



# **Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia**

Memòria presentada per a optar al títol de Doctor

Programa de doctorat en Física Teòrica, Nuclear i Astrofísica

**Roberto Dale Valdivia**

Dirigida pel Doctor

**Diego Pascual Sáez Milán**

**Departament d'Astronomia i Astrofísica**

Universitat de València

València, Novembre de 2015

El Doctor Diego Pascual Sáez Milán Catedràtic de la Universitat de València,

CERTIFICA:

Que la present memòria, Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia, ha estat realitzada sota la seua direcció, per Roberto Dale Valdivia, i que constitueix la seua tesi doctoral per a optar al grau de Doctor en Física.

I perquè emprengueu coneixement i tinga els efectes que corresponguen, signe el present certificat a Burjassot, a 26 d'octubre de 2015.

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Diego Pascual Sáez Milán', written in a cursive style.

Signat: Diego Pascual Sáez Milán

A Jordi, Lucía, María i Roberto,  
an ets essers tan estimats i  
en memòria d'ets absents

## *Agraïments i Reconeixements*

M'agradaria pregar sa comprensió de tots aquells que no anomenaré durant aquests línies, i que de segur, senten de prop sa seva participació, servesquin aquests mots com a compensació d'aquest deute.

Començaré amb sa gent d'aquest Departament, an ets administratius, Feli i Manel per sa seva ajuda amb sos papers i per mantenir-me ben alerta de formalismes i de terminis.

I com no, en sa part no sols tècnica sinó també humana, començant per Morales, amb so qual vaig mantenir i mantenc interessants converses, he de reconèixer sa seva proximitat humana i ses seves puntualitzacions. Per a acabar he d'agrair a En Diego tot es suport que va donar-me, així com sa transmissió des seu entusiasme, que ha fet més agradable, encara, aquesta feina.

Des d'aquí es meu agraïment pes companys de treball a s'Universitat Miguel Hernández, que sempre han estat en disposició d'aidar amb ses meves múltiples preguntes, especial esmenta a Roland per viure aquest treball tan de prop i amb tant d'entusiasme, per es seus ànims, per fer-me fugir sa vessa en es moments que m'he trobat gairebé fos i sobre tot, per tractar tot allò com si d'ell mateix se tractàs.

Reconèixer s'ànim des meus vells companys d'estudis, perquè 30 anys després d'acabar, encara any rere any tenim es plaer de reunir-mos i han fet d'aquesta feina un tema més de conversa.

A sa meva família, es meus pares i sa meva dona, a tots ells pes seu suport, es seu ànim, per sa seva comprensió i per tantes altres de coses, però en especial a es meus fills, amb sos quals tenc un gran deute de temps que ha quedat engabiats en totes aquestes pàgines.

També an ets absents perquè són part d'aquesta i de ses meves memòries.

# Índex de continguts

<b>I.</b>	<b>INTRODUCCIÓ</b>	<b>3</b>
1.	Sa teoria des “Big Bang” i es model cosmològic estàndard.	11
1.1.	Es model de background.	12
1.2.	Ses fluctuacions des background.	21
2.	CMB i s’espectre angular de potències (“power spectra”).	33
3.	Teories alternatives de gravitació.	40
4.	Motivacions i esquema de treball.	45
<b>II.</b>	<b>FORMALISME PPN I TEORIES VT</b>	<b>50</b>
1.	Formalisme PPN.	50
2.	Aplicació des formalisme PPN a ses teories VT.	52
<b>III.</b>	<b>TEORIES VECTOR-TENSOR</b>	<b>60</b>
1.	Introducció a ses teories Will-Nordtvedt sense restriccions.	60
2.	Models vector-tensor des tipus IIIa.	62
2.1.	Es model en cosmologia.	64
2.2.	Equacions cosmològiques de background.	65
2.3.	Solució de ses equacions bàsiques de background.	67
2.4.	Evolució analítica de $A_0$ .	71
2.5.	Evolució des camp vectorial.	73
2.6.	Pertorbacions cosmològiques.	76
2.6.1.	Pertorbacions tensorials.	77
2.6.2.	Pertorbacions vectorials.	77
2.6.3.	Pertorbacions escalars.	78
2.6.3.1.	Anàlisi de ses equacions gauge invariants.	82
2.6.3.2.	Evolució de ses pertorbacions escalars en es gauge síncron.	92
2.6.3.3.	Resultats numèrics amb WMAP.	103
2.6.3.4.	Resultats numèrics amb PLANCK.	116
2.7.	Es model en simetria esfèrica estàtica.	138
2.7.1.	Ses equacions bàsiques en simetria esfèrica estàtica.	140
2.7.2.	Ets horitzons en simetria esfèrica estàtica.	148
3.	Models vector-tensor tipus Ib.	153
3.1.	Es model en cosmologia.	155
3.2.	Equacions cosmològiques de background.	155
3.2.1.	Pertorbacions vectorials.	160

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

IV.	CONCLUSIONS I PERSPECTIVES	169
V.	APÈNDIXS	178
A.	Ses equacions de ses pertorbacions en Relativitat General.	178
B.	S'equació de Boltzmann i es càlcul de $\Delta T/T$ .	180
C.	Teoria de s'electromagnetisme estès (EE).	188
D.	Estimació de ses funcions $Y_i$ en Relativitat General.	194
VI.	BIBLIOGRAFIA	198
VII.	LLISTA D'IL·LUSTRACIONS	217

# I. INTRODUCCIÓ.

---

Al llarg dels segles XIX – XX, moltes han estat ses raons per a sa recerca de teories per a sa gravitació, començant per a donar suport a ses òrbites planetàries. Foren ses transformacions de Lorentz en conjunt amb certs experiments (deflexió de sa llum, experiment d'Eötvös, experiment Michelson-Morley,...) es que donaren lloc an es desplegament d'allò que avui en dia reconeguem com a teoria general de la relativitat (Relativitat General). Quan aplicam aquestes teories a l'Univers de manera global amb s'objectiu d'obtenir un coneixement de ses propietats com són, estructura, origen i evolució, idò farem referència an aquesta ciència amb so terme de cosmologia. Especial rellevància ha tengut es darrer segle, quant a descobriments i obtenció de dades experimentals, per tal de fer a sa cosmologia centre d'atenció d'una part important de sa comunitat científica, podríem afirmar que el segle XX és el segle des naixement de sa cosmologia observacional. Especialment en es darrers anys, s'ha produït es desplegament d'importants projectes, es quals, han proporcionat un rellevant increment en sa precisió i resolució de ses mesures. Però si aquest segle ha estat important en sa part observacional, no ha estat manco important en sa part teòrica, amb so desplegament de sa teoria general de sa relativitat (Einstein, 1915). Farem una exposició de fets rellevants, tant en es pla teòric com en s'observacional, que seran d'utilitat en capítols posteriors.

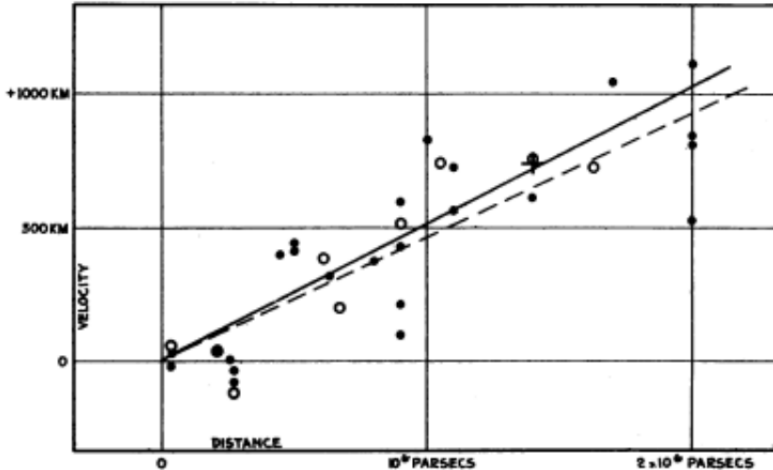
Al llarg d'ets anys 20, Edwin Hubble mesurà es corriments cap es vermell de diferents galàxies, adonant-se, que existia una relació lineal<sup>1</sup> entre sa distància a sa galàxia, i sa seva velocitat radial tal com se veu a Il·lustració I, (maldament existia certa dispersió, que avui en dia sabem és deguda a sa velocitat peculiar), quan més allunyada era sa galàxia major era sa seva velocitat radial (Hubble, 1929).

---

<sup>1</sup> S'estimació feta llavors per Hubble per sa constant de proporcionalitat (constant de Hubble –  $H_0$ ) fou de  $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració I:** Relació entre distàncies i velocitats radials publicada en 1929 per Hubble (**Hubble, 1929**). Sa línia sòlida és obtinguda amb sos discs sòlids, es quals representen galàxies individuals, mentre que sa línia discontinua és obtinguda amb sos altres discs, es quals representen, cadascun d'ells, un grup de galàxies.

Sense lloc a dubte, es descobriment de sa radiació de fons de microones (en anglès *cosmic microwave background*) o CMB en 1964 per Arno Penzias i Robert Woodrow Wilson en es Laboratoris Bell de Crawford Hill (Penzias & Wilson, 1965), és considerat per sa majoria des cosmòlegs com un element de molta importància a tenir en compte en qualque model cosmològic i concretament, és considerat com a prova rellevant de s'anomenat model de Big Bang. Aqueix descobriment fou totalment fortuït, perquè s'antena que ho va mesurar, realment estava dissenyada per a comunicacions amb satèl·lits i aquests científics. És més, inicialment no sabien d'on provenia s'excés de renou que hi havien detectat. Per aquest descobriment ets autors reberen es premi Nobel en física en 1978. S'interpretació d'aquest descobriment fou tema de controvèrsia en ets anys 60, es defensors de sa "teoria de l'estat estacionari" (Bondi & Gold, 1948) deien que aquesta radiació (pràcticament isotròpica), era deguda a sa llum dispersada de ses estreles, procedent de galàxies distants. Però, ja an es final de sa dècada des '60 quan va demostrar-se que s'espectre d'aquesta radiació era tèrmic de cos negre a temperatura de  $T = 2,73\text{K}$  (cal destacar es grau de concordança entre ses mesures experimentals i sa corba teòrica per a una temperatura de  $2,725\text{K}$ , com apreciam en Il·lustració II), sa

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

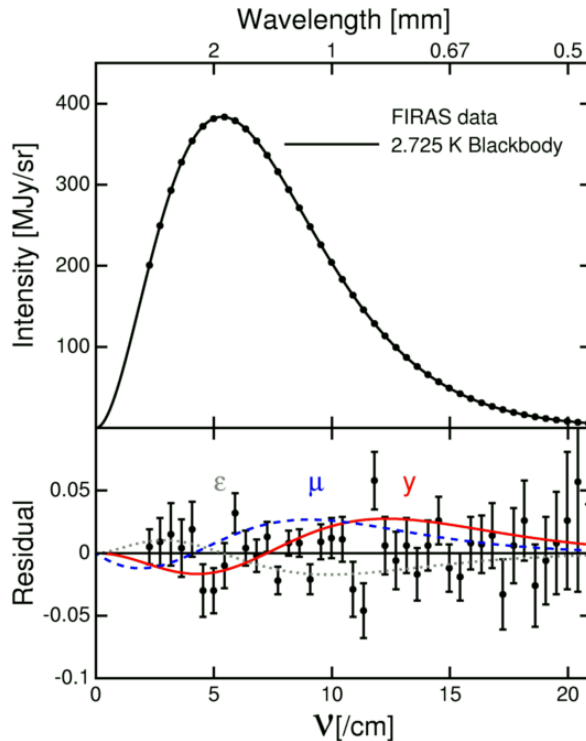
comunitat científica consensuà que aquesta havia d'interpretar-se com a romanent des Big Bang (atès que aquest resultat no era reproducible per sa "teoria de l'estat estacionari").

Cal destacar es paper des satèl·lits COBE (Cosmic Background Explorer), WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) i Planck, a on trobam una notable millorança en sa mesura de ses anisotropies des fons de microones. Aquest darrer és un projecte desplegat per l'ESA (Agència Espacial Europea), fou llançat en maig de 2009 i recentment s'han fet públics es seus resultats.

Sa primera volta que va detectar-se s'anisotropia intrínseca (petites variacions de temperatura d'un ordre de  $10^{-5}$ , respecte a sa temperatura mitjana) fou amb so Radiòmetre de Microones Diferencial (DMR) en es satèl·lit COBE (Smoot & et al., 1992; Bennett, et al., 2013). Se considera que, aquestes petites diferències, són conseqüència de ses desviacions de certes magnituds respecte d'uns valors mitjans.

En 2001 se llançà WMAP que va mesurar ses anisotropies des CMB amb molt més detall que COBE: més resolució angular i més precisió. Es resultats de ses seves mesures (Jarosik & et al., 2011; Komatsu, et al., 2011; Larson, et al., 2011; Hinshaw, et al., 2013) són confirmació, de s'anomenat model cosmològic "*Lambda Cold Dark Matter*" ( $\Lambda$ CDM), partint d'aquest model s'equip científic de WMAP ha determinat amb bona precisió qüestions tals com: s'edat de l'Univers, sa composició d'aquest (4,6% matèria bariònica, 24% de matèria fosca i 71% d'energia fosca), sa geometria d'aquest (pràcticament pla), etc. Però aquestes mesures han estat millorades per Planck i ja són públics es resultats (Planck Collaboration I, 2012; 2014a; 2015), en Il·lustració IV, Il·lustració V, Il·lustració VI, Il·lustració VII podem apreciar qualcuns des resultats, així com, una comparació amb sos resultats basats en ses mesures des satèl·lit WMAP.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració II:** Espectre des CMB construït a partir de ses dades originals obtingudes per s'espectrofotòmetre FIRAS (de s'anglès The Far-Infrared Absolute Spectrophotometer) en es satèl·lit COBE (**Mather & et al., 1994**), representat potència per unitat d'àrea per unitat de freqüència i per unitat d'angle sòlid versus freqüència i/o longitud d'ona. Sa línia negra representa sa corba teòrica i es punts negres són ses mesures experimentals (amb sos errors, maldament visualment no poden esser apreciats) obtinguts per FIRAS. En sa part inferior se mostren ses corbes que representen ses desviacions màximes permeses segons es dades de FIRAS, ses tres corbes il·lustren tres casos de desviació respecte a un cos negre perfecte, sa corba gris de puntets es per an es cas d'un cos amb una reflectivitat no nul·la, mentre que ses corbes vermella i blava mostren s'efecte d'electrons molt calents que contribueixen amb una energia de 60 parts per milió a s'energia des CMB, abans (línia blava) o després (línia vermella) d'una volta transcorreguts 1000 anys des des Big Bang. Il·lustració original d'Edward L. Wright, en <http://www.astro.ucla.edu/~wright/CMB.html>

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

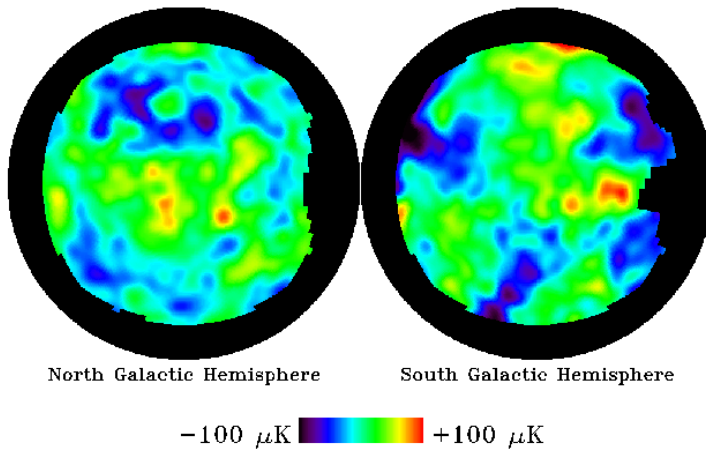
També és necessari fer esmenta d'altres observacions com són: ses recents observacions de supernoves a alt desplaçament an es vermell (Astier & et al., 2006; Riess, et al., 2007; Kowalski & et al., 2008; Foley & et al., 2009; Amanullah & et al., 2010) que constitueixen una important evidència d'un univers amb una expansió accelerada. Altres observacions d'anisotropies que s'han fet des de terra o des de globus aerostàtic i que involucren escales petites (grans  $\ell$ ), de ses quals destaquen; ACBAR (Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver), (Reichardt, et al., 2009), ACT (Atacama Cosmology Telescope) (Fowler & et al., 2010), SPT (South Pole Telescope) (Lueker, 2010).

En es pla teòric fou Alexander Friedman es primer científic en aplicar sa teoria general de sa relativitat d'Einstein, a l'Univers sencer (sense considerar constant cosmològica) (Friedmann, 1922, 1924), es seu univers era un univers en expansió i estudià tres models, com a solució corresponents a universos amb curvatura negativa, zero i positiva.

Es sacerdot belga Georges Lemaître va resoldre ses equacions d'Einstein per a l'Univers d'igual manera que ho va fer Alexander Friedman (ell no sabia que Friedman ho havia fet 10 anys abans) i ho va publicar en 1927 (Lemaître, 1927). Va proposar un univers en expansió, basat en estudis de desplaçament cap es vermell de sa llum provinent de nebuloses. Poc després va proposar un univers que va crear-se a partir de s'explosió d'un àtom primigeni (Lemaître, 1931), poc després va prendre es nom de "*Big Bang*" (terme que avui en dia és utilitzat per definir es model científic que explica s'origen, evolució i futur de l'Univers), aquest model fou estudiat i desplegat per George Gamow, es qual explicà sa formació de l'Heli a l'Univers (Alpher, Bethe, & Gamow, 1948) i va predir en 1948, junt a Ralph Alpher i Robert Hermann (Alpher, Herman, & Gamow, 1952), sa radiació des fons de microones descoberta en 1965 (Penzias & Wilson, 1965).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

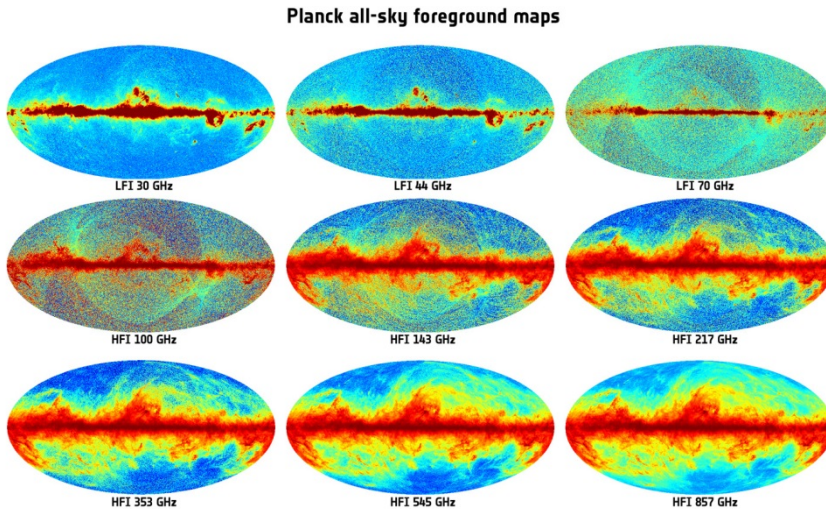
COBE-DMR Map of CMB Anisotropy



**Il·lustració III:** En aquesta il·lustració se representa ses petites variacions de temperatures des CMB, mesurades per (DMR) en es satèl·lit COBE després de quatre anys d'observació. Es color blau i vermell pertocuen a direccions a on sa temperatura és menor o major, respectivament, que es valor mitjà. Ses dites temperatures són de l'Univers primigeni. Aquestes diferències varen esser produïdes per sa distribució de matèria i energia abans de sa formació d'estrelles i galàxies. Il·lustració dissenyada per Charles L. Bennett i treta de [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr\\_image.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr_image.cfm).

Arribant ja ets anys '60, existia un corrent de científics que donaven suport an es model de Richard Tolman, que proposà un univers d'evolució oscil·lant (Tolman, 1932), es qual després de s'expansió se torna a col·lapsar (*'Big Crunch'*) per efecte de s'atracció gravitatòria, tornat a néixer amb un nou 'Big Bang' i així successivament, de manera indefinida. Però aquest model, tal com es propi Richard Tolman reconeixia (Tolman, 1934), estava en contra des segon principi de sa termodinàmica. Aquest tipus de teoria fou refusada per sa majoria de sa comunitat científica al llarg d'ets anys 60-70.

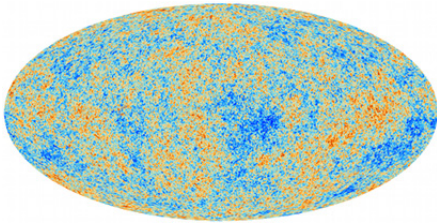
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



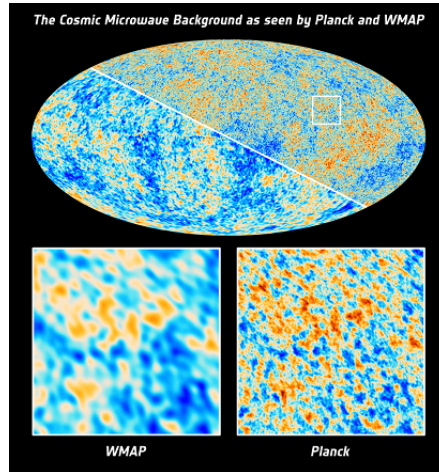
**Il·lustració IV:** Mapa de fluctuacions de temperatures des CMB a partir des 15,5 mesos d'observacions des satèl·lit Planck. An centre domina s'emissió provinent de sa Via Làctia produïda per diferents mecanismes físics, es quals contribueixen de manera diferent depenent de sa freqüència i han d'esser eliminats quan s'estudia es CMB i ses seves anisotropies. Es tres primers mapes a sa primera filera van esser mesurats per s'instrument de baixa freqüència (LFI), mentre que sa resta ho fou per s'instrument d'alta freqüència (HFI). Cal destacar que es mapes d'alta resolució des cel sencer, amb mesures a partir des 100 GHz, no s'havien fet mai, essent aquests es primers que s'han fet. Il·lustració construïda per s'equip científic de Planck que pot trobar-se en <http://sci.esa.int/jump.cfm?oid=48237>.

Tots aquests esmentats avanços han permès comprovar es grau de concordança amb Relativitat General, i aquest és tal, que fa pensar que, qualque teoria alternativa a sa Relativitat General ha d'incloure aquesta com a cas particular o límit. Podríem dir que una majoria des desplegaments teòrics actuals giren devora sa teoria des “Big Bang” per clarificar o ampliar certs aspectes com pot esser s'origen de s'energia fosca o altres.

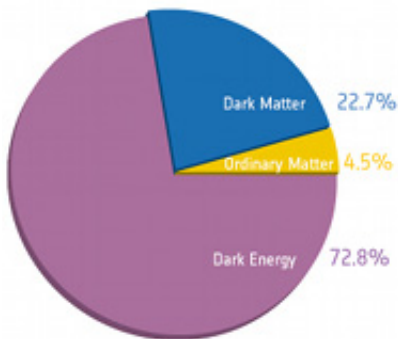
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



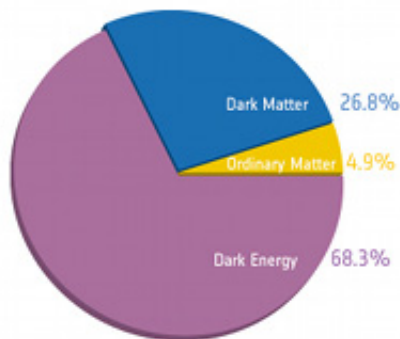
**Il·lustració V:** Imatge de ses fluctuacions de temperatura en es fons còsmic de microones (CMB), construït a partir de ses dades des primers 15,5 mesos d'observacions proveïdes per s'instruments de mesura des satèl·lit Planck de s'agència espacial europea (ESA). <http://sci.esa.int/jump.cfm?oid=51553>



**Il·lustració VI:** Anisotropies des CMB amb dades des primers 15,5 mesos de Planck (meitat superior dreta) vs WMAP (nou anys de mesures, meitat inferior esquerra). <http://sci.esa.int/jump.cfm?oid=51554>.



Before Planck



After Planck

**Il·lustració VII:** Proporció des diferents ingredients de l'Univers deduït a partir de ses mesures de Planck (dibuix de la dreta) i a partir de ses mesures de WMAP (dibuix de l'esquerra) presentat per (Hinshaw, et al., 2013). <http://sci.esa.int/jump.cfm?oid=51557>.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

En aquesta tesi, seran analitzades teories que modifiquen sa Relativitat General (idò, inclouen aquesta com a cas particular o límit), essent raons cosmològiques ses que mos han motivat aquesta línia d'investigació, tal com: matèria i energia fosca, anomalies des CBM, etc.

Començarem, idò, per fer un repàs des model  $\Lambda$ CDM, que ja hem esmentant com es model que millor explica ses dades experimentals, i que és reconegut per una majoria de sa comunitat científica, com es model cosmològic estàndard.

### 1. Sa teoria des “Big Bang” i es model cosmològic estàndard.

S'anomenat “Big Bang” (“Gran Explosió”) és un *model cosmològic* que considera que l'Univers va néixer a partir d'una llavor amb un contengut energètic extremadamen dens i calent que s'ha expandit fins an es seu estat actual al llarg de sa seva finita història (uns 13.700 milions d'anys) (Spergel & et al., 2003), com a model teòric (en primera aproximació) s'utilitza s'anomenat model de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que descriu un univers homogeni, isòtrop i en expansió o contracció, i sa teoria marco o referent és sa teoria general de la relativitat d' Einstein, és a dir aquest model teòric és l'encarregat de fer sa descripció dinàmica de l'Univers.

Es model cosmològic estàndard  $\Lambda$ CDM o model concordant, és es model des “Big Bang” més simple que dona suport a ses observacions que hem descrit en s'anterior secció així com altres mesures que enunciam a continuació: s'espectre angular de potències basat en catàlegs de galàxies (Reid & et al., 2010), oscil·lacions acústiques bariòniques (baryonic acoustic oscillations – BAO) (Eisenstein & et al., 2005; Abdo, et al., 2009; Martínez & et al., 2009; Percival & et al., 2010) abundància de deuteri primordial (Pettini, Zych, Murphy, Lewis, & Steidel, 2008) i en general d'elements lleugers (Olive, Schramm, Steigman, & Walker, 1990) com és Heli i Liti (Ryan, Beers, Olive, Fields, & Norris, 2000), sa constant de Hubble (Suyu & et al., 2010)].

Es model concordant ( $\Lambda$ CDM) consta d'una sèrie de paràmetres independents i altres derivables a partir des primers, sa majoria des quals seran explicats en capítols posteriors. En aquesta línia es model més simple, que permet un bon encaix amb dades



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

observacionals, queda definit per un total de sis paràmetres a variar i un conjunt de paràmetres que queden fixats amb un cert valor adequat. Una combinació utilitzada per a formar dit conjunt de sis paràmetres són (veure Taula I): densitat física de barions, densitat física de matèria fosca, densitat d'energia fosca, profunditat òptica que determina es desplaçament cap es vermell de s'emissió per reionització, més un parell de paràmetres per caracteritzar ses pertorbacions i que són s'amplitud de ses fluctuacions primordials (inflació còsmica<sup>2</sup>) i s'índex espectral, que caracteritza com ses fluctuacions canvien quan canvia s'escala<sup>3</sup>. A s'arxiu LAMBDA<sup>4</sup> podem trobar diversos models que inclouen efectes tal com lents (“*lensing*”), Sunyaev-Zel’dovich<sup>5</sup> (Douspis & et al., 2011), etc, així com ses dades provinents de 7 i 9 anys d’observació, respectivament, des satèl·lit WMAP (Jarosik & et al., 2011; Bennett, et al., 2013; Hinshaw, et al., 2013), aquests són presentats a sa Taula I i sa Taula II i més recentment ses dades provinents des satèl·lit Planck a sa Taula IV.

### 1.1. Es model de background.

A partir d’homogeneïtat i isotropia, se construeix s’element de línia més general, cridat habitualment com sa mètrica de Robertson-Walker (Robertson, 1936; Walker, 1937) i que s’escriu<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) (-d\tau^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j) = \\ &= a^2(\tau) \left[ -d\tau^2 + \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> És un procés d’expansió produït en l’Univers primigeni per un camp escalar, i ses seves fluctuacions se varen convertir en ses inhomogeneïtats cosmològiques observables després d’una llarga i complexa evolució.

<sup>3</sup> Quan aquest índex pren es valor  $n_s=1$ , indica que aquestes fluctuacions són independents d’escala, en es moment que surten de s’horitzó.

<sup>4</sup> [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/map\\_bibliography.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/map_bibliography.cfm)

<sup>5</sup> Sa petja que deixen ets electrons molt energètics des clústers de galàxies molt densos en es CMB a través de dispersió inversa de Compton.

<sup>6</sup> En es sistema d’unitat utilitzat sa velocitat de sa llum pren es valor  $c=1$  i ets índexs Llatins (Grecs) van de 1 a 3 (de 0 a 3).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

essent  $\gamma_{ij}$  sa mètrica des 3-espai de curvatura constant  $K$  on  $r$ ,  $\theta$  i  $\phi$  són ses coordenades espacials esfèriques,  $\tau$  representa es temps conforme, sa funció  $a(\tau)$  és s'anomenat factor d'escala<sup>7</sup> que caracteritza s'expansió de l'Univers. Aquesta mètrica, també pot ésser escrita en termes de temps cosmològic  $dt = a d\tau$  de manera següent:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right].$$

Quan sa constata  $K > 0$  s'espai és localment isomètric a una 3-esfera (normalment se normalitza a +1 i representa un univers tancat), quan  $K < 0$  és una pseudo-esfera tridimensional (normalment se normalitza a -1 i representa un univers obert) i finalment quan  $K = 0$  se tracta d'un espai conformement pla. Considerat aquest univers homogeni i isòtrop, es tensor d'energia-momentum que representa es contingut energètic i que normalment és anomenat tensor des fluid cosmològic caracteritzat per una densitat d'energia  $\rho$  i una pressió  $P$ , ha de prendre sa forma següent:  $T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}$ , és a dir:

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\rho g_{00} & 0 \\ 0 & Pg_{ij} \end{pmatrix}.$$

Quan introduïm aquests elements en ses equacions d'Einstein, amb constant cosmològica  $\Lambda$ ,  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda$  (on  $G$  és sa constant gravitatòria de Newton), obtenim ses equacions d'evolució que descriuen s'anomenat univers de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) veure (Misner, Thorne, & Wheeler, 1973):

---

<sup>7</sup> Habitualment aquesta funció es defineix de manera que es seu valor avui és 1 (pes cas d'un univers pla), cosa que, també habitualment s'expressa:  $a_0 \equiv a(\tau_0) = 1$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(I.1) \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + K = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{a^2 \Lambda}{3},$$

$$(I.2) \quad 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\bullet} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + K = -8\pi G a^2 P + a^2 \Lambda.$$

<sup>8</sup>Aquestes equacions són conegudes amb so nom d'equacions de Friedmann-Lemaître que també podem escriure-les en termes de s'anomenat paràmetre de Hubble  $H$ , definit per:

$$H(\tau) \equiv \frac{\dot{a}}{a},$$

i llavors ses equacions de Friedmann-Lemaître, definint sa densitat d'energia i pressió d'energia fosca segons  $\rho_{\Lambda} = -P_{\Lambda} \equiv \Lambda/8\pi G$ , se reescriuen de manera següent:

$$(I.3) \quad H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_{\Lambda}),$$

$$(I.4) \quad 2\dot{H}a + 3(Ha)^2 + K = -8\pi G a^2 (P + P_{\Lambda}).$$

Es valor d'avui pes paràmetre de Hubble  $H$ , ho trobam a sa Taula IV,  $H_0 = 67,4 \pm 1,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  i que, habitualment, se parametriza de manera següent<sup>9</sup>:

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq 3,241 \times 10^{-18} h \text{ s}^{-1}.$$

En Relativitat General a sovint s'utilitzen ses unitats geometritzades ( $G = c = k_B = 1$ ), essent  $k_B$  sa constant de Boltzmann i en aquest cas  $H_0 \simeq 1,081 \times 10^{-28} h \text{ cm}^{-1}$ , mentre que en s'estudi de l'Univers primigeni és habitual trobar ses anomenades unitats naturals

---

<sup>8</sup> Utilitzam es punt sobre ses funcions per indicar derivada respecte a temps conforme i apostrofam per indicar derivada respecte a temps cosmològic, és a dir:  $\dot{f}(\tau) = df/d\tau$ ,  $f'(t) = df/dt$ .

<sup>9</sup> En cosmologia és habitual utilitzar es subíndex 0 per indicar que es tracta des valor que pren sa magnitud avui.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

( $\hbar = c = k_B = 1$ ) i llavors en aquestes unitats  $H_0 \simeq 4,924 \times 10^{-3} h \text{ eV}$  (Domínguez-Tereiro & Quirós, 1988).

A partir de les equacions (I.1) i (I.2) o bé a partir de la derivada covariant de les equacions d'Einstein,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , s'obté la següent equació:

$$(I.5) \quad \dot{\rho} = -3(\rho + P) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right).$$

Aquesta manera d'escriure l'equació permet treure una senzilla solució analítica en certs casos. Si definim l'equació d'estat segons  $w = P/\rho$ , treiem solució immediata quan  $w$  és constant i se tracta d'un univers pla, considerant  $a_0 = 1$  trobam que:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}.$$

Si introduïm la velocitat de so:  $c_s^2 = \dot{P}/\dot{\rho}$  en l'expressió de dalt, trobam que:

$$\dot{w} = 3aH(1+w)(w - c_s^2),$$

per tant  $w = \text{constant}$ , bé quan  $w = c_s^2$ , o bé quan  $w = -1$ . Tornem ara a les equacions de Friedmann-Lemaître per a certs casos d'interès per obtenir l'equació d'evolució del factor d'escala  $a(\tau)$ . Si consideram que l'efecte de la curvatura és negligible i que domina algun dels components de la densitat d'energia i que aquest que domina té equació d'estat constant ( $w_{\text{component}} = \text{constant}$ ), obtenim les solucions (per a cadascun dels casos considerats) que apareixen en la Taula III.

El valor de densitat d'energia que correspon a curvatura i constant cosmològica ambdues nul·les, s'anomena densitat crítica i segons l'equació (I.3), ha de prendre en cada moment el següent valor:

$$\rho(\tau) = \frac{3H^2}{8\pi G} \equiv \rho_c(\tau).$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Aquesta densitat crítica, té un valor avui de  $\rho_{c0} \equiv \rho_c(\tau_0) = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$  i se correspon, aproximadament, amb una densitat de sis àtoms d'hidrogen per metre cúbic. A partir d'aquesta definició, se defineixen es 'paràmetres de densitat', que per a cada component (o espècie X)  $\rho_{X0}$ , és  $\Omega_X \equiv \frac{\rho_{X0}}{\rho_{c0}}$ , idò, considerant es diferents elements que apareixen en s'equació (I.3), podem definir:

$$\Omega_r \equiv \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}}, \Omega_m \equiv \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}, \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{c0}}, \Omega_K \equiv \frac{-K}{H_0^2} \equiv \frac{\rho_{K0}}{\rho_{c0}},$$

<sup>10</sup>sa qual cosa permet escriure s'equació (I.3), per avui en dia com segueix:  $\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1$ .

Símbol	Paràmetre	WMAP 7 anys	WMAP 9 anys
$\Omega_b h^2$	Densitat física de Barions.	$0,02249^{+0,00056}_{-0,00057}$	$0,02264 \pm 0,00050$
$\Omega_c h^2$	Densitat física de matèria fosca.	$0,1120 \pm 0,0056$	$0,1138 \pm 0,0045$
$\Omega_\Lambda$	Densitat d'energia fosca/Densitat Crítica.	$0,727^{+0,030}_{-0,029}$	$0,721 \pm 0,025$
$10^9 \Delta_{\mathcal{R}}^2$	Amplitud de sa pertorbació de sa curvatura escalar primordial <sup>11</sup> .	$2,43 \pm 0,11$	$2,41 \pm 0,10$
$n_s$	Índex espectral escalar.	$0,967 \pm 0,014$	$0,972 \pm 0,013$
$\tau$	Profunditat òptica de re-ionització.	$0,088 \pm 0,015$	$0,089 \pm 0,014$

**Taula I:** Millor ajust o 'best fit' pes valors des sis paràmetres des model  $\Lambda$ CDM amb 7 i 9 anys de mesures de WMAP respectivament. Valors obtinguts directament de sa taula 3 de (Hinshaw, et al., 2013).

<sup>10</sup> Es subíndex  $r$ ,  $m$ ,  $\Lambda$  i  $K$ , fan referència a ses components de radiació, matèria, constant cosmològica i curvatura respectivament.

<sup>11</sup> Per a s'escala de  $k=0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Símbol	Paràmetre derivat	WMAP 7 anys	WMAP 9 anys
$t_0$	Edat de l'Univers en giga anys.	$13,77 \pm 0,13$	$13,74 \pm 0,11$
$H_0$	Paràmetre de Hubble (km/s/Mpc).	$70,4 \pm 2,5$	$70,0 \pm 2,2$
$\sigma_8$	Densitat de fluctuacions per a $8h^{-1}$ Mpc.	$0,811^{+0,030}_{-0,031}$	$0,821 \pm 0,023$
$\Omega_b$	Densitat de Barions/Densitat Crítica.	$0,0455 \pm 0,0028$	$0,0463 \pm 0,0024$
$\Omega_c$	Densitat de matèria fosca/Densitat Crítica.	$0,228 \pm 0,027$	$0,233 \pm 0,023$
$z_{re}$	Redshift re-ionització.	$10,6 \pm 1,2$	$10,6 \pm 1,1$

**Taula II:** A partir d'ets anteriors valors podem treure es valors d'altres paràmetres. Valor obtinguts de sa mateixa font que dalt.

Component Dominat	Equació d'estat	Evolució des factor d'escala
Matèria ( $P_m = 0$ )	$w = 0$	$a \propto \tau^2$
Radiació ( $P_r = \rho_r/3$ )	$w = 1/3$	$a \propto \tau$
Constant Cosmològica $\Lambda$	$w = -1$	$a \propto \tau^{-1}$
	$w = \text{constant} \neq -1$	$a \propto \tau^{2/(1+3w)}$

**Taula III:** Diferents components energètics amb sa seva equació d'estat. Quan u d'aquests és dominant se presenta com evoluciona es factor d'escala.

Per a un univers que s'expandeix sa llum emesa amb una certa longitud d'ona  $\lambda_e$ , amb un factor d'escala que en es moment de s'emissió té un cert valor  $a$ , serà observada amb un cert desplaçament en sa seva longitud d'ona  $\lambda_o$ , tal que:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a} - 1,$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

que en cas d'un univers pla permet escriure  $a = (1+z)^{-1}$ . Sa quantitat  $z$ , és coneguda com a “*redshift*” cosmològic i és utilitzat a sovint en cosmologia, per a escriure ses equacions d'evolució. De fet, pes cas d'una equació d'estat constatat, sa llei d'evolució en funció des “*redshift*” cosmològic per a cada component és:

$$\rho_X(z) = \rho_{X0} (1+z)^{3(1+w_X)}.$$

Vegem s'evolució des factor d'escala per a ses diferents geometries, per allò, en primer lloc, definim sa densitat d'energia i pressió “efectiva” incloent s'aportació de la constant cosmològica:

$$\rho_{ef} = \rho + \rho_\Lambda, P_{ef} = P + P_\Lambda,$$

aquestes noves densitat i pressió també compleixen s'equació de conservació (I.5). Si restam ses equacions (I.1) i (I.2), i canviem de variable independent, obtenim una nova equació:

$$(I.6) \quad \frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{ef} + 3P_{ef}),$$

idò, quan  $\rho_{ef} + 3P_{ef} > 0$ , succeeix que  $a''/a > 0$ , sa qual cosa significa que s'expansió de l'Univers és desaccelerada. Si en aquest cas feim ús de (I.5), trobam que:

$$\frac{\rho'_{ef}}{\rho_{ef}} < -2 \frac{a'}{a},$$

idò  $\rho_{ef}$  decreix més ràpidament que  $1/a^2$ . En s'Il·lustració VIII presentam s'evolució des factor d'escala en funció de sa geometria ( $K < 0, K = 0, K > 0$ ) quan  $\rho_{ef} + 3P_{ef} > 0$ . D'igual manera se pot escriure s'evolució des factor d'escala amb sos paràmetres de densitat  $\Omega_X$  i com a exemple presentam s'Il·lustració IX amb diversos valors d'aquestes quantitats.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Símbol	Paràmetre	Millor ajust	Límit des 68%
$\Omega_b h^2$	Densitat física de Barions.	0,022068	$0,02207 \pm 0,00033$
$\Omega_c h^2$	Densitat física de matèria fosca.	0,12029	$0,1196 \pm 0,00031$
$100\theta_{MC}$	$100 \times r_* / D_A$ <sup>12</sup> .	1,04122	$1,04132 \pm 0,00068$
$\ln(10^{10} A_s)$	Logaritme de sa pertorbació de sa curvatura primordial <sup>13</sup> .	3,098	$3,103 \pm 0,072$
$n_s$	Índex espectral escalar.	0,9624	$0,9616 \pm 0,0094$
$\tau$	Profunditat òptica de re-ionització.	0,0925	$0,097 \pm 0,038$
$t_0$	Edat de l'Univers en giga anys.	13,819	$13,813 \pm 0,058$
$H_0$	Paràmetre de Hubble (km/s/Mpc).	67,11	$67,4 \pm 1,4$
$\sigma_8$	Densitat de fluctuacions per a $8h^{-1}$ Mpc.	0,8344	$0,834 \pm 0,027$
$\Omega_\Lambda$	Densitat d'energia fosca/Densitat Crítica.	0,6825	$0,686 \pm 0,020$
$\Omega_m$	Densitat de matèria/Densitat Crítica.	0,3175	$0,314 \pm 0,020$
$z_{re}$	Redshift re-ionització.	11,35	$11,4^{+4,0}_{-2,8}$

**Taula IV:** Millor ajust o ‘best fit’ així com es límits per a un nivell de confiança des 68%. pes valors des sis paràmetres pes model  $\Lambda$ CDM basat en ses dades obtingudes després de 15,5 mesos de mesures de Planck. A partir de sa línia doble se presenten es valors pes paràmetres derivats. Valor obtinguts directament de sa taula 2, sense considerar s’efecte de lents gravitacionals (“lensing”), de (Planck Collaboration, 2014c).

<sup>12</sup> Se tracta de sa ràtio entre sa mida comòbil de s’horitzó des so en  $z = z_*$  des LSS (“Large Scales Structure” – estructura a gran escala) i sa distància diàmetre angular (aprox).

<sup>13</sup> Per a s’escala de  $k=0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ .



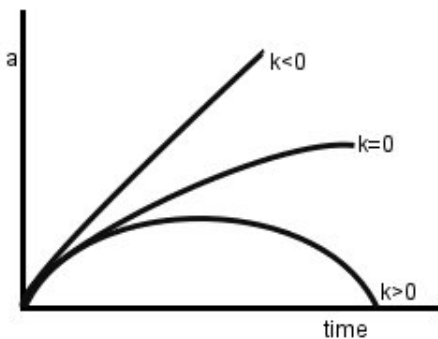
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Si expandim en sèries de potències es factor d'escala per a un temps cosmològic  $t = t_1$  obtenim:

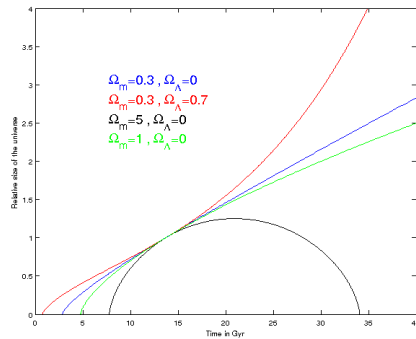
$$a(t) = a(t_1) \left[ 1 + (t-t_1)H(t_1) - \frac{1}{2}H^2(t_1)q(t_1)(t-t_1)^2 + \dots \right], q \equiv -\frac{a''}{aH^2}.$$

Aquest paràmetre  $q$  és conegut com es “paràmetre de sa desacceleració” i caracteritza s’acceleració de s’expansió. Aquest paràmetre avaluat avui, segons s’equació (I.6) per a un univers pla, pren es valor:

$$q_0 = \Omega_r + \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda.$$



**Il·lustració VIII:** Evolució temporal des factor d'escala per a un univers amb expansió desaccelerada. Il·lustració de [physicsmadeeasy.wordpress.com](http://physicsmadeeasy.wordpress.com).



**Il·lustració IX:** Evolució temporal des factor d'escala en funció de diferents valors pes paràmetres de densitat. Il·lustració treta de [physicsmadeeasy.wordpress.com](http://physicsmadeeasy.wordpress.com).

Sa qual cosa permet caracteritzar l’Univers dominat per matèria o constant cosmològica amb  $q_0 = \frac{1}{2}$  i  $q_0 = -1$ , respectivament.

És objectiu primordial des cosmòlegs actuals, sa mesura amb precisió, des diferents paràmetres que caracteritzen es models. En aquest sentit se presenten a sovint, diagrames que restringeixen es possibles valors, segons ses diferents observacions (com ses

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

esmentats an es principi d'aquest apartat). Com a exemple d'aquest tipus de diagrama presentam s'Il·lustració XI i s'Il·lustració XII.

### 1.2. Ses fluctuacions des *background*.

Es conegut que sa consideració d'un univers perfectament homogeni i isòtrop, és una bona aproximació, però, amb tota s'informació observacional que tenim avui en dia, tal com es catàleg de galàxies mostra un univers constituït per una xarxa d'estructures de matèria, pareix que hem de construir un model "*més realista*", digam un univers quasi homogeni i isòtrop. Com a solució, se planteja un model pertorbatiu des model FLRW, es qual queda com a model "*de fons*" (per sa qual cosa, a sovint, ses equacions de FLRW són anomenades equacions des *background*). Aquest model pertorbatiu és necessari per s'estudi des ses fluctuacions de sa temperatura i polarització des CMB.

Atès que en capítols posteriors considerarem ses anisotropies des CMB i succeeix que aquestes són degudes a ses fluctuacions des *background* (que serien nul·les en dit *background*), és convenient fer un estudi apropiat des formalisme utilitzat per a descriure ses esmentades fluctuacions i estudiar sa seva evolució.

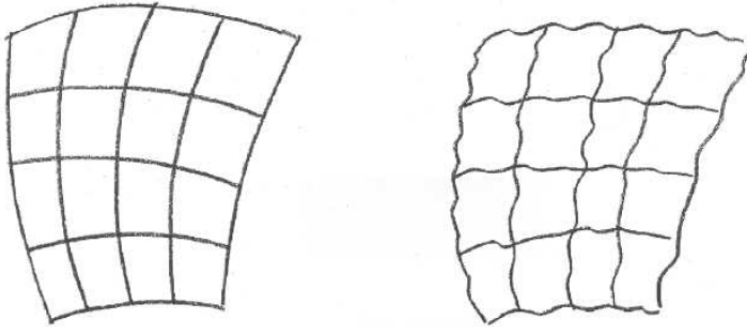
En primer lloc presentam un conjunt d'idees bàsiques pes tractament de ses fluctuacions des *background*. Per tal de descriure ses pertorbacions des *background* suposarem que existeix un espai-temps homogeni i isòtrop que juga es paper de *background* que anomenarem  $\mathbb{F}$  i per altra banda existeix un altre espai-temps real que anomenarem  $\mathbb{R}$  tots dos molts similars (veure Il·lustració X) de tal manera que només existeixen petites desviacions de  $\mathbb{R}$  respecte de  $\mathbb{F}$ .

Per definir aquestes desviacions (fluctuacions o pertorbacions), hem d'establir una correspondència tal que s'imatge d'un cert punt  $P \in \mathbb{F}$  sia un punt  $Q \in \mathbb{R}$ . Llavors sa pertorbació de qualque magnitud  $\chi$  serà:

$$\Delta\chi = \chi(Q) - \chi(P);$$

generalment,  $\Delta\chi$  dependrà de sa correspondència o aplicació triada.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració X:** Representació figurada des dos espai-temps molt similars, a l'esquerra es *background* i a la dreta s'espai-temps real. Il·lustració original de Hannu Kurki-Suonio.

Sa dita aplicació, també coneguda com a *gauge*, sol definir-se de manera següent: se trien un parell de sistemes de coordenades, un en  $\mathbb{F}$  i s'altre en  $\mathbb{R}$ , i s'assumeix que  $P$  és s'imatge de  $Q$  si ambdós punts tenen ses mateixes coordenades en es sistemes triats.

Es fet que  $\mathbb{F}$  i  $\mathbb{R}$  sien molt semblants, permetrà triar sistemes de coordenades adequats, tal que ses quantitats  $|\Delta\chi|$ , sien petites en comparació amb  $|\chi(Q)|$  o  $|\chi(P)|$ .

Suposem que ja tenim dos d'aquests sistemes de coordenades definits un en  $\mathbb{F}$  i s'altre en  $\mathbb{R}$ . Si feim transformacions de coordenades pot succeir que:

- Si aquesta transformació és sa mateixa en  $\mathbb{F}$  i en  $\mathbb{R}$ , no canvia es *gauge*.
- Si deixam fixes ses coordenades en  $\mathbb{F}$  i feim un canvi en  $\mathbb{R}$ , sí canvia es *gauge*.

Per això, i abusant des llenguatge, podem dir que un canvi de gauge és un canvi de coordenades en s'espai-temps  $\mathbb{R}$ .

Aquelles quantitats que tenen es mateix valor en qualque *gauge* són anomenades invariants *gauge*.

Fent transformacions de coordenades en  $\mathbb{R}$  podem aconseguir que se complesquín certes condicions, per exemple,  $\Delta g_{0i} = 0$ ,  $\Delta g_{00} = 0$ ; en aquest cas se diu que s'està treballant en es *gauge* síncron.

A partir d'aquestes idees, existeix un formalisme conegut com a formalisme de Bardeen, que fou desplegat inicialment per

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

aquest autor (Bardeen, 1980) i Kodama & Sasaki (Kodama & Sasaki, 1984) basant-se en es treballs anteriors de Lifshitz (Lifshitz, 1946) i que més actualment ha estat revisat per Mukhanov *et al.* (Mukhanov, Feldman, & Brandenberger, 1992) i Durrer (Durrer, 1994). Aquest serà es formalisme utilitzat al larg d'aquesta tesi i en davant farem referència an aquest formalisme com es formalisme de Bardeen.

Començarem considerant hipersuperfícies a  $\tau$  constant en es *background*, ses magnituds físiques poden classificar-se a partir de ses lleis de transformació baix rotacions dins d'aquesta hipersuperfície. D'aquesta manera apareixen tres tipus de magnituds: escalars, vectorials i tensorials.

Ses magnituds escalars poden expressar-se en funció de ses solucions (anomenades ets harmònics escalars) de s'equació escalar de Helmholtz, aquesta equació és

$$(I.7) \quad Q^{(0)i}{}_{|i} + k^2 Q^{(0)} = 0.$$

On es símbol “|”, indica sa derivada covariant respecte de sa mètrica des 3-espai. D'igual manera ses magnituds vectorials poden expressar-se en funció de ses solucions (anomenades ets harmònics vectorials) de s'equació vectorial de Helmholtz, sa dita equació és

$$(I.8) \quad Q^{(1)ij}{}_{|j} + k^2 Q^{(1)i} = 0.$$

Finalment ses magnituds tensorials poden expressar-se en funció de ses solucions (anomenades ets harmònics tensorial) de s'equació tensorial de Helmholtz, que escrivim a continuació:

$$(I.9) \quad Q^{(2)ijl}{}_{|l} + k^2 Q^{(2)ij} = 0$$

En es cas pla, es qual a partir d'ara serà s'únic considerat ja que ses observacions sobre es CMB prediuen que l'Univers és pràcticament pla, ses funcions  $Q^{(0)}(x_i)$  són ones planes:  $Q^{(0)}(x_i) = e^{i\vec{k}\vec{x}}$ . Idò una certa magnitud escalar  $\Psi(\vec{x}, \tau)$ , pot esser desplegada com segueix:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(I.10) \quad \Psi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Psi(\vec{k}, \tau) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^3k.$$

Sa funció  $\Psi$  que apareix dins de s'integrand depèn tant de  $\vec{k}$  com de  $\tau$ , ja que es desplegament anterior se pot fer per a cada hipersuperfície a  $\tau$  constant, i en cadascuna d'aquestes hipersuperfícies tendríem uns coeficients  $\Psi$  diferents que tan sols dependrien (una volta fixada sa hipersuperfície) de  $\vec{k}$ . Aquest fet és important i permet separar sa dependència temporal de s'espacial per a qualche magnitud cosmològica.

Aquests tres tipus de magnituds evolucionen independentment, de tal manera que tipus diferents no s'acoblaran en ses equacions d'evolució. Açò permeten fer un tractament separat de cascadun des tipus, de tal manera que podríem fer un estudi evolutiu de ses pertorbacions vectorials com si no existissin escalars i tensorials. Finalment sa pertorbació total serà sa superposició d'aquests tres tipus independents.

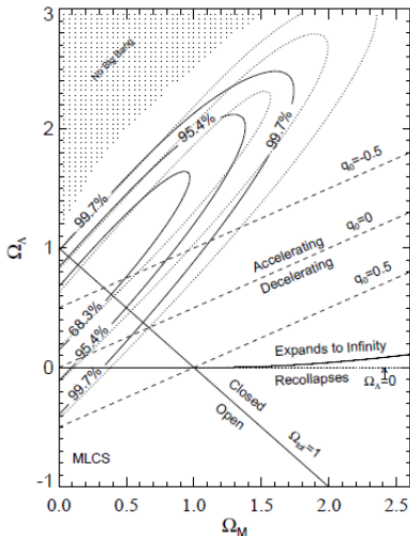
A partir de  $Q^{(0)}$  se construeixen es vector  $Q^{(0)}_i \equiv -\frac{1}{k} Q^{(0)}_{|i}$ , i es tensor  $Q^{(0)}_{ij} \equiv \frac{1}{k^2} Q^{(0)}_{|ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} Q^{(0)}$  (on  $\gamma_{ij}$  representa sa mètrica des 3-espai i que és  $\delta_{ij}$  ja que estam considerat es cas pla) que permetrà construir vectors i tensors associats a sa pertorbació escalar. D'igual manera a partir des vector harmònic de divergència nul·la  $Q^{(1)i}$  construïm es tensor simètric de traça nul·la però de divergència no nul·la  $Q^{(1)ij} \equiv -\frac{1}{2k} (Q^{(1)i|j} + Q^{(1)j|i})$ .

S'element de línia des *background* que utilitzarem serà:

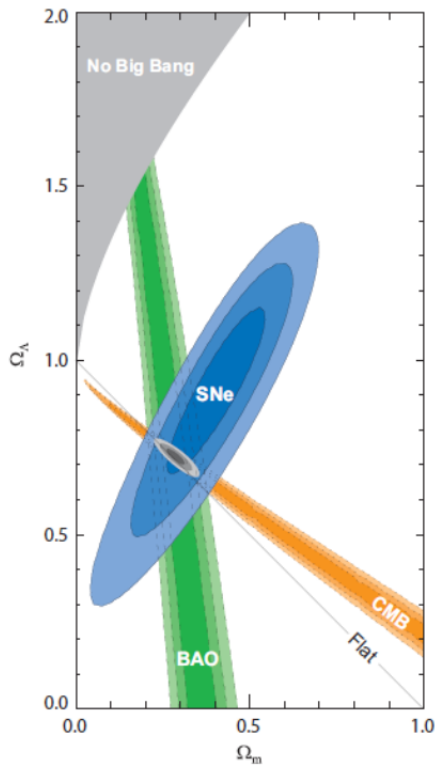
$$(I.11) \quad ds^2 = a^2(\tau) (-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j).$$

Com  $\vec{x}$  representa ses coordenades comòbils, llavors  $\vec{k}$  representa es vector d'ona comòbil i està relacionat amb so físic per  $k_f = a^{-1}k$ . On es número d'ona  $k$  (comòbil) defineix s'escala espacial (igualment comòbil)  $L = 2\pi/k$ . Se veu com sa longitud d'ona  $\lambda_f$  des mode Fourier  $\vec{k}_f$  creix amb so creixement de l'Univers.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XI:** Intervals des nivells de confiança per a  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  a partir de mesures de supernoves tipus Ia (SNe Ia). Es contorns de puntets no inclouen SN 1997ck, mentre que es contorn sòlid si. Il·lustració trobada en **(Riess & et al., 1998)**.



**Il·lustració XII:** Contorns des nivells de confiança des 68,3%, 95,4% i 99,7% per a  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  a partir de CMB, BAO i SNe. (s'assumeix una equació d'estat  $w = -1$ ). Il·lustració treta de **(Kowalski & et al., 2008)**.

En es formalisme de Bardeen treballarem amb ses funcions  $\Psi(\vec{k}, \tau)$  definides en s'espai de moments i trobarem ses seves equacions d'evolució. Si fos necessari podríem construir ses seves corresponents funcions en s'espai de posicions utilitzant s'expressió (I.10).

En es models cosmològics basats en Relativitat General ses magnituds escalars, vectorials i tensorials estan incloses en es tensor mètric i es tensor energia-moment des fluid cosmològic. Dits tensors són desplegats en termes d'ets harmònics definits en (I.7)–(I.9). A

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

continuació feim un desplegament explícit d'ambdós tensors separant ses parts escalars, vectorials i tensorials. Començam per ses perturbacions escalars per a sa mètrica:

$$(I.12) \quad \begin{aligned} g_{00} &= -a^2(\tau) \left[ 1 + 2\bar{A}(\tau) Q^{(0)}(x^k) \right], \\ g_{0i} &= -a^2(\tau) \bar{B}^{(0)}(\tau) Q_i^{(0)}(x^k), \\ g_{ij} &= a^2(\tau) \left\{ \left[ 1 + 2H_L(\tau) Q^{(0)}(x^k) \right] \delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. + 2H_T^{(0)}(\tau) Q_{ij}^{(0)}(x^k) \right\}. \end{aligned}$$

Tots es coeficients ( $\bar{A}$ ,  $\bar{B}^{(0)}$ , etc), maldament no aparesquin amb una dependència explícita en  $\vec{k}$ , sí que en depenen, però és habitual que aquesta dependència explícita no aparesqui, per tal de simplificar ses expressions.

Per desplegar es tensor energia-moment és necessari introduir sa velocitat  $u^\alpha$ , sa qual cosa se fa de manera següent:  $u^i/u^0 = v^{(0)}(\tau) Q^{(0)i}(x^k)$ . Sa condició  $u_\mu u^\mu = -1$  a ordre lineal, implica que  $u^0 = \frac{1}{a} \left[ 1 - \bar{A} Q^{(0)} \right]$ . Amb aquests resultats, ses diferents components des tensor energia-moment són:

$$(I.13) \quad \begin{aligned} \rho &= -T_0^0 = \hat{\rho}(\tau) \left[ 1 + \delta(\tau) Q^{(0)}(x^k) \right], \\ P &\equiv \frac{1}{3} T_i^i = \hat{P}(\tau) \left[ 1 + \pi_L(\tau) Q^{(0)}(x^k) \right], \\ T_i^0 &= \left[ \hat{\rho}(\tau) + \hat{P}(\tau) \right] \left[ v^{(0)}(\tau) - B^{(0)}(\tau) \right] Q_i^{(0)}(x^k), \\ T_0^i &= - \left[ \hat{\rho}(\tau) + \hat{P}(\tau) \right] v^{(0)}(\tau) Q^{(0)i}(x^k), \\ T_i^j &= \hat{P}(\tau) \left\{ \left[ 1 + \pi_L(\tau) Q^{(0)}(x^k) \right] \delta_i^j \right. \\ &\quad \left. + \pi_T^{(0)}(\tau) Q_i^{(0)j}(x^k) \right\}. \end{aligned}$$

On  $\rho$  representa sa densitat d'energia i  $P$  sa pressió. A més de totes aquestes funcions definides en (I.12) i (I.13), és necessari definir una nova funció  $\eta_E(\tau)$  de sa manera següent:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(I.14) \quad \eta_E(\tau)Q^{(0)} \equiv \left( \pi_L - \frac{\hat{\rho}}{\hat{P}} \frac{d\hat{\rho}}{d\hat{P}} \delta \right) Q^{(0)} = \frac{1}{w} (w\pi_L - c_s^2 \delta) Q^{(0)}.$$

Sa relació entre  $\rho$  i  $P$  (és a dir s'equació d'estat) pot tenir diferent forma en  $\mathbb{F}$  i en  $\mathbb{R}$ . Per altra banda en ses anomenades perturbacions adiabàtiques s'equació d'estat té sa mateixa forma. És senzill demostrar que  $\eta_E(\tau)$  és nul·la quan s'equació d'estat en  $\mathbb{F}$  i en  $\mathbb{R}$  tenen igual forma, és a dir en es cas de perturbacions adiabàtiques. Idò, quan  $\eta_E(\tau) \neq 0$ , ses perturbacions són no adiabàtiques.

Continuam ara amb ses perturbacions vectorials, que per a sa mètrica són:

$$(I.15) \quad \begin{aligned} g_{0i} &= -a^2(\tau) \bar{B}^{(1)}(\tau) Q_i^{(1)}(x^k), \\ g_{ij} &= a^2(\tau) \left[ \delta_{ij} + 2H_T^{(1)}(\tau) Q_{ij}^{(1)}(x^k) \right]. \end{aligned}$$

Y pes tensor energia-moment:

$$(I.16) \quad \begin{aligned} T_i^0 &= \left[ \hat{\rho}(\tau) + \hat{P}(\tau) \right] \left[ v^{(1)}(\tau) - \bar{B}^{(1)}(\tau) \right] Q_i^{(1)}(x^k), \\ T_i^j &= \hat{P}(\tau) \left[ \delta_i^j + \pi_T^{(1)}(\tau) Q_i^{(1)j}(x^k) \right], \end{aligned}$$

essent  $u^i/u^0 = v^{(1)}(\tau) Q^{(1)i}(x^k)$ .

