UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Profesor/a de Educación Secundaria

CONCEPCIONES DEL INFINITO EN ESTUDIANTES DE 1º DE BACHILLERATO DE CCSSHH EN EL CONTEXTO DE APRENDIZAJE DE LÍMITES

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

DAVID LLOPIS CASTELLÓ

Tutorizada por:

Dr. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Departamento de Didáctica de las matemáticas

Valencia, 2 de septiembre de 2014

FICHA TÉCNICA

MÁSTER: Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València

ESPECIALIDAD: Matemáticas

AUTOR: Llopis Castelló, David

TÍTULO DE LA MEMORIA: “Concepciones del infinito en estudiantes de 1º de Bachillerato de CCSSHH en el contexto de aprendizaje de límites”

TUTOR: Gutiérrez Rodríguez, Ángel

Departamento: Didáctica de la Matemática

FECHA DE DEFENSA:

CALIFICACIÓN:

PALABRAS CLAVE: Infinito, Matemáticas, Concepciones de estudiantes, Secundaria, Modelo Intuitivo, Cálculo, Límite

KEYWORDS: Infinity, Mathematics, Students’ conceptions, High-School, Intuitive Model, Calculus, Limit

CÓDIGO UNESCO 5803.02 (Formación de profesores), 12 (Matemáticas), 1299 (Didáctica de las Matemáticas) y 1202.99 (Enseñanza del infinito)

RESUMEN

El conocimiento del infinito matemático es imprescindible para el aprendizaje significativo de multitud de conceptos que se encuentran dentro del cálculo matemático, como son los límites o las derivadas, presentes en el currículum de bachiller. Sin embargo, resulta sorprendente que en el currículum no se incluya el aprendizaje del infinito con la importancia que tiene en matemáticas y la dificultad que conlleva construirlo en nuestro conocimiento, pues poco tiene que ver la acepción matemática con la noción intuitiva que los estudiantes tienen sobre el infinito. Así, en esta investigación se trata de evaluar cuál es la concepción de los alumnos de 1º de Bachillerato de CCSSHH antes y después de estudiar la unidad didáctica relativa al concepto de límite con el fin de identificar la influencia del aprendizaje de este concepto en la noción del infinito de los alumnos. Todo ello se realizará a partir de una serie de ítems recogidos en dos cuestionarios, donde se presentará el concepto de infinito bajo diferentes sistemas de representación y contextos, lo que permitirá identificar qué modelos intuitivos predominan en la concepción del infinito de este tipo de estudiantes.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS

En estas líneas quisiera dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a aquellas personas que han hecho posible la realización de este Trabajo Final de Máster.

En primer lugar, quisiera agradecer al instituto donde he desarrollado las prácticas de este máster, pues allí he recibido el apoyo y consejos de muchos docentes y no docentes que han hecho que la realización de las prácticas haya sido una experiencia inolvidable. De entre todas estas personas, no me puedo olvidar de mi tutor de prácticas en dicho instituto, Josep Font Jiménez, que me ha facilitado al máximo la labor que he desempeñado durante este periodo en el instituto y ha formado parte activa también de la investigación que aquí se ha presentado.

Por otro lado, quisiera mencionar a mi tutor del presente trabajo en la Universitat de València, Ángel Gutiérrez Rodríguez, pues él ha sido la persona que me ha guiado durante la realización de este trabajo y me ha animado a llevarlo a cabo. Agradecerle por todas las atenciones, por el tiempo que he ocupado en su agenda, por el apoyo que he recibido y, sobre todo, por todo lo que he aprendido con la realización de esta investigación.

Finalmente, en un lugar no menos importante debo mencionar a mi familia y amigos que, desde fuera del entorno académico me han mostrado constantemente su apoyo y me han animado en los momentos más difíciles. Especialmente quiero mencionar a Bego, quien me aguanta en el día a día y me proporciona todo lo que necesito en cualquier momento. A ti y a mi familia quiero dedicaros este Trabajo Final de Máster.

1.INTRODUCCIÓN

Este estudio se presenta como Trabajo Final de Máster del alumno David Llopis Castelló, para la obtención de la titulación de Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria, en la Universitat de València, y está tutorado por el profesor Ángel Gutiérrez Rodríguez, Catedrático de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

Este estudio se encuadra dentro de la modalidad de trabajo de investigación, particularmente en el ámbito de investigación de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, pues el alumno que presenta este estudio ha realizado el Máster en la especialidad de Matemáticas.

El objeto del presente Trabajo Final de Máster es el análisis de las “Concepciones del infinito en estudiantes de 1º de Bachillerato de CCSSHH en el contexto de aprendizaje de límites”. Esta investigación consiste en identificar y estudiar cuáles son las concepciones del infinito de los alumnos, tanto antes como después del estudio de la unidad didáctica relativa a límites, a través de un cuestionario en el que se presenta dicho concepto bajo distintos sistemas de representación y contextos.

El estudio del concepto de infinito o infinitos matemáticos es un asunto tratado a lo largo de toda la historia no solo por matemáticos, sino también por físicos, filósofos o teólogos. En las últimas décadas, muchos son los investigadores que se han centrado en identificar aquellos obstáculos y dificultades que conlleva el aprendizaje y enseñanza de dicho concepto, puesto que el infinito tiene un papel fundamental en la enseñanza del cálculo y, más concretamente, en el paso del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado.

La concepción del infinito está fuertemente influenciada por la noción intuitiva derivada del entorno sociocultural, donde se entiende por infinito aquello que no termina o que no se puede contar. Dicha concepción dista significativamente del infinito matemático y, por tanto, entorpece y genera serias dificultades en la construcción y aprendizaje de la concepción matemática del infinito.

En este sentido, la noción intuitiva del infinito coincide con el concepto de infinito potencial, pues el infinito es entendido como aquello que no tiene fin, mientras que la concepción matemática que cobra especial relevancia en el cálculo atiende al concepto de infinito actual, que entiende el infinito como proceso acabado y sus límites alcanzados.

La distancia entre la concepción intuitiva y la concepción matemática o, lo que es lo mismo, entre el infinito potencial y el actual no se suele contemplar en los institutos, sino que, con frecuencia, se da por conocido el concepto con toda la problemática que ello conlleva, pues la concepción intuitiva no es suficiente ni funcional para el estudio de la matemática.

Nociones como límite, derivada y función son aspectos clave en el actual currículum de la ESO y bachiller. No obstante, el infinito, que es donde se apoyan muchos de los conceptos relacionados con estas nociones, carece de presencia en el currículum o, lo que es lo mismo, no forma parte de los contenidos prescritos en el currículo escolar. Dicho de otro modo, este concepto es, aunque utilizado, olvidado como elemento a ser construido escolarmente.

Debido a esta ausencia, los estudiantes, en el análisis de funciones, límites y derivadas, tratan de aplicar una serie de algoritmos que se reproducen a la perfección para lograr superar las competencias u objetivos didácticos marcados por el profesor, lo que conlleva un aprendizaje no significativo del concepto.

Ya que modificar el currículum es prácticamente imposible, lo que proponen Aquere et al. (2009) y Engler et al. (2008) es que se cambie el discurso de los docentes. En este sentido, proponen una construcción activa del concepto de límite y que los futuros docentes tengan un conocimiento profundo de este concepto. Si se consigue esto, entonces se producirá un cambio en el discurso de las aulas de secundaria y, con ello, un cambio en la concepción del infinito de los estudiantes.

Uno de los aspectos más interesantes para abordar la problemática que genera el aprendizaje y la enseñanza del concepto de infinito reside en los distintos sistemas de representación en los que está presente el concepto y, a su vez, en los diferentes tópicos o contextos en los que está involucrado. En este sentido, es necesario destacar el papel de la "tarea de conexión", definido en Garbin y Azcárate (2001), que hace referencia a la capacidad que tiene un alumno para relacionar dos cuestiones o actividades presentadas en distintos sistemas de representación pero que tienen un mismo trasfondo matemático o, en otras palabras, en las que se trabaja sobre un mismo tópico.

De esta forma, los **objetivos** que se definieron para la elaboración de este trabajo fueron:

- Identificar qué tipo de conexiones eran capaces de establecer alumnos de 1º de bachillerato entre los diferentes sistemas de representación: numérico, geométrico, gráfico, algebraico y verbal.
- Estudiar la influencia que tiene cada uno de estos sistemas de representación a la hora de estudiar el concepto de infinito bajo los siguientes tópicos o contextos: conjuntos, divisibilidad, convergencia, operatividad y lenguaje.
- Definir la concepción del infinito que tienen los alumnos de 1º de Bachillerato tras la evaluación de los dos puntos anteriores.

Estos fueron llevados a cabo tanto antes como después de que los alumnos estudiasen el tema relativo a límites y continuidad, pues como se ha mencionado más arriba el objeto principal del trabajo era determinar la influencia de la didáctica de este tema en la concepción que los alumnos tienen del infinito.

Para evaluar las concepciones de los estudiantes se diseñaron dos cuestionarios, uno para pasarlo antes de la didáctica del tema de límites y continuidad y el otro para pasarlo cuando los alumnos ya hubiesen sido examinados del tema en cuestión. Uno de los aspectos más importantes a la hora de diseñar estos cuestionarios fue que las actividades que contuviesen hicieran referencia a los distintos sistemas de representación y tópicos mencionados más arriba, pues de ello dependería, en gran medida, los resultados obtenidos en la investigación.

Así pues, el primer paso para desarrollar este trabajo fue analizar los conceptos y la didáctica del infinito y de límite, que se encuentra en el capítulo 2. Antecedentes, pues son los dos aspectos más importantes de la investigación.

En cuanto al primero, se realizó un breve análisis de la evolución histórica del concepto, se recogieron los obstáculos y dificultades más relevantes en su aprendizaje, se detallaron los distintos modelos de concepción del infinito que han sido estudiados por los investigadores en materia de didáctica de la matemática y se analizó el contenido de este concepto en el currículum actual. Por otro lado, también se realizó una revisión histórica del concepto de límite, se analizaron los obstáculos didácticos y epistemológicos de su enseñanza y aprendizaje y se identificó la presencia de dicho concepto en el currículum. Por último, se realizó un análisis de la didáctica del concepto de límite, donde se compararon distintas unidades didácticas relacionadas con este concepto.

Derivada de esta revisión bibliográfica y de acuerdo con los objetivos que se han mencionado a lo largo de esta introducción se definieron las siguientes **hipótesis del trabajo**:

1. La actitud de los alumnos participantes en la investigación frente a la tarea propuesta sería positiva y adecuada y, por tanto, los resultados obtenidos de los cuestionarios serían capaces de mostrar las concepciones que los alumnos tienen acerca del infinito.
2. Debido a la noción intuitiva que reside en el conocimiento de los estudiantes, se previó que la concepción previa de los alumnos sobre el concepto de infinito estaría muy próxima a la noción potencial del concepto.
3. El desarrollo de la unidad didáctica relativa a límites proporcionaría a los estudiantes una concepción más cercana a la noción actual del infinito.
4. Las concepciones de los estudiantes acerca del infinito dependerían en buena medida del sistema de representación en el que se encontrase dicho concepto.
5. La concepción que tienen los alumnos sobre el infinito no sería fija, sino que dependería del contexto en el que se presentase el infinito.
6. Los alumnos que fuesen capaces de relacionar unas cuestiones con otras presentarían una concepción del infinito más coherente que aquellos alumnos que no fuesen capaces de realizar dichas conexiones.

Seguidamente se recogieron, en el capítulo 3 referente al Marco Teórico de este trabajo, los aspectos más relevantes de la revisión bibliográfica que serían la base para el desarrollo de la presente investigación.

Con la elaboración de este capítulo se dio paso a la redacción y puesta en práctica de los cuestionarios, que fueron la principal herramienta para estudiar la concepción del infinito en los estudiantes. En este sentido, se debe destacar que los alumnos que participaron en este trabajo fueron estudiantes de 16 y 17 años de 1º de bachiller de la rama de Ciencias Sociales de un instituto concertado de Valencia donde el alumno ha llevado a cabo las prácticas relativas a dicho máster.

En la parte central de este estudio, capítulos 4 y 5, se presentan los resultados de los cuestionarios, se analiza de forma individualizada cada uno de los ítems presentes en cada uno de ellos, se identifica la concepción global que tienen los alumnos del infinito, tanto antes como después del estudio de la unidad didáctica relativa a límites, y se realiza una discusión acerca de los resultados obtenidos.

En este punto es menester destacar la importancia del trabajo realizado por Belmonte y Sierra (2011), pues los modelos intuitivos del infinito presentados en esta investigación fueron los utilizados en este trabajo para determinar cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes del infinito y realizar el análisis descrito en el párrafo anterior.

Por último, se recogen las conclusiones más relevantes de la investigación, que han sido extraídas a lo largo del desarrollo de todo el trabajo teniendo presente que el principal objetivo era identificar la influencia en la concepción del infinito del estudio de la unidad didáctica relativa a límites.

2.ANTECEDENTES

En este capítulo se trata de llevar a cabo una revisión bibliográfica de los conceptos de infinito y límite y un análisis de distintas unidades didácticas relativas al concepto de límite. De esta forma, se presenta la evolución histórica de ambos conceptos, las dificultades y obstáculos de su aprendizaje y enseñanza, las distintas acepciones del infinito en matemáticas y la presencia de los dos conceptos en el currículum de la ESO y Bachiller.

2.1. Concepto de infinito

2.1.1. Revisión histórica

La evolución histórica del concepto de infinito que se presenta en este epígrafe es una síntesis de los trabajos desarrollados por Ortíz (1994), Costa y Otto (2005), Bombal (2010), Juan, Montoro y Scheuer (2012) y Hitt (2013).

El concepto de infinito tiene su nacimiento en la Grecia clásica bajo el nombre de “apeiron”, que significa sin fin, sin límite, lo infinito, lo ilimitado o lo carente de definición, sin medida.

Aristóteles (384-322 a. C.) fue el primero en distinguir entre el infinito potencial y el infinito actual. En este sentido, asociaba la noción de infinito potencial a la operación reiterativa e ilimitada, mientras que con el infinito actual se refería al infinito existente como un todo o unidad y no como un proceso. No obstante, dada las contradicciones que ambas concepciones generaban, rechazó la noción de infinito actual.

Poco más tarde, Euclides (325-265 a. C.) enuncia, en su obra matemática Elementos, el axioma 8: “El todo es mayor que la parte”. Desgraciadamente, este axioma que intentaba dejar de lado las contradicciones matemáticas de la época, no se podía aplicar ni siquiera al infinito potencial, que era bien aceptado por los filósofos-matemáticos.

Durante la Edad Media, surgen fuertes influencias teológicas que llevan a relacionar el concepto de infinito con la majestad divina, con Dios. Es en esta época también donde sobresalen las paradojas de Zenón, la relación punto-recta, la existencia de lo indivisible y la potencialidad y actualidad de lo infinito.

En este sentido, cabe destacar que las implicaciones de las paradojas de Zenón sobre la naturaleza del tiempo y el espacio son muy interesantes y continúan causando polémica en la actualidad, puesto que ponen en evidencia la contradicción entre la experiencia sensible y los modelos lógicos creados por nuestra mente.

A principios del siglo XVII cabe destacar los trabajos de Galileo Galilei (1564-1642), pues comprueba que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números enteros y sus cuadrados, lo que contradice el axioma de Euclides presentado anteriormente.

A finales del mismo siglo, Isaac Newton (1643-1727) en Inglaterra y Gottfried Leibniz (1646-1716) en Alemania, comienzan a desarrollar el cálculo, que implicaba la admisión de infinitos actuales. Este desarrollo abrió el camino para el estudio del análisis matemático, en el que tratar la noción del infinito actual se hizo inevitable.

Poco después entra a escena Bolzano (1781-1848), a quien se le atribuye ser el primero en abordar formalmente la cuestión del infinito actual. Él fue quien realizó los primeros intentos de estudiar y manejar esta noción del infinito. De esta forma, afirmó que no todas las multitudes infinitas eran iguales y trató de intentar establecer criterios de comparación entre esas multitudes.

Durante esta misma época medieval se debe destacar la actitud hipócrita de Gauss (1777-1855) y Cauchy (1789-1857), pues ignoraron el problema relacionado con el infinito, aunque utilizaron implícitamente sus propiedades en muchos razonamientos.

Ya en el siglo XIX, Cantor desarrolló la teoría de conjuntos y la teoría de números transfinitos, con lo cual indica que la existencia de un infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual. Cantor comienza donde Galileo abandonó su recorrido conceptual: admitiendo que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos aunque uno sea una parte del otro. Más precisamente, Cantor sostiene que esto es lo que define a los conjuntos infinitos.

El desarrollo de estas teorías lleva a Cantor a afirmar que no todos los conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño. Con ello establece el concepto de potencia de una colección infinita, que hoy en día se conoce como cardinalidad, y considera que dos conjuntos son equivalentes si tienen la misma potencia, de donde surgen los números transfinitos.

Entre todos los estudios llevados a cabo por Cantor, cabe destacar aquel en el que demuestra que no podía existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales.

En 1877, Cantor comunica a Dedekind uno de sus resultados más importantes en una carta, famosamente conocida por su expresión final, en la que dice que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre la recta y el plano, por ejemplo entre un cuadrado y uno de sus lados, para lo que usa la expresión: “¡Lo veo pero no lo creo!”.

La gran importancia de la obra de G. Cantor estuvo dada, sobre todo, por el hecho de dotar de contenido matemático al concepto de infinito actual. Al desarrollar lo que él mismo bautizó aritmética de los números transfinitos, instaló los cimientos de la Teoría de Conjuntos abstractos y contribuyó, además, a fundamentar el cálculo diferencial y el continuo de los números reales.

Por último, cabe destacar que a principios del Siglo XX, la matemática intuicionista, representada por Brower (1881-1966) y Poincaré (1854-1912), se opuso a la teoría de Cantor, rechazando la noción de infinito actual. No obstante, el mayor valedor de Cantor fue Hilbert (1862-1943).

2.1.2. Tipos de infinito

Antes de dar paso a las distintas nociones de infinito, potencial y actual, es menester analizar el concepto cotidiano de infinito. En primer lugar, en la Tabla 2.1 se recoge las distintas acepciones que se encuentran en la Real Academia Española.

infinito, ta. (Del lat. *infinītus*). 1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término. 2. adj. Muy numeroso o enorme. 3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. La calle se perdía en el infinito. 4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.

5. m. Mat. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. m. Mat. Signo (∞) con que se expresa ese valor.
7. adv. m. Excesivamente, muchísimo.

Tabla 2.1. Concepto de infinito. Real Academia Española.

A la vista de las distintas acepciones que presenta el concepto de infinito, se puede afirmar que las acepciones 1 a 4 y la 6 son bastante ambiguas. Por otro lado, la quinta acepción está clasificada como el significado matemático que se le da al infinito, que, como se puede observar, está estrechamente ligado al concepto de cantidad.

Este significado del infinito no hace más que fundamentar la idea intuitiva de infinito, que se puede definir como algo sin fin, sin límites, muy grande. Esta noción intuitiva es en la que se sustenta el concepto de infinito potencial, noción que es definida por los investigadores como se recoge en la Tabla 2.2.

Autor/es	Concepto de infinito potencial
Ortiz (1994)	Proceso de crecimiento sin final. Base de la noción de límite del cálculo infinitesimal.
Waldegg (1996)	Lo que no tiene fin, lo que siempre se puede continuar.
Garbin (2005a)	Interpretación intuitiva del infinito. Proceso infinito.
Costa (2005)	Interpretación teológica del infinito. Vinculado a la reiteración de un proceso que nunca finaliza, idea de que siempre hay uno más.
González (2012)	Proceso infinito sin fin, proceso reiterativo
Hitt (2013)	Algo ilimitado, muy grande, ligado a procesos infinitos.
Acosta (2013)	Procesos que no involucran al infinito en su totalidad, sino como un infinito que aparece como posibilidad y que se va realizando progresivamente.

Tabla 2.2. Concepto de infinito potencial.

Esta fue la primera idea de infinito que tuvo el hombre, ligada estrechamente a la intuición. No obstante, en matemáticas no todo se podía explicar a partir de esta concepción del infinito. Así, más tarde surge la noción de infinito actual que, aunque en un primer momento se desecha debido a la gran dificultad que conlleva trabajar con él, toma un papel protagonista en lo que respecta al cálculo y al análisis matemático.

Generalmente, la manera de enseñar el infinito en los institutos consiste en utilizar metáforas didácticas basadas en conjuntos "muy grandes" para fijar la idea de infinitud. Esto permite crear la noción de infinito usada en el lenguaje cotidiano y aceptada por la Real Academia Española, pero puede generar una mala formación del concepto matemático, del concepto de infinito actual. La ambigüedad del lenguaje coloquial hace que el concepto del infinito sea un concepto vago e intuitivo que se parece muy poco a la idea matemática de infinito como unidad total.

Por ello, es conveniente, antes de iniciar el estudio del cálculo, realizar una reflexión acerca del concepto de infinito con el fin de que el alumno sea capaz de sumergirse en esta nueva noción del infinito. En este sentido, en la Tabla 2.3 se recogen distintas definiciones de investigadores en didáctica de matemáticas de la concepción actual del infinito.

Autor/es	Concepto de infinito actual
Ortiz (1994)	Totalidad completa.
Waldegg (1996)	Idea de totalidad y de unidad. Un proceso se considera ahora acabado y los límites alcanzados.
Garbin (2001)	Noción contraintuitiva.
Garbin (2005a)	Idea de totalidad y de unidad. Situación límite.
Costa (2005)	Idea de totalidad, de unidad.

González (2011)	Proceso infinito que culmina.
Acosta (2013)	Proceso acabado y límites alcanzados.

Tabla 2.3. Concepto de infinito actual.

La idea del infinito actual implica dificultades en la concepción del infinito, pues no se tiene un infinito, sino muchos, lo que supone dificultades para la comparación y en definitiva para la medición.

