al dx. Podríamos imaginar todos los puntos de AB de abscisa racional (que forman una red tan tupida que en cualquiera de sus intervalos, por pequeño que sea, existen siempre puntos de la misma red) y como la medida del conjunto de los números de esta red es nula, resultará igual a cero la probabilidad de que al azar aparezca un punto de la misma. Y es que en las probabilidades continuas ni la unidad representa el símbolo de la certeza ni el cero el de la imposibilidad. Para evitar esto proponía Borel en su primer artículo sobre probabilidades numerables en Rendiconti del Circ. di Palermo en 1901 que en las probabilidades continuas iguales a la unidad y a cero se expresase que son iguales a uno o cero asintóticamente.

Densidad de probabilidad constante. Variables equiprobables o normales

La densidad de probabilidad $\varphi(x)$ nos da distinto valor para la probabilidad de aparición del punto en el intervalo de amplitud dx localizado en dos posiciones distintas. El caso más sencillo es aquel en que es constante $\varphi(x)$. Entonces se dice, aunque impropiamente, que todos los puntos de AB son equiprobables y la variable x se llama *normal* o *equiprobable*. La probabilidad de que el punto tomado al azar esté en el intervalo o segmento PQ es proporcional a la amplitud del intervalo o longitud del segmento. Fuera de este caso la equiprobabilidad no existe mas que en intervalos de amplitud infinitesimal dx, de modo que la probabilidad relativa a un intervalo, kdx, localizado en el mismo punto que el dx es igual a la relativa a este último multiplicada por k.

Cambio de sistema de representación

Es interesante sustituir a veces la representación de los hechos por otra cambiando la variable mediante una transformación que sustituya la variable, x, por otra, u, ligadas por una ecuación $x = x(u)$ que transforma la densidad $\varphi(x)$ en otra $\Phi(u)$ definida por esta ecuación:

$$\varphi(x)\,x'(u)\,du = \Phi(u)\,du.$$

Si es $\Phi(u)$ constante será normal o equiprobable la nueva variable u determinada por la ecuación diferencial

$$\varphi(x)\,\frac{dx}{du} = \Phi(u) = \frac{1}{k}$$

de la que
$$u = k\int \varphi(x)\,dx.$$

En esta transformación subsiste el procedimiento o modo o ley de actuar el azar; lo único que varía es el sistema de representación con otra variable y otros elementos de referencia.

Variación de la ley del azar

Si pasamos a otro procedimiento de actuación del azar conservando la misma variable y los mismos elementos de referencia se cambiará la densidad $\varphi(x)$ por otra $\varphi_1(x)$. Ahora lo que cambia es la ley de actuación del azar. Pero como también podemos cambiar al mismo tiempo de variable con el sistema de referencia tendremos una relación de la forma

$$x = x(u) \quad , \quad \varphi(x(u))\, x'(u)\, du = \Phi(u) du$$

para pasar de la ley o procedimiento primero al nuevo en el sistema de la variable u.

Sistema de dos o más variables y su transformación

Lo anterior se refiere a caracteres definidos por una sola variable. Pero si en lugar de una sola se necesitan dos o más tendríamos en lugar del segmento rectilíneo AB un campo de variación de dos o más dimensiones. La probabilidad elemental $\varphi(x)dx$ es ahora de la forma $\varphi(x,y)dxdy$, o $\varphi(x, y, z)dxdydz$, etc. Y si la función $\varphi(x, y, z)$ etc. es constante en todo el campo de variación serán *equiprobables* o *normales las variables* x, y, z...

Ahora el cambio simultáneo de sistema de referencia y de ley de actuación del azar se traduce en una transformación

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$

que sustituye la probabilidad elemental $\varphi(x, y)dxdy$ por la

$$\varphi(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = \Phi(u, v)dudv.$$

Tenemos ahora dos campos de variación, distintos, del carácter considerado: uno el (x, y) con una densidad de probabilidad $\varphi(x, y)$ que define la ley del azar o del procedimiento de obtener los casos concretos, y otro el (u, v) con una densidad $\Phi(u, v)$ que define otra ley o procedimiento distinto. A cada dominio contenido en el primer campo corresponde otro contenido en el segundo. Suponemos, desde luego, que existe correspondencia biunívoca entre ambos campos, y puede ocurrir que la probabilidad obtenida para la aparición de un caso del primer campo sea distinta de la correspondiente a uno del segundo o que sean iguales.

En general, para comparar las probabilidades relativas a la aparición de un caso concreto de un cierto dominio hay que referir los hechos a un mismo sistema de coordenadas, y entonces es cuando se ve que se trata, o no, de procedimientos distintos de actuación del azar.

Paradoja de Bertrand

Uno de los ejemplos típicos que dió origen a gran número de discusiones en las que se llegó a negar validez a los resultados del Cálculo de Probabilidades por las arbitrariedades de los resultados a que conducía fué el llamado *paradoja de* Bertrand [5].

Se supone dibujada una circunferencia y se traza una secante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la cuerda de esta secante sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito?

Bertrand da tres soluciones: 1.ª La cuerda está determinada fijando al azar su punto medio. Los casos posibles son todos los puntos del círculo dado y se suponen todos equiposibles. La medida del conjunto que forman, o área del círculo es πr^2.

Los casos favorables son todos los puntos del círculo de radio $r/2$. La razón de las dos medidas es $1/4$.

2.ª La cuerda puede determinarse fijando al azar los extremos de la misma mediante dos tiradas sucesivas en una ruleta.

Fijado uno de los extremos, todos los casos posibles del otro son los puntos del arco comprendido entre 0 y $2\pi r$. Los casos favorables corresponden a arcos comprendidos entre $2\pi r/3$ y $4\pi r/3$, y la medida de su conjunto es $2\pi r/3$. Luego la razón o probabilidad buscada es $1/3$.

3.ª La cuerda puede fijarse dando su dirección al azar y después su distancia al centro. Se encuentra que la razón o probabilidad es $1/2$.

Además de estos tres procedimientos podremos añadir otros infinitos, como, por ejemplo, dos funciones ($\alpha p/r$, $p/r + \alpha$) en lugar de las (p , α) que suponemos son las coordenadas polares ligadas a la representación de los resultados del tercer caso. Con estas últimas se obtiene para la probabilidad 0'465... que es distinta a las anteriores, y así en infinitos casos.

Explicación de la paradoja de Bertrand

Para comparar unos con otros se refieren las distintas coordenadas, (x , y) del primer caso, (θ_1 , θ_2) del segundo, (p , α) del tercero, (u , v) del cuarto, etc. a una misma representación; por ejemplo: a coordenadas polares (p , α).

Las fórmulas de transformación del primer caso son:

$$\left.\begin{array}{l} x = p \cos \alpha \\ y = p \operatorname{sen} \alpha \end{array}\right\}.$$

Las del segundo
$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 = \alpha - \operatorname{arco} \cos p/r \\ \theta_2 = \alpha + \operatorname{arco} \operatorname{sen} p/r \end{array}\right\}$$

y las del cuarto
$$\left.\begin{array}{l} u = \alpha\, p/r \\ v = p/r - \alpha \end{array}\right\}.$$

Mediante estas fórmulas se encuentra que la densidad de probabilidad es, en el primer caso: kp; en el segundo:

$$1/r \sqrt{1 - (p/r^2)}\ ;$$

y en el cuarto:

$$(p/r^2 + \alpha/r).$$

Con estas densidades, que son las que definen las respectivas leyes o procedimientos de actuar el azar, se obtienen los resultados de Bertrand, con lo que ha desaparecido la paradoja.

