Educación

Sección a cargo de

María José González López

Ambigüedad y polisemia del signo radical: un problema matemático y didáctico

por

Bernardo Gómez

Resumen. La ambigüedad de la raíz cuadrada y la polisemia del signo radical plantean un problema con raíces históricas. Como problema matemático ha sido resuelto, pero no como problema didáctico, ya que presenta sutilezas conceptuales y operatorias cuya omisión en la enseñanza es a menudo causa de malentendidos y conflictos fuertemente arraigados. En este artículo se aborda este problema en su dimensión matemática desde una perspectiva histórico-epistemológica. Esta perspectiva permite sustentar una reflexión didáctica.

1. Introducción

La investigación en didáctica de las matemáticas ha puesto de manifiesto que algunos de los aspectos que hacen difícil para los estudiantes la transición de la aritmética al álgebra son la manera diferente en que los mismos símbolos se usan en aritmética y álgebra, el cambio de significado de esos símbolos, y la aceptación de expresiones sin clausura como representación de las operaciones y del resultado de las mismas ([18, 19]).

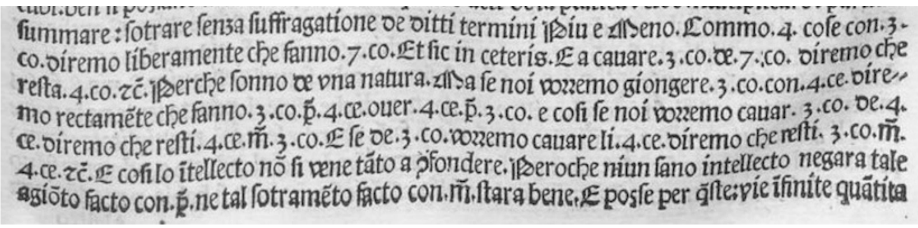
El signo radical es un ejemplo de signo compartido entre la aritmética y el álgebra. Los aspectos antes mencionados determinan una concepción tradicional del signo radical que plantea un doble problema matemático y didáctico.

El problema matemático tiene que ver con la sutileza de los requisitos formales de la definición de operación y de exponente racional en $\mathbb{R}$; mientras que el problema didáctico está ligado a los conflictos cognitivos y malentendidos que la aplicación del signo radical produce en los estudiantes, en los profesores e incluso en los manuales y libros de texto. Ejemplos de estos conflictos y malentendidos han sido puestos de manifiesto en investigaciones precedentes. Algunos de ellos son: la opinión generalizada de que $\sqrt{25} = \pm 5$ y a la vez $\sqrt{x^2} = x$ ([26]); la identificación entre raíz y radical, y la creencia de que la raíz cuadrada y elevar al cuadrado son operaciones inversas ([15]); la regla para resolver la ecuación $x^2 = a$ por la que el doble signo $\pm$ solo incumbe a la raíz del término a de la derecha y no a la raíz del término x^2 de la izquierda ([14]); la confusión con la regla para simplificar radicales como $\sqrt[6]{3^2} \neq \sqrt[3]{3}$ porque el radical de la izquierda tiene dos raíces por ser su índice par, mientras que el radical de la derecha tiene una sola raíz por ser su índice impar ([3]); la asunción de que $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ ([11, 12, 29]); o la confusión acerca de cómo multiplicar números imaginarios por la creencia de que la regla del producto $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ es válida tanto si a y b son positivos como negativos y por tanto que $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = -6 \neq \sqrt{(-4) \times (-9)} = 6$ ([22]).

A continuación se rastrea en los orígenes de la concepción tradicional del signo radical para dar cuenta de su naturaleza dual, ambigua y polisémica. Después se identifican algunos de los conflictos cognitivos que manifiestan tres de los más influyentes matemáticos de la primera mitad del siglo XIX, en relación con esta concepción para situar el problema didáctico. Finalmente se aborda el problema matemático y su solución desde el punto de vista de las matemáticas actuales.

2. Sobre la introducción histórica de los signos de las operaciones

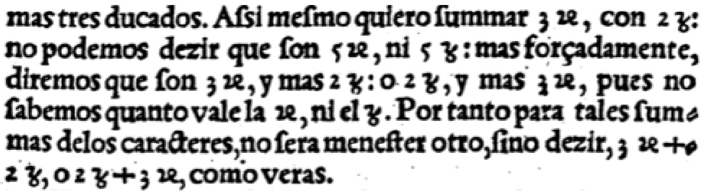
En los textos primitivos de álgebra, para expresar las operaciones calculables se usaban palabras de la lengua vernácula, mientras que cuando no eran calculables, se usaban símbolos. Un ejemplo de esta doble representación se encuentra en *La Summa* de Luca Pacioli (1445–1517, también conocido como Luca di Borgo), donde aparecen las expresiones vernáculas «con» y «de» en el caso calculable, y las expresiones p y m en el caso no calculable (ver figura 1; recuérdese que *co* es la abreviatura de cosa y *ce* de censo, nombres de x y x^2, respectivamente).


