



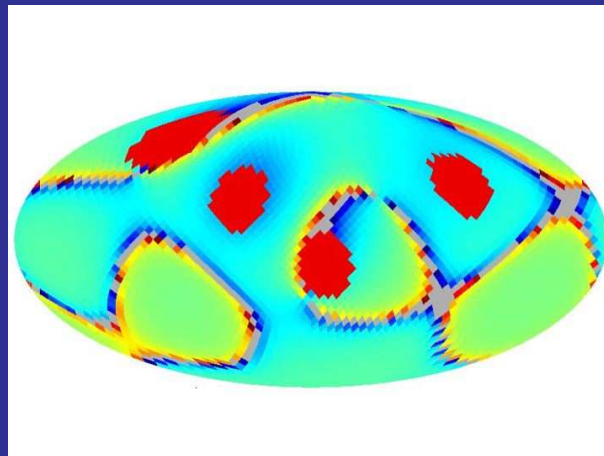
# SISTEMAS DE POSICIONAMIENTO RELATIVISTA: SIMULACIONES NUMÉRICAS

*Tesis doctoral presentada por*

**Neus Puchades Colmenero**

*Dpto. de Astronomía y Astrofísica*

Valencia, Septiembre de 2015





Sistemas de Posicionamiento

Relativista:

Simulaciones numéricas

Memoria presentada para optar al título de Doctor

Programa de doctorado en Física

**Neus Puchades Colmenero**

Dirigida por el Doctor

**Diego Pascual Sáez Milán**

Departamento de Astronomía y Astrofísica

Universidad de Valencia

Valencia, Septiembre de 2015

Doctor Diego Pascual Sáez Milán, Catedrático de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA:

Que la presente memoria, *Sistemas de Posicionamiento Relativista: Simulaciones numéricas*, ha sido realizada bajo su dirección, por Neus Puchades Colmenero, y que constituye su tesis doctoral para optar al grado de Doctora en Física.

Y para que quede constancia y tenga los efectos que corresponda, firma el presente certificado en Burjassot, a 15 Julio de 2015.



Firmado: Diego Pascual Sáez Milán



## *Agradecimientos*

*En agradecimiento a mi tutor, Diego Sáez, por lo que me ha enseñado, por su esfuerzo para desarrollar y compartir este trabajo de investigación.*

*Y también a aquellos miembros del departamento que han contribuido con su experiencia.*

*A todos ellos mi agradecimiento*

*Con cariño*

Neus



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción General a los Sistemas de Posicionamiento Relativista</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Sistemas de Satélites para la Navegación Global y Relatividad   | 1         |
| 1.2. El concepto Newtoniano: El GPS clásico  | 2         |
| 1.3. Motivos para incluir correcciones relativistas  | 4         |
| 1.4. Definición y uso de las coordenadas de emisión y de los sistemas de referencia                                  | 4         |
| 1.5. Los sistemas de posicionamiento relativista   | 5         |
| 1.6. Más sobre definiciones, conceptos y terminología en SPR   | 7         |
| 1.7. Los satélites   | 8         |
| 1.8. Cálculo de las coordenadas inerciales a partir de las coordenadas de emisión en el espacio-tiempo de Minkowski  | 10        |
| 1.9. Soluciones del problema de la bifurcación en un SPR   | 11        |
| 1.10. Cálculo de las coordenadas de emisión a partir de las coordenadas inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski | 13        |
| 1.11. Tipos de errores de posicionamiento  | 14        |
| 1.12. Errores de posicionamiento debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites                 | 16        |
| 1.13. Errores de posicionamiento asociados a una descripción aproximada del movimiento de los fotones                | 18        |
| 1.14. Representaciones basadas en la pixelización HEALPIX  | 20        |
| 1.15. Consideraciones generales  | 26        |
| 1.16. Algunos criterios de notación seguidos en toda la Tesis  | 27        |
| <b>2. Sistemas de Posicionamiento Relativista: Región de Emisión, Co-región y Bifurcación</b>                        | <b>29</b> |
| 2.1. Introducción  | 29        |
| 2.2. Estructura de la región de emisión  | 30        |
| 2.2.1. Método diseñado para estudiar la región de emisión  | 30        |
| 2.2.2. Estructura de la región de emisión: resultados numéricos  | 33        |
| 2.3. Estructura de la co-región  | 44        |
| 2.4. Posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO) usando la constelación GALILEO (GPS)                               | 53        |
| 2.5. Resumen y discusión   | 65        |
| <b>3. Errores de posicionamiento debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites</b>             | <b>69</b> |
| 3.1. Introducción  | 70        |
| 3.2. Regiones de Jacobiano nulo  | 71        |
| 3.3. Cálculo de los U-errores  | 73        |
| 3.4. Sobre el Jacobiano, $J$ , de la transformación $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$ y su anulación              | 75        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.4.1. Métodos para el cálculo numérico de $J$ . . . . .  | 75         |
| 3.5. Cálculo analítico del Jacobiano $J$ . . . . .  | 80         |
| 3.5.1. Comparación del Jacobiano obtenido numéricamente<br>con el calculado analíticamente . . . . .  | 82         |
| 3.6. Volumen del tetraedro cuyos vértices son los cuatro extremos<br>de los vectores unitarios usuario-satélite . . . . .                     | 85         |
| 3.7. Distribución de los valores de $J$ y de los U-errores dentro de<br>la E-esfera: estimaciones numéricas . . . . .                         | 88         |
| 3.7.1. Los U-errores cerca y lejos de puntos de Jacobiano nulo  | 90         |
| 3.7.2. Estimación numérica de $J$ , $\Delta$ , $\alpha_1 - \alpha_4$ y otras magni-<br>tudes relevantes, para distribuciones 1D de usuarios . | 94         |
| 3.8. Análisis numérico detallado de los U-errores para tres direc-<br>ciones particulares . . . . .   | 103        |
| 3.9. U-errores hasta $L = 10^3 Mm$ . . . . .  | 109        |
| 3.10. Distribución de los valores del $J$ en la región de emisión . .   | 111        |
| 3.11. Distribución de los ceros de $J$ en la región de emisión . . . .  | 115        |
| 3.12. Distribución de los valores de $J$ sobre esferas de radio $R$ . .   | 119        |
| 3.13. Distribución de los U-errores sobre esferas de radio $R$ . . . .  | 123        |
| 3.14. U-errores en el posicionamiento de un satélite GPS (GALI-<br>LEO) usando cuatro satélites GALILEO (GPS) . . . . .                       | 128        |
| 3.14.1. Sobre la selección de 4-tuplas de emisores . . . . .  | 136        |
| 3.15. Resumen y discusión . . . . .   | 139        |
| <b>4. SPR en el espacio-tiempo de Schwarzschild</b> . . . . .   | <b>143</b> |
| 4.1. Introducción . . . . .   | 143        |
| 4.2. Ecuaciones de las geodésicas del ET-S . . . . .  | 145        |
| 4.2.1. Integración numérica de las ecuaciones de las geodési-<br>cas del ET-S . . . . .   | 146        |
| 4.3. Algunas relaciones de interés en el ET-S . . . . .   | 148        |
| 4.3.1. Relación entre el tiempo propio de los satélites y el<br>tiempo coordinado geocéntrico . . . . .                                       | 149        |
| 4.3.2. Relación entre el tiempo propio terrestre y el tiempo<br>coordinado geocéntrico . . . . .  | 151        |
| 4.3.3. Relación entre el tiempo terrestre y el tiempo propio<br>del satélite . . . . .  | 153        |
| 4.4. Modelo 1 como SPR de orden cero (0-SPR) . . . . .  | 153        |
| 4.5. Modelo 2 como SPR de primer orden (1-SPR) . . . . .  | 154        |
| 4.5.1. Relación entre los determinantes $J$ y $D$ . . . . .   | 158        |
| 4.6. Análisis numérico . . . . .  | 158        |
| 4.6.1. Consideraciones generales . . . . .  | 159        |
| 4.6.2. Estudio de la región donde el determinante $D$ se anula  | 161        |
| 4.6.3. S-errores a lo largo de direcciones radiales particulares  | 162        |
| 4.6.4. Superficies de nivel . . . . .   | 168        |
| 4.6.5. S-errores en superficies esféricas concéntricas con la<br>Tierra . . . . .   | 177        |
| 4.6.6. S-errores versus U-errores . . . . .   | 184        |

---

|   |            |
|---|------------|
| 4.7. Resumen y discusión . . . . .  | 186        |
| <b>5. Consideraciones generales, resumen de conclusiones y perspectivas</b> | <b>191</b> |
| 5.1. Posicionamiento relativista . . . . .                                  | 191        |
| 5.2. Errores de posicionamiento . . . . .                                   | 193        |
| 5.3. Sobre los métodos seguidos en esta Tesis . . . . .                     | 196        |
| 5.4. Principales resultados, conclusiones y problemas abiertos . . . . .    | 197        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>201</b> |



# Introducción General a los Sistemas de Posicionamiento Relativista

---

## Índice

---

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Sistemas de Satélites para la Navegación Global y Relatividad . . . . .   | 1  |
| 1.2. El concepto Newtoniano: El GPS clásico . . . . .  | 2  |
| 1.3. Motivos para incluir correcciones relativistas . . . . .  | 4  |
| 1.4. Definición y uso de las coordenadas de emisión y de los sistemas de referencia . . . . .                                  | 4  |
| 1.5. Los sistemas de posicionamiento relativista . . . . .   | 5  |
| 1.6. Más sobre definiciones, conceptos y terminología en SPR . . . . .   | 7  |
| 1.7. Los satélites . . . . .   | 8  |
| 1.8. Cálculo de las coordenadas inerciales a partir de las coordenadas de emisión en el espacio-tiempo de Minkowski . . . . .  | 10 |
| 1.9. Soluciones del problema de la bifurcación en un SPR . . . . .   | 11 |
| 1.10. Cálculo de las coordenadas de emisión a partir de las coordenadas inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski . . . . . | 13 |
| 1.11. Tipos de errores de posicionamiento . . . . .  | 14 |
| 1.12. Errores de posicionamiento debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites . . . . .                 | 16 |
| 1.13. Errores de posicionamiento asociados a una descripción aproximada del movimiento de los fotones . . . . .                | 18 |
| 1.14. Representaciones basadas en la pixelización HEALPIX . . . . .  | 20 |
| 1.15. Consideraciones generales . . . . .  | 26 |
| 1.16. Algunos criterios de notación seguidos en toda la Tesis . . . . .  | 27 |

---

## 1.1. Sistemas de Satélites para la Navegación Global y Relatividad

Un Sistema de Satélites para la Navegación Global (Global Navigation Satellite System), cuyas siglas en inglés son GNSS, es un conjunto de satélites con movimiento conocido en un sistema de referencia casi inercial apropiado. Los GNSS sirven

para localizar al usuario (detector o receptor) en Tierra o cerca de ella. Trabajarían idealmente si todos los satélites y el receptor estuvieran en reposo en un sistema de referencia inercial; pero en casos realistas, dependiendo del nivel de precisión requerido por el posicionamiento, tenemos que incluir los términos correctivos que sean necesarios, por ejemplo, las perturbaciones gravitatorias debidas a la Luna, al Sol y a algunos planetas (Venus, Júpiter), los multipolos de la Tierra, sus mareas (sólidas y oceánicas) y su movimiento de rotación, la presión de la radiación solar y el albedo de la Tierra [Gomboc 2013].

Para localizar a los usuarios de un GNSS, algunos algoritmos fueron desarrollados en [Schmidt 1972], [Bancroft 1985], [Krause 1987], [Abel 1991], [Chaffee 1994]. Los métodos usados actualmente son descritos en [Strang 1997] y [Juang 2009]. El problema del posicionamiento consiste en hallar el lugar e instante en que las señales electromagnéticas emitidas por los satélites impresionan el detector del usuario; de hecho, esta idea está implícita en el algoritmo de Bancroft [Bancroft 1985] y otros similares [Krause 1987]. Ver también [Abel 1991], [Chaffee 1994].

Actualmente, los sistemas de posicionamiento están basados en física Newtoniana, y las correcciones post-Newtonianas relativistas son llevadas a cabo en caso de ser necesarias. Dicho de otra forma, se utilizan los conceptos Newtonianos del espacio euclídeo y el tiempo absoluto, para luego añadir un número de correcciones dependiendo de la precisión deseada. Sin embargo, los Sistemas de Posicionamiento Relativista (desde ahora SPR) deberían estar basados en fundamentos relativistas desde el principio, tal y como es discutido en [Coll 2001], [Bahder 2001], [Coll 2003], [Rovelli 2002], [Blagojevic 2002], [Bahder 2003], [Coll 2006c]. En el caso del espacio-tiempo plano de Minkowski, Coll et al. [Coll 2010a] obtuvieron una fórmula explícita, que es la solución del problema de posicionamiento para emisores arbitrarios, cuyas trayectorias son conocidas en un cierto sistema de referencia casi inercial. Nuestros SPR están basados en esta fórmula y en sistemas de referencia apropiados. Lo ideal para tener en cuenta la relatividad, desde el principio, sería trabajar en un sistema de referencia casi inercial, no ligado directamente a Tierra, que podría ser construido a base de intercambios de señales, de los satélites entre si y con bases terrestres. Este tipo de intercambio podría permitir también la realización de estudios gravimétricos [Tarantola 2009]. Realizaciones de este tipo –de los SPR– no han sido todavía implementadas y no serán estudiadas en esta Tesis.

## 1.2. El concepto Newtoniano: El GPS clásico

En la teoría Newtoniana, el espacio y el tiempo son absolutos, la simultaneidad tiene un carácter absoluto, y el espacio-tiempo puede ser foliado con las hipersuperficies de eventos simultáneos (el espacio) al fijar el tiempo coordenado. Esta concepción del espacio-tiempo es una aproximación adecuada para casos en los que:

1. los satélites y los usuarios tienen velocidades suficientemente pequeñas frente a  $c$ , siendo  $c$  la velocidad de una onda electromagnética en el vacío (velocidad de la luz), y
2. todo el sistema está inmerso en un campo gravitatorio suficientemente débil  $|\phi/c^2| \ll 1$ , donde  $\phi$  es el potencial gravitatorio en la región donde se mueven



usuarios y satélites.

Para calcular la posición espacial (espacio-temporal) de un usuario con reloj (sin reloj) se necesitan tres (cuatro) satélites; es decir, un satélite por cada incógnita. En el caso Newtoniano, un usuario con reloj necesita las señales procedentes de tres satélites  $S_a$  ( $a=1,2,3$ ) para poder saber en qué punto del espacio-tiempo se encuentra. Asumimos que tanto los relojes a bordo de los tres satélites como el reloj del usuario han sido sincronizados, son perfectos y marcan un tiempo absoluto. Cada satélite envía una onda electromagnética al usuario, donde el tiempo de emisión  $t_a$  de la señal es codificado. Como el usuario lleva un reloj, conoce el tiempo de recepción  $t_R$  de la señal. El usuario tiene que recibir las tres señales emitidas por los satélites en el mismo instante. Entonces la distancia entre el usuario y el satélite  $a$  es  $c(t_R - t_a)$ . Por tanto, el usuario está situado en las tres esferas de radios  $c(t_R - t_a)$  centradas en cada satélite  $S_a$ . Estas esferas tienen uno o dos puntos comunes. Para el caso de dos puntos (bifurcación), la posición verdadera del usuario puede ser elegida tal y como será explicado en 1.8. Denotamos por  $(x, y, z)$  las coordenadas cartesianas del usuario en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y por  $(x_a, y_a, z_a)$  las coordenadas del satélite  $S_a$ . Asumimos que las coordenadas del satélite  $S_a$  en el tiempo de emisión  $t_a$  son conocidas. Por lo tanto, el sistema a resolver, que tiene tres ecuaciones con tres incógnitas  $(x, y, z)$  es el siguiente:

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2 = c^2(t_R - t_a)^2, \quad a = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

el cual tiene 0, 1 ó 2 soluciones. No existe solución cuando el usuario no puede recibir las tres señales  $t_a$  simultáneamente para un  $t_R$  dado. Se requiere sincronización entre los relojes de los satélites y del usuario. Si tenemos dos soluciones, hay dos puntos del espacio en los que las mismas señales son recibidas a la vez.

Cada una de las ecuaciones (1.1) corresponde a una esfera de radio  $c(t_R - t_a)$  centrada en el satélite  $S_a$ . Ya que en física Newtoniana la luz viaja en línea recta con velocidad constante  $c$ , estas esferas son alcanzadas, por los fotones que parten de  $S_a$ , en el instante  $t_R$ . Las ecuaciones (1.1) son las mismas que aparecen en relatividad restringida al expresar que la distancia espacio-temporal recorrida por el fotón entre el emisor y el usuario es nula (la luz se propaga a lo largo de geodésicas nulas). La solución de este sistema de ecuaciones es la posición del usuario. Este método, para localizar al usuario a partir de sus distancias a los tres emisores, es denominado *trilateración* ([Thomas 2005] y [Haustein 2009]).

En caso de no conocer el tiempo  $t_R$  en el que el usuario recibe la señales o de que su valor sea conocido con poca precisión, tomamos el tiempo de recepción  $t$  como una incógnita del problema, y añadimos un cuarto satélite para tener una cuarta ecuación. Así, el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas  $x, y, z, t$  (posición del usuario en el espacio-tiempo) que debe ser resuelto numéricamente es:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = c^2(t - t_A)^2, \quad A = 1..4 \quad (1.2)$$

Lo que hemos descrito en esta sección es Newtoniano y cabe preguntarse si es importante tener en cuenta la teoría de la relatividad.

### 1.3. Motivos para incluir correcciones relativistas

El posicionamiento de un usuario depende del movimiento de los satélites del GNSS y de la propagación de los fotones que llevan la información desde los satélites hasta el usuario. En relatividad sabemos que:

- las líneas de universo de los satélites son geodésicas temporales del espacio-tiempo configurado por la Tierra, con algunas perturbaciones debidas a masas próximas, y
- los fotones siguen geodésicas nulas del mismo espacio-tiempo.

Sin embargo, en física Newtoniana, los satélites se mueven de acuerdo con la segunda ley de Newton y los fotones lo hacen en línea recta con velocidad constante. Todo ello en sistemas inerciales con un espacio Euclídeo y un tiempo absoluto. Los efectos relativistas serán importantes, y las correcciones relativistas necesarias, si hay diferencias entre las dos descripciones y éstas afectan al posicionamiento.

Como es sabido y explicamos en la sección 4.3.3, los relojes que viajan en satélites GPS (GALILEO) se adelantan, 38.40 (40.62) microsegundos por día, con respecto a un reloj que esté en reposo en una base terrestre. Ello es debido a que tanto el reloj de la citada base como los de los satélites se mueven en el campo gravitatorio terrestre. Si no se tuviera en cuenta este efecto y no se hicieran las correcciones relativistas correspondientes, el posicionamiento basado en los tiempos enviados por los satélites (ver 1.1 donde aparecen términos de la forma  $t_R - t_a$ ) pronto sería erróneo, ya que la luz recorre unos 12 km en 40  $\mu s$ . El movimiento de los satélites requiere un tratamiento relativista en los SPR y correcciones relativistas en los GNSS clásicos.

Por otra parte, en el capítulo 4, se estudia la importancia de los efectos relativistas debidos al movimiento de los fotones en el campo gravitatorio terrestre. Adelantemos ahora que este campo produce un pequeño efecto lente que conduce a pequeños errores de posicionamiento, cuya importancia será estudiada en el citado capítulo, por primera vez y con detalle. Este estudio se realizará teniendo en cuenta la precisión requerida en el posicionamiento, y dentro de una gran región alrededor de la Tierra (navegación espacial).

### 1.4. Definición y uso de las coordenadas de emisión y de los sistemas de referencia

Las *coordenadas de emisión* juegan un papel fundamental en los SPR [Coll 2001], [Rovelli 2002], [Blagojevic 2002]. Conviene dar una definición precisa de estas coordenadas. Sea un sistema de referencia inercial en el que la línea de universo de cada satélite  $A$  ( $A = 1, 2, 3, 4$ ) es parametrizada por su tiempo propio  $\tau^A$ . Se puede elegir un origen de tiempos propios arbitrario para cada línea de universo. En el momento de la recepción de las señales de los satélites (para el posicionamiento), el usuario estará situado en un punto del espacio-tiempo,  $P$ , de coordenadas desconocidas. El cono nulo del pasado del evento  $P$  cortará a cada una de las cuatro líneas en los tiempos propios  $\tau_P^A$ , que son los tiempos propios en el momento de la emisión de las

señales recibidas en  $P$ . Los tiempos  $(\tau_P^1, \tau_P^2, \tau_P^3, \tau_P^4)$  son las *coordenadas de emisión* del evento  $P$ .

La posición y el tiempo coordenado asociados al usuario pueden ser calculados, a partir de sus *coordenadas de emisión*, que permiten hallar donde estaban los satélites –cuando emitieron las señales detectadas por el usuario– a partir de la parametrización de sus líneas de universo basada en los tiempos propios. Entonces, en el sistema de referencia inercial en el que se han parametrizado las citadas líneas, tenemos todos los elementos necesarios para aplicar la fórmula analítica obtenida en [Coll 2010a] y obtener las coordenadas inerciales (posicionamiento) del usuario. Desde aquí en adelante llamaremos *evento de recepción* al suceso que consiste en la recepción simultánea –con el detector del usuario– de las cuatro coordenadas de emisión codificadas en la señales electromagnéticas que provienen de los satélites. Las coordenadas espacio-temporales de este evento son las del usuario. Según lo dicho manejaremos dos conjuntos de coordenadas: las de emisión y las inerciales (posicionamiento).

Dado que hemos considerado el cono de luz pasado de  $P$ , las señales son emitidas por los satélites y alcanzan al usuario al mismo tiempo. De ahí que las coordenadas definidas sean denominadas *coordenadas de emisión* del usuario en  $P$ . Podríamos considerar el cono de luz futuro en  $P$ . En tal caso, las líneas de universo de los satélites, parametrizadas por los tiempos propios  $\tau^A$ , intersectarían dicho cono en cuatro puntos correspondientes a tiempos propios futuros; por tanto, en este caso, que no es de interés para el posicionamiento relativista, las cuatro señales serían emitidas por el usuario –al mismo tiempo– y recibidas por los satélites en los tiempos propios futuros de intersección; por analogía con lo anterior, estos tiempos propios deberían ser llamados *coordenadas de recepción*. Las *coordenadas de emisión* y las *coordenadas de recepción* son ambas *coordenadas nulas*.

Las *coordenadas de emisión* de  $P$  dependen de la dinámica del conjunto de cuatro satélites que consideremos; mientras que las coordenadas inerciales sólo dependen del sistema de referencia casi inercial elegido. En otras palabras, con cualquier 4-tupla de satélites debemos obtener las mismas coordenadas inerciales para  $P$ , que son únicas en el sistema de referencia seleccionado para el posicionamiento. Si dos 4-tuplas dan diferentes coordenadas inerciales es debido a errores relacionados con el sistema de posicionamiento. Un detallado estudio de errores de posicionamiento será realizado en los capítulos 3 y 4.

## 1.5. Los sistemas de posicionamiento relativista

En la actualidad, para diseñar un SPR *operativo*, necesitamos:

1. un sistema de referencia casi inercial en el que conozcamos las ecuaciones de las líneas de universo de los cuatro satélites  $x_A^\alpha = x_A^\alpha(\tau)$ , los cuales envían –al espacio– señales electromagnéticas con los tiempos propios de emisión codificados.
2. las *coordenadas de emisión* del usuario, que se obtienen al decodificar las señales de los satélites que son recibidas al mismo tiempo por éste.
3. La transformación de coordenadas que nos da las inerciales en función de las

coordenadas de emisión. Las *coordenadas inerciales* resultantes localizan al usuario en el sistema de referencia casi inercial elegido.

De momento, mientras no sepamos cómo construir un sistema de referencia primario a base de intercambios de información entre un cierto número de satélites y usuarios, utilizaremos un sistema de referencia casi inercial para localizar al usuario. En este texto, la Tierra se supone esférica y el sistema de referencia se liga a su centro. Esta elección sencilla es suficiente para nuestros cálculos; sin embargo, en otros artículos, se usan otros sistema de referencia casi inerciales, es habitual –en ciertos estudios– situar el origen de coordenadas en el baricentro del sistema solar, que se mueve con velocidad casi constante durante largos periodos de tiempo en torno al centro de la galaxia. En cuanto a las direcciones espaciales, suelen elegirse como las direcciones de observación de objetos muy lejanos como cuásares y púlsares, que tienen un desplazamiento despreciable sobre la esfera celeste durante intervalos de tiempo muy superiores a muchos periodos de los GNSS estándar.

Los púlsares son estrellas de neutrones en rotación que emiten radiación electromagnética como lo haría un faro que gira. Lo importante es que el periodo de la rotación es extraordinariamente estable (señales casi-periódicas). Debido a esta propiedad, los púlsares pueden ser usados como faros, situados a distancias del orden del kiloparsec, para posicionar naves espaciales en el sistema solar. No entraremos en detalles sobre los métodos de navegación espacial mediante púlsares que han sido propuestos (ver [Sheikh 2005], [Sheikh 2006a], [Sheikh 2006b], [Coll 2009], [Ruggiero 2011], [Tartaglia 2011] y [Bunandar 2011]). De particular interés son los púlsares aislados con periodos del orden del milisegundo que son muy estables, un catálogo de este tipo de púlsares puede hallarse en [Lorimer 2001].

En otros trabajos, como [Tartaglia 2012] y [Delva 2011b], se usan los cuásares para definir las direcciones de los ejes de ciertos sistemas de referencia casi inerciales. Los cuásares, objetos quasi-estelares, son núcleos de galaxias activas. Sus grandes distancias a la Tierra les hace comportarse como puntos fijos en el cielo. La posición de miles de cuásares puede hallarse, por ejemplo, en el Sloan Digital Sky Survey quasar catalog ([Pâris 2014]).

En algunos casos, existen pares de usuarios reales con diferentes coordenadas inerciales, pero con las mismas coordenadas de emisión. Se dice entonces que hay bifurcación o doble posicionamiento. En tal caso, no es posible distinguir un posible usuario del otro utilizando solamente las coordenadas de emisión comunes. Por tanto, serán necesarias otras medidas para elegir la localización verdadera (ver [Coll 2012]).

Varias referencias previas, tales como [Coll 2001]; [Coll 2003]; [Bahder 2001]; [Bahder 2003]; [Rovelli 2002]; [Coll 2006c]; [Coll 2006a]; [Coll 2006b]; [Coll 2010a]; [Coll 2010b]; [Coll 2011a], definen una terminología adecuada para ser utilizada en el marco del posicionamiento relativista. Algunos conceptos fundamentales que serán utilizados en este trabajo son los siguientes:

- *Región de emisión*: Dados cuatro satélites, la región de emisión es la zona del espacio-tiempo donde los tiempos propios –procedentes de dichos satélites– pueden ser recibidos simultáneamente. Quedan excluidos los puntos desde los que dos satélites se ven alineados (ocultamientos).
- *Rejilla*: El conjunto de todas las 4-tuplas de tiempos propios  $(\tau^1, \tau^2, \tau^3, \tau^4)$ .

- *Co-región*: Puntos de la rejilla que pueden ser recibidos como coordenadas de emisión en algún punto de la región de emisión;

ver [Coll 2010a]. Otras ideas y definiciones serán expuestas en la próxima sección.

En el capítulo 2 estudiaremos la estructura de la región de emisión y de la co-región para sistemas de posicionamiento basados en 4-tuplas de satélites de GALILEO (mucho más realistas que los considerados en estudios previos). Los cálculos han sido realizados con códigos numéricos que tuvimos que diseñar para hallar las coordenadas inerciales a partir de las de emisión y viceversa. Buena parte de estos estudios –realizados por primera vez con nuestros propios códigos– fueron publicados en [Puchades 2012]. Veremos que la región de emisión y la co-región pueden dividirse en varias partes con distintas propiedades, y compararemos nuestros resultados con otros previos –basados en un modelo idealizado– en los que tres satélites, simétricamente colocados y en reposo, se utilizan para localizar usuarios en un espacio-tiempo, de tipo Minkowskiano, con una dimensión temporal y dos espaciales (ver [Coll 2012] y [Pozo 2005]).

## 1.6. Más sobre definiciones, conceptos y terminología en SPR

Cualquier usuario necesita observaciones simultáneas de los cuatro satélites para poder determinar su posición en el espacio-tiempo. Ha de recibir los cuatro tiempos propios,  $\tau^A$ , procedentes de los satélites a la vez. Estos tiempos (coordenadas de emisión) le permiten obtener las coordenadas que llamamos inerciales y que vamos a denotar de la siguiente forma:  $x \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4) \equiv (\vec{x}, t)$ . Estas coordenadas sitúan al usuario en el sistema casi inercial de posicionamiento.

Las cuatro coordenadas inerciales del satélite  $A$ , en el tiempo propio de emisión  $\tau^A$ , se denotan  $\gamma_A$ . Puesto que las líneas de universo de los satélites son conocidas y están parametrizadas por sus tiempos propios, las cantidades  $\gamma_A$  pueden ser calculadas para tiempos propios arbitrarios y, por tanto, también pueden ser obtenidos los vectores  $e_a = \gamma_a - \gamma_4$  (donde el índice  $a$  toma valores desde 1 hasta 3). Estos vectores definen la posición relativa entre los satélites  $a$  y el satélite 4, siendo este último el emisor de referencia. La numeración de los satélites y la elección del cuarto satélite como emisor de referencia son arbitrarios. Los vectores  $e_a$  definen la configuración interna de emisión de los cuatro satélites. Como se razona en [Coll 2010a], existen coordenadas inerciales asociadas a los tiempos propios  $\tau^A$ , si y solo si, se cumplen las condiciones de emisión-recepción, que se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\eta_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_a^\beta > 0 \quad (1.3)$$

$$\eta_{\alpha\beta} (e_a^\alpha - e_b^\alpha)(e_a^\beta - e_b^\beta) > 0, \quad (1.4)$$

donde los índices  $a$  y  $b$  toman valores de 1 a 3. Por tanto, sólo si se cumplen estas condiciones tiene sentido buscar las coordenadas inerciales. Los puntos de la rejilla que conduzcan a vectores  $e_a$  que no cumplan estas condiciones no pertenecen a la co-región y no pueden constituir las coordenadas de emisión de ningún usuario.

Para obtener las coordenadas inerciales a partir de las de emisión, hemos de resolver el siguiente sistema de cuatro ecuaciones cuadráticas:

$$\eta_{\alpha\beta}[x^\alpha - x_A^\alpha(\tau^A)][x^\beta - x_A^\beta(\tau^A)] = 0 . \quad (1.5)$$

Estas ecuaciones expresan el hecho de que las distancias espacio-temporales entre los satélites (emisión) y el usuario (recepción) son nulas. En [Coll 2010a] se resuelve este sistema después de convertirlo en otro de tres ecuaciones lineales y una cuadrática, que llamaremos *sistema principal*. La solución obtenida es válida para satélites que se mueven arbitrariamente en el espacio-tiempo de Minkowski. Cuando se resuelve el sistema principal se obtienen tanto las soluciones que corresponden a fotones que viajan desde los satélites hacia el usuario, como aquellas en las que los fotones parten del usuario y alcanzan los satélites. Las primeras de estas soluciones serán llamadas *soluciones de posicionamiento o de pasado* y corresponden a coordenadas de emisión (señales emitidas por los satélites en el pasado), mientras que las segundas no son importantes para el posicionamiento, ya que corresponden a coordenadas de recepción (ver sección 1.4); es decir, a señales recibidas por los satélites en el futuro. Es lógico llamarlas *soluciones de futuro*. El sistema principal puede presentar 0, 1 ó 2 soluciones de posicionamiento.

Si llamamos *vector de configuración*,  $\chi$ , a un vector ortogonal al hiperplano definido por los tres vectores  $e_a$ . Se ha demostrado que para  $\chi^2 > 0$ , el sistema tiene dos soluciones posibles, que pueden ser, o ambas de posicionamiento (pasado) o ambas de futuro. Si las dos soluciones son de posicionamiento (coordenadas de emisión), existen dos observadores físicos verdaderos en posiciones diferentes y con tiempos coordenados distintos que reciben las mismas coordenadas de emisión (bifurcación). Para  $\chi^2 < 0$ , hay dos soluciones distintas, una de posicionamiento y otra de futuro, y hemos de quedarnos con la primera. Finalmente, si se cumple la condición  $\chi^2 = 0$  existe una única solución.

De acuerdo con todo esto, el valor de  $\chi^2$  nos permite dividir la región de emisión en varias zonas (ver [Coll 2010a]) que vamos a llamar:

- *región de configuración espacial*  $\mathcal{C}_s$  ( $\chi^2 < 0$ ),
- *región de configuración nula*  $\mathcal{C}_\ell$  ( $\chi^2 = 0$ )
- *región de configuración temporal*  $\mathcal{C}_t$  ( $\chi^2 > 0$ )
- *Región central*, que es la zona de la región de emisión que incluye  $\mathcal{C}_s$  y  $\mathcal{C}_\ell$ , es decir,  $\mathcal{C}^C \equiv \mathcal{C}_\ell \cup \mathcal{C}_s$

La co-región es un subconjunto conexo de la rejilla, cuyos puntos son cuatro coordenadas de emisión que nos permiten obtener  $\chi^2$ . Según el valor obtenido, el usuario que recibe estas coordenadas se encontrará en  $\mathcal{C}_s$ ,  $\mathcal{C}_\ell$ , o  $\mathcal{C}_t$ .

## 1.7. Los satélites

Dos GNSSs son considerados en esta tesis: GPS de USA y GALILEO (en construcción) de la UE. Estos sistemas de satélites permiten conocer las coordenadas

espaciales y el tiempo universal de cualquier evento sobre la Tierra. Las coordenadas del punto en el que ocurre dicho evento son calculadas gracias a la información recibida desde los satélites que están orbitando en torno a la Tierra.

La constelación de GPS está compuesta por  $n_s = 24$  satélites distribuidos en seis planos orbitales diferentes, es decir, hay 4 satélites por cada plano orbital. Cada uno de dichos planos está inclinado  $\alpha_{in} = 55^\circ$  con respecto al Ecuador. El periodo orbital de los satélites de GPS es 12 horas y la altura a la que están situados es  $h = 20200 \text{ km}$ .

La constelación de GALILEO consta de  $n_s = 27$  satélites, que están situados de forma equi-espaciada en cada plano orbital, habiendo tres planos orbitales. Por tanto, hay nueve satélites por cada plano orbital. La inclinación de estos planos es  $\alpha_{in} = 56^\circ$  y la altura de la órbita circular es  $h = 23222 \text{ km}$ ; así el periodo orbital es aproximadamente 14.2 horas.

Para describir el campo gravitatorio de la Tierra en el marco del posicionamiento relativista, consideraremos que los satélites se mueven bajo la acción de una Tierra ideal esférica y sin rotación. Este modelo simple es suficiente para nuestros fines y nos permite trabajar en el espacio-tiempo de Schwarzschild, en el que las trayectorias de los satélites pueden ser circunferencias de radio  $R$ , cuyo centro coincide con el origen del sistema de referencia casi inercial que está situado en el centro de la Tierra. En este modelo relativista, suponemos que los satélites describen circunferencias que son recorridas con velocidad angular  $\Omega = (GM_\oplus/R^3)^{1/2}$  (ver capítulo 4 para la demostración de esta fórmula). El factor  $\gamma$  obtenido en [Ashby 2003] y [Pascual-Sánchez 2007], es también deducido en esta Tesis –ver capítulo 4– hasta primer orden en el parámetro adimensional  $GM_\oplus/R$  (cuyo valor máximo es  $GM_\oplus/R_\oplus \simeq 6.94 \times 10^{-10}$ ). Este factor viene dado por la siguiente expresión:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} \simeq 1 + \frac{3GM_\oplus}{2R} , \quad (1.6)$$

Manteniéndonos en este orden de aproximación, las coordenadas pseudo-cartesianas de un satélite A que se mueve en su órbita circular; es decir, sus coordenadas en el sistema de referencia Minkowskiano ligado al centro de la Tierra y asintótico al referencial estándar del espacio-tiempo de Schwarzschild, pueden ser escritas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_A^1 &= R [\cos \alpha_A(\tau) \cos \psi + \sin \alpha_A(\tau) \sin \psi \cos \Theta] \\ x_A^2 &= -R [\cos \alpha_A(\tau) \sin \psi - \sin \alpha_A(\tau) \cos \psi \cos \Theta] \\ x_A^3 &= -R \sin \alpha_A(\tau) \sin \Theta \\ x_A^4 &= \gamma \tau . \end{aligned} \quad (1.7)$$

El ángulo

$$\alpha_A(\tau) = \alpha_{A0} - \Omega \gamma \tau \quad (1.8)$$

determina la posición del satélite sobre su trayectoria en cada instante. Finalmente,  $\Theta$  y  $\psi$  son los ángulos de Euler asociados a los siguientes sistemas de ejes espaciales: el primero de ellos está formado por los ejes  $(x^1, x^2, x^3)$  del espacio-tiempo de Minkowski asintótico al de Schwarzschild, mientras que el segundo conjunto de ejes  $(x'^1, x'^2, x'^3)$ , es elegido de forma que  $(x'^1, x'^2)$  coincida con el plano orbital que



contiene la trayectoria del satélite que estemos considerando. Los ángulos  $\Theta$  y  $\psi$  definen un plano orbital de un GNSS dado. Así, el ángulo  $\Theta = 2\pi - \alpha_{in}$  es el mismo para todos los satélites de un GNSS, mientras que el ángulo  $\psi$  toma los valores  $\psi = (2\pi/n_{po})(j - 1)$ , donde  $n_{po}$  es el número de planos orbitales de la constelación, y el número natural  $j$  numera los planos. Evidentemente, el ángulo  $\psi$  es el mismo para todos los satélites de un mismo plano orbital. Para cualquier satélite, los ángulos  $\Theta$ ,  $\psi$  y  $\alpha_{A0}$  son constantes. El ángulo  $\alpha_{A0}$  define la posición del satélite A en  $\tau = x^4 = 0$ . Dicho ángulo debe ser elegido de forma arbitraria para un satélite de cada plano orbital y, entonces, el ángulo  $\alpha_{A0}$  del resto de los satélites debe ser fijado de tal forma que todos los de un mismo plano orbital estén equi-espaciados en su trayectoria circular común.

## 1.8. Cálculo de las coordenadas inerciales a partir de las coordenadas de emisión en el espacio-tiempo de Minkowski

Cuando los fotones que provienen de los satélites se propagan en el espacio-tiempo de Minkowski, la transformación general de coordenadas de emisión a coordenadas inerciales viene dada por la siguiente fórmula (ver [Coll 2010a]):

$$x = \gamma_4 + y_* - \frac{y_*^2 \chi}{(y_* \cdot \chi) + \hat{\epsilon} \sqrt{(y_* \cdot \chi)^2 - y_*^2 \chi^2}}, \quad (1.9)$$

donde los vectores  $\chi$  y  $y_*$  pueden ser calculados a partir de  $e_1$ ,  $e_2$ , y  $e_3$  (configuración interna de los satélites). El vector de configuración  $\chi = *(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$  (el dual de un producto exterior doble) es ortogonal al hiperplano que contiene los cuatro eventos de emisión  $\gamma_A$ . El vector  $y_*$  puede ser calculado a partir de la ecuación  $y_* = (\xi, H)/(\xi \cdot \chi)$ , donde  $(\xi, H)$  representa el producto interior entre el vector arbitrario  $\xi$ , que satisface la condición  $\xi \cdot \chi \neq 0$ , y el bivector  $H$ , que viene dado por  $H = (1/2)(e_a \cdot e_a)E^A$ , siendo  $E^1 = *(e_2 \wedge e_3)$ ,  $E^2 = *(e_3 \wedge e_1)$ , y  $E^3 = *(e_1 \wedge e_2)$ . Además, el parámetro  $\hat{\epsilon}$  puede tomar los valores 1 ó -1 y lo llamaremos parámetro de orientación por las razones que veremos más adelante. La transformación 1.9 fue obtenida al resolver el sistema principal de ecuaciones descrito anteriormente

En esta Tesis, llamaremos *código-TX* al código numérico que utiliza 1.9 para obtener las coordenadas inerciales a partir de las coordenadas de emisión. Por supuesto, para diseñar este código hemos tenido que reescribir la ecuación (1.9) utilizando componentes, ya que la notación compacta anterior, que tan útil es en [Coll 2010a], no es adecuada para hacer cálculos numéricos. Las líneas de universo de los satélites son arbitrarias, por eso, podemos utilizar las ecuaciones (1.7), que han sido obtenidas –con un método apropiado– suponiendo que los satélites se mueven en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En realidad, las ecuaciones de movimiento resultantes tienen en cuenta correctamente el campo gravitatorio terrestre, pero están escritas en función de las coordenadas del espacio-tiempo Minkowskiano asintótico al de Schwarzschild, el mismo espacio-tiempo en el que consideramos que se mueven los fotones.

Para  $\chi^2 \neq 0$ , hay dos conjuntos diferentes de coordenadas inerciales, uno de ellos correspondiente a  $\hat{\epsilon} = +1$  y el otro a  $\hat{\epsilon} = -1$ . Además, para  $\chi^2 < 0$ , solamente uno



de los dos conjuntos de coordenadas inerciales corresponde a una solución de posicionamiento, mientras que el otro conjunto está asociado a una solución de futuro. Para el caso  $\chi^2 > 0$ , el número de soluciones de posicionamiento es dos o cero. El hecho de que existan dos soluciones de posicionamiento ( $\chi^2 > 0$ ) significa que hay dos usuarios diferentes, situados en distintos lugares, que reciben los mismos tiempos propios de emisión desde los mismos satélites. Si hay cero soluciones de posicionamiento con  $\chi^2 > 0$ , sabemos que hay dos soluciones y que ambas son de futuro. Finalmente, si  $\chi^2 = 0$ , las cuatro ecuaciones del sistema principal son lineales (no hay ninguna cuadrática) y, entonces, existe una única solución.

En el caso  $\chi^2 < 0$ , es fácil distinguir la solución de posicionamiento de la otra, ya que la coordenada  $t$  de la solución de posicionamiento satisface la condición  $t_A - t < 0$  para cualquier satélite A, mientras que en el caso de la solución de futuro se cumple la relación  $t_A - t > 0$ . Como las líneas de universo de los satélites son conocidas, podemos calcular la coordenada inercial  $t_A$  a partir de su correspondiente tiempo propio de emisión  $\tau^A$  y, entonces, de acuerdo con lo dicho, podemos usar el signo de  $t_A - t$  para identificar la verdadera solución de posicionamiento.

Cuando –en el caso  $\chi^2 > 0$ – existen dos soluciones de posicionamiento,  $x_1$  y  $x_2$ , decimos que hay bifurcación ([Schmidt 1972], [Abel 1991], [Chaffee 1994], [Grafarend 1996]). En tal caso, el usuario debería tener un criterio para seleccionar cuál de las dos soluciones le conduce a sus coordenadas inerciales, y cuál debe ser desechada por corresponder a otro usuario. En la próxima sección vamos a considerar más detalladamente dos criterios muy distintos. Uno de estos criterios fue propuesto en [Coll 2011b, Coll 2012] y, para aplicarlo, el usuario debe ser capaz de medir ángulos para determinar las posiciones de los cuatro satélites en su propia esfera celeste. El segundo criterio requiere que el usuario posea un reloj apropiado y debidamente sincronizado, que permita la comparación del tiempo coordinado  $x^4$  de cada una de las soluciones de posicionamiento con el tiempo  $t_R$  que marca el citado reloj en el momento de la recepción de las coordenadas de emisión. El usuario elegiría la solución correspondiente al tiempo coordinado  $x^4$  más próximo a  $t_R$ . Cada método tiene ventajas e inconvenientes, y sólo se debe usar cuando sea apropiado.

## 1.9. Soluciones del problema de la bifurcación en un SPR

En todo SPR, cualquiera que sea el espacio-tiempo que consideremos (Minkowski, Schwarzschild, Kerr ...), aparece el problema de la bifurcación, que como ya sabemos, consiste en que existe una pareja de usuarios que reciben los mismos tiempos propios desde los mismos satélites. Esto ocurre cuando, para los tiempos propios comunes, el vector de configuración de los satélites cumple la condición  $\chi^2 > 0$ ; es decir, cuando ambos usuarios están situados en lo que hemos llamado la región de configuración temporal  $\mathcal{C}_t$ . En tal caso, las coordenadas inerciales de ambos usuarios vienen dadas por la fórmula (1.9); pero mientras las de uno de los usuarios corresponden al valor del parámetro de orientación  $\hat{e} = 1$ , las del otro usuario están asociadas al valor  $\hat{e} = -1$ . El problema es saber cuál de los dos signos de  $\hat{e}$  debe elegir un usuario dado para obtener sus verdaderas coordenadas y no las de su pareja. Este proble-

ma también se plantea en el posicionamiento estándar basado en un tratamiento Newtoniano más correcciones relativistas; de hecho, el problema de la bifurcación puede hallarse descrito, por ejemplo, en Schmidt [Schmidt 1972]; Abel y Chaffee [Abel 1991]; Chaffee y Abel [Chaffee 1994]; y Grafarend y Shan [Grafarend 1996]. Si volvemos al caso de los SPR, es evidente que, además de los tiempos propios que recibe de los satélites, un usuario que debe resolver un problema de bifurcación necesita nuevos datos. Una solución operativa del citado problema requiere que el usuario haga medidas apropiadas, para obtener los nuevos datos que necesita, y así poder elegir el signo correcto de  $\hat{\epsilon}$ , que le conducirá a sus verdaderas coordenadas usando la ecuación (1.9).

Una solución de este problema fue descrita en [Coll 2012], donde se demostró que, para elegir el signo correcto de  $\hat{\epsilon}$  que corresponde a un determinado usuario, éste debe medir ángulos para conocer las direcciones en las que observa los cuatro satélites cuando emitieron sus tiempos propios; o lo que es equivalente, para conocer las posiciones de los satélites sobre su esfera celeste en los tiempos propios de emisión. Una vez conocida esta información, el usuario debe proceder del siguiente modo (regla práctica):

(i) numerar arbitrariamente los satélites y considerar los tres primeros ( $A=1,2,3$ ). Por ellos siempre pasará un cono con vértice en el usuario, que intersectará a la esfera celeste en una circunferencia que llamaremos  $C_{1,2,3}$ . En ella, las posiciones de los tres satélites son ciertos puntos, como se ve en la Figura 1.1.

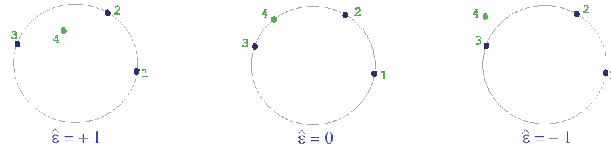


Figura 1.1: Esquema de las posibles posiciones de los cuatro satélites en la esfera celeste del usuario. Se representa una distribución levógira de los satélites 1, 2 y 3 en la circunferencia  $C_{1,2,3}$ . La posición del cuarto satélite fija el valor de  $\hat{\epsilon}$ .

(ii) ver si la orientación de los tres satélites que han sido elegidos y ordenados ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ) es dextrógira o levógira. Para ello, con los vectores unitarios correspondientes a las direcciones usuario-satélites, podemos calcular el producto mixto  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ , ya que en los casos  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) < 0$  y  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) > 0$ , la orientación es dextrógira y levógira, respectivamente.

(iii) determinar si el punto representativo del cuarto satélite sobre la esfera celeste está sobre la circunferencia a la que pertenecen los otros tres, fuera de ella, o dentro.

Con toda esta información, el signo de  $\hat{\epsilon}$  que corresponde a nuestro usuario es:

- si la orientación de los tres primeros satélites es levógira  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) > 0$ , el valor de  $\hat{\epsilon}$  que debe ser elegido es  $\hat{\epsilon} = \text{sign}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = +1$  si el punto representativo del satélite  $A = 4$  está dentro de  $C_{1,2,3}$ , y  $\hat{\epsilon} = -\text{sign}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = -1$  si está fuera. Ver figura 1.1.
- si la orientación de los tres primeros satélites es dextrógira  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) < 0$ , el valor de  $\hat{\epsilon}$  que debe ser elegido es  $\hat{\epsilon} = \text{sign}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = -1$  si el punto repre-

sentativo del satélite  $A = 4$  está dentro de  $C_{1,2,3}$ , y  $\hat{\epsilon} = -\text{sign}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = +1$  si está fuera.

- Si el cuarto satélite está contenido en la circunferencia  $C_{1,2,3}$ , el radicando que aparece en el segundo miembro de la ecuación (1.9) es nulo, por tanto no hay bifurcación, sino una única solución que, en la práctica, podría ser obtenida suponiendo  $\hat{\epsilon} = 0$ . Este caso será discutido a su debido tiempo con mayor detalle.

Todo lo anterior se demuestra rigurosamente en [Coll 2012], pero hay que tener en cuenta que nuestros vectores  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  son los opuestos de los que se usan en la citada referencia, donde se puede hallar la regla práctica anterior para resolver el problema de la bifurcación, a la que vamos a llamar *criterio observacional de orientación*.

Podemos resumir la situación diciendo que un usuario –de la región de configuración temporal  $\mathcal{C}_t$ – puede determinar su posición espacio-temporal unívocamente si conoce: las coordenadas de emisión (tiempos propios) procedentes de cuatro satélites y las posiciones de los mismos en la esfera celeste –del usuario– cuando emitieron sus tiempos propios.

Otra forma de resolver el problema de la bifurcación es medir tiempos en vez de ángulos. Cuando los tiempos coordenados de las dos soluciones de posicionamiento son suficientemente diferentes, el usuario puede seleccionar fácilmente su posición verdadera usando un reloj. Solamente el tiempo coordenado de la solución verdadera será suficientemente próximo al tiempo medido por el reloj del usuario. Sin embargo, en algunos casos, los tiempos coordenados de un usuario y de su pareja –en la bifurcación– son muy próximos y, en tal caso, no es fácil elegir la posición verdadera, ya que ello requeriría que el usuario tuviera un reloj suficientemente preciso y muy bien sincronizado. Todo esto se discutirá con más detalle en el próximo capítulo.

Para terminar esta sección queremos señalar que usuarios en Tierra o suficientemente próximos a ella están en la región que hemos llamado central donde  $\chi^2 \leq 0$  y, por tanto, estos usuarios no tienen problemas de bifurcación. De modo que tales problemas sólo se dan si el usuario a localizar está en una nave que vuela a una altura sobre la Tierra suficientemente grande. En el capítulo 2 veremos que el problema de la bifurcación es importante si tratamos de posicionar un satélite de GALILEO utilizando cuatro satélites de GPS o viceversa, ya que estos satélites están a alturas de decenas de miles de kilómetros sobre la Tierra.

## 1.10. Cálculo de las coordenadas de emisión a partir de las coordenadas inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski

Dadas las cuatro coordenadas inerciales,  $x^\alpha$ , de un usuario en el espacio-tiempo de Minkowski, sus coordenadas de emisión,  $\tau^A$ , pueden ser calculadas numéricamente. El método para hacer este cálculo está basado en que la distancia Minkowskiana recorrida por el fotón desde su emisión hasta que es detectado por el usuario es nula.

Esta condición se expresa mediante el sistema de ecuaciones algebraicas (1.5) (ver sección 1.6). Para obtener las coordenadas de emisión,  $\tau^A$ , a partir de este sistema de cuatro ecuaciones (una por satélite), las coordenadas inerciales  $x^\alpha$  se suponen conocidas, y las líneas de universo de los satélites también [ecuaciones (1.7) y (1.8)] y, bajo estos supuestos, el sistema puede ser resuelto, considerando las coordenadas de emisión como incógnitas, mediante el método numérico de Newton-Raphson ([Press 1999]). A lo largo de la tesis, denominaremos *código XT* al que hemos diseñado para resolver el sistema 1.5, según lo expuesto, y obtener las incógnitas  $\tau^A$ .

Para comprobar que nuestro código XT funciona con alta precisión hemos realizado el siguiente test:

- En un primer paso, partiendo de las coordenadas inerciales de un usuario, calculamos sus coordenadas de emisión con el código XT.
- Después, a partir de las coordenadas de emisión obtenidas en el primer paso, el código TX, basado en la solución exacta de posicionamiento dada por la ecuación (1.9), nos permite calcular las coordenadas inerciales asociadas.

Es evidente que, en ausencia de errores de cálculo, las coordenadas inerciales finales, dadas por el código TX, coincidirían exactamente con las coordenadas de partida usadas en el primer paso. Si hay errores, la precisión del cálculo puede ser medida mediante el error absoluto de las coordenadas inerciales, que será calculado como diferencia entre las coordenadas finales y las de partida.

Los códigos XT y TX utilizan múltiple precisión, de forma que cada número real contiene un número de cifras significativas a especificar; por ejemplo, podemos tomar cuarenta cifras significativas. Tomando este número de dígitos y exigiendo una precisión del mismo orden al método numérico de Newton-Raphson, hemos conseguido que los errores absolutos en el test que estamos considerando sean del orden de  $10^{-39}$ .

Estos resultados prueban que nuestros cálculos numéricos son muy precisos, tanto cuando calculamos las coordenadas inerciales a partir de las de emisión como cuando hacemos lo contrario. Esto lo podemos afirmar porque nuestro test utiliza tanto el código TX como el XT. El segundo de estos consume más tiempo de cálculo porque usa el método de Newton-Raphson, mientras que el segundo es más rápido por estar basado en una solución exacta de posicionamiento (pasado).

Todos los códigos que hemos utilizado en esta Tesis, para realizar diferentes cálculos, utilizan los códigos de múltiple precisión TX y XT como subrutinas. La precisión es ajustada en cada caso para conseguir resultados suficientemente precisos con tiempos de cálculo admisibles.

## 1.11. Tipos de errores de posicionamiento

En cualquier SPR, los satélites y los fotones son partículas prueba que evolucionan en un cierto espacio-tiempo. Por tanto, hay dos tipos de errores de posicionamiento de carácter gravitatorio: los de un tipo son debidos a que no conocemos con suficiente precisión las líneas de universo temporales de los satélites, y los del otro tipo se deben a una descripción inadecuada de las líneas de universo nulas de los fotones, que son

los encargados de llevar la información desde los satélites hasta el usuario. Ambos errores son pequeños y el error total es la superposición lineal de ellos. Finalmente, hay errores cuyo origen no es gravitatorio, como los debidos a que los fotones interactúan con las diferentes capas de la atmósfera cuando los usuarios no están fuera de ella; es decir, cuando están suficientemente cerca de la superficie terrestre. Estos errores deben ser corregidos tal y como ya se hace en el posicionamiento estándar (GPS, GALILEO, etcétera).

A lo largo de toda la Tesis suponemos que las líneas de universo de los satélites son geodésicas temporales del espacio-tiempo de Schwarzschild con trayectorias circulares. Estas líneas de universo serán llamadas nominales, y son apropiadas para los estudios que vamos a realizar; si bien, pueden ser generalizadas de varias formas; por ejemplo, podemos considerar líneas nominales con trayectorias no circulares en el espacio-tiempo de Schwarzschild, o líneas nominales en otras geometrías más complejas, que podrían tener en cuenta las deformaciones de la Tierra con respecto a la simetría esférica, así como de la existencia de cuerpos celestes que puedan perturbar el espacio-tiempo asociado a la Tierra.

Para el movimiento de los fotones vamos a trabajar utilizando las dos hipótesis siguientes:

- Las líneas de universo de los fotones son geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Minkowski asintótico a la geometría de Schwarzschild.
- Los fotones siguen geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Uno de nuestros objetivos fundamentales es probar que la primera de estas hipótesis es suficientemente buena en muchos casos, ya que la segunda hipótesis conduce a resultados de posicionamiento muy parecidos. Intuitivamente, ello es debido a que los fotones emitidos por los satélites experimentan efectos lente muy pequeños en el campo gravitatorio que tienen que atravesar para llegar al usuario. Teniendo en cuenta esto, en los capítulos 2 y 3 vamos a utilizar la siguiente aproximación al problema del posicionamiento relativista, que es manejable y suficientemente buena: las líneas de universo de los satélites (fotones) son geodésicas temporales (nulas) del espacio-tiempo de Schwarzschild (de Minkowski asintótico a Schwarzschild). Como ya hemos avanzado, en esta aproximación, hay dos tipos de errores de posicionamiento que vamos a considerar ahora con más detalle pero todavía cualitativamente:

- El primer tipo es debido a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites. Si estos siguieran exactamente las líneas de universo nominales, definidas anteriormente, no habría errores de este tipo. Las líneas nominales elegidas para los satélites satisfacen las ecuaciones (1.7)–(1.8). Sin embargo, las verdaderas líneas de universo de los satélites se desvían continuamente de las nominales, debido a los multipolos de la distribución de masa en la Tierra y a otros efectos, y estas desviaciones conducen a errores de posicionamiento. Ello es debido a que para obtener la posición del usuario (a partir de las coordenadas de emisión) hay que resolver las ecuaciones (1.5) que dependen de las ecuaciones de las geodésicas temporales de los satélites. La solución correspondiente a las geodésicas nominales es por tanto diferente a la que se obtiene a partir de las

verdaderas líneas de universo. Un análisis detallado de este tipo de errores será presentado en el capítulo 3.

- El segundo tipo es debido al hecho de que los fotones no se mueven en el espacio-tiempo de Minkowski, sino que están sometidos a un campo gravitatorio básicamente producido por la Tierra. En la generalización más simple de la aproximación propuesta anteriormente, será asumido que los fotones viajan en el espacio-tiempo de Schwarzschild creado por una Tierra ideal esféricamente simétrica. Un estudio detallado sobre estos errores será presentado en el capítulo 4. Métricas espacio-temporales más generales que la de Minkowski –incluyendo la de Schwarzschild– han sido ya consideradas en [Čadež 2005], [Bini 2008], [Teyssandier 2008], [Ruggiero 2008], [Delva 2009], [Čadež 2010], [Bunandar 2011], [Delva 2011a] y [Delva 2011b], tanto para estudiar el movimiento de los fotones como el de los satélites. Aprovecharemos ciertos resultados de estos artículos para hacer un estudio general del problema del posicionamiento relativista, hasta distancias de la Tierra del orden de  $10^5$  km.

Los errores de posicionamiento del primer (segundo) tipo serán estudiados en el capítulo 3 (4). Ambos serán comparados en el capítulo 4.

En el código-TX, asumimos que los fotones viajan en el espacio-tiempo de Minkowski; por tanto, la posición del usuario obtenida mediante este código tendría que ser corregida teniendo en cuenta los errores del segundo tipo mencionados anteriormente, ya que los fotones, no evolucionan en el espacio-tiempo de Minkowski y, como mínimo, hay que suponer que lo hacen en el de Schwarzschild.

## 1.12. Errores de posicionamiento debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites

A lo largo de la tesis, llamaremos *U-errores* de posicionamiento, a aquellos que son debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites; o sea a desviaciones con respecto a las líneas nominales.

Los GNSS tales como GPS y GALILEO (los únicos considerados en esta Tesis) usan constelaciones adecuadas de satélites para obtener las coordenadas de un usuario -cercano a Tierra- en un sistema de referencia apropiado. Nosotros queremos estudiar el posicionamiento hasta distancias considerables de la Tierra, para luego estudiar posibles aplicaciones en sistemas de navegación espacial.

Los errores de posicionamiento han sido estudiados en varios artículos, tales como [Langley 1999], [Puchades 2011], [Sáez 2013] y [Sáez 2014]. En el primero de estos estudios, el formalismo es estándar y se aplica directamente a la constelación GPS. El resto son trabajos que hemos publicado en el marco de los SPR.

En [Langley 1999], se estudian los errores de posicionamiento debidos a la geometría del sistema satélites-usuario. Langley demostró que existe una correlación entre la geometría de este sistema y los errores de posicionamiento. Este autor probó que estos errores dependen del volumen del tetraedro formado por los extremos de

los cuatro vectores unitarios usuario-satélite, cuyo origen común está en el usuario. Cuanto mayor es el volumen, menores son los errores de posicionamiento. Langley habla de *dilución de precisión*.

Nuestros trabajos en este campo ([Puchades 2011], [Sáez 2013] y [Sáez 2014]), basados en SPR, demuestran que Langley tenía razón y justifican los resultados obtenidos por este autor.

En el capítulo 3, presentamos un estudio en cuatro dimensiones (4D) de los U-errores. La distribución espacio-temporal de estos errores es mostrada dentro de una esfera centrada en un punto de la superficie terrestre que llamaremos E, cuyas coordenadas serán dadas al final de esta sección. El radio de esta esfera será de  $10^5$  km y será llamada la E-esfera. De esta forma podremos ver cómo la precisión del posicionamiento se va degradando conforme la distancia al punto E aumenta y el usuario se aleja de la Tierra. Esto es importante para saber qué satélites podrían ser posicionados como usuarios de GPS y GALILEO, y qué errores se cometerían en este posicionamiento para distintas distancias entre estos satélites y la Tierra.

Nuestro estudio está basado en el jacobiano,  $J$ , de la transformación que da las coordenadas de emisión en función de las inerciales. En los entornos de puntos con jacobiano nulo, los errores de posicionamiento son muy grandes para pequeñas desviaciones con respecto a las líneas de universo nominales de los satélites, de hecho, estos errores divergen cuando nos acercamos a cualquier punto de jacobiano nulo. En el capítulo 3 mostraremos que, para cualquier 4-tupla de satélites, los puntos de jacobiano nulo están localizados a distancias,  $D$ , desde el centro de la Tierra mayores que aproximadamente  $2R/3$ , donde  $R$  es el radio de las órbitas de los satélites, las cuales se supone que son circunferencias (órbitas nominales).

Es generalmente aceptado que, a distancias -desde la Tierra- mayores que  $D_{max} \sim 2 \times 10^4$  km, los errores de posicionamiento son demasiado grandes y, por tanto, la navegación de satélites basada en GNSS no es factible (ver [Deng 2013]). Este tópico sobre navegación espacial será revisado en el capítulo 3, ya que nuestros resultados sugieren que, para distancias superiores a  $2R/3$  e inferiores a  $10^5$  km, podemos conseguir un posicionamiento bastante bueno si elegimos las 4-tuplas de satélites para que no haya puntos con  $J = 0$  en la vecindad del usuario. En el capítulo 3, sugerimos -cualitativamente- posibles métodos para encontrar la 4-tupla adecuada para un usuario dado, situado a una distancia  $D < 10^5$  km del punto E. Todo esto podría ser importante para la navegación espacial no demasiado lejos de la Tierra.

Los U-errores son debidos a desviaciones con respecto a las líneas de universo nominales de los satélites. Cualesquiera que sean estas líneas, hay unos efectos que desvían los satélites de la constelación con respecto a ellas. Algunas veces estas desviaciones son demasiado grandes y la línea de universo del correspondiente satélite debe ser corregida; de este modo, las desviaciones espaciales (temporales) de las líneas de universo verdaderas con respecto a las nominales serían mantenidas menores que un cierto límite máximo (amplitud de la desviación). En su momento elegiremos esta amplitud. Por supuesto, el ritmo al que crecen las desviaciones depende de nuestra elección de las líneas nominales; si estas son calculadas teniendo en cuenta no sólo la masa de la Tierra, sino también su distribución espacial asimétrica, la deformación de la Tierra ya no nos produce desviaciones entre trayectorias reales y nominales y, por tanto, las desviaciones crecerán más despacio, y las correcciones *ad hoc* del



movimiento de los satélites serán necesarias después de intervalos de tiempo más largos. De cualquier modo, como ya hemos afirmado antes, nuestra elección de las líneas de universo nominales es apropiada para lograr nuestros objetivos.

### 1.13. Errores de posicionamiento asociados a una descripción aproximada del movimiento de los fotones

Los usuarios de sistemas GNSS actualmente operativos como GPS y GLONASS, en sus posicionamientos rutinarios sobre la Tierra o muy cerca de ella, desprecian los pequeños efectos de los campos gravitatorios en la propagación de las señales electromagnéticas; por tanto, suponen que estas señales se propagan en el espacio-tiempo de Minkowski y resuelven las ecuaciones de las geodésicas nulas que son de la forma (1.5). Además, a pesar de su carácter general (líneas de universo arbitrarias de los emisores), la solución exacta de estas ecuaciones, obtenida por Coll et al. [Coll 2010a], no es utilizada en los cálculos; por el contrario, estas ecuaciones se resuelven por métodos numéricos. En [Čadež 2010], puede verse que se utiliza un procedimiento iterativo que se va acercando a la verdadera solución; es decir, a la de Coll et al. [Coll 2010a], la cual es utilizada sistemáticamente en esta Tesis. Evidentemente, al no tener en cuenta la influencia de la gravedad en la propagación de los fotones se están cometiendo pequeños errores de posicionamiento. En este trabajo se realiza, por primera vez, un estudio sistemático de estos errores para sistemas de satélites como los de GPS y GALILEO, y para usuarios situados a distancias de la Tierra que llegan a ser del orden de  $10^5$  km.

Hace más de una década, Bahder propuso un método [Bahder 2001] para estimar el efecto de la curvatura del espacio-tiempo (campos gravitatorios) sobre los fotones que transportan la información necesaria para el posicionamiento, y escribió ecuaciones concretas para el espacio-tiempo de Schwarzschild. Su método se basa en el uso de la llamada "función de universo", que fue introducida por J.L. Synge y H.S. Ruse hace más de ocho décadas [Synge 1931], [Ruse 1932], [Ruse 1933] y [Synge 1960]. Vamos a definir esta función, y a comentar su aplicación en problemas de posicionamiento. Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos sucesos correspondientes a los valores  $u_1$  y  $u_2$  de un parámetro afín de la geodésica a la que pertenecen, la función de universo es:

$$\Omega(P_1, P_2) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \int_{u_1}^{u_2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} du, \quad (1.10)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  son las componentes covariantes de la métrica. Si la geodésica es nula y los sucesos  $P_e$  y  $P_r$  son la emisión de una señal electromagnética desde un satélite y su detección por el usuario, respectivamente, podemos escribir  $\Omega(P_e, P_r) = 0$ . Si escribimos cuatro ecuaciones de este tipo, una para cada satélite  $A$ , el sistema

$$\Omega^A(P_e, P_r) = 0 \quad (1.11)$$

generaliza el sistema de ecuaciones (1.5), y se convierte en él cuando trabajamos en el espacio-tiempo de Minkowski; es decir, para  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Por tanto, para hallar la



posición de un usuario, habría que resolver numéricamente las ecuaciones (1.11), que suelen ser complicadas. En el caso de Schwarzschild, la ecuación correspondiente a uno de los cuatro satélites fue numéricamente resuelta en [Delva 2009]. Los autores sólo presentaron un estudio preliminar para un satélite que se mueve en el plano ecuatorial; en este caso, calcularon las coordenadas de emisión, a partir de las inerciales, para unos pocos usuarios con las mismas coordenadas espaciales, pero que reciben la señal del satélite en tiempos distintos. El mismo problema fue estudiado mediante otros dos métodos para comparar las precisiones y el tiempo de cálculo. Otro de estos métodos utiliza ciertas soluciones analíticas de las ecuaciones de las geodésicas que involucran funciones elípticas (ver [Čadež 2005]). Finalmente, el último método está basado en la llamada "función de transferencia del tiempo" que será definida en el Capítulo 4, donde la utilizamos en nuestro estudio detallado de los errores de posicionamiento debidos a una descripción Mikowskiana del movimiento de los fotones.

En [Čadež 2010] se describen métodos, en el espacio-tiempo de Schwarzschild, para hallar las coordenadas de emisión a partir de las inerciales y viceversa. En el Capítulo 4, algunos aspectos del método descrito en [Čadež 2010], para pasar de las coordenadas de emisión a las inerciales (posicionamiento), son utilizados; por ejemplo, se usa una aproximación de primer orden, en el parámetro  $GM_{\oplus}/r$ , de la función de transferencia del tiempo [Teyssandier 2008]; sin embargo, otros aspectos de nuestros cálculos, como el uso de la solución analítica de Coll et al. [Coll 2010a] en los cálculos a orden cero, son muy eficientes y novedosos.

De ahora en adelante llamaremos *S-errores* de posicionamiento a los que se cometen al describir el movimiento de los fotones en el espacio-tiempo de Minkowski y el de los satélites en el de Schwarzschild. Estos errores se hallan comparando el posicionamiento que da este modelo, con el que se obtiene al suponer que tanto satélites como fotones se mueven en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Como los satélites se mueven del mismo modo en ambos modelos, los S-errores son debidos a la descripción del movimiento de los fotones, que es más inadecuada en el espacio-tiempo Minkowski que en el de Schwarzschild. En el capítulo 4, los S-errores son presentados, por primera vez, mediante mapas adecuados. Tanto los S-errores como los U-errores han sido calculados en la misma distribución de puntos, dentro de la E-esfera definida anteriormente; así, los dos tipos de errores podrán ser fácilmente comparados punto a punto para un cierto número de instantes que cubra un periodo del movimiento de los satélites. Mientras que los U-errores dependen de la amplitud de las desviaciones con respecto a la líneas de universo nominales de los satélites, siendo prácticamente independientes de cómo se mueven los fotones, los S-errores son debidos al efecto lente en el campo gravitatorio de la Tierra, y son casi independientes de la citada amplitud; por tanto, el error total de posicionamiento de un usuario se calculará como la suma de los U-errores y los S-errores.

En los mapas de S-errores, se podrá apreciar que estos toman valores de unos pocos centímetros para algunos usuarios localizados sobre la superficie de la Tierra; mientras que llegan a ser de unos pocos metros para ciertos usuarios localizados lejos de Tierra, aunque en el interior de la E-esfera. Nuestros mapas de los S-errores son una herramienta práctica, ya que pueden ser usados para establecer comparaciones con los U-errores correspondientes a desviaciones realistas con respecto a las líneas

nominales de los satélites; así, podríamos saber, si para las desviaciones consideradas, podemos suponer que los fotones se mueven en el espacio-tiempo de Minkowski, o si hay que tener en cuenta el campo gravitatorio de la Tierra. Por supuesto, todo depende también de la precisión que necesitemos en el posicionamiento, que no es la misma para el posicionamiento de un barco sobre la Tierra, que para la navegación espacial autónoma de un satélite lejos de la Tierra.

En los estudios numéricos de los capítulos 2 y 3, que fueron publicados en [Puchades 2012], [Puchades 2014] y [Sáez 2013], se puede utilizar la aproximación descrita en la sección 1.11, en la que los fotones se mueven en el espacio-tiempo de Minkowski. Ello es debido a que la distribución de usuarios con problemas de bifurcación (capítulo 2) y la distribución de U-errores (capítulo 3) apenas se ven afectadas por la presencia de un campo gravitatorio tan pequeño como el que hay dentro de la E-esfera. En general, si demostramos que, en un cierto SPR, los S-errores son suficientemente pequeños frente a los U-errores en alguna zona de la E-esfera, la aproximación anterior puede ser usada –en esa situación– dentro de dicha zona.

## 1.14. Representaciones basadas en la pixelización HEALPIX

Para representar los resultados que obtenemos en las simulaciones numéricas de tipo 4D que hemos realizado, hemos de considerar secciones de la región 4D que estemos estudiando. Si se trata de la llamada co-región (sección 1.5), tomaremos secciones de la forma  $\tau^4 = cte$ , mientras que en el caso de la región de emisión, las secciones serán del tipo  $x^4 = t = cte$ . Pero incluso en estas secciones tridimensionales 3D, cualquier representación involucra cuatro cantidades, tres coordenadas y la variable que hemos calculado numéricamente y que queremos representar. Tampoco en este caso podemos hacer dibujos adecuados sin usar el color como una dimensión. Para hacer esto y resolver nuestro problema, siempre representamos variables apropiadas, que son funciones escalares de la dirección cuando se toma como origen el punto E, el centro de la Tierra O, o cualquier punto apropiado. Entonces, procedemos de la siguiente manera: consideramos muchas direcciones correspondientes a una pixelización HEALPIX de la esfera –que vamos a describir a continuación– y cada píxel lo pintamos del color que le corresponde al valor de la variable en la dirección que apunta hacia su centro. Hay un paquete HEALPIX que nos permite hacer una proyección Mollweide de la esfera pixelizada, pintando cada píxel con el color que le corresponde dentro de una escala de colores que podemos elegir. A lo largo de la tesis vamos a mostrar muchos ejemplos de este procedimiento, que está inspirado en la forma habitual de representar los mapas de temperaturas del fondo cósmico de microondas [Bennett 2013], siendo la temperatura una variable escalar que depende de la dirección de observación.

El paquete HEALPIX fue elaborado por [Górski 1999]. HEALPIX son siglas procedentes del inglés (*hierarchical equal area isolatitude pixelisation*), que designan una pixelización jerárquica de la esfera celeste, en la que todos los píxeles tienen la misma área y aquellos píxeles que tienen la misma latitud presentan la misma forma. Está diseñada para sustentar eficientemente:

- operaciones de localización de los píxeles
- el uso de la estructura jerárquica para cambiar de resolución

El paquete HEALPIX contiene subrutinas IDL y Fortran 90 optimizadas.

La pixelización HEALPIX cumple los siguientes requisitos:

- *Estructura jerárquica*

Se reconoce ésta como esencial para bases de datos muy extensas. La figura 1.2 muestra una partición jerárquica, con estructura de árbol cuadrilateral, en la que los píxeles se numeran fácilmente en base binaria. Al aumentar la resolución, se subdivide cada píxel en cuatro píxeles hijos (ver figura 1.2). Cada uno de estos píxeles hijos hereda todos los bits del píxel padre y se distinguen entre ellos por dos nuevos bits situados a la derecha que son siempre 00, 01, 10, 11. En la resolución más baja se divide la esfera celeste en 12 parches, que luego se van subdividiendo jerárquicamente de acuerdo con lo anterior. En realidad se trata de 12 parches, con cuatro lados curvilíneos, que cubren toda la esfera celeste.

- *Áreas iguales para todos los píxeles*

Si las áreas de los píxeles son todas iguales, estos no pueden tener todos la misma forma, tal y como se puede apreciar en las figuras de 1.4, 1.5 y 1.3. Los píxeles son más alargados en las zonas polares.

- *Distribución en iso-latitud*

Existen conjuntos de píxeles con idéntica forma cubriendo los paralelos de la esfera celeste.

Una distribución de píxeles con las propiedades anteriores puede verse representada en la figura 1.3. Con este tipo de pixelización es fácil buscar un píxel de coordenadas conocidas.

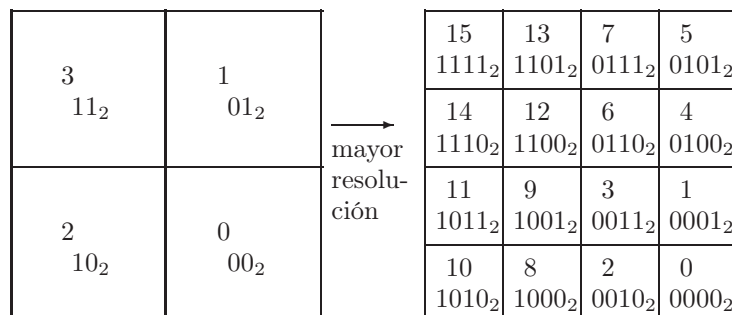


Figura 1.2: Estructura de árbol jerárquica cuadrilateral. A la izquierda se muestra un parche pixelizado groseramente, que consta de cuatro píxeles numerados en base binaria. En la parte derecha se aumenta la resolución de este parche, de modo que cada píxel se subdivide en cuatro píxeles hijos.

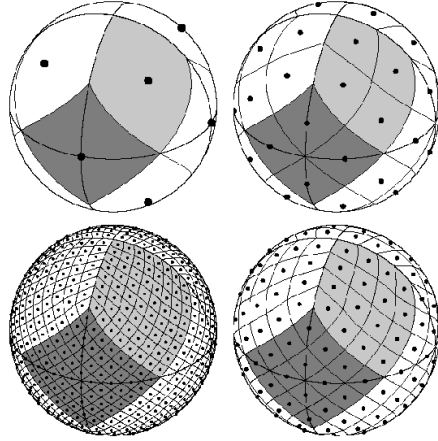


Figura 1.3: Proyección ortográfica de la partición HEALPIX de la esfera. En el panel superior izquierdo, la zona gris claro muestra uno de las ocho (cuatro Norte y cuatro Sur) grandes píxeles polares usados en la pixelización de mínima resolución, mientras que la gris oscuro exhibe uno de los cuatro píxeles restantes situados en la región ecuatorial (para la misma resolución). Los paneles superior derecho ( $N_{side} = 2$ ), inferior derecho ( $N_{side} = 4$ ) e inferior izquierdo ( $N_{side} = 8$ ) son tres subdivisiones jerárquicas sucesivas de los píxeles de mínima resolución ( $N_{side} = 1$ ). En estos tres casos, el número total de píxeles es  $N_{pix} = 12 \times N_{side}^2 = 48, 192, 768$ , respectivamente. Los centros de los píxeles se sitúan en  $N_{ring} = 4 \times N_{side} - 1$  anillos de latitud constante. En el interior de cada panel, las áreas de todos los píxeles son idénticas.

Los 12 grandes píxeles que definen la resolución más baja están distribuidos en tres anillos alrededor de los Polos y del Ecuador de la forma que puede apreciarse en la esfera superior izquierda de la figura 1.3.

El número de píxeles es  $12 \times N_{side}^2$ , donde el parámetro libre  $N_{side}$  toma valores naturales pares e indica la resolución de la rejilla. Para  $N_{side} = 1$  estamos en el nivel más bajo de resolución y cada vez que dividimos los píxeles en cuatro partes, el parámetro  $N_{side}$  viene multiplicado por 2; de esta forma, el número de píxeles total viene dado por  $N_{pix} = 12 \times N_{side}^2 = 12, 48, 192, 768$ .

En nuestros estudios de la *región de emisión*, hemos elegimos  $N_{side} = 16$ , lo que equivale a considerar 3072 píxeles; mientras que usamos  $N_{side} = 32$  (12288 píxeles) en el caso de la *co-región*. El área angular de cada píxel es  $\sim 13.43 \times 13.43 \text{ grados}^2$  para  $N_{side} = 16$ , mientras que vale  $\sim 3.36 \times 3.36 \text{ grados}^2$  si  $N_{side} = 32$ . Por tanto, dicha área es muy próxima a 64 (16) veces el área angular media de la Luna llena para  $N_{side} = 16$  ( $N_{side} = 32$ ).