La probabilidad elemental y los grupos de transformaciones geométricas [9]

Así, pues, en el enunciado concreto de un problema de probabilidades queda fijada la probabilidad elemental, que podrá expresarse en infinitos sistemas de coordenadas. A cada uno de ellos va unida una ley del azar caracterizada por la función de densidad y esta función varía de unas coordenadas a otras, pero la probabilidad obtenida es la misma. El hecho es el mismo pero variamos su representación. En otros términos la probabilidad elemental está ligada a un grupo de infinitas transformaciones geométricas dependientes de cierto número de parámetros. Si éstos son tres y las fórmulas de transformación son

$$u = f_2 (p, \alpha, a, b, c)$$
$$v = f \ (p, \alpha, a, b, c)$$

tendremos una, dando a (a, b, c) valores particulares. Cada terna (a, b, c) puede considerarse como coordenadas de un punto referido a tres ejes cartesianos y todas las infinitas ternas posibles podrán considerarse como los infinitos puntos de un dominio de tres dimensiones D_3. A cada punto de este D_3 corresponderá una transformación, y si designamos por T dicho punto podremos decir que la correspondiente transformación es la T, y si, como suponemos, las transformaciones correspondientes a dos puntos distintos son distintas, podremos decir que existe una correspondencia biunívoca entre el dominio D_3 y el conjunto de transformaciones.

En dicho conjunto se consideran líneas de transformaciones y transformaciones infinitamente próximas, lo que da origen a las transformaciones infinitesimales.

Sólo diremos, por no caber en este lugar mayores desarrollos, que la densidad de probabilidad $\varphi(u, v)$ debe satisfacer un sistema de ecuaciones de derivadas parciales y que la *probabilidad* de que aparezca el carácter en un dominio determinado *es un invariante integral del grupo* de transformaciones.

Defectos de la probabilidad a priori

Hemos expuesto en lo anterior el concepto de probabilidad en su primer aspecto matemático tal como lo concibieron Pascal y Fermat hasta nuestros días. Pero esta noción, *a priori*, adolece del defecto de apoyarse en sugestiones psicológicas como las de regularidad y homogeneidad perfecta de los cuerpos físicos (discos y poliedros materiales) que idealmente consideramos como sólidos geométricos teóricos, uniendo a todo esto la simetría, imparcialidad e indiferencia de nuestra actuación que da como resultado, en nuestra mente, la justificación del principio de indiferencia en el sentido de Laplace aplicado a los juegos de azar de dados, cara y cruz, extracción de bolas de una lotería, etc. que no resisten una crítica profunda.

No obstante, manejado este concepto por Gauss y Laplace les conduce a la ley exponencial que viene a constituir un dogma de valor universal en el siglo XIX, a cuya ley debían obedecer todos los hechos y caracteres sujetos a la variación del azar desde los errores de observación hasta los caracteres biológicos de los seres vivos, los de la fantasía, del arte, la moral, etc., en fin, todo el campo de los conocimientos humanos basados en la realidad; y la creencia en dicha ley era tan firme que algunos como Quetelet, creador de la que llamó Física social [72], creen que las desviaciones denunciadas por la experiencia eran debidas a causas extrañas interpuestas accidentalmente.

Insuficiencia de la ley exponencial

Para demostrar la verdad de la misma acumula Fechner experiencias y más experiencias, encontrándose, a fuerza de datos, precisamente con la demostración de lo contrario que esperaba hallar; de la insuficiencia para explicar los fenómenos biológicos. No obstante la inercia, mantiene la fe aun en los mismos teóricos. Bravais, discípulo de Gauss, iniciador de la moderna teoría de la correlación, es el primero que duda hasta que Galton y Pearson con su biometría sistematizan las investigaciones [69] y concluyen con la formulación de otras varias leyes distintas de la ley exponencial de Gauss. Hoy día la teoría de las leyes de Probabilidad es uno de los capítulos más interesantes y profundos del cálculo de Probabilidades gracias a los trabajos de matemáticos tan notables como Tchebycheff, Marcoff, Liapounoff, Romanowsky, Pearson, Charlier, Lindeberg, Levy, Cantelli...

Renovación de las bases teóricas del Cálculo de Probabilidades

Se llega así a la necesidad de renovar las bases teóricas del Cálculo de Probabilidades abandonando la sugestión de los casos equiposibles para fundarlo en los colectivos de Fechner y Bruns [14].

Volvemos a repetir que si no se tratase mas que de formar un Cálculo de Probabilidades puro, como disciplina matemática, sería indiferente el preocuparse de que sus conclusiones respondiesen o no a la realidad física; pero como el fin principal perseguido es construir una teoría que venga a ser, respecto de los hechos fortuitos, lo que la Geometría Euclidiana y la Mecánica Racional son respecto de los cuerpos materiales y sus movimientos y relaciones mutuas, es preciso apoyarse en postulados de acuerdo con la experiencia, que puedan admitirse sin objeción alguna, exentos de crítica fundada en apreciaciones psicológicas.

En el reducido marco de este modesto discurso no es posible recoger ni menos analizar los diversos sistemas y trabajos realizados en dicho sentido por Bolhmann, Broggi, Cantelli, Borel, Urban, Tornier, etc., para dar un fundamento axiomático al Cálculo de Probabilidades, limitándonos a resumir la orientación dada por Misses [61] y Du Pasquier [25], que se apoyan en los métodos de la Estocástica partiendo de la teoría de los colectivos de Fechner, pero colocados en el punto de vista lógico que para Cournot tiene el azar.

Colectivos empíricos. Extensión del campo de variación

De un conjunto de entes, seres, objetos, hechos..... pueden formarse o definirse nuevos elementos o ejemplares (que en general serán los mismos del conjunto o agrupaciones de varios) atendiendo a algún carácter distintivo o alguna condición; y a la sucesión de estos elementos o ejemplares se le llama un *colectivo empírico.*

Asociando a cada elemento uno o varios números (parámetros descriptivos o medidas si el carácter es medible) se forma con el conjunto de dichos números el *campo de variación* o la *extensión* del colectivo. La variable es el *argumento* y si hay varias son *las coordenadas* del carácter distintivo. Si dicho argumento, o las coordenadas, sólo pueden tomar un número discreto de valores del campo de variación queda reducido éste a un número finito de puntos (como el de casos posibles en un juego de uno, dos o más dados numerados cada uno de 1 a 6). Pero si la variable o variables representan una medida continua, como una estatura, un peso, la posición de un punto en un plano o en el espacio, etc..., el campo o extensión será continuo; un segmento, área, volumen, etc.

Diagrama o diadose del colectivo

La definición de un colectivo queda incompleta si no se añade la tabla o diagrama de repetición de cada caso, a la que Du Pasquier [25] llama la *diadose del colectivo,* y que en los que constan de un número finito de valores del argumento se reduce a una lista en que se expresa la *frecuencia total* de los casos correspondientes a cada valor del parámetro o argumento y la *frecuencia relativa,* o cociente de dividir la total por el número total de elementos. Además de esto interesa la *frecuencia acumulada* de los casos cuyo argumento es igual o menor que cualquiera de los valores posibles de éste.

Así, por ejemplo, de una lista de soldados del ejército español puede formarse un colectivo empírico de estaturas de los mismos del modo siguiente: A la derecha de cada número de la lista se anota la respectiva estatura, no escribiendo de las estaturas mas que el número exacto de centímetros, como se indicó antes al tratar de los diversos grados de una variable continua. De la tabla así formada se deduce otra de cuatro columnas. En la primera se anotan las estaturas de cm. en cm. desde la menor a la mayor. En la segunda se inscriben las frecuencias totales correspondientes a cada número de la primera columna. En la tercera se escriben los cocientes de dividir cada número de la segunda por n, y en la cuarta se anota frente a cada número de la primera la suma de todos los de la tercera correspondientes a las estaturas menores más la correspondiente al número considerado. Si llamamos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ los números de la primera columna; $n_1, n_2, n_3, \ldots$ los de la segunda; $y_1, y_2, y_3, \ldots$ los de la tercera, serán los de la cuarta $z_1 = y_1$; $z_2 = y_1 + y_2$; $z_3 = y_1 + y_2 + y_3$; .....

En este colectivo los elementos son las estaturas; el parámetro es el número x de centímetros de la misma; la extensión o campo de variación se compone de los diversos números $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$.

Otro colectivo puede formarse con la lista de inscripciones en el registro civil de los nacimientos entre dos fechas tomando como elemento las centenas de inscripciones seguidas o sea los 100 primeros; los 100 siguientes, etc. El atributo descriptivo de estos elementos puede ser el sexo. El parámetro correspondiente el número, x, de niños que hay en la centena, el que puede variar entre 0 y 100. Tendremos 101 valores distintos para el parámetro x., que, como antes, se inscribirá en la primera columna. En la segunda se anotarán las frecuencias totales $n_0, n_1, n_2, n_3 \dots$ de $0, 1, 2, \dots$ niños existentes en las sucesivas centenas, etcétera.