I finalment, ses perturbacions tensorials que només afecten a sa part sense traça de sa mètrica espacial i a sa part sense traça des tensor d'esforços, s'expressen de sa manera següent:

$$(I.17) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= a^2(\tau) \left[ \delta_{ij}(x^k) + 2H_T^{(2)}(\tau) Q_{ij}^{(2)}(x^k) \right], \\ T_i^j &= \hat{P}(\tau) \left[ \delta_i^j + \pi_T^{(2)}(\tau) Q_i^{(2)j}(x^k) \right]. \end{aligned}$$

Ja hem xerrat de sa llibertat *gauge* permet fixar es valors de certes funcions, i havíem com estava caracteritzat s'anomenat *gauge* síncron en s'espai de posicions. D'igual manera és possible fer-ho en



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

s'espai de moments, per sa qual cosa poden fer ús de totes aquestes funcions que acabam d'introduir per sa dita feina. En quest sentit és interesant introduir es diferents *gauges* més utilitzats; es *gauge* síncron amb  $\bar{A} = \bar{B}^{(0)} = 0$ , es *gauge* longitudinal amb  $H_T^{(0)} = \bar{B}^{(0)} = 0$ , es *gauge* temps propi comòbil amb  $\bar{A} = v^{(0)} = 0$  i es *gauge* temps-ortogonal comòbil amb  $\bar{B}^{(0)} = v^{(0)} = 0$ .

Tal com ja hem dit, una transformació *gauge* correspon a un canvi de coordenades en  $\mathbb{R}$ , deixant fixat es sistema en  $\mathbb{F}$ . Considerant transformacions de coordenades a primer ordre, revisarem com sa forma més general de transformacions *gauge* són es resultat de transformacions de coordenades.

Començarem considerant pertorbacions escalars, en tal cas, sa transformació de coordenades que origina sa transformació *gauge* més general possible és:

$$(I.18) \quad \begin{aligned} \tilde{\tau} &= \tau + T(\tau)Q^{(0)}(x^k), \\ \tilde{x}^i &= x^i + L^{(0)}(\tau)Q^{(0)i}(x^k), \end{aligned}$$

essent  $T(\tau)$  i  $L^{(0)}(\tau)$  funcions arbitràries de  $\tau$ . Aquest canvi de coordenades produeix es següents canvis en ses funcions definides en (I.12):

$$(I.19) \quad \begin{aligned} \tilde{A} &= A - \dot{T} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)T, \\ \tilde{B}^{(0)} &= B^{(0)} + \dot{L}^{(0)} - kT, \\ \tilde{H}_L &= H - \frac{k}{3}L^{(0)} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)T, \\ \tilde{H}_T^{(0)} &= H_T^{(0)} + kL^{(0)}. \end{aligned}$$

I per a ses funcions definides en (I.13), sa transformació és:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}^{(0)} &= v^{(0)} + \dot{L}^{(0)}, \\
 \tilde{\delta} &= \delta + 3(1+w) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) T, \\
 \tilde{\pi}_L &= \pi_L + 3(1+w) \frac{c_s^2}{w} \frac{\dot{a}}{a} T, \\
 \tilde{\pi}_T^{(0)} &= \pi_T^{(0)}.
 \end{aligned}
 \tag{I.20}$$

I llavors s'amplitud de sa part sense traça des tensor d'esforços  $\pi_T^{(0)}$  no varia amb canvis de coordenades. Sa quantitat  $\eta_E(\tau)$  també és invariant gauge (Bardeen, 1980).

Continuat amb ses perturbacions vectorials, pes qual sa transformació de coordenades que origina sa transformació *gauge* més general possible és

$$\tilde{x}^i = x^i + L^{(1)}(\tau) Q^{(1)i}(x^k),
 \tag{I.21}$$

idò, ses quantitats definides en (I.15) són transformades segons:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}^{(1)} &= B^{(1)} + \dot{L}^{(1)}, \\
 \tilde{H}_T^{(1)} &= H_T^{(1)} + kL^{(1)}.
 \end{aligned}
 \tag{I.22}$$

I per a ses funcions definides en (I.16), sa transformació és:

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}^{(1)} &= v^{(1)} + \dot{L}^{(1)}, \\
 \tilde{\pi}_T^{(1)} &= \pi_T^{(1)}.
 \end{aligned}
 \tag{I.23}$$

Ses quantitats que no varien quan feim es canvis de coordenades, com ha estat amb  $\pi_T^{(0)}$  i  $\pi_T^{(1)}$ , són anomenades *gauge* invariants. Fent ús de ses lleis de transformació anteriors, pot demostrar-se que, determinades quantitats que són combinacions de ses amplituds que apareixen en ses equacions (I.12)–(I.17), no varien quan feim ses dites transformacions de coordenades.

Ses magnituds físiques en aquest formalis només tenen sentit físic quan són independents des *gauge* triat, és a dir, són invariants

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

*gauge*. En aquest sentit, a partir de ses amplituds presents en es tensor mètric, quant a ses pertorbacions escalars, podem definir es potencials *gauge* invariants  $\Phi_A$  i  $\Phi_H$ , de sa manera següent:

$$(I.24) \quad \begin{aligned} \Phi_A &\equiv \bar{A} + \frac{1}{k} \dot{\bar{B}}^{(0)} + \frac{1}{k} aH \bar{B}^{(0)} - \frac{1}{k^2} \left( \ddot{H}_T^{(0)} + aH \dot{H}_T^{(0)} \right), \\ \Phi_H &\equiv H_L + \frac{1}{3} H_T^{(0)} + \frac{1}{k} aH \bar{B}^{(0)} - \frac{1}{k^2} aH \dot{H}_T^{(0)}. \end{aligned}$$

A partir de sa velocitat de sa matèria, construïm una “*velocitat*” invariant com segueix:

$$(I.25) \quad v_s^{(0)} = v^{(0)} - \frac{1}{k^2} \dot{H}_T^{(0)}.$$

I a partir de s’amplitud de sa pertorbació de sa densitat d’energia se construeix sa següent quantitat invariant *gauge*:

$$(I.26) \quad \epsilon_m \equiv \delta + 3(1+w) \frac{1}{k} aH \left( v^{(0)} - \bar{B}^{(0)} \right),$$

i també, de manera alternativa, se defineix:

$$(I.27) \quad \epsilon_g \equiv \delta - 3(1+w) \frac{1}{k} aH \left( \bar{B}^{(0)} - \frac{1}{k} \dot{H}_T^{(0)} \right).$$

Partint de ses amplituds presents en es tensor mètric, quant a ses pertorbacions vectorials, només és possible construir sa següent funció invariant *gauge*:

$$(I.28) \quad \Psi \equiv \bar{B}^{(1)} - \frac{1}{k} \dot{H}_T^{(1)}.$$

I pes cas de sa velocitat, igualment que passava amb sa densitat d’energia en es cas escalar, podem construir un parell de quantitats, aquestes són:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(I.29) \quad v_s^{(1)} = v^{(1)} - \frac{1}{k^2} \dot{H}_T^{(1)} \quad \text{i} \quad v_c = v^{(1)} - \bar{B}^{(1)} = v_s^{(1)} - \Psi.$$

I, finalment, quant a ses pertorbacions tensorials, ses amplituds que apareixen a ses expressions (I.17) ja són invariants *gauge* a causa de què no és possible construir modes escalars o vectorials amb s'harmònic tensorial  $Q_{ij}^{(2)}$ , i llavors no hi ha termes dependents de  $Q_{ij}^{(2)}$  (tan sols estan implicats ets harmònics  $Q^{(0)}$ ,  $Q^{(0)i}$ , i  $Q^{(1)i}$ ) en ses equacions de transformacions de coordenades en  $\mathbb{R}$  [(I.18), (I.21)].

Una volta hem introduït es diferents ingredients necessaris, ja estam en condició d'escriure ses equacions d'evolució per a ses pertorbacions en s'espai de moments. Ho farem de dues maneres, en primer lloc escriurem ses equacions construïdes amb ses funcions invariant *gauge* que acabam de descriure, i deixam per a s'apèndix A ses equacions corresponent an es *gauge* síncron. Ambdues seran utilitzades en diferents apartats més endavant.

A partir de ses expressions anteriors per a ses funcions invariant *gauge*, i fent ús de ses equacions d'Einstein aplicades a ses pertorbacions o bé a partir de s'expressió  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , obtenim ses següents expressions pes cas de ses pertorbacions escalars:

$$(I.30) \quad 2 \frac{k^2}{a^2} \Phi_H = 8\pi G \hat{\rho} \in_m,$$

$$(I.31) \quad -\frac{k^2}{a^2} (\Phi_A + \Phi_H) = 8\pi G \hat{P} \pi_T^{(0)},$$

$$(I.32) \quad \dot{v}_s^{(0)} + aHv_s^{(0)} = k\Phi_A + k(1+w)^{-1} (c_s^2 \in_m + w\eta_E) - \frac{2}{3} k(1+w)^{-1} w\pi_T^{(0)},$$

$$(I.33) \quad (\rho_b a^3 \in_m)^\bullet = -(\hat{\rho} + \hat{P}) a^3 k v_s^{(0)} - 2a^4 H p_b \pi_T^{(0)}.$$

Equacions que se combinen per obtenir una expressió de segon ordre per a  $\in_m$ , que escrivim a continuació:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 & (\hat{\rho} a^3 \epsilon_m)'' + (1 + 3c_s^2) a H (\hat{\rho} a^3 \epsilon_m)' + \left[ k^2 c_s^2 \right. \\
 & \left. - 4\pi G (\hat{\rho} + \hat{P}) a^2 \right] (\hat{\rho} a^3 \epsilon_m) \\
 (I.34) \quad & = -k^2 (\hat{P} a^3 \eta_E) + \frac{2}{3} k^2 a^3 \hat{P} \pi_T^{(0)} + 16\pi G \hat{\rho} a^2 (w - c_s^2) (\hat{P} a^3 \pi_T^{(0)}) \\
 & - 2a^2 H (\hat{P} a^2 \pi_T^{(0)})'.
 \end{aligned}$$

Per a ses pertorbacions vectorials obtenim s'expressió:

$$(I.35) \quad \frac{k^2}{a^2} \Psi = 16\pi G (\hat{\rho} + \hat{P}) v_c,$$

així com sa següent equació de moviment per sa matèria:

$$(I.36) \quad \dot{v}_c = aH (3c_s^2 - 1) v_c - k \frac{w}{1+w} \pi_T^{(1)}.$$

I, finalment per a ses pertorbacions tensorials, només tenim una expressió que és

$$(I.37) \quad \frac{1}{a^2} (\ddot{H}_T^{(2)} + 2aH \dot{H}_T^{(2)} + k^2 H_T^{(2)}) = 8\pi G \hat{P} \pi_T^{(2)}.$$

Sa part escalar de ses fluctuacions de densitat és fonamental per a estudiar sa formació d'estructures cosmològiques (galàxies, cúmuls, etc.). Es contrast de densitat  $\delta$  evoluciona acoblat a sa resta de modes escalars com són  $\pi_L$  (pressió),  $\eta_E$  (equació d'estat),  $v_c$  (velocitat peculiar amb divergència no nul·la produïda per sa gravitació), etc; però desacoblada des modes vectorials i tensorials. Una volta acabada sa fase d'evolució lineal de  $\delta$ , comença una fase no lineal, que no considerarem en aquesta tesi i que condueix a ses estructures cosmològiques que s'observen actualment.

Ses condicions inicials per tal d'estudiar s'evolució de  $\delta$  provenen des període inflacionari; quan aquest període és acabat, s'espectre de potències de  $\delta$  ha d'esser molt semblant amb s'espectre de potències que vàrem anomenar invariant d'escala (

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$n_s \sim 1$ ) amb una normalització adequada (valor de  $A_s$ ), no més així, podem obtenir estructures com ses observades avui.

Ses pertorbacions vectorials no apareixen en s'inflació estàndard basada en un camp escalar inflacionari i sí apareguessin per causa de qualcun mecanisme especial, decaurien al llarg de ses fases de radiació i matèria dominant, produït efectes negligibles en es CMB.

Finalment ses pertorbacions tensorials que són ones gravitatòries (fluctuacions de sa mètrica sense divergència ni traça) i que sí són generades en sa gran majoria de models inflacionaris, deixen sa seva petja en es CMB ja que influeixen en es moviment des fotons que descriuen geodèsiques nul·les d'espai-temps.

Es formalisme que acabam de descriure serà fonamental per s'estudi de ses teories Vector-Tensor que considerarem en capítols posteriors. En aquestes teories a més des modes anteriorment descrits en es context de Relativitat General, trobarem nou modes escalars i vectorials característics de dites teories.

Existeixen altres formalismes com s'anomenat formalisme de Hawking que és completament covariant (Hawking, 1966) i un altre d'Ellis & Bruni (Ellis & Bruni, 1989), que és covariant i gauge invariant, no obstant això, és es formalisme de Bardeen aquell que s'usa habitualment.

### 2. CMB i s'espectre angular de potències (“power spectra”).

Quan l'Univers tenia devers 380.000 anys sa temperatura era devers 3000 K, en aquest “moment” electrons i protons varen començar a formar àtoms d'hidrogen, deixant l'Univers transparent per a sa radiació, a partir d'aquesta època, coneguda com recombinació i desacoblament, sa radiació viatja seguint ses geodèsiques nul·les. En un cert instat cada observador rep es CMB provenint d'una superfície, en sa qual va tenir lloc sa darrera dispersió des fotons amb sos electrons lliures, aquesta superfície és coneguda com a superfície de darrera col·lisió (“*last scattering surface*”, a partir d'ara SDC). Aquesta radiació que anomenam CMB, i mes precis ses seves anisotropies són mesurades per satèl·lits com COBE, WMAP o Planck que introduïrem an es principi d'aquest capítol. Ets aparells, mesuren temperatures en

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

diferents direccions, per a després realitzar un estudi estadístic de sa distribució de temperatures obtingudes a partir de moltes mesures. A partir de ses temperatures se podria calcular una temperatura mitjana que seria aproximadament sa temperatura des *background* que permet definir es contrast de temperatures per a una certa direcció  $\vec{n}$ :

$$\frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) = \frac{T(\vec{n}) - T_B}{T_B}.$$

Es contrast de temperatures pot esser predit teòricament utilitzant es model pertorbatiu descrit en s'apartat anterior, havent-hi contribucions des modes escalars, vectorials i tensorials.

S'evolució de  $\Delta T/T(\vec{n})$  està regida per s'equació de Boltzman (Peebles & Yu, 1970; Wilson & Silk, 1981; Bond & Efstathiou, 1984; Ma & Bertschinger, 1995), per a més detall veure s'apèndix B.

Ses observacions, suggereixen un fons de microones, estadísticament homogeni, isòtrop i gaussià. Ben sabut és, que una distribució gaussiana de  $\Delta T/T(\vec{n})$  queda completament definida per sa funció de correlació a dues direccions que denotarem amb  $C(\theta)$ . Sa funció de correlació es defineix com segueix (Durrer, 2008):

$$(I.38) \quad C(\theta) = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_1), \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_2) \right\rangle,$$

essent  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  es vectors unitaris corresponents a dues direccions d'observació que formen s'angle  $\theta$ , és a dir  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \cos \theta$ . En aquesta definició sa mitjana s'ha de treure de moltes realitzacions de CMB, cada realització correspondria a un observador arbitràriament ubicat en l'Univers, que mesura sa temperatura des CMB en moltes direccions.

A partir de  $C(\theta)$  és possible definir un espectre angular associat. Ses quantitats  $C_\ell$  (Durrer, 2008) caracteritzen s'espectre angular de sa distribució de temperatures des fons de microones i

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

són calculats mitjançant sa següent transformació de sa funció de correlació  $C(\theta)$ :

$$(I.39) \quad C_\ell = 2\pi \int_0^\pi C(\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta d\theta,$$

sa transformació inversa de sa qual és:

$$(I.40) \quad C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos\theta),$$

a on ses  $P_\ell$  fan referència an es polinomi de Legendre de grau  $\ell$ . Ses equacions (I.39) i (I.40) descriuen ses transformacions entre ses  $C_\ell$  i  $C(\theta)$ , i per tant, aquesta darrera funció i es conjunt de ses  $C_\ell$ , contenen realment sa mateixa informació física. Com és sabut, es multipol  $C_\ell$  contribueix bàsicament a  $C(\theta)$  per a  $\theta = \pi/\ell$ .

Donat un model cosmològic, s'espectre angular des CMB pot calcular-se mitjançant sa següent relació:

$$(I.41) \quad C_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle,$$

essent ses  $a_{\ell m}$ , es coeficients que apareixen quan se fa una expansió des contrast de temperatures en termes d'harmònics esfèrics i, d'igual manera que hem dit abans, s'entén que sa mitjana se treu de moltes realitzacions de CMB. Sa dita expansió té sa forma:

$$\frac{\Delta T}{T}(\vec{x}_0, \vec{n}) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m}(\vec{x}_0) Y_{\ell m}(\vec{n}),$$

essent  $(\vec{x}_0)$  es vector que defineix sa posició d'un observador a l'Univers, i  $(\vec{n})$  defineix sa direcció d'observació. Sa mitjana és en  $(\vec{x}_0)$ .



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Habitualment són representades ses quantitats  $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$  front a s'índex  $\ell$ . D'acord amb ses definicions anteriors, ses quantitats  $C_\ell$  i  $C(\theta)$  són adimensionals. A voltes, aquestes quantitats són definides fen ús de sa temperatura  $T$  en lloc de  $\Delta T/T$ , en aqueixs casos, ses dites quantitats solen expressar-se en  $\mu\text{K}^2$ , tal com pot observar-se en: Il·lustració XIII, Il·lustració XIV i Il·lustració XV.

Ses anisotropies des CMB se divideixen en dos tipus: anisotropies primàries que se produeix en sa SDC, i ses anisotropies secundàries produïdes al llarg des camí a on “lliurement” viatja es fotó fins a s'observador.

Abans des processos de recombinació i desacoblament, es CMB evolucionava acoblat amb sa matèria. Així, quan varen succeir aquests processos, hi havia fluctuacions de sa densitat d'energia que eren fonts de potencials gravitatoris peculiars, hi havia perturbacions des flux d'Hubble; és a dir velocitats peculiars, i també hi havia fluctuacions de sa temperatura des CMB, o equivalentment, perturbacions de sa densitat d'energia des CMB. Totes aquestes fluctuacions tenen unes característiques que són dependents des model cosmològic i produeixen anisotropies primàries des CMB.

A causa de ses dites fluctuacions, es fotons des CMB que arriben a un observador en dues direccions diferents parteixen de regions diferents de sa SDC, en ses dites regions es potencial gravitatori peculiar, sa velocitat peculiar i sa temperatura des CMB són diferents. A causa d'açò apareixen es següents tipus d'anisotropies primàries (efectes):

1. S'efecte anomenat Sachs-Wolfe (Sachs & Wolfe, 1967), que és originat per sa distribució no uniforme des potencial gravitatori peculiar sobre sa SDC.
2. Ses anisotropies originades per sa distribució no uniforme de temperatures des CMB sobre sa SDC. Se tracta d'anisotropies inicials en sa temperatura des CMB, conseqüència de sa seva evolució prèvia.
3. S'efecte Doppler causat per s'existència de velocitats peculiars en sa distribució d'electrons sobre sa SDC, que és es focus emissor des CMB que detectam.

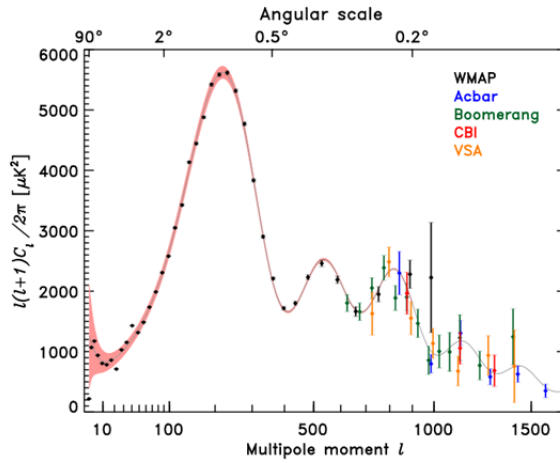
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Ets efectes 1,2 i 3 dominen s'espectre angular des CMB en sa zona situada a l'esquerra de sa primera cuculla, en aquesta cuculla, i en s'altra zona de ses altres cuculles, respectivament (veure, per exemple Il·lustració XIV).

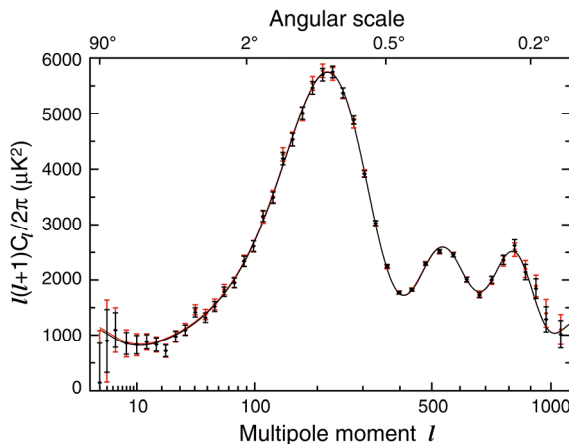
Hi existeixen també anisotropies secundàries de diversos tipus:

- A. Qualcunes són produïdes per s'acció de camps gravitatoris peculiars en es camí seguit pes fotons des CMB, des de sa SDC fins a s'observador. Se tracta d'ets efectes Sachs-Wolfe integrat, Rees–Sciama (Rees & Sciama, 1968), lent gravitatòria (Seljak, 1996; Stompor & Efstathiou, 1999).
- B. Altres són a causa de sa dispersió (“*scattering*”) des fotons des CMB per electrons lliures que existeixen en certes regions. Exemple d'aquest és s'anomenat efecte Sunyaev-Zel'dovich (Sunyaev & Zeldovich, 1970), produït per electrons lliures a temperatures de s'ordre des  $10^7$  o  $10^8$  K situats dins des cúmuls de galàxies, que pateixen s'efecte Compton invers (Blumenthal & Gould, 1970). Hi existeix un altre efecte ocasionat per s'interacció Thompson amb sos electrons lliures que apareixen a causa de sa reionització de l'Univers.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

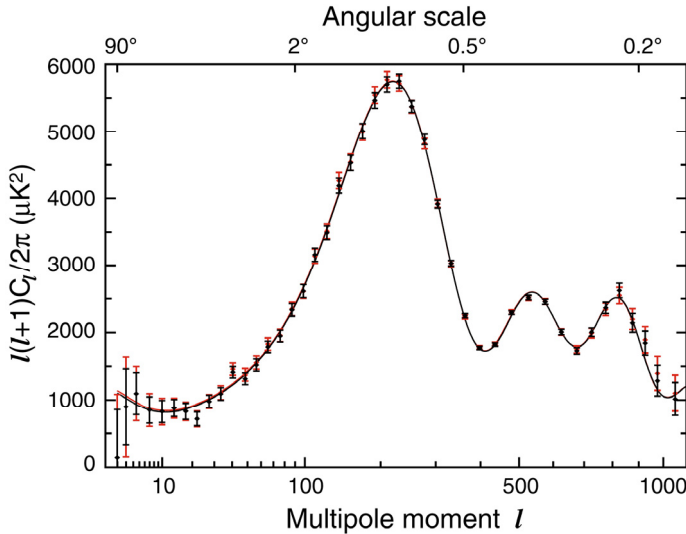


**Il·lustració XIII:** “Power spectrum” que inclou: mesures de 3 anys d’observacions de WMAP, Boomerang (*Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation ANd Geophysics*) (**Jones & et al., 2006**), Acbar (**Kuo & et al., 2004**), CBI (*Cosmic Background Imager*, interferòmetre situat a s’Observatori Llano en Xile) (**Readhead & et al., 2004**), i VSA (*The Very Small Array* és un interferòmetre ubicat an es Teide) (**Dickinson & al., 2004**). Il·lustració de G. Hinshaw (**Hinshaw & et al., 2007**).



**Il·lustració XIV:** “Power spectrum” amb dades de nou anys d’observació de WMAP. Il·lustració de G. Hinshaw (**Hinshaw, et al., 2013**).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XV:** En aquest gràfic mostrem es “*power spectrum*” que reflecteix ses fluctuacions de temperatura mesurades per Planck després des primers 15,5 mesos d’observacions. En sa part superior se mostren diverses escales angulars, per fer-se una idea, an es diàmetre de sa lluna li pertoca  $0^\circ 50'$ . Il·lustració original de s’equip de Planck treta de <http://sci.esa.int/jump.cfm?oid=51555>.

Quant a ses anisotropies secundàries, per una banda tenim ets efectes d’origen gravitatoris des que cal esmentar es mateix tipus d’efecte Sachs-Wolfe, però ara se produeix en es “lliure” viatge cap a noltros (anomenat efecte Sachs-Wolfe integrat) i com a cas particular d’aquest s’efecte Rees–Sciama (Rees & Sciama, 1968), de caràcter no lineal produït per *voids* i *clusters* en èpoques més recents, i per s’altra banda ets efectes originats per interaccions no gravitatòries com són ets efectes de dispersió (“*scattering*”) i en aquest sentit destacam sa re-ionització de l’Univers en un cert moment, per sa qual una certa part des fotons des CMB interacciona amb electrons lliures mitjançant dispersió Compton i dispersió Thomson, s’efecte Sunyaev-Zel’dovich tèrmic (Sunyaev & Zeldovich, 1970) ocasionat per s’interacció des fotons amb so gas calent ionitzat en es cúmuls de galàxies.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### 3. Teories alternatives de gravitació.

Sa teoria de la Relativitat General és una teoria de gravitació que generalitza a sa de Newton.

En 1905, Einstein va proposar sa teoria de la Relativitat Restringida (RR), que permetia descriure es moviment de partícules en camps electromagnètics; però, en es marco d'aquesta teoria, no va esser possible descriure correctament s'interacció gravitatòria. S'espai-temps era una varietat amb sa mètrica de Minkowski, i ses lleis de sa física havien d'esser invariants baix ses transformacions de Lorentz.

Per tal d'incloure sa gravitació en es marc de sa RR, van introduir-se camps escalars en una densitat Lagrangiana. Un principi variacional devia llavors conduir a ses equacions de gravitació. Es camp escalar devia jugar es paper des camp gravitatori. Aquests tipus de teories varen esser desplegats per Nordström, Littlewood (Littlewood, 1953), Bergman (Bergmann O. , 1956), Page-Tupper (Page & Tupper, 1968) (Nordtvedt Jr, 1968), etc. Gunnar Nordström va construir un parell de teories d'aquest tipus (Nordström, 1912, 1913), Einstein també va proposar sa seva teoria escalar basada en aquests treballs (Einstein, Gravitationstheorie, 1913).

En 1915, Einstein va formular sa seva teoria de la Relativitat General, que és una teoria de gravitació basada en sa geometria de s'espai-temps. Sa seva mètrica juga es paper des camp gravitatori. Sa connexió, anomenada mètrica (símbols de Christoffeld) té curvatura però no torsió. Ses equacions d'Einstein se poden obtenir mitjançant principis variacionals a partir de s'acció:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + I_m$$

essent  $R$  sa curvatura escalar i  $I_m$  es Lagrangia material. Amb aquesta teoria prest s'explicaren certes observacions astronòmiques, que no varen poder esser explicades amb camps escalars en es marc de RR.

Moltes generalitzacions de sa teoria de la Relativitat General han estat proposades i analitzades, per diferents motius que han anat canviant al llarg de temps. An es principi, sa principal motivació de ses teories alternatives de gravitació va esser aconseguir una

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

formulació unificada de ses teories d'electromagnetisme i gravitació, basada en sa geometria de s'espai-temps, posteriorment, hi va haver una fase, més o menys des d'ets anys 60 an es 90 , en sa qual s'estudi de ses teories alternatives semblava un capritx, ja que sa teoria d'Einstein anava explicant més i més dades d'observació i, es principi des raor d'Ockham: "en igualtat de condicions, s'explicació més senzilla sol esser sa més probable", suggeria no cercar teories més complicades que la Relativitat General.

Finalment, s'estudi de ses teories alternatives tornar a florir devers finals del segle XX, quan s'observació de ses supernoves llunyanes de tipus Ia va suggerir que s'univers està actualment en expansió accelerada i que, per tant, ha d'haver una força repulsiva responsable de sa dita acceleració. Molts estudis realitzats recentment per justificar s'esmentada repulsió, suposen s'existència de qualcun tipus d'energia fosca en es marc de teories alternatives de gravitació.

Ara, descriurem breument qualcuns tipus de teories alternatives d'ús actual, fent especial èmfasi a ses teories vector-tensor que són considerades en aquesta tesi.

- “*Teories amb connexions no simètriques*”.

El mateix Einstein (Einstein, 1928) va proposar una teoria basada en una tètada de camps vectorials, a partir de sa qual, se pot definir sa mètrica i una connexió sense curvatura amb torsió, anomenada connexió de Weitzenböck (Weitzenböck, 1923). Va definir llavors s'escalar de torsió  $T$  i va comprovar que s'acció

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} T + I_m$$

condueix a una teoria equivalent a relativitat general (TEGR); però no va aconseguir unificar gravitació i electromagnetisme amb lagrangians construïts a partir des tensor de torsió i sa mètrica. Si en es Lagrangia substituïm  $T$  per una funció  $f(T)$ , obtenim una nova teoria a sa qual anomenarem teoria  $f(T)$ . Aquest tipus de teories estan essent estudiades actualment, però no per unificar camps, sinó per explicar sa naturalesa de s'energia fosca explicant an es mateix temps ses observacions actuals; podem citar com a exemple,

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

s'extensió de TEGR de Born-Infeld (Ferraro & Fiorini, Born-Infeld gravity in Weitzenböck spacetime, 2008; Fiorini, 2013) . Ses teories  $f(T)$  també s'estudien en (Ferraro & Fiorini, 2007; Bengochea & Ferraro, 2009; Cai, Chen, Dent, Dutta, & Saridakis, 2011; Harko, Lobo, Otalora, & Saridakis, 2014; Capozziello, Luongo, & Saridakis, 2015), on s'estudia s'inflació, sa singularitat inicial i altres aspectes de s'evolució de l'Univers.

També Cartan (Cartan, 1922; Cartan, 1923), va proposar un model d'espai-temps amb un tensor mètric i una "connexió" lineal compatible amb sa mètrica, que no és necessàriament simètrica. Aquestes idees varen esser també desplegades per altres autors com: Sciama (Sciama, 1958), Hehl et al. (Hehl, von der Heyde, Kerlick, & Nester, 1976) i Coley (Coley, 1983a, 1983b, 1983c).

- “Teories  $f(R)$ ”.

Es Lagrangia d'aquestes teories s'obté substituint  $R$  per una funció adequada  $f(R)$  en es Lagrangia de Relativitat General. Sa primera funció que va estudiar-se va esser  $f(R) = R + \alpha R^2$ , essent  $\alpha$  una constant a determinar (Starobinsky, A new type of isotropic cosmological models without singularity, 1980; Barrow & Ottewill, 1983; Amendola, Occhionero, & Saez, 1990); posteriorment van estudiar-se ses condicions que ha de complir una funció  $f(R)$  perquè doni lloc a una teoria acceptable de gravitació (Amendola, Gannouji, Polarski, & Tsujikawa, 2007; Starobinsky, 2007), i posteriorment, s'han realitzat un gran nombre d'estudis i aplicacions a cosmologia de ses teories  $f(R)$  [ (Capozziello & de Laurentis, 2011; Pani, Cardoso, & Delsate, 2011; Motohashi & Nishizawa, 2012; Kruglov, 2014)]. Finalment, és important, sobretot per a aplicacions a s'inflació, sebre que tota teoria que és de tipus  $f(R)$  en s'anomenada representació de Jordan, és equivalent a Relativitat General més un camp escalar, s'energia potencial pot esser calculada utilitzant sa funció  $f(R)$ ; aquesta teoria equivalent es diu que està formulada en sa representació d'Einstein (Magnano & Sokolowski, 1994).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- “*Teories Escalar-Tensor*”.

En aquestes, sa densitat Lagrangiana se construeix en funció de sa mètrica, d'un camp escalar ( $\varphi$ ), amb una funció potencial  $[V(\varphi)]$  i una funció d'acoblament  $[A(\varphi)]$ . Podem trobar aquests tipus de teories en Jordan (Jordan, 1955), Brans-Dicke (Brans & Dicke, 1961), Bergmann (Bergmann P. G., 1968), Nordtvedt (Nordtvedt Jr, 1970), Wagoner (Wagoner, 1970), Bekenstein (Bekenstein, 1977), etc.

En qualcunes ocasions, s'introdueix s'anomenant cinquena essència (Quintessence), es tracta d'un camp escalar amb certa energia potencial adequada. Aquests darrers tipus de teories, pertoqueu an es grup de ses “*Teories Escalar-Tensor*”.

- “*Teories Vector-Tensor*”.

Són teories desplegadas inicialment per Will-Nordtvedt (Will & Nordtvedt, 1972), (Nordtvedt & Will, 1972) i Hellings (Hellings & Nordtvedt Jr, 1973; Will, 1993), en aquests casos s'acció involucra, a banda des tensor mètric, un camp vectorial. En sa densitat Lagrangiana apareixen certs coeficients en es diferents termes que anomenarem paràmetres. Precisament, serà aquesta, sa nostra teoria base, que, desplegem per a certs valors de s'esmentats paràmetres. Versions més actuals (Will, 2006), modifiquen aquestes teories, exigint que, es camp vectorial sia unitari i temporal (i llavors candidat a observador), aquestes darreres teories són conegudes com teories Einstein-Æther. Allò se fa, afegint-li termes escalars amb multiplicadors de Lagrange. Explicitament aquestes dues accions s'escriuen, de manera següent (primer es cas sense restriccions anomenades “*unconstrained*”):

$$(I.42) \quad I = \frac{1}{16\pi G} \int \left( R + \omega A_{,\mu} A^{,\mu} R + \eta R_{,\mu\nu} A^{,\mu} A^{,\nu} - \varepsilon F_{,\mu\nu} F^{,\mu\nu} + \tau \nabla_{\nu} A_{,\mu} \nabla^{\nu} A^{,\mu} \right) \sqrt{-g} d^4x + I_{NG},$$



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

essent  $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu = (dA)_{\mu\nu}$ , i amb  $I_{NG}$  representant sa part no gravitatòria, finalment  $\omega, \eta, \varepsilon$ , i  $\tau$  són es paràmetres. En es cas de ses teories Einstein-Æther, s'acció s'escriu:

$$(I.43) \quad I = \frac{1}{16\pi G} \int \left[ (1 + \omega A_\mu A^\mu) R - K_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \nabla_\mu A^\alpha \nabla_\nu A^\beta + \lambda (1 + A_\mu A^\mu) \right] \sqrt{-g} d^4x + I_{NG},$$

amb  $K_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv c_1 g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + c_2 \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + c_3 \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu - c_4 g_{\alpha\beta} A^\mu A^\nu$ ,  $\lambda$  és es multiplicador de Lagrange i  $c_1, c_2, c_3$ , i  $c_4$  són es paràmetres.

Aquesta darrera acció se converteix en s'anterior quan feim:  $c_1 = 2\varepsilon - \tau, c_2 = -\eta, c_1 + c_2 + c_3 = -\tau, c_4 = 0, \lambda = 0$ . Recent estudis des grup de teories Einstein-Æther (Zuntz, Ferreira, & Zlosnik, 2008) quan s'apliquen a cosmologia ,conclouen que quan s'ajusta s'espai de paràmetres a un conjunt de dades experimentals (WMAP, Boomerang, ACBAR, VSA,...,etc.), succeeix que és necessari es re-escalat de ses altres densitats. D'aquests mateixos tipus de teories s'han fet variacions que s'han aplicat a cosmologia com alternativa a matèria fosca (Zlosnik, Ferreira, & Starkman, 2007). Existeixen autors (Böhmer & Harko, 2007) que fan ús d'un camp vectorial mitjançant s'introducció d'un terme màssic  $(m_A A_\mu A^\mu)$  i aconsegueixen explicar s'acceleració còsmica. Recentment, s'han aplicat a cosmologia altres teories a on intervenen camps vectorials, veure per exemple (Moffat, 2006), (Tartaglia & Radicella, 2007).

- “Teories tensor-tensor (bimètriques)”.

Són teories amb dues mètriques, se considera un tensor mètric, més una mètrica de curvatura constant, en aquestes teories trobarem casos a on s'afegiran camps escalars i/o vectorials. Cal destacar es següents treballs en aquest línia: (Rosen, 1973; 1975), (Lightman & Lee, 1973), (Rastall, 1979).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Combinacions “*Escalar-Vector-Tensor*”.

Podem trobar-les en (Moffat, 2006), aquestes teories són conegudes amb s’acrònim MOG (“*Modified Gravity*”), i s’han utilitzat per explicar fenòmens com: ses corbes de rotació de galàxies (Brownstein & Moffat, 2006b) i es perfils de massa des cúmuls de galàxies (Brownstein & Moffat, 2006a).

Com una alternativa a sa matèria fosca, Milgrom (Milgrom, 1983a, 1983b, 1983c) desplega una teoria Newtoniana modificada (anomenada habitualment amb s’acrònim MOND – “*Modified Newtonian Dynamics*”), se tracta d’una teoria modificada de gravitació no relativista, que en lloc de dependre de sa distància depèn de s’acceleració, s’equació pes potencial gravitatori és:

$$f(|\vec{a}|/a_0)\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N,$$

on  $f$ , és una funció tal que  $f(x) \approx x$  quan  $x \ll 1$  i  $f(x) \rightarrow 1$  quan  $x \gg 1$ ,  $a_0$  defineix s’escala d’acceleracions i  $\Phi_N$  representa es potencial Newtonià escalar. Milgrom, a partir de ses dades empíriques, trobà que  $a_0 \approx 1 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ . Quan ses acceleracions són molt més grans que  $a_0$ , s’equació anterior queda reduïda a sa llei de Newton de sa gravitació universal, és a dir  $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N$ , mentre que en es cas contrari (part exterior de se galàxies), s’equació anterior se separa de sa llei de Newton. En 2004 Bekenstein va construir sa versió relativista de sa teoria MOND (Bekenstein, 2004), amb dos camps escalars (en lloc d’un) més un camp vectorial i sa mètrica, idò, aquestes teories també pertuquen an es grup de ses teories “*Escalar-Vector-Tensor*”.

### 4. Motivacions i esquema de treball.

Un des problemes principals des model estàndard ( $\Lambda$ CDM) és sa justificació de s’energia fosca com a energia de buit (Tryon, 1973). Quan es considera un univers descrit per una teoria quàntica de camps local efectiva per a escales menors a s’escala de Planck ( $l_p = (\hbar G/c)^{1/2} \approx 1,616 \times 10^{-35} \text{ m}$ ), sa densitat d’energia associada a la

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

constant cosmològica és esperat que sia de s'ordre de  $m_p^4$ , on  $m_p$  és sa massa de Planck  $m_p \approx 10^{18}$  GeV. De conformitat amb aquesta predicció teòrica, s'energia de buit hauria de prendre es valor  $\rho_{\text{buit}} = \rho_\Lambda \approx 10^{72} \text{ GeV}^4$ , però ses observacions cosmològiques indiquen  $\rho_{\text{buit}}^{(\text{obs})} = \rho_\Lambda^{(\text{obs})} \approx 10^{-48} \text{ GeV}^4$ , sa qual cosa significa una discrepància entre ses observacions i sa predicció teòrica d'uns 120 ordres de magnitud. Amb aquesta situació, considerar un camp vectorial podria esser una via de solució ja que s'energia de dit camp podria jugar es paper d'energia fosca. Per altra banda, s'anàlisi de ses dades proporcionades per WMAP i millorats per Planck, va trobar certes anomalies en es primers multipols ( $C_l$  per a petits valors de  $l$ ), concretament ets alineaments des quadrupol ( $l=2$ ) i vuitè-pol ( $l=3$ ) així com es caràcter excessivament planar des vuitè-pol (de Oliveira-Costa, Tegmark, Zaldarriaga, & Hamilton, 2004; Bielewicz, Górski, & Banday, 2004; Schwarz, Starkman, Huterer, & Copi, 2004; Copi, Huterer, Schwarz, & Starkman, 2006, 2007), s'asimetria entre ets hemisferis nord i sud de s'eclíptica (Hansen, Banday, & Górski, 2004; Hansen, Balbi, Banday, & Górski, 2004; Eriksen, Banday, Górski, & Lilje, 2004; Eriksen, Hansen, Banday, Górski, & Lilje, 2004; Eriksen, Banday, Górski, Hansen, & Lilje, 2007), i altres (Copi, Huterer, Schwarz, & Starkman, 2009). Aquestes anomalies suggereixen que sa distribució de temperatures des CMB se desvia de s'isotropia estadística a escales angulars molt grans. En es marc de sa teoria de la Relativitat General, va proposar-se una explicació d'aquestes anomalies basada en modes vectorials (velocitats peculiars sense divergència, etc) amb escales espacials molt grans (Morales & Saez, 2008).

Dita explicació requereix sa presència de modes vectorials adequats després des desacoblament, però és difícil justificar s'existència d'aquest modes perquè, en Relativitat General, tots es modes vectorials decreixen. Seria necessari qualcun procés que generàs modes vectorials apropiats devers  $z \sim 1100$  (Morales & Saez, 2007). Però succeeix que no és conegut un procés d'aquest tipus, i aquesta condició pareix esser necessària per fer possible s'explicacions de ses anomalies des CMB per a baixos  $\ell$  proposats en (Morales & Saez, 2008), així que pensam fer ús de ses teories vector-tensor en ses que hi ha un nou mode vectorial associat an es quadrivector de sa teoria que s'acoblarà a sa resta de dits modes.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Es nostres primers resultats respecte s'evolució des modes vectorials en teories vector-tensor (VT) poden consultar-se en (Dale, Morales, & Sáez, 2009).

Es nostre treball consistirà en analitzar ses teories VT, cercant baix quines circumstàncies aquestes teories són viables, perquè, com no pot esser d'altra manera, hauran d'esser compatibles amb ses mesures experimentals com són supernoves, radiació de fons de microones, etc.

Tal com hem vist en s'apartat anterior, ses teories VT sense restriccions “*unconstrained*”, estan parametritzades amb 4 paràmetres, idò començarem es present treball fent una anàlisi que permeta restringir s'espai de paràmetres i per tant triar es valors “*mes viables*”. Aquest primer tall, ho farem utilitzant es paràmetres PPN (Parameterized Post Newtonian) que, fonamentalment, identifiquen sa compatibilitat amb ses observacions an es sistema solar.

S'esquema de treball serà, en primer lloc, tal com deien, fer una anàlisi filtrant de paràmetres usant es formalisme PPN, allò determinarà quines parametritzacions són oportunes d'esser analitzades en profunditat. A partir d'aquest moment estudiarem cadascun des casos, començat per s'estudi de *background*, amb aquest primer contrast obtindrem una filtre de viabilitat pes valors des paràmetres, i a continuació procedirem amb s'estudi pertorbatiu per a sotmetre sa teoria an es contrast amb ses mesures observacionals disponibles.

Existeix una sèrie de codis informàtics que són estables i estan ben testejats. Aquests codis calculen s'evolució de ses perturbacions cosmològiques, realitzen anàlisis des CMB i altres tasques des nostre interès, tot allò dins de s'àmbit de sa Relativitat General. Exemples d'aquests codis són CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga, 1996) i CAMB (Lewis, Challinor, & Lasenby, 2000), aquest darrer basat en s'anterior i com a evolució de producte informàtic. A continuació revisam ets aspectes relatius a sa nomenclatura, convenis i unitats, des quals farem ús dins d'aquesta tesi.

Sa signatura utilitzada en aquesta tesi és  $(-, +, +, +)$ . Es sistema d'unitats es tal què sa velocitat de sa llum pren es valor 1 ( $c = 1$ ). Ets índexs grecs s'entenen de 0 a 3 i es llatins de 1 a 3,  $G$ ,  $a$ ,  $t$ ,  $\tau$  i  $z$ , representen, respectivament, sa constant gravitatòria,

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

es factor d'escala, es temps coordenant, es temps conforme i es corriment cap es vermell (“*redshift*”). Ses quantitats  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  són ses components covariants des tensor de Ricci, i sa curvatura escalar, respectivament. Aquestes són definides a partir des tensor de Riemann  $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$  de sa següent manera (Will, 1993):

$$(I.44) \quad R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \Gamma^\gamma_{\nu\alpha},$$

$$(I.45) \quad R_{\nu\beta} \equiv R^\alpha{}_{\nu\alpha\beta},$$

$$(I.46) \quad R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

Sa quantitat  $g$  és es determinant de sa matriu  $g_{\mu\nu}$  formada per ses components covariants de sa mètrica. Per a ses derivades d'una funció  $\psi$ , sa quantitat  $\dot{\psi}$  representarà derivada parcial respecte des temps conforme  $\tau$ , mentre que  $\psi'$  indicarà derivada parcial respecte de  $z$ . Quant an es subíndexs 0 i B per a qualque funció  $\psi$ , signifiquen es valors que pren sa funció, avui en dia i en es *background* ( $\psi_0, \psi_B$ ), respectivament. Ses quantitats  $\rho_r(p_r)$  i  $\rho_m(p_m)$  corresponen a ses densitats (pressions) de radiació i de matèria, respectivament, per sa qual cosa,  $\rho_B = \rho_r + \rho_m$  ( $p_B = p_r + p_m \approx p_r$ ) representa densitat d'energia (pressió) des fluid cosmològic, essent  $\rho_c$  sa densitat crítica, que hem definit en s'apartat 1.1. Per a sa derivada covariant utilitzarem es símbol  $\nabla$ , mentre que per a sa derivada parcial ho serà  $\partial$ .

Aquesta tesi està estructurada en quatre blocs principals més tres blocs dedicats an est apèndixs, sa bibliografia i sa llista d'il·lustracions. Des quatre blocs principals es primer és una introducció que conté una revisió històrica des fets més rellevants en s'ambit de sa cosmologia, una relació de models gravitatoris amb una breu descripció de ses seves característiques, es formalisme d'ús quotidià a utilitzar en capítols successius, així com aquest esquema de treball.

Es segon bloc està dedicat íntegrament an es formalisme conegut com a “*Parameterized post-Newtonian formalism*”, i sa

## **Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia**

seva aplicació a ses teories vector-tensor introduïdes en un apartat des primer bloc, i servirà de guia de selecció de models en es següent bloc.

Es tercer bloc constitueix sa part més important d'aquesta tesi on se desplega, s'estudia i s'aplica diverses teories gravitatòries vector-tensor a cosmologia i simetria esfèrica estàtica.

Es darrer des quatre blocs principals està dedicat a ses conclusions i perspectives, aquí podem trobar un resum des resultats més rellevants obtinguts, una discussió d'aquests i qualcuns problemes oberts.

En ets apèndixs presentam informació útil de funcions i formules d'ús freqüent en es context de sa present tesi. També s'ha inclòs un apèndix que fa una revisió d'una interpretació no gravitatòria d'una de ses teories estudiades en aquest treball.

## II. FORMALISME PPN I TEORIES VT.

---

Sa comparació entre una teoria gravitatòria amb ses dades experimentals se pot fer de manera simple quan se fan aproximacions considerant camps febles i moviments lents. Aquesta aproximació se coneix com límit post Newtonià. Quan aquesta aproximació és aplicada an es sistema solar, se poden explicar diverses observacions astronòmiques.

### 1. *Formalisme PPN.*

Se procedeix desplegant sa mètrica com una extensió de sa mètrica Minkowskiana en termes de potencials gravitacionals adimensionals (potencials mètrics), similars an es potencial gravitacional construïts a partir de variables de matèria (densitat de matèria, pressió, velocitat en es sistema coordinat, etc), en unitats geometritzades, de sa forma següent:

$$\nabla^2 U = -4\pi\rho, \quad U(\vec{x}, t) \equiv \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Una volta fetes ses aproximacions se procedeix a parametritzar es coeficients que acompanyen an es potencials mètrics, sa qual cosa dona lloc a s'anomenat formalisme PPN (veure secció 4 des capítol I), que avui en dia conformen un total de deu paràmetres seleccionats de tal manera que es seus valors caracteritzen ses diferents teories mètriques gravitatòries (Taula V). Aquest formalisme va esser desplegat inicialment per Kenneth Nordtvedt (Nordtvedt Jr, 1969), partint des treballs d'Eddington, Robertson i Schiff (Eddington, 1923; Robertson, 1962; Schiff, 1967). Will va fer una versió generalitzada d'aquest formalisme per a fluids perfectes (Will, 1971). Més tard Nordtvedt i Will (Nordtvedt & Will, 1972) despleguen una versió unificada i general, avui en dia usada per diferents autors (Eling & Jacobson, 2004; Beltrán &

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Maroto, 2009b) i que és sa que noltros utilitzarem. En sa Taula VI presentam s'esmentats paràmetres amb sos límits experimentals.

<i>Prm.</i>	<i>Significat</i>	<i>RG</i>	<i>Teories Semi-conservatives</i>	<i>Teories Totalment conservatives</i>
$\gamma$	Curvatura produïda per unitat de massa en repòs.	1	$\gamma$	$\gamma$
$\beta$	Grau de “no linealitat” en sa llei de superposició gravitatòria.	1	$\beta$	$\beta$
$\xi$	Efectes de posicions preferencials.	0	$\xi$	$\xi$
$\alpha_1$	Efectes de sistemes preferencials.	0	$\alpha_1$	0
$\alpha_2$		0	$\alpha_2$	0
$\alpha_3$		0	0	0
$\alpha_3$	Violació de sa conservació des moment total.	0	0	0
$\zeta_1$		0	0	0
$\zeta_2$		0	0	0
$\zeta_3$		0	0	0
$\zeta_4$		0	0	0

**Taula V:** Llista des paràmetres PPN amb so significat,  $\alpha_3$  apareix un parell de voltes perquè mesura un parell d'efectes. Taula treta de (Will, 2006).

On entenem una teoria semi conservativa quan se conserva es quadri moment lineal i totalment conservativa, quan a més se conserva es tensor de moment angular. Es dos primers paràmetres són ets únics no nuls tant en Relativitat General com a teories escalar-tensor, i van esser es paràmetres utilitzats per d'Eddington, Robertson i Schiff.



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Prm.	Fita	Efectes	Experiment
$\gamma - 1$	$2,3 \times 10^{-5}$	Retard Temporal.	Cassini tracking.
	$4 \times 10^{-4}$	Deflexió de sa llum.	VLBI (Very-long-baseline interferometry).
$\beta - 1$	$3 \times 10^{-3}$	Desplaçament des periheli.	Heliosismologia.
	$2,3 \times 10^{-4}$	Efecte Nordtvedt.	Efecte Nordtvedt.
$\xi$	$10^{-3}$	Marees Terrestres	Dades gravimètriques.
$\alpha_1$	$10^{-4}$	Polarització Orbital	Mesures laser - rang Lunar.
	$2 \times 10^{-4}$		PSR J2317+1439
$\alpha_2$	$4 \times 10^{-7}$	Precessió des Spin	Alineació de s'eix solar amb s'eclíptica.
$\alpha_3$	$4 \times 10^{-20}$	Auto-acceleració	Púlsar spin.
$\zeta_1$	$2 \times 10^{-2}$		Limitació a partir d'ets altres PPN.
$\zeta_2$	$4 \times 10^{-5}$	Acceleració des púlsars binaris	PSR 1913+16 <sup>14</sup> .
$\zeta_3$	$10^{-8}$	Tercera llei de Newton	Acceleració Lunar.
$\zeta_4$	$6 \times 10^{-3}$	-	Experiment Kreuzer <sup>15</sup> .

**Taula VI:** PPN amb sos límits actuals i ets experiments d'on han estat trets (Will, 2006).

### 2. Aplicació des formalisme PPN a ses teories VT.

En ses teories VT no restringides (“*unconstrained*”), amb una acció (I.42) introduïda en sa secció de models alternatius a Relativitat General (Will, 1993), en qualque triada des paràmetres  $\omega, \eta, \varepsilon$  i  $\tau$  que caracteritzen s'esmentada acció, només es PPN  $\gamma, \beta, \alpha_1$  i  $\alpha_2$  podrien prendre valors diferents an es que prenen en RG, és més, en aquestes teories existeix una constant gravitatòria

<sup>14</sup> (Will, Is momentum conserved? A test in the binary system PSR 1913+16, 1992)

<sup>15</sup> Basat en  $6\zeta_4 = 3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3$  (Will, 1976, 2006). Teòricament és possible sobrepassar aquest límit per a models alternatius a la Relativitat General i en tal cas es límit és  $|\zeta_4| < 0.4$  (Ni, 1972).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

efectiva,  $G_{ef}$ , que pot esser escrita en funció des PPN i  $A^2$  [veure (II.3)]. Si som fidels a ses observacions en es sistema solar, hem de considerar només teories amb  $\gamma = \beta = 1$  i  $G = G_{ef}$  (Dale & Sáez, 2012b). Es PPN, per aquestes teories s'escriuen de sa següent manera:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1 + A^2 \left[ \omega - 2\omega(2\omega + \eta - \tau) / (2\varepsilon - \tau) \right]}{1 - A^2 \left[ \omega + 8\omega^2 / (2\varepsilon - \tau) \right]}, \\
 \beta &= \frac{1}{4}(3 + \gamma) + \frac{1}{2}\sigma \left[ 1 + \gamma(\gamma - 2) / G \right], \\
 \xi &= 0, \\
 \text{(II.1)} \quad \alpha_1 &= 4(1 - \gamma) \left[ 1 - (2\varepsilon - \tau)\Delta \right] + 4\omega A^2 \Delta a = 4\omega A^2 \Delta a, \\
 \alpha_2 &= 3(1 - \gamma) \left[ 1 - \frac{2}{3}(2\varepsilon - \tau)\Delta \right] + 2\omega A^2 \Delta a - \frac{1}{2}b A^2 / G \\
 &= 2\omega A^2 \Delta a - \frac{1}{2}b A^2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - b A^2), \\
 \alpha_3 &= \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0.
 \end{aligned}$$

on ses quantitats  $\sigma$ ,  $\Delta$ ,  $a$ , i  $b$ , estan definides segons:

$$\begin{aligned}
 \sigma &\equiv \frac{(1 - \omega A^2)(2\omega - \eta + 2\varepsilon)}{(1 - \omega A^2)(2\varepsilon - \tau) - 8\omega^2 A^2} = \frac{(1 - \omega A^2)(\gamma - 1)}{2\omega A^2}, \\
 \Delta &\equiv \left\{ (2\varepsilon - \tau) \left[ 1 - A^2(\omega + \eta - \tau) \right] + \frac{1}{2}(\eta - \tau)^2 A^2 \right\}^{-1}, \\
 \text{(II.2)} \quad a &\equiv (2\varepsilon - \tau)(3\gamma - 1) - 2(\eta - \tau)(2\gamma - 1) = 2(2\varepsilon - \eta), \\
 b &\equiv \begin{cases} (2\omega + \eta - \tau) \left[ (2\gamma - 1)(\gamma + 1) + \sigma(\gamma - 2) \right] \\ - (2\gamma - 1)^2 (2\omega + \eta) \left[ 1 - \tau^{-1}(2\omega + \eta) \right], & \tau \neq 0 \\ 0, & \tau = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

i, considerant unitats geometritzades  $c = G = 1$ ,  $G_{ef}$  està relacionada amb sos paràmetres com segueix:

$$\text{(II.3)} \quad G_{ef} = G \left[ \frac{1}{2}(\gamma + 1) + \frac{3}{2}\omega A^2 (\gamma - 1) - \frac{1}{2}(\eta - \tau) A^2 (1 + \sigma) \right]^{-1},$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

expressió que escrivim per a  $\gamma = 1$  segon a continuació:

$$(II.4) \quad G_{ef} = G \left[ 1 - \frac{1}{2}(\eta - \tau) A^2 (1 + \sigma) \right]^{-1}.$$

En primer lloc escriurem com es paràmetres de ses teories VT se relacionen amb sos PPN  $\gamma, \beta, \alpha_1$  i  $\alpha_2$ , que són ets únics paràmetres PPN que són diferents en ses teories VT i Relativitat General. Farem una escodrinjada de possibles valors d'est paràmetres que caracteritzen ses teories VT en quatre passes:

- Considerem primer es cas més simple amb  $\omega = \varepsilon = 0$ ,  $\tau \neq 0$  i  $\eta \neq 0$ , en dit cas, ses expressions (II.1), (II.2) i (II.3), quan imposam  $\gamma = \beta = 1$  i  $G_{ef} = G = 1$ , s'escriuen de sa següent manera:

$$\begin{aligned} \gamma &= 1, \\ \beta &= 1, \\ \alpha_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - bA^2) = -\frac{1}{2}bA^2, \end{aligned}$$

amb:  $\sigma = \eta/\tau$  i  $b = 2(\eta - \tau)$ . Per tant sa condició  $G_{ef} = 1$ , implica que:

$$1 = G_{ef} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = 0 \\ \eta^2 = \tau^2 \Rightarrow \eta = \pm\tau \end{cases}.$$

Amb sa qual cosa, com no existeix un lligam, com seria  $A^2 = 0$ , llavors sa restricció des PPN quan  $\omega = \varepsilon = 0$ ,  $\tau \neq 0$  i  $\eta \neq 0$  és:  $\eta = \pm\tau$ . Però veim que  $\alpha_2 = (\eta - \tau)A^2$ , idò de ses dues solucions trobades, sa solució  $\eta = \tau$  és totalment conservativa i  $\eta = -\tau$ , és semi conservativa.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- En segon lloc, analitzarem un cas que és ben simple amb  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$  i  $\tau = 0$  amb  $\eta$  arbitrari. Sa condició  $G_{ef} = 1$ , implica que  $\eta = 0$  o bé que  $\sigma = -1 \Leftrightarrow \eta = 4\varepsilon \neq 0$ , en aquest cas es PPN són:  $\gamma = 1, \beta = 1, \xi = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ .
- En tercer lloc, procedim amb so cas quan  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$  i  $\eta$  arbitrari:

$$\begin{aligned}\gamma &= 1, \\ \beta &= 1, \\ \alpha_1 &= 0,\end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - bA^2) = -(\eta - \tau) \frac{\varepsilon(\eta + \tau) - \tau^2}{(2\varepsilon - \tau)\tau} A^2,$$

amb:

$$\sigma = (2\varepsilon - \eta)/(2\varepsilon - \tau), \quad b = 2(\eta - \tau) \frac{\varepsilon(\eta + \tau) - \tau^2}{(2\varepsilon - \tau)\tau},$$

$$G_{ef} = \left[ 1 - \frac{1}{2}(\eta - \tau) A^2 \left( 1 + \frac{2\varepsilon - \eta}{2\varepsilon - \tau} \right) \right]^{-1}.$$

De nou quan imposam  $G_{ef} = G = 1$ , s'obté que:

$$G_{ef} = 1 - \frac{1}{2}(\eta - \tau) A^2 \frac{4\varepsilon - (\eta + \tau)}{2\varepsilon - \tau} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = 0, & \text{amb } 2\varepsilon \neq \tau \\ \eta = \tau, & \text{amb } 2\varepsilon \neq \tau \\ 4\varepsilon = (\eta + \tau), & \text{amb } \eta \neq \tau \end{cases}$$

Procediguem a avaluar  $\alpha_2$  atès que  $A^2 \neq 0$ :

$$\alpha_2 = -(\eta - \tau) \frac{\varepsilon(\eta + \tau) - \tau^2}{(2\varepsilon - \tau)\tau} A^2 \Rightarrow \begin{cases} 0, & \text{si } \eta = \tau \text{ amb } 2\varepsilon \neq \tau \\ 0, & \text{si } \eta = -3\tau = 6\varepsilon \\ \neq 0 & \text{si } 4\varepsilon = \eta + \tau \text{ amb } \eta \neq \tau \text{ i } \eta \neq -3\tau \end{cases}.$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Per tan de ses tres solucions trobades quan  $\eta = \tau$  amb  $2\varepsilon \neq \tau$  o bé quan  $\eta = -3\tau = 6\varepsilon$ , són teories totalment conservatives mentre que quan  $4\varepsilon = \eta + \tau$ , amb  $\eta \neq \tau$  i  $\eta \neq -3\tau$  sa teoria és semi conservativa.

- I en quart i darrer lloc, revisarem que succeeix quan  $\omega \neq 0$  i sa resta de paràmetres són arbitraris, en tal cas sa primera cosa que feim és adonar-mos que, segons (II.3) i atès que  $\sigma \neq 0$ , per a aconseguir  $G_{ef} = G$  és necessari que se complesqui  $\eta = \tau$ . Tal com veim a (II.2), hem d'analitzar dues situacions  $\tau \neq 0$  i  $\tau = 0$ . Començant pes cas més senzill, que és quan  $\tau = 0$  (implica  $\eta = 0$ ), és clar que açò obliga a  $\varepsilon \neq 0$  [ja que si fos també nul no haurien derivades des camp vectorial en es Lagrangia (I.42)]. En aquest cas succeeix que, quan imposam  $\gamma = \beta = 1$ :

$$\gamma = \frac{1 + A^2 \omega (1 - 2\omega/\varepsilon)}{1 - A^2 \omega (1 + 4\omega/\varepsilon)} = 1 \Rightarrow \varepsilon = -\omega,$$

$$\beta = 1,$$

$$\alpha_1 = 4\omega A^2 \Delta a = \frac{8\omega A^2}{1 - \omega A^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - bA^2) = \frac{1}{2}\alpha_1,$$

amb  $\sigma = 0$ ,  $\Delta \equiv [2\varepsilon(1 - A^2\omega)]^{-1}$ ,  $a \equiv 4\varepsilon$ ,  $b = 0$ .