summare: sotrare senza suffragatione de ditti termini Piu e Meno. Commo.4. cose con.3.
co. diremo liberamente che fanno.7.co. Et sic in ceteris. E a cavare.3.co.de.7.co. diremo che
resta.4.co.zc. Perche sonno de vna natura. Ma se noi voremo giongere.3.co.con.4.ce. dire
mo rectamēte che fanno.3.co.p̃.4.ce.ouer.4.ce.p̃.3.co. e cosi se noi voremo cavar.3.co.de.4.
ce. diremo che resti.4.ce.m̃.3.co. E se de.3.co. voremo cavare li.4.ce. diremo che resti.3.co.m̃.
4.ce.zc. E cosi lo itellecto nõ si vene tãto a ɔfondere. Peroche niun sano intellecto negara tale
agiõto facto con.p̃.ne tal sotramẽto facto con.m̃.stara bene. E posse per qste vie ifinite quãtita

«$4co$ con $3co$ diremos que hacen $7co$, y [...] $3co$ de $7co$ diremos que restan $4co$, porque son de la misma naturaleza. Pero si queremos conocer $3co$ con $4ce$, diremos que son $3co$ p $4ce$ o $4ce$ p $3co$ [...]»

Figura 1: Uso de la doble representación vernácula y simbólica en Pacioli ([9], Distinctio octava, Tractatus Primus, fo. 112).

Más o menos por esta misma época, los algebristas alemanes usaban los signos $+$ y $-$ en vez de p y m con el mismo fin. Ejemplo de ello es el texto de 1552 del hispano-alemán Marc Aurel [2] (ver figura 2), que es considerado el primer libro de álgebra impreso en España.


mas tres ducados. Aſsi meſmo quiero ſummar 3 ꝝ, con 2 ȥ: no podemos dezir que ſon 5 ꝝ, ni 5 ȥ: mas forçadamente, diremos que ſon 3 ꝝ, y mas 2 ȥ: o 2 ȥ, y mas 3 ꝝ, pues no ſabemos quanto vale la ꝝ, ni el ȥ. Por tanto para tales ſum- mas delos caracteres, no ſera meneſter otro, ſino dezir, 3 ꝝ + 2 ȥ, o 2 ȥ + 3 ꝝ, como veras.

«Así mesmo quiero sumar $3x$ con $2x^2$, no podemos decir que son $5x$ ni $5x^2$: mas forzadamente diremos que son $3x$, y mas $2x^2$, o $2x^2$, y mas $3x$, pues no sabemos quanto vale la x ni el x^2. Por tanto para tales sumas de los caracteres, no será menester otro, sino decir, $3x + 2x^2$, o $2x + 3x^2$, como veras.»

(Nótese que los símbolos que usa Aurel son los de los *cosistas* alemanes, no son la x y la y que usamos actualmente, sino que son símbolos de abreviación de la cosa y el censo, hoy diríamos de x y x^2.)

Figura 2: Primeros usos de los signos $+$ y $-$ ([2], Libro VII, capítulo III, fo. 71).

En el mismo texto, Aurel usa el signo radical, siguiendo a los «cosistas» alemanes (i. e. [28], p. 109), para denominar de modo abreviado la operación raíz cuadrada de un número (ver figura 3). Cuando este número no es cuadrado perfecto, el símbolo ya no expresa la operación raíz cuadrada sino directamente un número irracional (ver figura 4).

Estos textos revelan que, cuando las operaciones eran calculables, los signos de las operaciones no eran necesarios, lo que explica que se retrasara su uso generalizado en la aritmética hasta el siglo XIX ([4], p. 235). En la enseñanza, el recorrido histórico se invierte, los signos de las operaciones se enseñan primero en la aritmética y, cuando los estudiantes ya están familiarizados con ellos, se extienden al álgebra con un significado diferente. De esta manera, la razón de ser algebraica queda en segundo plano y se ve oscurecida o eclipsada por la razón aritmética.

3. Sobre la naturaleza dual de los signos de las operaciones

Los ejemplos anteriores apuntan a una dualidad inherente a los signos de las operaciones, que puede ser interpretada a la luz de diferentes teorías: proceso/producto ([17, 7]), proceso/concepto ([16]), o proceso/objeto ([27]). Bajo estas teorías, lo que se da a entender es que cuando las operaciones no son calculables, como cuando se

Declaracion de algunos characteres, que para las rayzes ſeran neceſſarios.

Para tratar de tales numeros, y otros ſemejantes, ſeria coſa larga, y no galana, poner los tales nõbres a la larga: mas deſſeando huyr eſto, y euitar toda prolixidad, procure poner aqui algunos, que para en eſta arte eran neceſſarios. Y ſon √. √√. √√√. √v. √√v. √√√v. +. −. Delos quales el p°, ſignifica, y quiere dezir rayz quadrada: el 2°, rayz quadrada de rayz quadrada, o rayz de rayz: el 3°, rayz cubica: el 4°, rayz vniuerſal: el 5°, rayz de rayz vniuerſal: el 6°, rayz cubica vniuerſal: el 7°, mas: y el 8°, menos. Exẽplo, √4, quiere dezir rayz quadrada de 4, que es 2. √5, quiere dezir rayz de 5. &c. √√20 + √√√7, quiere dezir, rayz de rayz de 20, y mas rayz cubica de 7. √v. 8 − √3, quiere dezir, rayz quadrada de todo eſto: q̃ es 8 − √3. Digo rayz vniuerſal de 8 menos rayz de 3, q̃ es √ del reſiduo &c. Eſto me ha pareſcido bueno, tome cada vno los q̃ querra, o eſcriualos a la larga, todo a ſu plazer: que por eſto no pierde ni gana la ſciencia, o arte.