La tabla construida puede representarse gráficamente tomando sobre un eje OX los puntos de abscisas $x_1, x_2, x_3, \dots$ y elevando en ellos perpendiculares iguales a $y_1, y_2, y_3, \dots$ para la curva de frecuencias relativas; y otras ordenadas $z_1, z_2, z_3, \dots$ para la curva de frecuencias relativas acumuladas entre el menor valor de x y el del índice considerado.

Este diagrama tiene el campo de variación de la variable de una sola dimensión.

He aquí otro ejemplo en que el campo de variación es de tres dimensiones, y lo mismo puede ser de cualquier número de ellas: Se juegan al mismo tiempo tres dados en cuyas caras hay inscritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Aparecen cada vez tres números y como pueden combinarse cada uno del primero con cada uno del segundo y del tercero, se tendrán en en total $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ casos posibles. Cada caso (carácter distintivo) está representado por 3 números, que podremos suponer de distinto color para que no haya duda respecto del lugar que corresponde a cada uno. Gráficamente el campo de variación estará constituido por 216 puntos vértices de una malla que tendrían por coordenadas (x, y, z). Si se realizan n tiradas tendremos n resultados distribuidos entre los 216 puntos con frecuencias relativas $f_n(x_i, y_j, z_k) = n_{ijk}/n$ que dan la lista de repetición.

Si en dicho espacio imaginamos un recinto o celdilla dentro del cual exista cierto número de los 216 puntos, podremos considerar la frecuencia relativa total en esta celdilla que será $\Sigma(n_{ijk}/n)$ extendida a todos índices i, j, k, correspondientes a puntos de dicha celdilla.

Análogo a éste es el caso de que en los entes del conjunto se consideren simultáneamente varios caracteres distintos como estatura, peso, perímetro torácico, de los soldados de la lista anterior.

Colectivos infinitos o syleptos

Del colectivo empírico anterior se pasa por generalización a una sucesión de infinitos resultantes de aumentar ilimitadamente los elementos (soldados, grupos de nacidos, tiradas de dados, repetición de medidas, etc.) en sucesión ilimitada y a esta sucesión infinita de ejemplares que viene a tener una lista o diadose en la que sólo se considerará la columna de frecuencias relativas y la de totales de caracteres entre el menor y cada uno de los datos es lo que llama Du Pasquier un *sylepto* [25].

Abstrayendo ahora de este sylepto la naturaleza de sus elementos y de los caracteres distintivos conservando únicamente los números adscritos a dichos caracteres, llegaremos a los colectivos abstractos de infinitos términos o elementos

$$E = (e_1 \ , \ e_2 \ , \ e_3 \ , \ \ldots\ldots)$$

definidos cada uno por uno o varios números.

Si, en general, a cada elemento e corresponden k números $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$, que con el lenguaje de la Geometría abstracta llamaremos punto abstracto de un espacio de k dimensiones, podremos imaginar la sucesión de infinitos elementos como una sucesión de infinitos puntos distribuídos en un espacio abstracto de k dimensiones.

Campo de variación del sylepto

Si cada uno de los k números o coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$ sólo pueden tomar valores discretos, por ejemplo el x_i sólo puede recibir los valores $(x'_i, x''_i, \ldots x_i^{s_i})$ tendremos los vértices de una red de k dimensiones en número igual al producto $(s_1 . s_2 . s_3 \ldots s_k)$; y estos vértices se irán repitiendo al crecer n infinitamente. El campo de variación está reducido a estos $s_1 . s_2 . s_3 \ldots s_k$ puntos.

Pero si cada variable, x, de las $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ puede recibir valores de un intervalo determinado, tendremos un dominio continuo o celda del espacio abstracto donde se distribuirá la sucesión de los infinitos puntos.

Descompuesto el campo en celdillas correspondientes a descomposiciones parciales de los intervalos de las variables, cada elemento e_i dará un punto interior a una celdilla o de la superficie de la misma, en cuyo caso se le adscribirá a la celdilla que tenga su centro más próximo al origen de coordenadas. Tendremos así distribuídos los puntos de la sucesión en celdillas en las que irá aumentando la densidad a medida que avanzamos en la sucesión.

Si, en particular, es $k = 1$ el campo de variación tiene una sola dimensión. Si entonces la variable x sólo toma un número infinito de valores (como los números de las caras de un dado), tendremos para uno de estos números, x_i, por ejemplo, una sucesión de frecuencias relativas $f_1(x_i), f_2(x_i), f_3(x_i), \dots$ al tomar el primer término e_1; los dos primeros e_1, e_2; ... los n primeros $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$.

Pero si los valores de x pueden ser cualquiera de un intervalo determinado irán apareciendo, en general, infinitos valores distintos que se distribuirán en todo él. Por excepción podrá existir, aun en este caso, algún valor al que corresponda una sucesión de frecuencias que permanezcan finitas al crecer el índice n, pero lo general es que estas frecuencias relativas de valores aislados tiendan a cero. La conservación finita de la frecuencia relativa no podrá aplicarse a puntos o valores aislados de x sino a conjuntos de ellos comprendidos en uno o varios intervalos del campo de variación.

Las cuatro operaciones con syleptos

El ente matemático con el cual construyen Misses y Pasquier el Cálculo de Probabilidades abstracto es el colectivo de infinitos elementos al que exigen satisfacer dos postulados para considerarlo como *colectivo matemático*.

Pero antes de enunciar los dos postulados recordemos las *cuatro operaciones fundamentales* que aplican para deducir de un colectivo de infinitos elementos otros de la misma naturaleza.

Estas cuatro operaciones son:

1.º *La elección admisible.*

2.º *La mezcla de caracteres* que se reduce a la sustitución de un carácter distintivo por otro cuyos parámetros sean funciones de los del primero.

3.º La *parcelación* del colectivo.

4.º *La composición de dos colectivos.*

Elección admisible

Consiste la elección admisible en sacar de un colectivo $E = (e_1, e_2, e_3 ...)$ una sucesión de infinitos elementos mediante una elección en los mismos sin tener en cuenta el valor de la variable correspondiente al elegido, es decir, una elección al azar respecto del carácter distintivo de los elementos. Así, la sucesión $e_i, e_{2i}, e_{3i}, ...$ cuyos términos son los de lugares, a partir del primero, que tienen sus índices en progresión aritmética; o los de otra $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, ...$ tales que $i_h = f(i_{h-1}) > i_{h-1}$ en que $f(x)$ es un número entero para valores enteros de x siendo, además, $f(x) > x$; o, si los términos $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, ...$ se eligen mediante sorteos sucesivos entre n términos que siguen al último obtenido, constituyen nuevos colectivos resultantes de una elección admisible porque esta elección *se ha hecho al azar* respecto del carácter distintivo fijado por el número x, que corresponde al elemento.

Mezcla de caracteres

La operación llamada mezcla de caracteres conserva el mismo colectivo $e_1, e_2, e_3, ...$ pero sustituye el carácter distintivo, x, por otro cuyo parámetro, u, sea una función uniforme de x, $u = f(x)$, con la condición de que la inversa $x = \varphi(u)$ no sea uniforme. Es decir, que a cada valor de x corresponda uno de u, pero a uno de u puedan corresponder uno o varios o hasta infinitos de x.

El campo de variación de x se sustituye ahora por el de variación de u, y como a un carácter distintivo, u, corresponden, en general, varios de x, por ejemplo, $(x', x'', x''', ... x^{(r)})$, si atendemos al u, prescindiendo del x, quedan indistinguibles o mezclados estos $(x', x'', ..., x^{(r)})$

de x. La circunstancia de ser uniforme la función u de x hace que a dos valores distintos de u no corresponda uno mismo de x.

Si en lugar de ser uno solo el parámetro x fuesen varios (x, y, z) los que distinguen el atributo, como en el ejemplo del juego de 3 dados, podría ser el nuevo carácter distintivo una función $u = f(x, y, z)$ uniforme respecto del punto (x, y, z), con la condición de que a cada valor de u correspondan varias ternas o puntos (x, y, z), como por ejemplo si es $u = x + y + z$.

