UNIVERSIDAD DE VALENCIA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

APRENDIZAJE ESTRATEGICO Y COMPETENCIA DE MERCADO EN MODELOS DE DUOPOLIO

Memoria para optar al grado de
Doctor en Ciencias Económicas
presentada por:

M. DOLORES ALEPUZ CHAQUES

V.B.
LA DIRECTORA

Dirigida por:

Dña. AMPARO URBANO SALVADOR
Profesora Titular del Departamento
de Análisis Económico.

Quiero hacer constar, desde estas líneas, mi más sincero agradecimiento a Amparo Urbano, por su constante dedicación y apoyo.

A Luis...

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION .

Es un hecho bien conocido, que las empresas intentan adquirir información, en situaciones de incertidumbre. Este intento, tiene lugar cuando se obtienen unos beneficios mayores y/o una ventaja comparativa en el mercado, como resultado de este proceso de búsqueda. En esta Tesis se estudia un aspecto de la adquisición de información conocido como *experimentación*. Se entiende por experimentación cualquier cambio en las acciones presentes inducido por el deseo de variar la información disponible futura. Los agentes cambian sus acciones óptimas a corto plazo (o miópicas), lo cual supone sacrificar parte de los beneficios corrientes, con el fin de recabar más información sobre su incertidumbre estructural e incrementar, de esta forma, los beneficios futuros. Por tanto, los agentes únicamente experimentarán cuando el valor de la información sea positivo.

Con la experimentación, las empresas tratan de aumentar el contenido informativo de las observaciones de mercado, es decir, del precio (cuando se compite en cantidades) o de las ventas (cuando se compite en precios). Como esta señal de mercado es públicamente observable, los mercados de duopolio introducen una dimensión estratégica en el comportamiento experimentador de cada empresa. Los cambios en las acciones presentes, de cualquiera de ellas, no solo afectan a la información disponible propia, sino que también influyen en la información disponible de la empresa rival. El análisis de la complejidad que introduce esta dimensión estratégica es uno de los objetivos principales de esta Tesis Doctoral.

Además, este comportamiento experimentador estratégico se verá altamente influido por el tipo de competencia prevaleciente en el mercado. En particular, si las empresas compiten en cantidades (competencia de Cournot) o si lo hacen en precios (competencia de Bertrand). Cada tipo de competencia da lugar a unas propiedades distintas con respecto a la información. Así, bajo competencia de Cournot, las empresas son *sustitutas en la información.* Esto implica que la tasa de cambio en las ganancias de cualquier empresa, derivadas de una mayor información, aumenta cuanto más desinformada está la empresa rival. Adicionalmente, como bajo Cournot se tiene sustitución estratégica en el mercado, un competidor más informado será un peor rival. Sin embargo, bajo la competencia en precios las empresas son complementarias estratégicas en el mercado, lo que las convierte en *complementarias en la información*, en el sentido de que la tasa de cambio en los beneficios, que cualquiera de ellas obtiene de una mayor información, es mayor cuanto más informada está la empresa rival. O lo que es lo mismo, un competidor informado es un mejor rival.

Los objetivos básicos de esta Tesis Doctoral son:

1. Estudiar la *adquisición estratégica de información* bajo una situación de competencia imperfecta, y su relación con la competencia en el mercado.

2. Relacionar los resultados obtenidos para producto homogéneo, con la adquisición de información en los modelos de monopolio existentes en la Literatura.

3. Analizar como el motivo de la experimentación, puede dar lugar en juegos dinámicos simétricos a soluciones asimétricas en estrategias puras. En concreto, cómo la experimentación puede explicar la dispersión de precios.

4. Interpretar los resultados obtenidos a través del concepto *de señales de mercado más informativas.*

En otras palabras, las cuestiones básicas que se plantean son: *¿Cómo se desvian las empresas de su nivel de producción a corto plazo o miópico para explotar la habilidad de obtener información por medio de la experimentación?* y *¿Cómo el hecho de que exista más de una empresa en el mercado influye en el comportamiento experimentador de los agentes?* o lo que significa lo mismo *¿Puede el aprendizaje modificar el comportamiento estratégico de una industria duopolista que se enfrenta a incertidumbre en la demanda?*, y por último *¿Cómo la búsqueda de señales de mercado más informativas, justifica la experimentación?*. Con el fin de dar respuesta a estas preguntas se estudian distintos modelos de duopolio bajo dos tipos de competencia: en cantidades (*Competencia de Cournot)* y en precios *(Competencia de Bertrand).*

1.Se analiza, en primer lugar, un modelo dinámico (dos periodos) donde las empresas venden productos homogéneos y compiten en cantidades *(Competencia de Cournot)*. Estas se enfrentan a una curva de demanda lineal con pendiente desconocida (que es una variable aleatoria) y además sometida a un ruido blanco aditivo que representa la existencia de cualquier fluctuación aleatoria en la demanda. La incertidumbre sobre dicha pendiente persiste a lo largo de los dos periodos, debido al término de perturbación en la demanda. Cada empresa tiene unas creencias iniciales sobre la media de la pendiente, que son comunes para las dos y que además son conocimiento público.

En el primer periodo cada empresa elige un nivel de producción que junto con la realización del ruido aleatorio, da lugar a un precio en el mercado. Se supone que las dos empresas observan este precio, así como la producción total de la industria. Con esta información, se revisan las creencias sobre la media de la pendiente de la curva de demanda. Estas nuevas creencias son utilizadas en el segundo periodo. El primer resultado básico derivado de este tipo de modelo, es que la experimentación siempre da lugar a un incremento en la producción (de cada empresa y por tanto agregada), con respecto a la óptima a corto plazo.

Así mismo, se formaliza la relación entre experimentación y mayor información. En particular, se demuestra que cantidades mayores producen precios (señales de mercado) más informativos. Lo que a su vez redunda en creencias posteriores, sobre la pendiente desconocida, más precisas y por tanto en mayores beneficios futuros para las empresas.

Finalmente, se analiza el papel que juega la competencia en el mercado sobre la experimentación estratégica. Concretamente, bajo competencia de Cantidades *(Cournot)*, las empresas son sustitutas estratégicas en el mercado, por lo que cada empresa prefiere que su competidor esté desinformado. Como los precios son públicamente observables, esto se trasladaría a niveles de experimentación de las empresas, menores que en el caso del monopolio. Esta conjetura es cierta, y de hecho se demuestra que el nivel de experimentación del duopolio (considerado como mercado) es menor que el del monopolio[1].

Con el fin de resaltar la relación entre el comportamiento experimentador de las empresas y el tipo de competencia en el mercado se repite el análisis llevado a cabo anteriormente, para el caso de un duopolio diferenciado que compite en precios *(Competencia de Bertrand).*

Las empresas se enfrentan a curvas de demanda lineales y estocásticas donde las pendientes (iguales) de cada uno de los mercados son desconocidas. Para facilitar la comparación con el modelo de Cournot se supone que la simetría del modelo es total, por lo que la señal de mercado que se observa es el valor medio de las ventas. De nuevo, la experimentación da lugar a un aumento de los precios por encima de los óptimos a corto plazo.

2. A continuación, se analiza un modelo con producto diferenciado, dando lugar a la existencia de dos mercados. Se estudia en primer lugar, la competencia en cantidades *(Cournot).* La incertidumbre, se refleja en el

---

[1]La comparación se realiza con una adaptación del modelo de monopolio de Mirman, Samuelson, Urbano (1991,a). La adaptación consiste en estudiar la experimentación, en un contexto donde las variables aleatorias son continuas y en concreto se distribuyen de acuerdo con una Normal. De este modo, la revisión de las creencias se hace de forma Bayesiana para la familia de Conjugadas de las Distribuciones Normales.

desconocimiento por ambas empresas de las pendientes (distintas) de cada una de las curvas de demanda. Cada empresa parte de unas creencias iniciales sobre el parámetro desconocido, de su propia demanda y de la de su rival. La observación del vector de precios permite la revisión de las creencias de cada duopolista.

Como las empresas observan la producción de su rival, el interés de cada una de ellas, reside en obtener información sobre su propia demanda. Sin embargo, dada la interacción estratégica de los mercados y la correlación existente entre las creencias posteriores (debida a la correlación entre los términos de ruido de las demandas), cada empresa tiene en cuenta el efecto de su propia experimentación en el nivel de información de la empresa rival.

Por tanto, el objetivo que se persigue en este tipo de modelo, es analizar cómo la relación estratégica de las empresas en los mercados (sustitutos o complementarios estratégicos) influye en los niveles de experimentación llevados a cabo, por ambas. En este sentido, cualquier intento por parte de una de las empresas de cambiar el contenido informativo de la señal, debe tener en cuenta los efectos que producirá sobre las creencias de la empresa rival. En particular, si las empresas son sustitutas estratégicas, cada una de ellas estará mejor cuanto más desinformada esté la empresa rival. Como la correlación entre las creencias posteriores es positiva, cada empresa experimenta menos que bajo el supuesto de que estuviera sola en el mercado.

Dada la simetría y la linealidad de las demandas el modelo de Cournot con productos sustitutos (complementarios) es el perfecto dual de Bertrand con productos complementarios (sustitutos). Por lo que bajo competencia de precios, con productos sustitutos, las empresas llevarán a cabo los niveles máximos de experimentación.

3. Por último, se estudia la experimentación en el duopolio en el caso en el que hay más de un parámetro desconocido en la curva de demanda. El análisis se lleva a cabo bajo competencia de precios y diferenciación de producto en un duopolio simétrico. Se supone que los productos son sustitutos y en particular, tanto la pendiente de la curva de demanda, como el grado de sustitución del producto son desconocidos. Las empresas asignan una probabilidad subjetiva común y conocimiento público a los posibles valores de estos parámetros. De la misma manera utilizan la realización de las ventas de las dos empresas para revisar sus creencias iniciales sobre las demandas. Como en los modelos anteriores, el principal objetivo es hacer este vector de señales más informativo, sin olvidar el efecto que ello supone sobre las creencias del competidor. Además el análisis de dichos modelos asegura que cuando se compite en precios con productos sustitutos, las empresas son informacionalmente complementarias y entonces coordinan sus acciones para hacer la señal de mercado más informativa.

En este contexto, nuestro principal resultado es mostrar como la búsqueda de información lleva a las empresas a fijar precios distintos, o lo que es lo mismo, cómo la dispersión de precios es un equilibrio, para el primer periodo, en estrategias puras. Esto se explica por el hecho, de que con la dispersión de precios las empresas observan dos puntos, en vez de uno de las curvas de demanda de mercado. Esto es lo que se conoce como "Efecto muestreo" (Sampling Effect).

En los resultados que se han ido obteniendo, en los modelos previos de esta Tesis Doctoral, se observa que el comportamiento experimentador de empresas simétricas siempre da lugar a equilibrios en el primer periodo (precios o cantidades según el tipo de competencia) distintos de los óptimos a corto plazo, pero en cualquier caso, siempre simétricos. En este último duopolio dicho comportamiento experimentador da lugar a soluciones diferentes de las miópicas pero además asimétricas si las empresas se restringen a equilibrios en estrategias puras. Para obtener algún tipo de caracterización del equilibrio, en este modelo, es necesario suponer que las distribuciones de probabilidad de los términos aleatorios de la demanda satisfacen algún tipo de propiedad monótona. En particular, es necesario que los ratios de verosimilitud de la distribución conjunta de ruidos, sean monótonos en el vector de señales de mercado. En concreto, se generalizan los resultados obtenidos por Aghion, Espinoza y Jullien (1990), en el sentido de que se extiende el análisis a la clase de funciones de densidad (para las perturbaciones aleatorias de la demanda) que satisfacen la monotonía anteriormente mencionada.

LITERATURA RELACIONADA:

El intento de la Literatura Económica por acercarse a la realidad, se ha plasmado en la introducción de la noción de *incertidumbre*. La incertidumbre puede reflejarse en los parámetros estructurales de los modelos o en la relación que guardan las variables en ellos,.... Esta induce a los agentes económicos a tratar de procurarse información con el fin de tomar decisiones mejor fundadas. En este sentido existen trabajos pioneros en distintos campos, encabezados por el estudio de Spencer (1973) en el mercado de trabajo o en el campo de los seguros con Rostchild y Stiglitz (1976).

Existe una corriente en la Literatura que analizando el equilibrio en expectativas racionales, plasma la incertidumbre en la relación existente entre las variables. Claro ejemplo de ello, es el artículo de Bray (1982) que plantea el problema en un mercado de activos donde el aprendizaje se realiza a través de métodos econométricos (OLS). El principal resultado que obtiene es la posibilidad de equilibrios en expectativas racionales aún cuando el modelo esté mal especificado, durante el proceso de aprendizaje.

En esta misma línea, Bray y Savin (1986) plantean, de nuevo, la estabilidad del equilibrio en expectativas racionales. Para ello, especifican un modelo de la telaraña, donde se estudia un continuo de empresas que producen un bien homogéneo y que se enfrenta a una demanda exógena y estocástica. En este modelo se conoce la relación existente entre las variables, pero los parámetros se caracterizan por su variabilidad en el tiempo. Sin embargo, no es ésta la única diferencia con el tipo de modelos presentados anteriormente. Estos autores, formulan el aprendizaje no solo a través de métodos econométricos, sino también con métodos Bayesianos.

Este problema había sido tratado, con anterioridad, por Townsend (1978), pero desde un punto de vista exclusivamente Bayesiano. Feldman (1987) trata de contribuir a los resultados antes mencionados, demostrando la posibilidad de convergencia a un equilibrio en expectativas racionales, a pesar de la heterogeneidad de las creencias iniciales. Para ello analiza un modelo con agentes Bayesianos que inicialmente poseen una especificación correcta de la estructura subyacente de la economía, pero donde hay incertidumbre sobre algunos parámetros.

A diferencia de estos estudios, los modelos que se analizan en esta Tesis Doctoral son modelos de aprendizaje donde:

1. La incertidumbre se plasma en el desconocimiento de algun/os parámetro/s de la demanda a la que se enfrenta un duopolista.

2. Los parámetros desconocidos se caracterizan por ser fijos en el tiempo.

3. Los agentes que tratan de conocerlos son Bayesianos.

4. La incertidumbre permanece en el tiempo, ya que los modelos se plantean sujetos a perturbaciones aleatorias.

5. El mecanismo de transmisión de la información es endógeno en el modelo, es decir se genera como resultado de la propia acción de los agentes.

Dentro de los modelos con incertidumbre, con las características anteriores, pero para el estudio de un solo decisor , el objetivo perseguido ha sido distinto, en función del horizonte temporal objeto de estudio. En primer lugar tenemos modelos con un *horizonte temporal infinito* donde la cuestión básica que se plantea es si el agente aprenderá finalmente el verdadero estado de su función objetivo. Un ejemplo lo constituye Easley y Kiefer (1988) que con un aprendizaje Bayesiano muestran un análisis próximo al de esta Tesis Doctoral. La función objetivo es lineal y son desconocidas la intersección con el eje de ordenadas y la pendiente. El agente cree que estas dos variables se distribuyen de acuerdo con una Normal Bivariante. Las creencias se van revisando a medida que el agente acumula información. Se muestra que la secuencia de creencias converge y se caracterizan las creencias en el límite cuando se sigue una política óptima. En esta misma línea está el articulo de Kiefer y Nyarko (1989) donde se examinan las propiedades asintóticas de la secuencia de creencias sobre el parámetro desconocido, que no es más que una secuencia de distribuciones posteriores. Se muestra que esta secuencia converge casi con seguridad.

También Aghion, Bolton, Harris y Jullien (1991) analizan un problema de decisión dinámica de un agente que inicialmente desconoce la verdadera forma de la función de pagos, pero que puede obtener información sobre ella, a partir de las observaciones de la producción de los periodos anteriores. El agente debe seleccionar una acción cada periodo en un horizonte temporal infinito. Entre los resultados que se obtienen destaca el hecho de que en el largo plazo los beneficios de la experimentación son cero, ello desde una perspectiva general, que recoge tanto funciones de pago determinísticas como estocásticas. En ambos casos, el aprendizaje conlleva desviaciones cada vez menores de la producción miópica, cuando los periodos de tiempo tienden a infinito.

En el otro extremo tenemos *modelos de dos periodos* como los de Grossman, Kihlstrom y Mirman (1977), Kihlstrom, Mirman y Postlewaite (1984), Tonks (1984), Fusselman y Mirman (1989), Urbano (1990) y Urbano (1992,a). En este tipo de modelos la atención se centra en cómo las acciones del primer periodo difieren de las óptimas a corto plazo, con fines experimentales.

Entre los primeros resultados están los de Grossman, Kihlstrom y Mirman (1977) (GKM, de ahora en adelante) que estudian la experimentación en un contexto de consumo y donde el parámetro desconocido puede tomar "n" valores de una variable aleatoria (el término de ruido se distribuye normalmente). Cada nivel de consumo da lugar a una distribución diferente de la posible señal, estando asociado a un diferente experimento estadístico. Estos experimentos están ordenados por la noción de "suficiencia" en el sentido de Blackwell. Por el teorema de Blackwell se muestra que un experimento suficiente aumenta la utilidad futura. En otras palabras, los experimentos suficientes son experimentos más informativos, a partir de los cuales se produce información que aumentará la utilidad futura esperada. Urbano (1992), y en el contexto de un monopolio, extiende los resultados anteriores, a la clase general de funciones de distribución del término de ruido, que satisfacen que sus ratios de verosimilitud son monótonos. Además se demuestra la otra dirección del teorema de Blackwell, en el sentido de que mayores niveles de producción (o de Consumo) dan lugar a señales más informativas y por tanto a experimentos suficientes. Tonks (1984), analiza un ejemplo del caso general estudiado por GKM, estudiando un consumidor que se enfrenta a la elección de un bien cuyo efecto sobre la función de utilidad es desconocido, introduciendo la posibilidad de que su presupuesto pueda extenderse a más de un periodo. Por último, Fusselman y Mirman (1989) concluyen el mismo resultado que (GKM) adaptando el concepto de variable aleatoria con más riesgo al problema.

En la primera parte de la Tesis Doctoral de Urbano (1990) se especifican las condiciones necesarias para el comportamiento experimentador de un agente: que la información sea valiosa y que cambios en la variable de elección sean capaces de alterar el contenido informativo de la señal que se observa. Esta autora, estudia la experimentación en función de que la incertidumbre aparezca reflejada en la intersección con el eje de los precios de la curva de demanda, que se considera lineal, o en la pendiente de la misma. Los parámetros desconocidos pueden tomar dos valores teniendo las empresas una probabilidad inicial sobre ellos. Los resultados básicos son los siguientes: A) La experimentación incrementa la cantidad, cuando el monopolista desconoce la pendiente de la curva de demanda a la que se enfrenta. B) Con intersección, con el eje vertical de la curva de demanda, desconocida, no tiene lugar la experimentación. C) Cuando existe incertidumbre tanto en la pendiente como en la intersección con el eje de precios de la curva de demanda, la dirección de la experimentación no es única.

En la presente Tesis Doctoral se sigue el segundo enfoque analizado, examinando modelos de dos periodos que centran su atención en los efectos de la experimentación en los niveles de producción del primer periodo. Sin embargo no hay que olvidar que en esta Tesis se introduce una visión diferente en cuanto que son dos los agentes que intervienen en el problema.

En este sentido es posible un análisis adicional sobre el papel estratégico de la experimentación. Con estas características, el artículo de Gal-or (1988) estudia un modelo donde los duopolistas experimentan para obtener información. Su análisis difiere del presentado aquí en que la incertidumbre concierne a los costes más que a la demanda. Sin embargo, la diferencia básica es que en este modelo existe un mecanismo especificado exógenamente por medio del cual las cantidades se transforman en información. En este sentido, se especifica que cantidades mayores, darán lugar a una información más precisa.

Un modelo que también analiza la relación entre la competencia en el mercado y la adquisición de información es el de Vives (1988). Vives estudia los canales por medio de los cuales una mejora en la precisión de la información de las empresas puede favorecer la posición competitiva de las mismas. De acuerdo con Porter (1985), esta ventaja competitiva proviene de la reducción de costes y de la diferenciación del producto. En concreto, se trata de analizar el efecto que sobre los beneficios de una empresa produce una mejor información en las empresas rivales que componen la industria. Las empresas hacen inversiones en el primer periodo sin conocer los resultados en el mercado y con el fin de obtener la citada ventaja. El resultado básico que obtiene este autor, es que el incremento en la precisión de la información siempre favorece la posición competitiva y los beneficios propios y aumenta o disminuye la posición competitiva del rival y sus beneficios en función del tipo de competencia que prevalece en el mercado. A saber: bajo la competencia en precios (Bertrand) es preferible un competidor bien informado y bajo Cournot los resultados son los contrarios.

Para su análisis Vives presenta un modelo genérico donde la parametrización da lugar a tres posibles interpretaciones:

1. Competencia de Cournot con productos homogéneos con costes marginales crecientes.
2. Competencia de Cournot con productos diferenciados y costes marginales constantes.
3. Competencia de Bertrand con productos diferenciados y costes marginales constantes.

Cuando el modelo se estudia con certidumbre la inversión en el primer periodo tiene un efecto directo sobre los propios beneficios. Sin embargo en los casos dos y tres tienen interpretaciones distintas: en el caso de Cournot con productos diferenciados el efecto de la inversión sería el de una ampliación en el mercado o lo que es lo mismo un aumento del número de consumidores. Para el caso tres, el efecto de la inversión sería el de que ahora los consumidores tienen que pagar un mayor precio por el bien. El análisis se plantea también con incertidumbre y es entonces cuando aparecen las semejanzas y diferencias con los modelos que se estudían aquí. El parámetro desconocido es la intersección con el eje de precios de la demanda; sin embargo, a diferencia de nuestro estudio, las empresas reciben señales privadas que no se generan dentro del modelo sino que son exógenas al mismo. La estructura del juego es la siguiente: las empresas invierten primero para obtener una posición competitiva, reciben una señal privada y entonces compiten en el mercado. Se plantea como un juego en dos etapas buscando de esta forma el Equilibrio Perfecto Subjuego.

El parámetro desconocido y las señales se relacionan a través de una estructura en la información que parametriza la precisión de la misma y computa explicitamente los beneficios del segundo periodo en función de la inversión en el primer periodo.

El estudio de Vives (1988) es similar al de esta Tesis, en cuanto que tambien analiza la relación entre la *información/beneficios* con el tipo de *competencia en el mercado.* Sin embargo difiere en que la transmisión de información, al igual que Gal-or (1988), se hace de forma exógena al modelo. Todos los modelos aquí analizados tienen como ya se ha indicado, la característica común de que las señales de mercado se generan de forma endógena, es decir dentro de los mismos. Cuando se compite en cantidades (precios), los precios (ventas) o señal de mercado son el resultado de la toma de las decisiones de los agentes en el primer periodo.

La introducción de los modelos multiagente, permite observar que cuando una empresa cambia su acción a corto plazo, no solo trata de afectar al flujo de información sobre el que basará sus decisiones futuras (experimentación). También es posible, que dicha empresa trate de alterar el aprendizaje de la empresa rival. Este intento por manipular el aprendizaje del competidor se denomina "emisión de señales confusas" o "signal jamming". Para que esto ocurra, necesariamente, los agentes no pueden observar las acciones de la empresa rival. En concreto, en modelos como los aquí presentados, el signal jamming se da si las empresas no pueden observar las cantidades producidas (los precios fijados) por las rivales. Las empresas únicamente observan los precios de mercado que están sujetos a perturbaciones aleatorias y esto da lugar a una información imprecisa sobre el verdadero valor del parámetro. Cada empresa puede entonces, variar su nivel de producción con el fin de manipular la distribución de los precios de mercado e inferir en las creencias de su oponente.

En la segunda parte de la Tesis Doctoral de Urbano (1990) se estudian modelos de duopolio con incertidumbre en la demanda, donde la producción de las empresas no es observada. Se estudia un duopolio con productos homogéneos y donde se compite en cantidades. El análisis da lugar a dos posibles situaciones. En primer lugar, cuando las empresas no conocen la intersección con el eje de los precios de la curva de demanda, el duopolista no experimenta, pero sí que varía la producción con el fin de manipular la información que recibe la empresa rival. Es decir las empresas practican "signal jamming". En segundo lugar si la incertidumbre se refleja en el desconocimiento de la pendiente de la curva de demanda, las empresas practican tanto la experimentación como el "signal jamming"[2].

Mirman y Urbano (1991) y Urbano (1992,b) también analizan comportamientos de manipulación de información en contextos de información asimétrica. Para aislar dicho comportamiento, estos autores suponen modelos donde la incertidumbre a la que se enfrentan las empresas está reflejada en la intersección con el eje de precios de la curva de demanda.

Otros modelos de duopolio donde la manipulación y transmisión de información son importantes, son los siguientes: en primer lugar modelos donde la transmisión de información se hace de forma exógena (a través de anuncios sobre la información privada), sería el caso de Li (1985) y Shapiro (1986). En segundo lugar modelos que examinan la transmisión de información a través de acciones perfectamente observables, ejemplo de ello es Mailath

[2] Vease Mirman, Samuelson y Urbano (1991,b).

(1988). Matthews y Mirman (1983) y Fundenberg y Tirole (1986) serían un ejemplo del tercer tipo de estudios, en los que el agente que actúa como "signal jammer" o como emisor de señales confusas, está perfectamente informado sobre la información sujeta a dicha actividad. Por último, el modelo de Riordan (1985) estudia la manipulación de la información por parte de los agentes económicos, cuando ellos mismos están inciertos. Este tipo de modelo se acerca al analizado por Mirman y Urbano (1991); en él se estudia la emisión de señales en un modelo en el que las empresas tienen distintas expectativas iniciales sobre algún parámetro desconocido de la demanda.

El fenómeno del "signal jamming" no es objeto de estudio de esta Tesis, en cuanto que todos los modelos presentados en ella, suponen que las acciones de la empresa rival se observan. Sin embargo, es importante resaltar este tipo de literatura dada la relación que presentan con la aquí estudiada.

Con respecto a los modelos donde se estudia la dispersión de precios cabe señalar lo siguiente. Las principales explicaciones sobre la dispersión de precios se centran en los costes de búsqueda. Estos modelos no excluyen la existencia de equilibrios simétricos en estrategias puras. Además, la mayoria de los modelos de búsqueda con dispersión de precios necesitan algún tipo de supuesto que introduzca asimetría en la información disponible de los agentes. En términos de Burdett y Judd (1983) existen modelos que justifican la dispersión de precios, con agentes racionales, a través de algun tipo de heterogeneidad "ex-ante", por ejemplo, distintos costes de busqueda por parte de los consumidores reflejadas en Salop y Stiglitz (1976), o Wilde y Schwartz (1979) donde los consumidores tienen distintas propensiones de búsqueda. En contraste Burdett y Judd (1983) observan que las empresas pueden fijar diferentes precios siempre que exista una probabilidad positiva, pero no cierta, de que algún consumidor aleatorio conozca sólo un precio. Este mecanismo será el que genere la dispersión de precios.

El modelo más similar al nuestro es el de Aghion, Espinoza y Jullien (1990). En él, se estudia un duopolio donde las empresas ofrecen productos diferenciados. La diferenciación del producto es horizontal, y en particular se estudia el modelo de Hotelling, donde se compite en precios. El modelo se presenta como un juego repetido. La incertidumbre en la demanda se refleja a través del grado de sustituibilidad de los productos que ofrecen las dos empresas. Esta falta de información sobre la sustituibilidad se formaliza suponiendo que las dos empresas no conocen los costes de transporte a los que se enfrentan los consumidores.

El eje principal de este artículo se centra en el hecho de que la información sobre los costes de transporte se adquiere de forma más efectiva si las empresas experimentan fijando precios distintos . Se muestra que en un equilibrio simétrico, la dispersión de precios es mayor cuanto más débil es la información y que esta dispersión desaparecerá en el largo plazo cuando las empresa adquieran una información completa sobre los costes de transporte de los consumidores. Los resultados básicos obtenidos son tres: 1. El aprendizaje óptimo, a través de la experimentación con varios agentes, requiere que los agentes tomen diferentes acciones con el fin de obtener tantas muestras de la observación como sea posible, efecto conocido como "*sampling effect*". 2. El aspecto de bien público que toma la experimentación individual crea un incentivo a la aparición de "free-riding". 3. La experimentación para varios agentes lleva consigo la posibilidad de manipular la señal que reciben los otros agentes y disminuir en este sentido la acumulación de información. La diferencia básica con este modelo la conseguimos a través de la generalización a las funciones de densidad de las perturbaciones aleatorias que cumplen los ratios de verosimilitud monótonos.

Para sintetizar, los modelos que se estudian en esta Tesis se caracterizan por:

1. La incertidumbre se refleja en el desconocimiento de la pendiente de la curva de demanda que aunque desconocida permanece fija en el tiempo. Esta incertidumbre se emplea tanto en el modelo de Cournot como en el de Bertrand. En el modelo de dispersión de precios la incertidumbre se da, tanto en el parámetro de la pendiente como en el del grado de sustitución de los productos.
2. La incertidumbre permanece en el tiempo debido a la existencia de una perturbación aleatoria aditiva.
3. El horizonte temporal de estudio es de dos periodos. Centrandose el análisis en el cambio de las acciones del primer periodo con fines experimentales.
4. Se estudian modelos dinámicos de duopolio. Con ello se introduce un aspecto estratégico, en el sentido de que las acciones presentes afectan a la información futura, y como esta es conocimiento público, afectarán también a la información disponible del competidor.
5. Las empresas determinan, con sus propias acciones el contenido informativo de la señal de mercado, que es endógena al modelo. La señal es el precio si las empresas compiten en cantidades (Cournot) o

las ventas si las empresas compiten en precios (Bertrand).

6. Los modelos que se utilizan no recogen la emisión de señales confusas o "signal jamming" en cuanto que las acciones de las empresas se conocen. No existe la posibilidad de variar la producción o los precios con el fin de alterar las creencias de la empresa rival.
7. En todos nuestros modelos, existe una única señal o vector de señales, generado por la propia acción de las empresas. Además, todos los agentes se enfrentan a la misma señal y no existe ningún tipo de asimetría de partida, siendo todos los agentes iguales.

Así pues, los modelos que se presentan en esta Tesis Doctoral permiten obtener los siguientes resultados. Cuando la incertidumbre se refleja en la pendiente de la curva de demanda y bajo competencia de Cournot, con productos homogéneos, el nivel de experimentación del duopolio es menor que el del monopolio. Se demuestra que la vertiente estratégica derivada de la competencia de Cournot hace que la experimentación de lugar a un nivel de producción de la industria menor que el del monopolio. De esta manera se invierten los resultados propios del comportamiento miópico. La dirección de la experientación es la misma, cuando se analiza un duopolio que compite en precios y cuya característica básica es la existencia de una sola señal en el mercado: las ventas medias.

Cuando las empresas aumentan las cantidades o los precios, están aumentando, en definitiva, la precisión de la señal de mercado o lo que es lo mismo haciendola más informativa.

Si los productos son diferenciados, la competencia en cantidades hace que las empresas sean sustitutas en la información por lo que un competidor menos informado es un mejor competidor. Mientras que si las empresas compiten en precios son complementarias en la información dando lugar a que un competidor más informado sea un mejor rival. Por supuesto la complementariedad estratégica dará lugar a los mayores grados de experimentación.

Finalmente, cuando la incertidumbre afecta tanto a la pendiente como al grado de sustitución del producto se obtiene un equilibrio asimétrico en estratégias puras. Este resultado se justifica por el deseo de las empresas de obtener una mayor información: éstas pueden observar dos puntos de las curvas de demanda, en vez del que se daría si el equilibrio fuera simétrico. En este caso, de nuevo, la dispersión de precios busca hacer la señal de mercado más informativa.

Por último, señalar que las pérdidas de segundo orden derivadas de la experimentación, se compensan con las ganancias de primer orden derivadas de una mayor información.

El plan de la Tesis es el siguiente. En la primera parte, se analiza la relación existente entre la experimentación y la competencia en el mercado. Esta parte consta de tres capítulos, el primero de ellos analiza la experimentación estratégica en el modelo de Cournot con productos homogéneos. Así mismo, se formaliza el nexo entre señales de mercado más informativas y experimentación. El segundo capítulo extiende el análisis a un duopolio simétrico de Bertrand. Finalmente, se introducen los modelos de diferenciación de producto, en el capítulo 3. En este, se considera tanto la competencia en cantidades como en precios.

La parte segunda, se dedica a mostrar cómo el aprendizaje puede dar lugar a la dispersión de precios. Esto se estudia en el capítulo 4.

Por último, la Tesis se cierra con un apartado dedicado a resumir los aspectos más relevantes de los temas analizados.

PRIMERA PARTE

EXPERIMENTACION Y COMPETENCIA EN EL MERCADO.

En esta primera parte, se estudia la relación existente entre experimentación y competencia en el mercado. En concreto, se muestra cómo el tipo de competencia en el mercado afecta a la experimentación, cuando las empresas se enfrentan a curvas de demanda con pendiente desconocida. El análisis permite demostrar que cuando las empresas compiten en cantidades (competencia de Cournot) son sustitutas estratégicas en la información y además están mejor cuanto menos informada está la empresa rival. Si las empresas compiten en precios, (competencia de Bertrand) son complementarias estratégicas en la información y estarán mejor cuanto más informada esté la empresa rival. Esto da lugar a que los niveles de experimentación más altos se consigan con la competencia de Bertrand, mientras que los menores se darán cuando las empresas compitan en cantidades, Cournot, con productos homogéneos. Demostrandose, a su vez, que en este caso la experimentación es menor que en el monopolio.

CAPITULO 1.

Competencia de Cournot y Experimentación.