Hay un total de  $4 \times N_{side} - 1$  anillos (paralelos) sobre toda la esfera celeste. Los centros de los píxeles están situados equidistantemente sobre estos anillos. Se distinguen tres zonas sobre el cielo: una ecuatorial y dos polares. La zona ecuatorial es la región limitada por los dos paralelos que pasan por los vértices superiores e inferiores de aquellos píxeles de la base de mínima resolución que tienen su centro en el Ecuador (ver figura 1.3). Esta zona separa las dos zonas polares. Los anillos situados en la zona ecuatorial, se dividen en el mismo número de píxeles:  $N_{eq} = 4 \times N_{side}$ . El resto de anillos, localizados en las zonas polares, contienen un número de píxeles variado, que crece de anillo en anillo conforme aumenta la distancia a los Polos.

En la región ecuatorial la ecuación de las curvas que definen las fronteras de los píxeles es:  $\cos \theta = a \pm b\phi$ , mientras que en los casquetes polares es:  $\cos \theta = a + b/\phi^2$ .

Las propiedades geométricas que caracterizan a HEALPIX nos permiten numerar los píxeles de dos formas diferentes, tal y como se ilustra en las figuras 1.4 y 1.5.

Los dos esquemas de numeración admitidos por HEALPIX son llamados: RING y NESTED. Ambos esquemas transforman la distribución bidimensional (2D) de elementos discretos de área (píxeles) sobre la esfera, en una distribución unidimensional, lo que es esencial para cálculos que involucran conjuntos de datos con un número de píxeles total muy grande.

Se elegirá el sistema de numeración más conveniente dependiendo del tipo de problema numérico a resolver.

Los esquemas de numeración para píxeles son:

- El esquema RING, en el que se numeran los píxeles de forma creciente, desde el Polo Norte hasta el Polo Sur a lo largo de cada anillo (iso-latitud).
- El esquema NESTED, en el que los píxeles se numeran en cada una de las 12 estructuras de árbol mencionadas previamente. Antes hemos asignado un número en base 2 a cada uno de los píxeles (ver figura 1.2) y el número NESTED del píxel es el que resulta al escribirlo en base 10.

Nosotros usamos la numeración RING para todas las figuras.

Finalmente, visualizamos la esfera pixelizada usando la proyección Mollweide, en la cual se divide la esfera en dos partes: el hemisferio frontal es proyectado en la parte

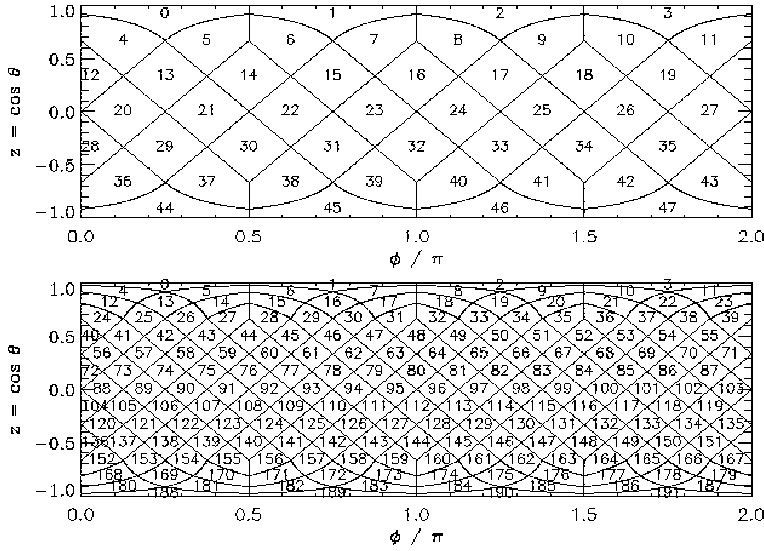


Figura 1.4: Proyección cilíndrica de la división HEALPIX de una esfera en el esquema RING, con  $N_{side} = 2$  ( $N_{side} = 4$ ) en el panel superior (inferior). Ambas figuras muestran que el número del píxel aumenta desde el Polo Norte hasta el Polo Sur, a través de anillos consecutivos.

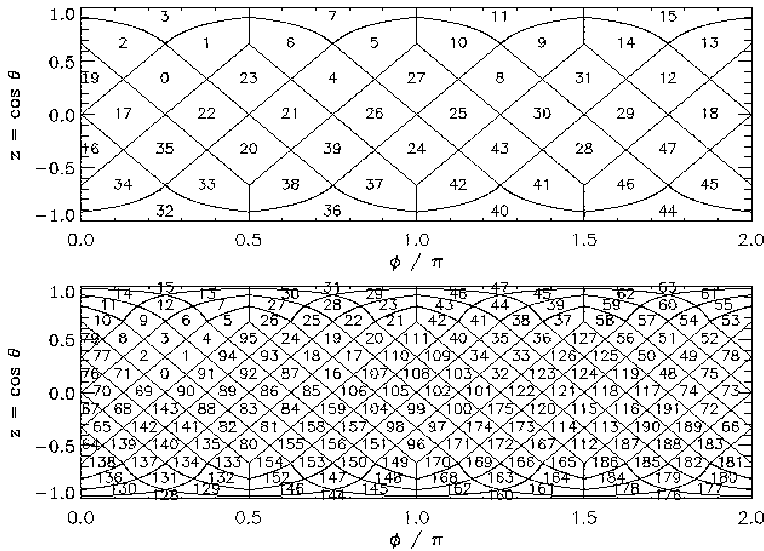


Figura 1.5: Proyección cilíndrica de la división HEALPIX de una esfera en el esquema NESTED, con  $N_{side} = 2$  ( $N_{side} = 4$ ) en el panel superior (inferior). En las dos figuras, el número del píxel crece en subdivisiones jerárquicas consecutivas sobre una estructura de árbol, generada a partir de los 12 píxeles correspondientes a la resolución mínima.

central de la figura y el hemisferio opuesto es representado en las partes laterales.

## 1.15. Consideraciones generales

Básicamente, en esta Tesis vamos a estudiar la bifurcación y ciertos errores que aparecen en un SPR: los U-errores y los S-errores. Todo ello se estudiará en una extensa región alrededor de la Tierra, para constelaciones de satélites como las de GPS y GALILEO. Este estudio básico, pero detallado y suficientemente realista, será el punto de partida para desarrollar un amplio programa de posibles aplicaciones de los SPR a la navegación espacial, así como a la medida de campos gravitatorios (gravimetría).

Partimos de resultados y métodos previos, pero unos los confirmamos o explicamos, y otros los mejoramos y los aplicamos convenientemente. Entre este tipo de resultados y métodos destaquemos:

- La solución analítica de Coll et al. descrita en la sección 1.8
- Las ideas previas sobre la estructura de la región y la co-región sacadas del estudio de modelos poco realistas (ver la sección 1.6)
- Los métodos para abordar el problema del posicionamiento en el espacio-tiempo de Schwarzschild (ver la sección 1.13)
- Los resultados de Langley sobre los errores asociados a la geometría del sistema satélites-usuario (ver la sección 1.12)
- Métodos gráficos utilizados en otros contextos como la pixelización HEALPIX y la proyección Mollweide.

A lo largo de esta Tesis se irá viendo el uso que se hace de estos elementos, y los resultados nuevos que de esta forma se obtienen.

Sólo vamos a utilizar dos modelos de SPR, que podemos describir brevemente del siguiente modo:

- en el *modelo 1*, las líneas de universo de los satélites son geodésicas temporales en el espacio-tiempo de Schwarzschild (ET-S), y los fotones siguen geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Minkowski (ET-M), asintótico ( $r \rightarrow \infty$ ) a la geometría de Schwarzschild
- en el *modelo 2*, tanto los satélites como los fotones se mueven en el ET-S que describe el campo gravitatorio, externo, de una Tierra ideal estática y esféricamente simétrica.

En este trabajo no necesitamos modelos más complicados que tengan en cuenta la rotación de la Tierra, su pequeño cuadrupolo, y otros elementos perturbativos de carácter gravitatorio. El estudio de estos modelos quedará como un problema abierto (ver [Čadež 2005]; [Bini 2008]; [Teyssandier 2008]; [Čadež 2010]; [Bunandar 2011]; [Delva 2011a]). Sencillamente, el modelo 1 es aplicado para estudiar la bifurcación y los U-errores, como un método que parece suficientemente preciso y, entonces, el modelo 2 es usado para valorar la validez del modelo 1 mediante la estimación de los llamados S-errores.



Todo lo realizado ha sido conseguido con códigos numéricos diseñados para desarrollar esta Tesis. Según verificamos en su día, algunos cálculos requieren alta precisión, por lo que los códigos utilizan múltiple precisión; así, podemos decidir cuántas cifras significativas necesitamos en cada caso.

En ningún momento trataremos de describir perturbaciones no gravitatorias del SPR; es decir, aquellas debidas a la precisión limitada de los relojes, a la presión de la radiación y del viento solar, a la interacción de las señales electromagnéticas con la atmósfera, y otras perturbaciones. No se trata de efectos que requieran un tratamiento relativista y pensamos que son bien tratados en los GNSS clásicos. Nuestro punto de vista es que las propiedades de algunos de estos efectos deben ser utilizadas para modelizar adecuadamente las desviaciones de los satélites con respecto a sus líneas de universo nominales, y calcular bien los U-errores; mientras que los efectos que actúan directamente sobre las señales electromagnéticas emitidas por los satélites, o son gravitatorios y, entonces, deben ser tratados como S-errores con una métrica adecuada, o son efectos –de interacción con la atmósfera– que pueden ser corregidos como en los GNSS estándar, y que no existen cuando el usuario es un satélite que se mueve fuera de la atmósfera (navegación espacial).

Los GNSS han sido diseñados para que desde cualquier punto de la Tierra –o sus alrededores– siempre se puedan detectar las señales emitidas por cuatro o más satélites de la constelación. La situación mejora, más lejos de la Tierra, ya que esta, se verá con menor tamaño angular, y ocultará menos satélites. Como este problema de cobertura ha sido ampliamente estudiado, siempre que tenga sentido, no tendremos en cuenta las ocultaciones de los cuatro satélites elegidos producidas por la Tierra. Esto se puede hacer si estamos estudiando la distribución de usuarios con bifurcación, para ver la estructura de la región y la co-región (capítulo 2), y también para presentar la distribución espacial de U-errores y sus propiedades. A posteriori, se pueden excluir las zonas de invisibilidad (desde las que no se ve alguno de los cuatro satélites seleccionados) de los mapas presentados en estos capítulos. La representación de estas zonas es considerada, en el capítulo 4, para algunas de las distribuciones de satélites y usuarios estudiadas en los capítulos anteriores. En el caso de los S-errores, si nos olvidamos de las ocultaciones, las geodésicas nulas de los satélites ocultos pasarían por dentro de la Tierra, donde la métrica de Schwarzschild no es válida y, además, algunas de ellas pasarían cerca del centro de la Tierra donde el término  $GM_{\oplus}/r$  sería muy grande, por lo que estaríamos calculando falsos S-errores muy grandes. No ocurre algo parecido en el caso de los U-errores, de ahí la forma en la que hemos procedido, olvidando las ocultaciones para considerarlas a posteriori.

## 1.16. Algunos criterios de notación seguidos en toda la Tesis

Llamaremos  $G$ ,  $M_{\oplus}$ ,  $R_{\oplus}$ ,  $t$  y  $\tau$  a la constante de gravitación, la masa de la Tierra, el radio de la Tierra, el tiempo coordenado y el tiempo propio, respectivamente. Denotaremos  $\eta_{\alpha\beta}$  a las componentes covariantes del tensor métrico de Minkowski. Nuestra signatura es  $(+, +, +, -)$ .

En los códigos y en las fórmulas se usan las unidades siguientes:

- Elegimos las unidades de modo que el módulo de la velocidad de la luz sea  $c = 1$ .
- La unidad de distancia es el kilómetro, y por tanto, la unidad de tiempo es  $\frac{1}{3 \times 10^5} \text{ s}$

El punto central E, que hemos elegido sobre la superficie de la Tierra, tiene las siguientes coordenadas esféricas:  $r = r_{\oplus}$ ,  $\theta = 60^\circ$  y  $\varphi = 30^\circ$ .

A lo largo de la tesis, denominaremos *E-esfera*, a la esfera centrada en el punto E y cuyo radio es  $10^5 \text{ km}$ . En el interior de ella situaremos usuarios. Para un usuario dado, los resultados del posicionamiento no dependen del punto E fijado, por tanto, las coordenadas de E podrían ser elegidas de cualquier otra forma.

# Sistemas de Posicionamiento Relativista: Región de Emisión, Co-región y Bifurcación

---

## Índice

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2.1. Introducción</b> . . . . .  | <b>29</b> |
| <b>2.2. Estructura de la región de emisión</b> . . . . .  | <b>30</b> |
| 2.2.1. Método diseñado para estudiar la región de emisión . . . . .   | 30        |
| 2.2.2. Estructura de la región de emisión: resultados numé-<br>ricos . . . . .                                  | 33        |
| <b>2.3. Estructura de la co-región</b> . . . . .  | <b>44</b> |
| <b>2.4. Posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO) usando<br/>    la constelación GALILEO (GPS)</b> . . . . . | <b>53</b> |
| <b>2.5. Resumen y discusión</b> . . . . .   | <b>65</b> |

---

## 2.1. Introducción

Hemos realizado un estudio numérico detallado de la estructura de la región de emisión y de la co-región. Se ha hecho para varios grupos de cuatro satélites pertenecientes a las constelaciones de GPS o GALILEO. Los resultados son presentados en esta sección. Estas regiones fueron definidas en [Coll 2010a] (ver sección 1.5). Haremos énfasis en la distribución de usuarios con posicionamiento simple y doble (bifurcación). Para alcanzar estos objetivos podemos suponer que las señales electromagnéticas se propagan –desde los satélites hasta los usuarios– en el espacio-tiempo de Minkowski; es decir, podemos utilizar el modelo 1 de la sección 1.15.

Los códigos numéricos TX y XT que hemos diseñado, basados en las transformaciones entre las coordenadas inerciales y las de emisión en el espacio-tiempo de Minkowski, ya han sido descritos en las secciones 1.8 y 1.10.

Tanto la región de emisión como la co-región asociada son espacios de cuatro dimensiones (4D) y, por tanto, la descripción gráfica de estas regiones requiere el estudio de un conjunto de secciones 3D adecuadas. En el caso de la región de emisión (co-región), la ecuación de las secciones 3D es  $x^4 = constante$  ( $\tau^4 = constante$ ).

En el estudio realizado en este capítulo, no se tiene en cuenta que la Tierra oculta satélites a los usuarios; es decir, se trabaja como si la Tierra fuera transparente. Por

tanto, las regiones de emisión y co-regiones que describiremos -para cuatro satélites dados- involucran usuarios que están en lo que llamaremos zonas de invisibilidad, desde las cuales, no se pueden ver los cuatro satélites a la vez; de donde se deduce que los usuarios que están en estas zonas no tienen suficiente información para hallar su posición. Para alcanzar los objetivos de esta sección es preferible no considerar las ocultaciones de satélites, ya que *a posteriori* siempre se pueden determinar las zonas de invisibilidad para excluirlas. Estas zonas son independientes del problema que estemos considerando y serán estudiadas en el capítulo 4 para algunas 4-tuplas de satélites.

## 2.2. Estructura de la región de emisión

En el espacio-tiempo de Minkowski, cualquier punto, cuyas coordenadas de emisión (ver sección 1.10) satisfagan la relación  $\tau^A \geq \tau_{in}^A$  para los cuatro satélites, pertenece a la región de emisión, siendo  $\tau_{in}^A$  el tiempo propio en el que el satélite A comenzó a emitir. Señales procedentes de los cuatro satélites alcanzarán cualquier posición espacial  $(x^1, x^2, x^3)$  en cualquier instante posterior a aquel en el que la alcanzaron por primera vez, lo que es equivalente a decir que, a partir de cierto instante inicial, que depende del observador, éste podrá ver los cuatro satélites (no se tienen en cuenta posibles ocultaciones). Cuanto mayor es la distancia entre el punto  $(x^1, x^2, x^3)$  donde está el usuario y la zona donde se encuentran los satélites, más tiempo tardan las señales en llegar, y menores son los tiempos propios de emisión recibidos en un cierto tiempo coordenado  $x^4$ .

Como expusimos en el capítulo anterior, en la región de emisión hay dos tipos de eventos de recepción (usuarios a localizar). El primer tipo se caracteriza por la condición  $\chi^2 \leq 0$  y, en este caso, sólo existe una solución de posicionamiento; sin embargo, para el segundo tipo, se satisface la desigualdad  $\chi^2 > 0$  y, en tal caso, hay un par de usuarios distintos asociados a las mismas coordenadas de emisión, o lo que es lo mismo, hay posicionamiento doble (bifurcación). En este último caso, hace falta algún criterio adicional para elegir la verdadera posición (ver sección 1.8). Uno de los propósitos de esta sección es hallar la distribución de usuarios con simple y doble posicionamiento dentro de la E-esfera.

### 2.2.1. Método diseñado para estudiar la región de emisión

Debemos estudiar la distribución de los valores de  $\chi^2$  en el interior de la E-esfera, que es parte de la región de emisión; para ello utilizamos el siguiente procedimiento (ver figura 2.1):

- (i) Seleccionamos una posición E, de coordenadas cartesianas  $(x_e^1, x_e^2, x_e^3)$  sobre la superficie terrestre. Esta posición es totalmente arbitraria y es la misma en todos los cálculos de esta Tesis. Sus coordenadas esféricas fueron fijadas en la sección 1.15. El punto E junto con un tiempo coordenado  $t_R$ , que caracteriza una sección 3D de la región de emisión, definen un *evento central*.
- (ii) Consideramos varias secciones 3D ( $t_R = \text{constante}$ ). En cada una de ellas, todos los usuarios tienen el mismo tiempo coordenado cuando reciben, simul-

táneamente, las señales de los cuatro satélites elegidos para el posicionamiento. El tiempo  $t_R$  es arbitrario, pero debe ser unos pocos segundos mayor que el tiempo inicial en el que el sistema GNSS comienza a operar. De esta forma, la señal emitida por los satélites tiene tiempo para llegar hasta los usuarios.

- (iii) 3072 direcciones HEALPIX (ver sección 1.14) definen segmentos, que partiendo de E, recubren la sección 3D. En estos segmentos, la distancia,  $L$ , al punto E varía desde  $L = 0$  hasta  $L = L_{max} = 10^5 \text{ km}$  y, por lo tanto, todos ellos están dentro de la E-esfera (una parte de la región de emisión).
- (iv) A lo largo de cada dirección (segmento) situamos  $N_d$  puntos uniformemente distribuidos con  $0 < L < L_{max}$ , de modo que la distancia entre dos puntos consecutivos sea de  $100 \text{ km}$ . Las coordenadas espaciales de uno de estos puntos, junto al tiempo fijo  $t_R$  que caracteriza la sección 3D, definen un posible evento de recepción (usuario).
- (v) Hemos considerado varios conjuntos diferentes de cuatro satélites, aunque en este capítulo, sólo presentamos los resultados correspondientes a la 4-tupla formada por los satélites 2, 5, 20 y 23 de la constelación de GALILEO; donde satélites consecutivos han sido numerados de 1 a 9, de 10 a 18 y de 19 a 27 en el primer, segundo y tercer plano orbital, respectivamente.
- (vi) tanto para GPS como para GALILEO, hemos estudiado un conjunto de tiempos coordenados  $t_R$  que cubren un periodo orbital completo de los satélites correspondientes.
- (vii) Para cada 4-tupla de satélites y cada sección 3D, calculamos el valor de  $\chi^2$  para todos los usuarios que hemos distribuido en el interior de la E-esfera. Para hacer esto, las coordenadas de emisión de cada usuario son calculadas, a partir de las coordenadas inerciales ( $x^\alpha$ ) (ver la sección 1.10), usando el código-XT basado en el algoritmo de Newton-Raphson. Las coordenadas de emisión resultantes en cada caso, que son tiempos propios de emisión, nos permiten calcular las posiciones de los satélites cuando emitieron las señales detectadas por el usuario. Para ello se usan las ecuaciones de las líneas de universo de los satélites. Finalmente, estas posiciones nos permiten calcular la cantidad  $\chi^2$ , que es una de las salidas del código TX (ver sección 1.10).
- (viii) Una vez calculadas las cantidades  $\chi^2$  a lo largo de todas las direcciones HEALPIX (segmentos), buscamos los ceros de  $\chi^2$  en cada una de ellas, ya que estos ceros separan subsegmentos de posicionamiento simple ( $\chi^2 \leq 0$ ) de los vecinos de posicionamiento doble ( $\chi^2 > 0$ ). De los resultados obtenidos en todas las direcciones se deduce fácilmente la forma y la situación de las zonas de posicionamiento simple y doble en las secciones 3D dentro de la E-esfera.

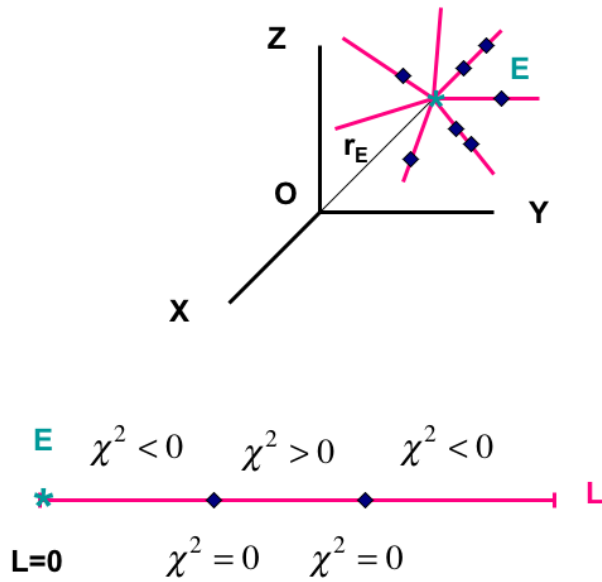


Figura 2.1: Croquis de una sección 3D ( $t_R = constante$ ) de la región de emisión. El punto E es un centro arbitrario. Su distancia al origen O es el radio de la Tierra ( $r_E = R_{\oplus}$ ). L es la distancia desde E hasta otro punto de la sección. 3072 segmentos que parten de E y que tienen diferentes direcciones cubren parte de la sección 3D. Todos los segmentos llegan hasta  $L = L_{max} = 10^5 km$ ; es decir, están dentro de la E-esfera. Nos interesa conocer los ceros de  $\chi^2$  en cada dirección porque separan zonas con  $\chi^2 \leq 0$  (posicionamiento simple) de zonas contiguas donde  $\chi^2 > 0$  (bifurcación). En el punto E se satisface la relación  $\chi^2 < 0$ .

### 2.2.2. Estructura de la región de emisión: resultados numéricos

De nuestro análisis de muchos segmentos HEALPIX, realizado para diferentes 4-tuplas y secciones 3D, se deduce que para la inmensa mayoría de las direcciones, hallamos una de las dos situaciones siguientes:

- la cantidad  $\chi^2$  es negativa desde el punto E ( $L = 0$ ) hasta un punto  $L = L_\chi^{(1)}$  en el que se anula, y desde  $L = L_\chi^{(1)}$  hasta  $L_{max}$ ,  $\chi^2$  es positiva; es decir, sólo existe un cero de  $\chi^2$ .
- La relación  $\chi^2 < 0$  es satisfecha desde  $L=0$  hasta  $L_{max}$ , lo que significa que  $\chi^2$  no se anula dentro de la E-esfera en la dirección considerada, aunque todavía podría anularse fuera.

Finalmente, para escasas direcciones,  $\chi^2$  se anula varias veces dentro del mismo segmento  $0 \leq L \leq L_{max}$ . Entonces,  $\chi^2$  será negativo desde E hasta la primera anulación para  $L = L_\chi^{(1)}$  (posicionamiento simple), positivo desde la primera hasta la segunda anulación, que ocurre para  $L = L_\chi^{(2)}$  (bifurcación), negativo entre la segunda y la tercera anulación (posicionamiento simple), y así sucesivamente (ver el croquis de la figura 2.1).

La distancia  $L_\chi^{(1)}$  desde E hasta el punto en el que  $\chi^2$  se anula por primera vez depende de la dirección elegida; por tanto, esta cantidad puede representarse utilizando la pixelización HEALPIX (ver la sección 1.14) y una barra de colores apropiada, de modo que cada píxel tenga un color que nos indique el valor de  $L_\chi^{(1)}$  en la dirección que apunta hacia su centro. Finalmente, la proyección Mollweide puede utilizarse para ver toda la esfera en una única figura. De la misma forma se puede representar la distancia  $L_\chi^{(2)}$  desde E hasta el punto en el que se produce la segunda anulación de  $\chi^2$ , o la diferencia  $L_\chi^{(2)} - L_\chi^{(1)}$ , y en general, se puede representar la distancia  $L_\chi^{(i)}$  correspondiente a la  $i$ -ésima anulación de  $\chi^2$ , o la diferencia  $L_\chi^{(i)} - L_\chi^{(i-1)}$ .

La representación de la distancia  $L_\chi^{(1)}$  nos describe una superficie de ecuación  $L = L_\chi^{(1)}$  sobre la que  $\chi^2$  se anula. Evidentemente, esta superficie no depende de nuestra elección del punto E, ya que la anulación de  $\chi^2$  ocurre con independencia del punto E, que sólo es elegido como centro de una distribución de puntos dentro de la región de emisión. La citada superficie separa una zona interna de posicionamiento simple ( $\chi^2 < 0$ ), que contiene el punto E, de una zona externa contigua con bifurcación ( $\chi^2 > 0$ ), que está situada al otro lado de la superficie, que desde ahora será llamada *primera superficie de separación*  $S_1$ .

Si en unas pocas direcciones hay dos ceros, se puede definir y representar la *segunda superficie de separación*  $S_2$ , que separará una zona interna de bifurcación, situada en el mismo lado que E (externa a  $S_1$ ), de otra contigua externa de posicionamiento simple. Con tres ceros se puede definir la *tercera superficie de separación*  $S_3$ , y así sucesivamente. Es obvio, que  $\chi^2$  se anula sobre cualquier superficie de separación, y que dichas superficies separan zonas de bifurcación de zonas de posicionamiento simple. Estos dos tipos de posicionamiento se van alternando a partir de la zona más interna, que contiene el punto E y es de posicionamiento simple.

Si estamos representando  $S_1$ , pintamos de color granate todos aquellos píxeles correspondientes a direcciones sobre las que  $\chi^2$  no se anula, y en el resto de los píxeles utilizamos la escala de colores para representar el valor de  $L_\chi^{(1)}$ . Análogamente, al representar  $S_2$ , coloreamos de gris todos aquellos píxeles asociados a direcciones sobre las que la cantidad  $\chi^2$  no se anula dos veces, mientras que usamos la escala de colores para representar  $L_\chi^{(2)} - L_\chi^{(1)}$  en el resto de los píxeles, y así sucesivamente, de modo que en la representación de  $S_i$  (a excepción de  $S_1$ ), serán grises todos los píxeles en cuyos segmentos asociados, la cantidad  $\chi^2$  se anule como máximo  $i - 1$  veces, y serán coloreados el resto de los píxeles en los que se muestra el valor de  $L_\chi^{(i)} - L_\chi^{(i-1)}$ .

En [Coll 2010a] y [Coll 2012], se dio nombre a las diferentes partes de la región de emisión, según el valor de  $\chi^2$  (ver también la sección 1.6);  $C_s$  ( $C_t$ ) es la zona donde  $\chi^2 < 0$  ( $\chi^2 > 0$ ), y  $C_l$  es el lugar geométrico de los puntos donde  $\chi^2$  se anula. De acuerdo con esto, podemos afirmar lo siguiente:

- la intersección de  $C_l$  con la sección  $x^4 = t_R$  es la unión de todas las superficies de separación que aparezcan en la sección.
- la intersección de  $C_s$  con la hipersuperficie  $x^4 = t_R$ , es la unión de la zona central que contiene a E y está limitada por  $S_1$ , y las regiones que quedan entre  $S_2$  y  $S_3$ ,  $S_4$  y  $S_5$ , etcétera.
- la intersección de  $C_t$  con la hipersuperficie  $x^4 = t_R$ , es la unión de las zonas que quedan entre  $S_1$  y  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ , y así sucesivamente.

La figura 2.2 muestra las superficies de separación  $S_1$  correspondientes a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20 y 23 de la constelación de GALILEO, y a siete valores de  $t_R$  (secciones 3D) que cubren un periodo orbital completo de los satélites de GALILEO. Vistos desde el punto E en el instante  $t_R$  indicado sobre cada panel, las direcciones de los satélites –cuando emitieron sus señales– apuntan hacia los cuatro píxeles pintados de gris claro que pueden verse, aislados, en cada mapa. La región granate corresponde a aquellas direcciones en las que  $\chi^2$  no se anula para  $L < 10^5$  km, mientras que el color de los píxeles restantes, en los que  $\chi^2$  se anula una primera vez para un cierto  $L_\chi^{(1)} < L_{max}$ , depende de la barra de colores que aparece en cada panel, donde los números de la barra son los valores extremos de  $L_\chi^{(1)}$  dados en kilómetros. De esta figura se deduce fácilmente lo siguiente:

- todos los satélites están incluidos en una región azul de influencia
- en el interior de las zonas azules de influencia, los satélites pueden estar situados tanto en la parte central como cerca de las regiones granates;

de hecho, la distribución y las posiciones de las regiones azules -situadas alrededor de los satélites- dependen de las posiciones relativas de los satélites entre sí (en los tiempos de emisión), y también de las posiciones relativas de los satélites con respecto al usuario (receptor). En otras palabras, dependen de toda la geometría del sistema usuario-satélites.

Para las direcciones de la región granate de la figura 2.2, hemos calculado las distancias  $L_\chi^{(i)}$  para  $L_{max} = 4 \times 10^5$  km; así hemos verificado que, para un número pequeño de píxeles granate, pero localizados cerca de la región no granate, hay una



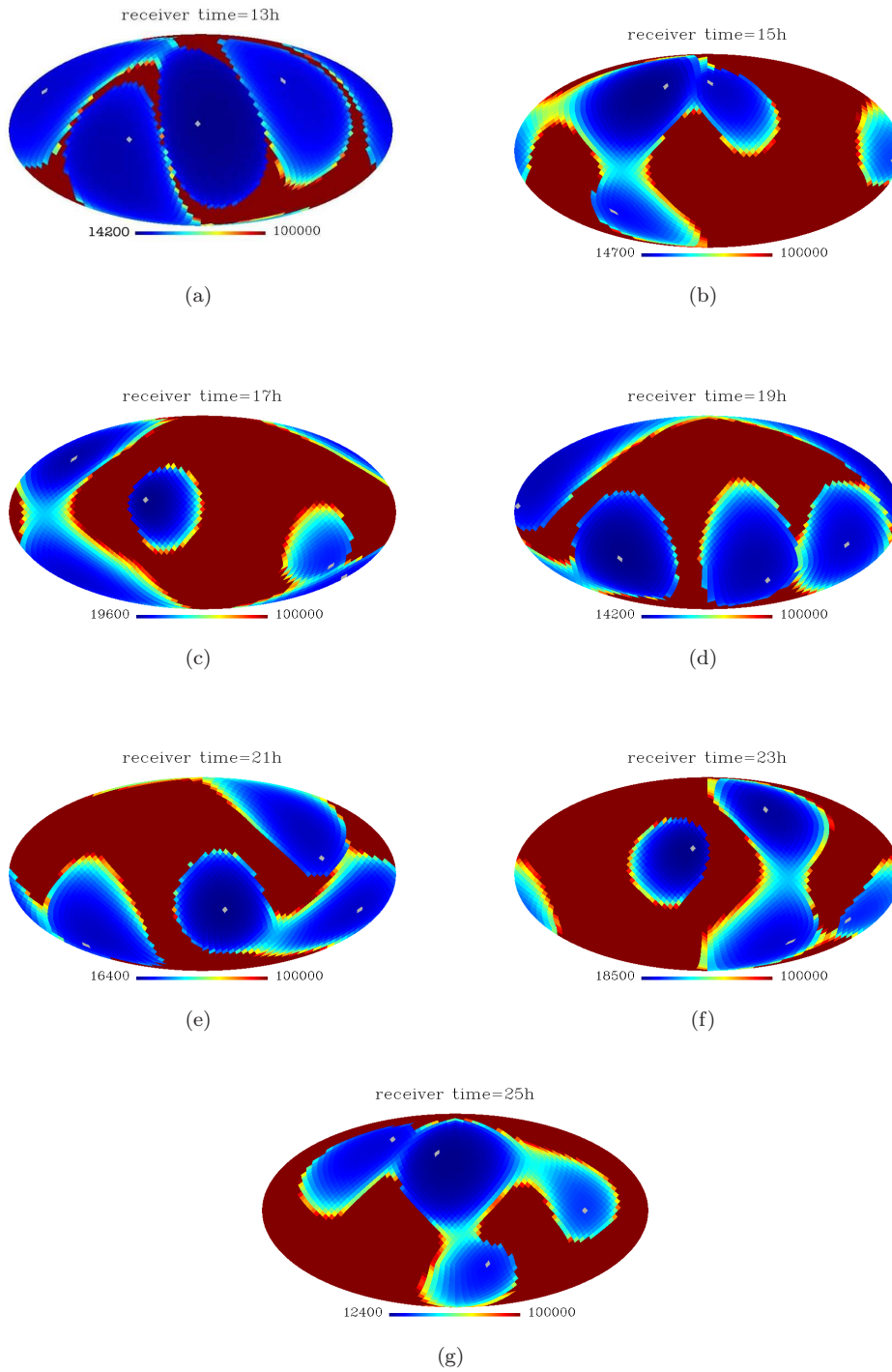


Figura 2.2: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide de la distancia  $L_{\chi}^{(1)}$  dada en kilómetros. La 4-tupla de satélites es siempre la 2, 5, 20 y 23 de la constelación de GALILEO. Cada panel corresponde a una sección  $x^4 = t_R$  distinta. Los valores de  $t_R$  se especifican sobre los paneles.

primera anulación de  $\chi^2$  para un valor de  $L_\chi^{(1)}$  que está comprendido entre  $10^5 km$  y  $4 \times 10^5 km$ . Por lo tanto, estos píxeles no estarían en la región granate si dibujáramos una figura como la 2.2 para  $L_{max} = 4 \times 10^5 km$ . Cabe comentar que el nuevo valor  $L_{max} = 4 \times 10^5 km$  es próximo a la distancia entre la Tierra y la Luna.

Podemos llamar  $L_M$  a la distancia desde el punto E hasta un usuario que está en la luna, y que recibe coordenadas de emisión en un cierto instante  $t_R$ ; entonces, si en la dirección del píxel que contiene la luna, no hubiera ninguna anulación de  $\chi^2$  para una distancia a E  $L < L_M$ , el posicionamiento en la superficie lunar sería simple; si para el citado píxel hubiera un único cero de  $\chi^2$ , el posicionamiento sería doble; para dos ceros sería simple; para tres doble y así sucesivamente. Sin embargo, conviene dejar claro que aunque el posicionamiento para distancias muy grandes entre el usuario y los satélites es posible en teoría, en la práctica hay problemas técnicos tales como señales demasiado débiles o errores de posicionamiento grandes debido a incertidumbres en las trayectorias de los satélites. Este tipo de errores será estudiado en el capítulo 3.

La figura 2.3 (2.4) muestra la distancia -para cada dirección HEALPIX- que separa el primer (segundo) cero de  $\chi^2$  del segundo (tercero). La 4-tupla de satélites y los siete tiempos  $t_R$  (secciones) son los mismos que en la figura 2.2. Los píxeles grises de las figuras 2.3 y 2.4 contienen las direcciones en las que no hay segunda y tercera anulación  $\chi^2$ , respectivamente. Los números de la barra son los valores extremos que toma la distancia representada dada en kilómetros. Análogamente, la figura 2.5 muestra la distancia entre el tercer y el cuarto cero de  $\chi^2$  dada en kilómetros. Pero, de las siete secciones estudiadas en las figuras 2.3–2.4, sólo en una ( $t_R = 13 h$ ) han sido halladas dos direcciones (píxeles), en las que hay un cuarto cero de  $\chi^2$ ; por eso, en la figura 2.5, hay dos píxeles coloreados y los demás son grises (no hay un cuarto cero).

Las figuras 2.2–2.5 nos indican lo siguiente: (i) hay muchas direcciones en las que  $\chi^2$  se anula una vez, (ii) hay pocas direcciones con dos ceros de  $\chi^2$ , (iii) las direcciones con tres ceros son todavía más escasas, y (iv) de los siete mapas (secciones 3D) que hemos estudiado, con 3072 direcciones cada una, sólo para  $t_R = 13 h$ , hemos hallado algunas direcciones con cuatro ceros de  $\chi^2$  (ver 2.5); por tanto, es muy poco probable encontrar cuatro anulaciones de  $\chi^2$ . De todo esto se deduce que la probabilidad de encontrar  $N_c$  ceros decrece con  $N_c$ .

Todo lo anterior nos da una idea precisa de la estructura de la región de emisión. En cada sección 3D hay zonas alternas de posicionamiento simple y doble, separadas por superficies en las que  $\chi^2$  se anula. La zona central –que contiene el punto E– es de posicionamiento simple, y conforme nos alejamos de E, las citadas zonas alternas involucran menos y menos direcciones.

De la figura 2.2 se deduce que, para la 4-tupla de satélites elegida, y para las siete secciones consideradas, el posicionamiento es simple, para cualquier usuario cuya distancia  $L$  al punto E satisfaga la relación  $L \simeq 12400 km$ , siendo  $12400 km$ , el valor más pequeño de  $L_\chi^{(1)}$  que aparece a la izquierda de la barras de colores de los mapas de la figura. Cálculos realizados para satélites GPS y para otras 4-tuplas de satélites de GALILEO -diferentes de la considerada en la figura 2.2– nos permiten afirmar (criterio cualitativo) que, en las regiones centrales, los usuarios que distan de E menos de unos  $10000 km$  tienen posicionamiento simple. La bifurcación empieza

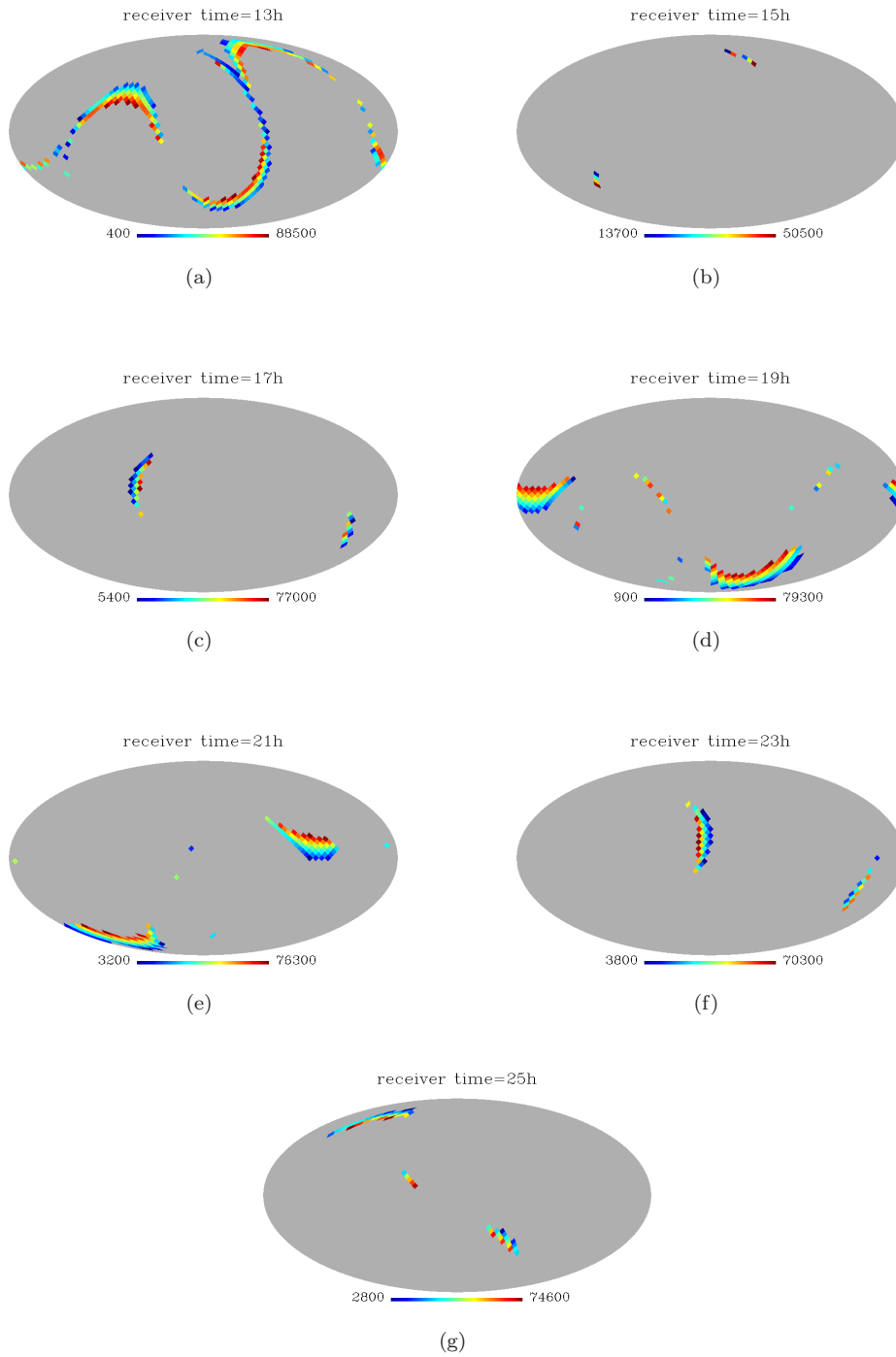


Figura 2.3: Representación análoga a la de la figura 2.2. Las únicas diferencias son: que aquí se representa la distancia entre la primera y segunda anulación de  $\chi^2$ ; es decir  $L_{\chi}^{(2)} - L_{\chi}^{(1)}$ , y que son grises todos los píxeles correspondientes a direcciones sobre las que  $\chi^2$  se anula menos de dos veces.

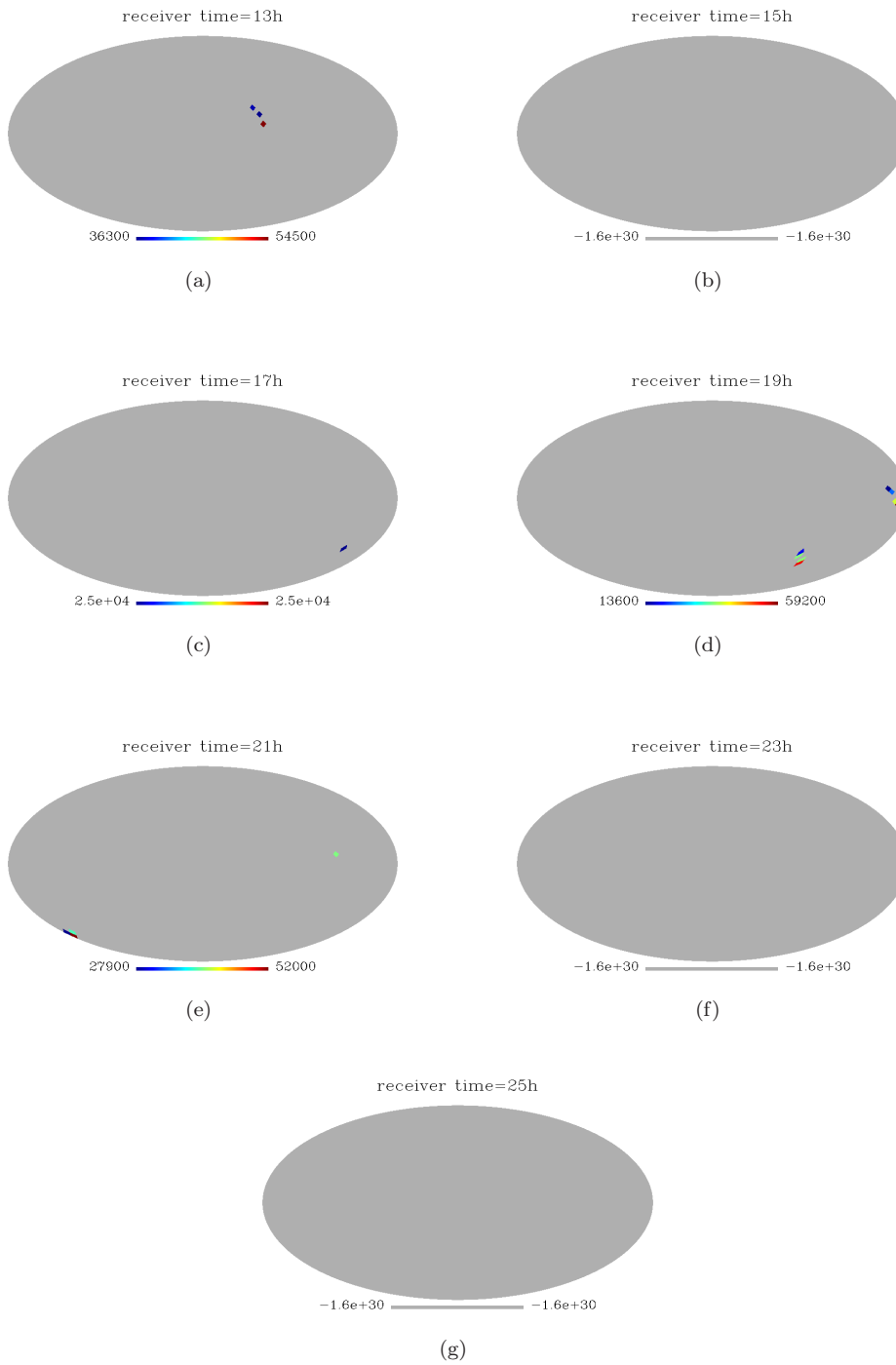


Figura 2.4: Figura análoga a la 2.3, pero aquí representamos la distancia entre la segunda y tercera anulación de  $\chi^2$ ; es decir,  $L_{\chi}^{(3)} - L_{\chi}^{(2)}$ , siendo grises todos los píxeles correspondientes a direcciones sobre las que  $\chi^2$  se anula menos de tres veces.

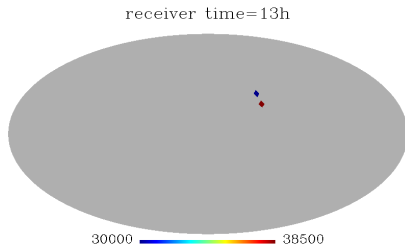


Figura 2.5: Figura análoga a la 2.3, pero representando la distancia  $L_\chi^{(4)} - L_\chi^{(3)}$  para la sección  $x^4 = t_R = 13 h$ . Los píxeles grises corresponden a segmentos con menos de cuatro ceros.

a producirse para distancias mayores que  $\sim 10000 km$ . Por supuesto, para cualquier usuario de la E-esfera, ya hemos descrito un método numérico para determinar si su posicionamiento es simple o doble (signo de  $\chi^2$ ) y, por tanto, en el caso de nuestro usuario no esté suficientemente cerca del punto E, el tipo de posicionamiento puede ser determinado numéricamente. De acuerdo con todo esto, si posicionamos un satélite de GALILEO (GPS), visto como usuario, usando cuatro satélites de GPS (GALILEO), que serán los emisores, debemos esperar tanto intervalos de posicionamiento simple como doble sobre la trayectoria del usuario. Ello es debido a que tanto si el satélite usuario es del sistema GPS como si es de GALILEO, no se encuentra en la zona central de posicionamiento único para una 4-tupla fija de satélites emisores. Esto será comprobado numéricamente en la sección 2.4. Por otra parte, si para cada punto de la trayectoria del satélite, que juega el papel de usuario, elegimos una 4-tupla adecuada de satélites emisores, es posible que el posicionamiento se mantenga siempre simple; resolviendo así el problema de la bifurcación sin medir ángulos ni tiempos; simplemente, eligiendo 4-tuplas de emisores en cada momento.

Antes de que se publicara nuestro artículo [Puchades 2012], se había estudiado un caso muy elemental, que permite analizar de forma analítica la estructura de la región de emisión. Se trata del caso de tres emisores estáticos que ocupan los vértices de un triángulo equilátero. Con estos emisores, podemos posicionar usuarios en un espacio 3D de tipo Minkowskiano, con dos dimensiones espaciales y una temporal. En este caso, podemos hacer una representación de la región de emisión que es de tipo 2D, y que además es la misma para toda sección  $t = constante$  (sistema estático de posicionamiento). El resultado puede verse en la figura 2.6, donde la zona verde es la región  $C_s$  (espacial), la azul es la región  $C_t$  (temporal) y las líneas rojas representan la región  $C_l$  (nula). Finalmente, la región central  $C^C$  es la unión de las zonas verde y roja. Estas regiones fueron definidas en la sección 1.6. Las simetrías que muestra la figura son debidas, evidentemente, a la simetría de la distribución de emisores considerada. Una estructura parecida a la de la figura 2.6, pero menos simétrica, podría ser hallada, en secciones 2D apropiadas, de las secciones 3D representadas en las figuras 2.2-2.5. Vamos a estudiar la estructura de ciertas secciones 2D, que son la intersección de las secciones 3D con el plano  $\theta = \pi/2$  de la pixelización HEALPIX. Estas secciones 2D están dentro de la E-esfera, y contienen todos los usuarios situados sobre las direcciones (segmentos) HEALPIX del plano ecuato-

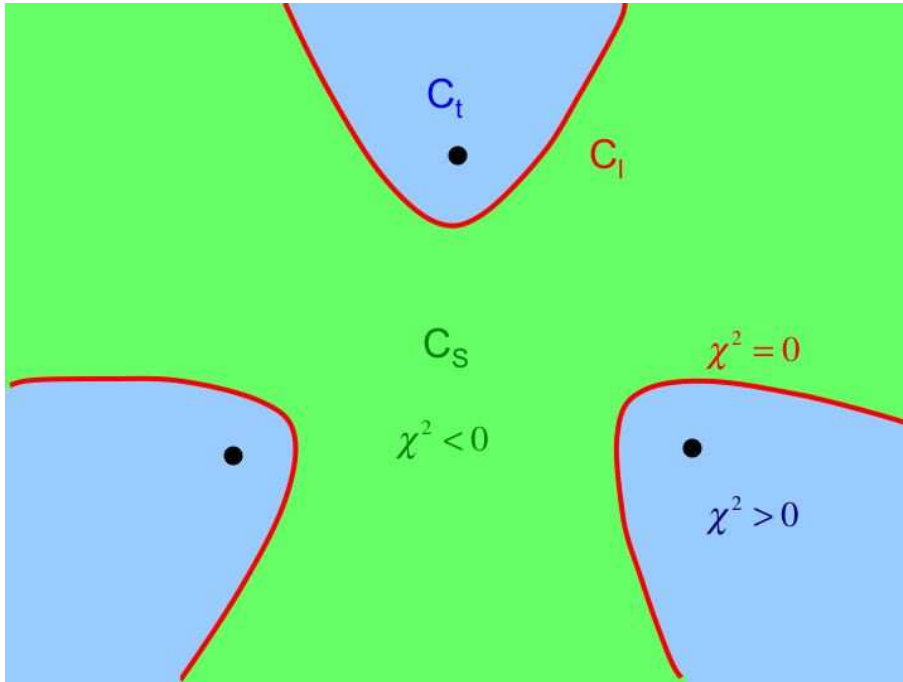


Figura 2.6: Estructura de la región de emisión para tres emisores estáticos (círculos negros) situados en los vértices de un triángulo equilátero.

rial, cuyos píxeles asociados se representan (color azul) en la figura 2.7. Como ya disponemos de los valores de  $\chi^2$  en los planos  $\theta = \pi/2$  de siete regiones 3D, podemos hacer figuras en estos planos, cuyos puntos  $(x, y)$ , tienen las coordenadas cartesianas  $x = L \cos \phi$  e  $y = L \sin \phi$ , siendo  $\theta = \pi/2$  y  $\phi$  las coordenadas esféricas angulares asociadas a cada dirección HEALPIX del plano ecuatorial, y  $L$  la distancia al punto E. Podemos representar los puntos en los que  $\chi^2$  se anula por primera vez a lo largo de cada dirección del plano ecuatorial; es decir, podemos representar los puntos del plano ecuatorial cuyas distancias al punto E son valores de  $L_\chi^{(1)}$ . No se representan ceros de  $\chi^2$  más alejados de E, aunque correspondan a usuarios situados en el plano  $\theta = \pi/2$ ; dicho de otra forma, no se representan los puntos  $L_\chi^{(i)}$ , anteriormente definidos, para  $i > 1$ . Esto es debido a que hay pocos de estos puntos en las secciones 3D que hemos estudiado y ninguno o poquísimos en los planos ecuatoriales (ver las figuras 2.3-2.5 teniendo en cuenta la 2.7). Se observa además, que la distribución de los puntos correspondientes a  $i = 2$ , que están en el plano ecuatorial es muy irregular en las siete secciones 3D de la figura 2.3, por tanto no parece práctico considerar los ceros de  $\chi^2$  -en los planos ecuatoriales- para  $i > 1$ , ya que no esperamos hallar características generales de la distribución de estos puntos en secciones 2D.

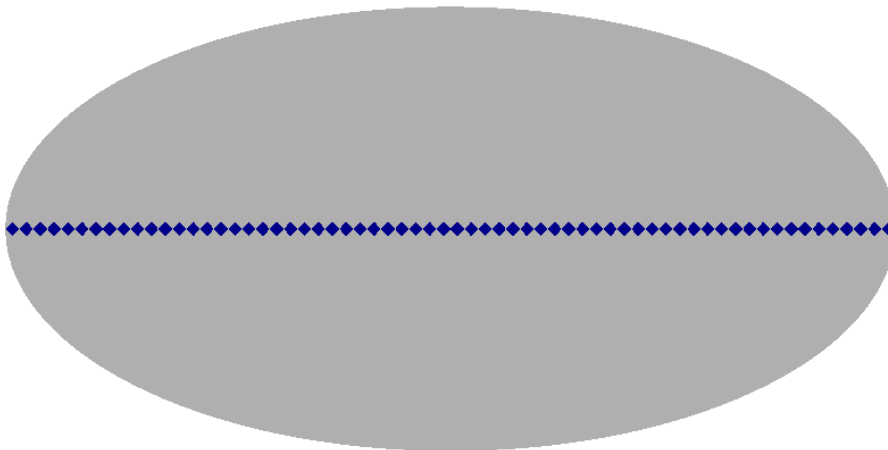


Figura 2.7: Direcciones HEALPIX pertenecientes al plano ecuatorial.

En la figura 2.8 (2.9) representamos los planos ecuatoriales de las cuatro secciones 3D correspondientes a  $t_R = 13h, 15h, 17h$  y  $19h$  ( $t_R = 21h, 23h$  y  $25h$ ). Como vemos en estas figuras, la resolución HEALPIX  $N_{side} = 16$  (3072 píxeles) es suficiente para nuestros fines, ya que las líneas de rombos (puntos con  $\chi^2 = 0$  e  $i = 1$ ) aparecen bien definidas; no obstante, para resoluciones superiores, los rombos que cubren las cuatro líneas discontinuas estarían más próximos entre sí, y las curvas que los contienen quedarían mejor definidas.

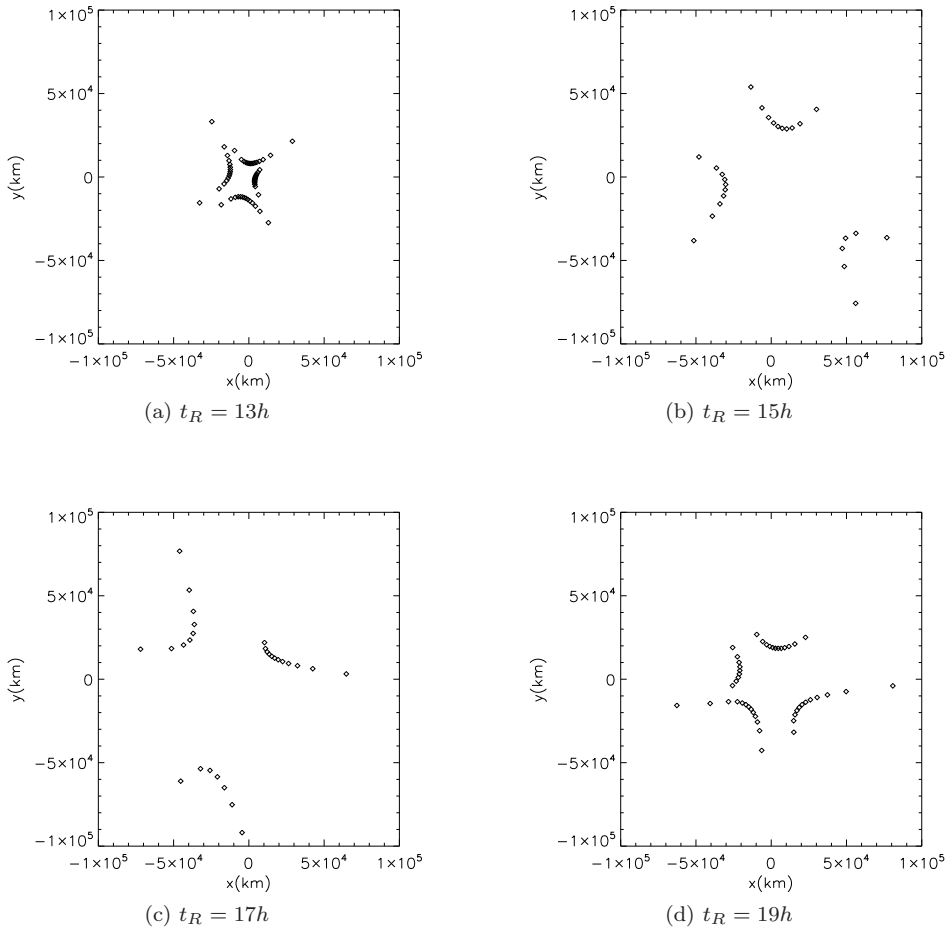


Figura 2.8: Secciones ecuatoriales 2D de algunas secciones  $x^4 = t_R$  de la región de emisión. El tiempo  $t_R$  se especifica debajo de cada mapa. Las coordenadas  $(x, y)$  de los puntos -con  $\chi^2 = 0$ - representados en los mapas vienen dadas en km. La 4-tupla de satélites y los tiempos  $t_R$  han sido ya considerados en las figuras 2.2-2.5



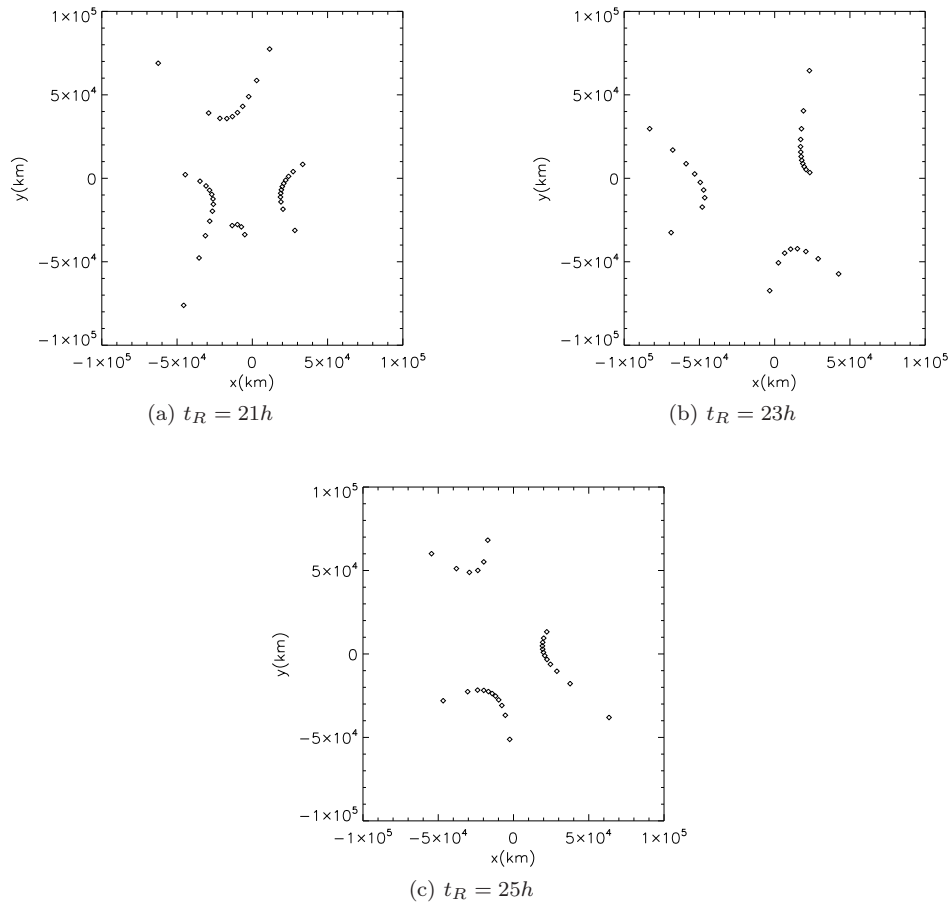


Figura 2.9: Representación idéntica a la de la figura 2.8, para tres nuevos valores de  $t_R$  también considerados en las figuras 2.2-2.5.

Se observa una clara analogía entre la estructura de la región 2D de la figura 2.6 (ver [Coll 2012]), y las estructuras de las siete regiones 2D representadas en las figuras 2.8 y 2.9; sin embargo, también hay diferencias. La analogía se basa en que, en ambos casos, observamos:

- unas líneas de rombos que juegan el papel de las líneas rojas de la figura 2.6. Ambas líneas corresponden a ceros de  $\chi^2$
- una zona con  $\chi^2 < 0$  de posicionamiento simple, análoga a la región  $C_s$ , que tiene color verde en la figura 2.6
- una zona con  $\chi^2 > 0$  con bifurcación, similar a la región  $C_t$ , cuyo color en la figura 2.6 es azul.

Mientras que las principales diferencias son las siguientes:

- en muchos paneles de las figuras 2.8 y 2.9 existen cuatro líneas debido a que el posicionamiento es efectuado con cuatro satélites-emisores; mientras que en la figura 2.6 no hay más que tres.
- las líneas y regiones de las secciones ecuatoriales que hemos incluido en las figuras 2.8 y 2.9, no están distribuidas de una forma tan simétrica como en la figura 2.6, lo que era de esperar dada la asimetría de las configuraciones usuarios-satélites.
- La estructura de la región de emisión de la figura 2.6 es la misma para cualquier  $t_R$  (emisores estáticos), mientras que, en las figuras 2.8 y 2.9 se observa una fuerte dependencia de la estructura de la sección 2D con el valor de  $t_R$  (distribución dinámica de satélites de la constelación de GALILEO).

### 2.3. Estructura de la co-región

En esta sección, elegimos la misma 4-tupla de satélites (2, 5, 20 y 23 de GALILEO) y los mismos (siete) tiempos de recepción  $t_R$  que en la sección anterior. Conviene recordar que estos siete tiempos cubren uniformemente un periodo orbital completo de los satélites de GALILEO.

El procedimiento que utilizamos para estudiar la co-región, basado en la definición y estudio de ciertas secciones 3D, es el siguiente:

- tomamos uno de los siete usuarios centrales  $(x_e^1, x_e^2, x_e^3, t_R)$  considerados en el estudio de la región de emisión (ver la sección 2.2) y, con el método de Newton-Raphson, calculamos sus coordenadas de emisión  $(\tau_e^1, \tau_e^2, \tau_e^3, \tau_e^4)$ ; por construcción, este punto de la co-región tiene  $\chi^2 < 0$  y, por tanto, posicionamiento simple.
- en cada uno de los siete casos, que viene fijado por el valor de  $t_R$ , ya que las coordenadas  $(x_e^1, x_e^2, x_e^3)$  son siempre idénticas, estudiamos la sección 3D de ecuación  $\tau^4 = \tau_e^4 \equiv \tau_R$  que pasa por el punto  $(\tau_e^1, \tau_e^2, \tau_e^3, \tau_R)$ . Un punto cualquiera de esta sección tiene coordenadas  $(\tau^1, \tau^2, \tau^3, \tau_R)$ .

- El punto  $(\tau_e^1, \tau_e^2, \tau_e^3)$  de cada sección 3D es utilizado, como centro, para definir direcciones y establecer una pixelización HEALPIX en la sección. En el caso de la co-región, tomamos  $N_{side} = 32$  y, por tanto (ver sección 1.14), el número de píxeles (direcciones) es 12288.
- con cada dirección HEALPIX podemos definir una semi-recta que parte del punto central  $(\tau_e^1, \tau_e^2, \tau_e^3)$ ; sobre ella, utilizaremos el parámetro  $\lambda = [(\tau^1 - \tau_e^1)^2 + (\tau^2 - \tau_e^2)^2 + (\tau^3 - \tau_e^3)^2]^{1/2}$ , que es la distancia desde  $(\tau^1, \tau^2, \tau^3)$  hasta el centro de la pixelización. Este parámetro tiene dimensiones de tiempo y, en las gráficas, será dado en segundos.
- finalmente, a lo largo de cada semi-recta, distribuimos uniformemente un número adecuado de puntos  $N_d$ , y calculamos  $\chi^2$  en cada uno de ellos; de esta forma sabemos el tipo de posicionamiento (simple o doble) en estos puntos, y podemos averiguar cómo están distribuidos en cada semi-recta y, consecuentemente, en la sección 3D.

Dado que calculamos  $\chi^2$ , a partir de las coordenadas de emisión de cada uno de los puntos que hemos distribuido en cada sección 3D, el método de Newton-Raphson sólo se usa una vez, en cada una de estas secciones, para obtener  $(\tau_e^1, \tau_e^2, \tau_e^3, \tau_e^4)$  a partir de las coordenadas inerciales del usuario central  $(x_e^1, x_e^2, x_e^3, t_R)$ . Esto hace, que el estudio de la co-región sea bastante más rápido que el de la región de emisión, ya que en el segundo caso, el método de Newton-Raphson ha de ser utilizado en cada uno de los muchos puntos que cubre la E-esfera, y esto hace que el tiempo de cálculo se dispare; por eso, en el estudio de la co-región hemos podido utilizar más direcciones (mayor resolución angular).

Primero, tomando muchos puntos sobre cada dirección HEALPIX (semi-recta), hemos comprobado, numéricamente, si se cumplen las condiciones de emisión-recepción dadas por las ecuaciones (1.3) y (1.4). Así, hemos verificado que estas condiciones se cumplen desde  $\lambda = 0$  hasta un cierto valor  $\lambda_{max}$  que depende de la dirección. Por tanto, todos los puntos de la rejilla que son de la co-región (ver la sección 1.5) están sobre los segmentos limitados por los puntos  $\lambda = 0$  y  $\lambda = \lambda_{max}$ ; es decir, tienen  $\lambda < \lambda_{max}$ . Una vez determinada la cantidad  $\lambda_{max}$  para cada dirección HEALPIX, hemos elegido un nuevo número de puntos,  $N_d$ , uniformemente distribuidos dentro de los segmentos  $(0, \lambda_{max})$ , y hemos calculado  $\chi^2$  en cada uno de estos puntos. Hemos comprobado que  $N_d = 1000$  es una buena elección para cualquier dirección. Los valores de  $\chi^2$  que hemos obtenido nos indican que, para cada dirección HEALPIX, la cantidad  $\chi^2$  es negativa desde  $\lambda = 0$  hasta un cierto  $\lambda_-$  -que depende de la dirección- donde se anula, y es positiva desde  $\lambda_-$  hasta  $\lambda_{max}$ . Sin embargo, en el intervalo  $(\lambda_-, \lambda_{max})$ , donde  $\chi^2 > 0$ , pueden darse dos casos:

- existen dos soluciones de posicionamiento de tipo pasado
- no existe ninguna solución de posicionamiento debido a que las dos soluciones existentes son de tipo futuro

Por todo lo dicho en el párrafo anterior, para visualizar la estructura de cada sección 3D de la co-región, presentamos dos paneles en los que se muestran cantidades dependientes de la dirección. En todos los paneles se usa la pixelización HEALPIX,

la proyección Mollweide y una barra de colores. Los dos tipos de paneles pueden ser descritos como sigue:

- en uno de ellos se representa la cantidad  $\lambda_-$  que caracteriza los puntos donde  $\chi^2$  se anula en cada dirección. Los siete mapas de este tipo (uno para cada valor de  $t_R$ ) son presentados en la figura 2.10. Cualquiera de estos mapas muestra una superficie cerrada donde se anula  $\chi^2$ . En el interior de esta superficie, que incluye el punto central,  $\chi^2$  es negativo y, por tanto, los usuarios de la región central de emisión ( $\mathcal{C}_\ell \cup \mathcal{C}_s$ ) tienen sus coordenadas de emisión en el interior de la superficie representada o sobre ella; es decir en la zona que vamos a llamar co-región univaluada.
- en el otro panel se usa la barra de color para representar la diferencia,  $\lambda_{max} - \lambda_-$ , para aquellos píxeles que tienen semi-rectas asociadas con dos posicionamientos (bifurcación) entre  $\lambda_-$  y  $\lambda_{max}$ . Sin embargo, se pintan de gris aquellos píxeles correspondientes a direcciones en las que, en el intervalo  $(\lambda_-, \lambda_{max})$ , sólo hay dos soluciones de futuro (no posicionamiento). Los siete mapas de este tipo se representan en la figura 2.11. Al representar  $\lambda_{max} - \lambda_-$ , estamos mostrando la anchura de una parte de la co-región, en la que los usuarios cuyas coordenadas de emisión están en esta parte, tienen posicionamiento doble. Esta zona, que rodea parcialmente a la co-región univaluada, será llamada co-región bivaluada.

De todo lo dicho se deduce que la co-región es una zona conexa que contiene una parte univaluada interna (posicionamiento simple) parcialmente rodeada por una segunda zona bivaluada (bifurcación).

Los paneles de las figuras 2.10 y 2.11, situados en la misma posición, corresponden a un mismo valor del tiempo  $t_R$ , que como es sabido caracteriza las secciones 3D. Paneles con los mismos valores de  $t_R$ , situados en las mismas posiciones, fueron ya mostrados en las figuras 2.2-2.4 correspondientes al estudio de la región de emisión.

La co-región fue estudiada previamente en el caso de tres emisores estáticos y cuando éstos forman una configuración estacionaria en rotación (ver [Pozo 2005]). El caso de un triángulo equilátero es el considerado en la sección anterior para el estudio de la región de emisión. En estos casos sencillos, la co-región es un espacio 3D cuyos puntos tienen coordenadas  $(\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ , y si hacemos  $\tau^3 = constante$ , obtenemos una sección 2D que se representa en la figura 2.12 (ver [Pozo 2005]), donde la zona verde, la circunferencia roja y la zona con rayas azules contienen coordenadas de emisión de usuarios con  $\chi^2 < 0$ ,  $\chi^2 = 0$  y  $\chi^2 > 0$ , respectivamente. Usando la nomenclatura propuesta en los párrafos anteriores, vemos la co-región univaluada que es la unión de la curva roja y la zona verde, y la bivaluada que es la zona exterior con rayas azules que rodea parcialmente a la región univaluada.

Como en el caso de la región de emisión, las simetrías que muestra la figura se deben a la que tiene la distribución de emisores considerada. En secciones 2D de las secciones 3D representadas en las figuras 2.10 y 2.11, cabe esperar una estructura parecida a la que se muestra en la figura 2.12, pero menos simétrica. Para comprobar si esto es verdad, vamos a estudiar las secciones 2D que contienen los puntos  $(\theta = \pi/2, \phi)$  del plano ecuatorial, para las siete secciones 3D de la co-región, que

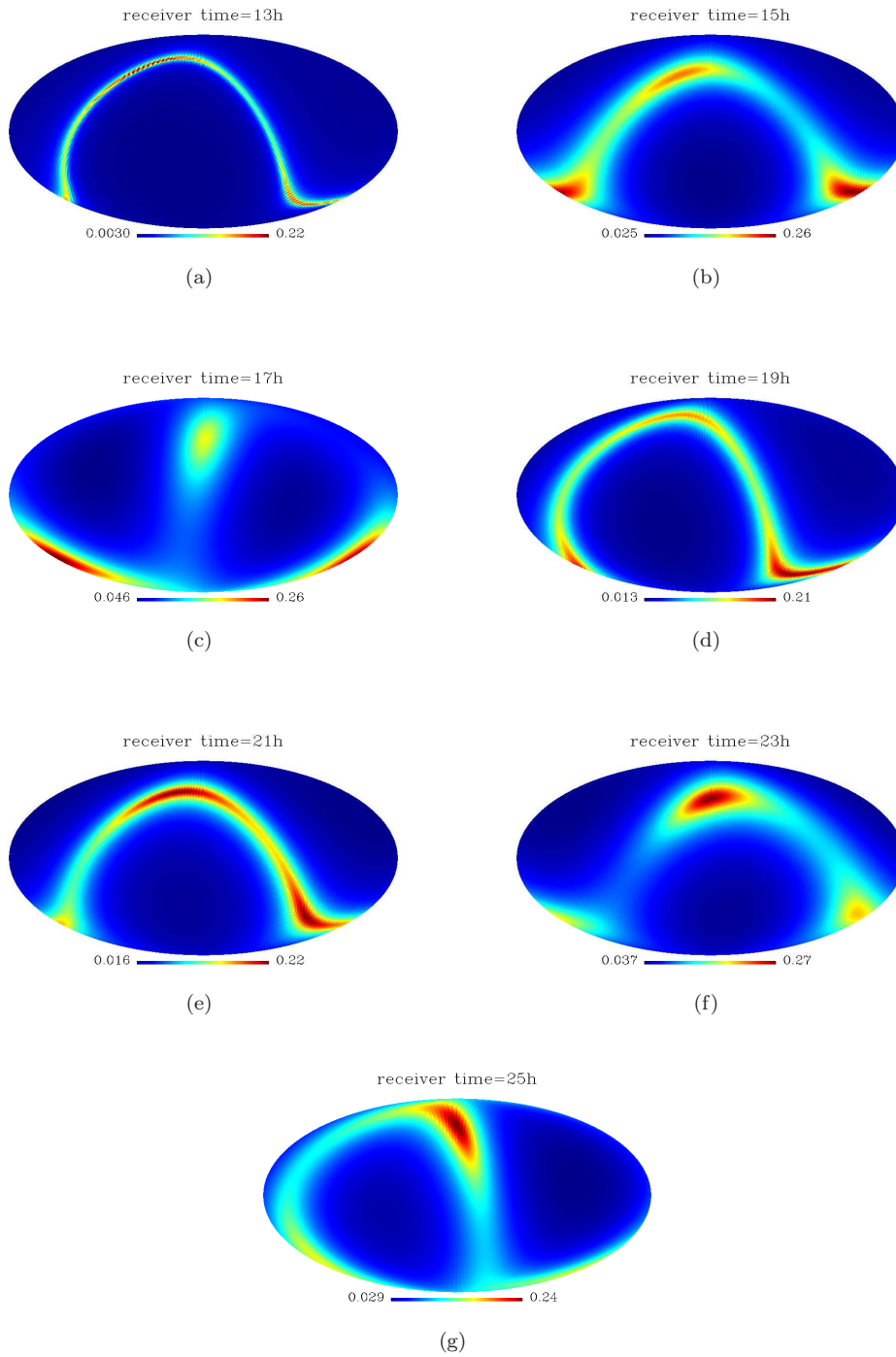


Figura 2.10: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide coloreadas, y muestran la distancia temporal  $\lambda_-$ -dependiente de la dirección– en segundos. Se considera una sección 3D de la co-región, que se construye a partir del tiempo coordinado  $t_R$  como se explica en el texto. Se usan los mismos tiempos  $t_R$  y la misma 4-tupla de satélites de GALILEO (2, 5, 20, 23) que en las figuras 2.2-2.9.

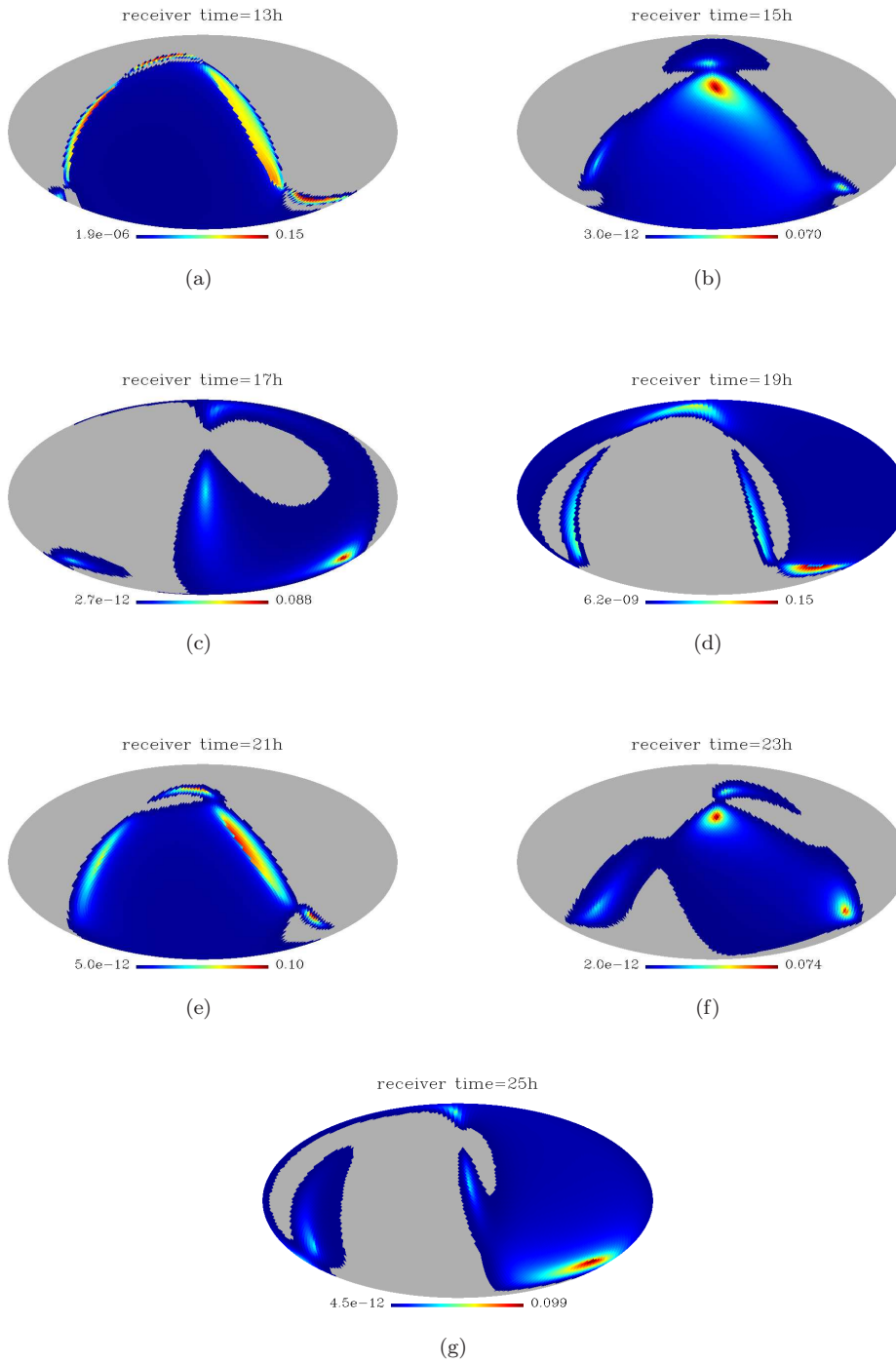


Figura 2.11: Esta figura es como la 2.10, pero hay dos diferencias entre ellas: (i) la cantidad dependiente de la dirección que se representa -con la escala de color- es  $\lambda_{max} - \lambda_-$  en segundos, y (ii) las zonas grises de los paneles corresponden a direcciones (píxeles) en las que no existen soluciones de posicionamiento para  $\lambda > \lambda_-$ .

hemos considerado anteriormente; donde  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas esféricas correspondientes a la pixelización de cada sección 3D. Los píxeles HEALPIX del plano ecuatorial se representan, en color azul, en la figura 2.7.