El resultado de esta operación es agrupar los caracteres distintivos iniciales x, o, (x, y, z) en grupos diversos distinguibles unos de otros por la correspondiente u, pero indistinguibles los del mismo grupo cuando sólo atendemos al parámetro descriptivo u. A esta circunstancia es debido el nombre de mezcla (mischung) con que lo designa Misses.

La parcelación de un colectivo

La parcelación (teilung) de un colectivo $E = (e_1, e_2, e_3, ...)$ consiste en fijar una parte del campo de variación de x y limitarse a considerar la sucesión de elementos de E, cuyos caracteres pertenecen a la parte limitada del campo. Por ejemplo, en el juego de 3 dados podemos limitarnos a considerar las tiradas que den puntos interiores a una esfera de radio dado, 6 por ejemplo, con centro en el origen o; o que la suma de puntos estuviese comprendida entre 5 y 12, etc.; o que las abscisas x estuviesen comprendidas entre 2 y 5; o que fuese siempre la misma abscisa, etc. Pero sí es necesario que existan infinitos elementos que den puntos correspondientes a la parte acotada.

Si E_1 es una parte o parcela del E de dominio A, y B es el resto del campo de variación de E existirá otro colectivo E_2 de campo B tal que $E = E_1 + E_2$. Este E_2 se llama *complementario* del E_1.

Combinación de dos o más syleptos

Dados dos o más syleptos, dos, por ejemplo, $E' = (e'_1, e'_2, e'_3, ...)$, de carácter definido por los b parámetros $(x'_1, x'_2, x'_3, ... x'_h)$, y, $E'' = (e''_1, e''_2, e''_3, ...)$ de carácter definido por $(x''_1, x''_2, x''_3, ... x''_k)$ se forma otro que llamaremos compuesto de los E′ y E″ cuyos elementos son los del cuadro de dos índices

$$
\begin{array}{cl}
 & \mathrm{E}' \\
\mathrm{E}'' & e'_1 e''_1 \;,\; e'_1 e''_2 \;,\; e'_1 e''_3 \;,\; e'_1 e''_4 \;,\; \ldots\ldots \\
 & e'_2 e''_1 \;,\; e'_2 e''_2 \;,\; e'_2 e''_3 \;,\; e'_2 e''_4 \;,\; \ldots\ldots \\
 & e'_3 e''_1 \;,\; e'_3 e''_2 \;,\; e'_3 e''_3 \;,\; e'_3 e''_4 \;,\; \ldots\ldots \\
 & e'_4 e''_1 \;,\; e'_4 e''_2 \;,\; e'_4 e'_3 \;,\; e'_4 e''_4 \;,\; \ldots\ldots \\
 & \;\;\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad \ldots\ldots
\end{array}
$$

con un carácter distintivo definido por las $h + k$ coordenadas

$$(x'_1 \;,\; x'_2 \;,\; x'_3 \;,\; \ldots\; x'_h \;,\; x''_1 \;,\; x''_2 \;,\; x''_3 \;,\; \ldots\ldots\; x''_k).$$

Una elección admisible en este colectivo compuesto puede ser la de los elementos de la diagonal principal de esta matriz infinita, que resulta de considerar sólo los compuestos con dos índices iguales.

Producto de dos operaciones

La repetición de una operación o la aplicación sucesiva de dos da por resultado otro colectivo infinito. En particular la repetición de la elección admisible en el colectivo E que nos haya producido, por ejemplo, el E′ en la primera y a continuación el E″ de la realizada en el E′, puede considerarse como una elección admisible hecha directamente en el E, puesto que los elementos de E″ son del E y se han obtenido sin tener en cuenta el carácter distintivo o valor de x.

La repetición de una mezcla es otra mezcla de caracteres, pues si la primera aplicada a E sustituye el carácter x por otro u, o por una agrupación de varios x en nuevos caracteres u, aplicada otra segunda mezcla al mismo E partiendo de los caracteres u producirá nuevas agrupaciones de u a las que corresponderán los valores de otro parámetro v, y estos v no son en realidad mas que símbolos representativos de grupos más amplios de caracteres x.

Análogamente la parcelación de una parcelación produce una parcelación de B.

De un modo más general podemos decir que el producto de dos cualquiera de las cuatro operaciones (aplicación de una y al resultado otra) transforma el colectivo en otro con los mismos caracteres distintivos u otros.

Colectivos matemáticos. Postulados

Los colectivos abstractos que acabamos de considerar con infinitos elementos no son todavía los *colectivos matemáticos* de Misses y Du Pasquier. Para llegar a éstos necesitan satisfacer además los dos postulados fundamentales siguientes: uno relativo al *límite de las frecuencias,* y otro relativo a *la fortuidad o casualidad* de la distribución de caracteres en los sucesivos elementos.

POSTULADO I

Si fijamos un recinto cualquiera, A, *del campo de variación del carácter, la frecuencia relativa* (n_A/n) *de la aparición de dicho carácter dentro del recinto* A *al crecer infinitamente el número* n *de la sucesión de elementos* e_1 , e_2 , e_3 , ... , *tiende a un límite* p_A , *es decir, que existe* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = p_A$.

POSTULADO II

Si por una elección admisible pasamos del colectivo $E = (e_1 , e_2 , e_3 , \ldots)$ *al* $E' = (e'_1 , e'_2 , e'_3 , \ldots)$ *los dos colectivos tienen el mismo campo de variación, y, si* A *es una parte de este campo de variación del carácter considerado, las frecuencias relativas* $\frac{n_A}{n}$ *y* $\frac{n'_A}{n'}$ *de la aparición del carácter; dentro del recinto o dominio* A, *al crecer infinitamente los números* n *y* n′ *de términos de la primera y segunda sucesión tienen el mismo límite; es decir, que* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = p_A = \lim\limits_{n' \to \infty} \frac{n'_A}{n'} = p'_A$.

Los colectivos que satisfacen estos dos postulados se llaman *colectivos matemáticos.*

Aplicando las cuatro operaciones y sus productos a uno o varios colectivos matemáticos se deducen otros colectivos matemáticos.

Conexión con la teoría clásica

La distribución irregular o fortuita en la sucesión de elementos de un colectivo matemático queda subsistente por la elección admisible en el nuevo colectivo deducido de ella.

En la mezcla de caracteres viene a estar comprendido el principio de las probabilidades totales de la teoría clásica.

En la parcelación está incluída la definición de probabilidad ligada; y el teorema o principio de la probabilidad compuesta está en uno de sus aspectos y en la composición de colectivos el otro aspecto del mismo teorema.

Mas para hablar de probabilidades hay que dar el concepto de ésta en la nueva teoría.

En la nueva orientación estocástica del Cálculo de Probabilidades no se habla para nada de casos equiposibles ni de equiprobabilidad. Pero hay que reconocer que la sugestión de las equiprobabilidades clásicas se sustituye por la relativa a la irregularidad de la distribución de caracteres en los sucesivos elementos del colectivo. Tenemos una sucesión ilimitada de entes, hechos, casos, ... atributos distintivos representados por uno o varios números. Esta sucesión lo mismo puede suponerse obtenida por ilimitadas jugadas de dados, o de extracción de bolas de una bolsa, que por una lista interminable de soldados, de nacimientos, de cifras sucesivas sin fin, de un número irracional como el π, el $\sqrt{2}$, etcétera. La obtención de elementos no nos preocupa. La sucesión ilimitada de frecuencias relativas de un atributo correspondiente a un valor de x o a valores de un cierto intervalo o dominio es lo interesante.

Si tiene límite a este límite le llaman Misses y Du Pasquier la *probabilidad de ser poseído dicho carácter por un elemento cualquiera de la sucesión tomado al azar respecto del carácter.*

Probabilidad matemática

Se llama, pues, *probabilidad matemática* (en el colectivo matemático E) *del carácter considerado, perteneciente a un dominio A del campo de variación del mismo carácter, al límite* p_A *de la frecuencia relativa de la sucesión de elementos cuyo carácter pertenezca a A.*

En particular si el campo de variación del expresado atributo es un número discreto de valores de x o puntos aislados, puede reducirse el dominio A a uno de estos puntos, y entonces tiene sentido hablar de la probabilidad de un valor particular de x (aparición de un número en un dado, o de una bola de cierto color en una extracción de bolas, etc.); pero si el campo de variación de x es continuo o un conjunto numerable, o no, de infinitos puntos, hay que considerar la frecuencia relativa a uno de los puntos por paso al límite de una sucesión de dominios $A_1, A_2, A_3, \ldots$ cada uno contenido en el anterior y tendiendo a cero la extensión de A_r cuando crece r infinitamente.