Así pues, se necesita de una definición para el tamaño de conjuntos, pues la apelación a su número no sirve, ya que el mismo "número" sirve para designar diferentes tamaños y por tanto distintos conjuntos. De aquí la importancia de la teoría desarrollada por Cantor y que se ha comentado en el epígrafe anterior.

2.1.3. Revisión bibliográfica

2.1.3.1. *Enseñanza y aprendizaje*

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden clasificarse, según Vranken et al. (2006), atendiendo a su origen de la siguiente forma:

- Obstáculos de origen *ontogénico*: aquellos que sobrevienen de las limitaciones del sujeto.
- Obstáculos de origen *didáctico*: aquellos provocados por el sistema de enseñanza.
- Obstáculos de origen *epistemológico*: aquellos derivados del rol constitutivo del saber mismo.

A estos 3 tipos de obstáculos, Aquere et al. (2009) añadieron uno nuevo: el obstáculo *actitudinal*. Este obstáculo está ligado a la actitud del alumno, pues que un tema que sea totalmente desconocido para el estudiante puede generar que sólo tengan actitud de escuchas, es decir, pasiva.

No obstante, previamente a definir los obstáculos y dificultades presentes en el aprendizaje y enseñanza del concepto de infinito, es necesario recalcar dos aspectos.

El primero de ellos hace referencia al esquema conceptual y a la definición del concepto de Tall y Vinner que viene recogida en las investigaciones de Garbin (2005a) y Garbin y Azcárate (2001 y 2002). Estos autores describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática. Además, señalaron que este esquema no necesariamente es coherente en todo momento y los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes.

El otro aspecto tiene que ver con la distinción entre objeto mental y objeto físico llevada a cabo por Duval y recogido en los estudios mencionados en el párrafo anterior. Duval destaca que los objetos matemáticos no son objetos reales y, además, que es necesario distinguir entre el objeto matemático y su representación semiótica. Asimismo, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica, pues durante este cambio de registro es cuando se pueden producir situaciones de congruencia o de incongruencia, de donde derivan las inconsistencias.

Por último, también es conveniente destacar que, según Duval, los estudiantes empiezan a asimilar y aprender un concepto cuando lo identifican en sus distintas representaciones (gráfico, numérico, algebraico, verbal y geométrico) y cuando son capaces de cambiar de registro de representación.

Teniendo en cuenta estos dos aspectos, Garbin y Azcárate (2001) concluyeron que:

- Las respuestas de los estudiantes están influenciadas por el sistema de representación en el que está involucrado el concepto de infinito.
- El estudiante posee ideas inconsistentes, y no siempre se mantiene coherente cuando resuelve un mismo problema expresado en diferente forma, es decir, en sistemas de representación distintos. Por tanto, el alumno puede manifestar ideas y concepciones diferentes con respecto a un mismo concepto matemático.
- La importancia de inducir en los estudiantes las tareas de conexión para ayudarles a construir un pensamiento coherente con sus propias ideas y esquemas.

Haciendo referencia a estas conclusiones, cabe especificar que se habla de una idea o pensamiento inconsistente en relación al concepto matemático involucrado o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada, mientras que se habla de incoherencia cuando un alumno resuelve con respuestas contradictorias un mismo problema expresado mediante diferentes sistemas de representación. Además, se debe añadir que la tarea de conexión hace referencia a la habilidad que posee un alumno a la hora de transformar un problema en otro equivalente cambiando de sistema de representación.

Por otro lado, en la investigación llevada a cabo por Arrigo y D’Amore (1999) se detalla la problemática derivada de la enseñanza y del aprendizaje del infinito. En este sentido, se pueden destacar los siguientes obstáculos epistemológicos, que serán definidos posteriormente en el capítulo 3 relativo al Marco Teórico del trabajo:

- *Aplastamiento*
- *Dependencia*
- *Aplastamiento vs dependencia*
- *Deslizamiento*
- Infinito potencial vs Infinito actual

En otra de las investigaciones revisadas se hace referencia a un obstáculo relativo al uso del lenguaje (Hitt, 2013). En este sentido, el autor cita que uno de los principales problemas en la enseñanza y aprendizaje del concepto de infinito radica que para poder comunicar estos conceptos en el aula, el lenguaje natural va en contra del concepto actual de infinito. El problema es que al decir “límite de S_n cuando tiende al infinito” se está proporcionando movimiento a los S_n, por lo que se hace uso implícito del infinito potencial.

Por último, también es menester citar los obstáculos didácticos encontrados por Waldegg (1996). En este caso, la autora resalta los siguientes obstáculos didácticos:

- Un conjunto acotado, sobre todo si está encuadrado en un contexto geométrico, difícilmente se acepta que tiene un número infinito de elementos.
- La comparación entre dos conjuntos infinitos se hace más difícil si un conjunto es acotado y el otro no. En este caso, el infinito potencial es un obstáculo para comparar los dos conjuntos.
- Existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya una instrucción al respecto.
- Obstáculo del desdoblamiento y de estabilidad del pensamiento intuitivo.

Además, Waldegg (1996) señala que para superar un obstáculo epistemológico se necesita hacer atravesar al estudiante la frontera de sus conocimientos, aumentándolos de manera directa y oportuna. En este sentido, afirma que será fundamental la intervención de procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta los obstáculos que el estudiante tiene que vencer.

Esto último viene reforzado por la investigación llevada a cabo por Montoro y Scheuer (2006), pues concluyen en la misma que el infinito matemático está muy lejos de constituir un objeto de conocimiento que las personas generan fácilmente a partir de su interacción con el ambiente físico y cultural. Tanto el análisis histórico de este concepto en la matemática, como el análisis de los modos en que estudiantes universitarios resolvieron un conjunto de tareas que lo involucran, indican que para que el infinito se convierta en una entidad acerca de la cual es posible pensar y operar, es necesaria la intervención de complejos procesos representacionales, los que a su vez requieren la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión matemática.

2.1.3.2. Concepciones del infinito en estudiantes

Muchos son los autores que han investigado con el fin de identificar las concepciones que los estudiantes tienen en cuanto al infinito. En este sentido, este epígrafe trata de resumir y mostrar aquellos resultados más interesantes.

En primer lugar, cabe destacar que la mayoría de investigaciones trata de determinar cuáles son las concepciones de los alumnos a través de cuestionarios donde se presenta el concepto de infinito bajo distintos sistemas de representación (numérico, gráfico, algebraico, geométrico y verbal) y atendiendo a diferentes tópicos (conjuntos, divisibilidad, convergencia, operatividad y lenguaje). De esta forma, tratan de evaluar la concepción de los estudiantes agrupándolos habitualmente en tres grandes grupos: finitistas, potenciales y actuales. Asimismo, también son estudiados, en muchos casos, la inconsistencia e incoherencia de las respuestas de los alumnos y la importancia de la tarea de conexión, aspectos que ya han sido introducidos en el epígrafe anterior.

Dos de las investigaciones más interesantes en este ámbito fueron las desarrolladas por Garbin y Azcárate (2001) y Garbin (2005a). En ambos estudios se evaluaron la concepción del infinito en estudiantes de entre 16 y 20 años a través de un cuestionario de 5 preguntas en las que estaba presente el mismo trasfondo matemático pero haciendo uso de distintos sistemas de representación. Las conclusiones más interesantes de ambos estudios fueron:

- La percepción del infinito es diferente (potencial/actual) incluso dentro de una misma edad o curso.
- Los alumnos hacen muy poco uso de argumentos matemáticos formales para elaborar la respuesta.
- Un número muy reducido de alumnos relacionan unos problemas con otros.
- Muy pocos alumnos mantienen su postura de finitistas, actuales o potenciales a lo largo de toda la tarea. Adoptan en cada ejercicio una postura distinta siendo el mismo aspecto matemático tratado en todas las cuestiones. Lo que define a un alumno como incoherente.
- Los lenguajes matemáticos, el contexto y las representaciones tienen un gran impacto sobre las percepciones del infinito y sobre los razonamientos de los estudiantes. Conclusión que corrobora la investigación de Monaghan (2001).

Asimismo, las autoras de estas investigaciones definieron distintas líneas de coherencia que dieron lugar a tres tipos de alumnos:

1. Alumno coherente y consistente: sus respuestas se basan en una única concepción del infinito (actual, potencial o finitista) y son capaces de realizar tareas de conexión.

2. Alumno coherente e inconsistente: sus respuestas se basan en una única concepción del infinito pero son érroneas.
3. Alumno incoherente: presenta distintas concepciones del infinito no siendo capaces de realizar la tarea de conexión.

En cuanto a este último grupo, se debe señalar que uno de los principales motivos de su presencia es la falta de consciencia por parte de los estudiantes de que están resolviendo en el fondo un mismo problema pero representado de diferentes formas. Por tanto, tiene especial relevancia en la coherencia de las respuestas la tarea de conexión, que consiste en identificar y saber establecer relaciones entre los problemas en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere.

Otro estudio que hay que tener presente es el llevado a cabo por D’Amore et al. (2006). En el mismo participaron estudiantes de ESO y Bachiller, profesores y futuros profesores de matemáticas y magisterio, estudiantes de carreras universitarias técnicas y personas de alto nivel cultural. La investigación se desarrolló a través de una serie de tareas y no se evaluaron cada uno de los grupos participantes por separado ni todos conjuntamente, sino que se definieron dos grupos de estudio:

- D1: carácter básicamente intuitivo y lingüístico. Lo formaban estudiantes que han alcanzado altos niveles de competencia matemática, estudiantes no muy avanzados o personas no propiamente cultas en matemática.
- D2: ofrece mayor técnica y precisión. únicamente estudiantes con estudios avanzados en matemática o personas cultas en esta disciplina (profesores de matemáticas).

Así pues, los resultados obtenidos fueron:

- D1:
  - El “sentido de infinito” se confunde con el de indeterminado, ilimitado, sin frontera, enorme.
  - El infinito es visto como un proceso, no como un objeto, lo que dificulta realizar “estimaciones” sobre el infinito.
  - Diferencian entre un infinito matemático y un infinito físico.
- D2:
  - Admiten el infinito actual y el potencial
  - Aceptan que existan distintos niveles de infinito
  - La demostración ayuda poco a aceptar diversos niveles de infinito: demostración vs sentido común.

Otro estudio de similares características fue el desarrollado por Arrigo y D’Amore (1999), donde participaren un total de 287 estudiantes de entre 15 y 18 años de Suiza y Bolonia sin estudios previos sobre el infinito. Todos estos alumnos vieron un video en el que se podía observar las demostraciones relacionadas con la equivalencia de dos segmentos con distintas longitudes, las formas decimales periódicas y el teorema de Cantor. Posteriormente, cada uno de ellos realizó un cuestionario acerca de estos videos en los que estaba implicado el concepto de infinito.

Como resultados más interesantes de esta investigación cabe señalar:

- La dificultad de que el estudiante no se deje llevar por la intuición. A gran parte de ellos no les acaban de convencer las demostraciones o no las entienden.
- Los obstáculos que impiden este tipo de comprensión no son solo de naturaleza didáctica sino también de naturaleza epistemológica. Desde este punto de vista, los

fenómenos (contradictorios) del aplastamiento y de la dependencia serían solo manifestaciones visibles de tales obstáculos.
- Existen tanto obstáculos epistemológicos como didácticos en el aprendizaje del concepto de infinito.

Por otra parte, la investigación llevada a cabo por Juan, Montoro y Scheuer (2012) se centra en identificar las ideas que tienen los estudiantes de escuelas secundarias sobre las colecciones infinitas con el fin de indagar acerca de las concepciones que los alumnos tienen sobre el infinito cardinal.

Para realizar el estudio se pasó un cuestionario de 10 preguntas a 195 estudiantes distribuidos en tres franjas de edad: 13-14 años; 15-16 años; y 17-19 años. Posteriormente se efectuó un análisis estadístico multivariado para determinar cómo los estudiantes conciben los diferentes aspectos del infinito indagados, cómo se vinculan sus ideas acerca de estos aspectos y si existen factores evolutivo-educativos que incidan sobre las concepciones. De esta forma, se consiguió clasificar a los alumnos en:

- Clase 1: Puedo tener infinito muy numeroso es distinto de infinito y en infinito no necesariamente está todo.
- Clase 2: Duda o inseguridad.
- Clase 3: Un número muy grande es infinito.
- Clase 4: Con pocos elementos obtengo pocos, con muchos, muchos. Es imposible construir un conjunto infinito.
- Clase 5: No contesta las últimas preguntas.

El estudio coincide y fortalece la postura de varios investigadores, entre ellos Waldegg (1996), de que la noción de infinito matemático no es intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas.

Por último, cabe presentar unas de las investigaciones más importantes debido a la relación que guarda con el trabajo presentado. En este sentido, Belmonte y Sierra (2011) han llevado a cabo un estudio en el que han analizado la concepción del infinito en estudiantes desde 11 hasta 19 años o, lo que es lo mismo, desde primaria a primer curso de universidad.

En este estudio se han elaborado una serie de cuestionarios, en función de la edad de los estudiantes, en los que aparecía el concepto de infinito bajo los diferentes sistemas de representación así como bajo los distintos tópicos en los que se puede estudiar.

Los resultados más importantes del estudio son los distintos modelos intuitivos del infinito que responden a las concepciones que los estudiantes tienen sobre el infinito, que serán debidamente desarrollados en el capítulo 3 relativo al Marco Teórico de esta investigación:

- Modelo de inclusión
- Modelo infinito = infinito o de aplastamiento
- Modelo punto-marca
- Modelo de indefinición
- Modelo de divergencia
- Modelo acotado-finito/no acotado-infinito

Señalar que estos modelos entran con frecuencia en conflicto bajo determinados contextos o representaciones contextuales, lo cual genera contradicciones internas que se expresan mediante respuestas incoherentes. Además, los autores destacan la gran sensibilidad en las respuestas frente a aspectos contextuales o representacionales.

2.1.3.3. *Currículum*

Tanto en el currículum relativo a la Educación Secundaria Obligatoria como en el de Bachillerato de la Comunidad Valenciana no hay presencia alguna del concepto de infinito y, sin embargo, está estrechamente ligado a las matemáticas de todos los cursos y niveles, pues el infinito ya está presente en los primeros cursos de la ESO de la mano del estudio de los conjuntos numéricos de los naturales ($\mathbb{N}$) o enteros ($\mathbb{Z}$).

Pero esto no se queda aquí, sino que tampoco los materiales didácticos empleados en la enseñanza de las matemáticas incorporan una discusión sobre este concepto, la cual es clave para la comprensión y aprendizaje de conceptos muy importantes dentro del área del cálculo, como son los conceptos de límite y derivada que sí están en el currículum de Bachiller.

La ausencia explícita de este concepto en el currículum conlleva que no exista en las programaciones de los docentes de secundaria y bachiller ningún capítulo dedicado al tratamiento del infinito que prepare la unificación de ideas y operaciones, y la confrontación de aspectos intuitivos y formales. Dicho de otro modo, no existe una preparación cognitiva para interiorizar el infinito actual.

Para concluir, únicamente destacar que para que el aprendizaje del concepto de infinito matemático sea significativo es necesario realizar un aprendizaje mediante construcción, es decir, marcar las semejanzas y diferencias entre la concepción matemática y la intuitiva con el fin de eliminar las dudas. Con ello, el infinito matemático será estudiado, discutido, analizado y comprendido.

2.2. Concepto de límite

2.2.1. Revisión histórica

El concepto de límite nace de la mano de las preocupaciones de matemáticos griegos en cuanto al cálculo de los valores límites de ciertos procesos infinitos relacionados con figuras geométricas.

El concepto que se conoce hoy en día de límite viene de la mano de John Wallis (1616-1703), que fue quien formuló la primera definición aceptada de este concepto.

A mediados del siglo XVIII se instauraron mejores reglas para determinar los límites a los que tienden las sucesiones y series, lo que sería la base del cálculo infinitesimal. Con estas reglas, la idea de límite se basaba en la noción de poder aproximarse tanto como se desee a un punto pero sin llegar a él, concepción que ocuparía un valor importante en la definición de continuidad de Bolzano (1781-1848).

Ya a finales de ese mismo siglo, Lagrange (1736-1813) intenta eliminar esa noción intuitiva de las magnitudes infinitamente pequeñas e infinitas para poner de manifiesto la importancia de la concepción del infinito actual en el cálculo. Así, en 1823 Cauchy (1789-1857) reinventa esta posición lagrangiana con una nueva exigencia de rigor para todos los elementos del cálculo infinitesimal omitiendo cualquier referencia intuitiva previa a la definición de continuidad.

En 1861, Weierstrass (1815-1897) remata el trabajo desarrollado por Cauchy con la ayuda de su épsilon (ε) y su delta (δ), que no son más que números reales, muy pequeños y muy próximos a cero, y que tanto éxito le dieron, pues con ellos surgiría la definición moderna de límite y continuidad.

Así pues, la definición formal más extendida de límite de una función cuando tiende a un valor finito y tiene como resultado un valor finito es:

"El límite de una función *f(x)*, cuando *x* tiende a *c* es *L* si y solo si para todo épsilon existe un delta tal que para todo número real *x* en el dominio de la función, si cero es menor que el valor absoluto de *x-c* y este es menor que delta, entonces el valor absoluto de *f(x)-L* es menor a épsilon".

Y escrito en notación formal:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; / \; \forall x \epsilon Dom(f), 0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

2.2.2. Revisión bibliográfica

2.2.2.1. Obstáculos en el aprendizaje

El concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos que más dificultades de aprendizaje trae inherentes al propio concepto. Las últimas investigaciones en relación a la didáctica del cálculo propone una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza. Para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que se olvida fácilmente si no se le da el valor que corresponde y, uno de los más difíciles de enseñar y aprender (Engler et al., 2008).

Uno de los obstáculos epistemológicos más importantes es la noción: *a/0=∞* (Camacho y Aguirre, 2001). La sencillez de la expresión sugiere una falsa elementarización del concepto, como si le fuese sustancial, siendo que solo lo encubre. Sin embargo, el alumno la usa como si fuese conocimiento mismo, con los errores y problemáticas que ello conlleva.

Por otra parte, Vranken et al. (2006) recoge en su investigación los siguientes obstáculos epistemológicos observados por Cornu:

- El sentido común de la palabra límite induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Por último, se quiere resaltar que no solo existen obstáculos de tipo epistemológico en el aprendizaje y enseñanza del concepto de límite, sino que también existen de tipo didáctico. En este sentido, cabe destacar el papel de los docentes y el enfoque que ellos mismos le dan a la noción de límite en las aulas.

En la investigación llevada a cabo por Espinoza y Azcárate (2000) se muestra como en lo que se refiere a la didáctica del concepto de límite, los profesores suelen huir del trasfondo matemático que conlleva el concepto y tratan de transmitir a los estudiantes que el cálculo de un límite es una mera manipulación algebraica. Estas mismas conclusiones son las mismas que se han extraído del análisis de diferentes unidades didácticas relativas al concepto de límites y continuidad estudiadas en el epígrafe *3.3. Didáctica del concepto* de límite de este trabajo.

En esta misma línea, Camacho y Aguirre (2001) destacan que ni los propios docentes conocen el verdadero sentido del concepto que tienen que enseñar a sus alumnos, lo que supone un obstáculo didáctico importante en el aprendizaje del concepto de límite.

2.2.2.2. Dificultades en el aprendizaje

Las distintas dificultades que presentan los alumnos a la hora de comprender y aprender el concepto de límite se recogen en la Tabla 2.4, fruto del análisis de la bibliografía que ha sido comentada en los apartados anteriores.

Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite
Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto
Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales
Dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar
Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución
Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario
Conflicto con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite
Dificultad para concebir la idea de límite en el infinito
Dificultades para comprender que la indeterminación no quiere decir que no se puede obtener el límite
Dificultad para distinguir diferentes tipos de discontinuidades
Dificultad para encontrar situaciones en las que se apliquen los conceptos de límite y continuidad

Tabla 2.4. Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite.

2.2.2.3. Currículum

La presencia del concepto de límite en el currículum no aparece como tal hasta el bachillerato. No obstante, en los cursos de 3º y 4º de ESO ya se van introduciendo nociones relacionadas con este concepto, como la tendencia de una función.

El Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, establece la estructura del bachillerato y fija sus enseñanzas mínimas. En este, se puede observar como el concepto de límite es un contenido que debe ser estudiado tanto en 1º como en 2º de bachiller. En relación al primer curso fija como contenido mínimo la “*Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad*”, mientras que para el segundo curso recoge el “*Concepto de límite. Cálculo de límites*”.

Como bien es sabido, estos contenidos mínimos son los que la propia comunidad debe respetar en el desarrollo de su propio currículum. De esta forma, el currículum relativo a la Comunidad Valenciana, recogido en el Decreto 102/2008, de 11 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo del bachillerato en la Comunitat Valenciana, establece el estudio del concepto de límite en 1º de bachiller como “*Aproximación al concepto de límite. Estudio de discontinuidades.*”, mientras que para 2º fija como contenidos el “*Límite de una sucesión. Límite de una función. Cálculo de límites.*”.

A diferencia del concepto de infinito, en este caso sí se encuentra el concepto de límite como uno de los contenidos a estudiar en el bachiller. No obstante, este concepto requiere de un conocimiento del infinito que, habitualmente, los estudiantes no poseen debido en gran parte al olvido de este concepto en el currículum.

2.3. Didáctica del concepto de límite

Con el fin de analizar la manera en que el concepto de límite es introducido en las aulas se ha llevado a cabo un análisis de distintas unidades didácticas consultadas en internet en los blogs de varios profesores e institutos españoles.