En los paneles de la izquierda de las figuras 2.13 y 2.14, representamos los puntos donde  $\chi^2$  se anula en los planos ecuatoriales (secciones 2D) de las secciones 3D correspondientes a  $t_R = 15h, 17h, 23h$  y  $25h$ ; el valor de  $t_R$  puede verse debajo de cada panel. Las coordenadas de los puntos del plano ecuatorial representados son  $x = \lambda_- \cos \phi$  e  $y = \lambda_- \sin \phi$ . En todos los casos, estos puntos, pertenecen a curvas cerradas que limitan superficies con posicionamiento simple ( $\chi^2 < 0$ ), la unión de estas superficies y sus fronteras es la intersección de la co-región univaluada de las secciones 3D (volumen limitado por una superficie cerrada donde  $\chi^2 = 0$ ) con el plano del ecuador. En los paneles de la derecha de las mismas figuras, además de la curva cerrada del correspondiente panel de la izquierda, se representan otras curvas, de tal modo que las regiones que quedan entre las curvas cerradas y las nuevas curvas son las zonas del plano ecuatorial donde hay bifurcación ( $\chi^2 > 0$ ); o sea, las intersecciones del plano ecuatorial con las co-regiones bivaluadas de las secciones 3D.

De las figuras 2.13 y 2.14 se deduce que la estructura de las secciones ecuatoriales 2D es similar a la que se muestra en la figura 2.12 (ver [Pozo 2005]); vemos que en ambos casos hay:

- unas líneas cerradas que contienen los ceros de  $\chi^2$
- una zona con  $\chi^2 < 0$ , de posicionamiento simple, cuya frontera es la línea cerrada anterior
- unas zonas de bifurcación situadas entre la citada curva cerrada y otras líneas exteriores a la zona de posicionamiento simple. Estas zonas rodean parcialmente a la de posicionamiento simple.

Las diferencias fundamentales entre la estructura de las secciones ecuatoriales y la de la figura 2.12 son las siguientes:

- las curvas y superficies de las figuras 2.13 y 2.14 (secciones ecuatoriales) no son tan simétricas con las correspondientes de la figura 2.12, lo que es lógico, teniendo en cuenta que estas secciones ecuatoriales corresponden a configuraciones muy distintas y asimétricas de satélites.
- por la misma razón el número de regiones de bifurcación, que rodean parcialmente a la curva cerrada de puntos con  $\chi^2 = 0$ , depende del caso y no es siempre tres como en la figura 2.12

Todo esto es lo que cabe esperar al cortar, con planos arbitrarios, cualquier sección 3D de la co-región, ya que según hemos mostrado en las figuras 2.10 y 2.11, estas secciones son zonas conexas que contienen una parte univaluada interna parcialmente rodeada por una segunda zona bivaluada. Por comodidad, en lugar de cortar una sección 3D por varios planos arbitrarios, hemos hecho algo equivalente, que es considerar los planos ecuatoriales de varias secciones 3D.

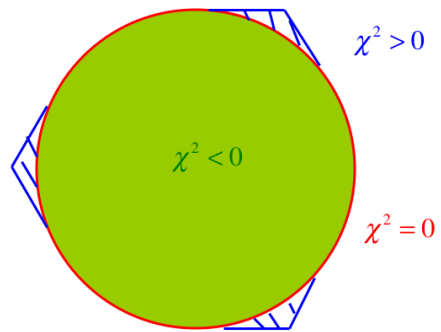


Figura 2.12: Estructura de la co-región para tres emisores estáticos situados en los vértices de un triángulo equilátero [Pozo 2005].



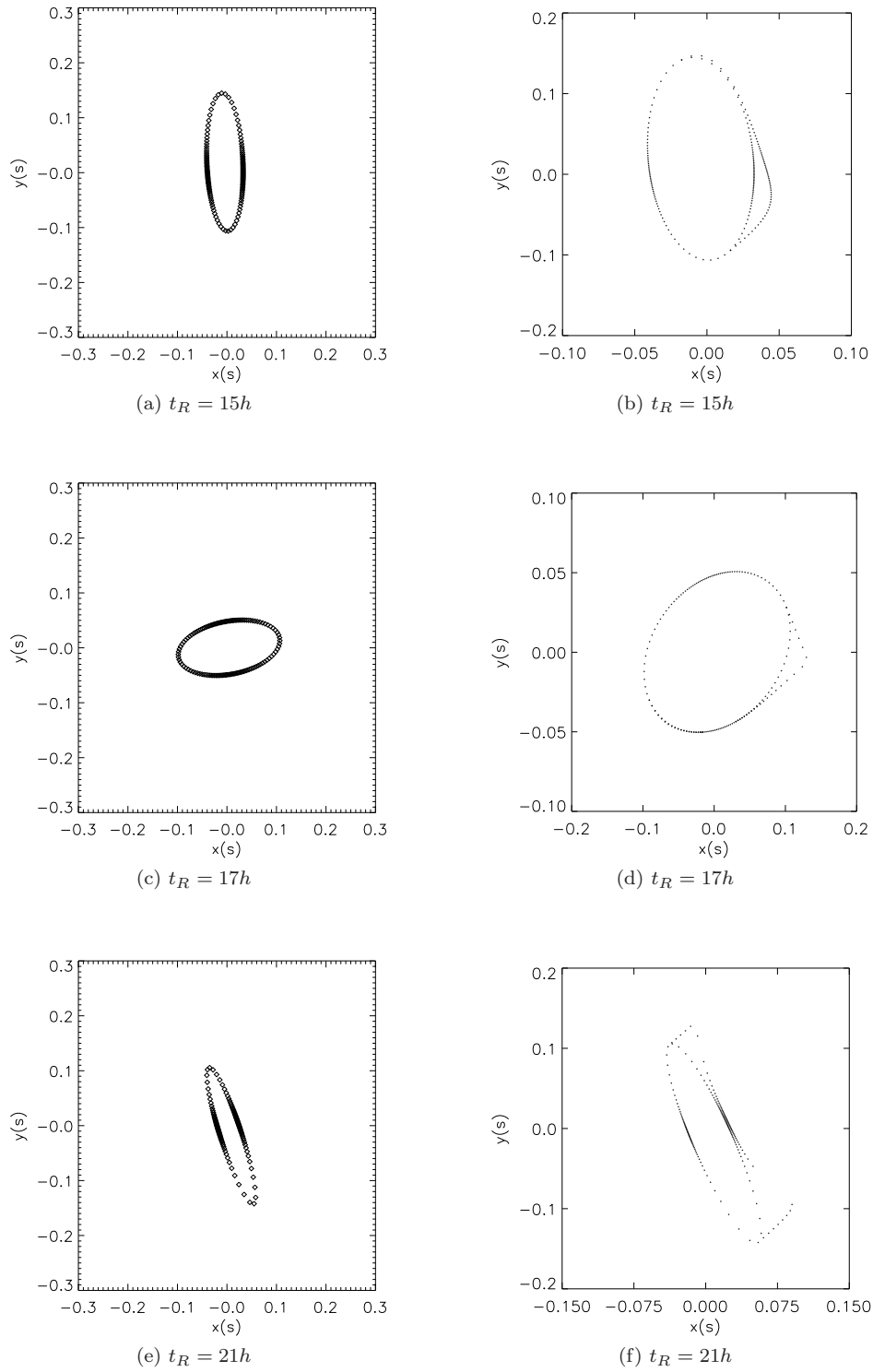


Figura 2.13: Secciones ecuatoriales 2D, de las secciones de la co-región correspondientes a los tres valores de  $t_R$  dados bajo los mapas. Las coordenadas  $(x, y)$  de los puntos representados vienen dadas en segundos. La 4-tupla de satélites y los tiempos  $t_R$  han sido ya considerados en figuras anteriores.

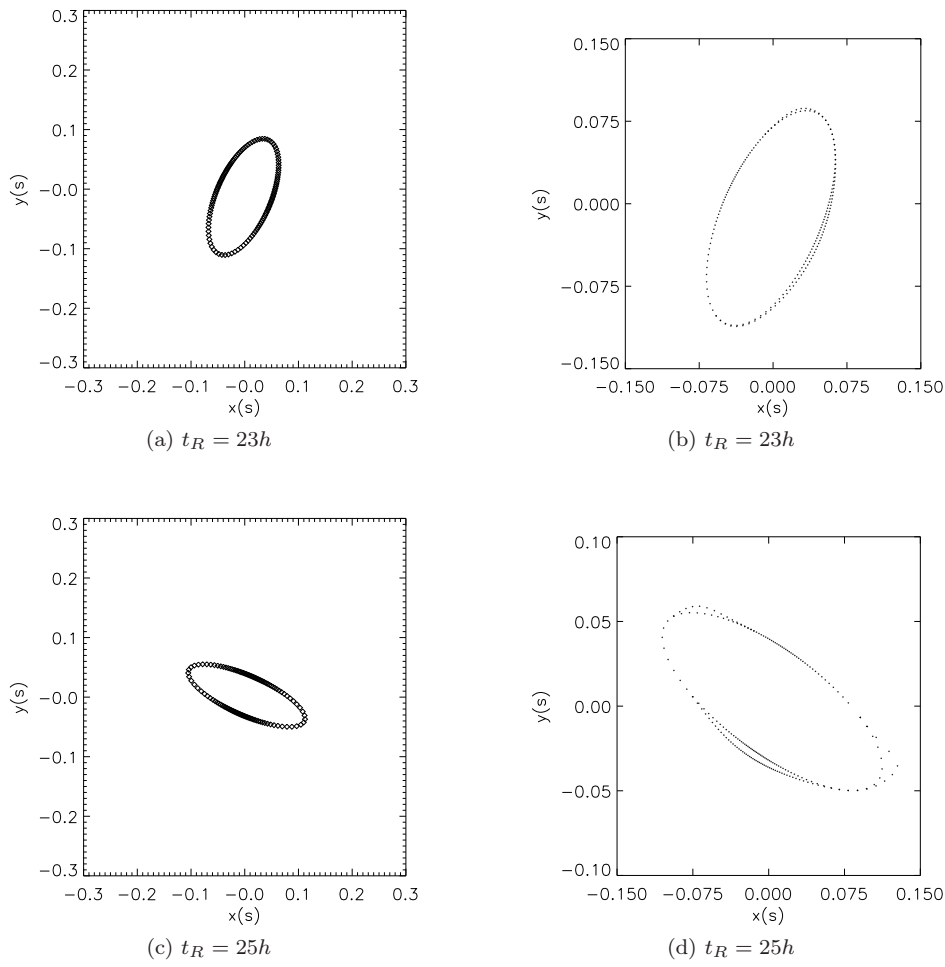


Figura 2.14: Esta figura es como la 2.13, pero los mapas corresponden a dos nuevos valores de  $t_R$  que también han sido considerados anteriormente.

## 2.4. Posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO) usando la constelación GALILEO (GPS)

En varias referencias ([Tarantola 2009, Coll 2006c, Coll 2006b, Coll 2010b]), se propone el intercambio de información entre los emisores, y con usuarios apropiados, para definir un sistema de coordenadas intrínseco, independiente de la Tierra y sus características (movimiento, distribución de masa, etcétera). Asimismo, intercambios apropiados de información podrían permitir la medición del campo gravitatorio en el que evolucionan los emisores; además, podemos plantearnos la posibilidad de navegar con un satélite, recibiendo información de un conjunto de emisores de un cierto GNSS, o de un conjunto adecuado de emisores distribuidos adecuadamente por el sistema solar.

El caso más sencillo de navegación espacial es el de satélites próximos a la Tierra, como la Estación Espacial Internacional, ya que se mueven en una zona en la que no hay bifurcación, y en la que los errores de posicionamiento pueden ser admisibles (ver el capítulo 3). Sin embargo, como ya hemos expuesto en la sección 1.9, si tomamos uno de los satélites GPS (GALILEO) como usuario, y tratamos de hallar su posición a partir de la coordenadas de emisión enviadas por cuatro satélites de la constelación de GALILEO (GPS); la situación es muy distinta, ya que según hemos discutido en la sección 2.2.2, esperamos regiones de doble posicionamiento sobre la trayectoria del satélite que hace de usuario y, además, como veremos en el capítulo 3, los errores de posicionamiento se disparan en ciertas zonas de la citada trayectoria. En esta sección vamos a estudiar la bifurcación sobre las trayectorias de usuarios GPS (GALILEO) para emisores GALILEO (GPS), mientras que los correspondientes errores de posicionamiento serán analizados en el capítulo 3.

En primer lugar, vamos a considerar varios casos de posicionamiento de un satélite de GALILEO (usuario), a partir de las coordenadas de emisión de cuatro satélites GPS (emisores). En cada caso, la línea de universo del usuario es conocida (ecuaciones (1.6)-(1.8) de la sección 1.7), y la trayectoria es una circunferencia que se recorre en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Teniendo en cuenta esto, los siguientes pasos nos permiten obtener el carácter del posicionamiento (simple o doble), sobre toda la trayectoria del satélite usuario, durante un periodo completo:

- Dadas las coordenadas inerciales de un punto de la línea de universo del satélite usuario, se usa el método de Newton-Raphson (ver sección 1.10) para obtener las coordenadas de emisión del punto elegido
- A partir de las coordenadas de emisión resultantes, la cantidad  $\chi^2$  es obtenida, para así determinar el carácter del posicionamiento, que es simple para  $\chi^2 \leq 0$  y doble para  $\chi^2 > 0$
- Si el posicionamiento es doble, usamos la ecuación (1.9) (ver sección 1.8) para obtener ambas posiciones; una de ellas está siempre sobre la órbita circular descrita por el satélite usuario, mientras que la otra posición está fuera de esta trayectoria.

Los resultados son presentados en las figuras 2.15-2.19.

Después, los mismos pasos son dados para varios casos, en los que hallamos la posición de un satélite GPS (usuario), a partir de las coordenadas de emisión de cuatro satélites GALILEO (emisores). Los resultados son mostrados en las figuras 2.20-2.23.

Para dibujar cualquiera de las figuras 2.15-2.23, hemos diseñado un procedimiento especial, que nos permite visualizar tanto los puntos que va ocupando el satélite usuario en su órbita circular, como el punto asociado en caso de bifurcación. Este procedimiento -basado en un uso apropiado de ciertos colores- es el siguiente:

- elegimos  $N_c = 7200$  puntos equidistantes sobre la circunferencia descrita por el satélite usuario a lo largo de un periodo orbital; el primer punto corresponde a la posición inicial, y luego, el número de orden de los puntos seleccionados va creciendo conforme pasa el tiempo, alcanzándose el punto número 7200 en el instante final. Tanto el movimiento de los satélites GALILEO como el de los satélites GPS es dextrógiro
- el color rojo lo reservamos para colorear los puntos con posicionamiento simple; por tanto, las zonas de color rojo están siempre situados sobre la órbita circular descrita por el satélite usuario (no hay bifurcación)
- cuando el posicionamiento es doble, tanto el punto que está sobre la órbita del usuario, como su pareja se pintan del mismo color. Dividimos la órbita en cuatro partes iguales de  $N_c/4$  puntos cada una, y coloreamos las parejas de puntos con el color negro, fucsia, azul marino y azul celeste, según que estén en el primer, segundo, tercer, o cuarto grupo de puntos. Estos grupos se orientan en el sentido de los tiempos crecientes (dextrógiro). Conviene enfatizar que si en alguna de las cuatro zonas hubiera trozos de posicionamiento simple, estos tendrían siempre color rojo
- el punto inicial elegido para recorrer la trayectoria del usuario -en sentido dextrógiro- se elige arbitrariamente. Es el primer punto del primero de los cuatro tramos en los que se ha dividido la trayectoria
- de acuerdo con los criterios de coloración anteriores, la posición inicial será una estrella roja sobre la trayectoria circular del usuario si el posicionamiento inicial es simple, tal y como aparece en las figuras 2.15, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20 y 2.23, y dos estrellas negras para posicionamiento inicial doble, como en las figuras 2.16, 2.21 y 2.22.
- el punto final que está sobre la trayectoria coincide con el inicial, pero si en ese punto hay bifurcación, el punto final asociado ha de estar coloreado de azul celeste, y será representado por una estrella de este color, ello ocurre en los casos de las figuras 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.21 y 2.22

Como consecuencia del método descrito para dibujar las figuras 2.15-2.23, se cumple lo siguiente:

- los cambios de color que van de negro, fucsia, azul marino o azul celeste a rojo, ocurren en puntos de la trayectoria de usuario en los que el posicionamiento

pasa de doble a simple y, lógicamente, cuando nos acercamos a estos puntos una de las dos soluciones tiende a infinito y, al otro lado, sólo queda una solución de posicionamiento. Lo contrario ocurre cuando al acercarnos a un punto, pasamos del color rojo a uno de los cuatro colores que indican doble posicionamiento

- los cambios de negro a fucsia, de fucsia a azul marino, de azul marino a azul celeste y de azul celeste a negro no suponen un cambio del tipo de posicionamiento, que es doble antes y después del punto donde cambia el color; este cambio de color sólo indica que pasamos de uno de los cuatro trozos en los que hemos dividido la trayectoria al siguiente
- el carácter del posicionamiento (simple o doble) en el instante inicial puede ser el mismo que en la posición final, pero también puede ser distinto. Ello se debe a que los periodos de los satélites de las constelaciones de GPS y GALILEO son distintos y, por tanto, aunque el punto inicial coincida con el final sobre la órbita del satélite usuario (circunferencia), las posiciones de los cuatro satélites emisores al principio y al final son diferentes y, consecuentemente, el carácter del posicionamiento -dependiente de la configuración completa usuario-emisores- puede cambiar.

Todo lo anterior es válido, tanto si el usuario es un satélite GPS, como si pertenece a la constelación de GALILEO, y debe ser tenido en cuenta a la hora de interpretar las figuras 2.15-2.23.

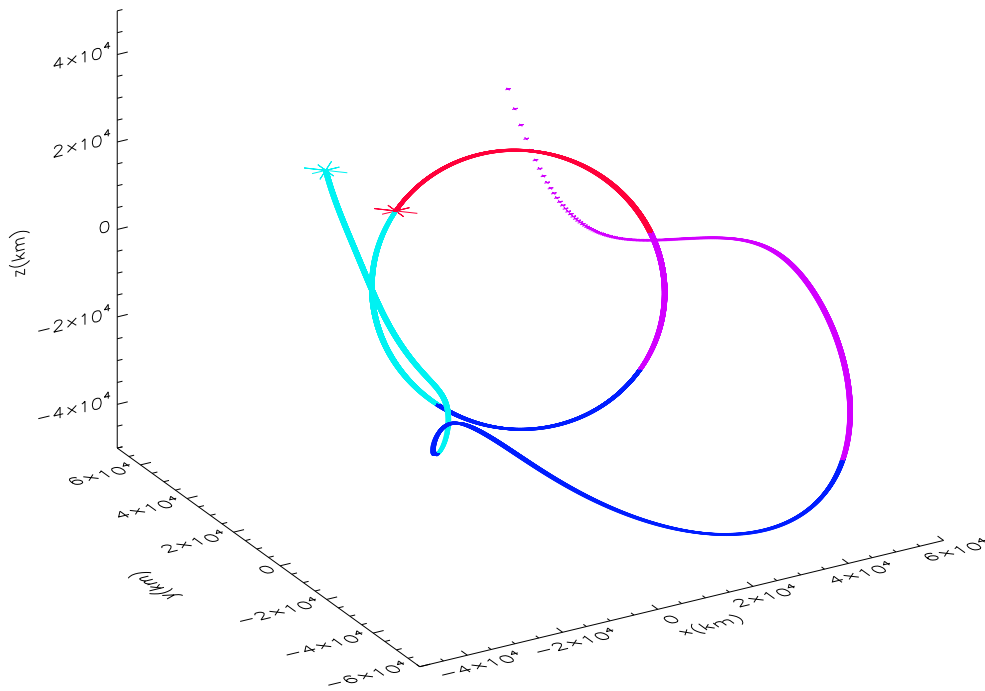


Figura 2.15: Posicionamiento de un satélite GALILEO mediante cuatro satélites emisores GPS. La estrella roja es el punto inicial (posicionamiento simple). A partir de este punto se observa un primer arco rojo de posicionamiento simple. Después (sentido dextrógiro), vemos tres arcos consecutivos donde el posicionamiento es doble. Estos arcos han sido coloreados de fucsia, azul marino y azul celeste, y lo mismo ha sido hecho con las curvas asociadas situadas fuera de la circunferencia. El último arco, de color azul celeste, alcanza el punto inicial sobre la circunferencia, pero lo hace en régimen de posicionamiento doble, de ahí que aparezca la estrella azul celeste. En la transición desde la zona fucsia a la roja (sentido levógiro), la curva asociada tiende a infinito.

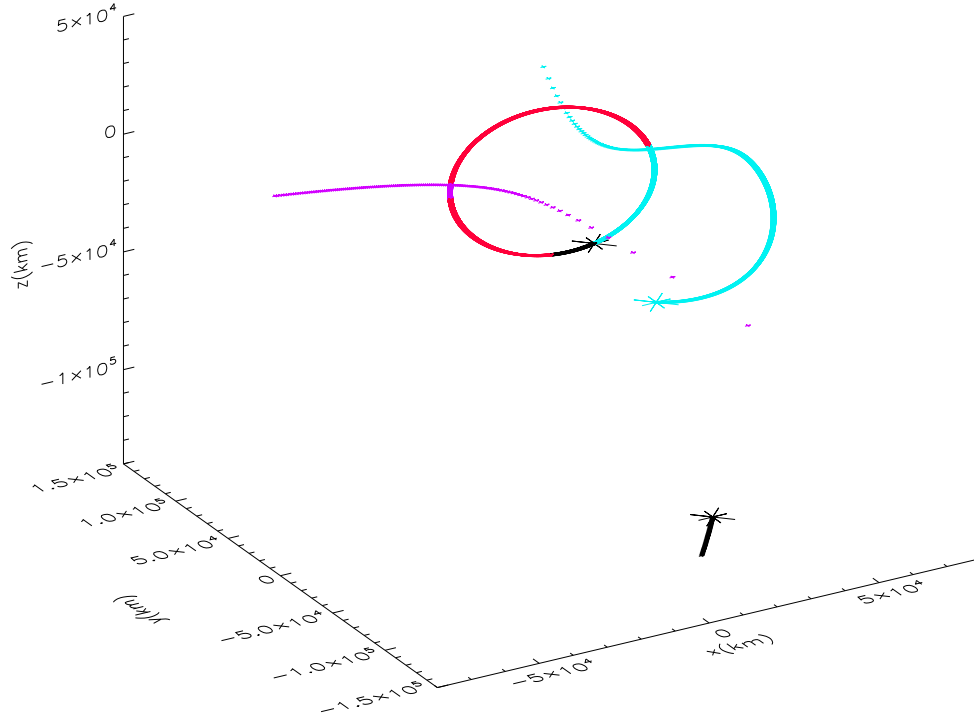


Figura 2.16: Posicionamiento de un satélite GALILEO mediante cuatro satélites emisores GPS. Las dos estrellas negras son los puntos iniciales en un caso de posicionamiento doble. A partir de estos puntos observamos un arco negro y su curva asociada. Después vemos la siguiente sucesión de arcos sobre la circunferencia: rojo, fucsia, rojo, azul celeste. Las curvas asociadas tienden a infinito en las transiciones siguientes: de negro a rojo, de fucsia a rojo y de azul celeste a rojo (sentido levógiro). La estrella azul celeste es la posición final alcanzada en régimen de doble posicionamiento (como en la figura 2.15)

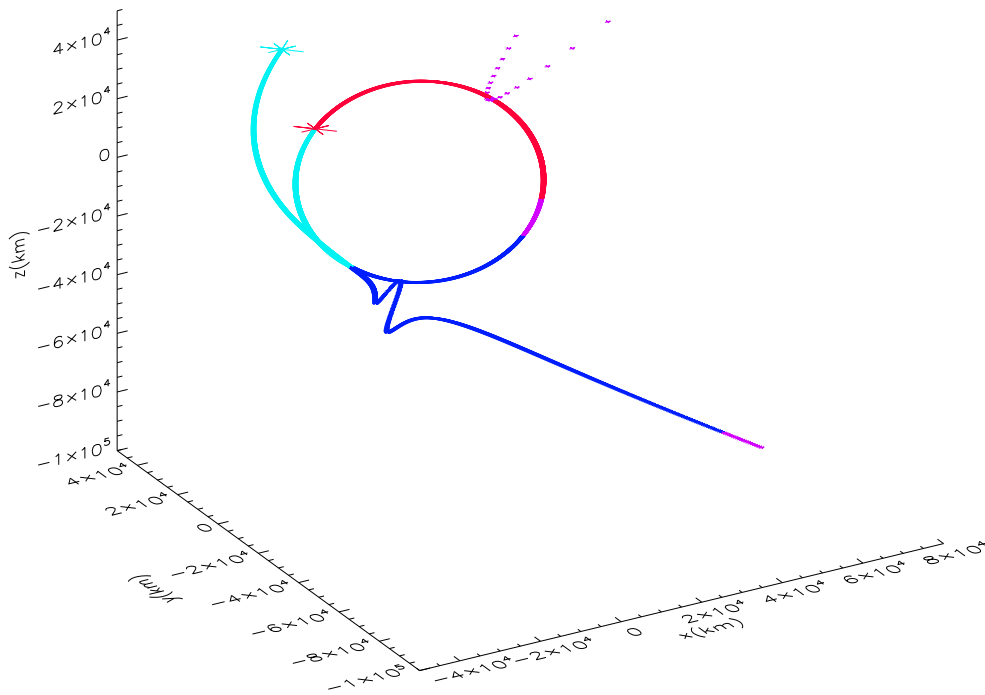


Figura 2.17: Posicionamiento de un satélite GALILEO mediante cuatro satélites emisores GPS. La estrella roja es el punto inicial (posicionamiento simple). A partir de este punto se observa un primer arco rojo de posicionamiento simple. Después (sentido dextrógiro), vemos cinco arcos diferentes coloreados de fucsia (muy pequeño), rojo, fucsia, azul marino y azul celeste. En el segundo arco rojo el posicionamiento es simple, y en el resto de los arcos es doble, habiendo curvas asociadas del mismo color fuera de la circunferencia. El arco de color azul celeste alcanza el punto inicial en régimen de doble posicionamiento, y la pareja de este punto es la estrella azul celeste. Las curvas asociadas a los arcos de doble posicionamiento tienden a infinito en las tres transiciones del fucsia al rojo (dos levógiras y una dextrógira).



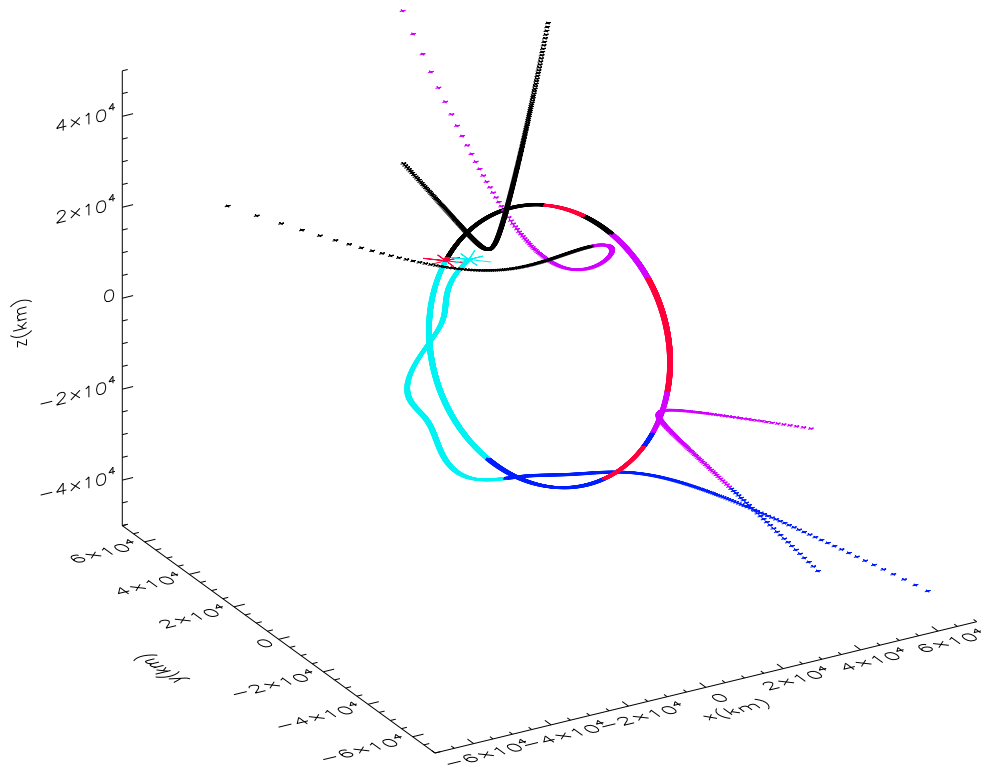


Figura 2.18: Posicionamiento de un satélite GALILEO mediante cuatro satélites emisores GPS. El punto inicial (estrella roja) es de posicionamiento simple. A partir de este punto se observa un primer arco rojo –muy pequeño– de posicionamiento simple. Después (sentido dextrógiro), vemos diez arcos coloreados de negro, rojo, negro, fucsia, rojo, fucsia, azul marino, rojo, azul marino y azul celeste. En total hay cuatro arcos rojos de posicionamiento simple y siete arcos de posicionamiento doble con sus curvas asociadas del mismo color. Estas curvas tienden a infinito en las transiciones del negro, fucsia y azul marino al rojo, por eso aparecen tres asíntotas negras, dos fucsia y dos azul marino. El arco de color azul celeste alcanza el punto inicial en régimen de doble posicionamiento, y la pareja de este punto es la estrella azul celeste.

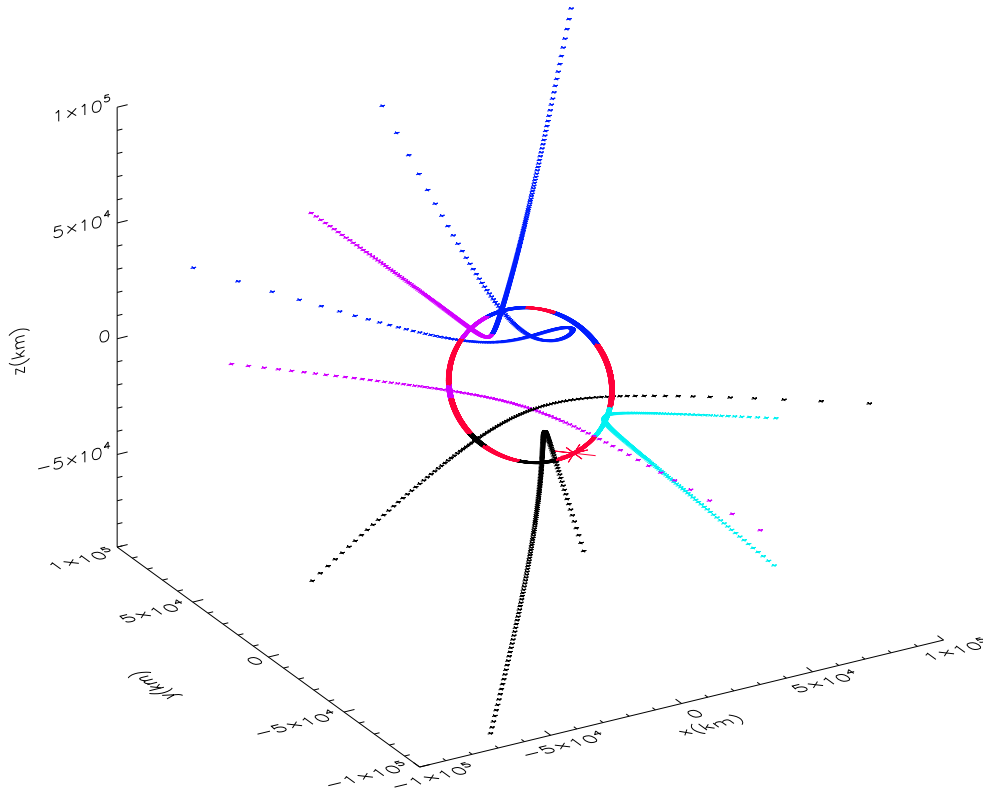


Figura 2.19: Posicionamiento de un satélite GALILEO mediante cuatro satélites emisores GPS. El punto inicial (estrella roja) está dentro de un arco rojo de posicionamiento simple. Fuera de él (sentido dextrógiro), vemos doce arcos diferentes coloreados de negro, rojo, negro, rojo, fucsia, rojo, fucsia, azul marino, rojo, azul marino, rojo y azul celeste. El posicionamiento del punto final es simple y coincide con la posición inicial (estrella roja).

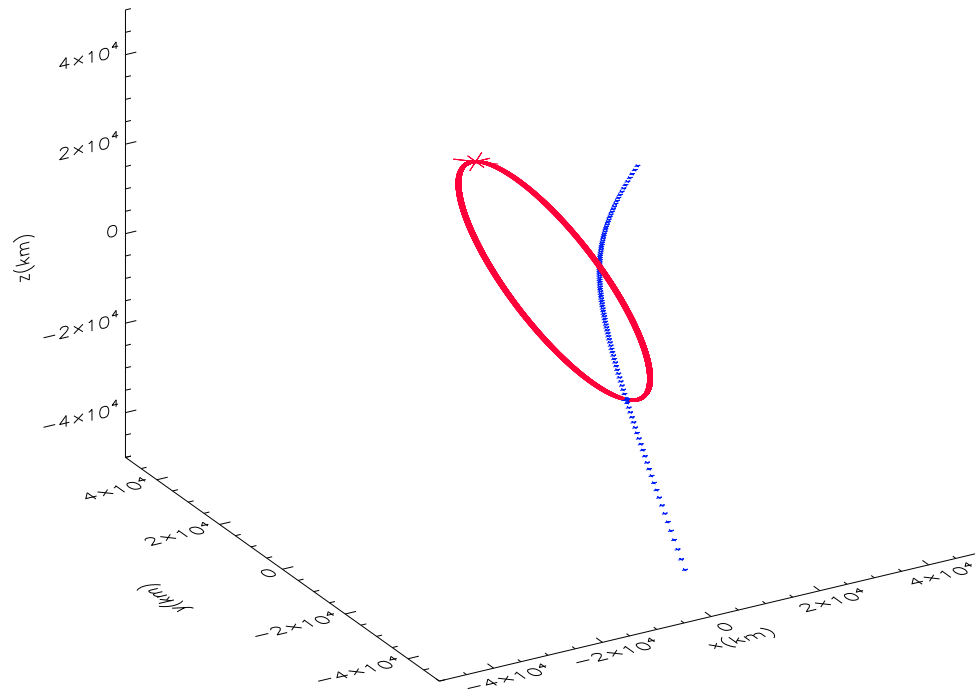


Figura 2.20: Posicionamiento de un satélite GPS mediante cuatro satélites emisores GALILEO. La estrella roja representa tanto la posición inicial como la final, y pertenece a un gran arco de posicionamiento simple. Se observa un pequeño arco azul marino de doble posicionamiento, así como su curva asociada -del mismo color- que tiene dos asíntotas; estas aparecen porque una de las dos posiciones tiende a infinito en las dos transiciones del azul al rojo (una levógira y la otra dextrógira).

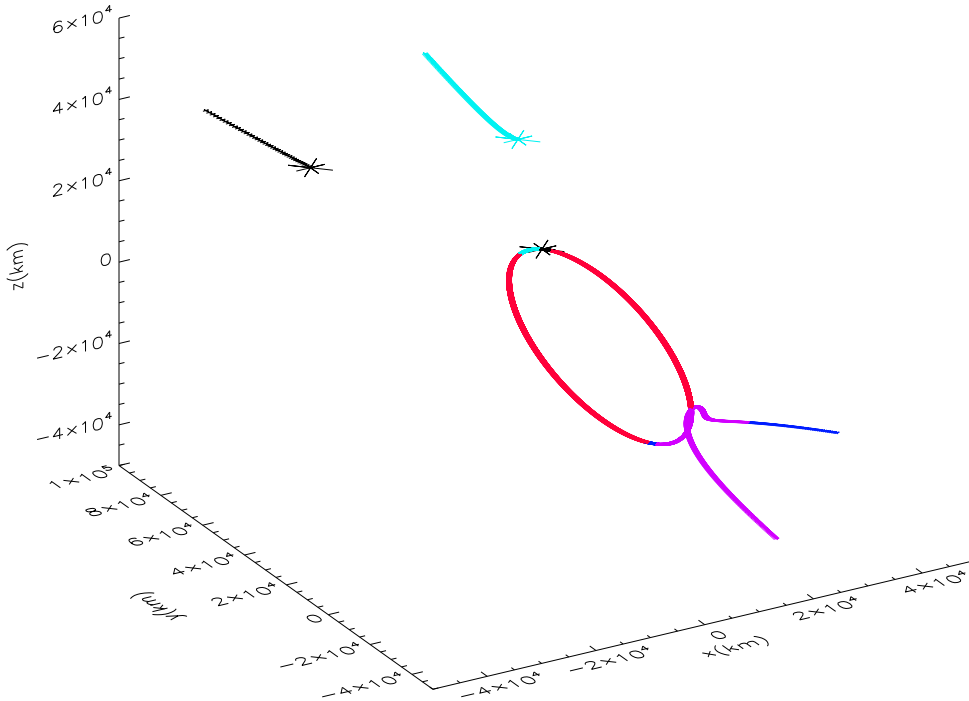


Figura 2.21: Posicionamiento de un satélite GPS mediante cuatro satélites emisores GALILEO. Las dos estrellas negras son los puntos iniciales en un caso de posicionamiento doble. A partir de estos puntos observamos un arco negro y su curva asociada. Después vemos la siguiente sucesión de arcos sobre la circunferencia: rojo, fucsia, azul marino, rojo y azul celeste. Las curvas asociadas tienden a infinito en las transiciones siguientes: de negro a rojo, de fucsia a rojo, de azul marino a rojo y de azul celeste a rojo. El arco de color azul celeste alcanza el punto inicial en régimen de doble posicionamiento, y la pareja de este punto es la estrella azul celeste.

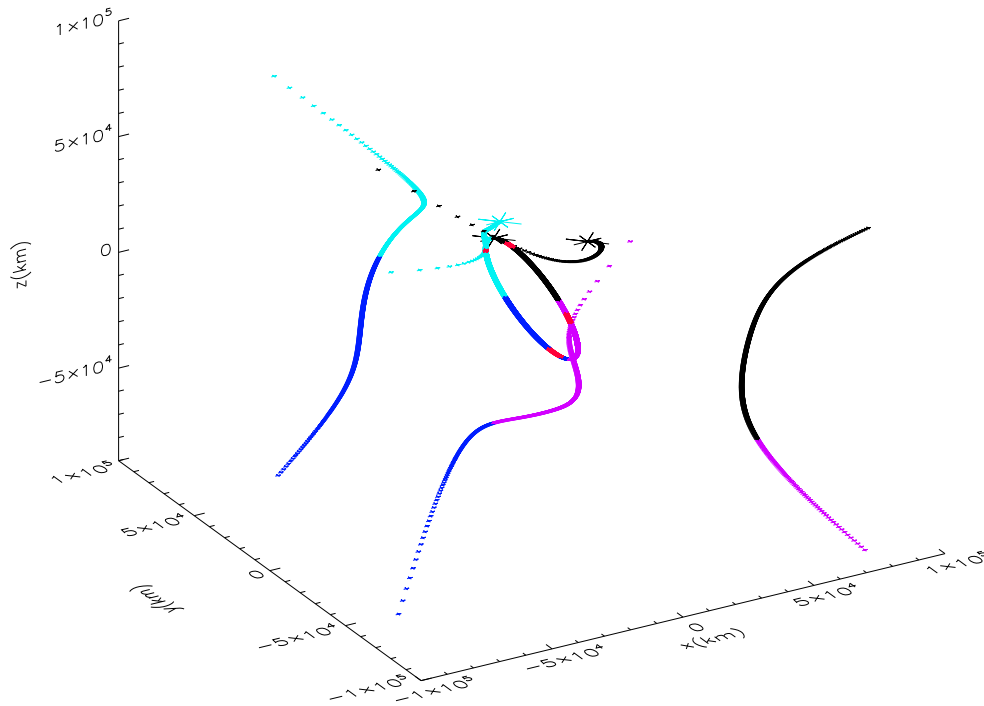


Figura 2.22: Posicionamiento de un satélite GPS mediante cuatro satélites emisores GALILEO. Las dos estrellas negras son los puntos iniciales en un caso de posicionamiento doble. A partir de estos puntos observamos un arco negro y su curva asociada. Después vemos la siguiente sucesión de arcos sobre la circunferencia: rojo, negro, fucsia, rojo, fucsia, azul marino, rojo, azul marino, azul celeste, rojo (muy pequeño) y azul celeste. En total hay cuatro arcos rojos de posicionamiento simple y ocho arcos de posicionamiento doble con sus curvas asociadas del mismo color. Estas curvas tienden a infinito en las transiciones del negro, fucsia, azul marino y azul celeste al rojo, por eso aparecen dos asíntotas negras, dos fucsia, dos azul marino y dos azul celeste. El arco de color azul celeste alcanza el punto inicial en régimen de doble posicionamiento, y la pareja de este punto es la estrella azul celeste.

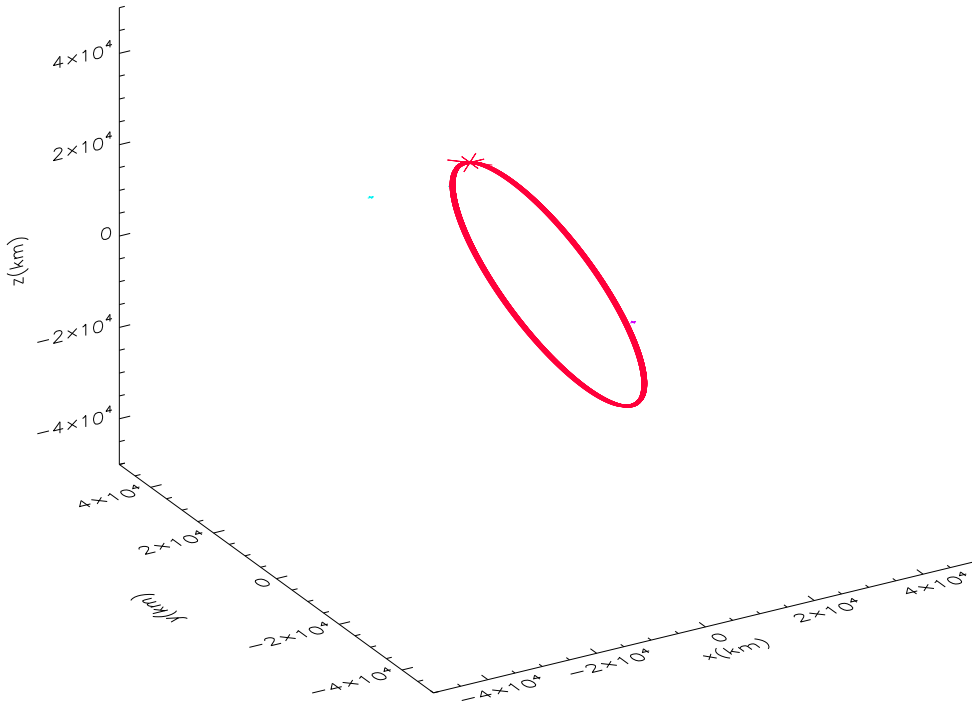


Figura 2.23: Posicionamiento de un satélite GPS mediante cuatro satélites emisores GALILEO. Toda la circunferencia está coloreada de rojo, lo que significa que el posicionamiento es simple en todos sus puntos.

## 2.5. Resumen y discusión

De acuerdo con [Coll 2010a], el valor de  $\chi^2$  es crucial para determinar el tipo de posicionamiento: simple o doble. Puesto que el vector  $\chi$  es ortogonal al hiperplano que contiene los cuatro eventos de emisión, podemos afirmar (ver sección 1.8) que si este hiperplano es espacial ( $\chi^2 < 0$ ) o nulo ( $\chi^2 = 0$ ), el posicionamiento es simple, mientras que si es temporal ( $\chi^2 > 0$ ), hay bifurcación. Si conocemos las coordenadas de emisión de un usuario, así como las líneas de universo de cuatro satélites –parametrizadas por sus tiempos propios– en un cierto sistema de referencia casi inercial, podemos determinar las coordenadas inerciales de los cuatro eventos de emisión en ese sistema de referencia y, por tanto, podemos construir el hiperplano que los contiene y determinar si es espacial, temporal o nulo; es decir, podemos saber el tipo de posicionamiento que corresponde al citado usuario. Esto es lo que hemos hecho para determinar las regiones de posicionamiento simple y doble en varios casos.

En este capítulo nos hemos centrado, fundamentalmente, en el estudio de la bifurcación (doble posicionamiento). Nuestra simulación del movimiento de los satélites GPS y GALILEO, a primer orden en  $GM_{\oplus}/r$ , es suficientemente precisa para estudiar este problema. Puede suponerse que los fotones se propagan en el espacio-tiempo de Minkowski, ya que el efecto lente debido a la inclusión de campos gravitatorios, produciría modificaciones totalmente despreciables en todos los resultados del capítulo, que básicamente son los siguientes: identificación de zonas de posicionamiento simple y doble en la región de emisión y en la co-región, e identificación de tramos de posicionamiento simple y doble sobre las órbitas de los satélites GPS (GALILEO), cuando son localizados mediante cuatro satélites GALILEO (GPS).

En la región de emisión y dentro de la E-esfera hemos hallado la situación siguiente: En cada sección 3D hay una zona central de posicionamiento simple que contiene: todos los usuarios que o bien pertenecen a direcciones sin ceros de  $\chi^2$ , o están situados en el segmento que va desde E hasta la primera anulación de  $\chi^2$ , cuya longitud,  $L_{\chi}^{(1)}$ , depende de la dirección. Sobre la Tierra o a poca altura, estamos en esta zona central, y el posicionamiento es simple, pero cuando la distancia del usuario al punto E supera el valor mínimo de  $L_{\chi}^{(1)}$ , nos podemos encontrar en una situación de posicionamiento doble. En las secciones de la figura 2.2 (emisores GALILEO), estos valores mínimos van desde 12400 hasta 19600 *km* y son siempre menores que la altura de los satélites ( $h \sim 23000$  *km*); lo mismo ocurre para emisores GPS. Por supuesto, para una cierta dirección, si  $L > L_{\chi}^{(1)}$  el posicionamiento es doble hasta llegar a un segundo cero de  $\chi^2$  si existe. Así, en cada sección 3D, hay zonas alternas de posicionamiento simple y doble, separadas por superficies en las que  $\chi^2$  se anula. La superficie correspondiente a la *i*-ésima anulación involucra siempre muchos menos píxeles que la superficie de la anulación anterior.

Cada sección 3D de la co-región es una zona conexa que contiene una parte univaluada interna (posicionamiento simple), parcialmente rodeada por una segunda zona bivaluada (bifurcación).

Si el usuario es un satélite, que está situado siempre dentro de la región central de los cuatro satélites emisores, el posicionamiento es simple en todo momento. Es lo que ocurriría si tratáramos de hallar la posición de la Estación Espacial Internacional mediante satélites de GALILEO o GPS, ya que esta estación se mueve a una altura

de unos cientos de kilómetros, siempre dentro de la zona central; sin embargo, si el satélite usuario es GPS y los emisores GALILEO, la altura del usuario es de unos 20000 *km* y, por tanto, en algunas zonas de su trayectoria tendremos posicionamiento doble. Si por el contrario, lo que tenemos es un usuario GALILEO y emisores GPS, el usuario ( $h \sim 23000$  *km*) estará más lejos de E que los emisores ( $h \sim 20000$  *km*) y, en esta situación, se espera que el satélite usuario entre y salga varias veces en la zona central de posicionamiento simple, dando lugar a varias fases alternas de posicionamiento simple y doble. Intuitivamente, parece que deberíamos encontrar más (menos) bifurcaciones cuando tratemos de posicionar un usuario GALILEO (GPS) con emisores GPS (GALILEO); sencillamente, porque los satélites GALILEO vuelan a más altura que los GPS, y deben permanecer más tiempo a una distancia  $L > L_{\chi}^{(1)}(GPS)$ ; es decir, en zonas de doble posicionamiento. Esto parece confirmado por las figuras 2.15-2.23, ya que son más amplias las zonas rojas (posicionamiento simple) cuando el usuario es GPS y los emisores GALILEO (ver las figuras 2.20, 2.21 y 2.23).

Los errores que se cometen al hallar la posición de un satélite GALILEO (GPS), mediante emisores GPS (GALILEO), serán estudiados en el capítulo siguiente. Aquí nos hemos limitado a mostrar, que en ambos casos, aparecen situaciones de bifurcación y, por tanto, de acuerdo con lo dicho en la sección 1.9, para hallar la verdadera posición hemos de medir ángulos o tiempos, no basta con las coordenadas de emisión.

Para acabar este capítulo vamos a discutir, en la medida de lo posible; es decir, con la ayuda de lo expuesto hasta el momento, cómo se podría resolver el problema de la bifurcación comparando tiempos.

Si el satélite usuario dispone de un reloj puede medir el tiempo propio,  $\tau_o$ , en el que son recibidas las cuatro coordenadas de emisión. Con estas coordenadas puede determinar el tipo de posicionamiento y, entonces, puede hallar:

- el tiempo coordenado  $t_o$
- un tiempo coordenado  $t_1$  si el posicionamiento es simple
- dos tiempos coordenados  $(t_2, t_3)$  si hay bifurcación.

En ausencia de incertidumbres en las líneas de universo de los cinco satélites implicados en el problema, y de cualquier error de posicionamiento, el tiempo  $t_o$  debe coincidir con el tiempo coordenado  $t_1$  para posicionamiento simple, o con uno de los dos tiempos  $(t_2, t_3)$  si hay bifurcación. En esta situación ideal, es evidente que de los dos tiempos obtenidos en el caso de posicionamiento doble, hemos de quedarnos con aquel que coincida con  $t_o$ .

Sin embargo, en un caso realista, tanto el tiempo  $t_o$ , como los tiempos de posicionamiento  $t_1$  o  $(t_2, t_3)$  tendrán errores. Los errores en  $t_o$  serán debidos al funcionamiento del reloj situado en el satélite usuario, que nos dará el tiempo propio, y a incertidumbres en la línea de universo de dicho satélite, que inducirán errores al calcular el tiempo coordenado  $t_o$  a partir del tiempo propio medido. Los errores en  $t_1, t_2$  y  $t_3$  son debidos a muchas causas. Algunos de estos errores están asociados a incertidumbres en las líneas de universo de los cuatro satélites emisores (ver sección 1.11). Un estudio bastante detallado de algunos errores importantes será realizado en los capítulos 3 y 4. En presencia de errores,  $t_o$  no coincidirá exactamente ni con



$t_1$ , ni con  $t_2$  o  $t_3$  y, en caso de bifurcación, sólo podremos elegir entre  $t_2$  y  $t_3$ , si uno de estos tiempos puede ser eliminado por ser demasiado diferente de  $t_o$ ; es decir si la diferencia es demasiado grande para ser atribuida a errores. Se ve la importancia de conocer los errores del sistema de posicionamiento, a la hora de elegir solución, para resolver el problema de la bifurcación.

En el caso de un satélite usuario con reloj y cuatro emisores, proponemos un método práctico de trabajo, que puede resultar útil:

En primer lugar, calculamos  $|t_1 - t_o|$  en muchas posiciones del satélite usuario correspondientes a posicionamiento simple, y hacemos un estudio estadístico de la distribución de los valores resultantes. De este modo sabemos cómo son los valores de  $|t_1 - t_o|$  sin hacer hipótesis concretas sobre lo que causa estas diferencias.

Una vez hecho el estudio estadístico mencionado, medimos las cantidades  $|t_2 - t_o|$  y  $|t_3 - t_o|$  en un caso de posicionamiento doble y, evidentemente, podemos encontrar varios casos:

- si una de las dos cantidades anteriores es demasiado grande para ser un valor estadísticamente aceptable de  $|t_1 - t_o|$ , está claro que el tiempo correspondiente a esta cantidad debe ser descartado, mientras que el otro tiempo correspondería a la verdadera posición con un cierto error
- si tanto  $|t_2 - t_o|$  como  $|t_3 - t_o|$  son cantidades suficientemente pequeñas como para ser valores estadísticamente aceptables de  $|t_1 - t_o|$ , no podemos elegir y el problema de la bifurcación queda sin resolver.

Un criterio más cualitativo es que podremos elegir uno de los dos tiempos del posicionamiento doble, si  $|t_2 - t_3|$  es suficientemente grande; en tal caso, uno de estos tiempos será siempre próximo a  $t_o$ , el otro estará suficientemente lejano como para ser descartado. Por eso, hemos estimado los valores mínimo y máximo de  $|t_2 - t_3|$  para todos los eventos de posicionamiento doble que aparecen en las figuras 2.15-2.21. El valor máximo es  $|t_2 - t_3|_{max} \simeq 128.6$  s. En general, los valores grandes de  $|t_2 - t_3|$  aparecen cerca de las transiciones de zonas de posicionamiento doble a simple (porque una de las dos soluciones de posicionamiento tiende a infinito). No hay problemas para elegir la posición correcta en estos casos. El valor mínimo es  $|t_2 - t_3|_{min} \simeq 1.1 \times 10^{-6}$  s; esta cantidad es bastante grande en comparación con los errores esperados en el tiempo  $\tau_o$  medido por un buen reloj atómico que vaya a bordo del satélite usuario, pero hay otros errores que deben ser estimados antes de decidir si, para  $|t_2 - t_3|_{min} \simeq 1.1 \times 10^{-6}$  s, somos capaces de elegir la verdadera posición.

Evidentemente, si las dos posiciones posibles -en un caso de bifurcación- están muy separadas, es fácil elegir una de ellas, tanto midiendo tiempos como ángulos (ver la sección 1.9). Todo se complica conforme las dos posiciones están más y más cerca, ya que tanto los ángulos como los tiempos correspondientes a ambas soluciones son muy parecidos.



# Errores de posicionamiento debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites

---

## Índice

---

|  |     |
|--|-----|
| 3.1. Introducción . . . . .  | 70  |
| 3.2. Regiones de Jacobiano nulo . . . . .  | 71  |
| 3.3. Cálculo de los U-errores . . . . .  | 73  |
| 3.4. Sobre el Jacobiano, $J$ , de la transformación $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$ y su anulación . . . . .                        | 75  |
| 3.4.1. Métodos para el cálculo numérico de $J$ . . . . .   | 75  |
| 3.5. Cálculo analítico del Jacobiano $J$ . . . . .   | 80  |
| 3.5.1. Comparación del Jacobiano obtenido numéricamente con el calculado analíticamente . . . . .  | 82  |
| 3.6. Volumen del tetraedro cuyos vértices son los cuatro extremos de los vectores unitarios usuario-satélite . . . . .                   | 85  |
| 3.7. Distribución de los valores de $J$ y de los U-errores dentro de la E-esfera: estimaciones numéricas . . . . .                       | 88  |
| 3.7.1. Los U-errores cerca y lejos de puntos de Jacobiano nulo   | 90  |
| 3.7.2. Estimación numérica de $J$ , $\Delta$ , $\alpha_1 - \alpha_4$ y otras magnitudes relevantes, para distribuciones 1D de usuarios . | 94  |
| 3.8. Análisis numérico detallado de los U-errores para tres direcciones particulares . . . . .   | 103 |
| 3.9. U-errores hasta $L = 10^3$ Mm . . . . .   | 109 |
| 3.10. Distribución de los valores del $J$ en la región de emisión . .  | 111 |
| 3.11. Distribución de los ceros de $J$ en la región de emisión . . .   | 115 |
| 3.12. Distribución de los valores de $J$ sobre esferas de radio $R$ .  | 119 |
| 3.13. Distribución de los U-errores sobre esferas de radio $R$ . . .   | 123 |
| 3.14. U-errores en el posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO) usando cuatro satélites GALILEO (GPS) . . . . .                       | 128 |
| 3.14.1. Sobre la selección de 4-tuplas de emisores . . . . .   | 136 |
| 3.15. Resumen y discusión . . . . .  | 139 |

---

### 3.1. Introducción

El posicionamiento será realizado en un sistema de referencia casi inercial, en el que las líneas de universo de los satélites deben ser conocidas. Vamos a definir unas líneas de universo nominales, que juegan un papel fundamental, aunque las verdaderas líneas se desvíen con respecto a ellas. Estas desviaciones son debidas a varios tipos de perturbaciones, unas son de origen gravitatorio, y otras, como la presión de radiación solar, no lo son.

La idea básica es la siguiente: cuando las desviaciones espaciales y temporales de las líneas de universo verdaderas con respecto a las nominales sean demasiado grandes, las trayectorias de los satélites deben ser corregidas; de esta forma las desviaciones serán siempre más pequeñas que un cierto valor límite, que será llamado *amplitud de las desviaciones*.

Para unas líneas nominales, debemos tener un modelo de desviaciones que podemos buscar de dos formas, o haciendo un modelo teórico estadístico basado en la naturaleza de los efectos (gravitatorios o no) que las producen, o haciendo un modelo estadístico basado en observaciones sobre la forma en que se van generando las desviaciones en muchas ocasiones; es decir, después de muchas correcciones que ajusten las verdaderas líneas a las nominales. Por supuesto, tanto estos ajustes como el valor de la amplitud de las desviaciones están limitados por la precisión con la que podamos controlar el movimiento de los satélites desde centros terrestres de control.

La elección de las líneas nominales es importante si queremos obtener desviaciones que crezcan lentamente. Si estas líneas tienen en cuenta la gravedad de la Tierra, incluyendo momentos cuadrupolares y rotación, las líneas de universo reales se desviarán de las nominales, más despacio, que si consideramos que la Tierra tiene simetría esférica y no gira.

Realizar un estudio detallado de las líneas de universo nominales, para optimizar su elección, así como lograr un modelo de desviaciones realista, con cualquiera de los métodos sugeridos anteriormente, es un objetivo a largo plazo que está fuera del alcance de esta tesis doctoral. Sin embargo, podemos estudiar un caso, que luego pueda ser mejorado paso a paso, y que nos dé suficiente información sobre el modo en que podemos estimar errores de posicionamiento debidos a incertidumbres en las líneas de universo reales. Podemos estimar los errores que aparecen cuando se considera que los satélites siguen las líneas reales en lugar de las nominales, que son distintas porque hay desviaciones estadísticas –con una cierta amplitud– de unas líneas respecto a las otras.

Nuestras líneas de universo nominales fueron descritas en el capítulo 1. La distribución estadística de desviaciones es la misma que utilizamos en [Puchades 2014] y será descrita a su debido tiempo. Avancemos ahora que la amplitud elegida para las desviaciones es de  $1\text{ m}$ , pero que esto no es más que una normalización arbitraria, ya que los errores que vamos a estimar son prácticamente proporcionales a la citada amplitud; lo que es debido a la linealidad de los cálculos con respecto a las pequeñas desviaciones entre líneas reales y nominales. Bajo estas hipótesis sobre líneas nominales y desviaciones, vamos a calcular lo que tanto en [Puchades 2014] como aquí llamamos *U-errores*, es decir, los errores debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los emisores. Demostraremos que, dentro de la E-esfera, hay puntos en

los que los U-errores se hacen muy grandes, incluso para incertidumbres pequeñas, lo que supone un problema para la navegación espacial, que trataremos de resolver con una elección adecuada de la 4-tupla de emisores.

En este capítulo, como en el anterior, utilizamos el modelo 1 de la sección 1.15 (los fotones se mueven en el espacio-tiempo de Minkowski), y no se tiene en cuenta que, para algunos usuarios, la Tierra intercepta la señal enviada por uno o varios satélites. La ocultación de satélites por la Tierra será considerada, en el capítulo 4, para la misma 4-tupla de satélites de la constelación de GALILEO.

## 3.2. Regiones de Jacobiano nulo

Para unas incertidumbres dadas en las líneas de universo de la 4-tupla de emisores, los U-errores dependen del valor que toma la cantidad  $J$  en el punto del espacio-tiempo que ocupa el usuario. Esta cantidad es el Jacobiano de la transformación que da las coordenadas de emisión del usuario en función de las inerciales; es decir,  $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$ .

Como veremos más adelante, cerca de los puntos del espacio-tiempo en los que  $J$  se anula, los U-errores se hacen muy grandes y tienden a infinito cuando la distancia del usuario al punto de Jacobiano nulo tiende a cero. Por tanto, conviene saber cómo están distribuidos los puntos con  $J = 0$  dentro de la E-esfera. Para estudiar este asunto tendremos en cuenta las proposiciones siguientes, que fueron demostradas en [Coll 2012]:

- 1)  $J = 0$  si, y solamente si,  $\Delta \equiv (y_* \cdot \chi)^2 - y_*^2 \chi^2 = 0$ , siendo  $\Delta$  el radicando que aparece en la fórmula 1.9 (ver la sección 1.8).
- 2) El Jacobiano  $J$  sólo se puede anular en puntos de la región  $\mathcal{C}_t$  donde  $\chi^2$  toma valores positivos.
- 3) Un usuario situado en cualquier punto de  $\mathcal{J}$ , que es el lugar geométrico de los puntos de la región de emisión en los que  $J$  se anula, ve los cuatro emisores en una circunferencia sobre su esfera celeste.
- 4) La hipersuperficie  $\mathcal{J}$  divide  $\mathcal{C}_t$  en dos zonas y las dos posiciones de una bifurcación están siempre separadas por  $\mathcal{J}$ ; es decir, estas dos posiciones distintas están ambas en  $\mathcal{C}_t$ , pero nunca en la zona correspondiente al mismo lado de  $\mathcal{J}$ . Sobre esta hipersuperficie, no hay más que un posible posicionamiento, ya que el radicando  $\Delta$  de la ecuación (1.9) se anula y sólo puede haber una única solución de la ecuación (1.9).

Conviene subrayar que, si bien los U-errores -debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites- divergen en los puntos de  $\mathcal{J}$ , en ausencias de estas incertidumbres, la posición de los usuarios situados sobre  $\mathcal{J}$  vendría dada, sin ningún error, por la solución única de la ecuación (1.9) correspondiente a  $\Delta = 0$ .

Antes de considerar la anulación de  $J$  para 4-tuplas realistas de satélites de GPS o GALILEO, vamos a exponer lo que se dedujo analíticamente, sobre  $\mathcal{J}$ , en el caso sencillo de tres emisores estáticos situados en los vértices de un triángulo equilátero. En la figura 3.1 publicada en [Coll 2012], se representa una sección  $t = \text{constante}$

de la región de emisión. Además de las regiones que ya aparecen en la figura 2.6, puede verse que hay líneas negras cuyos puntos tienen Jacobiano nulo. Estas líneas nos indican que  $\mathcal{J}$  es la unión de las sombras que cada satélite produce sobre las señales procedentes de los restantes satélites. De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, estas líneas están dentro de la región  $\mathcal{C}_t$  y la dividen en dos partes, una de las cuales es denominada  $\mathcal{C}_t^F$ . Los puntos  $\gamma$  y  $\gamma'$  son dos posiciones espaciales asociadas correspondientes a un caso de bifurcación, y como  $\gamma$  está en  $\mathcal{C}_t^F$ , entonces  $\gamma'$  está en la zona complementaria al otro lado de las líneas negras. Finalmente, en [Coll 2010a], además de las regiones  $\mathcal{C}_t$ ,  $\mathcal{C}_s$  y  $\mathcal{C}_i$  (ver capítulo 1), se definieron dos dominios coordenados disjuntos cuya unión es la región de emisión  $\mathcal{C}$ : uno es el dominio frontal  $\mathcal{C}^F = \mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_t^F$ , mientras que el otro, al que llamaremos posterior (back en Inglés), es  $\mathcal{C}^B = \mathcal{C}_t - \mathcal{C}_t^F$ . La hipersuperficie  $\mathcal{J}$  es la frontera común de ambos dominios.

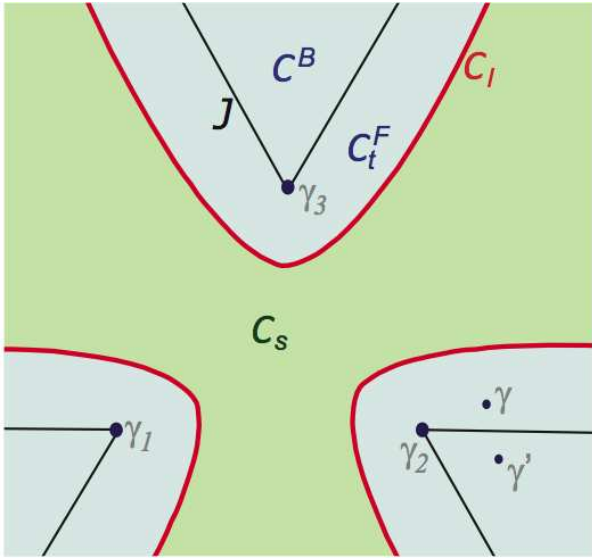


Figura 3.1: Estructura de la región de emisión para tres satélites estáticos situados en los vértices del triángulo equilátero  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$ . Los puntos de las líneas negras tienen Jacobiano nulo, y son la frontera común de los dominios coordenados  $\mathcal{C}^B$  y  $\mathcal{C}^F$ .

En la figura 3.2, que puede hallarse en [Pozo 2005], se muestra una sección  $\tau^3 = \text{constante}$  de la co-región. Los tres satélites son los mismos que en la distribución simétrica y estática de la figura 3.1. Aparecen las mismas zonas que en la figura 2.12, pero los puntos de ciertas líneas, que son negras en esta figura, son coordenadas de emisión de usuarios que están en  $\mathcal{J}$ ; es decir, que tienen  $J = \Delta = 0$ . Estas líneas negras (donde  $\Delta = 0$ ) separan las zonas de la co-región rayadas de azul, que contiene coordenadas de emisión de usuarios con bifurcación ( $\chi^2 > 0$  y  $\Delta > 0$ ), de la zona exterior que ya no es de la co-región ( $\Delta < 0$ ).

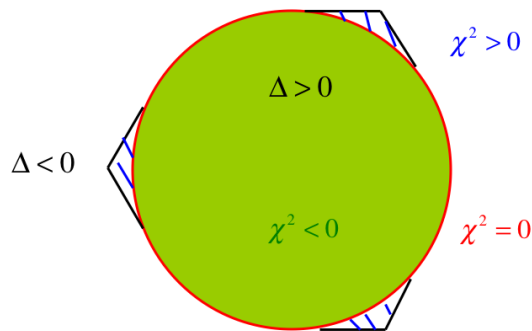


Figura 3.2: Estructura de la co-región para tres satélites estáticos situados en los vértices de un triángulo equilátero. Los puntos de los segmentos pintados de negro son coordenadas de emisión de puntos de la superficie  $\mathcal{J}$  ( $J = 0$ ).

### 3.3. Cálculo de los U-errores

Suponemos primero que los satélites se mueven, sin incertidumbres, de acuerdo con las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8); es decir, siguiendo exactamente nuestras líneas de universo nominales, cuyas trayectorias son circunferencias. Este modo de moverse sólo es realmente posible en el caso de una Tierra sin rotación y esféricamente simétrica que configura un espacio-tiempo de Schwarzschild, en ausencia de acciones externas. Este caso ideal, en el que no hay desviaciones con respecto a las líneas nominales, es sólo utilizado para comprobar la gran precisión de nuestros códigos XT y TX (ver capítulo 1). Si las líneas de universo *nominales* son parametrizadas por los tiempos propios, sus ecuaciones tendrán la forma  $y^\alpha = x_A^\alpha(\tau^A)$ .

En la práctica, las líneas de universo reales de los satélites no coincidirán con las líneas nominales anteriores y las ecuaciones de las reales (nominales perturbadas) podrán ser escritas de la forma siguiente:

$$y^\alpha = x_A^\alpha(\tau^A) + \xi_A^\alpha(\tau^A), \quad (3.1)$$

en términos de los mismos parámetros  $\tau^A$ . Las funciones  $\xi_A^\alpha(\tau^A)$  miden las desviaciones entre las líneas de universo reales y las nominales. Estas desviaciones o perturbaciones son inevitables y se pueden modelar apropiadamente (ver la sección 3.1).

Supongamos un usuario que recibe unas coordenadas de emisión  $\tau^A$ ; con estas coordenadas y el código TX, que puede ser utilizado cualquiera que sean las líneas de universo de los satélites, con tal que los fotones se muevan en el espacio-tiempo de Minkowski (modelo 1 de la sección 1.15), podemos hallar:

- unas coordenadas inerciales  $x^\alpha$  suponiendo que los satélites se mueven sobre las líneas de universo nominales

- otras coordenadas inerciales  $x^\alpha + \Delta(x^\alpha)$ , suponiendo que el movimiento de los satélites obedece a las ecuaciones (3.1), que siguen el movimiento real descrito con la ayuda de las desviaciones  $\xi_A^\alpha(\tau^A)$

Las coordenadas  $x^\alpha + \Delta(x^\alpha)$  deben ser comparadas con las coordenadas inerciales  $x^\alpha$  y, para ello, definimos la cantidad siguiente:

$$\Delta_d = [(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2}, \quad (3.2)$$

que es un buen estimador de los errores de posicionamiento producidos por las incertidumbres  $\xi_A^\alpha$ . Hemos despreciado cualquier efecto gravitatorio sobre el movimiento de los fotones, al suponer que describen geodésicas nulas del espacio-tiempo plano de Minkowski. La validez de esta forma de proceder se estudia en el capítulo 4.

Vale la pena enfatizar que las posiciones del usuario  $x^\alpha$  y  $x^\alpha + \Delta(x^\alpha)$  corresponden a las mismas coordenadas de emisión -que son recibidas desde los satélites- pero a diferentes líneas de universo. Las líneas de universo nominales conducen a la posición  $x^\alpha$  y las líneas de universo perturbadas dan la posición  $x^\alpha + \Delta(x^\alpha)$ . En esta situación, diremos que la posición del usuario es  $x^\alpha$ , con un error descrito por el estimador  $\Delta_d$ . El cálculo debe ser realizado para perturbaciones apropiadas de las líneas de universo nominales.

A lo largo de este capítulo, el estimador  $\Delta_d$  será calculado numéricamente para ciertas distribuciones de usuarios localizados en el interior de la E-esfera. Cada uno de estos usuarios tiene unas coordenadas inerciales conocidas  $x^\alpha$ , pero desconocemos *a priori* sus coordenadas de emisión. En esta situación, podemos proceder de la forma siguiente: en primer lugar, calculamos unas coordenadas de emisión  $\tau^A$  mediante el código XT y las líneas de universo nominales y, en un segundo paso, partimos de los tiempos propios  $\tau^A$  obtenidos en el primer paso, y aplicamos el código TX con las líneas reales [con desviaciones  $\xi_A^\alpha(\tau^A)$ ] para hallar  $x^\alpha + \Delta(x^\alpha)$ . Lo importante es usar las mismas coordenadas de emisión en ambos casos. Finalmente, la ecuación (3.2) nos permite hallar  $\Delta_d$ .

Dada una 4-tupla de satélites y una sección  $t = t_R$  de la región de emisión, para calcular  $\Delta_d$  en cualquier punto situado dentro de la E-esfera, podemos usar las mismas desviaciones  $\xi_A^\alpha$  (diferentes para cada satélite  $A$ ); ello es debido a que, para  $L \leq 10^5$  km, los fotones recorren el camino que va desde los satélites a cualquier usuario en menos de un segundo, y en intervalos de tiempo tan pequeños las desviaciones entre satélites nominales y reales no pueden cambiar significativamente. Las cantidades constantes  $\xi_A^\alpha$  se construyen de la siguiente forma: Las tres cantidades  $\xi_A^i$  son escritas en términos de la cantidad  $\Xi_A = [(\xi_A^1)^2 + (\xi_A^2)^2 + (\xi_A^3)^2]^{1/2}$  y dos ángulos  $\Theta$  y  $\Phi$  que juegan el papel de coordenadas esféricas en el espacio de desviaciones. Finalmente, las cantidades  $\Xi_A = \Delta r$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  y  $\xi_A^4 = \Delta t$  son generadas -para cada satélite- como números aleatorios uniformemente distribuidos en los intervalos  $[0, 10^{-3}]$  kilómetros,  $[0, \pi]$  radianes,  $[0, 2\pi]$  radianes y  $[0, 10^{-3}]$  unidades de tiempo, respectivamente. De esta forma, la amplitud de las desviaciones espaciales (temporales) es de  $10^{-3}$  km ( $10^{-3}$  unidades de tiempo).

Esta distribución estadística de incertidumbres es utilizada -en la presente tesis- para ver ciertos aspectos generales de la distribución de errores de posicionamiento en el interior de la E-esfera. Como hemos comentado en la sección 3.1, hay dos métodos,



uno m3s te3rico y otro m3s experimental, para hacer m3s realista la distribuci3n de las desviaciones  $\xi_A^i$ .

Si la amplitud de las desviaciones en vez de 1  $m$  fuera de  $z m$ , todos los U-errores correspondientes a  $z = 1$  –que presentaremos en esta tesis– deben ser multiplicados por  $z$ . Esto es debido a que el c3lculo de U-errores es lineal con respecto a las desviaciones. En [Puchades 2014], se tom3  $z = 10$  que es una hip3tesis razonable.

### 3.4. Sobre el Jacobiano, $J$ , de la transformaci3n $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$ y su anulaci3n

Como ya hemos dicho en la secci3n 2.2, si no tenemos en cuenta las ocultaciones de los sat3lite por la Tierra, cualquier usuario con coordenadas inerciales  $x^\alpha$ , recibir3 simult3neamente -a partir de un cierto instante- las se3ales codificadas -con los tiempos propios de emisi3n  $\tau^\alpha$ - de la 4-tupla de sat3lites elegida para el posicionamiento. Adem3s, cualquier usuario que sea vecino recibir3 tiempos propios muy parecidos procedentes de los mismos sat3lites. Estos hechos nos indican que, en alg3n conjunto abierto que contenga el punto P de coordenadas inerciales  $x^\alpha$ , debe existir una funci3n  $\tau^A = \tau^A(x^\alpha)$  continua y con derivadas parciales continuas en P. Entonces, de acuerdo con el teorema de la funci3n inversa, puede existir una funci3n continua  $x^\alpha = x^\alpha(\tau^A)$  con derivadas parciales continuas en alg3n conjunto abierto que contiene a Q (imagen de P), si y solamente si, el Jacobiano  $J = |\partial\tau^A/\partial x^\alpha|$  es un n3mero real no nulo en P.

Por otra parte, si queremos que peque3as desviaciones  $\Delta\tau^A$  respecto a Q, causen peque3os U-errores de posicionamiento  $\Delta x^\alpha$  en P, tiene que existir la funci3n inversa  $x^\alpha = x^\alpha(\tau^A)$  y sus derivadas parciales han de ser continuas, lo que implica –ver p3rrafo anterior– que  $J$  no puede ser nulo en P. Si  $J$  es nulo en P y las parciales  $\partial x^\alpha/\partial\tau^A$  no son continuas, los U-errores se pueden disparar cuando nos acerquemos a P. Es lo que m3s adelante vamos a constatar usando m3todos num3ricos.

#### 3.4.1. M3todos para el c3lculo num3rico de $J$

Como se desprende de la secci3n 3.4, los U-errores m3s grandes esperamos encontrarlos para usuarios pr3ximos a puntos donde  $J$  se anula. M3s adelante veremos que los menores U-errores corresponden a usuarios con valores grandes de  $J$ , y que esta cantidad no puede tomar valores arbitrariamente grandes. De todo esto se desprende que, para estudiar los U-errores, tenemos que saber calcular  $J$  para un usuario cualquiera de coordenadas inerciales  $x^\alpha$ .