Per tant, obtenim una teoria semi conservativa compatible amb ses nostres restriccions amb  $\eta = \tau = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , quan  $\varepsilon = -\omega$ . Seguint amb so cas, és a dir  $\omega \neq 0$  i  $\eta = \tau$  però amb  $\tau \neq 0$ , quan de nou feim  $\gamma = \beta = 1$  en ses expressions (II.1) –(II.2), aquestes queden re-escrites segons:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\gamma = \frac{1 + A^2 \omega [1 - 4\omega / (2\varepsilon - \tau)]}{1 - A^2 \omega [1 + 8\omega / (2\varepsilon - \tau)]} = 1 \Rightarrow \varepsilon = -\omega + \frac{1}{2}\tau,$$

$$\beta = 1,$$

$$\alpha_1 = 4\omega A^2 \Delta a = \frac{8\omega A^2}{1 - A^2 \omega},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - bA^2) = \frac{4\omega A^2}{1 - A^2 \omega} - \omega \left(3 + \frac{2\omega}{\tau}\right) A^2,$$

$$\text{amb } \sigma = 0, \quad \Delta = [(2\varepsilon - \tau)(1 - A^2 \omega)]^{-1}, \quad a = 2(2\varepsilon - \tau), \\ , b = 2\omega [3 + (2\omega/\tau)].$$

En aquest darrer cas analitzat hem obtingut de nou una teoria semi conservativa compatible amb ses nostres restriccions quan  $\omega \neq 0$ ,  $\eta = \tau \neq 0$  i  $\varepsilon = -\omega + \frac{1}{2}\tau$ , és necessari adonar-se que sa primera en conjunt amb sa darrera condició garanteix que  $2\varepsilon - \tau \neq 0$ .

Hem construït una taula resumen (Taula VII) amb sos casos analitzats. És necessari adonar-se que sa teoria IIa no és més que Einstein-Maxwell, és a dir gravitació més electromagnetisme.

Atès que, quan dues accions només difereixen en una divergència, ambdues condueixen a una mateixa teoria, s'esdevindrà que certes combinacions de paràmetres serà, com a teoria, equivalent a un altra. Com a exemple considerarem es cas IIb amb  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\tau = 0$  i  $\eta = 4\varepsilon$  que introduït en (I.42) (sense es terme  $I_{NG}$ ), s'escriu:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int (R + 4\varepsilon R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - \varepsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4 x,$$

i si consideram sa següent identitat:

$$(II.5) \quad A^\mu R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu A^\mu - \nabla_\nu (\nabla \cdot A),$$

que és coherent amb ses definicions (I.44) i (I.45), s'acció queda re-escrita de sa següent manera:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{16\pi G} \int \left\{ R + 4\varepsilon A^\nu \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu A^\mu - \nabla_\nu (\nabla \cdot A) \right] - \varepsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{16\pi G} \int \left[ R + 4\varepsilon \left\{ \nabla_\mu \left( A^\nu \nabla_\nu A^\mu \right) - \nabla_\mu A^\nu \nabla_\nu A^\mu - \nabla_\nu \left[ A^\nu (\nabla \cdot A) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nabla \cdot A)^2 \right\} - \varepsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{16\pi G} \int \left[ R + 4\varepsilon \left\{ \nabla_\nu \left[ A^\mu \nabla_\mu A^\nu - A^\nu (\nabla \cdot A) \right] - \nabla_\mu A^\nu \nabla_\nu A^\mu + (\nabla \cdot A)^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x,
 \end{aligned}$$

per tant s'acció de partida és equivalent a s'acció:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int \left\{ R + 4\varepsilon (\nabla \cdot A)^2 - 4\varepsilon \nabla_\mu A^\nu \nabla_\nu A^\mu - \varepsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} d^4x,$$

i així ambdues donen lloc a una mateixa teoria.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Paràmetres	Condicions	N	$\alpha_1$	$\alpha_2$	T/S
$\omega = \varepsilon = 0,$ $\tau \neq 0, \eta \neq 0$	$\eta = \tau$	Ia	0	0	T
	$\eta = -\tau$	Ib	0	$-2\eta A^2$	S
$\omega = 0, \varepsilon \neq 0,$ $\tau = 0$	$\eta = 0$	IIa	0	0	T
	$\eta = 4\varepsilon$	IIb	0	0	T
$\omega = 0, \varepsilon \neq 0,$ $\tau \neq 0$	$\eta = \tau,$ $2\varepsilon \neq \tau$	IIIa	0	0	T
	$4\varepsilon = \eta + \tau,$ $\eta = -3\tau$	IIIb	0	0	T
	$4\varepsilon = \eta + \tau,$ $\eta \neq -3\tau,$ $\tau \neq \eta$	IIIc	0	$\frac{A^2(\tau - \eta)(\eta + 3\tau)}{2\tau}$	S
$\omega \neq 0$	$\eta = \tau = 0,$ $\varepsilon = -\omega$	IVa	$\frac{8\omega A^2}{1 - \omega A^2}$	$\frac{1}{2}\alpha_1$	S
	$\eta = \tau \neq 0,$ $\varepsilon = -\omega + \frac{1}{2}\tau$	IVb	$\frac{8\omega A^2}{1 - \omega A^2}$	$\frac{4\omega A^2}{1 - A^2\omega} - \omega\left(3 + \frac{2\omega}{\tau}\right)A^2$	S

**Taula VII:** En aquesta taula presentam en sa primera columna es diferents casos considerats, sa segona conté ses restriccions produïdes quan imposam es criteri  $\gamma = \beta = G_{ef} = 1$ , allò produeix diferents situacions que queden enumerades en sa següent columna. Ses columnes quarta i cinquena indiquen es valor que prenen es PPN  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , respectivament, i finalment sa darrera columna conté una “T” per indicar que sa teoria és totalment conservativa i una “S” per indicar que sa teoria és semi conservativa.



## III. TEORIES VECTOR-TENSOR.

### 1. Introducció a ses teories Will-Nordtvedt sense restriccions.

Partint de sa densitat Lagrangiana (I.42) i mitjançant principis variacionals s'obtenen dos conjunts d'equacions. Un pren forma similar a ses equacions d'Einstein i les cridarem equacions d'Einstein modificades i s'altre conjunt, que cridarem equacions de camp, atès que són aconseguïdes quan es camp vectorial és variat. Aquestes equacions s'escriuen de sa següent manera (Will, 1993):

$$(III.1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \omega \Theta_{\mu\nu}^{(\omega)} - \eta \Theta_{\mu\nu}^{(\eta)} - \varepsilon \Theta_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} - \tau \Theta_{\mu\nu}^{(\tau)} \right),$$

$$(III.2) \quad 0 = \varepsilon \nabla^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tau \nabla^2 A_\mu - \frac{1}{2} \omega A_\mu R - \frac{1}{2} \eta A_\nu R'_\mu,$$

on s'han redefinit es paràmetres  $\varepsilon, \tau, \omega$  i  $\eta$  de (I.42) per uns nous amb mateixos noms però dividits de  $8\pi G$  i

$$(III.3) \quad \begin{aligned} \Theta_{\mu\nu}^{(\omega)} &\equiv A_\mu A_\nu R + A_\alpha A^\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\alpha A^\alpha R - \nabla_\mu \nabla_\nu (A_\alpha A^\alpha) \\ &\quad + g_{\mu\nu} \nabla^2 (A_\alpha A^\alpha), \\ \Theta_{\mu\nu}^{(\eta)} &\equiv A^\alpha A_\mu R_{\nu\alpha} + A^\alpha A_\nu R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^\alpha A^\beta R_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left[ \nabla_\nu (A^\alpha A_\mu) + \nabla_\mu (A^\alpha A_\nu) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla^\alpha (A_\mu A_\nu) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (A^\alpha A^\beta), \\ \Theta_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} &\equiv -2 \left( F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \\ \Theta_{\mu\nu}^{(\tau)} &\equiv \nabla_\alpha A_\mu \nabla^\alpha A_\nu + \nabla_\mu A_\alpha \nabla_\nu A^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\beta A_\alpha \nabla^\beta A^\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left( A^\alpha \nabla_\nu A_\mu + A^\alpha \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu A^\alpha A_\nu \right. \\ &\quad \left. - \nabla_\nu A^\alpha A_\mu - A_\mu \nabla^\alpha A_\nu - A_\nu \nabla^\alpha A_\mu \right) \end{aligned}$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Hem d'assumir que no són zero ambdós  $\{\varepsilon, \tau\}$ , ja que ficats a s'equació (III.2) produiria una equació que només seria de lligam.

És important assenyalar que quan prenem derivada covariant en s'expressió (III.1) s'obté  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , ja que, com és ben conegut, sa divergència covariant des tensor des primer membre és idènticament nul·la, i sa divergència des terme  $-\omega \Theta_{\mu\nu}^{(\omega)} - \eta \Theta_{\mu\nu}^{(\eta)} - \varepsilon \Theta_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} - \tau \Theta_{\mu\nu}^{(\tau)}$  és zero (Will, 1993). Per dites raons  $T_{\mu\nu}$  té divergència nul·la en concordança amb Relativitat General, aquest fet serà útil en capítols successius.

Per altra banda si prenem divergència en s'equació (III.2) dona sa següent restricció:

$$\nabla^\mu \Xi_\mu = 0 \text{ amb } \Xi_\mu \equiv \tau \nabla^2 A_\mu - (\omega A_\mu R + \eta A_\nu R_\mu^\nu).$$

Sa darrera equació és anàloga a sa llei de conservació de sa càrrega en sa teoria Eistein-Maxwell, jugant  $\Xi_\mu$  es paper d'un corrent fictici conservat.

S'ús de camps vectorials en gravitació i astrofísica és ben estès. Per exemple en models inflacionaris d'universos primigenis (Jain & Sloth, 2013; Beltrán Almeida, Rodríguez, & Valenzuela-Toledo, 2014; Chen & Wang, 2014), lents gravitacionals (Dai, Matsuo, & Starkman, 2008), simetria esfèrica estacionària (Kiselev, 2005; Kiselev & Yudin, 2006), simetria axial (Pani, Cardoso, Gualtieri, Berti, & Ishibashi, 2012), sistema solar (Bonvin, Durrer, Ferreira, Starkman, & Zlosnik, 2008), i en diverses aplicacions cosmològiques relacionades amb s'energia fosca, etc (Yoshida & Shiraishi, 1991; Böhmer & Harko, 2007; Zuntz, Zlosnik, Bourliot, Ferreira, & Starkman, 2010).

En general, en ses teories VT, així com passa en Relativitat General, s'ha de reconèixer que s'inflació se produirà per camps addicionals. És a causa des fet que s'inflació ha de conduir a un univers isòtrop, mentre que s'inflació causada per un camp vectorial s'espera que sia anisotròpica. Només un triplet de camps vectorials ortogonals o  $N$  camps vectorials orientats aleatòriament podria produir prou expansió isotròpica (Golovnev, Mukhanov, & Vanchurin, 2008), però aquest no és es cas de ses teories VT en general.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Per tal d'explicar s'inflació podríem reemplaçar en sa densitat Lagrangiana de ses teories VT sa curvatura escalar  $R$  per una funció  $f(R)$  apropiada; d'aquesta manera, es camp vectorial  $A^\mu$  podria explicar s'acceleració tardana en s'expansió, mentre que es camp escalar, associat a  $f(R)$  en sa representació d'Einstein, podria ésser responsable de sa requerida inflació; per tant, sa funció  $f(R)$  seria triada per assolir una bona inflació, sense produir s'acceleració tardana en s'expansió, sa qual cosa implicaria manques restriccions que hauria de complir  $f(R)$ . No obstant això, pensam que, abans de qualque generalització de ses teories VT, aquestes han de desplegar-se plenament com en ses teories de sa gravitació viables i manejables capaces de donar suport a moltes observacions.

Partint des resultats obtinguts de s'anàlisi des paràmetres PPN que són presentats a sa Taula VII, i considerat s'estudi de viabilitat d'aquestes teories, quant a fantasmes clàssics i quàntics que trobam en (Beltrán & Maroto, 2009b), essent s'equivalència entre es nostres paràmetres i es trobats en aquesta darrera referència (subíndex  $BM$ ) sa següent:  $\omega = \omega_{BM}$ ,  $\eta = \sigma_{BM}$ ,  $\tau = \tau_{BM}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{BM}$ . Es nostre treball d'investigació estarà centrat en sa parametrització IIIa. No obstant això, per raons que més endavant seran explicades, també serà considerat un cas particular (classificat com a Ib en Taula VII) que ha estat aplicat en diverses publicacions (Beltrán, Lazkoz, & Maroto, 2009; Carlesi, et al., 2011, 2012).

### 2. *Models vector-tensor des tipus IIIa.*

Ses nostres darreres conclusions quant a s'evaluació de sa validesa (via PPN) de ses teories VT segons es valors des diferents paràmetres, fan que es nostre interès sia es de sa teoria VT que s'esdevé quan prenem  $\omega = 0$ ,  $\eta = \tau$  ( $\tau \neq 0$ ,  $\eta \neq 0$ ) amb  $\varepsilon$  arbitrari, marcada com a tipus IIIa en sa Taula VII (Dale, Morales, & Sáez, 2009). En aquest cas, es valors des paràmetres des límit post-Newtonià són idèntics a Relativitat General, sa parametrització ha estat provada com a viable en (Beltrán & Maroto, 2009b) amb sa condició  $2\varepsilon - \eta > 0$  i s'acció (I.42) s'escriu:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.4) \quad I = (16\pi G)^{-1} \int \left[ R + \eta \left( R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \nabla_\nu A_\mu \nabla^\nu A^\mu \right) - \varepsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x + I_{NG}.$$

Cal adonar-se que aquesta acció, fent ús de s'expressió (II.5), és totalment equivalent a s'acció:

$$(III.5) \quad I = (16\pi G)^{-1} \int \left[ R + \left( \frac{1}{2} \eta - \varepsilon \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta (\nabla \cdot A)^2 \right] \sqrt{-g} d^4x + I_{NG}.$$

Si comparem aquesta teoria VT amb sa teoria de s'electromagnetisme estès (EE) proposada en (Beltrán & Maroto, 2009a), detectam una notable semblança. Aquesta teoria parteix de sa següent densitat Larangiana [expressió (1) en s'esmentada referència]:

$$(III.6) \quad I = \int \left[ \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot A)^2 \right] \sqrt{-g} d^4x,$$

Essent  $\lambda$  un paràmetre arbitrari. Pot apreciar-se que aquestes dues darreres accions són equivalents si feim:  $\eta/16\pi G = \lambda/2$ ,  $(\frac{1}{2}\eta - \varepsilon)/16\pi G = -\frac{1}{4}$ . Per a una anàlisi més detallat d'aquesta teoria baix es punt de vista d'EE, veure s'apèndix C.

A partir de (III.1) s'obtenen de manera senzilla ses següents equacions de camp:

$$(III.7) \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^A),$$

$$(III.8) \quad \varepsilon \nabla^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta (\nabla^2 A_\mu - A_\nu R_\mu^\nu) = 0,$$

amb  $T_{\mu\nu}^A \equiv -\varepsilon \Theta_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} - \eta (\Theta_{\mu\nu}^{(\eta)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\tau)})$ ,  $\nabla^2 = \nabla_\nu \nabla^\nu$  i essent  $G_{\mu\nu}$  es tensor d'Einstein. Sa forma explícita d'ets elements  $\Theta_{\mu\nu}^{(\varepsilon)}$ ,  $\Theta_{\mu\nu}^{(\eta)}$  i  $\Theta_{\mu\nu}^{(\tau)}$  se troba en (III.3). Si feim ús de s'expressió (II.5), s'equació (III.8) pren sa forma:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.9) \quad (2\varepsilon - \eta) \nabla^\nu F_{\mu\nu} + \eta \nabla_\mu (\nabla \cdot A) = 0,$$

amb  $\nabla \cdot A = \nabla_\mu A^\mu$ . Mitjançant s'utilització d'aquesta darrera expressió podem escriure es tensor d'energia-moment  $T_{\mu\nu}^A$  de sa manera següent:

$$(III.10) \quad T_{\mu\nu}^A = g_{\mu\nu} \left[ -\frac{\eta}{2} (\nabla \cdot A)^2 + (2\varepsilon - \eta) A^\alpha \nabla^\beta F_{\alpha\beta} \right] \\ + (2\varepsilon - \eta) \left( F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ + (2\varepsilon - \eta) \left( A_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\nu} + A_\nu \nabla^\alpha F_{\alpha\mu} \right),$$

o bé de manera equivalent, fent ús de (III.9)

$$(III.11) \quad T_{\mu\nu}^A = (2\varepsilon - \eta) \left( F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ - \eta \left\{ g_{\mu\nu} \left[ A^\alpha \nabla_\alpha (\nabla \cdot A) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot A)^2 \right] \right. \\ \left. - A_\mu \nabla_\nu (\nabla \cdot A) - A_\nu \nabla_\mu (\nabla \cdot A) \right\},$$

### 2.1. Es model en cosmologia.

En es cas de cosmologia,  $T_{\mu\nu}$  és es tensor energia-moment des fluid cosmològic que inclou matèria i radiació. Com ja havien dit en s'apartat 1 des present capítol, sa relació  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  és satisfeta. Amb aquesta situació podem afirmar que s'evolució de matèria i radiació són com en es model estàndard de Friedman-Lamaître-Robertson-Walker de Relativitat General i llavors després de s'aniquilació electró-positró, devers  $z = 10^{10}$  (Kolb & Turner, 1990), podem escriure ses següents equacions d'evolució en funció des "redshift":

$$(III.12) \quad 3p_r = \rho_r = (1+z)^4 \rho_{Br0}, \rho_m = (1+z)^3 \rho_{Bm0}, p_m \approx 0.$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### 2.2. Equacions cosmològiques de background.

Per a un *background* cosmològic homogeni i isòtrop s'element de línia que utilitzarem, des cas pla, és es definit per s'expressió (I.11).

Per altra banda, ses condicions d'homogeneïtat i isotropia fan que es camp vectorial prengui sa forma (en components covariants):  $A_\mu = (A_0(\tau), 0, 0, 0)$ . Com a conseqüència immediata succeeix que  $\nabla_\alpha A_\beta = \nabla_\beta A_\alpha$  i per tant es tensor  $F_{\mu\nu}$  és nul (totes ses seves components ho són). També podem escriure  $(\nabla \cdot A)$  en termes de sa seva única component no nul·la de sa manera següent:

$$(III.13) \quad \nabla \cdot A = -\frac{1}{a} \left( \dot{A}_0 + 2 \frac{\dot{a}}{a} A_0 \right).$$

Per tant ses equacions de camp (III.9) queden en sa forma:

$$(III.14) \quad \nabla_\mu (\nabla \cdot A) = 0,$$

que encara pot reduir-se a  $d(\nabla \cdot A)/d\tau = 0$ , i que junt a s'equació (III.13) du a s'expressió:

$$(III.15) \quad \ddot{A}_0 + 2A_0 \left( \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 0.$$

Amb tot allò en aquest cas (es *background* cosmològic) es tensor energia-moment pren sa forma:

$$(III.16) \quad T_{\mu\nu}^A = -\frac{1}{2} \eta g_{\mu\nu} (\nabla \cdot A)^2.$$

Com succeeix que  $(\nabla \cdot A)$  és constant, es tensor d'energia-impuls  $T_{\mu\nu}^A$  queda proporcional a sa mètrica, sa qual cosa significa s'aparició d'una constant cosmològica. En definitiva, ses equacions

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

d'evolució a integrar anàlogues a (III.7) i (III.9), respectivament, són:

$$(III.17) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta g_{\mu\nu} (\nabla \cdot A)^2$$

i

$$(III.18) \quad \nabla_{\mu} (\nabla \cdot A) = 0.$$

Partint de (III.16) immediatament s'obtenen ses components des tensor  $T_{\mu\nu}^A$  que de manera explícita escrivim:

$$(III.19) \quad \begin{aligned} T_{00}^A &= \frac{\eta}{2a^2} \left( \dot{A}_0 + 2\frac{\dot{a}}{a} A_0 \right)^2, \quad T_{0i}^A = T_{i0}^A = 0, \\ T_{ij}^A &= -\frac{\eta}{2a^2} \left( \dot{A}_0 + 2\frac{\dot{a}}{a} A_0 \right)^2 \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Si ara introduïm aquests valors de ses components de  $T_{\mu\nu}^A$  junt a ses corresponents de  $T_{\mu\nu}$  des fluid cosmològic dins de ses equacions (III.17), trobam ses següents equacions:

$$(III.20) \quad 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G a^2 (\rho_B + \rho_A)$$

i

$$(III.21) \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G a^2 (p_B + p_A),$$

on

$$(III.22) \quad \rho_A = -p_A = \frac{1}{2}\eta (\nabla \cdot A)^2 = \frac{\eta}{2a^4} \left( \dot{A}_0 + 2\frac{\dot{a}}{a} A_0 \right)^2.$$

Per tant queda clar que, si volem que s'energia des camp vectorial, faci es paper d'una constant cosmològica, o simplement que sa seva aportació energètica sia de signe positiu, sa constant  $\eta$  ha d'esser positiva.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

D'igual manera s'equació (III.18) s'escriu:

$$(III.23) \quad \nabla \cdot A = -\frac{1}{a} \left( \dot{A}_0 + 2 \frac{\dot{a}}{a} A_0 \right) = \text{constant}.$$

Així idò som davant d'un cas anàleg an es de la constant cosmològica en termes d'equació d'estat  $w_A = w_\Lambda = -1$ , a més, podem reescriure es tensor energia-moment corresponent an es camp vectorial  $A^\mu$  en sa forma:

$$(III.24) \quad T_{\mu\nu}^A = -\rho_A g_{\mu\nu}.$$

És immediat trobar que  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^A = 0$ , i llavors se compleix que  $\dot{\rho}_A = 0 = \dot{p}_A$ . En definitiva és clar que podem dir que aquesta parametrització IIIa des Lagrangià, dóna lloc an es fet que sa divergència an es quadrat des camp vectorial se comporta com a **constant cosmològica** de tal manera que podem justificar aquesta, a diferència de com se fa en es model estàndard, sense necessitat de recórrer a una energia de buit de magnitud desgavellada tal com suggereix sa teoria quàntica de camps. A diferència d'altres autors (Beltrán & Maroto, 2009a), sa nostra interpretació és que aquest camp, és d'origen còsmic i mai es potencial vector des camp electromagnètic (Dale, Morales, & Sáez, 2009), sa qual cosa s'estudia en s'apèndix C a on és demostrat que sa teoria IIIa no pot esser una extensió de sa teoria Einstein-Maxwell.

### 2.3. Solució de ses equacions bàsiques de background.

En aquesta secció resoldrem ses equacions d'evolució, però ho farem en funció des "redshift" ( $z$ ) en lloc des temps conforme ( $\tau$ ). Per a fer s'esmentat canvi de variable, escrivim:

$$(III.25) \quad a = \frac{1}{1+z}, \quad a' \equiv \frac{da}{dz} = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad a'' \equiv \frac{d^2a}{dz^2} = \frac{2}{(1+z)^3}.$$



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Per tal d'integrar ses equacions (III.20), (III.21) i (III.23), és convenient utilitzar ses següents noves funcions:  $y_1(z) \equiv d\tau/dz$ ,  $y_2 \equiv A_0(z)$ ,  $y_3 \equiv A_0'(z)$ , d'aquesta manera, per a qualque funció derivable  $f(\tau)$ , tendriem que:

$$(III.26) \quad \dot{f}(\tau) = \frac{1}{y_1} f'(z), \quad \ddot{f}(\tau) = \frac{1}{y_1^2} \left[ f''(z) - \frac{y_1'}{y_1} f'(z) \right].$$

En termes des “*redshift*” i ses noves funcions sa densitat d'energia des camp vectorial  $A_\mu$ , partint de (III.22), és:

$$(III.27) \quad \rho_A = \frac{\eta(1+z)^2}{2y_1^2} [y_3(1+z) - 2y_2]^2.$$

Aplicant aquests canvis i considerant (III.12), ses equacions (III.20) i (III.21) queden re-escrites, respectivament, de manera següent:

$$(III.28) \quad \frac{3}{4\pi G} = \eta(1+z)^2 [y_3(1+z) - 2y_2]^2 + 2y_1^2(1+z)^3 [(1+z)\rho_{Br0} + \rho_{Bm0}]$$

i

$$(III.29) \quad y_1' = -\frac{y_1}{6(1+z)} \left[ 4\pi G(1+z)^2 \left\{ 2y_1^2 \rho_{Br0} (1+z)^2 - 3\eta [y_3(1+z) - 2y_2]^2 \right\} + 9 \right].$$

Cal adonar-se que s'equació (III.28) és una relació algebraica entre ses funcions  $y_1$ ,  $y_2$  i  $y_3$ , i per tant se tracta d'un lligam entre ses dites funcions, a complir-se per a tot  $z$ . Finalment s'equació diferencial de segon ordre (III.23) l'escrivim com a un sistema de dues equacions diferencials de primer ordre:

$$(III.30) \quad y_2' = y_1$$

i

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.31) \quad y_3' = \frac{2y_1y_2 + y_1'(1+z)[y_3(1+z) - 2y_2]}{y_1(1+z)^2}$$

Mitjançant sa combinació de ses equacions (III.30) i (III.31) trobam una equació d'evolució que involucra només sa funció  $y_1$ :

$$(III.32) \quad \frac{y_1'}{y_1} = -\frac{4\pi G}{3} \left[ 4(1+z)^3 \rho_{Br0} + 3(1+z)^2 \rho_{Bm0} \right],$$

que s'integra de manera immediata obtenint-se

$$(III.33) \quad y_1 = -\frac{\tilde{G}}{\sqrt{(1+z)^4 \rho_{Br0} + (1+z)^3 \rho_{Bm0} + C}},$$

essent  $C$  sa constant d'integració i  $\tilde{G} \equiv (3/8\pi G)^{1/2}$ . Per tal d'obtenir es valor d'aquesta constant d'integració s'han de combinar ses equacions (III.27), (III.28) i (III.33), fent això s'obté fàcilment  $C = \rho_A$ . Atès que  $C$  és una constant d'integració arbitrària podem fixar es valor  $\rho_A = \rho_{c0} - \rho_{Bm0} - \rho_{Br0}$  (aquesta és s'equació en termes de ses diferents densitats d'energia), amb  $\rho_{c0}$  es valor actual de s'anomenada densitat crítica  $\rho_c \equiv 3/8\pi G(\dot{a}/a^2)^2$ , aquests valors poden esser calculats amb ses dades que apareixen en sa Taula IV. Per tot allò podem afirmar que hem obtengut un model que seria equivalent an es model estàndard amb constant cosmològica a nivell de *background*, però en aquest cas, s'energia fosca ja no serà de buit sinó que estarà associada an es camp vectorial  $A_\mu$ .

Per a traure condicions inicials, necessàries per a resoldre ses altres dues equacions diferencials i traure  $y_2(z)$  i  $y_3(z)$ , prenem  $z_{in} = 10^8$  on serem clarament endinsats en s'era de radiació dominat després de s'aniquilació electró-positró. En aquesta època assumirem una aportació negligible des camp  $A_\mu$ , a sa densitat i pressió total. Ben sabut és que en aquesta era (en es model

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

estàndard) es factor d'escala se pot prendre proporcional an es temps conforme, és a dir  $\dot{a}$  és una constant. A més, en es voltant de  $z_{in} = 10^8$ , podem considerar que es comportament de sa component  $A_0$  és aproximadament proporcional a certa potència des temps conforme ( $A_0 \propto \tau^\alpha$ ). Si introduïm aquestes lleis de potències en s'equació (III.23), obtenim s'equació de segon grau per a  $\alpha$ :  $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$ . Aquesta equació te dues solucions  $\alpha_+ = 3$  i  $\alpha_- = -2$ , sa qual cosa permet escriure  $A_0(\tau) = A_0^+ \tau^3 + A_0^- \tau^{-2}$ , essent  $A_0^+$  i  $A_0^-$  ses dues constants d'integració de s'equació diferencial de segon grau (III.23). Ja que es mode decreixent se tornarà negligible davant de s'altre, prenem  $A_0(\tau) = A_0^+ \tau^3$ . Si ara tornam a s'equació (III.22) obtenim  $A_0^+ = \dot{a}_{in}^2 (2\rho_A/25\eta)^{1/2}$ , allò obliga a prendre un valor positiu atès que  $\rho_A = \Omega_\Lambda \rho_{c0} > 0$ . Si aplicam s'expressió (III.26) an es factor d'escala, obtenim una expressió per a  $A_0^+$ , en funció des "redshift" inicial i es diferent valors d'avui per a ses components de densitat d'energia. S'expressió resultant és:

$$(III.34) \quad A_0^+ = \frac{8\pi G}{15} \left[ \rho_{Br0} + \frac{\rho_{Bm0}}{(1+z_{in})} + \frac{\Omega_\Lambda \rho_{c0}}{(1+z_{in})^4} \right] \chi,$$

amb  $\chi \equiv (2\Omega_\Lambda \rho_{c0}/\eta)^{1/2}$ . Idò, ja som en disposició de treure es valors inicials per a totes ses nostres funcions. Per a  $y_1$  feim ús de (III.33), a continuació per a  $y_3$  utilitzam sa seva definició, és a dir  $y_3(z) \equiv A_0' = y_1 \dot{A}_0$ , i finalment per a  $y_2$  empram s'expressió (III.28), és a dir mitjançant s'equació algebraica que involucra a totes tres funcions, an es "redshift"  $z$  i a unes constants amb valor conegut, d'aquesta manera es garanteix que s'equació de lligam és satisfeta exactament pes "redshift" inicial. És cert que és possible utilitzar un altre mecanisme per s'obtenció de  $y_2$  consistent en fer ús de sa seva definició  $y_2(z) = A_0$ , però és necessari recordar que hem fet un conjunt d'aproximacions per tal de treure valors inicials per ses altres dues funcions ( $y_1$  i  $y_3$ ). Treure es valor inicial  $y_2$  de

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$y_2(z) = A_0$  implica introduir petites desviacions en s'equació de lligam (III.33), aquestes petites desviacions creixen segons s'integració avança, arribant un moment en es qual són significatives, aquest fet ha estat comprovat en ses simulacions numèriques. Amb totes aquestes consideracions, es conjunt de condicions inicial són :

$$(III.35) \quad y_{1in} = -\frac{\tilde{G}}{\sqrt{\rho(z_{in})}}, y_{2in} = \left(\frac{3}{5} \pm 1\right) \frac{\chi}{2(1+z_{in})} y_{1in}, y_{3in} = \frac{3\chi}{5(1+z_{in})^2} y_{1in},$$

amb  $\rho(z) = (1+z)^4 \rho_{Br0} + (1+z)^3 \rho_{Bm0} + \rho_A$ . Aquestes equacions proporcionen un mecanisme d'obtenció de condicions inicials que dependran des valor pres pes paràmetre  $\eta$ , així com s'elecció des signe. Abans de continuar representant es resultats numèrics presentam una estudi analític des sistema d'equacions diferencials a integrar.

### 2.4. Evolució analítica de $A_0$ .

A continuació cercarem una solució analítica per a  $y_2$  i  $y_3$ . S'expressió (III.33), permet calcular  $y_1$  a partir  $\rho_A = \Omega_\Lambda \rho_{c0}$  i ses densitats  $\rho_{Br0}$  i  $\rho_{Bm0}$ . Si feim ús d'aquesta expressió així com (III.28) en (III.31) trobam una equació diferencial desacoblada per a  $y_3'$  que escrivim a continuació:

$$(III.36) \quad y_3' - \frac{y_3}{(1+z)} = \pm \frac{2\rho(z) + (1+z)\rho'(z)}{4(1+z)^3 \rho(z)} \sqrt{\frac{3\rho_A}{\pi G \eta \rho(z)}}.$$

Es tracta d'una equació diferencial des tipus  $y_3' + P(z)y_3 = Q(z)$  amb  $P(z)$  i  $Q(z)$  funcions continues en cert interval  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Sa solució formal d'aquesta equació és:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.37) \quad y_3(z) = e^{-\int P(z)dz} \left[ C + \int Q(z) e^{\int P(z)dz} dz \right],$$

essent  $C$  sa constant d'integració. Considerant es nostre cas particular per a ses funcions  $P(z)$  i  $Q(z)$ , resollem ses integrals que apareixen en (III.37). Començant per sa primera que és immediata i s'escriu:

$$(III.38) \quad \int P(z) dz = -\int \frac{1}{(1+z)} dz = -\ln(1+z).$$

I sa segona més complexa:

$$(III.39) \quad F(z) \equiv \int Q(z) e^{\int P(z)dz} dz = \pm \tilde{G} \chi \left[ \frac{1}{(1+z)^3 \rho^{\frac{1}{2}}(z)} + 2 \int \frac{1}{(1+z)^4 \rho^{\frac{1}{2}}(z)} dz \right].$$

I llavors sa solució analítica per a  $y_1$ , a falta de sa darrera integral, i una volta trobat es valor per sa constant d'integració  $C = \frac{y_{1in} - (1+z_{in})F(z_{in})}{(1+z_{in})}$  queda:

$$(III.40) \quad y_1(z) = \frac{1+z}{1+z_{in}} \left\{ y_{1in} \pm (1+z_{in}) \tilde{G} \chi \left[ \frac{1}{(1+z)^3 \rho^{\frac{1}{2}}(z)} - \frac{1}{(1+z_{in})^3 \rho_{in}^{\frac{1}{2}}} + 2I(z_{in}, z) \right] \right\},$$

essent  $I(z_{in}, z) = \int_{z_{in}}^z \frac{1}{(1+\tilde{z})^4 \rho^{\frac{1}{2}}(\tilde{z})} d\tilde{z}$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Ara, conegudes ses solucions per a  $y_1$  i  $y_3$ , les ficam a s'equació de lligam (III.28) per tal de treure  $y_2(z) = A_0(z)$ , sa forma explícita per aquesta funció és:

$$(III.41) \quad y_2 = \frac{(1+z)^2}{2(1+z_{in})} \left\{ y_{1in} \pm (1+z_{in}) \tilde{G} \chi \left[ -\frac{1}{(1+z_{in})^3 \rho_{in}^{\frac{1}{2}}} + 2I(z_{in}, z) \right] \right\}.$$

Es procediment de resolució de s'integral  $I(z_{in}, z)$  és llarg i tediós, consistent en una sèrie de descomposicions algebraiques i canvis, basats en un mètode descrit en (Rius, 1889), que finalment permeten trobar una llarga solució que és una combinacions de complexes funcions polinòmiques, hiperbòliques i el·líptiques incompletes de primera, segona i tercera espècie respectivament, definició de ses quals poden trobar-se en (Gradshteyn & Ryzhik, 2000). No és necessari reproduir aquesta llarga funció, sinó reproduir ses seves prediccions per s'evolució des camp i comparar-les amb sos resultats que s'obtenen quan s'integra numèricament es sistema d'equacions diferencials (III.29)–(III.31) mitjançant es sistema d'integració numèrica anomenat Runge-Kutta (Ricardo, 2008).

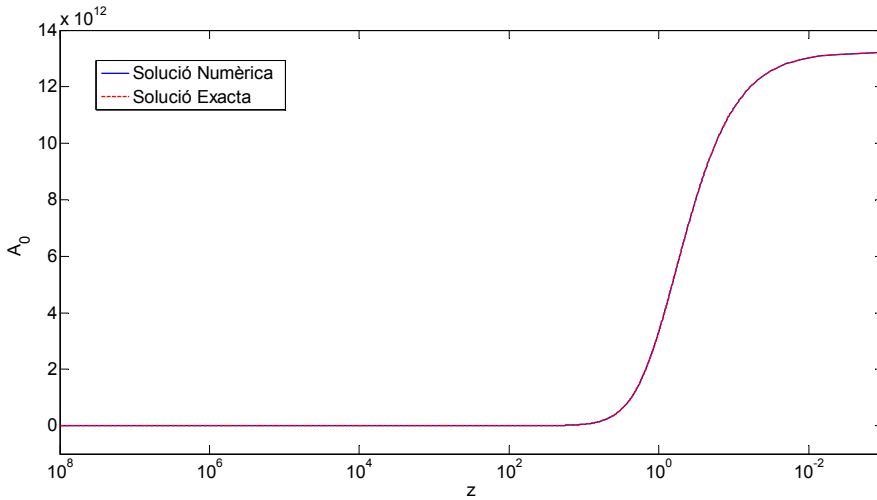
### 2.5. Evolució des camp vectorial.

Per tal de representar es resultats numèrics mitjançant es dos mecanismes utilitzats, presentam un parell de gràfiques, en es rangs de  $z \in [0, 10^8]$  i  $z \in [0, 10^3]$  respectivament, a on se representen ses solucions obtingudes per a s'única component no nul·la des camp vectorial  $A_\mu$ , és a dir  $A_0(z)$ . En aquestes dues il·lustracions (Il·lustració XVI i Il·lustració XVII) s'aprecia una coincidència total entre ambdós mètodes de càlcul, sa qual cosa fa pensar en què s'integració s'ha fet adequadament.

Un aspecte que s'ha verificat numèricament, en ambdós casos és sa validesa de s'equació de lligam (III.28), al llarg de tot es recorregut. Hem verificat que es valors numèrics obtinguts per a ses funcions satisfacin dita equació de lligam amb un error relatiu

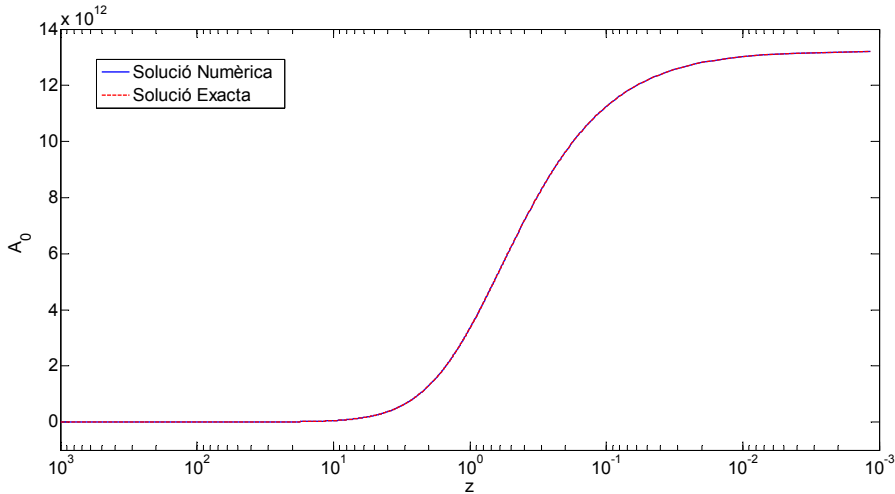
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$|\Gamma_2 - \Gamma_1|/\Gamma_2$ , més petit que  $2 \times 10^{-12}$  per a qualque valor de  $z$ , on  $\Gamma_1(\Gamma_2)$  és es valor des membre esquerre (dret) de s'equació (III.28). Aquest és un resultat satisfactori com a test numèric des càlculs numèrics fets.



**Il·lustració XVI:** Representació de s'evolució de sa component  $A_0$  des camp vectorial  $A_\mu$  per a  $\eta = 1$ , trobada analítica i numèricament en funció des “redshift” en escala logarítmica i en s'interval  $z \in [0, 10^8]$ . En color blau és presentada sa solució numèrica calculada amb so programa informàtic MATLAB (MathWorks, 2015).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XVII:** Representació igual a s' anterior però en es rang de s' interval  $z \in [0, 10^3]$ .

S' integració numèrica ha estat feta mitjançant diverses eines informàtiques, per una banda fent ús de s' entorn de desplegament MATLAB (MathWorks, 2015), i d' altra mitjançant programes propis escrits en C (Press, Flannerly, Teukolsky, & Vetterling, 1988) i en FORTRAM 77 (Press, Flannerly, Teukolsky, & Vetterling, 1992). En tots es casos s' han triat diverses opcions pes ses passes d' integració, error relatiu i altres paràmetres que garanteixen un grau acceptable d' exactitud.

Pes càlculs numèrics amb ses equacions de *background* hem pres per sa densitat actual de radiació  $\rho_{Br0} = 8 \times 10^{-34} \text{ gr/cm}^3$  i per sa corresponent de matèria  $\rho_{Bm0} = 0,2726 \rho_c$ . D' altra banda prenem per sa densitat actual des barions  $\rho_{Bb0} = 0,0461 \rho_c$ , per sa constant de Hubble  $H_0 = 100h \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , amb  $h = 0,704$  i consideram ses equacions d' evolució (III.12). Tots aquests valors presentats són compatibles amb certa versió des model concordant [veure (Jarosik & et al., 2011)]. En aquest model sa densitat d' energia fosca  $\rho_\Lambda = \rho_A$  s' obté de manera senzilla de sa relació  $\rho_{Bm0} + \rho_{Br0} + \rho_A = 3H_0^2 / 8\pi G$ , vàlida per a un *background* pla.



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Una volta hem obtingut es valors de ses funcions  $y_1(z)$ ,  $y_2(z)$  i  $y_3(z)$ , és molt senzill treure sa funció  $a(\tau)$ , a partir de sa definició de  $y_1(z) \equiv d\tau/dz$ , atès que  $a = 1/(1+z)$ , aquest càlcul serà útil en seccions posteriors.

Una volta presentats i constatats es resultats numèrics, presentam uns aspectes de sa solució exacta obtinguda a (III.41), avaluant ses aportacions des diferents termes, per sa qual cosa, a continuació, tornam a reescriure-la marcant dits termes:

$$(III.42) \quad y_2 = \frac{(1+z)^2}{2(1+z_{in})} \left[ \underbrace{y_{1in} + (1+z_{in}) \tilde{G}\chi \frac{1}{(1+z_{in})^3 \rho_{in}^{\frac{1}{2}}}}_{(1)} - \underbrace{2(1+z_{in}) \tilde{G}\chi I(z_{in}, z)}_{(2)} \right].$$

Sa primera cosa que observam és que es terme (1) és un terme que evidentment és una constant i que arreplega es valor inicial des camp. A continuació varem fer una anàlisis numèric, a on varem treure que si bé es terme (1) és es dominant an es principi, tots dos termes s'igualen en ordre de magnitud de seguida, concretament en  $z \sim 8.7 \times 10^7$ , començant a dominar es segon terme (2) en  $z \sim 3.97 \times 10^7$  i en davant (en dos ordres o més de magnitud), de tal manera que, per a èpoques  $z \sim 10^7$  i en davant, podem donar com a bona sa següent aproximació:

$$(III.43) \quad A_0(z) = y_2(z) \approx -\frac{(1+z)^2}{2} \tilde{G}\chi \int_{z_{in}}^z \frac{1}{(1+\tilde{z})^4 \rho^{\frac{1}{2}}(\tilde{z})} d\tilde{z}$$

### 2.6. Pertorbacions cosmològiques.

En ses següents seccions descriurem ses pertorbacions seguint es formalisme – molt habitual – de Bardeen (Bardeen, 1980) que hem introduït en sa secció 1.2. Tractarem a continuació es tres tipus de pertorbacions que evolucionen de manera independent al

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

llarg des règim lineal. Aquestes són ses anomenades fluctuacions escalars, vectorials i tensorials que s'expandeixen, respectivament, en termes d'ets harmònics  $Q^{(0)}$ ,  $Q^{(1)}$  i  $Q^{(2)}$ .

### 2.6.1. Pertorbacions tensorials.

Atès que en aquesta teoria, respecte a Relativitat General, no existeixen nous modes tensorials, sa qual cosa prové des fet de què hem afegit un camp vectorial  $A_\mu$  es qual no involucra en sa seva expansió cap mode tensorial, es modes tensorials en sa teoria VT apareixeran d'igual manera que ho fan en Relativitat General. Es modes tensorials de sa mètrica (ones gravitatòries) i sa par anisotròpica des tensor d'esforços satisfan s'equació (I.37). D'aquesta equació se dedueix que quan sa part anisotròpica des tensor d'esforços és negligible, s'evolució de ses fluctuacions cosmològiques amb una extensió que sia major que s'extensió de s'horitzó efectiu, des d'ara direm que són fora de s'horitzó efectiu [ $\dot{a}/a \gg k$ , veure (Bardeen, 1980) i (Ma & Bertschinger, 1995)], obeeix s'equació  $\ddot{H}_T^{(2)} + 2aH\dot{H}_T^{(2)} \simeq 0$ , amb solució general  $\dot{H}_T^{(2)} \propto a^{-2}$ , i llavors  $\dot{H}_T^{(2)}$  és un mode que decreix ràpidament. Allò vol dir que per a  $z = 10^8$ , ben passat es reescalfament, ses escales súper-horitzó evolucionen de tal manera que  $H_T^{(2)}$  és gairebé independent des temps. Aquest fet se tendrà en compte més endavant.

### 2.6.2. Pertorbacions vectorials.

Per a l'Univers pla que estam consideram, ets harmònics vectorials solucions de s'equació (I.9) s'escriuen de manera següent (Hu & Martin, 1997):  $\vec{Q}^{(1)\pm} = \vec{\varepsilon}^\pm \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , essent  $\vec{k}$  es número d'ona. Una representació des vectors  $\vec{\varepsilon}^+$  i  $\vec{\varepsilon}^-$  és (Morales & Saez, 2007, 2008).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^\pm &= \left( \pm \frac{k_1 k_3}{k} - i k_2 \right) / \sigma \sqrt{2}, \\
 \varepsilon_2^\pm &= \left( \pm \frac{k_2 k_3}{k} + i k_1 \right) / \sigma \sqrt{2}, \\
 \varepsilon_3^\pm &= \mp \frac{\sigma}{k \sqrt{2}},
 \end{aligned}
 \tag{III.44}$$

amb  $\sigma = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ .

A ordre lineal, sa pertorbació vectorial des camp vectorial  $A_\mu$  pot esser escrita de manera següent:

$$A_\mu = \left[ 0, A^{(1)\pm} Q_i^{(1)\pm} \right] \equiv \left[ 0, A^{(1)+} Q_i^{(1)+} + A^{(1)-} Q_i^{(1)-} \right].
 \tag{III.45}$$

Aquestes fluctuacions vectorials, formalment, són similars a ses que apareixen en sa teoria d'Einstein-Maxwell. Sa raó no és altra que, atès que sa divergència des camp vectorial és un escalar, ets únics modes vectorials que podem treure-se de (III.5), a banda d'ets de Relativitat General, són es des termes a on aparesqi  $F^{\mu\nu}$ . S'equació d'evolució des modes tensorials és:

$$\ddot{A}^{(1)\pm} + k^2 A^{(1)\pm} = 0.
 \tag{III.46}$$

Aquest mode vectorial evoluciona pes seu compte i no influeix en sa resta d'equacions, està totalment desacoblat des sistema i no és necessari anar més enllà. A més, succeeix que ets efectes de ses pertorbacions vectorials en Relativitat General són petits.

### 2.6.3. Pertorbacions escalars.

Es formalisme de Bardeen (Bardeen, 1980) implica a ses pertorbacions escalars associades a sa mètrica, sa quatre-velocitat i es tensor d'energia-moment d'un fluid cosmològic. Aquestes pertorbacions se van expandir en termes d'ets harmònics escalars (veure s'apartat 1.2 des capítol I) que compleixen ses equacions (I.12) que involucren es modes relacionats amb sa pertorbació de sa mètrica  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}^{(0)}$ ,  $H_L$  i  $H_T^{(0)}$ , i ses equacions (I.13) que involucren es

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

modos relacionats amb so tensor d'energia-moment des fluid cosmològic  $\delta$ ,  $\pi_L$ , i  $\pi_T^{(0)}$ , finalment és útil recordar que es mode associat a sa quadri velocitat és  $v^{(0)}$ . Qualque altra quantitat, com per exemple  $u_0$  i  $T_{0i}$ , pot esser expressada en termes de dits modes, per exemple podem trobar fàcilment sa relació s'expressió  $u_i = a v^{(0)} Q_i^{(0)}$ . Es modes anteriors poden esser combinats per construir ets invariants *gauge* definits en (I.24)–(I.27), així com  $\eta_E$ .

Ses contribucions a primer ordre pes camp vectorial  $A_\mu$  són:

$$(III.47) \quad \delta A_\mu = \left[ \alpha_0(\tau) Q^{(0)}(x^i), \beta_0(\tau) Q_i^{(0)}(x^j) \right],$$

per sa qual cosa es camp vectorial s'escriu  $A_\mu = (A_0 + \alpha_0 Q^{(0)}, \beta_0 Q_i^{(0)})$ . D'igual manera s'escalar  $(\nabla \cdot A)$  s'espadeix en harmònics escalars; de tal manera que podem escriure

$$(III.48) \quad (\nabla \cdot A) = (\nabla \cdot A)_B + (\nabla \cdot A)^{(0)} Q^{(0)}.$$

Tal com podem trobar en sa referència (Dale & Sáez, 2012a), es mode  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ , que és un invariant *gauge*, és molt més apropiat per tal d'escriure ses equacions de camp, de sa manera més simple i operativa. S'equació de camp (III.18) se redueix a:

$$(III.49) \quad \left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^{**} + 2aH \left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^* + k^2 (\nabla \cdot A)^{(0)} = 0.$$

Se tracta d'una equació diferencial de segon ordre, totalment desacoblada de sa resta d'equacions d'evolució des modes escalars, que corresponen an es fluid cosmològic i a sa mètrica. En definitiva apart des mode  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ , aquesta equació només involucra funcions de *background* com  $aH$  i es número d'ona  $k$ , però no an es paràmetre de sa teoria. És interesant assenyalar que aquesta darrera equació té sa mateixa forma que (I.37) en absència d'esforços anisotròpics ( $\pi_T^{(2)} = 0$ ), efectivament ambdues són idèntiques quan

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

feim es canvi  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  per  $H_T^{(2)}$ . Per tant, qualcunes de ses conclusions prèvies respecte de s'evolució des modes d'ones gravitatòries serien també aplicables a s'evolució de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ ; en particular per a escales súper-horitzó, és vàlida sa relació  $\left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^{\bullet} \simeq 0$ .

A partir de s'equació (III.22) treim es valor de *background* des sa divergència des camp que és:

$$(III.50) \quad (\nabla \cdot A)_B = S_{gn} \left( \frac{2\rho_\Lambda}{\eta} \right)^{1/2} = S_{gn} \left( \frac{2\Omega_\Lambda \rho_{c0}}{\eta} \right)^{1/2},$$

on es valor de  $S_{gn}$  tan sols pot esser bé  $+1$  o bé  $-1$ . Es valor de  $S_{gn}$  fixa es signe arbitrari de  $(\nabla \cdot A)_B$ , això vol dir que, a més de  $\rho_\Lambda$ , tenim dos paràmetres arbitraris que són  $\eta$  i  $S_{gn}$ .

Per desplegar ses expressions (III.7), (III.10) i sa relació  $\nabla_\nu T^{\mu\nu}$ , feim ús des mateixos potencials invariants *gauge* i variables que en (Bardeen, 1980), més sa funció invariant *gauge*  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ . D'aquesta manera ses equacions resultants s'escriuen de manera següent:

$$(III.51) \quad 2 \frac{k^2}{a^2} \Phi_H = 8\pi G \rho_B \epsilon_m - \frac{\eta}{8\pi G} \left\{ \left[ 3 \frac{\dot{a}}{a^3} A_0 \right. \right. \\ \left. \left. (\nabla \cdot A)_B \right] (\nabla \cdot A)^{(0)} + \frac{A_0}{a^2} \left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^{\bullet} \right\},$$

$$(III.52) \quad -\frac{k^2}{a^2} (\Phi_A + \Phi_H) = 8\pi G \rho_B \pi_T^{(0)},$$

$$(III.53) \quad \dot{v}_s^{(0)} + aHv_s^{(0)} = k\Phi_A + k(1+w)^{-1} (c_s^2 \epsilon_m + w\eta_E) \\ - \frac{2}{3} k(1+w)^{-1} w\pi_T^{(0)},$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.54) \quad (\rho_B a^3 \epsilon_m)^\bullet = -(\rho_B + p_B) a^3 k v_s^{(0)} - 2a^4 H p_B \pi_T^{(0)} - \frac{3\eta}{16\pi G} a^3 A_0 (\rho_B + p_B) (\nabla \cdot A)^{(0)}.$$

Ses equacions (III.51)–(III.54) més ses equacions des *background* (III.20) i (III.21) poden combinar-se per a obtenir sa següent equació d'evolució per a  $\epsilon_m$ :

$$(III.55) \quad \begin{aligned} & (\rho_B a^3 \epsilon_m)^{\bullet\bullet} + (1 + 3c_s^2) a H (\rho_B a^3 \epsilon_m)^\bullet + \left[ k^2 c_s^2 - 4\pi G (\rho_B + p_B) a^2 \right] (\rho_B a^3 \epsilon_m) \\ & = -k^2 (p_B a^3 \eta_E) + \frac{2}{3} k^2 a^3 p_B \pi_T^{(0)} + 16\pi G \left[ \frac{p_B - \rho_\Lambda}{\rho_B + \rho_\Lambda} - c_s^2 \right] \left[ (\rho_B + \rho_\Lambda) a^2 \right] (p_B a^3 \pi_T^{(0)}) - 2a^2 H (p_B a^2 \pi_T^{(0)})^\bullet \\ & \quad - \frac{\eta}{8\pi G} a^3 (\rho_B + p_B) \left[ 2A_0 (\nabla \cdot A)^{(0)\bullet} - a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]. \end{aligned}$$

Ses equacions (III.51)–(III.55) se reduïxen a ses deduïdes per Bardeen en es cas pla (Bardeen, 1980) quan feim  $(\nabla \cdot A)^{(0)} = 0$  i  $\rho_A = 0$ . A més si en ses mateixes equacions feim  $(\nabla \cdot A)^{(0)} = 0$  i  $\rho_A \neq 0$  obtenim ses equacions d'evolució de ses fluctuació d'un univers pla estàndard amb constant cosmològica  $\rho_\Lambda = \rho_A$ . Finalment quan  $\rho_A \neq 0$  i  $(\nabla \cdot A)^{(0)} \neq 0$ , ses equacions (III.51), (III.54) i (III.55) inclouen nou termes, característics de sa teoria VT, que modifiquen ses equacions que descriuen s'evolució de ses pertorbacions en un univers pla amb constant cosmològica.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### 2.6.3.1. Anàlisi de ses equacions gauge invariants.

En aquesta secció estudiarem ses equacions (III.49) i (III.51)–(III.55) que descriuen s'evolució a primer ordre ses pertorbacions escalars en s'espai de moments.

Per tal d'estudiar ses equacions (III.49)–(III.55) farem ús de s'evolució des factor d'escala obtinguda en sa secció 2.5. En primer lloc començam estudiant s'equació (III.49) que escrivim en funció de  $z$  a continuació:

$$(III.56) \quad 0 = (\nabla \cdot A)^{(0)''} - \left[ \frac{y_1'}{y_1} + \frac{2}{(1+z)} \right] (\nabla \cdot A)^{(0)'} + y_1^2 k^2 (\nabla \cdot A)^{(0)},$$

essent  $y_1(z) \equiv d\tau/dz$  definida en sa secció 2.3, amb solució analítica (III.33). Una volta introduïda aquesta funció i fetes qualcunes operacions algebraiques, s'aconsegueix sa següent equació diferencial lineal d'ordre 2 homògena:

$$(III.57) \quad 0 = (\nabla \cdot A)^{(0)''} - \left[ \frac{(1+z)^3 \rho_{bm0} + 4\rho_\Lambda}{2\rho(z)(1+z)} \right] (\nabla \cdot A)^{(0)'} + \frac{3}{8\pi G\rho(z)} k^2 (\nabla \cdot A)^{(0)}.$$

Sa solució general d'aquest tipus d'equació diferencial és sa combinació lineal  $(\nabla \cdot A)^{(0)}(z) = c_1 (\nabla \cdot A)_1^{(0)}(z) + c_2 (\nabla \cdot A)_2^{(0)}(z)$ , essent  $(\nabla \cdot A)_1^{(0)}$  i  $(\nabla \cdot A)_2^{(0)}$ , dues solucions linealment independents. Podem reduir un ordre s'expressió (III.57) fent es següents canvis:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot A)^{(0)'} &= (\nabla \cdot A)^{(0)} y(z) \Rightarrow \\
 (\nabla \cdot A)^{(0)} &= \exp \int y(z) dz, \\
 (\nabla \cdot A)^{(0)'} &= y(z) \exp \int y(z) dz, \\
 (\nabla \cdot A)^{(0)''} &= [y'(z) + y^2(z)] \exp \int y(z) dz.
 \end{aligned}
 \tag{III.58}$$

Després d'introduir ets esmentats canvis en s'expressió (III.57) queda una equació diferencial no lineal tipus "Equació de Ricatti" (Gradshteyn & Ryzhik, 2000). Dita equació és:

$$\begin{aligned}
 0 &= y'(z) + y^2(z) - \left[ \frac{(1+z)^3 \rho_{Bm0} + 4\rho_\Lambda}{2\rho(z)(1+z)} \right] y(z) \\
 &+ \frac{3}{8\pi G \rho(z)} k^2.
 \end{aligned}
 \tag{III.59}$$

Per a poder solucionar una equació de Ricatti, és necessari conèixer una solució particular, qüestió gens fàcil en aquest cas. No obstant això, sí que és possible trobar una solució explícita en radiació dominat on és vàlida s'aproximació  $\rho(z) = \rho_{Br} = (1+z)^4 \rho_{Br0}$ . Amb aquesta consideració s'equacio d'evolució de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}(z)$  en radiació dominat és:

$$(\nabla \cdot A)_{RD}^{(0)''} + \frac{3}{8\pi G \rho_{Br0} (1+z)^4} k^2 (\nabla \cdot A)_{RD}^{(0)} = 0,
 \tag{III.60}$$

on es subíndex RD indica que sa validesa de ses funcions és restringida en es període de radiació dominant. En aquest cas trobam sa següent solució explícita:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot A)_{RD}^{(0)} &= \frac{1+z}{1+z_{in}} \left\{ (\nabla \cdot A)_{in}^{(0)} \cos \Psi(z) + \frac{1}{\alpha k} \left[ (\nabla \cdot A)_{in}^{(0)'} \right. \right. \\
 &\left. \left. - (1+z_{in})(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)} \right] \sin \Psi(z) \right\},
 \end{aligned}
 \tag{III.61}$$



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

amb  $\alpha \equiv (3/8\pi G \rho_{Br0})^{1/2}$  i  $\Psi(z) \equiv \alpha k \left( \frac{1}{1+z_{in}} - \frac{1}{1+z} \right)$ .

Respecte es valors inicials  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)}$  i  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)'}$ , aquests són calculats en un “*redshift*” de  $z = 10^8$ . En aquest “*redshift*” tan alt, ses escales cosmològiques d’interès, són escales súper-horitzó; per tant, tenint en compte sa similitud entre ses equacions (I.37) –quan sa part anisotròpica des tensor d’esforços és negligible– i (III.49) així com ses observacions des darrer paràgraf de sa secció 2.6.1, podem escriure  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)'}$  = 0. Amb tot això només manca es valor inicial  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)}$  per tal d’integrar s’equació (III.49). Encara que ja hem justificat que  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)'}$  = 0, és interessant observar que, amb dit valor inicial i per a petits valors de  $\Psi(z)$  (cosa que succeeix en un gran rang de  $z$ , per a totes ses escales), sa solució exacta per a s’era de radiació dominant prediu que  $(\nabla \cdot A)_{RD}^{(0)'}$   $\sim$  0, idè es valor per s’amplitud de sa pertorbació de sa divergència des camp, és a dir per a  $(\nabla \cdot A)_{RD}^{(0)}$  ( $z$ ), roman pràcticament constant.

A continuació presentam un parell de gràfiques amb s’evolució de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ , per comparar sa solució exacta en radiació dominant i sa solució numèrica, per a escales petites i grans (II·lustració XVIII). Ambdues gràfiques han estat calculades per a un valor inicial relatiu de sa pertorbació de  $10^{-4}$ , és a dir  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)} \equiv (\nabla \cdot A)_{in}^{(0)} / (\nabla \cdot A)_B = 10^{-4}$ , on  $(\nabla \cdot A)_B$  ha estat calculada amb (III.50), prenent es valors de  $S_{gn} = +1$  i  $\eta = 16\pi G$ . Pot apreciar-se que, mentre que per a escales petites sa solució numèrica pràcticament coincideix amb sa solució analítica de radiació dominant, per a escales ben grans ambdues solucions se separen en un “*redshift*” aproximat de  $10^3$ .

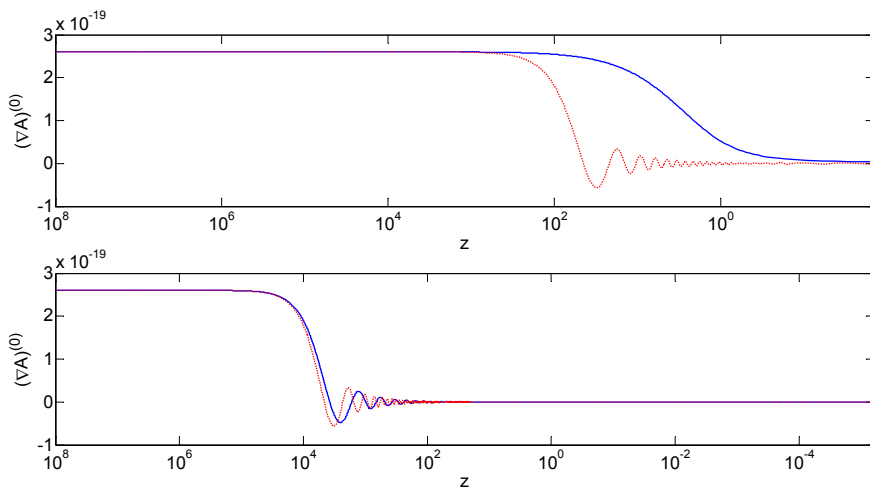
Quan se prenen valors inicials negatius ses gràfiques son similars però rotades respecte de s’eix horitzontal d’abscisses 180 graus. Aquest efecte s’aprecia clarament en s’II·lustració XIX.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Adicionalment, presentam es resultats obtinguts per a una escala espacial d'interès com és  $\tilde{L} = 3 \times 10^3 h^{-1} \text{ Mpc}$ , ja que aquesta entra en s'horitzó efectiu en es moment actual  $\tau_0$  (Il·lustració XXI), que seran utilitzats més endavant. Es seu número d'ona és  $\tilde{k} = 1,47 \times 10^{-3}$ . Aquesta escala serà útil en s'apèndix D per fer certa normalització en es marc de sa Relativitat General. Per tal de calcular ses condicions inicials en s'espai de moments, hem fet ús de sa relació (Kolb & Turner, 1990) que escrivim a continuació:

$$(III.62) \quad \left\langle |X(x)|^2 \right\rangle_L \simeq k^3 \left\langle |X(k)|^2 \right\rangle_{k \sim 2\pi/L} / 2\pi^2,$$

on  $X$  és una quantitat arbitrària.