«Declaración de algunos caracteres, que para las rayces serán necesarios. Para tratar de tales números, y otros semejantes, sería cosa larga, y no galana, poner los tales nombres a la larga: mas deseando huyr esto y evitar toda prolixidad, procure poner aquí algunos que para en esta arte eran necesarios. Y son $\sqrt{\ }$ [. . .]. De los quales, el primero significa y quiere decir rayz cuadrada [. . .]. Exemplo, $\sqrt{4}$ quiere decir rayz cuadrada de 4, que es 2.»

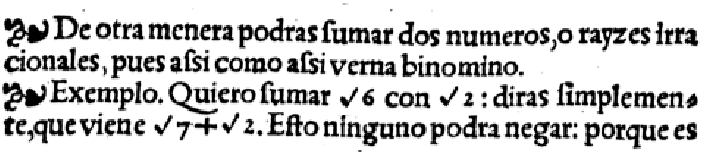
Figura 3: Uso del signo radical para denominar a la operación raíz cuadrada ([2], Libro VII, capítulo III, fo. 43).

opera en álgebra con letras, los signos de las operaciones se usan para representar objetos matemáticos que son resultados de operaciones. Así ocurre, por ejemplo, cuando se escribe que la suma de a y b es $a+b$. Por contra, cuando las operaciones son calculables, los signos de las operaciones se usan para representar procesos que son operaciones. Así ocurre, por ejemplo, cuando se escribe que la suma de $2+4$ es 6.

En el caso de la raíz cuadrada, cuando el signo radical acompaña a un número que es cuadrado perfecto, como en $\sqrt{4}$, indica de un modo abreviado la quinta operación de la aritmética sobre ese número; pero cuando acompaña a una letra, como en $\sqrt{a}$, indica el resultado de esa operación.

Como se verá a continuación, esta dualidad del signo radical da lugar a un fenómeno de ambigüedad y polisemia[1], que se puede rastrear a través de las cogniciones

[1]Según la RAE, *ambigüedad* es lo que puede entenderse de varios modos o admitir distintas


De otra menera podras ſumar dos numeros,o rayzes irra
cionales, pues aſsi como aſsi verna binomino.
Exemplo. Quiero ſumar √6 con √2 : diras ſimplemen
te,que viene √7+√2. Eſto ninguno podra negar: porque es

«Otra manera de sumar irracionales. De otra manera podrás sumar dos números o rayzes irracionales, pues así como así vendrá binomio. Exemplo. Quiero sumar $\sqrt{6}$ con $\sqrt{2}$: dirás simplemente, que viene $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Esto ninguno podrá negar [...]»

Figura 4: Uso del signo radical cuando el número no es cuadrado perfecto ([2], Libro VII, capítulo III, fo. 44).

petrificadas ([25]) de los matemáticos más influyentes:

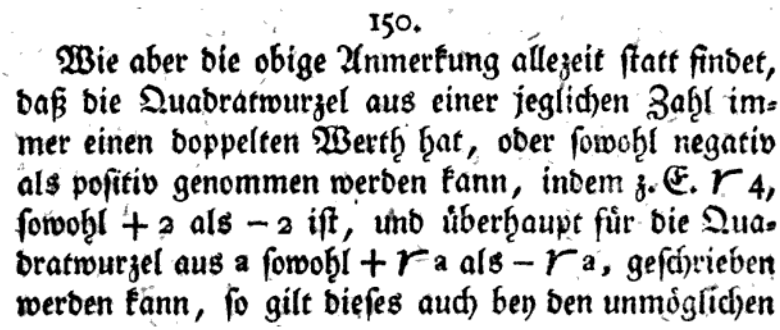
> *Petrificadas porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más de lo que ya está en ellos. Cogniciones porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara como su autor* ([25], p. 113).

4. Ambigüedad y polisemia del signo radical en Euler

En un texto histórico tan influyente como «el álgebra» de Euler (1707–1783), publicado por primera vez en 1770 bajo el título de *Vollständige Anleitung zur Algebra* [10] (*Instrucción completa de Álgebra*) se observa que la dualidad proceso/producto del signo radical involucra un doble fenómeno de ambigüedad y de polisemia (figura 5):

- el signo radical aplicado a 4 es ambiguo, al no tener un solo valor, sino dos: $\sqrt{4}$ es $+2$ y -2;
- el signo radical es polisémico al cambiar su significado según se aplique a un número cuadrado perfecto o a una letra: aplicado a 4 representa un conjunto de dos valores y aplicado a la letra a representa un valor absoluto.

interpretaciones y dar, por consiguiente, motivo a dudas, incertidumbre o confusión; *polisemia* es la pluralidad de significados de una palabra o de cualquier signo lingüístico.



150.