Con esta definición de probabilidad es inmediata la demostración de estos teoremas o propiedades:

1.º La probabilidad es un número comprendido entre cero y 1, incluídos el cero y el 1.

2.º Si A es todo el campo de variación es: $p_A = 1$. El recíproco no es cierto.

3.º Si A no contiene ningún punto del campo de variación es $p_A = 0$. El recíproco no es cierto.

4.º Teorema de adición. Si A_1 y A_2 son dos dominios del campo de variación sin puntos comunes es

$$p_{A_1 + A_2} = p_{A_1} + p_{A_2}.$$

5.º Si A y B son dos dominios complementarios del campo de variación o sea que su suma compone dicho campo es

$$p_{A+B} = p_A + p_B = 1.$$

Podremos suponer que en todos los casos es continuo el campo de variación de x o del sistema de coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$ a condición de hacer $p_A = 0$ para todo dominio que no contenga ningún punto del antedicho campo de variación que corresponda a caracteres distintivos de elementos de E.

En particular los dominios A más interesantes son los definidos por las desigualdades

$$x_1 \leqslant x'_1 \ , \ x_2 \leqslant x'_2 \ , \ \ldots\ldots \ , \ x_k \leqslant x'_k \ ,$$

en que $(x'_1, x'_2, \ldots x'_k)$ es un punto dado. Si se trata del plano (x, y) y son (x_1, y_1) las coordenadas del punto en cuestión estará definido A por

$$x \leqslant x_1 \ , \ y \leqslant y_1$$

Función de repartición o de probabilidades totales

En tales dominios A puede establecerse una correspondencia entre las probabilidades p_A y las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ del punto P, siendo en todos los casos

$$0 \leqslant p_A = f(x_1, x_2, \ldots x_k) \leqslant 1$$

en la que $f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ es una función monótona creciente y positiva al pasar el punto P a otro en que todas o alguna, por lo menos, de las coordenadas crezcan sin que decrezca ninguna de las otras.

Esta función que define la distribución o repartición de probabilidades en todo el campo de variación de x toma el valor cero cuando todas las variables se hacen $-\infty$ y el valor 1 cuando todas son $+\infty$.

Probabilidad en un punto

Partiendo de esta función se llega por el procedimiento que anteriormente dejamos consignado al concepto de probabilidad en el entorno de un punto por el producto de la extensión de dicho entorno multiplicado por la función de densidad.

Probabilidad práctica

En la práctica sólo se conoce un número finito de términos del colectivo E, de modo que el valor de n_A/n es un valor aproximado de p_A. Los valores aproximados, que son los únicos utilizados en la práctica, están, respecto de los teóricos, en la misma relación que la existente entre las figuras dibujadas y las de la geometría abstracta o entre los números manejados por los técnicos y los que figuran en las fórmulas de las teorías que aplican. Así la frecuencia relativa de una estatura, x, definida por $165 \leqslant x < 166$ cm. en una lista de 10.000 soldados tiene un valor práctico (que la Estadística Matemática llama valor presumido del valor teórico) de la probabilidad en cuestiones relativas a la talla de los soldados.

Ampliación de la definición de probabilidad matemática

Mas como en toda esta concepción se parte de los colectivos matemáticos, en los que se postula la existencia de límite de la frecuencia relativa, y los colectivos que se presentan en la realidad no podemos afirmar que sean matemáticos, se ha visto precisado Du Pasquier a ampliar la definición de probabilidad en un trabajo presentado al Congreso de Bolonia de 1928 sobre «Los Nuevos fundamentos del Cálculo de Probabilidades».

En él distingue el caso en que exista el límite de las frecuencias relativas de aquel en que no exista dicho límite. Cuando existe límite se tienen los colectivos matemáticos si cumplen las otras condiciones. Cuando no existe el límite se inspira en el paso al límite de la función de probabilidades totales en un intervalo que tiende a cero. Considera la función de acumulación

$$\delta_n (x_s) = f_n (x_1) + f_n (x_2) + \ldots\ldots + f_n (x_s)$$

en la que es $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_s$.

Esta función es la suma de las frecuencias de todos los caracteres de medida $x_i < x_s$ y tiene como límite al crecer n infinitamente la función de repartición o de probabilidad total.

$$\delta (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f (x) dx.$$

Y como es una función continua la utiliza para definir la probabilidad en un punto (x) por paso al límite de la diferencia

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\delta (x + \varepsilon) - \delta (x - \varepsilon)\Big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f (x)\, dx$$

de modo que

$$p = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\lim_{n \to \infty} \Big[(\delta (x + \varepsilon) - \delta (x - \varepsilon)\Big]\Big).$$

Pero aquí se postula que la función $f(x)$ esté determinada en cada punto, con lo cual se resuelve el problema.

Con esta definición se da la probabilidad en todos los casos en que $f_n (x)$ no tenga límite en un punto.

Observación a los postulados

No comprendemos cómo después de los trabajos [15] de Cantelli acerca del significado de los límites en el sentido del cálculo de probabilidades, y de haber el mismo Du Pasquier (en la página 83 de su magnífico Tratado sobre la Evolución Filosófica del Cálculo de Probabilidades) llamado la atención sobre el límite estocástico, aunque sin precisarlo, cómo no ha tratado de dar una definición aritmética para introducirlo en los postulados en substitución del límite aritmético.

Porque en ninguna cuestión, cuyos resultados particulares se obtienen al azar, podrá hablarse de límite aritmético; pues la diferencia entre los valores obtenidos en la realidad y los que la teoría resume en el límite teórico compensando las veleidades del azar podrá llegar a ser mayor que cualquier número, por grande que sea; en cuya realidad está basada la ruína de los jugadores, aun en los juegos equitativos.

Nunca podrá decirse que en un juego equitativo pueda fijarse de antemano, con la rigidez matemática que en sí lleva el límite aritmético, un número de partidas suficientemente grande para que el balance de las ganancias y pérdidas de cada jugador arroje un saldo en pro o en contra tan pequeño como un número ε, fijado previamente a nuestro capricho. El límite aritmético exigiría la verdad de esta afirmación pero el azar se encarga, con el tiempo, de agotar «sin conciencia ni memoria» según frase feliz de Bertrand, las disponibilidades económicas del jugador más confiado, por muy agudas que sean sus combinaciones de infalible seguridad para ganar. Los límites manejados en la ley de los grandes números, así como en los conceptos fundamentales de la Estadística Matemática, valores presumidos, valores medios o esperanzas matemáticas, etc., no son sino límites en el sentido del Cálculo de Probabilidades o de Cantelli, que después se han llamado límites estocásticos. Nosotros creemos que podría darse esta definición del límite estocástico.

Una definición de límite estocástico

Dada una sucesión de números a_1, a_2, a_3, ... *diremos que tiene un límite estocástico,* a, *si fijados, a capricho, dos números* ε *y* δ, *tan pequeños como queramos, existe un número* n, *de términos a partir del primero tal que el* n' *de todos aquellos que hasta el n-simo queden fuera del intervalo* $(a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon)$ *cumple con la condición* $n' < n\delta$.

Si *n'* permanece finito al crecer *n* infinitamente, el límite estocástico es un límite aritmético. Si n' crece infinitamente al mismo tiempo que n no existe el límite aritmético pero sí el límite estocástico.

Esta definición, inspirada como la de Slutsky [78] en la ley de los grandes números de Bernoulli, no contiene el concepto de probabilidad aunque en esencia viene a ser la misma de Slutsky. Pues si suponemos equiprobables todos los términos de la sucesión hasta el n- simo la razón n'/n viene a expresar la probabilidad de que queden fuera del intervalo considerado uno cualquiera de los n primeros términos tomados al azar.

Terminación

No quiero terminar sin antes recoger una opinión general expuesta repetidas veces relativa a la conveniencia de introducir las nociones del Cálculo de Probabilidades en la enseñanza secundaria y, especialmente, en los primeros cursos de Facultad para todos los Licenciados Universitarios.