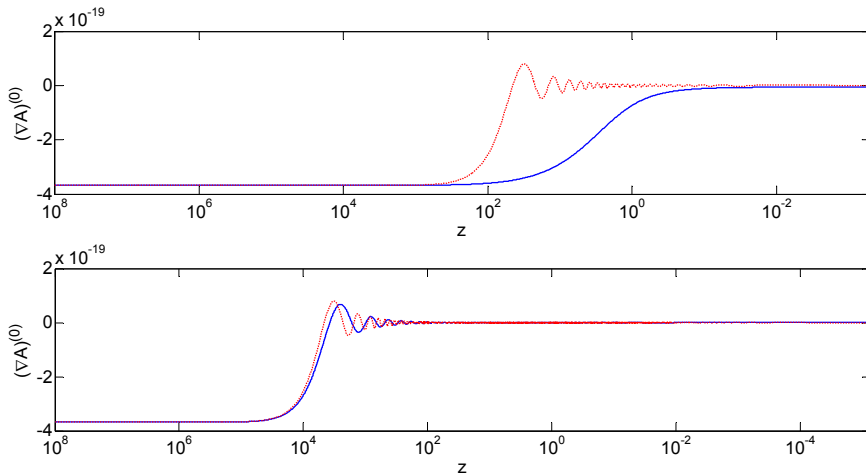


**Il·lustració XVIII:** Aquestes gràfiques representen s'evolució de s'amplitud de sa pertorbació de sa divergència des camp per a escales grans (20.000 Mpc) en sa figura superior i escales petites (200 Mpc) en sa figura inferior. Sa línia de color vermell pertoca a sa solució trobada per a radiació dominant (III.61) mentre que sa blava ho és per a sa solució numèrica de (III.57). Ambdues escales pes “redshift” són logarítmiques en s'interval  $z \in [0, 10^8]$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Com volem treure el valor per a  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)}(\tilde{k})$  es qual és el valor esperat per a dita quantitat, la relació (III.62) ha de particularitzar-se per a  $X = (\nabla \cdot A)_{in}^{(0)}$ ,  $L = \tilde{L}$ , i  $k = \tilde{k}$ . Concretament podem escriure

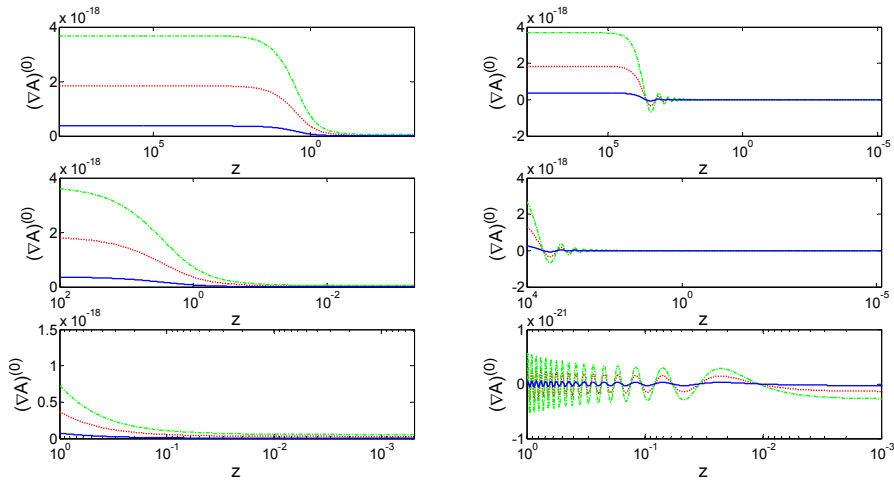
$$(III.63) \quad \left[ (\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)} \right]^2 = \left\langle \left[ \frac{\delta(\nabla \cdot A)}{(\nabla \cdot A)_B} \right]^2 \right\rangle_L \approx \left( k^3 \left| \frac{(\nabla \cdot A)_k^{(0)}}{(\nabla \cdot A)_B} \right|^2 / 2\pi^2 \right)_{k \sim 2\pi/L} .$$



**Il·lustració XIX:** Aquestes dues figures són equivalents a les mostrades en Il·lustració XVIII, però el signe del valor inicial de la pertorbació és negatiu.

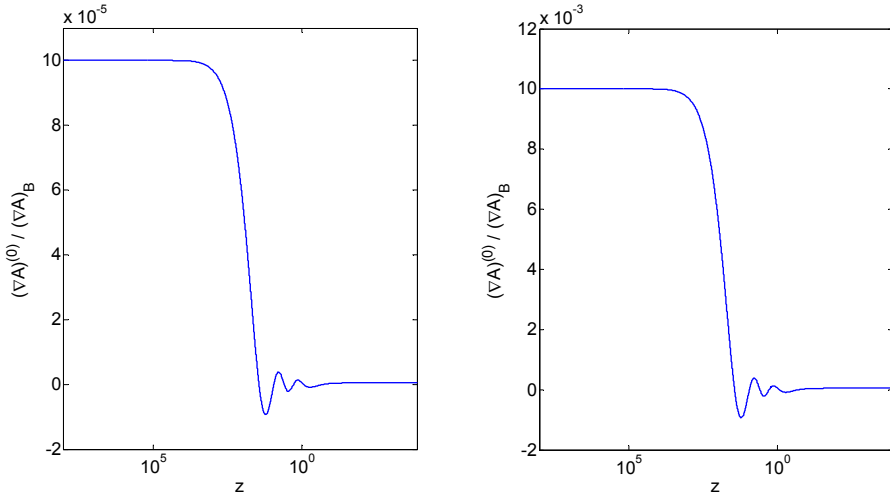
Tant  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)}(\tilde{k})$  (en l'espai de moments) com  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)}(\tilde{L})$  (en l'espai de posicions) poden interpretar-se com a constants de normalització. L'espectre de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  seria necessari per treure el valor inicial de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}(k)$  per a  $k \neq \tilde{k}$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XX:** Aquesta figura representa diversos casos per s'evolució de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  per dues escales 20.000 Mpc per ses gràfiques de l'esquerra i 200 Mpc per ses gràfiques de la dreta. Es tres colors blau, vermell i verd corresponen a un valor relatiu inicial  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)}$  de  $10^{-4}$ ,  $5 \times 10^{-4}$  i  $10^{-3}$ , respectivament. L'eix horitzontal està representat es "redshift" en escala logarítmica. En ses gràfiques superiors se presenta es rang sencer d'integració  $z \in [0, 10^8]$ , en sa filera intermèdia per s'escala de 20.000 Mpc és  $z \in [0, 10^2]$  mentre que per a 200 Mpc aquest és  $z \in [0, 10^4]$  i, finalment, sa filera inferior està representada en es rang de  $z \in [0, 1]$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XXI:** Figura semblant a ses anteriors però per a una escala espacial de  $\tilde{L} = 3 \times 10^3 h^{-1} \text{ Mpc}$ . En aquest cas se presenta com evoluciona sa pertorbació relativa. Es valor de sa pertorbació inicial relativa és de  $10^{-4}$  en es panell esquerre i de  $10^{-2}$  en es dret.

Continuam amb s'estudi de ses equacions (III.51)–(III.55) que descriuen s'evolució –en sa teoria VT tipus IIIa– des modes escalars que apareixen en cosmologia (Relativitat General). Ses equacions (III.51), (III.54) i (III.55) contenen es termes:

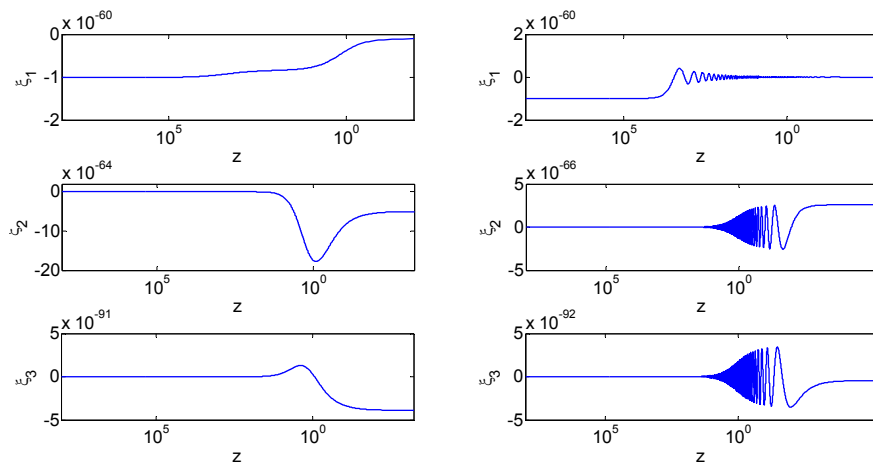
$$(III.64) \quad \xi_1(\tau, k) = \left\{ -\frac{\eta}{8\pi G} \left[ 3 \frac{\dot{a}}{a^3} A_0 + (\nabla \cdot A)_B \right] (\nabla \cdot A)^{(0)} + \frac{A_0}{a^2} \left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^\bullet \right\},$$

$$(III.65) \quad \xi_2(\tau, k) = -\frac{3\eta}{16\pi G} a^3 A_0 (\rho_B + p_B) (\nabla \cdot A)^{(0)},$$

$$(III.66) \quad \xi_3(\tau, k) = -\frac{\eta}{8\pi G} a^3 (\rho_B + p_B) \left[ 2A_0 (\nabla \cdot A)^{(0)\bullet} - a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} \right],$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

respectivament. Per fer-se una idea de com aquestes funcions evolucionen, per a un parell d'escala presentam s'Il·lustració XXII.



**Il·lustració XXII:** Representació de s'evolució de ses funcions  $\xi_i$  per a ses escales de 20.000 Mpc (columna esquerra) i 200 Mpc (columna dreta) en funció des “redshift” en escala logarítmica. Sa resta de valors des paràmetres són  $S_{gn} = +1$ ,  $\eta = 1$ ,  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)} = 10^{-4}$  i es valors de *background* indicats en sa secció 2.5.

A continuació, aquests termes –que apareixen en sa teoria VT tipus IIIa però no en sa teoria d'Einstein amb constant cosmològica– seran calculats, per s'escala  $\tilde{k}$ , amb so *background* utilitzat en sa secció 2.5. Per tal càlcul prenem  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)*} = 0$  i fixam es valor de  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)}(\tilde{L})/(\nabla \cdot A)_B$  en  $10^{-4}$ . També és necessari es valor de  $(\nabla \cdot A)_B$ , aquest s'obté a partir de s'expressió (III.22) amb  $\eta = 1$  i sa resta de valors necessaris per treure  $\rho_\Lambda$ , com són  $\rho_{Br0}$ ,  $\rho_{Bm0}$ , etc. que se troben en es començament de sa secció 2.5.

Atès que  $A_0$ ,  $(\nabla \cdot A)_B$  i  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  són proporcionals a  $S_{gn} |\eta|^{-1/2}$  [veure (III.13), (III.48) i (III.50)], és trivial arribar a sa conclusió que ses quantitats  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  i  $\xi_3$  són independents de  $S_{gn}$  i de

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$|\eta|$ . Pes número d'ona  $\tilde{k}$ , aquestes quantitats són proporcionals a  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)}(\tilde{L})$ .

Partint de ses equacions (III.51), (III.54) i (III.55), ses quantitats  $\xi_1, \xi_2$  i  $\xi_3$  han de comparar-se amb sos termes de Relativitat General

$$(III.67) \quad Y_1 = 8\pi G \rho_B \epsilon_m,$$

$$(III.68) \quad Y_2 = -(\rho_B + p_B) a^3 k v_s^{(0)},$$

$$(III.69) \quad Y_3 = \left[ 8\pi G \frac{1}{2} (\rho_B + p_B) a^2 - k^2 c_s^2 \right] (\rho_B a^3 \epsilon_m)$$

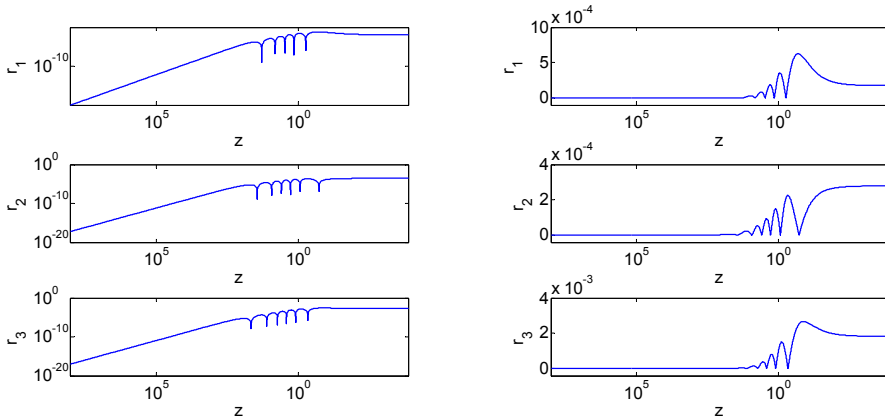
respectivament. Una volta estimats es valors de  $Y_1, Y_2$  i  $Y_3$  en Relativitat General (apèndix D), procedirem amb so càlcul de ses funcions  $r_i(\tau, k) \equiv |\xi_i(\tau, k)/Y_i(\tau, k)|$  per valorar ses desviacions entre sa teoria VT (model IIIa) i Relativitat General. És evident que uns valors molt petits de  $r_i$ , farien que ses equacions diferencials per a ses pertorbacions escalars en Relativitat General i en sa teoria actual VT, pràcticament serien iguals. Considerarem que, per a valors de  $r_i$  de s'ordre de  $10^{-2}$  o més grans, ses diferències entre ambdues teories són rellevants.

Seguidament valorarem ses ràtios  $r_i$  pes número d'ona  $\tilde{k}$ . Es mètode d'estimació de dites funcions en cosmologia estàndard està descrit en s'apèndix D.

Ses tres funcions ràtio  $r_i(\tau, \tilde{k})$  estan representades en Il·lustració XXIII, on ambdós panells (dret i esquerre) mostren s'evolució des ràtios  $r_i$ . Totes tres evolucions són similars. Des de  $z = 10^8$  fins a  $z \sim 10^2$ , s'escala triada està ben enfora de s'horitzó efectiu i creixen sense oscil·lacions; però, per a  $z < 10^2$  existeixen oscil·lacions amb amplituds que creixen segons  $z$  decreix. Aquest efecte és a causa que s'escala triada i s'horitzó efectiu s'acosten segons  $z$  disminueix (en definitiva n'han estat triades per esser iguals en  $z = 0$ ). Es màxims valors des ràtios són

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$r_1 \approx 6,3 \times 10^{-4}$ ,  $r_2 \approx 2,8 \times 10^{-4}$  i  $r_3 \approx 2,6 \times 10^{-3}$ . Tots aquests màxims són assolits devers  $z=0$ . Són suficientment petits podent-se assegurar que, per a  $(\nabla \cdot A)_{Rin}^{(0)}(\tilde{L}) = 10^{-4}$ , s'escala triada evoluciona quasi com en Relativitat General.



**Il·lustració XXIII:** De dalt a baix, en ses gràfiques de sa columna esquerra estan representades ses funcions  $r_1(z, \tilde{k})$ ,  $r_2(z, \tilde{k})$ , i  $r_3(z, \tilde{k})$ , en escala logarítmica, d'igual manera estan representades aquestes funcions en sa columna dreta però s'escala és lineal. S'eix horitzontal està representat es “*redshift*” en escala logarítmica en totes ses gràfiques.



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### 2.6.3.2. Evolució de ses pertorbacions escalars en es gauge síncron.

Atès que es codi informàtic CMBFAST utilitza es modes definits en (Ma & Bertschinger, 1995) en es *gauge* síncron, definit per sa condició  $\bar{A} = \bar{B}^{(0)} = 0$ , hem d'escriure ses equacions bàsiques de cosmologia en dit *gauge*. Dits modes i ets usats per Bardeen estan relacionats de manera següent:  $\tilde{h} = 6H_L$ ,  $\tilde{\eta} = -H_L - H_T^{(0)}/3$ ,  $\tilde{\theta} = k v^{(0)}$ ,  $\tilde{\delta} = \delta$  i  $\tilde{\sigma} = 2p_B \pi_T^{(0)}/3(p_B + \rho_B)$  o equivalentment  $\tilde{\sigma}(1 + \frac{1}{w}) = \frac{2}{3} \pi_T^{(0)}$ . Es mode  $\delta$  vinculat amb so contrast de densitats s'usa tant en sa referència (Bardeen, 1980) com en sa referència (Ma & Bertschinger, 1995), i finalment  $\pi_L$ , no s'usa directament atès que està relacionat amb  $\delta$  com a conseqüència de s'existència d'una equació d'estat; per exemple, si se tractàs de pertorbacions adiabàtiques ( $\eta_E = 0$ ), segun (I.14) apareixeria sa següent relació:

$$\pi_L = (\rho_B / p_B) (dp_B / d\rho_B) \delta.$$

A partir de (III.49) construïm es següent sistema lineal d'equacions diferencials:

$$(III.70) \quad \left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^{\bullet} = \xi^{(0)},$$

$$(III.71) \quad \dot{\xi}^{(0)} = -2 \frac{\dot{a}}{a} \xi^{(0)} - k^2 (\nabla \cdot A)^{(0)},$$

que ha estat inclòs en CMBFAST per tal d'esser solucionat fent ús des valors inicials de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  i de  $\xi^{(0)}$  que més endavant treurem.

En es *gauge* seleccionat ses equacions (III.7) i (III.10) condueixen an es següent sistema d'equacions linealitzades per s'evolució des modes escalars  $\tilde{h}$  i  $\tilde{\eta}$ :

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.72) \quad k^2 \tilde{\eta} - \frac{1}{2} a H \dot{\tilde{h}} = 4\pi G \left\{ -a^2 \rho_B \tilde{\delta} - \frac{\eta}{8\pi G} \left[ a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} + A_0 \xi^{(0)} \right] \right\},$$

$$(III.73) \quad k^2 \dot{\tilde{\eta}} = 4\pi G \left[ a^2 (\rho_B + p_B) \tilde{\theta} + \frac{\eta}{8\pi G} k^2 A_0 (\nabla \cdot A)^{(0)} \right],$$

$$(III.74) \quad \ddot{\tilde{h}} + 2aH \dot{\tilde{h}} - 2k^2 \tilde{\eta} = -24\pi G \left\{ a^2 p_B \pi_L - \frac{\eta}{8\pi G} \left[ a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} - A_0 \xi^{(0)} \right] \right\},$$

$$(III.75) \quad \ddot{\tilde{h}} + 6\dot{\tilde{\eta}} + 2aH (\dot{\tilde{h}} + 6\dot{\tilde{\eta}}) - 2k^2 \tilde{\eta} = -24\pi G a^2 (\rho_B + p_B) \tilde{\sigma}.$$

Quan es paràmetre  $\eta$  val zero, recuperam ses equacions de sa cosmologia de Relativitat General etiquetades com a (21a)–(21d) en Ma i Bertschinger (Ma & Bertschinger, 1995). Aquest termes que són propis de sa teoria VT IIIa –només apareixen en aquesta teoria–, s’han inclòs en es codi CMBFAST. Igualment que passava amb ses funcions  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  i  $\xi_3$  que són independents de  $S_{gn}$  i de  $|\eta|$ , atès que  $A_0$ ,  $(\nabla \cdot A)_B$  i  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  són proporcionals a  $S_{gn} |\eta|^{-1/2}$ , també ses equacions (III.72)–(III.74), inclouen termes nous respecte a Relativitat General, que són independents de  $S_{gn}$  i de  $|\eta|$ . Es nous termes només depenen des valors inicials de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ , de  $\xi^{(0)} = \left[ (\nabla \cdot A)^{(0)} \right]^*$ , i de  $(\nabla \cdot A)_B$ , ja que es valor inicial per a  $A_0$ , considerant (III.13) en radiació dominant, se pot calcular de sa següent manera:

$$(III.76) \quad A_{0in} = - \frac{(\nabla \cdot A)_B}{5(1+z_{in})^2} \bigg/ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{in}$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Assumim que l'Univers conté barions, fotons, neutrins no massius i matèria fosca. Es tensor energia-moment de totes aquestes components és  $T_{\mu\nu}$  que correspon a Relativitat General [veure (III.7)]. S'energia fosca prové des camp vectorial  $A_\mu(\tau)$ . Sa densitat d'energia des *background* és constant, i sa seva equació d'estat és  $w = -1$ . S'han considerat fluctuacions d'energia fosca que s'han utilitzat per obtenir ses equacions (III.72)–(III.75) mitjançant aproximació a primer ordre de  $T_{\mu\nu}^A$ .

Tal com dèiem en sa secció 2.1, i com succeeix en Relativitat General, en aquesta teoria sa relació  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  també és satisfeta. Per aquesta raó, ses funcions  $\tilde{\delta}$ ,  $\tilde{\theta}$  i  $\tilde{\sigma}$  corresponents a cadascuna de ses distribucions de partícules, obeeixen a ses mateixes equacions de cosmologia de Relativitat General, per sa qual cosa, pes període de radiació dominant assumint que  $aH = \tau^{-1}$  i que  $\rho_B \approx \rho_\gamma + \rho_\nu$ , podem escriure [veure equacions (92) en (Ma & Bertschinger, 1995)]:

$$\begin{aligned}
 & \dot{\tilde{\delta}}_\gamma + \frac{4}{3}\tilde{\theta}_\gamma + \frac{2}{3}\dot{\tilde{h}} = 0, & \dot{\tilde{\theta}}_\gamma - \frac{1}{4}k^2\tilde{\delta}_\gamma = 0, \\
 \text{(III.77)} \quad & \dot{\tilde{\delta}}_\nu + \frac{4}{3}\tilde{\theta}_\nu + \frac{2}{3}\dot{\tilde{h}} = 0, & \dot{\tilde{\theta}}_\nu - \frac{1}{4}k^2(\tilde{\delta}_\nu - 4\tilde{\sigma}_\nu) = 0, \\
 & \dot{\tilde{\sigma}}_\nu - \frac{2}{15}(2\tilde{\theta}_\nu + \dot{\tilde{h}} + 6\dot{\tilde{\eta}}) = 0,
 \end{aligned}$$

on es subíndexs  $\gamma$  i  $\nu$  fan referència, respectivament, a fotons i neutrins no massius i  $\tilde{\delta}_\gamma = (\rho_\gamma - \rho_{B\gamma})/\rho_{B\gamma}$ ,  $\tilde{\delta}_\nu = (\rho_\nu - \rho_{B\nu})/\rho_{B\nu}$ . Es tractament de s'interacció entre fotons i barions (incloent sa reionització) és idèntica a com està descrita en Ma i Bertschinger (Ma & Bertschinger, 1995) i implementada en CMBFAST.

A continuació se combinen ses equacions (III.72) i (III.74) i considerant que ses pertorbacions són adiabàtiques (en aquest cas  $\pi_L = \tilde{\delta}$ ) s'obté s'ecuació següent:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.78) \quad \ddot{\tilde{h}} + \tau^{-1} \dot{\tilde{h}} = -16\pi G \left\{ a^2 \rho_B \tilde{\delta} + \frac{\eta}{8\pi G} \left[ -a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} + 2A_0 \xi^{(0)} \right] \right\}.$$

Per altra banda recordem que es contrast de densitat es definit segon  $\delta = \rho - \rho_B / \rho_B$ , essent  $\rho$  sa densitat total d'energia, i llavors, en radiació dominant, podem escriure:

$$(III.79) \quad \tilde{\delta} = \frac{\rho_\gamma + \rho_\nu - \rho_{B\gamma} - \rho_{B\nu}}{\rho_\gamma + \rho_\nu} = (1 - R_\nu) \tilde{\delta}_\gamma + R_\nu \tilde{\delta}_\nu,$$

essent  $R_\nu \equiv \rho_{B\nu} / (\rho_{B\gamma} + \rho_{B\nu})$ . A partir de s'equació (III.20) en radiació dominant, trobam que  $6\tau^{-2} = 16\pi G a^2 \rho_B$ . Així idò, s'expressió (III.78) se reescriu de manera següent:

$$(III.80) \quad 0 = \tau^2 \ddot{\tilde{h}} + \tau \dot{\tilde{h}} + 6 \left[ (1 - R_\nu) \tilde{\delta}_\gamma + R_\nu \tilde{\delta}_\nu \right] + 16\pi G \tau^2 \left\{ \frac{\eta}{8\pi G} \left[ -a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} + 2A_0 \xi^{(0)} \right] \right\}.$$

Aquesta equació, vàlida en radiació dominant a on se treuen condicions inicials, generalitza sa primera de ses equacions (92) de sa referència (Ma & Bertschinger, 1995).

Per a resoldre ses equacions (III.77) usarem es mateix mètode que (Ma & Bertschinger, 1995); és a dir, com a primera passa, tots es termes proporcionals a  $k^2$  són negligits en ses equacions (III.77), sa qual cosa permet fer ses següents aproximacions  $\tilde{\theta}_\gamma = \tilde{\theta}_\nu = 0$ ,  $\tilde{\delta}_\gamma = \tilde{\delta}_\nu = -(2/3)\tilde{h}$ ,  $\dot{\tilde{\eta}} = 0$  i  $\dot{\sigma}_\nu = -(2/15)\dot{\tilde{h}}$ ; i llavors

$$(III.81) \quad \tilde{\delta} = -(2/3)\tilde{h},$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

i

$$(III.82) \quad \tilde{\theta} \equiv (1 - R_\nu) \tilde{\theta}_\gamma + R_\nu \tilde{\theta}_\nu = 0.$$

A continuació derivam un parell de voltes s'equació (III.80) i tenim en compte ses expressions segona i tercera de (III.77) així com ses aproximacions (III.81) i (III.82) per obtenir

$$(III.83) \quad \tau^2 \overset{\cdots}{h} + 5\tau \overset{\ddot{}}{h} + 16\pi G \tau^2 \overset{\ddot{}}{\varphi} = 0,$$

amb

$$(III.84) \quad \tilde{\varphi} \equiv \frac{\eta}{8\pi G} \left[ -a^2 (\nabla \cdot A)_B (\nabla \cdot A)^{(0)} + 2A_0 \xi^{(0)} \right].$$

Ja tenim totes ses equacions necessàries per fixar ses condicions inicials per fer s'integració en sa cosmologia VT IIIa. Per tant, a continuació, cercarem es valors inicials per a tots es modes escalars en  $z = 10^8$ . Es mètode de recerca d'aquests valors, és similar an es descrit en Ma i Bertschinger (Ma & Bertschinger, 1995) pes modes usats en CMBFAST, però en aquest cas, serà estès per a tenir en compte ses noves funcions  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  i  $\xi^{(0)}$ . Se suposa que, en s'era de radiació dominant, qualche mode  $X$  pot esser expandit en sa forma

$$(III.85) \quad X = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \beta_{nm} k^n \tau^m,$$

On es valors presos pes nombres enters  $n$  i  $m$  han d'esser fixats per a cada funció  $X$ , i  $\beta_{nm}$  són es coeficients (constants) que acompanyen a cada combinació de potències de  $k$  i  $\tau$ . Es fet de què  $(k\tau)$  sia petit per a escales cosmològiques, s'existència de modes creixents i decreixents en s'equació (III.85), i altres consideracions permeten determinar es valors de  $n$  i  $m$  que són rellevants per a cada mode. Començam amb ses funcions  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  i  $\xi^{(0)}$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Per a escales molt petites  $k \ll 1$ , es terme proporcional a  $k^2$  pot esser negligit i s'equació (III.49) pot aproximar-se a  $(\nabla \cdot A)^{(0)''} + 2aH(\nabla \cdot A)^{(0)'} = 0$ . Aquesta expressió en radiació dominant (on  $a \propto \tau$ ) és  $\xi^{(0)} = (\nabla \cdot A)^{(0)'} \propto a^{-2} \propto \tau^{-2}$ . Si tornam a integrar aquesta expressió, obtenim  $(\nabla \cdot A)^{(0)} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \tau^{-1}$ , essent  $\tilde{C}_1$  i  $\tilde{C}_2$  constants d'integració. Quan es terme en  $k^2$  no és negligit, es desplegament (III.85) aplicat a  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  en s'equació (III.49) condueix a sa següent expressió:

$$(III.86) \quad \begin{aligned} (\nabla \cdot A)^{(0)} &= k^n \left\{ \beta_{-1} \left[ (k\tau)^{-1} - \frac{1}{2}(k\tau) \right] + \beta_0 \left[ 1 - \frac{1}{6}(k\tau)^2 \right] \right\} \\ &= k^n \left\{ \beta_{-1} (k\tau)^{-1} + \beta_0 \right\}, \end{aligned}$$

aproximació que és vàlida per a  $(k\tau) \ll 1$ . Al llarg d'una part de s'era de radiació dominant, incloent es temps corresponent an es "redshift"  $z=10^8$ , totes ses escales cosmològiques estan fora de s'horitzó efectiu, idò  $(k\tau)$  és suficientment petit per a garantir sa validesa de s'expressió (III.86). Tenint en compte aquest fet i s'equació (III.86), trobam immediatament es següents valors per a  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  i  $(\nabla \cdot A)^{(0)'} :$

$$(III.87) \quad (\nabla \cdot A)^{(0)} = \beta_0 k^n, \quad \xi^{(0)} = (\nabla \cdot A)^{(0)'} = 0.$$

Aquests valors corresponen an es termes més grans en sa sèrie (III.85) i són una bon aproximació de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ . Ja que dits valors no depenen de  $\tau$  durant s'era de radiació dominant devers  $z=10^8$ , es valors inicials de  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  i  $\xi^{(0)}$ , són coincidents amb sos valors constants de (III.87). És interessant recordar que en sa secció 2.6.3.1, havíem trobada una solució exacta per s'era de radiació dominant que, per  $(\nabla \cdot A)_{in}^{(0)'} = 0$  i petits valors de  $\Psi(z)$  (cosa que succeeix en un gran rang de  $z$ , per a totes ses escales), predeia un

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

valor constant per a  $(\nabla \cdot A)_{RD}^{(0)}(z)$ , qüestió que va contrastar-se numèricament i des qual presentarem llavors diverses gràfiques. Aquest resultat és ara trobat seguint un altre procediment. Hem vist que ses condicions inicials pes modes escalars característics de sa teoria VT tipus IIIa, només depenen d'un únic paràmetre  $\beta_0$ , i en conseqüència, qualche possible efecte nou a causa des modes cosmològics que apareixen en sa teoria VT tipus IIIa –però no en Relativitat General– depèn des valor d'aquest paràmetre, que juga es paper d'una constant de normalització. Atès que es resultats finals depenen de  $\beta_0$ , ses comparacions amb ses observacions haurien de dur-nos a una estimació d'aquesta constant.

Si tenim en compte que en radiació dominant  $A_0 \propto \tau^3$  (veure secció 2.2) així com que  $a^2 \propto \tau^2$  i que  $(\nabla \cdot A)_B$  és constant, s'equació de quart grau per sa funció  $\tilde{h}$  pren sa forma  $\tau^2 \ddot{\tilde{h}} + 5\tau \dot{\tilde{h}} = (\tilde{C}\tau^4)^{\ddot{\cdot}} = 12\tilde{C}\tau^2$ , essent  $\tilde{C}$  una constant relacionada amb sos valors inicials de ses funcions involucrades en (III.84) que pot esser calculada a partir de ses expressions (III.50), (III.76) i (III.87). Amb aquestes consideracions s'equació de quart grau per a  $\tilde{h}$  és

$$(III.88) \quad \tau \ddot{\tilde{h}} + 5\dot{\tilde{h}} = \frac{384\pi G\beta_0\rho_\Lambda}{(1+z_{in})^2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{in} k^n \tau.$$

Aquesta expressió és similar a s'expressió (93) en sa referència (Ma & Bertschinger, 1995) exceptuant es terme dret que en aquest darrer cas és zero. Per tal d'obtenir una expressió amb so segon membre zero, derivam dues vegades respecte de  $\tau$  i s'obté

$$(III.89) \quad \tau \tilde{h}^{(6)} + 7\tilde{h}^{(5)} = 0,$$

on  $\tilde{h}^{(6)}$  i  $\tilde{h}^{(5)}$  fan referencia a ses derivades d'ordre sisè i cinquè, respectivament de sa funció  $\tilde{h}$  respecte de  $\tau$ . S'equació de sisè ordre, s'integra fàcilment obtenint-se una combinació linear de ses potències  $\tau^{-2}$ ,  $\tau^0$ ,  $\tau$ ,  $\tau^2$ ,  $\tau^3$  i  $\tau^4$ . Ses potències  $\tau^3$  i  $\tau^4$  no apareixen en cosmologia estàndard. Usant es mateixos arguments que en Ma i

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Bertschinger (Ma & Bertschinger, 1995) per ses potències  $\tau^{-2}, \tau^0, \tau, \tau^2$  i considerant ses noves potències  $\tau^3$  i  $\tau^4$ , podem escriure

$$(III.90) \quad \tilde{h} = \alpha_2 (k\tau)^2 + \alpha_3 (k\tau)^3 + \alpha_4 (k\tau)^4,$$

on  $\alpha_n$  són es coeficients (constants) que acompanyen a cada combinació de potències. Quan  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  recuperam sa condició inicial de sa cosmologia de Relativitat General. Per a uns valors apropiats de  $\alpha_3$  i  $\alpha_4$ , es segon i tercer termes des costat dret de s'equació (III.90) deurien contribuir amb petites desviacions respecte a sa cosmologia de Relativitat General, que podria esser compatible amb ses observacions. Quan introduïm s'equacio (III.90) en (III.88) immediatament s'obté que és satisfeta per a  $n = 4$ ,

$$(III.91) \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = \frac{8\pi G \beta_0 \rho_\Lambda}{3(1+z_{in})^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{in}^2.$$

S'altra constant  $\alpha_2$  se calcula com en cosmologia estàndard mitjançant normalització de s'espectre.

Negligint es termes proporcionals a  $k^2$  en ses equacions (III.77) hem trobat ses condicions inicials a ordre més baix en  $(k\tau)$ , que és convenient resumir de manera següent:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_\gamma = \tilde{\delta}_\nu = \frac{4}{3} \tilde{\delta}_b = \frac{4}{3} \tilde{\delta}_c = -\frac{2}{3} \tilde{h}, \quad \tilde{h} = \alpha_2 (k\tau)^2 + \alpha_4 (k\tau)^4, \\ \tilde{\theta}_\gamma = \tilde{\theta}_\nu = \tilde{\theta}_b = \tilde{\theta}_c = 0, \quad \dot{\tilde{\eta}} = 0, \quad \dot{\sigma}_\nu = -\frac{2}{15} \dot{\tilde{h}}. \end{aligned}$$

A continuació volem considerar es termes que involucrin a  $k^2$  en ses equacions (III.77), que són necessaris per anar més enllà de s'ordre més baix en  $(k\tau)$ . Continuem amb dita feina de manera anàloga a com és fet en sa referència (Ma & Bertschinger, 1995). En



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

primer lloc anam a s'equació (III.83) i li introduïm sa solució de (III.90), tenint en compte a més que  $\tilde{\delta}_\nu = \tilde{\delta}_\gamma$ ; així obtenim que

$$(III.92) \quad \tilde{\delta}_\gamma = \tilde{\delta}_\nu = -\frac{2}{3} \left[ \alpha_2 (k\tau)^2 + \alpha_4 (k\tau)^4 \right].$$

Amb sos resultats de (III.90) i (III.92) tornam a sa segona expressió de ses equacions (III.77) i obtenim

$$(III.93) \quad \tilde{\theta}_\gamma = -\frac{1}{18} \alpha_2 k^4 \tau^3 - \frac{1}{30} \alpha_4 k^6 \tau^5 .$$

Considerem ara sa cinquena expressió de ses equacions (III.77), en dita equació introduïm sa funció  $\tilde{\sigma}_\nu$  que obtenim derivant sa quarta expressió de ses equacions (III.77), d'aquesta manera s'obté  $15\tilde{\ddot{\theta}}_\nu + 4k^2\tilde{\theta}_\nu + 12k^2\tilde{\dot{\eta}} + 9\alpha_2 k^4 \tau + 18\alpha_4 k^6 \tau^3 = 0$ . De (III.73), adaptada a radiació dominant, podem treure  $\tilde{\dot{\eta}}$ , que incorporam en sa darrera equació, per tal d'obtenir una equació de segon grau per a  $\tilde{\theta}_\nu$ , sa qual cosa s'assoleix quan a més consideram (III.82) i (III.93). Si de nou se considera es desplegament per a  $\tilde{\theta}_\nu$  segons (III.85), després d'una sèrie d'operacions algebraiques i aproximacions basades en  $(k\tau) \ll 1$ , podem escriure una equació de valors inicials per a  $\tilde{\theta}_\nu$  de sa manera següent:

$$(III.94) \quad \tilde{\theta}_\nu = -\frac{1}{18} \frac{(23 + 4R_\nu)}{(15 + 4R_\nu)} \alpha_2 k^4 \tau^3 - \frac{1}{30} \alpha_4 k^6 \tau^5 .$$

Aquestes tres darreres expressions contenen es terme de sa teoria estàndard més un nou terme dos ordres més gran en  $(k\tau)$ .

S'observa que quan  $(\beta_0 = A_{0in} = 0)$  i se considera (III.93), se recupera sa relació  $\tilde{\theta}_\nu = \left[ \frac{(23 + 4R_\nu)}{(15 + 4R_\nu)} \right] \tilde{\theta}_\gamma$  de cosmologia en Relativitat General [veure equacions (96) en (Ma & Bertschinger, 1995)].

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

S'equació de valor inicials per a sa funció  $\sigma_v$  s'obté immediatament a partir de sa quarta expressió de ses equacions (III.77) més (III.92) i (III.94), dita equació és

$$(III.95) \quad \tilde{\sigma}_v = \frac{4}{3(15+4R_v)} \alpha_2 (k\tau)^2.$$

A continuació, a partir de sa darrera expressió de ses equacions (III.77), s'obté una expressió per a  $\dot{\tilde{\eta}}$  que, una volta integrada, proveeix es valor inicial de  $\tilde{\eta}$  salvant una constant que pot esser calculada fen ús de (III.72) en radiació dominant. Una volta fetes ses dites feines, queda sa següent equació de valor inicials per a sa funció  $\tilde{\eta}$ :

$$(III.96) \quad \tilde{\eta} = \left[ 2 - \frac{(5+4R_v)}{6(15+4R_v)} (k\tau)^2 + \frac{1}{216} \frac{(23+4R_v)}{(15+4R_v)} (k\tau)^4 \right] \alpha_2 - \frac{1}{6} (k\tau)^4 \alpha_4.$$

Acabats tots es càlculs de valors inicial per a totes ses funcions involucrades en ses equacions de sa teoria VT IIIa, procedim a resumir aquestes a continuació:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 \tilde{h} &= \alpha_2 (k\tau)^2 + \alpha_4 (k\tau)^4, \\
 \tilde{\delta}_\gamma &= -\frac{2}{3} \left\{ \left[ (k\tau)^2 - \frac{1}{36} (k\tau)^4 \right] \alpha_2 + \alpha_4 (k\tau)^4 \right\}, \\
 \tilde{\delta}_b &= \tilde{\delta}_c = \frac{3}{4} \tilde{\delta}_\gamma, \quad \tilde{\delta}_v = -\frac{2}{3} \left\{ \left[ (k\tau)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{36} \frac{(23+4R_v)}{(15+4R_v)} (k\tau)^4 \right] \alpha_2 + \alpha_4 (k\tau)^4 \right\}, \\
 \tilde{\theta}_\gamma &= \tilde{\theta}_b = -\frac{1}{18} \alpha_2 k^4 \tau^3 - \frac{1}{30} \alpha_4 k^6 \tau^5, \\
 \tilde{\theta}_v &= -\frac{1}{18} \frac{(23+4R_v)}{(15+4R_v)} \alpha_2 k^4 \tau^3 - \frac{1}{30} \alpha_4 k^6 \tau^5, \\
 \tilde{\sigma}_v &= \frac{\alpha_2}{3(15+4R_v)} \left[ 4(k\tau)^2 + \frac{(23+4R_v)}{72} (k\tau)^4 \right], \\
 \tilde{\eta} &= \left[ 2 - \frac{(5+4R_v)}{6(15+4R_v)} (k\tau)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{216} \frac{(23+4R_v)}{(15+4R_v)} (k\tau)^4 \right] \alpha_2 - \frac{1}{6} \alpha_4 (k\tau)^4,
 \end{aligned}
 \tag{III.97}$$

on es subíndexs  $b$  i  $c$  fan referència a barions i matèria fosca. Si comparam aquestes equacions amb ses equacions (96) en sa referència (Ma & Bertschinger, 1995), trobam dues diferències fonamentals: en primer lloc es termes que acompanyen a  $\alpha_4$ , aquests apareixen a causa de s'incorporació des camp vectorial, és a dir se tracta de sa part característica de sa teoria VT IIIa, i en segon lloc també s'han inclòs termes més petits corresponents a potències de  $(k\tau)$  d'ordre superior que no apareixen en dites equacions de Ma i Bertschinger [com per exemple es terme en  $(k\tau)^4$  que acompanya a  $\alpha_2$  en  $\tilde{\delta}_\gamma$ ]. Aquests termes d'ordre superior són d'igual ordre, que es termes que acompanyen a  $\alpha_4$ . Tanmateix, qualcuns d'aquests sí apareixen tant en es codi original CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga, 1996) com en CAMB (Lewis, Challinor, & Lasenby, 2000). En definitiva es nous termes característics de sa teoria VT IIIa estan

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

caracteritzats per  $\alpha_4$  o equivalentment per  $\beta_0$  en ses equacions que proporcionen ses condicions inicials.

### 2.6.3.3. Resultats numèrics amb WMAP.

A continuació tots es càlculs numèric se realitzaran baix es següents supòsits bàsics: es *background* és pla, ses pertorbacions són adiabàtiques, no considerarem s'efecte de lent gravitatòria (“*lensing*”) –quant a ses prediccions teòriques–, tampoc considerarem neutrins massius, s'equació d'estat de s'energia fosca és  $P = w\rho$  amb  $w = -1$ , ses fluctuacions vectorials i tensorials són negligibles, sa temperatura mitjana des CMB és  $T_{CMB} = 2,726$  K, es nombre efectiu de ses espècies relativistes és 3,046, i es nombre total de graus de llibertat efectius d'espècies sense massa és  $g_* = 10,75$ .

Per a sa recerca des millor encaix de ses prediccions teòriques a ses evidències observacionals, hem utilitzat mètodes estadístics basats en ses cadenes de Markov (Guttorp & Minin, 1995; Brémaud, 1999). Ses dades observacionals actuals que consideram són: lluminositat en supernoves tipus Ia (SNe Ia) d'alt “*redshift*” i anisotropies de temperatura des CMB (mesures de WMAP 7 anys). Mentre que, en sa cosmologia de Relativitat General s'ajust se basa en sis paràmetres, en sa teoria VT III serà necessari un paràmetre addicional i llavors seran set es paràmetres a ajustar. Es càlculs numèrics han estat duits a terme mitjançant s'ús de versions modificades des ben coneguts codis CMBFAST i COSMOMC. D'ara en endavant, dites versions modificades, que han estat adaptes a sa teoria VT IIIa, seran anomenades, respectivament, VT-CMBFAST i VT-COSMOMC. Es codi VT-CMBFAST inclou ses equacions i condicions inicials obtingudes en ses seccions 2.2 i 2.6.3 que són necessàries per a descriure tant es *background* VT IIIa com es modes escalars. Es codi CMBFAST implementa de manera senzilla es mateix formalisme que hem usat en ses anteriors seccions, això ha facilitat sa feina de modificació des codi per incloure nous elements característics de VT IIIa. Per altra banda es codi CAMB, encara que utilitza pràcticament es mateix formalisme, inclou una sèrie d'aproximacions en es codi que dificulten sa seva adaptació per a un primer encaix numèric. Encara que sa versió original de COSMOMC utilitza es codi CAMB per a s'estimació numèrica de s'espectre des CMB i altres quantitats, hem

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

dissenyat sa versió VT-COSMOMC (pes càlculs en es marc de VT IIIa), que utilitza VT-CMBFAST en lloc de CAMB.

Com a primera feina, amb tots es supòsits bàsics anteriors, sa base de dades observacionals, i es nou codis modificats esmentats en es segon paràgraf d'aquesta secció, hem trobat es millor encaix en es marc de sa cosmologia estàndard (Relativitat General). Es codi basat en es mètode conegut com a "Monte Carlo" (VT-COSMOMC), ha estat executat per ajustar ses prediccions i observacions; aço s'ha fet variant sis paràmetres, aquests són:  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_c h^2$ ,  $\tau$ ,  $n_s$ ,  $\ln(10^{10} A_s)$  i  $100\theta_{MC}$ , on  $\Omega_b$  i  $\Omega_c$  són es paràmetres de densitat de barions i de matèria fosca, respectivament,  $h$  és sa constant reduïda de Hubble,  $\tau$  és sa profunditat òptica de reionització,  $n_s$  és s'índex espectral de s'espectre de potències de ses fluctuacions de sa densitat d'energia, i  $A_s$  és sa constant de normalització des mateix espectre, sa qual forma és  $P_{\mathfrak{R}}(k) = A_s (k/k_0)^{n_s}$ , en un cert instant posterior a s'inflació, amb s'escala pivot  $k_0 = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ . Finalment es paràmetre  $\theta$  està definit per sa relació  $\theta = r_s(z_*)/d_A(z_*)$ , essent  $d_A(z_*)$  sa distància diametral angular en es "redshift" de desacoblament i  $r_s(z_*)$  s'horitzó des so en es mateix "redshift".

Es valors trobats numèricament pes sis paràmetres mitjançant es mètode descrit, corresponen an es millor encaix en Relativitat General i se presenten en sa segona columna de sa Taula VIII. Aquests valors són compatibles amb sos valors presentats de sa taula 8 en sa referència (Jarosik & et al., 2011), que han estat obtinguts per s'equip científic des satèl·lit WMAP durant set anys de mesures (designat habitualment per WMAP7). Per a cadascun des paràmetres, sa tercera (quarta) columna d'aquesta taula defineix es límit inferior (superior) d'un interval, que conté es valor de versemblança (en anglès "likelihood") des paràmetre escollit, an es 68% nivell de confiança. Aquests valors corresponen an es cas anomenat marginalitzat. Per calcular sa corba marginalitzada (o distribució marginalitzada, en aquest cas a posteriori<sup>16</sup>) amb un

---

<sup>16</sup> En estadística Bayesiana, sa probabilitat a posteriori d'un succés aleatori és sa probabilitat condicional que és assignada després que s'evidència és presa en compte.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

paràmetre, se procedeix de manera següent: primer s'igualen es valors de cadascun des restants paràmetres an es que va obtenir-se com a millor ajust (segona columna de sa Taula VIII), valors que queden fixats, i a continuació se fa variar es valor des paràmetre des qual volem treure sa dita corba, amb tots ets valors se calcula sa funció de versemblança, llavors es nivells de confiança són respecte s'esmentada corba.

Es codi VT-CMBFAST ha estat usat per treure es següents espectres angulars de potències des CMB per a  $\ell < 2100$ : (1) es coeficients  $C_\ell^{TT}$  ( $C_\ell^{EE}$ ) que mesuren ses correlacions de temperatura-temperatura (polarització-polarització per a sa component E, i (2) es paràmetres  $C_\ell^{ET}$  que proporciona ses correlacions creuades entre temperatura i polarització-E.

Símbol	Relativitat General			VT IIIa		
	ME	LI	LS	ME	LI	LS
$\beta_0 \times 10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	0,203	-3,000	3,033
$\Omega_b h^2$	0,0223	0,0217	0,0229	0,0224	0,0219	0,0232
$\Omega_c h^2$	0,112	0,106	0,115	0,112	0,104	0,115
$100\theta_{MC}$	1,039	1,036	1,041	1,039	1,034	1,041
$\ln(10^{10} A_s)$	3,067	3,035	3,100	3,074	3,028	3,095
$n_s$	0,962	0,948	0,975	0,963	0,959	1,001
$\tau$	0,0836	0,0791	0,0921	0,0866	0,0757	0,0898

**Taula VIII:** Valors pes paràmetres directes utilitzats en es procediment d'encaix tant en Relativitat General com en sa teoria VT IIIa. ME fa referència an es millor encaix, i es límits marginalitzats inferior i superior per cadascun des paràmetres, a nivell de confiança de  $1\sigma$  (68%), estan marcats amb LI i LS, respectivament.

En s'Il·lustració XXIV se presenten es  $C_\ell^{TT}$  per a diversos casos, en tots aquests, se fixen es valors des sis paràmetres usats en s'encaix anterior (segona columna de sa Taula VIII/Taula IX), mentre que es valor des paràmetre  $\beta_0$  és variat. Quan  $\beta_0 = 0$  (línia sòlida) s'espectre angular de potències pertoca an es millor encaix de Relativitat General (segona columna de sa Taula VIII/Taula IX). Se veu clarament en s'Il·lustració XXIV que, quan  $\beta_0 = 2 \times 10^8$  (negre), s'espectre angular de potències es molt semblat a s'obtingut

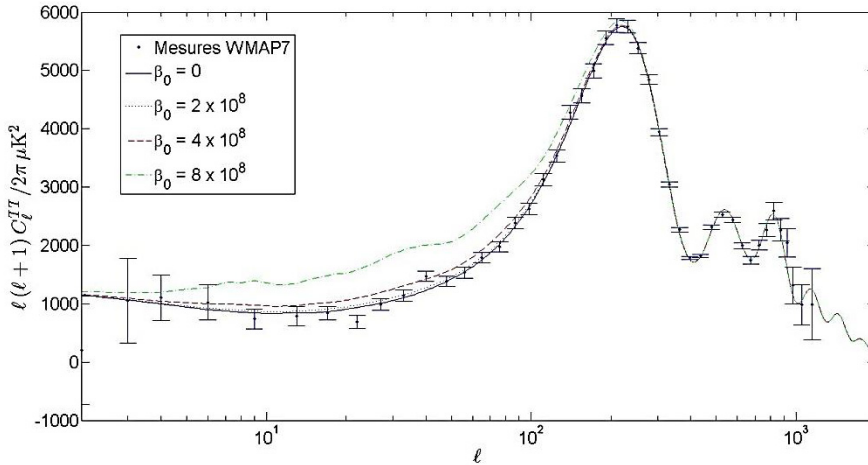
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

quan  $\beta_0 = 0$  (blau) –Relativitat General–. Per altra banda, tenint en compte sa forma de sa corba en es casos  $\beta_0 = 2 \times 10^8$  (negre),  $\beta_0 = 4 \times 10^8$  (vermell) i  $\beta_0 = 8 \times 10^8$  (verd), queda clar que ses desviacions respecte de sa línia blava (efecte causat per  $\beta_0$ ), s'incrementen segons creix  $|\beta_0|$ , sa qual cosa significa que ses desviacions s'incrementen segons creix es valor inicial de sa perturbació de sa divergència des camp  $\left[ (\nabla \cdot A)_{in}^{(0)} \right]$ . Per a alguns valors de  $\ell$ , sa línia verda se desvia excessivament de sa línia blava (corresponent a  $\beta_0 = 0$ ). En s'Il·lustració XXIV observam també que, per a qualche valor de  $\beta_0$ , ses desviacions respecte sa línia blava: (1) són negligibles per a valors de  $\ell$  majors de  $\sim 250$ , sa qual cosa significa que tan sols escales angulars majors que  $\sim 0,72$  graus són afectades de manera significativa pes mode escalar  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  de sa teoria VT IIIa, i (2) són molt petites per a  $\ell < 4$ .

Símbol	Relativitat General			VT IIIa		
	ME	LI	LS	ME	LI	LS
$\Omega_\Lambda$	0,727	0,708	0,755	0,729	0,708	0,764
$\Omega_m$	0,273	0,245	0,292	0,271	0,236	0,292
$z_{re}$	10,29	9,22	11,64	10,53	8,82	11,30
$H_0$	70,14	68,40	72,61	70,28	68,31	73,57
$t_0$	13,80	13,67	13,92	13,79	13,64	13,95

**Taula IX:** Valors obtinguts pes paràmetres derivats (és a dir es paràmetres que són calculat a partir d'ets anteriors idò no són triats de manera directa mitjançant es mètode “Monte Carlo”) en es procediment d'encaix tant en Relativitat General com en sa teoria VT IIIa. Es paràmetres  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$ ,  $z_{re}$ ,  $H_0$  i  $t_0$  són, respectivament: es paràmetres de densitat d'energia fosca i matèria, es “redshift” de reionització, sa constant de Hubble i s'edat de l'Univers en Giga-anys. ME, LI i LS té es mateix significat que en sa taula prèvia.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XXIV:** Espectre angular de potències per a temperatura des CMB en funció de  $\ell$ . Són presentades ses mesures de WMAP7 amb ses barres d'error, així com ses prediccions de Relativitat General ( $\beta_0 = 0$  amb línia blava) i ses prediccions de sa teoria VT IIIa pes casos de  $\beta_0$  indicats en s'il·lustració

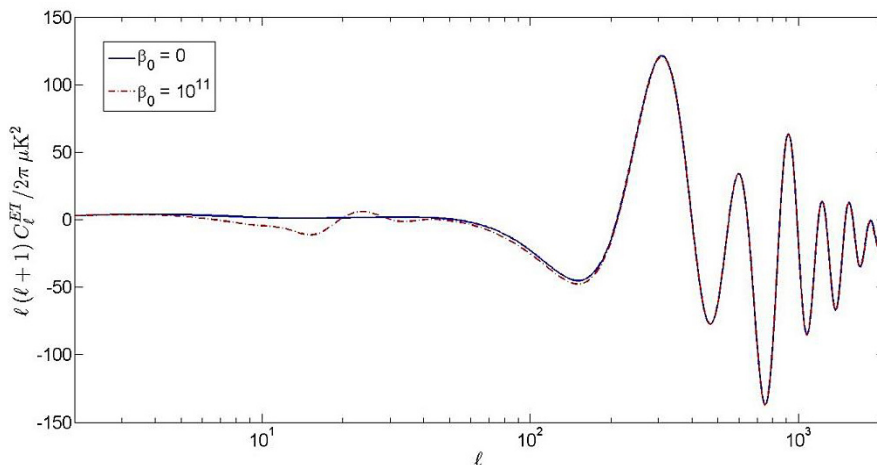
Mitjançant s'ús des codi VT-CMBFAST, han estat comprovats una sèrie de fets que és convenient esmentar: (1) es desviaments respecte de sa línia blava no depenen des signe de  $\beta_0$ , tan sols de  $|\beta_0|$ , i (2) per a es valors de  $\beta_0$  no nuls considerats en Il·lustració XXIV, ets espectres  $C_\ell^{EE}$  i  $C_\ell^{ET}$ , són indistingibles des que corresponen a  $\beta_0 = 0$ . De fet, per tal d'apreciar diferències en s'espectre  $C_\ell^{ET}$ , respecte a Relativitat General, és necessari augmentar en tres ordres de magnituds es valors de  $\beta_0$  presentats en s'Il·lustració XXIV, i pes cas de s'espectre  $C_\ell^{EE}$ , aquest augment ha d'esser almanco de cinc ordres de magnitud per tal d'apreciar ses dites diferències

En s'Il·lustració XXV representam s'espectre  $C_\ell^{ET}$  corresponent a  $\beta_0 = 0$  i  $\beta_0 = 10^{11}$  en vermell. Tal com pot observar-se sa línia vermella se desvia lleugerament de sa blava ( $\beta_0 = 0$ ) en un rang aproximat entre  $\ell \sim 5$  i  $\ell \sim 50$ .



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

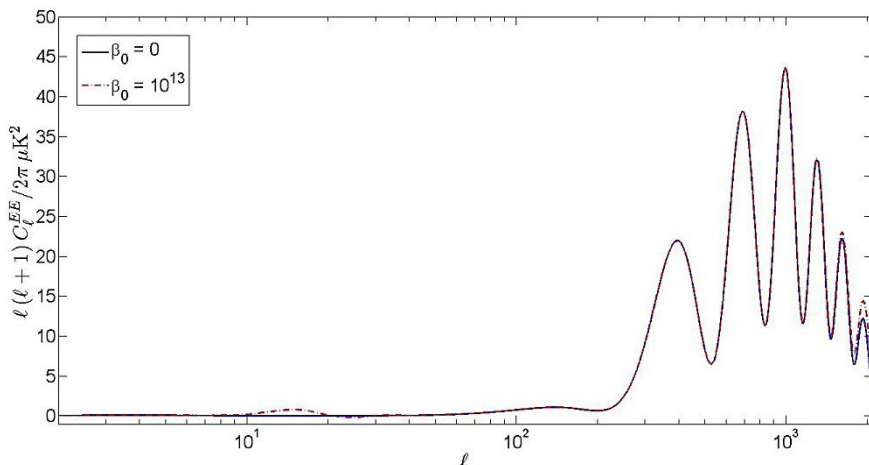
De manera similar en s'Il·lustració XXVI representam s'espectre de polarització-E,  $C_\ell^{EE}$ , corresponent a  $\beta_0 = 0$  i  $\beta_0 = 10^{13}$  en vermell. En aquest darrer cas trobam dos tipus de desviaments: uns estan aproximadament localitzats entre  $\ell \sim 10$  i  $\ell \sim 20$ , i ets altres en es llocs corresponents a ses dues darreres cuculles, essent sa desviaci3n de sa darrera cuculla sa més pronunciada. Però tant per a  $\beta_0 = 10^{11}$  com per a  $\beta_0 = 10^{13}$  s'espectre  $C_\ell^{TT}$  seria massa diferent an es blau ( $\beta_0 = 0$ ) de s'Il·lustraci3n XXIV i, conseqüentment, aquests valors tan elevats de  $\beta_0$  no són admissibles.



**Il·lustració XXV:** Espectre angular de potències que proporciona ses correlacions creuades entre temperatura i polarització-E,  $C_\ell^{ET}$ , en funció de  $\ell$ . Se mostren ets espectres resultants per a  $\beta_0 = 0$  (blau) i per a  $\beta_0 = 10^{11}$  (vermell).

En definitiva VT-CMBFAST calcula ets valors des coeficients  $C_\ell^{ET}$  i  $C_\ell^{EE}$ , però ses desviacions respecte a Relativitat General són negligibles per a valors viables de  $|\beta_0|$  menors a  $8 \times 10^8$  (línia verda en s'Il·lustració XXIV).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XXVI:** Espectre angular de potències que proporciona les correlacions de polarització-E,  $C_\ell^{EE}$ , en funció de  $\ell$ . Se mostren els espectres resultants per a  $\beta_0 = 0$  (blau) i per a  $\beta_0 = 10^{13}$  (vermell).

Per entendre alguns dels resultats anteriors, és interessant mostrar el comportament de algunes funcions que VT-CMBFAST proveeix en uns fitxers de sortida. Ses funcions triades per a tal efecte són:  $T_1 = a\ddot{h} + \dot{a}\dot{h}$ ,  $T_2 = \dot{h}$  i  $T_3 = \dot{\eta}$  en termes de “redshift”  $z$ , i són calculades per a diverses escales d’interès. Aquestes funcions han estat triades per les següents raons: (1) perquè estan involucrades en les equacions que descriuen l’evolució de la funció de distribució dels fotons [veure l’equació (63) en (Ma & Bertschinger, 1995)], que s’utilitza per a calcular l’espectre de potències angular del CMB, i (2) perquè depenen de les derivades temporals de les pertorbacions de la mètrica  $\tilde{\eta}$  i  $\tilde{h}$ , les quals comencen a ser diferents en VT IIIa i Relativitat General a partir d’un cert “redshift” que ha d’esser estimat.

Es valors de les funcions  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$  s’han obtingut per a les línies blava i verda de l’espectre de l’Il·lustració XXIV que corresponen, respectivament, als casos  $\beta_0 = 0$  i  $\beta_0 = 8 \times 10^8$ . En el panell superior de l’Il·lustració XXVII, l’escala és de  $L \approx 16h^{-1}$  Mpc (escala utilitzada per definir el paràmetre estàndard  $\sigma_8$ ). En es

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

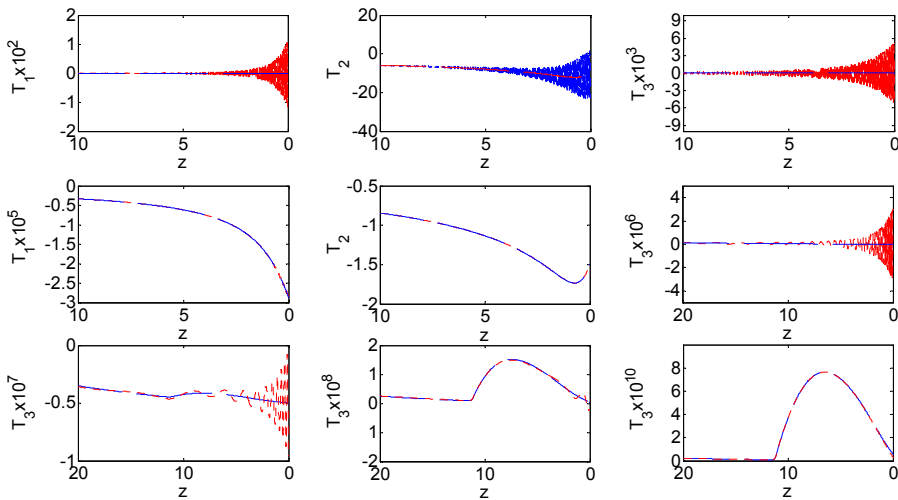
gràfics superiors esquerre ( $T_1$ ) i dret ( $T_3$ ), sa línia a ratlles discontinües blaves pertoca a Relativitat General, mentre que sa línia vermella de punts mostra es valors per sa teoria VT IIIa pes valor esmentat de  $\beta_0$ . Ses línies de punts vermells (VT IIIa) oscil·len devers ses blaves (Relativitat General). En sa gràfica superior central ( $T_2$ ), ses línies de ratlles discontinües vermelles corresponen a VT IIIa, mentre que ses blaves de punts mostren ses sortides proporcionades pes codi en Relativitat General. En aquest cas ses línies de punts blaus (Relativitat General) oscil·len devers sa vermella (VT IIIa). En tots es casos trobam oscil·lacions. Ses quantitats  $T_1$  i  $T_3$  oscil·len en sa teoria VT IIIa, però no en Relativitat General, mentre que  $T_2$  pateix oscil·lacions en Relativitat General, però no en VT IIIa. En tots es panells de sa filera central, s'escala espacial és de  $L \approx 200h^{-1}$  Mpc. En dits panells ses línies blaves discontinües s'han obtingut per a Relativitat General, mentre que ses línies de punts vermells corresponen a VT IIIa.