CAPITULO 1.

Competencia de Cournot y Experimentación.

Se supone un modelo dinámico de duopolio con información imperfecta sobre su función de demanda lineal y estocástica. El duopolista considera que tanto el parámetro desconocido (la pendiente) como el término aleatorio de la curva de demanda tienen funciones de distribución Normales, y usa la observación de los precios como información para revisar sus expectativas, sobre este parámetro de la curva de demanda.

I. El modelo.

I.1. Supuestos básicos:

1. Se supone un duopolio, donde el horizonte temporal de cada empresa es de dos periodos.

2. La curva de demanda estocástica vendrá dada por la siguiente expresión

$$\tilde{P} = a - \tilde{\theta}(Q_1 + Q_2) + \tilde{\varepsilon} \qquad (1)$$

donde P es el precio de mercado, Q_1 y Q_2 son las cantidades que producen cada uno de los duopolistas 1 y 2, $\tilde{\theta}$ es la pendiente de la curva de demanda que es desconocida para las empresas y $\tilde{\varepsilon}$ es una variable de ruido. Se supone que los términos de ruido son independientes y están idénticamente distribuidos en cada periodo. Además son independientes de $\tilde{\theta}$.

3. Las empresas suponen que tanto $\tilde{\theta}$ como $\tilde{\varepsilon}$ se distribuyen en la recta real $\mathbb{R}$, con función de distribución Normal. Entonces, estas se caracterizan por su media y su precisión. Esto es, $\tilde{\varepsilon} \sim N(0,\tau)$; donde $E[\tilde{\varepsilon}]=0$ y $\tau = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^2}$ siendo τ la precisión y σ_{ε}^2 su varianza. Las creencias iniciales sobre $\tilde{\theta}$ se reflejan en la distribución Normal: $\tilde{\theta} \sim N(m,h)$, donde $E[\tilde{\theta}] = m > 0$ y $h = \frac{1}{\sigma_{\theta}^2}$, siendo h la precisión y σ^2_{θ} la varianza de $\tilde{\theta}$.

4. Estas creencias iniciales se revisan a medida que las empresas consiguen más información. Esta información adicional disponible, es el precio de mercado del primer periodo, junto con la producción propia y la de la empresa rival.

5. El objetivo de las empresas es la maximización de beneficios, eligiendo aquella producción que maximiza la suma de beneficios esperados de los dos periodos. Su producción pertenece a un subconjunto cerrado de la recta real.

6. Para simplificar suponemos que los costes de producción son nulos o que el precio que consideramos es un precio neto, que resulta de restarle al precio de mercado un coste marginal constante que es el mismo para las dos empresas.

7. No hay posibilidad de entrada en el mercado. Es decir, la estructura de mercado duopolista se perpetua a lo largo del tiempo.

El siguiente apartado modela la interacción en el mercado de las empresas, como un juego de información imperfecta. Dicho juego se desarrolla de la siguiente forma:

I.2. Desarrollo del juego:

El juego consta de dos periodos:

En el periodo 1, se pueden distinguir dos etapas:

Etapa 1: la naturaleza elige un valor θ y un valor ε_1 de las variables aleatorias independientes $\tilde{\theta}_1 \sim N(m,h)$ y que $\tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0,\tau)$, donde h y τ son la precisión de $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_1$, respectivamente.

Etapa 2: las empresas que no conocen la elección de la naturaleza, pero saben como se distribuyen $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_1$, eligen simultánea e independientemente las cantidades del primer periodo, Q_{11} y Q_{21}. Estas cantidades son conocidas por las dos empresas.

Sea $Q_1 = Q_{11} + Q_{21}$. El precio de mercado, P_1, vendrá determinado por:

$$P_1 = a - \theta Q_1 + \varepsilon_1. \tag{2}$$

precio, que es observado por (o anunciado a) las empresas.

En el periodo 2 se distinguen, también, dos etapas:

Etapa 1: La naturaleza vuelve a elegir un nuevo valor ε_2 de $\tilde{\varepsilon}_2$.

Etapa 2: las empresas, de nuevo, eligen cantidades: Q_{12} y Q_{22} que dependen del precio y de las cantidades del primer periodo (Q_1 y P_1). El precio del segundo periodo (que, también se anuncia a las empresas) vendrá dado por:

$$P_2 = a - \theta Q_2 + \varepsilon_2. \tag{3}$$

Las Estrategias para estas dos empresas en cada uno de los periodos son:

$$\sigma_1 = (Q_{11}, Q_{12}(P_1, Q_1)) \tag{4}$$
$$\sigma_2 = (Q_{21}, Q_{22}(P_1, Q_1)) \tag{5}$$

Dado el supuesto de que los costes de producción son cero, la estructura de pagos es la siguiente:

Estructura de Pagos. Sean los beneficios de cada una de las empresas en el segundo periodo:

$$\pi_{12}(\sigma_1,\sigma_2) = Q_{12}\ E[P_2(Q_{12},Q_{22})/P_1,Q_1] \tag{6}$$
$$\pi_{22}(\sigma_1,\sigma_2) = Q_{22}\ E[P_2(Q_{12},Q_{22})/P_1,Q_1] \tag{7}$$

De esta forma, la suma de los beneficios esperados de los dos periodos, para cada una de las empresas, es:

$$\Pi_1((Q_{11},Q_{21}),(Q_{12},Q_{22})) = Q_{11}E\ [P_1(Q_{11},Q_{21})] + \pi_{12} \tag{8}$$
$$\Pi_2((Q_{11},Q_{21}),(Q_{12},Q_{22})) = Q_{21}E\ [P_1(Q_{11},Q_{21})] + \pi_{22} \tag{9}$$

Estamos particularmente interesados en el Equilibrio Perfecto Subjuego de este juego de dos periodos. El equilibrio se calcula por inducción hacia atrás. Se analiza, inicialmente, el equilibrio en el segundo periodo en función de la información que adquieren las empresas en el primero. Después, se determinan las acciones de este último. Se empieza, pues, estudiando el equilibrio en el segundo periodo que en nuestro caso es un equibrio Bayesiano-Nash.

En el último periodo, las empresas, después de observar P_1 y conociendo Q_1 eligen las producciones $\hat{Q}_{12}$ y $\hat{Q}_{22}$ tal que:

$$\hat{Q}_{12} \in \underset{Q_{12}}{\mathrm{Argmax}}\ E[P_2(Q_{12},Q_{22})/P_1,Q_1]Q_{12} \qquad (10)$$

$$\hat{Q}_{22} \in \underset{Q_{22}}{\mathrm{Argmax}}\ E[P_2(Q_{12},Q_{22})/P_1,Q_1]Q_{22} \qquad (11)$$

Para resolver este problema se tiene que hallar, en primer lugar, la expresión $E[P_2/P_1,Q_1]$, es decir, $E[a - \tilde{\theta}Q_2 + \tilde{\varepsilon} /P_1,Q_1]$ que depende de Q_1 y P_1 y donde $Q_1= Q_{11} + Q_{21}$ y $Q_2= Q_{12} + Q_{22}$. Dado que:

$$E[a - \tilde{\theta}Q_2 + \tilde{\varepsilon}/P_1,Q_1] = a - E[\tilde{\theta}/P_1,Q_1]Q_2 \qquad (12)$$

es suficiente obtener $E[\tilde{\theta}/P_1,Q_1]$.

Después del primer periodo, una vez elegidas las producciones de las empresas, se realizan los valores de $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\theta}$, y $\tilde{P}$. Las empresas observan el precio correspondiente al primer periodo y la producción agregada, pero no las realizaciones de $\tilde{\varepsilon}$ y $\tilde{\theta}$. Como consecuencia, no podrán determinar el valor de la media de $\tilde{\theta}$. Sin embargo, las observaciones del precio, junto con el conocimiento de la producción agregada, permite a éstas revisar sus creencias sobre dicha media. La revisión se hace de acuerdo con el procedimiento Bayesiano para la familia de conjugadas de las distribuciones de las señales que se han observado.

En particular P_1=a - $\tilde{\theta}Q_1 + \tilde{\varepsilon}$, entonces, las empresas observan, después del primer periodo la siguiente señal de mercado:

$$\frac{a - P_1}{Q_1} = \tilde{\theta} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{Q_1} \qquad (13)$$

Entonces, para cada valor de θ:

$$\frac{a - P_1}{Q_1} \sim N\,[\theta\ ,\ \tau Q_1^{\,2}] \qquad (14)$$

(Recuerdese que τ es la precisión de $\tilde{\varepsilon}$). El valor de θ es desconocido para las empresas, pero ellas creen inicialmente que $\tilde{\theta}_1 \sim N(m,h)$. Por tanto, después de observar P_1 y conociendo Q_1, las nuevas creencias o expectativas sobre θ vienen dadas (ver DeGroot, 1970, pag 167) por $\tilde{\theta}_2 \sim N(\hat{\theta},\hat{h})$ donde:

$$\hat{\theta} = \frac{hm + \tau Q_1^{\,2}\left[\frac{a - P_1}{Q_1}\right]}{h + \tau Q_1^2} = \frac{mh + \tau Q_1(a - P_1)}{h + \tau Q_1^2} \qquad (15)$$

y

$$\hat{h} = h + \tau Q_1^2\ . \qquad (16)$$

Por tanto, $E[\tilde{\theta}/P_1,Q_1] = \hat{\theta}$, y por (12), $E[P_2/P_1,Q_1] = a - \hat{\theta}Q_2$, donde $Q_2 = Q_{12} + Q_{22}$. Entonces, las ecuaciones (10) y (11) se convierten en:

$$\hat{Q}_{12} \in \underset{Q_{12}}{\text{Argmax}} \left[\ a - \hat{\theta}(Q_{12} + Q_{22})\right] Q_{12}, \qquad (17)$$

$$\hat{Q}_{22} \in \underset{Q_{22}}{\text{Argmax}} \left[\ a - \hat{\theta}(Q_{12} + Q_{22})\right] Q_{22}. \qquad (18)$$

Definase $Q: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, como $Q(M) = \frac{a}{3M}$. Resolviendo simultáneamente las condiciones de primer orden de (17) y (18) se obtiene la única solución simétrica del problema:

$$\hat{Q}_{12}(\hat{\theta})=\hat{Q}_{22}(\hat{\theta}) = \hat{Q}(\hat{\theta}) = \frac{a}{3\hat{\theta}} \tag{19}$$

Así, los beneficios esperados para ambas empresas, en el segundo periodo, son función de $\hat{\theta}$. Sea $V(\hat{\theta})$, la función que representa los beneficios esperados de equilibrio de cada empresa en dicho segundo periodo:

$$V(\hat{\theta}) = \hat{Q}(\hat{\theta})\left[a - 2\hat{\theta}\hat{Q}(\hat{\theta})\right] = \frac{a^2}{9\hat{\theta}}. \tag{20}$$

$V(\hat{\theta})$, la función de Valor de cada empresa, expresa los beneficios esperados en el equilibrio en el segundo periodo, en función de las creencias posteriores, $\hat{\theta}$. En el siguiente Lema, se muestran sus principales propiedades.

Lema 1: $V(\hat{\theta})$ es una función decreciente y estrictamente convexa en $\hat{\theta}$.

La intuición del Lema es clara. La primera propiedad indica que V(.) es menor cuando mayor sea el valor de $\hat{\theta}$, media de la demanda estocastica. La segunda propiedad, la convexidad, indica que la información sobre θ, siempre es valiosa para las empresas.

Demostración.

1.Función decreciente: es obvia a partir de la expresión (20).

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}} = \frac{-a^2}{9\hat{\theta}^2} < 0. \tag{21}$$

Esta derivada implica que valores altos de $\hat{\theta}$, suponen menores beneficios esperados para la empresa. Esto es así , ya que $\hat{\theta}$ representa la estimación de la pendiente de la curva de demanda, por lo tanto valores altos de $\hat{\theta}$ suponen curvas de demanda mas bajas, lo que implica menores beneficios.

2. Convexidad de la función:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\theta}^2} = \frac{2a^2}{9\hat{\theta}^3} > 0 \tag{22}$$

■

Para demostrar el significado de esta propiedad empezamos definiendo para cada valor θ de $\tilde{\theta}$, las soluciones óptimas:

$$Q_{12}(\theta) = \underset{Q_{12}}{\text{Argmax}}\ [a - \theta(Q_{12} + Q_{22})]Q_{12}$$

$$Q_{22}(\theta) = \underset{Q_{12}}{\text{Argmax}}\ [a - \theta(Q_{12} + Q_{22})]Q_{22}$$

De aquí se obtiene $Q(\theta) = Q_{12}(\theta) = Q_{22}(\theta) = \frac{a}{3\theta}$, por lo que los beneficios para cada empresa, y para cada valor θ de $\tilde{\theta}$, son:

$$V(\theta) = Q(\theta)[a - 2\theta Q(\theta)] \tag{23}$$

Las empresas no conocen la realización de $\tilde{\theta}$, así que eligen su producción de acuerdo con las expresiones (17) y (18). Supóngase que a posteriori, las empresas consiguen conocer el verdadero valor de $\tilde{\theta}$. Sea $V_0(\theta)$ los beneficios posteriores para cada empresa, bajo la producción óptima de equilibrio ex-ante. Es decir:

$$V_0(\theta) = Q(\hat{\theta})[a - 2\theta Q(\hat{\theta})] \qquad (24)$$

Definición 1: La información sobre θ es valiosa a posteriori, si para cualquier valor θ de $\tilde{\theta}$, cada empresa hubiera preferido estar informada sobre θ, cuando eligió su producción óptima del segundo periodo. O lo que es lo mismo, si se cumple que:

$$V(\theta) > V_0(\theta) \qquad (25)$$

Por (23) y (24), (25) es equivalente a:

$$Q(\theta)[a - 2\theta Q(\theta)] > Q(\hat{\theta})[a - 2\theta Q(\hat{\theta})] \qquad (26)$$

Entonces, como $V(\hat{\theta})$, definida en (20), es convexa, por argumentos estándar la expresión anterior se cumple.

Además, la Definición 1, no sólo garantiza que la información es valiosa a posteriori sino que también lo es ex-ante. Para comprobarlo es suficiente comparar los beneficios esperados del segundo periodo, cuando las empresas aprenden el verdadero valor del parámetro entre el periodo 1 y 2 y cuando no lo hacen. Los beneficios esperados del segundo periodo en el primer caso son $E[V(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\theta)h(\theta)d\theta$, donde $h(\theta)$ es la función de densidad de θ, y en el segundo, son simplemente $V(E[\theta])=V(\hat{\theta})$. Entonces la información sobre θ será valiosa ex-ante si

$$E[V(\theta)] > V(E[\theta]) = V(\hat{\theta}). \qquad (27)$$

Nótese que tomando esperanzas en (25) se tiene que

$$E[V(\theta)] > E[V_0(\theta)] = V(E[\theta]) \qquad (28)$$

(por la linearidad de V_0 en θ).

II. Análisis del primer periodo.

Cuando las empresas eligen su producción en el primer periodo, las creencias posteriores $\hat{\theta}$, son variables aleatorias. Su distribución depende de la producción de la industria en este periodo, así como de la distribución de precios inducida por $\tilde{\varepsilon}$ y $\tilde{\theta}$. Dado el análisis realizado del segundo periodo, podemos expresar los beneficios esperados de cada empresa, en los dos periodos, en función de las producciones del primero.

Sea:

$$\pi_i(Q_{11},Q_{21}) = E[a - \tilde{\theta}Q_1 + \tilde{\varepsilon}]Q_{i1},\ i=1,2. \tag{29}$$

los beneficios esperados del primer periodo, y sea

$$\Pi_i(Q_{11},Q_{21}) = \pi_i + E\left[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)\right] \tag{30}$$

donde $Q_1 = Q_{11} + Q_{21}$. Nótese que:

$$E\left[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1))\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\hat{\theta}(P_1,Q_1))f(a - P_1)dP_1 \tag{31}$$

siendo f la función de densidad de la variable aleatoria $(a - \tilde{P}_1)$:

$$a - \tilde{P}_1 = \tilde{\theta}(Q_{11} + Q_{21}) - \tilde{\varepsilon} = \tilde{\theta}Q_1 - \tilde{\varepsilon} \tag{32}$$

Esta variable se distribuye para cada Q_1 como una Normal de media y precisión:

$$\left[a - \tilde{P}_1\right] \sim N\left[mQ_1 , \frac{h\tau}{h + \tau Q_1^2} \right] \tag{33}$$

Por tanto, su función de densidad es:

$$f(a-P_1) = \frac{\left[\dfrac{h\tau}{h + \tau Q_1^2}\right]^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-1/2\left[\left[\frac{h\tau}{h + \tau Q_1^2}\right](a-P_1-mQ_1)^2\right]} \tag{34}$$

Entonces, el problema que las empresas 1 y 2 tienen que resolver en el periodo 1 es la elección de la producciones Q^*_{11} y Q^*_{21}, tal que:

$$Q^*_{11} \in \underset{Q_{11}}{\text{Argmax}}\ \Pi_1(Q_{11},Q^*_{21}). \tag{35}$$

$$Q^*_{21} \in \underset{Q_{21}}{\text{Argmax}}\ \Pi_2(Q^*_{11},Q_{21}). \tag{36}$$

Sean Q^m_{11} y Q^m_{12} las producciones óptimas a corto plazo o miópicas de las empresas, es decir:

$$Q^m_{11} \in \underset{Q_{11}}{\text{Argmax}}\ \pi_1(Q_{11},Q^m_{21}) \tag{37}$$

$$Q^m_{21} \in \underset{Q_{21}}{\text{Argmax}}\ \pi_2(Q^m_{11},Q_{21}) \tag{38}$$

Nuestra atención se centra , pues, en conocer si las empresas obtendrán niveles de producción Q^*_{11} y Q^*_{21} distintas de Q^m_{11} y Q^m_{21}, con el fin, de procurarse información sobre el parámetro desconocido.

La próxima sección caracteriza las soluciones del primer orden derivadas de la maximización de beneficios. Para garantizar soluciones interiores es suficiente que cada $Q_{i1}>0$, i=1,2 , por lo que el duopolio opera en los dos periodos y que con $E[Q_1] < \frac{a}{m}$, es decir que la producción total del duopolio esté acotada por el nivel de producción que iguala el precio a cero.

II.1. Condiciones de primer orden:

Cuando las empresas actúan de forma miópica, tenemos que:

$$\frac{\partial \pi_1 \left(Q_{11}, Q^m_{21} \right)}{\partial Q_{11}} = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial \pi_2 \left(Q^m_{11}, Q_{21} \right)}{\partial Q_{21}} = 0 \tag{40}$$

mientras que las condiciones de primer orden para el problema dinámico, son:

$$\frac{\partial \pi_1 \left(Q_{11}, Q^*_{21} \right)}{\partial Q_{11}} + \frac{\partial E\left[V(\hat{\theta}(P_1, Q_1)\right]}{\partial Q_{11}} = 0. \tag{41}$$

$$\frac{\partial \pi_2 \left(Q^*_{11}, Q_{21} \right)}{\partial Q_{21}} + \frac{\partial E\left[V(\hat{\theta}(P_1, Q_1)\right]}{\partial Q_{21}} = 0. \tag{42}$$

La diferencia entre las dos posibles alternativas (dinámica y estática) dependerá del valor de $\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial Q_{i1}}$.

Considérese este problema para el caso de la empresa 1. Sea:

$$\Gamma_{11}(Q_{11}) = E\ [V(\hat{\theta})] = \int V(\hat{\theta}(P_1, Q_1))f(a - P_1)dP_1 \tag{43}$$

Estamos interesados en el signo de $\partial \Gamma_{11}(Q_{11})/\partial Q_{11}$, en cuanto que este signo nos dirá si la utilización del flujo de información que se deriva del primer periodo, da lugar a algún tipo de desviación en la producción con respecto a aquella que elige la empresa cuando se comporta de forma miópica.

Lema 2:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial Q_{11}} > 0, \text{ para cada } \hat{\theta}. \tag{44}$$

Demostración:

Por la ecuación (43):

$$\frac{\partial \Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \int \frac{\partial V(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Q_{11}} f(a-P_1)dP_1 + \int V(\hat{\theta}) \frac{\partial}{\partial Q_{11}} f(a-P_1)dP_1 \tag{45}$$

El estudio de (45) es largo y tedioso y con el fin de hacer el análisis más fluido ha sido relegado al Apendice A, donde se muestra que (45) puede expresarse como:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \frac{1}{\hat{h}} \int V''(\hat{\theta})\left(-\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial P_1}\right) f(a-P_1)dP_1. \tag{46}$$

Por el Lema 1, $V(\hat{\theta})$ es estrictamente convexa, de hecho $V''(\hat{\theta}) = \frac{2a^2}{9\hat{\theta}^3}$. Dado que $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial P_1} = \left[\frac{-\tau Q_1^2}{h + \tau Q_1^2}\right] < 0$ y que $\hat{h}$ viene dada por (16), nos quedará que (46) es positiva, o sustituyendo por su valor:

$$\frac{\partial\Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \frac{2a^2\tau Q_1}{9\hat{h}^2}\int \frac{1}{\hat{\theta}^3} f(a-P_1)dP_1 >0 \tag{47}$$

donde $Q_1 = Q_{11} + Q^*_{21}$. ■

La siguiente proposición, muestra el primer resultado de este capítulo:

Proposición 1. Sean Q^m_{11} y Q^m_{21} las producciones miópicas de cada uno de los duopolistas, entonces $Q^*_{11} > Q^m_{11}$ y $Q^*_{21} > Q^m_{21}$ y también $Q^*_1 = Q^*_{11} + Q^*_{21} > Q^m_{11} + Q^m_{21} = Q^m_1$.

Demostración:

Por (41) y (42) se cumple que:

$$Q_{11} = \frac{a}{2m} - \frac{1}{2} Q^*_{21} + \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[V(\hat{\theta})], \tag{48}$$

$$Q_{21} = \frac{a}{2m} - \frac{1}{2} Q^*_{11} + \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial Q_{21}} E[V(\hat{\theta})]. \tag{49}$$

$E[V(\hat{\theta})]$ depende de $Q_1 = Q_{11} + Q_{21}$, y en el equilibrio depende de $Q^*_1 = Q^*_{11} + Q^*_{21}$, de forma que $\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[V(\hat{\theta})] = \frac{\partial}{\partial Q_{21}} E[V(\hat{\theta})]$. Por (48) y (49), $Q^*_{11} = Q^*_{21}$, y por (46) y (47),

$$Q^*_{11} = Q^*_{21} = \frac{a}{3m} + \frac{2a^2\tau Q^*_1}{27m\hat{h}^2}\int \frac{1}{\hat{\theta}^3} f(a-P_1)dP_1 \tag{50}$$

Por (39) y (40):

$$Q^m_{11} = Q^m_{21} = \frac{a}{3m}. \tag{51}$$

De este modo por (47) se tiene que $Q^*_{11} > Q^m_{11}$ y $Q^*_{21} > Q^m_{22}$, y

$$Q^*_1 = \frac{2a}{3m} + \frac{4a^2 \tau Q^*_1}{27m\hat{h}^2} \int \frac{1}{\hat{\theta}^3} f(a-P_1)dP_1 > \frac{2a}{3m} = Q^m_1 \tag{52}$$

■

La intuición del resultado anterior, es que aumentando la cantidad producida las empresas aumentan la precisión de la señal de mercado, haciendo, de esta forma, que el precio sea más informativo. Esto dará lugar a unas expectativas más precisas. Lo que a su vez, permite a las empresas elegir una cantidad más apropiada en el segundo periodo y con ello elevar el valor esperado de los beneficios del mismo. Cada empresa estará dispuesta a sufrir la pérdida de segundo orden, asociada al incremento en la producción sobre el óptimo no experimental, para asegurarse la ganancia derivada de una mejor información.

La próxima sección formalizará esta intuición. Antes de proceder a esto, se analiza la existencia del Equilibrio:

II.2. Existencia del equilibrio:

En este apartado, se estudian, las condiciones bajo las cuales existe, al menos, unequilibrio. La existencia de equilibrios, en estrategias puras, es problemática para este tipo de juegos, cuando no se imponen restricciones sobre las funciones de demanda y sobre las variables aleatorias que intervienen en el problema. La razón de esta dificultad, es que sin estas restricciones, las funciones de valor V(.), pueden no ser cóncavas (aunque la función de pagos del primer periodo lo sea).

Recordemos que el problema para las empresas viene dado por la maximización de la expresión (30). Dado los supuestos de linealidad en la demanda y de Normalidad en las variables aleatorias, la función objetivo, (30), es continua y alcanza un máximo en el conjunto compacto $[0,\overline{Q}_i]$ para algún valor $\overline{Q}_i$, puesto que $E[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1))]$ está acotada superiormente por los beneficios del monopolio, para la curva de demanda más favorable, y $\lim_{Q_{i1}\to\infty} \pi_i(Q_{11},Q_{21}) \to -\infty$.

Por tanto, una mejor respuesta de cada empresa, qué será simétrica, debe existir. Nótese, que la condición de segundo orden será:

$$-2m + \frac{\partial^2 \Gamma_{11}}{\partial Q_{11}^2} < 0 \tag{53}$$

Si (53) se cumple para todo Q^*_{11} y Q^*_{21}, entonces, sea:

$$\beta_1(Q^*_{11} + Q^*_{21}) = \frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial Q_1} (Q^*_{11} + Q^*_{21})$$

evaluada en $Q_{11}=Q^*_{11}$. Nótese que por (47), y por la definición de $\hat{\theta}$, $\frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial Q_{11}}$ depende de $Q^*_{11} + Q^*_{21}$ y no de Q^*_{11} y Q^*_{21} por separado. Se define $\beta_2(Q^*_{11}+Q^*_{21})$, de forma análoga.

Ahora sea $g(Q^*_{11} + Q^*_{21}) \in \mathbb{R}^2$, definida como sigue:

Fíjese un valor de $Q^*_{11} + Q^*_{21}$, y por tanto un valor de $\beta_1(Q^*_{11}+Q^*_{21})$ y $\beta_2(Q^*_{11} + Q^*_{21})$.

Entonces sea $g(Q^*_{11}+Q^*_{21}) = (g_1(Q^*_{11}+Q^*_{21}),g_2(Q^*_{11}+Q^*_{21}))$, que son los valores de (g_1,g_2) que resuelven:

$$a - m(2g_1 + g_2) + \beta_1(Q^*_{11}+Q^*_{21}) = 0 \tag{54}$$

$$a - m(2g_2 + g_1) + \beta_2(Q^*_{11}+Q^*_{21}) = 0 \tag{55}$$

si la solución cae en el primer cuadrante. Si no, (g_1,g_2) es la solución esquina apropiada. Puesto que $\beta_i(Q^*_{11}+Q^*_{21})$ es constante, una vez fijadas $(Q^*_{11}+Q^*_{21})$, existirá una única solución a (54) y (55), $(g_1(Q^*_{11}+Q^*_{21}),g_2(Q^*_{11}+Q^*_{21}))$, para algún valor de $Q^*_{11}+Q^*_{21}$. Esto es asi, porque (54) y (55) son las funciones de reacción para el caso de un duopolio, con una demanda lineal, desplazadas por $\beta_i(Q^*_{11}+Q^*_{21})$.

Ahora, construimos una función $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $G(Q)=g_1(Q) + g_2(Q)$ o $G(Q^*_{11}+Q^*_{21})=g_1(Q^*_{11}+Q^*_{21}) + g_2(Q^*_{11}+Q^*_{21})$. Entonces, G es continua (porque $g_i(Q^*_{11}+Q^*_{21})$ lo es) y para un valor de Q lo suficientemente grande $G(Q)<Q$ (porque $\beta_i(Q^*_{11}+Q^*_{21})$ no crece sin límites como Q^*_{11} y Q^*_{21} lo hacen). De este modo, G tiene un punto fijo, llamemosle Q_F.Dado Q_F, $(Q_{1F},Q_{2F})\equiv(g_1(Q_F),g_2(Q_F))$ resuelve:

$$a - m(2Q_{1F} + Q_{2F}) + \frac{\partial\Gamma_{11}}{\partial Q_{11}} = 0,$$

y

$$a - m(Q_{1F} + 2Q_{2F}) + \frac{\partial\Gamma_{21}}{\partial Q_{21}} = 0.$$

entonces $Q_F=Q^*_1=(Q^*_{11}+Q^*_{21})$.

De esta forma, tenemos una condición suficiente para la existencia del equilibrio, que es que (53) se cumpla para todo Q^*_{11} y Q^*_{21}. Esta condición suficiente, no es necesaria. En particular (53) no es constante en $Q^*_{11}+Q^*_{21}$. (53) puede fallar, entonces, para algunos valores de $Q^*_{11}+Q^*_{21}$ sin excluir la existencia, con tal que (53) se cumpla para los valores de equilibrio Q^*_{11} y Q^*_{21}, y que la función objetivo de las empresas se comporte lo suficientemente bien como para tener un máximo local.

Es posible ofrecer condiciones de suficiencia, relacionadas con las distribuciones Normales. A partir del supuesto de Normalidad de las variables aleatorias, se tiene alguna especificación del problema, para el cual, el equilibrio existe. En concreto, como $\frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial Q_{11}}$ depende de $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial P_1}$, y a su vez, esta última expresión depende inversamente de $\hat{h}$, ($\hat{h} = h + \tau Q_1^2$), es decir, de la revisión de la precisión sobre $\tilde{\theta}$, $\frac{\partial^2 \Gamma_{11}}{\partial Q_{11}^2}$ también depende inversamente de $\hat{h}$.

Tomemos un valor de $\hat{h}$ muy grande (o una varianza de $\tilde{\theta}$ muy pequeña). Cuando esto ocurre $\frac{\partial^2 \Gamma_{11}}{\partial Q_{11}^2}$ tiende a cero. Como $\frac{\partial^2 \Gamma_{11}}{\partial Q_{11}^2}$ es continua y converge a un límite continuo (cero) en un conjunto compacto de valores de Q_{11} y Q_{21}, la convergencia puede tomarse como uniforme. Así pues, se puede elegir un valor de $\hat{h}$ (eligiendo h o τ) que cumpla (53). Por tanto, existirá, al menos, equilibrio. ■

III. Experimentación y búsqueda de señales de mercado más informativas.

La proposición 1, indica el sentido de la experimentación, que en este caso da lugar a un incremento de la producción con respecto a la producción miópica. La explicación de este fenómeno se recoge en el hecho de que las empresas producen más en el primer periodo, con el fin de recoger información sobre la elección que la Naturaleza ha hecho sobre $\tilde{\theta}$. En concreto, en el segundo periodo, después de revisadas las creencias, cada uno de los duopolistas considera que $\tilde{\theta}_2 \sim N(\hat{\theta},\hat{h})$, donde $\hat{\theta}$ y $\hat{h}$ vienen dadas por (15) y (16). Sin embargo, en el primer periodo, antes de que las producciones se elijan, $\hat{\theta}$ es todavia una variable aleatoria que se genera a partir de la señal del parámetro θ. Sea $S_{Q_1} = \frac{a-P_1}{Q_1}$ (ver (13))

Para una mayor comprensión del fenómeno de la experimentación, recurrimos a la siguiente Definición:

Definición 2: Diremos que una variable aleatoria **X** es más informativa que otra variable aleatoria **Y**, si la distribución de **X** domina a la de **Y** en el sentido de Dominancia Estocástica de Segundo Orden.

Sean x_1 y x_2, dos valores cualesquiera de la producción agregada del primer periodo. Sustituyase la variable aleatoria X por la señal del parámetro θ, Sx_1 e Y por la señal Sx_2.

Obsérvese, que por (13), para cualquier valor x de la producción total:

$$Sx \sim N\left[m, \frac{h\tau x^2}{h + \tau x^2} \right] \tag{56}$$

Por (15) las señales Sx_1 y Sx_2 dan lugar a las creencias posteriores, $\hat{\theta}(Sx_1)$ y $\hat{\theta}(Sx_2)$ respectivamente. Defínase:

$$\hat{\theta}(x,s) = \frac{mh + \tau x^2 s}{h + \tau x^2} \tag{57}$$

y nótese que $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Q_1,SQ_1)$, donde $\hat{\theta}$ viene dada por (15). A partir de aquí:

Lema 3: Sx_1 es más informativa que Sx_2, si :

$$E_{Sx_1}[F(\hat{\theta}(x_1,Sx_1))] > E_{Sx_2}[F(\hat{\theta}(x_2,Sx_2))], \tag{58}$$

para cualquier función $F(\hat{\theta})$ estrictamente convexa. Es decir, para cualquier $F(\hat{\theta})$ estrictamente convexa:

$$\int F(\hat{\theta}(x_1,s)f(x_1,s)ds > \int F(\hat{\theta}(x_2,s)f(x_2,s)ds \tag{59}$$

donde f(x,s) el la función de densidad de Sx evaluada en s. (Recordemos que $Sx = \frac{a-P_1}{x}$)

Demostración: Dado que $E[Sx_1] = E[Sx_2] = m$ por (56), para determinar (58) o (59), se tiene que probar que la precisión de Sx_1 es mayor que la precisión de Sx_2.

Supongamos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\hat{\theta}(x_1,s))f(x_1,s)ds > \int_{-\infty}^{+\infty} F(\hat{\theta}(x_2,s))f(x_2,s)ds, \tag{60}$$

donde F es estrictamente convexa.

Por las definiciones de Sx y $\hat{\theta}$, la función $\int F(\hat{\theta}(x,s)f(x,s)ds$ puede expresarse como:

$$\int F(\hat{\theta}(x,s))f(x,s)ds = \int F(\hat{\theta}(x,a-P_1))f(x,a-P_1)dP_1 \tag{61}$$

Nuestro próximo paso, es demostrar que el término de la derecha de (61) es creciente en x.