No hay que esforzarse gran cosa para convencer de esta necesidad por el gran desarrollo que ha adquirido la Estadística en todos los ramos del conocimiento y actividad humana; únicamente cabe justificar el papel que corresponde a la matemática en su divulgación.

Símil de los diagramas estadísticos

El símil que con toda naturalidad se ofrece a los estadísticos frente a ciertos diagramas que se desarrollan en el transcurso del tiempo es el de un sendero sinuoso a través de un campo trazado por la ley del mínimo esfuerzo. Vista la senda desde cierta altura pierden su importancia las pequeñas sinuosidades, al fijar la atención en otras mayores debidas a grandes obstáculos, barrancos, laderas, etc., que la dirección general se ve obligada a bordear. Si aumentamos la altura de visión desaparece a su vez la importancia de estas mayores oscilaciones para fijarnos exclusivamente en la marcha general de la senda desde el punto de partida al de llegada; trazado general que dependerá de otras causas predominantes sobre las anteriores, en cuya amplia visión se pasa por encima de los detalles insignificantes para atender sólo a lo principal. Esto equivale a sustituir o resumir grupos de valores del diagrama estadístico por sus baricentros, los que en el caso de la senda sinuosa vendrían a ser como jalones puestos en el trazado general del camino, de trecho en trecho. La línea teórica marcada por los mismos representará la ley secular limpia de oscilaciones o perturbaciones y la ecuación de esta línea será la fórmula matemática de dicha ley, a la que en realidad no se ajustan los resultados observados, sino que, por el contrario, producirán oscilaciones arbitrarias que irregularizan su trazado, las cuales vienen a constituir esas variaciones episeculares atribuídas al azar de los obstáculos imprevistos, los que constituyen una parte principal de la ley natural registrada. Y es que hasta las leyes naturales que nuestra simplicidad ve como proposiciones rígidas pierden, en la actualidad, esa rigidez para sustituirse por otras más flexibles. El dogmatismo, según frase vulgar, ha perdido su terreno en el campo de los fenómenos naturales para sustituir las afirmaciones rotundas por la *casi seguridad en las afirmaciones*. Las leyes actuales tienen carácter de *leyes probables* que se verifican, en la mayoría de los casos, pero siempre con oscilaciones, cuya amplitud depende de la potencia visual con que las examinamos.

Las propiedades citadas, que no son privativas de las líneas estadísticas de una clase determinada, sino comunes a todas ellas, en general, son consecuencia de la teoría de los baricentros aplicada lo mismo a los diagramas estadísticos que a muchos fenómenos físicos y químicos de coagulación, cristalización, teorías de la mecánica racional, etc., y todos ellos se resumen en un teorema general de los baricentros o de las medias, en el que la Estadística Matemática resume una propiedad abstracta común a la infinita variedad de fenómenos experimentales. Este ejemplo, así como otros relativos a interpolaciones, transformaciones de escalas, conceptos de índices, de pesos,

Papel de la matemática en la Estadística etcétera, etc., prueba la necesidad que la Estadística ha sentido por la intervención Matemática para la sistematización de su enseñanza.

Pero existe todavía la creencia de que los matemáticos viven en un mundo de abstracción ajenos por completo a las necesidades de la experiencia y de la técnica que exigen mayor adaptación que la de las lucubraciones matemáticas; y quizá se deba a esta creencia, en tiempos pretéritos, la existencia de las Escuelas especiales de Ingenieros fuera de la Universidad.

Muchas razones podrían aducirse, tomadas de congresos y artículos innumerables, para rectificar el error en que incurren los que tal creen, pero los límites de este trabajo impiden entrar en materia. Unicamente hemos de hacer constar en el presente caso que no hay que confundir la construcción y sistematización del instrumento matemático de la Estadística con la aplicación e interpretación del mismo. El progreso exige la colaboración de todos y de cada uno dentro de su campo, sin necesidad de invadir el ejeno. Tan perjudicial e inútil es el excepticismo de los empíricos por los teoremas de la matemática desprovistos, según ellos, de inmediata aplicación, como la utopia de los teorizantes (que no son precisamente matemáticos) que no reconocen valor demostrativo a un resultado experimental porque siempre se obtiene con error. Es indudable que para la aplicación concreta de la Estadística a la Biología, Economía, u otra especialidad hay que ser, ante todo, biólogo, economista, o especialista. Para un matemático dos pendientes iguales en un diagrama de cotización no tienen diferencia; en cambio para un economista la igualdad de pendientes con distintas ordenadas puede significar un desastre financiero. En general, puede decirse que un matemático que no conozca el asunto, por muy sagaz y hábil que sea en la disección y aplicación de los métodos de ajuste e interpolación de series estadísticas, no estará en condiciones de apreciar si cabe considerar enlaces estocásticos o la independencia de fenómenos, ni tendrá sugestiones que le puedan conducir a descubrimientos de alto interés para el asunto concreto que se estudie. Por el contrario, si Pearson no hubiera sido matemático, es casi seguro que no hubiera descubierto las leyes distintas de la exponencial y la Biometría no hubiera nacido en sus manos.

Contribución de los matemáticos

Al matemático corresponde la construcción, desarrollo y explicación de las teorías estadísticas, desde el punto de vista general, con título análogo al de la Geometría y el Algebra, y de las aplicaciones se ocuparán los especialistas de ellas. Y éstos, a su vez, en las teorías parciales que la investigación plantee, propondrán postulados y confirmarán resultados o leyes obtenidas por vía deductiva. Así vemos a Volterra hacer aplicación de las ecuaciones integrales al estudio de la lucha por la vida en especies convivientes; pero los postulados en que se apoya y las conclusiones a que llega en sus fórmulas necesitan del concurso de los naturalistas, que son los que deben confirmar o negar la concordancia con la experiencia. Claro está que esta colaboración exige cierta cultura matemática general para todos. Prescindimos, naturalmente, de ciertas disciplinas cuya información matemática debe ser tan amplia como la de la especialidad a que se aplique la estadística, de las que son ejemplos la Astronomía y la Física teórica. Pero aparte de estos casos, en el cúmulo de las vulgares aplicaciones es suficiente un barniz matemático del tipo de la segunda enseñanza. Por otra parte, al sustituirse las leyes rígidas por correlaciones más o menos fuertes, en las que la probabilidad ha de ser el principal concepto, hay que añadir a las intuiciones geométricas mecánicas y físicas de sólidos, fuerzas, masas, etc., otras intuiciones y esquemas del pensamiento relativos a la parte que el azar tiene en todo fenómeno real, familiarizando el pensamiento con el margen de variación del resultado, con el fenómeno de las frecuencias de repetición en las extracciones de bolas, con el significado de la ley de los grandes números; hay que vulgarizar el manejo de tablas, etc., etc. Todas estas consideraciones son suficientes para concluir, como lo hace Borel, que los ele-

Necesidad de la divulgación de las Probabilidades mentos del cálculo de probabilidades deben pasar al plano de la enseñanza secundaria. Por su parte dice M. Boll: «Hoy el descendiente del hombre honrado del siglo XVII se distingue por los errores sensacionales incontestables que emite, cándidamente, en conversaciones y artículos de periódicos desde que toca las probabilidades ya sea en estadísticas, retiros obreros, crítica de testimonios, de reformas electorales, etc.».

Urge, pues, dar carácter oficial a las exigencias que la ciencia moderna impone en la formación científica de nuestros alumnos. No se trata sólo de los licenciados en ciencias sino de todos, en general, etnógrafos, sociólogos, pedagogos, políticos, etc.; todos deben conocer e interpretar diagramas, saber determinar las constantes específicas de una serie estadística, el significado de las probabilidades, los conceptos de desviaciones con sus grados de probabilidad, etcétera, etc., y todo ello no a modo de recetas sino deducido por vía lógica partiendo de principios básicos. No se trata en esta enseñanza de someter a torturas de ninguna clase ni de descifrar geroglíficos inútiles sino sólo de ir adaptando, desde el principio, en el pensamiento de las nuevas generaciones de estudiantes, los conceptos del cálculo de conjeturas, tendiendo hacia la cuantificación o medida de *l'esprit de finesse de Pascal*. Todo es sumamente sencillo y nos atrevemos a decir que distraído para el alumno si el aprendizaje se realiza a base de ejercicios convenientemente elegidos. En los Institutos de segunda enseñanza y en los primeros cursos de Facultad debieran implantarse esta clase de conocimientos lo antes posible con un mínimo en los programas. No hay que olvidar, según frase de Laplace en su Ensayo filosófico sobre las probabilidades, que «la teoría de las probabilidades no es mas que el buen sentido expresado en el cálculo» y que «no existe otra ciencia más digna de nuestras meditaciones y más útil que deba figurar en la instrucción pública».