Wie aber die obige Anmerkung allezeit statt findet, daß die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder sowohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\surd 4$, sowohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a sowohl $+\surd a$ als $-\surd a$, geschrieben werden kann, so gilt dieses auch bey den unmöglichen

«La raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que $\sqrt{4}$, por ejemplo, es igualmente $+2$ y -2, y en general, se puede adoptar tanto $-\sqrt{a}$ como $+\sqrt{a}$ para la raíz cuadrada de a.»

Figura 5: Manifestación de la ambigüedad y la polisemia del signo radical en Euler ([10], vol. I, p. 62).

5. Conflictos históricos con el signo radical: Peacock y Lacroix

La ambigüedad y polisemia del signo radical va a ser fuente de conflictos conceptuales para algunos de los más influyentes matemáticos de la primera mitad del siglo XIX, momento en que se están desarrollando las bases de las matemáticas actuales.

George Peacock (1791–1858) reconocerá la ambigüedad del signo radical, que identifica con la operación raíz cuadrada. Lo manifiesta en su *Álgebra Simbólica*[2] (ver figura 6).

Ante esta ambigüedad, tras exponer la identidad entre el exponente racional y la radicación escribe que $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = \sqrt{a^2}$, advirtiendo, en una nota a pie de página, que la raíz cuadrada de a^2 es tanto $-a$ como $+a$ (ver figura 7).

Este último párrafo es enigmático porque no nos dice explícitamente qué valor hay que atribuir a $\sqrt{a^2}$, aunque Peacock posteriormente lo aclara, indicando que no es inusual denotar la raíz doble poniéndole como prefijo el doble signo $\pm$, de modo que $\pm a$ significa igualmente $+a$ o $-a$ o ambas (ver figura 8).

De este modo da a entender que $\sqrt{a^2} = \pm a$, al parecer sin percatarse de la incoherencia que supone admitir que $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$, y al mismo tiempo que $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Otro personaje, Augustus De Morgan (1806–1871), no está muy convencido de la conveniencia de utilizar dos formas diferentes de notación simbólica, $\sqrt[n]{a}$ y $a^{\frac{1}{n}}$,

[2]Recordemos que Peacock publicó dos volúmenes, uno dedicado al *Álgebra Aritmética* en 1840 y otro al *Álgebra Simbólica* en 1845.

645. It will follow, from the Rule of Signs, (Art. 569.) that, in Symbolical Algebra, there are always two roots, differing from each other in their sign only, which correspond to the same square: thus a^2 may equally arise from the product $a \times a$ and $-a \times -a$: $(a+b)^2$ may equally arise from the product $(a+b) \times (a+b)$, and $-(a+b) \times -(a+b)$: $(a-b)^2$ may equally arise from the product $(a-b) \times (a-b)$ and $(b-a) \times (b-a)$,* and similarly for all other squares. It follows, therefore, that in passing from the square to the square root, we shall always find *two roots*, which only differ from each other in their sign; but it is the *positive* square root alone which is recognized in Arithmetical Algebra, and which may therefore be called the *arithmetical* root.

646. We have already had occasion to notice these ambiguous square roots in Arithmetical Algebra (Art. 383) in

Figura 6: Ambigüedad del signo radical en Peacock ([24], vol. II, p. 67).

636. What is the meaning of $a^{\frac{1}{2}}$?

The product $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$, (Art. 42) by the "**principle of indices**" (Art. 635): and it likewise appears that $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, where $\sqrt{a}$ denotes the square root of a (Art. 223): we conclude, therefore, that $a^{\frac{1}{2}}$ is identical in meaning with $\sqrt{a}$, inasmuch as when multiplied into itself, it produces the same result*.

It follows, therefore, that

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = \sqrt{a^2}\,^*.$$

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

$$(a^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

* The square root of a^2 may be $-a$ as well as $+a$.

Figura 7: Identidad entre el exponente racional y la radicación en Peacock ([24], vol. II, p. 62 y 64).

> **647. In extracting the square root, we follow, as in all other operations, the same process both in Symbolical and in Arithmetical Algebra, assuming the proper relation of the symbols: and the negative is at once found from the positive root, by merely changing its sign. It is not unusual, likewise, to denote the *double* root by prefixing the *double* sign ± to it: thus $\pm a$ means equally $+a$ or $-a$, one or both: $\pm(a-b)$ means equally $a-b$ and $b-a$: and similarly in other cases.**

Figura 8: Relación entre raíz cuadrada, raíz doble y signo doble en Peacock ([24], vol. II, p. 68).

para expresar lo mismo, por lo que propone que la notación radical se use con el significado aritmético y la notación exponencial se use con el significado algebraico. Así, $\sqrt{4} = 2$ pero $4^{\frac{1}{2}}$ puede ser $+2$ o -2, la que queramos, a menos que se especifique (ver figura 9).

> **Having two symbols to indicate the nth root of a, namely, $\sqrt[n]{a}$ and $a^{\frac{1}{n}}$, we shall employ the first in the simple arithmetical sense, and the second to denote any one of the algebraical roots, that is, any one we please, unless some particular root be specified. Thus $\sqrt{4}$ is 2, without any reference to sign; but $(4)^{\frac{1}{2}}$ may be either $+2$ or -2. Thus $\sqrt[3]{a}$ is the cube root found in arithmetic, while**

Figura 9: Diferenciación entre notación radical y notación exponencial en De Morgan ([8], p. 122 y 123).