El Jacobiano se puede calcular num3ricamente, como hac3amos antes de deducir una f3rmula anal3tica que nos permite calcularlo. La nueva f3rmula puede hallarse en nuestro art3culo [Puchades 2014]. Aunque esta f3rmula simplifica el c3lculo de J, es interesante conocer los valores de esta cantidad obtenidos con m3todos totalmente num3ricos, y comparar los resultados. Hay dos m3todos que vamos a describir ahora:

##### *M3todo 1*

El Jacobiano de la transformaci3n  $\tau^A = \tau^A(x^\alpha)$  es el determinante de la matriz

cuyo término general es  $J_{A\alpha} = \partial\tau^A/\partial x^\alpha$ ; por tanto, para calcular  $J$ , lo único que tenemos que hallar, numéricamente, son 16 derivadas parciales en el punto de coordenadas  $x^\alpha$ . Esto es fácil de hacer teniendo en cuenta que cada parcial es el límite de un cociente incremental y, por tanto, será aproximadamente igual al citado cociente si el incremento de la variable independiente es elegido apropiadamente. Este incremento debe ser suficientemente pequeño para que el cociente incremental se acerque suficientemente a su límite (la derivada que buscamos), pero no tan pequeño que no nos permita el cálculo del incremento de la variable dependiente.

Supongamos que queremos calcular  $\partial\tau^1/\partial x^2$  en P; para ello partimos de las coordenadas  $x^\alpha$  del punto P, y a partir de estas coordenadas, el código XT (Newton-Rhapson), usando las líneas nominales de los satélites, nos permite obtener las coordenadas de emisión  $\tau^A$ . Tomamos entonces un incremento de la variable independiente  $x^2$ , por ejemplo,  $\Delta x^2 = 10^{-8}$  km, manteniendo el valor que toman en P las coordenadas inerciales  $x^1, x^3$  y  $x^4$ . A partir del nuevo punto  $(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3, x^4)$ , el mismo código XT nos da unas nuevas coordenadas de emisión  $\tau^A + \Delta\tau^A$ , a partir de las cuales hallamos un valor aproximado de la derivada que estamos calculando, que será  $\partial\tau^1/\partial x^2 \simeq \Delta\tau^1/\Delta x^2$ . Con el mismo procedimiento se pueden calcular las 16 derivadas parciales de la matriz Jacobiana.

Una vez calculadas las 16 derivadas con un único paso de derivación  $\Delta x$  (incremento de la variable independiente), hallamos el Jacobiano. Usaremos un conjunto apropiado de pasos  $\Delta x_n$ , distintos entre si, que dan valores de  $J$  a los que llamaremos  $J_{1n}$ . El Jacobiano se considerará bien calculado, si hay un intervalo, suficientemente amplio, de valores de  $\Delta x$  que conducen a Jacobianos con un número de dígitos idénticos suficientemente grande.

### Método 2

El término general de la matriz Jacobiana de la transformación  $x^\alpha = x^\alpha(\tau^A)$  es  $\tilde{J}^{A\alpha} = \partial x^\alpha/\partial \tau^A$ , por tanto, para hallar su Jacobiano  $\tilde{J}$ , tenemos que hallar -de nuevo- 16 derivadas parciales. Además se satisface la relación  $J = 1/\tilde{J}$ , ya que la transformación  $x^\alpha = x^\alpha(\tau^A)$  es la inversa de aquella cuyo Jacobiano es  $J$ . Si  $\tilde{J}$  es un número real y no nulo en Q,  $J$  es también un número real y diferente de cero en P, y el cálculo de U-errores es posible en este punto.

Podemos calcular  $J$ , hallando primero  $\tilde{J}$  en el punto imagen de P (co-región), y usando luego la relación  $J = 1/\tilde{J}$ . Este método requiere el cálculo de todas las derivadas de la forma  $\partial x^\alpha/\partial \tau^A$ . Vamos a ver cómo podemos hacer una de estas derivadas; por ejemplo,  $\partial x^1/\partial \tau^2$ . Dadas las coordenadas de  $x^\alpha$  del usuario en P, utilizamos el código XT (Newton-Rhapson) con las líneas nominales de los satélites, para hallar las coordenadas emisión  $\tau^A$  del punto Q. Tomamos entonces un incremento de la variable independiente  $\tau^2$ , por ejemplo,  $\Delta\tau^2 = 3.3 \times 10^{-14}$  s y mantenemos el valor que toman en Q las coordenadas de emisión  $\tau^1, \tau^3$  y  $\tau^4$ . A partir del nuevo punto  $(\tau^1, \tau^2 + \Delta\tau^2, \tau^3, \tau^4)$ , el código TX (con líneas nominales) nos da unas nuevas coordenadas inerciales  $x^\alpha + \Delta x^\alpha$ , a partir de las cuales hallamos un valor aproximado de la derivada que estamos buscando, que será  $\partial x^1/\partial \tau^2 \simeq \Delta x^1/\Delta\tau^2$ . Con el mismo procedimiento se pueden calcular las 16 derivadas parciales de la matriz Jacobiana.

Una vez calculadas las 16 derivadas con un único paso de derivación  $\Delta\tau$ , hallamos

el Jacobiano. Como en el caso del primer m3todo, usaremos un conjunto de pasos  $\Delta\tau_n$ , distintos entre si, que dan valores de  $J$  a los que llamaremos  $J_{2n}$ . La forma de elegir el paso, es la misma que para el primer m3todo (ver m3s arriba).

Para comprobar que los dos m3todos anteriores dan resultados buenos y compatibles, los hemos aplicado para calcular  $J$  en dos puntos dentro de la E-esfera. Ambos pertenecen a la secci3n  $t_R = 19 h$  y a la 4-tupla de sat3lites de GALILEO 2, 5, 20, 23. El primer punto es E, que est3 lejos de cualquier anulaci3n de  $J$ . En la Tabla 3.1 presentamos los valores de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$  hallados para 9 pasos diferentes  $\Delta x$  y otros tantos  $\Delta\tau$ ; as3 como las diferencias absolutas  $e_a = abs(J_{n1} - J_{n2})$  y las relativas  $e_r = \frac{2(J_{n1}-J_{n2})}{J_{n1}+J_{n2}}$ .

| $\Delta x$ | $\Delta\tau$          | $J_{n1}$               | $J_{n2}$ | $e_a$                 | $e_r$                 |
|------------|-----------------------|------------------------|----------|-----------------------|-----------------------|
| $10^{-13}$ | $3.3 \times 10^{-19}$ | $-4.13 \times 10^{-2}$ | 0.29     | 0.33                  | 2.66                  |
| $10^{-12}$ | $3.3 \times 10^{-18}$ | 0.21                   | 0.24     | $3.24 \times 10^{-2}$ | 0.15                  |
| $10^{-11}$ | $3.3 \times 10^{-17}$ | 0.23                   | 0.24     | $3.23 \times 10^{-3}$ | $1.38 \times 10^{-2}$ |
| $10^{-10}$ | $3.3 \times 10^{-16}$ | 0.23                   | 0.23     | $3.24 \times 10^{-4}$ | $1.38 \times 10^{-3}$ |
| $10^{-9}$  | $3.3 \times 10^{-15}$ | 0.23                   | 0.23     | $3.27 \times 10^{-5}$ | $1.39 \times 10^{-4}$ |
| $10^{-8}$  | $3.3 \times 10^{-14}$ | 0.23                   | 0.23     | $3.67 \times 10^{-6}$ | $1.56 \times 10^{-5}$ |
| $10^{-5}$  | $3.3 \times 10^{-11}$ | 0.23                   | 0.23     | $4.38 \times 10^{-7}$ | $1.86 \times 10^{-6}$ |
| $10^{-2}$  | $3.3 \times 10^{-8}$  | 0.23                   | 0.23     | $2.42 \times 10^{-6}$ | $1.03 \times 10^{-5}$ |
| $10^{-1}$  | $3.3 \times 10^{-7}$  | 0.23                   | 0.23     | $2.82 \times 10^{-5}$ | $1.20 \times 10^{-4}$ |

Tabla 3.1: La primera (segunda) columna muestra un conjunto de nueve pasos  $\Delta x$  en kil3metros ( $\Delta\tau$  en segundos). El resto de las columnas -excepto la 3ltima que es adimensional- est3n dadas en la unidades de las ecuaciones y los c3digos (ver secci3n 1.16).

Los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta\tau$  de algunas filas -de la Tabla 3.1- dan valores parecidos de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$ , pero no son pares de pasos que hayan sido elegidos de forma que conduzcan a las menores diferencias  $e_a$  y  $e_r$ . Parte de estas diferencias son debidas a la elecci3n de los pasos; por eso no vamos a llamarlas errores de c3lculo; de todas formas, para los seis 3ltimos pares de pasos, el orden de magnitud de las diferencias relativas es menor que  $10^{-4}$ . Esto sugiere que, para estos pasos, el c3lculo de  $J$  en E es suficientemente bueno, tanto si se hace con el m3todo 1, como con el m3todo 2. Sin embargo, desde el punto de vista l3gico, cabe la posibilidad de que los valores de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$ , calculados en E, sean pr3ximos pero que ambos tengan errores de c3lculo. Por eso, pensamos que se pod3an hacer dos cosas para justificar que los valores obtenidos de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$  -obtenidos con los m3todos 1 y 2- que por lo menos uno de los dos valores de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$  tiene errores peque3os:

- (1) comprobar que los pares  $(\Delta x, \Delta\tau)$  que dan buenos resultados en E, tambi3n los dan en otros puntos de la E-esfera siempre que est3n suficientemente lejos de los ceros de  $J$
- (2) Tratar de calcular anal3ticamente el valor del Jacobiano en alg3n punto particular, por ejemplo, en E y comparar el resultado con  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$ .

Para hacer la comprobación (1), hemos seleccionado puntos de la dirección  $n_{RING} = 25$  (ver sección 1.14) para  $0 \leq L \leq 10^5$  km.

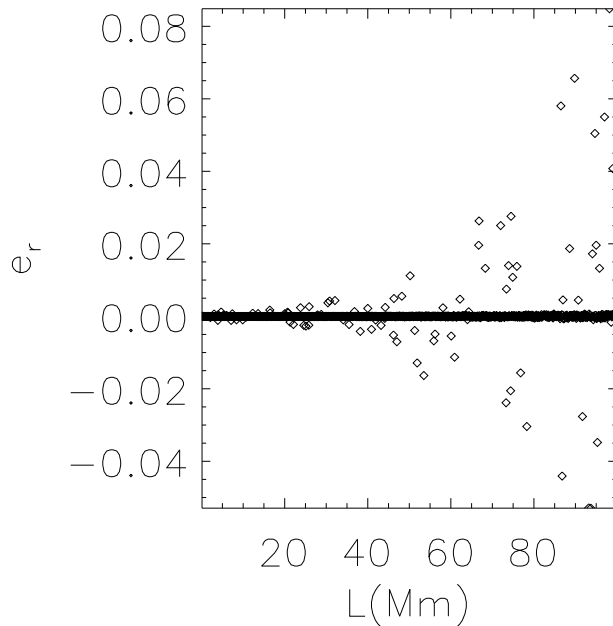


Figura 3.3: Diferencia relativa  $e_r$  en función de la distancia  $L$  (en  $Mm$ ), para puntos lejanos a cualquier cero de  $J$  situados en la dirección asociada al píxel  $n_{RING} = 25$ , y situados dentro de la E-esfera.

Todos estos puntos están lejos de cualquier cero de  $J$  (como se comprueba fácilmente con las técnicas de cálculo de estos ceros que se desarrollarán más adelante). Se usan los pares  $\Delta x = 10^{-8}$  km y  $\Delta \tau = 3.3 \times 10^{-14}$  s para calcular derivadas en todos los puntos seleccionados, y los valores de  $e_r$  resultantes son presentados en la figura 3.3, donde puede verse que aunque, en E hemos obtenido  $e_r = 1.56 \times 10^{-5}$ , hay puntos lejanos de E, en los que el orden de  $e_r$  llega a ser  $10^{-1}$ . Esto, no parece muy satisfactorio, en particular, si tenemos en cuenta que el cálculo de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$  esperamos que sea más problemático todavía en puntos próximos a ceros de  $J$ .

Para ver lo que ocurre con el cálculo de  $J_{n1}$  y  $J_{n2}$ , para usuarios próximos a algún cero de  $J$ , hemos elegido uno de estos usuarios, en la dirección  $n_{RING} = 444$ , que está próximo a un cero de  $J$  situado a una distancia  $L = 29750$  km de E, y hemos realizado el mismo estudio que en el punto E. Los resultados son presentados en la Tabla 3.2. En la nueva Tabla vemos que todas las diferencias relativas tienen órdenes de magnitud mayores o iguales que  $10^{-2}$ . Por tanto, como era de esperar, los resultados son peores que en el punto E (Tabla 3.1).

Para la dirección  $n_{RING} = 444$ , hemos seleccionado puntos uniformemente distribuidos en el intervalo  $0 \leq L \leq 10^5$  km. Algunos de estos puntos son próximos al cero de  $J$  situado en  $L = 29750$  km y, en tales puntos el valor de  $e_r$  se debería disparar. Los valores de  $e_r$  obtenidos con los pasos de derivación  $\Delta x = 10^{-8}$  km y  $\Delta \tau^\alpha = 3.3 \times 10^{-14}$  s (usados en todos los puntos), son presentados en la figura

| $\Delta x$ (km) | $\Delta \tau$ (s)     | $J_{n1}$               | $J_{n2}[10^{-5}]$ | $e_a$                 | $e_r$                  |
|-----------------|-----------------------|------------------------|-------------------|-----------------------|------------------------|
| $10^{-13}$      | $3.3 \times 10^{-19}$ | $4.39 \times 10^{-2}$  | -7.09             | $4.39 \times 10^{-2}$ | 2.01                   |
| $10^{-12}$      | $3.3 \times 10^{-18}$ | $4.34 \times 10^{-3}$  | -5.30             | $4.39 \times 10^{-3}$ | 2.05                   |
| $10^{-11}$      | $3.3 \times 10^{-17}$ | $3.88 \times 10^{-4}$  | -5.17             | $4.39 \times 10^{-4}$ | 2.62                   |
| $10^{-10}$      | $3.3 \times 10^{-16}$ | $-7.64 \times 10^{-6}$ | -5.16             | $4.39 \times 10^{-5}$ | -1.48                  |
| $10^{-9}$       | $3.3 \times 10^{-15}$ | $-4.72 \times 10^{-5}$ | -5.16             | $4.39 \times 10^{-6}$ | $-8.90 \times 10^{-2}$ |
| $10^{-8}$       | $3.3 \times 10^{-14}$ | $-5.11 \times 10^{-5}$ | -5.16             | $4.39 \times 10^{-7}$ | $-8.56 \times 10^{-3}$ |
| $10^{-5}$       | $3.3 \times 10^{-11}$ | $-5.16 \times 10^{-5}$ | -5.08             | $7.97 \times 10^{-7}$ | $-1.56 \times 10^{-2}$ |

Tabla 3.2: Esta Tabla tiene la misma estructura que la Tabla 3.1

(3.4), donde puede verse que, aunque hay muchos valores de  $e_r$  menores que  $10^{-2}$ , hay valores mucho más grandes de esta diferencia relativa cerca de  $L = 29.75 Mm$ . Lejos del cero de  $J$  y del punto E, los valores de  $e_r$  están menos dispersos que en el caso de la figura (3.3),

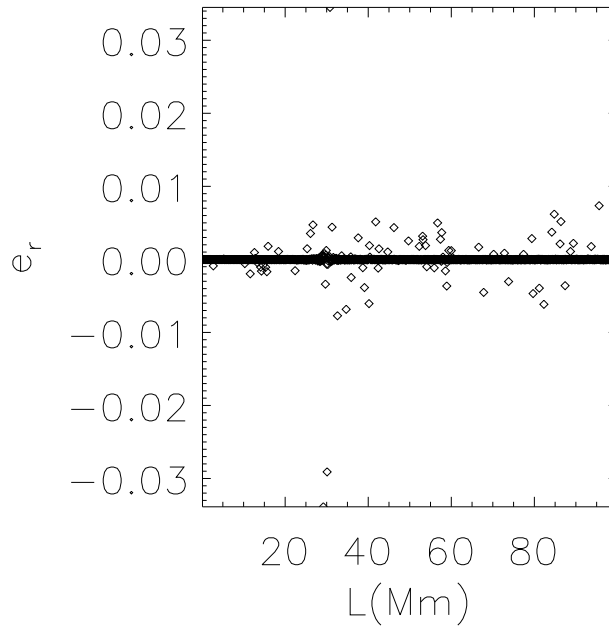


Figura 3.4: Esta figura tiene la misma estructura que la figura 3.3, pero corresponde a una dirección con un cero de  $J$  en  $L = 29.75 Mm$ .

En el método 2, comenzamos obteniendo un punto de la co-región de coordenadas  $\tau^A$ , que cuando estemos calculando cerca de un punto de Jacobiano nulo, estará en la zona azul de la figura 3.2, cerca de las líneas negras; entonces, los puntos de coordenadas  $\tau^A + \Delta\tau^A$ , utilizados para calcular las derivadas parciales, pueden caer fuera de la co-región (al otro lado de las líneas negras); en tal caso, no se pueden calcular algunas de las cantidades  $x^\alpha + \Delta x^\alpha$ , ni las derivadas parciales asociadas. Esto sólo se puede evitar tomando un paso de integración suficientemente pequeño,

para evitar que el punto de coordenadas  $\tau^A + \Delta\tau^A$  esté fuera de la co-región. Por todo esto, es preferible tomar  $\Delta\tau^\alpha = 3.3 \times 10^{-14}$  s en vez de  $\Delta\tau^\alpha = 3.3 \times 10^{-11}$  s, aunque este último paso conduzca a un valor de  $|e_r|$  algo más pequeño en la Tabla 3.1 y un poco más grande en la 3.2.

Sólo nos falta intentar el cálculo analítico de  $J$ , que creíamos que sólo sería posible en algunos casos particulares, pero que acabó siendo válido, en general, para satélites emisores con velocidades no relativistas.

### 3.5. Cálculo analítico del Jacobiano $J$

En esta sección vamos a calcular analíticamente el Jacobiano  $J$ , bajo la hipótesis de que, en todo momento, el cociente  $v/c$  es mucho menor que uno, siendo  $v$  el módulo de la velocidad de un satélite cualquiera de la 4-tupla de posicionamiento. Esta es una hipótesis simplificativa, que se cumple para todos los satélites de cualquier GNSS, incluyendo GPS y GALILEO, los cuales tienen velocidades comprendidas entre 3 y 4 km/s. Usando la fórmula analítica que vamos a obtener, el cálculo de  $J$  es más rápido que si usamos los dos métodos estrictamente numéricos de la sección anterior.

El Jacobiano es el determinante  $J = \left| \frac{\partial\tau^A}{\partial x^\beta} \right|$ ; por tanto, para calcularlo hay que obtener primero las derivadas parciales  $\frac{\partial\tau^A}{\partial x^\beta}$  que aparecen en la matriz Jacobiana.

Partimos de la expresión que relaciona las coordenadas de emisión,  $\tau^A$ , con las coordenadas inerciales  $x^\alpha$ ; es decir, de la ecuación (1.5) del capítulo 1. Se trata de calcular las derivadas  $\partial\tau^A/\partial x^\alpha$ , derivando implícitamente en esta ecuación cuya forma es  $\eta_{\alpha\beta}[x^\alpha - x_A^\alpha(\tau^A)][x^\beta - x_A^\beta(\tau^A)] = 0$ . Comencemos derivando parcialmente, con respecto a la coordenada inercial  $x^1$ , ambos miembros de esta ecuación para obtener la relación siguiente:

$$\eta_{\alpha\beta} \left[ \delta^{\alpha 1} - \frac{\partial x_A^\alpha}{\partial \tau^A} \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] [x^\beta - x_A^\beta(\tau^A)] + \eta_{\alpha\beta} [x^\alpha - x_A^\alpha(\tau^A)] \left[ \delta^{\beta 1} - \frac{\partial x_A^\beta}{\partial \tau^A} \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] = 0 \quad (3.3)$$

El sistema (3.3) tiene cuatro ecuaciones, una por cada satélite.

Como las ecuaciones de movimiento de cada satélite son de la forma  $x_A^\alpha = x_A^\alpha(\tau^A)$ , las derivadas parciales  $\frac{\partial x_A^\alpha}{\partial \tau^A}$ , son en realidad derivadas totales y coinciden con las componentes de la cuadrivelocidad del satélite A:  $u_A^\alpha(\tau^A) = dx_A^\alpha/d\tau^A$ . Sustituyendo las componentes de la cuadrivelocidad en 3.3 y simplificando resulta:

$$2\eta_{\alpha\beta} \left[ \delta^{\alpha 1} - u_A^\alpha \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] [x^\beta - x_A^\beta(\tau^A)] = 0 ; \quad (3.4)$$

esto es:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - u_A^1 \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] [x^1 - x_A^1] + \left[ -u_A^2 \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] [x^2 - x_A^2] + \left[ -u_A^3 \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] [x^3 - x_A^3] \\ - \left[ -u_A^4 \frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} \right] [x^4 - x_A^4] = 0 . \quad (3.5) \end{aligned}$$

Esto es un sistema de ecuaciones y nuestra incógnita es  $\frac{\partial\tau^A}{\partial x^1}$ ; si la despejamos de 3.5

resulta:

$$\frac{\partial \tau^A}{\partial x^1} = -\frac{x^1 - x_A^1}{-u_A^1[x^1 - x_A^1] - u_A^2[x^2 - x_A^2] - u_A^3[x^3 - x_A^3] + u_A^4[x^4 - x_A^4]} \quad (3.6)$$

donde  $u^4 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$  es el factor de Lorentz, y el resto de componentes de la cuadrivelocidad son calculadas derivando con respecto a  $\tau^A$  las ecuaciones de la línea de universo del satélite A, dadas en la sección 1.7.

Utilizamos el mismo procedimiento para calcular  $\frac{\partial \tau^A}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial \tau^A}{\partial x^3}$  y  $\frac{\partial \tau^A}{\partial x^4}$ , y así obtenemos todas las derivadas parciales que buscábamos, que vienen dadas por las relaciones:

$$J_{Ai} = \frac{\partial \tau^A}{\partial x^i} = -\frac{x^i - x_A^i}{-u_A^1[x^1 - x_A^1] - u_A^2[x^2 - x_A^2] - u_A^3[x^3 - x_A^3] + u_A^4[x^4 - x_A^4]} \quad (3.7)$$

y

$$J_{A4} = \frac{\partial \tau^A}{\partial x^4} = \frac{x^4 - x_A^4}{-u_A^1[x^1 - x_A^1] - u_A^2[x^2 - x_A^2] - u_A^3[x^3 - x_A^3] + u_A^4[x^4 - x_A^4]} \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) se pueden escribir, todas juntas, de la forma siguiente:

$$J_{A\alpha} = \frac{\partial \tau^A}{\partial x^\alpha} = \frac{\zeta[x^\alpha - x_A^\alpha(\tau^A)]}{\eta_{\mu\nu} u_A^\mu(\tau^A)[x^\nu - x_A^\nu(\tau^A)]}, \quad (3.9)$$

donde  $\zeta$  toma el valor 1 para  $\alpha = 1, 2, 3$  y el valor -1 para  $\alpha = 4$ .

La cuadrivelocidad del satélite A,  $u_A^\mu(\tau^A)$ , puede ser fácilmente calculada, en un tiempo propio dado  $\tau^A$ , por medio de las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) (sección 1.7). Por tanto, dado un usuario con coordenadas inerciales  $x^\alpha$ , nuestro código XT permite calcular las correspondientes coordenadas de emisión  $\tau^A$  y, entonces, las derivadas parciales involucradas en  $J$  pueden ser calculadas usando las ecuaciones (1.6), (1.7), (1.8) y (3.9).

Por otra parte, la cuadrivelocidad del satélite se puede escribir de la forma siguiente::

$$u_A^\mu(\tau^A) = \gamma^A(v_A^1, v_A^2, v_A^3, 1), \quad (3.10)$$

donde  $v_A^i$  son las componentes de la velocidad del satélite A en el sistema de referencia casi inercial, y  $\gamma^A$  es el factor de Lorentz del satélite A en el espacio-tiempo de Minkowski. Este factor tiene la forma:

$$\gamma^A = [1 - (v_A)^2]^{-1/2} \quad (3.11)$$

siendo  $v_A = \sqrt{(v_A^1)^2 + (v_A^2)^2 + (v_A^3)^2}$ .

Como las velocidades de los satélites son mucho más pequeñas que la unidad, al orden más bajo, podemos escribir  $u_A^\mu(\tau^A) \simeq (0, 0, 0, 1)$  para cualquier satélite A. Por tanto, la siguiente relación se cumple de forma aproximada:

$$\eta_{\mu\nu} u_A^\mu(\tau^A)[x^\nu - x_A^\nu(\tau^A)] \simeq -[x^4 - x_A^4(\tau^A)] = -Dist_A \quad (3.12)$$

donde  $Dist_A$  es la distancia del usuario a la posición del satélite A cuando emitió su tiempo propio. Teniendo en cuenta esta relación, la ecuación (3.9) conduce a la siguiente relación:

$$J_{A\alpha} = \frac{\partial \tau^A}{\partial x^\alpha} \simeq \frac{\zeta[x_A^\alpha(\tau^A) - x^\alpha]}{Dist_A}, \quad (3.13)$$

y, por tanto, el Jacobiano es el valor del siguiente determinante:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{x_1^1 - x^1}{Dist_1} & \frac{x_1^2 - x^2}{Dist_1} & \frac{x_1^3 - x^3}{Dist_1} & 1 \\ \frac{x_2^1 - x^1}{Dist_2} & \frac{x_2^2 - x^2}{Dist_2} & \frac{x_2^3 - x^3}{Dist_2} & 1 \\ \frac{x_3^1 - x^1}{Dist_3} & \frac{x_3^2 - x^2}{Dist_3} & \frac{x_3^3 - x^3}{Dist_3} & 1 \\ \frac{x_4^1 - x^1}{Dist_4} & \frac{x_4^2 - x^2}{Dist_4} & \frac{x_4^3 - x^3}{Dist_4} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.5.1. Comparación del Jacobiano obtenido numéricamente con el calculado analíticamente

Vamos a comparar los valores del Jacobiano  $J$  obtenidos de forma numérica  $J_{n2}$  (método 2 de la sección anterior), con el valor,  $J_a$ , calculado a partir de la fórmula (3.14).

Como en las comparaciones realizadas en la sección 3.4.1, se consideran los satélites 2, 5, 20 y 23 de GALILEO y la sección  $x^4 = t_R = 19 h$ . Además, también se consideran los mismos puntos uniformemente distribuidos, a lo largo de las mismas direcciones HEALPIX:  $n_{RING} = 25$ , sin ceros de  $J$ , y  $n_{RING} = 444$ , con un cero de  $J$  para una distancia  $L = 29750 km$  desde E.

En esta sección calculamos y representamos las cantidades  $e_a$  y  $e_r$ , que son las diferencias absolutas y relativas entre las cantidades  $J_{n2}$  y  $J_a$ ; es decir,  $e_a = abs(J_{n2} - J_a)$  y  $e_r = \frac{2(J_{n2} - J_a)}{J_{n2} + J_a}$ . Estas cantidades se muestran en las figuras 3.5 ( $n_{RING} = 25$ ) y 3.6 ( $n_{RING} = 444$ ).

La figura 3.5 prueba que, lejos de los ceros de  $J$ , el paso de derivación del método 2 de la sección anterior puede ser ajustado de modo que los valores más grandes de  $|e_a|$  sean del orden de  $10^{-10}$  (panel superior), y los de  $|e_r|$  del orden de  $10^{-9}$  (panel inferior). Esto demuestra que tanto la derivada numérica como la obtenida mediante la fórmula (3.14) pueden calcularse con una precisión muy alta. También se puede ajustar el paso del método 1 de la sección anterior para obtener valores comparables a los que da la expresión (3.14).

La figura 3.6 muestra que –como era de esperar– cerca del punto  $L = 29750 km$  (cero de  $J$ ), las diferencias absolutas y relativas se hacen muy grandes. Todos los cálculos fallan cerca de los ceros de  $J$  porque, en ellos, aparecen divergencias.



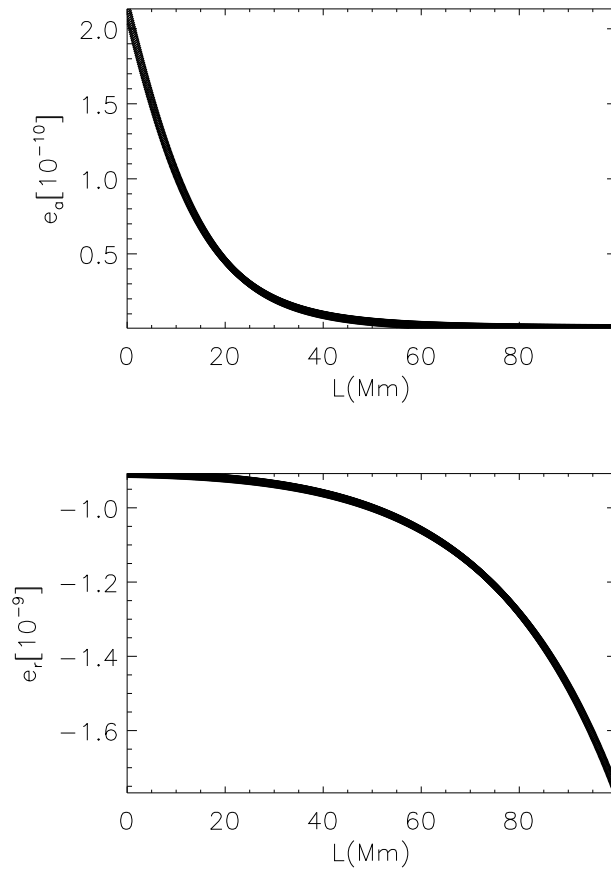


Figura 3.5: La cantidad  $e_a$  ( $e_r$ ) es representada en función de la distancia  $L$  a E, en  $Mm$ , en el panel superior (inferior). Dirección  $n_{RING} = 25$  sin ceros de  $J$

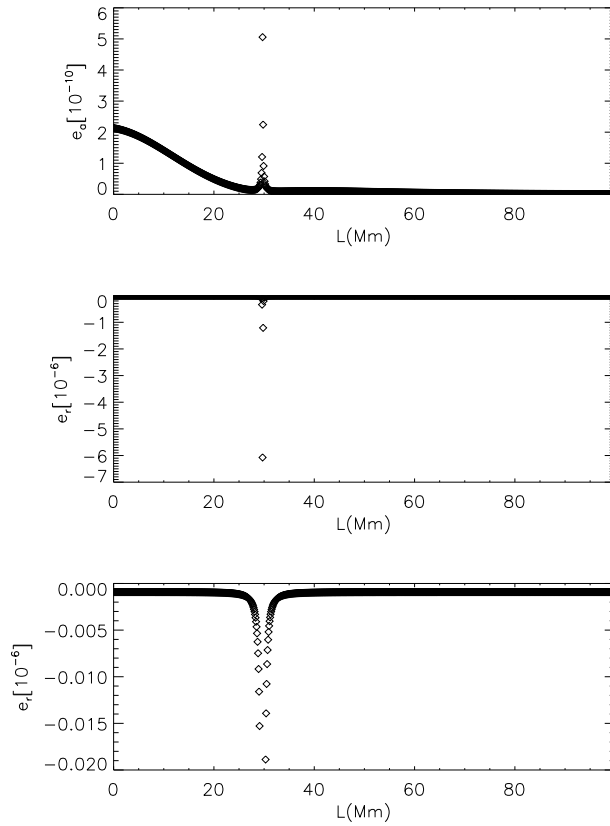


Figura 3.6: Los paneles superior e intermedio de esta figura exhiben la misma representación que los paneles superior e inferior de la figura 3.5. En este caso consideramos la dirección  $n_{RING} = 444$  con un cero de  $J$ . En el panel inferior se consideran los mismos puntos que en el panel intermedio y se han suprimido todos los valores tales que  $|e_r| > 2 \times 10^{-8}$ , para conseguir que se vea que los valores de  $e_r$  no son nulos lejos del cero de  $J$ .

### 3.6. Volumen del tetraedro cuyos vértices son los cuatro extremos de los vectores unitarios usuario-satélite

La figura 3.7 es mostrada en [Langley 1999], y representa un tetraedro con los cuatro extremos de los vectores unitarios usuario-satélite en sus vértices. Este tetraedro está inscrito en una esfera de radio unidad centrada en el usuario.

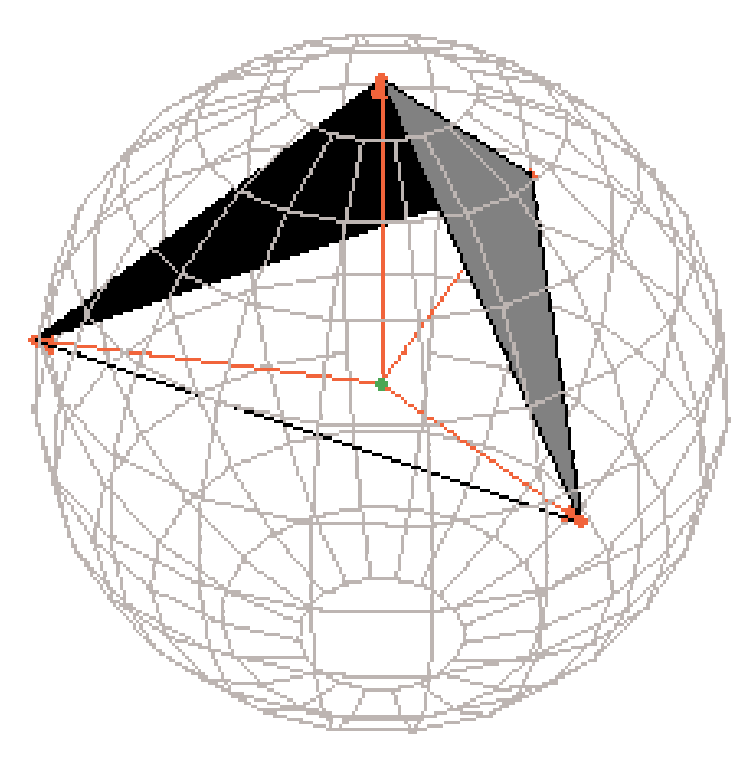


Figura 3.7: Tetraedro cuyos vértices son los extremos de los cuatro vectores unitarios receptor-satélite. El tetraedro queda inscrito en una esfera de radio unidad centrada en el usuario

En [Langley 1999] se afirma que el volumen del tetraedro de la figura 3.7 está correlacionado con la *dilución de precisión*; de forma que a mayor volumen, menores errores de posicionamiento debidos a la configuración espacial del sistema usuario-satélites. Maximizar el volumen sería minimizar los errores en el posicionamiento del usuario. Sin embargo, en [Langley 1999] no se explica el por qué de la citada correlación.

Una vez hallada la expresión (3.14) que da el valor de  $J$ , con la única condición de que el movimiento de los emisores no sea relativista, hemos podido justificar las afirmaciones de R.B. Langley sobre dilución de precisión, y expresarlas de un modo mucho más preciso y lógico.

La razón por la que los errores de posicionamiento dependen del volumen del tetraedro anteriormente descrito, es que este volumen es proporcional al Jacobiano  $J$  y, como es sabido, los U-errores dependen de  $J$ . Así, cuanto mayor es el volumen, mayor es el Jacobiano, y menores son los errores en el posicionamiento del usuario. Vamos a calcular el volumen del tetraedro para ver que es proporcional al Jacobiano dado por la fórmula (3.14).

El volumen de un tetraedro se puede escribir en términos de las coordenadas absolutas de los cuatro vértices  $(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ ,  $(x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ ,  $(x_3^1, x_3^2, x_3^3)$ ,  $(x_4^1, x_4^2, x_4^3)$  (donde el subíndice hace referencia al vértice) de la siguiente forma:

$$V_T = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 1 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 1 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & 1 \\ x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Como el volumen del tetraedro es independiente del sistema de coordenadas en el que se calcule, hacemos una traslación de coordenadas y centramos el origen del nuevo sistema de referencia en el usuario. Así, vemos fácilmente, que el volumen  $V_T$  del tetraedro de la figura es:

$$V_T = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} \frac{x_1^1-x^1}{Dist_1} & \frac{x_1^2-x^2}{Dist_1} & \frac{x_1^3-x^3}{Dist_1} & 1 \\ \frac{x_2^1-x^1}{Dist_2} & \frac{x_2^2-x^2}{Dist_2} & \frac{x_2^3-x^3}{Dist_2} & 1 \\ \frac{x_3^1-x^1}{Dist_3} & \frac{x_3^2-x^2}{Dist_3} & \frac{x_3^3-x^3}{Dist_3} & 1 \\ \frac{x_4^1-x^1}{Dist_4} & \frac{x_4^2-x^2}{Dist_4} & \frac{x_4^3-x^3}{Dist_4} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

que es -evidentemente- proporcional al módulo del Jacobiano ( $V_T = \frac{1}{6}|J|$ ) dado por la ecuación (3.14), la cual es válida siempre que las velocidades de los satélites sean pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

De acuerdo con la proposición 3) de la sección 3.2 (ver también [Coll 2012] y [Pozo 2006]), si los cuatro satélites se ven a lo largo de generatrices de un mismo cono con el usuario en el vértice, el Jacobiano  $J$  es nulo. En sistemas de satélites no relativistas, esta proposición se puede demostrar teniendo en cuenta que si los cuatro emisores se ven de esta forma, los extremos de los cuatro vectores unitarios usuario-satélite están en un mismo plano (ortogonal al eje del cono) y, por tanto, el volumen  $V_T$  del tetraedro que forman es nulo. Lo que implica que  $J$  también lo es; sin embargo, sólo hemos demostrado que la proposición 3) es aproximadamente válida en el caso no relativista; mientras que en [Coll 2012] y [Pozo 2006] se considera que es válida para cualquier configuración de satélites, incluso para configuraciones relativistas. Este aspecto de la anulación de  $J$  merece más atención, pero ya no será considerado en esta tesis.

Si las direcciones en las que el usuario ve a tres satélites de la 4-tupla de emisores son todas diferentes, estas generan un cono con vértice en el usuario y un cierto eje de simetría. El ángulo formado por cualquiera de estas direcciones con el eje

del cono,  $\alpha_i$ , es el mismo, por tanto podemos escribir  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . Si el ángulo formado por la dirección del cuarto satélite con el eje del cono  $\alpha_4$  coincide con uno cualquiera de los otros tres ángulos iguales, por ejemplo,  $\alpha_1$ , todos los satélites están en el mismo cono y  $J$  se anula. El usuario no podrá hallar su posición salvo si conoce perfectamente el movimiento de los satélites (ver la sección 3.1), lo cual no es posible en la práctica. Además, si  $\alpha_4 - \alpha_1$  es distinto de cero, el Jacobiano no es nulo.

Un esquema de esta situación puede verse en la figura 3.8;

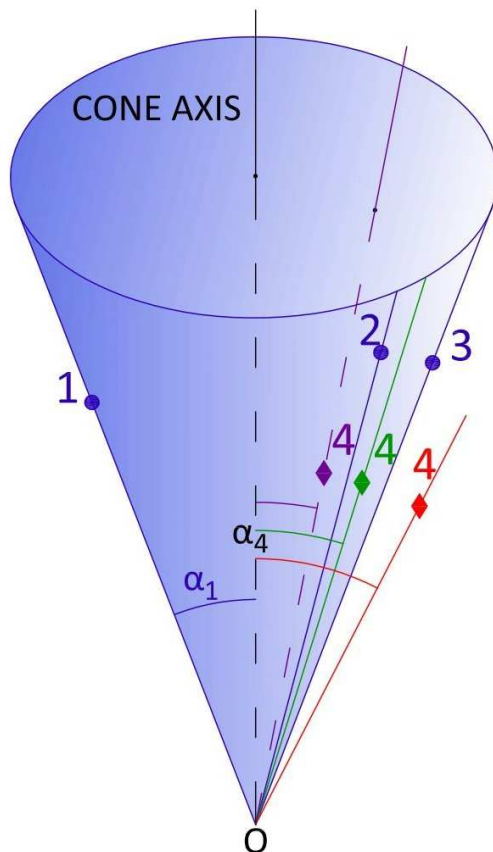


Figura 3.8: Representación de los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_4$ . El usuario está en el vértice del cono y los satélites 1, 2 y 3 en su superficie.

según lo dicho,  $J$  valdrá cero en la posición verde, mientras que en la roja y en la lila será diferente de cero (posicionamiento posible). Además, dentro y fuera de la superficie cónica hay pares de direcciones correspondientes a bifurcaciones y, como la orientación de los satélites 1, 2 y 3 es levógira, según lo dicho en la sección 1.9, el parámetro de orientación es  $\hat{\epsilon} = 1$  en el caso lila (interior) y  $\hat{\epsilon} = -1$  en el caso rojo (exterior).

Por otra parte, si el usuario está muy lejos de la 4-tupla de satélites, dos cua-

lesquiera de ellos formarán un ángulo pequeño, y los cuatro delimitan un pequeño ángulo sólido; por tanto, el volumen  $V_T$  del tetraedro asociado a las direcciones de observación será pequeño, lo que sugiere un mal posicionamiento con U-errores grandes que crecerán cuando nos alejemos más y más de la zona ocupada por los satélites.

En los resultados numéricos que presentaremos -más adelante- en esta sección, veremos hasta qué punto los U-errores son grandes cuando el usuario:

- ve los cuatro satélites casi situados en la misma circunferencia de su esfera celeste (usuarios próximos a un cero de  $J$ )
- está suficientemente lejos de la zona que ocupa la constelación de satélites usada para el posicionamiento.

Trabajando en el marco de los SPR hemos entendido la relación que hay entre los U-errores (dilución de precisión) y el valor de  $V_T$ .

### 3.7. Distribución de los valores de $J$ y de los U-errores dentro de la E-esfera: estimaciones numéricas

En la sección 2.2.1, estudiamos la distribución de los valores de  $\chi^2$  en el interior de la E-esfera y, para ello, definimos una distribución de usuarios que es uniforme a lo largo de 3072 direcciones HEALPIX, en un conjunto de secciones  $t_R = constante$ . En esta sección vamos a considerar exactamente la misma distribución de puntos dentro de las mismas secciones y, en cada punto vamos a calcular el Jacobiano  $J$  y los U-errores. Esto lo hemos hecho para varias 4-tuplas de satélites aunque sólo presentemos resultados para algunas de ellas. Entonces, podemos buscar los ceros de  $J$ , como lo hicimos en la sección 2.2.1 para los ceros de  $\chi^2$ .

Después de calcular los valores y ceros de  $\chi^2$  y del Jacobiano  $J$  en los mismos puntos dentro de la E-esfera, nos ha sido posible verificar que  $J$  solo se anula en los segmentos donde se cumple la desigualdad  $\chi^2 > 0$ ; es decir, en las zonas de bifurcación, que como es sabido, están entre el primer (tercero) y segundo (cuarto) ceros de  $\chi^2$  (ver la sección 3.2). En la figura 3.9, puede verse un croquis de la distribución de usuarios con las zonas en las que  $J$  puede anularse. Este croquis es análogo al presentado en la figura 2.1, pero ahora se considera también la anulación de  $J$ .

Utilizaremos las mismas técnicas que en el capítulo 2, para representar los puntos en los que  $J$  se anula en cada sección, o los puntos en los que toma un valor concreto. Lo mismo haremos con los valores de los U-errores. A veces sólo consideraremos usuarios que están situados en direcciones HEALPIX particulares, y haremos gráficas que nos indiquen como varían ciertas cantidades significativas con la distancia  $L$  al punto E. De hecho vamos a considerar representaciones de este tipo en la próxima sección.

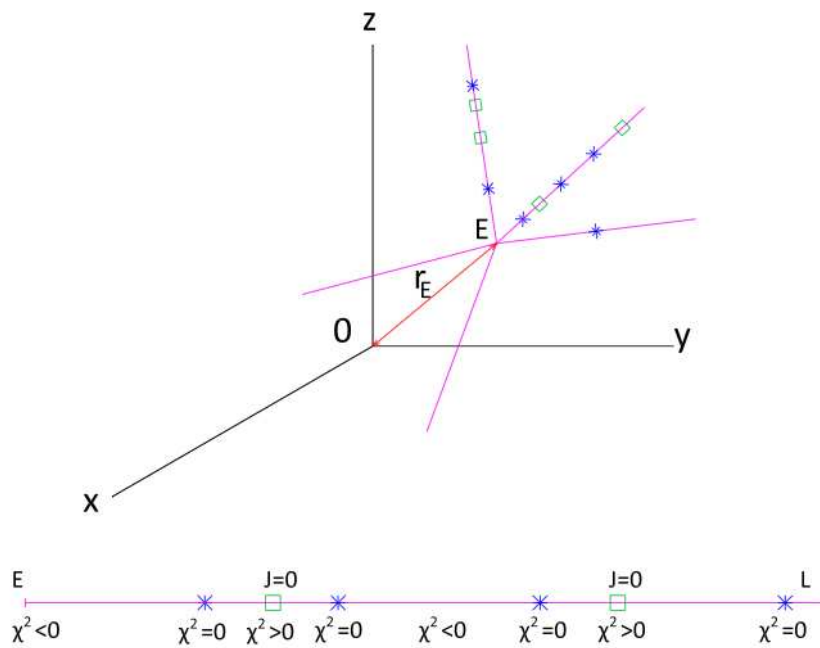


Figura 3.9: Secciones 3D ( $t_R = \text{constante}$ ) de la región de emisión. Este croquis es como el de la figura 2.1 de la sección 2.2.1, pero aquí indicamos también las zonas en las que puede haber ceros de  $J$  que, para cada dirección, son los intervalos donde la cantidad  $\chi^2$  es positiva

### 3.7.1. Los U-errores cerca y lejos de puntos de Jacobiano nulo

Más adelante buscaremos la distribución de puntos de Jacobiano nulo dentro de la E-esfera; pero antes, vamos a considerar uno de estos puntos, para hacer unos pocos experimentos que nos sugieran como son los U-errores cerca de él. Veremos que son muy grandes, a no ser que los satélites sigan exactamente las trayectorias nominales, lo cual es imposible.

Para una cierta dirección HEALPIX ( $n_{RING} = 444$ , ver sección 1.14) de la sección  $x^4 = t_R = 17 h$ , en el caso de los satélites 2, 3, 4 y 21 de GALILEO, elegimos un intervalo de  $200 km$  centrado en un cero del Jacobiano  $J$  de la transformación de coordenadas  $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$  (ver sección 3.4) y, entonces calculamos la cantidad  $\Delta_d$  en 200 puntos distribuidos uniformemente en el citado intervalo; así, la distancia entre dos puntos consecutivos es de  $1 km$ .

Para cada uno de los 200 puntos, utilizamos el método descrito en la sección anterior y calculamos  $\Delta_d$ . De acuerdo con lo dicho en aquella sección, hemos generado una desviación aleatoria  $\xi_A^\alpha$  de  $1 m$  de amplitud para cada satélite. Las componentes de la desviación resultante son presentadas en la Tabla 3.3.

| $A$ | $\Delta r [10^{-4} km]$ | $\theta (rad)$ | $\phi (rad)$ | $\Delta t [10^{-10} s]$ |
|-----|-------------------------|----------------|--------------|-------------------------|
| 1   | $8.22 \times 10^{-3}$   | 2.55           | 2.13         | 5.27                    |
| 2   | 9.41                    | 3.11           | 5.90         | 9.37                    |
| 3   | 3.26                    | 0.45           | 1.68         | 17.97                   |
| 4   | 2.51                    | 1.98           | 3.85         | 20.62                   |

Tabla 3.3: Desviaciones respecto a las líneas de universo *nominales* de los cuatro satélites.  $\Delta r$  es la desviación radial;  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas esféricas  $\theta$ ,  $\phi$ , respectivamente, y  $\Delta t$  la desviación correspondiente al tiempo coordinado

Los resultados son presentados en la figura 3.10, donde se aprecia, claramente, que el estimador  $\Delta_d$  tiene un pico alrededor del punto de Jacobiano nulo; esto significa que la posición de los usuarios cercanos a este punto está afectada de grandes U-errores, los cuales van decreciendo conforme nos separamos del punto central donde  $J = 0$ .

Ahora, para los mismos satélites, la misma sección y la misma dirección HEALPIX que antes, vamos a considerar un segmento que parte de E y llega hasta una distancia  $L = 20000 km$ ; es decir, vamos a considerar el intervalo  $0 < L < 20000 km$  cuyos usuarios están lejos de cualquier punto donde  $J$  se anula. En este segmento hemos considerado usuarios equidistantes, separados por una distancia de  $10 km$ , y hemos calculado el estimador  $\Delta_d$  correspondiente a cada uno de ellos. Para lo cual hemos utilizado las desviaciones de la Tabla 3.3. Los resultados son presentados en la figura 3.11. Los valores de  $\Delta_d$  en metros pertenecen al intervalo  $[1.47, 1.82]$ ; por tanto, los U-errores son del mismo orden de magnitud que la amplitud elegida para las desviaciones  $\xi_A^\alpha$  ( $1 m$ ). El hecho de que  $\Delta_d$  decrezca cuando nos separamos de E es algo puramente circunstancial que no ocurre para todas las direcciones.

Finalmente, en el mismo caso que hemos considerado para calcular los valores de  $\Delta_d$  representados en la figura 3.10, hemos hecho otro cálculo que vamos a describir. Para hacer este cálculo hemos generado, en vez de una (como antes), 10 desviaciones



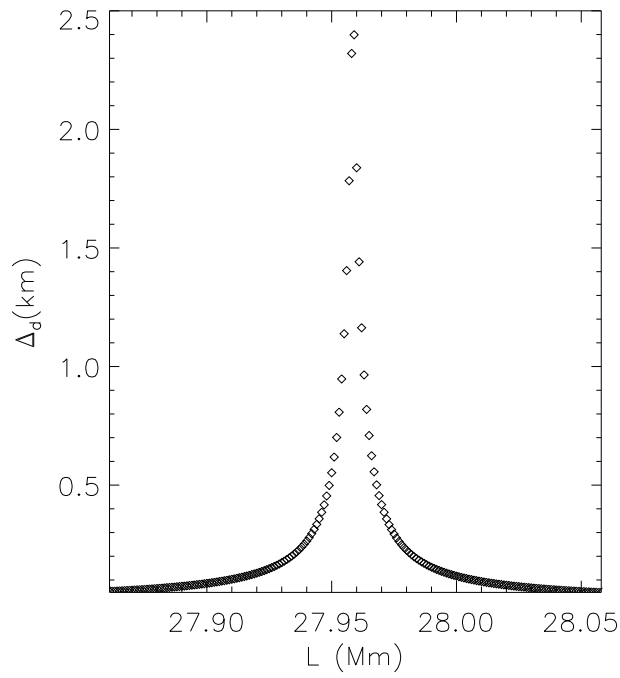


Figura 3.10: Valor de  $\Delta_d$  en función de la distancia  $L$  al punto E, en un segmento donde  $J$  se anula una vez (en el centro). Las desviaciones respecto a las líneas nominales son las de la Tabla 3.3

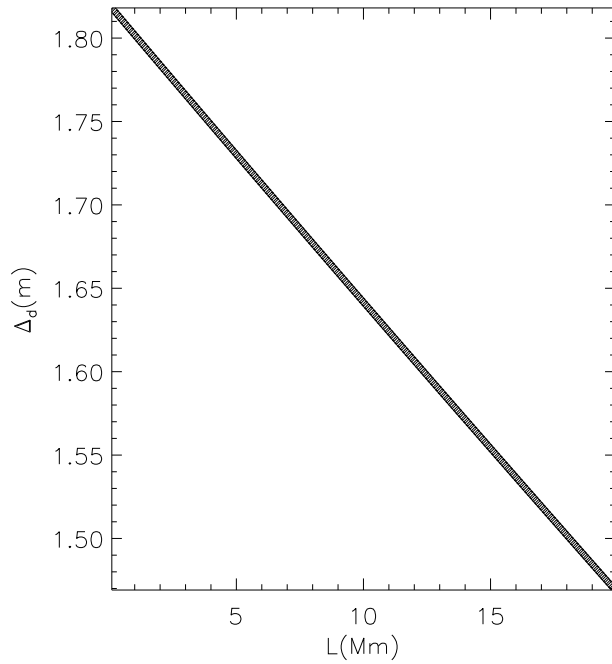


Figura 3.11: Estimador  $\Delta_d$  en función de la distancia  $L$  al punto E, para el intervalo  $0 < L < 20000 \text{ km}$ .

aleatorias  $\xi_A^\alpha$  por satélite (con 1 m de amplitud), que combinadas de todas las formas posibles nos dan 10000 desviaciones diferentes como la considerada en la Tabla 3.3. Para cada una de ellas, y para cada uno de los 200 usuarios, hemos calculado el estimador  $\Delta_d$ , obteniendo así 10000 valores en cada punto. Con estos valores hemos calculado el valor medio  $\bar{\Delta}_d$  y la desviación típica  $\sigma_s$  en todos los puntos. Si representáramos  $\bar{\Delta}_d$  en función de la distancia  $L$  a E, obtendríamos evidentemente una figura similar a la 3.10, ya que en los 10000 casos, el comportamiento de  $\bar{\Delta}_d$  sería similar. En la figura 3.12, hemos representado  $\sigma_s$  para los 200 puntos situados alrededor del que tiene  $J = 0$ . En esta figura se ve que, para las 10000 desviaciones consideradas, los valores de  $\Delta_d$  están más dispersos (peor calculados) cerca del punto  $J = 0$ . En resumen, conforme nos acercamos al punto  $J = 0$ , los U-errores son más grandes y tienen desviaciones típicas mayores.

En secciones posteriores, profundizaremos en la propiedades de la distribución del estimador  $\Delta_d$ ; o sea de los U-errores, dentro de la E-esfera; pero de momento, ya tenemos una idea de lo que puede ocurrir: errores grandes y mal calculados cerca de los ceros de  $J$ , y posible zona de U-errores moderados suficientemente cerca del punto E.

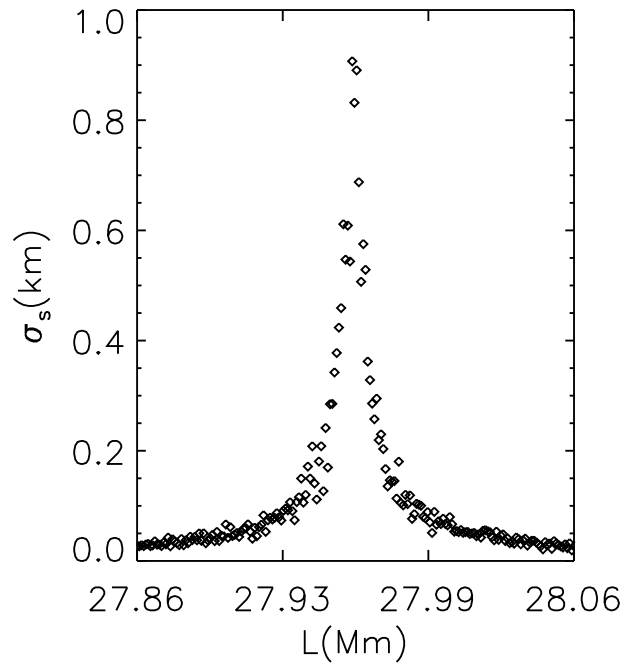


Figura 3.12: Desviación típica  $\sigma_s$  en función de la distancia  $L$  al punto E, en el mismo segmento de la figura 3.10 ( $J$  se anula una vez en el centro). Los cálculos están basados en 10000 desviaciones generadas como las de la Tabla 3.3.

### 3.7.2. Estimación numérica de $J$ , $\Delta$ , $\alpha_1 - \alpha_4$ y otras magnitudes relevantes, para distribuciones 1D de usuarios

En la sección anterior sólo hemos considerado un segmento alineado con E y que tiene la dirección HEALPIX correspondiente al píxel  $n_{RING} = 444$ . Este segmento está dentro de la E-esfera y  $J$  se anula en su centro. La 4-tupla de satélites es la 2, 3, 4, 21 de GALILEO y el segmento está en la sección  $x^4 = t_R = 17 h$ . Entonces, con las desviaciones de la Tabla 3.3, hemos calculado  $\Delta_d$  en 200 puntos, uniformemente distribuidos, separados de sus vecinos por una distancia de 1 *km*. Ahora vamos a ampliar el estudio de este caso y, con los mismos elementos, vamos a calcular las cantidades siguientes:

- la cantidad  $\Delta/\Delta_{mean}$
- la distancia  $\Delta L$
- el Jacobiano  $J$
- la diferencia  $\alpha_1 - \alpha_4$ ,

en cada uno de los 200 puntos del segmento considerado, y vamos a representarlas junto a  $\Delta_d$  en la figura 3.13.

Hemos calculado la media de los 200 valores del discriminante  $\Delta$ , a la que llamamos  $\Delta_{mean}$ , y hemos representado  $\Delta/\Delta_{mean}$  –como función de la distancia  $L$  a E– en el panel superior izquierdo de la figura 3.13. En el central (inferior) izquierdo de la misma figura se representa el Jacobiano  $J$  (el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$ ) en función de la distancia  $L$  a E. Como puede apreciarse en estos tres paneles, la cantidad  $\Delta/\Delta_{mean}$ , y por tanto  $\Delta$ , se anula en el punto medio del segmento, exactamente donde se anula el Jacobiano (panel central izquierdo) y donde también se anula  $\alpha_1 - \alpha_4$  (panel inferior izquierdo). Por tanto, hemos verificado, numéricamente, las proposiciones 1) y 3) de la sección 3.2. La cantidad  $\Delta/\Delta_{mean}$  sólo ha sido elegida –para hacer la gráfica– porque se anula en los mismos puntos que  $\Delta$  y toma valores del orden de la unidad.

En el panel superior derecho de la figura 3.13 se representa la cantidad  $\Delta L$ , que es la distancia desde un punto del segmento (caracterizado por  $L$ ) hasta su pareja por doble posicionamiento. Vemos que esta distancia se anula donde lo hace  $\Delta$ , lo cual es lógico de acuerdo con la proposición 4) de la sección 3.2, en la que se afirma que sobre la hipersuperficie  $\mathcal{J}$  los pares de puntos asociados por bifurcación coinciden; es decir, que  $\Delta L$  tiende a cero cuando nos acercamos a la hipersuperficie de Jacobiano nulo. Finalmente, hay una quinta cantidad,  $\Delta_d$ , que diverge en el punto donde se anulan las cuatro magnitudes ya consideradas ( $\Delta$ ,  $J$ ,  $\alpha_1 - \alpha_4$  y  $\Delta L$ ). Esta cantidad se representa en el panel central derecho, se trata de un estimador de los U-errores definido en la sección 3.3. No hay que pensar que el punto asociado, por bifurcación, de un punto del segmento elegido, está también en él, aunque hemos comprobado, que siempre está cerca.

El segmento considerado más arriba está incluido en uno más amplio, que va desde el punto E hasta el punto de la superficie de la E-esfera situado en el centro del píxel  $n_{RING} = 444$ . Este segmento, al que vamos a llamar EE-444 (por razones evidentes) abarca todo un radio de la E-esfera. En él hay tres puntos en los que

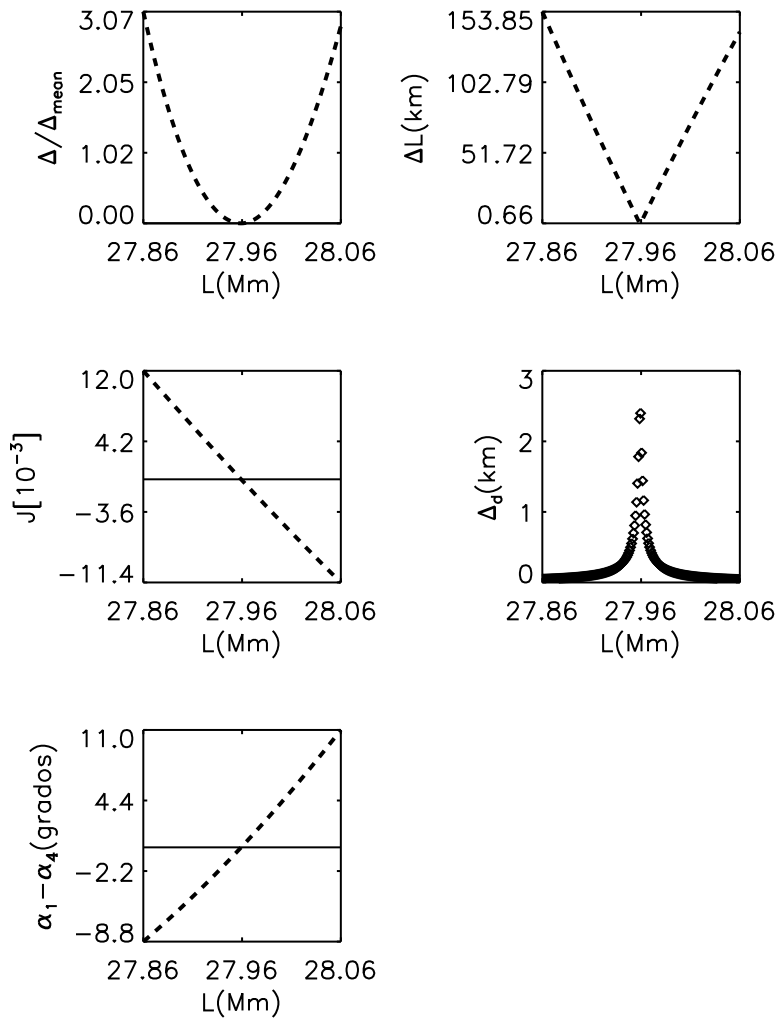


Figura 3.13: En el eje de abscisas de todos los paneles representamos la distancia  $L$  al punto E en megámetros. En los ejes de ordenadas se muestra:  $\Delta/\Delta_{mean}$  ( $\Delta L$  en kilómetros) en el panel superior izquierdo (derecho),  $J \times 10^{-3}$  ( $\Delta_d$  en kilómetros) en el panel central izquierdo (derecho), y el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$  en grados en el panel inferior.

se anula el Jacobiano  $J$ , el discriminante  $\Delta$  y el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$ . Como veremos después, hay muy pocos segmentos con tres anulaciones de  $J$ , entre los cuales, hemos seleccionado uno. En la figura 3.14, podemos ver los tres puntos en los que se produce la citada anulación.

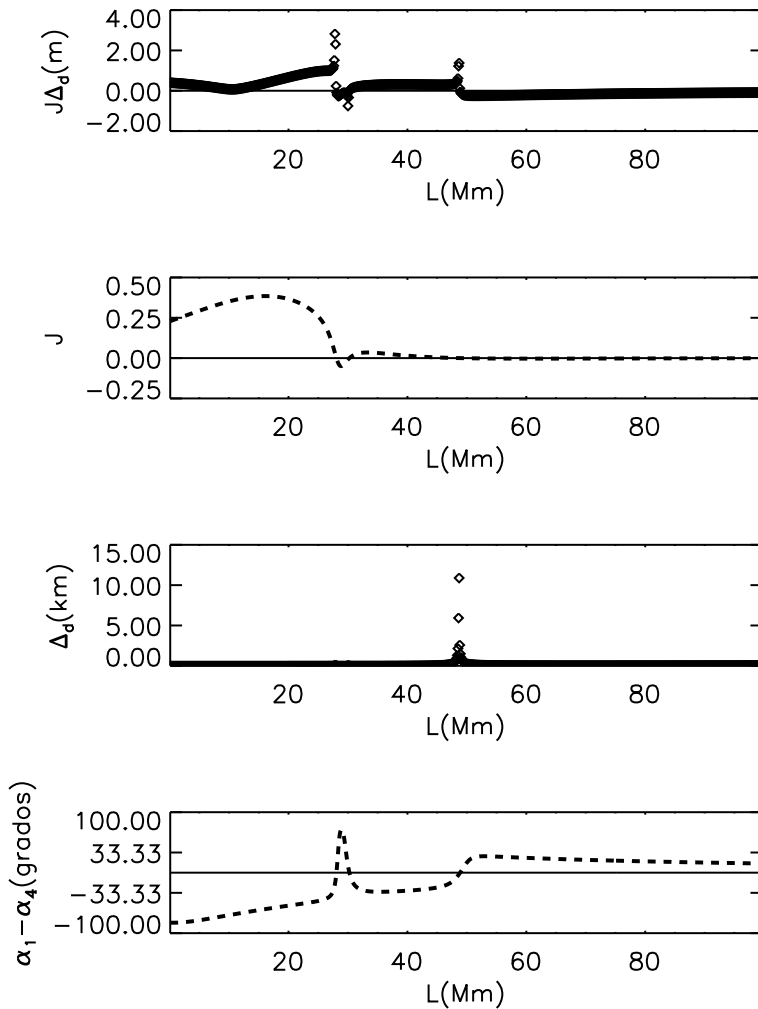


Figura 3.14: En los cuatro paneles representamos, de arriba abajo, las cantidades  $J\Delta_d$  en metros,  $J$ ,  $\Delta_d$  en kilómetros y  $\alpha_1 - \alpha_4$  en grados. Estas cantidades son representadas en función de la distancia  $L$  al punto E a lo largo de todo el segmento EE-444

Como ocurre en la mayor parte de los casos, las anulaciones de  $\alpha_1 - \alpha_4$  se ven nítidamente en representaciones que abarcan todo un radio de la E-esfera. Sin embargo, la tercera anulación de  $J$  no es apreciable en la figura 3.14. Parece que la cantidad  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  es superior a 10 grados en todos los puntos del segmento EE-444, excepto en aquellos que están muy próximos a los puntos de anulación. Esto es importante, ya que como veremos más adelante, un usuario puede calcular tanto  $J$  como  $\alpha_1 - \alpha_4$

midiendo ciertos ángulos  $y$ , en tal caso, parece más fácil que pueda decidir si está cerca de un punto conflictivo con valores muy grandes del estimador  $\Delta_d$  (que no se puede calcular utilizando medidas realizadas por el usuario) haciendo uso de la diferencia  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ , que nunca es demasiado pequeña (exceptuando pequeños entornos de los puntos de corte).

En el panel superior de la figura 3.14, y en otras figuras, se representa el producto  $J\Delta_d$  para ver si es constante en algunas zonas y cómo se comporta cuando nos acercamos a una anulación de  $J$ . En este panel, la resolución no es suficientemente buena para observar este comportamiento; por eso, hemos hecho representaciones sobre segmentos de longitud adecuada, que contienen una de las tres anulaciones en su punto medio.

En la figura 3.15, consideramos el punto de anulación de la izquierda de la figura 3.14, que está situado en el centro de un intervalo de 200  $km$ , en el que los usuarios contiguos están separados por una distancia de 1  $km$  (este es el segmento considerado al principio de esta sección). Por tanto, lo único novedoso de esta figura es su panel superior, los otros paneles se hayan incluidos en la figura 3.13, aunque hemos decidido repetirlos con otras escalas. En el panel superior puede verse que, cuando nos acercamos al punto de anulación, la cantidad  $J\Delta_d$  tiende a cero, lo que significa que  $J$  tiende a cero más rápido que  $1/\Delta_d$ , pero en cuanto nos separamos un poco de la anulación,  $|J\Delta_d|$  es casi constante dentro de cierto intervalo; para entender esto, hay que tener en cuenta que  $J$  tiene signo contrario en ambas partes de la anulación, y que el estimador  $\Delta_d$  es siempre positivo por definición.

Del mismo modo, el punto de anulación central (de la derecha) de la figura 3.14 es considerado en la figura 3.16 (3.17). Esta anulación está en el centro de un intervalo de 5  $km$  (40  $km$ ), en el que cualquier usuario está separado por una distancia de 0.025  $km$  (0.2  $km$ ) de su vecino. En los paneles superiores se observa lo mismo que en el de la figura 3.15; es decir,  $J\Delta_d$  tiende a cero cuando nos acercamos a los puntos de anulación, y  $|J\Delta_d|$  es casi constante en los intervalos considerados. Esto es una regla general cerca de los puntos de anulación.

Vamos a considerar ahora una dirección sin puntos de anulación para estudiar la cantidad  $|J\Delta_d|$  globalmente, es decir, en todo el radio de la E-esfera asociado a la dirección elegida. Los resultados, correspondientes a la dirección  $n_{RING} = 2306$  de la sección  $x^4 = t_R = 17 h$ , para los satélites 2, 5, 20, 23 de GALILEO, son presentados en el panel superior de la figura 3.18. Como puede apreciarse en este panel, el producto  $J\Delta_d$  no es constante en todo el segmento EE-2306. Hemos probado otros productos de la forma  $|J\Delta_d^\lambda|$ , pero no hemos encontrado un buen ajuste global para ningún valor del exponente  $\lambda$ . Como puede apreciarse en el panel inferior,  $\alpha_1 - \alpha_4$  es claramente distinto de cero en todo el intervalo, mientras que  $J$  es muy próximo a cero para valores de  $L$  superiores a unos 50  $Mm$ . Esto también es una regla general en todas las direcciones que hemos investigado.

La figura 3.19 es como la 3.18, pero -en ella- hemos elegido valores máximos y mínimos apropiados sobre el eje de ordenadas, de esta forma, podemos ver el comportamiento de las cantidades representadas, en las zonas donde sus valores son pequeños y la figura 3.18 no nos permite ver cómo varían. En el panel superior de la figura 3.19 vemos que para valores grandes de  $L$ , la cantidad  $J\Delta_d$  no es constante. En el central observamos que el valor de  $J$  es muy pequeño y decrece a grandes

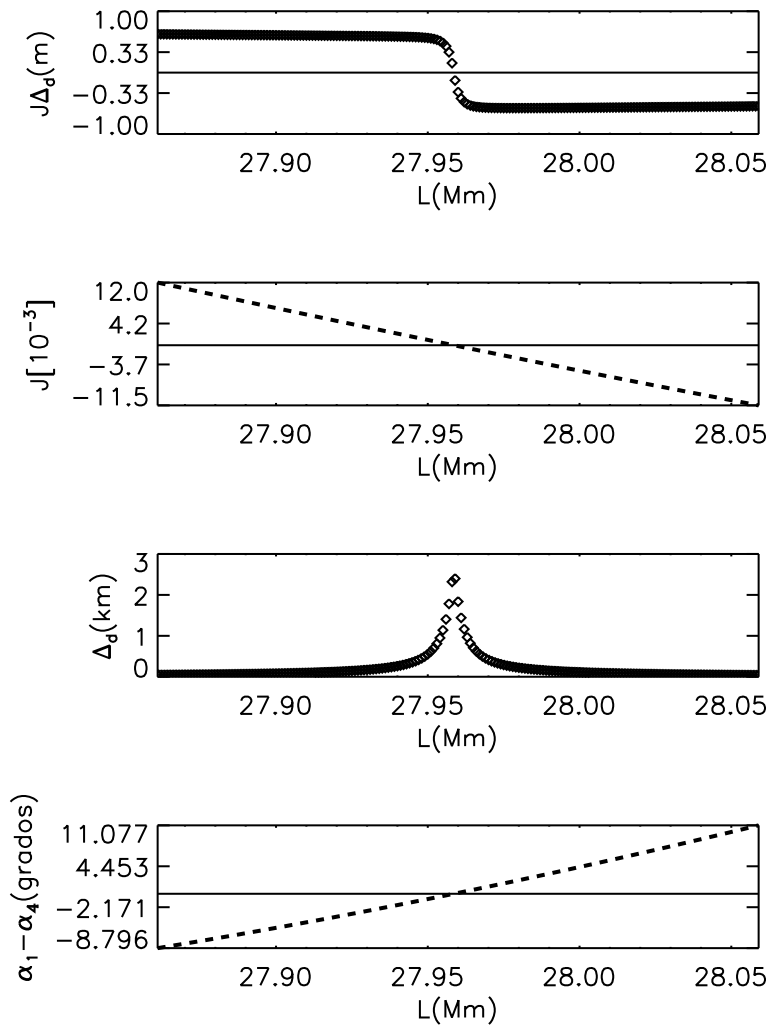


Figura 3.15: Zoom de la figura 3.14, en torno a la primera anulación del Jacobiano  $J$ .



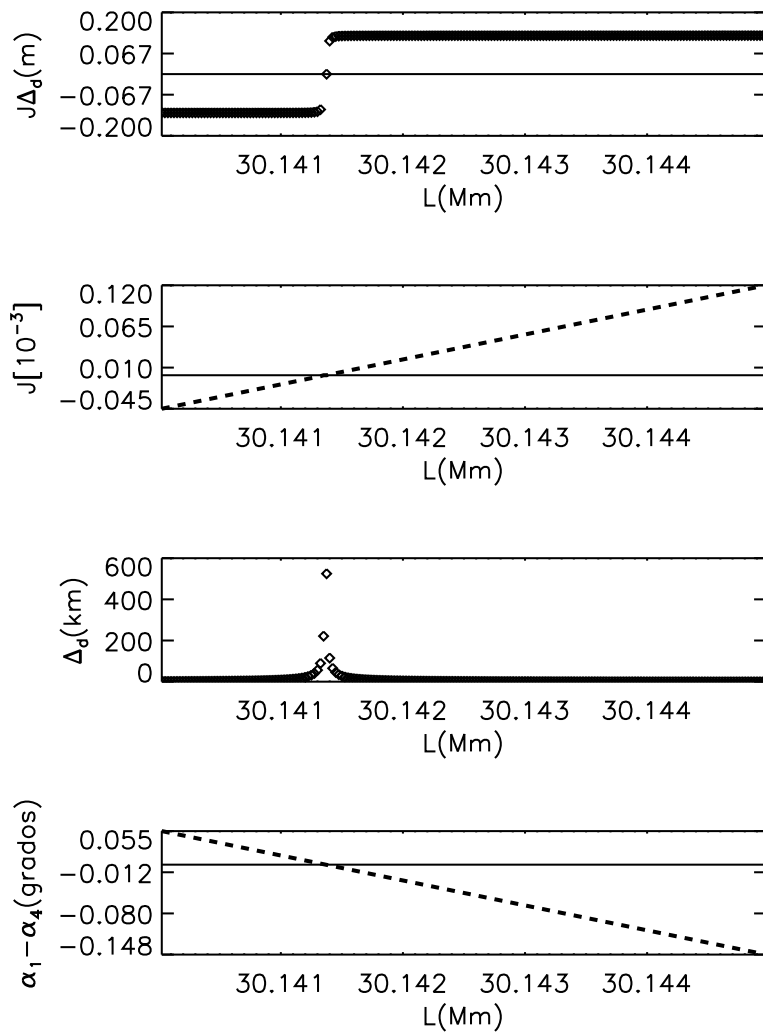


Figura 3.16: Zoom de la figura 3.14, en torno a la segunda anulación del Jacobiano  $J$ .

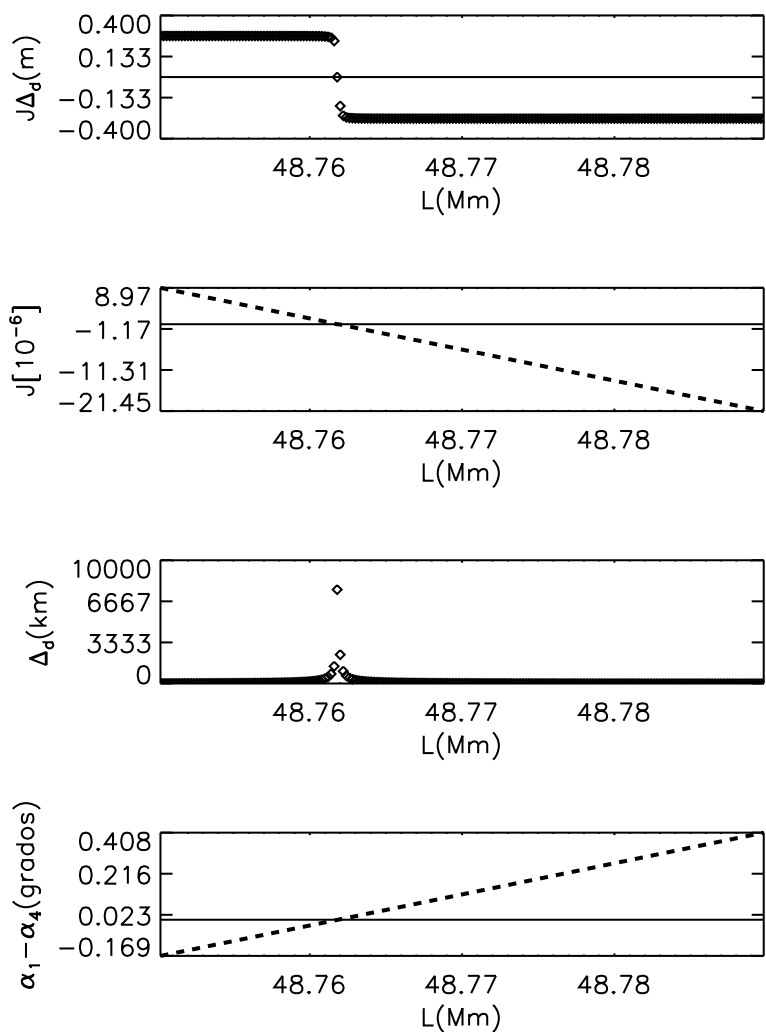


Figura 3.17: Zoom de la figura 3.14, en torno a la tercera anulación del Jacobiano  $J$ .