He dicho.

LISTA ALFABETICA DE AUTORES Y TRABAJOS A QUE HACE REFERENCIA EL TEXTO

1. Alvarez Ude y J. Rey Pastor.—«Discursos en la Academia de Ciencias de Madrid».
2. Balmes J.—*El Criterio.*
3. Bernoulli Daniel.—«Specimen Theoriae novae de mensura sortis». Comentar. Acad. Imper. Petropolitanae. 1738.
4. Bernoulli Jacobo.—«Ars conjectandis. Opus posthumum. Accedi tractus de seriebus infinis et Epistola Gallici scripta de Ludo Pilae retibularis». Basilea 1713.
5. Bertrand J.—«Calcul de Probabilités». Paris 1889.
6. Bienaymé J.—Amigo de Cournot, Inspector de finanzas. «Considérations a l'appui de la decouverte de Laplace sur la loi de Probabilité dans la méthode des moindres carrés». Compt. R. Ac. Sc. Paris 1853.
   «Sur un principe que Poisson avait cru découvrir el qu'il avait appelé loi des grands nombres». Compt. R. Ac. des Sciences morales. Paris 1855.
7. Bohlmann.—«Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung». IV Congreso Inter. de Mat. 1988.
   «Enciclopedie des Sciences Math.». Articulo sobre seguros.
8. Boltzmann (L.).—«Leçons sur la théorie des gaz». Trad. de Golloti et Bernard. Paris 1905.
9. Boole (G.).—«Investigations of laws of thought on which are founded the Mathematical Theories of logic and Probabilities». Londres 1854.
10. Borel (E.).—«Le calcul de probabilités et les sciences exactes». Conferencia en el Congreso de Bolonia, 1828.
    Id. «Sobre las probabilidades numerables y sus aplicaciones aritméticas». Rendi del Circ. Mat. de Palermo, 1901.
    Id. «Traité du Calcul de Probabilités et de ses aplications», con la colaboración de R. Lagrange, Deltheil, C. E. Traynard, Dubreuil, Perrin, C. V. L. Charlier, H. Galbrun, L. Blaringhem, Haag, Risser, ...
11. Bravais.—«Analyse mathématique sur les probabilités des erreures de situation d'un point». Mem. de Sav. Etrang. Paris 1846. En ella está en esencia la teoria de la correlación.
12. Broggi (U.).—«Il teorema della probabilita composta». Rendic. Congr. Math. de Palermo, 1909.
    Id. «Die axiome der wahrscheinlichkeitsrechnung». Gotingen 1907.
13. Broglie (L.).—«Introduction a l'étude de la Mecanique ondulatoire». 1930.

14. Bruns (H.).—«Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollectivmasslehre. Leipzig 1906.

15. Cantelli (P.).—«Sui confini della probabilità». Congreso Bologna, 1928.

Id. «Sulla legge dei grandi numeri». Memm. Ac. Lincei. Roma 1916.

Id. «Sulla oscilacione della frecuenza intorno alla probabilita». Metrón 1923.

Id. «Sulla probabilita come limite della frecuenza». Rendic. R. Acc. dei Lincei. Roma 1917.

Id. «Una nuova dimostraciones del 2º teorema limite del Calc. de Probabil.». Rendic. Circ. mat. de Palermo, 1928.

16. Caramuel (P. J.) Jesuita.—«Mathesis biceps». Campania 1670.

17. Castellnuovo (G.).—«Calcolo delle probabilita», 2ª ed. Bologna 1928.

18. Charlier (C. V.).—Matemático y astrónomo representante de la escuela Escandinava de Estadística Matemática. «Contributions to the mathematical Theory of Statistics». Arkiv. for Mathem. astron. fysik v. 7, 8, 9.

Id. «Researches into the Theorie of probability». En los Meddelander from Lund's Observatorie, 1906.

Id. «Vorlesungen uber die grunzüge» der Math. Statistik. Lund 1920.

19. Cournot (A. A.).—«Exposition de la théorie des chances et des probabilités», Paris 1843. Filósofo, economista y matemático. Dice Darmois que es uno de los espíritus más originales y sólidos que se han ocupado de probabilidades. V. Faure: «Les idées de Cournot sur la Statistique».

20. Czubert (E.).—«Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung». Berlin 1923.

Id. «Wahrscheinlichkeitsrechnung». Berlin 1924-1928.

21. Darmois (G.).—«Statistique Mathématique». Paris 1928.

22. Deparcieux (M.).—«Essai sur la probabilité de la duree de la vie humaine». 1746.

23. Dormoy (E.).—«Théorie mathématique des assurances sur la vie». Paris 1878.

24. Duhem (P.).—J. W. Gibbs.

25. Du Pasquier (G).—«Le calcul des probabilités. Son evolution mathématique et philosophique». Paris 1926. Contiene un detallado estudio del problema tratado en este discurso, al que ha servido en gran parte de inspiración.

Id. «Sur les nouveaux fondaments philosophiques et mathématiques du calcul de Probabilités». Congreso de Bolonia 1928. A estos trabajos hace referencia la última parte del discurso.

26. Duvillard.—«Recherches sur les rentes, les empruntes, les remboursements», 1784.

27. Einstein (A.). — «Teoria de la Relatividad especial y general». *Rev. Mat. Hisp. Americ.*

28 Euler (L.).—T. XVI. «Novi comm.». Acad. imp. Petropolitanae.

29. Fechner Lips.—«Kollektivmasslehre», 1887.

30. Fermat (P. de).—«Varia opera mathematica acceserunt selecta-quaedam ejusdem epistolas, Tolosae 1679. Hay una edición moderna de sus obras publicada por Tannery et Henry (Ch). 5 volumens, Paris 1891-1922.

31. Fermi.—«Mécanique quantique et causalité», 1932.

32. Fisher (A.).—«The mathematical Théorie of Probabilities,» New York 1928.

33. Frechet M.—«Sur la convergence *en probabilité*». Metrón, 4-1930.

33. Galán.—«Cálculo de probabilidades», Madrid 1923.

34. Galileo.—«Galilei Opere». Firenze 1855.

35. Galton.—«Family likeness in stature», Londres 1886.

Id. «Natural inheritance», Londres 1898.

Id. «Probability, the foundation of Eugenies. Londres 1909.

36. Gauss (C. F.).—Sus escritos sobre teoría de errores reunidos y editados en alemán por A. Borsch y P. Simon son: «Abhand. zur Methode der kleinsten Quadrate», von Carl Friedrich Gauss. Berlin 1887.

37. George Andre.—«L'oeuvre de L. de Broglie», 1931.

38. Gibs (W.).—«Principes elementaires de mecanique statistique». Trad. de F. Cosserat revue et complete par Rossignol, Paris 1926.

39. Gini (C.).—«Che cose é la probabilita. Scientia». Milán 1908.

40. Goureaud (C.).—«Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours». Paris 1848.

41. Grunt (J.).—«Natural and political observations». Londres 1662.

42. Haley (A. E.).—«An stimate of the degrees of the mortality of.....». Philosoph. trans. Londres 1693.

43. Hilbert.—«Pensamiento axiomático». *Rev. Mat. Hisp. Americ.* 1919.

44. Huyghens (C.).—«De ratiotiniis in ludo aleae», 1658. La sociedad holandesa de Ciencias ha publicado las obras completas en XV volúmenes.

45. Jeans.—«Théorie cinétique».

46. Kameda (T.). — «Theorie der erzeugenden Funktion und ihre Qausveilung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung». Tokyo Sugaku.—Butsurigakway Kigi, 1915-1916.