2.3.1. Contreras (s.f.)

En cuanto a la primera de las unidades didácticas mencionadas, cabe destacar que introduce el concepto de límite a partir del estudio, identificación y cálculo de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de funciones racionales. Además, trata de mostrar la utilidad de este concepto en problemas de la vida real al estudiar la tendencia de cierta función bajo un determinado contexto (Figura 2.1).

- **MEMORIZACIÓN**

En una clase de psicología se realizó el siguiente experimento de memorización. A cada estudiante se le dio una lista de 40 palabras y un día para memorizarlas. Durante 20 días seguidos cada estudiante escribía todas las palabras de la lista que era capaz de recordar. Se halló la media de aciertos y se determinó que una buena aproximación de esta media venía dada por la función $R(x) = \frac{5d+30}{d}$ (d en días).

a) ¿Cuántos aciertos se producen el cuarto día? ¿Y el décimo?.

b) Dibuja la gráfica de esta función y estudia sus características.

c) Si el número de días sigue aumentando, ¿qué tendencia se observa en el número de aciertos?.

Figura 2.1. Aplicación del concepto de límite. UD elaborado por Mauricio Contreras.

Una vez estudiado el concepto de límite y vista su aplicación, tanto para la representación de funciones racionales como para la identificación de la tendencia de cierta función, el profesor introduce al alumno las operaciones algebraicas relativas a fracciones algebraicas (factorización de polinomios, suma, multiplicación cociente y simplificación) con el fin de estudiar la continuidad de funciones a trozos.

Por último, define de una manera más formal el concepto de límite y define los distintos tipos de discontinuidad.

2.3.2. Departamento de matemáticas del IES Valle del Oja (s.f.)

Esta unidad didáctica se caracteriza por presentar un número muy reducido de ejemplos numéricos sencillos que faciliten la comprensión del concepto y por lanzarse en un primer momento a la introducción del concepto de límite a partir de la notación formal matemática, con todas las dificultades que ello conlleva en el proceso de aprendizaje del concepto.

El tema comienza introduciendo el concepto de infinito a partir de su noción intuitiva, es decir, a través de una tabla de valores para, posteriormente, definir la notación que implica el concepto de límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Con ello, pasa directamente a definir formalmente el concepto de límite, con ε y δ, asumiendo que esta definición “es algo más compleja”.

A continuación, se definen que son los límites laterales y la propiedad necesaria para que exista el límite en un punto: “es necesario y suficiente que los límites laterales existan y sean coincidentes”.

Una vez vista la definición de límite introduce el cálculo de los distintos tipos de límites y las transformaciones algebraicas que se deben llevar a cabo para resolver cada una de estas indeterminaciones que pueden llegar a darse.

En este punto, se debe destacar que se echa de menos un nexo de unión entre la definición formal mostrada al comienzo del tema y lo que respecta al cálculo de límites, pues se trata ahora de un problema puramente algebraico.

La última parte de la unidad didáctica trata de abordar la identificación y determinación de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) en el estudio de funciones racionales y desarrollar el estudio de la continuidad de funciones. De este modo, se echa de menos la aplicación del concepto de límite a problemas de la vida real, pues en el tema solamente se trata el concepto desde un contexto gráfico y analítico.

2.3.3. González (s.f.)

Al igual que las dos unidades didácticas anteriores, esta también comienza introduciendo la idea intuitiva de límite, pero esta vez ya lo hace a partir de tres sistemas de representación diferentes: numérico, algebraico y gráfico.

A partir de esta idea se define el concepto de límite, pero no utilizando la definición ε y δ, sino haciendo uso de la propiedad “para que exista límite han de coincidir los límites laterales” y haciendo hincapié que a efectos del cálculo del límite, no hay que tener en cuenta lo que ocurra exactamente en el punto en cuestión, sino en sus proximidades.

El siguiente punto de la unidad didáctica trata de introducir la identificación y determinación de las asíntotas de funciones racionales, siempre desde los 3 sistemas de representación nombrados anteriormente. Estos conceptos de asíntotas se trabajan con un ejemplo y tras la realización del mismo se determinan las conclusiones más importantes y se definen los conceptos matemáticos involucrados. Con ello, el profesor pretende fomentar la construcción del concepto en el estudiante.

A diferencia que en la unidad didáctica del Departamento de matemáticas del IES Valle del Oja (s.f.), en esta no se tratan las indeterminaciones de forma separada, sino que a medida que aparecen, el profesor las resuelve y las explica.

Por último, se desarrolla un apartado relativo al cálculo de límites e indeterminaciones, en el que se indican las transformaciones u operaciones algebraicas necesarias para su resolución. En este caso, el único sistema de representación utilizado es el algebraico.

2.3.4. Departamento de matemáticas del IES Moraima (s.f.)

La unidad didáctica utilizada para la enseñanza del concepto de límite de este instituto es puramente teórica, no incluye ningún ejemplo práctico que facilite la comprensión de dicho concepto en el alumnado. Esto provocará, probablemente, multitud de dificultades en el aprendizaje del concepto de límite.

El tema comienza con las definiciones teóricas y formales de límite de una función en un punto, límites laterales y límites en un punto. En este sentido, muestra la notación que se emplea, su significado y como se lee.

Una vez introducidos todos estos conceptos se muestra como calcular dichos límites. Para ello, separa el cálculo en límites determinados e indeterminados, mostrando las operaciones algebraicas a realizar en cada uno de los casos.

En la parte final del tema se presenta los conceptos de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y ramas infinitas, aunque ya habían sido mencionados anteriormente en las definiciones mencionadas en los párrafos anteriores.

Por último, se estudia el concepto de continuidad y se definen los distintos tipos de discontinuidad que pueden presentar las funciones.

2.3.5. Font (s.f.)

En este último epígrafe se muestra cual fue la metodología que se llevó a cabo para la enseñanza del concepto de límite en el centro donde el alumno ha realizado las prácticas de este máster y donde se ha desarrollado la presente investigación.

La gran novedad que ofrece el desarrollo de esta unidad didáctica con respecto al resto de las analizadas es el uso del software GeoGebra, programa que permite a los alumnos comprender y construir el concepto de límite con mayores facilidades.

El primer paso fue, al igual que en varias de las unidades didácticas tratadas anteriormente, trabajar sobre la noción intuitiva de infinito. A partir de ella se presentó al alumno la notación de límite y se trabajó, sobretodo, sobre el contexto gráfico.

Seguidamente se introdujo el concepto de límite lateral y se trataron las propiedades que se debían cumplir en un punto para que el límite existiese. Todo ello fomentando la construcción del concepto, pues se iba proponiendo distintas tareas a los alumnos y, posteriormente, se apuntaban en la pizarra los resultados y conclusiones más interesantes.

Con ello se dio paso a presentar el concepto de límite en un contexto algebraico y ver su correspondencia o relación con el contexto gráfico, lo que es fundamentalmente importante para que el alumno ponga en práctica la tarea de conexión.

Estudiados los conceptos de límite en un punto, límite en el infinito y límites infinitos se estudiaron los conceptos de asíntotas y ramas infinitas. Para ello se trabajó con los alumnos distintos sistemas de representación: numérico, algebraico y gráfico.

Ya en la parte final del tema se desarrolló el concepto de continuidad y se estudiaron los distintos tipos de discontinuidades, principalmente con actividades donde estaba presente las funciones a trozos.

Por último, se debe señalar un comentario del tutor de prácticas del instituto acerca de la enseñanza del concepto de límite: "Hoy en día la enseñanza de límite se ha convertido en un mero algoritmo sin trasfondo matemático, sin que el alumno conozca ni comprenda lo que hay detrás de ese cálculo. La definición del concepto relativa a épsilon y delta es impensable, sobre todo en alumnos de este tipo de bachiller (Ciencias Sociales), yo lo intenté varios años pero presentaba muchísimos problemas para los alumnos (…). Me conformo con que mis alumnos comprendan el teorema de Bolzano y el de Rolle".

3.MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan aquellos aspectos o conceptos de la bibliográfica analizada en el capítulo 2 de este trabajo que han sido utilizados o han tenido una importancia notable para el desarrollo de este trabajo.

En primer lugar, es necesario diferenciar las dos acepciones del infinito que coexisten en el contexto matemático:

- Infinito potencial: está estrechamente relacionado con la noción intuitiva del infinito. De esta forma, el infinito se entiende como un proceso sin fin, sin los límites alcanzados, una cantidad muy grande.
- Infinito actual: hace referencia a la idea de totalidad y de unidad. En este sentido, se entiende un proceso infinito como un proceso acabado y sus límites alcanzados.

En cuanto a esta última concepción del infinito, se deben resaltar dos aspectos fundamentales que hacen que presente importantes dificultades y obstáculos en su aprendizaje y enseñanza. El primero de ellos se basa en que esta concepción contempla el infinito como un concepto que va contra la intuición, de ahí que sea muy difícil de construir y corregir esta nueva noción del infinito en la mente de los estudiantes. Y el segundo, no por ello menos importante, es que el concepto de infinito carece de presencia en los currículums tanto de la ESO como de Bachiller y, no obstante, se trata de un concepto fundamental para la comprensión de conceptos relativos a conjuntos numéricos, presente a lo largo de todos los cursos de la ESO, y para la construcción de conceptos muy importantes como límite o derivada, que son la base del cálculo y están presentes en el currículum de Bachiller.

De esta forma, los obstáculos y dificultades más importantes que se han observado alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de infinito son (Arrigo y D’Amore, 1999):

- Epistemológicos:
    a. *Aplastamiento* de los cardinales transfinitos: “todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad”.
    b. *Dependencia* de los cardinales transfinitos de hechos relativos a medidas: “convicciones intuitivas que llevan a los estudiantes a pensar que en un segmento *largo* existan más puntos que en uno *corto*.
    c. Aceptaciones intuitivas de *aplastamiento* y *dependencia* se hallan en contradicción entre ellas.
    d. *Deslizamiento*: dificultad de aceptar la correspondencia biunívoca entre N y el subconjunto de los número cuadrados.
    e. Concepción del infinito potencial vs Concepción del infinito actual
- Didácticos:
    a. Ausencia en el currículum: la enseñanza del infinito no aparece como tal en el currículum de secundaria ni de bachillerato.
    b. Formación del docente: la concepción que muchos docentes tienen acerca del infinito es la noción intuitiva debido a la formación del concepto que han desarrollado durante su aprendizaje.

c. Discurso docente: derivado de los dos puntos anteriores, los docentes huyen de realizar una construcción del concepto en los estudiantes, lo que lleva a dar por sabido en muchas ocasiones el concepto con toda la problemática que ello conlleva.

Además, en este estudio se han considerado imprescindibles las conclusiones derivadas de las investigaciones de Garbin (2005a) y Garbin y Azcárate (2001 y 2002). En este sentido, cabe destacar que la concepción del infinito en los estudiantes posee una fuerte dependencia del sistema de representación en el que se presente el propio concepto y, además, de la capacidad de los alumnos de realizar la "tarea de conexión".

Por ello, los ítems recogidos en cada uno de los cuestionarios que se han utilizado para el desarrollo de esta investigación tratan de presentar el infinito a través de los distintos sistemas de representación: numérico, geométrico, gráfico y verbal, pues se es consciente de que los resultados obtenidos dependerán en buena medida de una adecuada redacción y elaboración de estos cuestionarios.

Por último, es menester destacar aquellos modelos intuitivos del infinito que han permitido analizar y evaluar las respuestas obtenidas en cada una de las actividades planteadas en los cuestionarios. Estos modelos, definidos por Belmonte y Sierra (2011), han sido la base para el desarrollo del estudio, pues a partir de ellos se consiguió establecer cuál era la concepción del infinito de los estudiantes de 1º de bachiller de CCSSHH antes y después del estudio de la unidad didáctica correspondiente al concepto de límite y, con ello, se determinó la influencia del desarrollo de este tema en la concepción que los estudiantes tienen acerca del infinito. Sin más, los modelos intuitivos del infinito empleados en la presente investigación son:

- Modelo de inclusión: hace referencia a "el todo es mayor que la parte".
- Modelo infinito = infinito o de aplastamiento: concibe como equivalentes a todas las cantidades infinitas.
- Modelo punto-marca: consiste en atribuir dimensiones o una naturaleza material a un punto geométrico para comparar conjuntos continuos o geométricos.
- Modelo de indefinición: Las respuestas y actitudes que induce este modelo están asociadas a cierta incapacidad de conocer o calcular.
    - Indefinido primario: infinito=número muy grande, pero finito.
    - Indefinido secundario: infinito=número muy grande, pero no se sabe.
- Modelo de divergencia: modelo que atribuye sistemáticamente un resultado infinito a la suma de una cantidad infinita de objetos matemáticos, sin considerar en absoluto su eventual convergencia.
- Modelo acotado-finito/no acotado-infinito: Es producto de la relación que establece un número importante de sujetos entre la definición acotada o no acotada de un conjunto y el cardinal de sus elementos.

A partir de ellos se determinó si las concepciones de los estudiantes estaban más próximas a la noción potencial del infinito, a la actual o simplemente se referían al infinito bajo una concepción finitista. Además, esto permitió identificar si estas concepciones que se presentaban en los alumnos se mantenían constantes o, por el contrario, había alumnos que actuaban bajo distintas concepciones en función del sistema de representación en el que se presentaba el infinito, lo que se denominó alumno incoherente.

Así pues, todo lo expuesto en este capítulo y la presencia del infinito en la educación secundaria queda recogido en el mapa conceptual que se presenta en la figura 3.1.

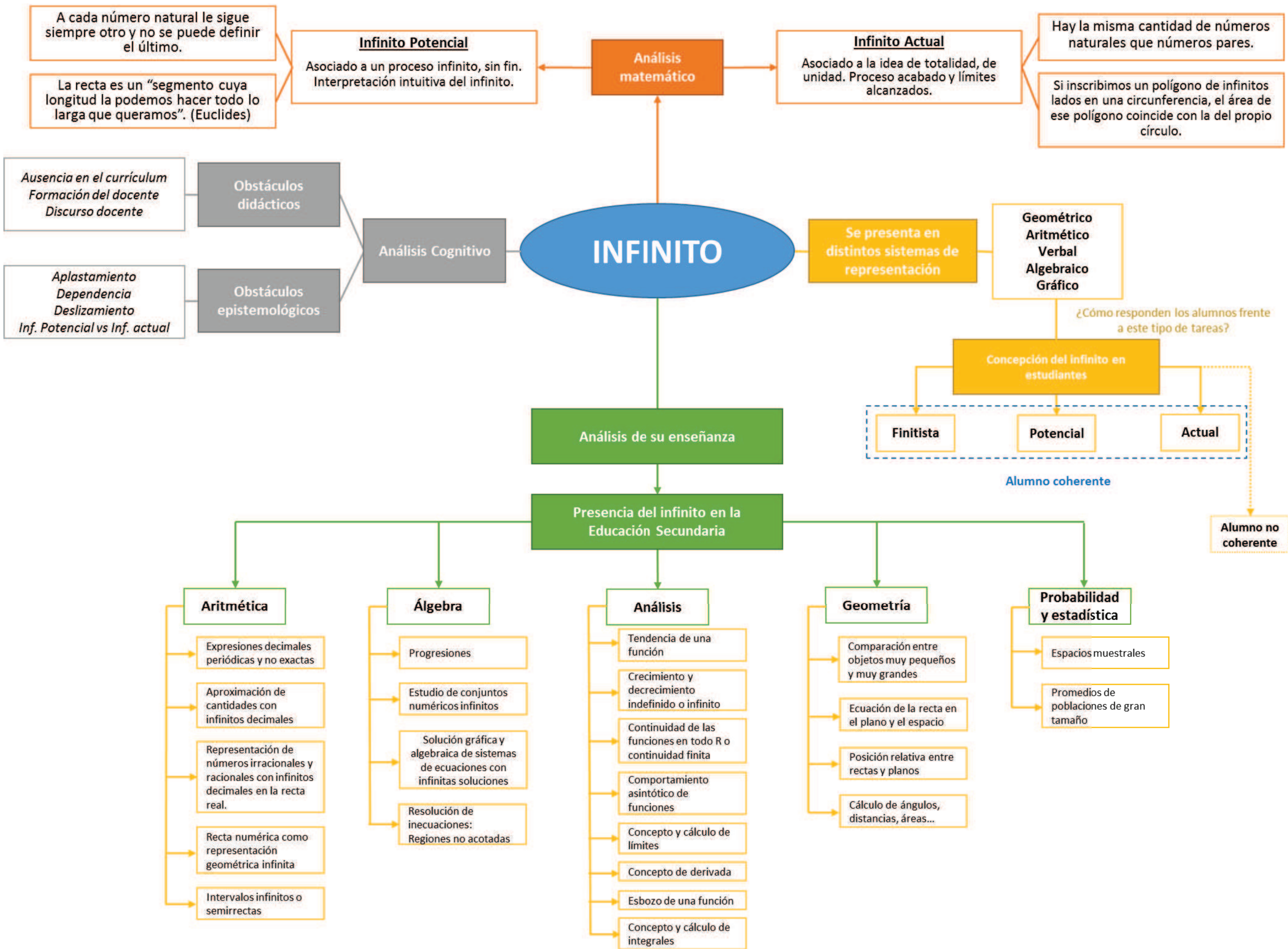


Figura 3.1. Mapa conceptual.

4.METODOLOGÍA

Como ya se ha comentado anteriormente, el objeto principal del estudio es identificar las concepciones que tienen los estudiantes de 1º de bachiller de la rama de CCSSHH acerca del infinito antes y después de haber estudiado el concepto de límite y, posteriormente, llevar a cabo un análisis comparativo de dichas concepciones.

Así, en este epígrafe se describe la metodología llevada a cabo en la investigación para alcanzar el objetivo descrito en el párrafo anterior.

4.1. Participantes

En el estudio han participado los alumnos de 1º de bachiller de CCSSHH de un instituto concertado de Valencia que estaban presentes en el aula los días que se pasaron los cuestionarios a partir de los cuales estudiar la concepción del infinito. De esta forma, se obtuvieron un total de 43 cuestionarios previos y 46 cuestionarios finales.

La elección de este centro para la realización del estudio es debido a que el alumno que ha desarrollado este Trabajo Final de Máster ha realizado las prácticas del máster en este instituto.

Se trata de un centro concertado religioso situado en el barrio de Campanar de la ciudad de Valencia. El centro se caracterizada por acoger, principalmente, a estudiantes procedentes de familias con un nivel socioeconómico medio-alto.

El colegio cuenta con 3 etapas educativas: primaria, secundaria y ciclos formativos. En cuanto a la etapa de secundaria, cabe destacar los 4 grupos de bachiller que hay en cada uno de los cursos, lo que supone un total de 280 alumnos, siendo aproximadamente la mitad de ellos de CCSSHH. Entre todos suman alrededor de 1000 alumnos en esta etapa, siendo el claustro de secundaria de 75 profesores y, de ellos, 11 de matemáticas.

4.2. Diseño y puesta en práctica de los cuestionarios

El diseño de los cuestionarios para evaluar las concepciones de los alumnos en cuanto al concepto de infinito es una de las partes más importantes del estudio, puesto que de la calidad de los mismos depende en gran medida los resultados que se extraigan de la investigación.

Lo primero que se deberá realizar es recopilar todos los cuestionarios que se han considerado en las investigaciones consultadas y que han sido, la mayoría, citadas en el capítulo relativo al Marco Teórico del estudio. En este sentido, cabe destacar el trabajo desarrollado por Belmonte (2009), pues en uno de los anexos de esta investigación se han recogido la gran mayoría de los ítems utilizados por los investigadores en materia del infinito.

Después de consultar toda esta información se elaborará una batería de actividades o ítems en los que se recoja el concepto de infinito bajo los distintos sistemas de representación en los que se puede presentar y abarcando todos los tópicos en los que se puede trabajar el concepto. En cuanto al tipo de pregunta, se elaborarán tanto preguntas de tipo abierto como de opción múltiple, pero siempre agregando “*Justifica tu respuesta*”.

Esta última tarea será de especial importancia en la investigación, pues en cada uno de los cuestionarios se deberá presentar el concepto en distintos sistemas de representación con el fin de contrastar la hipótesis del estudio relativa a que las concepciones de los estudiantes dependen en gran medida del sistema de representación en el que se presenta el concepto de infinito. Hipótesis del estudio que está fundamentada en las conclusiones observadas en las investigaciones de Monaghan (2001), Garbin y Azcárate (2001) y Garbin (2005a) analizadas en el marco teórico presentado al comienzo de la presente investigación.

Cada uno de los cuestionarios constará de entre 10 y 15 preguntas, pudiendo incorporar cada uno de los ítems varios apartados. La limitación en la cantidad de preguntas viene determinada a partir de que en cada uno de los cuestionarios deben estar patentes todos los sistemas de representación y, a su vez, todos los tópicos relacionados con el infinito, pues lo que se busca es que en un mismo cuestionarios se den parejas de actividades en las que se presente el concepto de infinito bajo un mismo tópico pero presentado en distintos sistemas de representación. Con ello se busca potenciar el posterior análisis de los resultados. Además, existe la limitación temporal que, en este caso, se fija en 50 minutos, pues la duración de las clases en el centro es de 55 minutos.

Cabe señalar que, además de los ítems, en cada uno de los cuestionarios también se recogerá información acerca de cada uno de los individuos. En este sentido, se tomarán datos relativos al sexo, edad, nota obtenida en el curso anterior, el tipo de matemáticas cursadas en 4º de ESO (A o B) y si el alumno ha estudiado previamente los conceptos de límite o sucesión. El principal objeto de la recogida de este tipo de datos es para un posible estudio en el que se puedan incluir este tipo de variables.

Por último, se debe mencionar cómo se va a llevar a cabo la puesta en práctica de los cuestionarios. El primero de ellos se propondrá antes del comienzo de la unidad didáctica relativa al concepto de límites, mientras que el segundo de ellos se pasará tras haber realizado los alumnos el examen parcial de la tercera evaluación, pues este está programado tras la finalización de dicha unidad didáctica. De este modo, el cuestionario previo se pasará el día 21 de marzo de 2014 y el final el día 9 de mayo.