Nótese primero, que (46) se cumple si sustituimos F por V. En segundo lugar, como $\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P} < 0$, entonces por la estricta convexidad de F:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int F(\hat{\theta}(x,a-P_1)f(x,a-P_1)dP_1\right] =$$

$$\frac{1}{\hat{h}} \int F''(\hat{\theta})\left(-\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\right) f(x,a-P_1)dP_1 > 0 \tag{62}$$

De esta forma, por (61) y (62), $\int F(\hat{\theta}(x,s)f(x,s)ds$ es una función creciente en x, para cualquier F estrictamente convexa. Por tanto, para que (60) se verifique, $x_1 > x_2$.

Pero como, $S_x \sim N\left[m, \frac{h\tau x^2}{h + \tau x^2}\right]$, y $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h\tau x^2}{h + \tau x^2}\right] = \left[\frac{2h^2\tau x}{h + \tau x^2}\right] > 0$,

la Precisión de la señal, también crece en x. ∎

La siguiente proposición es inmediata:

Proposición 2: Sea Q_1^* y Q_1^m la producción agregada del primer periodo y la miópica respectivamente. Entonces, la señal que se deriva de Q_1^*, $S^* = S_{Q_1^*}$, es más informativa que la derivada de Q_1^m, $S^m = S_{Q_1^m}$.

Demostración: Por el Lema 2, es suficiente demostrar que:

$$E_{S^*}\left[F(\hat{\theta}(Q^*,S^*))\right] > E_{S^m}\left[F(\hat{\theta}(Q^m,S^m)\right] \tag{63}$$

para una función estrictamente convexa, F.

Por la Proposición 1, $Q_1^* > Q_1^m$ y por (62) $E_S[F(\hat{\theta}(x,S))]$ es una función creciente en x, siempre que F sea estrictamente convexa, entonces (63) se cumple para cualquier función estrictamente convexa. ∎

La anterior Proposición formaliza la relación existente entre experimentación y mayor información. En ella se demuestra que cantidades mayores producen señales de mercado más informativas. Todo ello, redunda en mejores decisiones en el segundo periodo, puesto que la mayor información, da lugar a unas creencias posteriores más precisas. Este proceso se resume en la obtención de mayores beneficios futuros por parte de las empresas.

El siguiente apartado analiza la experimentación y la dimensión estratégica derivada del duopolio. Para ello se comparan los resultados de la experimentación bajo competencia de Cournot con productos homogéneos, con los del monopolio. Se toma como referencia el artículo de Mirman, Samuelson y Urbano (1991,a), adaptándolo al caso en que las variables aleatorias son continuas, y en concreto se distribuyen como Normales.

IV. Experimentación: Monopolio y Duopolio.

Vamos a considerar el mismo modelo descrito en este capítulo, pero para un monopolista.

Sea Q_1^{*M} y Q_1^M el output de equilibrio para el monopolista en el primer periodo y el miópico respectivamente. La revisión de la media de la pendiente, $\hat{\theta}$, se obtiene de igual forma a partir de (15).

$V^M(\hat{\theta})$ representa los beneficios esperados máximos en el segundo periodo, (con $V^M(\hat{\theta})= \frac{a^2}{4\hat{\theta}}$), siendo $V^M(\hat{\theta})$ estrictamente convexa.

Si x es cualquier valor de la producción del primer periodo, podemos definir $S_x= \frac{a - P_1}{x}$, como la señal de mercado derivada a partir de x, y también $E_{S_x}[V^M(\hat{\theta}(x,S_x))]$, como el valor esperado de $V^M(\hat{\theta})$ bajo la elección de x. Por la demostración del lema 3, $E_{S_x}[V^M(\hat{\theta}(x,S_x))]$ es creciente en x.

Lema 4: $Q_1^{*M} > Q_1^M = \frac{a}{2m}$.

Demostración:

Sea $\pi_1^M(Q_1)=(a - mQ_1)Q_1$, los beneficios esperados del monopolio en el primer perido, donde $\pi_1^M(Q_1)$ es una función estrictamente cóncava. Entonces:

$$Q_1^M \in \underset{Q_1}{\mathrm{Argmax}}\ \pi_1^M(Q_1) \tag{64}$$

$$Q_1^{*M} \in \underset{Q_1}{\mathrm{Argmax}} \left[\pi_1^M(Q_1) + E[V(\hat{\theta}(Q_1,a-P_1))]\right] \tag{65}$$

La condición de primer orden derivada de (65) es:

$$\frac{\partial \pi_1^M}{\partial Q_1} + \frac{\partial E[V(\hat{\theta}(Q_1,a-P_1))]}{\partial Q_1} = 0. \tag{66}$$

Por la demostración del lema 3, $E[V(\hat{\theta}(Q_1,a-P_1))]$ es creciente en Q_1, entonces por (66) $\frac{\partial \pi_1^M}{\partial Q_1} < 0$. Como π_1^M es estrictamente cóncava, entonces $Q_1^{*M} > Q_1^M = \frac{a}{2m}$. ■

A continuación se comparan las soluciones del monopolio y del duopolio para el primer periodo. Recuerdese, en primer lugar, que la producción miópica del duopolio de Cournot es mayor que la producción miópica del monopolista. Sin embargo, es posible demostrar que la experimentación cambia la desigualdad anterior, en el sentido de que cuando hay experimentación la producción del monopolista en el primer periodo es mayor que la producción total del duopolio.

La intuición de este resultado sería la siguiente. La empresa aumenta su producción con respecto a la miópica, con el fin de hacer la señal de mercado más informativa. Dado que el precio es comunmente observado en el duopolio, las acciones de cada empresa también afectan a la revisión que, de sus creencias, realiza la empresa rival. De esta forma aparece una dimensión estratégica en la elección, ya que cada empresa se planteará si es conveniente o no hacer más informativa una señal de mercado que es pública.

Esta elección dependerá de las propiedades en la información de la competencia en el mercado. Es decir, el comportamiento experimental de las empresas dependerá de la relación existente entre información y competencia. Bajo la de Cournot las empresas son *Sustitutas Estrátegicas* y además cuando la información aumenta o las señales de mercado son más informativas, aumentan los beneficios esperados de las mismas. Por tanto, las empresas se convierten en sustitutas en la información y cuanto mejor informada está una empresa peor rival es. De aquí se deduce que la adquisición de información será menor bajo una situación de duopolio de Cournot que en el monopolio. Este resultado se establecerá en la siguiente proposición.

Antes de realizar la comparación entre el monopolio y el duopolio recuerdese que $\pi_i(Q_{11},Q_{21})$ es el beneficio esperado de cada duopolista en el periodo 1. Definamos:

$$\pi_1^D(Q_1) = \pi_1(Q_{11},Q_{21}) + \pi_2(Q_{11},Q_{21}) \tag{67}$$

Y de igual forma definamos los beneficios esperados del segundo periodo para el duopolio como:

$$V^D(\hat{\theta}(Q_1)) = 2V(\hat{\theta}(Q_1)) \tag{68}$$

La siguiente proposición demuestra que cuando se experimenta, la producción total del duopolio en el primer periodo, es menor que la del monopolio,

<u>*Proposición 3:*</u> $Q_1^* \leq Q_1^{*M}$.

<u>*Demostración:*</u>

Primero mostramos que $Q_1^{*M} > Q_{i1}^*$. La curva de demanda del primer periodo es $P = a - \theta Q + \varepsilon$ y $E[P] = a - mQ$. De aquí, se obtiene que $a - mQ_1^* \geq 0$, por tanto $Q_1^* \leq \frac{a}{m} = 2Q_1^M$.

Por el lema 4, $Q_1^M < Q_1^{*M}$. Entonces $\frac{1}{2} Q_1^* < Q_1^{*M}$. Como la solución del duopolio es simétrica lo anterior implica que

$$Q_{i1}^* < Q_1^{*M} \tag{69}$$

Comenzamos el análisis, suponiendo que $Q_1^* > Q_1^{*M}$. Dado que Q_1^{*M} representa la producción óptima del monopolio, se cumple que para cualquier otra producción, y en particular para Q_1^*:

$$\pi_1^M(Q_1^{*M}) + E[V^M(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] \geq \pi_1^M(Q_1^*) + E[V^M(\hat{\theta}(Q_1^*))] \tag{70}$$

De igual forma, puesto que $Q_{i1}^* = \frac{1}{2} Q_1^*$ y (Q_{11}^*, Q_{21}^*) es la producción de equilibrio Nash para el primer periodo, tenemos que para el duopolio:

$$\pi_{11}(Q^*_{11},Q^*_{21}) + E[V(\hat{\theta}(Q^*_1))] \geq \pi_{11}(Q_1^{*M}- Q^*_{21},Q^*_{21}) + E[V(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] \tag{71}$$

$$\pi_{21}(Q^*_{11},Q^*_{21}) + E[V(\hat{\theta}(Q^*_1))] \geq \pi_{21}(Q^*_{11},Q_1^{*M}- Q^*_{11}) + E[V(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] \tag{72}$$

Por (69), las desigualdades (71) y (72) están bien definidas ($Q_1^{*M}- Q^*_{21}>0$ y $Q_1^{*M}- Q^*_{11}>0$). Sumando (71) y (72) obtenemos:

$$\pi^D_1(Q^*_1) + E[V^D(\hat{\theta}(Q^*_1))] \geq \pi^D_1(Q_1^{*M}) + E[V^D(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))]. \tag{73}$$

(70) y (73) pueden escribirse como:

$$\pi^M_1(Q_1^{*M}) - \pi^M_1(Q^*_1) \geq E[V^M(\hat{\theta}(Q^*_1)] - E[V^M(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] \tag{74}$$

$$E[V^D(\hat{\theta}(Q^*_1))] - E[V^D(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] \geq \pi^D_1(Q_1^{*M}) - \pi^D_1(Q^*_1) \tag{75}$$

A partir de (74) y (75) es posible derivar la siguiente contradicción cuando $Q^*_1 > Q_1^{*M}$:

$$E[V^M(\hat{\theta}(Q^*_1))] - E[V^M(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] > E[V^D(\hat{\theta}(Q^*_1))] - E[V^D(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] \tag{A}$$

y

$$\pi^M_1(Q_1^{*M}) - \pi^M_1(Q^*_1) = \pi^D_1(Q_1^{*M}) - \pi^D_1(Q^*_1) \tag{B}$$

Comenzamos probando (A). Para ello definamos:

$$P_1= a - \theta Q^*_1 + \varepsilon, \qquad P^M_1= a - \theta Q_1^{*M}+ \varepsilon.$$

$$\hat{\theta} = \frac{mh + \tau Q^*_1(a - P_1)}{h + \tau Q_1^{*2}}, \qquad \hat{\theta}^M= \frac{mh + \tau Q_1^{*M}(a - P^M_1)}{h + \tau Q_1^{*M2}}, \text{ y}$$

recuérdese que: $V^M(\hat{\theta}) = \dfrac{a^2}{4\hat{\theta}}$, $\qquad V^D(\hat{\theta}) = 2V(\hat{\theta}) = \dfrac{2a^2}{9\hat{\theta}}$.

Sea:

$$W^M \equiv E[V^M(\hat{\theta}(Q_1^*))] - E[V^M(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] = \int V^M(\hat{\theta}) f(a-P_1)dP_1 - \int V^M(\hat{\theta}^M) f(a-P_1^M)dP_1^M =$$

$$\frac{a^2}{4}\left[\int \frac{1}{\hat{\theta}} f(a-P_1)dP_1 - \int \frac{1}{\hat{\theta}^M} f(a-P_1^M)dP_1^M\right] > 0 \tag{76}$$

por la demostración del lema 3, y sea

$$W^D \equiv E[V^D(\hat{\theta}(Q_1^*))] - E[V^D(\hat{\theta}(Q_1^{*M}))] = \int V^D(\hat{\theta}) f(a-P_1)dP_1 - \int V^D(\hat{\theta}^M) f(a-P_1^M)dP_1^M =$$

$$\frac{2a^2}{9}\left[\int \frac{1}{\hat{\theta}} f(a-P_1)dP_1 - \int \frac{1}{\hat{\theta}^M} f(a-P_1^M)dP_1^M\right] > 0, \tag{77}$$

de nuevo, por la demostración del lema 3. Restando (76) y (77) obtenemos:

$$W^M - W^D = \left[\int \frac{1}{\hat{\theta}} f(a-P_1)dP_1 - \int \frac{1}{\hat{\theta}^M} f(a-P_1^M)dP_1^M\right]\left[\frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{9}\right] > 0 \tag{78}$$

De aquí que (A) se cumple cuando $Q_1^* > Q_1^{*M}$.

Para probar (B) tenemos que:

$$\pi_1^M(Q_1^{*M}) - \pi_1^M(Q_1^*) = (a - mQ_1^{*M})Q_1^{*M} - (a - mQ_1^*)Q_1^* \tag{79}$$

y $$\pi_1^D(Q_1^{*M}) - \pi_1^D(Q_1^*) = (a - mQ_1^{*M})Q_{11} + (a - mQ_1^{*M})Q_{21} - 2(a - mQ_1^*)Q_{i1}^* =$$

$$(a - mQ_1^{*M})Q_1^{*M} - (a - mQ_1^*)Q_1^* = \pi_1^M(Q_1^{*M}) - \pi_1^M(Q_1^*) \tag{80}$$

Por lo tanto, (B) se cumple.

Probado (A) y (B) queda demostrada la contradicción asociada a $Q_1^* > Q_1^{*M}$. Por lo tanto que $Q_1^* \leq Q_1^{*M}$. ■

El comportamiento estratégico derivado de la competencia de Cournot, explica la existencia de una menor experimentación con respecto a la de monopolio. Es decir, un duopolista de Cournot, tendrá en cuenta que la experimentación , llevada a cabo por la empresa, incrementa la información disponible propia y también de la empresa rival dado la señal de mercado es pública. De esta forma, entran en juego dos efectos de sentido contrario, en primer lugar el derivado del deseo de procurarse información sobre el parámetro desconocido, y el segundo derivado de la competencia en el mercado. El primero supera al segundo, en cuanto que la experimentación sigue siendo positiva, pero en cualquier caso, menor que la que se obtendría cuando la empresa fuera la única abastecedora del mercado.

El próximo capítulo, extiende el análisis realizado a un modelo de duopolio donde las empresas eligen precios como variables estratégicas (Competencia de Bertrand).

CAPITULO 2.

Competencia de Bertrand (duopolio simétrico) y Experimentación.

CAPITULO 2.

Competencia de Bertrand (duopolio simétrico) y Experimentación.

En este capítulo, se extiende el análisis realizado para el modelo de Cournot (homogéneo) a un modelo de duopolio donde las empresas eligen precios como variable estratégica. Se demuestra que, también aquí, las empresas eligen precios superiores a los miópicos, con fines experimentales. Se analiza un modelo de duopolio dinámico donde las empresas producen bienes sustitutos y compiten en precios. Las empresas se enfrentan a curvas de demanda lineales y estocásticas, donde las pendientes (iguales) son desconocidas. Para poderlo comparar con el modelo de Cournot, anteriormente estudiado, se supone que la simetría del modelo es total.

I. El modelo:

I.1. Supuestos básicos del modelo:

1. La estructura de demanda de cada periodo viene dada por el siguiente sistema (Dixit 1979):

$$\tilde{Q}_1 = a - \tilde{\theta}P_1 + cP_2 + \tilde{\varepsilon}_1 , \qquad (1)$$

$$\tilde{Q}_2 = a - \tilde{\theta}P_2 + cP_1 + \tilde{\varepsilon}_2 \qquad (2)$$

2. P_1 y P_2 son los precios en cada uno de los mercados y Q_1 y Q_2 son las ventas de cada uno de los duopolistas. $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$, representan las perturbaciones aleatorias de la demanda.

3. Los costes marginales son constantes e iguales para cada empresa por lo que nuestro analisis hace referencia a precios netos de coste marginal.

4. Las empresas desconocen el valor de θ y suponen que tanto $\tilde{\theta}$ como $\tilde{\varepsilon}$ se distribuyen como una Normal caracterizada por su media y su precisión. Esto es, $\tilde{\theta} \sim N(m,h)$ y $\tilde{\varepsilon} \sim N(0,\tau)$. El término de error es independiente y está identicamente distribuido, además es independiente de $\tilde{\theta}$.

5. Suponemos que $c>0$ por lo tanto estamos considerando que los productos son sustitutivos. Este grado de sustituibilidad del producto es conocido.

6. Con el fin de simplificar el modelo y hacer el análisis de este tipo de competencia más parecido al modelo de Cournot suponemos que $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$.

7. Los supuestos sobre la información coinciden con los del modelo de Cournot, en cuanto que las creencias iniciales se revisan con el transcurso del tiempo, contando al finalizar el primer periodo con la información adicional de los precios y de las ventas (tanto las propias como las de la rival).

8. El objetivo de las empresas es la maximización de los beneficios, eligiendo aquel precio que maximiza la suma de los beneficios esperados de los dos periodos.

9. No existe posibilidad de entrada de nuevas empresas.

A continuación, como en el caso de Cournot, planteamos el modelo como un juego de dos periodos con información imperfecta.

1.2.Desarrollo del juego:

El juego consta de dos periodos:

En el periodo uno podemos distinguir dos etapas:

Etapa 1: la naturaleza elige un valor θ y un valor ε_1 de dos variables aleatorias independientes: $\tilde{\theta} \sim N(m,h)$ y $\tilde{\varepsilon} \sim N(0,\tau)$, donde h y τ son la precisión de $\tilde{\theta}$ y $\tilde{\varepsilon}$ respectivamente.

Etapa 2: las empresas, que no conocen la elección de la naturaleza, pero que si conocen las distribuciones de $\tilde{\theta}$ y $\tilde{\varepsilon}$, eligen simultánea e independientemente los precios de venta del primer periodo, P_{11} y P_{21}. Precios que son conocidos por las dos empresas. Las ventas, de cada una de las empresas, se determinan de acuerdo con las curvas de demanda de mercado:

$$Q_{11} = a - \theta P_{11} + cP_{21} + \varepsilon_1 \qquad (3)$$

$$Q_{21} = a - \theta P_{21} + cP_{11} + \varepsilon_1 \qquad (4)$$

Las ventas se anuncian a las empresas.

En el periodo 2 distinguimos dos etapas:

Etapa 1: La naturaleza vuelve a elegir un nuevo valor ε_2 de ε.

Etapa 2: Las empresas, de nuevo, eligen los precios de venta para el segundo periodo P_{12} y P_{22}. Estos precios dependerán de las ventas y de los precios del primer periodo (P_{11},P_{21}, Q_{11},Q_{21}). Las ventas del segundo periodo vendrán dadas por :

$$Q_{12} = a - \theta P_{12} + cP_{22} + \varepsilon_2, \qquad (5)$$

$$Q_{22} = a - \theta P_{22} + cP_{12} + \varepsilon_2. \qquad (6)$$

y se anuncian a las empresas.

Las Estrategias para cada uno de los duopolistas pueden expresarse como:

$$\sigma_1 = (P_{11}, P_{12}(P_{11}, P_{21}, Q_{11}, Q_{21})) \tag{7}$$

$$\sigma_2 = (P_{21}, P_{22}(P_{11}, P_{21}, Q_{11}, Q_{21})) \tag{8}$$

La Estructura de Pagos. Puesto que los costes de producción son cero, los beneficios esperados para el segundo periodo son:

$$\pi_{12}(\sigma_1, \sigma_2) = P_{12}E[Q_{12}(P_{12}, P_{22})/P_{11}, P_{21}, Q_{11}, Q_{21}] \tag{9}$$

$$\pi_{22}(\sigma_1, \sigma_2) = P_{22}E[Q_{22}(P_{12}, P_{22})/P_{11}, P_{21}, Q_{11}, Q_{21}] \tag{10}$$

por lo que los beneficios esperados para los dos periodos vendrán dados por:

$$\Pi_1((P_{11}, P_{21}), (P_{12}, P_{22})) = P_{11}E[Q_{11}(P_{11}, P_{21})] + \pi_{12} \tag{11}$$

$$\Pi_2((P_{11}, P_{21}), (P_{12}, P_{22})) = P_{21}E[Q_{21}(P_{11}, P_{21})] + \pi_{22} \tag{12}$$

Para caracterizar las soluciones del primer periodo, es necesario analizar, inicialmente, el equilibrio en el segundo periodo, es decir, el equilibrio que incorpora la información del primero. Nótese que como este periodo es el último del horizonte temporal, su estudio se considera a partir del juego estático correspondiente. El equilibrio de este segundo periodo es un equilibrio Bayesiano-Nash.

Así pues, después de observar las ventas y conocidos los precios, cada empresa elige $\hat{P}_{12}$ y $\hat{P}_{22}$, correspondientes al segundo periodo, tal que:

$$\hat{P}_{12} \in \underset{P_{12}}{\text{Argmax}}\ E[Q_{12}(P_{12},P_{22})/(P_{11},P_{21},\ Q_{11},Q_{21})]P_{12} \tag{13}$$

$$\hat{P}_{22} \in \underset{P_{22}}{\text{Argmax}}\ E[Q_{22}(P_{12},P_{22})/(P_{11},P_{21},\ Q_{11},Q_{21})]P_{22} \tag{14}$$

Para resolver este problema, se ha de calcular $E[Q_{12}/(P_{11},P_{21},\ Q_{11},Q_{21})]$ y $E[Q_{22}/(P_{11},P_{21},\ Q_{11},Q_{21})]$, esto es $E[a-\tilde{\theta}P_{12}+cP_{22}+\tilde{\varepsilon}/(P_{11},P_{21},Q_{11},Q_{21})] = a-E[\tilde{\theta}]P_{12}+cP_{22}$ y $E[a-\tilde{\theta}P_{22}+cP_{12}+\tilde{\varepsilon}/(P_{11},P_{21},\ Q_{11},Q_{21})] = a-E[\tilde{\theta}]P_{22}+cP_{12}$, lo que reduce el análisis a la obtención de $E[\tilde{\theta}/(P_{11},P_{21},\ Q_{11},Q_{21})]$.

Dado que las empresas observan las cantidades y los precios del primer periodo y además $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, esto significa que las dos empresas ven una única señal al finalizar el primer periodo. En particular las empresas observan la señal:

$$\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{P_1} = \frac{a}{P_1} + c - \frac{Q_1}{P_1} \tag{15}$$

donde $P_1 = \dfrac{P_{11} + P_{21}}{2}$ es el precio medio y $Q_1 = \dfrac{Q_{11} + Q_{21}}{2}$ son las ventas medias del primer periodo.

Esta señal se distribuye para cada valor de θ como:

$$\frac{a}{P_1} + c - \frac{Q_1}{P_1} \sim N(\theta\ ,\ \tau P_1^2) \tag{16}$$

donde θ es la media y τP_1^2 es la precisión. El valor de θ es desconocido para las empresas, pero estas tienen una distribución subjetiva inicial, $\tilde{\theta}_1 \sim N(m,h)$, donde $E(\tilde{\theta}) = m$, $h = \dfrac{1}{\sigma_\theta^2}$. De esta forma, la distribución posterior de $\hat{\theta}$ despues de observar las ventas medias del mercado, es una distribución Normal con media $\hat{\theta}$ y precisión $\hat{h}$, es decir $\tilde{\theta}_2 \sim N(\hat{\theta},\hat{h})$, donde:

$$\hat{\theta} = \frac{mh + \tau P_1^2 \left[\frac{a+cP_1-Q_1}{P_1} \right]}{h + \tau P_1^2} = \frac{mh + \tau P_1 (a + cP_1 - Q_1)}{h + \tau P_1^2} \tag{17}$$

$$\hat{h} = h + \tau P_1^2 \tag{18}$$

Por tanto, $E[\hat{\theta}/P_1,Q_1] = \hat{\theta}$, lo que permite reescribir (13) y (14) del siguiente modo:

$$\hat{P}_{12} \in \underset{P_{12}}{\text{Argmax}} \; [a - \hat{\theta}P_{12} + cP_{22}]P_{12} \tag{19}$$

$$\hat{P}_{22} \in \underset{P_{22}}{\text{Argmax}} \; [a - \hat{\theta}P_{22} + cP_{12}]P_{22} \tag{20}$$

Definase $P_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, por $P(M) = \frac{a}{(2M-c)}$. Al resolver (19) y (20) se obtiene la única solución simétrica:

$$\hat{P}(\hat{\theta}) = \hat{P}_{12}(\hat{\theta}) = \hat{P}_{22}(\hat{\theta}) = \frac{a}{(2\hat{\theta}-c)} \,. \tag{21}$$

El supuesto de que las curvas de demanda son lineales implica, en este juego estático, que el equilibrio es único. Por esto, los beneficios esperados de equilibrio de ambas empresas están bien definidos y pueden expresarse en función de $\hat{\theta}$. Sean estos beneficios de equilibrio:

$$V(\hat{\theta}) = a\hat{P}(\hat{\theta}) - \hat{\theta}\hat{P}^2(\hat{\theta}) + c\hat{P}^2(\hat{\theta}) = \frac{a^2\hat{\theta}}{(2\hat{\theta}-c)^2} \tag{22}$$

Esta función de valor presenta las siguientes propiedades:

Lema 1: $V(\hat{\theta})$ es una función decreciente y estrictamente convexa.

Demostración:

A partir de (22), es posible obtener:

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}} = \frac{-a^2(2\hat{\theta} + c)}{(2\hat{\theta} - c)^3} < 0 \tag{23}$$

De igual forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\theta}^2} = \frac{8a^2(\hat{\theta} + c)}{(2\hat{\theta} - c)^4} > 0 \tag{24}$$

■

La primera de estas propiedades indica que un valor alto de $\hat{\theta}$, supone una demanda desfavorable para la empresa, lo que da lugar a unos beneficios esperados máximos en el segundo periodo más bajos. La convexidad garantiza, al igual que el caso de Cournot, que la información es valiosa.

II. Analisis del primer periodo:

Una vez analizado el segundo periodo y las correspondientes funciones de Valor, pasamos a estudiar el primer periodo. Se debe recordar que en este periodo, las creencias posteriores de las empresas son variables aleatorias cuya distribución depende de los precios y de las ventas medias del primer periodo. Esto permite expresar los beneficios de los dos periodos en función de los precios del primero. Por tanto definamos estos, para la empresa i, i=1,2 como:

$$\Pi_i(P_{11},P_{21}) = \pi_i\ (P_{11},P_{21}) + E\left[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)\right],\ i=1,2 \tag{25}$$

donde el primer sumando representa los beneficios corrientes del primer periodo, es decir:

$$\pi_i(P_{11},P_{21}) = E\ \left[(a - \tilde{\theta}P_{i1} + cP_{j1} + \tilde{\varepsilon})P_{i1}\right],\ i=1,2 \tag{26}$$

y donde:

$$E\ \left[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\hat{\theta}(P_1,Q_1))f(a - Q_1 + cP_1)dQ \tag{27}$$

siendo f la función de densidad de la variable aleatoria $(a\text{-}Q_1\text{+}cP_1)$, que por (1) y (2) es,

$$a - \tilde{Q}_1 + cP_1 = \tilde{\theta}P_1 - \tilde{\varepsilon} = \tilde{\theta}\ \left[\frac{P_{11} + P_{21}}{2}\right] - \tilde{\varepsilon} \tag{28}$$

y que se distribuye para cada P_{11} y P_{21}, como:

$$(a - \tilde{Q}_1 + cP_1) \sim N\left[\ mP_1,\ \frac{h\tau}{h + \tau P_1^2}\ \right] \tag{29}$$

donde $\dfrac{h\tau}{h + \tau P_1^2}$ es la precisión de la señal y mP_1 es la media. De esta forma, la función de densidad de esta variable vendrá dada por la siguiente expresión:

$$f(a - \tilde{Q}_1 + cP_1) = \frac{\left[\dfrac{h\tau}{h + \tau P_1^2}\right]^2}{\sqrt{2\Pi}}\ e^{-1/2\left[\left[\frac{h\tau}{h + \tau P_1^2}\right](a-Q_1+cP_1-mP_1)^2\right]} \tag{30}$$

El problema que tratarán de resolver las empresas en el periodo uno se reduce a la elección de P^*_{11} y P^*_{21}, tal que:

$$P^*_{11} \in \underset{P_{11}}{\text{Argmax}}\ \Pi_1(P_{11},P^*_{21}) \tag{31}$$

$$P_{21} \in \underset{P_{21}}{\text{Argmax}}\ \Pi_2(P^*_{11},P_{21}) \tag{32}$$

Sean P^m_{11} y P^m_{21} los precios óptimos cuando la empresa actúa de forma miópica, es decir:

$$P^m_{11} \in \underset{P_{11}}{\text{Argmax}}\ \pi_i(P_{11},P^m_{21}) \tag{33}$$

$$P^m_{21} \in \underset{P_{21}}{\text{Argmax}}\ \pi_i(P^m_{11},P_{21}) \tag{34}$$

De nuevo, nuestro interés se centra en analizar las diferencias entre P^*_{11}, P^*_{21} y P^m_{11}, P^m_{21}. Estas diferencias mostrarán la existencia o no de experimentación y el sentido de la misma.

II.1 Condiciones de primer orden:

Las condiciones de primer orden derivadas de los problemas a corto plazo y dinámico, son respectivamente:

$$\frac{\partial \pi_{i1}(P_{i1},P^m_{j1})}{\partial P_{i1}} = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial \pi_{i1}(P_{i1},P^*_{j1})}{\partial P_{i1}} + \frac{\partial E\left[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)\right]}{\partial P_{i1}} = 0 \tag{36}$$

Para caracterizar las soluciones del primer periodo y en particular para analizar si existe experimentación se estudia el comportamiento de $E[V(\hat{\theta})]$, en P_{i1}, i=1,2 . En este sentido se pueden dar tres casos:

$$\frac{\partial E\left[V(\hat{\theta})\right]}{\partial P_{i1}} = 0$$ lo cual indicaría que la empresa, al tener en cuenta los dos periodos elige el mismo precio que el que es óptimo a corto plazo, por tanto, no existe experimentación.

$$\frac{\partial E\left[V(\hat{\theta})\right]}{\partial P_{i1}} > 0,$$ la empresa eligirá un nivel de precios mayor que el miópico con fines experimentales para un nivel de precios dado de la rival.

$$\frac{\partial E\left[V(\hat{\theta})\right]}{\partial P_{i1}} < 0$$ la experimentación conducirá en este caso, a la empresa i, a elegir un nivel de precios menor que el miópico.

Recuérdese que:

$$E[V(\hat{\theta})] = \int V(\hat{\theta}(P_1,Q_1))f(a-Q_1+cP_1)dQ_1, \tag{37}$$

Lema 2:

$$\frac{\partial E\ [V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)]}{\partial P_{i1}} > 0 \tag{38}$$

Demostración: Véase Apéndice B, donde se muestra que (38) puede expresarse como:

$$\frac{\partial E\,[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)]}{\partial P_{i1}} = \frac{1}{2\hat{h}}\int V''(\hat{\theta})\left[-\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}\right]f(Q_1)dQ_1 =$$

$$\frac{1}{\hat{h}}\int V''(\hat{\theta})\left[-\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_{11}}\right]f(Q_1)dQ_1. \tag{39}$$

Dado que V(.) es estrictamente convexa, y que $\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}<0$, (39) es positiva, o sustituyendo por su valor:

$$\frac{\partial E\,[V(\hat{\theta}(P_1,Q_1)]}{\partial P_{i1}} = \frac{4\tau a^2 P}{\hat{h}^2}\int\frac{(\hat{\theta}+c)}{(2\hat{\theta}-c)^4}\,f(Q_1)dQ_1>0 \tag{40}$$

■

Obsérvese que la expresión (39) (o la (40)), es el término de experimentación, y que es el análogo en competencia de precios al correspondiente término de experimentación en competencia de Cournot, es decir a la expresión (46) (y (47)) del capítulo 1.

La siguiente proposición, muestra que los duopolistas, fijan un precio de mercado en el primer periodo mayor que el precio óptimo a corto plazo.

Proposición 1: Sean P^m_{11} y P^m_{21} los precios miópicos de cada uno de los duopolistas, entonces $P^*_{11}>P^m_{11}$ y $P^*_{21}>P^m_{21}$.

Demostración: Por (35) se cumple que:

$$P_{11}=\frac{a}{2m}+\frac{cP^*_{21}}{2m}+\frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial P_{11}}E[V(\hat{\theta})] \tag{41}$$

$$P_{21}=\frac{a}{2m}+\frac{cP^*_{11}}{2m}+\frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial P_{21}}E[V(\hat{\theta})] \tag{42}$$

$E[V(\hat{\theta})]$ depende de P_1, y en equilibrio de $P_1^* = \frac{P_{11}^* + P_{21}^*}{2}$, de forma que $\frac{\partial}{\partial P_{11}} E[V(\hat{\theta})] = \frac{\partial}{\partial P_{21}} E[V(\hat{\theta})]$. Por (41) y (42) $P_{11}^* = P_{21}^*$ y por (39) y (40):

$$P_{11}^* = P_{21}^* = \frac{a}{(2m-c)} + \frac{1}{(2m-c)} \frac{4\tau a^2 P_1^*}{\hat{h}^2} \int \frac{(\hat{\theta}+c)}{(2\hat{\theta}-c)^4} f(Q_1)dQ_1 \qquad (43)$$

Por (35):

$$P_{11}^m = P_{21}^m = \frac{a}{(2m-c)} \qquad (44)$$

De este modo, por (40), se obtiene que $P_{11}^* > P_{11}^m$, y $P_{21}^* > P_{21}^m$ y :

$$P_{i1}^* = P_{i1}^m + \frac{4\tau a^2 P_1^*}{(2m-c)\hat{h}^2} \int \frac{(\hat{\theta}+c)}{(2\hat{\theta}-c)^4} f(Q_1)dQ_1 \qquad (45)$$

■

Por tanto, el resultado es análogo al obtenido en el caso de Cournot, y las empresas elegirán un precio $P_1^* > P_1^m$, con fines experimentales. Así precios mayores darán lugar a ventas medias más informativas. La demostración formal de este resultado sigue las pautas de la Sección III del capítulo 1, por tanto no se repetirá aquí.