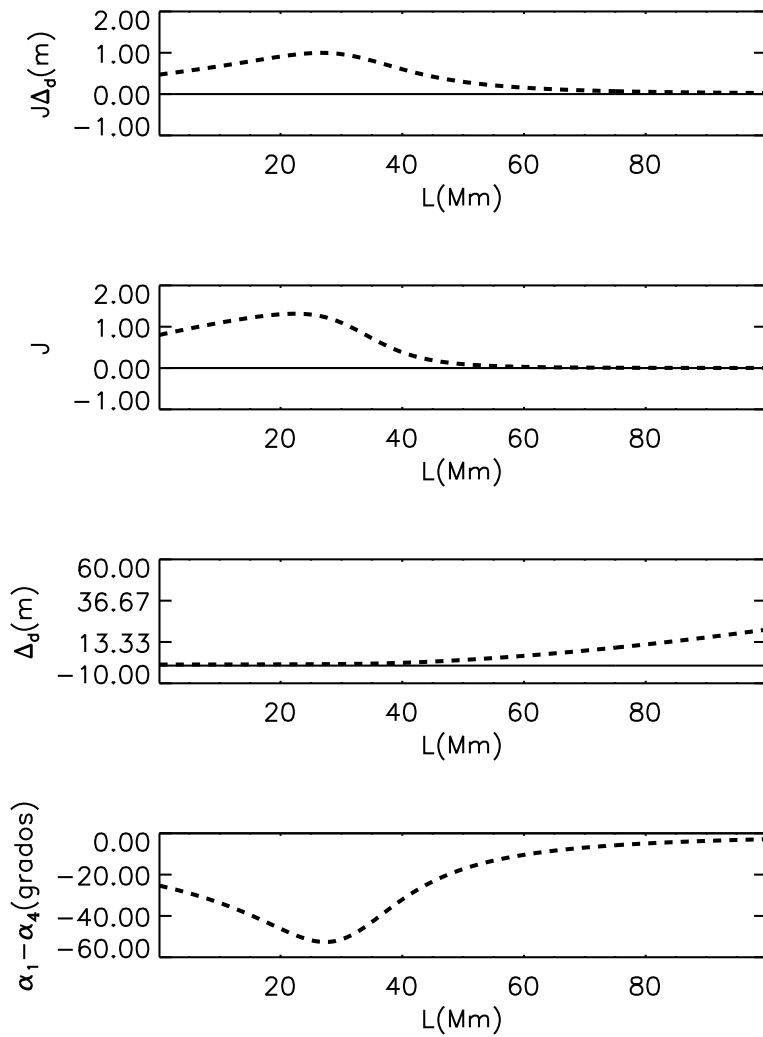


Figura 3.18: Lo mismo que en la figura 3.14, pero la 4-tupla de satélites es 2, 5, 20, 23 y la dirección HEALPIX evaluada es  $n_{RING} = 2306$  en la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 17 h$ .

distancias de E, lo que sólo curre en escasas direcciones; finalmente, en el panel inferior vemos que, no muy lejos de la Tierra,  $\Delta_d$  crece con la distancia  $L$  a E.

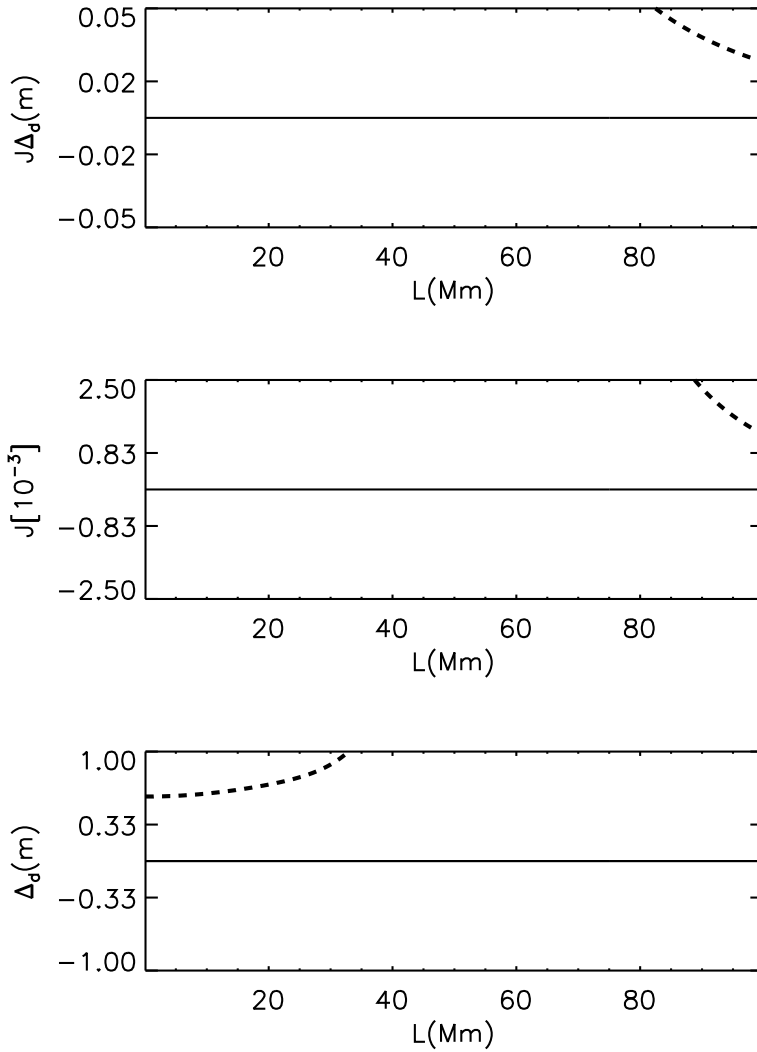


Figura 3.19: Idem que la figura 3.18 pero eliminando el cuarto panel y además fijando tanto un máximo como un mínimo en el eje de ordenadas de cada panel.

Para obtener los U-errores (tercer panel contando de arriba a abajo) de las figuras 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18 y 3.19, hemos considerado que, para cualquier usuario situado en los segmentos EE-444 y EE-2306, las desviaciones  $\xi_A^\alpha$  –con respecto a las líneas de universo nominales de los satélites– son las mostradas en la tabla 3.3; por supuesto, estos U-errores han sido calculados con el método descrito en la sección 3.3. Cerca de los ceros de  $J$ , el cálculo de los U-errores no tiene ningún sentido físico, ya que los U-errores divergen en  $J = 0$  y son muy grandes cerca; ello es consecuencia de una situación degenerada, en la que los cuatro satélites son vistos –por el usuario–

en direcciones que pertenecen a un mismo cono, cuyo vértice coincide con el usuario.

En esta sección, nos hemos centrado en el estudio comparativo del comportamiento de los pares de magnitudes  $(J, \alpha_1 - \alpha_4)$  y  $(J, \Delta_d)$ , para segmentos radiales de la E-esfera. Realmente, hemos elegidos unos pocos segmentos significativos entre los muchos que hemos estudiado.

### 3.8. Análisis numérico detallado de los U-errores para tres direcciones particulares

En esta sección vamos a profundizar en el estudio de los U-errores, que van a ser calculados para las desviaciones de la Tabla 3.3 como en algunas secciones anteriores; así pues, su amplitud es de 1  $m$  y diremos que están normalizadas a la unidad.

Consideraremos tres direcciones correspondientes a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20 y 23 de GALILEO y a la hipersuperficie  $x^4 = 19 h$ . Llamaremos  $N_J$  al número de anulaciones del Jacobiano en una dirección. En el caso elegido, el Jacobiano no llega a anularse tres veces en ninguna de las 3072 direcciones HEALPIX estudiadas ( $N_J < 3$ ).

La primera dirección corresponde a  $n_{RING} = 25$  y no contiene ceros del Jacobiano ( $N_J = 0$ ), la segunda (tercera) tiene  $n_{RING} = 444$  ( $n_{RING} = 2800$ ) y  $N_J = 1$  ( $N_J = 2$ ).

Para la primera dirección, los valores de  $J$  se presentan en el panel superior de la figura 3.20. El rango de valores de  $J$  va desde  $J = 0.23$  en el punto E hasta  $J = 2.6 \times 10^{-4}$  para  $L = 10^5 km$ . El hecho de que el Jacobiano nunca es nulo es particularmente evidente en el panel inferior de 3.20, donde la cantidad  $\alpha_1 - \alpha_4$  es claramente diferente de cero, lo cual implica  $J \neq 0$ . Además, la cantidad  $\alpha_1 - \alpha_4$  varía desde  $-9.39^\circ$  en E hasta  $-0.59^\circ$  en  $L = 10^5 km$ . El estimador de los U-errores  $\Delta_d$  es representado en el panel intermedio, como una función de la distancia  $L$  al punto E. La cantidad  $\Delta_d$  aumenta desde 1.71  $m$  en E ( $L = 0$ ) hasta 33.8  $m$  en  $L = 10^5 km$ . A partir de los paneles superior e intermedio concluimos que: en ausencia de ceros de  $J$ ,  $\Delta_d$  aumenta conforme  $|J|$  decrece. Sin embargo, según lo visto en la sección anterior,  $\Delta_d$  depende del Jacobiano  $J$  y también de otras cantidades que definen la configuración usuario-satélites, de modo que  $\Delta_d$  no puede ser calculado únicamente a partir del valor de  $J$ . Vemos un U-error de 33.8  $m$  asociado a los valores pequeños de  $J = 2.6 \times 10^{-4}$  y  $\alpha_1 - \alpha_4 = -0.59^\circ$  (ver primera fila de la tabla 3.4).

La figura 3.21 muestra los resultados obtenidos para la segunda dirección estudiada, la cual contiene solamente un punto,  $P_{1J}$ , donde  $J$  vale cero ( $N_J = 1$ ). La distancia  $L$  desde E hasta el punto donde  $J$  es nulo, llamada  $L_1$ , está comprendida entre 29700  $km < L < 29800 km$ . El punto  $P_{1J}$  es visible en todos los paneles. En el panel de abajo,  $P_{1J}$  es el único punto donde  $\alpha_1 - \alpha_4$  vale cero. De hecho, el Jacobiano es nulo en el mismo punto, tal y como puede verse en el panel de arriba. En el panel intermedio-superior, la cantidad  $\Delta_d$  toma valores muy altos cerca del punto  $P_{1J}$ . Los valores de  $\Delta_d$  representados en la figura 3.21 dependen de las distancias entre los puntos seleccionados para los cálculos y el punto  $P_{1J}$ . Cuanto más próximo esté el punto elegido –para los cálculos– de  $P_{1J}$ , la cantidad  $\Delta_d$  será mayor. En la figura 3.21, los valores de  $J$ ,  $\Delta_d$  y  $\alpha_1 - \alpha_4$  a una distancia  $L = 10^5 km$

de E son  $\sim -1.24 \times 10^{-3}$ ,  $\sim 8.4 m$  y  $\sim 4.9^\circ$ , respectivamente. Además, el tamaño del segmento centrado en  $P_{1J}$  donde la cantidad  $\Delta_d$  es más pequeña que  $10 m$  es  $\Delta L_{1J} \simeq 600 km$ . Los valores de  $J$ ,  $\Delta_d$  y  $\alpha_1 - \alpha_4$  en el punto E son independientes de la dirección elegida. Estos valores fueron dados en el parágrafo anterior (primera dirección). Para esta segunda dirección un U-error de  $8.4 m$  está asociado a los valores  $J = -1.24 \times 10^{-3}$  y  $\alpha_1 - \alpha_4 = 4.9^\circ$  en la superficie (frontera) de la E-esfera. Todos estos resultados han sido incluidos en la segunda fila de la tabla 3.4.

Finalmente, los resultados obtenidos para la tercera dirección son mostrados en la figura 3.22. Hay dos puntos,  $P_{1J}$  y  $P_{2J}$ , donde  $J$  es cero. La distancia  $L$  desde E hasta  $P_{1J}$  ( $P_{2J}$ ) pertenece al intervalo  $[27300, 27400] km$  ( $[39900, 40000] km$ ). A partir del panel inferior podemos decir que  $J$  vale cero dos veces ( $N_J = 2$ ) a lo largo de esta dirección. También pueden verse los dos puntos donde  $J$  es nulo en el panel superior. El estimador de los U-errores  $\Delta_d$  es representado en los paneles intermedio-inferior e intermedio-superior, usando el mismo criterio que en la figura 3.21. En la figura 3.22, y en el punto cuya distancia a E es  $L = 10^5 km$ , los valores de  $J$ ,  $\Delta_d$  y  $\alpha_1 - \alpha_4$  son  $\sim 2.1 \times 10^{-3}$ ,  $\sim 22.9 m$  y  $\sim -8.15^\circ$ , respectivamente. Además, el tamaño de los segmentos centrado en  $P_{1J}$  y en  $P_{2J}$ , donde la cantidad  $\Delta_d$  es menor que  $10 m$ , son  $\Delta L_{1J} \simeq 8700 km$  y  $\Delta L_{2J} \simeq 5000 km$ , respectivamente. Para esta tercera dirección, un error de  $22.9 m$  corresponde a  $J = 2.1 \times 10^{-3}$  y  $\alpha_1 - \alpha_4 = -8.15^\circ$  en la superficie (frontera) de la E-esfera. Todos estos datos han sido resumidos en la tercera fila de la tabla 3.4.

En las figuras 3.21 y 3.22,  $\Delta_d$  aumenta conforme las cantidades  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  se aproximan a cero, pero este crecimiento solamente ocurre cuando  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  toman valores suficientemente próximos a cero. Para valores de  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ , que son suficientemente grandes, el error no aumenta -en general- al decrecer las cantidades  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ . Estos comentarios nos permiten entender los siguientes enunciados consistentes con los datos de la tabla 3.4:

- Los valores de  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  correspondientes a la dirección 25 (primera fila) son muy pequeños y mucho más pequeños que aquellos que corresponden a las direcciones 444 y 2800 y, sin embargo, el error de la dirección 25 es el mayor ( $33.8 m$ ) de los tres casos.
- Para la dirección 444, las cantidades  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  son más pequeñas que las correspondientes a la dirección 2800, pero el error de la dirección 444 ( $8.4 m$ ) es menor que el correspondiente a la dirección 2800 ( $22.9 m$ ).

Esto significa que la 4-tupla usada para estimar las cantidades mostradas en la tabla 3.4 no es muy buena para la dirección 25 en  $L = 10^5 km$ . Otra 4-tupla podría ser más apropiada. Finalmente, para las direcciones 444 y 2800, la 4-tupla conduce a un mejor posicionamiento, en  $L = 10^5 km$ , para los valores más pequeños de  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  (comparar la segunda fila con la tercera fila). Estos resultados deben tenerse en cuenta para elegir la mejor 4-tupla de entre todas las combinaciones posibles de 4 satélites de la constelación de GALILEO. De hecho, esta 4-tupla debe conducir al posicionamiento más preciso. Es decir, toda esta información sirve para la posible caracterización de las 4-tuplas de satélites que conducen a los mínimos errores de posicionamiento.

A partir del estudio que hemos elaborado para muchas direcciones correspondientes a diferentes hipersuperficies  $x^4 = constante$  y distintas 4-tuplas de satélites, hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- i) Los puntos  $P_J$ , donde  $J$  es nulo, están localizados a diferentes distancias de E. Estas distancias dependen de la dirección elegida, así como de la hipersuperficie  $x^4 = constante$  y de la 4-tupla de satélites escogidas. Cada punto  $P_J$  tiene una región de influencia alrededor de él. En esta región, la cantidad  $|J|$  es pequeña y, por tanto, los errores de posicionamiento son grandes. El usuario debe estar fuera de una cierta zona -localizada en el interior de la región de influencia- para tener errores de posicionamiento por debajo de un nivel dado. El tamaño de estas zonas oscila de cientos a miles de kilómetros, dependiendo tanto del nivel  $\Delta_d$  elegido, como de otros parámetros que caracterizan las configuraciones usuario-satélites para usuarios localizados en el interior de la E-esfera.
- ii) Suficientemente lejos de las zonas con ceros de  $J$ , los valores  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  decrecen al aumentar la distancia  $L$  a E y, en consecuencia, los errores de posicionamiento aumentan. Este crecimiento de los errores y decrecimiento de  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ , excluyendo las regiones de ceros de  $J$ , depende de cada dirección.
- iii) Para  $L = 10^5 km$  y suficientemente lejos de cualquier punto de Jacobiano nulo, el orden de magnitud para el error  $\Delta_d$  toma valores entre  $10 m$  y  $10^2 m$

En particular, las conclusiones (i) y (ii) están de acuerdo con nuestros comentarios previos acerca de las figuras 3.20, 3.21 y 3.22.

Si asumimos que las desviaciones con respecto a las trayectorias nominales de los satélites de GPS y GALILEO tienen una amplitud de  $10 m$  (como se hizo en [Puchades 2014]), todos los valores de  $\Delta_d$  dados anteriormente deben ser multiplicados por 10, ya que han sido obtenidos para una amplitud de  $1 m$  (ver la sección 3.3).

| Dirección | $N_J$ | $\alpha_1 - \alpha_4$ (°) | $J$                   | $\Delta_d$ (m) | $\Delta L_{1J}$ (km) | $\Delta L_{2J}$ (km) |
|-----------|-------|---------------------------|-----------------------|----------------|----------------------|----------------------|
| 25        | 0     | -0.6                      | $2.6 \times 10^{-4}$  | 33.8           | -                    | -                    |
| 444       | 1     | 4.9                       | $-1.2 \times 10^{-3}$ | 8.4            | 600                  | -                    |
| 2800      | 2     | -8.1                      | $2.1 \times 10^{-3}$  | 22.9           | 8700                 | 5000                 |

Tabla 3.4: Análisis de los errores de posicionamiento a lo largo de las tres direcciones. Las cantidades  $\alpha_1 - \alpha_4$ ,  $J$  y  $\Delta_d$  han sido calculadas en la frontera de la E-esfera para cada dirección ( $L = 10^5 km$ ). Las anchuras de las áreas de influencia  $\Delta L_{1J}$  y  $\Delta L_{2J}$  corresponden a un nivel de  $\Delta_d$  de  $10 m$ .

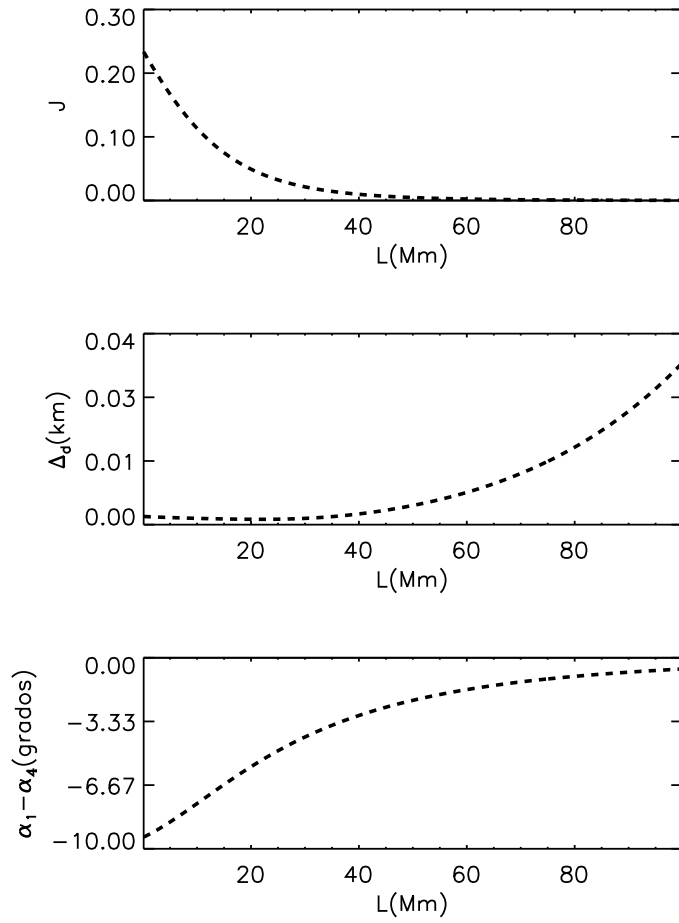


Figura 3.20: Todos los paneles son representaciones de ciertas cantidades en función de la distancia  $L$  al punto E en megámetros. En el superior, el intermedio y el inferior se representa el Jacobiano  $J$ , el estimador de U-errores  $\Delta_d$  y el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$ , respectivamente. Todas las curvas corresponden a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23, a la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 19 h$  y a la dirección HEALPIX  $n_{RING} = 25$



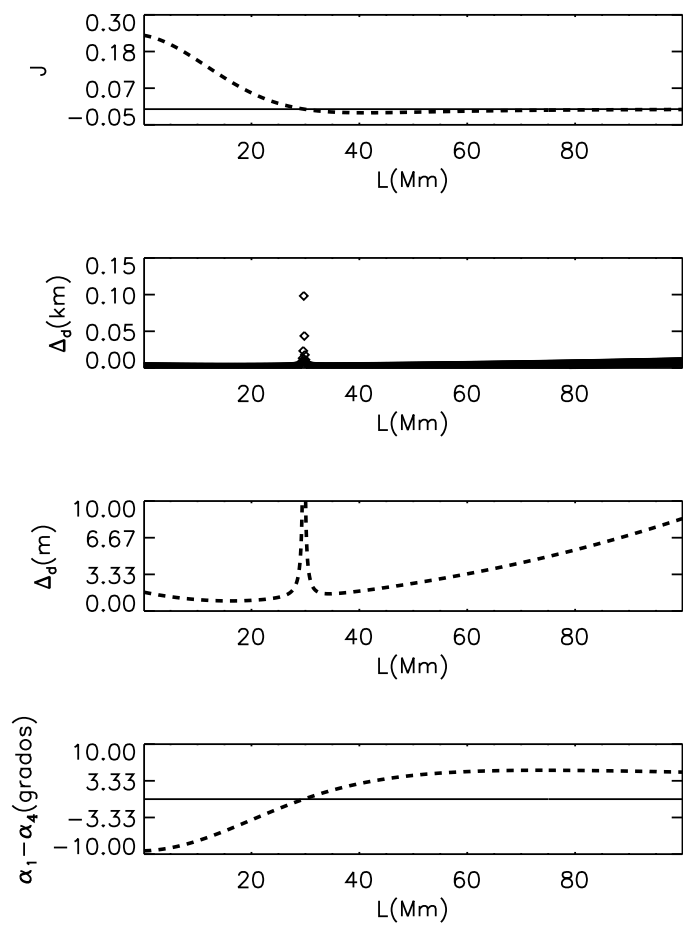


Figura 3.21: Se representan las mismas cantidades que en la figura 3.20 y en el mismo orden. La 4-tupla y los satélites son los mismos, pero en esta figura la dirección elegida es  $n_{RING} = 444$ . Además, se usan dos paneles intermedios para presentar la función  $\Delta_d(L)$ . En el panel intermedio-inferior, todos los valores de  $\Delta_d$  mayores que 10 m han sido eliminados, para hacer visible los errores de posicionamiento lejos del punto  $J = 0$ .

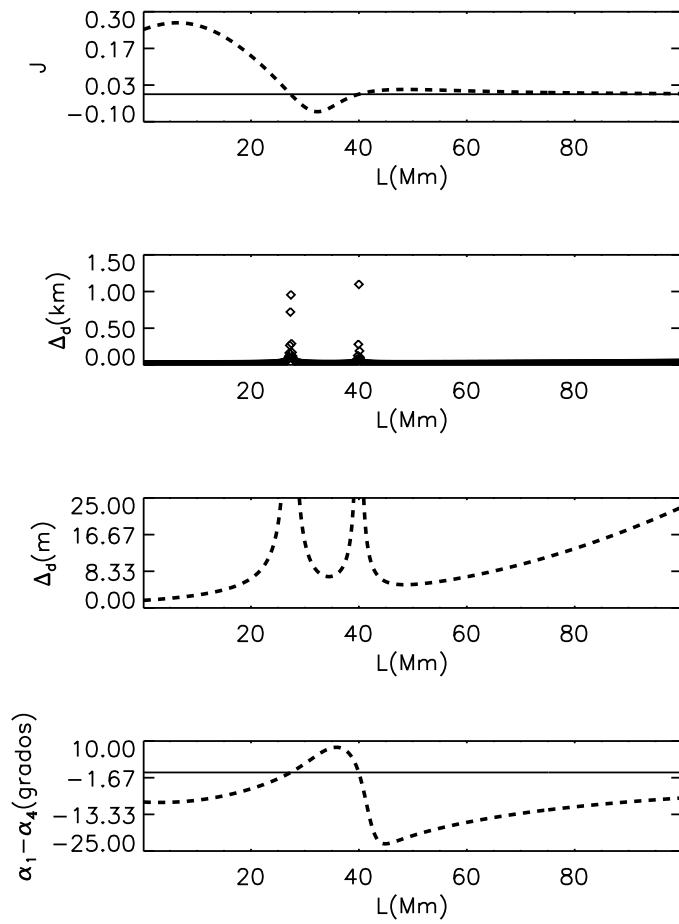


Figura 3.22: Esta figura tiene la misma estructura que la 3.21, pero la dirección estudiada es  $n_{RING} = 2800$ .

### 3.9. U-errores hasta $L = 10^3 Mm$

En esta sección calculamos los U-errores hasta  $L = 10^3 Mm$ ; es decir, consideramos usuarios muy distantes del punto E, que no han sido considerados en secciones previas. Por supuesto el procedimiento de cálculo es –como hasta ahora– el descrito en 3.3.

Al igual que en el resto del capítulo, la amplitud considerada en las incertidumbres  $\xi_A^\alpha$  de las líneas de universo de los satélites (GALILEO) es  $1 m$  (normalización).

En la figura 3.23 representamos los valores del estimador  $\Delta_d$  para  $0 < L < 10^3 Mm$ . Recuérdese que  $L$  es la distancia al punto central E arbitrariamente seleccionado en la sección 1.16. Como en secciones anteriores, usamos direcciones HEALPIX para  $N_{side} = 16$  y, a cada dirección le asociamos un segmento radial con una longitud de  $10^3$  megámetros, que contiene puntos (usuarios) uniformemente distribuidos y separados por una distancia de  $2000 km$ .

Las dos líneas representadas en 3.23, corresponden a dos direcciones HEALPIX diferentes. En esta gráfica podemos ver que:

- Si tratáramos de posicionar un usuario sobre la Luna, que está a una distancia media de unos  $384000 km$  de la Tierra, los U-errores llegarían a ser de unos  $\sim 2 km$ , para la dirección  $n_{RING} = 3072$  que da los errores más grandes; pero conviene ahora recordar que hemos asumido que la amplitud de las desviaciones  $\xi_A^\alpha$  es  $1 m$ .
- Para valores más realistas de estas desviaciones, los U-errores serían mayores; así, si consideramos una amplitud de  $\sim 10 m$  (como en [Puchades 2014]), los U-errores sobre la Luna serían de unos  $20 km$
- En la figura 3.23 puede verse que a la distancia máxima considerada ( $L = 10^3 Mm$ ), el estimador de los U-errores vale  $\Delta_d \sim 6 km$  para la dirección  $n_{RING} = 1600$  y  $\Delta_d \sim 24 km$  para  $n_{RING} = 3072$ . Errores muy grandes incluso para la amplitud de las desviaciones normalizada a  $1 m$ .

De todo esto se deduce que los U-errores aumentan con la distancia  $L$  al punto E, de modo que, para valores suficientemente grandes de  $L$  (lejos de la Tierra), el posicionamiento mediante emisores situados en cualquier GNSS estándar es demasiado impreciso (U-errores demasiado grandes).

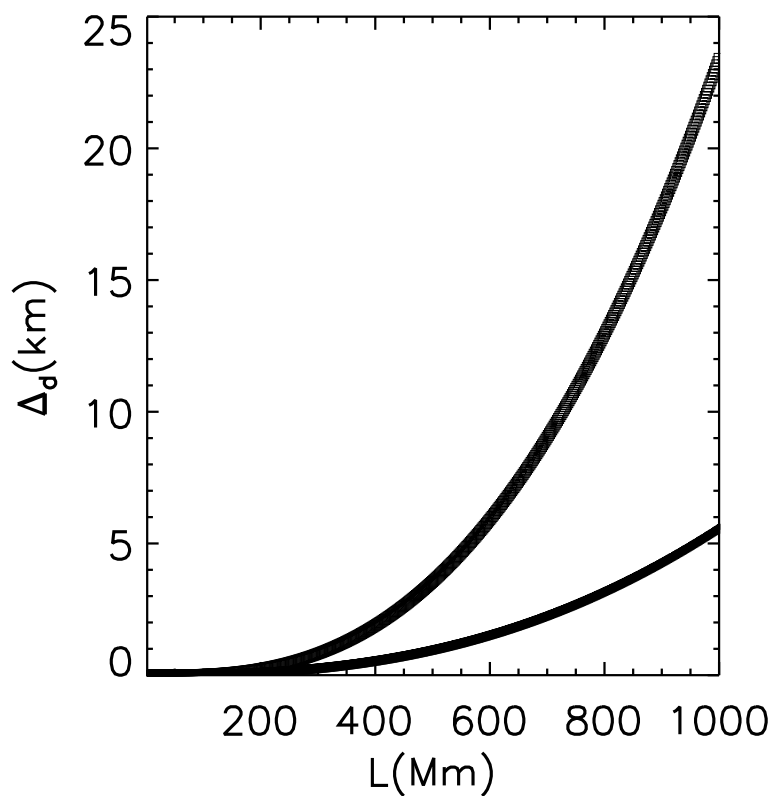


Figura 3.23: Estimador  $\Delta_d$  en función de  $L$  para  $0 < L < 10^6$  km. Las línea inferior (superior) corresponde a la dirección HEALPIX  $n_{RING} = 1600$  ( $n_{RING} = 3072$ ). La 4-tupla de satélites es 2, 5, 20, 23, y la hipersuperficie es  $x^4 = t_R = 17$  h.

### 3.10. Distribución de los valores del $J$ en la región de emisión

El objetivo de esta sección es estudiar la distribución de los valores del Jacobiano  $J$  en la región de emisión; para ello consideramos usuarios dentro de la E-esfera en varias secciones  $x^4 = t_R = \text{constante}$ . La distribución de usuarios se hace tal y como se ha descrito en la sección 3.7 (ver también la sección 2.2.1).

Para cada una de las hipersuperficies  $x^4 = t_R$  de la primera columna, la tabla 3.5 muestra el valor mínimo y el máximo que toma el Jacobiano  $J$ . Estos valores han sido calculados considerando todos los usuarios que hay dentro de la E-esfera; es decir, mil usuarios para cada una de las 3072 direcciones HEALPIX ( $N_{side} = 16$ ).

| $t_R(h)$ | $J_{min}$ | $J_{max}$ |
|----------|-----------|-----------|
| 13       | -0.48     | 0.64      |
| 15       | -0.36     | 1.97      |
| 17       | -0.25     | 1.74      |
| 19       | -0.50     | 0.88      |
| 21       | -1.13     | 0.55      |
| 23       | -1.42     | 0.17      |
| 25       | -1.68     | 0.49      |

Tabla 3.5: Las columnas (de izquierda a derecha) son: la hipersuperficie  $x^4 = t_R$  considerada, el valor mínimo  $J_{min}$  y el máximo  $J_{max}$  del Jacobiano  $J$ . La 4-tupla de satélites es 2, 5, 20 y 23 de GALILEO

Las figuras 3.24 y 3.25 corresponden a dos hipersuperficie  $x^4 = t_R$  diferentes. En ellas dibujamos la distancia desde el punto E hasta aquel en el que el Jacobiano toma, por primera vez (posición más cercana a E), un valor determinado. Esta distancia depende de la dirección HEALPIX y, para hallarla, calculamos el valor del Jacobiano, desde  $L = 0$  hasta  $L = 100000 \text{ km}$ , para usuarios (puntos) uniformemente distribuidos y separados de sus vecinos por distancias de  $100 \text{ km}$  y, luego, hallamos –por interpolación– los valores de  $L$  para los que el Jacobiano toma el valor elegido. El valor más pequeño es la distancia buscada.

Esto nos permite conocer en qué direcciones hay puntos en los que  $J$  toma un valor dado, y la distancia a E del punto más cercano donde esto ocurre. Esta distancia,  $L_J^{(1)}$ , será mostrada mediante un mapa de tipo HEALPIX-Mollweide y una barra de colores que tiene a su izquierda (derecha) el mínimo (máximo) valor que toma  $L_J^{(1)}$  en todo el mapa; estos valores serán llamados  $L_{Jmin}^{(1)}$  y  $L_{Jmax}^{(1)}$ . Todos los píxeles correspondientes a direcciones en las que el valor seleccionado de  $J$  no aparece serán coloreados de gris. De esta forma, observando las proporciones entre píxeles grises y coloreados, en un mapa correspondiente a un cierto valor de  $J$ , será posible hablar de la abundancia de las direcciones en las que este valor aparece. Las figuras 3.24 y 3.25 contienen mapas de este tipo correspondientes a varios valores de  $J$ .

En la figura 3.24 vemos que los valores  $J = 0.2$  y  $J = 0.6$  se alcanzan en todas las direcciones HEALPIX (no hay píxeles grises en los paneles 3.24c y 3.24d), mientras que el valor  $J = -0.2$  sólo aparece en un segmento radial, cuyo píxel asociado es

el único coloreado del panel 3.24a. Sin embargo, en la figura 3.25, son los valores  $J = -0.25$ ,  $J = -0.5$  y  $J = -0.75$  los que aparecen en todas las direcciones, mientras que para el valor  $J = 0.25$  hay únicamente nueve direcciones, de entre las 3072 posibles, en las que  $J$  toma este valor.

De las figuras 3.24 y 3.25 se deduce que:

- (i)  $|J|$  toma valores en el intervalo  $[0, 2)$
- (ii) El Jacobiano se anula a distancias  $L$  mayores que unos 20000  $km$ , tal y como se puede ver en las figuras 3.24b ( $L_{Jmin}^{(1)} = 24400 km$ ) y 3.25g ( $L_{Jmin}^{(1)} = 23500 km$ ). Por tanto, las regiones con U-errores grandes debidos a la presencia de ceros de  $J$  están situadas a distancias  $L$  superiores a 20000  $km$  con respecto al punto E. A distancias menores que unos 20000  $km$ ,  $|J|$  toma valores no nulos suficientemente grandes y los U-errores son aceptables.
- (iii) Existen direcciones a lo largo de las cuales el Jacobiano  $J$  no se anula. Estas direcciones corresponden a los píxeles grises de los mapas 3.24b, 3.25g.
- (iv) El intervalo en el que los valores de  $|J|$  son más probables es  $[0.2, 0.7]$ .
- (v) Para  $|J| \simeq 1$ , hay abundantes píxeles grises (ver los paneles 3.24e y 3.25c). Por tanto, usuarios con  $|J| \simeq 1$  son poco probables. Cerca de estos puntos, se espera que los U-errores sean pequeños y el posicionamiento muy bueno. Solo una tercera parte de los píxeles de los mapas 3.24e, 3.25c no son grises (se alcanzan los valores  $J = \pm 1$ ).
- (vi) Los casos con  $|J| > 1$  son muy escasos y, además, conforme estos grandes valores de  $|J|$  van creciendo se van haciendo más escasos (crece el número de píxeles grises en los mapas asociados); por ejemplo, vemos que los píxeles coloreados con  $|J| = 1.5$  son muy escasos (panel 3.25a).
- (vii) No existe ninguna dirección con  $|J| \geq 2$ .

Así, si  $L \geq 20000 km$ , zona en la que orbitan los satélites de GALILEO y de GPS, podemos tener problemas a la hora de hallar la posición de un satélite GALILEO (GPS) utilizando 4-tuplas de satélites GPS (GALILEO), ya que el satélite usuario puede pasar muy cerca de puntos de Jacobiano nulo y, en tal caso, los U-errores se dispararán.

Para otras 4-tuplas de satélites, los resultados numéricos son similares. Aproximadamente, podemos afirmar que el Jacobiano no es nulo para distancias  $L$  al punto E más pequeñas que  $2R/3$ , siendo R el radio de las órbitas de los satélites. Esta última afirmación es válida tanto para satélites GPS como GALILEO.

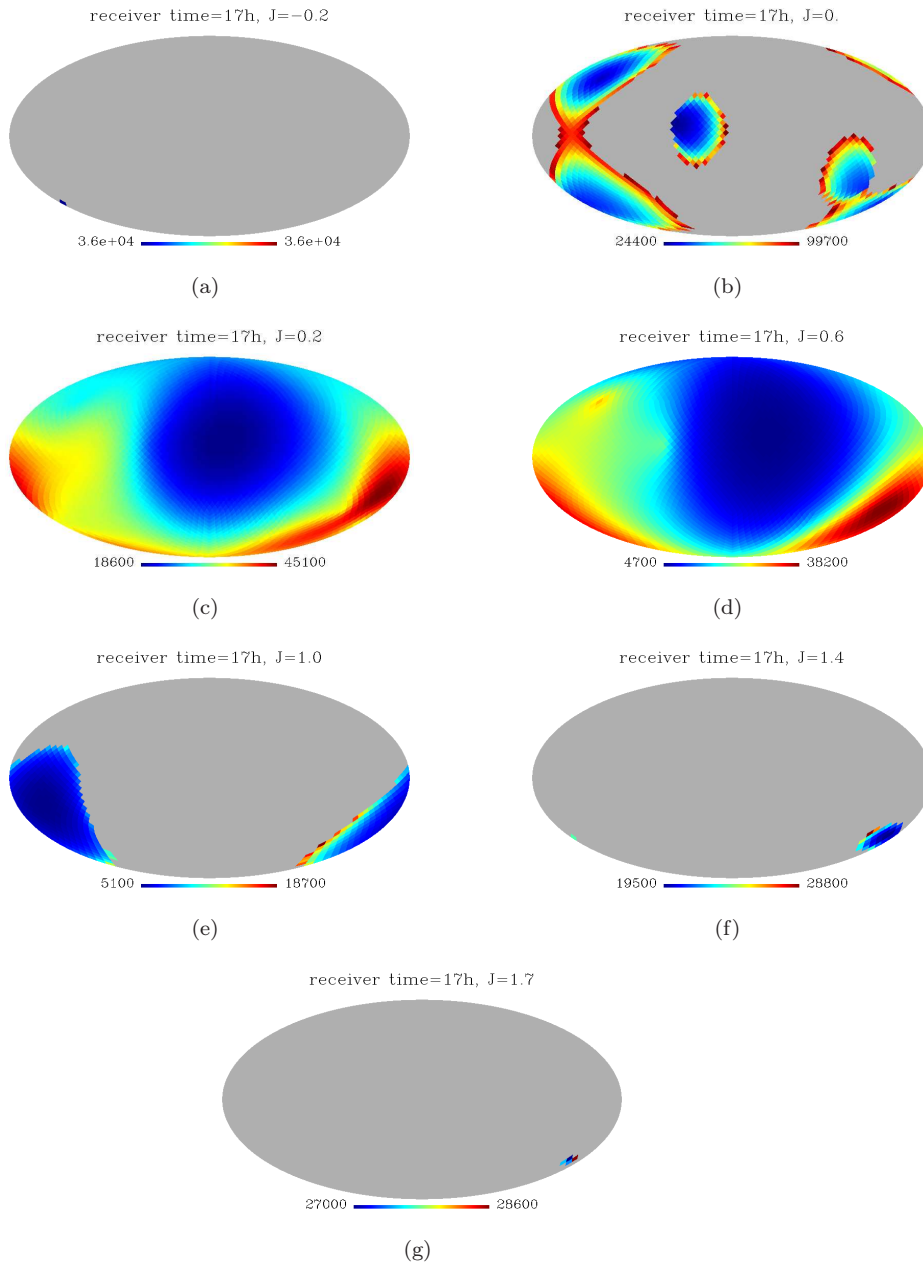


Figura 3.24: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide ( $N_{side} = 16$ ) de la distancia, en km, desde E hasta el punto en el que el Jacobiano de la transformación de coordenadas  $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$  toma, por primera vez en cada dirección, el valor que se indica en la parte superior del panel. Este caso corresponde a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23 y a la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 17 h$

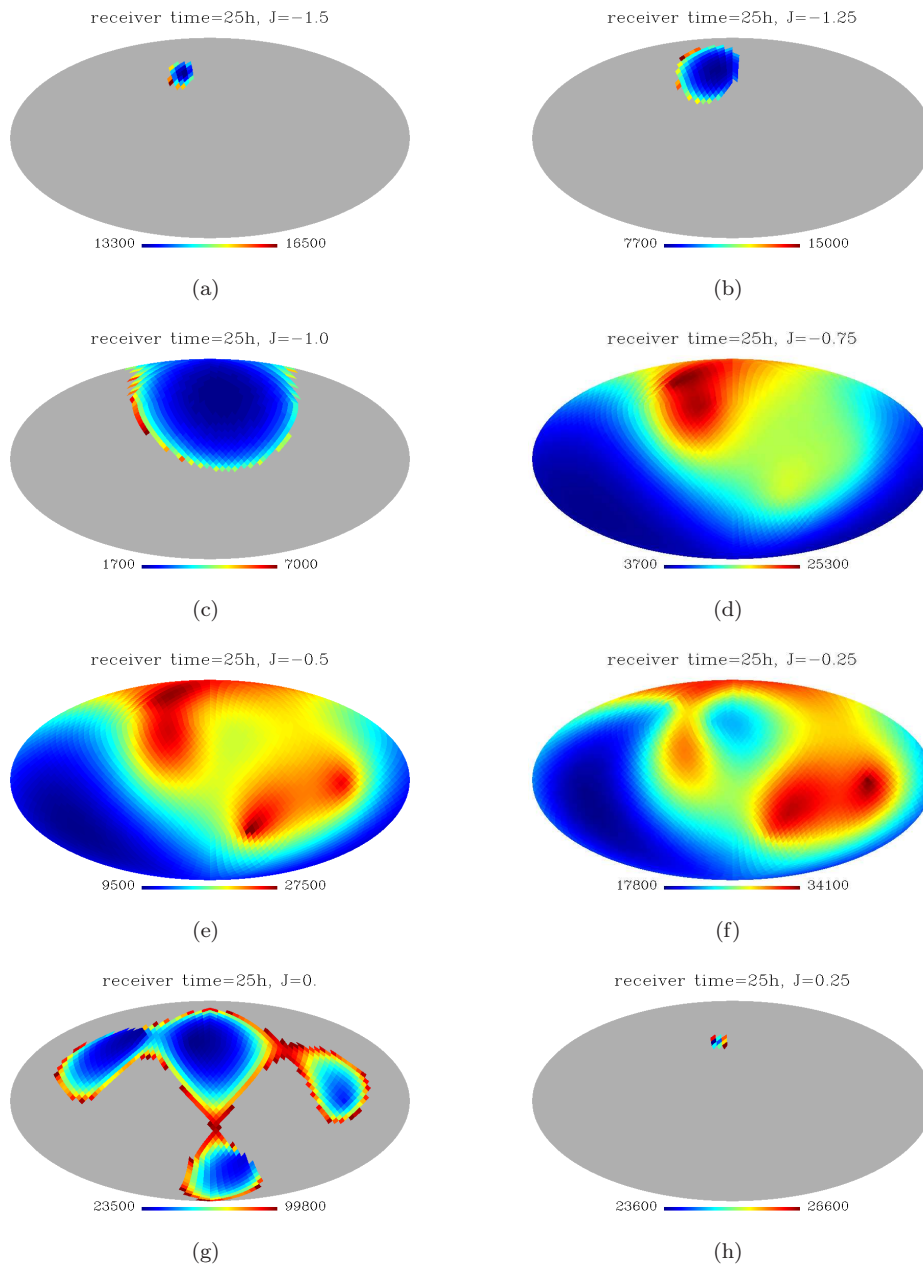


Figura 3.25: La misma representación que en la figura 3.24, pero para la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 25 h$ .



### 3.11. Distribución de los ceros de $J$ en la región de emisión

En este apartado estudiamos la hipersuperficie  $\mathcal{J}$ ; es decir, analizamos la distribución de los ceros del Jacobiano  $J$  en la región de emisión.

Para obtener los resultados de esta sección, utilizamos los mismos valores del Jacobiano (en puntos distribuidos dentro de la E-esfera) usados, en la sección anterior, para calcular los puntos en los que  $J$  toma un valor determinado. Aquí el valor es siempre  $J = 0$ . Además, queremos considerar todos los puntos en los que se anula  $J$ , no sólo el más cercano a E. La distancia  $L$  desde E hasta el punto en el que el Jacobiano se anula la  $i$ -ésima vez será denotada  $L_J^{(i)}$ .

En la figura 3.26 dibujamos la distancia  $L_J^{(1)}$  (primera anulación contando en sentido creciente de L), para diferentes hipersuperficies  $t = t_R = constante$ . Los cuatro píxeles aislados de color gris son aquellos a los que apuntaban las direcciones de los satélites cuando emitieron sus tiempos propios recibidos por un usuario localizado en E, y los de color granate corresponden a aquellas direcciones para las que el Jacobiano no se anula para  $L \leq 100000 \text{ km}$ .

En la figura 3.27, representamos la distancia entre el primer punto en el que se anula  $J$  y el segundo; es decir,  $L_J^{(2)} - L_J^{(1)}$ . Pintamos de color gris aquellos píxeles en los que el Jacobiano no se anula dos veces dentro de la E-esfera.

En el caso considerado en las figuras 3.26 y 3.27, el Jacobiano no se anula más de dos veces en ninguna dirección.

Para distancias  $L$  -al punto E- más pequeñas que  $10^5 \text{ km}$ , nuestras principales conclusiones sobre la distribución de los ceros de  $J$ , obtenidas a partir de muchos casos correspondientes a distintas 4-tuplas de los satélites de GALILEO y a diferentes hipersuperficies  $t = t_R = constante$ , son las siguientes:

- Para distancias  $L$  más pequeñas que  $\sim 2 \times 10^4 \text{ km}$ , el Jacobiano  $J$  no es cero en ninguna dirección, como puede verse en la figura 3.26, en la que el valor de la izquierda (mínimo de  $L_J^{(1)}$ ) de todas las barras de color es mayor que  $20000 \text{ km}$ .
- $J$  no se anula a lo largo de las direcciones correspondientes a los píxeles granate de la figura 3.26 y, como se aprecia a simple vista en los mapas de esta figura, en la mayor parte de los paneles, estos píxeles suelen ser más numerosos que los pintados con la barra de color, en los que  $J$  se anula una o varias veces.
- El Jacobiano se anula una sola vez a lo largo de muchas direcciones, cuyos píxeles están pintados con la barra de color en la figura 3.26, pero son grises en los mapas correspondientes de la figura 3.27 (no hay segunda anulación).
- En algunos casos –correspondientes a ciertas 4-tuplas de satélites e hipersuperficie  $x^4 = t_R$ – el Jacobiano no llega a ser nulo dos veces para ninguna de las direcciones HEALPIX consideradas, tal y como ocurre en los casos de los paneles 3.27b y 3.27g.
- El Jacobiano  $J$  es cero dos veces o más para escasas direcciones, que corresponden a los píxeles pintados con la barra de color en la figura 3.27.

- Aquellas direcciones en las que el Jacobiano se anula una sola vez o no se anula, corresponden a los píxeles grises de la figura 3.27.

Del análisis de la figuras 3.26 y 3.27 se deduce que, dado un segmento radial dentro de la E-esfera, o bien  $J$  no se anula en él, o lo hace a distancias  $L_j^{(i)}$  que dependen de la dirección, y que son todas superiores a unos 20000  $km$ . Por tanto, un satélite que se mueva en el interior de la E-esfera, siguiendo una línea de universo que contenga posiciones con  $L > 20000 km$ , puede aproximarse demasiado a un punto con  $J = 0$ , y grandes errores de posicionamiento serían entonces inevitables. La solución de este problema podría estar en un cambio de 4-tupla de emisores, ya que si para una 4-tupla el usuario ve los cuatro satélites en el mismo cono ( $J = 0$ ), para otras 4-tuplas esto no será así ( $J \neq 0$ ). Ver detalles, más adelante, sobre navegación dentro de la E-esfera.

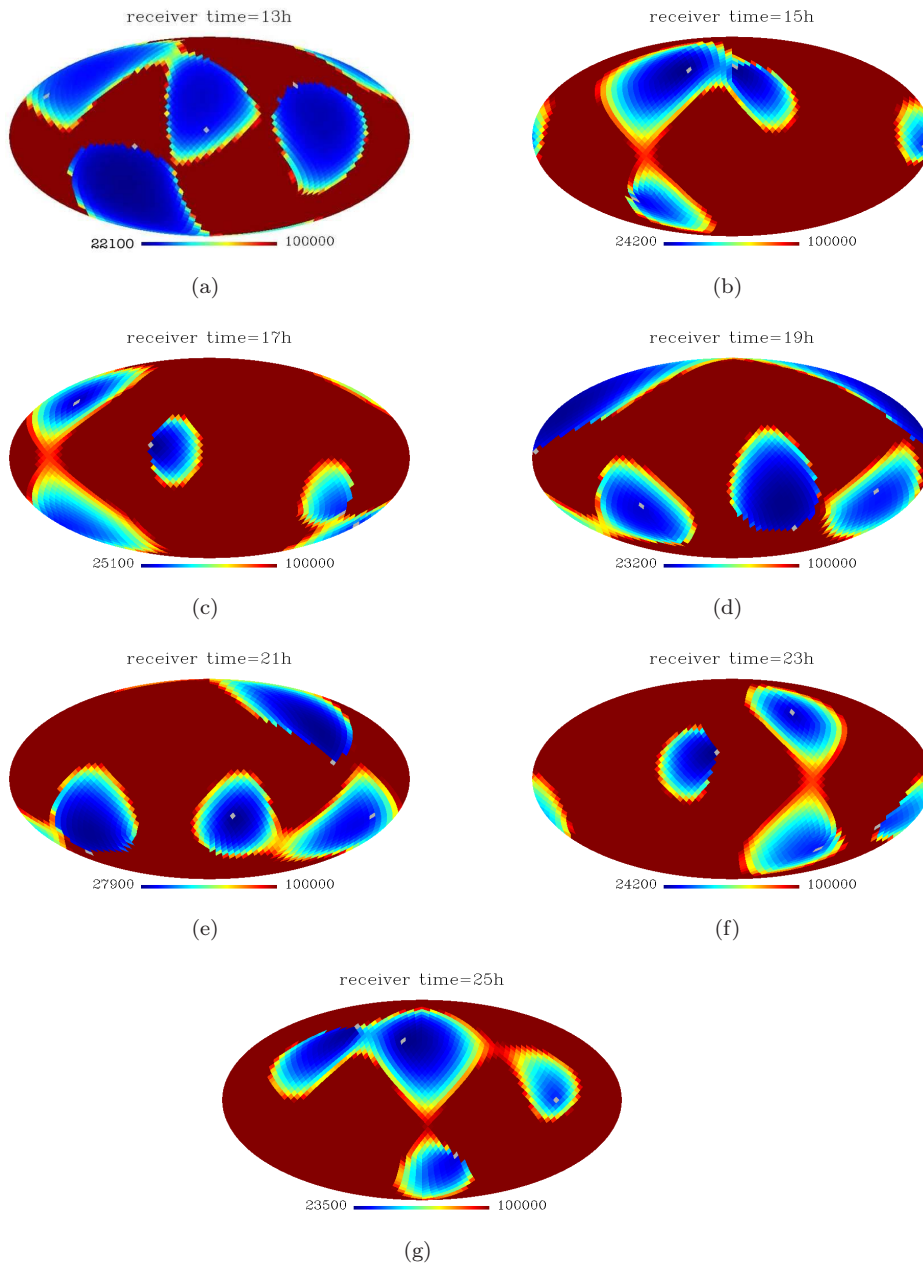


Figura 3.26: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide ( $N_{side} = 16$ ) de la distancia, en km, desde E hasta el punto en el que el Jacobiano  $J$  se anula por primera vez en cada dirección. La 4-tupla de satélites es 2, 5, 20, 23, y cada mapa corresponde a una hipersuperficie  $x^4 = t_R$ . Los tiempos de recepción  $t_R$  son mostrados en la parte superior de cada panel. Los tiempos considerados abarcan un periodo orbital completo de los satélites.

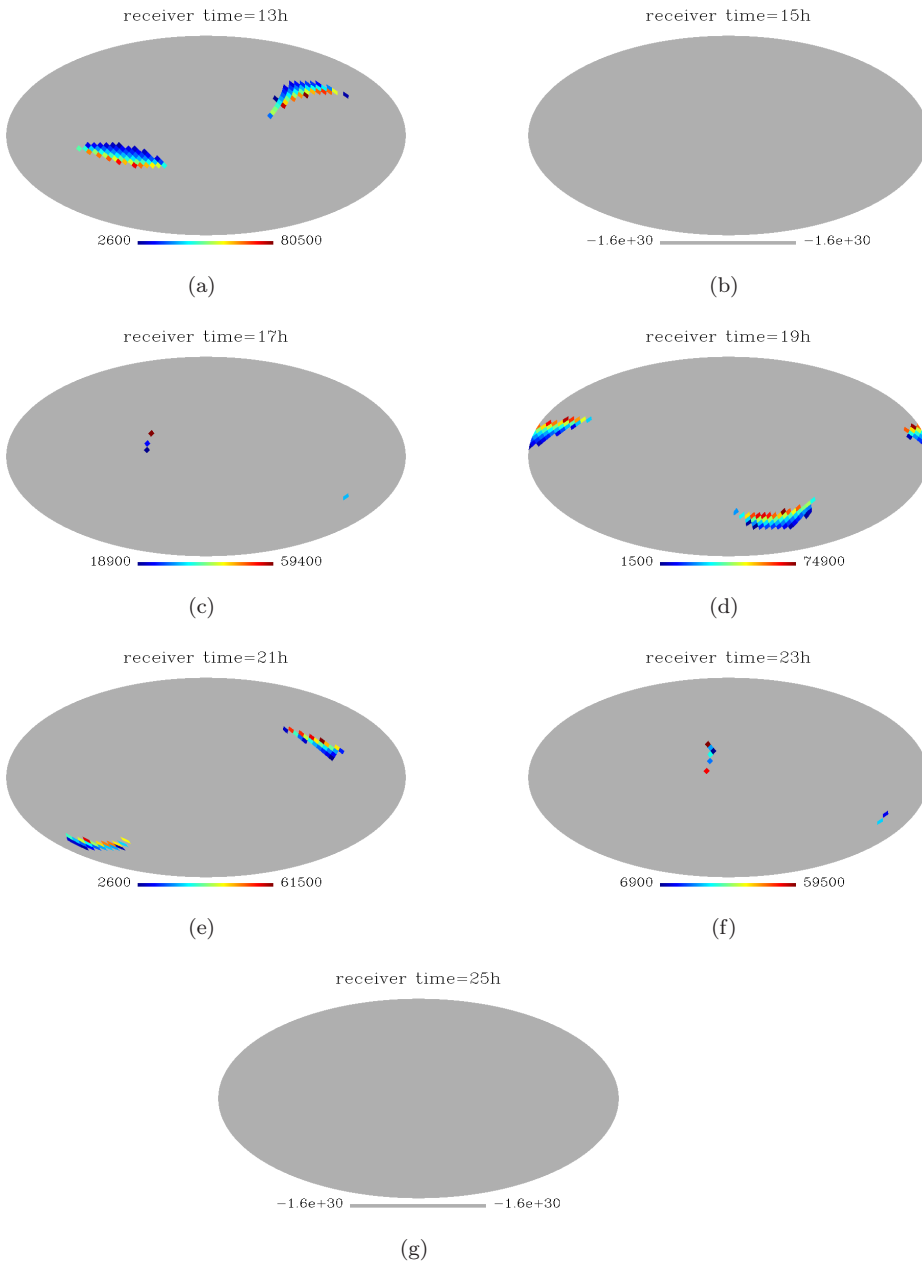


Figura 3.27: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide ( $N_{side} = 16$ ) de la distancia, en km, entre el primer y el segundo punto de anulación del Jacobiano  $J$ , empezando a contar en sentido creciente de  $L$ , para cada dirección. Este caso corresponde a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23. Los tiempos  $t_R$  que definen las hipersuperficies  $x^4 = t_R$  consideradas, son mostrados en la parte superior de cada panel

## 3.12. Distribución de los valores de $J$ sobre esferas de radio $R$

En esta sección, mostramos los valores que toma  $J$  sobre puntos de esferas de varios radios  $R$  centradas en el origen de las coordenadas  $x^\alpha$  (casi inerciales); es decir, concéntricas con la Tierra esférica y estática considerada en esta Tesis. Sobre estas esferas también consideramos 3072 píxeles HEALPIX.

Las figuras 3.28 y 3.29 corresponden a dos casos que se diferencian en la hipersuperficie  $t_R$  considerada, que es  $t_R = 19 h$  y  $t_R = 25 h$ , respectivamente.

Desde ahora llamaremos *R-esfera* a la esfera de radio  $R$  concéntrica con la Tierra. A partir de 3.28 y 3.29 concluimos lo siguiente:

- Para  $R = R_\oplus$ , el Jacobiano toma valores aceptables en toda la esfera (para todas las direcciones HEALPIX evaluadas). La cantidad  $|J|$  pertenece al intervalo  $(0.22, 0.48)$   $[(0.48, 0.97)]$  en la figura 3.28 [3.29].
- Para  $R = R_\oplus$  y  $R = 15000 km$ , no hay puntos con Jacobiano nulo; por tanto, el máximo y el mínimo de los valores de  $J$  mostrados en la barra de colores tienen el mismo signo. Para estas  $R$ -esferas, los valores de  $|J|$  son todos mayores que 0.11
- Para  $R \geq 40000 km$ , la imagen de la esfera permanece casi invariable al aumentar el radio  $R$ ; por ejemplo, los mapas 3.28e y 3.28f, y los paneles 3.29e y 3.29f tienen la misma forma aunque distinta escala de color. Esto indica que para  $L \geq 50000 km$ , la cantidad  $|J|$  disminuye al aumentar  $L$  de forma gradual, con un ritmo parecido en todas las direcciones.
- Como vimos en el punto (ii) de la sección 3.10, el primer cero de  $J$  está localizado a distancias  $L$  mayores que unos  $\sim 20000 km$ . De acuerdo con esto, para  $R = 30000 km$ ,  $R = 50000 km$ ,  $R = 70000 km$  y  $R = 90000 km$ , pueden haber puntos muy próximos a anulaciones de  $J$  y, consecuentemente, el mínimo y el máximo de los valores de  $J$  en la barra de colores tienen signo opuesto.
- En los paneles 3.28d, 3.28e y 3.28f (ver figura 3.28), se observa que el Jacobiano es nulo cerca de las zonas de transición amarillo-verde, que separan las regiones rojas de las azules. En estas zonas de transición, la cantidad  $|J|$  debe ser pequeña y, por tanto, se esperan U-errores grandes. En las regiones azules ( $J < 0$ ) y en las rojas ( $J > 0$ ), ya lejos de las zonas de transición, los valores de  $|J|$  decrecen conforme aumenta el radio de la  $R$ -esfera considerada. Por esta razón, los valores mínimos y máximos dados en las barras de colores son más grandes para radios menores.
- Lo dicho en el punto anterior también es válido para los paneles 3.29e y 3.29f, pero en este caso se ve fácilmente que los ceros de  $J$  están localizados en las zonas de transición de azul claro a azul marino, que separan las regiones azul marino ( $J < 0$ ) del resto de la esfera, que contiene píxeles rojos, amarillos y verde claro ( $J > 0$ ).

- Para  $R = 90000 \text{ km}$ , la cantidad  $|J|$  toma valores en el intervalo  $[4.8, 9] \times 10^{-3}$ . Esto puede verse fácilmente, en los paneles 3.28f y 3.29f. Puesto que estos valores de  $|J|$  son pequeños, es de esperar que los errores de posicionamiento sean grandes.

De todo esto se deduce que existen decrecimientos locales de  $|J|$  debidos a ceros del Jacobiano, y también un decrecimiento gradual conforme aumenta la distancia entre el usuario y los emisores, que se observa en cualquier dirección para valores de  $L$  mayores que  $\sim 40000 \text{ km}$ . Asociados a estos decrecimientos de  $|J|$  se esperan crecimientos locales y graduales de los U-errores, sin embargo, sabemos que el estimador  $\Delta_d$  no depende sólo de  $J$ , sino que depende también de otras características de la configuración usuario-satélites y, por tanto, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cómo están distribuidos los U-errores asociados a los valores del Jacobiano representados en las figuras 3.28 y 3.29? Para contestar a esta pregunta, en la próxima sección, vamos a estudiar los valores que toma  $\Delta_d$  sobre las mismas superficies esféricas consideradas en las figuras 3.28 y 3.29.

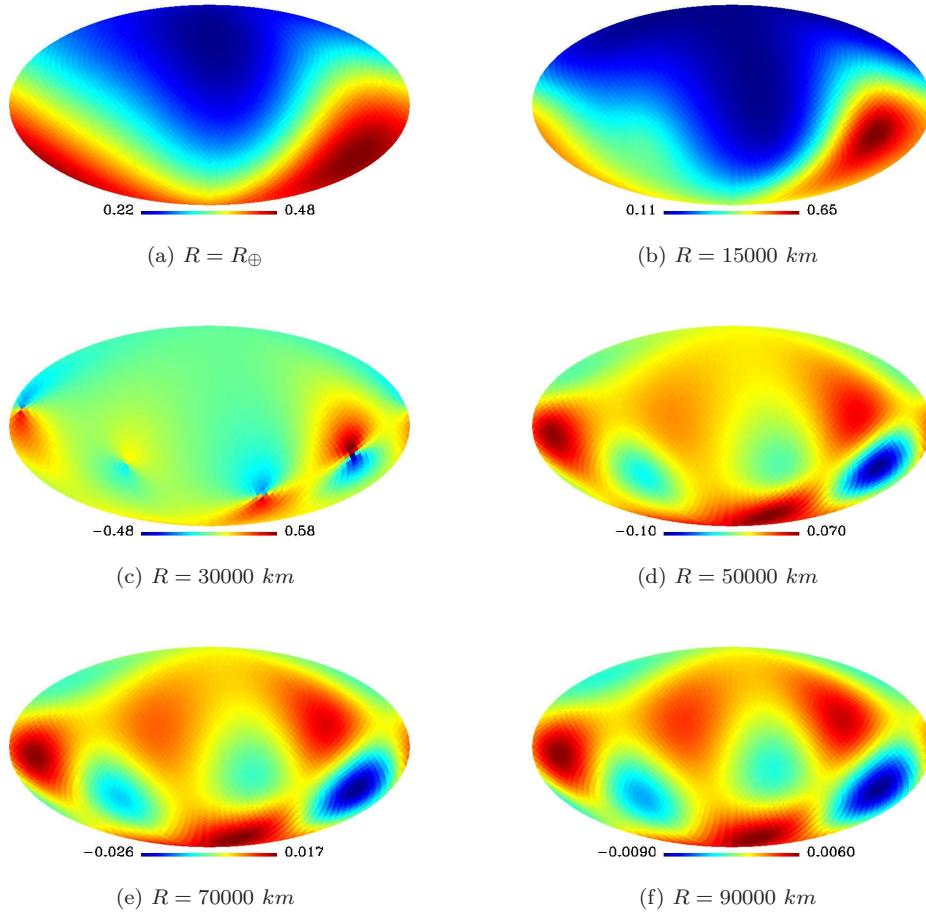


Figura 3.28: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide ( $N_{side} = 16$ ) del valor del Jacobiano sobre esferas de radio  $R$ , cuyo valor se muestra en la parte inferior de cada panel. Este caso corresponde a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23 y a la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 19 h$

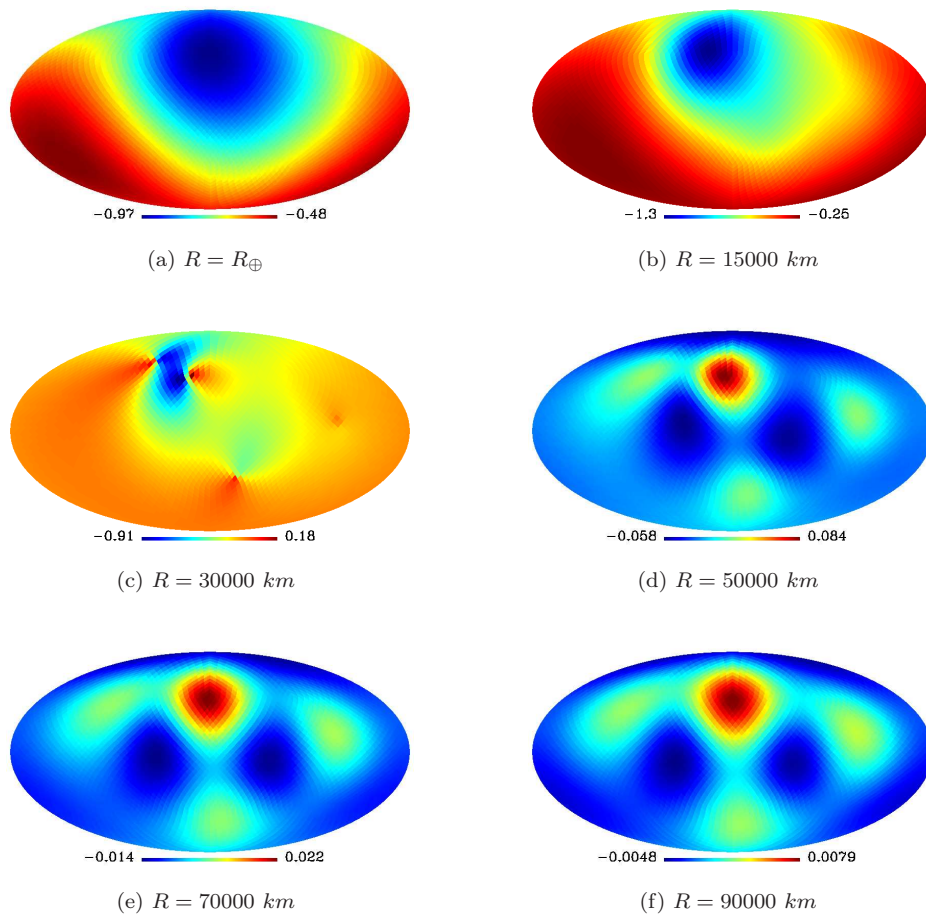


Figura 3.29: La misma representación que en la figura 3.28, pero para la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 25 h$ .



### 3.13. Distribución de los U-errores sobre esferas de radio R

Vamos a realizar un análisis muy parecido al de la sección 3.12, pero aquí, la cantidad que toma valores –sobre las mismas R-esferas de la sección anterior con idéntica pixelización– es el estimador de U-errores  $\Delta_d$ .

Presentamos dos casos:

- (i) El primero corresponde a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20 y 23 y a la hipersuperficie  $x^4 = 19 h$ , y los resultados se representan en las figuras 3.30 y 3.33.
- (ii) En el segundo caso se considera la misma 4-tupla de satélites pero la hipersuperficie es  $x^4 = 25 h$ , y la distribución de valores de  $\Delta_d$  se muestra en las figuras 3.31 y 3.32

Vamos a considerar primero las dos esferas de radios  $R = R_\oplus$  y  $R = 15000 km$ . Los resultados correspondientes a estas esferas están representados en los dos paneles superiores de las figuras 3.30 y 3.31. Estudiando estos cuatro paneles se llega fácilmente a lo siguiente:

- El valor de  $\Delta_d$  en la superficie de la Tierra (ver los paneles 3.30a y 3.31a) pertenece al intervalo  $[0.68, 3.6] m$ . Por tanto, esta cantidad es del orden de 1 m, es decir, del orden de la amplitud de las incertidumbres –de las líneas de universo de los satélites– que ha sido fijada por la condición  $\Delta r = 1 m$  por razones de normalización.
- Para  $R = 15000 km$  (ver los mapas 3.30b y 3.31b),  $\Delta_d \in [0.42, 5.5] m$ . Veamos que –sobre esta R-esfera–  $\Delta_d$  llega a tomar algunos valores que son un poco mayores que los que aparecen en  $R = R_\oplus$ ; sin embargo, los errores de posicionamiento son del orden de 1 m en ambos casos.

El hecho de que las cantidades  $\Delta_d$  sean pequeñas y del mismo orden que las incertidumbres asumidas en las geodésicas de los satélites (1 m de amplitud), para  $R = R_\oplus$  y  $R = 15000 km$ , no nos sorprende, ya que ambas esferas están en la zona donde  $J$  no se anula y, además, de acuerdo con lo dicho en la sección anterior, el Jacobiano es bastante grande sobre ellas.

Para R-esferas de radios  $R > 20000 km$ , el error  $\Delta_d$  debe ser muy grande, para algunas direcciones, debido a la existencia de ceros del Jacobiano (sobre la R-esfera o muy próximos a ella). Esto ocurre para las R-esferas de radios  $R = 30000 km$ ,  $R = 50000 km$ ,  $R = 70000 km$  y  $R = 90000 km$ , en las que, numéricamente, hemos encontrado valores enormes de  $\Delta_d$ . Estos valores deben ser eliminados antes de hacer representaciones apropiadas de este estimador de U-errores. Si no los eliminamos, nos impiden que veamos –en el mapa resultante– los valores mucho más pequeños de los U-errores que aparecen lejos de los ceros de  $J$ . Para eliminar los valores grandes de  $\Delta_d$  que aparecen por proximidad a los ceros de  $J$ , elegimos un nivel adecuado de corte  $\sigma$ , y pintamos de color gris todos aquellos píxeles que cumplan la condición  $\Delta_d \geq \sigma$ . El nivel de corte elegido debe ser tal que coloree de gris las zonas afectadas

por los ceros de  $J$ ; mientras que las zonas restantes deben ser pintadas con la barra de color. En la figura 3.30 se ha hecho un corte para el nivel  $\sigma = 100 m$ , en cada uno de los cuatro mapas correspondientes a las esferas cuyos radios son mayores que  $20000 km$ , mientras que en la figura 3.31 se ha hecho el mismo corte, pero además se ha hecho otro corte al nivel  $\sigma = 200 m$  para la esfera de mayor radio ( $90000 km$ ). En estas dos figuras observamos lo siguiente:

- Para cada una de las cuatro R-esferas más grandes, las zonas grises, generadas con el corte de nivel  $\sigma = 100 m$  en la figura 3.30, están situadas en las mismas posiciones que las zonas de transición amarillo-verde de la figura 3.28, que señalan (ver la sección anterior) puntos próximos a ceros de  $J$  para la misma 4-tupla e hipersuperficie. Lo mismo ocurre con las zonas grises generadas por el mismo corte en la figura 3.31, cuya ubicación coincide con la de las zonas de transición de azul claro a azul marino en la figura 3.29. Estas zonas coincidentes se encuentran situadas cerca de puntos con  $J = 0$  y, por eso, los valores de  $J$  son pequeños y los de  $\Delta_d$  grandes.
- En el panel 3.31g, el corte se realiza al nivel  $\sigma = 200 m$  sobre la R-esfera de radio  $R = 90000 km$ . Si comparamos con el corte para  $\sigma = 100 m$  realizado sobre la misma R-esfera (panel 3.31f), vemos que las zonas grises del corte  $\sigma = 200 m$  se superponen con las del corte al nivel  $\sigma = 100 m$ , pero son más estrechas; esto era de esperar, ya que la condición  $\Delta_d \geq 100 m$ , no implica la relación  $\Delta_d \geq 200 m$  y, por tanto hay píxeles grises para  $\sigma = 100 m$  que no lo son para  $\sigma = 200 m$ .

Como consecuencia de lo que acabamos de exponer, a medida que el nivel de corte  $\sigma$  decrezca, las zonas grises alrededor de los ceros de  $J$  se ensancharán y, además, si bajamos el nivel lo suficiente, algunos píxeles situados lejos de los ceros de  $J$  pasarán a ser también grises, ya que llegarán a tener valores de  $\Delta_d$  superiores al nivel. Esto puede verse en las figuras, 3.33 y 3.32 donde cuatro cortes a niveles de  $50$ ,  $25$ ,  $15$  y  $10 m$  son practicados sobre la R-esfera más grande ( $R = 90000 km$ ). En estas figuras, vemos que:

- Conforme disminuimos el nivel  $\sigma$ , aumenta el área de las zonas grises, y si comparamos los paneles de la figura 3.33 (3.32) con el mapa 3.30f (3.31f), vemos que el número de píxeles grises lejanos a las zonas con Jacobianos nulos va creciendo.
- En los paneles 3.32d y 3.33d, que corresponden a un corte al nivel de  $10 m$ , vemos que incluso a distancias tan grandes –del centro de la Tierra– como  $90000 km$ , hay un número significativo de píxeles (zona de área considerable) con errores de posicionamiento inferiores a  $10 m$  ( $100 m$ , para una amplitud  $\Delta r = 10 m$  que es más realista que nuestra amplitud de normalización). Lo mismo ocurre para otras 4-tuplas de satélites en otras zonas de la misma R-esfera y, por tanto, con un cierto número de 4-tuplas estas regiones con pequeños errores podrían cubrir toda la R-esfera considerada.

Este último comentario sugiere que, incluso para usuarios que tripulen naves próximas a la superficie de la E-esfera, pueden existir 4-tuplas que hagan sus U-errores menores que  $100 m$  para  $\Delta r = 10 m$ . Esto sugiere que la navegación espacial

podría ser viable hasta distancias  $L$  del orden de  $10^5 km$ . Por supuesto, esto requeriría afinar el procedimiento de selección de 4-tuplas desde la nave.

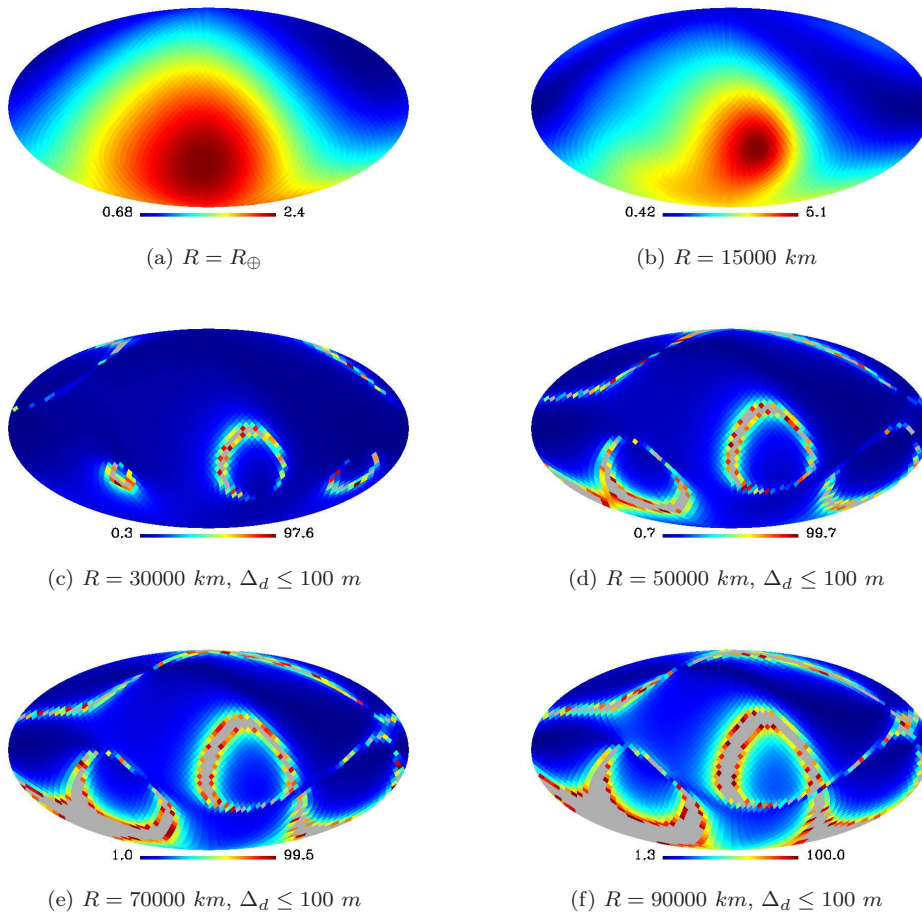


Figura 3.30: Todos los paneles son representaciones HEALPIX-Mollweide ( $N_{side} = 16$ ) del valor del estimador de U-errores  $\Delta_d$ , en metros, sobre esferas de radio R, cuyo valor se muestra debajo de cada panel. Este caso corresponde a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23 y a la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 19 h$

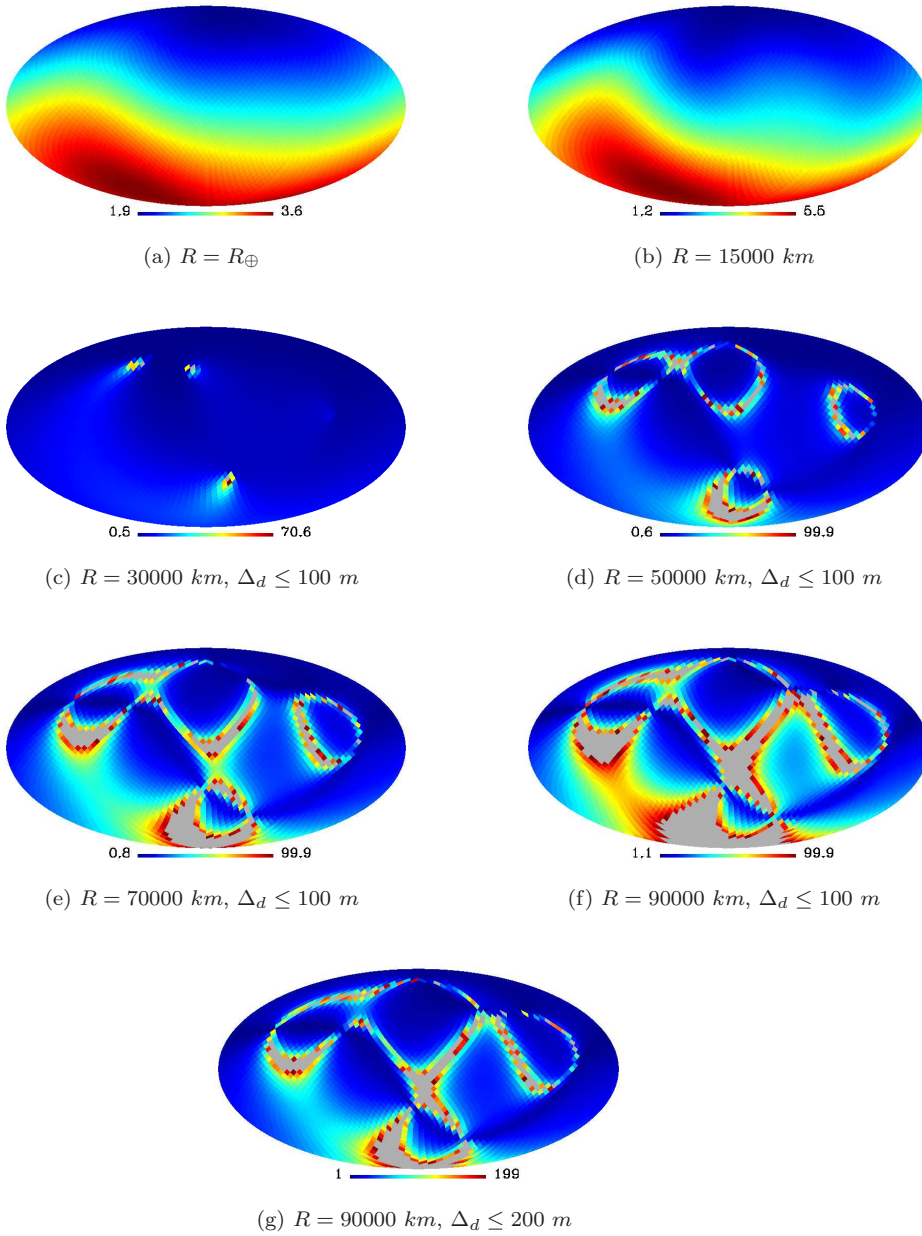


Figura 3.31: En los seis primeros mapas, se muestra la misma representación que en la figura 3.30, pero para la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 25 \text{ h}$ . En el nuevo mapa (posición inferior), se representan todos los valores de  $\Delta_d$  inferiores a 200 m (corte a 200 m) sobre la esfera cuyo radio es  $R = 90000 \text{ km}$ .