Si comparam es panells de sa filera central amb sos de sa part superior, se pot veure fàcilment que, segons s'escala espacial creix, ses funcions  $T_1$  i  $T_2$  obtingudes en Relativitat General i VT IIIa tendeixen cap es mateix límit. En es cas de s'escala espacial  $L \approx 200h^{-1}$  Mpc, ses línies vermelles i blaves en es panells mig centre i esquerra són indistingibles; no obstant això, per a sa mateixa escala, sa funció  $T_3$  corresponent a VT IIIa oscil·la devers de sa seva corresponent de Relativitat General (panell central dret).

Respecte es gràfics de sa filera inferior, s'escala espacial ha estat variada per veure com és es comportament de sa funció  $T_3$ . Ses dites escales espacials augmenten d'esquerra a dreta prenent es següents valors:  $700h^{-1}$  Mpc (esquerra),  $2800h^{-1}$  Mpc (central), i  $31400h^{-1}$  Mpc (dreta). Com se desprèn d'aquetes gràfiques, ses oscil·lacions de sa funció  $T_3$  disminueixen segons s'incrementa s'escala espacial, sa qual cosa significa que es valors de  $T_3$  per a VT IIIa i Relativitat General convergeixen segons s'escala espacial creix. Veim que, per a escales espacials més grans que  $\sim 2800h^{-1}$  Mpc, no hi ha diferències significatives entre es valors de  $T_3$  per a

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

VT IIIa i Relativitat General (veure ses gràfiques inferiors centrals i dreta).

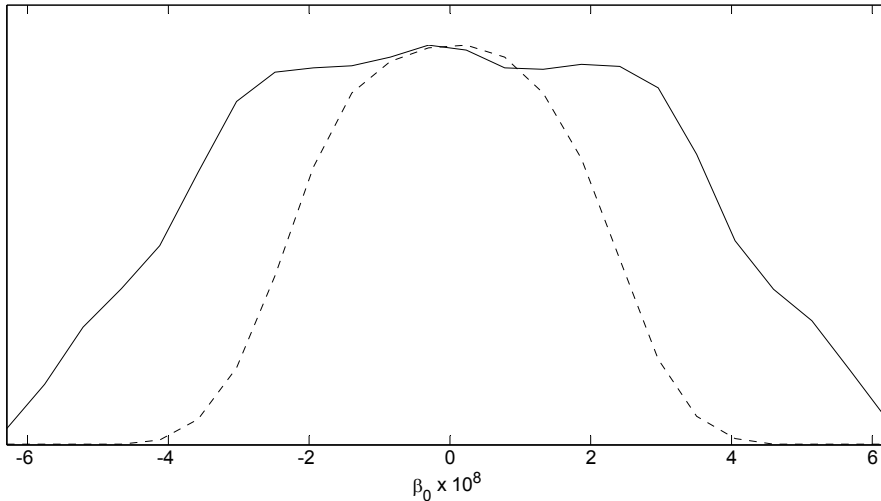


**Il·lustració XXVII:** Ses gràfiques de sa primera i segona fileres superiors representen ses funcions  $T_1 = \overset{\circ}{a}\overset{\circ}{h} + \overset{\circ}{a}\overset{\circ}{h}$  (esquerra),  $T_2 = \overset{\circ}{h}$  (central),  $T_3 = \overset{\circ}{\eta}$  (dreta) en termes des “redshift”  $z$  per a diverses escales d’interès. Es panells de sa primera (segona) filera superior corresponen a una escala espacial propera a  $16h^{-1}$  Mpc ( $200h^{-1}$  Mpc). Ses gràfiques de sa filera inferior representen ses funcions  $T_3$  per a una escala de  $700h^{-1}$  Mpc (esquerra),  $2800h^{-1}$  Mpc (central), i  $31400h^{-1}$  Mpc (dreta). En tots es panells, es color vermell (blau), mostra ses funcions en sa teoria VT IIIa (Relativitat General).

Precisament es caràcter oscil·latori de ses desviacions entre Relativitat General i VT IIIa, explica es fet que ets espectres de VT no depenen des signe de  $\beta_0$ , tan sols de  $|\beta_0|$ . Se produeixen oscil·lacions equivalents tant per a  $\beta_0$  com per a  $-\beta_0$ . D’altra banda en s’Il·lustració XXVII és observat que, si hi ha oscil·lacions per a una certa escala espacial, aquestes sempre apareixen per a valors des “redshifts” ( $z$ ) més petits que  $z \sim 5$ . A més, no hi ha diferències oscil·latòries visibles per a escales espacials molt grans, sa qual cosa explica, qualitativament, perquè ets espectres angular de potències de sa Relativitat General i de VT IIIa en Il·lustració XXIV,

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Il·lustració XXV, i Il·lustració XXVI se fan cada volta més similars segons  $\ell$  decreix des de  $\ell \sim 5$ .



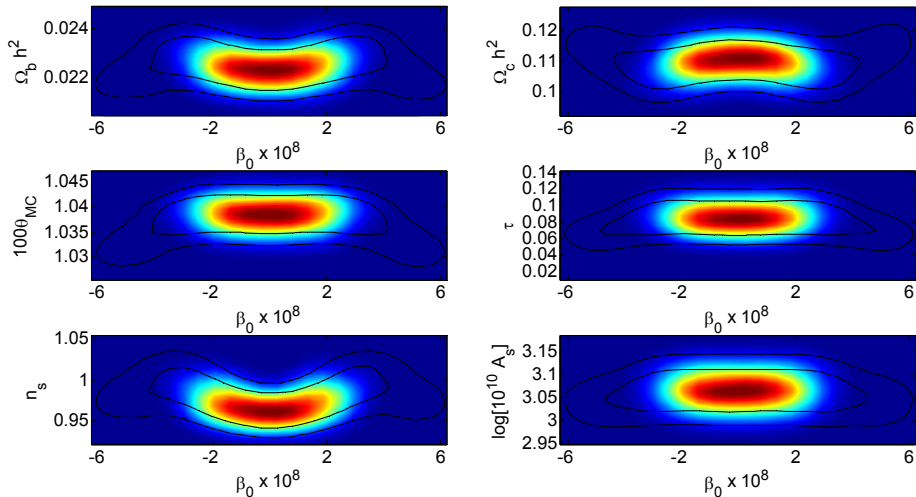
**Il·lustració XXVIII:** Sa línia sòlida (ratllada) mostra sa funció probabilitat o versemblança marginalitzada (mitjana) pes paràmetre  $\beta_0$  de sa teoria VT IIIa.

Sa Il·lustració XXIV suggereix que sa teoria VT IIIa podria explicar ses dades observacionals per a certs valors no nuls de  $\beta_0$  en combinació amb sos valors apropiats per a sa resta de paràmetres. Per verificar aquesta sospita, feim ús de certes tècniques estadístiques per tal de cercar es millor encaix d'un conjunt de paràmetres, a partir de sa teoria VT IIIa i ses dades observacionals. Per dita feina hem utilitzat es codi VT-COSMOMC. Hem fet ús des set paràmetres de sa primera columna de sa Taula VIII. Es conjunt de dades observacionals que s'han tengut en consideració són es relatius a SNe Ia i anisotropia des CMB. Aquesta elecció sembla esser apropiada, ja que ses mateixes dades condueixen a uns ajustos molt bons en es model estàndard de Relativitat General.

Sa versió VT-COSMOMC usada, utilitza ses dades proporcionades per s'equip científic de WMAP corresponent a 7 anys de mesures (WMAP7) que eren ses disponibles llavors, devers es principi de l'any 2.011. Posteriorment arribarien noves versions des codis que fan ús de dades de contrast observacionals més

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

actuals, en part basades en ses mesures de PLANCK i WMAP9 (mesures de WMAP durant 9 anys), aquestes versions de CAMB i COSMOMC foren adaptades més endavant (a partir de 2.014) per sa seva aplicació a sa teoria VT IIIa, i es resultats són presentats en es següent apartat d'aquesta tesi.

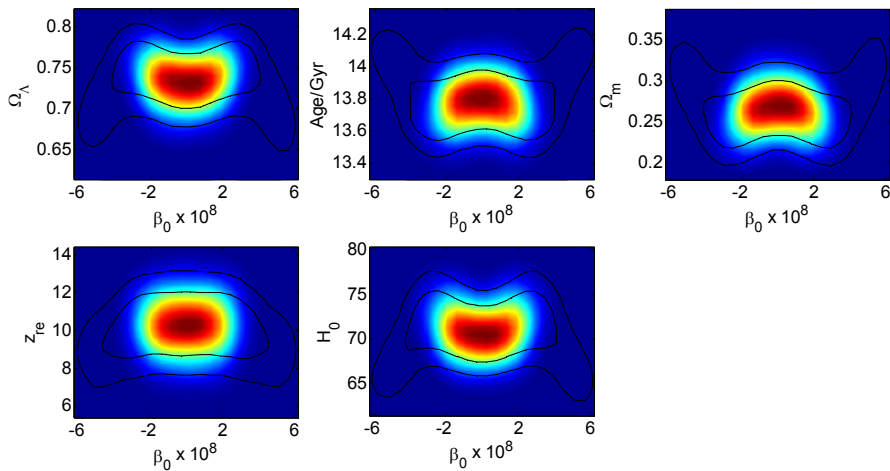


**Il·lustració XXIX:** Cadascun des panells pertoca a un parell de paràmetres. En tots es gràfics un des paràmetres és  $\beta_0$  que caracteritza ses fluctuacions de sa teoria VT IIIa. S'altre parametre és un des sis paràmetres que apareixen en sa Taula VIII. S'escala de colors (vermell-groc-verd-blau) a sa zona central de cadascun des panells representa sa funció probabilitat mitjana. Es contorn exterior (interior) presenta un nivell de confiança de  $2\sigma$  ( $1\sigma$ ) pes cas marginalitzat.

Es resultats obtenguts amb VT-COSMOMC són presentats en s'Il·lustració XXVIII, Il·lustració XXIX i Il·lustració XXX, així com a sa Taula VIII i sa Taula IX. A continuació feim discussió d'ets aspectes més significatius d'aquests resultats. Es millor encaix trobat per a VT IIIa pertoca an es valors des paràmetres que se mostren en sa cinquena columna de sa Taula VIII (i pes paràmetres derivats en sa Taula IX), on veim que  $\beta_0$  pren un valor proper a  $2 \times 10^7$  i ets altres paràmetres prenen valors molt similars an es de sa segona columna (millor encaix per a sa cosmologia estàndard en Relativitat General); per tant, en una representació com és

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

s'Il·lustració XXIV, ets espectres angulars de potències corresponents an es millors ajusts de VT IIIa i Relativitat General serien indistingibles visualment. Considerant només es punt de vista des millors ajusts, ambdues teories són equivalents, que és un bon resultat per a una teoria tal com VT IIIa, ja que explica s'existència de la constant cosmològica. No obstant això, ara discutirem que, una anàlisi estadístic més exhaustiu, suggereix que es models cosmològics VT IIIa podrien esser preferibles.



**Il·lustració XXX:** Aquesta il·lustració és similar a s'anterior, però ara es paràmetre que acompanya a  $\beta_0$  és un paràmetre derivat.

Sa línia discontinua (sòlida) de s'Il·lustració XXVIII representa sa funció de versemblança mitjana (marginalitzada) per a ses mostres de paràmetres analitzats. Sa normalització d'aquesta funció és arbitrària. Tot i que sa línia contínua té un màxim en  $\beta_0 \approx 2 \times 10^7$ , ambdues corbes són prou planes i similars devers es màxim, per tant podem afirmar que es valors de  $\beta_0$  dins des rang  $\beta_0 \in [-10^8, 10^8]$  són també molt acceptables en termes probabilístics.

En sa línia contínua (probabilitat marginalitzada) de s'Il·lustració XXVIII trobam un interval més ampli de valors admissibles per a  $\beta_0$ . Sa dita línia té un ampli altiplà devers es valor màxim de  $\beta_0 \approx 2 \times 10^7$ , sa qual cosa significa que, una volta fixats

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

tots es paràmetres an es seu valor de millor encaix, excepte  $\beta_0$ , existeix un ample conjunt de valors de  $\beta_0$  amb una probabilitat casi igual que sa màxima (corresponent an es valors des paràmetres de sa cinquena columna en Taula VII). Es valors de probabilitat en sa corba marginalitzada mes enllà de  $\beta_0 = \pm 1$  estan per damunt des valor mitjan de sa funció de versemblança, això vol dir que si es set paràmetres són variats sense marginalització, sa funció de probabilitat marginalitzada per a cada valor de  $\beta_0$  pren valors superiors que sa mitjana de probabilitats que s'obté amb totes ses combinacions des valor fixat de  $\beta_0$  amb sa resta des sis paràmetres, és clar que hi haurà valors de probabilitat superiors a sa mitjana, i que estaran més a prop de sa màxima versemblança i altres per baix de dita mitjana (veure Il·lustració XXVIII). De manera visual podem apreciar que s'altiplà està aproximadament definit per sa condició  $\beta_0 \in [-3 \times 10^8, 3 \times 10^8]$ . Per aquests valors ses observacions poden esser explicades amb una alta versemblança.

En s'Il·lustració XXIX i s'Il·lustració XXX trobam més informació estadística, on cada panell d'aquestes il·lustracions mostra sa funció de versemblança per a un parell de paràmetres. Un d'ells sempre és  $\beta_0$  i es segon és un altre des que són a sa Taula VIII (en es cas d'Il·lustració XXIX) o bé un des paràmetres derivats a partir de s'anteriors (en es cas d'Il·lustració XXX). S'escala de colors (vermell-groc-verd-blau) a sa zona central de cadascun des panells representa sa funció probabilitat mitjana de sa mostra de paràmetres considerada. En tots es casos, es valors  $\beta_0$  d'aquesta zona central satisfan, aproximadament, sa relació  $\beta_0 \in [-3 \times 10^8, 3 \times 10^8]$ , en concordança amb sa discussió des darrer paràgraf. Es contorn intern (extern) presenta es límit des nivell de confiança des 68% (95%) en es cas marginalitat, en es qual es restants cinc paràmetres se fixen d'acord amb so millor encaix VT IIIa (cinquena columna, de Taula VIII/Taula IX). Es contorn exterior informa que, dins des set intervals (un per a cadascun des paràmetres) definit pes límits inferior i superiors que apareixen en ses dues darreres columnes de sa Taula VIII/Taula IX hi ha valors des set paràmetres que expliquen ses dades observacionals en es



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

nivell de confiança  $1\sigma$ . En particular, es valor de  $\beta_0$  estarà dins de s'interval  $[-3,000 \times 10^8, 3,033 \times 10^8]$ .

En consonància amb s'Il·lustració XXIV, per a  $|\beta_0| \leq 3 \times 10^8$  s'espectres angular de potències des CMB corresponent a VT IIIa i Relativitat General són lleugerament diferents quan  $\ell \leq 250$ , i aquests espectres són bastant diferents per  $|\beta_0| \geq 5,3 \times 10^8$ . Totes aquestes consideracions indiquen que hi ha encaixos molt acceptables per a un ampli interval de valors de  $|\beta_0|$ . Aquest fet pareix estar relacionat amb ses següents circumstàncies: (1) sa variància còsmica, que és important pes rang de valors de  $\ell$  ( $\ell < 250$ ) afectat per sa condició  $\beta_0 \neq 0$ , i (2) s'espectre des CMB, que roman sense canvis durant  $\ell > 250$  per a qualche valor que prengui  $\beta_0$ . Un altre aspecte observable és que, per a sa resta des sis paràmetres ets intervals de VT IIIa definits pes límits inferior i superior per a  $1\sigma$  indicats en ses dues darreres columnes de sa Taula VIII/Taula IX són lleugerament més amples que ets intervals corresponents an es model de Relativitat General ( $\beta_0 = 0$ ) amb uns límits inferior i superior per a  $1\sigma$  que són mostrats a sa tercera i quarta columna d'aquesta mateixa taula. Totes aquestes consideracions indiquen que es set paràmetres són acoblats i, en conseqüència, es paràmetre  $\beta_0$  té un paper important en ets ajustos estadístics.

### *2.6.3.4. Resultats numèrics amb PLANCK.*

Succeeix que, quan es procés d'adaptació des codis COSMOMC i CMBFAST era pràcticament acabat així com ja havien optés uns resultats preliminars, varen esser publicats es primers resultats de Planck. Paral·lelament noves versions de CAMB i COSMOMC adaptades a ses característiques de Planck també varen fer-se públiques. Amb aquesta situació hi havia dues alternatives per tal de repetir s'ajust a sa nova base de dades observacionals proporcionada per dit satèl·lit: sa primera opció era fer una adaptació des codis COSMOMC + CMBFAST que utilitzàs sa dita base de dades de mesures i sa segona tornar a fer sa feina d'adaptació que ja era feta en CMBFAST ara en CAMB. Maldament

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

es camí de fer una versió VT-CAMB semblava, a priori més llarg, optar per aquesta solució era més una inversió que a futur seria més aprofitable. Si bé és cert que CAMB és un codi originalment basat en CMBFAST, sa seva constant evolució fa que, tan sols petites peces des codi i certs detalls, com per exemple qualcuns noms de rutines o certs noms de variables, sien coincidents amb CMBFAST. És important assenyalar que, ja fa cert temps, que es codi CMBFAST no és mantenint, ni tampoc se dona suport tècnic. Una altra diferència important és s'utilització d'un llenguatge de programació més actualitzat. CMBFAST és un codi escrit en Fortran 77, mentre que CAMB ha evolucionat des de ses primeres versions en Fortran 90 a ses més actuals en Fortran 2008 (passant per versions intermèdies com són Fortran 95 i 2003). Però a banda de ses qüestions purament tècniques, existeixen també altres avantatges com són: (1) consideració d'una sèrie de nous paràmetres coneguts com a "*nuisance parameters*", que són paràmetres que s'han de tenir en compte en anàlisis estadístics, però que no són rellevants o significatius en s'objectiu de s'anàlisi, en es nostre cas es "*nuisance parameters*" no són es paràmetres cosmològics, (2) més precisió en es càlculs, (3) una parametrització molt més ampla a través d'ets anomenats "*input parameters*", etc. (4) s'ús de versions de COSMOMC més actualitzades amb nous algorismes de generació de mostres (cadena de valors des paràmetres cosmològics a enviar a CAMB) més eficient.

S'ha d'afegir un nou paràmetre en CAMB i COSMOMC, sa qual cosa no se reduïx a afegir una certa variable, sinó que va molt més enllà. A més s'ha d'introduir ses noves equacions i condicions inicials, s'han d'afegir una sèrie de valors en certs fitxers, s'han de fer canvis en es codi relacionats amb so nombre d'equacions i variables (paràmetres cosmològics), s'han de fer proves d'estabilitat numèrica i tota una sèrie de feines, per tal de tenir un conjunt d'aplicacions adequades an es problema que volem resoldre. Una de ses dificultats més importants trobada en s'adaptació han estat relacionada amb problemes numèrics. Fonamentalment aquests problemes numèrics tenien es seus arrels en aproximacions dissenyades per a s'optimització des rendiment, vàlides en Relativitat General, però qualcunes no ho són en sa present teoria VT IIIa.

S'han processat més de 7GB d'informació per verificar es correcte funcionament i rendiment de ses versions adaptades de

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

CAMB i COSMOMC, que, a partir d'ara anomenarem VTv2–CAMB i VTv2–COSMOMC. Un altre test ha consistit en comprovar que ses prediccions de VTv2–CAMB i VTv2–CMBFAST han estat aproximadament ses mateixes quan ses parametrizacions són iguals en tots dos codis. Aquest tipus de proves ha estat repetides per a un gran conjunt de valors i circumstancies diferents.

Paràmetre	Descripció
$A_{100}^{PS}, A_{143}^{PS}, A_{217}^{PS}$	Contribució de sa font-puntual de Poisson en 100, 143 i 217 GHz, respectivament.
$A_{143}^{CIB}, A_{217}^{CIB}$	Contribució des fons Còsmic infraroig en 143 i 217 GHz.
$A_{143}^{tSZ}$	Fonts puntuals tèrmiques extragalàctiques amb contribució en 143 GHz.
$r_{143 \times 217}^{PS}$	Coefficient de correlació font-puntual per a Planck entre 143 i 217 GHz.
$r_{143 \times 217}^{CIB}$	Coefficient de correlació des fons Còsmic infraroig entre 143 i 217 GHz.
$\gamma^{CIB}$	Índex espectral de s'espectre angular de potències de fons còsmic d'infraroig.
$c_{100}, c_{217}$	Calibratge de s'espectre de potències relatiu de Planck entre 100 GHz i 143 GHz i 143 GHz i 217 GHz, respectivament.
$\xi^{tSZ \times CIB}$	Coefficient de correlació entre CIB i tSZ.
$A^{kSZ}$	Contribució cinètica de fonts puntuals extragalàctiques en 143 GHz.
$\theta^{1.1}$	Paràmetre des feix.

**Taula X:** Relació des segon conjunt de paràmetres anomenats “*nuisance parameters*” que també són variats en ses actuals versions de COSMOMC + CAMB. Se tracta d'un total de 14 paràmetres des quals 11 són paràmetres relacionats amb fonts contaminats (“*foreground parameters*”), dos paràmetres relacionats amb so calibratge, i un paràmetre d'error des feix (**Planck Collaboration, 2014b**).

En primer lloc, igual que vàrem fer en s'apartat anterior amb ses mesures de WMAP, amb iguals supòsits bàsics enumerats an es principi de sa secció 2.6.3.3, exceptuant s'efecte de lent gravitatòria (“*lensing*”) que en aquest cas sí ha estat considerat i s'inclusió de

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

neutrins massius així com modes tensorials que en aquesta secció seran considerats en certs casos, hem trobat es millor encaix en es marc de sa cosmologia de Relativitat General variant es mateixos sis paràmetres que en sa secció 2.6.3.3 és a dir  $\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \tau, n_s, \ln(10^{10} A_s)$  i  $100\theta_{MC}$  més un total de 14 “*nuisance parameters*” que són descrits en sa Taula X. Com a primer experiment només se consideren pertorbacions escalars, no obstant això més endavant considerarem i presentarem resultats incloent també pertorbacions tensorials. Per a sa generació de cadenes de Markov s’ha fet ús de sa nova metodologia de generació de mostres adaptada per a Planck que duen ses noves versions de COSMOMC, en lloc de s’algoritme Metrópoli (Hoff, 2009) que vàrem utilitzar amb WMAP. Respecte a ses dades observacionals actuals considerades, aquestes són: anisotropies de temperatura des CMB [mesures de Planck i mesures de polarització de WMAP per a  $\ell \leq 23$  (Bennett, et al., 2013), que anomenarem, a partir d’ara amb so acrònim WP] i, en qualcun des casos, també BAO o SNe Ia.

Atès que ets espectres de VT IIIa no depenen des signe de  $\beta_0$ , sinó tan sols de  $|\beta_0|$ , qüestió que ha estat constatada també numèricament, comprovant-se que sa predicció de  $\beta_0$  i  $-\beta_0$  quant a  $Cl$ ’s és igual, sa variació des paràmetre  $\beta_0$ , en aquesta secció, està limitada només en es rang positiu.

- *Resultats amb pertorbacions escalars i CMB (Planck + WP).*

Començam amb so millor encaix i es límits per a un nivell de confiança de  $1\sigma$  per a sa distribució marginalitzada de paràmetres cosmològics en es cas d’un paràmetre.

Ses diferències trobades en sa Taula XI entre es millor encaix des model de Relativitat General i millor encaix des model VT IIIa, (columnes dos i cinc, respectivament) són molt petites, de fet no arriben un 1%, excepte per a  $\tau \sim 3,7\%$  en es paràmetres directes i per a  $\Omega_m \sim 1\%$  i  $z_{re} \sim 3\%$  en es derivats. És constatable en Il·lustració XXXI que, ses previsions des  $C_\ell^{TT}$  en ambdues teories són visualment quasi indistingibles, tan sols s’aprecien unes petites diferències en es primers multipols. Tanmateix si consideram es

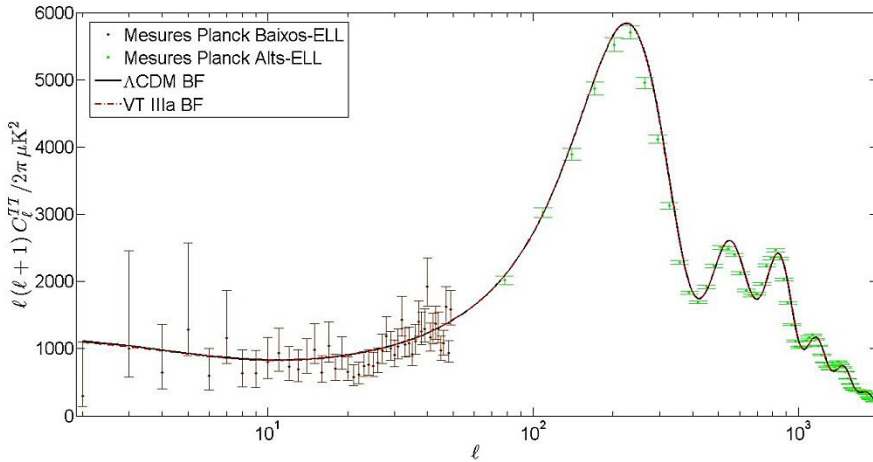
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

marges que defineixen es nivell de confiança  $1\sigma$ , és a dir si calculam ses diferències relatives en valor absolut entre es límit superior (LS) i inferior (LI) en ambdues teories, trobarem casos de diferències relatives significatives. Per exemple pes paràmetres  $\Omega_c h^2$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$  i  $H_0$  aquestes diferències superen es 30%, s'efecte és ben apreciable en s'amplaria de ses corbes en Il·lustració XXXII, mentre que en Il·lustració XXXIII són presentats es casos on sa diferència no arriba an es 30%.

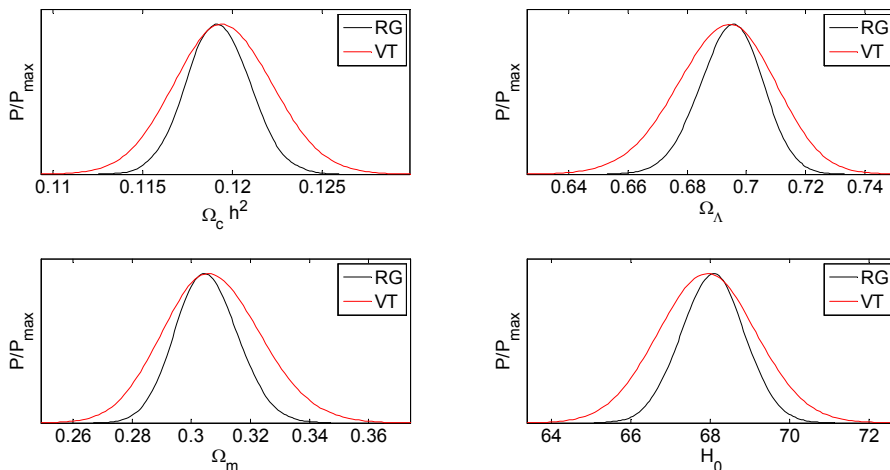
Símbol	Relativitat General			VT IIIa		
	ME	LI	LS	ME	LI	LS
$\beta_0 \times 10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	1,596	-2,149	2,149
$\Omega_b h^2$	0,02209	0,02185	0,02234	0,02216	0,02179	0,02235
$\Omega_c h^2$	0,1195	0,1175	0,1210	0,1187	0,1169	0,1222
$100\theta_{MC}$	1,0415	1,0408	1,0419	1,0411	1,0407	1,0419
$\ln(10^{10} A_s)$	3,093	3,063	3,113	3,085	3,060	3,110
$n_s$	0,9633	0,9552	0,9665	0,9657	0,9535	0,9684
$\tau$	0,0927	0,0760	0,1022	0,0893	0,0749	0,1013
$\Omega_\Lambda$	0,6940	0,6846	0,7058	0,6973	0,6770	0,7100
$\Omega_m$	0,3060	0,2942	0,3154	0,3027	0,2900	0,3230
$\sigma_8$	0,8439	0,8282	0,8515	0,8380	0,8274	0,8526
$z_{re}$	11,32	9,94	12,12	10,98	9,86	12,04
$H_0$	68,01	67,27	68,84	68,22	66,72	69,12
$Y_p$	0,244856	0,244755	0,244960	0,244883	0,244728	0,244961
$t_0$	13,78	13,74	13,82	13,78	13,74	13,83

**Taula XI:** Valors obtinguts, tant pes paràmetres directes com es derivats ( $Y_p$  representa sa fracció de massa bariònica en heli), en es procediment d'encaix tant en Relativitat General com en sa teoria VT IIIa que en aquest cas, a diferència amb sa secció 2.6.3.3, s'ha considerant s'efecte de lent gravitatòria (“*lensing*”). Es límits marginalitzats inferior i superior per cadascun des paràmetres, a nivell de confiança de  $1\sigma$  (68%), estan marcats amb LI i LS respectivament.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

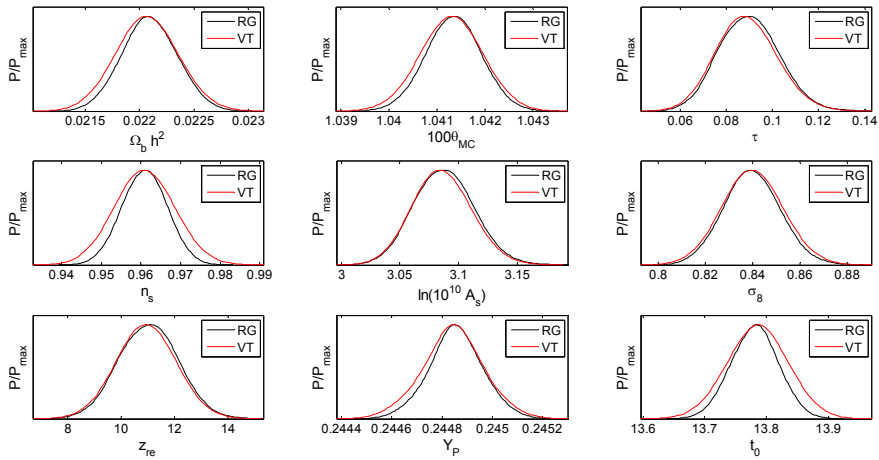


**Il·lustració XXXI:** Figura que representa ses prediccions teòriques pes  $C_\ell^{TT}$  tant des millor encaix en Relativitat General (línia blava sòlida) com en es cas des millor encaix en sa teoria VT IIIa (línia de punts vermells). Ses mesures de Planck amb ses barres d'errors són representades en marró per a baixos multipols ( $\ell \leq 49$ ) i en verd p'ets alts.

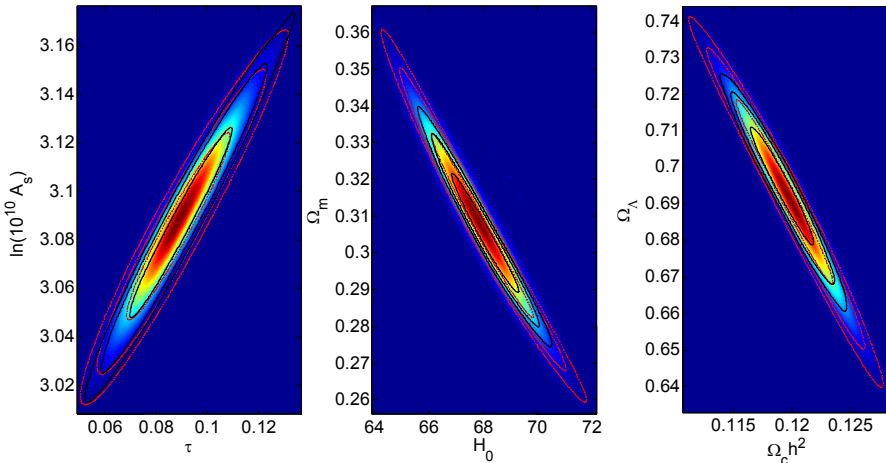


**Il·lustració XXXII:** Representació de sa funció de versemblança normalitzada pes casos de màxima diferència entre Relativitat General (RG línia negra) i VT IIIa (VT línia vermella). Es símbol  $P$  ( $P_{\max}$ ) que apareix en s'eix d'ordenades, indica probabilitat (probabilitat màxima). Idò  $P/P_{\max}$  és sa versemblança normalitzada a s'unitat.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XXXIII:** Representació de sa funció de versemblança normalitzada Relativitat General (RG línia negra) i VT IIIa (VT línia vermella) per a sa resta de paràmetres no inclosos en Il·lustració XXXII.



**Il·lustració XXXIV:** Tot tres panells presenten sa versemblança per a dos paràmetres, amb una bona correlació, en una escala de colors vermell–blau (de major a menor versemblança) per a sa teoria VT IIIa. De dins cap a fora, es tres contorns vermells (negres) pertocquen a un valor pes nivell de confiança de  $1\sigma$  (68%),  $2\sigma$  (95%) i  $3\sigma$  (99,7%) per a VT IIIa (Relativitat General).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Continuam ara considerant es límits per a un nivell de confiança de  $1\sigma$  per a ses distribucions marginalitzades amb dos paràmetres cosmològics.

És interessant apreciar ses diferències en corbes marginalitzades amb dos paràmetres, per una banda presentam en Il·lustració XXXIV es casos on tots dos paràmetres tenen una bona correlació (queda reflectit en que es contorns són allargats), mentre que en Il·lustració XXXV se presenten tres casos en es quals tots dos paràmetres estan poc correlacionats (queda reflectit en que es contorns són quasi circulars). En tots es casos es nivells de confiança en sa teoria VT IIIa en corbes marginalitzades amb dos paràmetres són més amples o molt més amples. Per exemple en  $(H_0, \Omega_m)$  i  $(\Omega_c h^2, \Omega_\Lambda)$  sa corba VT IIIa corresponent a  $2\sigma$  supera i inclou sa corba de Relativitat General  $3\sigma$ , tan sols ses diferències son molt petites en es cas  $[\tau, \ln(10^{10} A_s)]$ . Existeixen casos en es quals es contorns tan sols s'estiren al llarg d'uns des paràmetres, quedant inalterat o pràcticament inalterat en s'altre. Aquest efecte s'observa bé en Il·lustració XXXV, a on per exemple en es panell esquerre, ses tres corbes vermelles (VT IIIa) mantenen en tot tres casos ( $1\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$ ) sa seva amplària en  $\tau$  respecte a ses corbes negres (Relativitat General), però no així en  $H_0$  on sí són més amples (totes tres).

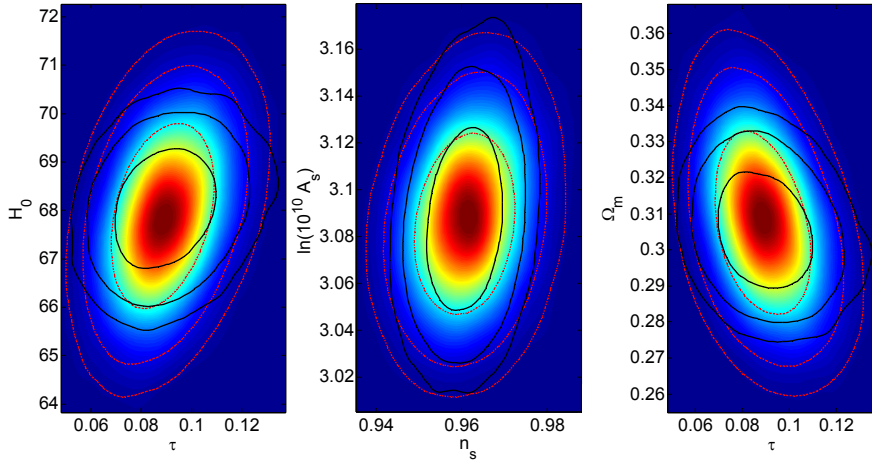
Seguint amb s'anàlisi des límits per a un nivell de confiança de  $1\sigma$ , també és interessant apreciar ses diferències en corbes marginalitzades amb tres paràmetres cosmològics.

En Il·lustració XXXVI i Il·lustració XXXVII de nou observam com s'introducció des nou paràmetre  $\beta_0$  suposa rangs més amples per a un nivell de confiança de  $2\sigma$ .

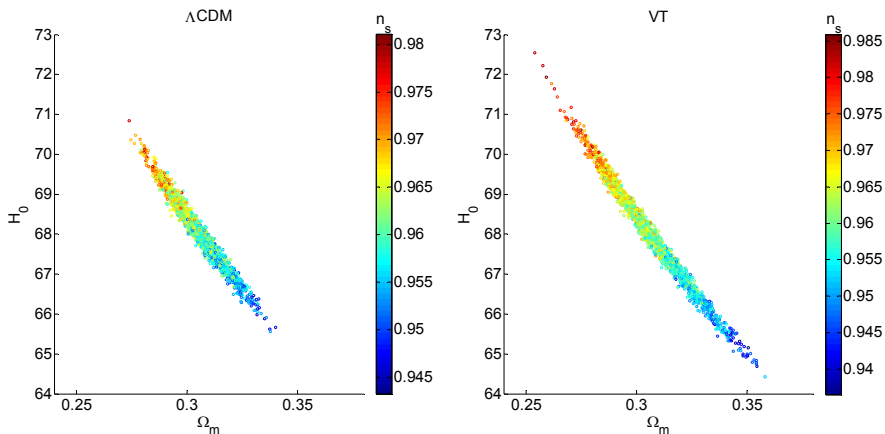
Continuam fent una comparació des resultats que hem obtingut pes paràmetre característic de sa teoria VT IIIa amb Planck respecte ets obtinguts amb WMAP7.



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

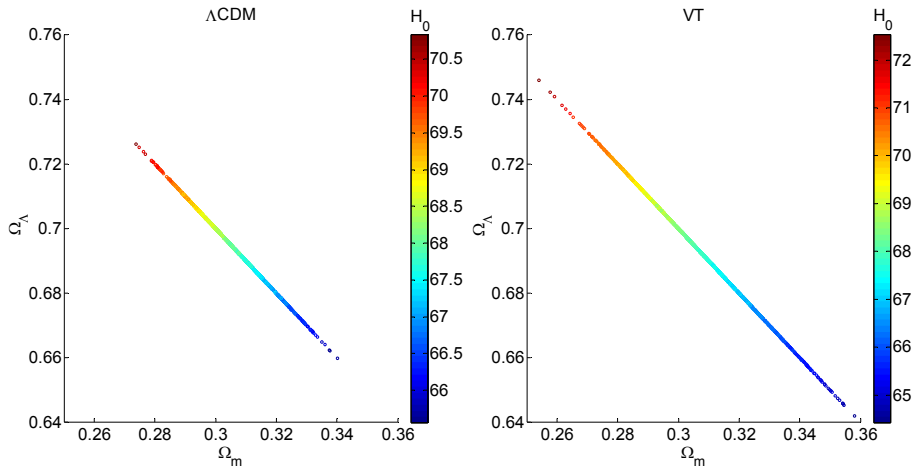


**Il·lustració XXXV:** Figures semblants a ses incloses en Il·lustració XXXIV, per a parelles de paràmetres poc correlacionades. D'igual manera s'escala de colors vermell-blau va de major a menor versemblança per a sa teoria VT IIIa.



**Il·lustració XXXVI:** Figures en 3D fent ús de colors per a representar un tercer paràmetre. Ses zones acolorides representen sa marginalització de tres paràmetres a un nivell de confiança de  $2\sigma$ . Es panell esquerre pertoca a Relativitat General mentre que es de sa dreta correspon a VT IIIa. En tots dos casos se representen es paràmetres  $(\Omega_m, H_0, n_s)$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

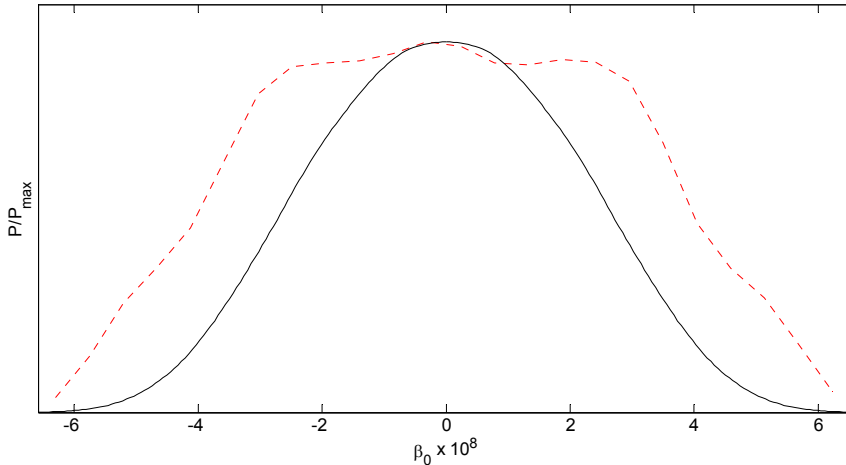


**Il·lustració XXXVII:** Figures similars a ses incloses en Il·lustració XXXVI per a un conjunt de paràmetres molt correlacionats. En tots dos casos se representen es paràmetres  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_0)$ .

Comparant es resultat de  $\beta_0$  en WMAP7 (veure secció 2.6.3.3) i Planck, observam que es valors des millors encaixos són bastant diferents. En WMAP7 vàrem obtenir  $\beta_0^{ME} = 0,203 \times 10^8$  (Taula VIII) mentre que ara en Planck hem obtingut  $\beta_0^{ME} = 1,596 \times 10^8$  (Taula XI). Tanmateix, encara que existeixen diferències en es límits inferiors i superior (LI, LS) a nivell  $1\sigma$  en sa funció marginalitzada, aquestes són moderades:  $[-3,000, 3,033]$  en WMAP7 front a  $[-2,149, 2,149]$  en Planck. En es cas de sa marginalitzada a  $2\sigma$  es rangs són  $[-4,937, 5,209]$  en WMAP7 front a  $[-3,894, 3,894]$  en Planck. En Il·lustració XXXVIII són representades ses funcions de versemblança en ambdós casos, clarament se veu com sa corba corresponent WMAP7 és més ampla. Qüestions com són, una major precisió en es càlculs, s'inclusió de s'efecte lent gravitatòria (“*lensing*”) o s'inclusió de dades de SNeIa com a font de contrast (cas de WMAP7), són possibles causes que podrien generar diferències; però altres diferències tenen, segurament, es seu origen en es fet que, pes valors de  $\ell < 250$ , i sobre tot  $\ell < 100$ , pes quals es multipols  $C_\ell$  de sa teoria VT IIIa presenten desviacions significatives respecte des  $C_\ell$  de Relativitat

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

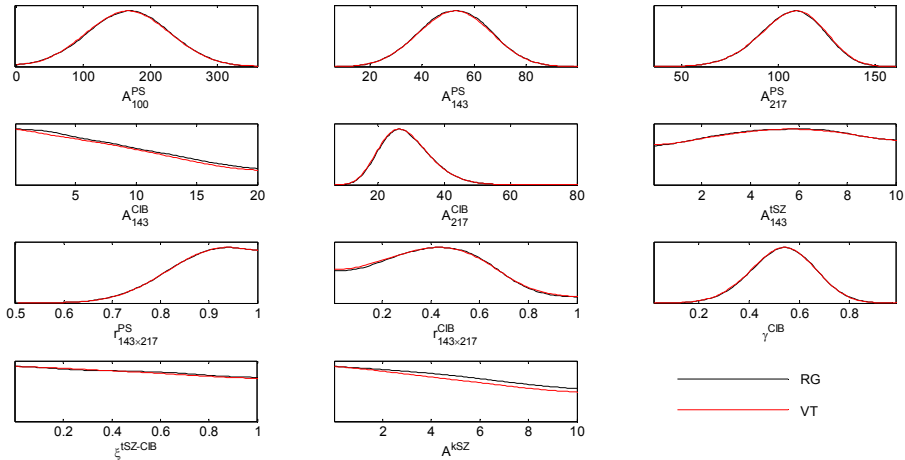
General, Planck proporciona informació observacional més ampla i precisa que WMAP (veure Il·lustració XXIV i Il·lustració XXXI).



**Il·lustració XXXVIII:** Representació de ses funcions de versemblança normalitzades, pes paràmetre  $\beta_0$ , obtingudes en s'ajust amb dades de Planck + WP (traç negre sòlid) i amb WMAP7 (traç vermell discontinu).

Quant ets anomenats “*nuisance parameters*”, ses diferències obtingudes entre Relativitat General i VT IIIa, per a sa funció de versemblança normalitzada, com podem veure Il·lustració XXXIX, són pràcticament inapreciables en sa majoria des panells. En dita il·lustració presentam es paràmetres relacionats amb fons contaminats (“*foreground parameters*”). En es model  $\Lambda$ CDM amb sis paràmetres [ $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_c h^2$ ,  $\tau$ ,  $n_s$ ,  $\ln(10^{10} A_s)$  i  $100\theta_{MC}$ ], tots sis són molt poc correlacionats amb sos “*nuisance parameters*” relacionats amb fons contaminats (Planck Collaboration, 2014c). Hem constatat que en sa teoria VT IIIa succeeix igual amb sos sis paràmetres anteriors així com amb so nou paràmetre  $\beta_0$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XXXIX:** Representació de sa funció de versemblança normalitzada per paràmetres relacionats amb fonts contaminats (“*foreground paràmetres*”) en Relativitat General (RG negre) i en VT IIIa (VT vermell).

Finalment cal afegir que, a partir de sa matriu de correlacions proveïda pes codi, s’ha comprovat numèricament que, es nou paràmetre  $\beta_0$  té també una molt baixa correlació amb sa resta de paràmetres cosmològics, essent es més correlacionat amb ell  $n_s$ , i es manco relacionat  $100\theta_{MC}$ . Aquest resultat numèric és constatable gràficament quan se construeixen gràfics de versemblança per a dos paràmetres, obtenint-se resultats similars an es presentats en Il·lustració XXXV (correlació baixa).

- *Resultats amb perturbacions escalars, CMB (Planck + WP) i BAO (o SNe Ia).*

Sa introducció des BAO no suposa grans canvis més enllà des que es estan descrits en (Planck Collaboration, 2014c), a on és dit que ses mesures des BAO són un complement extremadament valuós per a ses mesures de Planck. Sa combinació de ses mesures de Planck i de BAO condueixen a estrictes restriccions que afavoreixen per exemple: un univers pla ( $\Omega_K = 0$ ), un índex espectral escalar  $n_s < 1$ , una equació d’estat d’energia fosca de  $\omega = -1$ , un límit inferior de sa massa des neutrino, etc. En definitiva, en sa majoria de casos, unes restriccions sobre uns

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

paràmetres que no han entrat en es nostre encaix (perquè s'han fixat des d'un principi). Per això, no és estrany que, ses diferències trobades en sa Taula XII entre es millor encaix des model de Relativitat General i millor encaix des model VT IIIa, són molt petites. D'igual manera passa amb sos límits que defineixen es nivell de confiança  $1\sigma$  es quals són molt similars an es de Relativitat General (Taula XII).

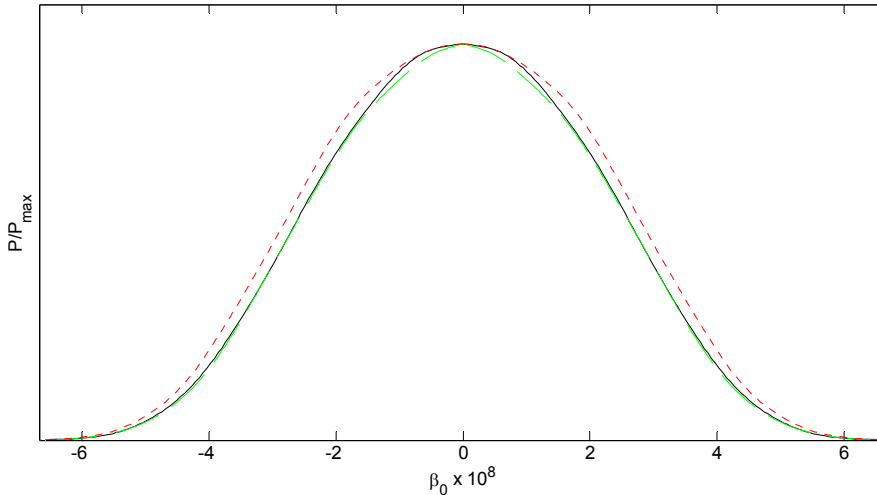
Símbol	Relativitat General			VT IIIa		
	ME	LI	LS	ME	LI	LS
$\beta_0 \times 10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	0,3162	-2,149	2,149
$\Omega_b h^2$	0,02206	0,02185	0,02234	0,02205	0,02184	0,02233
$\Omega_c h^2$	0,1193	0,1175	0,1209	0,1190	0,1174	0,1209
$100\theta_{MC}$	1,0413	1,0408	1,0419	1,0412	1,0408	1,0419
$\ln(10^{10} A_s)$	3,098	3,062	3,113	3,067	3,060	3,110
$n_s$	0,9639	0,9553	0,9667	0,9602	0,9559	0,9676
$\tau$	0,0954	0,0765	0,1025	0,0795	0,0758	0,1016
$\Omega_\Lambda$	0,6940	0,6848	0,7049	0,6950	0,6849	0,7054
$\Omega_m$	0,3060	0,2951	0,3152	0,3050	0,2946	0,3151
$\sigma_8$	0,8456	0,8274	0,8515	0,8305	0,8268	0,8507
$z_{re}$	11,55	9,98	12,16	10,15	9,92	12,07
$H_0$	67,98	67,30	68,83	68,02	67,31	68,87
$Y_P$	0,244845	0,244757	0,244960	0,244840	0,244754	0,244957
$t_0$	13,79	13,74	13,82	13,79	13,74	13,82

**Taula XII:** Valors obtinguts, tant pes paràmetres directes com es derivats, en es procediment d'encaix tant en Relativitat General com en sa teoria VT IIIa que en aquest cas, a més des dades de Planck + WP, s'ha inclòs dades relatives a BAO.

Comparant es resultat de  $\beta_0$  amb i sense BAO (veure taules Taula XI i Taula XII), veim que es valors des millors encaixos són bastant diferents, mentre que es límits inferior i superior en sa funció marginalitzada a nivell  $1\sigma$  ( $2\sigma$ ) són molt similars,  $[-2,149, 2,149]$  ( $[-3,894, 3,894]$ ) sense considerar BAO front a  $[-2,149, 2,149]$  ( $[-3,876, 3,876]$ ) considerant BAO.

Ets efectes d'incloure SNe Ia són similars an es que s'ha descrit amb sos BAO, es límits en  $\beta_0$  són lleugerament més amples a nivell  $1\sigma$  ( $2\sigma$ ):  $[-2,245, 2,245]$  ( $[-4,005, 4,005]$ ).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XL:** Representació de ses funcions de versemblança normalitzades, pes paràmetre  $\beta_0$ , obtingudes en s'ajust amb dades de Planck + WP (traç negre), de Planck + WP i BAO (traç verd) i amb Planck + WP i SNe Ia (traç vermell).

- *Resultats amb perturbacions escalars + tensorials i CMB (Planck + WP).*

Normalment, en es models cosmològics  $\Lambda$ CDM més bàsics només són considerats es modes escalars, tanmateix es modes tensorials primordials poden contribuir en s'espectre de potències de temperatura i polarització (Grishchuk, 1975; Starobinskij, 1979; Basko & Polnarev, 1980; Crittenden, Bond, Davis, Efstathiou, & Steinhardt, 1993; Crittenden, Coulson, & Turok, 1995). Ses anisotropies des CMB són produïdes pes modes tensorials mentre evolucionen fora de s'horitzó, ja que no més comencen a evolucionar dins de s'horitzó decauen; per açò només ses ones amb amplituds prou grans poden afectar an es CMB i ho farien per a valors de  $\ell \lesssim 80$ .

És convenient indicar que estam assumit que ses perturbacions primordials escalars són adiabàtiques, i a partir d'ara s'espectre de potències per a sa curvatura, en es creuament de s'horitzó, serà parametritzat de sa següent manera (Planck Collaboration, 2014c):

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.98) \quad P_{\mathfrak{R}}(k) = A_s \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1 + (1/2)(dn_s/d \ln k) \ln(k/k_0)},$$

amb  $k_0$  i  $dn_s/d \ln k$  constats. Es paràmetre  $dn_s/d \ln k$  és anomenat habitualment “*running index*” o simplement “*running*” i en es models analitzats fins ara ho hem pres com a nul ( $dn_s/d \ln k = 0$ ). S’escala pivot utilitzada ha estat fixada a  $k_0 = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ , aproximadament an es centre des rangs d’escalas logarítmiques sondejades per Planck (Planck Collaboration, 2014c). Considerarem a continuació, models amb una contribució significativa d’ones gravitatòries primordials (modes tensorials). Aquestes ones gravitatòries tendran un espectre parametritzat segons sa llei de potències següent:

$$(III.99) \quad P_t(k) = A_t \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_t}.$$

A partir de (III.98) i (III.99) definim sa ràtio  $r_{0,05} \equiv A_t/A_s$ , que és sa ràtio d’amplituds primordials tensor-escalar en  $k = k_0$ . En tot aquest apartat estam assumit que sa condició de consistència amb una inflació de tipus “*slow-roll*”,  $r_{0,05} = -n_t/8$  és satisfeta [com en (Planck Collaboration, 2014c)].

Ses noves simulacions amb s’inclusió des modes tensorials s’han duit a terme de dues maneres: sa primera afegint només s’ementat paràmetre  $r_{0,05}$  i considerant  $dn_s/d \ln k = 0$ , (“*no running*”) i una segona a on són considerats tots dos paràmetres  $r_{0,05}$  i  $dn_s/d \ln k$  (“*running*”).

Seguidament presentam es resultats més rellevants quan introduïm dites fluctuacions tensorials en es procés d’ajust.

Igual que hem fet quan hem considerat només modes escalars, començam amb so millor encaix i es límits per a un nivell de confiança de  $1\sigma$  per a sa distribució marginalitzada de paràmetres cosmològics en es cas d’un paràmetre.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Símbol	Relativitat General			VT IIIa		
	ME	LI	LS	ME	LI	LS
$\beta_0 \times 10^{-8}$	0,0	0,00	0,00	0,7825	-1,980	1,980
$\Omega_b h^2$	0,02203	0,02185	0,02234	0,02219	0,02180	0,02237
$\Omega_c h^2$	0,1184	0,1172	0,1207	0,1186	0,1164	0,1218
$100\theta_{MC}$	1,0413	1,0408	1,0419	1,0417	1,0407	1,0420
$\ln(10^{10} A_s)$	3,087	3,059	3,109	3,079	3,058	3,109
$n_s$	0,9638	0,9565	0,9682	0,9629	0,9550	0,9703
$\tau$	0,0905	0,0757	0,1010	0,08472	0,0747	0,1012
$r_{0,05}$	0,00845	0,0000	0,0550	0,00325	0,0000	0,0506
$\Omega_\Lambda$	0,6990	0,6860	0,7074	0,6997	0,6795	0,7128
$\Omega_m$	0,3010	0,2936	0,3140	0,3029	0,2872	0,3205
$\sigma_8$	0,8380	0,8259	0,8494	0,8349	0,8258	0,8512
$z_{re}$	11,12	9,89	12,01	10,57	9,85	12,03
$H_0$	68,30	67,38	68,95	68,48	66,88	69,34
$Y_p$	0,2448	0,2448	0,2450	0,2449	0,2447	0,2450
$t_0$	13,78	13,74	13,82	13,76	13,73	13,83
$r_{0,002}$	0,00754	0,00000	0,04985	0,00289	0,00000	0,04583

**Taula XIII:** Valors obtinguts pes paràmetres directes i derivats en es procediment d'encaix tant en Relativitat General com en sa teoria VT IIIa. En aquest cas s'han considerat es modes tensorials amb  $(dn_s/d \ln k) = 0$ . Es paràmetre  $r_{0,002}$  és un paràmetres derivat d'ús habitual que conté sa mateixa informació que  $r_{0,05}$ , però per a una escala  $k_0 = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ . Es límits marginalitzats inferior i superior per cadascun des paràmetres, a nivell de confiança de  $1\sigma$  (68%), estan marcats amb LI i LS respectivament.

En Il·lustració XLI podem veure una comparació entre ses funcions de versemblança corresponents a diverses triades des paràmetres que apareixen en ses equacions (III.98) i (III.99). En es cas de ses fluctuacions tensorials s'utilitza normalment  $r_{0,002}$  en lloc de  $A_t$  o  $r_{0,05}$ . Pot observar-se com sa distribució de versemblança corresponent a  $r_{0,002}$ , en Relativitat General és lleugerament més ampla, mentre que per a  $n_s$  i  $dn_s/d \ln k$  és justament an es contrari, aquest efecte és comú pes casos  $dn_s/d \ln k = 0$  i  $dn_s/d \ln k \neq 0$ . S'efecte de considerar  $dn_s/d \ln k \neq 0$  en VT IIIa segueix es mateix patró que en Relativitat General, es qual produeix una separació des límits des nivells de confiança pes paràmetres que caracteritzen ses



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

fluctuacions primordials (veure s'informació resumida en Taula XV, Taula XVI, Taula XVII).

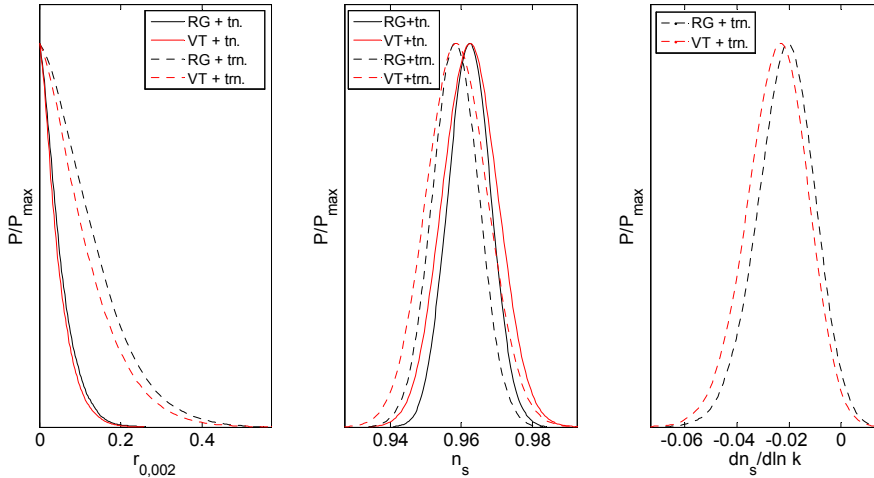
Per a sa resta de paràmetres ses diferències entre Relativitat General i VT IIIa per a un nivell de confiança de  $1\sigma$  són molt similars a ses obtengudes en es cas de considerar només pertorbacions escalars.

Símbol	Relativitat General			VT IIIa		
	ME	LI	LS	ME	LI	LS
$\beta_0 \times 10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	1,116	-3,138	3,138
$\Omega_b h^2$	0,02231	0,02204	0,02263	0,02224	0,02203	0,02270
$\Omega_c h^2$	0,1195	0,1176	0,1211	0,1198	0,1166	0,1222
$100\theta_{MC}$	1,0416	1,0409	1,0420	1,0411	1,0408	1,0421
$\ln(10^{10} A_s)$	3,107	3,079	3,144	3,112	3,081	3,146
$n_s$	0,9570	0,9520	0,9649	0,9611	0,9505	0,9673
$\tau$	0,0963	0,0834	0,1153	0,0992	0,0839	0,1164
$dn_s/d\ln k$	-0,01943	-0,03166	-0,00966	-0,00976	-0,03549	-0,01228
$r_{0,05}$	0,06629	0,00000	0,12357	0,01249	0,00000	0,10923
$\Omega_\Lambda$	0,6950	0,6855	0,7069	0,6919	0,6787	0,7135
$\Omega_m$	0,3050	0,2931	0,3145	0,3080	0,2864	0,3213
$\sigma_8$	0,8430	0,8306	0,8581	0,8492	0,8312	0,8594
$z_{re}$	11,55	10,62	13,14	11,82	10,67	13,18
$H_0$	68,20	67,46	69,07	67,90	66,99	69,56
$Y_p$	0,2449	0,2448	0,2451	0,2449	0,2448	0,2451
$t_0$	13,75	13,71	13,83	13,78	13,70	13,81
$r_{0,002}$	0,06556	0,00000	0,12807	0,01165	0,00000	0,11469

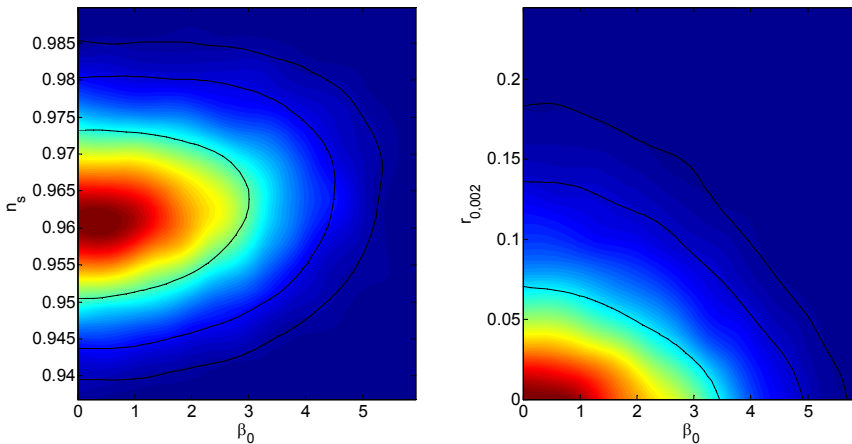
**Taula XIV:** Valors obtenguts pes paràmetres considerant es modes tensorials amb  $dn_s/d\ln k \neq 0$ . Es límits marginalitzats inferior i superior per cadascun des paràmetres, a nivell de confiança de  $1\sigma$  (68%), estan marcats amb LI i LS respectivament.