Finalmente, sólo queda por analizar cómo la competencia en precios afecta al nivel de experimentación llevado a cabo por las empresas. Para tal fin, tenemos que comparar el precio experimental del primer periodo, con el precio fijado por el monopolista experimentador.

El siguiente resultado muestra que los precios son en principio distintos. Para comprobarlo definamos previamente:

$$Q^M = a - \theta P^{*M} + \tilde{\varepsilon}$$

$$\hat{\theta}^M = \frac{mh + \tau P_1^{*M}(a - Q_1^M)}{h + \tau P_1^{*M2}}$$

$$V^M(\hat{\theta}) = \frac{a^2}{4\hat{\theta}},\ V''^M(\hat{\theta}) = \frac{a^2}{2\hat{\theta}^3}$$

Proposición 2: $P_1^* \neq P_1^{*M}$.

Demostración: por (45) tenemos que:

$$P_1^* = P^m + \frac{1}{(2m-c)\hat{h}} \int V''^D(\hat{\theta}^D)\left[- \frac{\partial \hat{\theta}^D}{\partial Q_{11}}\right] f(Q_1)dQ_1 \qquad (46)$$

donde:

$$\hat{\theta}^D = \frac{mh + \tau P_1^*(a + cP_1^* - Q_1)}{h + \tau P_1^{*2}}$$

y realizando un análisis similar para el monopolio:

$$P^{*M} = \frac{a}{2m} + \frac{1}{2m\hat{h}} \int V''(\hat{\theta}^M)^M \left[- \frac{\partial \hat{\theta}^M}{\partial Q}\right] f(Q)dQ \qquad (47)$$

Supongase que $P_1^* = P^{*M}$, como en el monopolio $Q^M = a - \theta P^{*M} + \tilde{\varepsilon}$, y en el duopolio $Q_1 - cP^{*M} = a - \theta P^{*M} + \tilde{\varepsilon}$, entonces $Q^M = Q_1 - cP_1^*$, y por tanto:

$$\hat{\theta}^D = \hat{\theta}^M. \qquad (48)$$

Además como:

$$V''^D = \frac{8a^2(\hat{\theta}^D + c)}{(2\hat{\theta}^D - c)^4} > \frac{a^2}{2\hat{\theta}^{D3}} + \frac{8a^2c}{(2\hat{\theta}^D - c)^4} > V''^M$$

entonces por (46) y (47):

$$P_1^* - P^{*M} > P^m - \frac{a}{2m} = \frac{a}{2m-c} - \frac{a}{2m} > 0 \qquad (49)$$

lo que es una contradicción. ■

En general, $P_1^* > P^{*M}$. Supongamos lo contrario, es decir $P^{*M} > P_1^*$, entonces $Q^M < Q_1 - cP_1^*$, y por la definición de $\hat{\theta}^D$ y $\hat{\theta}^M$: $\hat{\theta}^D \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \hat{\theta}^M$.

Si $\hat{\theta}^M \geq \hat{\theta}^D$, por el resultado anterior se llegaria a que $P_1^* > P^{*M}$, lo que sería una contradicción. Por tanto supongamos que $\hat{\theta}^D > \hat{\theta}^M$. No obstante como la diferencia máxima entre $P^{*M} - P^* = \frac{a}{m} - \frac{a}{2m-c}$ (dado que $P^{*M} < \frac{a}{m}$ y que $P_1^* > \frac{a}{2m-c}$), entonces V''^D sigue siendo mayor que V''^M y realizando los oportunos cálculos, se llegaría a que $P_1^* \geq P^{*M}$. Pero por la proposición anterior $P_1^* \neq P^{*M}$. ■

La intuición es clara, bajo competencia de Cournot las empresas son complementarias en la información. Además cada empresa está mejor cuanto más informada está la rival. Por ello se suman dos efectos, por un lado el deseo de adquirir información y el segundo derivado de la competencia en el mercado. Por tanto el precio que fijan los competidores de Bertrand, con fines experimentales, será mayor que el que fija el monopolista, cuando también éste experimenta.

CAPITULO 3

Aprendizaje y Dispersión de Precios.

CAPITULO 3.

Experimentación y Diferenciación de Producto:

En este capítulo se analiza, con más profundidad, la relación existente entre competencia y experimentación. Para tal fin, se consideran mercados con productos diferenciados. De esta forma, se separan convenientemente los motivos que tienen las empresas, para acumular información para sí mismas, y los motivos que les llevan a procurar una mayor o menor información para el rival, en función del tipo de competencia en el mercado. En resumen, el objetivo básico de este tipo de modelo es analizar como la relación estratégica en los mercados (sustitutos o complementos estratégicos) influye en los niveles de experimentación llevados a cabo por las empresas.

Además se trabaja con sólo dos valores del parámetro desconocido, abandonando, de esta forma, el supuesto de Normalidad, que hasta ahora se había seguido. Esto se debe, a la dificultad que incorpora el análisis de la distribución Normal Bivariante, en cuanto que no permite llegar a expresiones que puedan dar lugar a resultados transparentes. Sin embargo, se extiende el análisis a la clase de funciones de densidad (para las perturbaciones aleatorias de la demanda) que satisfacen ratios de verosimilitud monótonos.

En concreto, se considera un duopolio donde el producto que se vende es heterogéneo. Las empresas desconocen el valor de la pendiente correspondiente a la demanda de cada uno de los mercados. Cada parámetro puede tomar dos valores, de forma que las empresas asignan una probabilidad a cada uno de ellos, que se irá revisando a medida que estas obtienen información.

El análisis de este capítulo supone que las empresas actúan bajo competencia de Cournot, extendiendose los resultados al final, al caso de Bertrand. Dada la estructura lineal de la demanda, la competencia de Cournot con productos sustitutos (complementarios) es el perfecto dual de Bertrand con productos complementarios (sustitutos).

I. El modelo.

I.1. Supuestos básicos del modelo:

1. El duopolio se analiza en un horizonte temporal de dos periodos.

2. Las demandas vendrán dadas por:

$$\tilde{P}_1 = a - b_1 Q_1 - cQ_2 + \tilde{\varepsilon}_1 \qquad (1)$$

$$\tilde{P}_2 = a - b_2 Q_2 - cQ_1 + \tilde{\varepsilon}_2 \qquad (2)$$

Q_1 y Q_2 es la producción de cada duopolista, P_1 y P_2 los precios de cada mercado y donde $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$, son las fluctuaciones aleatorias de cada una de las demandas, que se distribuyen conjuntamente de acuerdo con una función de densidad $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ con $E[\tilde{\varepsilon}_1] = E[\tilde{\varepsilon}_2] = 0$ y donde $\frac{\partial f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1}$ y $\frac{\partial f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2}$ existen y son continuas. El soporte de $(\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2)$ es $\mathbb{R}^2$.

3. b_1 y b_2 son los parámetros desconocidos que representan la pendiente de la demanda en cada uno de los mercados. a y c representan, respectivamente, la intersección con el eje de precios y el grado de sustitución (c >0) o de complementariedad (c < 0) del producto. Ambos se consideran comunes con el fin de simplificar los cálculos.

4. $b_1 \in (\bar{b}_1, \underline{b}_1)$, y cada empresa asigna una probabilidad inicial, común, $\alpha_0 = \text{Prob}\ \{b_1 = \bar{b}_1\}$. $b_2 \in (\bar{b}_2, \underline{b}_2)$ y de igual forma, cada empresa asigna una probabilidad inicial común $\beta_0 = \text{Prob}\ \{b_2 = \bar{b}_2\}$. Estas probabilidades son, además conocimiento público. Los cuatro posibles estados de la naturaleza serán:

$$\left\{(\bar{b}_1, \bar{b}_2),\ (\bar{b}_1, \underline{b}_2),\ (\underline{b}_1, \bar{b}_2),\ (\underline{b}_1, \underline{b}_2)\right\} \qquad (3)$$

La distribución de probabilidad asociada a estos cuatro estados es:

$$\left\{\alpha_0\beta_0,\ \alpha_0(1 - \beta_0),\ (1 - \alpha_0)\beta_0,\ (1 - \alpha_0)(1 - \beta_0)\right\} \qquad (4)$$

5. Al finalizar el primer periodo, y una vez observados los precios en cada uno de los mercados, las empresas revisan las probabilidades asignadas inicialmente, α_0 y β_0, obteniendo α y β que serán las que se utilicen en el segundo periodo.

6. Las empresas eligen aquel nivel de producción que maximiza la suma de beneficios esperados para los dos periodos.

7. Suponemos que los costes de producción son nulos o alternativamente que el precio fijado por las empresas es un precio neto del coste marginal.

8. No hay posibilidad de entrada de nuevas empresas, la estructura de duopolio se perpetua en el tiempo.

A continuación, se modela la interacción en el mercado de las empresas, como un juego de información imperfecta. El juego se desarrolla como sigue:

I.2. Desarrollo del juego:

Planteamos el modelo como un juego de dos periodos con información imperfecta. En cada periodo distinguimos dos etapas:

Periodo 1:

Etapa 1: La naturaleza elige unos valores (b_1,b_2) de entre los cuatro posibles estados descritos en (3), de acuerdo con la función de probabilidad de (4). Al mismo tiempo elige valores ε_1 y ε_2 correspondientes a las variables aleatorias $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$ de acuerdo con $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Etapa 2: Los duopolistas eligen independiente y simultáneamente las producciones correspondientes al primer periodo, Q_{11} y Q_{21}, sin conocer la elección previa de la Naturaleza, pero sabiendo la distribución de probabilidad asociada a cada estado. Las producciones de cada una de las empresas son conocidas y determinan los precios de acuerdo con:

$$P_{11} = a - b_1Q_{11} - cQ_{21} + \varepsilon_1,$$
$$P_{21} = a - b_2Q_{21} - cQ_{11} + \varepsilon_2.$$

Precios que se anuncian y son conocidos por las dos empresas.

Periodo 2:

Etapa 1: La naturaleza elige $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ de $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$.

Etapa 2: Las empresas eligen Q_{12}, Q_{22}, en función de Q_{11}, Q_{21}, P_{11} y

P_{21} (precios y producción del primer periodo que constituyen el conjunto de información disponible para la empresa al inicio del segundo periodo). Los precios del segundo periodo se obtienen a partir de:

$$P_{12} = a - b_1Q_{12} - cQ_{22} + \hat{\varepsilon}_1,$$
$$P_{22} = a - b_2Q_{22} - cQ_{12} + \hat{\varepsilon}_2.$$

(siendo anunciados a las empresas)

Las *estrategias* de los duopolistas vienen dadas por:

$$\sigma_1 = (Q_{11},\ Q_{12}(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})) \tag{5}$$
$$\sigma_2 = (Q_{21},\ Q_{22}(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})) \tag{6}$$

Estructura de pagos: Por el supuesto [7], los beneficios esperados para el segundo periodo son:

$$\pi_{12}(\sigma_1,\sigma_2) = Q_{12}E[P_{12}(Q_{12},Q_{22})/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})] \tag{7}$$
$$\pi_{22}(\sigma_1,\sigma_2) = Q_{22}E[P_{22}(Q_{12},Q_{22})/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})] \tag{8}$$

por lo tanto, la suma de los Beneficios Esperados de los dos periodos, se expresa por:

$$\Pi_1(\sigma_1,\sigma_2) = Q_{11}E[P_{11}(Q_{11},Q_{21})] + \pi_{12}(\sigma_1,\sigma_2) \tag{9}$$
$$\Pi_2(\sigma_1,\sigma_2) = Q_{21}E[P_{21}(Q_{11},Q_{21})] + \pi_{22}(\sigma_1,\sigma_2) \tag{10}$$

Nuestro interés se centra en la obtención del Equilibrio perfecto subjuego de este juego en dos peridos. Comenzamos analizando el segundo periodo que expresamos en función del conjunto de información que se obtiene a partir del primer periodo.

Al acabar el primer periodo Q_{11}, Q_{21}, P_{11}, y P_{21} son conocidos, de forma que al comienzo del segundo periodo las empresas eligen $\hat{Q}_{12}$ y $\hat{Q}_{22}$, tal que:

$$\hat{Q}_{12} \in \underset{Q_{12}}{\operatorname{Argmax}}\ E[P_{12}(Q_{12},Q_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}]Q_{12} \tag{11}$$

$$\hat{Q}_{22} \in \underset{Q_{22}}{\operatorname{Argmax}}\ E[P_{22}(Q_{12},Q_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}]Q_{22} \tag{12}$$

Si tenemos en cuenta que $E[\tilde{\varepsilon}_1] = E[\tilde{\varepsilon}_2] = 0$, podemos expresar (11) y (12) como:

$$E[P_{i2}(Q_{12},Q_{22})/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})] = a - E[b_i/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})]Q_{i2} - cQ_{j2},$$

$$i \neq j,\ i=1,2 \tag{13}$$

Para obtener (13) es suficiente conocer $E[b_i/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})]$.

Sea α: $\mathbb{R}x\mathbb{R} \to [0,1]$. Definamos $\alpha(P_{11},P_{21})$ como la probabilidad posterior que cada una de las empresas asigna a $b_1=\bar{b}_1$, cuando P_{11} y P_{21} se han observados y Q_{11} y Q_{21} son conocidas.

De igual forma a partir de la función β: $\mathbb{R}x\mathbb{R} \to [0,1]$ definamos $\beta(P_{11},P_{21})$ como la probabilidad posterior que cada empresa asigna a $b_2=\bar{b}_2$, cuando se observan P_{11}, P_{21} y Q_{11}, Q_{21} son conocidas.

Dadas las funciones de demanda (1) y (2) es posible definir:

$$\bar{\varepsilon}_1 = P_{11} - a + \bar{b}_1 Q_{11} + cQ_{21} \tag{14a}$$

$$\underline{\varepsilon}_1 = P_{11} - a + \underline{b}_1 Q_{11} + cQ_{21} \tag{14b}$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = P_{21} - a + \bar{b}_2 Q_{21} + cQ_{11} \tag{14c}$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = P_{21} - a + \underline{b}_2 Q_{21} + cQ_{11} \tag{14d}$$

Y aplicando la Regla de Bayes:

$$\alpha(P_{11},P_{21}) = \text{Prob } \{b_1=\bar{b}_1 / \tilde{P}_{11}=P_{11} \text{ y } \tilde{P}_{21}=P_{21}, Q_{11}, Q_{21}\} =$$

$$\frac{\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\alpha_0[\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + (1-\alpha_0)[\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]} \tag{15}$$

$$\text{y, } \beta(P_{11},P_{21}) = \text{Prob } \{b_2=\bar{b}_2 / \tilde{P}_{11}=P_{11} \text{ y } \tilde{P}_{21}=P_{21}, Q_{11}, Q_{21}\} =$$

$$\frac{\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)}{\beta_0[\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (1-\beta_0)[\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]} \tag{16}$$

Con estas últimas expresiones se obtiene que:

$$E[P_{12}(Q_{12},Q_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}] = a - \alpha\bar{b}_1 Q_{12} - (1-\alpha)\underline{b}_1 Q_{12} - cQ_{22} = a - \hat{b}_1 Q_{12} - cQ_{22}. \tag{17}$$

$$E[P_{22}(Q_{12},Q_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}] = a - \beta\bar{b}_2 Q_{22} - (1-\beta)\underline{b}_2 Q_{22} - cQ_{12} = a - \hat{b}_2 Q_{22} - cQ_{12}. \tag{18}$$

donde:

$$\hat{b}_1 = \alpha\bar{b}_1 + (1-\alpha)\underline{b}_1, \tag{19}$$

$$\hat{b}_2 = \beta\bar{b}_2 + (1-\beta)\underline{b}_2, \tag{20}$$

y por (17) y (18) las expresiones (11) y (12) son:

$$\hat{Q}_{12} \in \underset{Q_{12}}{\text{Argmax}}\ Q_{12}[a - \hat{b}_1 Q_{12} - cQ_{22}], \tag{21}$$

$$\hat{Q}_{22} \in \underset{Q_{22}}{\text{Argmax}}\ Q_{22}[a - \hat{b}_2 Q_{22} - cQ_{12}]. \tag{22}$$

Sea $Q_i:[0,1]\text{x}[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida como $Q_i[M,N] = \dfrac{a(2b_j(N) - c)}{[4b_i(M)b_j(N) - c^2]}$ y,

donde: $b_i(M) = \bar{b}_i M + \underline{b}_{-i}(1-M)$

$b_j(N) = \bar{b}_j N + \underline{b}_{-j}(1-N)$, $i \neq j$, $i=1,2$.

La resolución simultánea de (21) y (22) da lugar a:

$$\hat{Q}_{12}(\alpha,\beta) = \frac{a(2\hat{b}_2 - c)}{[4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2]}, \tag{23}$$

$$\hat{Q}_{22}(\alpha,\beta) = \frac{a(2\hat{b}_1 - c)}{[4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2]}. \tag{24}$$

donde $\hat{b}_1$ y $\hat{b}_2$ son como en (19) y (20).

Con (23) y (24) es posible expresar los beneficios de equilibrio del segundo periodo, en función de las expectativas posteriores α y β. Sean pues,

$$V_1(\alpha,\beta) = \hat{Q}_{12}(\alpha,\beta)\Big[a - \hat{b}_1\hat{Q}_{12}(\alpha,\beta) - c\hat{Q}_{22}(\alpha,\beta)\Big] = \frac{a^2\hat{b}_1(2\hat{b}_2 - c)^2}{[4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2]^2} \tag{25}$$

y

$$V_2(\alpha,\beta) = \hat{Q}_{22}(\alpha,\beta)\Big[a - \hat{b}_2\hat{Q}_{22}(\alpha,\beta) - c\hat{Q}_{12}(\alpha,\beta)\Big] = \frac{a^2\hat{b}_2(2\hat{b}_1 - c)^2}{[4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2]^2} \tag{26}$$

dichos beneficios.

El próximo Lema, muestra las principales propiedades de estas funciones (tomamos como ejemplo la función correspondiente a la empresa 1):

Lema 1:

(i) $V_1(\alpha,\beta)$ es decreciente en α y creciente en β para productos sustitutos ($c>0$) y decreciente en α y β para productos complementarios ($c<0$).

(ii) $V_1(\alpha,\beta)$ es convexa en α. (para cualquier valor de c).

(iii) $V_1(\alpha,\beta)$ es cóncava en β si $c>0$ (sustitutos) y convexa en β si $c>0$ (complementos)

(iv) Con respecto al efecto cruzado, $\dfrac{\partial V_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}$ este tendrá signo negativo para productos sustitutos, y positivo para complementarios.

Demostración:

(i)

$$\frac{\partial V_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{-a^2(4\hat{b}_1\hat{b}_2 + c^2)(2\hat{b}_2 - c)^2(\bar{b}_1 - \underline{b}_1)}{(4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2)^3} < 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial V_1(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{4a\,\hat{b}_1 c(2\hat{b}_2 - c)(2\hat{b}_1 - c)(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)}{(4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2)^3} \begin{cases} >0 \text{ si } c>0 \\ <0 \text{ si } c<0 \end{cases} \tag{28}$$

(ii)

$$\frac{\partial^2 V_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = \frac{16a^2\hat{b}_2(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2(2\hat{b}_2-c)^2[2\hat{b}_1\hat{b}_2 + c^2]}{(4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2)^4} >0 \tag{29}$$

(iii)

$$\frac{\partial^2 V_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{-4a^2c(\bar{b}_1-\underline{b}_1)(\bar{b}_2-\underline{b}_2)(2\hat{b}_2-c)[8\hat{b}_1\hat{b}_2(\hat{b}_1-c)+c^2(4\hat{b}_1-c)]}{(4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2)^4} \begin{cases} <0 \text{ si } c>0 \\ >0 \text{ si } c<0 \end{cases} \tag{30}$$

(iv)

$$\frac{\partial^2 V_1(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2} = \frac{-8(\bar{b}_2-\underline{b}_2)^2 a^2 \hat{b}_1 c(2\hat{b}_1-c)[2\hat{b}_1(4\hat{b}_2-3c) + c^2]}{(4\hat{b}_1\hat{b}_2 - c^2)^4} \begin{cases} <0 \text{ si } c>0 \\ >0 \text{ si } c<0 \end{cases} \tag{31}$$

■

Pasemos a analizar la intuición de este lema:

(i) Cuanto mayor sea α, mayor es la probabilidad de que la pendiente de la demanda en el mercado 1 sea alta. Ello supone, una demanda baja para el primer duopolista y unos beneficios esperados menores para el segundo periodo. Esto ocurre, indistintamente de la relación existente entre los productos. Por el contrario, valores altos de β, reflejan una demanda baja en el segundo mercado y una menor producción para la empresa 2 y como consecuencia de esto mayores beneficios esperados para la empresa 1, cuando los productos son sustitutos. Si por el contrario los bienes son complementarios la menor producción de la segunda empresa disminuye los beneficios de la primera.

(ii) La convexidad con respecto a α, indica que la información es valiosa siempre, con independencia de la relación entre las empresas. En concreto, este término refleja el deseo de cada empresa a procurarse información para revisar sus propias creencias.

(iii) y (iv), representan los *incentivos estratégicos* para la experimentación. En concreto (iii), refleja la interacción entre la información de las dos empresas. Para el caso de bienes sustitutos su signo negativo indica que revisiones a la baja en α, son menos valiosas cuanto menor es β. En este sentido las empresas son sustitutas en la información.

Cuando los productos son complementarios, el signo positivo refleja que las empresas son complementarias en la información. Por último, (iv) indica que para el caso de bienes sustitutos, la empresa 1 está mejor cuanto menos informada está la 2. Por el contrario, para productos complementarios, un rival bien informado es un mejor competidor. Es decir, refleja si a la empresa 1 le interesa que 2 esté informada.

II. Análisis del primer periodo:

En el periodo 1, las creencias posteriores de las empresas α y β, son variables aleatorias cuando las empresas deciden su nivel de producción. Como en capítulos anteriores, podemos expresar los beneficios esperados del segundo periodo en función de las producciones del primer periodo.

Sea:

$$\pi_{i1}(Q_{11},Q_{21}) = Q_{i1}E[a - b_iQ_{i1} - cQ_{j1} + \varepsilon_i], \quad i=1,2 \tag{32}$$

los beneficios esperados del primer periodo, para cada empresa, y sea:

$$\Pi_{i1}(Q_{11},Q_{21}) = Q_{i1}E[P_{i1}] + E[V_i(\alpha,\beta)], \tag{33}$$

La suma de los beneficios esperados de los dos periodos,donde $\alpha=\alpha(P_{11},P_{21})$ $\beta=\beta(P_{11},P_{21})$, y:

$$E[V_i(\alpha,\beta)] = \iint V_i(\alpha(P_{11},P_{21}),\beta(P_{11},P_{21}))h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} \tag{34}$$

con:

$$
\begin{aligned}
h(P_{11},P_{21}) = {} & \alpha_0\beta_0 f(P_{11} - (a-\bar{b}_1Q_{11}-cQ_{21}),\ P_{21} - (a-\bar{b}_2Q_{21}-cQ_{11})) + \\
& \alpha_0(1-\beta_0)f(P_{11} - (a-\bar{b}_1Q_{11}-cQ_{21}),\ P_{21} - (a-\underline{b}_2Q_{21}-cQ_{11})) + \\
& (1-\alpha_0)\beta_0 f(P_{11} - (a-\underline{b}_1Q_{11}-cQ_{21}),\ P_{21} - (a-\bar{b}_2Q_{21}-cQ_{11})) + \\
& (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f(P_{11} - (a-\underline{b}_1Q_{11}-cQ_{21}),\ P_{21} - (a-\underline{b}_2Q_{21}-cQ_{11})) = \\
& \alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

De esta forma, las empresas elegirán unos niveles de producción Q^*_{11} y Q^*_{21}, tal que:

$$Q^*_{11} \in \underset{Q_{11}}{\text{Argmax}}\ \Pi_{11}(Q_{11},Q_{21}) \tag{36}$$

$$Q^*_{21} \in \underset{Q_{21}}{\text{Argmax}}\ \Pi_{21}(Q_{11},Q_{21}) \tag{37}$$

Por el contrario si las empresas maximizan los beneficios corrientes o a corto plazo eligen Q^m_{11} y Q^m_{21}, tal que:

$$Q^m_{11} \in \underset{Q_{11}}{\text{Argmax}}\ \pi_{11}(Q_{11},\ Q^m_{21}) \tag{38}$$

$$Q^m_{21} \in \underset{Q_{21}}{\text{Argmax}}\ \pi_{21}(Q^m_{11},\ Q_{21}) \tag{39}$$

Cuando esto ocurre la producción para cada una de las empresas es:

$$Q^m_{11} = \frac{a(2\hat{b}_{20} - c)}{[4\hat{b}_{10}\hat{b}_{20} - c^2]}, \tag{40}$$

$$Q^m_{21} = \frac{a(2\hat{b}_{10} - c)}{[4\hat{b}_{10}\hat{b}_{20} - c^2]}. \tag{41}$$

donde:

$$\hat{b}_{10} = \alpha_0 \bar{b}_1 + (1-\alpha_0)\underline{b}_1,$$
$$\hat{b}_{20} = \beta_0 \bar{b}_2 + (1-\beta_0)\underline{b}_2.$$

Estamos interesados, en analizar si las empresas eligen cantidades Q^*_{11} y Q^*_{21}, distintas de los miópicas, Q^m_{11} y Q^m_{21}, con el fin de recoger información. Para ello se estudia, previamente, la relación existente entre el proceso de revisión de creencias y las señales de mercado, y concretamente, la propiedad monótona de los ratios de verosimilitud, de la distribución conjunta de las perturbaciones de las demandas.

II.1 Flujo de Información y Señales de mercado: la propiedad del ratio de verosimilitud estrictamente monótono.

En los modelos anteriores, la relación entre las expectativas posteriores y las señales de mercado era inmediata. En este modelo, para resolver las condiciones de primer orden se necesita conocer, también, esta relación. Para ello estudiaremos, en primer lugar, la relación existente entre las señales de mercado, P_{11} y P_{21} y las creencias posteriores de las empresas α y β.

Recordando la Regla de Bayes y la revisión de la probabilidad asignada por cada empresa a los valores de b_1 y b_2 tenemos que:

$$\alpha = \frac{\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\alpha_0[\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + (1-\alpha_0)[\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]},$$

$$\beta = \frac{\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)}{\beta_0[\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (1-\beta_0)[\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]}.$$

donde $\bar{\varepsilon}_i = P_{i1} - (a - \bar{b}_i Q_{i1} - cQ_{j1})$,

$\underline{\varepsilon}_i = P_{i1} - (a - \underline{b}_i Q_{i1} - cQ_{j1})$. $\quad j \neq i,\ i=1,2.$

Nótese que $\alpha = \alpha(P_{11},P_{21})$ y que similarmente $\beta = \beta(P_{11},P_{21})$, por lo que se estudia, a continuación, el efecto de las variaciones en los precios sobre ambas expectativas posteriores.

Considérese, en primer lugar, el efecto de un cambio en P_{11}, sobre α. En este caso ε_1 variará. La siguiente condición nos permite dar un signo a la variación de α.

Si para todo $\bar{\varepsilon}_2$ y $\underline{\varepsilon}_2$, y para un $\beta_0 \in [0,1]$ se cumple que:

$$\frac{\beta_0 f_1(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f_1(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\beta_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)} \qquad \text{C.1}$$

decrece en ε_1, (donde $f_i(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, i=1,2 representa la derivada de $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ respecto a ε_i) se cumple la Propiedad del Ratio de Verosimilitud Estrictamente Monótono en la variable ε_1, para la función:

$$\beta_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2).$$

Sea $\varepsilon_1 = P_{11} - (a - \bar{b}_1 Q_{11} - cQ_{21})$, la función de probabilidad $\beta_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)$, nos da la probabilidad de que se realice el par de precios

(P_{11},P_{21}) cuando la empresa considera que su demanda es mala o lo que es lo mismo que $b_1 = \bar{b}_1$.

La condición C.1 nos dará el signo de $\frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}}$, que indica si unos precios altos (o bajos) en el primer mercado aumentan la probabilidad posterior asociada a una buena demanda $b_1 = \underline{b}_1$.

Similarmente, si se quiere analizar el cambio en β ante cambios en P_{21} se requiere que la propiedad del ratio de verosimilitud estrictamente monótono, en la variable ε_2, se cumpla para la función:

$$\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\alpha_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2).$$

En particular, para todo $\bar{\varepsilon}_1$ y $\underline{\varepsilon}_1$ y $\alpha_0 \in [0,1]$, suponemos que:

$$\frac{\alpha_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\alpha_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)}{\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\alpha_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)} \qquad \text{C.2}$$

decrece en ε_2.

La función $\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\alpha_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)$, nos da la probabilidad de observar (P_{11},P_{21}) cuando la demanda de la empresa 2 es alta $b_2=\bar{b}_2$, o baja. Esta condición nos dará el signo de $\frac{\partial \beta}{\partial P_{21}}$, indicando si precios altos (o bajos) aumentan la probabilidad de una buena demanda en el segundo mercado.

No obstante, α también depende de P_{21}, y β de P_{11}.Por lo tanto, para obtener $\frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}}$ será, ahora, la función $\beta_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)$ la que tendrá que satisfacer una condición similar a la propiedad del ratio de verosimilitud estrictamente monótono para ε_1, pero en este caso tomando derivadas con respecto al segundo argumento. A saber:

$$\frac{\beta_0 f_2(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f_2(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\beta_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)} \qquad \text{C.3}$$

es *decreciente* en ε_1.

Y por último, para obtener $\frac{\partial \beta}{\partial P_{11}}$, se ha de cumplir que:

$$\frac{\alpha_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\alpha_0) f_1(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)}{\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)} \qquad \text{C.4}$$

sea *decreciente* en ε_2.

Lema 2: Si las densidades $\left\{ f(P_{11}-(a-b_1Q_{11}-cQ_{21}),P_{21}-(a-b_2Q_{21}-cQ_{11})) \right\}$ con $b_1=\{\bar{b}_1,\underline{b}_1\}$ y $b_2=\{\bar{b}_2,\underline{b}_2\}$, satisfacen C.1, C.2, C.3, y C.4 se cumple que:

(i) $\frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} <0$, (ii) $\frac{\partial \beta}{\partial P_{21}} <0$,

(iii) $\frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} <0$, (iv) $\frac{\partial \beta}{\partial P_{11}} <0$.

Demostración: Véase Apéndice C. ∎

Este lema nos indica que un cambio en el precio de cualquiera de los mercados provoca cambios de sentido contrario en las creencias posteriores de las empresas. A saber, un aumento (disminución) de P_{i1} da lugar tanto a una disminución (aumento) de α como de β, por lo tanto a un incremento en la probabilidad de una buena demanda en los mercados: $b_1=\underline{b}_1$ y $b_2=\underline{b}_2$.

El siguiente lema, explica como cambian α y β al cambiar los niveles de producción del primer periodo:

Lema 3:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{11}} = \bar{b}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} + \frac{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1)}{D}\left[\alpha[(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} \tag{42}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{21}} = \bar{b}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} + \frac{(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)}{D}\left[\alpha(1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - (1-\alpha)\alpha_0(1-\beta_0)f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} \tag{43}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Q_{11}} = \bar{b}_1 \frac{\partial \beta}{\partial P_{11}} + \frac{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1)}{D}\left[\beta(1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - (1-\beta)(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial \beta}{\partial P_{21}} \tag{44}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Q_{21}} = \bar{b}_2 \frac{\partial \beta}{\partial P_{21}} + \frac{(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)}{D}\left[\beta[\alpha_0(1-\beta_0)f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)+(1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_1)]\right] + c\,\frac{\partial \beta}{\partial P_{11}} \tag{45}$$

y de igual forma es posible expresar estas derivadas como:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{11}} = \underline{b}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} + \frac{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1)}{D}\left[(1-\alpha)[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} \tag{46}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{21}} = \underline{b}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} + \frac{(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)}{D}\left[(1-\alpha)\alpha_0\beta_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \alpha(1-\alpha_0)\beta_0 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} \tag{47}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Q_{11}} = b_{-1}\frac{\partial \beta}{\partial P_{11}} + \frac{(\bar{b}_1 - b_{-1})}{D}\left[(1-\beta)\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \beta\alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_{-2})\right] + c\,\frac{\partial \beta}{\partial P_{21}} \tag{48}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Q_{21}} = b_{-2}\frac{\partial \beta}{\partial P_{21}} + \frac{(\bar{b}_2 - b_{-2})}{D}\left[(1-\beta)[\alpha_0\beta_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)\beta_0 f_2(\varepsilon_{-1},\bar{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial \beta}{\partial P_{11}} \tag{49}$$

donde $D = \alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_{-2})+(1-\alpha_0)\beta_0 f(\varepsilon_{-1},\bar{\varepsilon}_2)+(1-\alpha_0)(1-\beta_0)f(\varepsilon_{-1},\varepsilon_{-2})$

Demostración: Véase Apéndice C. ■

La próxima sección caracteriza las condiciones de primer orden derivadas del problema de maximización.