Volviendo a Peacock, al intentar explicar que la extracción de la raíz cuadrada de un número q y la solución de la ecuación cuadrática $x^2 = q$ son procesos equivalentes, atribuye al signo radical un doble valor: $x^2 = q \Rightarrow x = \sqrt{q} = \pm a$ (ver figura 10).

En cambio, cuando aborda la resolución de la ecuación de segundo grado, atribuye al signo radical un único valor, el valor absoluto, susceptible del signo más o menos (ver figura 11):

$$x^2 - px - q = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

De todo esto se puede concluir que Peacock transmite la concepción euleriana, asumiendo la ambigüedad de la raíz cuadrada $\sqrt{a^2} = \pm a$, en el sentido de $+a$ o $-a$, pero no ambos a la vez, y asume la polisemia del signo radical al asignar el doble

ON THE GENERAL THEORY AND SOLUTION OF QUADRATIC EQUATIONS.

656. The process of extracting the square root of a number or expression q, is equivalent to the solution of the binomial quadratic equation (Arts. 246 and 377)

$$x^2 = q, \text{ or } x^2 - q = 0.$$

For the value of x, determined from this equation is $\sqrt{q}$ or the square root of q: and this root, as we have already shewn, (Art. 645) possesses two values which differ from each other in their sign only: thus, if a represents one root, $-a$ represents the other:

Figura 10: Atribución de dos valores al signo radical en Peacock ([24], vol. II, p. 77).

658. Let us proceed to determine the solution of the equation

$$x^2 - px - q = 0 \qquad (5),$$

$$\text{or } x^2 - px = q.$$

$$\text{Since } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4},$$

and since $x^2 - px = q$, it follows that

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4},$$

and, therefore, (Art. 645)

$$x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left\{q + \frac{p^2}{4}\right\}},$$

$$\text{and } x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right)}. \qquad (9).$$

Figura 11: Atribución de un único valor al signo radical susceptible del signo más o menos en Peacock ([24], vol. II, p. 78).

signo $\pm$ de modo diferente, antes o después del radical, como se ve en $x = \sqrt{q} = \pm a$ y en $x - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$.

También Sylvestre Lacroix (1765–1843) asume la ambigüedad de la raíz cuadrada y la traslada a la solución de la ecuación de segundo grado. Dice que al considerar las cantidades algebraicamente debe darse el doble signo $\pm$ a la raíz cuadrada de cualquier cantidad. Pero, entonces, se pregunta por el hecho de que la x, en la resolución de la ecuación cuadrática $x^2 = b$, no se vea afectada del doble signo, mientras que b sí, ya que escribimos que $x = \pm\sqrt{b}$, y no $\pm x = \pm\sqrt{b}$. La explicación que da Lacroix de esta sutileza es que, aunque la solución de $x^2 = b$ fuera $\pm x = \pm\sqrt{b}$, no se trataría en realidad de cuatro soluciones ($+x = +\sqrt{b}$, $+x = -\sqrt{b}$, $-x = -\sqrt{b}$, $-x = +\sqrt{b}$) ya que éstas son iguales dos a dos (ver figura 12).

Esta explicación fue dada por válida por una buena parte de la comunidad de matemáticos, alguno de ellos de gran influencia en el ámbito académico español, como es el caso de Juan Cortázar (1809–1873), que la recoge en los términos que se ilustran en la figura 13.

En definitiva, la sutileza de la explicación que da Lacroix ante el conflicto que le provoca la regla general de poner el doble signo a la raíz cuadrada de cualquier cantidad, y por tanto la ambigüedad del signo radical, deja entrever un dilema en relación con el valor de $\sqrt{x^2}$:

- $\sqrt{x^2} = \pm x\,;$
- $\sqrt{x^2} = x.$

6. El problema didáctico: Incoherencias

La mayoría de los estudiantes, profesores, futuros profesores y autores de libros de texto, creen que $\sqrt{4} = \pm 2$ y al mismo tiempo que $\sqrt{x^2} = x$ ([26], [13], [15]), sin darse cuenta de que ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, ya que para $x = 2$, se tendría que

$$\pm 2 = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2.$$

O que

$$+2 = \sqrt{(+2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2.$$

Y si $\sqrt{4} = \pm 2$ fuera cierto, entonces, como se señala en [23], se tendría que

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = (\pm 2) + (\pm 2) = \{+4, 0, -4\}$$

y

$$\sqrt{4} - \sqrt{4} = (\pm 2) - (\pm 2) = \{+4, 0, -4\},$$

y de aquí se podría tener que

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = \sqrt{4} - \sqrt{4}.$$

Otra incoherencia es la que se da cuando se extiende el doble valor de la raíz a los radicales de índice par. Por un lado $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$ son radicales equivalentes; por otro lado, como el índice del radical a la izquierda del signo igual es un número par tiene dos soluciones (una opuesta a la otra); mientras que, como el índice del radical a la derecha del signo igual es impar, solo tiene una solución. ¿Entonces?