Cuando se vaya a pasar cada uno de los cuestionarios, se deberá informar a los alumnos que el cuestionario no es para evaluar sus conocimientos, sino que es una tarea para realizar una investigación acerca del concepto de infinito. Se les pedirá a los alumnos que lo hagan individualmente, puesto que consultar con el compañero sesgaría el estudio, y que lo hagan de forma natural y prestando atención a lo que se pide en cada ítem. Seguidamente se les indicará la forma en que se debe contestar a las preguntas, haciendo hincapié en que es muy importante que expresen el porqué de la respuesta dada, pues es lo más interesante para posteriormente estudiar la forma de razonar de los alumnos. Por último, se realizará una lectura del cuestionario para resolver alguna duda relacionada con alguna cosa que pudiera ser malentendida y se les comunicará que disponen de 50 minutos para la realización del cuestionario, tiempo más que suficiente para detenerse y razonar cada una de las actividades propuestas.

4.3. Metodología de análisis

Una vez puesta en práctica cada uno de los cuestionarios se deberá evaluar los resultados obtenidos en cada uno de ellos de forma separada y, a continuación, se deberá realizar un análisis comparativo de las concepciones que los estudiantes tienen acerca del concepto de infinito antes y después del estudio del tema relativo al concepto de límite.

Para identificar las concepciones que los estudiantes tienen del infinito se considerarán los distintos modelos intuitivos considerados por Belmonte y Sierra (2011), que han sido recogidos en el apartado relativo al marco teórico de la investigación.

No obstante, se debe ser consciente de que uno de estos modelos no se va a presentar en todos los estudiantes, ni que todos los estudiantes van a actuar bajo un mismo modelo en todas sus respuestas. Por ello, será conveniente analizar cada uno de los ítems de cada uno de los cuestionarios de forma individualizada y, posteriormente, evaluar qué modelo o modelos son los que tienen mayor presencia en los estudiantes y definir la concepción que los estudiantes tienen sobre del concepto de infinito antes y después del estudio del concepto de límite.

Una vez realizada la evaluación para cada uno de los cuestionarios y determinados los modelos intuitivos que predominan en cada una de las situaciones analizadas, el paso final será comparar los resultados obtenidos, analizarlos y contrastar las distintas hipótesis de la investigación.

5.DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

En este capítulo se desarrollará cada una de las tareas que han sido enunciadas en el capítulo anterior relativo a la metodología de la investigación. Por un lado, se detallarán los aspectos más importantes relativos a la elaboración y puesta en práctica de los cuestionarios y, por otro lado, se realizará un análisis individualizado de cada uno de los ítems que componen los dos cuestionarios utilizados en el presente estudio.

5.1. Análisis de los cuestionarios

5.1.1. Contenido de los cuestionarios

Cada uno de los cuestionarios debía contener actividades en los que el concepto de infinito estuviese presente bajo los distintos sistemas de representación y, además, atendiendo a los diferentes tópicos en los que se ve involucrado el infinito.

De esta forma, se fueron distribuyendo los distintos ítems elaborados para el desarrollo del estudio en cada uno de los cuestionarios de forma que en ambos hubiese el mismo tipo de cuestiones en los que se tratase el infinito desde los diferentes sistemas de representación y contextos.

En la Tabla 5.1 se ha llevado a cabo una clasificación de los ítems del cuestionario previo en función del sistema de representación y tópico presente en cada uno de ellos. Cada uno de los números de estas cuestiones vienen precedidos de la letra P, indicando que se trata de una actividad del cuestionario previo.

Sistemas de representación	Tópicos				
	Conjuntos	Divisibilidad	Convergencia	Operatividad	Lenguaje
Numérico	P1-P9		P6	P11	
Geométrico	P2-P3	P7	P5-P7		
Gráfico	P10			P8	
Verbal		P4		P13	P12

Tabla 5.1. Ítems del cuestionario previo.

Del mismo modo, en la Tabla 5.2 se ha realiza la misma clasificación pero en este caso para el cuestionario final, por eso la letra que precede al número de cada cuestión es la F.

Sistemas de representación	Tópicos				
	Conjuntos	Divisibilidad	Convergencia	Operatividad	Lenguaje
Numérico	F1-F9		F6	F10	
Geométrico	F2	F4	F4-F7		
Gráfico				F8	
Verbal		F3	F3-F5		F11

Tabla 5.2. Ítems del cuestionario final.

En este sentido, es menester destacar que no es posible realizar un análisis de cada uno de los ítems para justificar su clasificación en las tablas anteriores debido principalmente a la limitación de espacio de la que se dispone para la redacción de este trabajo.

Por último, citar que ambos cuestionarios quedan recogidos en el Anexo I del presente trabajo y en el Anexo II se muestran todos los ítems utilizados en el estudio organizados según sus características matemáticas.

5.1.2. Puesta en práctica de los cuestionarios

La puesta en práctica de los cuestionarios se llevó a cabo sin ningún tipo de problema ni imprevisto. Todos los estudiantes pudieron acabar su cuestionario en el tiempo disponible para la realización de la tarea.

Cabe destacar la gran participación del alumnado y la disposición que ofrecieron la mayoría de ellos a la hora de llevar a cabo la tarea. Aunque se les comentó a los alumnos que esta prueba no iba a tener consecuencias en la nota del curso, la actitud con la que se enfrentaron a la tarea fue muy positiva.

Asimismo, se piensa que la experiencia fue muy enriquecedora para los alumnos, pues tras desarrollarla, muchos de ellos acudieron al profesor o a mí mismo para preguntar dudas sobre la solución de varios de los ítems. En definitiva, la investigación despertó cierto interés sobre las matemáticas en muchos de los alumnos.

5.2. Análisis de las respuestas de los estudiantes

Una vez puestos en práctica cada uno de los cuestionarios ya se disponía de los datos brutos para llevar a cabo la investigación. Ahora se trata de evaluar y analizar las respuestas obtenidas.

Como ya se ha comentado en el capítulo *4. Metodología*, previamente a determinar las concepciones que los alumnos tienen antes y después del estudio del concepto de límite, se debe realizar una evaluación de las respuestas obtenidas para cada uno de los ítems de forma individualizada.

Así pues, este apartado del trabajo trata de analizar dichas respuestas distinguiendo el cuestionario donde aparecen y estructurándolas en función del sistema de representación en el que se presenta el concepto de infinito, puesto que las concepciones de los estudiantes dependerán en gran medida del sistema en el que se presente el concepto y, entonces, esta organización facilitará el posterior análisis global de cada uno de los cuestionarios y permitirá identificar las concepciones de los alumnos bajo cada sistema de representación y cuál es la predominante en cada uno de los cuestionarios, tareas que se presentarán en el siguiente capítulo de la investigación.

5.2.1. Cuestionario previo

5.2.1.1. Sistema de representación: Numérico

Ítem P1. El primer ítem en analizar estudia el concepto de infinito bajo los conjuntos numéricos. En este ítem se ha obtenido (Figura 5.1) un 67 % de alumnos que piensa que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de números, un 21 % que creen que el conjunto T tiene menos elementos que el N y un 7 % que afirman que no se puede determinar (Figura 5.2).

1-	Tenemos dos conjuntos de números, los naturales N={1, 2, 3, 4, 5, 6…} y los triangulares T={1, 3, 6, 10, 15, 21…}. ¿Cuál de los dos conjuntos crees que tendrá más números? **Explica tu respuesta**.

Figura 5.1. Enunciado del ítem P1.

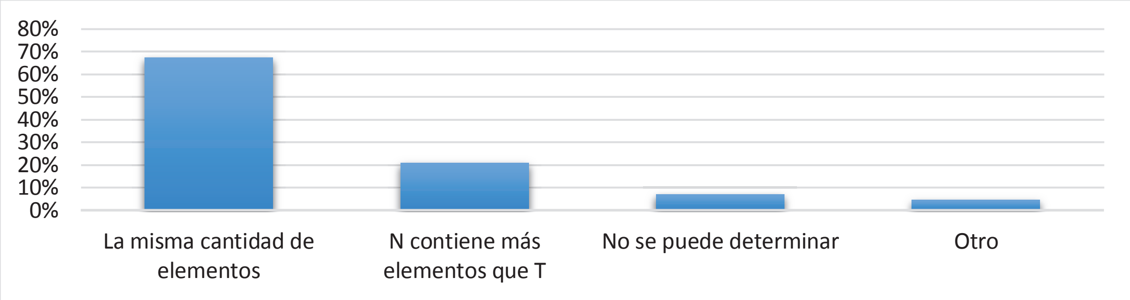


Figura 5.2. Respuestas al ítem P1.

Entre aquellos estudiantes que piensan que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos (Figura 5.3), la justificación que más se repite es “porque ambos conjuntos son infinitos”, lo que pone de manifiesto el modelo intuitivo de infinito = infinito, y, en segundo lugar, se encuentra la explicación “porque no están acotados”, que está asociado al modelo intuitivo acotado-finito/no acotado-infinito. Como se puede apreciar, apenas un 7 % de los alumnos explican la respuesta a partir de razonamientos donde está presente la idea de biyección.

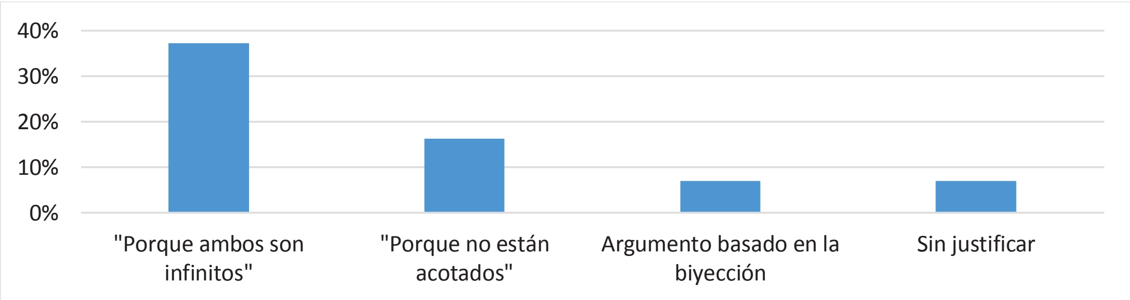


Figura 5.3. Justificaciones de que los conjuntos de P1 tienen la misma cantidad de elementos.

Por otro lado, la respuesta “N tiene más elemento que T” viene justificada a través de que el conjunto de los números naturales contiene a todos los números y el de los triangulares no, mostrando el modelo intuitivo de inclusión. Por último, la respuesta “no se puede determinar”, está ligado al modelo intuitivo de indefinición.

Ítem P6. En este ítem se presenta el infinito bajo el contexto de convergencia (Figura 5.4). De las cuatro respuestas que conforman esta cuestión la que más presencia ha tenido ha sido “Crece indefinidamente” (44 %), lo que deriva del pensamiento “siempre que esté sumando, la suma crece sin parar”, lo que lleva al modelo intuitivo de divergencia. La segunda opción más escogida, “se acerca indefinidamente a un número” (23 %), está asociado a una concepción potencial del infinito. Y, por último, se debe destacar el alto número de alumnos (19 %) que han escogido la respuesta b, en la que se supone que los estudiantes han considerado el comportamiento de los términos que componen la suma (Figura 5.5).

6- Dada la suma $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$, su resultado, según vamos añadiendo una nueva fracción es:

a. Crece indefinidamente

b. Decrece indefinidamente

c. Se acerca indefinidamente a un número

d. Otra respuesta. Indica cual.

Justifica tu respuesta

Figura 5.4. Enunciado ítem P6.

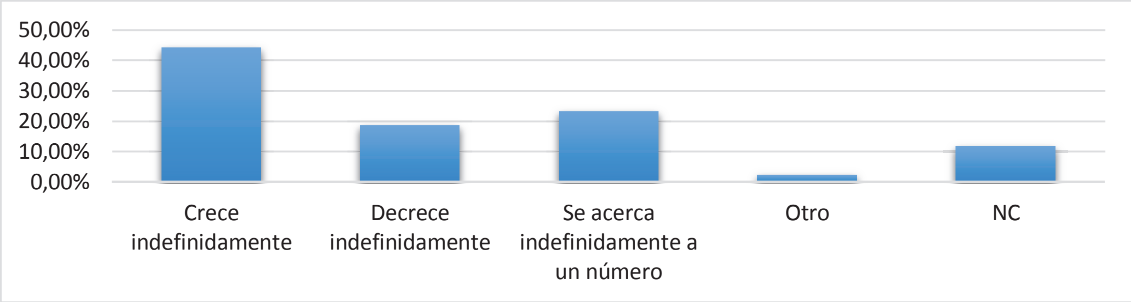


Figura 5.5. Respuestas del ítem P6.

<u>Ítem P9.</u> En este ítem también se trabaja con los conjuntos numéricos (Figura 5.6). En relación a la primera cuestión que presenta este ítem, cabe destacar que el 45 % de los alumnos es incapaz de definir correctamente el comienzo y final de este intervalo, que el 35 % sí es consciente de la incapacidad de definir el número donde empieza el intervalo y que hay un alto tanto por cien de alumnos que no contestan (14 %). En este sentido, muchos son los alumnos que afirman que el intervalo comienza en *-∞* o *2'000...1*.

9- Considera el intervalo]2, 5]:
A) ¿Podrías decir en qué número comienza y termina el mismo? **Explica tu respuesta**.
B) ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo anterior o en el intervalo [2, 6]? **Justifica la respuesta**.

Figura 5.6. Enunciado ítem P9.

En cuanto a la segunda cuestión, el 56 % de los estudiantes afirma que hay la misma cantidad de números en uno y otro conjunto, justificándolo la inmensa mayoría diciendo "porque los dos intervalos tienen infinitos números", lo que lleva al modelo intuitivo de infinito = infinito. Por otro lado, el 37 % afirma que "el intervalo [2, 6] contiene más números que el]2, 5] porque el primero es más grande", ligado al modelo intuitivo de inclusión (Figura 5.7).

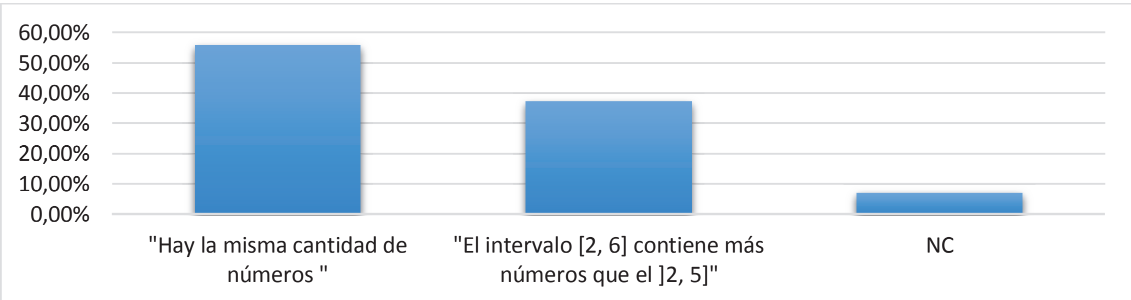


Figura 5.7. Respuestas al ítem P9.

<u>Ítem P11.</u> Este ítem está integrado dentro del contexto de operatividad (Figura 5.8). En este sentido, este ítem muestra como uno de cada tres alumnos piensa que $0'\hat{9} < 1$, lo que pone de manifiesto que asocian al $0'\hat{9}$ una cantidad finita de nueves y, por ello, muestra una concepción finitista. Por otra parte, la opción $0'\hat{9} = 1$ es la más escogida (60 %), mostrando una concepción actual del infinito (Figura 5.9).

11- Señala la respuesta verdadera. **Justifica tu respuesta.**
a. $0'\hat{9} < 1$
b. $0'\hat{9} = 1$
c. $0'\hat{9} > 1$

Figura 5.8. Enunciado ítem P11.

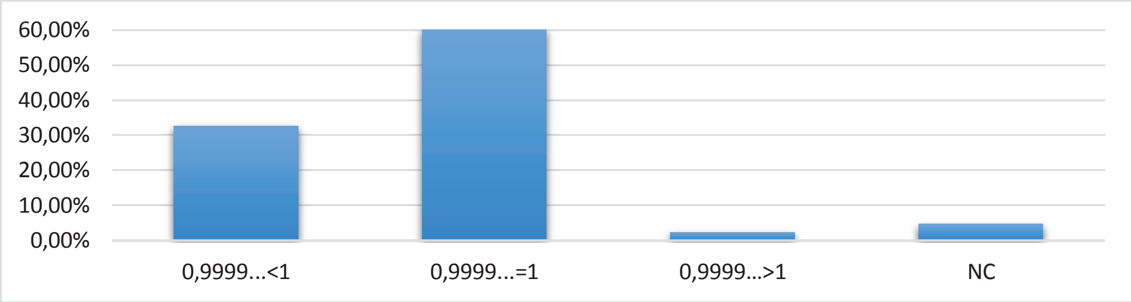


Figura 5.9. Respuestas al ítem P11.

5.2.1.2. *Sistema de representación: Geométrico*

Ítem 2. Este primer ítem encuadrado en este sistema de representación trabaja el infinito desde el contexto de conjuntos (Figura 5.10). En cuanto a las respuestas de los alumnos, se debe destacar aquellas que muestran que los dos segmentos tienen la misma cantidad de elementos (60 %) y que *b* tiene más puntos que *a* (21 %), lo que se puede observar en la Figura 5.11.

2- ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos? **Explica tu respuesta**.

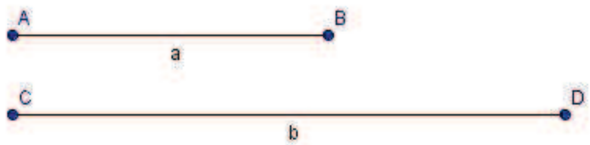


Figura 5.10. Enunciado ítem P2.

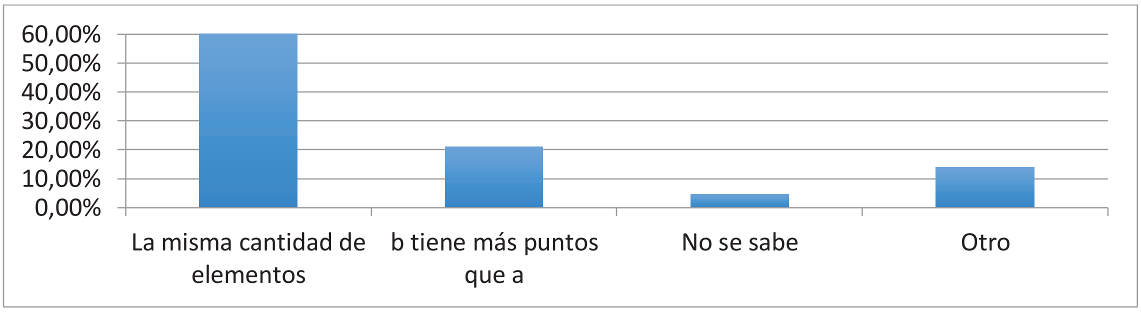


Figura 5.11. Respuestas al ítem P2.

Con respecto a la segunda respuesta dada, cabe destacar que la totalidad de sus razonamientos se deben a que *b* es más grande que *a*, lo que conduce al modelo intuitivo de inclusión.

Por otro lado, dentro de la respuesta “La misma cantidad de elementos”, se debe destacar el razonamiento “porque ambos tienen infinitos puntos”, pues contiene un 51 % del total de respuestas, mostrando el papel principal en esta pregunta del modelo intuitivo de infinito = infinito (Figura 5.12). No obstante, se debe destacar que 2 de los alumnos han contestado “por la misma razón que en 1”, mostrando la importancia de la tarea de conexión en este tipo de actividades.

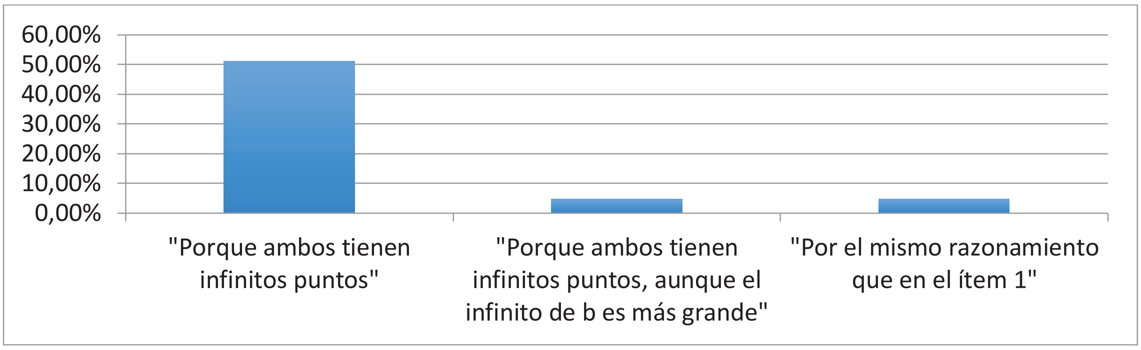


Figura 5.12. Justificaciones de que los segmentos de P2 tienen la misma cantidad de elementos.

<u>Ítem P3.</u> Esta cuestión, que se engloba dentro del sistema de representación geométrico, trabaja el infinito bajo el contexto de los conjuntos (Figura 5.13).

3- Dado un cuadrado de 5 cm de lado, ¿dónde hay más puntos, en el interior del mismo o en uno de sus lados? **Justifica tu respuesta**.

Figura 5.13. Enunciado del ítem P3.