II.2. Condiciones de Primer orden:

La maximización de los beneficios corrientes (o míopicos) se obtiene a partir de las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \pi_{11}(Q_{11},Q^m_{21})}{\partial Q_{11}} = 0 \tag{50}$$

$$\frac{\partial \pi_{21}(Q^m_{11},Q_{21})}{\partial Q_{21}} = 0 \tag{51}$$

Mientras que las condiciones de primer orden, cuando se analizan los dos periodos, son:

$$\frac{\partial \Pi_{11}}{\partial Q_{11}} = \frac{\partial \pi_{11}(Q_{11},Q^*_{21})}{\partial Q_{11}} + \frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[V_1(\alpha(P_{11},P_{21}),\beta(P_{11},P_{21}))] = 0 \qquad (52)$$

$$\frac{\partial \Pi_{21}}{\partial Q_{21}} = \frac{\partial \pi_{21}(Q^*_{11},Q_{21})}{\partial Q_{21}} + \frac{\partial}{\partial Q_{21}} E[V_2(\alpha(P_{11},P_{21}),\beta(P_{11},P_{21}))] = 0 \qquad (53)$$

Con el fin de caracterizar las condiciones de primer orden, se analiza en primer lugar el comportamiento de $E[V_i(\alpha(P_{11},P_{21}),\beta(P_{11},P_{21}))]$ en Q_{i1}. Nótese que f es continua en Q_{i1} por lo que α y β también lo son. Dado que $V_i(\alpha,\beta)$ es continua en α y β, entonces $V_i(\alpha,\beta)$ también es continua en Q_{i1} y como la esperanza matemática hereda las propiedades de continuidad, $E[V_i(\alpha,\beta)]$ es continua y diferenciable en Q_{i1}.

Para simplificar el análisis y la interpretación de los resultados, es posible escribir β en función de α. Por (15) y (16):

$$\beta = \frac{B\alpha}{A} \qquad (54)$$

donde:

$$B = \alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) \qquad (55)$$

$$A = \alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \qquad (56)$$

de esta forma, $\beta = \gamma(\alpha)$ y $\gamma\,'(\alpha) = \frac{B}{A}$. Así pues, es posible expresar la función de Valor $V_1(\alpha,\beta)$ – que depende de α y β – como una función de Valor que depende exclusivamente de α. Se define, para ello, $W_1:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, como:

$$W_1(\alpha) = V_1(\alpha,\gamma(\alpha)) \qquad (57)$$

Con lo cual, el estudio de $E[V_1(\alpha(P_{11},P_{21}),\beta(P_{11},P_{21}))]$, queda reducido al análisis de $E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))]$. De aquí, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))] = \iint W_1'(\alpha)\, \frac{\partial \alpha}{\partial Q_{11}}\, h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} +$$

$$\iint W_1(\alpha)\, \frac{\partial}{\partial Q_{11}}\, h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} \qquad (58)$$

donde $h(P_{11},P_{21})$, es como en la expresión (35).

En el Apendice C, se muestra como (58) puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))] =$$

$$\iint W_1'(\alpha) \left[\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{11}} - \bar{b}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} - c\, \frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}}\right] \alpha_0[\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21} +$$

$$\iint W_1'(\alpha) \left[\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{11}} - \underline{b}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} - c\, \frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}}\right] (1-\alpha_0)[\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21}$$

$$(59)$$

(59) puede transformarse (ver Apéndice C) en:

$$-(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1''(\alpha)\, \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}}\, (1-\alpha)[\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21} \qquad (60)$$

Este resultado, coincide con el que se obtiene en el caso de la experimentación en el monopolio MSU (1991,a). Sin embargo, en este caso $W_1(\alpha)$ no recoge la acción de un solo decisor. De hecho $W_1(\alpha) = V_1(\alpha,\gamma(\alpha))$, de modo que:

$$W_1''(\alpha) = \frac{\partial^2 V_1(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + 2\, \frac{\partial^2 V_1(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta}\, \gamma'(\alpha) + \frac{\partial^2 V_1(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}\, (\gamma'(\alpha))^2$$

$$(61)$$

Por lo tanto, (60) es:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W(\alpha)] = \iint \left[\frac{\partial^2 V_{12}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 V_{12}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \gamma'(\alpha) + \frac{\partial^2 V_{12}(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2} (\gamma'(\alpha))^2 \right]$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} (1-\alpha)[\alpha_0 \beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)] dP_{11} dP_{21} \qquad (62)$$

Por el lema 1, el signo de (62) es claro, cuando los bienes que se estudian son *complementarios*, $c<0$. Recuérdese que por el Lema 1, cuando los bienes son complementarios, $V_1(\alpha,\beta)$ es estrictamente convexa en (α,β). Es decir:

$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} > 0$, o en otras palabras, la empresa 1, siempre tiene incentivos para procurarse información asi misma.

$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha \partial \beta} > 0$, que indica que el incremento en los beneficios futuros debido a una revisión a la baja de α, es mayor cuanto menor es β.

$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta^2} > 0$, recoge el incentivo de la empresa 1 de procurarle información a la empresa 2. Es decir, 1 estará mejor cuanto más informada esté 2.

De esta forma, cuando las empresas producen bienes complementarios, al efecto experimentador propio, se le suman los efectos que incorporan los incentivos estratégicos a la experimentación y (62) es positiva. De modo que, las empresas siempre eligen niveles de producción superiores al miópico y que en cualquier caso, supera al nivel de producción elegido por la empresa, con fines experimentales, cuando esta es la única abastecedora del mercado. Esto se debe a que las empresas obtienen más beneficios cuanto más informada está la empresa rival. Por tanto, cada duopolista estará interesado en obtener información no solo para si mismo sino también para sus competidores.

Sin embargo, el signo de (62) no es tan nítido cuando las empresas son *sustitutas estratégicas en la información*. Esto es debido a que los incentivos estrátegicos a la experimentación son de signo contrario al deseo propio de cada empresa por procurarse información. Es decir, cada empresa estará, ahora, interesada en procurarse información para si misma, pero no para el rival. Por el Lema 1, $\frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} > 0$, pero $\frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha \partial \beta} < 0$, indicando que el incremento en los beneficios futuros de la empresa 1 debido a una revisión a la baja de α, es mayor cuando mayor sea β. Además $\frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta^2} < 0$; esta concavidad de $V_1(\alpha,\beta)$ en β, indica que la empresa 1, no está interesada en procurarle información a 2. Por tanto, como las expectativas posteriores están positivamente correlacionadas, cualquier intento de hacer una de ellas más precisa resulta en mayor precisión de la otra. Por tanto, los duopolistas experimentarán menos que si operaran en solitario en el mercado.

Así pues, bajo *sustitución de producto*, el signo de (62) depende del grado de correlación entre las creencias posteriores y del grado de sustitución entre productos. Cuanto mayor sea dicha correlación y mayor el grado de sustitución, menor será la experimentación llevada a cabo por las empresas. Por el contrario, si esta correlación es baja y el grado de sustitución también lo es, la experimentación será mayor. Nótese, que para un nivel de correlación dado, la experimentación decrece con el grado de sustitución. En particular, si este fuera la unidad (es decir, $\alpha=\beta$), el duopolio de producto homogéneo de Cournot, estudiado en el Capítulo 1, daría el menor nivel de experimentación que se llevaría a cabo en el duopolio.

Dado que la estructura de la demanda es lineal, la competencia de Cournot con productos sustitutos (complementarios) es el perfecto dual de Bertrand con productos complementarios (sustitutos), (ver Vives (1984)). Por tanto, y a partir de los resultados obtenidos, las empresas bajo competencia de Cournot con productos sustitutos, son sustitutas en la información y además cada empresa está peor cuanto más informada está la empresa rival. Bajo competencia de Bertrand con productos sustitutos, las empresas son complementarias en la información y cada empresa está mejor cuanto más informada está la empresa rival. En cualquier caso, con empresas que producen bienes sustitutos, la competencia de Cournot da lugar a menores niveles de experimentación que la competencia de Bertrand. Toda esta discusión queda recogida en la siguiente Proposición.

Proposición 1: Bajo competencia de Cournot (Bertrand), si los productos son sustitutos, las empresas son sustitutas (complementarias) en la información y cada una de ellas está mejor cuanto menos (más) informada está la empresa rival, por lo que se espera que las empresas experimenten menos (más) que bajo una situación de monopolio. Por lo tanto, un competidor de Cournot experimentará siempre menos que un competidor de Bertrand. Además el nivel más bajo de experimentación, que llevarán a cabo las empresas, tendrá lugar bajo competencia de Cournot con productos homogéneos.

Si los productos son complementarios, los resultados son los contrarios, por lo que un duopolista de Cournot experimentará más que uno de Bertrand.

SEGUNDA PARTE:

APRENDIZAJE Y DISPERSION DE PRECIOS.

En esta segunda parte, se extiende el análisis al caso de un duopolio con producto sustituto, donde las empresas compiten en precios (Bertrand). Las empresas se enfrentan a una curva de demanda lineal donde, a diferencia de la primera parte, existen dos parámetros desconocidos. En particular, tanto la pendiente como el grado de sustitución del producto se desconocen. Se demuestra, que bajo estas condiciones, existe un equilibrio asimétrico en estrategias puras. A partir de resultados anteriores, sabemos que cuando las empresas compiten en precios, son complementarias estratégicas en la información y esto les lleva a coordinar sus acciones para hacer la señal de mercado más informativa. Si la empresas fijan precios distintos, logran observar dos puntos de sus curvas de demanda, en vez de uno (Efecto Muestreo). Observando, de esta forma, un vector de señales de mercado (vector de ventas) más informativo, que a su vez da lugar a mayores beneficios para el segundo periodo.

CAPITULO 4.

Aprendizaje y dispersión de precios.

CAPITULO 4.

Aprendizaje y Dispersión de precios.

En la primera parte de esta Tesis Doctoral, se ha analizado la relación existente entre experimentación y competencia en el mercado, tanto para productos homogéneos como para producto diferenciado. La cuestión relevante que se ha planteado, a lo largo de los tres primeros capítulos, ha sido cómo el comportamiento experimentador de las empresas se ve afectado por el tipo de comportamiento en el mercado.

En esta segunda parte, nuestra atención se centra en cómo el comportamiento experimentador de las empresas, puede dar lugar a resultados de equilibrio que no son a primera vista "naturales". En particular, cómo el deseo de procurarse información, da lugar a que empresas simétricas no elijan de la misma manera.

Para analizar este fenómeno, se estudia un modelo de Bertrand con producto diferenciado y sustituto. En él, se considera que tanto la pendiente de la curva de demanda como el grado de sustitución del producto, son desconocidos. En particular, se supone que estos parámetros pueden tomar dos valores. Las empresas asignan una probabilidad inicial a cada uno de ellos. Además estas revisarán dichas probabilidades, a medida que observan las ventas de los mercados. Se demuestra que el motivo del aprendizaje, da lugar a que las empresas fijen precios distintos de equilibrio en el primer periodo (en estrategias puras).

I. El modelo.

I.1. Supuestos básicos:

1. El duopolio se analiza en un horizonte temporal de dos periodos.

2. Las demandas de mercado vienen dadas por:

$$\tilde{Q}_1 = a - bP_1 + cP_2 + \tilde{\varepsilon}_1 \tag{1}$$

$$\tilde{Q}_2 = a - bP_2 + cP_1 + \tilde{\varepsilon}_2 \tag{2}$$

Donde Q_1 y Q_2 son las ventas de cada duopolista, P_1 y P_2 son los precios fijados en cada mercado y donde $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$ son las perturbaciones aleatorias de la demanda, que se distribuyen conjuntamente de acuerdo con la función de densidad $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, con $E[\tilde{\varepsilon}_1]=E[\tilde{\varepsilon}_2]=0$, y donde $\dfrac{\partial f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1}$ y $\dfrac{\partial f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1}$ existen y son continuas. El soporte de $(\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2)$ es $\mathbb{R}^2$.

3. b y c son la pendiente y el grado de sustitución del producto respectivamente de las curvas de demanda, y son parámetros desconocidos. Se cumple que $b>0$, $c>0$ y $b>c$.

4. En cada mercado $(b,c) \in \{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$. Cada empresa asigna una probabilidad inicial común y que además es conocimiento público, ρ_0 = Prob $\{(b,c)=(\bar{b},\bar{c})\}$. De forma que la distribución de probabilidad subjetiva asociada a los cuatro estados de la Naturaleza posibles:

$$\{((\bar{b},\bar{c}),(\bar{b},\bar{c})),\ ((\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})),\ ((\underline{b},\underline{c}),(\bar{b},\bar{c})),\ ((\underline{b},\underline{c}),(\underline{b},\underline{c}))\} \tag{3}$$

es:

$$\{\rho_0^2,\ \rho_0(1-\rho_0),\ (1-\rho_0)\rho_0,\ (1-\rho_0)^2\} \tag{4}$$

5. Al finalizar el primer periodo, y a la vista de las ventas en cada uno de los mercados, las empresas revisan la probabilidad inicial común ρ_0, obteniendo ρ, que será la que se utilice en el segundo periodo.

6. Las empresas maximizan beneficios y eligen un nivel de precios que maximiza la suma de beneficios esperados de los dos periodos.

7. Se continua suponiendo que los costes de producción son nulos o que el precio fijado por las empresas es un precio neto de un coste marginal constante e igual para las dos empresas.

8. No hay posibilidad de entrada de nuevas empresas, por lo que la estructura de duopolio permanece en el tiempo.

I.2 Desarrollo del juego:

Como es habitual a lo largo de esta Tesis, se plantea el modelo como un juego de información imperfecta de dos periodos. En cada periodo distinguimos dos etapas:

Periodo 1:

Etapa 1: La Naturaleza elige valores (b,c) de entre los cuatro estados posibles descritos en (3). Y también elige valores ε_1 y ε_2 de las variables aleatorias $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$ respectivamente.

Etapa 2: Los duopolistas que no conocen la elección de la Naturaleza, pero si conocen (4), eligen independiente y simultanéamente los precios del primer periodo, P_{11} y P_{21}, que son conocidos para las dos empresas. Cuando esto ocurre, las ventas Q_{11} y Q_{21} se determinan de acuerdo con :

$$Q_{11} = a - bP_{11} + cP_{21} + \varepsilon_1,$$
$$Q_{21} = a - bP_{21} + cP_{11} + \varepsilon_2.$$

(Estas ventas se anuncian y son conocidas para las dos empresas).

Periodo 2:

Etapa 1: La Naturaleza elige nuevos valores de $\tilde{\varepsilon}_1$ y $\tilde{\varepsilon}_2$: $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$.

Etapa 2: se eligen los precios para el segundo periodo P_{12}, P_{22} en función de los precios y de las cantidades del primer periodo (P_{11}, P_{21}, Q_{11}, Q_{21}). Las ventas para el segundo periodo vendrán dadas por:

$$Q_{12} = a - bP_{12} + cP_{22} + \hat{\varepsilon}_1,$$
$$Q_{22} = a - bP_{22} + cP_{12} + \hat{\varepsilon}_2.$$

(siendo anunciadas a las empresas).

Las *Estrategias* de las empresas vienen dadas por:

$$\sigma_1 = (P_{11}, P_{12}(Q_{11}, Q_{21}, P_{11}, P_{21})) \qquad (5)$$
$$\sigma_2 = (P_{21}, P_{22}(Q_{11}, Q_{21}, P_{11}, P_{21})) \qquad (6)$$

Estructura de pagos: Dado el supuesto [7], los Beneficios esperados en el Segundo periodo son:

$$\pi_{12}(\sigma_1,\sigma_2) = P_{12}E[Q_{12}(P_{12},P_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}] \tag{7}$$

$$\pi_{22}(\sigma_1,\sigma_2) = P_{22}E[Q_{22}(P_{12},P_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}] \tag{8}$$

De aquí que la suma de los beneficios esperados de los dos periodos sea,

$$\Pi_1(\sigma_1,\sigma_2) = P_{11}E(Q_{11}(P_{11},P_{21})) + \pi_{12}(\sigma_1,\sigma_2) \tag{9}$$

$$\Pi_2(\sigma_1,\sigma_2) = P_{21}E(Q_{21}(P_{11},P_{21})) + \pi_{22}(\sigma_1,\sigma_2) \tag{10}$$

Estamos particularmente interesados en el Equilibrio Perfecto Subjuego de este juego en dos periodos. Para ello se calcula el equilibrio por inducción hacia atrás. Primero analizamos el equilibrio del segundo periodo en función del conjunto de Información que proporciona el primero.

En el segundo periodo, después de observar (Q_{11}, Q_{21}, P_{11}, P_{21}) los jugadores eligen los precios $\hat{P}_{12}$ y $\hat{P}_{22}$, tal que satisfagan,

$$\hat{P}_{12} \in \underset{P_{12}}{\text{Argmax}}\ E[Q_{12}(P_{12},P_{22})/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})]P_{12} \tag{11}$$

$$\hat{P}_{22} \in \underset{P_{22}}{\text{Argmax}}\ E[Q_{22}(P_{12},P_{22})/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})]P_{22} \tag{12}$$

Para resolver este problema, primero tendremos que encontrar $E[Q_{i2}(P_{12},P_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},Q_{21})]$, i=1,2. Teniendo en cuenta que $E[\tilde{\varepsilon}_1]=E[\tilde{\varepsilon}_2]=0$

$$E(Q_{i2}(P_{12},P_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}) = a - E[(b,c)/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}]\begin{bmatrix} P_{i2} \\ -P_{j2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Para conocer (13), es suficiente encontrar el valor de $E[(b,c)/(Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21})]$.

Sea ρ: $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,1]$. Interprétese $\rho_i(Q_{11},Q_{21})$ como la probabilidad posterior que la empresa i asigna a $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$ (i=1,2), cuando las ventas del primer periodo, Q_{11} y Q_{21}, son observadas (conociendo los precios, P_{11} y P_{21}). A partir de (1) y (2) defínase:

$$\bar{\varepsilon}_1 = Q_{11} - a + \bar{b}P_{11} - \bar{c}P_{21}, \tag{14a}$$

$$\underline{\varepsilon}_1 = Q_{11} - a + \underline{b}P_{11} - \underline{c}P_{21}, \tag{14b}$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = Q_{21} - a + \bar{b}P_{21} - \bar{c}P_{11}, \tag{14c}$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = Q_{21} - a + \underline{b}P_{21} - \underline{c}P_{11}. \tag{14d}$$

Aplicando la regla de Bayes:

$$\rho_1(Q_{11},Q_{21}) = \mathrm{Prob}\left\{(b,c) = (\bar{b},\bar{c})/\tilde{Q}_{11}=Q_{11},\ \tilde{Q}_{21}=Q_{21},P_{11},P_{21}\right\} =$$

$$= \frac{\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]}{\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + (1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{15}$$

y de igual forma:

$$\rho_2(Q_{11},Q_{21}) = \mathrm{Prob}\left\{(b,c) = (\bar{b},\bar{c})/\tilde{Q}_{11}=Q_{11},\ \tilde{Q}_{21}=Q_{21},P_{11},P_{21}\right\}$$

$$= \frac{\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]}{\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (1-\rho_0)[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{16}$$

Por consistencia se supone que $f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) = f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$. En otras palabras, se esta suponiendo que $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$, para todos los valores de ε_1, ε_2, lo que asegura que para un valor dado, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la distribución marginal de ε_1 condicionada a $\varepsilon_2=\varepsilon$, es la misma que la distribución marginal de ε_2 condicionada a $\varepsilon_1=\varepsilon$. De esta forma $\rho_1(Q_{11},Q_{21})=\rho_2(Q_{11},Q_{21})$. De aquí se deduce que la expresión (13) puede ser escrita como:

$$E[Q_{i2}(P_{12},P_{22})/Q_{11},Q_{21},P_{11},P_{21}] = a - \rho(\bar{b},\bar{c})\begin{bmatrix} P_{i2} \\ -P_{j2} \end{bmatrix} - (1-\rho)(\underline{b},\underline{c})\begin{bmatrix} P_{i2} \\ -P_{j2} \end{bmatrix} =$$

$$a - \hat{b}P_{i2} + \hat{c}P_{j2}, \quad i \neq j \tag{17}$$

donde:

$$\hat{b} = \bar{b}\rho + \underline{b}(1-\rho), \tag{18}$$

$$\hat{c} = \bar{c}\rho + \underline{c}(1-\rho). \tag{19}$$

Por tanto, las ecuaciones (11) y (12) pasan a ser:

$$\hat{P}_{12} = \underset{P_{12}}{\text{Argmax}}\ P_{12}(a - \hat{b}P_{12} + \hat{c}P_{22}), \tag{20}$$

$$\hat{P}_{22} = \underset{P_{22}}{\text{Argmax}}\ P_{22}(a - \hat{b}P_{22} + \hat{c}P_{12}). \tag{21}$$

Sea $P:[0,1] \to \mathbb{R}_+$, definida por $P(M) = \dfrac{a}{[2\hat{b}(M) - \hat{c}(M)]}$.

La resolución simultánea de (20) y (21) da lugar a la siguiente solución única y simétrica:

$$\hat{P}_{12} = \hat{P}_{22} = \hat{P}\,(\rho) = \frac{a}{(2\hat{b} - \hat{c})} \, . \tag{22}$$

A partir de (22) obtenemos la Función de Valor, $V(\rho)$, que representa los beneficios esperados de equilibrio, en función de las creencias posteriores de ambas empresas. Es decir,

$$V(\rho) = \hat{P}(\rho)[a - \hat{b}\hat{P}(\rho) + \hat{c}\hat{P}(\rho)] = \frac{a^2\hat{b}}{(2\hat{b} - \hat{c})^2}\,. \tag{23}$$

Nótese que b es la pendiente de la demanda, y como tal, cada empresa preferirá $b=\underline{b}$. Sin embargo, cada empresa prefiere un valor alto del grado de sustitución del producto, $c=\bar{c}$. Como se está considerando que $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$, entonces las empresas estarán mejor con $(\underline{b},\underline{c})$ o con $(\bar{b},\bar{c})$, en función de que $(\bar{b}-\underline{b})\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right.(\bar{c}-\underline{c})$. Dado que la influencia de b en la curva de demanda de cada empresa, es mayor que la de c, el análisis resulta más transparente si se supone que $\Delta=(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})$ y que $\underline{c}>\underline{b}/2$.

<u>*Lema 1:*</u> $V(\rho)$ es decreciente y estrictamente convexa en ρ.

1. $V(\rho)$ es decreciente en ρ.

Esta propiedad de la función de Valor, nos indica que cuanto mayor sea ρ (más alta la probabilidad de que $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$) menores serán los beneficios esperados para cada empresa.

<u>*Demostración:*</u>

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{-\hat{c}a^2\Delta}{(2\hat{b}-\hat{c})^3} < 0 \tag{24}$$

2. Convexidad estricta de $V(\rho)$.

<u>*Demostración:*</u>

$$\frac{\partial^2 V(\rho)}{\partial \rho^2} = \frac{2a^2\Delta^2(2\hat{c}-\hat{b})}{(2\hat{b} - \hat{c})^4} > 0 \tag{25}$$

Esta segunda propiedad de $V(\rho)$ significa que la información sobre (b,c) es valiosa para cada empresa. Para demostrarlo, defínase para cada valor $(b,c) = \{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$, las soluciones óptimas para la empresa 1 (es decir, la solución que se daría si 1 conociera el verdadero valor de b y c):

$$\hat{P}_{12}(1) = \underset{P_{12}}{\text{Argmax}}\ (a - \bar{b}P_{12} + \bar{c}P_{22})P_{12}, \tag{26}$$

$$\hat{P}_{12}(0) = \underset{P_{12}}{\text{Argmax}}\ (a - \underline{b}P_{12} + \underline{c}P_{22})P_{12}. \tag{27}$$

De forma similar defínase para la empresa 2:

$$\hat{P}_{22}(1) = \underset{P_{22}}{\text{Argmax}}\ (a - \bar{b}P_{22} + \bar{c}P_{12})P_{22}, \tag{28}$$

$$\hat{P}_{22}(0) = \underset{P_{22}}{\text{Argmax}}\ (a - \underline{b}P_{22} + \underline{c}P_{12})P_{22}. \tag{29}$$

Las soluciones que se obtienen son:

$$\hat{P}_{12}(1) = \hat{P}_{22}(1) = \frac{a}{2\bar{b}-\bar{c}} = \hat{P}(1) \tag{30}$$

$$\hat{P}_{12}(0) = \hat{P}_{22}(0) = \frac{a}{2\underline{b}-\underline{c}} = \hat{P}(0) \tag{31}$$

Por tanto, los beneficios esperados de equilibrio para cada valor de $(b,c) = \{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$ son:

$$V(1) = \hat{P}(1)[a - (\bar{b}-\bar{c})\hat{P}(1)], \tag{32}$$

y

$$V(0) = \hat{P}(0)[a - (\underline{b}-\underline{c})\hat{P}(0)]. \tag{33}$$

Sin embargo, como las empresas no conocen la realización de (b,c), estas fijarán sus precios de acuerdo con (20) y (21). Supóngase ahora, que a posteriori, las empresas conocen el verdadero valor de (b,c).

Sea $V_0(\rho)$ los beneficios posteriores para cada empresa calculados con los precios de equilibrio óptimos exante. Por (22):

$$V_0(1) = \hat{P}(\rho)[a - (\bar{b}-\bar{c})\hat{P}(\rho)], \tag{34}$$

$$V_0(0) = \hat{P}(\rho)[a - (\underline{b}-\underline{c})\hat{P}(\rho)]. \tag{35}$$

Definición 1. La información sobre (b,c) es valiosa a posteriori, si para cualquier valor $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$, cada empresa hubiera preferido estar informada sobre (b,c) cuando eligió los precios óptimos del segundo periodo, esto es:

$$V(1) > V_0(1) \tag{36}$$

$$V(0) > V_0(0) \tag{37}$$

Sustituyendo las expresiones por su valor, (36) y (37) pasan a ser:

$$\hat{P}(1)[a - (\bar{b}-\bar{c})\hat{P}(1)] > \hat{P}(\rho)[a - (\bar{b}-\bar{c})\hat{P}(\rho)] \tag{38}$$

$$\hat{P}(0)[a - (\underline{b}-\underline{c})\hat{P}(0)] > \hat{P}(\rho)[a - (\underline{b}-\underline{c})\hat{P}(\rho)] \tag{39}$$

Por la convexidad de $V(\rho)$ las desigualdades anteriores se verifican.

La definición 1, no solo garantiza que la información es valiosa a posteriori sino que también, lo es ex-ante. Para comprobarlo, es suficiente comparar los beneficios esperados del segundo periodo, cuando las empresas conocen el verdadero valor de (b,c) entre el periodo 1 y 2, y cuando no lo conocen. En el caso en que la empresa está informada, los beneficios esperados para el segundo periodo son:

$$V(1)\rho + V(0)(1-\rho), \tag{40}$$

Y cuando está desinformada los beneficios esperados del segundo periodo son:

$$V[E(b,c)] = V(\rho) \tag{41}$$

De esta forma, la información es Valiosa Ex-ante si:

$$E[V(b,c)] > V[E(b,c)] = V(\rho) \tag{42}$$

Si la información es valiosa Ex-post, o lo que es lo mismo si se verifica (36) y (37) se tiene que tomando expectativas y sumando, se satisface

$$E[V(b,c)] > E[V_0(b,c)] = V[E(b,c)] = V(\rho) \tag{43}$$

(dada la linealidad de V_0 en (b,c)).

II. Análisis del primer periodo.

En el periodo 1, la creencia posterior de cada una de las empresas, ρ, es una variable aleatoria cuando éstas fijan los precios. De esta forma, es posible expresar los beneficios esperados del segundo periodo como una función de los precios del primero.

Defínanse los beneficios del primer periodo para la empresa i, como:

$$\pi_{i1}(P_{11},P_{21}) = E[a - bP_{11} + cP_{12} + \tilde{\varepsilon}_i]P_{i1}, \quad i=1,2, \tag{44}$$

La suma de los beneficios esperados para los dos periodos, viene entonces dada por la expresión:

$$\Pi_i(P_{11},P_{21}) = \pi_{i1}(P_{11},P_{21}) + E[V(\rho)], \qquad i=1,2 \tag{45}$$

donde $\rho = \rho(Q_{11},Q_{21})$, y donde:

$$E[V(\rho)] = \iint V(\rho(Q_{11},Q_{21}))h(Q_{11},Q_{21})\, dQ_{11}dQ_{21}, \tag{46}$$

con

$$\begin{aligned} h(Q_{11},Q_{21}) = {} & \rho_0^2\, f(Q_{11} - (a - \bar{b}P_{11} + \bar{c}P_{21}), Q_{21} - (a - \bar{b}P_{21} + \bar{c}P_{11})) + \\ & \rho_0(1-\rho_0)\, f(Q_{11} - (a - \bar{b}P_{11} + \bar{c}P_{21}), Q_{21} - (a - \underline{b}P_{21} + \underline{c}P_{11})) + \\ & (1-\rho_0)\rho_0\, f(Q_{11} - (a - \underline{b}P_{11} + \underline{c}P_{21}), Q_{21} - (a - \bar{b}P_{21} + \bar{c}P_{11})) + \\ & (1-\rho_0)^2\, f(Q_{11} - (a - \underline{b}P_{11} + \underline{c}P_{21}), Q_{21} - (a - \underline{b}P_{21} + \underline{c}P_{11})) = \\ \rho_0^2\, f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + {} & \rho_0(1-\rho_0)\, f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)\rho_0\, f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \end{aligned} \tag{47}$$

De esta forma el problema de las empresas consiste en elegir un par

P^*_{11}, P^*_{21}, tal que:

$$P^*_{11} \in \underset{P_{11}}{\mathrm{Argmax}}\ \Pi_1(P_{11},P^*_{21}) \tag{48}$$

$$P^*_{21} \in \underset{P_{21}}{\mathrm{Argmax}}\ \Pi_2(P^*_{11},P_{21}) \tag{49}$$

Si las empresas, por el contrario, actúan de forma miópica, resolverán:

$$P^m_{11} \in \underset{P_{11}}{\mathrm{Argmax}}\ \pi_{11}(P_{11},P^m_{21}), \tag{50}$$

$$P^m_{21} \in \underset{P_{21}}{\mathrm{Argmax}}\ \pi_{21}(P^m_{11},P_{21}). \tag{51}$$

La solución a este último problema viene dada por:

$$P^m_{11} = P^m_{21} = P^m_1 = \frac{a}{2\hat{b}_0 - \hat{c}_0}, \tag{52}$$

donde $\hat{b}_0 = \rho_0\bar{b} + (1-\rho_0)\underline{b}$

$\hat{c}_0 = \rho_0\bar{c} + (1-\rho_0)\underline{c}$.

Nuestro interés se centra en saber si las empresas fijan precios distintos a los miópicos, cuando tratan de recoger información. Para ello se comparan los precios derivados de cada uno de los problemas de maximización presentados, es decir, P^*_{11} P^*_{21} y P^m_{11} P^m_{21}.

II.1 Flujo de Información y Señales de mercado: La propiedad del ratio de verosimilitud estrictamente monótono.

Antes de resolver las condiciones de primer orden que caracterizan las soluciones, se va a considerar la relación entre las señales de mercado Q_{11} y Q_{21} y las creencias posteriores de las empresas ρ.

Recordando la Regla de Bayes a partir de la cual se realiza la revisión:

$$\rho = \frac{\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1 - \rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]}{\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + (1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}$$

donde:

$$\bar{\varepsilon}_i = Q_{i1} - (a - \bar{b}P_{i1} + \bar{c}P_{j1}) \qquad (53)$$

$$\underline{\varepsilon}_i = Q_{i1} - (a - \underline{b}P_{i1} + \underline{c}P_{j1}) \quad j\neq i,\ i=1,2 \qquad (54)$$

Supóngase, ahora, que para todo $\bar{\varepsilon}_2$ y $\underline{\varepsilon}_2$ y para algún $\rho_0 \in [0,1]$ se cumple que:

$$\frac{\rho_0 f_1(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_1(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)} \qquad \text{C.1}$$

decrece en ε_1.

(donde $f_i(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $i=1,2$, representa la derivada de $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ respecto a ε_i).

La condición C.1, representa la *Propiedad de monotonicidad estricta del ratio de verosimilitud* en la variable ε_1, para la función:

$$\rho_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2).$$

Sea $\varepsilon_1 = Q_{11} - (a-\bar{b}P_{11}+\bar{c}P_{21})$, la función de probabilidad $\rho_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2)$ + $(1-\rho_0)f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)$ nos da la probabilidad de que se realice el par de ventas (Q_{11},Q_{21}) cuando la empresa 1 considera que la demanda es "mala" o lo que es lo mismo $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$.

Esta condición C.1 dará un signo a $\dfrac{\partial \rho_1}{\partial Q_{11}}$. Indicando si unas ventas altas (o bajas) de la empresa 1 son "buenas noticias", en el sentido de que aumentan la probabilidad posterior de 1, de una buena demanda, es decir $(b,c)=(\underline{b},\underline{c})$. Con nuestros supuestos de simetria, se cumple que $\rho_1=\rho_2=\rho$, y por lo tanto C.1 también, muestra el signo de $\dfrac{\partial \rho_2}{\partial Q_{11}}$.

Similarmente, la propiedad del *ratio de verosimilitud estrictamente monótono*, en la variable ε_2, se cumple para la función $\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)$ + $(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)$. En particular, para todo $\bar{\varepsilon}_1$ y $\underline{\varepsilon}_1$, y $\rho \in [0,1]$, se supone que:

$$\frac{\rho_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\rho_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)} \qquad \text{C.2}$$

decrece en ε_2.