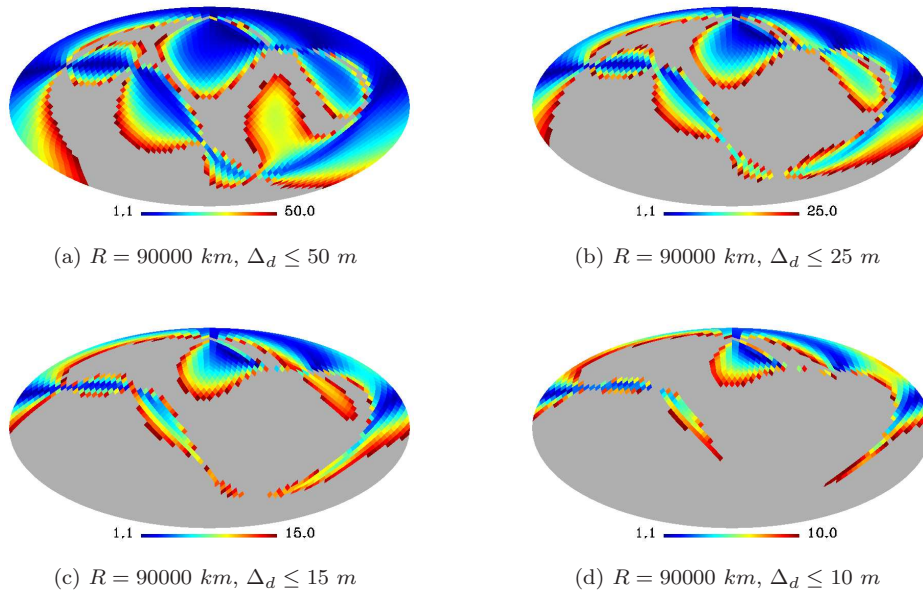


Figura 3.32: Cada mapa tiene la misma estructura que el panel inferior de la figura 3.31, y corresponde a la 4-tupla e hipersuperficie consideradas en aquel panel. Los mapas de esta figura corresponden a nuevos cortes (50, 25, 15 y 10 m) en los valores de  $\Delta_d$  que se muestran bajo los mapas.

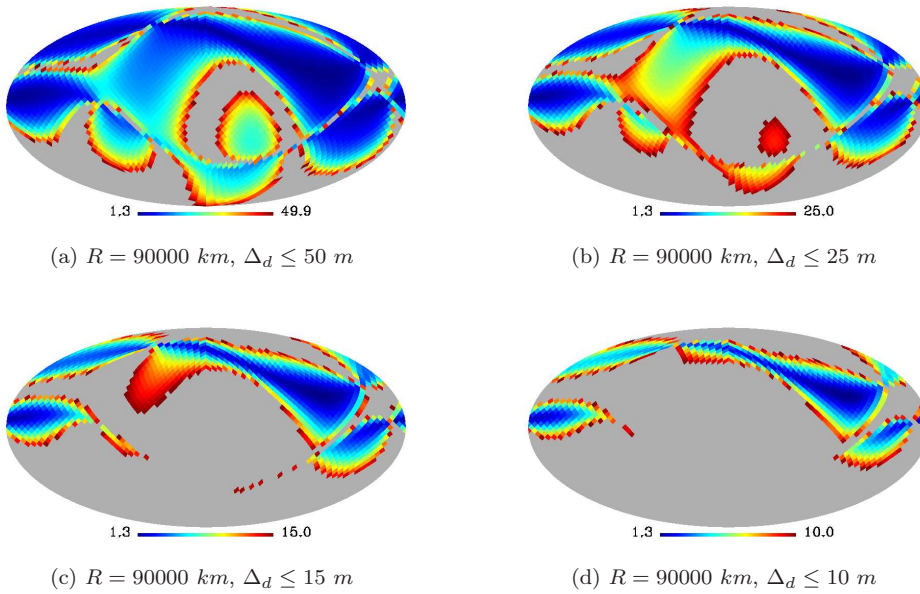


Figura 3.33: La misma representación que en la figura 3.32, pero para la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 19 h$ .

### 3.14. U-errores en el posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO) usando cuatro satélites GALILEO (GPS)

En la sección 2.4, hallamos la posición de un satélite GPS (GALILEO), a lo largo de su órbita circular completa, a partir de 4 satélites de la constelación de GALILEO (GPS). Además, determinamos en qué zonas de la órbita hay bifurcación.

El objetivo de esta sección es calcular los U-errores en el posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO), usando 4 satélites GALILEO (GPS), a lo largo de un periodo orbital. Por tanto, esta sección complementa el trabajo presentado en la sección 2.4.

Calculamos el error en el posicionamiento del satélite-usuario en 7200 puntos –uniformemente distribuidos– sobre la órbita nominal circular. Los U-errores son calculados tal y como fue descrito en la sección 3.3. Suponemos –como hemos hecho hasta ahora– que las desviaciones respecto a las líneas de universo nominales de los satélites  $|\xi_A^\alpha|$ , tienen una amplitud de 1 m (normalización, ver la sección 3.3).

Los resultados son mostrados en las figuras 3.34-3.36 (3.37-3.39) para el posicionamiento de un satélite GPS (GALILEO). Cada figura contiene tres paneles en los que es representado (de arriba abajo): (i) el valor del Jacobiano  $J$  en función del tiempo coordinado del usuario  $t$  (coordinada inercial  $x^4$ ), (ii) el estimador  $\Delta_d$  en función de  $t$ , (iii) el estimador  $\Delta_d$  en función de  $t$ , pero fijando tanto el valor máximo como el mínimo en el eje de ordenadas, de forma que podamos apreciar los valores



de  $\Delta_d$  lejos de los puntos de anulación de  $J$  (lo que no es posible en el panel de arriba), (iv) la diferencia de ángulos  $\alpha_1 - \alpha_4$  en función de  $t$ .

Las figuras 3.34-3.39 muestran que el error en el posicionamiento crece de forma significativa al acercarnos a puntos –de la órbita– en los que la diferencia de ángulos  $\alpha_1 - \alpha_4$  y el Jacobiano  $J$  son nulos. Ya vimos en la sección 3.6 que  $\alpha_1 - \alpha_4$  es cero cuando el Jacobiano  $J$  es nulo. Además, en la mayoría de los casos,  $\alpha_1 - \alpha_4$  y  $J$  valen cero varias veces a lo largo del mismo periodo orbital (excepto en algunos casos como el considerado en la figura 3.34), llegando a ser nulos hasta cinco veces en los casos 3.36 y 3.39. De ello se deduce que no es posible hallar la posición de un satélite GPS (GALILEO) –a lo largo de una órbita completa– usando siempre la misma 4-tupla de satélites GALILEO (GPS); en efecto, si tratáramos de usar la misma 4-tupla –por regla general– el Jacobiano  $J$  se anularía demasiadas veces a lo largo de un periodo orbital, lo que implicaría U-errores de posicionamiento muy grandes en amplias zonas (ver la sección 3.8) próximas a los puntos de anulación de  $J$ .

Ya vimos que el Jacobiano  $J$  toma valores próximos a cero (errores grandes), sólo cuando la distancia  $L$  al punto E es mayor que unos 20000  $km$ ; por tanto, se podría hallar la posición de una nave espacial (usuario), haciendo uso de cuatro satélites GALILEO, si la altura de su órbita es menor que unos 20000  $km$ . Este es el caso, por ejemplo, de la Estación Espacial Internacional.

La pregunta clave es la siguiente: ¿podríamos hallar la posición –a lo largo de una órbita completa– de un satélite GPS (GALILEO) utilizando varias 4-tuplas de satélites GALILEO (GPS)? Esto se estudia en la sección 3.14.1.

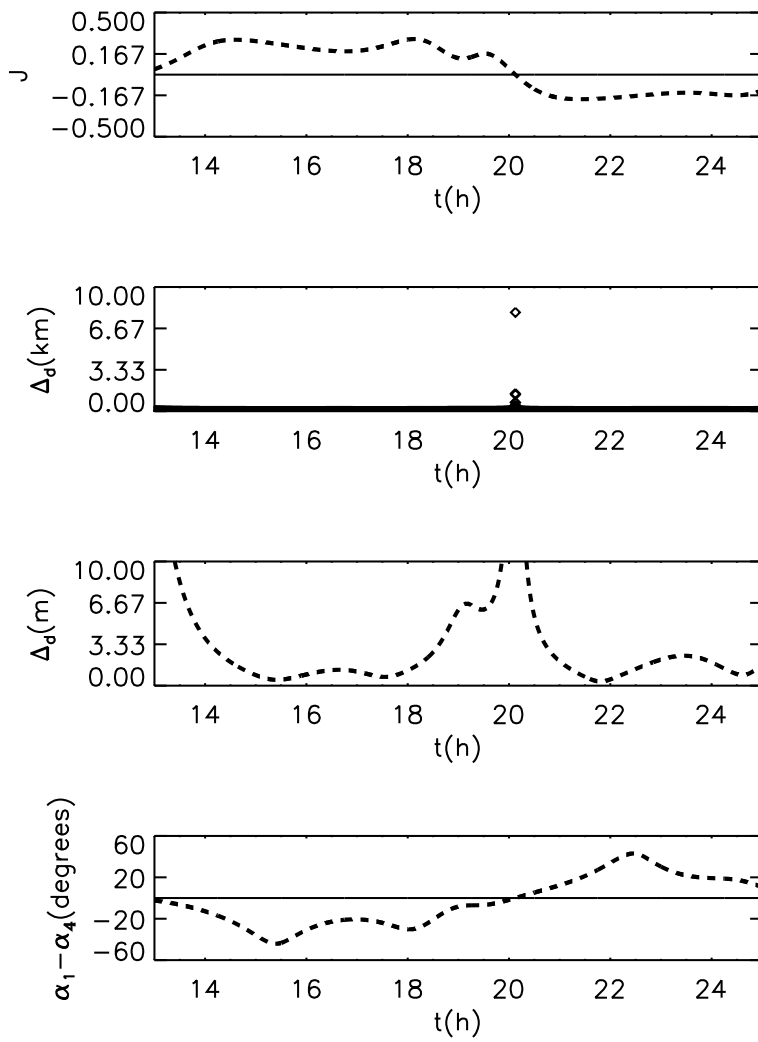


Figura 3.34: Posicionamiento del satélite 5 de la constelación GPS a partir de la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23 de GALILEO. En el eje de abscisas de todos los paneles se representa el tiempo coordinado  $t$ , cuyo valor inicial es  $t = 13 h$  para el periodo orbital elegido. De arriba abajo se presenta: el Jacobiano  $J$ , el estimador  $\Delta_d$ , la distancia  $\Delta_d$  fijando un valor máximo y otro mínimo en el eje de ordenadas, y el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$ .



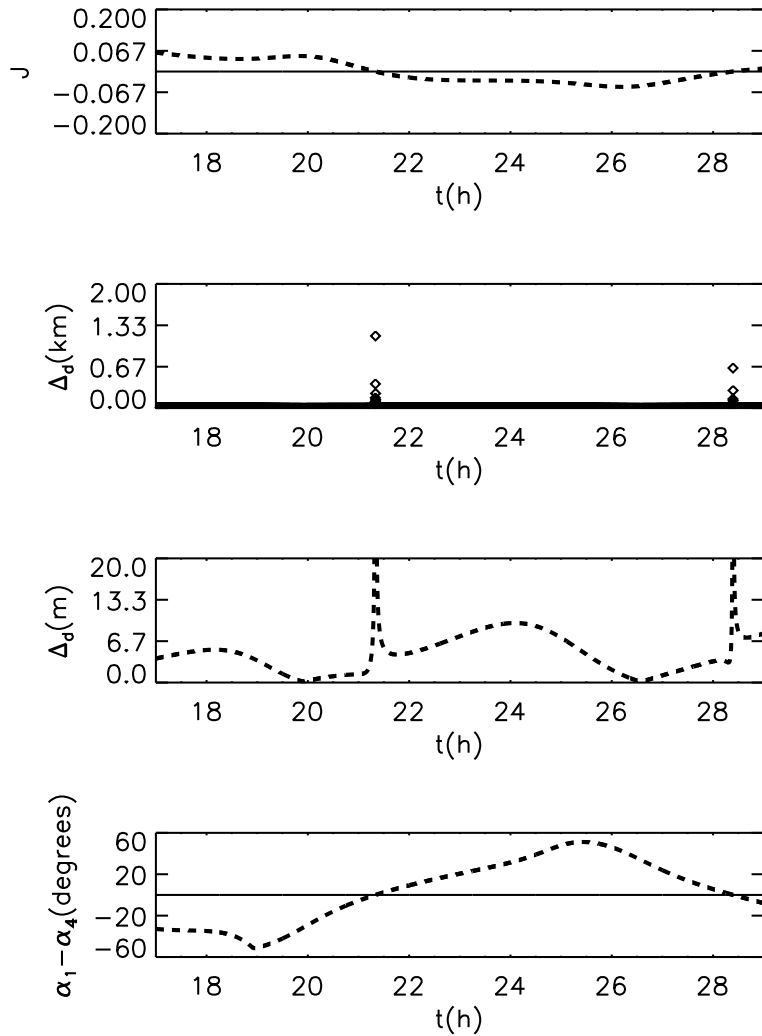


Figura 3.35: La misma representación que en la figura 3.34, para la 4-tupla 2, 3, 4, 21 y para un periodo orbital que se inicia en  $t = 17$  h.

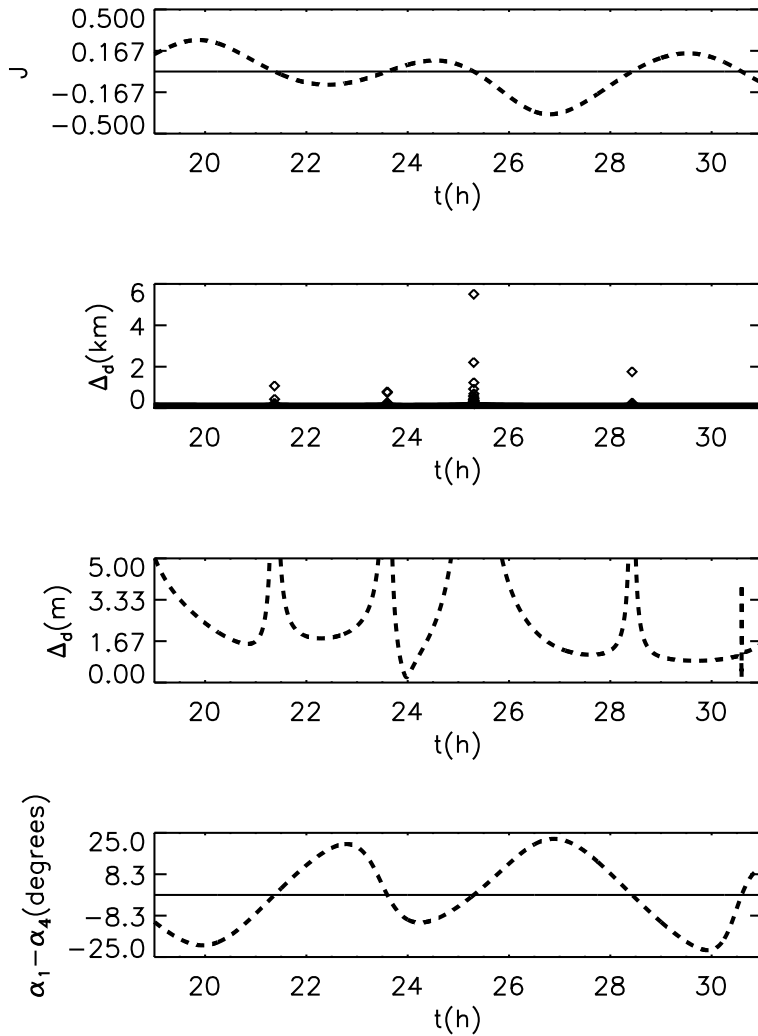


Figura 3.36: La misma representación que en la figura 3.34, para la 4-tupla 2, 7, 14, 21 y para un periodo orbital que se inicia en  $t = 19 h$ .

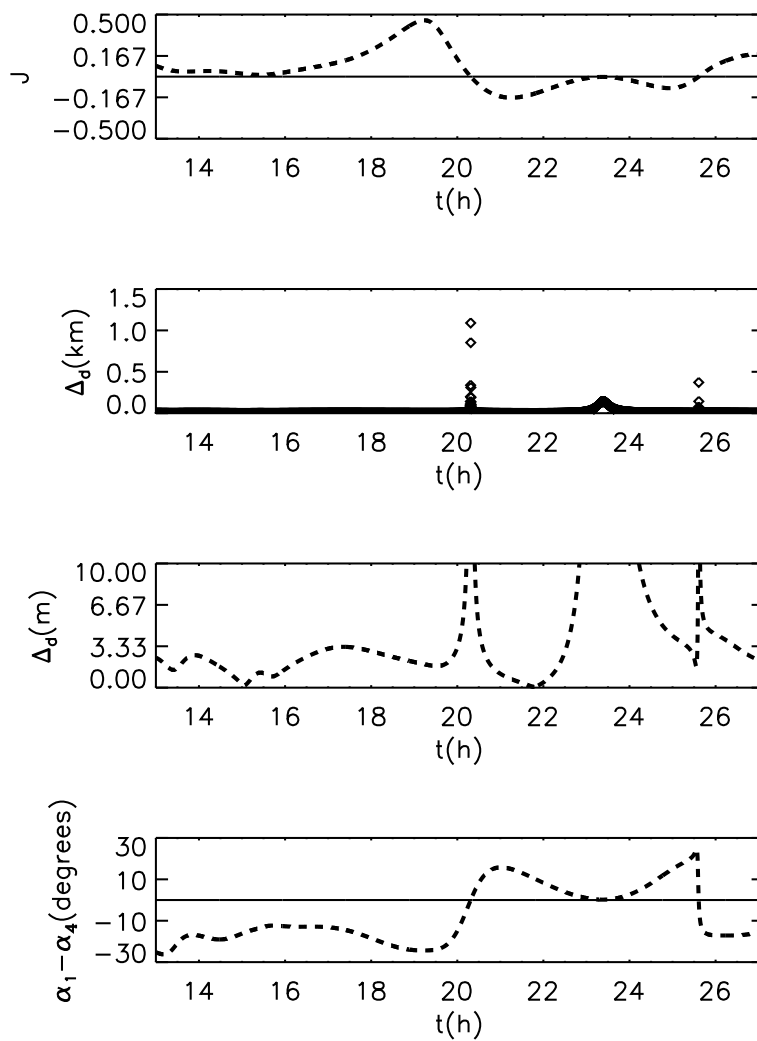


Figura 3.37: Posicionamiento del satélite 5 de la constelación GALILEO a partir de la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23 de GPS. En el eje de abscisas de todos los paneles se representa el tiempo coordinado  $t$ , cuyo valor inicial es  $t = 13 h$  para el periodo orbital elegido. De arriba abajo se presenta: el Jacobiano  $J$ , el estimador  $\Delta_d$ , la distancia  $\Delta_d$  fijando un valor máximo y otro mínimo en el eje de ordenadas, y el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$ .

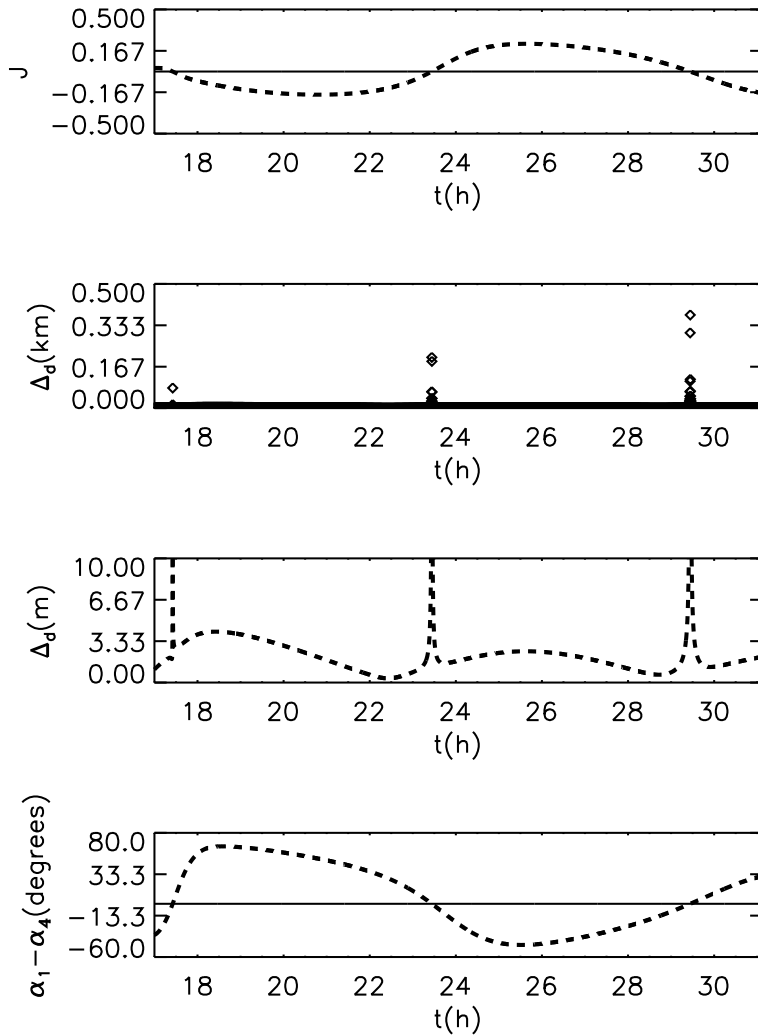


Figura 3.38: La misma representación que en la figura 3.37, para la 4-tupla 2, 3, 4, 21 y para un periodo orbital que se inicia en  $t = 17$  h.

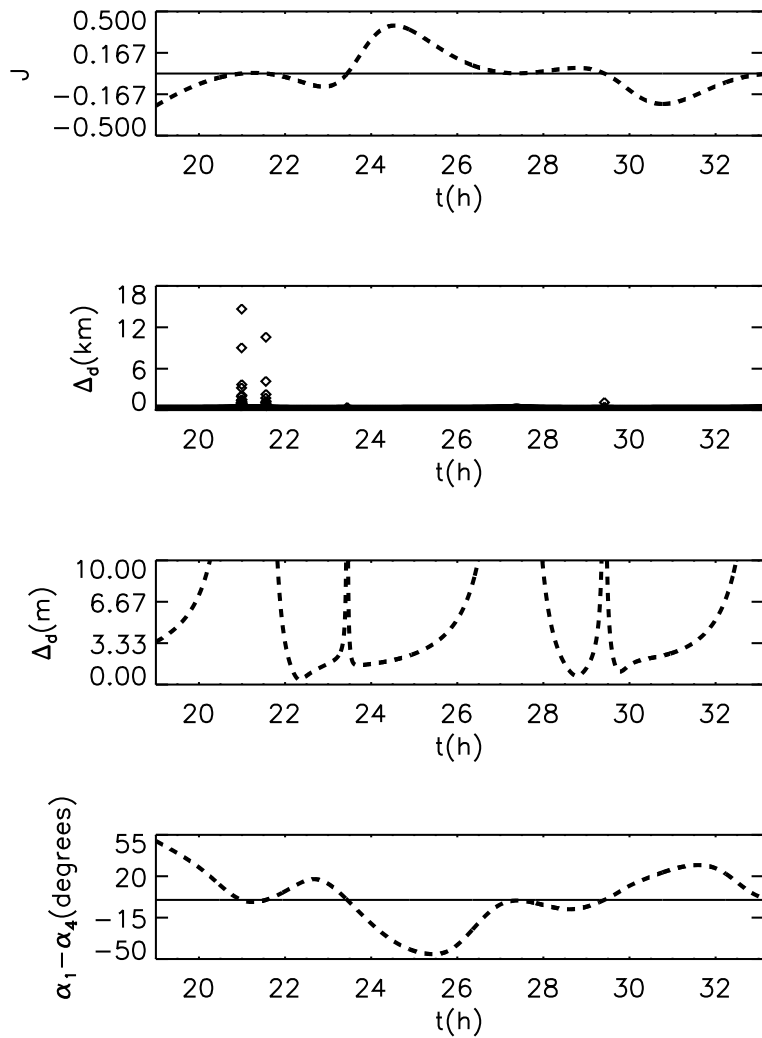


Figura 3.39: La misma representación que en la figura 3.37, para la 4-tupla 2, 7, 14, 21 y para un periodo orbital que se inicia en  $t = 19$  h.

### 3.14.1. Sobre la selección de 4-tuplas de emisores

Como hemos visto en 3.14, no es posible hallar la posición de un satélite GPS (GALILEO) usando siempre la misma 4-tupla de emisores. Por tanto, la solución es hallar la posición de un satélite GPS (GALILEO) a partir de varias 4-tuplas de satélites emisores GALILEO (GPS). Lo ideal sería tener algún criterio para elegir las mejores 4-tuplas; es decir, aquellas que produzcan los U-errores más pequeños en cada punto de la órbita. A falta de uno de estos criterios, hemos hallado 4-tuplas que producen errores aceptables en algunos casos. Vamos a presentar uno de ellos.

Las figuras 3.40 y 3.41 muestran el U-error de posicionamiento del satélite número 5 de GALILEO (usuario), en función de  $t$  (en horas), para diferentes 4-tuplas de satélites emisores. Para cada una de ellas, el U-error de posicionamiento es calculado, como siempre, en 7200 puntos uniformemente distribuidos sobre un periodo orbital completo. Utilizando estas figuras es posible ver si, con unas pocas 4-tuplas de satélites emisores GPS, somos capaces de cubrir un periodo orbital completo del satélite GALILEO (usuario), de tal forma que los U-errores sean siempre bajos.

En la figura 3.40, se comprueba fácilmente, que el satélite 5 de GALILEO puede ser posicionado a lo largo del periodo orbital que comienza en  $t = 19 h$  –con errores admisibles– de la forma siguiente:

- Con los satélites emisores 3, 5, 17, 19 de GPS (panel superior), se pueden cubrir los intervalos del tiempo coordinado  $(22, 25) h$  y  $(32, 33.12) h$ , con un error aceptable.
- Análogamente, con los emisores 15, 17, 19, 21 de GPS, obtenemos un posicionamiento bastante bueno en el intervalo  $(28, 32) h$ .
- Y con la 4-tupla 10, 14, 17, 20 de emisores GPS, podemos hallar la posición del satélite 5 de GALILEO, con una precisión razonable en los intervalos  $(19, 22) h$  y  $(25, 28) h$ .

En este caso, tres combinaciones de satélites emisores de GPS bastarían para hallar la posición del satélite de GALILEO, con U-errores de unos pocos metros, a lo largo de un periodo orbital completo. Sin duda estos errores deberían poderse minimizar en el futuro, hallando algún criterio adecuado, pero esto no será discutido más a fondo en esta Tesis.

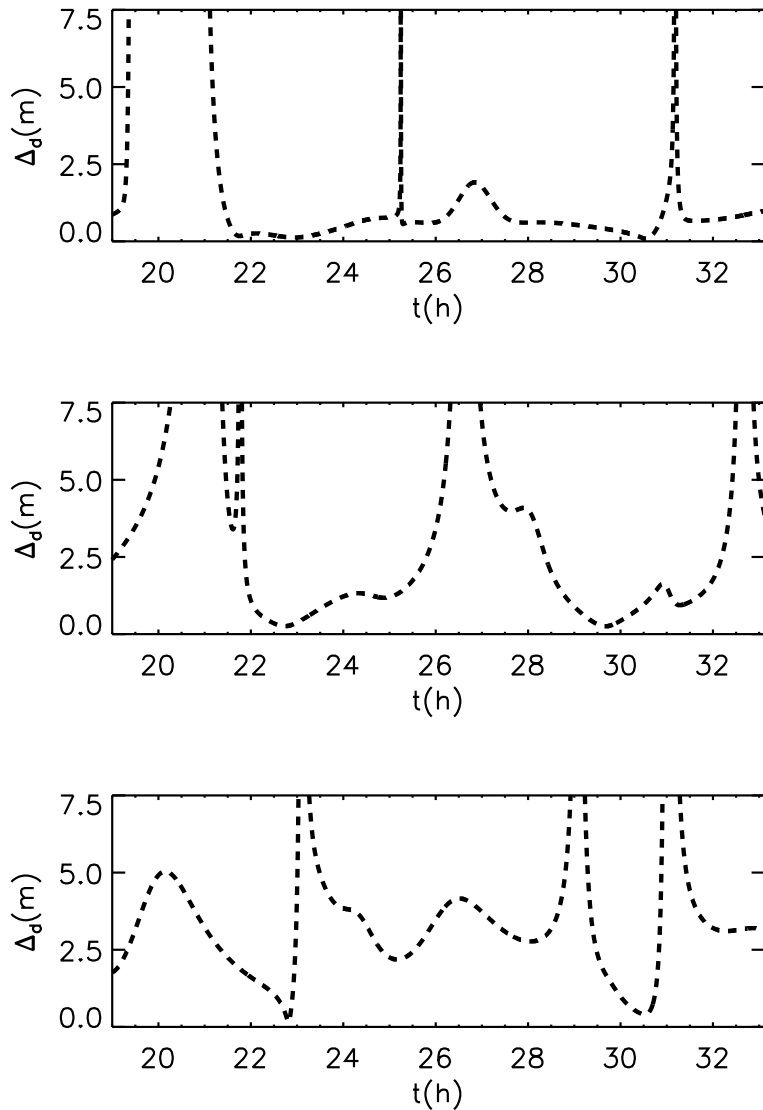


Figura 3.40: Posicionamiento del satélite 5 de GALILEO (usuario) mediante 4-tuplas de emisores GPS. El tiempo coordinado inicial del usuario es  $t = 19 h$ . En todos los paneles se muestra el estimador  $\Delta_d$  en función de  $t$ , fijando valores máximos y mínimos apropiados en el eje de ordenadas, que nos permitan ver los errores en las zonas de interés. De arriba abajo, los paneles corresponden a las siguientes 4-tuplas de emisores GPS: (3, 5, 17, 19); (15, 17, 19, 21) y (10, 14, 17, 20)

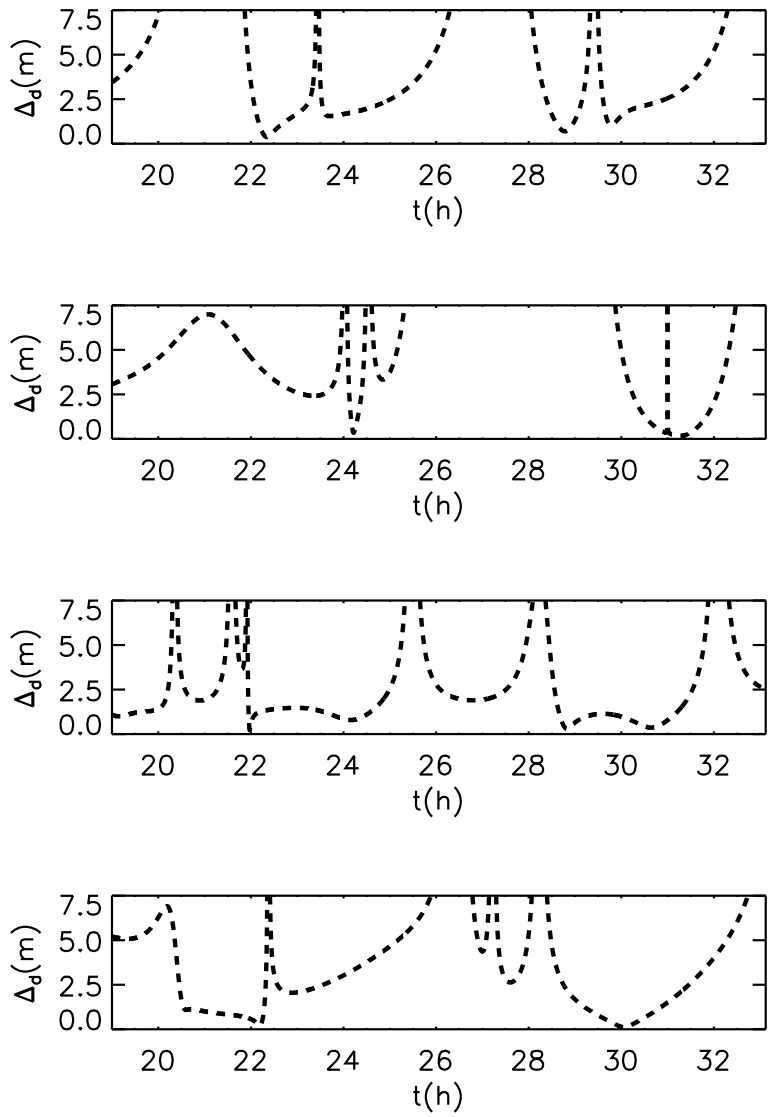


Figura 3.41: El mismo tipo de representación que en la figura 3.40 para otras 4-tuplas de emisoras GPS. De arriba abajo, las nuevas 4-tuplas son las siguientes: (2, 7, 14, 21); (17, 19, 21, 23); (5, 10, 15, 20) y (8, 12, 16, 20).



### 3.15. Resumen y discusión

En este capítulo hemos estimado los U-errores para una elección apropiada de:

- la distribución de masa de la Tierra (simetría esférica)
- las líneas de universo nominales de los satélites (geodésicas del espacio-tiempo de Schwarzschild con órbitas circulares)
- un modelo estadístico para la distribución de desviaciones entre las líneas de universo reales y nominales (normalizadas por la condición  $\Delta r \leq 1 \text{ m}$ ).

Hemos hallado una fórmula analítica para el cálculo del Jacobiano  $J$ , que nos ha permitido demostrar que  $J$  es proporcional al volumen  $V_T$  del tetraedro generado por los cuatro vectores unitarios usuario-satélite, lo que demuestra que al cambiar de 4-tupla de satélites y dejar fijo el usuario, el valor de  $J$  cambia. Hemos podido también probar y verificar que  $J$ ,  $V_T$  y el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$  se anulan simultáneamente. En los puntos de anulación de todas estas cantidades el estimador  $\Delta_d$  de los U-errores diverge, y en cierta área de influencia alrededor de estos puntos los U-errores (valores de  $\Delta_d$ ) son demasiado grandes. Hemos verificado, numéricamente, que la extensión de estas áreas es variable, pudiendo tomar valores que van desde cientos hasta miles de kilómetros (ver la sección 3.8).

Sabemos que  $\Delta_d$  depende de  $J$  y  $\alpha_1 - \alpha_4$ , pero no sabemos cómo; es decir, no tenemos una fórmula que nos describa esta dependencia; probablemente, los U-errores dependan de  $J$ ,  $\alpha_1 - \alpha_4$  y otras variables asociadas a la configuración usuario-satélites. Al no tener una fórmula para  $\Delta_d$  en función de estas variables, la estimación de esta cantidad ha de hacerse numéricamente.

Hemos calculado los U-errores y los valores de  $J$  como se especifica en las secciones 3.3 y 3.5. Lo hemos hecho para una distribución adecuada de puntos dentro de la E-esfera (recubrimiento fijo), para varias 4-tuplas de satélites, para diferentes hiper-superficies,  $t_R = \text{constante}$ , que cubren un periodo de los satélites del GNSS considerado, y para distintas realizaciones de la distribución estadística de desviaciones. Una vez estimados los U-errores y el Jacobiano  $J$ , hemos utilizado mapas HEALPIX-Mollweide apropiados para describir las características generales –extraídas de todos los casos estudiados– de la distribución de los U-errores de posicionamiento y de los valores del Jacobiano. Las figuras presentadas son elegidas de tal modo que –en sus paneles– sean claramente visibles estas características.

Las características generales de la distribución de los valores de  $J$  dentro de la E-esfera son las siguientes:

- Para distancias  $L$  al punto E más pequeña que  $\sim 2 \times 10^4 \text{ km}$ , el Jacobiano  $J$  no se anula y los U-errores estimados son pequeños. La navegación espacial usando satélites GALILEO es posible en esta zona de acuerdo con [Deng 2013].
- Para  $L$  mayor que  $\sim 2 \times 10^4 \text{ km}$ , la cantidad  $J$  no llega a ser cero –dentro de la E-esfera– a lo largo de muchas direcciones, pero se anula una sola vez a lo largo de un número similar de direcciones, y sólo para muy pocas direcciones, el Jacobiano  $J$  es cero dos o más veces.

- Si en una dirección no hay ceros del Jacobiano, para  $L$  mayor que unos 40000  $km$ ,  $|J|$  decrece conforme la distancia a E aumenta, alcanzando valores pequeños para usuarios suficientemente alejados de E.

Las características generales de la distribución del estimador  $\Delta_d$  dentro de la E-esfera son compatibles con las de  $J$ . Los mayores errores se obtienen cerca de los puntos de anulación de  $J$  y cerca del borde de la E-esfera; por ejemplo, sobre la esfera de 90000  $km$  de radio considerada anteriormente; sin embargo, hay que subrayar que, de acuerdo con el panel inferior derecho de la figura 3.33, hay bastantes direcciones (píxeles coloreados que no son grises) en las que el valor de  $\Delta_d$  sobre la citada esfera no es grande, estando comprendido entre 1.3 y 10  $m$  (para una normalización  $\Delta r = 1 m$ ). Todo esto sugiere que la navegación espacial dentro de la E-esfera (quizás algo más allá) sería posible, si en cada momento, desde la nave, fuera posible elegir una 4-tupla que nos mantenga lejos de cualquier anulación de  $J$ , o sobre puntos próximos a la E-esfera con U-errores no muy grandes (que sabemos que existen).

Para usuarios suficientemente cercanos a la superficie de la Tierra (a menos de unos miles de kilómetros de altura), ni hay bifurcación, ni ceros del Jacobiano, y los U-errores (con la normalización de este capítulo) son del orden del metro.

Si los vectores unitarios,  $\vec{n}_A$ , que dan las direcciones de observación de los satélites, en el momento del posicionamiento de un cierto usuario, son conocidos, podemos fácilmente calcular –en la posición del usuario– tanto  $J$ , que es el volumen de un tetraedro generado por estos vectores, como el ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$  formado por el eje del cono cuyas generatrices son  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  y la dirección  $\vec{n}_4$ . Si un usuario lleva aparatos para medir ángulos, podrá determinar los cuatro vectores  $\vec{n}_A$  y calcular  $J$  y  $\alpha_1 - \alpha_4$  en su posición. Para cada 4-tupla de satélites visibles, este usuario calculará un par de valores  $(J, \alpha_1 - \alpha_4)$  y, con estos datos, podrá elegir la 4-tupla que tenga los valores más grandes de  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ . Por lo que sabemos, esta 4-tupla debe conducir a U-errores aceptables; si bien, no hay garantía de que ésta sea la 4-tupla que da los menores U-errores en la posición de nuestro observador (ver la sección 3.8).

Supongamos ahora una nave que viaja dentro de la E-esfera a lo largo de una línea de universo bien conocida. Esta nave debe ser vista como un usuario de los satélites de algún GNSS (GALILEO, GPS etc.) cuya línea de universo es conocida. Por tanto, el Jacobiano  $J$  puede ser calculado –con el método descrito en la sección 3.5– en cualquier punto de esta línea y para cada 4-tupla de satélites. En un cierto punto, el usuario puede estar en el interior del área de influencia de un cero de  $J$  para una cierta 4-tupla, pero la misma posición puede estar lejos de cualquier punto  $J = 0$  para otras 4-tuplas. Este hecho sugiere que la posición de la nave puede ser calculada eligiendo la mejor 4-tupla en cada trozo de su línea de universo. Así, la proximidad a los puntos donde  $J$  se anula, podría ser evitada a lo largo de la línea de universo completa, lo que quiere decir que el posicionamiento es posible durante todo el viaje. Si es así, lo dicho en el párrafo anterior sugiere que, para las mejores 4-tuplas, el orden de magnitud de los errores de posicionamiento – en el interior de la E-esfera– variaría desde unos 10  $m$  (considerando una amplitud  $\Delta r = 10 m$ , diez veces superior a la considerada en el capítulo 3) hasta valores del orden de  $10^2 m$ .

En la sección 3.14.1, hemos considerado una nave de la constelación de GALILEO y hemos comprobado que, sólo con tres 4-tuplas GPS, se puede conseguir un buen

posicionamiento a lo largo de toda una órbita nominal. Para considerar una órbita real podríamos seguir el procedimiento general que se detalla en el próximo párrafo.

Si la línea de universo de una nave cualquiera puede desviarse de su trayectoria nominal, pero podemos acotar las desviaciones, podríamos estudiar el Jacobiano en el interior de un tubo 4D dentro del que podamos estar seguros de que se va a mover la nave. Dentro del tubo, podríamos buscar las 4-tuplas para estar suficientemente lejos de los ceros de  $J$  en cualquiera de sus puntos. Las 4-tuplas a utilizar serían distintas en diferentes regiones del tubo, pero deberían existir en todo él. Ello nos garantizaría que podemos hacer el viaje. Dicho de otra forma, antes de realizar un viaje, podríamos crear una especie de mapa de navegación dentro de un tubo apropiado, con los puntos donde se anula  $J$  y las 4-tuplas a usar en cada zona. Sin embargo, una vez se ve que el viaje es posible, conviene utilizar un método de navegación autónomo como el que vamos a describir en el próximo párrafo. El rango de variación de los U-errores sería –para las mejores 4-tuplas y dentro de la E-esfera– el mismo que en el párrafo anterior.

Finalmente, vamos a discutir si la posición de la nave (usuario) puede ser hallada a partir de información directamente obtenida por dispositivos a bordo (navegación autónoma). La nave debe tener dispositivos para detectar las señales electromagnéticas codificadas enviadas por los satélites visibles de GALILEO. Después de descodificar estas señales, el usuario tiene las coordenadas de emisión correspondientes a todos estos satélites. Muchas 4-tuplas de ellos pueden ser usadas para estimar la posición de la nave. La pregunta es: ¿Cuáles son las mejores 4-tuplas? Como el usuario de la nave no sabe donde está; es decir, como no conoce sus coordenadas inerciales  $x^\alpha$ , no puede calcular el Jacobiano  $J$ ; por tanto, no puede saber si para una cierta 4-tupla está próximo a algún cero de  $J$ . Dicho de otro modo, no sabe nada acerca de la precisión de la posición obtenida a partir de las coordenadas de emisión de una 4-tupla dada. Un posicionamiento preciso requiere información adicional obtenida desde la nave, que debería llevar dispositivos para medir ángulos con suficiente resolución; así, los vectores unitarios de las direcciones de observación de los satélites visibles de GALILEO pueden ser calculados. Usando estos vectores, las cantidades  $J$  y  $\alpha_1 - \alpha_4$  pueden ser fácilmente calculadas. Evidentemente, algunas 4-tuplas tienen asociados valores de  $|J|$  y de  $|\alpha_1 - \alpha_4|$  demasiado pequeños y deben ser descartadas; sin embargo, la 4-tupla más idónea (errores mínimos) no corresponde a los máximos valores de  $|J|$  y de  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ . Aunque estos valores no den malos resultados, estamos buscando un criterio operativo para seleccionar la 4-tupla más adecuada, lo que no parece fácil (ver la sección 3.8 y la Tabla 3.4).



# SPR en el espacio-tiempo de Schwarzschild

## Índice

|  |            |
|--|------------|
| <b>4.1. Introducción</b>   | <b>143</b> |
| <b>4.2. Ecuaciones de las geodésicas del ET-S</b>  | <b>145</b> |
| 4.2.1. Integración numérica de las ecuaciones de las geodésicas del ET-S                   | 146        |
| <b>4.3. Algunas relaciones de interés en el ET-S</b>                                       | <b>148</b> |
| 4.3.1. Relación entre el tiempo propio de los satélites y el tiempo coordenado geocéntrico | 149        |
| 4.3.2. Relación entre el tiempo propio terrestre y el tiempo coordenado geocéntrico        | 151        |
| 4.3.3. Relación entre el tiempo terrestre y el tiempo propio del satélite                  | 153        |
| <b>4.4. Modelo 1 como SPR de orden cero (0-SPR)</b>  | <b>153</b> |
| <b>4.5. Modelo 2 como SPR de primer orden (1-SPR)</b>                                      | <b>154</b> |
| 4.5.1. Relación entre los determinantes $J$ y $D$  | 158        |
| <b>4.6. Análisis numérico</b>  | <b>158</b> |
| 4.6.1. Consideraciones generales   | 159        |
| 4.6.2. Estudio de la región donde el determinante $D$ se anula                             | 161        |
| 4.6.3. S-errores a lo largo de direcciones radiales particulares                           | 162        |
| 4.6.4. Superficies de nivel  | 168        |
| 4.6.5. S-errores en superficies esféricas concéntricas con la Tierra                       | 177        |
| 4.6.6. S-errores versus U-errores  | 184        |
| <b>4.7. Resumen y discusión</b>  | <b>186</b> |

## 4.1. Introducción

La métrica de Schwarzschild describe el campo gravitatorio en el exterior de una distribución de masa esférica y estática. Para realizar algunos estudios, se puede hacer la hipótesis de que la Tierra es una de estas distribuciones de masa. Esta hipótesis es buena si pretendemos estudiar –como se hace en este capítulo– el movimiento de fotones en los alrededores de la Tierra, pues como ya hemos señalado

antes, los efectos gravitatorios de tipo lente producidos por la Tierra son pequeños y esencialmente debidos a su monopolo (masa total). Bajo la citada hipótesis, los fotones describen geodésicas nulas del ET-S. En el caso de los satélites de un GNSS, se puede suponer que la métrica del espacio-tiempo en la región del posicionamiento es una perturbación de la de Schwarzschild, y que la línea de universo de cada satélite es una pequeña perturbación de alguna geodésica temporal del ET-S. Todo esto nos sugiere que es conveniente hacer un estudio apropiado de las geodésicas del ET-S, tanto de las nulas como de las temporales (secciones 4.2 y 4.2.1).

En secciones posteriores analizaremos cuantitativamente la precisión del modelo 1 de SPR ( ver la sección 1.15), ya que hasta ahora, hemos supuesto que este modelo, basado en que las líneas de universo de los satélites (fotones) son geodésicas temporales (nulas) del ET-S (ET-M asintótico al ET-S), debe ser suficientemente preciso –al menos en algunos problemas de posicionamiento– debido a que el campo gravitatorio de la Tierra es débil y las trayectorias de los fotones no superan unos  $1.3 \times 10^5$  km de longitud dentro de la E-esfera. La validez de esta suposición es estudiada numéricamente en este capítulo. Algunos resultados obtenidos usando el modelo 1 fueron publicados en [Puchades 2012], [Puchades 2014] y [Sáez 2013].

En el modelo 1 de SPR, hay dos tipos de errores de posicionamiento. El primero es debido al hecho de que los fotones no se mueven realmente en el ET-M, sino que están sometidos al campo gravitatorio terrestre. Estos errores serán denominados de ahora en adelante S-errores. Los errores del segundo tipo son debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites (U-errores), y fueron estimados, en el capítulo 3, dentro de la E-esfera (ver la sección 1.16).

Para estimar los S-errores, compararemos la posición espacial y el tiempo del usuario obtenidos con el modelo 1, con los correspondientes a un modelo mejor, el modelo 2 (ver la sección 1.15), en el que tanto los satélites como los fotones se mueven en el ET-S y, por tanto, los fotones se mueven bajo la acción del campo gravitatorio terrestre descrito por la métrica de Schwarzschild. Varios conceptos y técnicas que son útiles para desarrollar el modelo 2 de SPR han sido halladas en la bibliografía, entre ellas, cabe resaltar la definición y uso de la función de universo ([Synge 1931], [Bahder 2001], [Bini 2008], [Synge 1931], [Miguel 2007]) y de la función de transferencia del tiempo, la forma de esta última función en el ET-S ([Teyssandier 2008]), y un procedimiento para hallar las coordenadas inerciales del usuario utilizando la función de transferencia del tiempo ([Čadež 2005], [Čadež 2010], [Delva 2011a]). En este capítulo, este procedimiento es modificado utilizando la fórmula analítica obtenida por [Coll 2010a] –en lugar de iteraciones numéricas– para estudiar el movimiento de fotones en ET-M. Además nuestros cálculos son extendidos hasta distancias  $L$  del punto E de  $10^5$  km, y nuestro tratamiento de errores, basado en U y S-errores que se superponen es implementado.

En el capítulo 3 y en el artículo [Puchades 2014], los U-errores fueron estimados en una distribución de puntos (usuarios) localizados dentro de la E-esfera; aquí, los S-errores son calculados exactamente en los mismos puntos para poder comparar unos errores con los otros. Estimaciones preliminares fueron presentadas en [Puchades 2015]. Si llegamos a demostrar que los S-errores son mucho más pequeños que los U-errores en cualquier lugar dentro de la E-esfera, el modelo 1 de SPR podrá ser usado en esta gran región que rodea la Tierra, a no ser que necesitemos una

precisión tan alta en el posicionamiento, que no podamos despreciar los S-errores frente a los de tipo U (esto será discutido a su debido tiempo).

## 4.2. Ecuaciones de las geodésicas del ET-S

En esta tesis, la métrica de Schwarzschild es tratada como una perturbación de la métrica del ET-M asintótico, y trabajamos a primer orden en la pequeña cantidad adimensional  $GM_{\oplus}/r$ , cuyo valor máximo es  $GM_{\oplus}/R_{\oplus} \simeq 6.94 \times 10^{-10}$ . Pero antes de empezar a trabajar a primer orden en  $GM_{\oplus}/r$ , conviene presentar un tratamiento exacto de las ecuaciones de las geodésicas y de las constantes de movimiento en el ET-S (ver [Weinberg 1972]).

La métrica del ET-S, escrita en coordenadas de Schwarzschild  $(r, \theta, \varphi, t)$ , tiene la forma:

$$-d\tau^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (4.1)$$

donde  $r \geq R_{\oplus}$  y las funciones B(r) y A(r) pueden ser escritas del siguiente modo:

$$B(r) = 1 - \frac{2M_{\oplus}G}{r} \quad (4.2)$$

y

$$A(r) = B(r)^{-1} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de las geodésicas, seguidas por los satélites y fotones en ausencia de interacciones no gravitatorias (caída libre), son:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dp} \frac{dx^{\lambda}}{dp} = 0, \quad (4.4)$$

donde p es un parámetro afín.

A partir de las ecuaciones (4.1)–(4.4), hallamos fácilmente lo siguiente:

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - r \frac{\sin^2\theta}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2, \quad (4.5)$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2, \quad (4.6)$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2\cot\theta \frac{d\varphi}{dp} \frac{d\theta}{dp}, \quad (4.7)$$

$$0 = \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp}, \quad (4.8)$$

donde el símbolo "prima" denota  $d/dr$ . A partir de estas ecuaciones vamos a hallar las constantes de movimiento.

Dividiendo la ecuación (4.8) por  $dt/dp$ , obtenemos

$$\frac{d}{dp} \left[ \ln \frac{dt}{dp} + \ln B \right] = 0 \quad (4.9)$$

cuya solución es:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)}, \quad (4.10)$$

que escrita a primer orden en  $GM_{\oplus}/r$  adopta la forma  $dt/dp \simeq 1 + 2GM_{\oplus}/r$ .

Dividiendo la ecuación (4.7) por  $d\varphi/dp$  resulta

$$\frac{d}{dp} \left[ \ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 + \ln \sin^2 \theta \right] = 0. \quad (4.11)$$

Si definimos la cantidad

$$J = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dp}, \quad (4.12)$$

las ecuaciones (4.10) y (4.11) nos permiten demostrar fácilmente que  $J$  no cambia con el tiempo coordenado  $t$  (ni con  $p$ ), y por tanto es una constante del movimiento: el momento angular por unidad de masa.

Si dividimos la ecuación (4.1) por  $dp^2$  y usamos las relaciones (4.10) y (4.12), hallamos lo siguiente:

$$\left( \frac{d\tau}{dp} \right)^2 = \frac{1}{B} - A \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 - \frac{J^2}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.13)$$

y si derivamos el segundo miembro de esta última ecuación con respecto al tiempo propio, se comprueba fácilmente la derivada es nula; por tanto podemos escribir

$$d\tau^2 = E dp^2, \quad (4.14)$$

donde  $E$  una nueva constante del movimiento, que puede ser interpretada como la energía total por unidad de masa. Esta segunda constante del movimiento puede escribirse de la forma

$$E = \frac{1}{B} - A \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 - \frac{J^2}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.15)$$

y su valor es cero para las geodésicas nulas (fotones) y positivo para las temporales (satélites).

#### 4.2.1. Integración numérica de las ecuaciones de las geodésicas del ET-S

Antes de integrar numéricamente, para determinar las líneas de universo de los satélites (geodésicas temporales) y de los fotones (geodésicas nulas), escribimos las ecuaciones de las geodésicas como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias



de primer orden. Las ecuaciones resultantes son:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{B^3 \left[ -E + \frac{1}{B} - \frac{r^2}{B^2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{J^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right]} \quad (4.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{JB}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi \quad (4.18)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{B'}{B} \frac{dr}{dt} \psi - 2 \frac{\psi}{r} \frac{dr}{dt} + \cot \theta \frac{J^2 B^2}{r^4 \sin^2 \theta} \quad (4.19)$$

Estas ecuaciones han sido obtenidas de la siguiente forma:

- La ecuación (4.16) se obtiene combinando (4.3), (4.10) y (4.15), y el signo será positivo (negativo) en los puntos de la trayectoria donde  $r$  crece (decrece).
- Obtenemos (4.17) a partir de las ecuaciones (4.10) y (4.12).
- La ecuación (4.18) es la definición de la nueva variable  $\psi$ , que se define para que todas las ecuaciones a resolver sean lineales.
- Finalmente la ecuación (4.19) se obtiene combinando las ecuaciones (4.6), (4.10), (4.17) y (4.18).

La resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.16)–(4.19) presenta un grave problema; ello es debido a que, de acuerdo con (4.16), la velocidad radial  $dr/dt$  puede cambiar de signo en algunos puntos de la geodésica. En esos puntos se cumple la condición  $dr/dt = 0$ ; por tanto, cuando los satélites describen órbitas circulares, o en ciertos tramos de otros tipos de órbitas, no existen estos puntos conflictivos y la integración directa del sistema (4.16)–(4.19) es factible; sin embargo, un fotón que viaje desde los satélites al usuario, es obvio, que se puede acercar al centro de la Tierra ( $dr/dt < 0$ ) y luego separarse de él ( $dr/dt > 0$ ), por lo que en algún punto se cumple la condición  $dr/dt = 0$ . Lo mismo ocurre en el caso de los satélites cuando la órbita es cerrada pero no circular. Esto quiere decir que nos encontraremos con puntos de este tipo cuando tratemos problemas de posicionamiento; la pregunta es ¿qué problema numérico tenemos en estos puntos? Pues bien, cuando integramos un sistema de ecuaciones como el que nos ocupa, hemos de evaluar el segundo miembro de la ecuación (4.16) en muchos puntos que van siendo elegidos, sobre la marcha, en el proceso de integración, de modo que cuando nos acercamos mucho a un punto donde  $dr/dt = 0$ , no sabemos en que momento exacto pasamos de un lado a otro de este punto y, por tanto, no sabemos cuando hemos de cambiar el signo en (4.16). Después de verificar que este problema conduce a resultados numéricos absurdos, tuvimos que manipular el sistema (4.16)–(4.19) para escribirlo de una forma más apropiada y evitar el problema, el nuevo

sistema tiene la forma siguiente:

$$\frac{dr}{dt} = \xi \quad (4.20)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{JB}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.21)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi \quad (4.22)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{B'}{B} \xi \psi - 2 \frac{\psi}{r} \xi + \cot \theta \frac{J^2 B^2}{r^4 \sin^2 \theta} \quad (4.23)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi^2 \frac{3B'}{2B} + \psi^2 \frac{r}{A} + \frac{1}{A} \frac{J^2 B^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{B'}{2A} \quad (4.24)$$

donde la primera ecuación define la nueva variable  $\xi$ , y la ecuación (4.24) resulta de combinar la ecuación (4.5), que es de segundo orden, con (4.20), (4.21) y (4.22), teniendo además en cuenta la relación  $A'/A = -B'/B$ , que es consecuencia directa de (4.3).

Después de dar valores iniciales a las variables, hemos usado dos métodos numéricos diferentes para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.20)–(4.24), se trata de un Runge-Kutta de paso variable y del método de Bulirsch-Stoer implementados en subrutinas de [Press 1999], que han sido modificadas para poder usar resolución múltiple. Ambos métodos dan los mismos resultados y han sido sometidos a algunas pruebas para verificar su buen funcionamiento.

Disponemos, por tanto, de un código numérico para resolver las ecuaciones (4.20)–(4.24), que será el punto de partida, en un futuro próximo, para estudiar SPR más generales que el del modelo 1 basado en geodésicas del ET-S. En estos SPR la métrica será una perturbación de la de Schwarzschild (a primer orden en  $GM_{\oplus}/r$ ), y las geodésicas de esta métrica se desviarán ligeramente con respecto a las del ET-S, de modo que podemos escribir

$$r = r_S + \delta r, \quad \theta = \theta_S + \delta \theta, \quad \varphi = \varphi_S + \delta \varphi, \quad t = t_S + \delta t.$$

Las variables  $r_S$ ,  $\theta_S$ ,  $\varphi_S$  y  $t_S$  son coordenadas de una geodésica del ET-S y deben satisfacer las ecuaciones (4.20)–(4.24), pero  $\delta r$ ,  $\delta \theta$ ,  $\delta \varphi$  y  $\delta t$  son pequeñas desviaciones con respecto a la geodésica del ET-S, y es fácil saber las ecuaciones diferenciales que tienen que satisfacer, trabajando a primer orden en las perturbaciones de la métrica de Schwarzschild. Estas ecuaciones, junto a las (4.20)–(4.24) para  $r_S$ ,  $\theta_S$ ,  $\varphi_S$  y  $t_S$ , deben ser resueltas numéricamente para hallar las geodésicas de la métrica de Schwarzschild perturbada.

Algo parecido se hace en la sección 4.4, en la que se considerará que las geodésicas seguidas por los fotones en el ET-S, se desvían ligeramente con respecto a las geodésicas del ET-M asintótico.

### 4.3. Algunas relaciones de interés en el ET-S

En el marco del ET-S y para líneas de universo con trayectorias circulares, conviene justificar brevemente ecuaciones como la ecuación (1.6), expresiones como la

de la velocidad angular dada en la sección 1.7, y afirmaciones previas relativas al ritmo con el que se retrasan los relojes situados en Tierra con respecto a los que viajan en las naves GPS y GALILEO (ver la sección 1.3). Estas justificaciones se realizan en las subsecciones siguientes.

#### 4.3.1. Relación entre el tiempo propio de los satélites y el tiempo coordenado geocéntrico

La línea de universo de un satélite puede ser parametrizada tanto con el tiempo propio  $\tau$  del mismo (medido por un reloj a bordo), como con el tiempo coordenado  $t$  de Schwarzschild, al que también llamaremos tiempo geocéntrico, por ser el tiempo ligado al ET-M asintótico, cuyo origen es concéntrico con la Tierra. Nuestro objetivo es hallar la relación entre estos dos tiempos (parámetros); es decir, queremos obtener la función  $dt/d\tau$  en un punto cualquiera de la geodésica temporal del satélite. De paso, hallaremos también la velocidad angular  $\Omega = d\varphi/dt$ .

Si parametrizamos la línea de universo de los satélites mediante el tiempo geocéntrico, sus ecuaciones serán de la forma

$$r = r_A(t), \quad \theta = \theta_A(t), \quad \varphi = \varphi_A(t).$$

La velocidad angular  $\Omega$  vendrá dada por la ecuación (4.21), y la relación entre  $t$  y  $\tau$  (otro posible parámetro) se puede obtener fácilmente combinando las ecuaciones (4.10) y (4.14). El resultado es

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{EB(r)}}. \quad (4.25)$$

Hasta ahora estamos considerando geodésicas temporales en el ET-S, y esta última ecuación no tiene sentido en el caso de geodésicas nulas, ya que para ellas, la constante  $E$  es nula y el tiempo propio no existe. Ahora vamos a considerar las líneas de universo nominales –de los satélites– consideradas en esta tesis, es decir, vamos a imponer que las trayectorias sean circunferencias concéntricas con la Tierra ( $dr/dt = 0$  y  $d^2r/dt^2 = 0$ ) de radio  $R$ . Dada la simetría esférica del problema, en el caso de estas trayectorias, se puede considerar que están situadas en el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$  ( $d\theta/dt = 0$ ) –a efectos de todos los cálculos que vamos a hacer– sin perder generalidad. Bajo estas condiciones, la ecuación (4.16) se reduce a

$$E = \frac{1}{B(R)} - \frac{J^2}{R^2} \quad (4.26)$$

donde, como sabemos,  $E$  y  $J$  son constantes y  $B(R) = 1 - \frac{2M_{\oplus}G}{R}$  y, además, si combinamos las ecuaciones (4.5), (4.10) y (4.17) e imponemos las condiciones anteriores sobre  $\theta$ ,  $d\theta/dt$ ,  $r$ ,  $dr/dt$  y  $d^2r/dt^2$ , resulta:

$$-\frac{B'(R)}{B^2(R)} + 2\frac{J^2}{R^3} = 0. \quad (4.27)$$

Si ahora despejamos las constantes del movimiento  $E$  y  $J$  en las ecuaciones (4.26) y

(4.27), obtenemos:

$$J = \sqrt{\frac{R^3 B'(R)}{2B^2(R)}} \quad (4.28)$$

$$E = \frac{1}{B(R)} \left( 1 - \frac{RB'(R)}{2B(R)} \right), \quad (4.29)$$

y ya tenemos todas las ecuaciones necesarias para obtener  $d\phi/dt$  y  $dt/d\tau$  en el caso de trayectorias circulares, tanto si realmente están, como si no, en el plano ecuatorial; en efecto, si sustituimos la expresión (4.28) de  $J$  en (4.17), obtenemos

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{B'(R)}{2R}} = \sqrt{\frac{M_{\oplus}G}{R^3}} \quad (4.30)$$

que es la velocidad angular del satélite en el ET-S, tal y como vimos en la sección 1.7.

Por otra parte, si sustituimos la expresión (4.29) de  $E$  en la ecuación (4.25) resulta

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{B(R) \left( 1 - \frac{RB'(R)}{2B(R)} \right)}}, \quad (4.31)$$

y si despreciamos términos de segundo orden en  $\frac{GM_{\oplus}}{R}$ , la expresión (4.31) se reduce a la siguiente:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} \simeq 1 + \frac{3GM_{\oplus}}{2R}. \quad (4.32)$$

Esta relación fue ya presentada –sin demostración– en la sección 1.7.

A continuación veremos que el valor de  $\gamma - 1$  que nos da la ecuación (4.32) es la suma de los valores que corresponden a dos situaciones diferentes, a los que vamos a llamar  $(\gamma - 1)_c$  y  $(\gamma - 1)_g$  por ser de carácter cinemático y gravitatorio, respectivamente.

- **Parte cinemática de  $\gamma - 1$ :** si en la ecuación (4.1) ponemos  $r = R$  y  $\theta = \pi/2$  y dividimos por  $(dt)^2$  resulta:

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = B(R) - R^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (4.33)$$

Si consideramos que no hay campo gravitatorio, imponiendo la condición  $B(r) = 1$ , esta última ecuación se escribe como sigue:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - R^2\Omega^2}}, \quad (4.34)$$

por tanto, teniendo en cuenta la ecuación (4.30), y que la velocidad lineal del satélite es  $v_{sat} = R\Omega$ , a primer orden en  $GM_{\oplus}/R$  podemos escribir:

$$(\gamma - 1)_c \simeq \frac{1}{2}v_{sat}^2 \simeq \frac{GM_{\oplus}}{2R}. \quad (4.35)$$

Además, integrando en ambos miembros de la ecuación  $dt = (1 + GM_{\oplus}/2R)d\tau$ , y tomando  $t = \tau = 0$  como origen de tiempos, obtenemos:

$$t - \tau \simeq \frac{GM_{\oplus}\tau}{2R} \quad (4.36)$$

haciendo  $\tau = 24 h$  en la ecuación (4.36), calculamos la diferencia  $t - \tau$  entre el tiempo coordinado y el tiempo propio del satélite (GPS o GALILEO), que aparece en el transcurso de un día, así se obtiene  $t - \tau \simeq 7.19 \mu s$  para los satélites GPS y  $t - \tau \simeq 6.45 \mu s$  para los de GALILEO. Esta es la diferencia de tiempos de carácter cinemático. Cada día, el reloj de la nave se atrasa, el valor calculado, con respecto a un reloj que esté en reposo en el ET-M asintótico (geocéntrico). Como  $t - \tau$  es proporcional a  $\tau$ , este retraso podemos calcularlo para un intervalo de tiempo propio cualquiera.

- **Parte gravitatoria de  $\gamma - 1$ :** Vamos a suponer ahora un satélite en reposo  $v_{sat} = \Omega = 0$ , situado en un punto cualquiera de la órbita ecuatorial de radio  $R$ . En este caso, la ecuación (4.33) se reduce a

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{B(r)}}, \quad (4.37)$$

que a primer orden en  $GM_{\oplus}/r$  nos conduce a la relación

$$(\gamma - 1)_g \simeq \frac{GM_{\oplus}}{R}. \quad (4.38)$$

Una integración análoga a la realizada en el caso cinemático nos da el siguiente resultado

$$t - \tau \simeq \frac{GM_{\oplus}\tau}{R}. \quad (4.39)$$

Si comparamos las ecuaciones (4.36) y (4.39), concluimos que el campo gravitatorio produce un retraso  $t - \tau \propto \tau$ , que es doble que el cinemático; por tanto en un día, los relojes a bordo de los satélites GPS (GALILEO) se retrasan  $14.38 \mu s$  ( $t - \tau \simeq 12.90 \mu s$ ) con respecto a los relojes que miden  $t$ .

Si superponemos linealmente los dos efectos considerados (cinemático y gravitatorio), y tenemos en cuenta las ecuaciones (4.35), (4.38) y (4.32), podemos escribir:

$$(\gamma - 1)_c + (\gamma - 1)_g \simeq \frac{3GM_{\oplus}}{2R} \simeq \gamma - 1. \quad (4.40)$$

el retraso total  $t - \tau \propto \tau$  es por tanto (en nuestra aproximación de primer orden) la suma de los retrasos cinemático y gravitatorio, como cabía esperar, intuitivamente, dada la linealidad de la citada aproximación.

### 4.3.2. Relación entre el tiempo propio terrestre y el tiempo coordinado geocéntrico

Supongamos un usuario en reposo en un punto de la Tierra y llamemos  $T$  a su tiempo propio, queremos calcular la relación entre el tiempo geocéntrico  $t$  (ver la sección 4.3.1) y  $T$ .

Utilizaremos las coordenadas de Schwartzchild  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$ . El usuario se mueve con la Tierra sobre algún paralelo  $\theta = \theta_0$  y, por tanto, las ecuaciones de su línea de universo parametrizadas por  $t$  serán:

$$\begin{aligned} r &= R_{\oplus} \\ \theta &= \theta_0 \\ \varphi &= \varphi_0 + \Omega_{\oplus} t \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde  $\varphi_0$  define una posición inicial sobre el paralelo  $\theta = \theta_0$  y  $\Omega_{\oplus}$  es la velocidad angular de la Tierra.

El tiempo propio  $dT$  viene dado por la expresión general

$$dT = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}} \quad (4.42)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  son las componentes de la métrica en el ET-S. A partir de las ecuaciones (4.1) en (4.42) obtenemos:

$$dT = \sqrt{B(r) - \left[ A(r) \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right]} dt, \quad (4.43)$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.41), esta última ecuación se reduce a

$$dT = \sqrt{B(R_{\oplus}) - R_{\oplus}^2 \sin^2 \theta_0 \Omega_{\oplus}^2} dt. \quad (4.44)$$

Como sabemos que  $B(R_{\oplus}) = 1 - 2GM_{\oplus}/R_{\oplus}$ , podemos comparar el valor de  $2GM_{\oplus}/R_{\oplus} \simeq 1.39 \times 10^{-9}$  con el del término  $R_{\oplus}^2 \sin^2 \theta_0 \Omega_{\oplus}^2$ . Para  $\sin \theta_0 = 1$ , este término toma un valor máximo aproximadamente igual a  $2.38 \times 10^{-12}$ , que es debido a la rotación de la Tierra. Vemos pues que este valor es aproximadamente igual a unas  $1.7 \times 10^{-3}$  veces más pequeño que el valor de  $|B(R_{\oplus}) - 1|$ . Por tanto, la ecuación (4.44) se puede escribir aproximadamente de la siguiente forma:

$$dT = \sqrt{1 - \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} dt. \quad (4.45)$$

Esta ecuación se ha obtenido despreciando el efecto de la rotación de la Tierra, frente a los efectos de su campo gravitatorio; las estimaciones realizadas nos indican que podemos trabajar en el ET-S, en el sentido de que utilizar la métrica de Kerr, que es bastante más complicado, sólo daría pequeños efectos unas  $10^{-3}$  veces menores que los efectos debidos al monopolo de la distribución de masa de la Tierra.

Partiendo de la ecuación (4.45) e integrando como en casos anteriores, a primer orden en  $GM_{\oplus}/R_{\oplus}$ , resulta

$$t - T \simeq \frac{GM_{\oplus} T}{R_{\oplus}}, \quad (4.46)$$

por lo que concluimos fácilmente que en un día de tiempo  $T$ , los relojes en Tierra se atrasan unos  $59.97 \mu s$  con respecto a los relojes que miden  $t$ .

### 4.3.3. Relación entre el tiempo terrestre y el tiempo propio del satélite

La relación entre los tiempos propios  $T$  y  $\tau$  se obtiene combinando las ecuaciones (4.45) y (4.32) para obtener:

$$dT = \left(1 - \frac{M_{\oplus}G}{R_{\oplus}}\right) \left(1 + \frac{3GM_{\oplus}}{2R}\right) d\tau, \quad (4.47)$$

de donde se deduce, despreciando el término  $3G^2M_{\oplus}^2/2RR_{\oplus}$  (segundo orden) e integrando como en ocasiones anteriores, la siguiente relación:

$$T - \tau \simeq \left(\frac{3GM_{\oplus}}{2R} - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)\tau; \quad (4.48)$$

por tanto, en un día, los relojes que miden el tiempo propio terrestre  $T$  se atrasan, con respecto a los que miden los tiempos propios de los satélites GPS (GALILEO), unos  $38.40 \mu s$  ( $40.62 \mu s$ ). Los mismos resultados son obtenidos al superponer todos los efectos anteriormente considerados: el efecto gravitatorio sobre los relojes en Tierra y los efectos que hemos llamado cinemático y gravitatorio sobre los relojes que funcionan a bordo de los satélites. Es decir, es fácil comprobar que  $T - \tau = t - \tau - 59.97 \mu s = (-59.97 + 7.19 + 14.38) \mu s = -38.40 \mu s$  para GPS y  $T - \tau = t - \tau - 59.97 \mu s = (-59.97 + 6.45 + 12.90) \mu s = -40.62 \mu s$  para GALILEO.

## 4.4. Modelo 1 como SPR de orden cero (0-SPR)

Para calcular los S-errores, se considera que no hay incertidumbres en las líneas de universo de los satélites, que se mueven exactamente como corresponde a las órbitas nominales de GALILEO o GPS. En esta situación, no existen U-errores. Solamente hay S-errores; o sea, diferencias en el posicionamiento obtenidas al mover los fotones en el ET-S y en el ET-M asintótico.

En esta sección, consideraremos que los fotones se mueven en el ET-M y, en la próxima, que lo hacen en el ET-S. Por tanto, aquí, la posición del usuario que corresponde a unas coordenadas de emisión  $\tau^A$ , se calcula como se describió en la sección 1.8; es decir, con el código TX, que está basado: en la ecuación (1.9), y en las ecuaciones de las líneas de universo nominales de los satélites parametrizadas por sus tiempos propios (ver la sección 1.7). El código nos da las coordenadas del usuario (posición) en el ET-M asintótico. A efectos del cálculo de los S-errores no importa que haya bifurcación, pues en tal caso, podemos calcular los S-errores de cada una de las dos posibles posiciones por separado y con el mismo método.

Recuérdese que las líneas nominales han sido elegidas de modo que las trayectorias son circulares, y que son recorridas como corresponde a un movimiento circular de caída libre en el ET-S. Las ecuaciones de estas líneas son (1.7), (1.6) y (1.8) (ver la sección 1.7) y, nos permiten calcular la posición de los cuatro satélites necesarios para el posicionamiento (coordenadas  $x_A^{\mu}$ ) para un tiempo propio dado. Por tanto, a partir de las cuatro coordenadas de emisión  $\tau^A$ , podemos calcular las posiciones de los cuatro satélites en el ET-S cuando emitieron sus señales. Estos eventos de emisión, que hemos podido calcular, definen los puntos iniciales de las líneas de universo de

los fotones; por esta razón, estos eventos serán denotados  $P_{IA}$ , y sus coordenadas inerciales son  $x_{IA}^\mu(\tau^A)$ .

## 4.5. Modelo 2 como SPR de primer orden (1-SPR)

En esta sección, el 1-SPR (modelo 2) se estudia como una perturbación del 0-SPR (modelo 1). De acuerdo con lo visto en la sección anterior, los fotones emitidos desde el satélite A inician su movimiento en el punto  $P_{IA}$ , cuyas coordenadas  $x_{IA}^\mu(\tau^A)$  han sido calculadas a partir de  $\tau^A$  (coordenadas de emisión recibidas por el usuario). Esto es totalmente válido tanto en el 1-SPR como en el 0-SPR. Las diferencias aparecen después, en el viaje de los fotones, que en el 1-SPR (0-SPR) ocurre en el ET-S (ET-M).

Siguiendo con el 1-SPR, la posición del usuario es la intersección de cuatro geodésicas nulas del ET-S. Cada una de estas geodésicas pasa por el punto  $P_{IA}$ , y tiene dirección de propagación adecuada para llegar a alcanzar la posición del usuario. Las coordenadas del punto de intersección  $P_{SO}$  (posición espacio-temporal del usuario en el ET-S) son las cantidades  $x_{SO}^\mu$ .

Puesto que las direcciones de propagación de los fotones son desconocidas, un método adecuado es necesario para localizar al usuario (el punto de intersección). Cierta método, que no usa la solución exacta de [Coll 2010a] (ver sección 1.8), fue implementado por [Delva 2011a] (ver figura 4.1). En esta tesis se diseña una nueva versión de este método, que hace uso de la citada solución exacta.

Ambas versiones están basadas en el hecho de que, para las geodésicas que pasan a través de los puntos  $P_{IA}$  y  $P_S$  (coordenadas  $x_S^\mu$ ), existe una relación entre  $x_S^4 - x_{IA}^4 \equiv t_S - t_{IA}$  y las coordenadas  $x_{IA}^i \equiv \vec{R}_{IA}$  y  $x_S^i \equiv \vec{R}_S$ . Esta relación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$t_S - t_{IA} = T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_S) \quad (4.49)$$

donde la parte izquierda es el tiempo transcurrido desde la emisión hasta el evento  $P_S$ , y  $T_S$  es la llamada función de transferencia de tiempo del ET-S.

Consideremos que los fotones emitidos desde los puntos  $P_{IA}$ , con coordenadas  $x_{IA}^\mu(\tau^A)$ , siguen geodésicas nulas en el ET-M asintótico. Cuatro de estas geodésicas intersectan en el punto  $P_{M0}$  (posición espacio-temporal del usuario en el ET-M), cuyas coordenadas  $x_{M0}^\mu$  serán comparadas con  $x_{SO}^\mu$ . Como en el ET-S (véase más arriba), el tiempo transcurrido en ir -a lo largo de la geodésica nula- desde el evento de emisión hasta un punto  $Q_M$  con coordenadas  $(x_M^i, t_M)$  es la diferencia:

$$t_M - t_{IA} = T_M(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M) \quad (4.50)$$

donde  $T_M$  es la función de transferencia de tiempo del ET-M asintótico. En esta geometría, las geodésicas nulas son líneas rectas y, por tanto,

$$T_M(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M) = |\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}| \quad (4.51)$$

Las cantidades  $(\vec{R}_{M0}, t_{M0})$ ; es decir, las coordenadas inerciales del usuario  $x_{M0}^\mu$  pueden ser calculadas a partir de las coordenadas de emisión  $\tau^A$ . Para ello, la fórmula analítica obtenida en [Coll 2010a] es usada (ver sección 1.8). Dicha fórmula es



válida en el ET-M, cualesquiera que sean las líneas de universo de los satélites. Ver [Coll 2012] para un estudio teórico exhaustivo de esta fórmula y [Puchades 2011], [Puchades 2012], [Puchades 2014] y [Sáez 2013] para la descripción de un código numérico basado en ella (código-TX). Recuérdese que este código calcula todas las posiciones del usuario posibles asociadas a unas coordenadas  $\tau^A$  dadas. Podemos encontrar una o dos posiciones (bifurcación). A partir de las coordenadas de emisión  $\tau^A$ , las cantidades siguientes pueden ser fijadas:  $x_{IA}^i$ ,  $t_{IA}$ ,  $x_{M0}^i$  y  $t_{M0}$ . En el caso de bifurcación, hay dos soluciones  $(x_{M0}^i, t_{M0})$ , las cuales pueden ser tratadas por separado.