On pourrait, d'après cette règle, demander pourquoi, x étant la racine quarré de x^2, on n'affecte pas aussi x du double signe $\pm$? On répondra d'abord, avec M. Develey (*Algèbre d'Emile*, T. II.), que la lettre x ayant été posée simplement sans signe (c'est-à-dire avec le signe $+$), comme le symbole de l'inconnue, c'est dans cet état qu'il en faut déterminer la valeur, et que lorsqu'on cherche un nombre x dont le quarré soit b, par exemple, il n'y a que ces deux solutions possibles: $x=+\sqrt{b}$, $x=-\sqrt{b}$. Ensuite, quand même, en résolvant l'équation $x^2=b$, on écrirait $\pm x=\pm\sqrt{b}$, et qu'on arrangerait ces signes de toutes les manières possibles, savoir:

$$+x=+\sqrt{b},\quad -x=-\sqrt{b},$$
$$+x=-\sqrt{b},\quad -x=+\sqrt{b},$$

on n'obtiendrait rien de plus, puisqu'en changeant le signe des membres de la seconde équation de chaque ligne (57), on retomberait sur la première.

«[...] Se podría, a partir de esta regla, preguntar ¿por qué, siendo x la raíz cuadrada de x^2, no está también afectada del doble signo $\pm$? Se responderá primero, con M. Develey (*Algèbre d'Emile*, T. II), que la letra x que ha sido puesta sin signo (es decir con el signo $+$), como el símbolo de la incógnita, es en este estado que hay que determinar su valor, y que puesto que se busca un número x, cuyo cuadrado es b, por ejemplo, solo hay dos soluciones posibles, $x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. De donde, igualmente, resolviendo la ecuación $x^2 = b$ se escribirá $\pm x = \pm\sqrt{b}$, y que se arreglarán esos signos de todas las formas posibles, a saber:

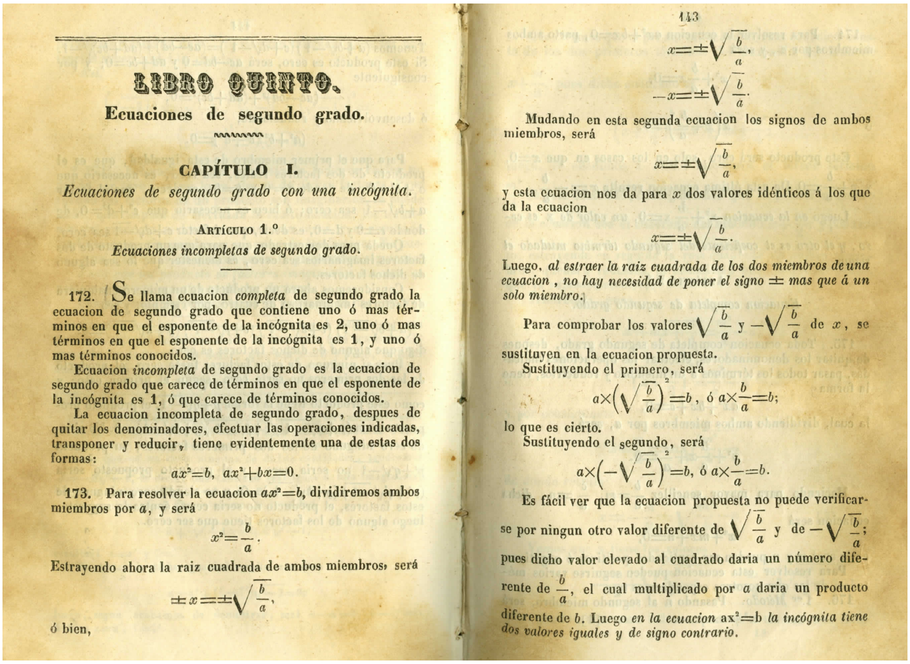
$$+x = +\sqrt{b}, \quad -x = -\sqrt{b},$$
$$-x = -\sqrt{b}, \quad -x = +\sqrt{b},$$

y no obtendríamos nada nuevo, puesto que cambiando el signo de los miembros de la segunda ecuación de cada línea se recae en la primera.»

Figura 12: Equivalencia entre soluciones en Lacroix ([20], p. 154–156).

7. El problema matemático

La restricción del signo radical a un solo valor es necesaria para no violar un requisito necesario para la definición de exponente racional, a^r, $r \in \mathbb{Q}$, y es que éste no debe depender del representante de r elegido para ese número racional.



LIBRO QUINTO.

Ecuaciones de segundo grado.

CAPÍTULO I.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

ARTÍCULO 1.º

Ecuaciones incompletas de segundo grado.

172. Se llama ecuacion *completa* de segundo grado la ecuacion de segundo grado que contiene uno ó mas términos en que el esponente de la incógnita es 2, uno ó mas términos en que el esponente de la incógnita es 1, y uno ó mas términos conocidos.

Ecuacion *incompleta* de segundo grado es la ecuacion de segundo grado que carece de términos en que el esponente de la incógnita es 1, ó que carece de términos conocidos.