La función $\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)$ + $(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)$ nos da la probabilidad de observar (Q_{11},Q_{21}) cuando la demanda de la empresa 2 es alta, $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$ (o baja). Esta condición nos da el signo de $\dfrac{\partial \rho_2}{\partial Q_{21}}$, es decir indica si ventas altas (o bajas) en el mercado 2 aumentan la probabilidad de una buena demanda para la empresa 2. A partir de C.2, también, podemos obtener el signo de $\dfrac{\partial \rho_1}{\partial Q_{21}}$.

La condición de consistencia $f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) = f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$, hace que $\rho_1=\rho_2=\rho$, incorporando una correlación negativa entre las variables ε_1 y ε_2. Sin esta condición de consistencia $\rho_1 \neq \rho_2$ y entonces $\frac{\partial \rho_1}{\partial Q_{21}} \neq \frac{\partial \rho_2}{\partial Q_{21}}$ y $\frac{\partial \rho_1}{\partial Q_{11}} \neq \frac{\partial \rho_2}{\partial Q_{11}}$.

En este caso, para obtener el signo de $\frac{\partial \rho_1}{\partial Q_{21}}$, la función $\rho_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)$ tendrá que satisfacer una condición similar a la propiedad del ratio de verosimilitud estrictamente monótono para ε_1, pero en este caso tomando derivadas con respecto al segundo argumento, es decir:

$$\frac{\rho_0 f_2(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f_2(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)} \qquad \text{C.3}$$

tendría que ser *decreciente* en ε_1.

De igual forma, para obtener el signo de $\frac{\partial \rho_2}{\partial Q_{11}}$,

$$\frac{\rho_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\rho_0) f_1(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\rho_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)} \qquad \text{C.4}$$

debería *decrecer* en ε_2.

C.3 (C.4) nos muestra si los valores altos de Q_{21} (Q_{11}) son "buenas o malas noticias" para la empresa 1 (para la empresa 2). Sin embargo, C.3 y C.4 incorporan una correlación negativa entre las variables ε_1 y ε_2. Para ver esto, supongamos que C.1 y C.2 se cumplen. Supongamos también, que $\varepsilon_1 > \hat{\varepsilon}_1$, de forma que $f(\hat{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)=f(\varepsilon_1,\varepsilon_2 + \gamma(\varepsilon_1))$. De esta forma, la nueva distribución marginal de ε_2, para valores fijos de ε_1, tiene la misma pendiente que la anterior, pero desplazada. Entonces C.3 requiere que $\gamma(\varepsilon_1)$ sea negativa y decreciente, así que la distribución marginal ε_2, para valores fijos de ε_1, decrece cuando ε_1 crece. Esto implica que cuando ε_1 crece, los valores verosimiles de ε_2 decrecen, por lo que ε_1 y ε_2 están correlacionadas negativamente. Este tipo de correlación negativa en los shocks de demanda son comunes en mercados con bienes sustitutos, donde los shocks temporales trasladan a los consumidores de un mercado a otro. En nuestro caso, donde $f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) = f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$, C.3 y C.4 se cumplen, trivialmente cuando $\gamma(\varepsilon_1)=-1$.

El siguiente lema analiza la relación existente entre las señales de mercado Q_{11} y Q_{21}, y las creencias posteriores de las empresas:

Lema 2. Si las densidades $\left\{f(Q_{11} - (a - bP_{11} + cP_{21}), Q_{21} - (a - bP_{21} + cP_{11}))\right\}$, $(b,c) = \{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$, con $(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})$, satisfacen las condiciones C.1, y C.2

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial Q_{11}} = \frac{\partial \rho_2}{\partial Q_{11}} = \frac{\partial \rho}{\partial Q_{11}} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0 \text{ dependiendo de que } P_{11} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} P_{21} \qquad (55)$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial Q_{21}} = \frac{\partial \rho_1}{\partial Q_{21}} = \frac{\partial \rho}{\partial Q_{21}} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0 \text{ dependiendo de que } P_{11} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} P_{21} \qquad (56)$$

Además dado que $f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) = f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$, entonces:

$$\text{(iii)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial Q_{11}} = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial Q_{21}} \right]. \qquad (57)$$

Demostración: véase Apendice D. ■

Este lema nos dice que si $P_{11}>P_{21}$ ($P_{11}<P_{21}$) las dos empresas estarán mejor (peor), cuando las ventas del primer mercado sean altas, en el sentido

de que disminuye (aumenta) la probabilidad posterior común ρ, de que $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$. Pero, por el contrario, las dos empresas están peor (mejor) cuando las ventas en el segundo mercado son altas, en cuanto que aumenta (disminuye) la probabilidad de que $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$. Por último si $P_{11}=P_{21}$, ρ, es independiente de las ventas en cada uno de los mercados.

Con respecto a la relación que guarda ρ (probabilidad posterior de $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$) con respecto a las variables de decisión del primer periodo P_{11} y P_{21} tenemos el siguiente lema .Sea:

$D=\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + (1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]$,

entonces:

<u>*Lema 3:*</u>

$$\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} = \bar{b}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \frac{(\bar{b}-\underline{b})}{D}\left[\rho[\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right] -$$

$$\bar{c}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}} - \frac{(\bar{c}-\underline{c})}{D}\left[\rho(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - (1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\right] \tag{58}$$

y alternativamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} = \underline{b}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \frac{(\bar{b}-\underline{b})}{D}\left[(1-\rho)[\rho_0^2\, f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right] -$$

$$\underline{c}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}} - \frac{(\bar{c}-\underline{c})}{D}\left[(1-\rho)\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \rho\rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\right] \tag{59}$$

$i\neq j$, $i=1,2$.

<u>*Demostración:*</u> Véase Apéndice D. ■

En la próxima sección se caracterizan las soluciones del primer periodo. Los supuestos de que los precios han de ser positivos, es decir $P_{i1}>0$, i=1,2, y de que el duopolista opera acotado por un precio $\hat{P}$, para el cual las ventas son cero, es decir $\hat{P} = \frac{a}{b-c}$, $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$, garantizan las soluciones interiores.

II.2. Condiciones de primer orden:

Cuando el duopolista actúa de forma miópica, o lo que es lo mismo no tiene en cuenta el flujo de información que le proporciona el primer periodo y maximiza los beneficios corrientes, lo hace de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \pi_{11}(P_{11},P^m_{21})}{\partial P_{11}} = 0 \tag{60}$$

$$\frac{\partial \pi_{21}(P^m_{11},P_{21})}{\partial P_{21}} = 0 \tag{61}$$

Por el contrario, si cada una de las empresas maximiza la suma de beneficios esperados de los dos periodos, obtiene como solución P^*_{11} y P^*_{21} respectivamente, a partir de:

$$\frac{\partial \Pi_{11}(P_{11},P_{21})}{\partial P_{11}} = \frac{\partial \pi_{11}(P_{11},P^*_{21})}{\partial P_{11}} + \frac{\partial}{\partial P_{11}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial \Pi_{21}(P_{11},P_{21})}{\partial P_{21}} = \frac{\partial \pi_{21}(P^*_{11},P_{21})}{\partial P_{21}} + \frac{\partial}{\partial P_{21}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}) = 0 \tag{63}$$

La diferencia entre las expresiones (60), (61) y (62),(63) radica en el término $\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21})$. Con el fin de caracterizar las soluciones del primer periodo necesitamos conocer el comportamiento de $E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]$ con respecto a las variables de control del primer periodo (P_{11} y P_{21}).

Notese que f(.) es continua en P_{i1} y entonces ρ es continua en P_{i1}. Puesto que $V(\rho)$ es continua en ρ, entonces $V(\rho)$ es continua en P_{i1}, y dado que el operador esperanza mantiene la propiedad de continuidad, $E[V(\rho)]$ es continua en ρ. Además por el argumento anterior $E[V(\rho)]$ es diferenciable en P_{i1}.

La siguiente Proposición muestra el primer resultado de este capítulo. Dada su laboriosidad, ha sido relegada en su mayor parte al Apéndice D.

Proposición 1: La función $E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]$ alcanza un mínimo en $P_{i1}=P_{j1}$, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21})) = \begin{cases} <0 \text{ if } P_{i1}<P_{j1} \\ =0 \text{ if } P_{i1}=P_{j1} \\ >0 \text{ if } P_{i1}>P_{j1} \qquad j\neq i,\ i=1,2 \end{cases} \tag{64}$$

Demostración: Por (46)

$$E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] = \iint V(\rho(Q_{11},Q_{21})h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21}, \text{ para } i=1,2,\ i\neq j,$$

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] = \iint V'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21} + \iint V(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21} \tag{65}$$

donde $h(Q_{11},Q_{21})$ viene dada por (47).

En el Apéndice mostramos como la expresión (65) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] =$$

$$\iint V'(\rho)\left[\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} - \bar{b}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \bar{c}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\right]\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} +$$

$$\iint V'(\rho)\left[\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} - \underline{b}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \underline{c}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\right](1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}. \tag{66}$$

Usando el Lema 2 y el Lema 3 obtenemos que (66) es igual a (véase Apéndice D).

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] =$$

$$\iint -V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\,(1-\rho)\,(\bar{b}-\underline{b})\,[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)dQ_{11}dQ_{21} +$$

$$\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\,(1-\rho)(\bar{c}-\underline{c})\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)dQ_{11}dQ_{21} -$$

$$\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}(\bar{c}-\underline{c})\rho_0(1-\rho_0)\rho f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)dQ_{11}dQ_{21} \tag{67}$$

El primer término de la derecha de (67) mide el cambio de los beneficios marginales de la empresa i, en el segundo periodo, derivados de los cambios en las ventas de la empresa i (a través de la probabilidad posterior ρ), cuando la demanda en el mercado i es la alta $((b,c)=(\bar{b},\bar{c}))$, para alguna posible demanda del mercado j. Por la convexidad de $V(\rho)$, y por el lema 2, este término es posítivo (negativo) si $P_{i1}>P_{j1}$ $(P_{i1}<P_{j1})$. Este término es similar al que aparece en Mirman, Samuelson y Urbano (1991,a) en su análisis sobre la experimentación en el monopolio y también en análisis del Duopolio de Cournot realizado en el primer capítulo.

El segundo y el tercer término de la derecha de (67) aparecen por el hecho de estar tratando un duopolio diferenciado. Miden el cambio en los beneficios marginales de la empresa i ,en el segundo periodo, debido a un cambio en las ventas en el mercado j (Q_{j1}). Obsérvese que el primero de ellos refuerza el efecto del cambio en las ventas en el mercado i, mientras que el segundo recoge la correlación negativa de los términos de error.

Dado nuestro supuesto de que $\Delta=(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})$ y por el lema 2, $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} = - \frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}$, (67) puede escribirse (véase Apéndice D) como:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] =$$

$$\Delta\iint V''(\rho)\left(- \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\right)[\rho(1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho)\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} \qquad (68)$$

Si $P_{i1}<P_{j1}$, $i\neq j$, $i=1,2$, por el lema 2, $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}>0$, así que por la convexidad de $V(\rho)$, (68) es negativo. De igual forma si $P_{i1}>P_{j1}$, $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}<0$, y entonces (68) es positivo. Por último, si $P_{i1}=P_{j1}$, $\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[(V(\rho)] = 0$. ■

La próxima proposición caracteriza las soluciones (los precios de equilibrio) del primer periodo. Se muestra que el equilibrio en estrategias puras da lugar a la dispersión de precios.

Proposición 2: Si las densidades $\{f(Q_{11}-(a-bP_{11}+cP_{21}),Q_{21}-(a-bP_{21}+cP_{11})\}$, $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$, satisfacen las condiciones C.1 y C.2, entonces las soluciones del primer periodo se caracterizan por un par de precios P^*_{11} y P^*_{21} tal que:

$$P^*_{11} \neq P^m_{11}$$
$$P^*_{21} \neq P^m_{21}$$

y donde $P^*_{11}>P^*_{21}$, o $P^*_{11}<P^*_{21}$. En otras palabras existe un equilibrio no simétrico en estrategias puras.

Demostración: Para un precio dado P_{j1} elegido por la empresa j en el periodo 1, la empresa i elegirá su mejor respuesta a P_{j1}, por (48) y (49):

$$P^*_{i1}(P_{j1}) = \underset{P_{i1}}{\text{Argmax}} \, [\, \pi_{i1}(P_{11},P_{21}) + E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]] \tag{69}$$

o por (62) y (63):

$$P^*_{i1}(P_{j1}) = \frac{a + \hat{c}_0 P_{j1}}{2\hat{b}_0} + \frac{1}{2\hat{b}_0} \frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))], \tag{70}$$

donde $\hat{c}_0= \bar{c}\rho_0 + \underline{c}(1-\rho_0)$, y $\hat{b}_0= \bar{b}\rho_0 + \underline{b}(1-\rho_0)$.

Cuando la empresa actúa de forma miópica su función de reacción o mejor respuesta para cada P_{j1} vendrá dada por:

$$\hat{P}_{i1}(P_{j1}) = \underset{P_{i1}}{\text{Argmax}} \, [\pi_{i1}(P_{11},P_{21})] \tag{71}$$

o por las expresiones (60) y (61):

$$\hat{P}_{i1}(P_{j1}) = \frac{a + \hat{c}_0 P_{j1}}{2\hat{b}_0} \tag{72}$$

Recordemos que $P_1^M = \frac{a}{2\hat{b}_0-\hat{c}_0}$ es el precio de equilibrio miópico (ver (52)).

Obsérvese que como $\hat{P}_{i1}(P_{j1})$ es la función de reacción a corto plazo o miópica $\hat{P}_{i1}\begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} P_{j1}$, dependiendo de que $P_{j1}\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} P_1^M$.

Finalmente, por (72) y (70), $P^*_{i1}(P_{j1})$ puede expresarse como:

$$P^*_{i1}(P_{j1}) = \hat{P}_{i1}(P_{j1}) + \frac{1}{2\hat{b}_0} \frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] \tag{73}$$

Vamos a analizar las mejores respuestas de la empresa i para un precio P_{j1} de la empresa rival:

Supongamos en primer lugar que $P_{j1}>P_1^M$. Entonces, $\hat{P}_{i1}(P_{j1})<P_{j1}$. Por (69) esto significa que la función $E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]$ alcanza un mínimo en $P_{i1}=P_{j1}$, que está a la derecha del máximo de la función $\pi_{i1}(P_{11},P_{21})$, que se obtiene en $\hat{P}_{i1}(P_{j1})<P_{j1}$. Entonces, como:

$$\hat{P}_{i1}(P_{j1}) - P_{j1} <0 \tag{74}$$

la mejor respuesta a corto plazo no es lo mejor que la empresa i puede hacer. De hecho, (74) significa por el lema 2, que $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}$ >0, así que por la proposición 1, $E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]<0$, y entonces por (69) (nótese que $\pi_{i1}(P_{11},P_{21})$ es estrictamente cóncava en P_{i1}, i=1,2), o por (73), $P^*_{i1}<\hat{P}_{i1}(P_{j1})$, ya que las ganancias a corto plazo son menores que las ganancias derivadas de la información. (Véase gráfico 1).

En segundo lugar, si $P_{j1}<P^M_1$, entonces $\hat{P}_{i1}(P_{j1})>P_{j1}$, y la función $E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]$ alcanza un mínimo en $P_{i1}=P_{j1}$, que está situado a la izquierda de de $\hat{P}_{i1}(P_{j1})>P_{j1}$, que a su vez es el máximo de $\pi_{i1}(P_{11},P_{21})$. Entonces, como:

$$\hat{P}_{i1}(P_{j1}) - P_{j1} >0 \tag{75}$$

por el lema 2 y la proposición 1, $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}$ <0, y $E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]>0$, así que por (69) o (73), $P^*_{i1}>\hat{P}_{i1}(P_{j1})$. (Véase gráfico 2).

Por último, nos queda el caso en que $P_{j1}=P^M_1$, $\hat{P}_{i1}(P_{j1}) = P_{j1}=P^M_1$. Entonces, la función $[\pi_{i1}(P_{11},P_{21}) + E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]]$ alcanza un mínimo en $\hat{P}_{i1}(P_{j1}) = P_{j1}=P^M_1$ por lo que según el argumento anterior $P^*_{i1}\left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right. \hat{P}_{i1}$, dependiendo de:

$$[\pi_{i1}(P_{11},P_{21}) + E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]_{P^*_i>\hat{P}_{i1}} \gtrless [\pi_{i1}(P_{11},P_{21}) + E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]_{P^*_i<\hat{P}_{i1}} \tag{76}$$

(Véase gráfico 3).

Lo que se está indicando, es la existencia de un salto en la correspondencia de reacción de la empresa i en $\hat{P}_{i1} = P_{j1}=P^M_1$. Por lo tanto, las correspondencias de reacción nunca se cortarán en la diagonal: la correspondencia de la empresa i (empresa j) tiene una discontinuidad en $P_{j1}= \frac{a}{2\hat{b}_0-c_0} = P^M_1$ $\left[P_{i1}= \frac{a}{2\hat{b}_0-c} = P^M_1\right]$. Nótese que este tipo de mejores respuestas excluye la existencia de equilibrios simétricos en estrategias puras o lo que es lo mismo, siempre existe dispersión de precios en el equilibrio (Véase gráfico 4).

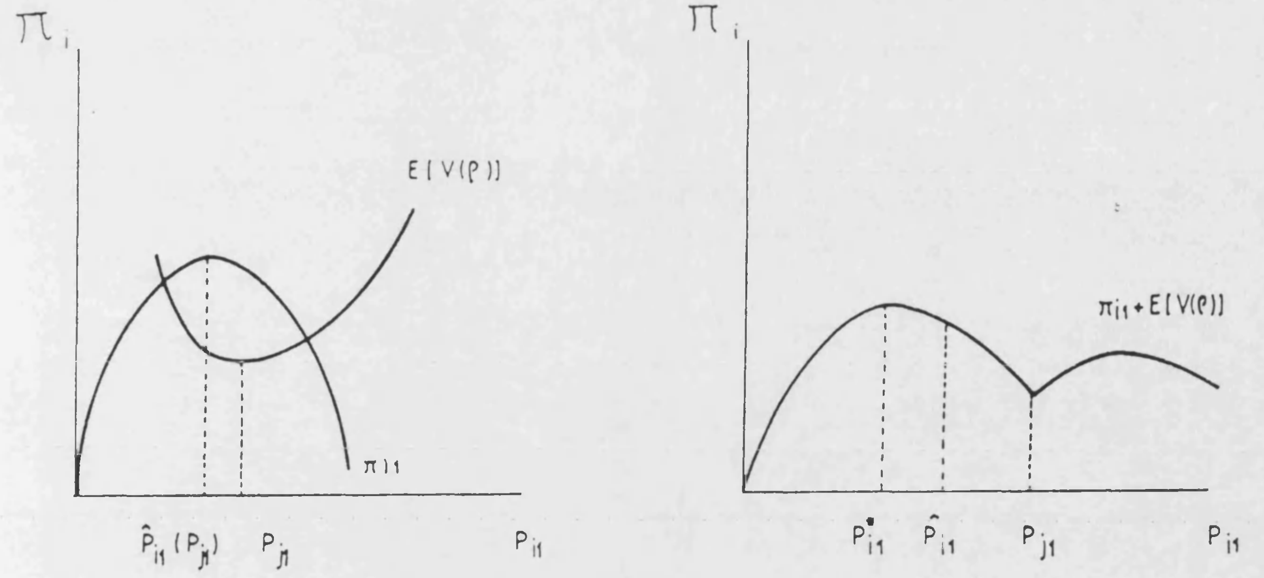

GRAFICO 1

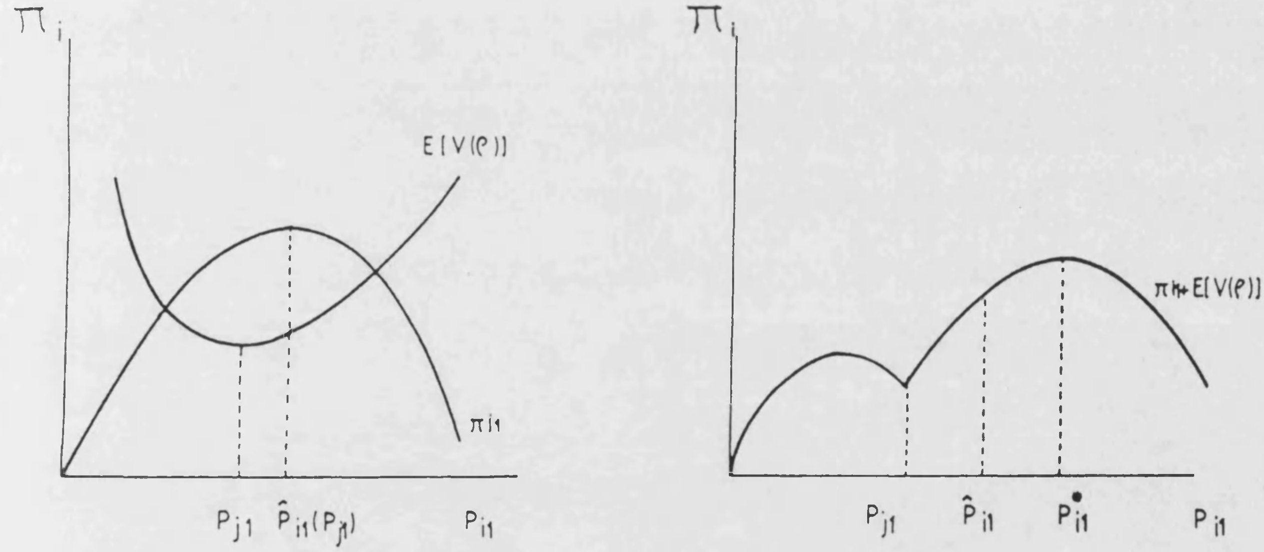

GRAFICO 2

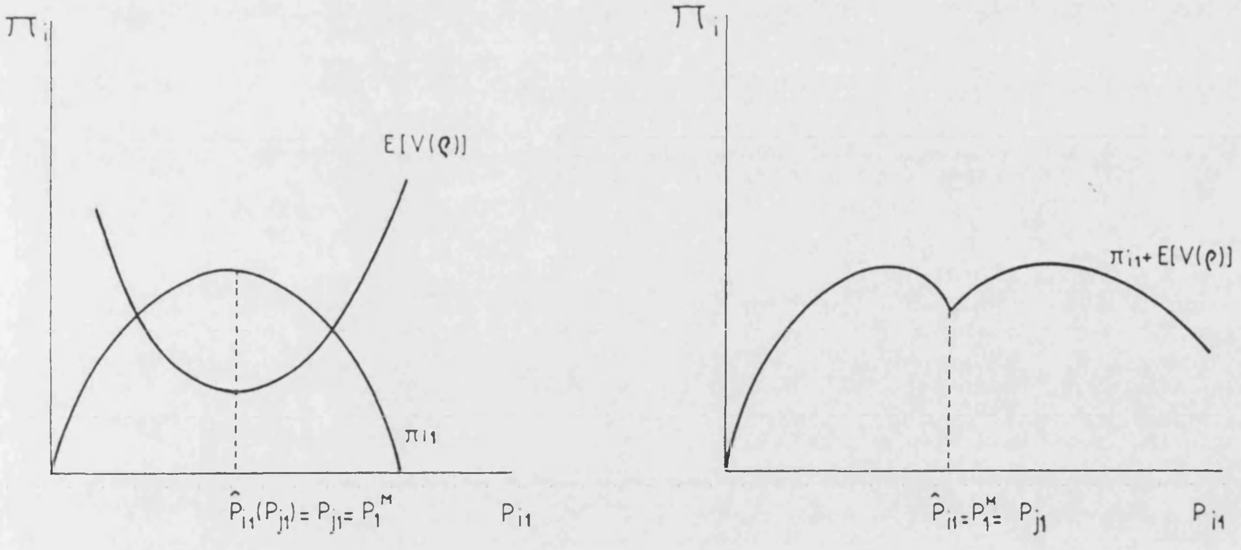

GRAFICO 3

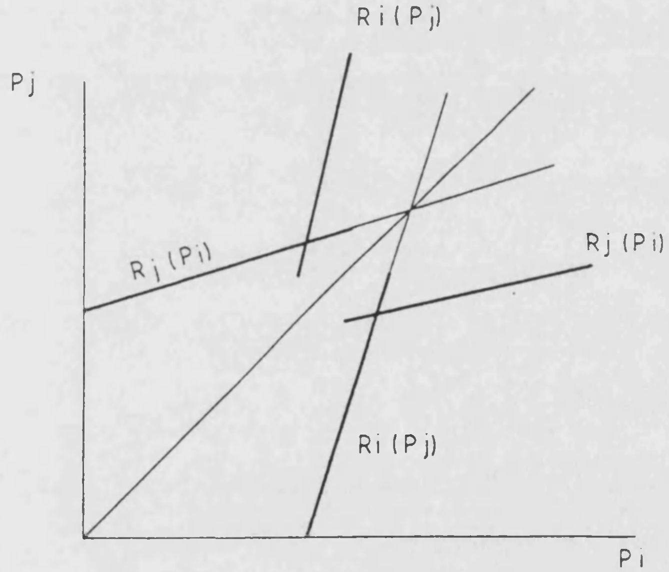

GRAFICO 4

Resolviendo, a partir de las condiciones de primer orden, cualquier equilibrio del primer periodo, será un par (P^*_{11},P^*_{21}), tal que:

$$P_{11}=\frac{a+\hat{c}P^*_{21}}{2\hat{b}_0}+\frac{1}{2\hat{b}_0}\frac{\partial}{\partial P_{11}}E[V(\rho)] \tag{77}$$

$$P_{21}=\frac{a+\hat{c}P^*_{11}}{2\hat{b}_0}+\frac{1}{2\hat{b}_0}\frac{\partial}{\partial P_{21}}E[V(\rho)] \tag{78}$$

o

$$P^*_{11}=P^m_1+\frac{\hat{c}}{(4\hat{b}^2_0-\hat{c}^2_0)}\frac{\partial}{\partial P_{21}}E[V(\rho)]+\frac{2\hat{b}_0}{(4\hat{b}^2_0-\hat{c}^2_0)}\frac{\partial}{\partial P_{11}}E[V(\rho)], \tag{79}$$

$$P^*_{21}=P^m_1+\frac{\hat{c}}{(4\hat{b}^2_0-\hat{c}^2_0)}\frac{\partial}{\partial P_{11}}E[V(\rho)]+\frac{2\hat{b}_0}{(4\hat{b}^2_0-\hat{c}^2_0)}\frac{\partial}{\partial P_{21}}E[V(\rho)]. \tag{80}$$

Por el lema 2 y la proposicion 1, y con $\frac{\partial\rho}{\partial Q_{i1}}=-\frac{\partial\rho}{\partial Q_{j1}}$, tenemos que $\frac{\partial}{\partial P_{j1}}E[V(\rho)]=-\frac{\partial}{\partial P_{i1}}E[V(\rho)]$, así que (79) y (80) son,

$$P^*_{i1}=P^m_1+\frac{1}{(2\hat{b}_0+\hat{c}_0)}\frac{\partial}{\partial P_{i1}}E[V(\rho)]\neq P^m_1$$

$$P^*_{j1}=P^m_1+\frac{1}{(2\hat{b}_0+\hat{c}_0)}\frac{\partial}{\partial P_{j1}}E[V(\rho)]=P^m_1-\frac{1}{(2\hat{b}_0+\hat{c}_0)}\frac{\partial}{\partial P_{i1}}E[V(\rho)]\neq P^m_1$$

■

II.3 Extensiones:

Hasta aquí, se ha hecho el supuesto de que $(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})$. Vamos a demostrar, ahora, que este supuesto no resta generalidad al modelo.

Supongamos que $(\bar{b}-\underline{b})\neq(\bar{c}-\underline{c})$, es decir, $(\bar{b}-\underline{b})\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right.(\bar{c}-\underline{c})$. Además, supongamos que las restricciones en los parámetros (b,c) son tales que V(ρ) es todavía convexa. En otras palabras, la información todavía ea valiosa. A partir de aquí pueden reformularse todos los resultados anteriores.

Por el lema 2,

$$\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} \begin{cases} < \\ = 0 \\ > \end{cases} \text{dependiendo de que } P_{i1} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{(\bar{c}-\underline{c})}{(\bar{b}-\underline{b})} P_{j1} = kP_{j1}.$$

(donde k $\lessgtr$1, dependiendo de $(\bar{b}-\underline{b}) \gtrless (\bar{c}-\underline{c})$).

En este caso, la proposición 1 y su demostración puede readaptarse para mostrar que como $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} = -\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}$, entonces cuando $P_{i1} \gtrless kP_{j1}$ y por tanto $\frac{\partial}{\partial Q_{i1}} E[V(\rho)] \gtrless 0$, entonces $\frac{\partial}{\partial Q_{j1}} E[V(\rho)] \lessgtr 0$. Y, por tanto E[V(ρ)] alcanza un mínimo para la empresa i (empresa j) en $P_{i1}=kP_{j1}$ $(P_{j1}=kP_{i1})$.

También, la demostración de la proposición 2, puede modificarse. Por ejemplo, si $(\bar{b}-\underline{b})>(\bar{c}-\underline{c})$, es decir, k<1,

si $P_{j1} > \frac{P_1^M}{k} > P_1^M$, entonces $\hat{P}_{i1}(P_{j1}) < kP_{j1} \rightarrow P^*_{i1} < \hat{P}_{i1}(P_{j1})$.

De forma similar si $(\bar{b}-\underline{b})<(\bar{c}-\underline{c})$, (k>1),

si $P_{j1} < \frac{P_1^M}{k} < P_1^M$, entonces en ambos casos $\hat{P}_{i1}(P_{j1}) > kP_{j1} \rightarrow P^*_{i1} > \hat{P}_{i1}(P_{j1})$.

Cuando $P_{j1} = \frac{P_1^M}{k}$, o $kP_{j1}=P_1^M$, entonces en ambos casos, es decir $(\bar{b}-\underline{b}) \gtrless (\bar{c}-\underline{c})$, la función $\{\pi_{i1}(P_{11},P_{21}) + E[V(\rho)]\}$ alcanza un mínimo en $\hat{P}_{i1}(P_{j1}) = P_1^M = kP_{j1}$, i=1,2.

Por lo tanto, las correspondencias de reacción de las empresas tienen una discontinuidad en $\hat{P}_{i1}=P^M_i$, $P_{j1}= \frac{P^M_1}{K}$, i=1,2, j≠i, de forma, que no existirá un equilibrio simétrico en estrategias puras.

Nótese que el equilibrio anterior en estrategias puras implica un problema de coordinación. De hecho la elección del equilibrio podría verse como la solución a un juego (en forma normal) simétrico de coordinación. Además, como cualquier juego simétrico tiene un equilibrio de Nash simétrico, nuestro juego de duopolio tiene, a parte del equilibrio asimétrico, una solución simétrica en estrategias mixtas. Este resultado se anuncia a continuación, sin demostración.

Lema 4. El juego de duopolio tiene un único equilibrio Nash simétrico en estrategias mixtas, con precios P^*_{11} y P^*_{21} distribuidos en un mismo intervalo compacto. Intervalo que está centrado en el precio de equilibrio miópico P^m_1.

Como parece que en la mayoria de casos la solución natural a un juego simétrico es un equibrio simétrico, la justificación a esta solución asimétrica, bajo la que se obtienen los beneficios mayores para las empresas, tiene que basarse en dos clases de argumentos. El primero hace referencia a lo que se denomina "comunicación prejuego" o historias de "cheap talk". Por ejemplo, las empresas estarían interesadas en hablar, antes de comenzar el juego para coordinarse en el equilibrio que elegirán. Podrian incluso, enviar señales con este fin. El segundo argumento está basado en "puntos focales" y/o "reputación prejuego" acerca de cómo eligen los jugadores. Es decir, las empresas pueden tener algún tipo de reputación prejuego sobre su agresividad para fijar los precios, o una de ellas puede estar localizada en un área de "lujo" fijando, de esta forma, precios más altos que la otra, etc.

Suponiendo pues, que las empresas pueden coordinarse en un equilibrio asimétrico, pasamos a analizar las propiedades de esta solución con respecto a la información.

III. Interpretación de la dispersión de precios en el equilibrio.

La proposición 2 nos índica que las empresas eligen en el primer periodo del juego dinámico un par de precios P^*_{11} y P^*_{21}, distinto al par de precios miópico y donde los precios son distintos entre sí, es decir las empresas fijan precios distintos en el equibrio. La razón que explica este comportamiento es la búsqueda de información sobre la elección que la Naturaleza hace sobre (b,c). En concreto, sabemos que en el segundo periodo las creencias posteriores sobre (b,c) están representadas por $\rho(Q_{11},Q_{21})$. Sin embargo, en el primer periodo antes de que P^*_{11} y P^*_{21} se elijan, ρ es una variable aleatoria que se genera a partir de las señales de los parámetros (b,c), Q_{11} y Q_{21}.

Defínase para cualquier par de precios P_1 y P_2, del primer periodo:

$$\bar{S}^1_{P_1P_2} = S^1_{P_1P_2}(\bar{b},\bar{c}) = a - \bar{b}P_1 + \bar{c}P_2 + \tilde{\varepsilon}_1 \tag{81}$$

como la señal generada por P_1 y P_2, en el mercado 1, cuando $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$,y similarmente, sea:

$$\bar{S}^2_{P_1P_2} = S^2_{P_1P_2}(\bar{b},\bar{c}) = a - \bar{b}P_2 + \bar{c}P_1 + \tilde{\varepsilon}_2 \tag{82}$$

la señal generada por P_1 y P_2, en el mercado 2, cuando $(b,c)=(\bar{b},\bar{c})$. De igual forma definamos para cada uno de los mercados, cuando $(b,c)=(\underline{b},\underline{c})$:

$$\underline{S}^1_{P_1P_2} = S^1_{P_1P_2}(b,c) = a - \underline{b}P_1 + \underline{c}P_2 + \tilde{\varepsilon}_1 \tag{83}$$

$$\underline{S}^2_{P_1P_2} = \underline{S}^2_{P_1P_2}(b,c) = a - \underline{b}P_1 + \underline{c}P_2 + \tilde{\varepsilon}_1 \tag{84}$$

Cuando (b,c) no está especificado tenemos: $S^1_{P_1P_2}(b,c)$, $S^2_{P_1P_2}(b,c)$.