Comparando los resultados con los del anterior ítem, se puede decir que el modelo infinito = infinito, que viene representado por la respuesta “Ambos tienen los mismos puntos”, puesto que la inmensa mayoría lo justifica diciendo que en ambos elementos hay infinitos puntos, ha disminuido al 56 %. De esta forma, el modelo de inclusión, representado por la respuesta “El cuadrado tiene más puntos que el segmento”, cobra mayor importancia (26 %). Por último, señalar que al igual que en el ítem 2, el modelo de indefinición, representado por aquellos alumnos que afirman que no se puede calcular o determinar, se muestra con un tanto por ciento bastante bajo (5 %).

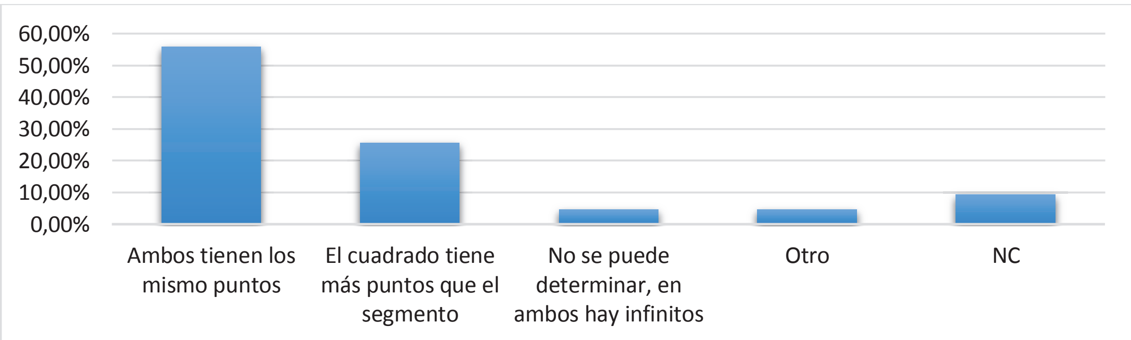


Figura 5.14. Respuestas del ítem P3.

<u>Ítem P5.</u> Esta cuestión, relativa al sistema de representación geométrico, trabaja el infinito bajo el contexto de convergencia (Figura 5.15).

5- Si tienes un conjunto de segmentos tal que el siguiente es la mitad del anterior y los unes, ¿cuánto medirá el segmento resultante?

a. No se puede calcular

b. 3 metros

c. Infinito

d. 2 metros

Explica tu respuesta

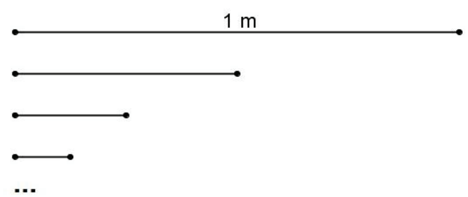


Figura 5.15. Enunciado del ítem P5.

En esta cuestión se observa de manera muy clara como el modelo de divergencia es el que más presente está en los estudiantes, pues la respuesta “infinito” (74 %) predomina significativamente sobre “2 metros” (12 %), que es la respuesta que representa una concepción actual del infinito (Figura 5.16).

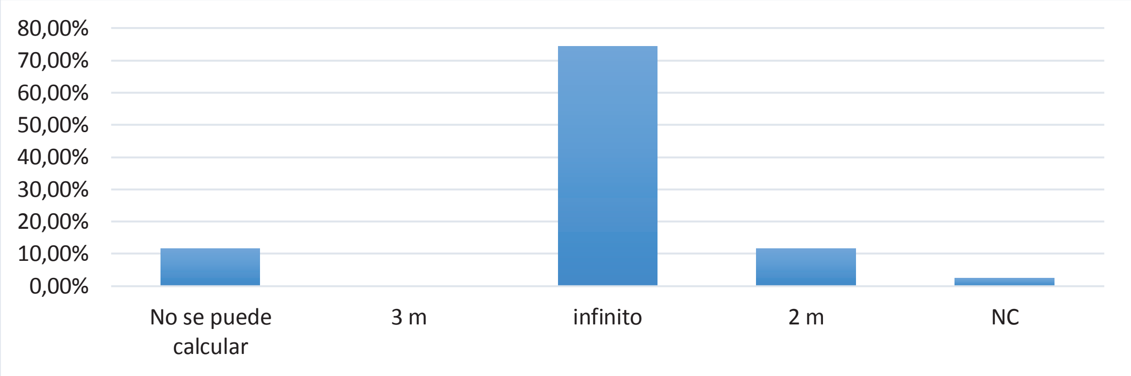


Figura 5.16. Respuestas al ítem P5.

<u>Ítem P7.</u> En esta actividad, el infinito se presenta a partir de los contextos de convergencia y divisibilidad (Figura 5.17). En la primera de las cuestiones predomina la respuesta “no tiene fin” con un 91 %, lo que describe que los alumnos son conscientes de la presencia de un proceso infinito (Figura 5.18).

7- Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

A) ¿Tiene fin este proceso? **Explica tu respuesta**

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

b. Una cantidad infinita

c. No se puede calcular

Justifica tu respuesta

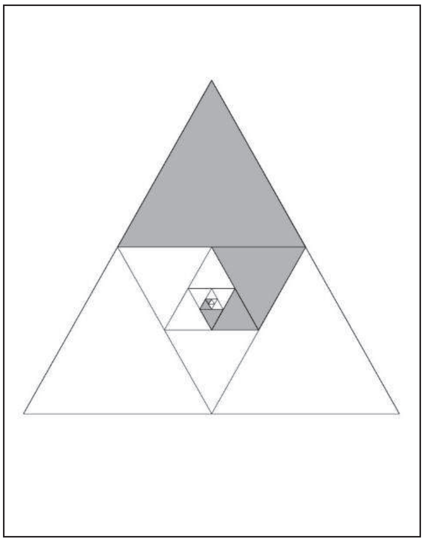


Figura 5.17. Enunciado del ítem P7.

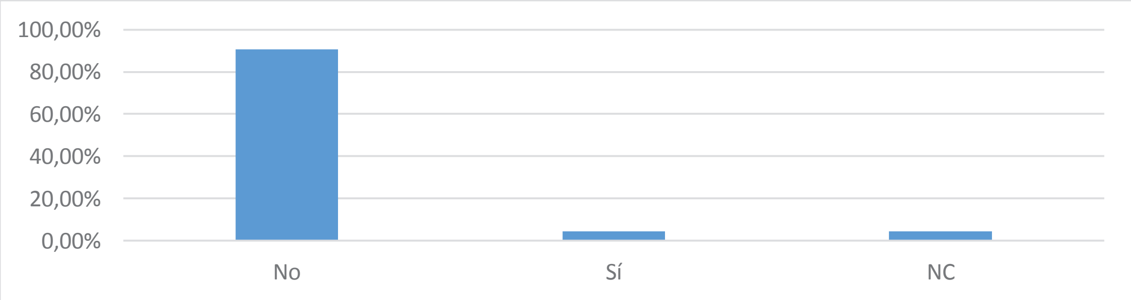


Figura 5.18. Respuestas a la primera cuestión del ítem P7.

En cuanto a la segunda de las cuestiones, se observa una clara tendencia del alumno hacia el modelo de divergencia, pues la respuesta “Una cantidad infinita” viene representada por el 60 % de los alumnos, al igual que ocurre en el ítem 6 del cuestionario. No obstante, en este ítem la respuesta “No se puede calcular”, que muestra el modelo intuitivo de indefinición, toma mayor importancia que "Una cantidad finita", que muestra una concepción actual del infinito derivada del modelo acotado-finito (Figura 5.19).

Figura 5.19. Respuestas a la segunda cuestión del ítem P7.

5.2.1.3. Sistema de representación: Gráfico

<u>Ítem P8.</u> Esta actividad, relativa al sistema de representación gráfico, presenta el infinito bajo el contexto de operatividad (Figura 5.20). En este sentido, cabe destacar que la inmensa mayoría de los alumnos afirman que la función no alcanzará el valor y=2 (84 %).

8- Describe que ocurre cuando la función toma valores muy grandes de *x*. ¿Alcanzará en algún punto la función el valor y=2?

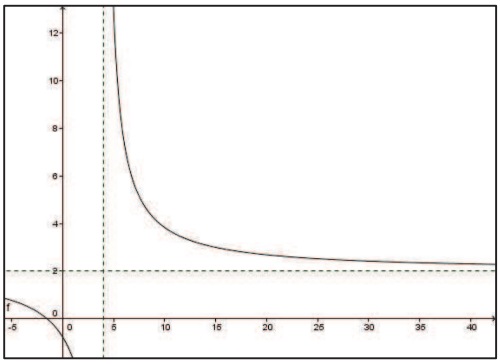


Figura 5.20. Enunciado del ítem P12.

De entre todas las justificaciones acerca de la respuesta citada, cabe destacar "porque la asíntota no se puede cruzar", que es una concepción errónea de los estudiantes, y "se acercará mucho pero nunca llegará a 2", que muestra una noción potencial del infinito como proceso infinito sin fin (Figura 5.21).

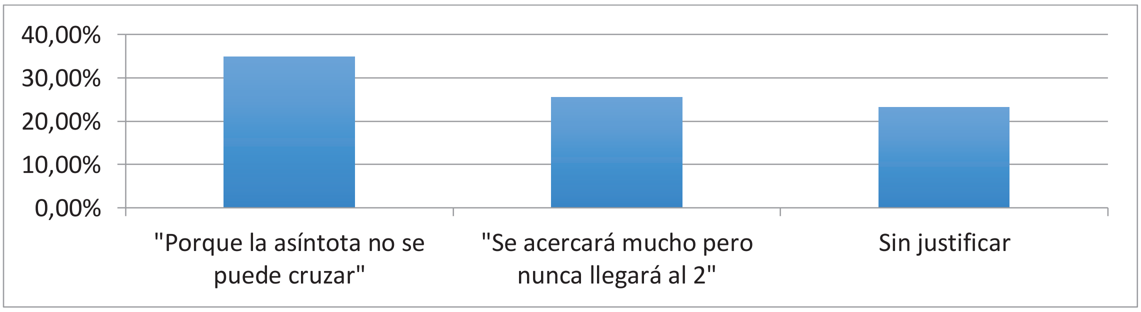


Figura 5.21. Justificación a la respuesta "no" del ítem P8.

<u>Ítem P10.</u> Este otro ítem relativo a este sistema de representación presenta el infinito bajo el contexto de conjuntos (Figura 5.22).

10- Observa la siguiente función cuadrática $y=x^2+x+1$. Si cogemos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable *x* o en el tramo de curva AB? **Explica tu respuesta.**

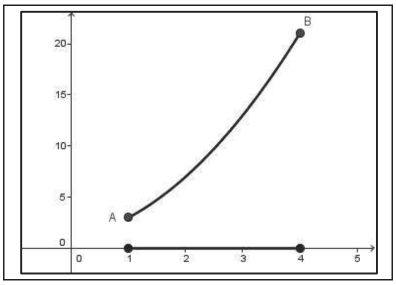


Figura 5.22. Enunciado del ítem P10.

En esta actividad, la inmensa mayoría de los estudiantes han contestado que en ambas líneas existe el mismo número de puntos (79 %) y, dentro de la misma, cobra mucha mayor importancia la justificación “Porque ambas tienen infinitos puntos” (67 %), que representa el modelo infinito = infinito, que la explicación a partir del concepto de función (5 %), que determina una concepción actual del infinito (Figura 5.23).

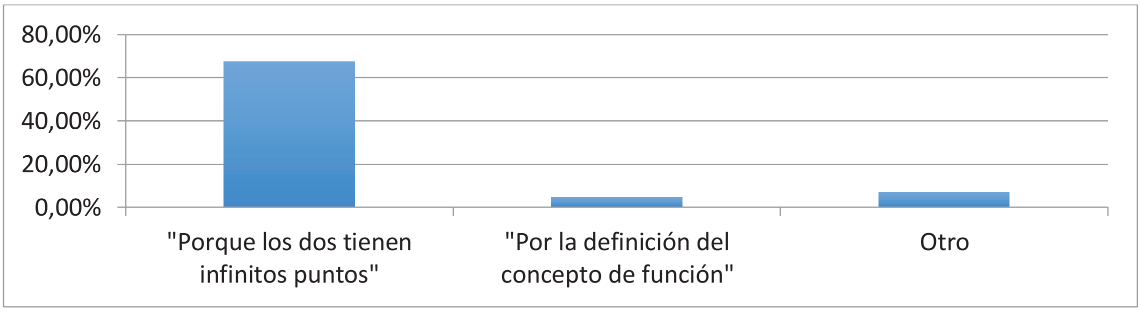


Figura 5.23. Justificación a la respuesta “en ambas hay los mismos puntos” del ítem P10.

5.2.1.4. Sistema de representación: Verbal

Ítem P4. En cuanto a este sistema de representación, este primer ítem trabaja bajo el contexto de divisibilidad (Figura 5.24).

4- Imagínate que tienes una hoja de papel. La divides en dos trozos iguales y te quedas con uno de ellos. La parte con la que te has quedado la vuelves a dividir en dos partes iguales y te quedas con una de ellas. Y así sucesivamente. ¿Se podrá repetir el proceso tantas veces como quiera? **Justifica tu respuesta.**

Figura 5.24. Enunciado del ítem P4.

A la vista de la Figura 5.25, se puede observar como las respuestas “No, porque llegará un momento que el papel será muy pequeño y no se pueda dividir” y “Sí matemáticamente, pero no físicamente” obtienen entre ambas un 65 %, mostrando la gran importancia de la limitación física del problema en los alumnos. Por otro lado, el 28 % de los alumnos sí afirma que se puede hacer todas las veces que queramos, aceptando que se trata de un proceso infinito.

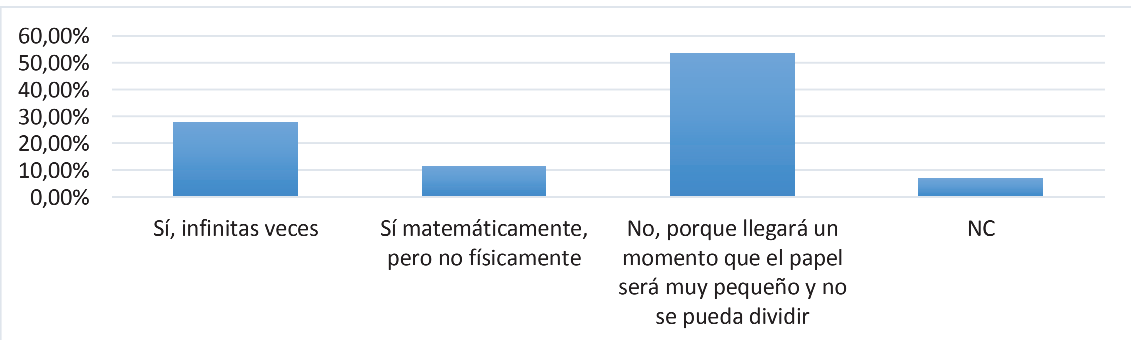


Figura 5.25. Respuestas al ítem P4.

Ítem P12. En este ítem se ha estudiado el significado que posee la palabra infinito en los alumnos, es decir, en un contexto de lenguaje (Figura 5.26). Observando la Figura 5.27, se puede decir que las interpretaciones más presentes en los estudiantes son "Sin fin", "Interminable" o "Sin límite", que hacen referencia a la noción potencial del infinito.

12- Escribe al menos 3 palabras, frases o expresiones que signifiquen lo mismo que infinito.

Figura 5.26. Enunciad del ítem P12.

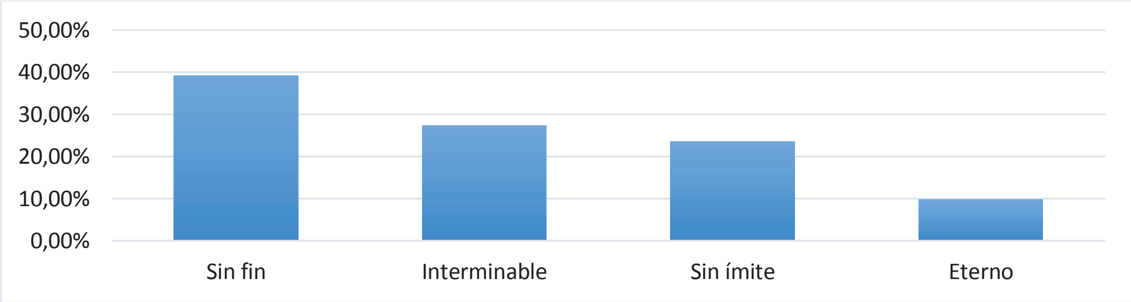


Figura 5.27. Respuestas al ítem P12.

Ítem P13. En este último ítem se trabaja el infinito en el contexto de operatividad (Figura 5.28). A través de este ítem se confirma que los alumnos no son conscientes de los distintos tamaños de infinito matemático (70 %), lo que justifica en cierta manera el predominio en muchos de los ítems del modelo infinito = infinito. Además, cabe destacar que de aquellos alumnos que dicen que "sí existen diferentes tamaños de infinito" (19 %), lo justifican diciendo "porque alguna vez lo han oído en clase" (Figura 5.29).

13- ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos. En caso contrario, justifica tu respuesta.

Figura 5.28. Enunciado del ítem P13.

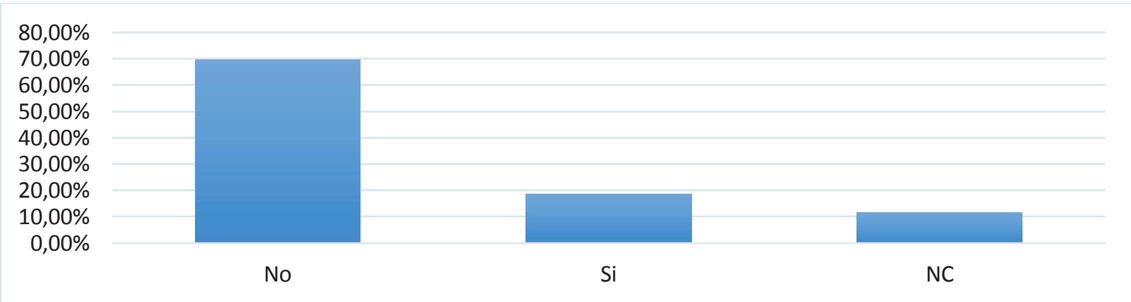


Figura 5.29. Respuestas del ítem P13.

5.2.2. Cuestionario Final

5.2.2.1. Sistema de representación: Numérico

Ítem F1. El primer ítem que se presenta en este cuestionario relativo a este sistema de representación opera con el infinito en el contexto de conjuntos (Figura 5.30).

1- Imagínate que al conjunto de los número naturales N={1, 2, 3, 4…} le quitamos un millón de números. a. ¿Cuántos quedan? **Explica tu respuesta**. b. ¿Qué conjunto de los siguientes tiene más números? **Razona tu respuesta** {1, 2, 3, 4, 5,…} o {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,…}

Figura 5.30. Enunciado del ítem F1.

En cuanto a la primera de las cuestiones, cabe destacar el gran número de estudiantes que afirma que “quedan infinitos números” (85 %), que responden al modelo no acotado-infinito, frente al reducido número que dicen que “que queda una cantidad finita” (2 %), que se corresponde con una noción finitista del infinito.

Por otro lado, la Figura 5.31 muestra los resultados de la segunda cuestión. En este cabe destacar “Los mismos. Ambos tienen infinitos números”, que responde al modelo infinito = infinito. Destacar también que el modelo de inclusión, representado por “N tiene más números”, y la cantidad de alumnos que se basan en la biyección es muy reducido en ambos casos (2 % y 4 %, respectivamente).

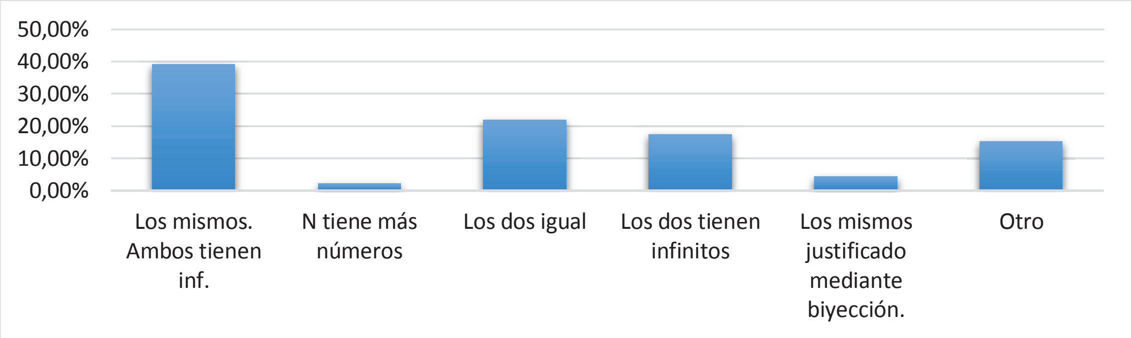


Figura 5.31. Respuestas a la segunda cuestión del ítem F1.

<u>Ítem F6.</u> Al igual que en el ítem anterior en este se muestra el concepto de infinito a través del sistema de representación numérico, pero en este caso se trabaja bajo el contexto de convergencia (Figura 5.32).

6- Dada la suma $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$, su resultado, según vamos añadiendo una nueva fracción es:

a. Crece indefinidamente

b. Decrece indefinidamente

c. Se acerca indefinidamente a un número

d. Otra respuesta. Indica cual.

<u>Justifica tu respuesta</u>

Figura 5.32. Enunciado del ítem F6.

De este ítem cabe destacar la gran parte de alumnos que afirma que la suma “Se acerca a un número” (63 %), alejándose así de la concepción del infinito bajo el modelo de divergencia, que viene de la mano de las opciones *a* y *b*, que representan un 22 % de las respuestas conjuntamente (Figura 5.33).