47. Keersebonn.—«Essai de Calcul politique». La Haya, 1748.

48. Keynes (J. M.).—«A Treatise on Probabiliti». London 1921.

49. Kryes (J. von).—«Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung». Friburg, 1886.

50. Lagrange (J. L.).—«Recherches sur les series... et sur l'usage de ses equetions dans la teorie des hazards». Berlin 1775.

51. Laplace (P. S.).—«Essai philosophique sur les probabilités», 1795.

Id. «Memoire sur la probabilité des causes dans les évenements». Paris 1774.

Id. «Théorie Analytique des probabilités». 1.ª ed. dedicada a Napoleón. Paris 1812, 2.ª ed. 1814.

52. Levy (P.).—«Calcul des probabilités». Paris 1925.

53. Lexis (W.).—«Zur theorie der Massenerscheinungen in der menslichen Gesellschaft». Friburg 1877.

Id. «Abhandlungen zur theorie der Bevolkerungs und moral statistik». Jena 1903.

Id. «Uber die Warscheinlichkeitsrechnung und deren Auwendung auf die Statistik». Jahr fur nat. ok und Statistik. 1886.

54. Liapounoff (A.).—«Nouvelle forme du théoreme sur la limite de probabilité» a Mem. ac. des Sc. Sant Petersbourg. 1901.

55. Lindeberg.—«Eine neue Herleitung des exponentialgesetzes». Math. Zeitschrifft, 1922.

56. Lourie (Samuel).—«Die principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung». Tubingen 1910 (investigación lógica de las disyuntivas).

57. Magnan et Saint Lague.—«D'un emploi de la méthode statistique dans les sciences biologiques». *Rev. général des sciences,* 1931.

58. Marcoff (A. A.).—«Wahrscheinlichkeitsrechnung». Trad. del ruso, 1912.

59. Maximilien Marie.—«Histoire des sciences fisiques et mathématiques. Paris 1883-88, XII volumen.

60. Maxwell (J. C.).—«Scientific papers».

61. Misses.—«Wahrscheinlichkeitsrechnung», Leipzig u. Wien, 1931.

62. Moivre.—«Anuities on live», 1724.

Id. «De mensura sortis seu de probabilitate eventum in ludis». Publ. en *Philosophiq. Transac.* Londres 1711.

Id. «The doctrine of Chances». 1.ª ed. 1718.

63. Montmort.—«Essai d'Analise sur les jeux de hazards». 1.ª ed. 1708; 2.ª ed. 1713.

64. Montucla. — «Histoire des sciences Mathématiques». Comprende desde los tiempos antiguos hasta mitad del siglo XVIII.

65. Padoa.—«Frecuenza, previsione, probabilita». A. R. Ac. Sc. de Torino, 1912.

66. Palacios (J.).—Varios articulos en *El Debate*.

67. Pascal (B.).—«Oeuvres public.», por L. Brunschwicg, P. Boutroux et F. Gazier, XIV volúmenes. Paris 1908-1914.

68. Peano.—«Sulla definicione di probabilita». Rend. R. Ac. Lincei, 1912.

69. Pearson.—Fundador con Galton y Weldon de la revista *Biométrica,* donde se encuentra su principal producción desde 1901. «The grammar of sciencie», Londres 1892. Trad. francesa por March, 1912.

Id. Otros trabajos en: «Philosoph. Magazine». Vol. 50, 1900; vol. 51, 1901.
«Philosoph. Transact.». Años 1894, 1895, 1896, 1900, 1902.

70. Poincaré (H.).—«Calcul de probabilités». 2.ª ed., París 1912.

71. Poisson (S. D.).—«Formules relatives aux probabilités qui dépendent des trés grands nombres». C. Rend. Acad. Paris 1836.

Id. «Recherches sur la probabilité des jugements en matiére criminelle et en matiére civile». Paris 1837.

72. Quetelet.—«Antropometrie». Bruxelles 1870.

Id. «Essai de Phisique sociale», 1835-1869.

Id. «Instructions populaires sur le calcul de probabilités», Bruxelles 1828.

Id. «Lettres sur la théorie des probabilités appliqué aux sciences morales et politiques», Bruxelles 1846.

Id. «Sobre la constancia que se observa en el número de crímenes que se cometen». Corresp. meth. et Phisique. Vol. VI, Bruxelles 1830.

«De Quetelet», dice Darmois: Matemático y astrónomo es el fundador de la estadística. Bajo la influencia de Laplace, Fourier y Poisson que conoció en París, consagró una vida científica larga y activa a poner en evidencia la ley de los grandes números concebida por él como ley natural y universal.

73. Ramón y Ferrando F.—«Materia y radiación». Discurso de apertura en la Universidad de Murcia, 1924-25.

74. Redoully.—«Notices biographiques des geometres et astronomes».

75. Rey Pastor (J.).—«Ciencia abstracta y Filosofía natural». Conferencia dada a los ayudantes y auxiliares de arquitectura, 1928.

Id. «Evolución de la matemática en la edad contemporánea». Conf. en el Ateneo de Madrid, Marzo de 1925.

Id. «Matemática e ingeniería». Conf. en la Escuela de Caminos, 25 Marzo 1928.

Id. «Progresos de España e Hispanoamérica en las ciencias teóricas». Discurso en la sesión inaugural del curso académico, 1932-1933.

Id. «Sobre la Unidad de la ciencia». Confer. en el Ateneo de Madrid publicada por *El Sol.*

76. Romanowsky V.—«Generalisation on some types of the frecuency curves» of Profesor Pearson. Biométrica, 1924; C. R. Ac. Sc. Paris 1927; Congreso de Bolonia, 1928.

77. Russell (B. A. W.).—«Essai sur les fondements de la Geometrie». Trad. de Cadenat, Paris 1901.

78. Slutsky (E.).—«Sur le criterium de la convergence stocastique des ensembles de valeurs eventuelles», C. R. 1928.

Id. «Sur les fonctions eventuelles continues integrables et derivables dans le sens stochastique». C. R. 1928.

Id. «Sur les fonctions eventuelles compactes». Congreso de Bolonia, 1928.

Id. «Sur un criterium de la convergence stocastique des ensembles de valeurs eventuelles», C. R. Ac. Sc., Paris 1928.

Id. «Sur une theoreme limite relatif aux series de quantités eventuelles». C. R. 1928.

Id. «Ueber stochastique asymptoten und greuz werten». (Metron) 1925.

79. Solvay.—«V. Congreso del Inst. internacional de Física», 1927. En este tomo están incluidas las memorias y las discusiones citadas en el texto.

80. Tchebycheff.—«Demostration elementaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités». *Journal de Crelle,* 1846.

Id. *Journal de Liuville,* vol. XII, 1867.

Id. Obras de Tchebycheff, public. por Marcoff (A.) y Sonin (N.), II vol.. Sn. Petersbourg 1899-1907.

Notable matemático ruso cuyas investigaciones sobre el teorema de Laplace y sobre la ley límite de los grandes números han sido continuados por Marcoff y hoy día constituyen un capítulo fundamental en la teoría de las leyes de probabilidad variables.

81. Tornier.—«Die axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung». *Jour. fur rein und andgewante math.* 1930.

82. Tschuprow (A. A.).—«Grundbegriffe und grundprobleme der correlations theorie». Leipzig-Berlin, 1925.

«On asymptotic frequency distributions». *Jour. of the Royal Stat. Soc.* 1925.

«Die Aufgaben der Theoric der Statistik». *Jahrb. f. gezetzg. Verwalt. u. Volkswirt.* 1925.

83. Urban (F. M.).—«Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der theorie der Beobachtungsfehler». Leipzig-Berlin, 1923.

84. Verm (J.).—«The Logic of chance».

85. Volterra (V.).—«Variazione e flutuacioni del numero d'individui in espece animali conviventi». Roma 1926.

Id. «Théorie mathématique de la lutte pour la vie», Paris 1931.

86. Wieleitner (H.).—«Historia de la matemática». Trad. de Mendizábal. *Labor* 1928.

87. Witt (J. de).—«Waerdye van Lyf-Renten naer Proportie van Los-Renten». Graven-Hage 1671.

Terminóse la impresión de este Cuaderno
el día 27 de Septiembre de 1933