Sea $\bar{S}_{P_1P_2} = S_{P_1P_2}(\bar{b},\bar{c}) = (\bar{S}^1_{P_1P_2},\bar{S}^2_{P_1P_2})$, $\underline{S}_{P_1P_2} = S_{P_1P_2}(\underline{b},\underline{c}) = (\underline{S}^1_{P_1P_2},\underline{S}^2_{P_1P_2})$ y $S_{P_1P_2}(b,c)$ el vector de señales generado a partir de P_1 y P_2.

La señal de mercado $S_{P_1P_2}(b,c) = \{(a- bP_1+ cP_2+\tilde{\varepsilon}_1), (a- bP_2+ cP_1+\tilde{\varepsilon}_2)\}$, $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$ se distribuye de acuerdo con la distribución conjunta de las variables aleatorias $(a- bP_1+ cP_2+\tilde{\varepsilon}_1)$ y $(a- bP_2+cP_1+\tilde{\varepsilon}_2)$, y da lugar a una probabilidad posterior sobre (b,c), $\rho(S_{P_1P_2}/P_1P_2) = \text{Prob }\{(b,c)=(\bar{b},\bar{c})/S_{P_1P_2}\}$. Defínase:

$$\rho(S_{P_1P_2}/P_1P_1) = [\rho_0^2 f(\bar{S}^1_{P_1P_2} - a + \bar{b}P_1 - \bar{c}P_2,\ \bar{S}^2_{P_1P_2} - a - \bar{b}P_2 + \bar{c}P_1) +$$

$$(1-\rho_0)\rho_0 f(\bar{S}^1_{P_1P_2} - a + \bar{b}P_1 - \bar{c}P_2,\ \underline{S}^2_{P_1P_2} - a - \underline{b}P_2 + \underline{c}P_1)]\ \frac{1}{D} \tag{85}$$

donde:

$$D = \rho_0^2 f(\bar{S}^1_{P_1P_2}/P_1,P_2,\bar{S}^2_{P_1P_2}/P_1,P_2) + \rho_0(1-\rho_0) f(\bar{S}^1_{P_1P_2}/P_1,P_2,\underline{S}^2_{P_1P_2}/P_1,P_2) +$$

$$\rho_0(1-\rho_0) f(\underline{S}^1_{P_1P_2}/P_1,P_2,\bar{S}^2_{P_1P_2}/P_1,P_2) + (1-\rho_0)^2 f(\underline{S}^1_{P_1P_2}/P_1,P_2,\underline{S}_{P_1P_2}/P_1,P_2) \qquad (86)$$

Por consistencia, se cumple que:

$$f(\bar{S}^1_{P_1P_2}/P_1,P_2,\underline{S}^2_{P_1P_2}/P_1,P_2) = f(\underline{S}^1_{P_1P_2}/P_1,P_2,\bar{S}^2_{P_1P_2}/P_1,P_2) \qquad (87)$$

y nótese que $\rho(Q_{11},Q_{21}/P_{11},P_{21})=\rho(S_{P_1P_2}/P_1,P_2)$ donde ρ viene dada por (15).

Consideremos, a continuación, dos pares de precios para el primer periodo, el par $P_1=P_2=Y$, y el par $P_1=X$, $P_2=Y$, donde $x\neq y$. La señal de mercado asociada a cada vector es, en el primer caso:

$$S_y(b,c)=\{S_y^1(b,c),S_y^2(b,c)\} \qquad (88)$$

y en el segundo:

$$S_{x,y}(b,c)=\{S^1_{x,y}(b,c),S^2_{x,y}(b,c)\}, \qquad (89)$$

con $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$.

Estas señales de mercado generan probabilidades posteriores sobre (b,c), $\rho(S_y/y)$ y $\rho(S_{x,y}/x,y)$, que se obtienen de acuerdo con la expresión (85).

Entonces, la condición que asegura que los agentes decisores prefieren la señal de mercado $S_{x,y}(b,c)$ a la señal $S_y(b,c)$ es la siguiente:

Definición 2.

$S_{x,y}(b,c)$ es más informativa que $S_y(b,c)$, si:

$$E_{S_{x,y}}[G(\rho(S_{x,y}/x,y))] > E_{S_y}[G(\rho(S_y/y))] \qquad (90)$$

para una función estrictamente convexa $G(\rho)$, o lo que es lo mismo, para cualquier $G(\rho)$ estrictamente convexa:

$$\int G(\rho(s/x,y))[\rho_0 g(\bar{s}_{x,y},x,y) + (1-\rho_0)g(\underline{s}_{-x,y},x,y)]ds >$$
$$\int G(\rho(s/x,y))[\rho_0 g(\bar{s}_y,y) + (1-\rho_0)g(\underline{s}_{-y},y)]ds \tag{91}$$

donde $g(s_{x,y}(b,c),x,y)$ es la función de densidad conjunta de cada $S_{x,y}(b,c)$ evaluada en s, esto es, $\overline{S}_{x,y} = (\overline{S}^1_{x,y},\overline{S}^2_{x,y})$ tiene como función de densidad conjunta:

$$g(s_{x,y}(b,c),x,y) = [\rho_0 f(\bar{s}^1_{x,y}-a+\bar{b}x-\bar{c}y,\ \bar{s}^2_{x,y}-a+\bar{b}y-\bar{c}x) +$$
$$(1-\rho_0)f(\bar{s}^1_{x,y}-a+\bar{b}x-\bar{c}y,\ \underline{s}^2_{-x,y}-a+\underline{b}y-\underline{c}x)] \tag{92}$$

(Recuerdese que $f(\bar{s}^1_{x,y}/x,y,\ \underline{s}^2_{-x,y}/x,y) = f(\underline{s}^1_{-x,y}/x,y,\ \bar{s}^2_{x,y}/x,y))$. $g(s_y(b,c),y)$ es similar a la función de densidad conjunta $S_y(b,c)$ evaluada en s)

En otras palabras, la señal $S_{x,y}(b,c)$ es mas informativa que la señal $S_y(b,c)$ si los beneficios esperados condicionados a la observación $S_{x,y}(b,c)$ son mayores que los que se obtienen al observar $S_y(b,c)$.En este sentido, podemos señalar que $S_{x,y}(b,c)$ es más valiosa que $S_y(b,c)$.

De esta forma es posible probar que:

Proposición 3. Sea P^*_{11} y P^*_{21} los precios de equilibrio del primer periodo, con $P^*_{11} \neq P^*_{21}$ y sea $P^M_{11} = P^M_{21} = P^M_1$ los precios simétricos miópicos del primer periodo. Entonces,la señal $S_{P^*_1,P^*_2}$ es más informativa que la señal $S_{P^M_1}$.

Demostración: es suficiente probar que:

$$E_{S_{P^*_{11}P^*_{21}}}[G(\rho(S_{P^*_{11}P^*_{21}}/P^*_{11},P^*_{21}))] > E_{S_{P^M_1}}[G(\rho(S_{P^M_1}/P^M_1))] \tag{93}$$

para $G(\rho)$ estrictamente convexa.

Para mostrar (93), es suficiente probar que la dispersión de precios, es decir valores de $x \neq y$ hacen la señal de mercado, $S_{x,y}$, más informativa. Lo que equivale a probar que $S_{x,y}$ tiene un mínimo en $x=y$.

Por la definición de $S_{x,y}$ y ρ, tenemos que la función $E_{S_{x,y}}[G(\rho(S_{x,y}/x,y))]$ puede expresarse como:

$$\int G(\rho(s/x,y))[\rho_0 g(\bar{s}_{x,y},x,y) + (1-\rho_0)g(\underline{s}_{x,y},x,y)]ds =$$

$$\iint G(\rho(s^1,s^2/x,y))h(s^1,s^2)ds^1ds^2=$$

$$\iint G(\rho(Q_{11},Q_{21}/x,y))h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21} \tag{94}$$

donde $h(s^1,s^2) = h(Q_{11},Q_{21}) = \rho_0^2\, f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)\, f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) +$
$(1-\rho_0)\rho_0\, f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$

y

$$\bar{\varepsilon}_1 = s^1 - a + \bar{b}x - \bar{c}y = Q_{11} - a + \bar{b}x + \bar{c}y$$
$$\underline{\varepsilon}_2 = s^2 - a + \underline{b}y - \underline{c}x = Q_{21} - a + \underline{b}y + \underline{c}x$$

$\underline{\varepsilon}_1$ y $\bar{\varepsilon}_2$ se definen de forma similar.

Por la expresión (68) podemos reemplazar la función $G(\rho)$ por $V(\rho)$. Por la estricta convexidad de $G(\rho)$, y por el lema 2, $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} \begin{cases} < \\ = 0 \\ > \end{cases}$ dependiendo de que $x \begin{cases} > \\ = 0 \\ < \end{cases}$, entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint G(\rho(Q_{11},Q_{21}/x,y))h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21} =$$

$$\Delta \iint G''(\rho)\left[- \frac{\partial \rho}{\partial Q_{11}}\right][\rho(1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho)\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} \begin{cases} < \\ = 0 \\ > \end{cases}$$

dependiendo de que $x \begin{cases} > \\ = y. \\ < \end{cases}$ (95)

Por (94) y (95), $E_{S_{x,y}}[G(\rho(S_{x,y}/x,y))]$,tiene un mínimo en $x=y$, y por lo tanto aumenta con la dispersión de precios, o lo que es lo mimo cuando $x \neq y$.

Por la Proposición 2, tenemos que $P^*_{11} > P^M_1$ y $P^*_{21} < P^M_1$, o $P^*_{11} < P^M_1$ y $P^*_{21} > P^M_1$, de modo que $P^*_{12} \neq P^*_{21}$. De esta forma, $E_{S_{P^*_{11}P^*_{21}}}[G(\rho(S_{P^*_{11}P^*_{21}}/P^*_{11},P^*_{21}))]$ crece con la dispersión de precios y por lo tanto (95) se cumple. ■

Por tanto, podemos concluir este capítulo, indicando que la razón que lleva a las empresas a dispersar sus precios, se basa en el deseo de hacer el vector de señales (que es común) más informativo. Con ello, las empresas consiguen mayores beneficios en el segundo periodo.

CONCLUSIONES.

CONCLUSIONES.

En esta Tesis se estudia un aspecto de la adquisición de información conocido como experimentación. En concreto, se analiza cómo los agentes económicos pueden cambiar sus decisiones óptimas a corto plazo (o miópicas), cuando tienen en cuenta el contenido informativo que de ellas se desprende. Es decir, los agentes económicos experimentarán para influir en el flujo de información sobre el que basarán sus decisiones futuras.

Este fenómeno de la experimentación, se estudia en un marco de duopolio en el que los oferentes se enfrentan a incertidumbre relativa a un (unos) parámetro (parámetros) de la curva de demanda estocástica de mercado. El enfoque seguido ha sido el de restringir el análisis a dos periodos y centrar la atención en cómo las oportunidades de experimentar afectan a los niveles de producción (de precios) del primer periodo.

En la primera parte de esta Tesis, Capítulos 1, 2 y 3, se estudia la relación entre la experimentación y la competencia en el mercado. La contribución más importante es la que resulta de analizar cómo el tipo de competencia en el mercado afecta a los niveles de experimentación de las empresas. En concreto, en el Capítulo 1, se estudia el caso de un duopolio de Cournot, con producto homogéneo que se enfrenta a una curva de demanda lineal con pendiente desconocida. Cuando esto ocurre, los duopolistas incrementan los niveles de producción con respecto al miópico. Se demuestra, en primer lugar, que cuando las empresas aumentan la producción, aumentan el contenido informativo de la señal de mercado (precio). Esto redunda en creencias posteriores sobre la pendiente de la demanda, más precisas, permitiendo a las empresas elegir un nivel de producción más apropiado en el segundo periodo y por tanto elevar los beneficios correspondientes a este periodo.

A continuación, también se analiza el papel que juega la competencia en el mercado sobre la experimentación. Se demuestra que el nivel de experimentación que se deriva de una situación de duopolio de Cournot, con productos homogéneos, siempre será menor que la que se deriva de una situación de monopolio. La justificación de este hecho es la siguiente: cuando existe más de una empresa en el mercado, aparecen los incentivos estratégicos de la experimentación. En competencia de Cournot las empresas son sustitutas en la información y además cada empresa está mejor cuanto menos informada esta la rival. Como la señal (el precio) es públicamente observable, esto dará lugar a niveles de experimentación menores que los derivados del monopolio.

En el segundo capítulo, se repite el análisis llevado a cabo en el primero, pero para el caso en que las empresas compiten en precios (Competencia de Bertrand). Se estudia el caso de un duopolio simétrico, con productos sustitutos, donde las empresas se enfrentan a curvas de demandas lineales y estocásticas, con pendientes (iguales) desconocidas. Para facilitar la comparación con el capítulo 1, se supone que el duopolio es totalmente simétrico, existiendo en este caso una única señal de mercado, las ventas medias. El principal resultado que se obtiene en este capítulo es que las empresas fijarán precios mayores que a corto plazo con el fin de procurarse información. Pero dado que las empresas compiten en precios, son complementarias en la información y además cada empresa está mejor cuanto más informada está la empresa rival, justificándose de esta forma el hecho de que los duopolistas fijen precios más altos que el monopolio.

Los Capítulos 1 y 2 se caracterizan por el hecho de que las variables aleatorias (tanto la pendiente como el término de perturbación de la demanda) tienen distribuciones Normales. En el tercer y cuarto capítulo se abandona el supuesto de Normalidad, pero se amplia el campo al caso de las perturbaciones aleatorias de la demanda que satisfacen ratios de verosimilitud monótonos.

Finalmente, en el Capítulo 3, se analiza con más profundidad, la relación existente entre competencia en el mercado y experimentación. Considerando, para ello, mercados con productos diferenciados. Se introduce este tipo de modelo, con la finalidad de separar convenientemente el deseo propio, por parte de las empresas, de procurarse información y el deseo de procurar una mayor o menor información (en función del tipo de competencia) para la empresa rival. El análisis central se realiza para el caso de un duopolio de Cournot, siendo posible extender el análisis al caso de Bertrand, dada la linealidad de la estructura de la demanda.

En el modelo que se analiza en el Capítulo 3, las empresas conocen la producción propia y la de la rival, por lo que su interés reside en obtener información sobre su propia demanda. Sin embargo, la interacción estratégica de los mercados y la correlación entre las creencias posteriores, dará lugar a que las empresas tengan en cuenta el efecto de su propia experimentación sobre la información de la rival.

El resultado principal que se obtiene en este capítulo, es el siguiente. Bajo competencia de Cournot con productos sustitutos, las empresas son sustitutas estratégicas en la información, además cada empresa está mejor cuanto menos informada está la rival. Los duopolistas de Cournot estarán interesados en procurarse información para si mismos, pero no para el rival. Por tanto, los duopolistas experimentan menos que si estuvieran solos en el mercado. En particular, el grado de experimentación, depende tanto del grado de correlación entre las creencias posteriores como del grado de sustitución del producto. De forma que cuanto mayor sea la correlación existente y mayor el grado de sustitución menor será la experimentación. Además para un nivel de correlación dado, la experimentación decrece con el grado de sustitución del producto. Los menores niveles de experimentación se darán para el caso de productos homogéneos, cuando las empresas compitan en cantidades, competencia de Cournot.

Cuando este análisis se amplia al caso de Bertrand, se obtienen las siguientes conclusiones. Con producto sustituto, las empresas son complementarias en la información y además están mejor cuanto más informada está la empresa rival. Esta relación estratégica, dará lugar a los mayores niveles de experimentación. En este caso, se suma al efecto propio de procurarse información, el deseo de procurar mayor información a la empresa rival, en cuanto que los dos efectos redundan en mayores beneficios para el segundo periodo.

En el cuarto y último capítulo, dentro de la segunda parte de esta tesis Doctoral, se considera el caso en el que hay más de un parámetro desconocido en la curva de demanda. Este análisis se aplica al caso de un duopolio que compite en precios, con productos sustitutos. Los parámetros desconocidos son la pendiente y el grado de sustitución del producto. Las empresas observan las ventas de los dos mercados, tratando de hacer el vector de señales de mercado más informativas. Además, puesto que las empresas compiten en precios y los productos son sustitutos, las empresas son complementarias en la información, lo que dará lugar a una coordinación de sus acciones.

En este capítulo se demuestra que la búsqueda de señales de mercado más informativas, llevará a las empresas a fijar precios distintos (en el equilibrio en estrategias puras) en el primer periodo. Con la dispersión de precios, las empresas pueden observar dos puntos en vez de uno de sus curvas de demanda (Efecto Muestreo).

Los resultados que se obtienen en los tres primeros capítulos siempre indican que empresas simétricas obtienen equilibrios simétricos en el primer periodo. Sin embargo, en este último capítulo, el comportamiento experimentador da lugar, no solo a soluciones distintas de las miópicas, sino también a equilibrios asimétricos, en estrategias puras.

Esta asimetria, se puede justificar a través de dos posibles argumentaciones. La primera de ellas hace referencia a la comunicación prejuego o historias de "cheap talk". Las empresas pueden coordinar sus acciones en el equilibrio, antes de ralizar su elección. Incluso, es posible el envio de señales para tal fin. La segunda argumentación se basa en los "puntos focales" o "reputación prejuego" sobre la manera de elegir de los jugadores. Siendo posible que las empresas tengan la misma reputación sobre su agresividad al fijar los precios, o distinta, cuando por ejemplo una de ellas está localizada en un área de "lujo" y pueda, por tanto, fijar precios más altos.

APENDICE A.

APENDICE A.*(Apéndice al Capítulo 1)*

Demostración del Lema 2:

Partiendo de la función de densidad de la variable aleatoria $(a-P_1)$ que viene dada por la expresión (34) del capítulo 1, obtenemos:

$$\frac{\partial f(a-P_1)}{\partial P_1} = f'(a-P_1) = \frac{h\tau}{h+\tau Q_1^2}\left[a-P_1-mQ_1\right]f(a-P_1) \tag{1}$$

y también;

$$\frac{\partial f(a-P_1)}{\partial Q_{11}} = \left[\frac{-\tau Q_1}{h+\tau Q_1^2} + \frac{h\tau^2 Q_1}{(h+\tau Q_1^2)^2}(a-P_1-mQ_1^2) + \frac{h\tau}{h+\tau Q_1^2}(a-P_1-mQ_1)m\right]f(a-P_1) \tag{2}$$

Dada la expresión (1) el tercer sumando de (2) puede escribirse como $mf'(a-P_1)$. De esta forma, a partir de (45) en el texto:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \int V'(\hat{\theta})\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Q_{11}} f(a-P_1)dP_1 + \int V(\hat{\theta})\left[\frac{-\tau Q_1}{h+\tau Q_1^2}\right] f(a-P_1)dP_1 +$$

$$\int V(\hat{\theta})\frac{h\tau^2 Q_1}{[h+\tau Q_1^{\,2}]^2}(a-P_1-m\,Q_1)^2 f(a-P_1)dP_1 + \int V(\hat{\theta})\, m\, f'(a-P_1)dP_1 \tag{3}$$

Integrando por partes el último término de (3) y tomando $u = mV(\hat{\theta})$ y $dv = f'(a-P_1)dP_1$ nos queda[1]:

---

[1]Nótese que al integrar por partes, se tiene que $V(\hat{\theta})f(a-P_1)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$$m\int V(\hat{\theta})f'(a-P_1)dP_1 = - m\int V'(\hat{\theta})\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\ f(a - P_1)dP_1 \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3) y agrupando téminos nos queda:

$$\frac{\partial\Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \int V'(\hat{\theta}) \left[\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_{11}} - m\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\right] f(a-P_1)dP_1 +$$

$$\int V(\hat{\theta}) \left[\frac{-\tau Q_1}{h + \tau Q_1^2} + \frac{h\tau^2 Q_1}{(h + \tau Q_1{}^2)^2}\ (a-P_1-m\ Q_1)^2\right] f(a-P_1)dP_1 \tag{5}$$

A partir de la expresión (15) del capítulo 1, podemos calcular:

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_{11}} = \frac{\tau(a\ -\ P_1)}{h + \tau Q_1^2} - \frac{2\tau Q_1\hat{\theta}_1}{h\ +\ \tau Q_1^2}. \tag{6}$$

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1} = \frac{-\tau Q_1}{h\ +\ \tau Q_1^2}. \tag{7}$$

De esta forma, podemos expresar el término entre corchetes del primer sumando de (5) como:

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_{11}} - m\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1} = \frac{\tau(a-P_1^{\cdot}-mQ_1)\ -\ 2\tau Q_1(\hat{\theta}-m)}{h + \tau Q_1^2}. \tag{8}$$

Introduciendo estos resultados en la expresión (5) nos queda :

$$\frac{\partial\Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}} = \int V'(\hat{\theta})\ \frac{\tau(a-P_1-mQ_1)}{h+\tau Q_1^2}\ f(a-P_1)dP_1 +$$

$$2\int V'(\hat{\theta})\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\ (\hat{\theta}-m)f(a-P_1)dP_1 + \int V(\hat{\theta})\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\ f(a-P_1)dP_1 +$$

$$\int V(\hat{\theta})\ \frac{h\tau^2 Q_1}{(h+\tau Q_1^2)^2}\ (a-P_1-mQ_1)^2 f(a-P_1)dP_1 \qquad (9)$$

Por (1), el primer sumando de (9) puede ser expresado como:

$$\frac{1}{h}\int V'(\hat{\theta})f'(a-P_1)dP_1 = -\frac{1}{h}\int V''(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\ f(a-P_1)dP_1. \qquad (10)$$

Resultado que se obtiene al integrar por partes y tomando $u = V'(\hat{\theta})$ y $dv=f'(a-P_1)dP_1$.

Además, es posible obtener $(\hat{\theta}$-m):

$$\hat{\theta} - m = \frac{\tau Q_1(a-P_1-mQ_1)}{h+\tau Q_1^2}. \qquad (11)$$

De esta forma, la expresión (11), y de nuevo (1), nos permite reescribir el último sumando de (9); esto es $\int V(\hat{\theta})\ \frac{h\tau^2 Q_1}{(h+\tau Q_1^2)^2}\ (a-P_1-mQ_1)^2 f(a-P_1)dP_1$

como:

$$\int V(\hat{\theta})(\hat{\theta}-m)f'(a-P_1)dP_1 \qquad (12)$$

Este término puede ser integrado por partes tomando $u=V(\hat{\theta})(\hat{\theta}-m)$ y $dv=f'(a-P_1)dP_1$ obteniendo:

$$-\int\left[V'(\hat{\theta})(\hat{\theta}-m)\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}+V(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\right]f(a-P_1)dP_1 \tag{13}$$

Sustituyendo (10) y (13) en (9), simplificando y agrupando términos nos queda:

$$\frac{\partial\Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}}=-\frac{1}{h}\int V''(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}f(a-P_1)dP_1+\int V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}(\hat{\theta}-m)f(a-P_1)dP_1 \tag{14}$$

Por (11) el segundo término de (14), $\int V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}(\hat{\theta}-m)f(a-P_1)dP_1$, puede quedar como:

$$\frac{Q_1}{h}\int V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}f'(a-P_1)dP_1 \tag{15}$$

y al ser integrado por partes con $u=V'(\hat{m})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}$ y $dv=f'(a-P_1)dP_1$ obtenemos:

$$-\frac{Q_1}{h}\int V''(\hat{\theta})\left[\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\right]^2 f(a-P_1)dP_1 \tag{16}$$

Por tanto, la expresión (14) queda como:

$$\frac{\partial\Gamma_{11}(Q_{11})}{\partial Q_{11}}=-\frac{1}{h}\int V''(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\left[1+Q_1\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}\right]f(a-P_1)dP_1 \tag{17}$$

Que da lugar a (46) en el texto, al sustituir $\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_1}$ por su valor. ■

APENDICE B.

APENDICE B. *(Apéndice al Cápitulo 2)*

Demostración del lema 2:

A partir de (37), en el capítulo 2, (para el caso de la empresa 1) se obtiene:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = \int \frac{\partial V(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial P_{11}} f(a-Q_1+cP_1)dQ_1 + \int V(\hat{\theta}) \frac{\partial}{\partial P_{11}} f(a-Q_1+cP_1)dQ_1 \tag{1}$$

dada la expresión (30), del texto, es posible obtener[1] :

$$f'(Q_1) = \frac{h\tau}{h + \tau P_1^2} (a - Q_1 + cP_1 - mP_1)f(Q_1) \tag{2}$$

$$\frac{\partial f(Q_1)}{\partial P_1} = \frac{-\tau P_1}{2(h + \tau P_1^2)} f(Q_1) + \frac{h\tau^2 P_1}{2(h + \tau P_1^2)^2} (a - Q_1 + cP_1 - mP_1)^2 f(Q_1) +$$

$$1/2\ (m - c)\ f'Q_1) \tag{3}$$

Introduciendo estas dos expresiones en (1) nos quedará:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = \int V'(\hat{\theta}) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial P_{11}} f(Q_1)dQ_1 + \int V(\hat{\theta}) \frac{-P_1\tau}{2(h + \tau P_1^2)} f(Q_1)dQ_1 +$$

$$\int V(\hat{\theta}) \frac{P_1 h\tau^2}{2(h + \tau P_1^2)^2} (a - Q_1 + cP_1 - mP_1)^2 f(Q_1)dQ_1 + \frac{1}{2} \int V(\hat{\theta})(m-c)f'(Q_1)dQ_1 \tag{4}$$

---

[1]De ahora en adelante, con el fin de simplificar la notación escribiremos la función $f(a-Q_1+cP_1)=f(Q_1)$.

Integrando por partes el último término de (4), con $u = V(\hat{\theta})$ y $dv = f'(Q_1)dQ_1$ nos queda:

$$\frac{1}{2}\int V(\hat{\theta})(m-c)f'(Q_1)dQ_1 = -\frac{1}{2}(m-c)\int V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}f(Q_1)dQ_1 \qquad (5)$$

De esta forma podemos agrupar términos en (4), obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = \int V'(\hat{\theta})\left[\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_{11}} - (m-c)\frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}\right]f(Q_1)dQ_1 +$$

$$\int V(\hat{\theta})\frac{-\tau P_1}{2(h+\tau P_1^2)}f(Q)\,dQ + \int V(\hat{\theta})\frac{P_1 h\tau^2}{2(h+\tau P_1^2)^2}(a-Q_1+cP_1-mP_1)^2 f(Q_1)dQ_1$$

(6)

Por la definición de $\hat{\theta}$ en (ver (17) en el texto)

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_{11}} = \frac{\tau(a - Q_1 + 2cP_1)}{2(h+\tau P_1^2)} - \frac{\tau P_1\hat{\theta}}{(h+\tau P_1^2)} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1} = \frac{-\tau P_1}{(h+\tau P_1^2)} \qquad (8)$$

A partir de estas dos expresiones tenemos que:

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial P_{11}} - (m-c)\frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1} = \frac{\tau(a-Q_1+cP_1-mP_1)}{2(h+\tau P_1^2)} - \frac{\tau P_1(\hat{\theta}-m)}{(h+\tau P_1^2)} \qquad (9)$$

Por lo tanto la expresión (6) pasa a ser:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = \int V'(\hat{\theta}) \frac{\tau(a-Q_1+cP_1-mP_1)}{2(h + \tau P_1^2)} f(Q_1)dQ_1 - \int V'(\hat{\theta}) \frac{\tau P_1(\hat{\theta}-m)}{(h + \tau P_1^2)} f(Q_1)dQ_1 +$$

$$+ \int V(\hat{\theta}) \frac{-\tau P_1}{2(h + \tau P_1^2)} f(Q_1)dQ_1 + \int V(\hat{\theta}) \frac{P_1 h\tau^2}{2(h + \tau P_1)^2}(a - Q_1 + cP_1 - mP_1)^2 f(Q_1)dQ_1 \tag{10}$$

El primer sumando de (10) puede ser integrado por partes dado que por (2) puede expresarse como $\int V'(\hat{\theta})f'(Q_1)dQ_1$, de esta forma tomando $u = V'(\hat{\theta})$ y $dv = f'(Q_1)dQ_1$ obteniendo:

$$-\frac{1}{h}\frac{1}{2}\int V''(\hat{\theta}) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Q_1} f(Q_1)dQ_1 \tag{11}$$

Es posible calcular:

$$\hat{\theta} - m = \frac{\tau P(a-Q_1+cP_1-mP_1)}{(h + \tau P_1^2)} \tag{12}$$

Introduciendo (2) y (12), el último término de (10) puede escribirse como $\frac{1}{2}\int V(\hat{\theta})(\hat{\theta}- m)f'(Q_1)dQ_1$ y de esta forma integrarse por partes con $u= V(\hat{\theta})(\hat{\theta}- m)$ y $dv = f'(Q)dQ$ obteniendo:

$$-\frac{1}{2}\int V'(\hat{\theta}) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Q_1}(\hat{\theta}- m)f(Q_1)dQ_1 - \frac{1}{2}\int V(\hat{\theta}) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Q_1} f(Q_1)dQ_1 \tag{13}$$

Sustituyendo (11) y (13) en (10) y agrupando términos:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = -\frac{1}{2h}\int V''(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1} f(Q_1)dQ_1 + \frac{1}{2}\int V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}(\hat{\theta}-m)f(Q_1)dQ_1 \tag{14}$$

Por la expresión (12) podemos escribir el segundo término de (14) como:

$$\frac{P}{2h}\int V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1} f'(Q_1)dQ_1 = \frac{-P}{2h}\int V''(\hat{\theta})\left[\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}\right]^2 f(Q_1)dQ_1 \tag{15}$$

al ser integrada por partes con $u=V'(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}$ y $dv=f'(Q_1)dQ_1$.

Por tanto, (14) puede expresarse como:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = -\frac{1}{2h}\int V''(\hat{\theta})\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}\left[1 + P_1\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}\right]f(Q_1)dQ_1 \tag{16}$$

y por último, operando con el término entre corchetes y teniendo en cuenta que $\hat{h} = h + \tau P_1^2$, (16) pasa a ser:

$$\frac{\partial E[V(\hat{\theta})]}{\partial P_{11}} = \frac{1}{2\hat{h}}\int V''(\hat{\theta})\left[-\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_1}\right]f(Q_1)dQ_1 = \frac{1}{\hat{h}}\int V''(\hat{\theta})\left[-\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Q_{11}}\right]f(Q_1)dQ_1$$

que es la expresión (39) en el capitulo 2.

APENDICE C.

APENDICE C. *(Apéndice al Capítulo 3)*

Demostración del lema 2:

Las condiciones C.1 (i=1), y C.3 (i=2) nos indican que la expresión:

$$\frac{\beta_0 f_i(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f_i(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\beta_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{1}$$

ha de ser decreciente en ε_1. Con:

$$\bar{\varepsilon}_1 = P_{11} - (a-\bar{b}_1 Q_{11} - cQ_{21})$$

$$\underline{\varepsilon}_1 = P_{11} - (a-\underline{b}_1 Q_{11} - cQ_{21}).$$

Por tanto, puesto que $\bar{b}_1 > \underline{b}_1$, $\bar{\varepsilon}_1 > \underline{\varepsilon}_1$, se ha de cumplir que:

$$\frac{\beta_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} < \frac{\beta_0 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{2}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}
&\beta_0^2[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
&\beta_0(1-\beta_0)[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\beta_0(1-\beta_0)[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
&(1-\beta_0)^2[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] < 0
\end{aligned} \tag{3}$$

De forma similar (con $\bar{b}_2 > \underline{b}_2$ y $\bar{\varepsilon}_2 > \underline{\varepsilon}_2$), a partir de C.2 (i=2) y C.4 (i=1) se tiene que:

$$\frac{\alpha_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)}{\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)} < \frac{\alpha_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\alpha_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{4}$$

La expresión (4) da lugar a :

$$\begin{aligned}
&\alpha_0^2[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\alpha_0(1-\alpha_0)[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\alpha_0(1-\alpha_0)[f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&(1-\alpha_0)^2[f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] < 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Por la definición de $\alpha(P_{11},P_{21})$, (ver (15) en el texto) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial P_{i1}} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{D^2} \Big\{ &\beta_0^2[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
&\beta_0(1-\beta_0)[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\beta_0(1-\beta_0)[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
&(1-\beta_0)^2[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big\}
\end{aligned} \tag{6}$$

donde:

$$D=\alpha_0\beta_0f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)+(1-\alpha_0)\beta_0f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\beta_0)(1-\alpha_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2), \tag{7}$$

el término entre llaves de (6) es (3), de modo que $\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}$ <0 (por C.1) y $\frac{\partial\alpha}{\partial P_{i1}}$ <0 (por C.3).

Por la definición de $\beta(P_{11},P_{21})$ (ver (16) en el texto):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial P_{21}} = \frac{\beta_0(1-\beta_0)}{D^2} \Big\{ &\alpha_0^2[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\alpha_0(1-\alpha_0)[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\alpha_0(1-\alpha_0)[f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&(1-\alpha_0)^2[f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \Big\}
\end{aligned} \tag{8}$$

El término entre llaves de (8) coincide con la expresión (5), lo que permite determinar el signo de $\frac{\partial\beta}{\partial P_{21}} < 0$ (por C.2) y $\frac{\partial\beta}{\partial P_{11}} < 0$ (por C.4). ■

Demostración del lema 3:

Obtención de las ecuaciones (42) y (46) del Capítulo 3.