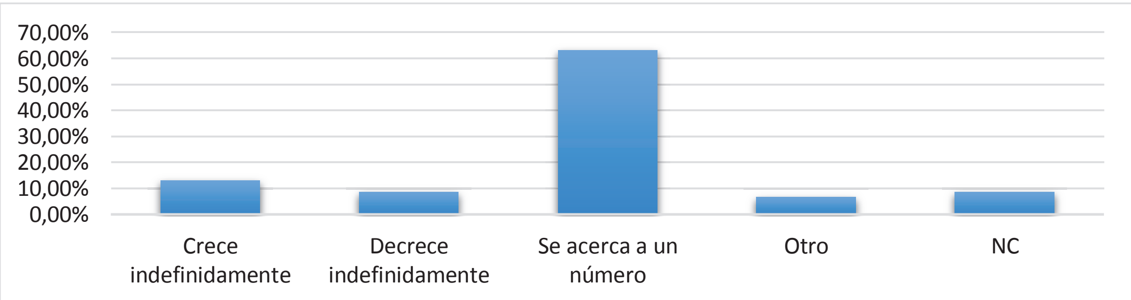


Figura 5.33. Respuestas al ítem F6.

<u>Ítem F9.</u> Esta actividad trabaja el infinito bajo el contexto de conjuntos (Figura 5.34). En cuanto a la primera cuestión planteada, se debe destacar el alto tanto por cien de alumnos que no han

definido correctamente los intervalos (52 %), donde muchos de ellos asocia el extremo del intervalo abierto a *+∞* o *20.999…* (Figura 5.35).

9- Considera los intervalos [5, 10] y [1, 21):
a. ¿Podrías decir en qué número comienza y acaba cada uno de los intervalos? **Explica tu respuesta**
b. ¿Puedes representar estos dos intervalos en la recta real? ¿En qué intervalos crees que hay más número reales? **Justifica la respuesta**

Figura 5.34. Enunciado del ítem F9.

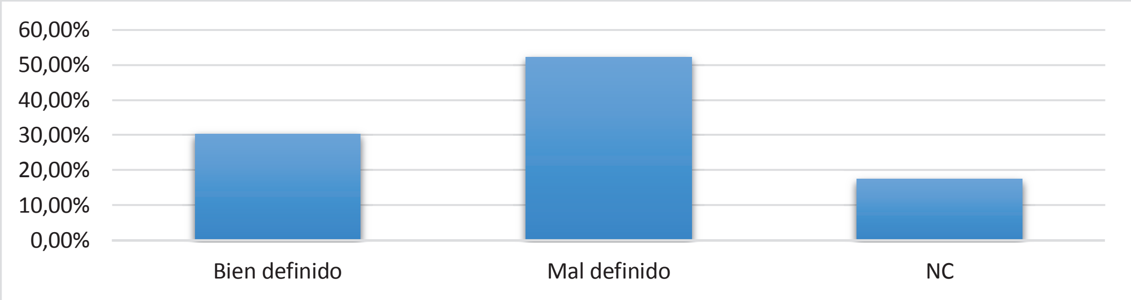


Figura 5.35. Respuesta a la primera cuestión del ítem F9.

Por otro lado, en la Figura 5.36 se observa como en la segunda de las cuestiones un alto tanto por ciento de alumnos ni siquiera han contestado (24 %), mientras que entre los que lo han hecho predomina la respuesta “Los mismos en ambos” (43 %), justificado principalmente “porque en ambos conjuntos hay infinitos números”, por lo que puede ser asociado al modelo infinito = infinito. Además, se debe destacar el bajo número de alumnos que actúan bajo el modelo de inclusión, relativo a la respuesta “En [1,21) hay más que en [5, 10]” (11 %).

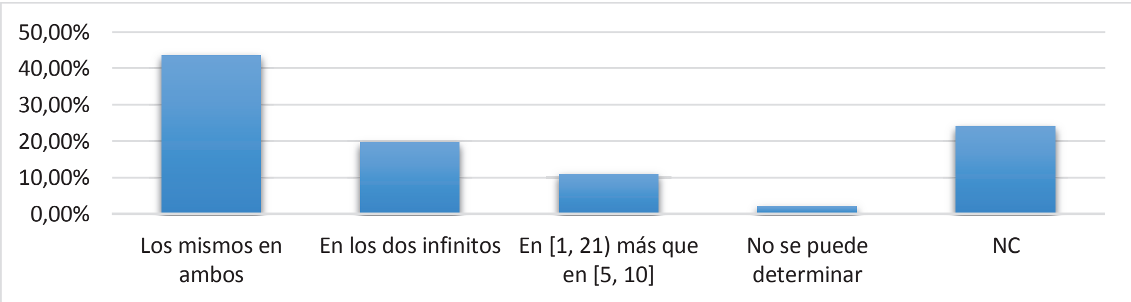


Figura 5.36. Respuesta a la segunda cuestión del ítem F9.

Ítem F10. Este ítem es el último que hace referencia al sistema de representación numérico, en el que se presenta al infinito en el contexto de operatividad (Figura 5.37).

10- A) ¿Existe algún número entre $2'\hat{9}$ y 3?
a. Sí. Escribe uno
b. No. ¿Por qué?
B) ¿Podrías calcular $2'\hat{9} + 1'\hat{5}$? En caso afirmativo calcula la suma, en caso negativo **justifica tu respuesta.**

Figura 5.37. Enunciado del ítem F10.

En la primera cuestión, cuyos resultados se reflejan en la Figura 5.38, se pone de manifiesto el predominio de la noción infinitista (No) frente a la finitista (Sí). Con relación a estas respuestas, cabe destacar que la gran mayoría que contesta “No” lo hace diciendo que “$2'\hat{9}$ es igual a 3”, mientras que los que dicen que “Sí”, escriben un número con una cantidad finita de nueves, por ejemplo, *2’999*.

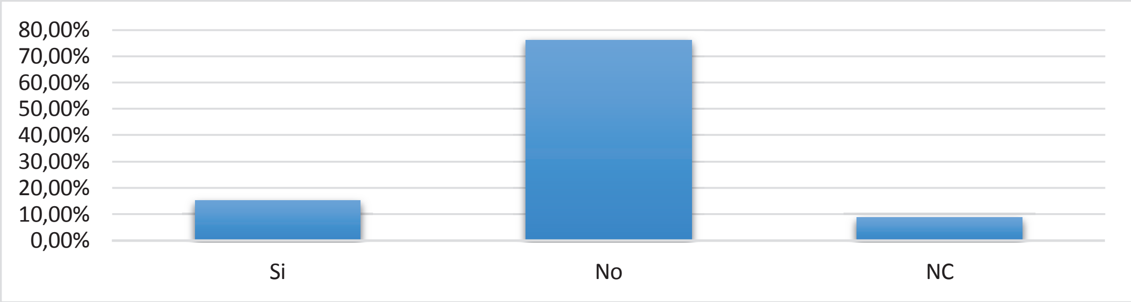


Figura 5.38. Respuestas a la primera cuestión del ítem F10.

En lo que respecta a la segunda cuestión, cabe destacar que uno de cada tres alumnos afirma que “No es posible realizar la operación”, justificándolo mediante posturas potenciales como “No se pueden sumar porque tienen infinitas cifras”, y que entre los que aseguran que “Sí se puede”, hay un 10 % más de estudiantes que efectúan mal el cálculo que los que lo efectúan bien (Figura 5.39).

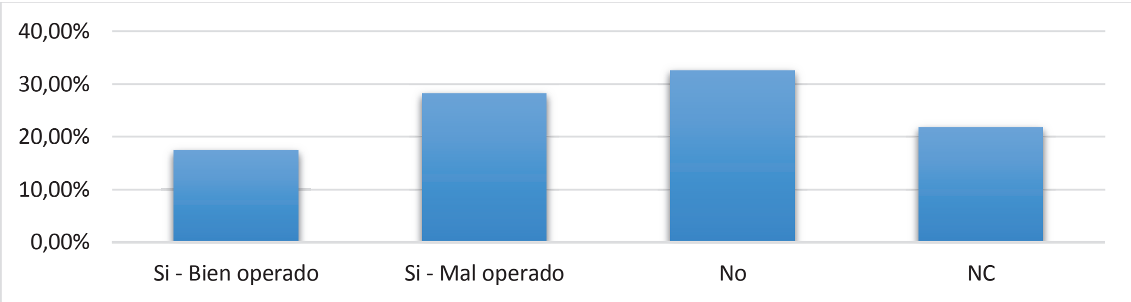


Figura 5.39. Respuestas a la segunda cuestión del ítem F10.

5.2.2.2. *Sistema de representación: Geométrico*

Ítem F2. Esta tarea es la primera que presenta el concepto de infinito bajo un sistema de representación geométrico, trabajando en el contexto de conjuntos (Figura 5.40).

2- Compara las líneas a, b y c de la figura. ¿Cuál es más larga? ¿Cuál de ellas contiene más puntos? **Explica tu respuesta**.

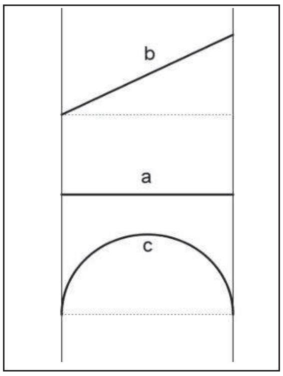


Figura 5.40. Enunciado del ítem F2.

En relación a las respuestas a este ítem, cabe destacar que predomina “c es más larga y las tres tienen los mismos puntos”, con un 48 %, frente a “Las tres son iguales y tienen los mismos puntos”, con un 35 %. Lo sorprendente de estas respuestas es la poca diferencia entre ambas, siendo la segunda de ellas incorrecta (Figura 5.41).

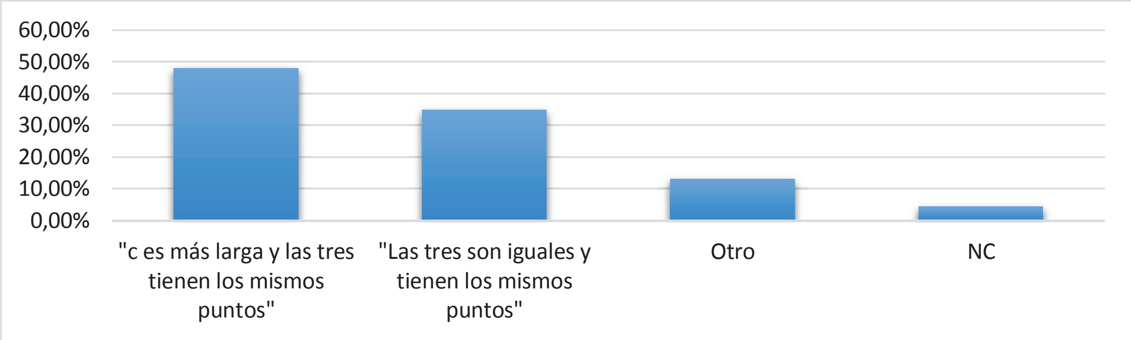


Figura 5.41. Respuestas al ítem F2.

Entre los que han contestado de la primera de las formas, cabe señalar que en su justificación predomina la frase "Porque las tres tienen los mismos puntos", lo que va unido al modelo infinito = infinito, y que únicamente 3 alumnos lo justifican a partir del concepto de biyección (Figura 5.42).

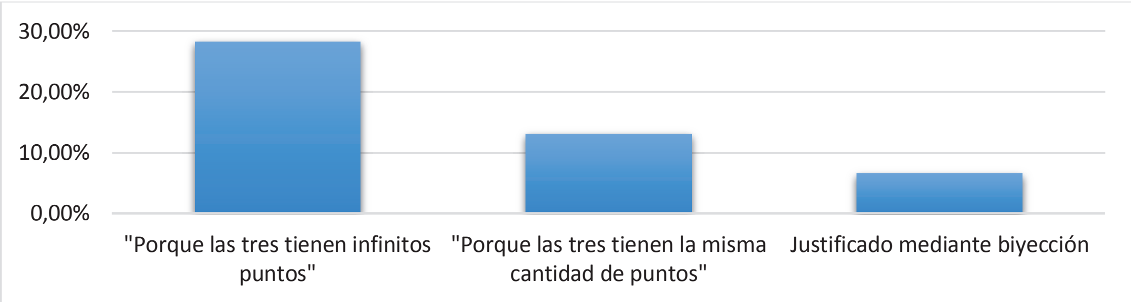


Figura 5.42. Justificación a la respuesta "c es más larga y las tres tienen los mismos puntos" del ítem F2.

<u>Ítem F4.</u> Esta vez el concepto de infinito es presentado a partir del contexto de divisibilidad y convergencia (Figura 5.43).

4- Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, coger una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de las segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? **<u>Justifica tu respuesta</u>**.

Figura 5.43. Enunciado del ítem F4.

Como se observa en las figuras 5.44 y 5.45, la gran parte del alumnado, representada por un 59 %, responde que "No es posible llegar a B", mostrando una concepción potencial del infinito debido a justificaciones del tipo "Nunca llegará, aunque tiende a B" o "Porque el proceso es infinito, no tiene fin".

Por otro lado, el 20 % de los estudiantes adopta una concepción actual del infinito bajo la respuesta "Sí", ya que dan el proceso por finalizado y los límites alcanzados.

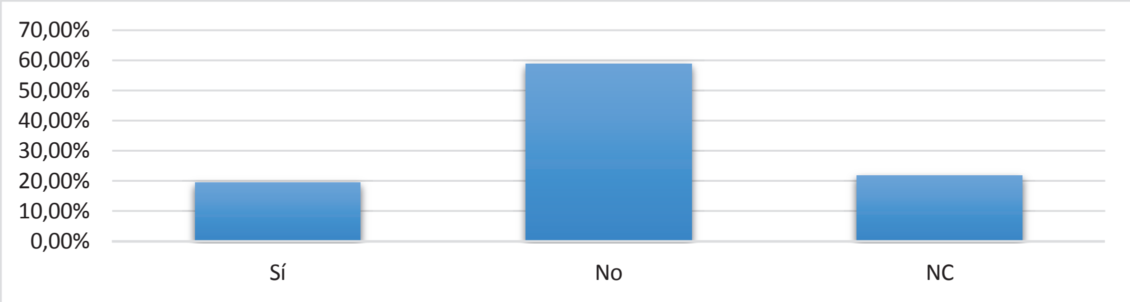


Figura 5.44. Respuestas al ítem F4.

Figura 5.45. Justificación de las respuestas al ítem F4.

<u>Ítem F7.</u> Esta última cuestión correspondiente a este sistema de representación trabaja el infinito desde el contexto de convergencia (Figura 5.46).

7- ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si cada vez son más y más pequeños?

a. No se puede calcular ¿Por qué?

b. Una cantidad finita ¿Cuál?

c. Una cantidad infinita ¿Por qué?

<u>Explica tu respuesta</u>

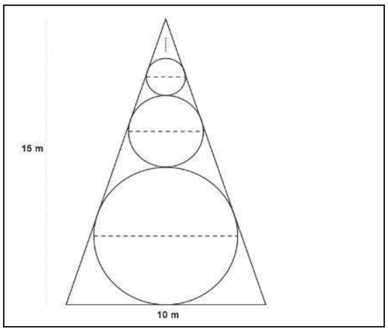


Figura 5.46. Enunciado del ítem F7.

En esta actividad se manifiesta el modelo de divergencia y el modelo acotado-finito casi por igual. El primero de ellos viene de la mano de la respuesta "Una cantidad infinita", que supera por muy poco al número de alumnos que han respondido "Una cantidad finita". Cabe destacar que, en este caso, el modelo acotado-finito está asociado a una noción actual del infinito, puesto que el alumno es capaz de dar por finalizado el proceso infinito que propone el problema. No obstante, muy pocos de los alumnos actuales han sabido dar una respuesta correcta al problema (Figura 5.47).

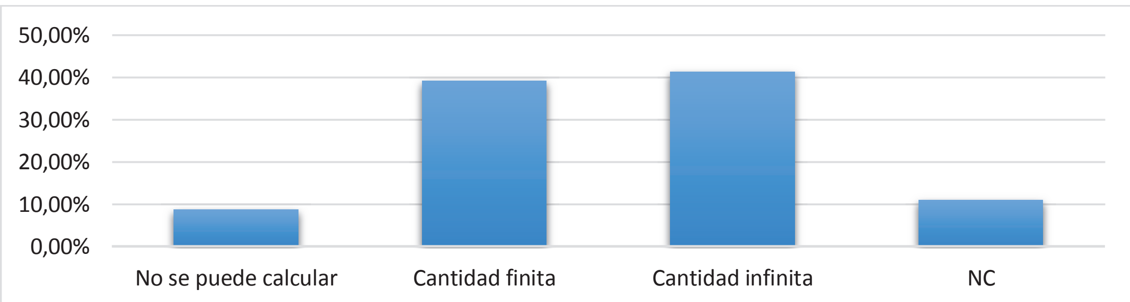


Figura 5.47. Respuestas al ítem F7.

5.2.2.3. *Sistema de representación: Gráfico*

Ítem F8. En cuanto al sistema de representación gráfico, en este cuestionario solo se tiene esta actividad, la cual presenta al infinito bajo el contexto de operatividad (Figura 5.48).

8- Observa la siguiente función. ¿Alcanzará en algún punto la función el valor y=2? **Justifica tu respuesta**

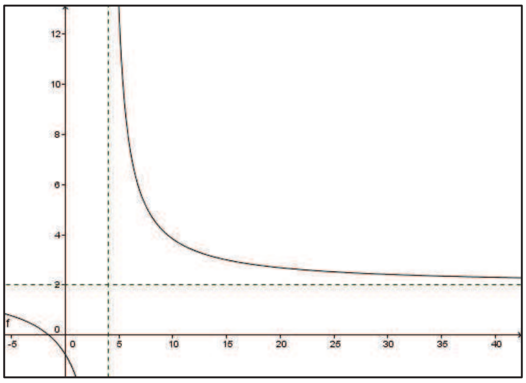


Figura 5.48. Enunciado del ítem F8.

Este ítem es realmente uno de los más interesantes en la investigación, puesto que aquí se observa como la gran mayoría de los alumnos se han quedado exclusivamente con la noción intuitiva de límite, asociado a la concepción potencial del infinito. Este pensamiento se ha traducido en que más del 90 % de los alumnos afirman que "la función nunca alcanzará el valor y=2, pero que sí tiende a ese valor", es decir, asocian el concepto de límite a un proceso infinito no acabado, sin fin (Figura 5.49).

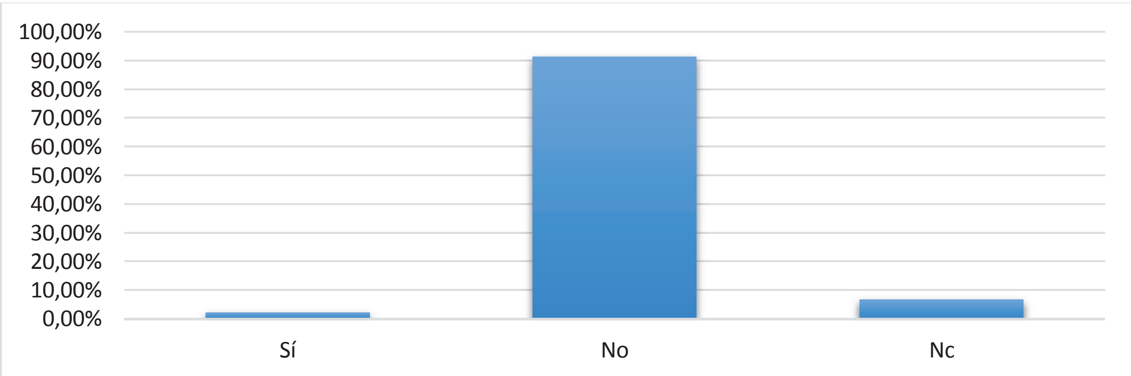


Figura 5.49. Respuestas al ítem F8.

5.2.2.4. *Sistema de representación: Verbal*

Ítem F3. En este ítem se ha presentado el infinito a través del sistema de representación verbal y bajo los contextos de divisibilidad y convergencia (Figura 5.50).

3- Considera una cuerda que la divides por la mitad y te quedas con una de las partes. Ésta la vuelves a dividir y te quedas con una de las mitades.
a. ¿Cuántas veces podemos repetir este proceso? **Explica tu respuesta**
b. ¿Cuánto medirá la cuerda al final del proceso? **Justifica tu respuesta**

Figura 5.50. Enunciado del ítem F3.

En cuanto a la primera de las cuestiones que presenta la tarea, cabe destacar que la inmensa mayoría de los alumnos, casi el 90 %, es consciente de que se trata de un proceso infinito, mientras que únicamente un 7 % de alumnos manifiesta una actitud finitista ligada a una limitación física (Figura 5.51).

Figura 5.51. Respuestas a la primera cuestión del ítem F3.

Por otro lado, es menester citar que en la segunda de las cuestiones se han coleccionado multitud de respuestas, entre las que cabe destacar “Tiende a 0”, representada por más del 25 % de alumnos y que muestra una noción potencial del infinito, y “Un punto”, “Una cantidad finita” y “0”, que conjuntamente representan al 37 % de alumnos y muestran una concepción actual del infinito (Figura 5.52).

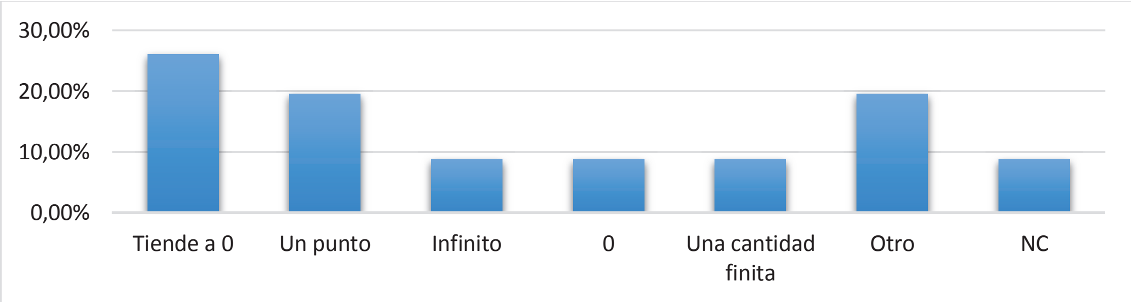


Figura 5.52. Respuestas a la segunda cuestión del ítem F3.