El ET-S puede ser visto como una perturbación del ET-M asintótico, y cada punto  $Q_M$  de la geodésica nula que pasa por el evento de emisión y por el evento de recepción en el ET-M, puede considerarse asociado a un punto  $P_S$  de la geodésica nula asociada del ET-S; de modo que  $x_S^\mu(P_S) = x_M^\mu + \Delta x_M^\mu$ , siendo  $\Delta x_M^\mu$  la desviación entre puntos asociados de las geodésicas nulas de Minkowski y de Schwarzschild. Así, la solución de posicionamiento,  $(x_{M0}^i, t_{M0})$ , en el ET-M es tomada como la solución a orden cero en el ET-S, y la solución a orden uno en el mismo espacio-tiempo es  $x_{S0}^\mu = x_{M0}^\mu + \Delta x_{M0}^\mu$ .

En el ET-S, el usuario está en la intersección de cuatro geodésicas nulas, y la condición para que cuatro de estas geodésicas nulas se corten es que las cantidades  $\Delta x_{M0}^\mu$  en  $P_{M0}$  sean iguales para los cuatro satélites (ver figura 4.1).

La ecuación (4.49) puede ser reescrita como sigue:

$$t_M + \Delta t_M - t_{IA} = T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M + \Delta \vec{R}_M) \quad (4.52)$$

La parte derecha de esta ecuación puede ser expandida hasta primer orden en  $\Delta \vec{R}_M$  para obtener:

$$t_M + \Delta t_M - t_{IA} = T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M) + \left. \frac{\partial T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_S)}{\partial \vec{R}_S} \right|_{\Delta \vec{R}_M=0} \cdot \Delta \vec{R}_M. \quad (4.53)$$

Puesto que  $\Delta t_M$  es una cantidad de primer orden, todos los términos de la ecuación (4.53) deben ser desarrollados hasta este orden. Por tanto, la función  $T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M)$  va a ser desarrollada hasta primer orden, pero el gradiente involucrado en la ecuación (4.53) es solamente requerido hasta orden cero, ya que está multiplicado por la cantidad de primer orden  $\Delta \vec{R}_M$ .

A orden cero, el ET-S es idéntico al ET-M y, por tanto, teniendo en cuenta la ecuación (4.51), se obtiene  $T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M) = |\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}| + O(1)$ . Es decir, la aproximación de orden cero de la función de transferencia de tiempo en Schwarzschild es  $T_S^{(0)}(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_M) = |\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}|$ , y por tanto, a orden cero, el gradiente de la ecuación (4.53) puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial T_S(\vec{R}_{IA}, \vec{R}_S)}{\partial \vec{R}_S} \right|_{\Delta \vec{R}_M=0}^{(0)} = \frac{\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}}{|\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}|} \quad (4.54)$$

Como se demostró en [Teyssandier 2008], la función  $T_S$  puede ser desarrollado como sigue:

$$T_S = |\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}| + T_S^{(1)} + O(2) \quad (4.55)$$

con

$$T_S^{(1)} = 2GM_{\oplus} \ln \left[ \frac{|\vec{r}_M^*| + |\vec{r}_{IA}^*| + |\vec{r}_M^* - \vec{r}_{IA}^*|}{|\vec{r}_M^*| + |\vec{r}_{IA}^*| - |\vec{r}_M^* - \vec{r}_{IA}^*|} \right] \quad (4.56)$$

donde  $|\vec{r}^*| = |\vec{R}|(1 - GM_{\oplus}/|\vec{R}|)$ . En realidad  $r^*$  es la coordenada radial isotrópica, y las otras coordenadas isotrópicas coinciden con las de Schwarzschild ( $t^* = t$ ,  $\theta^* = \theta$  y  $\varphi^* = \varphi$ ). La relación exacta entre la coordenada radial isotrópica y la coordenada radial de Schwarzschild  $R$  (ver [Misner 1973]) es la siguiente:

$$R = r^* \left[ 1 + \frac{r_s}{4r^*} \right]^2 \quad (4.57)$$

Por tanto, a orden uno en  $GM_{\oplus}/R$ , obtenemos:

$$r^* = R \left[ 1 - \frac{r_s}{2R} \right] \quad (4.58)$$

donde  $r_s = 2GM_{\oplus}$  es el radio de Schwarzschild.

Usamos las coordenadas isotrópicas –como coordenadas auxiliares– solamente para dar una expresión adecuada del término  $T_S^{(1)}$  que aparece en la ecuación (4.55), donde se ve que la función de transferencia de tiempo del ET-S es una perturbación de la del ET-M asintótico.

A partir de las ecuaciones (4.50), (4.53), (4.54)-(4.56), se obtiene fácilmente

$$\Delta t_M - \frac{\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}}{|\vec{R}_M - \vec{R}_{IA}|} \cdot \Delta \vec{R}_M = 2GM_{\oplus} \ln \left[ \frac{|\vec{r}_M^*| + |\vec{r}_{IA}^*| + |\vec{r}_M^* - \vec{r}_{IA}^*|}{|\vec{r}_M^*| + |\vec{r}_{IA}^*| - |\vec{r}_M^* - \vec{r}_{IA}^*|} \right] \quad (4.59)$$

Estas ecuaciones deben ser particularizadas en el punto  $\vec{R}_M = \vec{R}_{M0}$  y  $t_M = t_{M0}$ . Después de particularizar, tenemos cuatro ecuaciones para obtener las cuatro incógnitas  $\Delta \vec{R}_{M0}$  y  $\Delta t_{M0}$ . Entonces, las coordenadas del posicionamiento en el ET-S son  $\vec{R}_{S0} = \vec{R}_{M0} + \Delta \vec{R}_{M0}$  y  $t_{S0} = t_{M0} + \Delta t_{M0}$ . Cada una de las cuatro ecuaciones del sistema (4.59) corresponde a un satélite particular (índice A). El determinante del sistema particularizado –de cuatro ecuaciones– es

$$D = \begin{vmatrix} \frac{x_{I1}^1 - x_{M0}^1}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I1}|} & \frac{x_{I1}^2 - x_{M0}^2}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I1}|} & \frac{x_{I1}^3 - x_{M0}^3}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I1}|} & 1 \\ \frac{x_{I2}^1 - x_{M0}^1}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I2}|} & \frac{x_{I2}^2 - x_{M0}^2}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I2}|} & \frac{x_{I2}^3 - x_{M0}^3}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I2}|} & 1 \\ \frac{x_{I3}^1 - x_{M0}^1}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I3}|} & \frac{x_{I3}^2 - x_{M0}^2}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I3}|} & \frac{x_{I3}^3 - x_{M0}^3}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I3}|} & 1 \\ \frac{x_{I4}^1 - x_{M0}^1}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I4}|} & \frac{x_{I4}^2 - x_{M0}^2}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I4}|} & \frac{x_{I4}^3 - x_{M0}^3}{|\vec{R}_{M0} - \vec{R}_{I4}|} & 1 \end{vmatrix} \quad (4.60)$$

El sistema (4.59) será resuelto usando la regla de Cramer en la sección 4.6.

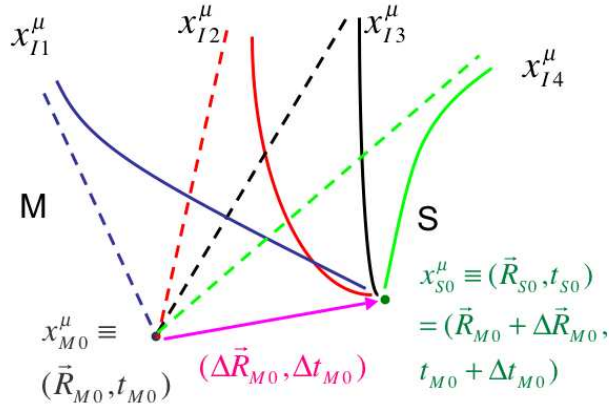


Figura 4.1: Esquema de posicionamiento en el ET-S. Las líneas de rayas (continuas) son las geodésicas nulas  $g_M^A$  ( $g_S^A$ ), del ET-M asintótico (ET-S), seguidas por los fotones, desde que son emitidos en  $x_{IA}^\mu(\tau^A)$  por el satélite  $A$ , hasta que son recibidos por el usuario en  $x_{M0}^\mu$  ( $x_{S0}^\mu$ ). A cada geodésica,  $g_M$ , del ET-M le asociamos otra,  $g_S$ , del ET-S punto a punto, de manera que al punto  $Q_M$  de  $g_M$  de coordenadas  $x_M^\mu$ , le corresponde un punto  $P_S$  de  $g_S$  cuyas coordenadas son  $x_M^\mu + \Delta x_M^\mu$ . Las cuatro geodésicas  $g_M^A$  (líneas de rayas) se cortan en el punto  $x_{M0}^\mu$ , que es la posición del usuario cuando los fotones se mueven en el ET-M; mientras que la posición del mismo usuario en el ET-S viene determinada por las coordenadas del punto de intersección de las geodésicas  $g_S^A$  del ET-S (líneas continuas); punto que se caracteriza porque las cuatro desviaciones  $\Delta x_{MA}^\mu$  coinciden y son iguales a  $\Delta x_{M0}^\mu$ .

### 4.5.1. Relación entre los determinantes $J$ y $D$

En el caso de satélites GPS y GALILEO, que se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz, vamos a ver que el Jacobiano  $J$  de la transformación de coordenadas  $\tau^\alpha = \tau^\alpha(x^\beta)$  y el determinante  $D$  son aproximadamente iguales.

La velocidad de los satélites GPS (GALILEO) es de unos  $3.86 \text{ km/s}$  ( $3.64 \text{ km/s}$ ). A estas velocidades, según vimos en la sección 3.5, el Jacobiano  $J$  viene dado aproximadamente por la ecuación (3.14), y comparando esta expresión con la del determinante  $D$  que aparece en la ecuación (4.60), vemos que que son formalmente idénticas, lo que significa que el determinante  $D$  y el Jacobiano  $J$ , que han sido calculados mediante aproximaciones, son iguales para cualquier GNSS.

Si el determinante  $D$  es nulo para las coordenadas de emisión  $\tau^A$ , no hay soluciones del sistema de ecuaciones descrito en la sección anterior [sistema (4.59) particularizado para  $\vec{R}_M = \vec{R}_{M0}$  y  $t_M = t_{M0}$ ]. Esto significa que el posicionamiento en un pequeño entorno del punto  $P_{M0}$ , cuyas coordenadas en el ET-M asintótico son  $(x_{M0}^i, t_{M0})$ , no es suficientemente preciso. Con el método –a primer orden en  $GM_\oplus/r$ – descrito en la sección anterior, cerca de un punto  $P_{M0}$  donde el determinante  $D$  se anula, la cantidad  $|D|$  debe ser pequeña y, por tanto, las desviaciones  $\Delta\vec{R}_{M0}$  y  $\Delta t_{M0}$  se espera que sean grandes. Además, en el propio punto  $P_{M0}$ , las cantidades  $\Delta\vec{R}_{M0}$  y  $\Delta t_{M0}$  divergen.

Siempre en el marco de las aproximaciones realizadas, basadas en los pequeños valores de  $v_{sat}$  y  $GM_\oplus/r$ , vamos a plantearnos la pregunta siguiente: ¿existen coordenadas de emisión que conduzcan a un determinante  $D$  nulo? Como  $D$  y  $J$  tienen la misma forma, la respuesta afirmativa a esta pregunta fue ya dada en la sección 3.6 y en [Puchades 2014]. Conviene ahora resumir de forma conveniente la respuesta.

El valor del determinante  $D$  (igual al de  $J$ ) es proporcional al volumen  $V_T$  del tetraedro cuyos vértices son los extremos de los cuatro vectores unitarios usuario-satélite (en el ET-M asintótico) y, como consecuencia, si estos vectores son las direcciones de cuatro generatrices del mismo cono, el volumen  $V_T$  y el determinante  $D$  se anulan a la vez. Para estas configuraciones –degeneradas– usuario-satélites,  $D$  y  $J$  se anulan al mismo tiempo.

Como ocurre con los U-errores, los S-errores deben ser grandes en regiones ubicadas cerca de puntos donde  $D$  se anula, o en puntos situados muy lejos de la zona en la que se mueven los satélites (pequeño  $V_T$ ). Nuestras estimaciones numéricas están de acuerdo con estas expectativas.

## 4.6. Análisis numérico

En la práctica, el usuario –cuya posición es desconocida– recibe cuatro tiempos propios de emisión  $\tau^A$ , que pueden ser usados para obtener dos conjuntos de coordenadas inerciales (posiciones). Uno de ellos corresponde a geodésicas nulas en el ET-M y el otro a mover los fotones en el ET-S. Sin embargo, para obtener una distribución de los S-errores del posicionamiento, podemos proceder como sigue: Dados cuatro satélites de la constelación de GALILEO y una posición del usuario  $(x_{M0}^i, t_{M0})$  en el ET-M, cuyas coordenadas  $x_{M0}^i$  corresponden a un punto de la E-esfera (definida en la sección 1.16), el código-XT puede ser usado para obtener las coordenadas de

emisión  $\tau^A$ . Estas coordenadas  $\tau^A$  serían recibidas por el usuario elegido en el ET-M. A partir de estas coordenadas de emisión y de las líneas de universo de los satélites (ecuaciones (1.7), (1.6) y (1.8) de la sección 1.7), las posiciones (espacio-temporales) de los satélites,  $(x_{IA}^i, t_{IA})$ , cuando emitieron los tiempos propios  $\tau^A$  pueden ser obtenidas. Entonces, los S-errores en el punto elegido del ET-M,  $(x_{M0}^i, t_{M0})$ , pueden ser calculados al resolver las ecuaciones (4.59) particularizadas en este punto, que forman un sistema cuyas incógnitas son  $\Delta x_{M0}^i$  y  $\Delta t_{M0}$ . Las cantidades  $\Delta_r = |\Delta \vec{R}_{M0}|$  y  $\Delta_t = \Delta t_{M0}$  son buenos estimadores de los S-errores.

#### 4.6.1. Consideraciones generales

En [Puchades 2014], no tuvimos en cuenta que la Tierra es un objeto opaco, que puede interceptar las señales enviadas por uno o más satélites. Este procedimiento fue usado para estudiar los U-errores bajo la suposición de que los fotones se mueven en el ET-M. Como se dijo en [Puchades 2014], la existencia de una Tierra opaca escondiendo satélites sería considerada después, sin modificar las conclusiones principales sobre U-errores obtenidas en aquel artículo (capítulo 3 de esta tesis). Sin embargo, el mismo procedimiento no es admisible aquí. Incluso para una Tierra totalmente transparente, si una o varias de las cuatro geodésicas nulas correspondientes a un cierto usuario pasa a través del planeta, los cálculos de los S-errores basados en la métrica de Schwarzschild no son correctos. Esto es debido al hecho de que esta métrica no es válida en el interior de la Tierra. Además grandes S-errores –completamente falsos– serían encontrados para las trayectorias de los fotones que pasen cerca del centro de la Tierra. Para evitar malas interpretaciones relacionadas con estos grandes pero falsos S-errores, procedemos como sigue:

- (a) aquellos usuarios que no ven los cuatro satélites en un tiempo dado son identificados,
- (b) los S-errores correspondientes no son calculados,
- (c) estos usuarios son marcados adecuadamente en las representaciones gráficas.

El Jacobiano y los U-errores fueron calculados numéricamente y mostrados apropiadamente, tanto en [Puchades 2014] como en el capítulo 3, para los satélites 2, 5, 20 y 23 de GALILEO y para las hipersuperficies  $t_R = 19 h$  y  $t_R = 25 h$ . Para estas dos hipersuperficies 3D ( $t_R = \text{constante}$ ), los U-errores fueron calculados en el interior de la E-esfera. Aquí, los S-errores son estimados y comparados con los U-errores, para los mismos satélites y para la hipersuperficie  $t_R = 19 h$ . Una comparación eficiente requiere calcular los S-errores en los mismos puntos, dentro de la E-esfera, que fueron considerados en la sección 3.7 para calcular los U-errores. Estos puntos pertenecen al recubrimiento de la E-esfera utilizado en la sección 2.2.1 para estudiar la estructura de la región de emisión; ahora conviene recordar algunos aspectos de aquel recubrimiento y dar algunos detalles nuevos (ver figura 4.2):

- Por supuesto, trabajamos sobre hipersuperficies  $t = t_R = \text{constante}$  y, en cada una de ellas, la superficie de la E-esfera es pixelizada utilizando HEALPIX (ver la sección 1.14).

- $10^3$  puntos son uniformemente distribuidos a lo largo de cada segmento radial, cuya dirección es la de un vector con origen en el punto E y cuyo extremo es el centro del píxel asociado sobre la superficie de la E-esfera. Cada segmento va desde el punto E ( $L = 0$ ) hasta  $L = 10^5$  km. La distribución resultante no es uniforme en el interior de la E-esfera. Los S-errores son calculados solamente en aquellos puntos donde el usuario puede ver los cuatro satélites a la vez. Evidentemente, la densidad de puntos decrece conforme la distancia al punto E aumenta y los segmentos y los puntos se separan entre ellos. Además, los centros de los píxeles no están uniformemente distribuidos en la esfera pixelizada (ver [Górski 1999]). El parámetro  $N_{side}$  es elegido de forma que tengamos 3072 píxeles. El área angular subtendida por cada uno de estos píxeles es aproximadamente 64 veces el área angular media de la Luna llena ( $\sim 13.43^\circ \times 13.43^\circ$ ). Para la resolución HEALPIX elegida, la separación angular entre las direcciones asociadas a dos píxeles ecuatoriales vecinos es  $\Delta\alpha \simeq 0.1$  rad. Hemos comprobado que este recubrimiento de la E-esfera es muy adecuado para nuestros propósitos.
- Cualquier cantidad escalar que tome un valor bien definido para cada dirección HEALPIX, puede ser representada usando una barra de colores, tal y como hicimos en los capítulos 2 y 3. Así, el color del píxel muestra el valor de la cantidad elegida. Todos los píxeles son representados en un único mapa por medio de la proyección Mollweide.

En este capítulo, vamos a definir dos tipos de direcciones (píxeles), de aquí en adelante referidas como direcciones de invisibilidad y de visibilidad. Ninguno de los mil usuarios situados a lo largo de cualquier dirección de invisibilidad puede ver los cuatro satélites en el instante  $t_R$  que define la sección 3D que estemos considerando; sin embargo, a lo largo de una dirección de visibilidad, todos los usuarios (visibilidad total) o una parte de ellos (visibilidad parcial) puede recibir señales de los cuatro satélites en el instante  $t_R$ . La posición y sus errores asociados sólo pueden ser calculados para usuarios con visibilidad. De aquí en adelante, estos usuarios y sus correspondientes puntos son llamados v-usuarios y v-puntos.

Cantidades escalares apropiadas, dependiendo de la dirección (píxel), han sido elegidas para mostrar las propiedades más significativas de la distribución de los S-errores. Los estimadores  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  pueden ser calculados -tal y como ha sido descrito en el primer párrafo de esta sección- en cada v-punto  $(x^i, t)$  del ET-M asintótico, donde  $x^i$  son las coordenadas espaciales de un v-punto localizado en el interior de la E-esfera y  $t$  ( $t \equiv t_R$ ) es el valor constante del tiempo coordenado correspondiente a la sección 3D ( $t = constante$ ) elegida.

En esta sección se muestran los resultados numéricos obtenidos. Se divide en varias partes que se muestran sucesivamente:

- Los S-errores obtenidos a lo largo de direcciones radiales particulares (sección 4.6.3).
- Las superficies de nivel (sección 4.6.4), cada una de las cuales es el lugar geométrico de los puntos más cercanos a E -a lo largo de cada dirección- en los que  $\Delta_r$  o  $|\Delta_t|$  toma un valor prefijado (nivel).

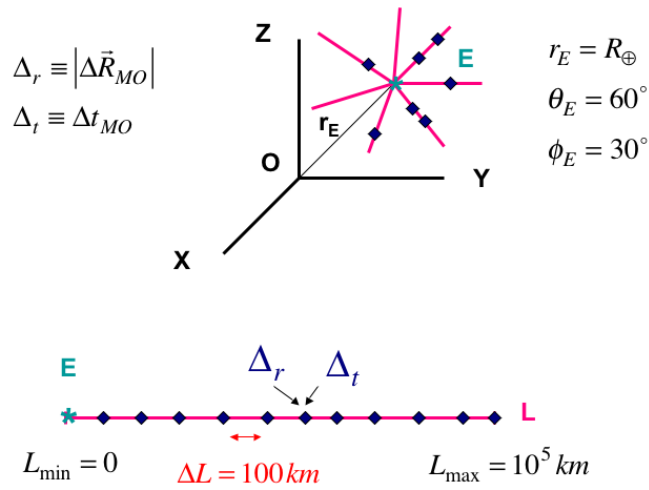


Figura 4.2: Esquema del recubrimiento de la E-esfera.

- Los S-errores calculados sobre superficies esféricas concéntricas con la Tierra (sección 4.6.5).
- La comparación de los S-errores con los U-errores (sección 4.6.6).

#### 4.6.2. Estudio de la región donde el determinante $D$ se anula

Lo primero que vamos a representar es la distancia,  $L_D$ , desde el punto E hasta el punto más cercano a éste donde  $D$  se anula. Dicha distancia depende de la dirección (píxel). El mapa resultante puede verse en la figura 4.3. En él, se observa que el determinante  $D$  no se anula a lo largo de ninguna dirección para  $L < 23200 \text{ km}$ . Sin embargo, para  $L \geq 23200 \text{ km}$ , la cantidad  $D$  se anula al menos una vez a lo largo de los segmentos asociados a los píxeles coloreados, y no se anula nunca en los segmentos radiales correspondientes a los píxeles grises. Por tanto, existen puntos con  $D = 0$  localizados a diferentes distancias  $L_D$  de E, en el interior de la E-esfera. Para una dirección dada, el determinante  $D$  puede anularse una o varias veces en posiciones aisladas; lo que no impide que la cantidad  $|D|$  pueda tomar valores grandes en otros puntos correspondientes a la misma dirección. Otras 4-tuplas y tiempos conducen a conclusiones muy similares.

El mapa 4.3 es idéntico al panel 3.24b, lo cual es debido a que ambas figuras corresponden a la misma 4-tupla y a idéntica sección 3D, y también a que el mapa 4.3 es una representación relativa a los ceros de  $D$ , mientras que el panel 3.24b es el mismo tipo de representación para los ceros de  $J$  (que coinciden con los de  $D$ , ver la sección 4.5.1). Como estos dos mapas han sido dibujados con valores de  $D$  y  $J$  obtenidos independientemente, mediante códigos completamente distintos, su coincidencia es un verdadero test para nuestros métodos y códigos.

La figura 4.3 y los comentarios que hemos hecho sobre ella juegan un papel importante en el resto del capítulo, ya que frecuentemente tendremos que hacer referencia a ella para interpretar otros mapas.

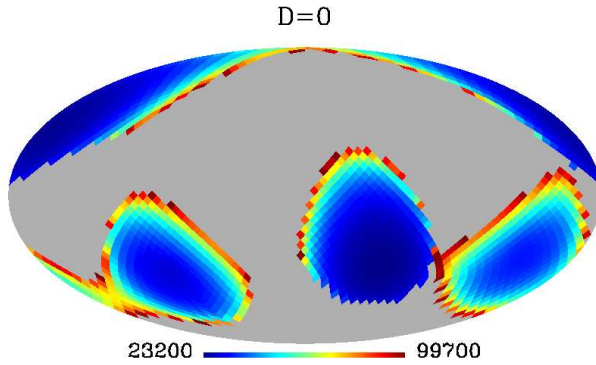


Figura 4.3: Representación HEALPIX-Mollweide ( $N_{side} = 16$ ) de la distancia, en km, desde el punto E hasta el punto más próximo en el que el determinante  $D$  se anula (para cada dirección). Este caso corresponde a la 4-tupla de satélites 2, 5, 20, 23 y a la hipersuperficie  $x^4 = t_R = 19 h$ .

#### 4.6.3. S-errores a lo largo de direcciones radiales particulares

Los estimadores  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  han sido calculados, a lo largo de las 3072 direcciones HEALPIX, en puntos localizados desde  $L = 0$  (punto E) hasta  $L = 10^5 km$  (dentro de la E-esfera), para la 4-tupla 2, 5, 20, 23 y la sección  $x^4 = t_R = 19 h$ . De todas estas direcciones hemos elegido cuatro que son representativas del conjunto.

Las cantidades  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$ , correspondientes a las cuatro direcciones características seleccionadas, son representadas como funciones de la distancia  $L$  al punto E en las figuras 4.4-4.7.

La primera dirección (Fig. 4.4) no contiene ningún punto con  $D = 0$ . En este caso, para valores de  $L$  mayores que unos 40000 km, los estimadores  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  son funciones continuas que crecen con la distancia  $L$  al punto E. Desde este punto, sobre la superficie de la Tierra ( $L = 0$ ), hasta el punto donde comienza la curva de la Fig. 4.4 ( $L \simeq 8800 km$ ), existe un segmento de invisibilidad. Ello es debido a que la Tierra, muy cercana a todos los usuarios de este segmento, eclipsa uno o más satélites.

La Fig. 4.5 (4.6) corresponde a la segunda (tercera) dirección seleccionada. En ambos casos, el determinante  $D$  se anula en un solo punto que está situado a una distancia  $L \simeq 73300 km$  ( $L \simeq 58000 km$ ) de E. En la Fig 4.5 (4.6), la región de invisibilidad abarca desde el punto E hasta  $L = 16700 km$  ( $L = 12000 km$ ). En los paneles superior e intermedio-inferior de esta figura, la posición del punto  $D = 0$  es el centro del pico de  $\Delta_r$  y de la discontinuidad de  $\Delta_t$ , respectivamente. Alrededor del punto  $D = 0$ , las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  son muy grandes. En los paneles intermedio-superior e inferior, hemos representado solamente los valores de estas cantidades que



son inferiores a 2 metros; por tanto, las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  toman valores mayores que 2 metros en la región entre las dos líneas de rayas de estos paneles. De aquí en adelante  $\Delta L_{2m}$  (distancia-2m) es la distancia desde el punto donde  $D$  se anula hasta uno de los puntos donde  $\Delta_r$  o  $|\Delta_t|$  tome un valor de 2 m. En las figuras Fig. 4.5 y 4.6 vemos que los valores de 2 metros aparecen en puntos que están a distancias  $\Delta L_{2m}$  de miles de kilómetros del punto donde se anula  $D$ . La desigualdad  $3400km \leq \Delta L_{2m} \leq 6200km$  ( $6000 km \leq \Delta L_{2m} \leq 11400km$ ) es satisfecha, en el caso de la figura 4.5 (4.6), por los dos valores de  $\Delta L_{2m}$ .

Finalmente, la figura 4.7 corresponde a una cuarta dirección con dos puntos puntos de anulación de  $D$ , que están situados a distancias  $L \simeq 27400 km$  y  $L \simeq 40000 km$  del punto E. La zona de invisibilidad está comprendida entre  $L = 0$  y  $L = 16800 km$ . Esta figura tiene la misma estructura que la Fig. 4.5. En los paneles superior e intermedio-inferior observamos dos picos en  $\Delta_r$  y dos discontinuidades en  $\Delta_t$ , que nos indican donde están situados los puntos en los que se anula  $D$ . Como se deduce de los paneles intermedio-superior e inferior de la figura 4.7, las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  toman valores de 2 metros para distancias-2m ( $200 km \leq \Delta L_{2m} \leq 500 km$ ), que son mucho más pequeñas que las correspondientes a los puntos con  $D = 0$  de las figuras 4.5 y 4.6. ¿Por qué sucede esto? Futuras investigaciones sobre esta cuestión merecen la pena. Ver la sección 4.7, donde se incluyen algunos comentarios cualitativos.

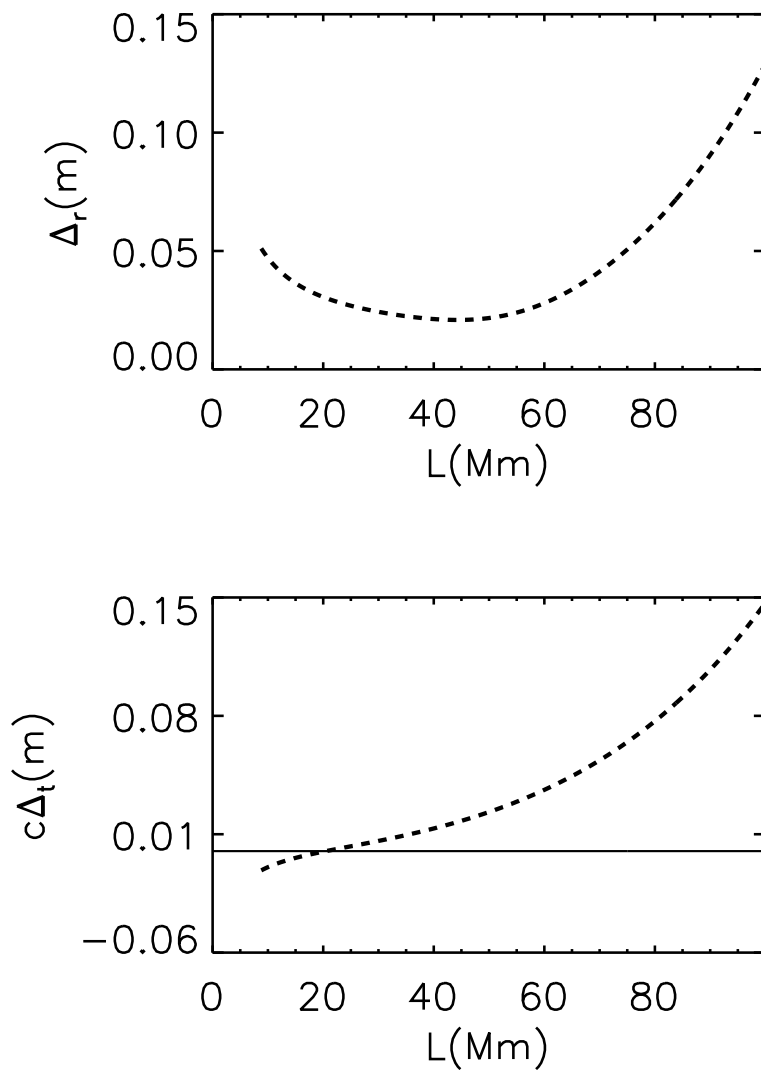


Figura 4.4: Los valores de  $\Delta_r$  (panel superior) y  $c\Delta_t$  (panel inferior) en metros, han sido calculados sobre puntos de una dirección sin ceros del determinante  $D$ , y representados como funciones de la distancia  $L$  al punto E en megámetros (Mm)

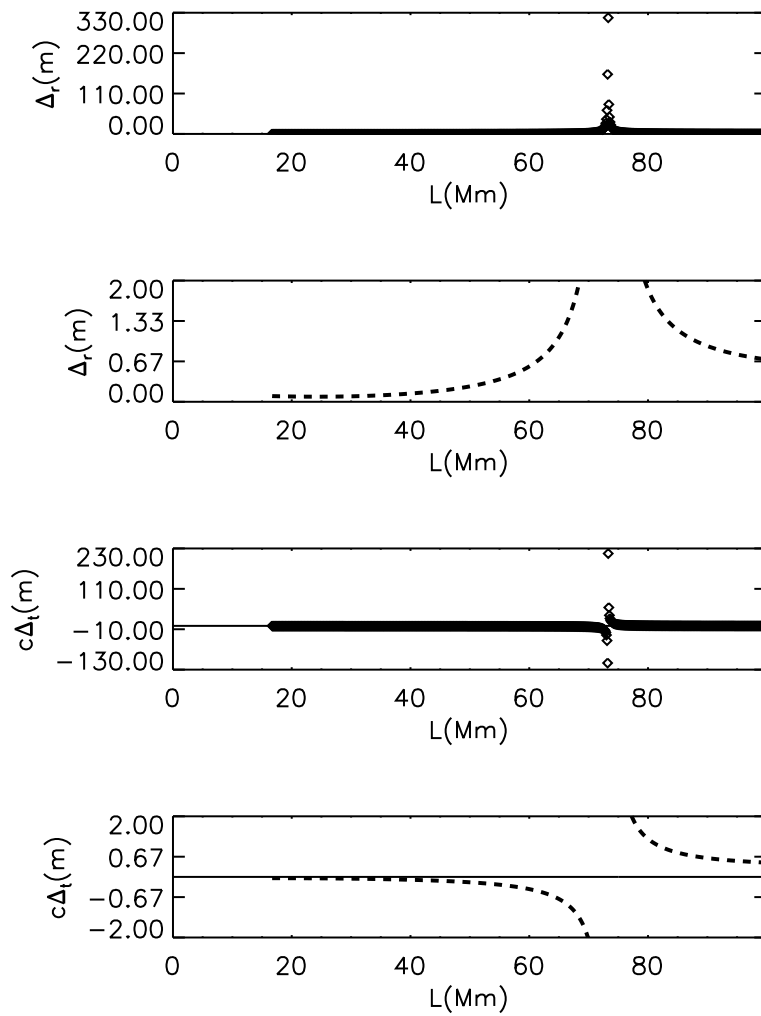


Figura 4.5: En los paneles superior e intermedio-inferior, se hace la misma representación que en la figura 4.4. La cantidad  $D$  se anula una vez a lo largo de la dirección elegida. El pico y la discontinuidad están asociados al punto  $D = 0$ . Una vez los valores  $\Delta_r$  y  $c|\Delta_t|$  mayores que  $2\text{ m}$  han sido eliminados, se repite la representación de la figura 4.4 en los paneles intermedio-superior e inferior; así, en estos paneles, todos los valores de  $\Delta_r$  y  $c|\Delta_t|$  más pequeños que  $2\text{ m}$  llegan a ser visibles.

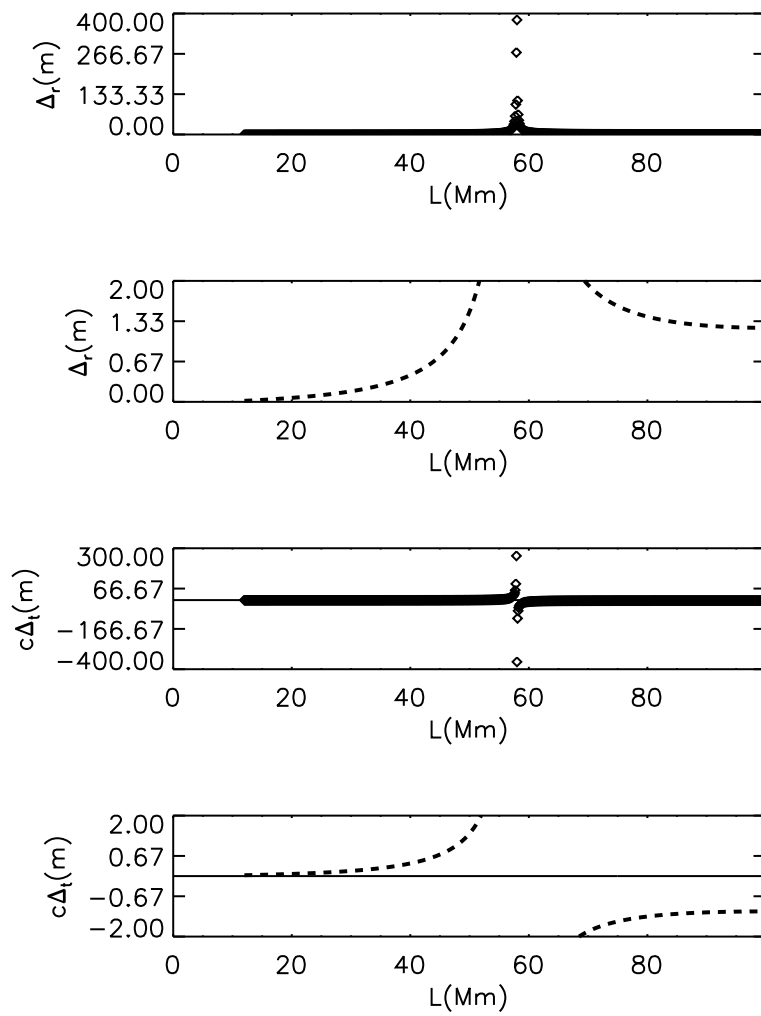


Figura 4.6: Representación idéntica a la de la figura 4.5 para otra dirección típica con un punto  $D = 0$

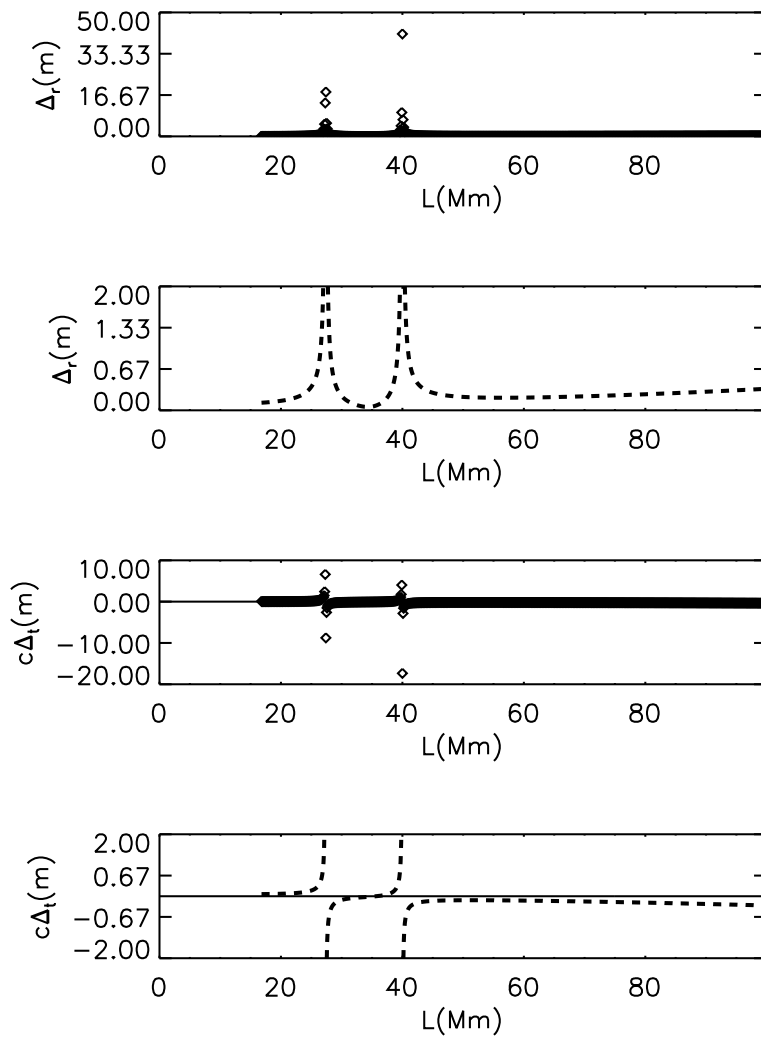


Figura 4.7: Representación idéntica a la de la figura 4.5, para una dirección particular con dos ceros de  $D$

#### 4.6.4. Superficies de nivel

Una vez  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  han sido calculados en todos los v-puntos distribuidos en el interior de la E-esfera para una sección 3-D dada, dos cantidades,  $D_R$  y  $D_t$  pueden ser obtenidas. Estas cantidades dependen de la dirección (píxel) considerada y vamos a definir las a continuación. Para un valor fijo  $L_r$  (nivel) de  $\Delta_r$ , los puntos donde  $\Delta_r = L_r$  pueden ser encontrados a lo largo de cada dirección. Estos puntos pueden ser fácilmente calculados al usar los valores  $\Delta_r$  que hemos obtenido para cada dirección e interpolaciones adecuadas. Así, a lo largo de cada dirección, podemos encontrar, o bien uno o varios puntos en los que  $\Delta_r$  tome el valor fijado  $L_r$ , o ninguno. De cualquier forma, la distancia del punto E al más cercano de estos puntos es una cantidad bien definida y depende de la dirección. Esta distancia se denota  $D_R$ . Podemos hacer lo mismo para  $|\Delta_t|$ ; es decir, a lo largo de cada dirección, la distancia desde E hasta el punto más cercano donde  $|\Delta_t|$  toma el valor prefijado  $L_t$  se denota  $D_t$ . Los puntos situados a estas distancias de E generan un lugar geométrico, que es llamado de ahora en adelante una *superficie de nivel*.

La figura 4.3 es muy importante para entender los comentarios que haremos en esta sección, en la que compararemos los mapas de las *superficies de nivel*, con la citada figura. Por eso, merece la pena enfatizar que los píxeles coloreados son direcciones con alguna anulación de  $D$ , mientras que los píxeles grises son direcciones para las que  $D$  no se anula.

Las superficies de nivel correspondientes a valores adecuados de  $L_r$  ( $L_t$ ) son representadas mediante mapas HEALPIX-Mollweide en las figuras 4.9 y 4.10 (4.11 y 4.12). Algunas generalidades sobre la construcción de estas figuras deben ser ahora descritas. Las regiones de invisibilidad son excluidas; se trata de las manchas naranjas del panel 4.9a. Estas regiones tienen las mismas formas y posiciones (no el mismo color) en todos los paneles. Los píxeles correspondientes a direcciones de visibilidad (parcial o total) son pintados de gris si  $\Delta_r$  ( $|\Delta_t|$ ) no toma el valor del nivel  $L_r$  ( $L_t$ ). Es decir, para los píxeles grises, todos los valores de  $\Delta_r$  ( $|\Delta_t|$ ) -en los v-puntos de la dirección asociada- son o bien mayores que  $L_r$  ( $L_t$ ), o menores. Finalmente, las barras de colores son usadas para representar las distancias  $D_R$  (4.9 y 4.10) y  $D_t$  (4.11 y 4.12) para los niveles mostrados en la parte superior de los paneles. A continuación vamos a describir las características de las figuras 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12, que son importantes para entender los aspectos más significativos de la distribución de los S-errores.

En el panel 4.9a, la cantidad  $\Delta_r$  es mayor que  $5 \text{ mm}$  (píxeles grises) en casi todas partes en el interior de la E-esfera. El estimador  $\Delta_r$  de los S-errores toma un valor tan pequeño como  $5 \text{ mm}$  en unos pocos píxeles coloreados (superficie de nivel). Para todos los píxeles grises, hemos verificado que los valores de  $\Delta_r$  -en los v-puntos- son todos mayores que  $5 \text{ mm}$ . La barra de colores indica que los puntos, -más cercanos a E- donde  $\Delta_r$  toma el valor de  $5 \text{ mm}$ , están todos a distancias  $D_R$  más pequeñas que  $22200 \text{ km}$  del punto E. De acuerdo con la figura 4.3, todos estos puntos -que tienen S-errores muy pequeños- están localizados en una región donde el determinante  $D$  no es cero ( $L < 23200 \text{ km}$ ). Puesto que los píxeles coloreados del panel 4.9a (excepto aquellos que están en las regiones de invisibilidad) están incluidos en las manchas coloreadas de la figura 4.3, el determinante  $D$  debe ser cero -a lo largo de las direcciones asociadas- en puntos con distancias  $L_D > 23200 \text{ km}$  y, en

puntos cercanos a estas anulaciones de  $D$ , los S-errores serán grandes (divergen en la propia anulación).

En el mapa 4.9b, los v-puntos donde  $\Delta_r = 1 \text{ cm}$  están localizados a distancias  $D_R$  entre 7800  $\text{km}$  y 41700  $\text{km}$ . La cantidad  $\Delta_r$  toma el valor 1  $\text{cm}$  en las zonas coloreadas (excluyendo las regiones de invisibilidad); más o menos, a lo largo de 1/6 de los segmentos radiales de nuestra pixelización (3072 píxeles). El número de píxeles pintados con la barra de color es mayor en el panel 4.9b ( $L_r = 1 \text{ cm}$ ) que en el mapa 4.9a ( $L_r = 5 \text{ mm}$ ).

Como se deduce del panel 4.9c, la cantidad  $\Delta_r$  vale 1  $\text{dm}$  en puntos situados en muchos segmentos radiales (direcciones), cuyos píxeles son pintados usando la barra de colores. Los números de esta barra indican que los puntos donde  $\Delta_r = 1 \text{ dm}$  están situados a distancias  $D_R$  entre 13900  $\text{km}$  y 97200  $\text{km}$ . Hemos verificado que los valores de  $\Delta_r$  -en los v-puntos- son mayores que 1  $\text{dm}$  para casi todos los píxeles grises (excluyendo 11), ya que casi todos los píxeles grises están rodeando las zonas de invisibilidad, en las que los valores de  $\Delta_r$  son grandes debido a que los fotones pasan no muy lejos de la Tierra.

El panel 4.9e corresponde a  $L_r = 1 \text{ m}$ . Consideremos primero los píxeles coloreados del panel 4.9e, que están cerca de las regiones de invisibilidad (de color naranja), pero lejos de las zonas coloreadas de la figura 4.3. En lo sucesivo, estos píxeles se dice que son de tipo C-G (coloreados-grises), ya que son coloreados en el panel 4.9e y grises en 4.3. Como un ejemplo de píxeles C-G, podemos mencionar los píxeles rojos -abundantes- que vemos alrededor de una de las zonas de invisibilidad. No existen puntos con  $D = 0$  ni en los segmentos radiales de estos píxeles, ni en los cercanos a ellos, ya que están lejos de las zonas coloreadas de la figura 4.3. Por tanto, para estos píxeles, los valores  $\Delta_r = 1 \text{ m}$  aparecen en puntos que están lejos de cualquier anulación de  $D$ . Puesto que estos píxeles son rojos -de acuerdo con la escala de color- el usuario con  $\Delta_r = 1 \text{ m}$  está cerca de la superficie de la E-esfera. Evidentemente, los píxeles C-G con  $\Delta_r = 1 \text{ m}$  están asociados a usuarios lejanos a E, que reciben la señal (fotón) de uno o más satélites a lo largo de trayectorias casi tangentes a la Tierra (píxeles rojos cercanos a los píxeles naranjas). Véase la figura 4.8 donde hay un esquema de la situación correspondiente a los píxeles de tipo C-G. En la cual, el campo gravitatorio terrestre está produciendo importantes S-errores en una región cercana a la Tierra, para usuarios que están lejos de ella. Ningún punto de anulación de  $D$  contribuye a estos S-errores.

En el panel 4.9e, vemos también muchos píxeles coloreados, que están lejos de las regiones de invisibilidad, pero en el interior de las zonas coloreadas de la figura 4.3. En lo sucesivo, estos píxeles diremos que son de tipo C-C (coloreados-coloreados) debido a que están coloreados tanto en el panel 4.9e como en el mapa 4.3. Al estar coloreados en la figura 4.3, existe un punto  $P_D$ , a lo largo del segmento radial correspondiente, donde  $D$  es cero y, por lo tanto, algunos de los v-puntos, donde  $\Delta_r$  ha sido calculado -para la dirección elegida-, puede estar bastante cercano a  $P_D$  como para producir un S-error grande con  $\Delta_r \geq 1 \text{ m}$ . En tal caso, la cantidad  $\Delta_r$  toma el valor 1  $\text{m}$  en algún v-punto y, por tanto, el píxel está también coloreado en el panel 4.9e. Para  $L_r = 1 \text{ m}$ , esto ocurre para muchos píxeles coloreados de la figura 4.3. En los píxeles C-C, el campo gravitatorio de la Tierra no juega ningún papel importante, excepto en aquellos que puedan estar cerca de una de las regiones de invisibilidad,

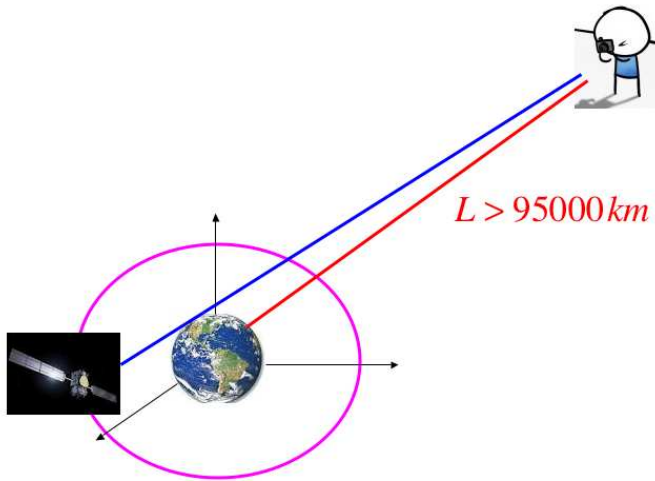


Figura 4.8: Esquema de la situación de algunos usuarios con S-errores de unos pocos metros. Están lejos de cualquier punto con  $D = 0$  y de la Tierra. Estos errores son debidos a que el fotón pasa tangente a la Tierra durante su vuelo. La trayectoria del fotón es representada por la línea azul.

en cuyo caso deberíamos analizar si el estimador  $\Delta_r$  es grande debido a estar cerca de una anulación de  $D$ , o de una región de invisibilidad, o por ambas razones. Si los píxeles C-C –con valores grandes de  $\Delta_r$ – están lejos de las zonas de invisibilidad, el campo gravitatorio terrestre es débil a lo largo de las trayectorias de los fotones, y los S-errores son debidos a la proximidad a un punto donde  $D$  se anula.

Finalmente, hay solamente unos pocos píxeles grises -en el panel 4.9e- que están lejos de las regiones de invisibilidad, pero en el interior de las zonas coloreadas de la figura 4.3. Para estos píxeles grises, hemos verificado que los valores de  $\Delta_r$  -en los v-puntos- son todos menores que  $1 \text{ m}$ . De ahora en adelante, estos píxeles diremos que son de tipo G-C (grises-coloreados), ya que son grises en el panel 4.9e y coloreados en el mapa 4.3. Estos pocos píxeles de tipo G-C están localizados en el interior de las manchas inferior-izquierda e inferior-derecha del panel 4.9e y, por tanto, están en la zona coloreada del mapa 4.3, habiendo anulaciones de  $D$  en las direcciones correspondientes. Si ninguno de los v-puntos de nuestro recubrimiento está suficientemente cerca del punto donde se anula  $D$ , a lo largo de una cierta dirección, el estimador  $\Delta_r$  puede tomar valores que sean siempre menores que  $1 \text{ m}$  y, en tal caso, el píxel correspondiente sería gris en el panel 4.9e.

Como ocurre en la figura 4.9e, hay solamente unos pocos píxeles grises -en el panel 4.10a- que están lejos de las regiones de invisibilidad, pero en el interior de las zonas coloreadas de la figura 4.3. Para estos píxeles grises de tipo G-C, hemos verificado que los valores de  $\Delta_r$  -en los v-puntos- son todos menores que  $2 \text{ m}$ .

El panel 4.10a (4.10c) corresponde a  $L_r = 2 \text{ m}$  ( $L_r = 3 \text{ m}$ ). En el interior de las manchas azules inferiores, hay más píxeles G-C en el panel 4.10a que en el 4.9e, y



en el panel 4.10c que en el 4.10a. Esto es debido a que algunos píxeles son de tipo C-C para  $L_r = 1 m$  ( $L_r = 2 m$ ), mientras que son de tipo G-C para  $L_r = 2 m$  ( $L_r = 3 m$ ). Esto ocurre cuando alguno de los puntos de nuestro recubrimiento, donde  $\Delta_r$  es calculado, está suficientemente cerca del punto con  $D = 0$  para dar  $\Delta_r = 1 m$  ( $\Delta_r = 2 m$ ) (C-C píxel); pero ninguno de ellos está suficientemente cerca para producir un valor  $\Delta_r = 2 m$  ( $\Delta_r = 3 m$ ) (G-C píxel). Hemos verificado que para todos los píxeles G-C, que son grises en el panel 4.10a (4.10c), el estimador  $\Delta_r$  satisface la desigualdad  $\Delta_r < 2 m$  ( $\Delta_r < 3 m$ ).

Además, los píxeles C-G definidos anteriormente, que están alrededor de una de las manchas naranjas del panel 4.9e, son grises en los paneles 4.10a y 4.10c. Esto significa que, en las direcciones de estos píxeles rojos, la cantidad  $\Delta_r$  llega a ser mayor que  $1 m$ , pero es menor que  $2 m$  y, por tanto, también menor que  $3 m$ . En realidad, conforme los valores de  $L_r$  aumentan desde uno hasta dos metros, el número de píxeles C-G decrece rápidamente. Resultados similares son obtenidos para otras 4-tuplas e hipersuperficies 3-D y, por tanto, los valores de  $\Delta_r$  mayores que unos pocos metros son alcanzados solamente en posiciones suficientemente cercanas a puntos de anulación de  $D$ .

Para obtener el panel 4.9f (4.10b), el color de algunos píxeles del panel 4.9e (4.10a) ha sido cambiado. Las manchas naranjas (direcciones de invisibilidad total) del panel 4.9e (4.10a) y todos los píxeles coloreados de la figura 4.3 han sido pintados de gris en el panel 4.9f (4.10b). El color de los píxeles restantes no ha sido cambiado. Por tanto, podemos distinguir dos tipos de píxeles coloreados en los paneles 4.9f ( $L_r = 1 m$ ) y 4.10b ( $L_r = 2 m$ ):

- los píxeles C-G definidos anteriormente, que están alrededor de una de las manchas naranjas (zonas de invisibilidad) del panel 4.9e, donde el nivel  $L_r = 1 m$  es alcanzado en puntos lejanos a cualquier anulación de  $D$
- una segunda clase nueva de píxeles C-G, que están lejos de las zonas de invisibilidad, y en el exterior de las regiones coloreadas de la figura 4.3 pero cerca de ellas. En lo sucesivo, estos píxeles serán llamados píxeles C-G-E (coloreados-grises-exteriores).

Las segmentos radiales de los píxeles C-G-E no contienen ningún punto en el que  $D$  se anule y, además, los usuarios que están en los puntos de estos segmentos no reciben fotones en vuelo rasante con respecto a la Tierra; por tanto, los niveles  $L_r = 1 m$  y  $L_r = 2 m$  sólo pueden ser alcanzados si hay anulaciones de  $D$  en alguna dirección vecina.

El panel 4.10b ( $L_r = 2 m$ ) es similar al mapa 4.9f, pero los píxeles C-G rojos y algunos de los píxeles C-G-E del panel 4.9f son grises en 4.10b. Del mismo modo, el panel 4.10d ( $L_r = 3 m$ ) es muy parecido al panel 4.10b ( $L_r = 2 m$ ), pero algunos de los píxeles C-G-E del panel 4.10b son grises en 4.10d. Todo esto es lo que cabe esperar al elevar el nivel  $L_r$  (disminución del número de píxeles coloreados).

Puede haber píxeles situados cerca de las manchas de invisibilidad y también de las regiones coloreadas de la figura 4.3, en estos píxeles, los S-errores debidos al campo gravitatorio terrestre y aquellos debidos a la influencia de puntos con  $D = 0$  son difíciles de separar. Estos casos no van a ser considerados aquí, de modo que nuestra discusión queda restringida a píxeles G-C, C-C, C-G y C-G-E.

Finalmente, el caso de  $L_r = 1 \text{ km}$  es representado en el mapa 4.9d. Este valor tan grande es sólo alcanzado en escasos segmentos radiales correspondientes a los píxeles pintados con la barra de color, excluyendo las manchas naranjas que son de invisibilidad. Sólo muy cerca de puntos con  $D = 0$ , donde  $\Delta_r$  diverge, valores de  $\Delta_r$  tan grandes como  $1 \text{ km}$  pueden ser alcanzados. Hemos verificado que en los v-puntos correspondientes a los píxeles grises de este panel, todos los valores de  $\Delta_r$  son inferiores a  $1 \text{ km}$ . La barra de colores del panel 4.9d nos dice que los v-puntos donde  $\Delta_r = 1 \text{ km}$  están localizados a distancias de E superiores que  $24700 \text{ km}$ . Ninguno de ellos está situado a una distancia menor que  $23200 \text{ km}$ , ya que para estas distancias, no existen puntos con  $D = 0$  (ver la barra de colores de la figura 4.3). Además, hemos verificado que todos los píxeles coloreados del panel 4.9d son píxeles C-C; es decir, que también están coloreados en la figura 4.3. Como es lógico, no hay valores de  $\Delta_r$  tan grandes como  $1 \text{ km}$  para los píxeles grises de la figura 4.3, en cuyos segmentos radiales asociados no hay anulaciones de  $D$ .

Analícemos ahora las figuras 4.11 y 4.12, que corresponden al estimador  $\Delta_t$ . El nivel  $L_t$  ( $c = 1$ ) mostrado en la parte superior de los mapas, es una distancia. Es evidente que los paneles de la figuras 4.9 y 4.10 son muy similares a los de 4.11 y 4.12, para un mismo valor del nivel  $L_r = L_t$ , exceptuando los niveles  $0.05 \text{ mm}$ ,  $5 \text{ mm}$  y  $1 \text{ cm}$ . Por tanto, salvo para los paneles correspondientes a estos valores pequeños valores de  $L_t$ , la discusión que se hizo acerca de las figuras 4.9 y 4.10 es también válida para las figuras 4.11 y 4.12; todas estas figuras contienen los mismos tipos de píxeles: C-G, C-C, C-G y C-G-E, que además están distribuidos de una manera similar.

Suficientemente lejos de cualquier punto  $D = 0$ , los valores de  $|\Delta_t|$  son siempre más pequeños que unos pocos metros; lo mismo que ocurre para  $\Delta_r$ . Sin embargo, al comparar el número de píxeles coloreados en los paneles 4.9a (4.9b) y 4.11b (4.11c) para  $L_t = 5 \text{ mm}$  ( $L_t = 1 \text{ cm}$ ), se observa que el estimador  $|\Delta_t|$  puede tomar el valor  $5 \text{ mm}$  ( $1 \text{ cm}$ ) a lo largo de muchas direcciones, mientras que  $\Delta_r$  lo toma para menos direcciones. Esto nos hizo sospechar que  $|\Delta_t|$  podría tomar valores menores que unos pocos milímetros (el valor mínimo de  $\Delta_r$ ). Esta sospecha ha sido verificada y explicada cualitativamente. Para verificarla dibujamos el panel 4.11a, donde se observa que  $|\Delta_t|$  toma un valor tan pequeño como  $0.05 \text{ mm}$  a lo largo de muchas direcciones (píxeles coloreados fuera de las regiones de invisibilidad). La pregunta es: ¿Por qué  $|\Delta_t|$  toma valores pequeños que no son alcanzados por  $\Delta_r$ ? Cualquier explicación cualitativa debe estar basada en la estructura del sistema (4.59), cuyo determinante D tiene la forma (4.60). Para calcular  $\Delta_t$ , el sistema algebraico lineal (4.59) puede ser resuelto usando la regla de Cramer. De esta forma, se obtiene  $\Delta_t = A/D$ , donde el determinante A es calculado al reemplazar la cuarta columna de D,  $(1, 1, 1, 1)$ , por una nueva columna que está formada por los términos independientes del sistema (4.59), que son todos positivos. Por tanto, los determinantes A y D tienen una estructura similar: tres columnas idénticas que contienen números positivos y negativos, y una cuarta columna que sólo contiene números positivos. Este hecho nos hizo sospechar que si el determinante D es cero a lo largo de muchas direcciones (ver píxeles coloreados de la figura 4.3), lo cual es debido a las compensaciones entre los términos positivos y negativos, también se pueden esperar valores pequeños de A y de  $\Delta_t = A/D$  en numerosas direcciones; tal y como ha sido verificado numéricamente

en el panel 4.11a. Sin embargo, para calcular  $\Delta_r$ , el sistema (4.59) debe ser resuelto para las tres incógnitas restantes y, en estos casos, aparecen determinantes que tienen dos columnas de números positivos y negativos, y otras dos cuyos números son todos positivos. Esta estructura puede hacer menos eficientes las compensaciones y, como consecuencia, no hemos encontrado valores de  $\Delta_r$  más pequeños que  $\sim 1 \text{ mm}$  en ningún caso.

Finalmente, el caso  $|\Delta_t| = 1 \text{ km}$  es considerado en el panel 4.12g. Este valor solamente se alcanza a lo largo de pocas direcciones (píxeles coloreados del panel 4.12g, excluyendo manchas naranjas). En todos los v-puntos asociados a píxeles grises, la cantidad  $|\Delta_t|$  es inferior a  $1 \text{ km}$ . La misma discusión realizada para el panel 4.9d ( $\Delta_r = 1 \text{ km}$ ) vale para este mapa ( $|\Delta_t| = 1 \text{ km}$ ).

A partir de las consideraciones anteriores y después de estudiar muchas secciones  $t = \text{constante}$  y otras 4-tuplas de satélites, se deduce que:

- suficientemente lejos de los puntos de anulación de  $D$ , el estimador  $\Delta_r$  toma valores más pequeños que unos pocos metros y mayores que unos pocos milímetros
- los valores de unos pocos metros pueden aparecer en las siguientes zonas: (1) alrededor y en el interior de las regiones coloreadas de la figura 4.3, y (2) rodeando las manchas de invisibilidad.

Lo mismo ocurre con la cantidad  $|\Delta_t|$ , aunque ésta puede tomar valores mucho más pequeños que unos pocos milímetros.

Estas conclusiones justifican los cortes de 1, 2 y 3 metros llevados a cabo en algunas figuras a lo largo de este capítulo. Estos cortes son realizados para eliminar -de nuestro estudio- los valores de  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  mayores que unos pocos metros, que sólo pueden aparecer cerca de las anulaciones de  $D$ .

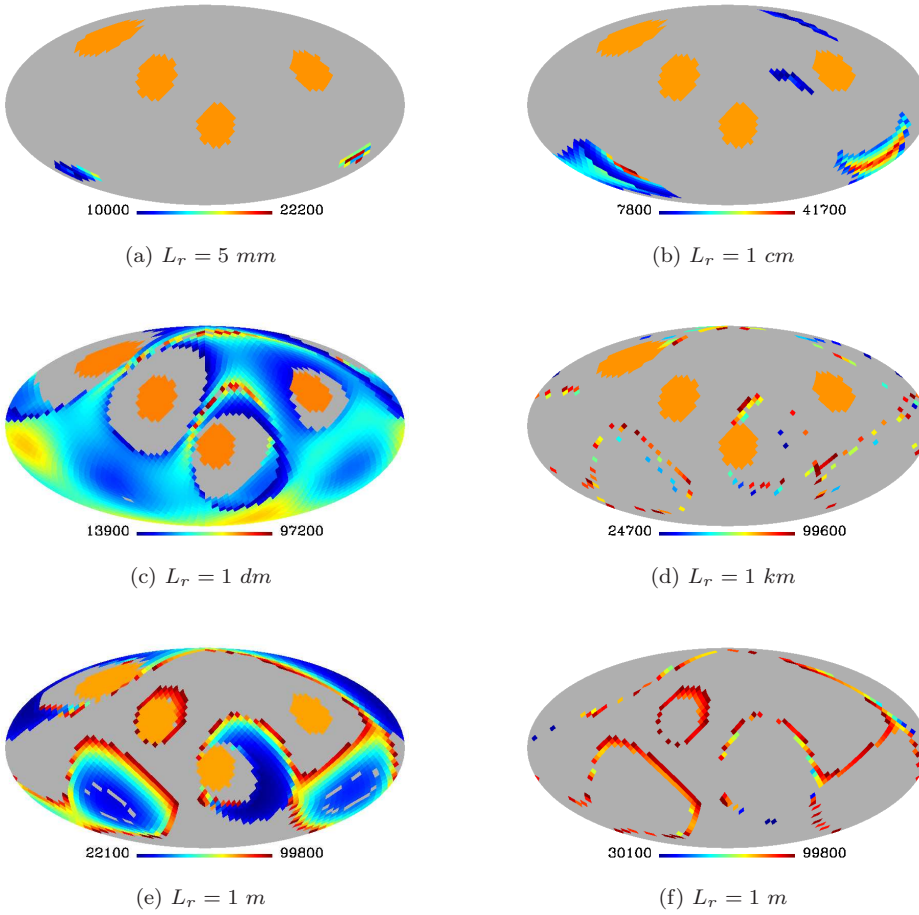


Figura 4.9: Mapas HEALPIX-Mollweide. Representación de la distancia  $D_R$  (en  $km$ ), desde E hasta el punto donde el estimador  $\Delta_r$  toma el valor  $L_r$  por primera vez (punto más cercano a E). El valor del nivel  $L_r$  es mostrado en la parte inferior de los mapas. Cinco niveles apropiados han sido elegidos. Las regiones de invisibilidad son las manchas naranjas de los paneles 4.9a-4.9e. En estos cinco paneles, el nivel  $L_r$  no es alcanzado a lo largo de las direcciones asociadas a los píxeles grises. En el panel 4.9f, la barra de colores es usada para mostrar  $D_r$  fuera de las zonas de invisibilidad y de las regiones coloreadas de la figura 4.3 (direcciones con puntos  $D = 0$ ). Los píxeles restantes son pintados de gris.

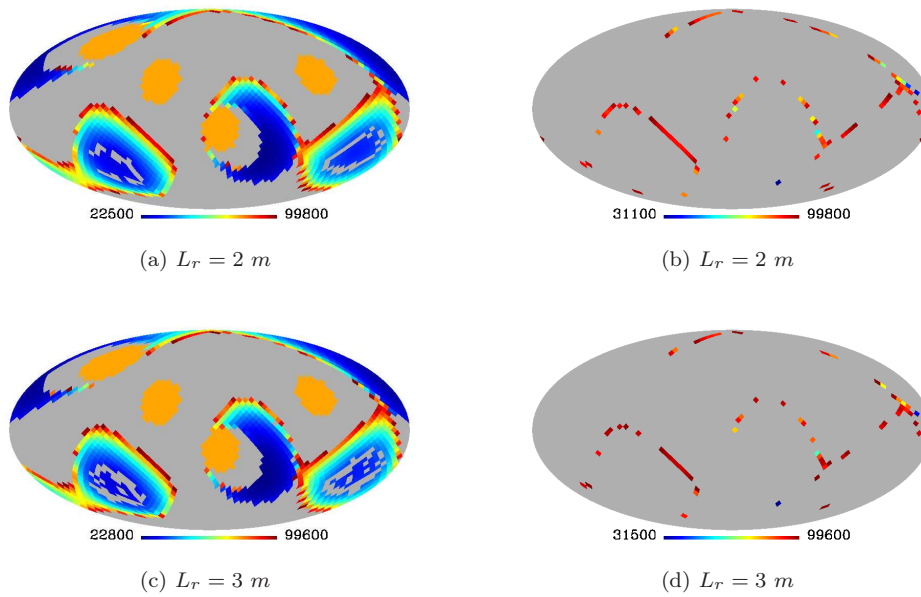


Figura 4.10: Los paneles 4.10a y 4.10c (4.10b y 4.10d) tienen representación idéntica a los paneles 4.9a-4.9e (al panel 4.9f). Dos niveles difentes  $L_r$  han sido elegidos.

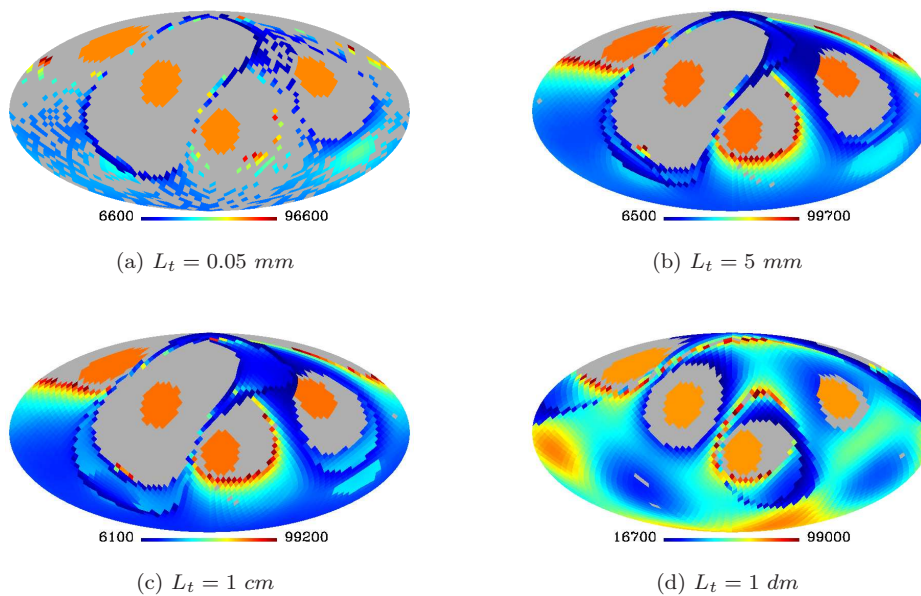


Figura 4.11: Representación idéntica a la de los paneles 4.9a-4.9e, 4.10a y 4.10c, para la cantidad  $D_t$  y los niveles  $L_t$  ( $|\Delta_t|$ ) mostrados en la parte inferior de cada panel.

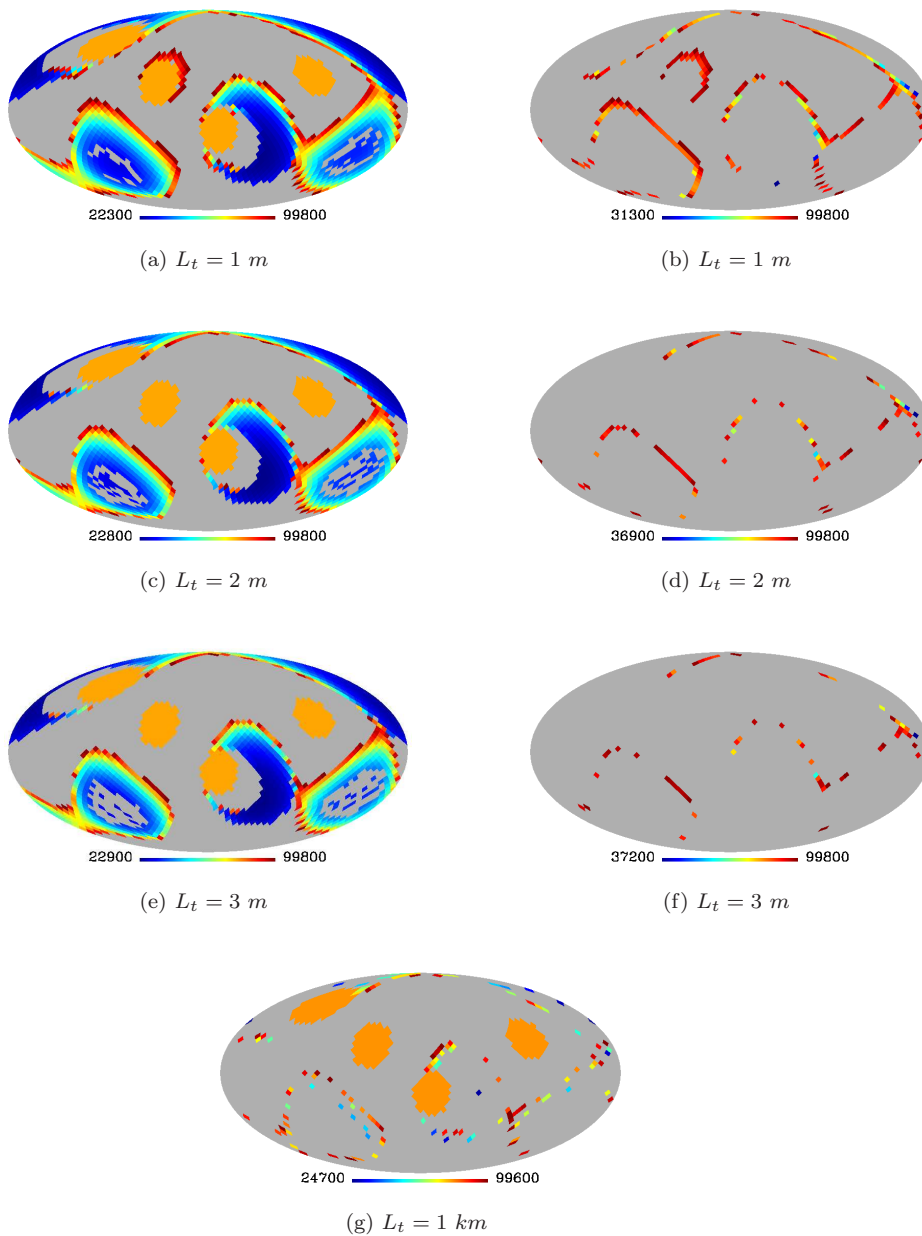


Figura 4.12: Representación como la de la figura 4.11, excepto en el caso de los paneles 4.12b, 4.12d, 4.12f, que son comparables a los mapas 4.9f, 4.10b y 4.10d, ya que la cantidad considerada es  $D_t$  y los niveles son del tipo  $L_t$  ( $|\Delta_t|$ ).

### 4.6.5. S-errores en superficies esféricas concéntricas con la Tierra

La figura 4.13 muestra los valores de  $\Delta_r$  (paneles de la izquierda) y  $\Delta_t$  (paneles de la derecha) en superficies esféricas concéntricas con la Tierra, cuyos radios son  $R_{\oplus} \simeq 6378 \text{ km}$  (mapas de arriba) y  $1.5 \times 10^4 \text{ km}$  (mapas de abajo). Las dos superficies están dentro de la E-esfera, y en la región donde el determinante  $D$  no se anula; por eso, no hemos encontrado valores muy grandes de  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  sobre estas superficies. En realidad, todos los valores que aparecen en la figura 4.13 están comprendidos entre  $0.39 \text{ cm}$  y  $13 \text{ cm}$ . En cada uno de los cuatro paneles, los píxeles grises corresponden a los puntos de invisibilidad sobre las correspondientes esferas. Desde estos puntos, los cuatro satélites no son visibles al mismo tiempo y, por consiguiente, el posicionamiento no es posible.

Una tercera (cuarta) superficie esférica -concéntrica con la Tierra-, que tiene un radio de  $3 \times 10^4 \text{ km}$  ( $5 \times 10^4 \text{ km}$ ), es considerada en la figura 4.14 (4.15). Las cantidades  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  son representadas en los paneles de la izquierda y de la derecha, respectivamente. En los paneles superiores e intermedios, las zonas de invisibilidad corresponden a las cuatro manchas rojas. Esta esfera está dentro de la región donde  $D$  puede ser cero y, por tanto, hay puntos donde los valores  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  son muy grandes. Como en otras ocasiones, los valores demasiado grandes deben ser eliminados antes de mostrar cualquier representación. Por eso, en los paneles superiores (intermedios), los píxeles con valores de  $\Delta_r$  o de  $|\Delta_t|$  superiores a un metro (dos metros) han sido pintados de gris. Mientras que para los píxeles restantes, localizados fuera de las regiones de invisibilidad, los valores de  $\Delta_r$  (izquierda) y  $|\Delta_t|$  (derecha) son mostrados con la ayuda de la barra de colores. Como es lógico, el número de píxeles grises en los paneles superiores (corte en 1 metro) es mayor que en los paneles intermedios (corte en 2 metros). Puesto que la mayoría de los píxeles son azules en los paneles de la izquierda y verdes en los de la derecha, las barras de colores nos dicen que abundan los píxeles con valores pequeños de  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  sobre las esferas consideradas. Buena parte de los valores grandes de estas cantidades son esperados para píxeles situados en el interior de las regiones coloreadas de la figura 4.3 (proximidad a ceros de  $D$ ).

Estamos particularmente interesados en los valores de  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  fuera de las regiones de invisibilidad y de las zonas coloreadas de la figura 4.3 (direcciones con ceros de  $D$ ). Para mostrar estos valores, los píxeles de estas regiones y zonas han sido pintados de gris en los paneles inferiores de las figuras 4.14 y 4.15. En estos paneles hemos encontrado que -en la región de interés- los valores -en centímetros- de las cantidades  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  pertenecen a los intervalos  $(1.2, 29)$  y  $(-16, 16) \text{ cm}$  para la esfera de  $3 \times 10^4 \text{ km}$  de radio (figura 4.14), y a los intervalos  $(1.7, 78)$  y  $(-38, 73)$  para la esfera de  $5 \times 10^4 \text{ km}$  de radio (figura 4.15), respectivamente. Valores de  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  menores o iguales que  $78 \text{ cm}$  y  $73 \text{ cm}$ , pero suficientemente próximos a estos valores, son hallados en algunos píxeles situados alrededor de la zonas coloreadas de la figura 4.3; ver, por ejemplo, el par de píxeles rojos que aparecen en los paneles 4.15e y 4.15f. En los segmentos radiales asociados a estos píxeles no hay anulaciones de  $D$ , pues de lo contrario serían grises, pero algunos de sus puntos están suficientemente cerca de puntos con  $D = 0$  pertenecientes a segmentos de píxeles vecinos.

Los paneles 4.14e, 4.14f, 4.15e, 4.15f corresponden a un corte de  $1 \text{ m}$ . Si se au-



menta el corte a  $2 m$ , los mapas obtenidos son idénticos, lo que quiere decir que las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  máximas son menores que  $1 m$ .

Una quinta superficie esférica, -concéntrica con la Tierra- con un radio de  $7 \times 10^4 km$ , es considerada en la figura 4.16. Los paneles de la figura 4.16 son representados de la misma forma que aquellos correspondientes a la figura 4.15. Pero además, son incluidos dos mapas nuevos, 4.16g y 4.16h, en los que se representan las cantidades  $\Delta_r$  (panel de la izquierda) y  $\Delta_t$  (panel de la derecha) fuera de las regiones de invisibilidad y de las zonas coloreadas de la figura 4.3, haciendo un corte de  $2 m$ . La forma de colorear estos dos mapas es la misma que en los paneles 4.16e y 4.16f. En los mapas 4.16g y 4.16h, hay un píxel rojo en la zona central de dichos paneles. Las estimadores  $\Delta_r$  y  $\Delta_t$  correspondientes a estos píxeles valen alrededor de  $2 m$ . En los segmentos radiales asociadas a estos píxeles no hay anulaciones de  $D$ , pero debe haberlas (próximas) en algunos segmentos de píxeles vecinos. Por esta razón, los S-errores alcanzan valores tan grandes.

Los paneles de la figura 4.17 han sido diseñados tal y como los correspondientes paneles de la figura 4.16. La única diferencia es que, en la figura 4.17, una sexta superficie esférica -concéntrica con la Tierra- de radio  $9 \times 10^4 km$  ha sido considerada. Esta nueva superficie corresponde a usuarios que están en el interior de la E-esfera, pero cercanos a su frontera.