Continuam amb es límits per a un nivell de confiança de  $1\sigma$  per a ses distribucions marginalitzades amb dos paràmetres cosmològics, aquests mostren que ses correlacions des paràmetre  $\beta_0$ , característic de sa teoria VT IIIa, són similars an es cas de quan només són considerades pertorbacions escalars (veure Il·lustració XLII).

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XLI:** Representació de sa funció de versemblança normalitzada pes paràmetres  $r_{0,002}$  i  $n_s$  en Relativitat General (RG línia negra) i VT IIIa (VT línia vermella). S’ha fet ús des traç sòlid per indicar que ses perturbacions tensorials són amb  $dn_s/d \ln k = 0$ , mentre que es traç a ratlles considera  $dn_s/d \ln k \neq 0$ .



**Il·lustració XLII:** D’esquerra a dreta, funció de versemblança per sa parella  $(\beta_0, n_s)$ , i  $(\beta_0, r_{0,002})$  s’escala de colors vermell–blau va de major a menor versemblança per a sa teoria VT IIIa es cas de  $dn_s/d \ln k = 0$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Tipus d'encaix	$1\sigma$		$2\sigma$		$3\sigma$	
	LI	LS	LI	LS	LI	LS
RG sense BAO	0,955	0,967	0,950	0,972	0,946	0,975
VT sense BAO	0,954	0,968	0,946	0,976	0,942	0,981
RG amb BAO	0,955	0,967	0,950	0,972	0,947	0,976
VT amb BAO	0,956	0,968	0,950	0,973	0,947	0,978
RG + Tensor	0,957	0,968	0,954	0,971	0,948	0,978
VT + Tensor	0,955	0,970	0,948	0,978	0,943	0,983
RG + Tensor + running	0,952	0,965	0,946	0,971	0,941	0,975
VT + Tensor + running	0,951	0,967	0,943	0,976	0,937	0,981

**Taula XV:** Presentació resumida relativa a  $n_s$  pes nivells de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$  en es tres casos analitzats tant per a Relativitat General com per a VT IIIa.

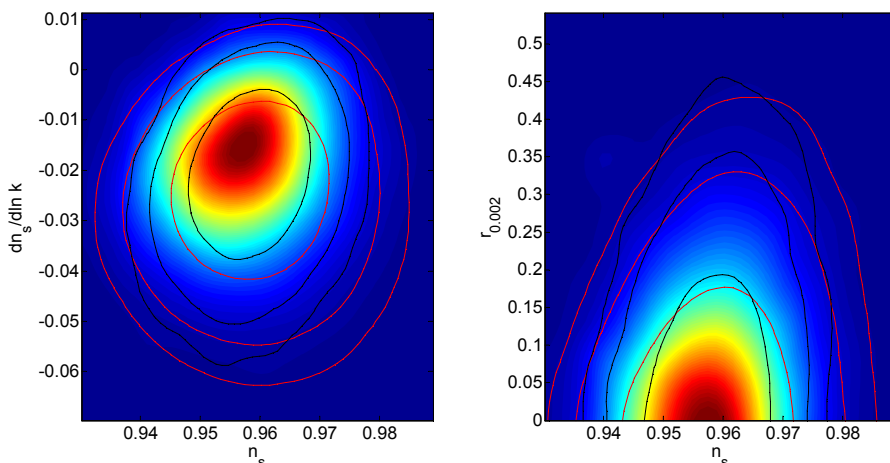
Tipus d'encaix	$1\sigma$	$2\sigma$	$3\sigma$
RG + Tensor	< 0,050	< 0,116	< 0,163
VT + Tensor	< 0,046	< 0,109	< 0,155
RG + Tensor + running	< 0,128	< 0,277	< 0,381
VT + Tensor + running	< 0,115	< 0,257	< 0,363

**Taula XVI:** Presentació resumida relativa a  $r_{0,002}$  pes nivells de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$  en es dos casos analitzats tant per a Relativitat General com per a VT IIIa.

Tipus d'encaix	$1\sigma$		$2\sigma$		$3\sigma$	
	LI	LS	LI	LS	LI	LS
RG+Tensor+ running	-0,0317	-0,0097	-0,0422	-0,0012	-0,0524	0,0044
VT+Tensor+ running	-0,0355	-0,0012	-0,0482	-0,0021	-0,0569	0,0025

**Taula XVII:** Presentació resumida relativa a  $(dn_s/d \ln k)$  pes nivells de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$  per a Relativitat General i per a VT IIIa.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XLIII:** D'esquerra a dreta, funció de versemblança per sa parella  $(n_s, dn_s/d \ln k)$ , i  $(n_s, r_{0,002})$  s'escala de colors vermell–blau va de major a menor versemblança per a sa teoria VT IIIa. De dins cap a fora, es tres contorns vermells (negres) corresponen a un valor pes nivell de confiança de  $1\sigma$  (68%),  $2\sigma$  (95%) i  $3\sigma$  (99,7%) per a VT IIIa (Relativitat General).

Es límits trobats per a  $r_{0,002}$  que trobam en sa Taula XVI té importants implicacions en s'epoca inflacionària. Es límit superior trobat se trasllada directament a través de sa relació (III.100) com a límit superior en s'escala d'energia de s'inflació (Linde, 1983; Lyth, 1984). Per tant sa teoria VT IIIa prediu un límit lleugerament inferior per sa dita escala d'energia.

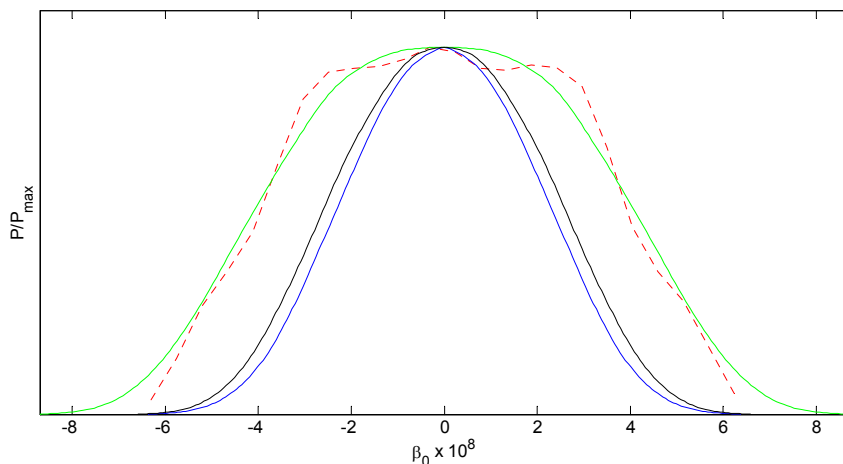
$$(III.100) \quad V_* = (1,94 \times 10^{16} \text{ GeV})^4 (r_{0,002}/0,12),$$

Observam en Il·lustració XLIII com, igual que en RG, s'index espectral per a ses pertorbacions escalars  $n_s$ , està molt poc correlacionat amb s'amplitud tensorial.

Finalment es presenta un parell d'il·lustracions, sa primera és un resumen de sa funció de versemblança normalitzada pes paràmetre  $\beta_0$ , en es diferents casos estudiats (Il·lustració XLIV). És observat que, igual que passa amb  $r_{0,002}$ , es límits se separen

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

substancialment quan s'inclou variació de s'índex espectral escalar és a dir quan  $dn_s/d \ln k \neq 0$ . En una segona il·lustració (Il·lustració XLV) podem apreciar clarament aquest efecte en ses diverses distribucions a dos paràmetres, a on  $\beta_0$  és combinat amb un altre paràmetre.



**Il·lustració XLIV:** Distribucions a posteriori pes paràmetre  $\beta_0$  obtingudes amb dades de Planck + WP (traç negre sòlid), WMAP7 (traç vermell discontinu) ambdós considerant només fluctuacions escalars. Es traços sòlids blau i verd corresponen a introduir perturbacions tensorials amb dades de Planck + WP, amb  $dn_s/d \ln k = 0$  i  $dn_s/d \ln k \neq 0$ , respectivament.

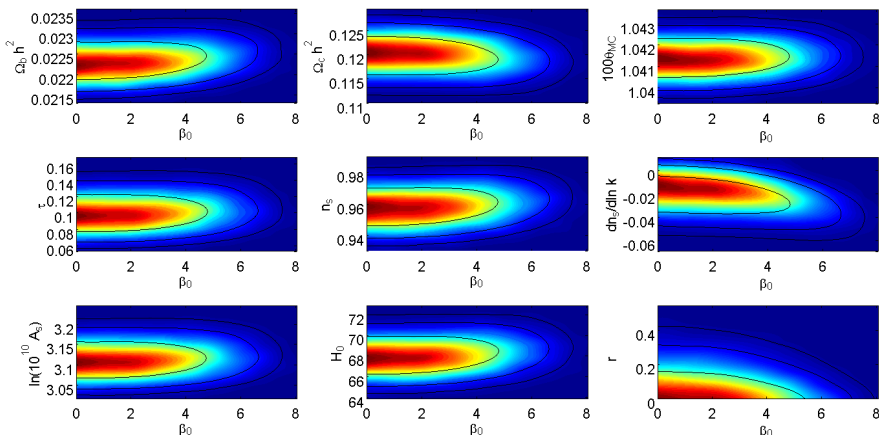
Quant es nivells de convergència, hem comprovat en tots es casos estudiats, que sa dispersió de ses mitjanes entre cadenes, és petita en comparació amb sa desviació estàndard. Dits nivells de convergència són avaluats amb s'estimador  $R$  (un per cadascun des paràmetres) estàndard de Gelman i Rubin (Gelman & Rubin, 1992), essent és criteri estàndard  $R-1 < 0,01$  pes paràmetre ortogonalitzat manco convergent. Aquest criteri sol esser suficient per a una mostra fiable en sa majoria des casos. En es casos analitzats per a Relativitat General: perturbacions escalars (amb i sense BAO), escalars més tensorials sense "running" i escalars més tensorials amb "running"), es pitjor valor de dit estimador ha estat  $\sim 0,005$ , i per a VT IIIa ha estat  $\sim 0,002$ , i concretament pes paràmetre característic

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

de sa teoria  $\beta_0$ , es pitjor valor obtingut ha estat  $\sim 0,001$ . Aquestes dades relatives a  $R-1$  indiquen que  $\beta_0$  és un paràmetre molt convergent en s'encaix de sa teoria VT IIIa.

Es 30% inicial de cada cadena ha estat descartat, ja que ses primeres cadenes són obtingudes en es període conegut com a “període de cremat” a on sa mostra pot esser significativament no Markoviana (Guttorp & Minin, 1995; Brémaud, 1999).

Finalment és interessant esmentar que, en tots es casos estudiats sa relació entre sa funció de versemblança de VT IIIa i Relativitat General per es millor encaix és  $R_L = \mathcal{L}(VT)/\mathcal{L}(RG) > 1$  per sa qual cosa, des d'un punt de vista estadístic VT IIIa és lleugerament més probable que Relativitat General.



**Il·lustració XLV:** Funció de versemblança per sa parella  $\beta_0$  i  $dn_s/d \ln k \neq 0$ , s'escala de colors vermell–blau va de major a menor versemblança.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### 2.7. Es model en simetria esfèrica estàtica.

Atès es bons resultat obtinguts en es capítols anteriors amb sa teoria VT IIIa aplicada a cosmologia, a on sa densitat d'energia des *background*  $\rho_A$ , provenint des camp vectorial  $A^\mu$ , pren es paper de la constant cosmològica ( $w_A = \rho_A/p_A = -1$ ). Hem estimat es paràmetres cosmològics utilitzant ses prediccions de sa teoria VT IIIa i dades observacionals de SNIa, CMB (WMAP7 i Planck + WP) i BAO.

Ja s'ha vist que sa viabilitat de VT IIIa com una teoria de gravitació i es seu paper com a constant cosmològica requereixen que es paràmetres  $\varepsilon$  i  $\eta$  satisfacin ses desigualtats  $\varepsilon > \frac{\eta}{2} > 0$ , però es seus valors no queden determinats. En aquesta situació, val sa pena s'estudi de noves aplicacions de sa teoria VT IIIa, amb s'objectiu essencial de sa determinació de  $\varepsilon$  i  $\eta$ , i de qualche altra quantitat arbitrària relacionada amb so nostre limitat coneixement de sa naturalesa i propietats de  $A^\mu$ , ses quals estan essent analitzades. Es resultats anteriors (basats en linealitat) suggereixen que ses noves aplicacions deurien d'esser no lineals, com són: (1) ets horitzons des forats negres de diferents mides i ses seves proximitats, (2) s'evolució cosmològica de ses estructures no lineals (galàxies, cúmuls, supercúmuls, etc.) mitjançant s'ús d'aproximacions o de simulacions, i (3) sistemes estel·lars binaris que irradien ones gravitatòries. En aquesta secció sa nostra atenció se centra en es més simple d'aquests problemes: s'estudi d'ets horitzons de sa teoria VT IIIa en s'espai-temps exterior amb simetria esfèrica estacionària (sense contingut de matèria), que queda plenament caracteritzat per sa massa  $m$  (sense càrrega elèctrica ni rotació) i la constant cosmològica  $\Lambda$  (Dale, Fullana, & Sáez, 2015).

Mitjançant es càlcul variacional, ja havien obtingut ses equacions de camp (III.9) i es tensor energia-moment (III.10) [o bé (III.11)] que utilitzarem en aquesta secció. No obstant això ses equacions d'Einstein modificades seran aquí escrites de sa següent forma:

$$(III.101) \quad G^{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_m^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu} \right) + T_\Lambda^{\mu\nu} .$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

on  $T_m^{\mu\nu}$  és sa contribució de sa matèria an es tensor energia-moment amb sa mateixa forma que en Relativitat General,  $T_A^{\mu\nu}$  és es tensor energia-moment deguda a sa contribució des camp  $A^\mu$  que pren sa forma (III.10) [o bé (III.11)] i, finalment,  $T_\Lambda^{\mu\nu}$  que pren sa mateixa forma que en Relativitat General, és a dir:

$$(III.102) \quad T_\Lambda^{\mu\nu} = -\Lambda g^{\mu\nu},$$

Per conveniència, en aquesta secció, es sistema d'unitats és tal que  $c = G = 1$ , és a dir farem ús d'unitats geometritzades. Sa dimensió de qualche quantitat és  $L^n$ , essent  $n$  un número enter. Hem triat es quilòmetre com a unitat de longitud. Per altra banda, sia qual sia sa funció  $\psi$ , sa quantitat  $\psi'$  representa sa derivada parcial respecte sa coordenada radial  $r$ .

Atès que es paràmetres  $\eta$  i  $\varepsilon$  són adimensionals, una anàlisi dimensional de ses equacions (III.101) i (III.10) condueixes a s'important conclusió que sa dimensió de ses components de  $A^\mu$  és  $L^0$ . Aquest fet serà important més endavant. Mitjançant s'ús de ses unitats triades i sa relació entre es tensor d'Einstein  $G^{\mu\nu}$  i es de Ricci  $R^{\mu\nu}$ , podem escriure s'equació (III.101) de sa següent manera:

$$(III.103) \quad R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} R \delta^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\nu,$$

on  $\delta^\mu{}_\nu$  és sa delta de Kronecker i

$$(III.104) \quad T^{\mu\nu} = 8\pi G (T_m^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu}) + T_\Lambda^{\mu\nu}.$$

De manera senzilla podem re-escriure s'equació (III.103) en sa forma:

$$(III.105) \quad T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} T \delta^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu,$$

essent  $T$  s'escalar definit segons  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ .



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### 2.7.1. Ses equacions bàsiques en simetria esfèrica estàtica.

És ben conegut que, en es cas de simetria esfèrica estàtica, s'element de línia pot esser escrit de sa següent manera (Stephani, Kramer, MacCallum, Hoenselaers, & Herlt, 2003):

$$(III.106) \quad ds^2 = -e^{2\alpha(r)} d\tau^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

i, a més, ses components covariants des camp vectorial  $A^\mu$  prenen sa forma:

$$(III.107) \quad A_\mu \equiv [A_0(r), A_1(r), 0, 0].$$

Idò, és immediat provar que ses úniques components no nul·les des tensor  $F_{\mu\nu}$  són

$$(III.108) \quad F_{10} = -F_{01} = A'_0.$$

Per tant, tenim un total de quatre funcions desconegudes  $\alpha(r)$ ,  $\beta(r)$ ,  $A_0(r)$  i  $A_1(r)$  que hem de solucionar mitjançant ses equacions (III.9) i (III.105).

En sa resta d'aquesta secció, s'assumeix que es tensor que representa sa matèria  $T_m^{\mu\nu}$  és nul. És necessari recordar que es paràmetres  $\eta$  i  $\varepsilon$  són ets originals de Will (Will, 1993) que apareixen en (I.42) dividits de  $8\pi G$ , tal com és descrit en sa secció 2, però en aquesta ocasió com succeeix que feim ús d'unitats geometritzades aquestes són dividides per  $8\pi$ .

Tenint en compte ses equacions (III.10), (III.102), i (III.105) més (III.106)–(III.108), ses úniques components de  $T^{\mu\nu}$  no nul·les són:

$$(III.109) \quad T^{10} = T^{01} = 8\pi \eta g^{00} g^{11} A_0 (\nabla \cdot A)',$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.110) \quad T^{00} = g^{00} \left\{ 4\pi (2\varepsilon - \eta) \left[ g^{00} g^{11} (A'_0)^2 \right] - 4\pi \eta \left[ 2A^1 (\nabla \cdot A)' + (\nabla \cdot A)^2 \right] - \Lambda \right\},$$

$$(III.111) \quad T^{11} = g^{11} \left\{ 4\pi (2\varepsilon - \eta) \left[ g^{00} g^{11} (A'_0)^2 \right] - 4\pi \eta \left[ -2A^1 (\nabla \cdot A)' + (\nabla \cdot A)^2 \right] - \Lambda \right\},$$

$$(III.112) \quad T^{22} = g^{22} \left\{ 4\pi (2\varepsilon - \eta) \left[ g^{00} g^{11} (A'_0)^2 \right] - 4\pi \eta \left[ 2A^1 (\nabla \cdot A)' + (\nabla \cdot A)^2 \right] - \Lambda \right\},$$

$$(III.113) \quad T^{33} = g^{33} \left\{ 4\pi (2\varepsilon - \eta) \left[ g^{00} g^{11} (A'_0)^2 \right] - 4\pi \eta \left[ 2A^1 (\nabla \cdot A)' + (\nabla \cdot A)^2 \right] - \Lambda \right\}.$$

En Relativitat General ses solucions de Schwarzschild –en absència de constant cosmològica– (Schwarzschild, 1916) i Kottler-Schwarzschild-de Sitter –que inclou s'efecte local de sa constant cosmològica– (Kottler, 1918), i altres solucions, tenen un element de línia que és una particularització des que és presentat en s'expressió (III.106). En cap cas s'ha de pensar que s'element de línia (III.106), que no depèn de temps, descriu un espai-temps cosmològic. Sa regió on aquestes solucions tenen un significar físic acceptable, ha d'esser determinada en cada cas; per exemple, aquelles regions on  $g_{00} > 0$  han d'esser excloses. En sa teoria VT IIIa, hem vist (en sa secció 2.2) que la constant cosmològica està relacionada amb so valor de sa divergència des camp vectorial  $[(\nabla \cdot A)]$  en l'Univers de *background*, però ben alerta, ja que aquest valor és diferent an es que pren  $(\nabla \cdot A)$  en es cas de simètrica esfèrica estacionària; per aquesta raó, maldament es seu origen, en aquesta secció la constant

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

cosmològica és tractada com en Relativitat General, i se denota amb  $\Lambda$ .

Per obtenir ses solucions de sa simètrica esfèrica estacionària, ho farem en diverses passes. Sa primera d'elles, que se descriu a continuació, consisteix en demostrar que sa divergència des camp vectorial  $[(\nabla \cdot A)]$  és constant, maldament es seu valor no sia es cosmològic. Considerem ses equacions (III.103), per a  $\mu = 1$  i  $\nu = 0$ . Com succeeix que ses components  $R^1_0$  i  $\delta^1_0$  són nul·les, fent ús de (III.109), s'obté de manera immediata que  $8\pi\eta g^{00} g^{11} A_0 (\nabla \cdot A)' = 0$ ; per tant per a  $\eta \neq 0$ ,  $g^{00} \neq 0$ ,  $g^{11} \neq 0$  i  $A_0 \neq 0$ , succeeix que  $(\nabla \cdot A)'$  ha d'anul·lar-se, sa qual cosa de forma trivial implica:

$$(III.114) \quad (\nabla \cdot A) = K_0,$$

essent  $K_0$  sa constant d'integració. Cal adonar-se que si  $A_0 = 0$ , immediatament trobam que totes ses components de  $F_{\mu\nu}$  serien nul·les, idò ses equacions de camp (III.9) implicarien de nou que  $(\nabla \cdot A)' = 0$ , per sa qual cosa s'equació (III.114) també seria vàlida.

En una segona passa, cercam quina relació existeix (si existeix qualcuna) entre ses funcions  $\alpha(r)$  i  $\beta(r)$ . Per fer tal feina, primer calculam sa traça  $T$ , a partir de ses components de  $T^{\mu\nu}$ , que trobam en (III.109)–(III.113), i ses components de sa mètrica  $g_{\mu\nu}$ ; d'aquesta manera obtenim:

$$(III.115) \quad T = -16\pi\eta \left[ A^1 (\nabla \cdot A)' + (\nabla \cdot A)^2 \right] - 4\Lambda,$$

i llavors tenint en compte aquest resultat i ses equacions (III.105) i (III.114), trobam sa relació

$$(III.116) \quad R^0_0 = R^1_1.$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Per s'altra banda a partir de sa definició des tensor de Ricci, podem treure sa resta de components no nul·les de dit tensor, aquestes són:

$$(III.117) \quad R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta' + 2r^{-1}\alpha' \right],$$

$$(III.118) \quad R_{11} = -\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha'\beta' + 2r^{-1}\alpha',$$

$$(III.119) \quad R_{22} = e^{-2\beta} \left[ r(\beta' - \alpha') \right] + 1,$$

$$(III.120) \quad R_{33} = \sin^2 \theta R_{22},$$

Amb aquestes components i s'equació (III.116) s'obté

$$(III.121) \quad 2r^{-1}(\alpha' + \beta') = 0.$$

En Relativitat General s'obté aquesta mateixa equació que una volta integrada condueix a  $\alpha(r) = -\beta(r)$  [veure, per exemple (Stephani, Kramer, MacCallum, Hoenselaers, & Herlt, 2003)]. Si tornam a (III.106), s'anterior relació implica que  $g^{00}g^{11} = -1$ .

En tercer lloc, partint de ses equacions des camp vectorial (III.9) treim  $A_0(r)$ . Si tenint en compte que  $(\nabla \cdot A)$  és constant [veure (III.114)], així com és fet que  $2\varepsilon - \eta \neq 0$  (veure sa secció 2), és immediat que ses equacions des camp vectorial (III.9) queden reduïdes a  $\nabla^\nu F_{\mu\nu} = 0$ . A continuació, tenint en compte ses equacions (III.107)–(III.108), és molt senzill calcular-se sa derivada covariant  $\nabla^\nu F_{\mu\nu}$ , sa qual cosa condueix fàcilment a

$$(III.122) \quad A_0'' + 2r^{-1}A_0' = 0.$$

Si definim una nova funció  $y(r) \equiv A_0'(r)$ , sa darrera equació queda reduïda a una equació diferencial de primer grau que s'escriu  $y' + 2r^{-1}y = 0$ . Sa solució d'aquesta equació és  $y = A_0' = -R_0/r^2$  que de nou integram per obtenir:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.123) \quad A_0(r) = R_0 r^{-1} + R_1,$$

on  $R_0$  i  $R_1$  són ses constants d'integració.

Seguidament, en quart lloc, procedim amb so càlcul de ses components de sa mètrica, és a dir  $g_{00}$  i  $g_{11}$ , a tal efecte escrivim ses equacions (III.105) per a  $\mu = 1$  i  $\nu = 1$ . Aquesta equació pren sa següent forma:

$$(III.124) \quad \begin{aligned} &4\pi(\eta - 2\varepsilon)(A'_0)^2 - 4\pi\eta(\nabla \cdot A)^2 - \Lambda - T/2 = \\ &e^{2\alpha} \left[ -\alpha'' - 2(\alpha')^2 - 2r^{-1}\alpha' \right], \end{aligned}$$

on hem considerat sa relació  $g^{00}g^{11} = -1$ , ses components no nul·les des Ricci  $R_{\mu\nu}$  presentades en (III.116)–(III.120), ses components des tensor energia-moment  $T^{\mu\nu}$  que trobam en (III.109)–(III.113), i s'equació (III.114). Si ara procedim d'igual manera i escrivim ses equacions (III.105) per a  $\mu = 2$  i  $\nu = 2$  podem escriure sa següent expressió:

$$(III.125) \quad \begin{aligned} &4\pi(2\varepsilon - \eta)(A'_0)^2 - 4\pi\eta(\nabla \cdot A)^2 - \Lambda - T/2 = \\ &\frac{1}{r^2} \left[ e^{2\alpha} (-2r^{-1}\alpha' - 1) + 1 \right]; \end{aligned}$$

si restam ses equacions (III.124) i (III.125), i es resultat és multiplicat pes factor  $e^{2\alpha}$ , s'obté sa següent equació diferencial de segon ordre:

$$(III.126) \quad \alpha'' + 2(\alpha')^2 + \left[ r^{-2} + 8\pi(\eta - 2\varepsilon)(A'_0)^2 \right] e^{-2\alpha} - r^{-2} = 0.$$

Aquesta equació diferencial pot esser solucionada mitjançant s'ús d'una nova funció  $w(r) = e^{-2\alpha(r)}$ . En funció de  $w(r)$  s'equació (III.126) queda com segueix:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.127) \quad w'' - 2r^{-2}w = g(r),$$

on  $g(r) = -2\left[r^{-2} + 8\pi(\eta - 2\varepsilon)(A'_0)^2\right]$  i  $A'_0 = -R_0/r^2$  [veure (III.123)]. Sa solució general de s'equació diferencial de segon ordre (III.127) és  $w(r) = w_h(r) + w_p(r)$ , essent  $w_h(r)$  sa solució de s'equació homogènia corresponent i  $w_p(r)$  una solució particular de s'equació no homogènia completa (Wirkus & Swift, 2006). Sa solució general de s'equació homogènia és:

$$(III.128) \quad w_h(r) = C_1 w_1(r) + C_2 w_2(r) = C_1 r^2 + C_2 r^{-1},$$

on  $C_1$  i  $C_2$  són ses constants d'integració.

A continuació, per tal d'obtenir una solució particular  $w_p(r)$ , utilitzarem es mètode anomenat de variació de paràmetres (Weisstein, 2015); amb aquest mètode recercarem una solució que tenguí sa següent forma:

$$(III.129) \quad \begin{aligned} w_p(r) &= u_1(r)w_1(r) + u_2(r)w_2(r) \\ &= u_1(r)r^2 + u_2(r)r^{-1}, \end{aligned}$$

amb

$$(III.130) \quad \begin{aligned} u_1(r) &= -\int \frac{w_2(r)g(r)}{W_{(w_1, w_2)}(r)} dr, \\ u_2(r) &= -\int \frac{w_1(r)g(r)}{W_{(w_1, w_2)}(r)} dr, \end{aligned}$$

i es Wronskian  $W_{(w_1, w_2)}$  és:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 (III.131) \quad W_{(w_1, w_2)}(r) &= \begin{vmatrix} w_1(r) & w_2(r) \\ w_1'(r) & w_2'(r) \end{vmatrix} \\
 &= w_1(r)w_2'(r) - w_1'(r)w_2(r) \\
 &= -3,
 \end{aligned}$$

i llavors, sa solució particular  $w_p(r)$  pren sa forma:

$$\begin{aligned}
 (III.132) \quad w_p(r) &= 1 - \frac{16\pi}{3}(\eta - 2\varepsilon) \left[ r^2 \int r^{-1} [A_0'(r)] dr \right. \\
 &\quad \left. - r^{-1} \int r^2 [A_0'(r)] dr \right].
 \end{aligned}$$

Quan introduïm sa forma explícita de  $A_0'(r)$  [veure (III.123)] en aquesta darrera equació, trobam immediatament

$$(III.133) \quad w_p(r) = 1 + 4\pi(2\varepsilon - \eta)R_0^2 r^{-2}.$$

Una volta tenim sa solució general de s'equació homogènia  $w_h(r)$  i sa solució particular  $w_p(r)$  que trobam en (III.128) i (III.133), respectivament, podem escriure sa forma general de sa funció  $w(r) = e^{\alpha(r)}$  que directament condueixen a ses components de sa mètrica

$$(III.134) \quad g_{00} = -\left[1 + C_1 r^2 + C_2 r^{-1} + 4\pi(2\varepsilon - \eta)R_0^2 r^{-2}\right],$$

i

$$(III.135) \quad g_{11} = -g_{00}^{-1}.$$

Com a darrera passa des càlcul, hem d'integrar s'equació (III.114) per així obtenir sa funció  $A_1(r)$ . Sa dita equació pot esser reescrita com segueix

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.136) \quad \nabla \cdot A = e^{2\alpha} \left[ 2(\alpha' + r^{-1}) A_1 + A_1' \right] = K_0.$$

Aquesta és una equació diferencial de primer ordre lineal de sa forma  $h(r) A_1' = f_1(r) A_1 + K_0$ , amb  $h(r) = e^{2\alpha}$  i  $f_1(r) = -2e^{2\alpha} (\alpha' + r^{-1})$ . Sa solució per aquesta equació diferencial és:

$$(III.137) \quad A_1(r) = e^{F(r)} \left[ K_1 + \int e^{-F(r)} \frac{K_0}{h(r)} dr \right],$$

on  $K_1$  és una nova constant d'integració i  $F(r) = \int [f_1(r)/h(r)] dr$ . Resolent aquestes integrals s'obté:

$$(III.138) \quad A_1(r) = \frac{K_0 r/3 + K_1 r^{-2}}{1 + C_1 r^2 + C_2 r^{-1} + 4\pi(2\varepsilon - \eta) R_0^2 r^{-2}}.$$

En resum, ses equacions (III.123) i (III.138) determinen, salvant ses constants, es camp vectorial  $A^\mu$ , mentre que ses equacions (III.134)–(III.135) proporcionen, salvant igualment ses constants, sa mètrica de sa teoria VT IIIa en es cas de simetria esfèrica estacionària. Observam que sa mètrica resultant és una generalització de Kottler–Schwarzschild–de Sitter (Faraoni, 2015) que és recuperada, en sa seva forma de Relativitat General quan  $C_1 = -\frac{\Lambda}{3}$ ,  $C_2 = -2m = R_s$  (essent  $R_s$  es radi de Schwarzschild) i  $2\varepsilon - \eta = 0$ . En sa teoria VT IIIa hem trobat un nou terme  $4\pi(2\varepsilon - \eta) R_0^2 r^{-2}$  que sempre és positiu ja que se satisfà  $2\varepsilon - \eta > 0$  (veure sa secció 2). Aquesta mètrica obtenguda en es marc de sa teoria VT IIIa és similar a sa mètrica de Reissner–Nordström–de Sitter (Kayll, 1979), que pertoca a un sistema de simetria esfèrica estacionària amb càrrega en es marc de sa Relativitat General. En aquest conegut cas sa mètrica és:



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.139) \quad g_{00} = -g_{11}^{-1} = -\left[1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{Q^2}{r^2}\right],$$

que involucra igualment un terme positiu proporcional a  $1/r^2$  dependent de sa càrrega elèctrica; és evident que en ses expressions (III.134)–(III.135) existeix un terme d'aquest tipus, però en aquest cas en lloc de  $Q^2$  trobam sa constant  $4\pi(2\varepsilon - \eta)R_0^2$ .

Finalment en s'altra solució trobada per a  $A_0 = 0$ , que havíem vist que també compleix  $(\nabla \cdot A)' = 0$ , ses components de sa mètrica són ses mateixes que en Relativitat General, per sa qual cosa s'anàlisi d'ets horitzons és idèntic an es cas de Kottler–Schwarzschild–de Sitter [veure (Faraoni, 2015)]. S'única component no nul·la,  $A_1$ , pren sa mateixa forma que per a  $A_0 \neq 0$ , però sense es terme  $4\pi(2\varepsilon - \eta)R_0^2r^{-2}$ , idò  $A_1$  no depèn des paràmetres  $\varepsilon$  i  $\eta$  de sa teoria ni tampoc influeix en ets horitzons (aquesta darrera propietat també se complia amb sa solució corresponent a sa condició  $A_0 \neq 0$ ). Aquesta component té sa forma següent:

$$(III.140) \quad A_1(r) = \frac{K_0r/3 + K_1r^{-2}}{1 + C_1r^2 + C_2r^{-1}}.$$

### 2.7.2. Ets horitzons en simetria esfèrica estàtica.

Hem trobat que en sa solució de ses equacions de sa teoria VT IIIa en simetria esfèrica estacionària, fora de sa distribució de sa matèria, i en absència de càrrega elèctrica, estan involucrades ses següent constants d'integració:  $R_0, R_1, K_0, K_1, C_1$ , i  $C_2$ . En aquest cas, es sistema físic en qüestió està totalment descrit per ses quantitats  $m$  i  $\Lambda$ , amb dimensions  $L^1$  i  $L^{-2}$ , respectivament. A continuació realitzarem una anàlisi dimensional per tal d'esbrinar sa dependència des paràmetre  $R_0$ , involucrat en ses components de sa mètrica, en funció de  $m$  i  $\Lambda$ .

En es cas de Relativitat General (Kottler–Schwarzschild–de Sitter) també apareixen ses constants  $C_1$  i  $C_2$ . Atès que ses

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

components de sa mètrica  $g_{\mu\nu}$  són  $L^0$ , es terme  $C_2/r$  que apareix en  $g_{00}$  i  $g_{11}$  [(III.134)–(III.135)] és adimensional i llavors  $C_2$  ha de tenir dimensions de  $L^1$ , sa qual cosa significa que podem escriure  $C_2$  com a un cert número adimensional  $\tilde{C}_2$  per sa massa, és a dir  $C_2 = \tilde{C}_2 m$ ; en aquest cas és conegut que existeix criteri per a concloure que  $\tilde{C}_2 = -2$  i que condueix an es ben conegut terme  $-2m/r$ . Amb sos mateixos arguments arribam a sa conclusió que, sa dimensió de  $C_1$  és  $L^2$ ; sa qual cosa significa que podem escriure  $C_1$  com a un cert número adimensional  $\tilde{C}_1$  per  $\Lambda$ . En aquest cas, també hi ha arguments per concloure que  $\tilde{C}_1 = -1/3$ , que condueix an es ben conegut terme  $-\Lambda r^2/3$  que, igual que abans, trobam en sa mètrica de Kottler–Schwarzschild–de Sitter.

Procedim, a continuació, amb una anàlisi semblant per ses constants  $R_0$  i  $R_1$ . A partir de s'equació (III.123) i tenint en compte que sa component  $A_0$  és adimensional i és sa suma des termes  $R_0 r^{-1}$  i  $R_1$ , és immediat treure que ses dimensions de  $R_0$  i  $R_1$  són, respectivament  $L^1$  i  $L^0$ , i en conseqüència, concloem que sa constant  $R_0$  ha d'esser es producte d'una certa constant adimensional  $\tilde{R}_0$  per sa massa, és a dir  $R_0 = \tilde{R}_0 m$ . En aquest cas, no tenim cap criteri per a fixar es valor d'aquesta constant adimensional  $\tilde{R}_0$ , que de moment queda arbitrària. Aquesta anàlisi no proporciona informació respecte a sa constant adimensional  $R_1$ . No obstant això, a partir de ses equacions (III.134) i (III.135) és clar que, atès que ses components de sa mètrica no depenen de  $R_1$ , no és necessari es seu coneixement per s'estudi d'ets horitzons.

No és necessari estendre s'anàlisi dimensional a  $A_1$  ja que ses components de sa mètrica són independents de ses constants  $K_0$  i  $K_1$  que són ses úniques que apareixen en  $A_1$  [veure (III.139)].

Amb totes aquestes consideracions podem escriure:

$$(III.141) \quad A_0(r) = \tilde{R}_0 m r^{-1} + R_1,$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.142) \quad g_{00} = -g_{11}^{-1} = -\left[1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2m}{r} + 4\pi(2\varepsilon - \eta)\tilde{R}_0^2 \frac{m^2}{r^2}\right],$$

quedant  $\tilde{R}_0$  com a una constant adimensional arbitrària, que ha d'esser fixada per estudis de problemes no lineal apropiats en es marc de sa teoria VT IIIa, com per exemple, es moviment geodèsic de partícules de prova prop des possibles horitzons.

Si definim sa funció  $f(r) \equiv -g_{00}(r)$ , ets horitzons són ses hipersuperfícies  $r = r_h$  que compleixen sa condició  $f(r_h) = 0$ . S'espai-temps esfèricament simètric i estacionari és físicament consistent en ses regions a on se satisfaci sa condició  $f(r) > 0$ , mentre que  $f(r) < 0$  és incompatible amb sa signatura assumida.

A partir d'aquest moment considerarem que es valor des paràmetre de densitat d'energia de buit  $\Omega_\Lambda$  és 0,73 corresponent a un valor de la constant cosmològica en es sistema d'unitats triat de  $\Lambda \simeq 10^{-46} \text{ km}^{-2}$ . Aquest valor explica sa majoria d'observacions actuals en es model  $\Lambda$ CDM en es marc de sa Relativitat General, així com en es marc de sa teoria VT IIIa [veure (Dale & Sáez, 2014)].

Es rang de masses a variar serà entre es valor de  $10 M_\odot$  i  $10^9 M_\odot$ ; per tant, considerarem ses masses de diferents tipus de forats negres. Des de forats negres estel·lars causats per explosions de supernoves, an es supermassius situats en ses regions centrals de ses galàxies.

Per a una certa massa  $m$ , sa funció  $f(r)$  tan sols depèn des paràmetre positiu desconegut  $\Gamma \equiv 4\pi(2\varepsilon - \eta)\tilde{R}_0^2$ . Quan  $\Gamma = 0$  recuperam sa mètrica de Kottler–Schwarzschild–de Sitter, i en sa dita situació existeixen dos horitzons, un primer horitzó corresponent an es forat negre i un segon horitzó cosmològic, aquests radis seran anomenats a partir d'ara  $r_{FN}$  i  $r_C$  respectivament. Sa regió físicament admissible [ $f(r) > 0$ ] per a sa mètrica de

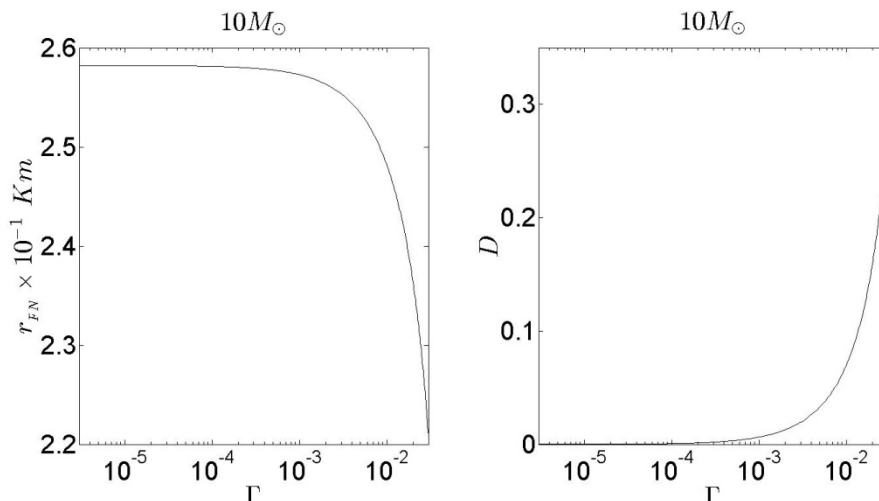
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Kottler–Schwarzschild–de Sitter és sa regió limitada entre tots dos horitzons, és a dir a on se compleix  $r_{FN} < r < r_C$ .

Kayll va fer un exhaustiu estudi d'ets horitzons en s'espai-temps de Reissner–Nordström–de Sitter (Kayll, 1979). Si en dit estudi feim sa substitució de  $Q^2$  per  $(2\varepsilon - \eta)\tilde{R}_0^2$  obtindrem resultats vàlids en sa teoria VT IIIa, d'aquesta manera, s'arriba a sa conclusió que, a partir de  $\Gamma = 0$  fins a un cert valor de  $\Gamma$  (que anomenarem  $\Gamma_{max}$ ) que és major que  $1/8\pi$  però molt prop d'ell, existeixen tots dos horitzons: tant un horitzó de forat negre com un horitzó cosmològic. Quan  $\Gamma > \Gamma_{max}$  només existeix un horitzó que és es cosmològic. Aquestes conclusions han estat contrastades mitjançant es nostres càlculs numèrics.

Hem resolt numèricament s'equació algebraica  $f(r) = 0$  per a uns certs valors adequats de sa massa  $m$ , tant per a  $\Gamma = 0$  com per a molts valors positius de  $\Gamma = 0$ . Quan  $\Gamma > 1/8\pi$  i per a qualque valor de sa massa  $m$ , només hem trobat una solució en  $r_C \approx 1,73 \times 10^{23}$  km (idò no existeix horitzó de forat negre en aquest cas). No obstant això, per a qualque valor  $\Gamma < 1/8\pi$  a banda de s'anterior radi  $r_C \approx 1,73 \times 10^{23}$  km d'horitzó cosmològic, hem obtengut un horitzó de forat negre amb un radi  $r_{FN}$  que pren un valor que depèn tant de sa massa  $m$  com de  $\Gamma$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



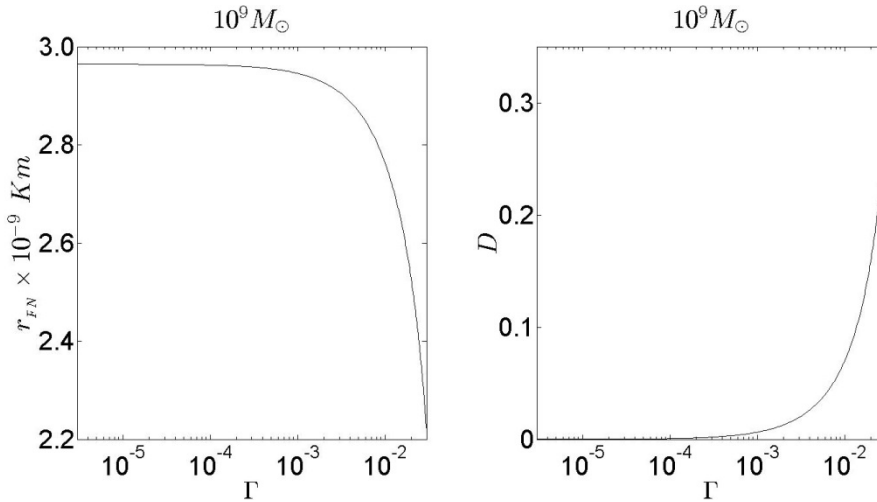
**Il·lustració XLVI:** Ambdós gràfics pertocuen a una massa  $m = 10 M_{\odot}$ . En es gràfic esquerre està representat es radi  $r_{FN}$  de s'horitzó des forat negre en funció de  $\Gamma$ , mentre que es gràfic dret representa ses desviacions relatives,  $D$ , entre es radi  $r_{FN}(\Gamma = 0)$  i  $r_{FN}(\Gamma)$ , per a s'interval de  $\Gamma$  on existeix un horitzó de forat negre.

En s'Il·lustració XLVI, corresponent a un forat negre, per exemple tipus estel·lar de massa  $m = 10 M_{\odot}$ , és mostrat (en es gràfic esquerre), com varia es radi des forat negre en funció de  $\Gamma$  en s'interval  $\Gamma \in [0, 1/8\pi]$ . Es radi de s'horitzó des forat negre disminueix segons  $\Gamma$  se separa des valor zero corresponent a sa solució Kottler-Schwarzschild-de Sitter de Relativitat General. En es panell dret és mostrada sa desviació relativa

$$(III.143) \quad D = \frac{2[r_{FN}(\Gamma = 0) - r_{FN}(\Gamma)]}{r_{FN}(\Gamma = 0) + r_{FN}(\Gamma)}$$

en funció de  $\Gamma$ , en es mateix interval que sa gràfica esquerra. Podem observar com aquestes desviacions assoleixen valors d'un 30%, que no són unes desviacions molt grans, però sí significatives.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració XLVII:** Aquesta il·lustració és semblat a s'anterior però per a una massa  $m = 10^9 M_\odot$ .

La Il·lustració XLVII, pertoca a un forat negre supermassiu, per exemple des trobats en es centres de ses galàxies, de massa  $m = 10^9 M_\odot$ , sa qual cosa vol dir que es radi  $r_{FN}(\Gamma = 0) \approx 2m$  és més gran que es presentats en s'Il·lustració XLVI, en un factor de  $10^8$ ; però s'observa que aquest factor de proporcionalitat és es mateix per a qualche valor de  $\Gamma$  i, per tant, ses formes de ses gràfiques presentades en es panells esquerres són idèntiques. També s'observa que ses desviacions relatives  $D$ , definides en s'equacio (III.143) assoleixen es mateixos valors en es panells esquerres d'ambdues il·lustracions, sa qual cosa vol dir que, aquestes desviacions no depenen de sa massa  $m$  des forat negre.

### 3. Models vector-tensor tipus Ib.

Són molts es models físics que proposen una energia fosca amb pressió negativa, per tal d'explicar s'expansió accelerada de l'Univers. Qualcuns d'aquests, ja han estat esmentats en ses seccions 3 i 4 dins des capítol I. En aquest apartat farem una revisió d'un d'aquests models, que pertoca a una de ses teories VT introduïdes en es capítol III secció 1, es valors des PPN de sa dita teoria (VT Ib per a sa parametrització  $\eta = -8\pi G = -\tau$ ) van esser estudiats en es capítol II. Ja existeix un estudi preliminar des model en (Beltrán &

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Maroto, 2008; Beltrán, Lazkoz, & Maroto, 2009), a on es provat que si  $\rho_A$  juga es paper d'energia fosca amb  $\Omega_A \sim 0,61$ , es possible explicar ses corbes de lluminositat de ses supernoves SNIa. Aquest estudi està limitat an es *background*. Una segona anàlisi [veure (Dale & Sáez, 2012b)], va una mica més enllà i fa un estudi pertorbatiu molt simple, suposant negligibles ses pertorbacions des camp  $A^\mu$  i amb mètodes estadístics molt bàsics. Una anàlisi més general, que consideràs ses pertorbacions des camp i que usàs mètodes estadístics mes avançats, similar a s'anàlisi fet per sa teoria tipus IIIa en es capítol anterior seria necessari. No obstant això, amb s'estudi que presentarem a continuació, veurem com s'introducció de nous modes vectorials, característics de sa teoria VT Ib, pot esser interessant per tal d'explicar ses anomalies trobades en es primers multipols, descobertes mitjançant s'anàlisi de ses dades proporcionades per WMAP i Planck, que han estat ja comentades en es capítol I secció 4.

Es model vector tipus Ib (veure sa Taula VII) pren sa parametrització  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  i  $\eta = -\tau$  en es Lagrangiana (I.42). En sa dita taula, pot apreciar-se que es valors des paràmetres PPN són iguals an es de Relativitat General, a excepció des paràmetre  $\alpha_2$  que, mentre que en Relativitat General és zero, en aquest model val  $\alpha_2 = -2\eta A^2$ . Si es valor de  $A_\odot^2$  és prou petit, es paràmetre  $\alpha_2$  pot esser compatible amb sos límits experimentals en es sistema solar (ver Taula VI); aquest punt de vista és defensat en (Beltrán & Maroto, 2008); tanmateix sa determinació de  $A_\odot^2$  requeriria d'un estudi més seriós que no considerarem en aquesta tesi. En aquesta teoria sa constant gravitatòria efectiva és exactament igual a sa constant gravitatòria  $G$  de Relativitat General, aquest fet no és vàlid per a qualque teoria VT, com pot comprovar-se en es capítol II; per exemple, en sa teoria VT de Will-Nordtvedt (Will & Nordtvedt, 1972) sa constant gravitatòria efectiva [veure equació (II.3)] és proporcional a  $1 + A^2/2$ .

Tenint en compte sa triada de sa parametrització, es sistema d'equacions (III.1)–(III.2), se reescriu de manera similar a (III.7) i (III.8), i pren sa següent forma:

$$(III.144) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^A,$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(III.145) \quad \nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} A_{\mu} + R_{\mu\nu} A^{\nu} = 0,$$

on es tensor  $T_{\mu\nu}$  inclou matèria, radiació i una constant cosmològica si existís.

Ses equacions (III.145) han estat prèviament estudiades per (Nouhaud, 1972; Bona, Carot, & Palenzuela-Luque, 2005).

Tenint en compte sa forma explícita d'ets elements  $\Theta_{\mu\nu}^{(\eta)}$  i  $\Theta_{\mu\nu}^{(\tau)}$  que trobam en (III.3), es tensor  $T_{\mu\nu}^A \equiv \eta \left( \Theta_{\mu\nu}^{(\tau)} - \Theta_{\mu\nu}^{(\eta)} \right)$ , escrit de forma compacta, és (Dale, Morales, & Sáez, 2009):

$$(III.146) \quad T_{\mu\nu}^A = -\eta \left[ \left( S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} S^2 + 2A^{\beta} \nabla_{\alpha} S_{\beta}^{\alpha} \right) g_{\mu\nu} - 2 \left( S_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} + S_{\nu\alpha} F_{\mu}^{\alpha} \right) - 2 \left( S S_{\mu\nu} + A^{\alpha} \nabla_{\alpha} S_{\mu\nu} \right) \right],$$

on  $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} A_{\beta} + \nabla_{\beta} A_{\alpha})$ ,  $F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha})$  i  $S = S^{\alpha}_{\alpha}$ .

### 3.1. Es model en cosmologia.

Igual que en es model VT IIIa, s'evolució de matèria i radiació és com en es model estàndard de Friedman-Lamaître-Robertson-Walker de Relativitat General; i en particular, després de s'aniquilació electró-positró, devers  $z = 10^{10}$  (Kolb & Turner, 1990), ses equacions d'evolució en funció des "redshift" (III.12) són vàlides.

### 3.2. Equacions cosmològiques de background.

Per a un *background* cosmològic homogeni i isòtrop, amb element de línia definit en (I.11) i tenint en compte que sa forma des camp és  $A_{\mu} = [A_0(\tau), 0, 0, 0]$ , ses components des tensor  $T_{\mu\nu}^A$  de (III.146) són:



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 T_{00}^A &= -\eta \left[ \ddot{A}_0 \frac{A_0}{a^2} + \dot{A}_0^2 \frac{1}{2a^2} - \dot{A}_0 \frac{4\dot{a}}{a^3} A_0 \right. \\
 &\quad \left. - 2A_0^2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \right], \\
 (III.147) \quad T_{0i}^A &= T_{i0}^A = 0, \\
 T_{ij}^A &= -\eta \left( \frac{1}{a^2} \ddot{A}_0 A_0 + \frac{3}{2a^2} \dot{A}_0^2 - 4 \frac{\dot{a}}{a^3} \dot{A}_0 A_0 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\dot{a}^2}{a^4} A_0^2 \right) \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Ses equacions de camp (III.145) s'escriuen:

$$(III.148) \quad \ddot{A}_0 - 4 \frac{\ddot{a}}{a} A_0 = 0,$$

i ses equacions modificades d'Einstein (III.144) resultants, tenint en compte (III.148), són:

$$(III.149) \quad 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G a^2 (\rho_B + \rho_A),$$

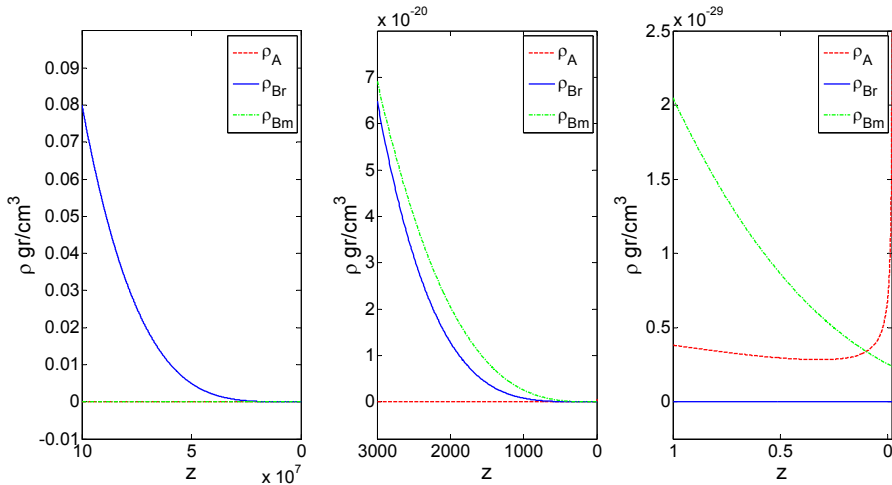
$$(III.150) \quad -2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G a^2 (p_B + p_A),$$

on s'han redefinit es paràmetres  $\varepsilon, \tau, \omega$  i  $\eta$  de (I.42) per uns nous amb sos mateixos noms però dividits pes  $8\pi G$  (d'igual manera que fèiem en sa teoria VT IIIa), i essent

$$(III.151) \quad \rho_A \equiv \eta \left( -\frac{1}{2a^4} \dot{A}_0^2 + \frac{4\dot{a}}{a^5} \dot{A}_0 A_0 - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^6} A_0^2 \right),$$

$$(III.152) \quad p_A \equiv \eta \left[ -\frac{3}{2a^4} \dot{A}_0^2 + 4 \frac{\dot{a}}{a^5} \dot{A}_0 A_0 - 2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a^5} + \frac{\dot{a}^2}{a^6} \right) A_0^2 \right].$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



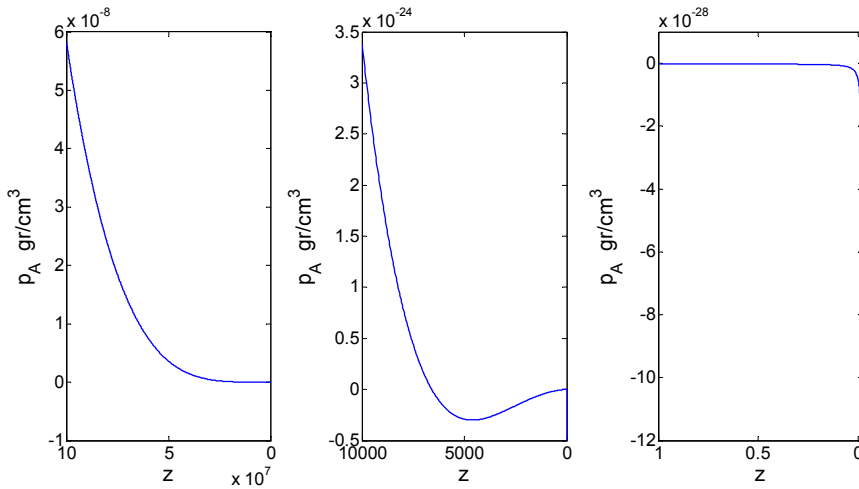
**Il·lustració XLVIII:** Representació de ses densitats d'energia corresponents a matèria, radiació i camp  $A_\mu$  en diversos rangs de  $z$ . D'esquerra a dreta se representen es rangs  $z \in [10^8, 0]$ ,  $z \in [3000, 0]$  (devers  $z \approx 3000$  ses densitats d'energia de matèria i radiació s'igualen) i  $z \in [1, -0,02]$ . Ses densitats d'energia des camp i de matèria s'igualen en  $z \approx 0,10$ , i a per “*redshifts*” menors comença a dominar sa densitat d'energia des camp  $A_\mu$ . S'aprecia com, quan es “*redshift*” s'acosta a  $-0,02$  (futur), sa densitat  $\rho_A$  comença a créixer ràpidament.

En sa teoria considerada en aquesta secció procedirem d'igual manera que fèiem en sa secció 2.3 amb sa teoria VT IIIa. Per tant  $\rho_A$  pren es paper d'energia fosca (maldament no sia una constant cosmològica). Pes fluid cosmològic tenim  $\rho_B = \rho_{Bm} + \rho_{Br}$ ,  $p_B = p_{Bm} + p_{Br}$ . Amb aquestes consideracions, s'equació (III.149) en  $z = 0$  s'escriu  $\rho_{c0} = 3H_0^2/8\pi G = \rho_{Bm0} + \rho_{Br0} + \rho_{A0}$  (Univers pla).

A continuació es sistema d'equacions (III.148)–(III.152) és escrit en termes des “*redshift*” i és resolt. Aquesta integració és realitzada amb MatLab, Fortran, i C++ mitjançant es mètodes Runge-Kutta 4/5, prenent es mateixos valors per a  $\rho_{Bm0}$ ,  $\rho_{Br0}$ ,  $p_{Bm0}$ ,  $p_{Br0}$  i  $H_0$  que vàrem utilitzar per a sa teoria VT IIIa, i que podem trobar en sa secció 2.5.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

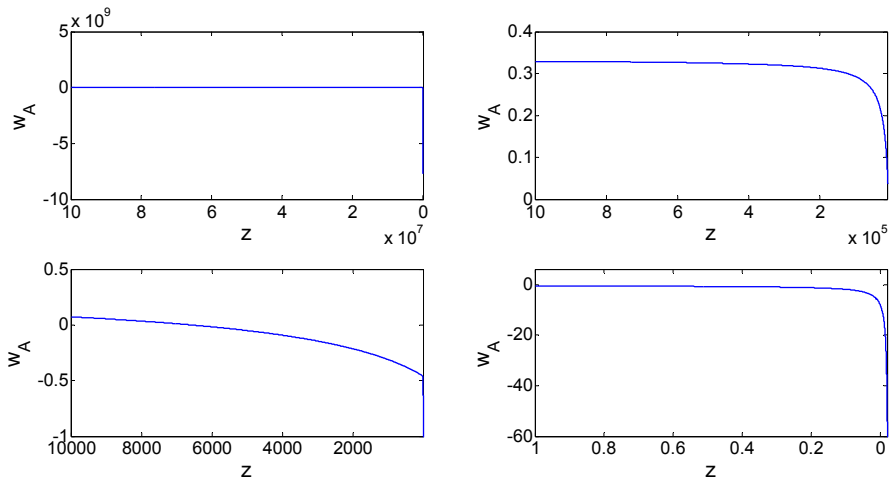
Es resultats numèrics mostren que per a un cert valor finit des temps cosmològic  $\rho_A \rightarrow \infty$  i  $p_A \rightarrow -\infty$ . Se tracta d'una singularitat que és classificada com a tipus III en (Nojiri, Odintsov, & Tsujikawa, 2005). Es valor de  $w_A$  roman en un terç  $w_A^{RD} = 1/3$  mentre que som a radiació dominant, comença a disminuir en s'era de matèria dominat i se fa negatiu. En  $z=0$  hem obtingut  $w_{A0} = -7,8130$ , i en es futur, per exemple en  $z = -0,0240$ , trobam un valor de  $w_{A0} = -7,7485 \times 10^9$ .



**Il·lustració XLIX:** Representació de sa pressió des camp  $A_\mu$  en diversos rangs de  $z$ . D'esquerra a dreta se representen es rangs  $z \in [10^8, 0]$ ,  $z \in [10000, 0]$  i  $z \in [1, -0,02]$ . Sa pressió arriba a un mínim en  $z \approx 4500$  i comença a créixer suaument fins a arribar a  $z \approx -0,0240$ , devers d'aquest  $z$ ,  $p_A$  comença a créixer ràpidament en valor absolut.

En Il·lustració XLVIII, Il·lustració XLIX i Il·lustració L presentam unes gràfiques d'evolució per a sa densitat d'energia, pressió i  $w_A$ , respectivament. En cadascuna d'aquestes il·lustracions existeixen tres panells que corresponen a diversos rangs de "redshift". En dites il·lustracions podem observar que es motiu pes qual  $w_A = p_A / \rho_A \mapsto -\infty$  es que quan anam cap an es futur, encara que sa densitat d'energia creix, sa pressió ho fa més apresca (en valor absolut); per sa qual cosa s'Univers acabarà en un grandió esquinç conegut com a 'big rip'.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració L:** Representació de s'evolució de  $(w_A = p_A/\rho_A)$  en quatre intervals diferents de "redshift". Es gràfics superiors d'esquerra a dreta són representats es rangs  $z \in [10^8, 0]$  i  $z \in [10^8, 10^5]$ . Pot apreciar-se com a partir de  $z \approx 10^5$ ,  $w_A$  comença a separar-se de  $w_A = 1/3$ , i devers  $z \approx 6500$  se produeix un canvi de signe, i suaument decreix fins arribar a devers  $z \approx -0,02$  on comença a créixer ràpidament en valor absolut.

Una volta revisada aquesta teoria a nivell de *background*, on sa densitat d'energia des camp  $A_\mu$  ha jugat es paper d'energia fosca; per tal de estudiar si sa teoria VT Ib explica ses observacions, s'hauria d'escometre un estudi similar an es fet en seccions anteriors amb sa teoria VT IIIa. Sa dita feina és llarga i complicada i només serà escomesa si tenim prou motivacions; per sa qual cosa hem pres sa decisió de treballar en primer lloc en una teoria de tipus VT Ib, però modificant qualcunes condicions respecte de ses considerades en aquesta secció. Es nostre interès se centrarà en s'estudi de s'evolució de ses perturbacions vectorials.