La ecuacion incompleta de segundo grado, despues de quitar los denominadores, efectuar las operaciones indicadas, transponer y reducir, tiene evidentemente una de estas dos formas:

$$ax^2=b,\quad ax^2+bx=0.$$

173. Para resolver la ecuacion $ax^2=b$, dividiremos ambos miembros por a, y será

$$x^2=\frac{b}{a}.$$

Estrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembros, será

$$\pm x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

ó bien,

143

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$-x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Mudando en esta segunda ecuacion los signos de ambos miembros, será

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

y esta ecuacion nos da para x dos valores idénticos á los que da la ecuacion

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Luego, *al estraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una ecuacion, no hay necesidad de poner el signo $\pm$ mas que á un solo miembro.*

Para comprobar los valores $\sqrt{\frac{b}{a}}$ y $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ de x, se sustituyen en la ecuacion propuesta.

Sustituyendo el primero, será

$$a\times\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b,\ \text{ó}\ a\times\frac{b}{a}=b;$$

lo que es cierto.

Sustituyendo el segundo, será

$$a\times\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b,\ \text{ó}\ a\times\frac{b}{a}=b.$$

Es fácil ver que la ecuacion propuesta no puede verificarse por ningun otro valor diferente de $\sqrt{\frac{b}{a}}$ y de $-\sqrt{\frac{b}{a}}$; pues dicho valor elevado al cuadrado daria un número diferente de $\frac{b}{a}$, el cual multiplicado por a daria un producto diferente de b. Luego *en la ecuacion* $ax^2=b$ *la incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario.*

«[...] Para resolver la ecuación $ax^2 = b$, dividiremos por a, y será $x^2 = \frac{b}{a}$. Extrayendo ahora la raíz cuadrada de ambos miembros será $\pm x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, o bien $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, $-x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Mudando en esta segunda ecuación los signos de ambos miembros será $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, y esta ecuación nos da para x dos valores idénticos a los que da la ecuación $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Luego, al extraer la raíz cuadrada de los dos miembros de una ecuación, no hay necesidad de poner el signo $\pm$ más que a un solo miembro.»

Figura 13: Explicación de Cortázar ([5], p. 142 y 143) sobre la resolución de la ecuación cuadrática.

Si se aceptara el doble valor del radical de índice par, la propiedad $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ sería falsa, como se ha señalado en el ejemplo $\sqrt[6]{3^2}$ y $\sqrt[3]{3}$. En coherencia con el criterio de asignar un solo valor al radical, actualmente se acepta que $\sqrt{x^2} = |x|$, como puede comprobarse en las siguientes citas:

«Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única. Nota: Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{\frac{1}{2}}$ o por $\sqrt{a}$» ([1], p. 36).

«El símbolo $\sqrt{z}$ para $z \geq 0$ denota aquel número no negativo cuyo cuadrado es z» ([6], p. 38).

«Si A es un número real positivo, la única raíz positiva de $x^n - A = 0$ se escribe $x = \sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$» ([21], p. 164).

De esta manera no se viola el concepto formal de operación, ya que, si no se aplicara esta restricción al radical (un solo valor), la función x^2 considerada en todo el eje X no sería biunívoca. Obviamente, para que la función $x \mapsto x^2$ tenga inversa tiene que confinarse a la semirrecta $x \geq 0$.

8. Conclusiones

La naturaleza dual y, en consecuencia, la polisemia y ambigüedad, de la raíz cuadrada y del signo radical, se sustenta en concepciones que están fuertemente arraigadas. Estas concepciones plantean un dilema que se manifiesta como problema matemático y didáctico.

Desde el punto de vista de las matemáticas, se ha optado por resolver el problema asignando a la expresión $\sqrt{x}$, $x \geq 0$, un solo valor, una de las dos raíces de x, la raíz positiva o raíz principal. Con esta restricción lo correcto es escribir:

$$\sqrt{4} = 2 \ \text{ y no } \ \sqrt{4} = \pm 2.$$

Igualmente,

$$\sqrt{x^2} = |x| \ \text{ y no } \ \sqrt{x^2} = x.$$

Pero en los textos matemáticos no se suelen dar explicaciones del porqué de esta restricción, por lo que, aunque se ha resuelto el problema matemático, no se puede decir lo mismo del problema didáctico, ya que al parecer la enseñanza está tanto o más influida por las cogniciones petrificadas y por las inercias de la tradición que por las definiciones formales de los desarrollos matemáticos actuales.

De hecho, en la práctica usual de enseñanza, al resolver una ecuación, como por ejemplo $(x+3)^2 = 169$ se suele escribir

$$(x+3)^2 = 169 \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{169} \Rightarrow x+3 = \pm 13.$$

En este desarrollo no se hace mención al módulo, de modo que, como señala [26], se refuerza la idea de que $\sqrt{(x+3)^2} = x+3$ y $\sqrt{169} = \pm 13$.

Para evitar reforzar estas creencias equivocadas, se puede proponer que no se omitan pasos en la resolución y se escriba el desarrollo completo. A saber,

$$(x+3)^2 = 169 \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{169} \Rightarrow |x+3| = 13 \Rightarrow x+3 = \pm 13.$$

Estas observaciones apuntan a la necesidad de mejorar la enseñanza de raíces y radicales teniendo en cuenta no solo las exigencias formales de la concepción funcional de las operaciones y sus inversas, o de la definición de exponente racional, sino sobre todo las incoherencias e inconsistencias que hay detrás de las cogniciones petrificadas que la enseñanza tradicional arrastra. Conviene añadir que, en matemáticas, el aprendizaje no debe confiarse exclusivamente a lo que está escrito en los manuales, ya que a menudo arrastran concepciones, como las que se han discutido aquí, que producen confusión, por omisión de información o por la misma información que reproducen.