Podemos ahora poner de relieve las principales diferencias entre las figuras 4.15, 4.16 y 4.17, para ver cómo los S-errores cambian en función de la distancia del usuario al centro de la Tierra. Vemos que cada uno de los paneles de la figura 4.17 (4.16) contiene más píxeles grises que los paneles correspondientes de la figura 4.16 (4.15). Esto significa que las distancias de  $1 m$  y  $2 m$ , correspondientes a los cortes, son superadas en un número de píxeles mayor para la sexta superficie esférica (la más exterior). Además, como test para nuestros procedimientos, ha sido verificado que -como debe ser- todos los píxeles grises de los paneles con cortes a  $2 m$  son grises también en aquellos cuyo cortes son de  $1 m$ . En los paneles 4.17a y 4.17b [4.16a y 4.16b] (corte de  $1 m$ ), el número de píxeles con  $\Delta_r \simeq 1 m$  (izquierda) o  $|\Delta_t| \simeq 1 m$  (derecha) es mayor que en los paneles 4.16a y 4.16b [4.15a y 4.15b], respectivamente. Estos píxeles son rojos en 4.17a y rojos o azules marino en 4.17b. Algunos de ellos están rodeando las zonas grises, donde  $\Delta_r > 1 m$  (izquierda) o  $|\Delta_t| > 1 m$  (derecha), como también ocurre en 4.16a, 4.16b, 4.15a y 4.15b. Otros de estos píxeles están localizados alrededor de las zonas de invisibilidad en 4.17a y 4.17b, pero estos no aparecen en los paneles 4.16a, 4.16b, 4.15a y 4.15b. Lo mismo puede decirse para los paneles 4.17c y 4.17d (corte de  $2 m$ ). Finalmente, los paneles 4.17g y 4.17h [4.16g y 4.16h] (4.15e y 4.15f) han sido obtenidos a partir de los paneles 4.17c y 4.17d [4.16c y 4.16d] (4.15a y 4.15b) al pintar de gris tanto las regiones de invisibilidad como las zonas coloreadas de la figura 4.3 ( $D = 0$ ). En los mapas 4.17g, 4.17h, 4.16g y 4.16h se puede ver que las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  toman valores próximos a  $2 m$  alrededor de las regiones grises (producidos por ceros de  $D$  situados en segmentos radiales vecinos); sin embargo, estos valores grandes no son alcanzados en los paneles 4.15e y 4.15f (cuarta superficie esférica), donde los valores máximos para las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  son  $78 cm$  (izquierda) y  $73 cm$  (derecha), respectivamente.

A partir de las discusión anterior se deduce que:

- Las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  son más pequeñas que  $13 cm$  en cualquier punto que



esté situado sobre la superficie de la Tierra, o sobre la superficie de la esfera concéntrica con la Tierra, cuyo radio es  $1.5 \times 10^4 \text{ km}$ .

- En las esferas de la región exterior (donde hay puntos con  $D = 0$ ), si eliminamos los píxeles de las zonas de invisibilidad y de las manchas coloreadas de la figura 4.3, hallamos que los S-errores crecen conforme el radio de las superficies esféricas concéntricas con la Tierra aumenta.

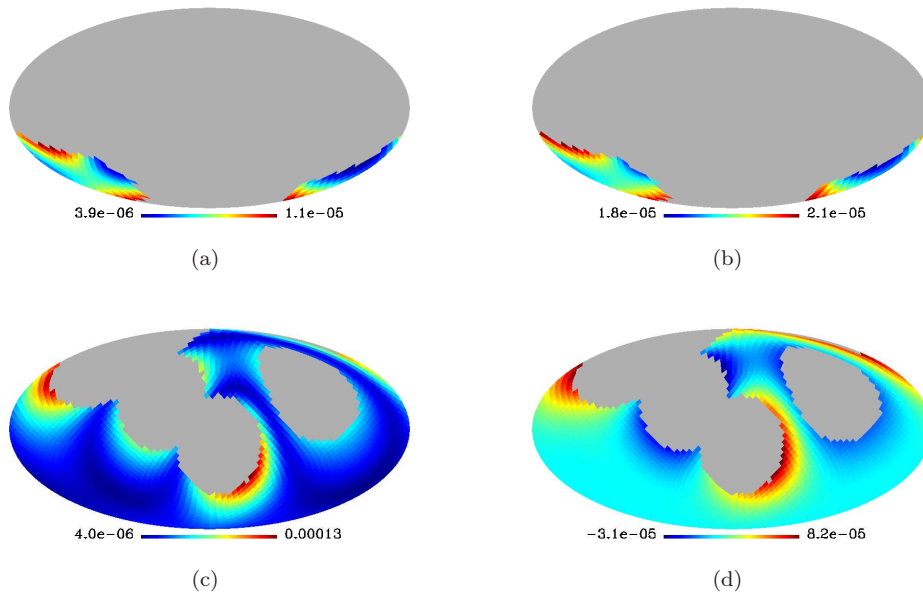


Figura 4.13: Mapas HEALPIX-Mollweide de los estimadores  $\Delta_r$  (izquierda) y  $\Delta_t$  (derecha), en km, para superficies esféricas con diferentes radios. En los paneles superiores (inferiores), el radio de la superficie es  $R_{\oplus} \simeq 6378 \text{ km}$  ( $1.5 \times 10^4 \text{ km}$ ). Estas superficies están localizadas en la región situada alrededor del punto E, donde el determinante D no se anula.

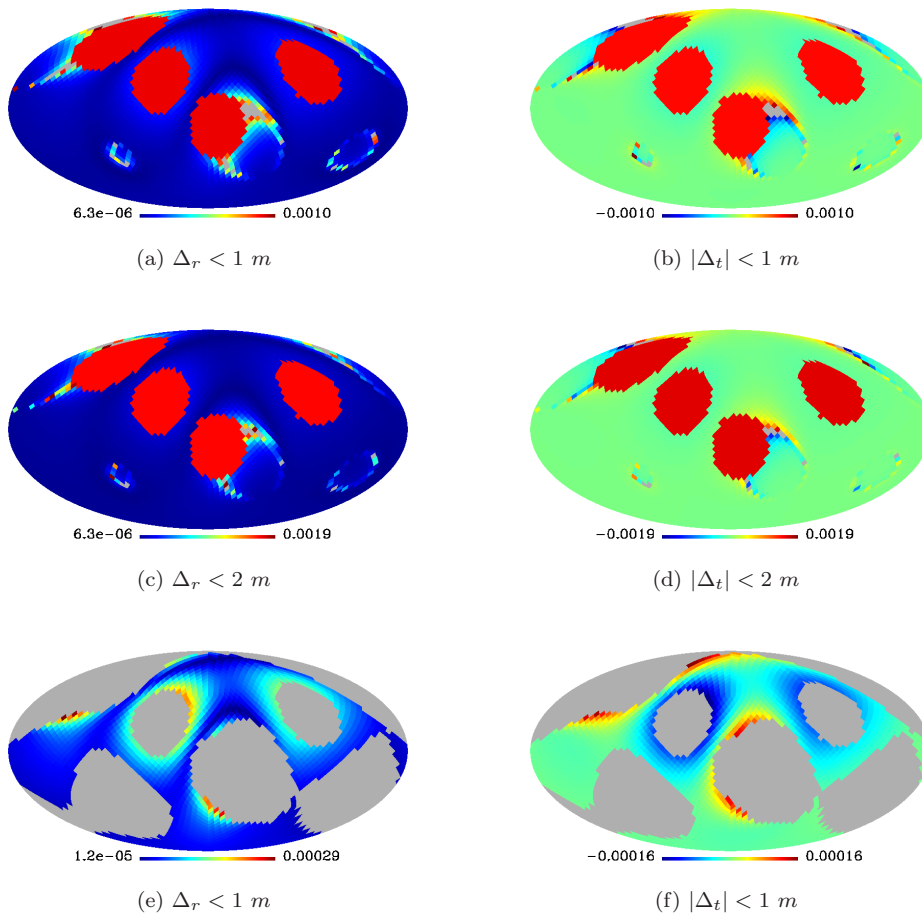


Figura 4.14: Representación como la de la figura 4.13, para una superficie esférica cuyo radio es  $3 \times 10^4 \text{ km}$ . En esta superficie y cerca de ella, el determinante  $D$  puede ser cero y, por tanto, los estimadores de los S-errores pueden tomar grandes valores que no deben incluirse en nuestra representación. Ello se logra excluyendo todos los valores superiores a una cierta distancia de corte. Este corte es realizado a  $2 \text{ m}$  en los paneles intermedios y a  $1 \text{ m}$  en los restantes.

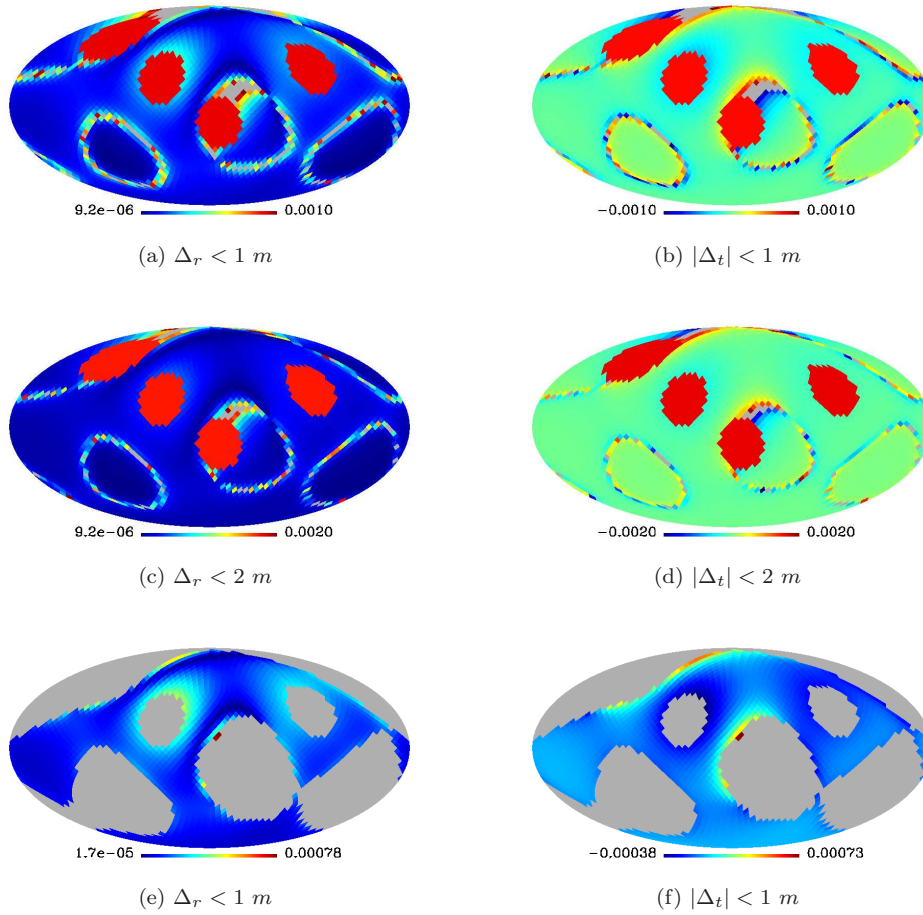


Figura 4.15: La misma representación que en la figura 4.14, para una superficie esférica que tiene un radio de  $5 \times 10^4 \text{ km}$

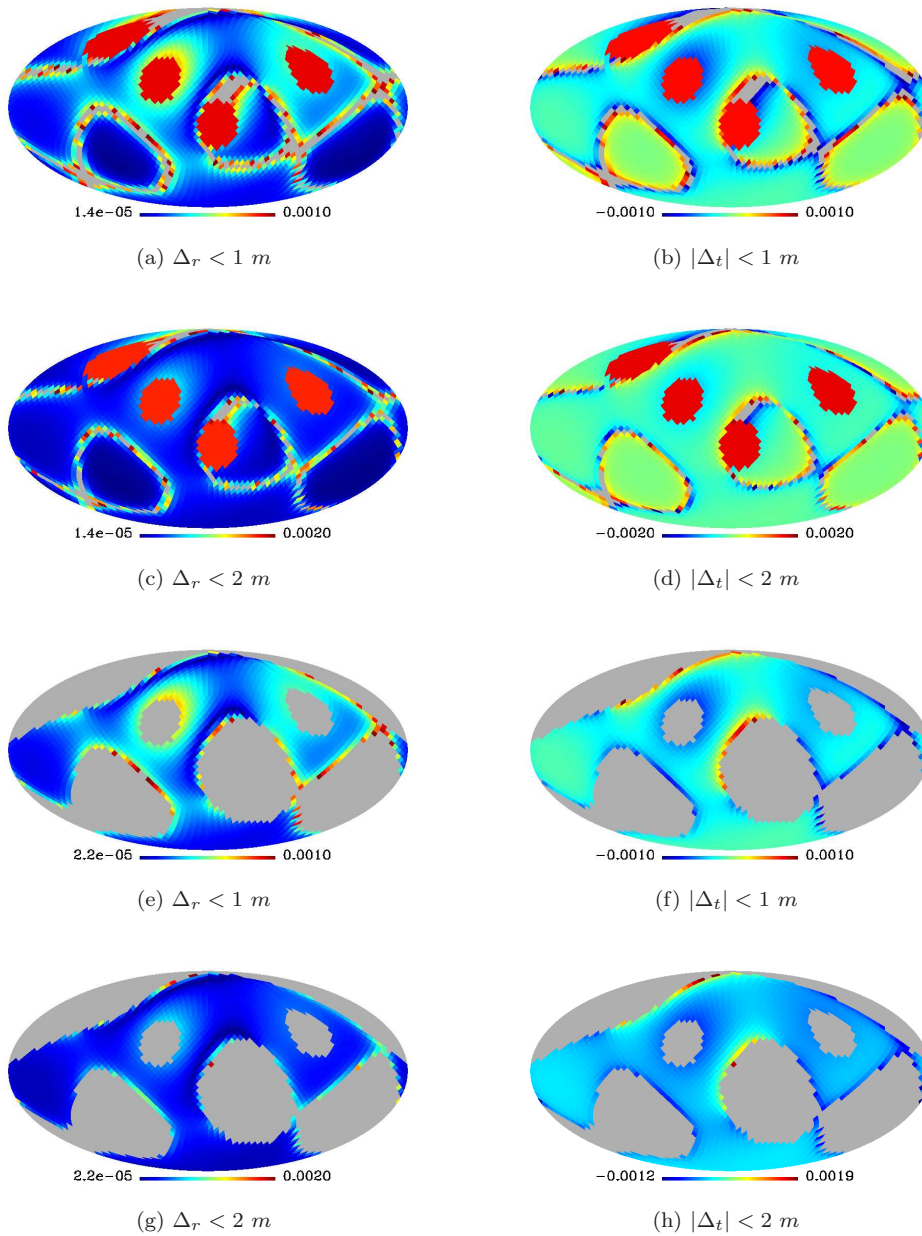


Figura 4.16: Los seis paneles superiores son como los de la figura 4.14, pero la superficie esférica -concéntrica con la Tierra- tiene aquí un radio de  $7 \times 10^4 \text{ km}$ . Los dos paneles inferiores son como los mapas 4.16e y 4.16f (corte de  $1 \text{ m}$ ), pero en ellos, el corte es de  $2 \text{ m}$ .

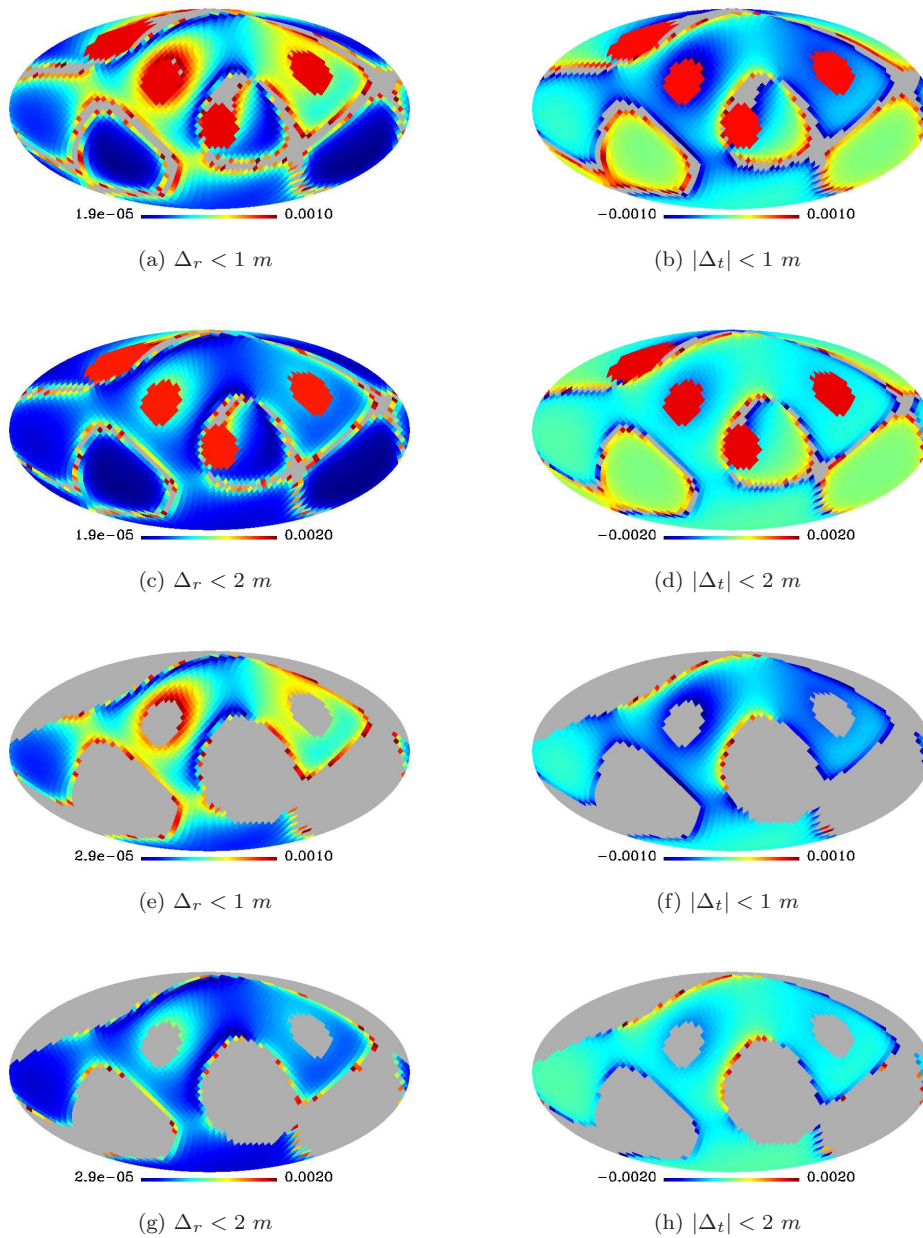


Figura 4.17: Representación como la de la figura 4.16, para una superficie esférica cuyo radio es  $9 \times 10^4 km$ .

#### 4.6.6. S-errores versus U-errores

Primero, puesto que hemos calculado los U-errores (ver [Puchades 2014]) y los S-errores en los mismos lugares en el interior de la E-esfera. La razón  $\xi = \Delta_{RS}/\Delta_{RU}$  entre el estimador  $\Delta_r$  asociado a los S-errores ( $\Delta_{RS} \equiv \Delta_r$ ) y los U-errores ( $\Delta_{RU}$ ) puede ser calculado en cualquier v-punto. En la figura 4.18, las razones  $\xi$  son representadas para las seis esferas -concéntricas con la Tierra- consideradas anteriormente.

El estudio de esta sección está basada en la figura 4.18. Todos los píxeles grises pertenecen a las regiones de invisibilidad en los paneles 4.18a y 4.18b. Mientras que en el resto de paneles, los píxeles grises corresponden a las zonas de invisibilidad (cuatro manchas grandes grises) o a valores de  $\Delta_{RS}$  mayores que  $2 m$ .

Una amplitud, para las incertidumbres en las líneas de universo de los satélites, de  $10 m$  es considerada para calcular los U-errores en esta sección.

En las esferas cuyos radios son  $3 \times 10^4 km$  (panel 4.18c),  $5 \times 10^4 km$  (panel 4.18d),  $7 \times 10^4 km$  (panel 4.18e) y  $9 \times 10^4 km$  (panel 4.18f), la razón  $\xi$  ha sido calculada solamente en los puntos donde  $\Delta_{RS}$  es menor que 2 metros (corte de  $2 m$ ). Así, las posiciones, que están demasiado cerca de los puntos con  $D = 0$ , no son consideradas.

En el panel 4.18a, se puede ver fácilmente que los valores de  $\xi$  son muy pequeños sobre una superficie esférica con el radio de la Tierra, donde la desigualdad  $2.3 \times 10^{-4} < \xi < 8.4 \times 10^{-4}$  es satisfecha. Por tanto, los S-errores son despreciables frente los U-errores para usuarios en Tierra.

En las esferas con radios  $1.5 \times 10^4 km$  (panel 4.18b),  $3 \times 10^4 km$ ,  $5 \times 10^4 km$ ,  $7 \times 10^4 km$  y  $9 \times 10^4 km$ , los valores máximos de  $\xi$  son  $1.7 \times 10^{-2}$ ,  $3.8 \times 10^{-2}$ ,  $4.4 \times 10^{-2}$ ,  $4.4 \times 10^{-2}$  y  $3.8 \times 10^{-2}$ , respectivamente. Así, los valores máximos de  $\xi$  son del orden de  $10^{-2}$  para estos cinco casos. También se puede observar en estos paneles, que los valores más grandes de  $\xi$  (ver las barras de colores) corresponden a píxeles que están cerca de alguna de las zonas de invisibilidad o próximos a las regiones coloreadas de la figura 4.3.

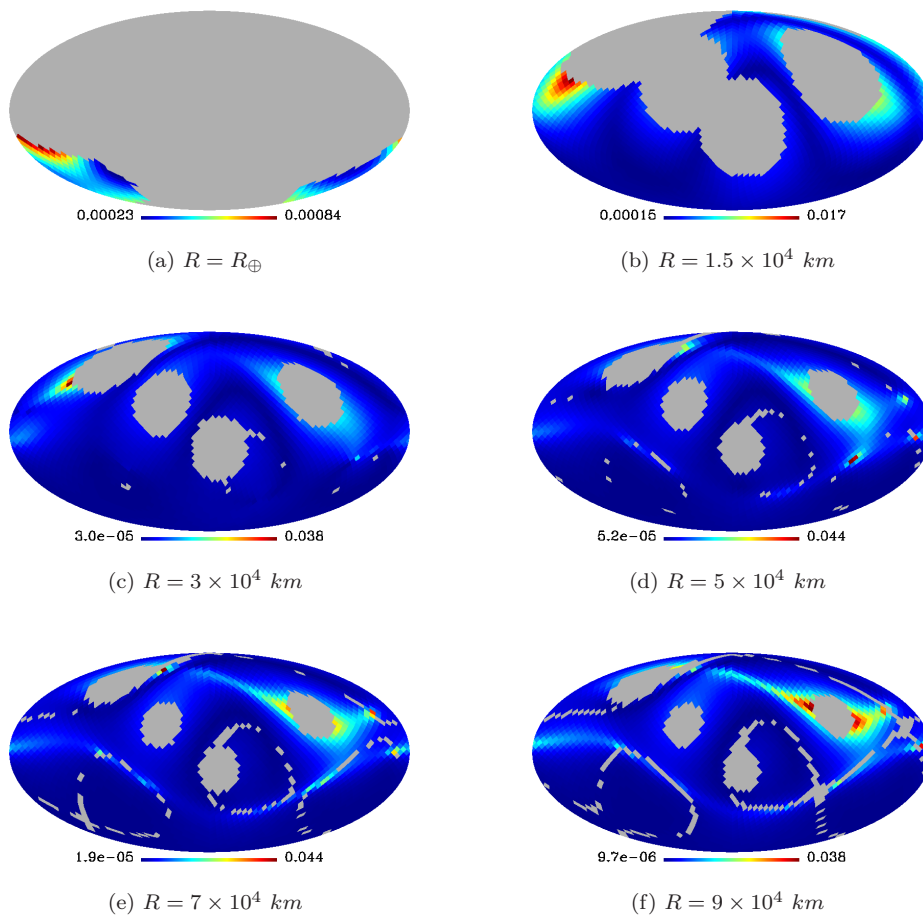


Figura 4.18: Mapas HEALPIX-Mollweide, en los que se representa la razón  $\xi = \Delta_{RS}/\Delta_{RU}$ , entre los estimadores  $\Delta_r$  de los S-errores y de los U-errores. Esta razón es calculada para seis superficies esféricas, concéntricas con la Tierra, que tienen radios de  $R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$  (panel a),  $1.5 \times 10^4 \text{ km}$  (panel b),  $3 \times 10^4 \text{ km}$  (panel c),  $5 \times 10^4 \text{ km}$  (panel d),  $7 \times 10^4 \text{ km}$  (panel e) y  $9 \times 10^4 \text{ km}$  (panel f).



## 4.7. Resumen y discusión

Este capítulo ha sido dedicado a estimar los S-errores de posicionamiento en una región extensa situada alrededor de la Tierra. Estos errores son las diferencias entre las coordenadas inerciales del usuario obtenidas mediante dos aproximaciones diferentes. En la primera (segunda) aproximación, los fotones se mueven bajo la acción (en ausencia) del campo gravitatorio terrestre. Los satélites se mueven sometidos a este campo en ambos casos; así, el importante efecto del campo gravitatorio terrestre sobre los relojes de los satélites es tenido en cuenta. En la sección 4.3.3 se estimó que, cada día, los relojes de un usuario en reposo sobre la Tierra se atrasan, con respecto a los que viajan en los satélites, unos  $40.62 \mu s$  ( $38.40 \mu s$ ) para GALILEO (GPS). Esto es muy importante, ya que la luz viaja unos  $12.19 km$  ( $11.52 km$ ) en este intervalo de tiempo y, si no se tiene en cuenta este atraso, el posicionamiento sería pronto imposible.

Aunque hemos asumido que los satélites se mueven –nominalmente– recorriendo circunferencias, en el espacio-tiempo de Schwarzschild creado por una Tierra idealizada, también podríamos considerar que las trayectorias de las líneas de universo nominales son casi elípticas en el ET-S; sin embargo, en tal caso, estas trayectorias serían muy próximas a las circulares debido al diseño de las constelaciones de satélites de GALILEO y GPS (ver la sección 1.7). Además, los fotones no parten de puntos de las trayectorias nominales sino de las reales, que se desvían con respecto a las nominales con amplitudes del orden de  $10 m$ . De cualquier forma, elijamos circunferencias o elipses, y tengamos en cuenta trayectorias reales con desviaciones respecto a las nominales o no, dados cuatro tiempos propios de emisión  $\tau^A$ , los fotones partirán hacia el usuario desde puntos próximos y, por tanto, experimentarán efectos de tipo lente casi independientes del punto de partida. Ello es debido a que estos efectos son acumulativos sobre toda la trayectoria de los fotones, que recorren desde decenas hasta centenas de miles de kilómetros, dentro de la E-esfera, a lo largo de trayectorias cuyos puntos iniciales están separados por distancias muchísimo más pequeñas. De todo esto se deduce que la estimación de S-errores no requiere ni el uso de orbitas nominales no circulares, ni el de desviaciones respecto a la líneas de universo nominales.

Hemos considerado muchas 4-tuplas e hipersuperficies para diferentes tiempos coordenados del usuario, pero las propiedades principales de los S-errores pueden ser descritas usando solamente la 4-tupla 2, 5, 20 y 23 y la hipersuperficie  $t = 19 h$ , tal y como ha sido hecho en este capítulo. La pixelización HEALPIX y la proyección Mollweide son usadas para construir mapas apropiados, que muestran propiedades importantes de la distribución de los S-errores. Al analizar estos mapas, las siguientes conclusiones han sido obtenidas:

- (A) Las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  toman valores más pequeños que unas pocas decenas de centímetros, en la región alrededor de la Tierra donde no hay puntos en los que  $D$  se anule.
- (B) Los S-errores son grandes cerca de los puntos con  $D = 0$  y divergen en estos puntos. También son grandes lejos de los satélites (cerca de la frontera de la E-esfera). En este segundo caso, los valores máximos de los estimadores



$\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  son de unos pocos metros. Estos errores corresponden a usuarios que están lejos del punto E, y que están recibiendo fotones en vuelo rasante con respecto a la Tierra; por ello, los píxeles de estos usuarios están próximos a las regiones de invisibilidad.

- (C) Valores similares de unos pocos metros también pueden aparecer en los casos siguientes: (i) para usuarios ubicados en una dirección en la que  $D$  se anula, si están situados a distancias adecuadas del punto de anulación, y (ii) en el caso de usuarios situados en una dirección en la que  $D$  no se anula, si están suficientemente cerca de puntos de alguna dirección vecina en los que  $D$  se anula. Estos usuarios –si existen– tienen que estar situados en segmentos radiales cuyos píxeles asociados están fuera de las zonas coloreadas de la figura 4.3, pero alrededor de ellas.

Como se desprende del estudio presentado en la sección 4.6, la calidad del posicionamiento decrece conforme la distancia al centro de la Tierra aumenta.

En la sección 4.6.3 se muestra que, dado un punto con  $D = 0$  sobre un cierto segmento radial de la pixelización elegida, la distancia  $\Delta L_{2m}$  –desde el usuario con  $D = 0$  hasta los puntos del segmento donde  $\Delta_r$  o  $|\Delta_t|$  toma un valor de 2 metros– toma valores que van desde cientos a miles de kilómetros (ver figuras 4.6, 4.5 y 4.7). Estas grandes diferencias pueden ser cualitativamente entendidas como vamos a explicar ahora. Para cualquier usuario localizado en un punto con  $D = 0$ ,  $P_D$  (a una distancia  $L_D$  del punto E), los cuatro satélites son vistos en una circunferencia en el cielo (configuración degenerada). Podemos considerar ahora otro usuario Q cercano, situado en la misma dirección, a una distancia  $L_D + \Delta L$  de E. Los usuarios  $P_D$  y Q recibirán diferentes coordenadas de emisión, lo cual implica que los cuatro satélites emitieron sus señales en posiciones diferentes. En general, es evidente que las posiciones de los satélites correspondientes al punto Q no serán vistas en una única circunferencia en el cielo. En otras palabras, la configuración degenerada asociada a  $P_D$  es abandonada conforme la posición del usuario se separa ( $\Delta L \neq 0$ ) del punto  $P_D$ . Esto implica que, localmente, el valor absoluto del determinante D aumenta alrededor del punto con  $D = 0$  inicialmente considerado (conforme nos separamos de él) y, por tanto,  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  decrecen. El valor de  $\Delta L_{2m}$  depende del ritmo al que se producen estos decrecimientos, que es función de las posiciones de los satélites y de sus velocidades en la configuración degenerada inicial. Puesto que estas posiciones y velocidades pueden ser muy diferentes para puntos distintos con  $D = 0$ , los valores de  $\Delta L_{2m}$  pueden oscilar desde cientos a miles de kilómetros. También pueden aparecer valores más pequeños de  $\Delta L_{2m}$  si se considera una resolución mayor en el recubrimiento de la E-esfera mediante v-puntos; es decir, si se elige un paso entre usuarios vecinos –en cada segmento radial– bastante menor que 100 km, de forma que si las cantidades  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  valen 2 m, en puntos cuyas distancias  $\Delta L_{2m}$  al punto donde se anula  $D$  son menores que 100 km, estos puntos puedan ser detectados.

Algunos comentarios sobre la conclusión (C) descrita –más arriba– en esta sección pueden ser esclarecedores. Como se deduce a partir de la figura 4.5, para algunos puntos con  $D = 0$  ( $P_D$ ), los S-errores toman valores de unos pocos metros a distancias de miles de kilómetros de  $P_D$ ; por tanto, si un cierto usuario Q, situado en una dirección sin puntos con  $D = 0$ , está a una distancia de miles de kilómetros de un

punto perteneciente a una dirección vecina en el que  $D$  se anula, S-errores de unos pocos metros son posibles en  $Q$ . Para saber si puede ocurrir esto, conviene tener en cuenta las características de nuestra pixelización. Para la resolución HEALPIX elegida, la distancia entre dos puntos localizados en direcciones vecinas a la misma distancia  $L$  (en kilómetros) de  $E$  es  $\Delta_N \sim 0.1 L \text{ km}$ . Por tanto, para  $23200 \text{ km} < L < 10^5 \text{ km}$  (región de la E-esfera donde  $D$  se puede anular), la desigualdad  $2320 \text{ km} < \Delta_N < 10^4 \text{ km}$  es satisfecha. Esto indica que, en esta región, la distancia es de miles de kilómetros entre un punto  $D = 0$  ( $P_D$ ) y el usuario vecino  $Q$  definido previamente. Por consiguiente, los estimadores  $\Delta_r$  y  $|\Delta_t|$  pueden alcanzar valores de unos pocos metros en  $Q$ . Puntos de este tipo pueden ser vistos en los paneles 4.10b y 4.12d. La mayoría de ellos están cercanos a la frontera de la E-esfera y son puntos rojos de acuerdo con la barra de colores.

Finalmente, los S-errores resultantes han sido comparados con los U-errores debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites. Ambos tipos de errores han sido calculados en los mismos puntos dentro de la E-esfera, y han sido comparados punto a punto. Los U-errores han sido estimados en el capítulo 3 suponiendo desviaciones entre las líneas de universo nominales y reales con una amplitud de  $1 \text{ m}$  (normalización), y también fueron presentados en [Puchades 2014] para una amplitud de  $10 \text{ m}$  que es más realista; en nuestra comparación utilizamos U-errores calculados con la amplitud de  $10 \text{ m}$ . Así, hemos verificado que, para los usuarios con S-errores más pequeños que 2 metros, la razón  $\xi$  definida en la sección 4.6.6 es menor que  $\sim 0.05$ . Además, valores de  $\xi$  del orden de  $10^{-2}$  aparecen solamente en unos pocos píxeles localizados o cerca de la regiones de invisibilidad o próximos a las zonas coloreadas de la figura 4.3. De todo esto se desprende que los S-errores -por debajo de un nivel de 2 metros- son más pequeños que el cinco por ciento de los U-errores. En esta situación, la aproximación basada en la suposición de que los fotones siguen geodésicas nulas en el ET-M puede ser aplicada, al menos, para el posicionamiento en el interior de la E-esfera. Sin embargo, si la amplitud para las desviaciones entre las líneas de universo nominales y reales de los satélites llega a ser -en el futuro- muy inferior a 10 metros, los U-errores (prácticamente proporcionales a esta amplitud) serán mucho más pequeños y, por tanto, los S-errores no serán despreciables frente a los U-errores. En tal caso, deberá ser asumido que los fotones se mueven en el ET-S. Lo mismo ocurre si necesitamos una alta precisión para tratar problemas científicos.

En el posicionamiento estándar (no SPR), algunas correcciones relativistas son aplicadas para estudiar el movimiento de los satélites. Así, el comportamiento de los relojes que llevan los satélites es tenido en cuenta con todo detalle. Sin embargo, es frecuente considerar que los fotones se mueven como lo harían en el ET-M y, que por tanto, los S-errores producidos por el campo gravitatorio terrestre son despreciables. Aquí, mapas de estos errores de posicionamiento son diseñados por primera vez. En ellos, puede verse que los S-errores alcanzan valores menores que unos pocos centímetros para los usuarios localizados sobre la superficie de la Tierra, lo que justifica totalmente que los despreciemos cuando el usuario está sobre la Tierra o suficientemente cerca de ella; sin embargo, estos errores llegan a ser de unos pocos metros para algunos usuarios localizados lejos de Tierra, aunque en el interior de la E-esfera; lo que indica que los S-errores no pueden ser despreciados *a priori* cuando queremos posicionar naves espaciales que se mueven a decenas de

miles de kilómetros de la Tierra. Este tema ha sido estudiado por primera vez –con todo detalle– en este capítulo. Hemos obtenido mapas de los S-errores que serán una herramienta práctica, puesto que pueden ser usados, de ahora en adelante, para decidir si correcciones relativistas -debido a efectos de tipo lente- son necesarias para estudiar un problema dado relacionado con el posicionamiento. Esto parece que será especialmente relevante para la navegación espacial autónoma lejos de la Tierra (ver el capítulo 3), aunque no mucho más allá del borde de la E-esfera.



# Consideraciones generales, resumen de conclusiones y perspectivas

---

## Índice

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>5.1. Posicionamiento relativista . . . . .</b>                               | <b>191</b> |
| <b>5.2. Errores de posicionamiento . . . . .</b>                                | <b>193</b> |
| <b>5.3. Sobre los métodos seguidos en esta Tesis . . . . .</b>                  | <b>196</b> |
| <b>5.4. Principales resultados, conclusiones y problemas abiertos . . . . .</b> | <b>197</b> |

---

Esta Tesis es parte del desarrollo de un plan general para el estudio numérico y la implementación práctica de SPR cada vez más precisos. Vamos a resumir este plan considerando sucesivamente los principios básicos del posicionamiento y de la estimación de errores.

## 5.1. Posicionamiento relativista

Cualquier SPR debe estar basado en la teoría de la Relatividad General (RG), y puede diseñarse teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- (i) El espacio-tiempo es creado por una distribución de energía que debe incluir la Tierra, la Luna, y cualquier fuente energética que influya en la zona del posicionamiento. Su métrica debe expresarse en función de coordenadas apropiadas  $y^\alpha$ .
- (ii) En ausencia de fuerzas no gravitatorias, tanto los satélites como los fotones se mueven –en el citado espacio-tiempo– como partículas prueba; es decir, siguiendo geodésicas; en particular, los satélites siguen geodésicas temporales que serán parametrizadas por los tiempos propios.
- (iii) Una vez la métrica y las líneas de universo de los satélites y de los fotones son conocidas, cualquier usuario puede calcular sus coordenadas  $y^\alpha$  –si no hay bifurcación, ver la sección 1.8– utilizando los tiempos propios emitidos por cuatro satélites. Estos tiempos constituyen las llamadas coordenadas de emisión  $\tau^A$ . Usando estos tiempos propios y las líneas de universo de los satélites –parametrizadas por ellos– podemos hallar las coordenadas de los satélites en el

momento de la emisión  $\tau^A$ . Estas coordenadas son también las de los puntos de partida de los fotones que llegan hasta el usuario siguiendo geodésicas nulas. Entre estas geodésicas es posible hallar cuatro que se corten (una por satélite), y las coordenadas  $y^\alpha$  del punto de intersección son las del usuario. El cálculo de estas coordenadas es lo que se hace en la sección 4.5, usando la función de transferencia de tiempo y el espacio-tiempo de Schwarzschild.

El esquema anterior es muy general y no requiere ni el uso de coordenadas casi inerciales, ni el de métricas con simetrías, ni otras simplificaciones; sin embargo, en la práctica, es conveniente ir considerando SPR cada vez más realistas y precisos, partiendo de los más simples y manejables. No basta con saber hallar las coordenadas del usuario siguiendo el esquema (i)–(iii), sino que hay que atribuirles unos márgenes de error. Esta Tesis sienta las bases para la construcción progresiva de SPR y para la estimación de errores de posicionamiento.

Una aproximación simple pero útil se obtiene suponiendo una Tierra ideal estática y con simetría esférica; así, en la zona de posicionamiento, tanto los satélites como los fotones se moverán en el espacio-tiempo de Schwarzschild, que es asintóticamente Minkowskiano; evidentemente, en el espacio-tiempo asintótico de Minkowski, existen sistemas de referencia inerciales que tienen su origen en el centro de la Tierra y ejes espaciales arbitrarios. En esta sección, este SPR aproximado será llamado "SPR de orden 1  $\equiv O(1)$ -SPR". De acuerdo con el apartado (ii), si no hay fuerzas no gravitatorias debidas a la acción de la presión de radiación, a los vientos solares, o a otras causas, las líneas de universo de los satélites (fotones) serán geodésicas temporales (nulas) de la métrica de Schwarzschild. Esta aproximación ha sido utilizada en el Capítulo 4.

Puesto que el campo gravitatorio terrestre es débil y el camino recorrido por los fotones es corto dentro de la E-esfera (de unos  $1.3 \times 10^5$  km como máximo), sus desviaciones por efecto lente deben ser pequeñas; por eso, un SPR aproximado más simple que el anterior puede ser suficientemente preciso en algunos problemas de posicionamiento. Se trata del SPR que desde ahora llamaremos "SPR de orden 0  $\equiv O(0)$ -SPR". Esta aproximación se basa en la geometría de Schwarzschild y en las siguiente hipótesis: (a) las líneas de universo de los satélites son geodésicas temporales del espacio-tiempo de Schwarzschild, y (b) los fotones siguen geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Minkowski asintótico al de Schwarzschild. Evidentemente, en el  $O(0)$ -SPR, estamos considerando que el efecto de toda la masa de una Tierra ideal estática y esférica sobre la propagación de los fotones es despreciable; naturalmente, nos referimos a los fotones que llevan la información desde los cuatro satélites hasta el usuario. Esta aproximación ha sido utilizada en los Capítulos 2, 3 y 4. En este último Capítulo, los SPR de orden 0 y 1 han sido comparados cuantitativamente por primera vez.

Tanto en el  $O(0)$ -SPR como en el  $O(1)$ -SPR, existen coordenadas asintóticamente inerciales  $x^\alpha$  y, en función de estas coordenadas, la métrica de Schwarzschild tiene la forma  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}$ , donde  $\eta_{\alpha\beta}$  es la métrica de Minkowski, y  $s_{\alpha\beta}$  son perturbaciones de primer orden en la pequeña cantidad  $GM_\oplus/r$ , donde  $r^2 = \delta_{ij}x^i x^j$  y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. De acuerdo con el comportamiento asintótico de la métrica de Schwarzschild, los términos  $s_{\alpha\beta}$  tienden a cero cuando  $r$  tiende a infinito. En estos SPR, podemos hallar las coordenadas  $x^\alpha$  de un usuario (posicionamiento)

a partir de las coordenadas de emisión  $\tau^A$  que éste recibe. Las coordenadas  $x^\alpha$  han sido llamadas inerciales o casi inerciales a lo largo de la Tesis por razones obvias.

[Coll 2010a] hallaron una fórmula analítica que nos da la posición del usuario,  $x^\alpha$ , en función de  $\tau^A$ , para fotones que se mueven en el espacio-tiempo de Minkowski. Esta fórmula es válida cualesquiera que sean las líneas de universo de los satélites, lo que la hace aplicable en el O(0)-SPR, en el que los satélites se mueven siguiendo ciertas líneas de universo del espacio-tiempo de Schwarzschild. Esta fórmula es una herramienta de cálculo de la que no se ha sacado partido, excepto en esta Tesis y en nuestras publicaciones relacionadas con ella ([Puchades 2012, Sáez 2013, Puchades 2014]).

Para diseñar un SPR mejor que O(1)-SPR, debemos considerar la Tierra como una distribución realista de masa con multipolos y en rotación, que interacciona con la Luna, y con otras posibles fuentes de energía que contribuirían débilmente al campo gravitatorio local en la región de posicionamiento. Afortunadamente, hay métricas conocidas que permiten describir este sistema, por ejemplo, la métrica de Kerr nos permite tener en cuenta la rotación, y distribuciones realistas de masa pueden ser descritas utilizando una métrica PPN (Parametrized Post-Newtonian formalism); una vez que una métrica adecuada ha sido hallada, los apartados (ii) y (iii) anteriores, deben ser tenidos en cuenta para calcular las coordenadas  $y^\alpha$  a partir de las de emisión (posicionamiento). El apartado (iii) requiere el uso de la función de transferencia de tiempo de la citada métrica. Ver [Teyssandier 2008], donde esta función es estudiada para varias métricas de interés.

El estudio de SPR mejores que O(1)-SPR es uno de nuestros proyectos a corto plazo. No partimos de cero, ya que como hemos dicho en el párrafo anterior, hay métricas y funciones de transferencia de tiempo que serán útiles, con modificaciones adecuadas, para estudiar el posicionamiento alrededor de la Tierra. Además, una vez hallada la función de transferencia, el posicionamiento se podría realizar con el mismo método utilizado en la sección 4.5 para el caso O(1)-SPR.

## 5.2. Errores de posicionamiento

Tan importante como el método usado para hallar la posición de los usuarios en el espacio-tiempo, es la determinación de los errores inherentes al mismo. Pensamos que la estimación de errores de posicionamiento es más sistemática en el marco de los SPR, al menos, si se sigue el procedimiento de estimación propuesto y utilizado en toda la Tesis. Los fundamentos de este procedimiento y su aplicabilidad en el caso de SPR más generales que O(1)-SPR son discutidos en esta sección.

Supongamos que utilizando coordenadas apropiadas  $x^\alpha$ , la métrica ha sido escrita en la forma  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta} + \zeta_{\alpha\beta}$ , donde  $\eta_{\alpha\beta}$  y  $s_{\alpha\beta}$  son los términos descritos anteriormente (Schwarzschild), y  $\zeta_{\alpha\beta}$  es un término mucho más pequeño debido a perturbaciones de la métrica de Schwarzschild (rotación, multipolos, etc.). Obviamente, en el O(1)-SPR las cantidades  $\zeta_{\alpha\beta}$  son nulas.

En lugar de considerar el error asociado a cada efecto posible (método de los GNSS), en esta Tesis proponemos el siguiente método general:

- (1) Definimos unas líneas de universo nominales, para los satélites, que serán geodésicas temporales de la métrica del SPR. Estas geodésicas serían las

verdaderas líneas de universo de los satélites en ausencia de perturbaciones.

- (2) En un SPR dado, hay perturbaciones no gravitatorias como las debidas a los vientos solares, la presión de radiación, etc., y hay también perturbaciones gravitatorias debidas a las fuentes de energía que no han sido tenidas en cuenta para hallar la estructura del espacio-tiempo. Todas estas perturbaciones producen desviaciones de las líneas de universo reales –de los satélites– con respecto a las nominales. Estas desviaciones irán creciendo con el tiempo.
- (3) Las citadas desviaciones no han de ser calculadas, sino controladas. Serán medidas desde Tierra (ver comentarios más adelante) y, en cuanto la amplitud de las desviaciones supere un cierto límite, las líneas de universo reales serán corregidas para mantenerlas, en todo momento, suficientemente próximas a las nominales.
- (4) Las desviaciones tendrán una cierta distribución estadística, que debe ser hallada, o bien a partir de medidas de desviaciones tomadas durante largos periodos de tiempo, y analizadas luego estadísticamente, o bien haciendo un modelo teórico que tenga en cuenta las propiedades estadísticas de las perturbaciones (gravitatorias o no) que producen las desviaciones. El primer método parece preferible, ya que no consideraría la superposición de desviaciones con diferentes causas.
- (5) Dadas unas líneas de universo nominales, y realizaciones de las desviaciones –acordes con su amplitud límite y sus propiedades estadísticas– podemos usar las líneas nominales para calcular las posiciones de los usuarios, y las desviaciones para estimar errores. Estos errores han sido llamados U-errores a lo largo de la Tesis, y son debidos a incertidumbres en las líneas de universo de los satélites, que se desvían con respecto a las nominales.
- (6) Un SPR muy apropiado sería obtenido teniendo en cuenta todas las fuentes de energía (multipolos de la Tierra, Luna, etc.) que contribuyen al campo gravitatorio. Así, sólo las fuerzas no gravitatorias producirían desviaciones con respecto a las líneas nominales y, en consecuencia, estas desviaciones crecerían más despacio que, por ejemplo, en el  $O(1)$ -SPR, donde el tratamiento gravitatorio del problema es demasiado simple. Un crecimiento más lento de las desviaciones requería menos correcciones del movimiento de los satélites, que sería más estable.
- (7) Las líneas de universo de los fotones dependen de la métrica de la región –alrededor de la Tierra– en la que estamos utilizando el SPR. Por tanto, si usamos el SPR del apartado (6), la métrica y las geodésicas nulas de los fotones están muy bien calculadas y, por tanto, no aparecen errores, de tipo gravitatorio, debidos a un tratamiento aproximado de la propagación de los fotones. En tal caso, sólo pueden aparecer errores relacionados con esta propagación si, por ejemplo, los fotones interactúan con las diferentes capas de la atmósfera, pero este tipo de efecto no es propiamente relativista y no será tratado aquí.



- (8) Podemos considerar varias aproximaciones para estudiar el movimiento de los fotones, en la primera (orden 0), los fotones se mueven sobre geodésicas nulas de la métrica  $\eta_{\alpha\beta}$ , como en el O(0)-SPR; en la segunda aproximación (orden 1), las líneas de universo de los fotones corresponden a la métrica  $\eta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}$  como en O(1)-SPR y; finalmente, en las aproximaciones de orden superior, los fotones siguen geodésicas nulas de la métrica  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta} + \zeta_{\alpha\beta}$ , que es una perturbación de la de Schwarzschild, ya que las cantidades  $\zeta_{\alpha\beta}$  son siempre muy pequeñas (rotación lenta, multipolos pequeños, etc) comparadas con los términos  $s_{\alpha\beta}$ , que son del orden de  $M_{\oplus}/r$ .

En general, llamaremos S-errores a aquellos asociados a un tratamiento aproximado del movimiento de los fotones. Se pueden definir los S-errores asociados a una aproximación cualquiera del movimiento de los fotones, comparando los posicionamientos obtenidos con esta aproximación y con una de orden superior. En el Capítulo 4 hemos calculado S-errores asociados a O(0)-SPR (fotones a orden 0) comparando con O(1)-SPR (fotones a orden 1).

Los puntos (1)–(6) hacen referencia a los satélites y a los U-errores, mientras que el (7) y el (8) se refieren a la propagación de los fotones y a los S-errores. Hay errores de posicionamiento asociados a la descripción de las líneas de universo de los satélites (U-errores), y otros a las de los fotones (S-errores). En esta Tesis, trabajamos con los SPR de orden 0 y 1, tanto para estimar y comparar los U y S-errores, como para ver el modo en que se superponen ambos tipos errores y de qué depende cada tipo.

La elección de las líneas de universo nominales de los satélites es arbitraria, en el sentido de que podemos tomar cualquier familia de geodésicas de la métrica del SPR y, en ausencia de desviaciones, el posicionamiento no tendría U-errores para ninguna familia. Por tanto, la citada elección es un asunto totalmente técnico, que hay que realizar teniendo en cuenta que tenemos que poner en órbita y controlar el sistema de satélites, de tal modo que se puedan mantener, tan pequeñas como sea posible, las desviaciones con respecto a las líneas nominales y, así, minimizar los U-errores.

Para calcular los S-errores utilizaremos las mismas líneas nominales que para la estimación de los U-errores, de modo que los fotones supondremos que parten de los puntos de las líneas nominales correspondientes a las coordenadas de emisión,  $\tau^A$ , recibidas por el usuario. Luego se propagarán o a orden 0 (Minkowski) o en el campo gravitatorio de un SPR de orden 1 o superior; por tanto, con el mismo punto de partida de los fotones, obtendremos posicionamientos diferentes y estimaremos los S-errores. El único problema aparente es que los fotones salen de puntos de las líneas de universo reales, no de puntos de las nominales; sin embargo, como las desviaciones entre unas líneas y otras serán mantenidas pequeñas (menores que unos 10 m), los dos puntos de partida estarán próximos, y el cálculo de los S-errores se puede hacer, en la práctica, tal y como hemos propuesto; es decir considerando puntos de partida sobre las líneas nominales. Para entender este modo operativo de trabajar, basta considerar que los S-errores son debidos a efectos de tipo lente producidos por el campo gravitatorio del SPR, y que se trata, por tanto, de efectos integrados sobre todo el camino recorrido por los fotones (desde los satélites hasta el usuario). Para GALILEO por ejemplo, la longitud de estos caminos es del orden de  $10^4$  km para usuarios en Tierra, y del orden de  $\sim 10^5$  km para usuarios situados cerca de la superficie de la E-esfera y, teniendo todo esto en cuenta, es evidente que

el hecho de que los puntos iniciales de las geodésicas de los fotones estén separados unas decenas de metros (distancia muy pequeña comparada con la longitud de los caminos recorridos) es irrelevante. Con el modo de trabajar propuesto los U-errores y los S-errores se suman para obtener el error de posicionamiento total. Los U-errores dependen de las desviaciones entre líneas nominales y reales de los satélites, y los S-errores no, estos últimos dependen esencialmente del campo gravitatorio en la región del posicionamiento.

Aunque en esta Tesis trabajamos con O(0)-SPR y O(1)-SPR, porque ello es suficiente para nuestros fines, vemos que hay un plan bien definido para generalizar nuestro estudio al caso del SPR considerado en el punto (6), en el que serían tenidas en cuenta todas las fuentes de energía que contribuyen a configurar el campo gravitatorio en la zona de posicionamiento.

### 5.3. Sobre los métodos seguidos en esta Tesis

Como ya hemos dicho, se han utilizado los sistemas de posicionamiento relativista O(0)-SPR y O(1)-SPR definidos en este mismo capítulo.

El espacio-tiempo es el de Schwarzschild, en el que existen líneas de universo temporales con trayectorias circulares. Tanto en GPS como en GALILEO, hemos elegido líneas de este tipo para jugar el papel de las líneas de universo nominales de los satélites (sus ecuaciones pueden ser halladas en la sección 1.7).

En la sección 3.3 se define la amplitud y la distribución estadística de las desviaciones –de las líneas reales respecto de las nominales– usadas en el Capítulo 3. La distribución estadística es muy simple y ha de ser mejorada [ver el punto (4) de la sección anterior], pero es suficiente para nuestros fines. La amplitud ha sido elegida por un criterio de normalización de modo que  $\Delta r = 1 \text{ m}$  (ver la sección 3.3). Para elegir una amplitud adecuada hay que conocer los errores en las medidas actuales de las coordenadas de un satélite emisor.

La navegación espacial se basa actualmente (ver Basics of Space Flight <sup>1</sup>) en medidas realizadas con tres antenas muy sensibles que han sido ubicadas en lugares apropiados sobre la superficie terrestre. Estas antenas forman el DSN (Deep Space Network). Si tenemos una información suficientemente buena de la posición de las antenas y de la refracción atmosférica, la velocidad (distancia) radial se puede medir con un error de unas pocas veces  $10^{-8} \text{ km/s}$  (unos pocos metros), mientras que los errores en las coordenadas angulares son menores que unas pocas veces  $10^{-8} \text{ rad}$ , lo que para los satélites GPS y GALILEO supone errores de posición de unas pocas décimas de metro en la dirección perpendicular a la de observación. Esto sugiere que podríamos mantener los satélites emisores a una distancia menor que unos  $10 \text{ m}$  de sus líneas de universo nominales. Este valor de la amplitud de las desviaciones ha sido considerado para comparar U-errores con S-errores en el Capítulo 4.

---

<sup>1</sup>Basics of Space Flight: <http://www2.jpl.nasa.gov/basics/bsf13-1.php>

## 5.4. Principales resultados, conclusiones y problemas abiertos

Comenzamos nuestro trabajo teniendo en cuenta resultados teóricos previos que habían sido obtenidos, analíticamente, en casos sencillos (sistemas de emisores ideales). Para considerar casos más realistas, hubo que calcular numéricamente y, para eso, tuvimos que diseñar un conjunto de herramientas de trabajo (códigos numéricos), y utilizar adecuadamente otras herramientas que ya habían sido utilizadas con éxito en otras áreas de investigación (representaciones HEALPIX-Mollweide como técnica de visualización de resultados). Todo se ha realizado en el marco de  $O(0)$ -SPR y  $O(1)$ -SPR, por tratarse de los SPR más apropiados para alcanzar nuestros objetivos.

Vamos a hacer una lista con los logros de la Tesis presentados de forma abreviada (algunos detalles adicionales –muy técnicos– fueron ya presentados al final de los Capítulos anteriores):

- Hemos diseñado códigos numéricos para calcular las coordenadas inerciales a partir de las coordenadas de emisión (posicionamiento) y viceversa, que pueden aplicarse tanto para satélites GPS como GALILEO. Con estos códigos usados como subrutinas, hemos construido otros más complicados, que nos han permitido desarrollar  $O(0)$ -SPR y  $O(1)$ -SPR (bifurcaciones, errores, etc.).
- Hemos estudiado el posicionamiento y sus errores dentro de una amplia región alrededor de la Tierra –la E-esfera– con la idea de intentar la navegación espacial mas allá de los 20000 *km* de altura con satélites GPS y GALILEO, lo que siempre se había considerado imposible.
- La distribución de los puntos de bifurcación ha sido estudiada, para 4-tuplas de satélites GALILEO, tanto en la región de emisión como en la co-región. Hemos hallado una zona central de la región de emisión que llega hasta unos diez mil kilómetros de altura sobre la Tierra, en la que el posicionamiento es siempre simple. Más allá, el fenómeno de la bifurcación es una realidad.
- Hay muchas direcciones para las que, dentro de la E-esfera, todos los puntos son de posicionamiento simple; es como si la región central de posicionamiento simple se prolongara a lo largo de estas direcciones hasta el borde de la E-esfera; por tanto, hay como brazos de posicionamiento simple que parten de la región central donde no hay bifurcación.
- En caso de bifurcación, hemos discutido la posibilidad de que el usuario utilice un reloj para seleccionar la verdadera posición (fácilmente aplicable si el usuario está en una nave espacial). Si las dos posibles posiciones están suficientemente lejos, el método del reloj funciona, pero las cosas se complican cuando las posiciones son demasiado próximas, lo que se espera que ocurra pocas veces dada la precisión alcanzada por los relojes actuales. Hay un método para resolver este problema: consiste en elegir una nueva 4-tupla de satélites adecuada, que conduzca a posicionamiento simple en la zona donde la 4-tupla inicial daba bifurcación con posiciones demasiado próximas.

- Los satélites GPS y GALILEO están fuera de la región central y entran y salen de lo que hemos llamado brazos de posicionamiento simple; por eso, cuando tratamos de hallar la posición de un satélite GPS con cuatro de GALILEO o viceversa, nos encontramos con tramos de posicionamiento simple y de bifurcación sobre la trayectoria del satélite que hace el papel de usuario. En las figuras 2.15–2.23 se ha implementado un método especial para visualizar estos tramos.
- La distribución de U-errores ha sido analizada. Estos errores son muy grandes en los alrededores de los puntos donde el Jacobiano  $J$  se anula, y considerablemente grandes cerca del borde de la E-esfera; de hecho, los U-errores son grandes para valores suficientemente pequeños de  $J$ . Incluso en las direcciones que no contienen anulaciones de  $J$ , el Jacobiano decrece conforme nos vamos separando de la zona de los satélites y el posicionamiento se va haciendo menos preciso. Hasta unos veinte mil kilómetros de altura sobre la Tierra, no hay puntos con Jacobiano nulo y los U-errores se mantienen pequeños; por tanto el posicionamiento de satélites que navegan en esta zona (con 4-tuplas de emisores GALILEO) es viable.
- Uno de nuestros principales resultados ha sido demostrar que el valor del Jacobiano es proporcional al volumen de un cierto tetraedro, cuyos vértices son los cuatro extremos de los vectores unitarios usuario-satélite. Esto implica que, si el usuario tiene aparatos –para medir ángulos– que permiten obtener las direcciones de los cuatro vectores usuario-satélite, puede calcular el valor de  $J$  en su posición, y también que, si cambiamos la 4-tupla de satélites, el valor de  $J$  en la posición de un usuario dado cambia. El usuario puede así evitar el uso de 4-tuplas de satélites que conduzcan a valores demasiado pequeños de  $J$  (grandes U-errores), y elegir, sobre la marcha, las 4-tuplas de satélites visibles que correspondan a valores suficientemente grandes de  $J$  (U-errores aceptables).
- El ángulo  $\alpha_1 - \alpha_4$  también puede ser calculado a partir de los cuatro vectores usuario-satélite que nos permiten obtener  $J$ ; dicho de otra forma, las medidas de ángulos nos permiten calcular tanto  $J$  como  $\alpha_1 - \alpha_4$ ; por tanto, un usuario capaz de medir ángulos, puede elegir la 4-tupla de satélites visibles que corresponda a los mayores valores de  $|J|$  y  $|\alpha_1 - \alpha_4|$ ; de esta forma, los U-errores serán pequeños. Además, como se explicó en la sección 1.9, la orientación de los satélites 1, 2 y 3, más el signo de  $\alpha_1 - \alpha_4$  nos permiten elegir la verdadera posición del usuario en caso de bifurcación.
- La distribución de S-errores ha sido también analizada comparando los posicionamientos obtenidos con O(0)-SPR y O(1)-SPR; estos errores se calculan en los mismos puntos que los U-errores –dentro de la E-esfera– para hacer posible su comparación. Hemos demostrado que los S-errores divergen en los mismos puntos que los U-errores; es decir, en los puntos de anulación de  $J$ . Por tanto, si eligiendo la 4-tupla de emisores, nos mantenemos siempre lejos de estos puntos, evitaremos U-errores y S-errores desproporcionados al mismo tiempo.
- Como hemos detallado en el Capítulo 4, los S-errores son menores que los U-errores calculados con una amplitud  $\Delta r \simeq 10 \text{ m}$ . Ello ocurre en todo punto

de la E-esfera que no esté demasiado cerca de puntos de Jacobiano nulo. Los S-errores sólo alcanzan valores inferiores a un 5% del valor de los correspondientes U-errores (ver la sección 4.6.6 para más detalles). Si necesitamos una precisión en el posicionamiento que nos permita despreciar S-errores como estos, podemos utilizar O(0)-SPR; en caso contrario, debemos usar por lo menos O(1)-SPR; sin embargo, la inclusión de los términos perturbativos de la métrica de Schwarzschild (términos llamadas  $\zeta_{\alpha\beta}$ ), a la hora de estudiar la propagación de los fotones, sólo sería necesaria para hallar la posición del usuario con precisiones inusitadas.

- Finalmente, hemos estimado el ahorro en tiempo de cálculo debido a usar O(0)-SPR en vez de O(1)-SPR. Para eso, hemos obtenido los tiempos que tardan ciertos códigos para calcular las coordenadas  $x^\alpha$  (outputs), partiendo de las coordenadas de emisión (inputs); naturalmente, se han utilizado dos códigos, uno basado en O(0)-SPR y el otro en O(1)-SPR. Ambos son códigos secuenciales que usan múltiple precisión. El procesador es un Intel(R) Xeon(R) CPU E7-4820 (64 bits) at 2 GHz. Trabajando con 32-40 dígitos, los tiempos resultantes son  $\sim 1 - 2 \text{ ms}$  para O(0)-SPR, y  $\sim 20 \text{ ms}$  para O(1)-SPR; por tanto, el uso de O(0)-SPR –con la solución exacta de [Coll 2010a]– conduce a un considerable ahorro de tiempo de CPU. Sin embargo, el código basado en O(1)-SPR tampoco es demasiado lento y puede ser usado, en particular, si diseñamos un código paralelo optimizado que corra en ordenadores modernos. Lo mismo sería de esperar en el caso de SPR de orden superior, que se basen en los mismos métodos, pero que utilicen métricas, líneas nominales y funciones de transferencia de tiempo más complicadas.

Esta lista de logros sugiere algunos problemas abiertos interesantes. Vamos a acabar esta Tesis describiendo varios de ellos:

- Hay que incluir todos los efectos gravitatorios (multipolos de la distribución de masa de la Tierra etc.) mediante términos de tipo  $\zeta_{\alpha\beta}$ .
- Después de esto, habría que estudiar a fondo: (1) la elección de las líneas nominales de los satélites, (2) la amplitud de las desviaciones de las líneas reales con respecto a las nominales, y (3) la descripción estadística de estas desviaciones, las cuales sólo dependerían de acciones no gravitatorias (presión de radiación etc.). Así se obtendría una nueva distribución de U-errores dentro de la E-esfera.
- En el mismo caso y en los mismos puntos –dentro de la E-esfera– se debería estimar el efecto de los términos  $\zeta_{\alpha\beta}$  en la propagación de los fotones; aunque ya sepamos que es despreciable para las precisiones que son usuales en problemas de posicionamiento.
- Después, hay que diseñar un modelo de navegación espacial autónoma, para satélites que deben llevar detectores de ondas electromagnéticas –para leer las coordenadas de emisión– y aparatos para medir ángulos con precisión suficiente. Así, con medidas realizadas a bordo (autonomía), el usuario podría elegir

4-tuplas de satélites de GNSS apropiadas, para evitar grandes errores de posicionamiento por proximidad a puntos de Jacobiano nulo. Hay que simular muchos viajes espaciales, dentro de la E-esfera, para ver si en cada punto de la línea de universo –del satélite que navega– es posible hallar 4-tuplas apropiadas.

- Finalmente, podemos considerar un sistema de navegación espacial que sea operativo más allá de la E-esfera; útil para viajes a la Luna y a planetas no demasiado lejanos. En este sistema, todos los emisores no estarían ubicados en satélites de GNSS como GALILEO o GPS, sino que algunos estarían distribuidos apropiadamente en el Sistema Solar. Podemos pensar en emisores a bordo de satélites artificiales de la Tierra con órbitas mucho más extensas que las de la constelación de GALILEO, en emisores situados en el interior de naves espaciales que orbitan el Sol, o en emisores colocados en la Luna, en otros planetas, o en órbitas alrededor de estos cuerpos. Por supuesto habría que buscar la distribución de emisores más apropiada, para garantizar que cualquier satélite moviéndose dentro de una esfera de grandes dimensiones centrada en la Tierra, y equipado con aparatos para medir ángulos y captar las señales codificadas de los emisores, puede hallar una 4-tupla de emisores adecuada para posicionarse sin grandes errores; es decir, permaneciendo siempre suficientemente lejos de puntos de Jacobiano nulo.

# Bibliografía

- [Abel 1991] J.S. Abel and J.W. Chaffee. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 27, page 952, 1991. (Cited on pages 2, 11 and 12.)
- [Ashby 2003] N. Ashby. *Relativity in the Global Positioning System*. Living Rev. Relativity, vol. 6, no. 1, 2003. (Cited on page 9.)
- [Bahder 2001] T.B. Bahder. Am. J. Phys., vol. 69, page 315, 2001. (Cited on pages 2, 6, 18 and 144.)
- [Bahder 2003] T.B. Bahder. Phys. Rev. D, vol. 68, no. 063005, 2003. (Cited on pages 2 and 6.)
- [Bancroft 1985] S. Bancroft. J.S. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 21, page 56, 1985. (Cited on page 2.)
- [Bennett 2013] C.L. Bennett and 20 coauthors. Astrophys. J. Suppl. Ser., vol. 208, page 54, 2013. (Cited on page 20.)
- [Bini 2008] D. Bini, A. Geralico, M.L. Ruggiero and A. Tartaglia. Class. Quantum Grav., vol. 25, no. 205011, 2008. (Cited on pages 16, 26 and 144.)
- [Blagojevic 2002] M. Blagojevic, J. Garecki, F.W. Hehl and Y.N. Obukhov. Phys. Rev. D, vol. 65, no. 044018, 2002. (Cited on pages 2 and 4.)
- [Bunandar 2011] D. Bunandar, S.A. Caveny and R.A. Matzner. Phys. Rev. D, vol. 84, no. 104005, 2011. (Cited on pages 6, 16 and 26.)
- [Chaffee 1994] J.W. Chaffee and J.S. Abel. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 30, no. 1021, 1994. (Cited on pages 2, 11 and 12.)
- [Coll 2001] B. Coll. *Elements for a theory of relativistic coordinates systems. Formal and physical aspects*. In Proceedings of the Twenty-third Spanish Relativity Meeting ERE-2000, page 53. Reference Frames and Gravitomagnetism, Pascual-Sánchez et al.,(Eds.), World Scientific, Singapore, 2001. (Cited on pages 2, 4 and 6.)
- [Coll 2003] B. Coll. *A principal positioning system for the Earth*. In Proceedings Journées 2002 Systèmes de Référence Spatio-Temporels, page 34. Capitaine, N. and Stavinschi, M.M., (Eds.), Observatoire de Paris, 2003. (Cited on pages 2 and 6.)
- [Coll 2006a] B. Coll, J.J Ferrando and J.A. Morales. Phys. Rev. D, vol. 73, no. 084017, 2006. (Cited on page 6.)
- [Coll 2006b] B. Coll, J.J. Ferrando and J.A. Morales. Phys. Rev. D, vol. 74, no. 104003, 2006. (Cited on pages 6 and 53.)

- [Coll 2006c] B. Coll and J.M. Pozo. *Class. Quantum Grav.*, vol. 23, page 7395, 2006. (Cited on pages 2, 6 and 53.)
- [Coll 2009] B. Coll and A. Tarantola. arXiv:0905.4121[gr-qc], 2009. (Cited on page 6.)
- [Coll 2010a] B. Coll, J.J. Ferrando and J.A. Morales-Lladosa. *Class. Quantum Grav.*, vol. 27, no. 065013, 2010. (Cited on pages 2, 5, 6, 7, 8, 10, 18, 19, 29, 34, 65, 72, 144, 154, 193 and 199.)
- [Coll 2010b] B. Coll, J.J. Ferrando and J.A. Morales-Lladosa. *Phys. Rev. D*, vol. 82, no. 084038, 2010. (Cited on pages 6 and 53.)
- [Coll 2011a] B. Coll, J.J. Ferrando and J.A. Morales-Lladosa. *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 314, no. 012105, 2011. (Cited on page 6.)
- [Coll 2011b] B. Coll, J.J. Ferrando and J.A. Morales-Lladosa. *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 314, no. 012106, 2011. (Cited on page 11.)
- [Coll 2012] B. Coll, J.J. Ferrando and J.A. Morales-Lladosa. *Phys. Rev.*, vol. D86, no. 084036, 2012. (Cited on pages 6, 7, 11, 12, 13, 34, 44, 71, 86 and 155.)
- [Delva 2009] P. Delva and J.T. Olympio. *Mapping the spacetime metric with GNSS: a preliminary study*. In Proceedings of the 2nd International Colloquium - Scientific and Fundamental Aspects of the Galileo Programme. The Advanced Concepts Team, European Space Agency, 2009. (Cited on pages 16 and 19.)
- [Delva 2011a] P. Delva, U. Kostić and A. Čadež. *Adv. Space Res.*, vol. 47, page 370, 2011. (Cited on pages 16, 26, 144 and 154.)
- [Delva 2011b] P. Delva, A. Čadež, U. Kostić and S. Carloni. arXiv:1106.3168 [gr-qc], 2011. (Cited on pages 6 and 16.)
- [Deng 2013] X.P. Deng, G. Hobbs, X.P. You, M.T. Li, M.J. Keith, R.M. Shannon, W. Coles, R.N. Manchester, J.H. Zheng, X.Z. Yu, D. Gao, X. Wu and D. Chen. *Advances in Space Research*, vol. 52, page 1602, 2013. (Cited on pages 17 and 139.)
- [Gomboc 2013] A. Gomboc, U. Kostić, M. Horvart, S. Carloni and P. Delva. *Relativistic Positioning System and Gravitational Perturbations*. In Relativistic Positioning Systems and their Scientific Applications, pages 79–85. Acta Futura, 2013. (Cited on page 2.)
- [Górski 1999] K.M. Górski, E. Hivon and B.D. Wandelt. *Analysis Issues for Large CMB Data Sets*. In Proceedings of the MPA/ESO Conference on Evolution of Large Scale Structure, pages 37–42. Banday, A.J., Sheth R.K. & Da Costa L. (Eds.), Printpartners Ipskamp Enschede, 1999. (Cited on pages 20 and 160.)
- [Grafarend 1996] E.W. Grafarend and J. Shan. *A closed-form solution of the nonlinear pseudo-ranging equations (GPS)*. In Artificial satellites, Planetary geodesy No 28 Special Issue on the XXX-th Anniversary of the Department of



- Planetary Geodesy, volume 31, page 133. Polish Academy of Sciences, Space Research Centre, Warszawa, 1996. (Cited on pages 11 and 12.)
- [Haustein 2009] M. Haustein. Chemnitz University of Technology, 2009. (Cited on page 3.)
- [Juang 2009] J.C. Juang and Y.F. Tsai. GPS Solutions, vol. 13, page 57, 2009. (Cited on page 2.)
- [Krause 1987] L.O. Krause. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 23, page 225, 1987. (Cited on page 2.)
- [Langley 1999] R.B. Langley. *Dilution of Precision*. GPS World, vol. 10, no. 5, pages 52–59, 1999. (Cited on pages 16 and 85.)
- [Lorimer 2001] D.R. Lorimer. Living Rev. Relativity, vol. 4, page 5, 2001. (Cited on page 6.)
- [Miguel 2007] A. San Miguel. Gen. Relativ. Gravit., vol. 39, page 2025, 2007. (Cited on page 144.)
- [Misner 1973] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, NY, 1973. (Cited on page 156.)
- [Pâris 2014] I. Pâris and 49 coauthors. Astronomy & Astrophysics, vol. 563, no. A54, 2014. (Cited on page 6.)
- [Pascual-Sánchez 2007] J.F. Pascual-Sánchez. Ann. Phys., vol. 16, page 258, 2007. (Cited on page 9.)
- [Pozo 2005] J.M. Pozo. *Constructions in 3D (II): Learning from particular cases*. In Lecture delivered at the School on Relativistic Coordinates, Reference and Positioning Systems, Salamanca, 2005. (Cited on pages 7, 46, 49, 50 and 72.)
- [Pozo 2006] J.M. Pozo and B. Coll. *Some properties of emission coordinates*. In Proceedings of the Journées Systèmes de Référence Spatio-Temporels 2005, volume arXiv:gr-qc/0601125, page 286. Brzezinski, A., Capitaine, N. & Kolaczek, B. (Eds.), Space Research Centre PAS, Warsaw, 2006. (Cited on page 86.)
- [Press 1999] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling. In Numerical recipes in fortran 77: the art of scientific computing. Cambridge University Press, NY, 1999. (Cited on pages 14 and 148.)
- [Puchades 2011] N. Puchades and D. Sáez. J. Phys.: Conf. Ser., vol. 314, no. 0121107, 2011. (Cited on pages 16, 17 and 155.)
- [Puchades 2012] N. Puchades and D. Sáez. Astrophys. Space Sci., vol. 341, page 631, 2012. (Cited on pages 7, 20, 39, 144, 155 and 193.)
- [Puchades 2014] N. Puchades and D. Sáez. Astrophys. Space Sci., vol. 352, page 307, 2014. (Cited on pages 20, 70, 75, 105, 109, 144, 155, 158, 159, 184, 188 and 193.)

- [Puchades 2015] N. Puchades and D. Sáez. *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 600, no. 012054, 2015. (Cited on page 144.)
- [Rovelli 2002] C. Rovelli. *Phys. Rev. D*, vol. 65, no. 044017, 2002. (Cited on pages 2, 4 and 6.)
- [Ruggiero 2008] M.L. Ruggiero and A. Tartaglia. *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 17, page 311, 2008. (Cited on page 16.)
- [Ruggiero 2011] M.L. Ruggiero, E. Capolongo and A. Tartaglia. *Int. J. Mod. Phys.*, vol. D20, pages 1025–1038, 2011. (Cited on page 6.)
- [Ruse 1932] H.S. Ruse. *On the Definition of Spatial Distance in General Relativity*. volume 52, pages 183–194. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, 1932. (Cited on page 18.)
- [Ruse 1933] H.S. Ruse. *On the Measurement of Spatial Distance in a Curved Space-time*. volume 53, pages 79–88. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, 1933. (Cited on page 18.)
- [Sáez 2013] D. Sáez and N. Puchades. *Acta Futura*, vol. 7, page 103, 2013. (Cited on pages 16, 17, 20, 144, 155 and 193.)
- [Sáez 2014] D. Sáez and N. Puchades. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 80, page 391, 2014. (Cited on pages 16 and 17.)
- [Schmidt 1972] R.O. Schmidt. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 8, page 821, 1972. (Cited on pages 2, 11 and 12.)
- [Sheikh 2005] S.I. Sheikh and D.J. Pines. *Recursive Estimation of Spacecraft Position Using X-ray Pulsar Time of Arrival Measurements*. In *Proceedings of the 61st Annual Meeting of The Institute of Navigation*, pages 464–475. Cambridge, MA, 2005. (Cited on page 6.)
- [Sheikh 2006a] S.I. Sheikh and D.J. Pines. *Navigation Journal of the Institute of Navigation*, vol. 53, page 149, 2006. (Cited on page 6.)
- [Sheikh 2006b] S.I. Sheikh, D.J. Pines, K.S. Wood, P.S. Ray, M.N. Lovellette and M.T. Wolff. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 29, pages 49–63, 2006. (Cited on page 6.)
- [Strang 1997] G. Strang and K. Borre. In *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1997. (Cited on page 2.)
- [Synge 1931] J.L. Synge. *A Characteristic Function in Riemannian Space and its Application to the Solution of geodesic triangles*. In *Proc. London Math. Soc.*, volume 32, pages 241–258, 1931. (Cited on pages 18 and 144.)
- [Synge 1960] J.L. Synge. In *Relativity: General Theory*, page 47. North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1960. (Cited on page 18.)
- [Tarantola 2009] A. Tarantola, L. Klimes, J.M. Pozo and B. Coll. *Relativistic Coordinates, Reference and Positioning Systems*. In *Gravimetry, relativity and the global navigation satellite systems*, lesson delivered at the school, Salamanca. arXiv:0905.3798[gr-qc], 2009. (Cited on pages 2 and 53.)

- [Tartaglia 2011] A. Tartaglia, M.L. Ruggiero and E. Capolongo. *Advances in Space Research*, vol. 47, page 645, 2011. (Cited on page 6.)
- [Tartaglia 2012] A. Tartaglia. arXiv:1212.0429 [gr-qc], 2012. (Cited on page 6.)
- [Teyssandier 2008] P. Teyssandier and C. Le Poncin-Lafitte. *Class. Quantum Grav.*, vol. 25, no. 145020, 2008. (Cited on pages 16, 19, 26, 144, 155 and 193.)
- [Thomas 2005] F. Thomas and LL. Ros. *IEEE Transactions on Robotics-TRob*, vol. 21, no. 1, page 93, 2005. (Cited on page 3.)
- [Čadež 2005] A. Čadež and U. Kostić. *Phys. Rev. D*, vol. 72, no. 104024, 2005. (Cited on pages 16, 19, 26 and 144.)
- [Čadež 2010] A. Čadež, U. Kostić and P. Delva. *Mapping the spacetime metric with a global navigation satellite system*. In final Ariadna report 09/1301. advanced concepts team, European Space Agency, 2010. (Cited on pages 16, 18, 19, 26 and 144.)
- [Weinberg 1972] S. Weinberg. In *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pages 185–187. John Wiley and Sons, New York, 1972. (Cited on page 145.)