A partir d'aquest moment considerarem es model VT Ib basat en ses següents hipòtesis: (1) sa densitat d'energia  $\rho_A$  no jugarà es paper d'energia fosca, (2) introduïrem la constant

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

cosmològica com en es model  $\Lambda$ CDM estàndard, (3) assumirem que es paràmetre de densitat d'energia és  $\Omega_A \sim \pm 0,01$ , on es signe positiu pertoca a  $\eta > 0$  i es negatiu a  $\eta < 0$ . Aquest valors petits per a  $|\Omega_A|$  garanteixen que es model donarà suport a ses mateixes observacions que es model concordant. Tal com hem dit, a partir d'ara  $\rho_B$  i  $p_B$  inclou ses components de la constatat cosmològica  $\rho_\Lambda$  i  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , sa nova forma resultant de  $\rho_B$  i  $p_B$  serà incorporada en ses equacions (III.148)–(III.152). Per a sa resta des paràmetres de densitat fixam es valors:  $\Omega_b = 0,04$ ,  $\Omega_c = 0,23$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,73 \mp 0,01$ . És tracta per tant d'un univers pla ( $\Omega_b + \Omega_c + \Omega_\Lambda + \Omega_A = 1$ ) molt similar an es model estàndard.

### 3.2.1. Pertorbacions vectorials.

En absència d'esforços anisotròpics en es tensor des fluid cosmològic [ $\pi_T^{(1)} = 0$  en s'equació (I.16)], en cosmologia estàndard, ses pertorbacions vectorials estan associades a sa velocitat peculiar  $v_i^{(1)}$  i a ses components de sa mètrica  $h_i = g_{0i}$  [veure (I.15)–(I.16)], ja que es grau de llibertat *gauge* permet prendre  $H_T^{(1)} = 0$ .

Aquest vectors  $\vec{h}$  i  $\vec{v}^{(1)}$  s'escriuen en termes d'harmònics vectorials  $\vec{Q}^{(1)\pm} = \vec{\epsilon}^\pm \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$  segons:

$$(III.153) \quad \vec{h} = B^{(1)+}(\vec{k}, \tau) \vec{Q}^{(1)+} + B^{(1)-}(\vec{k}, \tau) \vec{Q}^{(1)-},$$

$$(III.154) \quad \vec{v}^{(1)} = v^{(1)+}(\vec{k}, \tau) \vec{Q}^{(1)+} + v^{(1)-}(\vec{k}, \tau) \vec{Q}^{(1)-},$$

Una representació des vectors  $\vec{\epsilon}^\pm$  pot trobar-se en (III.44). A partir d'aquestes funcions  $B^{(1)\pm}$  i  $v^{(1)\pm}$ , se construeix ses funcions invariant *gauge*  $v_c^{(1)\pm} = v^{(1)\pm} - B^{(1)\pm}$ , i amb aquestes darreres escrivim ses components de sa velocitat angular en s'espai de moments (Morales & Saez, 2008):

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$\begin{aligned}
 W_1 &= i v_c^{(1)\pm} (\vec{\varepsilon}_2^\pm k_3 - \vec{\varepsilon}_3^\pm k_2), \\
 W_2 &= i v_c^{(1)\pm} (\vec{\varepsilon}_3^\pm k_1 - \vec{\varepsilon}_1^\pm k_3), \\
 W_3 &= i v_c^{(1)\pm} (\vec{\varepsilon}_2^\pm k_2 - \vec{\varepsilon}_2^\pm k_1).
 \end{aligned}
 \tag{III.155}$$

Sa variació de ses funcions  $B^{(1)\pm}$  i  $v^{(1)\pm}$  en es model cosmològic estàndard sense constant cosmològica, en es període de radiació dominant respecte de temps és (Morales & Saez, 2007):

$$\begin{aligned}
 v_c^{(1)\pm}(\vec{k}, \tau) &= v_c^{(1)\pm}(\vec{k}, \tau_e) = \text{constant}, \\
 B^{(1)\pm} &= 8 \rho_{Br0} v_c^{(1)\pm}(\vec{k}, \tau_e) / k^2 a^2,
 \end{aligned}
 \tag{III.156}$$

i s'evolució en es període de matèria dominat és,

$$\begin{aligned}
 v_c^{(1)\pm}(\vec{k}, \tau) &= v_{c0}^{(1)\pm}(\vec{k}) / a, \\
 B^{(1)\pm} &= 6 H_0^2 \Omega_m v_{c0}^{(1)\pm}(\vec{k}) / k^2 a^2,
 \end{aligned}
 \tag{III.157}$$

essent  $\tau_e$  es moment de sa “equivalència” en es qual se compleix  $\rho_{Bm}(\tau_e) = \rho_{Br}(\tau_e)$ . En conseqüència, sa velocitat  $v_c^{(1)\pm}$  i sa velocitat angular  $\vec{W}$  són modes decreixents. Veim, per tant, que en Relativitat General, totes ses escales evolucionen amb so mateix ritme.

Sa contribució des modes vectorials a diversos efectes va esser estudiada en articles previs. D'aquests efectes cal citar ses anisotropies des CMB, és a dir sa variació des contrast relatiu de temperatura  $\Delta T/T$  (Morales & Saez, 2008); ses components de sa velocitat angular que poden trobar-se en sa mateixa referència, i sa rotació des pla de polarització de sa radiació  $\delta\psi$ , anomenat efecte Skrotskii (Skrotskii, 1957), totes tres quantitats  $\Delta T/T$ ,  $W_i$  i  $\delta\psi$ , poden esser escrites de manera tal que només depenguin de  $v_{c0}^{(1)\pm}$ .

Si volem donar una explicació amb modes vectorials a ses anomalies des CMB com són; s'alineament des quadrupol ( $l=2$ ) i vuitè-pol ( $l=3$ ) i es caràcter excessivament planar des vuitè-pol, ja esmentats en es capítol I secció 4, és necessari que ses quantitats

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$v_c^{(1)\pm}$  sien significatives després de sa recombinació i es desacoblament per a escales super-horitzó i, negligibles per a escales sub-horitzó; d'aquesta manera, es modes vectorials afectarien només an es petits valors de  $\ell$  (escales super-horitzó), mentre que es valors de  $\ell$  més grans no se veurien afectats (decaïment de ses escales sub-horitzó).

Si consideram pertorbacions vectorials, a ordre lineal, es camp vectorial  $A_\mu$  s'escriu  $A_\mu = [A_0, A^{(1)+} Q_i^{(1)+} + A^{(1)-} Q_i^{(1)-}]$ . Ses equacions de *background* són (III.148)–(III.152). Ses equacions (III.144)–(III.145) per a ses pertorbacions vectorials s'escriuen de manera següent:

$$(III.158) \quad k^2 A_0 B^{(1)\pm} - \ddot{A}^{(1)\pm} + A^{(1)\pm} \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - k^2 \right) = 0,$$

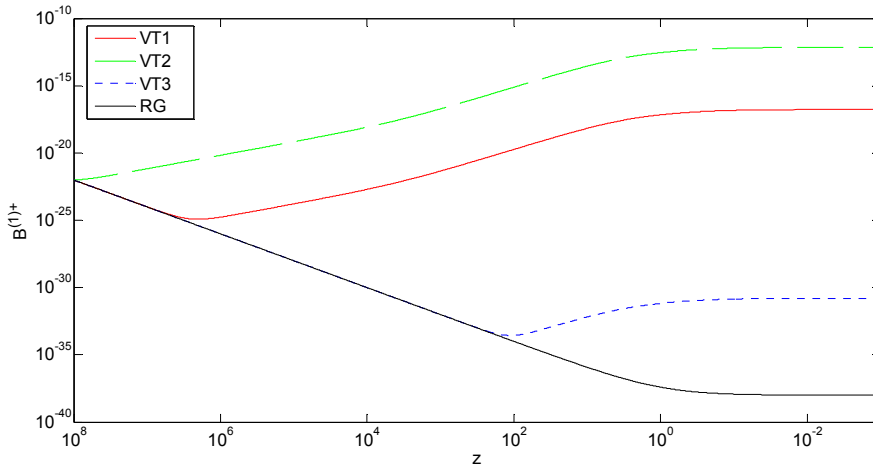
$$(III.159) \quad B^{(1)\pm} = 16\pi G \left[ \frac{a^2}{k^2} (\rho_B + p_B) v_c^\pm - \frac{\eta A_0}{a^2} (A^{(1)\pm} - A_0 B^{(1)\pm}) \right],$$

i

$$(III.160) \quad \dot{B}^{(1)\pm} + 2 \frac{\dot{a}}{a} B^{(1)\pm} = - \frac{32\pi G \eta}{a^2} \left[ \dot{A}_0 (2A_0 B^{(1)\pm} - A^{(1)\pm}) + A_0 (A_0 \dot{B}^{(1)\pm} - \dot{A}^{(1)\pm}) \right].$$

A ordre lineal, aquest sistema d'equacions descriu, junt a ses equacions de *background*, s'evolució de ses funcions que caracteritzen ses pertorbacions vectorials i que són:  $A^{(1)\pm}$ ,  $B^{(1)\pm}$  i  $v_c^{(1)\pm}$ . Cal adonar-se que ses equacions (III.158)–(III.160) inclouen nous termes respecte a Relativitat General, tant pertorbatius com  $A^{(1)\pm}$  i ses seves derivades, com es termes de *background*  $A_0$  i ses seves derivades.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració LI:** Evolució de  $B^{(1)\pm}$  per a un escala espacial superhoritzó amb  $k = 2\pi/L$  i  $L = 2 \times 10^4 Mpc$ . Sa línia sòlida negra representa s'evolució en relativitat general, mentre que ses línies de colors representes tres casos amb tres valors inicials en sa teoria VT Ib (etiquetats com a VT1, VT2 i VT3), diferenciats per ses condicions inicials sobre  $A^{(1)+}$  i  $A'^{(1)+} = dA^{(1)+}/dz$ . Ambdues escales d'est eixos són logarítmiques.

Per tal d'integrar (numèricament) es sistema sencer d'equacions hem de cercar un conjunt de condicions inicials adequat. Es mecanisme numèric per treure aquestes condicions en es cas des *background* considera que, en  $z = 0$ , hem de tenir un valor des paràmetre d'energia des camp de  $\Omega_A = \pm 0,01$ , amb aquesta premissa hem d'esbrinar quin valor inicial  $A_{0in}$  de  $A_0$  s'ha de prendre per a assolir es dit valor. Tots es valors inicials han estat presos en es període de radiació dominant, en un "redshift" de  $z = 10^8$ . Quant es mecanisme per treure condicions inicial per a ses funcions  $A^{(1)\pm}$ ,  $B^{(1)\pm}$  i  $v_c^{(1)\pm}$ , que caracteritzen ses pertorbacions, consisteix en factoritzar ses dites funcions en termes de potències de  $z$ . Aquestes solucions en potències de  $z$  se fiquen dins de ses equacions i se pren  $a \propto \tau$  (radiació dominant). Com a conseqüència trobam modes creixents, constants i decreixents en  $A^{(1)\pm}$ ,  $B^{(1)\pm}$  i  $v_c^{(1)\pm}$  que permeten definir un conjunt de condicions inicials coherent. Es



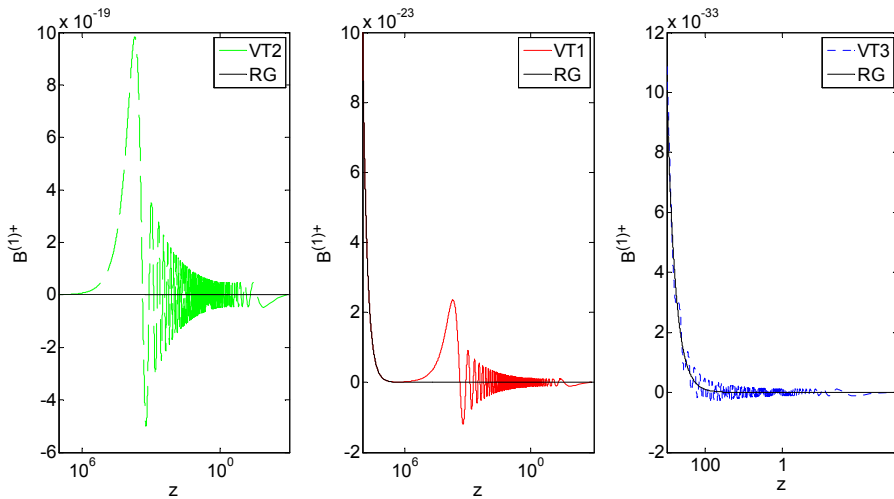
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

resultats obtinguts després de s'integració des sistema sencer d'equacions, considerant  $\eta = -1$ ,  $\Omega_A = -0,01$  i  $\Omega_\Lambda = 0,74$ , és resumit gràficament en Il·lustració LI–Il·lustració LVI.

Es casos presentats en ses dites il·lustracions són:

- i. VT1 (vermell) pertoca a valors inicials  $A_{in}^{(1)+}$  i  $A_{in}'^{(1)+}$  ambdós no nuls,
- ii. VT2 (verd) correspon a  $A_{in}^{(1)+}$  no nul i  $A_{in}'^{(1)+} = 0$ ,
- iii. VT3 (blau) tots dos nuls  $A_{in}^{(1)+} = A_{in}'^{(1)+} = 0$ .

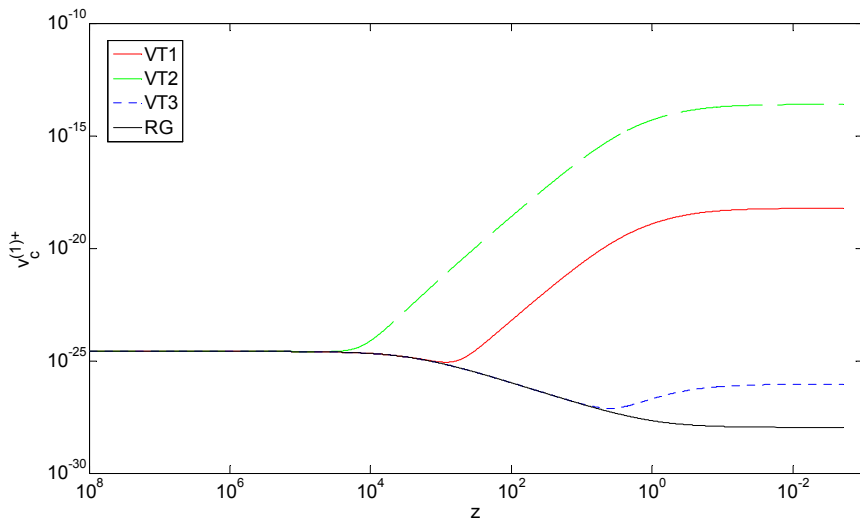
Totes aquestes triades són compatibles amb ses equacions de valors inicials obtingudes, tal com s'ha descrit en es paràgraf anterior.



**Il·lustració LII:** Representació s'evolució de  $B^{(1)+}$  en s'escala subhoritzó amb  $k = 2\pi/L$  i  $L = 200Mpc$ , per a tres valors inicials diferents. Es gràfic esquerre mostra com sa funció  $B^{(1)+}$  oscil·la devora es valor de Relativitat General (línia sòlida negra) en un rang de  $z \in [10^7, 0]$  en es cas VT2, es gràfic central ho fa per a VT1 en es mateix rang de  $z$ , i s'aprecia com es valor  $B^{(1)+}$  decreixen en Relativitat General ( $B^{(1)+} \propto a^{-2}$ ). Finalment es gràfic dret presenta es resultat per a VT3 en es rang  $z \in [10^3, 0]$  perquè sien apreciables ses oscil·lacions. En tot tres gràfics s'escala de  $z$  és logarítmica, mentre que s'escala de  $B^{(1)+}$  és lineal.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Podem apreciar en Il·lustració LI com  $B^{(1)+}$ , en Relativitat General i per a una escala super-horitzó de  $2 \times 10^4 Mpc$ , és decreixen en tot es rang de  $z$ , mentre que en sa teoria VT Ib s'arriba a un cert  $z$ , que depèn des ses condicions inicials, a partir des qual, sa funció passa a esser creixent. Per a escales sub-horitzó observam, en Il·lustració LII, com sa funció  $B^{(1)+}$  oscil·la devora es valor decreixent de Relativitat General, i com s'amplitud i es començament de ses oscil·lacions depenen de sa triada des valors inicials.

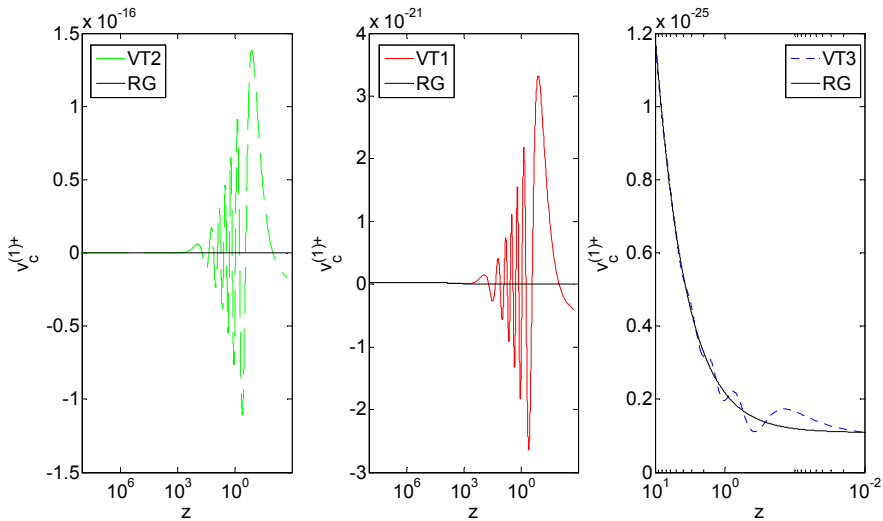


**Il·lustració LIII:** Evolució de  $v_c^{(1)+}$  per a un escala espacial super-horitzó amb  $k = 2\pi/L$  i  $L = 2 \times 10^4 Mpc$ . Sa línia sòlida negra representa s'evolució en relativitat general, mentre que ses línies de colors representes tres casos amb tres valors inicials en sa teoria VT Ib. Ambdues escales d'est eixos són logarítmiques.

Per a  $v_c^{(1)+}$ , en s'escala super-horitzó de  $2 \times 10^4 Mpc$ , es resultats són similars an es de  $B^{(1)+}$ , només se diferencien en es moment que es casos VT1, VT2 i VT3 se separen de RG, que en es cas de  $v_c^{(1)+}$  ho fan més tard (en un "redshift" més baix). D'igual manera passa amb ses oscil·lacions per a escales sub-horitzó i és que aquestes comencen a oscil·lar devers  $z \sim 10^5$  per  $B^{(1)+}$ , mentre que

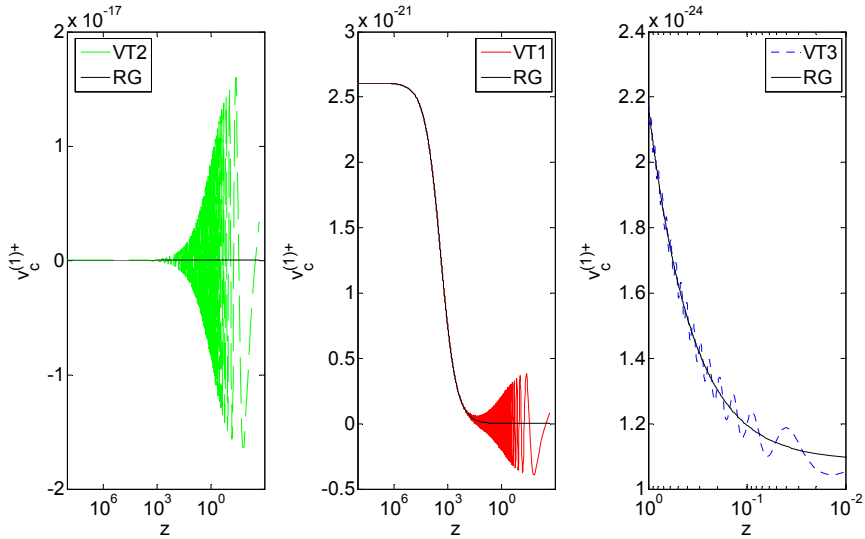
## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

per a  $v_c^{(1)+}$ , és fenomen oscil·latori s'inicia devers  $z \sim 10^3$ . Un efecte comú a  $v_c^{(1)+}$  i  $B^{(1)+}$  és que sa freqüència d'oscil·lacions és major quan més petita és s'escala.

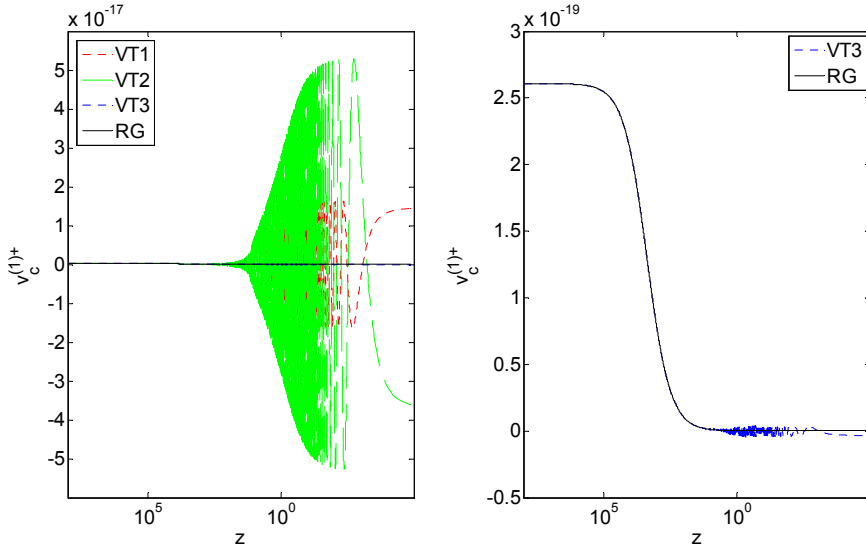


**Il·lustració LIV:** Representació s'evolució de  $v_c^{(1)+}$  en s'escala subhoritzó amb  $k = 2\pi/L$  i  $L = 2 \times 10^3 \text{ Mpc}$  per a tres valors inicials diferents. Es gràfic esquerre mostra com sa funció  $v_c^{(1)+}$  oscil·la devora es valor de Relativitat General (línia sòlida negra) en un rang de  $z \in [10^7, 0]$  en es cas VT2, es gràfic central ho fa per a VT1 en es mateix rang de  $z$ . Finalment es gràfic dret presenta es resultat per a VT3 en es rang  $z \in [10^3, 0]$  perquè sien apreciables ses oscil·lacions. En tot tres gràfics s'escala de  $z$  és logarítmica, mentre que s'escala de  $v_c^{(1)+}$  és lineal.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia



**Il·lustració LV:** Evolució de  $v_c^{(1)+}$ , en una mitjançera escala sub-horitzó amb  $k = 2\pi/L$  i  $L = 200Mpc$ . Es tres gràfics representen ses mateixes característiques que en Il·lustració LIV però per a una escala diferent. Es rang de  $z$  en es gràfic dret és  $z \in [1, 0]$ .



**Il·lustració LVI:** Evolució de  $v_c^{(1)+}$  (escala lineal) en  $z \in [10^8, 0]$  (escala logarítmica), per a una petita escala sub-horitzó amb  $k = 2\pi/L$  i  $L = 20Mpc$ . En es gràfic esquerre es representen tots es casos mentre que en es dret només conté es cas VT3.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Es resultats que s'obtenen per a sa parametrització  $\eta > 0$  i altres valors de  $|\Omega_A|$  més petits [veure **(Dale & Sáez, 2012b)**], són similars an aquests que hem presentat en aquesta secció, és a dir, oscil·lacions per a ses escales sub-horitzó i, evolucions creixents per a ses escales super-horitzó; precisament allò que pareix esser, tal com ja s'ha dit, una solució a ses anomalies descrites an es principi d'aquesta secció.

## IV. CONCLUSIONS I PERSPECTIVES

---

Vàrem estudiat ses teories VT basades en es Lagrangia proposat per Will en 1972, que conté quatre paràmetres arbitraris.

Hem fet un estudi des PPN en s'ambit de ses teories VT a partir des qual hem avaluat quines teories valia sa pena estudiar. Es criteri per tal decisió ha estat exigir es compliment de sa condició  $\gamma = \beta = G_{ef} = 1$ . De ses teories que ho compleixen hem seleccionat dues:

- I. Parametrització  $\eta = \tau$ ,  $\varepsilon$  arbitrari i  $\omega = 0$  (VT IIIa).
- II. Parametrització  $\eta = -\tau$ ,  $\varepsilon$  arbitrari i  $\omega = 0$  (VT Ib).

Sa teoria VT IIIa té tots es valors des PPN coincidents amb sos mateixos en Relativitat General, mentre que VT Ib ho són tots excepte  $\alpha_2$ . Per açò, en es cas de sa teoria VT IIIa, mereix sa pena fer un ample estudi, mentre que en VT Ib tenim dubtes amb sa consistència d'aquesta amb ses observacions a nivell des sistema solar; no obstant això, vàrem prendre sa decisió d'escometre un estudi restringit a problemes d'interès, una volta raonada sa possibilitat de sa seva viabilitat.

Sa teoria VT IIIa fou inicialment proposada com a una teoria d'electromagnetisme estès (Beltrán & Maroto, 2009a); aquesta proposta va semblar-nos molt interessant i vàrem assumir aquesta interpretació en s'article (Dale & Sáez, 2012a); tanmateix posteriorment vàrem veure que es camp  $A_\mu$  de sa teoria no pot acoblar-se amb sos corrents electromagnètiques.

Amb s'intenció de aclarir aquest tema hem introduït s'apèndix C que demostra que VT IIIa és una teoria de gravitació i no d'electromagnetisme. Podem concloure que aquest resultat, maldament sia negatiu, és molt important atès que, sense ell se podria haver continuat, erròniament, estudiant VT IIIa com a teoria d'electromagnetisme estès.

Hem començat per s'estudi variacional de sa teoria IIIa, obtenint així ses equacions de camp, es tensor energia-moment i ses lleis de conservació; per a continuació esser aplicada en cosmologia. Hem començat amb so estudi de *background* i després hem

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

continuat amb so estudi de ses pertorbacions cosmològiques; com és natural seguirem aquest mateix ordre en aquesta secció.

En es nostre estudi de *background* hem demostrat que:

- 1) Sa densitat des camp  $A_\mu$  s'escrui  $\rho_A = \frac{1}{2}\eta(\nabla \cdot A)_B^2$ .
- 2)  $(\nabla \cdot A)_B$  és constant.
- 3) Sa component des camp  $A_0$  varia amb  $z$ , i s'ha calculat numèricament i analíticament per a  $\eta = +1$  (veure Il·lustració XVI en sa secció 2.5 des capítol II).
- 4) Se compleix sa relació  $w_A = p_A/\rho_A = -1$ , i és vàlida per tot  $z$ .
- 5)  $A_0(\tau)$  i  $(\nabla \cdot A)_B$  són proporcionals a  $S_{gn}|\eta|^{-1/2}$ .
- 6) En es *background* no és possible fixar totalment es valors de  $A_0(\tau)$  i  $(\nabla \cdot A)_B$ .
- 7) Ses equacions no involucren es paràmetre  $\varepsilon$  en cap moment, que queda quasi arbitrari ja que tan sols està sotmès a sa restricció  $2\varepsilon - \eta > 0$ .

Concloem, per tant, que s'energia des camp  $A_\mu$ , pot exercir es paper de s'energia de la constant cosmològica des model estàndard, i pot fixar-se segons s'expressió  $\rho_A = \Omega_\Lambda \rho_{c0}$  (per a qualssevol que sien es valors des paràmetres  $\eta$  i  $\varepsilon$ ).

Una volta estudiat es model VT IIIa a nivell de *background*, s'han estudiades ses fluctuacions cosmològiques en sa seva aproximació lineal, utilitzant es formalisme invariant *gauge* de Bardeen. Hem trobat que:

- 1) es modes tensorials són es mateixos que en Relativitat General i evolucionen d'igual manera,
- 2) que es modes vectorials són es mateixos que en sa teoria Einstein-Maxwell en absència de càrregues i corrents (Dale & Sáez, 2012a),
- 3) que ses equacions d'evolució des modes escalars són diferents a ses de Relativitat General.

En s'estudi de ses equacions d'evolució de ses pertorbacions escalars hem trobat, que sa forma més operativa de procedir és mitjançant s'ús d'un nou mode escalar  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$  que és invariant

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

*gauge*, i allò que és més important, que evoluciona desacoblat de sa resta de modes escalars; és dir des modes que ja apareixen en Relativitat General, sa qual cosa es veu clarament en s'equació (III.49) que només conté es mode  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ , ses seves derivades, es factor d'escala i  $k$ .

Ja hem dit que ses funcions de *background*  $A_0(\tau)$  i  $(\nabla \cdot A)_B$  depenen de  $S_{gn}|\eta|^{-1/2}$ , no obstant això, hem demostrat mitjançant s'anàlisi de ses equacions (III.64)–(III.66) que es mode  $(\nabla \cdot A)^{(0)}$ , així com es termes correctius que apareixen en dites equacions, són independents des paràmetres  $S_{gn}$  i  $|\eta|$ . A partir d'aquí hem conclòs que no és possible fixar dits paràmetres mitjançant consideracions cosmològiques.

També hem estudiat numèricament ses desviacions entre VT IIIa i Relativitat General, que sense dubtes són a causa des termes correctius en ses equacions (III.64)–(III.66); per tal raó hem construït quantitats apropiades definides en ambdues teories (ses funcions  $T1$ ,  $T2$  i  $T3$  representades en Il·lustració XXVII). Ses diferències són apreciades en escales menors que  $\sim 2800h^{-1}$  Mpc, i per a baixos “*redshifts*”, pes quals s'observen oscil·lacions respecte a Relativitat General. Aquests fets seran de vital importància en s'adaptació des codis.

Una volta acabat s'estudi invariant *gauge*, volem comparar ses prediccions teòriques de sa teoria VT IIIa amb ses observacions, per tal d'estimar es paràmetres cosmològics. Per escometre sa dita feina, i atès que es codis d'ús més estès utilitzen es *gauge* síncron, en primer lloc s'han reescrit ses equacions d'evolució de ses pertorbacions, i a continuació s'han de tret ses condicions inicials en dit *gauge* –necessàries per a sa seva resolució–; amb tot açò vàrem procedir amb sa modificació des codis informàtics COSMOMC, CMBFAST i CAMB com s'explica en ses seccions 2.6.3.3 i 2.6.3.4.

En primer lloc, va fer-se un ajust amb sa combinació de codis COSMOMC i CMBFAST essent  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_c h^2$ ,  $\tau$ ,  $n_s$ ,  $\ln(10^{10} A_s)$ ,  $100\theta_{MC}$  i  $\beta_0$ , es conjunt de set paràmetres a ajustar. Es conjunt de dades experimentals de contrast ha estat: lluminositat en supernoves tipus Ia (SNe Ia) d'alt “*redshift*” i anisotropies de temperatura des CMB (mesures de WMAP 7 anys). Només s'han considerat



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

pertorbacions escalars i no s'han inclòs ets efectes de lents gravitatòries.

Es nostres càlculs amb VT-CMBFAST demostren que ses derivades des modes de sa mètrica  $\tilde{h}$  i  $\tilde{\eta}$  (que estan involucrats en se equacions d'evolució de sa funció de distribució de fotons CMB) evolucionen de sa mateixa manera –en ambdues teories Relativitat General i VT IIIa– fins a un valor de “*redshift*”  $z \sim 10$ ; a partir de llavors, s'evolució d'aquestes derivades comença a esser diferent en ambdues teories, i per a valors de “*redshifts*”  $z \leq 5$  són assolides ses majors diferències, exceptuant escales espacials molt grans, com és observat en Il·lustració XXVII. Ses desviacions entre VT IIIa i Relativitat són oscil·latòries i permeten explicar ses diferències entre ets espectres de potència angular des CMB d'ambdues teories per a  $l \leq 250$  (veure Il·lustració XXIV).

Es resultats numèrics en es procés d'encaix són presentats en Taula VIII i Taula IX. En es millor ajust, es sis paràmetres comuns des models VT IIIa i Relativitat General són molt similars [veure es resultats amb WMAP7 en (Jarosik & et al., 2011)] i  $\beta_0$  és petit, sa qual cosa significa que VT IIIa funciona tan bé com GR; però, hi ha també bons ajusts pes valors més grans de  $\beta_0$  que satisfacin sa condició  $|\beta_0| \leq 3 \times 10^8$ .

Es fet que hem trobat bons ajusts per a un ample rang de valors de  $\beta_0$  suggereix que es models VT IIIa poden explicar ses observacions cosmològiques millor que Relativitat General. Açò és a causa de s'existència d'un grau addicional de llibertat (paràmetre  $\beta_0$ ), que té un bon comportament i és una ajuda per obtenir bons ajusts.

Una volta acabat s'anàlisi basat en ses dades de WMAP7, començam amb ses dades de Planck. Aquest segon estudi és molt similar an es realitzat amb WMAP7, però existeixen diferències rellevants que enumeram a continuació:

- 1) mentre que amb WMAP7 es programes utilitzats han estat VT-COSMOMC + VT-CMFAST, amb Planck s'ha fet ús de sa combinació VTv2-CAMB i VTv2-COSMOMC (veure es primers paràgrafs de sa secció 2.6.3.4),
- 2) ses dades observacionals de contrast són 7 anys de mesures amb WMAP en un cas i sa base de dades de mesures de Planck + WP publicades en 2.013 en s'altre,

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- 3) en WMAP7 no ha estat considerat s'efecte lent gravitatòria i sí en Planck,
- 4) es nivells de convergència han estat més restrictius en es nostre ajust amb Planck. Sa quantitat de cadenes de Markov ha estat més nombrosa en es cas de Planck que en es cas de WMAP7. S'observa com ses corbes marginalitzades i mitjana per a  $1\sigma$ , son més similars en es cas de Planck que en es cas de WMAP7, sa qual cosa indica que es cas de Planck és més convergent.
- 5) amb Planck, a banda des 6 + 1 paràmetres a ajustar iguals que en WMAP7, apareix un total de 14 nou paràmetres anomenats "*nuisance parameters*", es quals també són tractats en es procediment d'encaix,
- 6) sa darrera diferència és que en es cas WMAP7 només s'han considerat perturbacions escalars; mentre per a Planck s'han considerat tres casos diferents: (a) perturbacions escalars, (b) escalars + tensorials sense "*running*" i (c) escalars + tensorials amb "*running*".

Respecte an ets resultats amb Planck podríem destacar es següents:

- Quan són considerats com a dades de contrast observacionals CMB (Planck + WP), ses dades des millor encaix són ben similars a Relativitat General, però existeixen uns intervals més amplis entre es límits  $1\sigma$ . Quan s'afegeixen es BAO (o SNe Ia) en ses dades de contrast, s'amplitud d'aquests intervals decreix, quedant tots dos models (VT IIIa i Relativitat General) molt similars. Maldament s'introducció des BAO (o SNe Ia) ha acostat es model a Relativitat General, no hem d'oblidar que existeix un ampli rang de valors de  $\beta_0$  dins des nivell de confiança des 68%.
- Ses variacions respecte a Relativitat General en es nous paràmetres, anomenats "*nuisance parameters*", han estat inapreciables o quasi inapreciables en tots es casos estudiats.
- Quan s'inclouen perturbacions tensorials amb  $dn_s/d \ln k = 0$  o amb  $dn_s/d \ln k \neq 0$ , en es comportament des paràmetres  $n_s, r_{0,002}$  i  $dn_s/d \ln k$ , relacionats amb ses perturbacions primigènies, hem

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

trobat que:  $n_s$  presenta petites variacions,  $dn_s/d \ln k$  (evidentment en es cas que no és nul) presenta un increment important en es marges  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$ , i finalment  $r_{0,002}$  presenta un límit superior més reduït que en es model estàndard (devers un  $\sim 10\%$ ), sa qual cosa fa disminuir es límit superior en s'escala d'energia de s'inflació (Linde, 1983; Lyth, 1984).

- Quant es paràmetre típic de VT IIIa,  $\beta_0$ , és interessant notar que, s'introducció de ses mesures de Planck a produït una reducció d'un 30% en es marges  $1\sigma$  respecte d'ets obtinguts amb WMAP7, en absència de modes tensorials, i quan  $dn_s/d \ln k = 0$ . Interessa recordar que, segurament, és a causa de què, pes valors de  $l < 250$  i sobre tot  $l < 100$ , pes quals es coeficients  $C_\ell$  de sa teoria VT IIIa presenten desviacions significatives respecte des  $C_\ell$  de Relativitat General, Planck proporciona informació observacional més ampla i precisa que WMAP. Tanmateix, quan  $dn_s/d \ln k \neq 0$ , sa distribució marginalitzada a nivell  $1\sigma$  torna a esser pràcticament com en es cas de WMAP7 (veure Il·lustració XLIV).
- En tots ets ajustos fets, sa relació entre sa funció de versemblança de VT IIIa i Relativitat General, pes millor encaix, satisfà sa desigualtat  $\mathcal{L}(VT)/\mathcal{L}(RG) > 1$ , sa qual cosa significa, d'un punt de vista estadístic, que VT IIIa és lleugerament més probable que Relativitat General.

En conclusió, sa teoria VT IIIa, aplicada a cosmologia, ha proporcionat una bona explicació a la constant cosmologia, i es seus encaixos entre prediccions teòriques i mesures experimentals, han conduït a valors des paràmetres estàndards de cosmologia molts similars an es de Relativitat General. Es nou paràmetre  $\beta_0$  pot prendre en un ample interval a nivell  $1\sigma$ .

Es bon resultats anteriors, són un motiu per escometre, en es futur, nous encaixos amb més paràmetres i dades observacionals.

Tota sa feina d'anàlisi i recodificació des programes informàtics CAMB i COSMOMC ha suposat un ample coneixement

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

de dits codis. Dit coneixement serà molt útil per escometre futurs estudis, de noves teories aplicades a cosmologia.

Finalitzada s'aplicació de sa teoria VT IIIa en cosmologia, hem aplicat aquesta an es cas de simetria esfèrica estàtica, sa qual cosa ha conduit a una forma de sa mètrica que és una generalització de Kottler–Schwarzschild–de Sitter, i que és similar a sa mètrica de Reissner–Nordström–de Sitter corresponent a un sistema estacionari amb simetria esfèrica i amb càrrega elèctrica, en es marc de sa Relativitat General; tanmateix, es paper de sa càrrega elèctrica és jugat per una quantitat que és proporcional a sa massa de sa font gravitatòria.

En absència de càrrega elèctrica, està provat que existeixen teories gravitatòries  $f(R)$  [veure (Nojiri & Odintsov, 2014)] que condueixen a un espai-temps de Reissner–Nordström–de Sitter, es mateix que hem demostrat que succeeix en sa teoria VT IIIa.

Atès que la constant cosmològica  $\Lambda$ , ha estat fixada per ses comparacions entre ses prediccions de sa teoria VT IIIa i ses observacions actuals, s'horitzó cosmològic té un radi ben definit, que és gairebé independent de sa massa  $m$ , per a qualsevol forat negre realista. Sempre hi ha un horitzó cosmològic per a qualche valor des paràmetre  $\Gamma$  definit en sa secció 2.7.2.

En sa teoria VT IIIa, hem demostrat que, per a una determinada massa  $m$ , es radi de s'horitzó d'un forat negre és més petit que es radi d'un forat negre de Kottler-Schwarzschild-de Sitter que tengués sa mateixa massa. Ses desviacions relatives entre aquests dos ràdios són petites però significatives, arribant a valors des 30%. Aquest efecte és important ja que és similar a s'efecte causat per un forat negre en rotació en Relativitat General, que condueix a un horitzó de radi menor que es predit quan no hi ha rotació. Per a  $\Gamma > 1/8\pi$  no existeix cap horitzó de forat negre en VT IIIa. Hem d'assenyalar que després de s'estudi des forats negres que acabam d'exposar, es paràmetres  $\eta$  i  $\varepsilon$  continuen essent arbitraris.

Diversos mètodes han estat dissenyats per estimar sa massa  $m$ , i es moment angular  $J$ , i es radi de s'horitzó  $r_{BH}$  d'un forat negre a partir de ses observacions. Si, en un futur, es mètodes esmentats esdevenen prou precisió, i es valor estimats per a ses quantitats  $m$ ,  $J$  i  $r_{BH}$  obeeixen a sa relació predita per mitjà de sa solució de Kerr de ses equacions d'Einstein, sa contribució des camp vectorial an es

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

radi de s'horitzó haurà d'esser considerada insignificant ( $\Gamma \approx 0$ ), tanmateix, si sa relació de Kerr no és satisfeta pes valors observats de  $m$ ,  $J$ , i  $r_{BH}$ , un valor apropiat de  $\Gamma$  podria esser una solució des problema.

Després de sa feina feta en simetria esfèrica estàtica, pensam que seria interessant escometre s'estudi d'un parell d'extensions:

- i. Es moviment de partícules de prova en es veïnatge des forat negre VT IIIa; això permetria estudiar es discs d'acreció i altres fenòmens.
- ii. Forats negres en rotació en es marc de sa teoria VT IIIa; d'aquesta manera, podríem trobar una relació entre  $m$ ,  $J$  i  $r_{BH}$ , que podria esser satisfeta pes valors observats d'aquestes quantitats en un futur.

Sa força de sa gravitació està fixada pes primer terme de s'acció (III.5) (proporcional a sa curvatura escalar  $R$ ). Es segon i tercer termes –relacionats amb sa gravitació en sa teoria VT IIIa– involucren ses constants d'acoblament  $\eta$  i  $\varepsilon$ , que no han pogut esser estimades, ni en aplicacions cosmològiques, ni en es cas de simetria esfèrica; per tant s'única cosa que podem dir d'aquestes constants és que satisfan sa restricció  $2\varepsilon - \eta > 0$  i que es seus valors han de preservar es caràcter feble de s'interacció gravitatòria front a s'electrofeble.

Finalment, s'ha fet un estudi general de ses equacions de sa teoria VT Ib, i ha estat aplicada a cosmologia. Per descomptat, primer hem obtengut ses equacions des *background*, i hem vist que sa densitat d'energia des camp  $A_\mu$  podria prendre es paper de s'energia fosca, però amb una evolució totalment diferent an es cas de VT IIIa; hem constatat com, en un cert temps finit, aquesta teoria prediu un Univers que acaba en un gran esquinç ('*big rip*').

A continuació s'ha descrit es comportament i evolució de ses perturbacions vectorials considerant que sa densitat d'energia des camp vectorial té un petit paràmetre de densitat  $\Omega_A = 0,01$ . Atès que hem considerat un model pla d'Univers hem hagut d'introduir  $\Omega_\Lambda \approx 0,67$  junt a ses proporcions de s'energia de radiació i de matèria, amb sa qual cosa, ses quantitats han quedat molt similars an es model estàndard. Així estam segurs d'explicar amb prou precisió ses observacions cosmològiques.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

En es model triat hem provat que s'evolució de ses perturbacions vectorials és molt diferent a s'evolució corresponent en Relativitat General. En sa teoria VT Ib considerada, es modes vectorials sub-horitzó oscil·len però es seus valors mitjans són coincidents amb sos de Relativitat General que són decreixents; però, es modes super-horitzó augmenten sense oscil·lacions. Per tant, aquests darrers modes podrien esser prou grans prop des desacoblament i posteriorment, tal com és requerit per tal d'explicar ses anomalies en es primers multipols des CMB (Morales & Saez, 2008).

Es mateix estudi s'ha fet per a valors molt més petits de  $|\Omega_A|$  (Dale & Sáez, 2012b), en aquesta referència en sa qual s'ha pres  $|\Omega_A| = 0,001$ , s'han trobat oscil·lacions (escales sub-horitzó) i modes creixents (escales super-horitzó).

Encara que es resultats anteriors en sa teoria VT Ib relatius an es modes vectorials són interessants, seria necessari fer un estudi exhaustiu a nivell pertorbatiu com s'ha fet en es cas de VT IIIa, per veure si és possible explicar ses observacions en un model de VT Ib en es qual  $\rho_A$  jugàs es paper d'energia fosca; d'aquesta manera no haurien d'introduir una constant cosmològica com s'ha fet abans.

## V. APÈNDIXS.

---

### A. Ses equacions de ses pertorbacions en Relativitat General.

Encara que ha esta demostrat que (Abbott & Schaefer, 1986), per a qualque observador, es contrast relatiu de sa temperatura des CMB, a causa d'efectes lineals,  $\Delta T/T$  pot expressar-se en funció de ses quantitats invariants *gauge* definides en es capítol I secció 1.2, ses aplicacions informàtiques CMBFAST i CAMB utilitzen es *gauge* síncron definit en s'esmentada mateixa secció.

Açò és totalment correcte, ja que dit contrast  $\Delta T/T$ , i ses quantitats definides a partir d'ell (coeficients  $C_\ell$ , etc.) poden avaluar-se en qualque *gauge*, d'igual forma que qualque altra quantitat invariant *gauge*, per a qualsevol que sia es seu significat físic.

En Relativitat General ses equacions d'evolució per a ses pertorbacions escalars incloent es sistema (III.72)–(III.75), que serà obtès en aquest apèndix.

Primer escriurem ses equacions d'evolució de ses pertorbacions escalars adiabàtiques ( $\eta_E = 0$ ) en funció des modes definits per Bardeen, que apareixen en ses expressions (I.12)–(I.13); per tal motiu escrivim s'equació  $\delta R_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \delta R = 8\pi G \delta T_\beta^\alpha$ , que és totalment general i utilitzam s'apèndix de (Bardeen, 1980) a on podem trobar explixitament  $\delta R_\alpha^\beta$ . Si feim això, ses equacions d'Einstein de Relativitat General per a ses pertorbacions escalars, en es *gauge* síncron, poden esser escrites de sa manera següent:

$$\begin{aligned}
 (A.1) \quad & 6aH \dot{H}_L = 8\pi G a^2 \rho_B \delta + 2k^2 \left( H_L + \frac{1}{3} H_T^{(0)} \right), \\
 & -ka^2 \left( \dot{H}_L + \frac{1}{3} \dot{H}_T^{(0)} \right) = 4\pi G a^4 (\rho_B + p_B) v^{(0)}, \\
 & \ddot{H}_L + 2aH \dot{H}_L = -4\pi G a^2 p_b \pi_L^{(0)} + \frac{1}{3} k^2 \left( H_L + \frac{1}{3} H_T^{(0)} \right), \\
 & \ddot{H}_T^{(0)} + 2aH \dot{H}_T^{(0)} = 8\pi G a^2 p_b \pi_T^{(0)} - k^2 \left( H_L + \frac{1}{3} H_T^{(0)} \right).
 \end{aligned}$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Cal adonar-se que són un conjunt de quatre equacions diferencials per a un total de sis funcions incògnites que són:  $H_L$ ,  $H_T^{(0)}$ ,  $v^{(0)}$ ,  $\pi_L^{(0)}$ ,  $\pi_T^{(0)}$  i  $\delta$ . Aquestes equacions pertoquen a un sistema més ample (Bardeen, 1980), que conté altres equacions i funcions que provenen de s'equació d'estat (relació entre  $\pi_L^{(0)}$  i  $\delta$ ) i de sa forma de  $\pi_T^{(0)}$  que depèn de sa microfísica.

D'igual manera, podem trobar ses equacions per a ses pertorbacions vectorials en es mateix *gauge*, aquestes són:

$$(A.2) \quad \begin{aligned} B^{(1)} &= 16\pi G \frac{a^2}{k^2} (\rho_b + p_b) v^{(1)}, \\ \dot{B}^{(1)} + 2aHB^{(1)} &= -16\pi G \frac{a^2}{k} p_b \pi_T^{(1)}. \end{aligned}$$

En aquest cas tenim tres funcions incògnites i dues equacions. Sa funció  $\pi_T^{(1)}$  ha d'esser calculada tenint en compte ses interaccions entre fotons, neutrins i matèria bariònica.

I finalment s'equació per a s'evolució de ses pertorbacions tensorials és:

$$(A.3) \quad \ddot{H}_T^{(2)} + 2aH \dot{H}_T^{(2)} + k^2 H_T^{(2)} = 8\pi G a^2 p_B \pi_T^{(2)}.$$

Ses funcions  $H_T$  i  $\pi_T^{(2)}$  són invariants *gauge*. Sa funció  $\pi_T^{(2)}$  ha de calcular-se de forma semblant a  $\pi_T^{(1)}$  (interaccions entre partícules).

A partir de ses equacions (A.1) i tenint en compte  $h = 6H_L$ ,  $\eta = -H_L - H_T^{(0)}/3$ ,  $\theta = k v^{(0)}$ , i  $\sigma = 2p_B \pi_T^{(0)}/3(p_B + \rho_B)$  se pot obtenir ses equacions (III.72)–(III.75).



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### B. S'equació de Boltzmann i es càlcul de $\Delta T/T$ .

S'equació de Boltzmann (o equació de transport de Boltzmann) descriu es comportament estadístic d'un sistema de partícules que no està en equilibri termodinàmic.

En mecànica clàssica no relativista, un sistema de partícules d'una certa espècie queda totalment caracteritzat per sa densitat des nombre de partícules en s'espai de fases  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) \propto dN/dx^3 dp^3$ . Si sobre aquest sistema actuàs una certa força  $\vec{F}$ , per exemple sa gravetat, es teorema de Liouville assegura que es compleix s'equació:

$$(B.1) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \frac{\vec{F}}{m} = 0.$$

Si aquesta espècie interaccionàs amb altres, intercanviant energia i moment, en aquesta equació apareixeria un nou terme a causa de ses col·lisions prenent sa forma:

$$(B.2) \quad \frac{df}{dt} = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{col}},$$

on es segon terme representa ses col·lisions (conegut com “*collision integral*”).

Sa generalització relativista de s'equació de Liouville en s'espai de fases per a  $f(x^\mu, p^\mu)$  és

$$(B.3) \quad \left[ -p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu p^\nu p^\kappa \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] f = 0,$$

essent  $p^\mu$  es quadri-moment. A partir d'aquí se fa es tractament per treure ses equació d'evolució de matèria i radiació en cosmologia.

A partir d'aquest moment treballarem en es *gauge* síncron. S'element de línia en termes de coordenades comòbils i temps conforme, en cosmologia estàndard, s'escriu  $ds^2 = a^2(\tau) \left[ -d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]$ , on  $h_{ij}$  representa sa

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

pertorbació de sa mètrica. Es mode escalar de  $h_{ij}$  se pot escriure com una integral de Fourier (Ma & Bertschinger, 1995),

$$(B.4) \quad h_{ij}(\vec{x}, t) = \int d^3k \, e^{i\vec{k}\vec{x}} \left[ \tilde{k}_i \tilde{k}_j \tilde{h}(\vec{k}, t) + \left( \tilde{k}_i \tilde{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) 6\tilde{\eta}(\vec{k}, t) \right],$$

amb  $\vec{k} = k \hat{k}$ . Es dos camps definits en s'espai de Fourier  $h(\vec{k}, \tau)$  i  $\eta(\vec{k}, \tau)$  caracteritzen es mode escalar de sa pertorbació de sa mètrica.

En lloc d'escriure sa funció de distribució  $f$  en termes de  $p^\mu$ , convé (Ma & Bertschinger, 1995) utilitzar ses quantitats  $q_j$ , de manera que  $p_j = a(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij})q^i$ , i escriure  $q_j \equiv q n_j$  amb  $n_i n^i = \delta_{ij} n^i n^j = 1$ . Idò amb aquestes variables en s'espai de fases sa funció  $f(x^i, p_j, \tau)$  queda reemplaçada per  $f(x^i, q, n_j, \tau)$  i s'equació de Boltzmann és

$$(B.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dn_i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial n_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\text{col}}.$$

Per conveniència és habitual escriure sa funció distribució en s'espai de fases com una distribució a ordre zero més una pertorbació:

$$(B.6) \quad f(x^i, q, n_j, \tau) = f_0(q) \left[ 1 + \Psi(x^i, q, n_j, \tau) \right].$$

S'equació de Boltzmann per a sa funció de distribució en s'espai de Fourier  $k$  pot esser escrita de sa següent manera en es *gauge* síncron (Ma & Bertschinger, 1995) :

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(B.7) \quad \frac{1}{f_0} \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\text{col}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + i \frac{q}{\epsilon} (\vec{k} \cdot \vec{\tilde{n}}) \Psi + \frac{d \ln f_0}{d \ln q} \left[ \dot{\tilde{\eta}} - \frac{\dot{\tilde{h}} + 6\dot{\tilde{\eta}}}{2} (\vec{k} \cdot \vec{\tilde{n}})^2 \right],$$

essent  $\epsilon = \sqrt{q^2 + m^2 a^2}$ ,  $\vec{\tilde{n}}$  sa direcció des moment  $\vec{q} = q\vec{\tilde{n}}$ , i finalment,  $\tilde{\eta}$  i  $\tilde{h}$  són es modes escalars utilitzats en sa secció 2.6.3.2 i en s'equació (B.4). És interessant notar que sa relació  $p^\mu p_\mu = m^2$ , essent  $p^\mu = mu^\mu$ ,  $u^\mu$  sa quadrivelocitat  $u^\mu u_\mu = -1$  i  $\epsilon = p^0$ , condueix a s'expressió  $\epsilon^2 = p^2 + m^2$  en és *gauge* síncron (també en es *background*), però no és així en qualque *gauge*.

Sa funció de distribució en s'espai de fases a ordre zero  $f_0$  és sa funció de distribució de Fermi-Dirac per a fermions (signe positiu) i sa funció de distribució de Bose-Einstein per a bosons (signe negatiu):

$$(B.8) \quad f_0 = f_0(\epsilon) = \frac{g_s}{h_p^3} \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T_0} \pm 1},$$

amb  $T_0 = aT$ , sa temperatura de ses partícules avui, es factor  $g_s$  representa es nombre de graus interns de llibertat i  $h_p$  sa constant de Planck.

A partir d'ara considerarem sa distribució de fotons i sa seva interacció amb sos electrons lliures abans des desacoblament. Sa pertorbació en sa temperatura des fotó  $\Delta = \Delta T/T$  se defineix segons:

$$(B.9) \quad f(x^i, q, n_j, \tau) = f_0 \left( \frac{q}{1 + \Delta} \right),$$

On  $f_0$  és sa funció de distribució de Bose-Einstein definida en (B.8) amb  $\epsilon = q$ . A partir de s'equació (B.6) s'obté, a primer ordre en  $\Psi$ ,

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(B.10) \quad \Delta(x^i, q, n_j, \tau) = - \left( \frac{d \ln f_0}{d \ln q} \right)^{-1} \Psi(x^i, q, n_j, \tau).$$

Com succeeix que sa font gravitatòria i s'operador de col·lisió linealitzat per a sa dispersió Thomson en s'equació de Boltzmann per a  $\Psi$  [equació (B.7)] són proporcionals a  $d \ln f_0 / d \ln q$ , sa funció  $\Delta$  no depèn de  $q$ ; això vol dir que, per a qualque observador síncron, es contrast  $\Delta T / T$  només depèn de  $\vec{n}$ ; és a dir, de sa direcció d'observació  $-\vec{n}$ , essent independent de sa freqüència d'observació.

Atès que sa densitat pròpia de radiació des cos negre és proporcional a sa quarta potència de sa temperatura, sa pertorbació relativa en sa temperatura de sa radiació, vinent d'una direcció  $-\vec{n}$ , és un quart de sa pertorbació relativa en sa densitat d'energia pròpia des fotons que viatgin en sa direcció  $\vec{n}$ , i llavors  $\Delta = \frac{1}{4} \delta_\gamma$  (Ma & Bertschinger, 1995; Weinberg, 2008).

Tenint en compte que, s'equació de Boltzmann (B.7), es moment  $\vec{k}$  només apareix en sa forma  $\vec{k} \cdot \vec{n}$ , i sa funció  $\Delta$  pot expandir-se de sa següent manera,

$$(B.11) \quad \begin{aligned} \Delta(\vec{x}, \vec{n}, \tau) &= \int d^3 k e^{i\vec{k}\vec{x}} \Delta(\vec{k}, \vec{n}, \tau) \\ &\equiv \int d^3 k e^{i\vec{k}\vec{x}} \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Delta_l(\vec{k}, \tau) P_l(\vec{k} \cdot \vec{n}), \end{aligned}$$

on  $P_l(\mu)$  és es polinomi de Legendre de grau  $l$  avaluat per a  $\mu = \vec{k} \cdot \vec{n}$ . Aquesta darrera equació pot esser usada per a trobar es coeficients  $C_l^{TT}$  [veure equació (90) en (Ma & Bertschinger, 1995)].

Per altra banda si definim sa funció  $F_\gamma(\vec{k}, \vec{n}, \tau) \equiv \int q^2 dq q f_0(q) \Psi / \int q^2 dq q f_0(q)$ , és fàcil comprovar que  $F_{\gamma 0} = \tilde{\delta}_\gamma$ ,  $F_{\gamma 1} = 4\tilde{\theta}_\gamma / (3k)$  i  $F_{\gamma 2} = 2\tilde{\sigma}_\gamma$ , finalment sa funció  $F_\gamma$  pot esser expandida en termes des coeficients  $F_{\gamma l}$ , tal com s'ha fet amb  $\Delta(\vec{k}, \vec{n}, \tau)$ , obtenint-se

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(B.12) \quad F_\gamma(\vec{k}, \vec{n}, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) F_{\gamma l}(\vec{k}, \tau) P_l(\vec{k} \cdot \vec{n}).$$

De manera similar a  $F_\gamma$  que és una funció associada a sa temperatura, o equivalentment a sa suma de ses dues components lineals de polarització (intensitat total), se defineix sa funció  $G_\gamma(\vec{x}, \vec{n}, \tau)$  per a sa diferència entre aquestes dues components. Per a més detalls d'ets operadors de col·lisió linealitzats per a sa dispersió Thomson veure (Bond & Efstathiou, 1984, 1987; Kosowsky, 1996).

Amb sos desplaçaments de  $F_\gamma$  i  $G_\gamma$ , i s'equació de Boltzmann, s'arriba an es següent sistema jeràrquic d'equacions diferencials, en ses quals només apareixen modes escalars definits en sa secció 2.6.3.2 (Wilson & Silk, 1981; Bond & Efstathiou, 1984; Ma & Bertschinger, 1995):

$$(B.13) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\delta}}_\gamma &= -\frac{4}{3} \tilde{\theta}_\gamma - \frac{2}{3} \dot{\tilde{h}}, \\ \dot{\tilde{\theta}}_\gamma &= k^2 \left( \frac{1}{4} \tilde{\delta}_\gamma - \tilde{\sigma}_\gamma \right) + an_e \sigma_T (\tilde{\theta}_b - \tilde{\theta}_\gamma), \\ \dot{F}_{\gamma 2} &= \frac{8}{15} \tilde{\theta}_\gamma - \frac{3}{5} k F_{\gamma 3} + \frac{4}{15} \dot{\tilde{h}} + \frac{8}{5} \dot{\tilde{\eta}} - \frac{9}{5} an_e \sigma_T \tilde{\sigma}_\gamma \\ &+ \frac{1}{10} an_e \sigma_T \tilde{\sigma}_\gamma (G_{\gamma 0} - G_{\gamma 2}), \\ \dot{F}_{\gamma l} &= \frac{k}{2l+1} \left[ l F_{\gamma(l-1)} - (l+1) F_{\gamma(l+1)} \right] - an_e \sigma_T F_{\gamma l}, \quad l \geq 3, \\ \dot{G}_{\gamma l} &= \frac{k}{2l+1} \left[ l G_{\gamma(l-1)} - (l+1) G_{\gamma(l+1)} \right] \\ &+ an_e \sigma_T \left[ -G_{\gamma l} + \frac{1}{2} (F_{\gamma 2} + G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) \left( \delta_{l0} + \frac{1}{5} \delta_{l2} \right) \right], \end{aligned}$$

on  $n_e$  representa sa densitat mitjana pròpia d'electrons,  $\sigma_T$  és sa secció eficaç en sa dispersió Thompson, i  $\delta_{ij}$  és es símbol de Kronecker.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Aquest sistema jeràrquic pot integrar-se amb sa resta d'equacions d'Einstein [per a més detalls veure (Ma & Bertschinger, 1995)], per tal d'obtenir  $F_\gamma$  mitjançant (B.12), i a continuació treure  $\Delta = \Delta T/T = \frac{1}{4}F_\gamma$ . De manera similar se treuen ses contribucions vectorials i tensorials [per a detalls veure sa secció 4.5.2 i 4.5.3 en (Durrer, 2008)].