AGRADECIMIENTOS

Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC, referencia EDU2009-10599 (subprograma EDUC).

REFERENCIAS

[1] T. APÓSTOL, *Calculus*, vol. 1, Reverté, Barcelona, 1990.

[2] M. AUREL, *Libro primero de Arithmetica Algebraica, en el qual se contiene el arte mercantil, con otras muchas reglas del arte menor, y la regla del algebra... / compuesto, ordenado y hecho imprimir por Marco Aurel...; intitulado Despertador de ingenios*, En casa de Joan de Mey Flandro, Valencia, 1552.

[3] C. BUHLEA Y B. GÓMEZ, Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumanía), *Investigación en Educación Matemática XII* (R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco, eds.), 217–239, SEIEM, SPCE y APM, Badajoz, 2008.

[4] F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations*, Dover, New York, 1993.

[5] J. CORTÁZAR, *Tratado de Álgebra Elemental*, quinta edición, Imprenta y Fundición de D. Eusebio Aguado, Madrid, 1852.

[6] R. COURANT Y F. JOHN, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, vol. I, Limusa, México, 1979.

[7] R. B. DAVIS, Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *Journal of Children Mathematical Behavior* **1** (3) (1975), 7–35.

[8] A. DE MORGAN, *Elements of algebra*, second edition, Taylor and Walton, London, 1837. Original de 1831.

[9] L. DI BORGO, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalitá*, Venezia, 1494.

[10] L. EULER, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, vol. I, Kays. Acad. der Wissenschaften, St. Petersburg, 1771.

[11] R. EVEN Y D. TIROSH, Subject-Matter Knowledge and Knowledge about Students as Source of Teacher Presentation of the Subject Matter, *Educational Studies in Mathematics* **29** (1995), 1–19.

[12] S. K. GOEL Y M. S. ROBILLARD, The equation $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 2$, *Educational Studies in Mathematics* **33** (1997), 319–320.

[13] B. GÓMEZ Y C. BUHLEA, The ambiguity of the radical sign, *Proceedings of the Sixth Congress of The European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (V. Durand, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello, eds.), 509–518, INRP (Institut National de Recherche Pédagogique), Lyon, 2009.

[14] B. Gómez, Historical conflicts and subtleties with the radical sign in textbooks, *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University (2010)* (E. Barbin, M. Kronfellner y C. Tzanakis, eds.), 287–293, Technische Universität Wien, Verlag Holzhausen, Viena, 2011.

[15] B. Gómez, El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas, *PNA-Revista de investigación en Didáctica de la Matemática* **5** (2) (2010), 49–65.

[16] E. Gray y D. Tall, Duality, ambiguity and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **25** (2) (1994), 116–140.

[17] J. Kaput, Mathematics and Learning: Roots of epistemological status, *Cognitive Process Instruction* (J. Lochhead y J. Clement, eds.), 289–303, Franklin Institute Press, Philadelphia, 1979.

[18] C. Kieran, Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College levels, *Second Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (Frank K. Lester, ed.), IAP, Charlotte, 2007.

[19] C. Kieran, Research on the learning and teaching of algebra, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (A. Gutiérrez y P. Boero, eds.), 11–49, Sense Publishers, 2006.

[20] S. F. Lacroix, *Éléments d'Algébre a l'usage de l'école centrale des quatre nations*, douzième édition, Courcier, París, 1818.

[21] A. Lentin y J. Rivaud, *Álgebra moderna*, Aguilar, Madrid, 1969.

[22] A. Martínez, Euler's «Mistake»? The Radical Product Rule in Historical Perspective, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 273–285.

[23] A. Martinón, A. Pérez, D. Sauret y T. Vázquez, Nota sobre radicales y raíces, *Números* **20** (1990), 25–35.

[24] G. Peacock, *A Treatise on Algebra. Vol. II. On symbolical algebra and its applications to the geometry of positions*, J. & J. J. Deighton, Cambridge, 1845.

[25] L. Puig, Vallejo Perplejo, *José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (A. Maz, M. Torralbo y L. Rico, eds.), 113–138, Servicio de Publicaciones, Universidad de Córdoba, 2006.

[26] D. Roach, D. Gibson y K. Weber, Why Is the square root of 25 Not ± 5?, *Mathematics Teacher* **97** (2004), p. 12.

[27] A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22** (1991), 1–36.

[28] M. Stifel, *Arithmetica Integra cum praefatione Philippi Melanchthonis*, Johann Petreius, Nürnberg, 1544.

[29] D. Tirosh y R. Even, To define or not to define: the case of $(-8)^{\frac{1}{3}}$, *Educational Studies in Mathematics* **33** (3) (1997), 321–330.

Bernardo Gómez, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia
Correo electrónico: `gomezb@uv.es`
Página web: `http://www.uv.es/gomezb/`