Ítem F5. En este caso se trata al infinito bajo el contexto de convergencia (Figura 5.53).

5- Si tienes un conjunto de segmentos tal que el siguiente es un tercio del anterior y los unes, ¿cuánto medirá el segmento resultante?
a. No se puede calcular
b. Una cantidad finita
c. Una cantidad infinita
Explica tu respuesta

Figura 5.53. Enunciado del ítem F5.

A la vista de la Figura 5.54, se puede afirmar que la mitad de los estudiantes son conscientes de que se trata de un proceso infinito convergente, lo que deriva en una concepción actual del infinito. No obstante, sigue habiendo una importante parte de alumnos que actúan bajo el modelo de divergencia (37 %), es decir, asocian un resultado infinito a la suma de una infinidad de elementos.

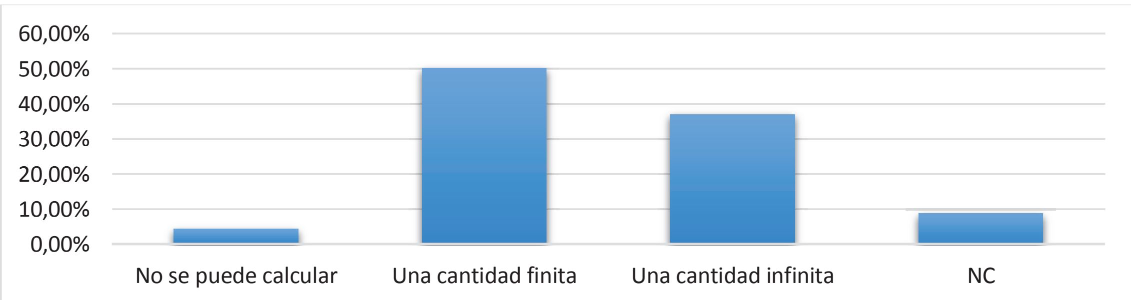


Figura 5.54. Respuestas al ítem F5.

Ítem F11. Por último, en esta tarea se ha evaluado, a partir de cuatro cuestiones, el concepto de infinito en el contexto lingüístico (Figura 5.55).

11- Responde a las siguientes cuestiones de la forma más sincera posible:
a. Explica si le resulta conocida la palabra infinito:
b. ¿Has utilizado la palabra infinito alguna vez? ¿Para qué?
c. Escribe al menos 3 palabras, frases o expresiones que se asocien con el infinito.
d. Describe con tus propias palabras el infinito

Figura 5.55. Enunciado del ítem F11.

Así pues, las conclusiones más interesantes derivadas de este ítem son:

- Prácticamente todos los alumnos afirman que conocen el concepto de infinito (98 %).
- Más del 80 % ha utilizado la palabra infinito, afirmando gran parte de ellos que lo ha hecho en clase de matemáticas.
- Las expresiones que más asocian los estudiantes al infinito son: "Sin fin" (44 %), "Interminable" (28%), "Inalcanzable" (14 %) e "Indefinible" (14 %).

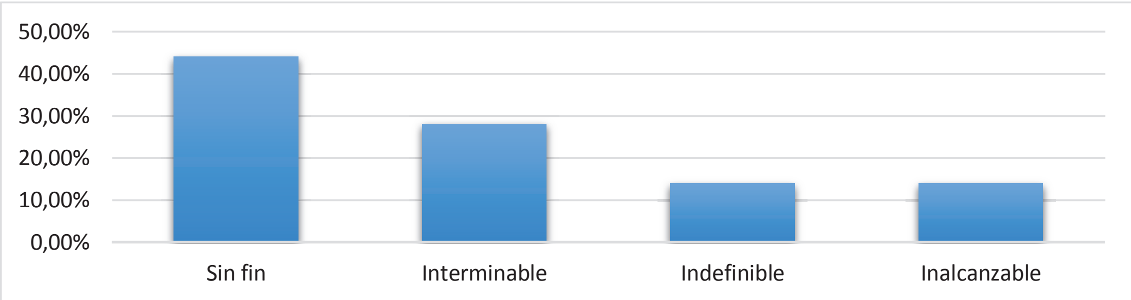


Figura 5.56. Respuestas al ítem F11.

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez analizadas las respuestas de cada uno de los ítems correspondientes a cada uno de los cuestionarios de manera individualizada, este capítulo tiene como objetivo llevar a cabo un análisis conjunto de cada uno de los cuestionarios y una comparación de las conclusiones extraídas de cada uno de ellos.

6.1. Cuestionario Previo

Para tratar de analizar los resultados obtenidos del primero de los cuestionarios se ha construido la Tabla 6.1, donde se indica cada uno de los modelos intuitivos que se han presentado en cada uno de los ítems. En este sentido, se indica con un 1 el modelo predominante, con un 2 al segundo modelo con mayor presencia en las respuestas y así sucesivamente. Cabe destacar que en el caso que se repite el mismo número en “Potencial” y “Actual” se debe a que se está comparando una concepción finitista frente a una infinitista.

Además, en esta tabla también se indica mediante diferentes colores el sistema de representación y el contexto en el que se trabaja el infinito en cada uno de los ítems.

		Ítem											
	Sistema de representación	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10	11	12
	Contexto							a	b					
Modelo	Inclusión	2	2	2							2	2		Sin fin
	Infinito = infinito	1	1	1							1	1		Interminable
	Punto-marca													Sin límite
	Indefinición	4		3		3			2					Eterno
	Divergencia					1	1		1					
	Acotado-finito No acotado-infinito	3												
	Potencial				2		2	1		1			1	
	Actual				2	2		1	3	2		3	1	
	Finitista				1			2					2	

Sistema de representación	Contexto
Numérico	Conjuntos
Geométrico	Convergencia
Gráfico	Operatividad
Verbal	Divisibilidad
	Lenguaje

Tabla 6.1. Resultados del cuestionario previo.

Analizando los ítems en los que se trabaja bajo el contexto de conjuntos, sea cual sea el sistema de representación, el modelo intuitivo predominante es el de infinito = infinito, puesto que la mayoría de estudiantes asumen que dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos si en ambos existen infinitos elementos, sin justificarlo a partir de una relación de biyección entre los conjuntos y, por tanto, no siendo conscientes de que existen distintos tamaños de infinito. Este modelo, que pone de manifiesto el obstáculo de aprendizaje de “aplastamiento”, muestra una concepción potencial del infinito por parte de los estudiantes. Por otra parte, el segundo modelo con mayor representación es el de inclusión, que además de otorgar respuestas incorrectas, determina una noción finitista del infinito.

Además, se ha de destacar que solamente en una de las actividades de este tipo, la P10, se observa una concepción actual del infinito, aunque tiene una representación muy baja con respecto a las dos mencionadas anteriormente. Esta respuesta se ve favorecida principalmente por el sistema de representación utilizado, el gráfico, donde el concepto de función, conocido y comprendido por los estudiantes, es el factor determinante.

Centrando la atención ahora sobre aquellas tareas en las que se presenta el infinito bajo el contexto de convergencia, cabe resaltar el modelo intuitivo de divergencia, pues la mayoría de los alumnos tienen la creencia de que la suma de infinitos términos, tanto geométrica como numérica, resulta ser un valor infinito, siempre hay algo que añadir.

No obstante, el sistema de representación sí es determinante a la hora de identificar el segundo modelo con mayor presencia en los alumnos. En este sentido, bajo el sistema de representación numérico se observa una noción potencial del infinito (Ítem P6), mientras que en el geométrico se observa una noción actual del mismo (Ítem P5 y P7), favorecido principalmente por la limitación física que induce dicho sistema y que conlleva a un modelo acotado-finito.

En cuanto a los resultados obtenidos de aquellos ítems en los que se trabaja la divisibilidad, cabe señalar que sí tiene un papel especial el sistema de representación. De este modo, si el sistema de representación en el que se muestra el concepto de infinito es el verbal y en él está involucrado una realidad física, entonces la noción de infinito predominante es la finitista. Por otra parte, la noción infinitista se presenta bajo el sistema de representación geométrico, pues en este caso los alumnos sí son conscientes de que se trata de un proceso infinito.

Otro de los contextos con que se ha trabajado en el cuestionario es la operatividad. Bajo este contexto, se ha podido apreciar como los alumnos tienen una noción infinitista y, dentro de la misma, la gran mayoría se basa en la concepción potencial del infinito. En este sentido, en el ítme P8 casi todos los estudiantes afirman que nunca se llegará al valor 2, aunque tenderá a él, lo que se traduce en un proceso infinito no completado.

Por último, las dos últimas tareas del cuestionario ayudan a confirmar los resultados comentados en los párrafos anteriores. Por un lado, cabe destacar que la gran parte de los alumnos asocian el infinito a “sin fin” o “interminable”, pensamientos que están unidos a la idea intuitiva y cotidiana del infinito. Por otra parte, el ítem P13 confirma la poca presencia en la resolución del cuestionario de la noción actual, pues el número de alumnos que afirma conocer la existencia de distintos tamaños de infinito es muy reducido.

Concluyendo, en este cuestionario se observa el predominio de los modelos infinito = infinito y de divergencia, que van ligados a la noción potencial del infinito, pues el primero de ellos pone de manifiesta el desconocimiento de distintos tamaños de infinito y la segunda de ellas la idea de infinito como proceso sin fin y no acabado.

6.2. Cuestionario Final

Al igual que para el cuestionario previo, para el final también se ha desarrollado una tabla en la que se recogen los resultados más relevantes derivados de la evaluación de cada uno de los ítems que se presentan en él (Tabla 6.2). En este sentido, cabe destacar que tanto la leyenda de colores utilizada en esta tabla como la nomenclatura es la misma que se ha descrito en el epígrafe anterior.

		Ítem													
	Sistema de representación	1		2	3		4		5	6	7	8	9	10	11
	Contexto	a	b		a	b									
Modelo	Inclusión		3	3									2		Sin fin
	Infinito = infinito		1	1									1		Interminable
	Punto-marca														Inalcanzable
	Indefinición								3		3				Indefinible
	Divergencia								2	2	1				
	Acotado-finito No acotado-infinito	1									2				
	Potencial				1	2	1	1		1		1		1	
	Actual		2	2	1	1	1	2	1		2	2		1	
	Finitista	2			2	3	2	3						2	

Tabla 6.2. Resultados cuestionario final.

Comenzando con aquellos ítems en los que se presenta la idea de infinito en el contexto de conjuntos, cabe destacar que el modelo intuitivo con mayor representación es el infinito = infinito, pues la justificación más habitual en este tipo de tareas es "tienen los mismos números porque los dos conjuntos o intervalos tienen infinitos".

Ahora bien, a diferencia que en el cuestionario previo, se aprecia una mayor presencia de alumnos que actúa bajo una noción actual del infinito que desde el modelo de inclusión, aunque ambos continúan representando un tanto por ciento de alumnos muy reducido comparado con el modelo infinito = infinito.

En segundo lugar se trata aquellas cuestiones que trabajan el concepto de infinito bajo el contexto de convergencia. En este sentido, cabe destacar que ahora predominan las nociones potencial y actual por encima del modelo de divergencia. Analizando más en profundidad estos resultados, se ha de señalar que la noción potencial está más presente junto al sistema de representación geométrico y la noción actual junto al verbal. Además, se debe añadir que el número de alumnos con una noción finitista es en esta ocasión muy reducido.

Si ahora se fija la atención sobre aquellas actividades en las que aparece el contexto de operatividad, se debe destacar que predomina la noción infinitista de los estudiantes frente a la finitista. Dentro de esta noción infinitista, también se ha de señalar que la mayor parte de los alumnos presentan una concepción potencial del infinito, pues solamente se deben consultar los resultados del ítem 8, donde se observa como alrededor del 90 % de los alumnos interpretan el concepto de límite como un proceso no terminado, ligado a la noción intuitiva y cotidiana del infinito.

Estos resultados pueden ser explicados entendiendo que durante el aprendizaje del concepto de límite los alumnos han asociado dicho concepto a la idea intuitiva de acercarse a un punto tanto como se quiera y estarán tan cerca del límite como ellos quieran. No se ha sabido transmitir a los alumnos que el límite de una función en un punto es un proceso acabado, con los límites alcanzados, lo que va ligado a una noción actual del mismo. Las grandes dificultades y obstáculos que presenta la enseñanza de este concepto hacen que los profesores adapten el tema a las capacidades de los alumnos y, con ello, ni siquiera se realice una definición formal del concepto que ayudaría a establecer esa conexión perdida con el infinito actual. Todo ello deriva, sobretodo en alumnos de esta rama de bachiller, en una concepción potencial del infinito derivado de la noción intuitiva del concepto.

Por otro lado, también se ha estudiado el infinito a través del concepto de divisibilidad. En este caso, se debe señalar que predomina la noción infinitista sobre la finitista, pero al igual que en lo relativo al contexto de operatividad, sigue predominando la concepción potencial sobre la actual.

Al evaluar el concepto de infinito bajo el contexto lingüístico, se observa que los alumnos siguen estando influenciados por la idea intuitiva del concepto, pues prácticamente ninguno de ellos ha cambiado su manera de definir el infinito, es decir, siguen admitiendo que infinito es “Sin fin” o “Interminable”. Esto reafirma los resultados obtenidos en el cuestionario, pues la mayoría de los estudiantes continúa teniendo una noción potencial del infinito, noción ligada a un proceso que no acaba y no alcanza el límite. Además, se pone de manifiesto la dificultad de modificar ese conocimiento erróneo que los estudiantes tienen acerca del concepto de infinito, pues el infinito matemático va mucho más allá de la propia idea intuitiva.

Como conclusión, se puede decir que en el cuestionario final también predomina el modelo infinito = infinito en aquellos ítems donde se estudia el concepto bajo el contexto de conjuntos. Además, se ha observado que las respuestas ligadas a la noción actual del concepto se han incrementado, pero no lo suficiente para contrarrestar la gran presencia de la noción potencial del mismo. Por último, destacar el decremento en las respuestas de los modelos de divergencia y la noción finitista del infinito, que en este cuestionario se muestran en reducidos tantos por cien.

6.3. Discusión de los resultados

Tras haber analizado en los anteriores epígrafes la concepción del infinito en los estudiantes antes y después de estudiar el concepto de límite, en este se trata de evaluar si el aprendizaje de esa unidad didáctica ha determinado o ha supuesto cambios importantes en esa concepción.

Como se ha comentado anteriormente, en el cuestionario previo se ha observado el predominio de los modelos infinito = infinito y de divergencia, que describen una concepción potencial del infinito, lo que pone de manifiesto la gran influencia de la idea intuitiva del concepto.

La metodología que se llevó a cabo para el desarrollo de la unidad didáctica relativa a límites fue la presentada en el epígrafe *2.3.5.*. Así, se esperaba que los resultados anteriores se modificaran de tal forma que ahora predominase la noción actual del infinito, ya que durante todo el proceso de enseñanza se hizo hincapié en que el cálculo de un límite es un proceso acabado y, además, se facilitó y desarrolló la realización de la tarea de conexión entre los contextos numérico, gráfico y geométrico.

Pues bien, una vez evaluados los resultados obtenidos del último cuestionario se ha podido concluir que todavía sigue predominando la noción potencial sobre la actual y que, además, el modelo infinito = infinito sigue teniendo una importancia vital sobre todo cuando se trabaja el concepto de infinito bajo el contexto de conjuntos. Además, la última pregunta referente al contexto lingüístico refuerza todavía más si cabe este hecho, pues los alumnos expresan el infinito de la misma forma antes y después del estudio del tema relativo a límites (Figura 6.1).

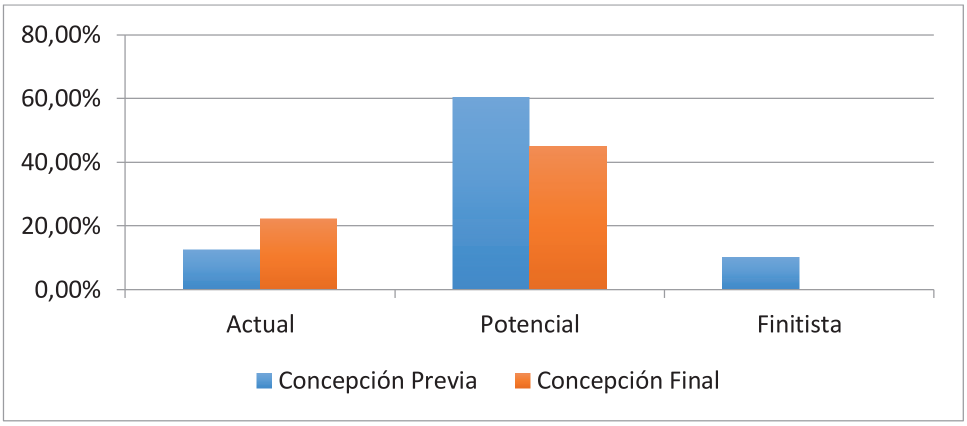


Figura 6.1. Concepción previa y final del infinito de los estudiantes.

No obstante, se ha apreciado un aumento significativo de la concepción actual del concepto y, además, el modelo de divergencia, que tenía tanta relevancia antes del estudio de la unidad didáctica mencionada anteriormente, ha pasado a un segundo plano (Figura 6.2). También es conveniente resaltar que las respuestas de tipo finitista se han visto reducidas de tal forma que la gran mayoría de los alumnos era consciente de los procesos infinitos que se trataban en los distintos ítems.

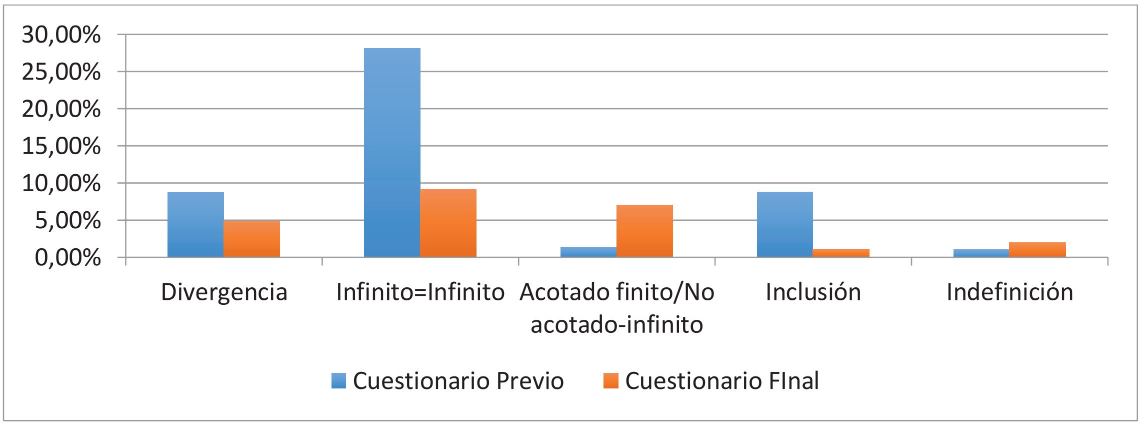


Figura 6.2. Modelos intuitivos del infinito en los cuestionarios previo y final.

Otra de las conclusiones importantes extraídas del análisis de los resultados obtenidos es que se ha podido verificar la hipótesis de que la concepción del infinito no es absoluta, es decir, sino que la concepción que un alumno tiene acerca del concepto depende en gran medida del sistema de representación en el que se presenta y, también, del contexto en el que se trabaja el concepto.

Además, cabe destacar que la mayoría de los alumnos no han sido capaces de realizar la tarea de conexión, es decir, no han sido capaces de relacionar aquellos ítems que presentados bajo diferentes sistemas de representación manejaban la misma idea de infinito. Esto es lo que ha llevado a gran parte del alumnado a respuestas incoherentes, pues algunos contestaban a ciertas preguntas bajo una noción finitista y a otras bajo una infinitista y en el fondo las preguntas manejaban el infinito bajo un mismo contexto.

Por último, aunque no es objeto del trabajo un análisis individual de los alumnos, se quiere destacar los resultados de dos de los alumnos, pues han sido capaces de llevar a cabo tareas de conexión y proponer razonamientos constantemente ligados a la noción actual del infinito, lo que les ha llevado a una línea coherente y consistente en sus respuestas. Esto pone de manifiesto la ventaja que presenta llevar a cabo tareas de conexión a la hora de enfrentarse al estudio de un concepto bajo distintos contextos.

7.CONCLUSIONES

Lo primero que se debe destacar es que el desarrollo del trabajo ha permitido llevar a cabo el objetivo principal del mismo, pues los cuestionarios diseñados acerca del concepto de infinito han permitido evaluar de una manera correcta y adecuada la concepción que tienen los estudiantes de CCSSHH antes y después del estudio de la unidad didáctica relativa al concepto de límites.

Para ello, ha sido fundamental el estudio del capítulo 2 relativo a los antecedentes, donde se ha evaluado el concepto de infinito, el concepto de límite y la didáctica de este último. Fruto de este estudio se ha podido observar lo complejo y difícil que es tanto el aprendizaje como la enseñanza del infinito, dificultades principalmente derivadas de la percepción intuitiva que reside en nuestra mente y la poca referencia que se hace de este concepto en el currículum. Además, se ha identificado que el concepto de infinito es primordial para el aprendizaje y enseñanza de multitud de conceptos relacionados con el cálculo matemático, sin embargo la construcción del concepto no se propone en el currículum y, consecuentemente, no se lleva a la práctica en las aulas de matemáticas.