Se poden escriure unes equacions equivalents an es sistema (B.13) però en es *gauge* longitudinal, i llavors, en lloc de resoldre aquest sistema fins a alts valors de  $\ell$  en sa jerarquia, existeix una alternativa –en aquest gauge– per calcular ses fluctuacions de temperatura i polarització des fotons. Sa dita alternativa parteix d'unes equacions que se poden obtenir a partir de s'equació de Boltzmann, per perturbacions escalars, després d'integrar en angle i en moment. Aquestes equacions poden esser escrites com (Bond & Efstathiou, 1987),

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta}^{(0)} + ik\mu\Delta^{(0)} &= \dot{\phi} - ik\mu\psi + \dot{\kappa} \left\{ -\Delta^{(0)} + \Delta_0^{(0)} + i\mu \frac{\tilde{\theta}_b}{k} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}P_2(\mu) [\Delta_2^{(0)} + G_0^{(0)} + G_2^{(0)}] \right\}, \\
 \dot{G}^{(0)} + ik\mu G^{(0)} &= \dot{\kappa} \left\{ -G^{(0)} + \frac{1}{2}[1 - P_2(\mu)] [\Delta_2^{(0)} + G_0^{(0)} + G_2^{(0)}] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{B.14}$$

a on es superíndex (0) fa referència a què només feim ús de modes escalars; essent  $\dot{\kappa}$  sa profunditat òptica diferencial per a sa dispersió Thomson. Ses funcions  $\phi$  i  $\psi$  són modes escalars associats an es *gauge* longitudinal, a on s'element de línia se pot escriure com:

$$ds^2 = a^2 \left[ -(1 + 2\psi) d\tau^2 + (1 - 2\phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right].
 \tag{B.15}$$

Aquestes funcions estan relacionades amb sos modes  $\tilde{h}$  i  $\tilde{\eta}$  des *gauge* síncron segons ses següents expressions (Ma & Bertschinger, 1995):

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

$$(B.16) \quad \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2k^2} \left[ \ddot{\tilde{h}} + 6\ddot{\tilde{\eta}} + \frac{\dot{a}}{a} (\dot{\tilde{h}} + 6\dot{\tilde{\eta}}) \right], \\ \phi &= \tilde{\eta} - \frac{1}{2k^2} \frac{\dot{a}}{a} (\dot{\tilde{h}} + 6\dot{\tilde{\eta}}). \end{aligned}$$

A continuació s'integren ses equacions (B.14) al llarg des con de llum passat des fotó, i s'obtenen unes formes integrals per a ses pertorbacions en temperatura i polarització des fotons. Aquestes equacions són (Zaldarriaga & Harari, 1995):

$$(B.17) \quad \begin{aligned} \Delta^{(0)} &= \int_0^{\tau_0} d\tau e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} S_T^{(0)}(k, \tau), \\ G^{(0)} &= \int_0^{\tau_0} d\tau e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} S_G^{(0)}(k, \tau), \\ S_T^{(0)}(k, \tau) &= g \left[ \Delta_0^{(0)} + \psi - \frac{\dot{\tilde{\theta}}_b}{k^2} - \frac{1}{4} (\Delta_2^{(0)} + G_0^{(0)} + G_2^{(0)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4k^2} (\ddot{\Delta}_2^{(0)} + \ddot{G}_0^{(0)} + \ddot{G}_2^{(0)}) \right] + e^{-\kappa} (\dot{\phi} + \dot{\psi}) \\ &\quad - \dot{g} \left[ \frac{\tilde{\theta}_b}{k^2} + \frac{3}{4k^2} (\dot{\Delta}_2^{(0)} + \dot{G}_0^{(0)} + \dot{G}_2^{(0)}) \right] \\ &\quad - \frac{3\ddot{g}}{4k^2} (\Delta_2^{(0)} + G_0^{(0)} + G_2^{(0)}), \\ S_G^{(0)}(k, \tau) &= -\frac{3}{4k^2} \left\{ g \left[ k^2 (\Delta_2^{(0)} + G_0^{(0)} + G_2^{(0)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\ddot{\Delta}_2^{(0)} + \ddot{G}_0^{(0)} + \ddot{G}_2^{(0)}) \right] + 2\dot{g} (\dot{\Delta}_2^{(0)} + \dot{G}_0^{(0)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \dot{G}_2^{(0)}) + \ddot{g} (\Delta_2^{(0)} + G_0^{(0)} + G_2^{(0)}) \right\}, \end{aligned}$$

on  $g(\tau) = \dot{\kappa} e^{-\kappa}$  és s'anomenada funció visibilitat. Ses funcions  $S_T^{(0)}(k, \tau)$  i  $S_G^{(0)}$  són habitualment anomenades ses fonts d'anisotropia de temperatura i polarització, respectivament. Vegem qualcunes de ses contribucions a  $S_T^{(0)}(k, \tau)$ , que són recognoscibles

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

fàcilment: ses dues primeres funcions des segon membre són  $\Delta_0^{(0)}$  i  $\psi$ ; es primer és sa contribució de s'anisotropia intrínseca i es segon és sa contribució d'aquest potencial gravitatori  $\psi$  en sa SDC; es següent terme  $\dot{\tilde{\theta}}_b/k^2$  és junt a  $\dot{g}\tilde{\theta}_b/k^2$  (en sa segona línia) sa contribució de ses velocitats peculiars. Aquest termes representen ses contribucions dominats a ses anisotropies des CMB (veure capítol I secció 2).



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### C. Teoria de s'electromagnetisme estès (EE).

Sa teoria de s'electromagnetisme estès va esser proposta en (Beltrán & Maroto, 2009a) i desplegada en (Beltrán & Maroto, 2011a, 2011b; Dale & Sáez, 2012). Es camps bàsics a variar són sa mètrica  $g_{\mu\nu}$  i es camp vectorial  $A_\mu$ . Sa simetria fonamental és  $A_\mu \mapsto A_\mu + \nabla_\mu \Phi$ , amb  $\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0$ , que és diferent de sa simetria *gauge* estàndard  $U(1)$  de s'electromagnetisme. Ses equacions bàsiques de s'EE són tretes a partir de sa següent densitat Lagrangiana (Dale & Sáez, 2012a):

$$(C.1) \quad I = \int \left[ \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \gamma (\nabla \cdot A)^2 + J^\mu A_\mu - \rho(1 + \varepsilon) \right] \sqrt{-g} d^4x,$$

on  $\gamma$  és un paràmetre arbitrari sense dimensions,  $J^\mu$  es quadrivector corrent elèctric,  $\rho$  sa densitat d'energia conservada  $[\nabla_\mu (\rho U^\mu) = 0]$  d'un fluid perfecte isentròpic ( $U^\mu$  és sa quadrivelocitat de ses línies d'univers des fluid) i  $\varepsilon$  és sa seva densitat d'energia interna per a més detalls veure ses referències (Hawking & Ellis, 1999; Dale & Sáez, 2012a). Es corrent elèctric és  $J^\mu = \rho_q U^\mu$ , essent  $\rho_q$  sa densitat de càrrega. Aquesta densitat Lagrangiana s'obté a partir (III.5) quan feim  $2\varepsilon - \eta = 8\pi G$ ,  $\eta = 16\pi G\gamma$ , i introduïm es termes de corrent elèctric i des fluid.

En concordança amb ses tècniques variacionals descrites en (Hawking & Ellis, 1999), s'han de fer variacions independents de tres camps: es camp vectorial de sa teoria  $A_\mu$ , ses línies de flux des fluid  $U^\mu$  i sa mètrica  $g_{\mu\nu}$ .

Per tant començam fent variacions des camp  $A_\mu$  (variacions  $\delta_A$ ) fixant ses línies de flux des fluid i sa mètrica. D'aquesta manera s'obtenen ses equacions des camp  $A_\mu$ , que són una generalització de

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

ses equacions de Maxwell en un espai-temps corbat. Ses dites equacions són

$$(C.2) \quad \nabla^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu + J_\mu^A,$$

on  $J_\mu^A = -2\gamma \nabla_\mu (\nabla \cdot A)$  juga es paper d'un nou corrent fictici. Partint d'aquesta expressió immediatament trobam sa relació

$$(C.3) \quad \nabla^\mu (J_\mu + J_\mu^A) = 0,$$

assus-suaixí, sa magnitud conservada (conseqüència de s'esmentada simetria en es primer paràgraf d'aquest apartat) és es corrent total  $J_\mu + J_\mu^A$  i no sa quantitat  $J_\mu$ ; de fet sa relació  $\nabla \cdot J = 0$ , no és una equació d'EE; sa veritable llei de conservació és (C.3), que admet solucions amb  $\nabla_\mu J^\mu = \nabla \cdot J \neq 0$ . Aquest fet és important en cosmologia ja que si  $\nabla \cdot J = 0$  es corrent  $J_\mu$  no involucra modes escalars sino només un mode vectorial,  $J^\mu$  mentre que sa condició  $\nabla \cdot J \neq 0$  requereix s'existència de modes escalars per a  $J^\mu$ ; idò en sa teoria EE han d'esser introduïts modes escalars (a banda d'ets estàndards) tant en es camp electromagnètic  $A^\mu$  (modes  $A$ ) com en es corrent  $J^\mu$  (modes  $J$ ).

En segon lloc, feim variacions de ses línies de flux des fluid  $U^\mu$  (variacions  $\delta_U$ ), fixant es camp vectorial i sa mètrica, de tal manera que, ses densitats  $\rho$  i  $\rho_q$  han de complir ses expressions  $\nabla_\mu (\rho U^\mu) = 0$  i (C.3), respectivament [veure (Hawking & Ellis, 1999)]. A partir de s'equació (C.3), s'obté sa relació  $\delta_U (\nabla_\mu J^\mu) = \nabla_\mu (\delta_U J^\mu) = 0$ , ja que  $\nabla^\mu J_\mu^A$  no depèn de  $U^\mu$ . Tenint en compte totes aquestes consideracions s'obtenen ses següents equacions:

$$(C.4) \quad (\mu + p)U^\mu \nabla_\mu U^\nu = -\nabla_\sigma p (g^{\sigma\nu} + U^\sigma U^\nu) + F^{\nu\alpha} J_\alpha + A^\nu (\nabla \cdot J^A).$$

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Aquestes equacions descriuen s'evolució des fluid en sa teoria VT IIIa. Es terme de sa segona línia és sa força de Lorentz generalitzada,  $f^L$ , de sa teoria; idò, podem escriure

$$(C.5) \quad f_{\mu}^L = F_{\mu\nu}J^{\nu} + (\nabla \cdot J^A)A_{\mu}.$$

Finalment s'ha de variar sa mètrica, fixant es camps  $A_{\mu}$  i  $U^{\mu}$  (variacions  $\delta_g$ ). Es camp  $U^{\mu}$  satisfarà s'equació (C.4) per a qualche mètrica  $g^{\mu\nu}$  i s'equació de conservació (C.3); aquesta darrera equació pot esser escrita segons  $\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(J^{\mu} + J^{A\mu})] = 0$  i serà satisfeta al llarg de ses línies de flux. Per tant  $\sqrt{-g}(J^{\mu} + J^{A\mu})$  no canvia quan se varia sa mètrica [veure (Hawking & Ellis, 1999)]; és a dir, podem escriure

$$(C.6) \quad \delta_g(\sqrt{-g}J^{\mu}) = -\delta_g(\sqrt{-g}J^{A\mu}).$$

S'equació (C.6) implica que es terme  $J^{\mu}A_{\mu}$  –involucrat en sa densitat Lagrangiana (C.1)– és equivalent a  $-J^{A\mu}A_{\mu}$  quan se fan variacions  $\delta_g$ , necessàries per tal d'obtenir es tensor energia-moment. Si tenim en compte aquest fet, consideram s'identitat  $\nabla^{\mu}[A_{\mu}(\nabla \cdot A)] = (\nabla \cdot A)^2 + A_{\mu}\nabla^{\mu}(\nabla \cdot A)$  i a més feim ús sa definició des corrent fictici  $J^{\mu A}$ , és fàcil provar que ses densitats Lagrangianes  $\gamma(\nabla \cdot A)^2 + J_{\mu}A^{\mu}$  i  $-\gamma(\nabla \cdot A)^2$  són totalment equivalents quan feim variacions  $\delta_g$  (difereixen en una divergència). Resumint ses variacions  $\delta_g$  condueixen a

$$(C.7) \quad G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} = 8\pi G(T_{RG}^{\mu\nu} + T_{EE}^{\mu\nu}),$$

on  $T^{\mu\nu} = T_{RG}^{\mu\nu} + T_{EE}^{\mu\nu}$  és es tensor energia-moment total des fluid carregat més es camp electromagnètic, essent  $T_{RG}^{\mu\nu}$  es tensor energia-moment d'un fluid tal com apareix en Relativitat General. Es tensor

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

energia-moment des camp electromagnètic –en sa teoria EE– és  $T_{\mu\nu}^{EE}$ . Dits tensors s’escriuen de sa manera següent:

$$(C.8) \quad T_{RG}^{\mu\nu} = (\mu + p)U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu},$$

i

$$(C.9) \quad T_{EE}^{\mu\nu} = F^\mu{}_\alpha F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ + 2\gamma \left\{ g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \cdot A)^2 + A^\alpha \nabla_\alpha (\nabla \cdot A) \right] \right. \\ \left. - A^\mu \nabla^\nu (\nabla \cdot A) - A^\nu \nabla^\mu (\nabla \cdot A) \right\}.$$

Observeu que es signes des darrers termes en (III.11) i (C.9) són oposat, sa qual cosa és a causa de s’equivalència des lagrangians  $\gamma(\nabla \cdot A)^2 + J_\mu A^\mu$  i  $-\gamma(\nabla \cdot A)^2$ . Sa part d’aquest darrer tensor energia-moment que depèn de  $\gamma$  apareix en EE però no en sa teoria Einstein-Maxwell. Es dos primers termes d’aquest tensor sí que apareixen en Einstein-Maxwell.

Aquest tensor s’ha de comparar amb s’expressió (2.7) en sa referència (Beltrán, Koivisto, Maroto, & Mota, 2009); tenint en compte ses diferències de signatura; així observam que es terme que conté  $\gamma$  en s’equació (C.9) té signe oposat an es que apareix en s’esmentada equació (2.7). Aquesta diferència és perquè en es nostre cas és corrent conservat és  $J_\mu + J_\mu^A$ , mentre que ets autors esmentats consideren vàlida sa llei de conservació estàndard de corrent  $J_\mu$ .

Per altra banda, atès que, no tenim arguments convincents que demostrin que inicialment, en un “*redshift*” de  $z \sim 10^8$ , es modes escalars associats a  $J_\mu$  i  $A_\mu$  són negligibles front a ets petits modes escalar des fluid de radiació; idò no podem assegurar que aquests modes no afectin s’evolució de ses pertorbacions de sa mètrica; per tant, no han d’esser negligits, *a priori*, per tal d’obtenir ses condicions inicials per a sa mètrica i pes fluid en s’integració numèrica.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Per a un *background* cosmològic pla homogeni, isòtrop, i sense càrrega, s'element de línia pren sa forma (I.11), i a més a més se compleix  $A_i = 0$  i  $F_{\mu\nu} = 0$  (Dale & Sáez, 2012a). A partir de (C.7), (C.8) i (C.9) s'obtenen unes equacions de *background* anàlogues a (III.20) i (III.21); en particular a partir des tensor d'energia-moment (C.9) s'obté

$$(C.10) \quad \rho_A = -p_A = -\gamma(\nabla \cdot A)^2.$$

Per tant, sa constant  $\gamma$  ha d'esser negativa per tal de tenir una densitat d'energia  $\rho_A$  positiva.

S'equació (III.22) –versió gravitatòria– ha de comparar-se amb s'equació (C.10) de EE (considerant sa relació  $\gamma = \eta/2$  entre tots dos paràmetres), en aquesta equació (III.22) és clar que, per tal de tenir una densitat d'energia  $\rho_A$  positiva, es signe de sa constant  $\eta$  ha d'esser positiu [per a més detalls veure (Dale & Sáez, 2014)]. Per tant queda clar que, si volem que s'energia des camp electromagnètic en sa teoria EE, faci es paper d'una constant cosmològica, o simplement que sa seva aportació energètica sia de signe positiu, sa constant  $\gamma$  ha d'esser negativa. Aquest signe és irrellevant en cosmologia, però és important en sa teoria quàntica de camps. Si tornam a sa densitat Lagrangiana (C.1), un signe negatiu en es coeficient  $\gamma$  [o equivalentment en  $\eta$  si se escriu segons (III.5)] conduiria a fantasmes quàntics.

Per tot això sa teoria VT IIIa ha d'esser considerada com una teoria de gravitació pura, com ha estat assumit en aquesta tesi. Es camp  $A^\mu$  no té res a veure amb so potencial vector des camp electromagnètic. No s'acobla amb corrents elèctrics. Sa simetria *gauge*  $U(1)$  de sa teoria Maxwell no se requereix en sa teoria VT IIIa. S'interacció electromagnètica ha d'esser descrita en sa forma estàndard.

Existeixen teories amb accions que estan dissenyades per descriure tant es camps gravitatoris com electromagnètics; poden trobar-se interessants casos en (Novello & Bergliaffa, 2008) on se proposen acoblaments no mínims de s'electromagnetisme amb so camp gravitatori; també en (Bamba, Nojiri, & Odintsov, 2008) és proposat un molt prometedor acoblament no mínim entre es camp

## **Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia**

electromagnètic i es camp gravitatori d'una teoria  $f(R)$ ; s'ha demostrat que aquesta teoria és viable, i que pot explicar de forma simultània s'inflació i s'acceleració tardana.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

### D. Estimació de ses funcions $Y_i$ en Relativitat General.

En aquesta secció considerarem pertorbacions cosmològiques adiabàtiques, tal com suggereix ses mesures des satèl·lit WMAP.

Ses pertorbacions cosmològiques que evolucionen fora de s'horitzó efectiu ( $k < aH/2\pi$ ) ho fan, fonamentalment, de manera independent a sa microfísica. Fonamentats en aquesta raó, podem negligir ets esforços anisotròpics produïts pes neutrins ( $\pi_T^{(0)} = 0$ ), així com, maldament s'estret acoblament entre fotons i barions [veure (Ma & Bertschinger, 1995)] en  $z > 1100$ , sa transferència d'energia i moment entre aquestes dos espècies pot esser no considerada i, en conseqüència, es corresponents fluids poden esser tractats com a independents. Per tant, per a escales super-horitzó, podem estimar ses funcions  $Y_i$  que apareixen en sa secció 2.6.3.1, solucionant ses equacions (III.51)–(III.55) per a Relativitat General que, pes cas considerat de pertorbacions adiabàtiques i absència d'esforços anisotròpics  $\pi_T^{(0)} = \eta_E = 0$  aquestes equacions, després de certes operacions algebraiques, condueixen a:

$$(D.1) \quad \Phi_H = 8\pi G \frac{\Psi_m}{2ak^2},$$

$$(D.2) \quad \dot{\Psi}_m = -a^3 k (\rho_B + p_B) v_s^{(0)},$$

$$(D.3) \quad \dot{v}_s^{(0)} + aHv_s^{(0)} = \frac{1}{a} \left[ \frac{kc_s^2}{(\rho_B + p_B)a^2} - 8\pi G \frac{1}{2k} \right] \Psi_m,$$

$$(D.4) \quad 0 = \ddot{\Psi}_m + (1 + 3c_s^2) aH \dot{\Psi}_m + \left[ k^2 c_s^2 - 8\pi G \frac{1}{2} (\rho_B + p_B) a^2 \right] \Psi_m,$$

essent  $\Psi_m = \rho_B a^3 \epsilon_m$ . Aquest sistema d'equacions diferencials s'ha de solucionar en conjunt amb ses equacions de *background* per a unes condicions inicials apropiades en  $z = 10^8$ .

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

De manera senzilla feim s'integració de ses equacions de *background* pes cas pla amb constant cosmològica i amb sos valors de densitat de matèria, radiació i buit que presentaven en sa secció 2.3, obtenint-se  $a(\tau)$ ,  $\rho_B(\tau)$  i  $p_B(\tau)$ .

Per altra banda per a s'integració de ses equacions (D.2)–(D.4) necessitam es valors inicials de  $\epsilon_m$ ,  $\dot{\epsilon}_m$  i  $v_s^{(0)}$  en  $z=10^8$ , es valor inicial de  $\dot{\epsilon}_m$  s'obté a partir des valor inicial de  $v_s^{(0)}$  i s'equació (D.2).

Atès que  $\epsilon_m$  i  $v_s^{(0)}$  són quantitats invariants *gauge* podem calcular es seus valors inicials en qualque *gauge*. Per a tal feina hem seleccionat es *gauge* síncron. Ses equacions (96) de sa referència (Ma & Bertschinger, 1995) poden utilitzar-se per tal d'obtenir de manera senzilla ses dites condicions inicials (per claredat, feim ús des superíndex *in* per indicar valor inicial de ses quantitats):

$$(D.5) \quad \begin{aligned} \delta_\gamma^{in} &= -\frac{2}{3} C (k\tau^{in})^2, & \delta_b^{in} &= \delta_c^{in} = \frac{3}{4} \delta_\gamma^{in}, \\ v_c^{(0)in} &= 0, & v_\gamma^{(0)in} &= v_b^{(0)in} = -\frac{1}{18} C (k\tau^{in})^3, \\ H_L^{in} &= \frac{1}{6} C (k\tau^{in})^2, & H_T^{(0)in} &= -\frac{19}{3} C (k\tau^{in})^2, \end{aligned}$$

essent es temps conforme  $\tau^{in}$  aquell que se correspon amb es “*redshift*” inicial triat, és a dir amb  $z=10^8$ ,  $C$  és una constant de normalització i es subíndexs  $\gamma, b$  i  $c$  fan referència a fotons, barions i matèria fosca, respectivament. Es contrast de densitat i sa velocitat peculiar des fluid compostat per aquestes tres espècies són (Ma & Bertschinger, 1995):

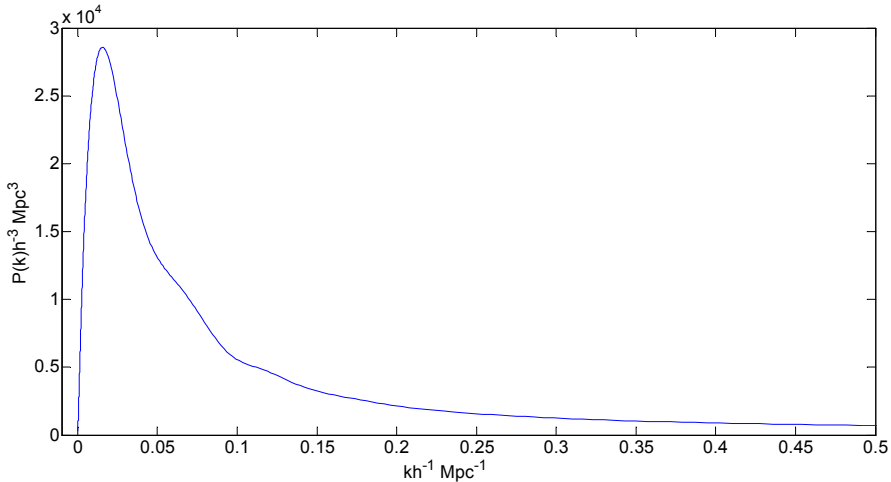
$$(D.6) \quad \begin{aligned} \delta &= (\rho_{B\gamma} \delta_\gamma + \rho_{Bb} \delta_b + \rho_{Bc} \delta_c) / \rho_B, \\ v^{(0)} &= \left[ (\rho_{B\gamma} + p_{B\gamma}) v_\gamma^{(0)} + (\rho_{Bb} + p_{Bb}) v_b^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + (\rho_{Bc} + p_{Bc}) v_c^{(0)} \right] / (\rho_B + p_B). \end{aligned}$$

Partint de ses equacions (D.5) i (D.6), junt amb ses expressions (I.25)–(I.26) i es valor de sa constant de normalització, podem



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

treure ets altres valors inicials, és a dir  $\epsilon_m^{in}$  i  $\nu_s^{(0)in}$ . Amb aquests valors inicials, ja podem escometre s'integració de ses equacions (D.2)–(D.4). Per tant queda sa feina de recercar es valor de sa constant  $C$ .



**Il·lustració LVII:** Espectre de potències de matèria (“matter power spectrum”) proporcionat per CMBFAST pes model concordant considerat.

Per a escales super-horitzó succeeix que sa funció gauge invariant

$$(D.7) \quad \zeta = \frac{2}{3} \frac{2\Phi_H + (aH)^{-1} \dot{\Phi}_H}{1+w} + \Phi_H \left[ 1 + \frac{2}{9} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \frac{1}{1+w} \right]$$

és una quantitat conservada (Brandenberger, 1985), i a més a més, quan es creua s'horitzó se satisfà sa relació

$$(D.8) \quad \delta(k, \tau) = O(1) \frac{\zeta}{1+w},$$

amb  $O(1)$  un número de s'ordre de s'unitat [veure (Brandenberger, 1985) i ses seves cites incloses]. Per treure es valor de sa constant de normalització procedim de sa següent manera:

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- I. Primerament mitjançant es codi CMBFAST s'obté s'actual espectre de potències de matèria (“matter power spectrum”)  $P(k, \tau_0)$  per a una certa parametrització des model concordant [veure (Dale & Sáez, 2012b) per a més detalls]. A partir d'aquest espectre representat en Il·lustració LVII, per a s'escala  $\tilde{k}$  (veure capítol III secció 2.6.3.1) treim  $P(\tilde{k}, \tau_0)$ .
- II. En segon lloc proveïm a sa constant  $C$  d'un cert valor arbitrari i resollem numèricament ses equacions (D.2)–(D.4) per a s'escala  $\tilde{k}$ . Amb aquesta informació i s'equació (D.7) s'obté senzillament sa funció  $\zeta(\tilde{k}, \tau)$ .
- III. En una darrera passa obtenim es valor de sa constant  $C$ . Això s'assoleix mitjançant s'equació (D.8) que s'usa per a calcular  $\delta(\tilde{k}, \tau_0)$ , i tenint en compte que aquesta quantitat ha d'esser igual a  $[P(\tilde{k}, \tau_0)]^{1/2}$  per a sa normalització  $C$  correcta.

Es valor obtingut per a  $\delta(\tilde{k}, \tau_0)$  partint d'Il·lustració LVII junt a s'expressió (III.62), s'utilitza per obtenir es contrast de densitat en s'espai de posicions  $\delta(\tilde{L}, \tau_0)$ , essent es valor trobat de s'ordre de  $\sim 10^{-3}$ , tal com és esperat per aquesta escala.

## VI. BIBLIOGRAFIA

---

- Abbott, L. F., & Schaefer, R. K. (1986). A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave anisotropy. *Astrophysical Journal*, volume 308, 546-562.
- Abdo, A. A., Ackermann, M., Ajello, M., Atwood, W. B., Axelsson, M., Baldini, L., . . . Bregeon. (2009). Bright Active Galactic Nuclei Source List from the First Three Months of the Fermi Large Area Telescope All-Sky Survey. *The Astrophysical Journal*, Volume 700, Issue 1, 597-622.
- Alpher, R. A., Bethe, H., & Gamow, G. (1948). The Origin of Chemical Elements. *Physical Review*, 803-804.
- Alpher, R. A., Herman, R., & Gamow, G. A. (1952). Thermonuclear Reactions in the Expanding Universe. *Physical Review*, 1198-1199.
- Amanullah, R., & et al. (2010). Spectra and Hubble Space Telescope Light Curves of Six Type Ia Supernovae at  $0.511 < z < 1.12$  and the Union2 Compilation. *The Astrophysical Journal*, 712-738.
- Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007). Conditions for the cosmological viability of  $f(R)$  dark energy models. *Physical Review D*, Volume 75, Issue 8, id. 083504.
- Amendola, L., Occhionero, F., & Saez, D. (1990). Breaking scale invariance with quantum gravity. *Astrophysical Journal*, Volume 349, 399-407.
- Astier, P., & et al. (2006). The Supernova Legacy Survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set. *Astronomy and Astrophysics*, 31-48.
- Bamba, K., Nojiri, S., & Odintsov, S. D. (2008). The future of the universe in modified gravitational theories: approaching a finite-time future singularity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Issue 10, id. 045, 35 pp.
- Bardeen, J. (1980). Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, Volume 22, Issue 8, 1882-1905.
- Barrow, J. D., & Ottewill, A. C. (1983). The stability of general relativistic cosmological theory. *Journal of Physics A*, Volume 16, 2757-2776.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Basko, M. M., & Polnarev, A. G. (1980). Polarization and anisotropy of the RELICT radiation in an anisotropic universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 191*, 207-215.
- Bekenstein, J. D. (1977). Are particle rest masses variable? Theory and constraints from solar system experiments. *Physical Review D, Volume 15, Issue 6*, 1458-1468.
- Bekenstein, J. D. (2004). Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm. *Physical Review D, 70, Issue 8*, id. 083509 .
- Beltrán Almeida, J., Rodríguez, Y., & Valenzuela-Toledo, C. (2014). Scale and shape dependent non-Gaussianity in the presence of inflationary vector fields. *Physical Review D, 90, issue 10*, id 103511.
- Beltrán, J., & Maroto, A. (2008). Cosmic vector for dark energy. *Physical Review D, Volume 78, Issue 6*, id. 063005.
- Beltrán, J., & Maroto, A. (2009a). Cosmological electromagnetic fields and dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 03*, id. 016.
- Beltrán, J., & Maroto, A. (2009b). Viability of vector-tensor theories of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 02*, id. 025.
- Beltrán, J., & Maroto, A. (2011b). On the Electromagnetic Nature of Dark Energy and the Origin of Cosmic Magnetic Fields. *Progress of Theoretical Physics Supplement, No. 190*, 33-41.
- Beltrán, J., & Maroto, A. L. (2011a). Cosmological magnetic fields from inflation in extended electromagnetism. *Physical Review D, vol. 83, Issue 2*, id. 023514.
- Beltrán, J., Koivisto, T. S., Maroto, A. L., & Mota, D. F. (2009). Perturbations in electromagnetic dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 10*, id. 029.
- Beltrán, J., Lazkoz, R., & Maroto, A. (2009). Cosmic vector for dark energy: Constraints from supernovae, cosmic microwave background, and baryon acoustic oscillations. *Physical Review D, Volume 80, Issue 2*, id. 023004.
- Bengochea, G. R., & Ferraro, R. (2009). Dark torsion as the cosmic speed-up. *Physical Review D, Volume 79, Issue 12*, id. 124019.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Bennett, C. L., & et al. (1996). Four-Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results. *Astrophysical Journal Letters*, L1-L4.
- Bennett, C. L., Larson, D., Weiland, J. L., Jarosik, N., Hinshaw, G., Odegard, N., . . . Tucker. (2013). Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *The Astrophysical Journal Supplement, Volume 208, Issue 2*, id. 20, 54 pp.
- Bergmann, O. (1956). Scalar field theory as a theory of gravitation. *American Journal of Physics, Volume 24, Issue 1*, 38-42.
- Bergmann, P. G. (1968). Comments on the scalar-tensor theory. *International Journal of Theoretical Physics, Volumen 1, Issue 1*, 25-36.
- Bielewicz, P., Górski, K. M., & Banday, A. J. (2004). Low-order multipole maps of cosmic microwave background anisotropy derived from WMAP. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 355, Issue 4*, 1283-1302.
- Blumenthal, G. R., & Gould, R. J. (1970). Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases. *Reviews of Modern Physics, Volume 42, Issue 2*, 237-271.
- Böhmer, C. G., & Harko, T. (2007). Dark energy as a massive vector field. *The European Physical Journal C, Volume 50, Issue 2*, 423-429.
- Bollini, C. G., Giambiaga, J. J., & Tiomno, J. (1970). A linear theory of gravitation. *Nuovo Cimento Lettere, Volume 3*, 65-70.
- Bona, C., Carot, J., & Palenzuela-Luque, C. (2005). Almost-stationary motions and gauge conditions in general relativity. *Physical Review D, Volume 72, Issue 12*, id. 124010.
- Bond, J. R., & Efstathiou, G. (1984). Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter. *Astrophysical Journal, Part 2 - Letters to the Editor (ISSN 0004-637X), Volume 285*, L45-L48.
- Bond, J. R., & Efstathiou, G. (1987). The statistics of cosmic background radiation fluctuations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 226*, 655-687.
- Bondi, H., & Gold, T. (1948). The Steady-State Theory of the Expanding Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 252-270.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Bonvin, C., Durrer, R., Ferreira, P. G., Starkman, G., & Zlosnik, T. G. (2008). Generalized Einstein-Aether theories and the Solar System. *Physical Review D, Volume 77, Issue 2*, id. 024037.
- Brandenberger, R. H. (1985). Quantum field theory methods and inflationary universe models. *Reviews of Modern Physics, Volume 57, Issue 1*, pp.1-60.
- Brans, C., & Dicke, R. H. (1961). Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review, Volume 124, Issue 3*, 925-935.
- Brémaud, P. (1999). *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. New York: Springer.
- Brownstein, J. R., & Moffat, J. W. (2006a). Galaxy cluster masses without non-baryonic dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 367, Issue 2*, 527-540.
- Brownstein, J. R., & Moffat, J. W. (2006b). Galaxy Rotation Curves without Nonbaryonic Dark Matter. *The Astrophysical Journal, Volume 636, Issue 2*, 721-741.
- Cai, Y.-F., Chen, S.-H., Dent, J. B., Dutta, S., & Saridakis, E. N. (2011). Matter bounce cosmology with the  $f(T)$  gravity. *Classical and Quantum Gravity, Volume 28, Issue 21*, id. 215011.
- Capozziello, S., & de Laurentis, M. (2011). Extended Theories of Gravity. *Physics Reports, Volume 509, Issue 4*, 167-321.
- Capozziello, S., Luongo, O., & Saridakis, E. N. (2015). Transition redshift in  $f(T)$  cosmology and observational constraints. *Physical Review D, Volume 91, Issue 12*, id.124037.
- Carlesi, E., Knebe, A., Yepes, G., Gottlöber, S., Jiménez, J. B., & Maroto, A. L. (2011). Vector dark energy and high- $z$  massive clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 418, Issue 4*, 2715-2719.
- Carlesi, E., Knebe, A., Yepes, G., Gottlöber, S., Jiménez, J. B., & Maroto, A. L. (2012). N-body simulations with a cosmic vector for dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 424, Issue 1*, 699-715.
- Cartan, E. (1922). Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 174*, p. 593-595. Paris: Académie des Sciences.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Cartan, E. (1923). Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 325-412.
- Coley, A. A. (1983a). Analysis of nonmetric theories of gravity. I. Electromagnetism. *Physical Review D, Volume 27, Issue 4*, 728-739.
- Coley, A. A. (1983b). Analysis of nonmetric theories of gravity. II. The weak equivalence principle. *Physical Review D, Volume 28, Issue 8*, 1829-1843.
- Coley, A. A. (1983c). Analysis of nonmetric theories of gravity. III. Summary of the analysis and its application to theories in the literature. *Physical Review D, Volume 28, Issue 8*, 1844-1852.
- Copi, C. J., Huterer, D., Schwarz, D. J., & Starkman, G. D. (2006). On the large-angle anomalies of the microwave sky. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 367, Issue 1*, pp. 79-102.
- Copi, C. J., Huterer, D., Schwarz, D. J., & Starkman, G. D. (2007). Uncorrelated universe: Statistical anisotropy and the vanishing angular correlation function in WMAP years 1-3. *Physical Review D, Volume 75, Issue 2*, id. 023507.
- Copi, C. J., Huterer, D., Schwarz, D. J., & Starkman, G. D. (2009). No large-angle correlations on the non-Galactic microwave sky. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 399, Issue 1*, pp. 295-303.
- Crittenden, R. G., Coulson, D., & Turok, N. G. (1995). Temperature-polarization correlations from tensor fluctuations. *Physical Review D, Volume 52, Issue 10*, R5402-R5406.
- Crittenden, R., Bond, J. R., Davis, R. L., Efstathiou, G., & Steinhardt, P. J. (1993). Imprint of gravitational waves on the cosmic microwave background. *Physical Review Letters, Volume 71, no. 3*, 324-327.
- Chen, X., & Wang, Y. (2014). Relic Vector Field and CMB Large Scale Anomalies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 10*, id. 027.
- Dai, D.-C., Matsuo, R., & Starkman, G. (2008). Gravitational lenses in generalized Einstein-aether theory: The bullet cluster. *Physical Review D, vol. 78, Issue 10, id. 104004, Volume 78, Issue 10*, id. 104004.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Dale, R., & Sáez, D. (2012a). Cosmological perturbations in extended electromagnetism: General gauge invariant approach. *Physical Review D, Volume 85, Issue 12*, id. 124047.
- Dale, R., & Sáez, D. (2012b). On the viability of certain vector-theory of gravitation. *Astrophysics and Space Science, Volume 337*, 439-453.
- Dale, R., & Sáez, D. (2014). Cosmology in a certain vector-tensor theory of gravitation. *Physical Review D, Volume 89, Issue 4*, id. 044035.
- Dale, R., Fullana, M. J., & Sáez, D. (2015). On the horizons in a viable vector-tensor theory of gravitation. *Astrophysics and Space Science, Volume 357, Issue 2*, article id.116, 8pp.
- Dale, R., Morales, J. A., & Sáez, D. (2009). Cosmological vector perturbations in vector-tensor theories of gravitation. CMB anomalies. *Proceedings of the Spanish Relativity Meeting 2008. Volume 1122*, p. 121-128. New York: AIP Conference Proceedings.
- Dale, R., Morales, J., & Sáez, D. (2009). Proposal for the origin of the cosmological constant. *arXiv:0906.2085*.
- Damour, T., & Esposito-Farese, G. (1992). Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity, Volume 9, Issue 9*, 2093-2176.
- de Oliveira-Costa, A., Tegmark, M., Zaldarriaga, M., & Hamilton, A. (2004). Significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP. *Physical Review D, Volume 69, Issue 6*, id. 063516.
- Deser, S., & Laurent, B. E. (1968). Gravitation without self-interaction. *Annals of Physics, Volume 50, Issue 1*, 76-101.
- Dickinson, C., & al., e. (2004). High-sensitivity measurements of the cosmic microwave background power spectrum with the extended Very Small Array. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 353, Issue 3*, 732-746.
- Domínguez-Tereiro, R., & Quirós, M. (1988). *An Introduction to Cosmology and Particle Physics*. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd.
- Douspis, M., & et al. (2011). Planck early results. VIII. The all-sky early Sunyaev-Zeldovich cluster sample. *Astronomy & Astrophysics*, 28.



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Durrer, R. (1994). Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory: A General Study and Its Application to the Texture Scenario of Structure Formation. *Fundamentals of Cosmic Physics, Volume 15: No. 3*, 209-339.
- Durrer, R. (2008). *The Cosmic Microwave Background*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eddington, A. (1923). *The mathematical theory of relativity*. Toronto: Cambridge University press.
- Einstein, A. (1913). Gravitationstheorie. *Schweizerische Naturforschende Gesellschaft, 96, Teil 2*, 137-138.
- Einstein, A. (1915). Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 778-786.
- Einstein, A. (1928). Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. *Verlag der Akademie der Wissenschaften*, 217-221.
- Eisenstein, D., & et al. (2005). Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 560-574.
- Eling, C., & Jacobson, T. (2004). Static post-Newtonian equivalence of general relativity and gravity with a dynamical preferred frame. *Physical Review D, Volume 69, Issue 6*, id. 064005.
- Ellis, G. F., & Bruni, M. (1989). Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations. *Physical Review D, Volume 40, Issue 6*, 1804-1818.
- Ellis, J., Mavromatos, N. E., & Nanopoulos, D. V. (2000). Time-Dependent Vacuum Energy Induced by D-Particle Recoil. *General Relativity and Gravitation, Volume 32, Issue 5*, 943-958.
- Eriksen, H. K., Banday, A. J., Górski, K. M., & Lilje, P. B. (2004). On Foreground Removal from the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Data by an Internal Linear Combination Method: Limitations and Implications. *The Astrophysical Journal, Volume 612, Issue 2*, pp. 633-646.
- Eriksen, H. K., Banday, A. J., Górski, K. M., Hansen, F. K., & Lilje, P. B. (2007). Hemispherical Power Asymmetry in the Third-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Sky Maps. *The Astrophysical Journal, Volume 660, Issue 2*, pp. L81-L84.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Eriksen, H. K., Hansen, F. K., Banday, A. J., Górski, K. M., & Lilje, P. B. (2004). Asymmetries in the Cosmic Microwave Background Anisotropy Field. *The Astrophysical Journal*, Volume 605, Issue 1, pp. 14-20.
- Faraoni, V. (2015). *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*. Cham (Switzerland): Springer.
- Ferraro, R., & Fiorini, F. (2007). Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton. *Physical Review D*, Volume 75, Issue 8, id. 084031.
- Ferraro, R., & Fiorini, F. (2008). Born-Infeld gravity in Weitzenböck spacetime. *Physical Review D*, Volume 78, Issue 12, id. 124019.
- Fiorini, F. (2013). Nonsingular Promises from Born-Infeld Gravity. *Physical Review Letters*, Volume 111, 041104.
- Foley, R., & et al. (2009). SN 2008ha: An Extremely Low Luminosity and Exceptionally Low Energy Supernova. *The Astronomical Journal*, 376-391.
- Fowler, J., & et al. (2010). The Atacama Cosmology Telescope: A Measurement of the  $600 < \ell < 8000$  Cosmic Microwave Background Power Spectrum at 148 GHz. *Astrophysical Journal*, 1148-1161.
- Friedmann, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, Volume 10, 377-386.
- Friedmann, A. (1924). Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, Volume 21, Issue 1, 326-332.
- Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statistical Science*, Volume 7, Issue 4, 457--472.
- Golovnev, A., Mukhanov, V., & Vanchurin, V. (2008). Vector inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Issue 06, id. 009, 7 pp.
- Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. (2000). *Table of integrals, series and products*. San Diego: Academic Press.
- Grishchuk, L. P. (1975). Amplification of gravitational waves in an isotropic universe. *Soviet Physics JETP*, Volume 40, 409.
- Guttorp, P., & Minin, V. (1995). *Stochastic Modeling of Scientific Data*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Hansen, F. K., Balbi, A., Banday, A. J., & Górski, K. M. (2004). Cosmological parameters and the WMAP data revisited.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 354, Issue 3*, pp. 905-912.
- Hansen, F. K., Banday, A. J., & Górski, K. M. (2004). Testing the cosmological principle of isotropy: local power-spectrum estimates of the WMAP data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 354, Issue 3*, pp. 641-665.
- Harko, T., Lobo, F. S., Otalora, G., & Saridakis, E. N. (2014). Nonminimal torsion-matter coupling extension of  $f(T)$  gravity. *Physical Review D, Volume 89, Issue 12*, id.124036 .
- Hawking, S. (1966). Perturbations of an Expanding Universe. *Astrophysical Journal, Volume 145*, 544.
- Hawking, S., & Ellis, G. (1999). *The Large Scale Structure of Space-Time*. New York: Cambridge University Press.
- Hehl, F. W., von der Heyde, P., Kerlick, G. D., & Nester, J. M. (1976). General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics, 48, Issue 3*, 393-416 .
- Hellings, W. H., & Nordtvedt Jr, K. (1973). Vector-metric theory of gravity. *Physical Review D, Volume 7, Issue 12*, 3593-3602.
- Hinshaw, G., & et al. (2007). Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature Analysis. *The Astrophysical Journal Supplement Series, 170, Issue* , 288-334.
- Hinshaw, G., Larson, D., Komatsu, E., Spergel, D. N., Bennett, C. L., Dunkley, J., . . . Wolla. (2013). Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *The Astrophysical Journal Supplement, Volume 208, Issue 2*, article id. 19, 25 pp.
- Hoff, P. (2009). *A First Course in Bayesian Statistical Methods*. New York: Springer Science + Business Media.
- Hu, W., & Martin, W. (1997). CMB anisotropies: Total angular momentum method. *Physical Review D, Volume 56, Issue 2*, 596-615.
- Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, (pp. 168-173).
- Jain, R., & Sloth, M. (2013). On the non-Gaussian correlation of the primordial curvature perturbation with vector fields. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 02*, id. 003.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Jarosik, N., & et al. (2011). Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results. *The Astrophysical Journal Supplement, Volume 192, Issue 2*, article id. 14, 15 pp.
- Jones, W., & et al. (2006). A Measurement of the Angular Power Spectrum of the CMB Temperature Anisotropy from the 2003 Flight of BOOMERANG. *The Astrophysical Journal, Volume 647, Issue 2*, 823-832.
- Jordan, P. (1955). *Schwerkraft und Weltall*. Vieweg, Braunschweig.
- Kayll, L. (1979). Reissner-Nordström-de Sitter metric, the third law, and cosmic censorship. *Phys. Rev. D, Volume 19, Issue 2*, 421.
- Kiselev, V. (2005). Vector field and rotational curves in dark galactic halos. *Classical and Quantum Gravity, Volume 22, Issue 3*, 541-557.
- Kiselev, V., & Yudin, D. (2006). Gravitational lensing due to dark matter modelled by a vector field. *Classical and Quantum Gravity, Volume 23, Issue 24*, 7417-7430.
- Kodama, H., & Sasaki, M. (1984). Cosmological Perturbation Theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement, Volume 78*, 1.
- Kolb, E., & Turner, M. (1990). *The Early Universe*. Redwood City, CA: Addison-Wesley.
- Komatsu, E., Smith, K. M., Dunkley, J., Bennett, C. L., Gold, B., Hinshaw, G., . . . Wolla. (2011). Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement, Volume 192, Issue 2*, article id. 18, 47 pp.
- Kosowsky, A. (1996). Cosmic microwave background polarization. *Ann. Phys. (USA), Volume 246, No. 1*, 49 - 85.
- Kottler, F. (1918). Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik, Volume 361, Issue 14*, 401-462.
- Kowalski, M., & et al. (2008). Improved Cosmological Constraints from New, Old, and Combined Supernova Data Sets. *The Astrophysical Journal*, 749-778.
- Kruglov, S. I. (2014). Black hole emission of vector particles in (1+1) dimensions. *Physical Review D, Volume 89, Issue 6*, id.064004.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Kuo, C., & et al. (2004). High-Resolution Observations of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum with ACBAR. *The Astrophysical Journal, Volume 600, Issue 1*, 32-51.
- Larson, D., Dunkley, J., Hinshaw, G., Komatsu, E., Nolta, M. R., Bennett, C. L., . . . Wolla. (2011). Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-derived Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement, Volume 192, Issue 2*, article id. 16, 19 pp.
- Lemaître, G. (1927). Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47-49.
- Lemaître, G. (1931). The Beginning of the World from the Point of View of Quantum Theory. *Nature, Volume 127, Issue 3210*, pp. 706.
- Lewis, A., & Bridle, S. (2002). Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. *Physical Review D, Volume 66, Issue 10*, id. 103511.
- Lewis, A., Challinor, A., & Lasenby, A. (2000). Efficient Computation of Cosmic Microwave Background Anisotropies in Closed Friedmann-Robertson-Walker Models. *The Astrophysical Journal, Volume 538, Issue 2*, 473-476.
- Lifshitz, E. (1946). On the gravitational stability of the expanding universe. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (ISSN 0044-4510), Volume 16*, 587-602.
- Lightman, A. P., & Lee, D. L. (1973). New two-metric theory of gravity with prior geometry. *Physical Review D, Volume 8*, 3293-3302.
- Linde, A. D. (1983). Chaotic inflation. *Physics Letters B, Volume 129, Issue 3-4*, 177-181.
- Littlewood, D. E. (1953). Conformal transformations and kinematical relativity. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 49*, p. 90-96.
- Lueker, M. (2010). Measurements of Secondary Cosmic Microwave Background Anisotropies with the South Pole Telescope. *ProQuest Dissertations And Theses* (p. 191). Berkeley: Dissertation Abstracts International.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Lyth, D. H. (1984). A bound on inflationary energy density from the isotropy of the microwave background. *Physics Letters B, Volume 147, Issue 6*, 403-404.
- Ma, C.-P., & Bertschinger, E. (1995). Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges. *Astrophysical Journal, Volume 455*, 7.
- Magnano, G., & Sokolowski, L. M. (1994). Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field. *Physical Review D, Volume 50, Issue 8*, 5039-5059.
- Martínez, V., & et al. (2009). Reliability of the Detection of the Baryon Acoustic Peak. *The Astrophysical Journal Letters*, L93-L97.
- Mather, J., & et al. (1994). Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument. *The Astrophysical Journal, Part 1*, 439-444.
- MathWorks. (1 / Juliol / 2015). Recollit de <http://es.mathworks.com/>
- Milgrom, M. (1983a). A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies. *Astrophysical Journal, Volume 270*, 371-389.
- Milgrom, M. (1983b). A Modification of the Newtonian Dynamics - Implications for Galaxy Systems. *Astrophysical Journal, Volume 270*, 384.
- Milgrom, M. (1983c). A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal, Volume 270*, 365-370.
- Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J. (1973). *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co.
- Moffat, J. W. (1995). A new nonsymmetric gravitational theory. *Physics Letters B, Volume 335*, 447-452.
- Moffat, J. W. (2005). Gravitational theory, galaxy rotation curves and cosmology without dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Issue 05, id. 003.
- Moffat, J. W. (2006). Scalar tensor vector gravity theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Issue 03, id. 004.
- Morales, J., & Saez, D. (2007). Evolution of polarization orientations in a flat universe with vector perturbations: CMB and quasistellar objects. *Physical Review D, Volume 75, Issue 4*, id. 043011.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Morales, J., & Saez, D. (2008). Large-Escale Vector Modes and the first CMB Temperature Multipoles. *Astrophysical Journal*, Volume 678, Issue 2, 583-593.
- Motohashi, H., & Nishizawa, A. (2012). Reheating after f(R) inflation. *Physical Review D*, Volume. 86, Issue 8, id. 083514.
- Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., & Brandenberger, R. H. (1992). Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, Volume 215, Issue 5-6, 203-333.
- Ni, W.-T. (1972). Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity.IV. a Compendium of Metric Theories of Gravity and Their POST Newtonian Limits. *Astrophysical Journal*, Volume 176, 769.
- Nojiri, S., & Odintsov, S. D. (2014). Instabilities and anti-evaporation of Reissner-Nordström black holes in modified F (R ) gravity. *Physics Letters B*, Volume 735, 376-382.
- Nojiri, S., Odintsov, S. D., & Tsujikawa, S. (2005). Properties of singularities in the (phantom) dark energy universe. *Physical Review D*, Volume 71, Issue 6, id. 063004.
- Nordström, G. (1912). Relativitätsprinzip und Gravitation. *Physikalische Zeitschrift*, Volume 13, 1126.
- Nordström, G. (1913). Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips. *Annalen der Physik*, Volume 42, 533.
- Nordtvedt Jr, K. (1968). Equivalence principle for massive bodies II Theory. *Physical Review*, Volume 169, Issue 5, 1017-1025.
- Nordtvedt Jr, K. (1969). Equivalence Principle for Massive Bodies Including Rotational Energy and Radiation Pressure. *Physical Review*, Volume 180, Issue 5, 1293-1298.
- Nordtvedt Jr, K. (1970). Post-Newtonian metric for a general class of scalar-tensor gravitational theories with observational consequences. *Astrophysical Journal* 161, Volume 161, 1059.
- Nordtvedt, K. J., & Will, C. (1972). Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. II. Experimental Evidence to Rule Out Preferred-Frame Theories of Gravity. *Astrophysical Journal*, Volume 177, 775.
- Nouhaud, O. (1972). Transformations infinitésimales harmoniques. *These de 3e cycle*. private communication.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Novello, M., & Bergliaffa, S. E. (2008). Bouncing cosmologies. *Physics Reports, Volume 463, Issue 4*, 127-213.
- Olive, K., Schramm, D. N., Steigman, G., & Walker, T. (1990). Big-bang nucleosynthesis revisited. *Physics Letters B, Volume 236, Issue 4*, 454-460.
- Page, C., & Tupper, B. O. (1968). Scalar gravitational theories with variable velocity of light. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 138*, 67.
- Pani, P., Cardoso, V., & Delsate, T. (2011). Compact Stars in Eddington Inspired Gravity. *Physical Review Letters, Volume 107, Issue 3*, id. 031101.
- Pani, P., Cardoso, V., Gualtieri, L., Berti, E., & Ishibashi, A. (2012). Perturbations of slowly rotating black holes: Massive vector fields in the Kerr metric. *Physical Review D, Volume 86, Issue 10*, id. 104017.
- Peebles, P. J., & Yu, J. T. (1970). Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe. *Astrophysical Journal, Volume 162*, 815.
- Penzias, A. A., & Wilson, R. A. (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal, Volume 142*, 419-421.
- Percival, W., & et al. (2010). Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 401, Issue 4*, 2148-2168.
- Pettini, M., Zych, B. J., Murphy, M. T., Lewis, A., & Steidel, C. C. (2008). Deuterium abundance in the most metal-poor damped Lyman alpha system: converging on  $\Omega_b,0$  h<sup>2</sup>. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 391, Issue 4*, 1499-1510.
- Planck Collaboration. (2014a). Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics, Volume 571*, id.A1.
- Planck Collaboration. (2014b). Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood. *Astronomy & Astrophysics, Volume 571*, id. A15.
- Planck Collaboration. (2014c). Planck 2013 results XVI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics, Volume 571*, id.A16.



## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Planck Collaboration I. (2012). Planck intermediate results. I. Further validation of new Planck clusters with XMM-Newton. *Astronomy & Astrophysics, Volume 543, id.A102*, 14.
- Planck Collaboration I. (10 / Agost / 2015). *Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results*. Recollit de arxiv: <http://arxiv.org/abs/1502.01582>
- Press, W. H., Flannerly, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. (1988). *Numerical recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Press, W. H., Flannerly, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rastall, P. (1979). The Newtonian theory of gravitation and its generalization. *Canadian Journal of Physics, Volume 57*, 944-973.
- Readhead, A., & et al. (2004). Extended Mosaic Observations with the Cosmic Background Imager. *The Astrophysical Journal, Volume 609, Issue 2*, 498-512.
- Rees, M. J., & Sciama, D. W. (1968). Large-scale Density Inhomogeneities in the Universe. *Nature, Volume 217, Issue 5128*, 511-516.
- Reichardt, C. L., Ade, P. A., Bock, J. J., Bond, J. R., Brevik, J. A., Contaldi, C. R., . . . Stanis. (2009). High-Resolution CMB Power Spectrum from the Complete ACBAR Data Set. *The Astrophysical Journal, Volume 694, Issue 2*, 1200-1219.
- Reid, B., & et al. (2010). Cosmological constraints from the clustering of the Sloan Digital Sky Survey DR7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 404, Issue 1*, 60-85.
- Ricardo, H. (2008). *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Barcelona: Reverte.
- Riess, A. G., Strolger, L.-G., Casertano, S., Ferguson, H. C., Mobasher, B., Gold, B., . . . Dickinson, M. (2007). New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at  $z \geq 1$ : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy. *The Astrophysical Journal, Volume 659, Issue 1*, 98-121.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Riess, A., & et al. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal, Volume 116, Issue 3*, 1009-1038.
- Rius, J. (1889). *Origen y propiedades fundamentales de las funciones elípticas*. Madrid: Imp. de Luis Aguado.
- Robertson, H. (1936). Kinematics and World-Structure III. *The Astrophysical Journal, Volume 83*, 257-271.
- Robertson, H. (1962). Relativity and Cosmology. *Proceedings of an international Symposium held August 7-9, 1961 at the California Institute of Technology in conjunction with the 11th General Assembly of the International Astronomical Union* (p. 228). New York: Academic Press.
- Rosen, N. (1973). A bimetric theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation, Volume 4*, 435-447.
- Rosen, N. (1975). A bimetric theory of gravitation II. *General Relativity and Gravitation, Volume 6*, 259-268.
- Ryan, S., Beers, T., Olive, K., Fields, B., & Norris, J. E. (2000). Primordial Lithium and Big Bang Nucleosynthesis. *The Astrophysical Journal Letters, Volume 530, Issue 2*, L57-L60.
- Sachs, R., & Wolfe, A. (1967). Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background. *Astrophysical Journal, Volumen 147*, 73.
- Sáez, D. (2001). CMB Anisotropies: Cosmic Confusion and Polarization. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Volumen 95*, p. 15-22. San Feliu de Guixols, Spain: Elsevier.
- Sciama, D. W. (1958). On a non-symmetric theory of the pure gravitational field. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volumen 54, issue 01*, p. 72-80. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schiff, L. (1967). *Relativity Theory and Astrophysics. Vol. I: Relativity and Cosmology*. Providence: American Mathematical Society.
- Schwarz, D. J., Starkman, G. D., Huterer, D., & Copi, C. J. (2004). Is the Low- $\ell$  Microwave Background Cosmic? *Physical Review Letters, Volumen 93, Issue 22*, id. 221301.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 189-196.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Seljak, U. (1996). Gravitational Lensing Effect on Cosmic Microwave Background Anisotropies: A Power Spectrum Approach. *Astrophysical Journal, Volume 463*, 1.
- Seljak, U., & Zaldarriaga, M. (1996). A Line-of-Sight Integration Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies. *Astrophysical Journal, Volumen 469*, 437.
- Skrotskii, G. V. (1957). The Influence of Gravitation on the Propagation of Light. *Soviet Physics Doklady, Volumen 2*, 226.
- Smoot, G. F., & et al. (1992). Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *Astrophysical Journal, Part 2 - Letters, Volume 396, no. 1*, L1-L5.
- Spergel, D. N., & et al. (2003). First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series, Volume 148, Issue 1*, 175-194.
- Starobinskij, A. A. (1979). Spectrum of gravitational background radiation and initial state of the universe. *ZhETF Pis'ma Redaktsiiu, Volume 30*, 719 - 723.
- Starobinsky, A. A. (1980). A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B, Volume 91, Issue 1*, 99-102.
- Starobinsky, A. A. (2007). Disappearing cosmological constant in f(R) gravity. *JETP Letters, Volume 86, Issue 3*, 157-163.
- Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., & Herlt, E. (2003). *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Stompor, R., & Efstathiou, G. (1999). Gravitational lensing of cosmic microwave background anisotropies and cosmological parameter estimation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 302, Issue 4*, 735-747.
- Stuchlík, Z., & Kološ, M. (2005). Friedman models with the superstring dark energy. *In Proceedings of RAGtime 6/7*, (p. 223-230). Opava.
- Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Y. B. (1970). Small scale entropy and adiabatic density perturbations — Antimatter in the Universe. *Astrophysics and Space Science, Volume 9, Issue 3*, 368-382.
- Suyu, H., & et al. (2010). Dissecting the Gravitational lens B1608+656. II. Precision Measurements of the Hubble

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Constant, Spatial Curvature, and the Dark Energy Equation of State. *The Astrophysical Journal, Volume 711, Issue 1*, 201-221.
- Tartaglia, A., & Radicella, N. (2007). Vector field theories in cosmology. *Physical Review D, Volume 76, Issue 8*, id. 083501.
- Temple, G. (1923). A generalisation of professor Whitehead's theory of relativity. *Proceedings of the Physical Society of London*, (p. 176-193). London.
- Tolman, R. (1932). Models of the Physical Universe. *Science, Volume 75, Issue 1945*, 367-373.
- Tolman, R. (1934). *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Oxford: Clarendon Press.
- Tryon, E. P. (1973). Is the Universe a Vacuum Fluctuation? *Nature, Volume 246, Issue 5433(246, Issue 5433)*, 396-397.
- Wagoner, R. (1970). Scalar-Tensor Theory and Gravitational Waves. *Physical Review D, Volume 1, Issue 12*, 3209-3216.
- Walker, A. (1937). On Milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society* (p. 90-127). London: London Mathematical Society.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. New York: Oxford University Press.
- Weisstein, E. W. (21 / Agost / 2015). "Variation of Parameters." *From MathWorld--A Wolfram Web Resource*. Recollit de <http://mathworld.wolfram.com/VariationofParameters.html>
- Weitzenböck, R. (1923). Invariance theory. *Groningen: P. Noordhoff*.
- Whitehead, A. (1922). *The Principle of Relativity with Applications to Physical Science*. Cambridge: The University Press.
- Wilson, M. L., & Silk, J. (1981). On the anisotropy of the cosmological background matter and radiation distribution. I - The radiation anisotropy in a spatially flat universe. *Astrophysical Journal, Volume 243, Part 1*, 14-25.
- Will, C. (1971). Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. II. Parametrized post-Newtonian hydrodynamics and the Nordtvedt effect. *Astrophysical Journal, Volume 163*, 611-628.
- Will, C. (1976). Active mass in relativistic gravity: Theoretical interpretation of the Kreuzer experiment. *Astrophysical Journal, Volume 204*, 224-234.

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

- Will, C. (1992). Is momentum conserved? A test in the binary system PSR 1913+16. *Astrophysical Journal Letters*, Volume 393, no. 2, L59-L61.
- Will, C. (1993). *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition.
- Will, C. (2006). The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, Volume 9, Issue 3. Recollit de <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>
- Will, C., & Nordtvedt, K. J. (1972). Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism. *Astrophysical Journal*, Volume 177, 757.
- Wirkus, S. A., & Swift, R. J. (2006). *A Course in Ordinary Differential Equations*. Boca Ratón: Chapman & Hall/CRC.
- Yoshida, K., & Shiraishi, K. (1991). A new vector-tensor theory and higher-dimensional cosmology. *Physica Scripta*, Volume 43, 129-132.
- Zaldarriaga, M., & Harari, D. D. (1995). Analytic approach to the polarization of the cosmic microwave background in flat and open universes. *Physical Review D*, Volume 52, Issue 6, 3276-3287.
- Zlosnik, T. G., Ferreira, P. G., & Starkman, G. D. (2007). Modifying gravity with the aether: An alternative to dark matter. *Physical Review D*, Volume 75, Issue 4, id. 044017.
- Zuntz, J. A., Ferreira, P. G., & Zlosnik, T. G. (2008). Constraining Lorentz Violation with Cosmology. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, Volume 101, Issue 26, id. 261102.
- Zuntz, J., Zlosnik, T., Bourliot, F., Ferreira, P., & Starkman, G. (2010). Vector field models of modified gravity and the dark sector. *Physical Review D*, Volume 81, Issue 10, id. 104015.

## VII. LLISTA D'IL·LUSTRACIONS.

---

Il·lustració I.....	4
Il·lustració II.....	6
Il·lustració III.....	8
Il·lustració IV.....	9
Il·lustració V.....	10
Il·lustració VI.....	10
Il·lustració VII.....	10
Il·lustració VIII.....	20
Il·lustració IX.....	20
Il·lustració X.....	22
Il·lustració XI.....	25
Il·lustració XII.....	25
Il·lustració XIII.....	38
Il·lustració XIV.....	38
Il·lustració XV.....	39
Il·lustració XVI.....	74
Il·lustració XVII.....	75
Il·lustració XVIII.....	85
Il·lustració XIX.....	86
Il·lustració XX.....	87
Il·lustració XXI.....	88
Il·lustració XXII.....	89
Il·lustració XXIII.....	91
Il·lustració XXIV.....	107
Il·lustració XXV.....	108
Il·lustració XXVI.....	109
Il·lustració XXVII.....	111
Il·lustració XXVIII.....	112
Il·lustració XXIX.....	113
Il·lustració XXX.....	1134
Il·lustració XXXI.....	121
Il·lustració XXXII.....	121
Il·lustració XXXIII.....	122
Il·lustració XXXIV.....	122
Il·lustració XXXV.....	124
Il·lustració XXXVI.....	124

## Teories vector-tensor en gravitació i cosmologia

Il·lustració XXXVII .....	125
Il·lustració XXXVIII .....	126
Il·lustració XXXIX .....	127
Il·lustració XL .....	129
Il·lustració XLI .....	133
Il·lustració XLII .....	133
Il·lustració XLIII .....	135
Il·lustració XLIV .....	136
Il·lustració XLV .....	137
Il·lustració XLVI .....	152
Il·lustració XLVII .....	153
Il·lustració XLVIII .....	157
Il·lustració XLIX .....	158
Il·lustració L .....	159
Il·lustració LI .....	163
Il·lustració LII .....	164
Il·lustració LIII .....	165
Il·lustració LIV .....	166
Il·lustració LV .....	167
Il·lustració LVI .....	167
Il·lustració LVII .....	196