Por otro lado, también se han identificado las dificultades y obstáculos en lo que respecta a la enseñanza y aprendizaje de límite. En este caso, se ha podido observar como muchos de estos obstáculos residen en la concepción del propio infinito. Además, al evaluar las distintas unidades didácticas relativas a la enseñanza de límites, se ha identificado la distancia cada vez mayor que hay entre la enseñanza formal del concepto y la enseñanza real. En este sentido, la mayoría de los profesores optan por llegar a formalizar el concepto iniciando su construcción a partir de la idea intuitiva de límite, pero ya casi ninguno de ellos entra en la definición formal épsilon-delta debido a la dificultad y extrañeza que resulta en los alumnos. De ahí deriva que el alumno se quede con la noción intuitiva y, con ello, con la concepción potencial del infinito.

Todos estos aspectos del capítulo 2, que eran imprescindibles para el desarrollo del trabajo, permitieron definir el marco teórico de la investigación. En este sentido, cabe destacar el esquema conceptual que se sitúa al final del capítulo 3 de este estudio, donde se define las dos concepciones matemáticas del infinito (potencial y actual), los obstáculos y dificultades del aprendizaje y enseñanza del infinito, la presencia de este mismo concepto en el currículum, los diferentes sistemas de representación en los que se puede presentar el infinito, los modelos intuitivos utilizados para el análisis de los cuestionarios evaluados en la investigación y las concepciones generales del infinito que pueden llegar a tener los alumnos (potencial, actual y finitista).

Además, el análisis del capítulo de *Antecedentes* también ha tenido un papel fundamental en el diseño de los cuestionarios con los que se ha evaluado la concepción del infinito, para el análisis de estos y para determinar las hipótesis de la investigación.

En cuanto a los resultados más interesantes de la investigación, cabe resaltar la confirmación de cada una de las hipótesis del estudio.

En primer lugar, se ha identificado que en los alumnos reside una concepción potencial del infinito derivada principalmente de la idea intuitiva del infinito que reside en las personas por el uso cotidiano que se le da al concepto, lo que se ha visto reflejado en el primero de los cuestionarios a partir del predominio del modelo infinito = infinito y del modelo de divergencia. Con respecto a esta observación, se ha de decir que corrobora las conclusiones de muchas de las investigaciones que se han incorporado al marco teórico de la investigación.

Asimismo, aunque en los resultados derivados del segundo cuestionario todavía predominaba la noción potencial del infinito, la concepción actual se ha visto fuertemente favorecida por el estudio de la unidad didáctica, puesto que el tanto por ciento relativo a esta concepción se ha visto incrementado en detrimento del modelo de divergencia y las posturas finitistas, que han pasado a un segundo plano.

Otra de las conclusiones más interesantes del estudio hace referencia a los sistemas de representación en los que se puede presentar el concepto de infinito. En este sentido, se ha observado como dependiendo del sistema un alumno puede actuar bajo una concepción u otra del infinito, aunque en el fondo se esté tratando el concepto bajo un mismo contexto, es decir, se trabaje sobre una misma idea de infinito. Así pues, se puede confirmar que la concepción que un alumno tiene sobre el infinito no es fija, sino que dependerá del sistema de representación e incluso del contexto bajo el cual se presente. Esto se ha traducido en los estudiantes a través de incoherencias en sus respuestas, puesto que bajo una misma idea de infinito se encontraban respuestas que no tenían nada que ver unas con otras.

Por otro lado, cabe resaltar el reducido número de alumnos que ha realizado tareas de conexión, es decir, estudiantes que han sabido relacionar unos ítems con otros porque en ellos se trabaja la misma idea de infinito. No obstante, dos de los alumnos han puesto de manifiesto la gran utilidad que conlleva realizar este tipo de tareas, pues en ambos se ha observado una línea coherente, es decir, han sido capaces de trabajar con la misma concepción del infinito en prácticamente todos los ítems que se han presentado, conclusión a la que también llegaron Garbin y Azcárate (2001). En referencia a estos alumnos, se debe destacar también que son dos alumnos que utilizan la biyección en gran parte de sus razonamientos, lo que va ligado a una concepción actual del infinito.

En resumen, el concepto de infinito es un concepto con una complejidad y dificultades en su aprendizaje enormes que debería tener hueco en el currículum de secundaria y bachillerato, pues de él depende en gran medida el aprendizaje del cálculo matemático. Para que el aprendizaje de este concepto sea significativo, no basta con el estudio de la unidad didáctica relativa a límites, donde únicamente se ve el concepto de infinito de manera superficial, pues la modificación de la concepción del infinito en la mente de los estudiantes requiere de un proceso más largo y profundo del que ahora mismo se contempla en las escuelas.

Por tanto, como muchos de los autores consultados, cabe destacar que la noción actual del infinito matemático no es intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas.

Por último, es necesario destacar que aunque este trabajo ha permitido determinar las concepciones de los alumnos de 1º de Bachiller de CCSSHH de un instituto concertado de Valencia, no debe hacerse una extrapolación al resto de estudiantes de estas mismas características, pues los resultados obtenidos pueden estar fuertemente influenciados por la enseñanza del propio instituto y podría darse el caso de que otro instituto de este misma ciudad arrojase resultados muy dispares a los obtenidos.

8.REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, S., Figares, G., López, V., Mesa, V., Molfino, V., & Rivero, F. (2013). Infinito, límite de lo ilimitado. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo, Uruguay: SEMUR, pp. 657-665.

Aquere, S., Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., & Inés, M. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Revista Premisa*, *11*(41), 14-24.

Arrigo, G., & D’Amore, B. (1999). “Lo veo, pero no lo creo”: Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5-24.

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad* (Tesis de doctorado no publicada). España: Universidad de Salamanca. <http://hdl.handle.net/10366/76247>

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(2), 139-171.

Boero, P., Douek, N., & Garuti, R. (2003). Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion context. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 121–128.

Bombal, F. (2010). *Un paseo por el Infinito. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales Serie A: Matemáticas*, *104*(2), 427-444.

Camacho, A., & Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de *límite infinito*. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *4*(3), 237-265.

Contreras, M. (s.f.). *Funciones racionales e irracionales*. Manuscrito sin publicar. Disponible en <http://www.mauriciocontreras.es/MCS1/Tema4.pdf>

Costa, E., & Otto, B (2005). Ideología y matemáticas: El infinito. *XIII Jornadas de ASEPUMA*. A Coruña, España. Disponible en <http://www.uv.es/asepuma/XIII/comunica/comunica_30.pdf>

D’Amore, B. (2013). La didáctica del infinito matemático. En S. Roa Fuentes, S. Evely Parada y J. Fiallo Leal (Eds.). *Memoria 4to Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación.* Bucaramanga, Colombia: EDUMAT, pp. 23-29.

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandifio Pinilla, M.I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P.J., Romero Cruz, J.H., & Sbaragli S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon 22*(2), 65, 187–216.

Departamento de Matemáticas del IES Valle del Oja (s.f.). *Límites y continuidad de funciones*. Manuscrito sin publicar. Disponible en <http://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/t09.pdf>

Departamento de Matemáticas del IES Moraima (s.f.). *Límites, continuidad y asíntotas*. Manuscrito sin publicar. Disponible en <http://matematicasmoraima.wikispaces.com/file/view/1BCS%20-%20Teoria%206%20-20Limites.%20Continuidad.%20Asintotas.pdf/264140447/1BCS%20-%20Teoria%206%20-%20Limites.%20Continuidad.%20Asintotas.pdf>

Engler, A., Gregorini, M.I., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., & Henzenn, N. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista Premisa*, *10*(36), 11-21.

Espinoza, L., & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de “límite de función”: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(3), 355-368.

Font, J. (s.f.). Apuntes de las Prácticas del Máster en Profesor de Educación Secundaria. Manuscrito sin publicar.

Garbín, S. (2005a). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169–193.

Garbin, S. (2005b). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(1), 61-80.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, (38), 53-67.

Garbín, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16–17 años. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 87–113.

González, A. (s.f.). *Límites de funciones y continuidad*. Manuscrito sin publicar. Disponible en <http://yoquieroaprobar.es/5_bachiller/1/unidad_didactica_limites_y_continuidad.pdf>

González, J., Morales, A., & Sigarreta, J. M. (2013). Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 13*(2).

Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real (104-120). *El Cálculo y su Enseñanza, 4*, 103-122.

Juan, M. T., Montoro, V., & Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas: Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática, 24*(2), 61-90.

Lestón, P (2012). El infinito como evidencia de conflictos en discurso de los docentes. En R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., vol. 25, pp. 1069-1077.

Lestón, P., & Crespo, C. (2010). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., vol. 23, pp. 879-888.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 239–257.

Montoro, V., & Scheuer, N. (2006). Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. En J.V. Aymerich y S. Macario (Eds.). *Matemáticas Para el Siglo XXI* (pp. 257-265). Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 1*(2), 59-81.

Penalva, M. C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito* (Tesis de doctorado no publicada). España: Universitat de València.

Singer, M., & Voica, C. (2003). Perception of infinity: does it really help in problem solving? En A. Rogerson (Ed.). Proceedings of the International Conference “The Decidable and the Undecidable in Mathematical Education”. Brno, República Checa: The Mathematics Education into the 21st Century Project, pp. 252-256.

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). Infinity–The never–ending struggle. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 129–136.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista Premisa*, *8*(29), 9-19.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*(1), 107–122.

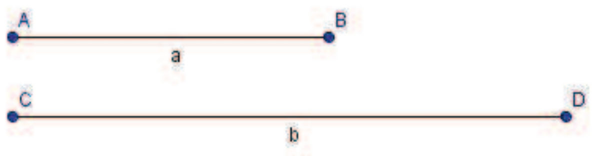
ANEXO I – CUESTIONARIOS

1.CUESTIONARIO PREVIO

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre y apellidos</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>Curso</td><td></td><td>Grupo</td><td></td><td>Edad</td><td></td><td>Sexo</td><td>Hombre/Mujer</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué matemáticas cursaste en 4º ESO?</td><td>A / B</td><td colspan="3">¿Qué nota obtuviste en 4º ESO?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Has estudiado el concepto de límite?</td><td>SI / NO</td><td colspan="3">¿Y el concepto de sucesión o progresión?</td><td>SI / NO</td></tr>
</table>

1- Tenemos dos conjuntos de números, los naturales N={1, 2, 3, 4, 5, 6…} y los triangulares T={1, 3, 6, 10, 15, 21…}. ¿Cuál de los dos conjuntos crees que tendrá más números? **<u>Explica tu respuesta</u>.**

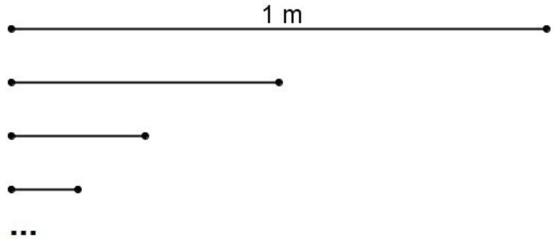
2- ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos? **<u>Explica tu respuesta</u>.**



3- Dado un cuadrado de 5 cm de lado, ¿dónde hay más puntos, en el interior del mismo o en uno de sus lados? **<u>Justifica tu respuesta</u>.**

4- Imagínate que tienes una hoja de papel. La divides en dos trozos iguales y te quedas con uno de ellos. La parte con la que te has quedado la vuelves a dividir en dos partes iguales y te quedas con una de ellas. Y así sucesivamente. ¿Qué obtendrás al final? **<u>Justifica tu respuesta.</u>**

5- Si tienes un conjunto de segmentos tal que el siguiente es la mitad del anterior y los unes, ¿cuánto medirá el segmento resultante?



a. No se puede calcular
b. 3 metros
c. Infinito
d. 2 metros

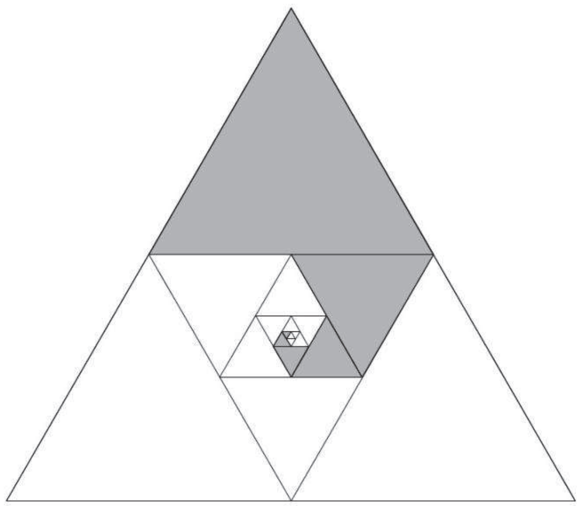
<u>Explica tu respuesta.</u>

6- Dada la suma $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$, su resultado, según vamos añadiendo una nueva fracción es:

a. Crece indefinidamente
b. Decrece indefinidamente
c. Se acerca indefinidamente a un número
d. Otra respuesta. Indica cual.

<u>Justifica tu respuesta</u>

7- Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.



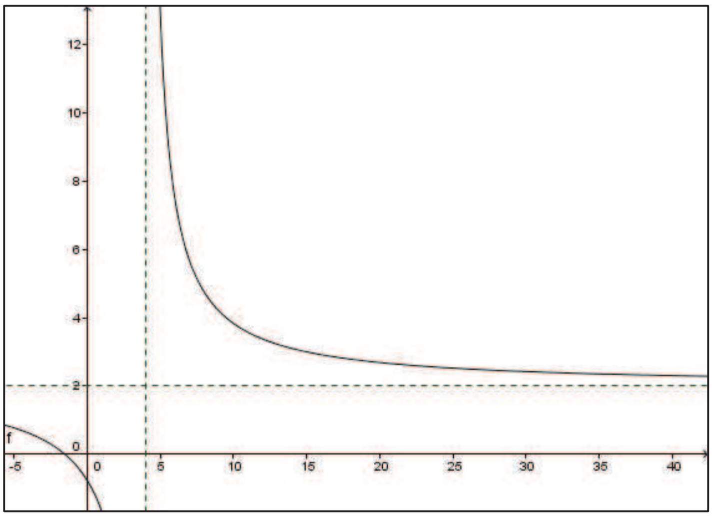
A) ¿Tiene fin este proceso? **<u>Explica tu respuesta.</u>**

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita
b. Una cantidad infinita
c. No se puede calcular

<u>Justifica tu respuesta.</u>

8- Describe que ocurre cuando la función toma valores muy grandes de *x*. ¿Alcanzará en algún punto la función el valor y=2? **Explica tu respuesta**.

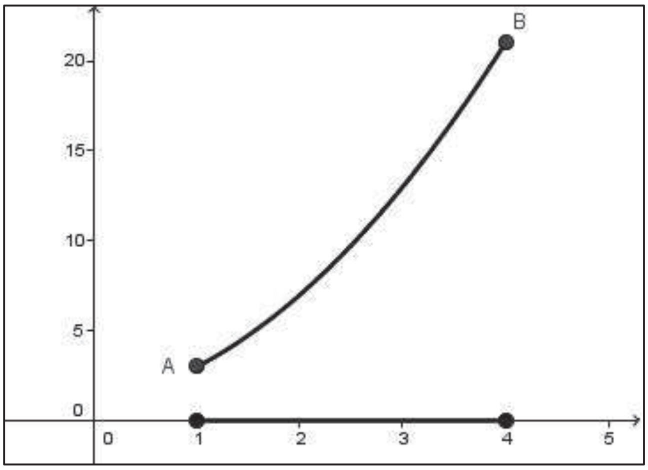


9- Considera el intervalo]2, 5]:

A) ¿Podrías decir en qué número comienza y termina el mismo? **Explica tu respuesta**.

B) ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo anterior o en el intervalo [2, 6]? **Justifica la respuesta**.

10- Observa la siguiente función cuadrática $y=x^2+x+1$. Si cogemos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable *x* o en el tramo de curva AB? **Explica tu respuesta.**



11- Señala la respuesta verdadera. **Justifica tu respuesta.**

a. $0'\hat{9} < 1$
b. $0'\hat{9} = 1$
c. $0'\hat{9} > 1$

12- Escribe al menos 3 palabras, frases o expresiones que signifiquen lo mismo que infinito.

13- ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos. En caso contrario, justifica tu respuesta.

2.CUESTIONARIO FINAL

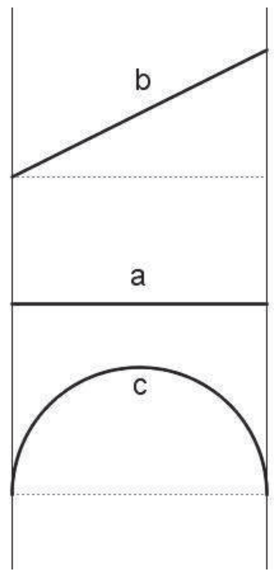
Nombre y apellidos							
Curso		**Grupo**		**Edad**		**Sexo**	Hombre/Mujer
¿Qué matemáticas cursaste en 4º ESO?		A / B		**¿Qué nota obtuviste en 4º ESO?**			
¿Has estudiado el concepto de límite?		SI / NO		**¿Y el concepto de sucesión o progresión?**		SI / NO	
Nivel educativo del padre	PRI			**Nivel educativo de la madre**	PRI		
	SEC				SEC		
	UNI				UNI		

1- Imagínate que al conjunto de los número naturales N={1, 2, 3, 4…} le quitamos un millón de números.

a. ¿Cuántos quedan? **Explica tu respuesta**.

b. ¿Qué conjunto de los siguientes tiene más números? **Razona tu respuesta.**
{1, 2, 3, 4, 5,…} o {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,…}

2- Compara las líneas a, b y c de la figura. ¿Cuál es más larga? ¿Cuál de ellas contiene más puntos? **Explica tu respuesta**.



3- Considera una cuerda que la divides por la mitad y te quedas con una de las partes. Ésta la vuelves a dividir y te quedas con una de las mitades. ¿Cuántas veces podemos repetir este proceso? **Explica tu respuesta**.

¿Cuánto medirá la cuerda al final del proceso? **Justifica tu respuesta.**

4- Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, coger una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de las segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? **Justifica tu respuesta**.

5- Si tienes un conjunto de segmentos tal que el siguiente es un tercio del anterior y los unes, ¿cuánto medirá el segmento resultante?

a. No se puede calcular
b. Una cantidad finita
c. Una cantidad infinita

Explica tu respuesta.

6- Dada la suma $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, su resultado, según vamos añadiendo una nueva fracción es:

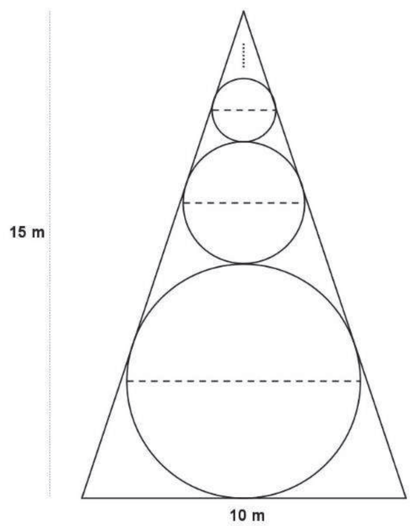
a. Crece indefinidamente
b. Decrece indefinidamente
c. Se acerca indefinidamente a un número
d. Otra respuesta. Indica cual.

<u>Justifica tu respuesta.</u>

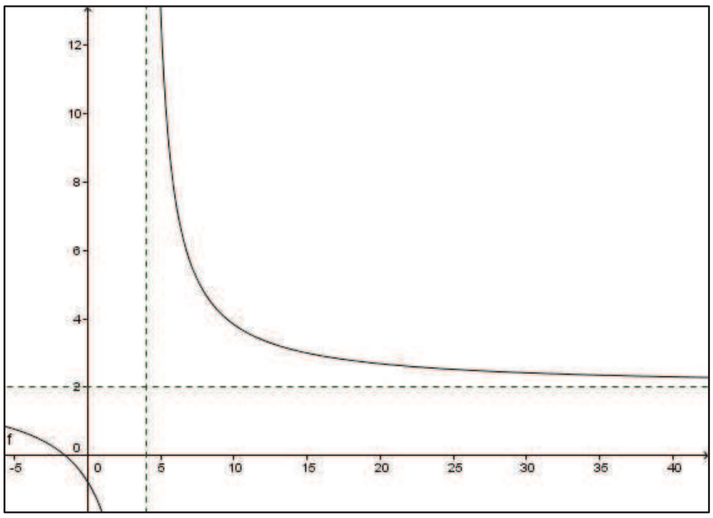
7- ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si cada vez son más y más pequeños?

a. No se puede calcular ¿Por qué?
b. Una cantidad finita ¿Cuál?
c. Una cantidad infinita ¿Por qué?

<u>Explica tu respuesta.</u>



8- Observa la siguiente función. ¿Alcanzará en algún punto la función el valor y=2? **<u>Justifica tu respuesta.</u>**



9- Considera los intervalos [5, 10] y [1, 21]:

a. ¿Podrías decir en qué número comienza y acaba cada uno de los intervalos? **Explica tu respuesta.**

b. ¿Puedes representar estos dos intervalos en la recta real? ¿En qué intervalos crees que hay más número reales? **Justifica la respuesta.**

10- ¿Existe algún número entre $2'\hat{9}$ y 3?

a. Sí. Escribe uno

b. No. ¿Por qué?

¿Podrías calcular $2'\hat{9} + 1'\hat{5}$? En caso afirmativo calcula la suma, en caso negativo j**ustifica tu respuesta**.

11- Responde a las siguientes cuestiones de la forma más sincera posible:

a. Explica si le resulta conocida la palabra infinito:

b. ¿Has utilizado la palabra infinito alguna vez? ¿Para qué?

c. Escribe al menos 3 palabras, frases o expresiones que se asocien con el infinito.

d. Describe con tus propias palabras el infinito