A partir de la definición de α ((15 en el texto)), tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{11}} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{D^2} \Big\{ & \beta_0^2[\bar{b}_1 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \underline{b}_1 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
& \beta_0(1-\beta_0)[\bar{b}_1 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b}_1 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
& \beta_0(1-\beta_0)[\bar{b}_1 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \underline{b}_1 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
& (1-\beta_0)^2[\bar{b}_1 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b}_1 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
& c\beta_0^2[f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
& c\beta_0(1-\beta_0)[f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
& c\beta_0(1-\beta_0)[f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
& c(1-\beta_0)^2[f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \Big\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Puesto que los términos del tipo:

$$[\bar{b}_1 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \underline{b}_1 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$$

pueden expresarse como:

$$\bar{b}_1[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{b}_1-\underline{b}_1)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$$

es posible obtener $\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{11}}$ como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{11}} = \bar{b}_1 \frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}} + \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)}{D^2} \Big[& [\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \\
& [(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big] + c\frac{\partial\alpha}{\partial P_{21}}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Aplicando la definición de α, la expresión (10) pasa a ser:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{11}} = \bar{b}_1 \frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}} + \frac{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1)}{D} \left[\alpha[(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right] + c\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{21}}\,, \tag{11}$$

que es la expresión (42) en el texto.

Alternativamente, cada término del tipo:

$$[\bar{b}_1 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) \quad - \quad \underline{b}_1 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$$

puede expresarse como:

$$\underline{b}_1[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f\,(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{b}_1-\underline{b}_1)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$$

Introduciendo esta transformación en (9), y con la definición de $(1-\alpha)$ se obtiene (46) en el texto.

Obtención de (43) y (47) en el texto.

A partir de la definición de α, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{21}} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{D^2} \Big\{ & \beta_0^2[\bar{b}_2 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \bar{b}_2 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\ & \beta_0(1-\beta_0)[\bar{b}_2 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b}_2 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\ & \beta_0(1-\beta_0)[\underline{b}_2 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \bar{b}_2 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\ & (1-\beta_0)^2[\underline{b}_2 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b}_2 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\ & c\beta_0^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) \quad - \quad f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] \quad + \\ & c\beta_0(1-\beta_0)[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\ & c\beta_0(1-\beta_0)[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\ & c(1-\beta_0)^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \Big\} \end{aligned} \tag{12}$$

agrupando los términos del tipo:

$$[\bar{b}_2 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b}_2 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$$

como:

$$\bar{b}_2[f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{b}_2-\underline{b}_2) f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$$

nos queda:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{21}} = \bar{b}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} + \frac{(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)}{D^2}\Big[(1-\alpha_0)(1-\beta_0) f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)[\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\alpha_0(1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]$$
$$- \alpha_0(1-\beta_0) f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)[(1-\alpha_0)\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big] + c \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} \tag{13}$$

por la definición de α y $(1-\alpha)$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q_{21}} = \bar{b}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial P_{21}} + \frac{(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)}{D}\Big[\alpha(1-\alpha_0)(1-\beta_0) f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\dot{\varepsilon}}_2) - (1-\alpha)\alpha_0(1-\beta_0) f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] +$$
$$c \frac{\partial \alpha}{\partial P_{11}} \tag{14}$$

La expresión (14) es (43) en el texto.

Si a partir de (12) se reagrupan los términos de la forma:

$$[\bar{b}_2 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b}_2 f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$$

como:

$$\bar{b}_2[f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{b}_2-\underline{b}_2) f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$$

y por la definición de α y $(1-\alpha)$ se obtiene (47) en el texto.

La obtención de (45) y (49) es similar a (42) y (46), a partir de la definición de β. De igual forma, el procedimiento seguido para la obtención de (44) y (48) coincide con el seguido para obtener (43) y (47), también partiendo de la definición de β. ■

Obtención de la Ecuación (59):

Partiendo de la ecuación (58) del texto:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))] = \iint W_1'(\alpha)\, \frac{\partial \alpha}{\partial Q_{11}}\, h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} +$$

$$\iint W_1(\alpha)\, \frac{\partial}{\partial Q_{11}}\, h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} \qquad (15)$$

donde $h(P_{11},P_{21}) = \alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) +$

$$(1-\alpha_0)\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2),$$

y

$$\bar{\varepsilon}_i = P_{i1} - (a - \bar{b}_i Q_{i1} - cQ_{j1})$$

$$\underline{\varepsilon}_i = P_{i1} - (a - \underline{b}_1 Q_{i1} - cQ_{j1})$$

obsérvese que:

$$h_i(P_{11},P_{21}) = \frac{\partial h(P_{11}\ P_{21})}{\partial P_{i1}} = \alpha_0\beta_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) +$$

$$(1-\alpha_0)\beta_0 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \qquad (16)$$

$$\frac{\partial h(P_{11},P_{21})}{\partial Q_{11}} = \alpha_0\bar{b}_1[\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] +$$

$$(1-\alpha_0)\underline{b}_1[\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + c\, \frac{\partial h(P_{11},P_{21})}{\partial P_{21}} \qquad (17)$$

De esta forma, el segundo sumando de (15) puede escribirse como:

$$\iint W_1(\alpha)\, \frac{\partial}{\partial Q_{11}}\, h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} =$$

$$\bar{b}_1 \iint W_1(\alpha)\alpha_0[\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21} +$$

$$\underline{b}_1 \iint W_1(\alpha)(1-\alpha_0)[\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21} +$$

$$c \iint W_1(\alpha)\, \frac{\partial h(P_{11},P_{21})}{\partial P_{21}}\, dP_{11}dP_{21} \qquad (18)$$

Cada uno de los términos anteriores puede ser integrado por partes haciendo los oportunos cambios:

$$\iint W_1(\alpha)\,\frac{\partial}{\partial Q_{11}}\,h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21}=$$
$$-\bar{b}_1\iint W_1'(\alpha)\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}\,\alpha_0\Big[\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21}$$
$$-\underline{b}_1\iint W_1'(\alpha)\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}\,(1-\alpha_0)\Big[\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21}$$
$$-c\iint W_1'(\alpha)\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{21}}h(P_{11},P_{21})dP_{11}dP_{21} \tag{19}$$

Con (19), la expresión (15) puede expresarse, después de agrupar términos como:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}}\,E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))]=$$
$$\iint W_1'(\alpha)\Big[\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{11}}-\bar{b}_1\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}-c\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{21}}\Big]\alpha_0[\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21}$$
$$\iint W_1'(\alpha)\Big[\frac{\partial\alpha}{\partial Q_{11}}-\underline{b}_1\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}-c\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{21}}\Big](1-\alpha_0)[\beta_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21} \tag{20}$$

la expresión anterior es (59) en el texto. ■

Obtención de la Ecuación (60):

Por el lema 3, los términos entre corchetes pueden sustituirse por su valor, y por la definición de α y $(1-\alpha)$ nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}}\,E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))]=$$

$$\iint W_1'(\alpha)(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\alpha^2\Big[(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21}+$$

$$\iint W_1'(\alpha)(\bar{b}_1-\underline{b}_1)(1-\alpha)^2\Big[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21} \tag{21}$$

Agrupando en (21):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))]= \\
&\qquad (\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1'(\alpha)\Big[\alpha^2[(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&\qquad\qquad (1-\alpha)^2[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big]dP_{11}dP_{21}
\end{aligned} \tag{22}$$

A partir de $(1-\alpha)^2 = (1-\alpha) - \alpha(1-\alpha)$, es posible escribir (22) como:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))]= \\
&\qquad (\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1'(\alpha)\Big\{\alpha\Big[\alpha(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha(1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \\
&\qquad\qquad (1-\alpha)\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - (1-\alpha)\alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] + \\
&\qquad\qquad (1-\alpha)\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha)\alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big\}dP_{11}dP_{21}
\end{aligned} \tag{23}$$

recordando que:

$$\alpha = \frac{\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{D},$$

donde D es como en (7), se tiene que:

$$\alpha D = \alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \tag{24}$$

y derivando respecto a P_{11}:

$$D\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}} + \alpha\Big[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) +$$

$$(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] = \alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \qquad (25)$$

o

$$D\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}} = (1-\alpha)\Big[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] -$$

$$\alpha\Big[(1-\alpha_0)\beta_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\alpha_0)(1-\beta_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] \qquad (26)$$

Introduciendo el resultado en (23):

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}}\,E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))] =$$

$$-(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1'(\alpha)\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}\Big[\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21} +$$

$$(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1'(\alpha)(1-\alpha)\Big[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21} \qquad (27)$$

Integrando por partes el segundo término de (27), con $u=W'(\alpha)(1-\alpha)dP_{21}$ y $dv=[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dP_{11}dP_{21}$

$$(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1'(\alpha)(1-\alpha)\Big[\alpha_0\beta_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21} =$$

$$-(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1''(\alpha)\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}\,(1-\alpha)\Big[\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] +$$

$$(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1'(\alpha)\,\frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}\Big[\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]dP_{11}dP_{21} \qquad (28)$$

Introduciendo (28) en (27) y anulando términos:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{11}} E[W_1(\alpha(P_{11},P_{21}))] =$$

$$-(\bar{b}_1-\underline{b}_1)\iint W_1''(\alpha)\ \frac{\partial\alpha}{\partial P_{11}}\ (1-\alpha)\left[\alpha_0\beta_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \alpha_0(1-\beta_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\right] \tag{29}$$

que es (60) en el texto. ■

APENDICE D.

APENDICE D. *(Apéndice al Capítulo 4)*

Demostración del lema 2:

La condición C.1 nos dice que la expresión:

$$\frac{\rho_0 f_1(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f_1(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f(\varepsilon_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{1}$$

ha de ser decreciente en ε_1.

Con:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= Q_{11} - a + \bar{b}P_{11} - \bar{c}P_{21}, \\ \underline{\varepsilon}_1 &= Q_{11} - a + \underline{b}P_{11} - \underline{c}P_{21}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dado el supuesto de que $(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})$, tenemos que $\bar{\varepsilon}_1 \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right. \underline{\varepsilon}_1$, en función de que $P_{11} \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right. P_{21}$.

Por ejemplo, si $P_{11} > P_{21}$, $\bar{\varepsilon}_1 > \underline{\varepsilon}_1$, por la condición 1 tenemos que:

$$\frac{\rho_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} < \frac{\rho_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{3}$$

desarrollando la expresión (3) obtenemos:

$$\begin{aligned} &\rho_0^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\ &(1-\rho_0)\rho_0[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\ &(1-\rho_0)\rho_0[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\ &(1-\rho_0)^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] < 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Si $P_{21}>P_{11}$, tenemos que $\underline{\varepsilon}_1>\bar{\varepsilon}_1$, y en este caso por la condición 1 :

$$\frac{\rho_0 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} > \frac{\rho_0 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} \tag{5}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}
&\rho_0^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) \quad - \quad f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] \quad + \\
&(1-\rho_0)\rho_0[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
&(1-\rho_0)\rho_0[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
&(1-\rho_0)^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] > 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Por último, si $P_{11}=P_{21}$, $\bar{\varepsilon}_1=\underline{\varepsilon}_1$, y en este caso la expresión (6) sería igual a 0.

Para que se cumpla la condición 2 se ha de dar que:

$$\frac{\rho_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\rho_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\varepsilon_2)} \tag{7}$$

ha de ser decreciente con ε_2. En general si $(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})$, en el mercado dos se cumple que $\bar{\varepsilon}_2 \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_2$ en función de que $P_{21} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} P_{11}$.

Si $P_{11}>P_{21}$, tenemos que $\underline{\varepsilon}_2>\bar{\varepsilon}_2$.

$$\frac{\rho_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} < \frac{\rho_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)} \tag{8}$$

Si $P_{11}<P_{21}$, $\bar{\varepsilon}_2>\underline{\varepsilon}_2$ y por tanto:

$$\frac{\rho_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)} > \frac{\rho_0 f_2(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_2(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)}{\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)} \tag{9}$$

Por la definición de $\rho(Q_{11},Q_{21})$ tenemos que:

$$\frac{\partial\rho}{\partial Q_{11}} = \frac{1}{D^2}\Big\{[\rho_0^2 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)][\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$$
$$+ \rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] - [\rho_0^2 f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$$
$$+ \rho_0(1-\rho_0)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)][\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big\}$$

Suprimiendo términos y sabiendo que $f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) = f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial Q_{11}} = \frac{\rho_0(1-\rho_0)}{D^2}\Big\{&\rho_0^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] +\\ &(1-\rho_0)\rho_0[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] +\\ &(1-\rho_0)\rho_0[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] +\\ &(1-\rho_0)^2[f_1(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f_1(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big\}\end{aligned} \tag{10}$$

El término de la derecha de (10) es (4), así que $\frac{\partial\rho}{\partial Q_{11}} \left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right. 0$, dependiendo de que $P_{11} \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right. P_{21}$.

De forma similar por (9) y por la definición de ρ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial Q_{21}} \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right. 0 \text{ dependiendo de que } P_{11} \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right. P_{21} \tag{11}$$

Dado que por consistencia se cumple que $f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) = f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$, o lo que es lo mismo $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$, para todos los valores de ε_1 y ε_2, está asegurado que para un valor dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la distribución marginal de ε_1 condicional a $\varepsilon=\varepsilon_2$, es la misma que la distribución marginal de ε_2 condicionada a $\varepsilon=\varepsilon_1$. Por tanto por (10) y (11) se cumple:

$$\frac{\partial \rho}{\partial Q_{11}} = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial Q_{21}}\right] \qquad \blacksquare$$

Demostración del lema 3.

A partir de la definición de ρ y recordando que $\varepsilon_i = Q_{i1}-a+bP_{i1}-cP_{j1}$, $j \neq i$, $i=1,2$, y con $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} = \frac{1}{D^2} \Big\{ & \Big[\rho_0^2\bar{b}f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \rho_0^2\bar{c}f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)\bar{b}f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \\ & \rho_0(1-\rho_0)\underline{c}f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]D - \Big[\rho_0^2\bar{b}f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \rho_0^2\bar{c}f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \\ & \rho_0(1-\rho_0)\bar{b}f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \rho_0(1-\rho_0)\underline{c}f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)\underline{b}f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \\ & \rho_0(1-\rho_0)\bar{c}f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2\underline{b}f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - (1-\rho_0)^2\underline{c}f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big] \\ & \Big[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

Cancelando terminos,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} = \frac{\rho_0(1-\rho_0)}{D^2} \Big\{ & \rho_0^2[\bar{b} f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \underline{b} f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
& \rho_0(1-\rho_0)[\bar{b} f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b} f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + \\
& \rho_0(1-\rho_0)[\bar{b} f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \underline{b} f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + \\
& (1-\rho_0)^2[\bar{b} f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{b} f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \\
& - \rho_0^2\ [\bar{c} f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \bar{c} f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] \\
& - \rho_0(1-\rho_0)[\bar{c} f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{c} f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] \\
& - \rho_0(1-\rho_0)[\underline{c} f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \bar{c} f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \\
& - (1-\rho_0)^2[\underline{c} f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{c} f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \Big\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Cada término del tipo, $[\bar{b} f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \underline{b} f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$ puede expresarse como,

$$
\bar{b}[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{b}-\underline{b}) f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) \tag{13}
$$

y los del tipo $[\bar{c} f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{c} f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$, como

$$
\bar{c}[f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{c}-\underline{c}) f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) \tag{14}
$$

Introduciendo (13) y (14) en (12), agrupando términos y teniendo en cuenta la definición de $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}$ (ver (10) en el Apendice), nos queda:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} = {} & \bar{b}\ \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \frac{(\bar{b}-\underline{b})}{D^2} \Big[[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)][\rho_0(1-\rho_0) f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \\
& (1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \Big] - \bar{c}\ \frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}} - \frac{(\bar{c}-\underline{c})}{D^2} \Big[(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\ [\rho_0(1-\rho_0) f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \\
& \rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] - \rho_0(1-\rho_0) f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)[(1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0) f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] \Big]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Por la definición de ρ y $(1-\rho)$ se obtiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} = \bar{b}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \frac{(\bar{b} - \underline{b})}{D}\left[\rho[\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\right]$$

$$-\bar{c}\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}} - \frac{(\bar{c} - \underline{c})}{D}\left[\rho(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - (1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\right] \qquad (16)$$

que es la expresión (58) en el capítulo 4.

Alternativamente, cada término del tipo

$$[\bar{b}f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)-\underline{b}f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]$$

puede expresarse como:

$$\underline{b}[f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{b}-\underline{b})f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2),$$

y de igual forma $[\bar{c}f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - \underline{c}f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] =$

$\underline{c}[f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] + (\bar{c}-\underline{c})f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2).$

Introduciendo estas transformaciones en (12), agrupando términos y por la definición de ρ y $(1-\rho)$, tenemos la expresión (59) del texto.

■

Demostración de la Proposición 1.

1. Obtención de la ecuación (66).

La ecuación (65) en el texto es:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] = \iint V'(\rho)\, \frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}}\, h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21} \;+$$
$$\iint V(\rho) \frac{\partial}{\partial P_{i1}}\, h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21} \qquad (17)$$

donde

$$h(Q_{11},Q_{21}) = \rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2),$$

y

$$\bar{\varepsilon}_i = Q_{i1} - a + \bar{b}P_{i1} - \bar{c}P_{j1},$$
$$\underline{\varepsilon}_i = Q_{i1} - a + \underline{b}P_{i1} - \underline{c}P_{j1}.$$

Obsérvese que:

$$h_i(Q_{11},Q_{21}) = \frac{\partial\, h(Q_{11},Q_{21})}{\partial Q_{i1}} = \rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \;+$$
$$\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \qquad (18)$$

$$h_j(Q_{11},Q_{21}) = \frac{\partial\, h(Q_{11},Q_{21})}{\partial Q_{j1}} = \rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \;+$$
$$\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \qquad j\neq i. \qquad (19)$$

$$\frac{\partial\, h(Q_{11},Q_{21})}{\partial P_{i1}} = \rho_0[\bar{b}(\rho_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)) \;-$$
$$\bar{c}(\rho_0 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2))] \;+$$
$$(1-\rho_0)[\underline{b}(\rho_0 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)) \;-$$
$$\underline{c}(\rho_0 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))] \qquad (20)$$

De esta forma el segundo término de la derecha de (17), esto es $\iint V(\rho)\frac{\partial}{\partial P_{i1}} h(Q_{11},Q_{21})dQ_{11}dQ_{21}$, puede escribirse como:

$$\iint V(\rho)\Big[\rho_0\bar{b}(\rho_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - (1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)) +$$

$$\underline{b}(1-\rho_0)(\rho_0 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) +(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))\Big]dQ_{11}dQ_{21} -$$

$$\iint V(\rho)[\rho_0\bar{c}(\rho_0 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)) +$$

$$\underline{c}(1-\rho_0)(\rho_0 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]dQ_{11}dQ_{21} \qquad (21)$$

Integrando por partes los dos términos de (21) con $u=\int V(\rho)dQ_{j1}$ y $dv= \Big\{\bar{b}\rho_0[\rho_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] + (1-\rho_0)\underline{b}[\rho_0 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big\} dQ_{i1}dQ_{j1}$ para el primero de ellos, y con $u=\int V(\rho)dQ_{i1}$ y $dv = [\rho_0\bar{c}(\rho_0 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)) + \underline{c}(1-\rho_0)(\rho_0 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]dQ_{i1}dQ_{j1}$, para el segundo, se obtiene:

$$- \iint \bar{b}V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\, \rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}$$
$$- \iint \underline{b}V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\, (1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}$$
$$+ \iint \bar{c}V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\, \rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}$$
$$+ \iint \underline{c}V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\, (1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} \qquad (22)$$

agrupando términos:

$$- \iint V'(\rho)[\bar{b} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} - \bar{c} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}]\rho_0[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}$$

$$- \iint V'(\rho)[\underline{b} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} - \underline{c} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}](1-\rho_0)[\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} \qquad (23)$$

Introduciendo (23) en (17) , y simplificando términos, (17) pasa a ser:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] =$$

$$\iint V'(\rho)\left[\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} - \bar{b} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \bar{c} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\right]\rho_0\left[\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\right]dQ_{11}dQ_{21}$$

$$+ \iint V'(\rho)\left[\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} - \underline{b} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \underline{c} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\right](1-\rho_0)(\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))dQ_{11}dQ_{21}$$

$$(24)$$

Que es (66) en el capítulo 4.

2. Obtención de la ecuación (67).

Por el lema 3, podemos calcular los términos $\left[\frac{\partial \rho}{\partial P_{i1}} - \bar{b} \frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} + \bar{c}\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\right]$, $(b,c)=\{(\bar{b},\bar{c}),(\underline{b},\underline{c})\}$. Entonces por (58) y (59) en el texto,(24) es,

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]=\iint V'(\rho)\Big[\frac{(\bar{b} - \underline{b})}{D} [\rho(\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]$$

$$- \frac{(\bar{c} - \underline{c})}{D} [\rho(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) - (1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\Big]\rho_0(\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$$

$$+(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))dQ_{11}dQ_{21} + \iint V'(\rho)\Big[\frac{(\bar{b} - \underline{b})}{D}[(1-\rho)(\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$$

$$+\rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))] - \frac{(\bar{c} - \underline{c})}{D} [(1-\rho)\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \rho\rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]$$

$$(1-\rho_0)(\rho_0 f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))dQ_{11}dQ_{21} \qquad (25)$$

que por la definición de ρ:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]=\iint V'(\rho)\Big[(\bar{b}-\underline{b})\ [\rho^2(\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]$$

$$-\ (\bar{c}-\underline{c})\ [\rho^2(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\ -\ \rho(1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\Big]dQ_{11}dQ_{21}$$

$$+\ \iint V'(\rho)\Big[(\bar{b}-\underline{b})[(1-\rho)^2(\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ +\ \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]$$

$$-\ (\bar{c}-\underline{c})[(1-\rho)^2\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ -\ \rho(1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]\ dQ_{11}dQ_{21} \qquad (26)$$

Y agrupando (26) es:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]=(\bar{b}-\underline{b})\iint V'(\rho)\Big[\rho^2[\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]\quad +$$

$$(1-\rho)^2[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ +\ \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big]dQ_{11}dQ_{21}\ -$$

$$(\bar{c}-\underline{c})\iint V'(\rho)\Big[\rho^2(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\ -\ \rho(1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ +$$

$$(1-\rho)^2\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ -\ \rho(1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big]\ dQ_{11}dQ_{21} \qquad (27)$$

Si tenemos en cuenta que $(1-\rho)^2=(1-\rho)-\rho(1-\rho)$, (27) es:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))]=(\bar{b}-\underline{b})\iint V'(\rho)\Big(\Big[\rho[\rho\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho(1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2))]-$$

$$(1-\rho)\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\quad -(1-\rho)\quad \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big]+\quad (1-\rho)[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\quad +$$

$$\rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]\Big)dQ_{11}dQ_{21}\quad -\quad (\bar{c}-\underline{c})\iint V'(\rho)\Big(\Big[\rho[\rho(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\quad +$$

$$\rho\rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\ -\ (1-\rho)\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ -\ (1-\rho)\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\Big]\ +$$

$$(1-\rho)\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\ -\ \rho\rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)\Big)dQ_{11}dQ_{21} \qquad (28)$$

Recordando que:

$$\rho = \frac{\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{D}$$

donde:

$$D\rho = \rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) \qquad (29)$$

y derivando respecto a Q_{i1},

$$D\frac{\partial\rho}{\partial Q_{i1}} + \rho[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]=$$

$$\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$$

ó

$$D\frac{\partial\rho}{\partial Q_{i1}} = (1-\rho)[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] -$$

$$\rho[\rho_0(1-\rho_0)f_i(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f_i(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2] \qquad (30)$$

De igual forma derivando (29), con respecto a Q_{j1} y ordenando los términos tenemos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial Q_{j1}} = (1-\rho)[\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_j(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)] -$$

$$\rho[\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)^2 f_j(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2] \qquad (31)$$

Si introducimos estos resultados en (28) obtenemos la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho(Q_{11},Q_{21}))] = & -(\bar{b}-\underline{b})\iint V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} D\rho \; dQ_{11}dQ_{21} + \\
& (\bar{b}-\underline{b})\iint V'(\rho)(1-\rho)[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} + \\
& (\bar{c}-\underline{c})\iint V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}} D\rho \; dQ_{11}dQ_{21} - \\
& (\bar{c}-\underline{c})\iint V'(\rho)[(1-\rho)\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \rho\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Integrando por partes el segundo término de la derecha de (32), es decir $(\bar{b}-\underline{b})\iint V'(\rho)(1-\rho)[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}$, y tomando $u=\int V'(\rho)(1-\rho)dQ_{j1}$, y $dv=[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+(1-\rho_0)\rho_0 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{i1}dQ_{j1}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& (\bar{b}-\underline{b})\iint V'(\rho)(1-\rho)[\rho_0^2 f_i(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f_i(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} = \\
& \quad (\bar{b}-\underline{b})\Bigg[-\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\,(1-\rho)[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} + \\
& \quad \iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\,[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}\Bigg]
\end{aligned} \tag{33}
$$

De igual forma, el último término de (32), al ser integrado por partes pasa a ser:

$$
\begin{aligned}
& -(\bar{c}-\underline{c})\iint V'(\rho)[(1-\rho)\rho_0^2 f_j(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)-\rho\rho_0(1-\rho_0)f_j(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} = \\
& \quad (\bar{c}-\underline{c})\Bigg[\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\,[(1-\rho)\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) - \rho\rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21} - \\
& \quad \iint V'(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\,[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + \rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2]dQ_{11}dQ_{21}\Bigg]
\end{aligned} \tag{34}
$$

Introduciendo (33) y (34) en (32) y eliminando términos y teniendo en cuenta que $\rho D = \rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2) + (1-\rho_0)\rho_0 f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$, (32) pasa a ser:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho)] = -(\bar{b}-\underline{b})\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\,(1-\rho)[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}$$
$$+ (\bar{c}-\underline{c})\left[\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\,[(1-\rho)\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)]dQ_{11}dQ_{21}\right.$$
$$\left. - (\bar{c}-\underline{c})\iint V''(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}\,\rho\rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\right]dQ_{11}dQ_{21} \tag{35}$$

Que es (67) en el capitulo 4.

Obtención de la ecuación (68).

Por el lema 2, $\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}} = -\frac{\partial \rho}{\partial Q_{j1}}$, y dado el supuesto de que $(\bar{b}-\underline{b})=(\bar{c}-\underline{c})=\Delta$, entonces (35) es:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho)] = \Delta\iint V''(\rho)\left(-\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\right)\left[(1-\rho)[\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2) + \right.$$
$$\left. \rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] - \rho\rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\right]dQ_{11}dQ_{21} \tag{36}$$

por la definición de ρ y $(1-\rho)$, (36) puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho)] = \Delta\iint V''(\rho)\left(-\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\right)\left[\left[\frac{(1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)}{D}\right][2\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\right.$$
$$+\rho_0(1-\rho_0)f(\underline{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)] - \left[\frac{\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)+\rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)}{D}\right][\rho_0(1-\rho_0)f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)dQ_{11}dQ_{21}$$

$$\tag{37}$$

Eliminando términos y de nuevo, haciendo uso de la definición de ρ y (1-ρ), (37) pasa a ser:

$$\frac{\partial}{\partial P_{i1}} E[V(\rho)]=\Delta\int\!\!\int V''(\rho)\left(-\frac{\partial \rho}{\partial Q_{i1}}\right)\left[\rho(1-\rho_0)^2 f(\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)+(1-\rho)\rho_0^2 f(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)\right]dQ_{11}dQ_{21} \tag{38}$$

que nos da la expresión que buscabamos. ■

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA.

Aghion, P., P. Bolton, C. Harris, B. Jullien, (1991), "Optimal Learning by Experimentation", Review of Economic Studies, 58, 621-654.

Aghion, P. M. Espinoza, y B. Jullien, (1990), "Dynamic Duopoly Games with Learning Through Market Experimentation". Document de Travail Delta n° 90-13.

Alepuz, M.D. y A. Urbano, (1992,a), "Duopoly Experimentation: Cournot Competition". Mimeo. Universidad de valencia.

Alepuz, M.D. y A. Urbano, (1992,b) "Learning and price Dispersion". Mimeo. Universidad de Valencia.

Balvers, R. J. y T. F. Cosimano, (1989), "Actively Learning About Demand and the Dynamics of Price Adjustement", mimeo.

Banks, J.S. y J. Sobel (1987), "Equilibrium Selection in Signaling Games", Econometrica 55, n° 3, 647-661.

Blackwell, D. (1951), "Comparison of Experiments", in J. Neymann (ed), Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press.

Bray, M., (1982), "Learning, Estimation, and Stability of Rational Expectations", Journal of Economic Theory 26, 318-339.

Bray, M. y E. Savin, (1986), "Rational Expectations Equilibria, Learning, and Model Specification", Econometrica 54, n° 5, 1129-1160.

Burdett, K. y K. Judd, (1983), "Equilibrium Price Dispersion" Econometrica 51, n°4, 995-969.

Butters, G. R. (1977), "Equilibrium Distributions of Sales and Adversiting Prices", Review of Economic Studies, 44, 465-491.

Cyert, R.M. y M. DeGroot, (1970), "Bayesian Analysis and Duopoly Theory" Journal Political Economy, 78, 1168-1184.

Cyert, R.M. y M. DeGroot, (1974) "Rational Expectations and Bayesian Analysis", Journal of Political Economy 82, 521-536.

DeGroot, M. (1970), "Optimal Statistical Decisions", New York, McGraw Hill.

Dixit, A.K. (1979) "A model of Duopoly Suggesting a Theory of Entry Barriers" Bell Journal of Economics, 10, 20-32.

Easley D. y N. Kiefer, (1988), "Controlling a Stochastic Process With Unknown Parameters", Econometrica, 56, 1045-1064.

Easley, D. y N. Kiefer, (·1988) "Infinite-Horizon Bayesian Control of The Normal-Normal Regresion Process", mimeo.

Engers, M. (1987), "Signalling with Many Signals", Econometrica 55, n° 3, 663-674.

Engers, M. y L. Fernandez (1987), "Market Equilibrium with Hidden Knowledge and Self-Selection", Econometrica 55, n° 2, 425-439.

Feldman, M., (1987), "An Example of Convergence to Rational Expectations with Heterogeneous Beliefs", International Economic Review 28, n° 3, 635-650.

Fourgeaud, C. y C. Gourieroux y J. Pradel, (1986), "Learning Procedures and Convergence to Rationality", Econometrica 54, n° 4, 845-868.

Fudenberg, D. y J. Tirole (1986), "A 'Signal-jamming' Theory of Predation" Rand Journal of Economics 17, 336-376.

Fusselman J. M. y L. Mirman (1989), "Experimental Consumption for a General Class of Disturbance Densities", mimeo, University of Virginia.

Gal-or, E. (1988), "The Advantages of Imprecise Information ", Rand Journal of Economics 17, 266-275.

Grossman, S. (1975), "Rational Expectations and the Econometric Modeling of Markets Subject to Uncertainty. A Bayesian Approach", Journal of Econometrics, 3, 255-272.

Grossman, S., R. E. Kihlstrom, L. Mirman (1977), "A Bayesian Approach to the Production of Information and Learning by Doing", Review of Economic Studies 44, 533-547.

Kiefer, N.M. y Y. Nyarko, (1989), "Optimal Control of a Unknown Linear Process with Learning", International Economic Review 30, n° 3, 571-586.

Kihlstrom, R., L. Mirman, y A. Postlewaite, (1984), "Experimental Consumption and the 'Rothschild Effect'", en M. Boyer y R. Kihlstrom eds., Bayesian Models of Economic Theory, Amsterdam: Elsevier.

Li, L., (1985), "Cournot Oligopoly with Information Sharing", Rand Journal of Economics 16, n° 4, 521-536.

Mailath, G., (1988), "An Abstract Two-Period Game with Simultaneous Signaling: Existence of Separating Equilibria", Journal of Economic Theory, 46, 373-394.

Marcet, A. y T.J. Sargent, (1989), "Convergence of Least Squares Learning Mechanisms in Self-Referential Linear Stochastic Models", Journal of Economic Theory" 48, 337-368

Matthews, S. y L. Mirman (1983), "Equilibrium Limit Pricing: The effects of Private Information and Stochastic Demand", Econometrica , 51, 981-996.

McLennan, A., (1984), "Price Dispersion and Incomplete Learning in the Long Run", Journal of Economic Dynamics and Control, 7, 331-347.

Mirman, L., L. Samuelson y A. Urbano, (1991,a), "Monopoly Experimentation", Mimeo. Universidad de Virginia.

Mirman, L., L. Samuelson y A. Urbano, (1991,b) "Duopoly Signal Jamming", Mimeo. Universidad de Virginia.

Mirman, L., A. Urbano, (1991), "Asymmetric Information in a Duopolistic Market with Unknown Demand". Mimeo. Universidad de Virginia.

Ponssard, J.P., (1970), "The Strategic Role of Information on Demand Function in a Oligopolistic Market", Management Science, XXV, 851-858.

Reinganum , J.F., (1979) "A Simple Model of Equilibrium Price Dispersion" Journal of Political Economy, 87,851-858.

Riordan, M., (1985), "Imperfect Information and Dynamic Conjetural Variations" Rand Journal of Economics 16, 41-50.

Rob, R., (1991), "Learning and Capacity Expansion under Demand Uncertainty", Review of Economic Studies,58 ,655-675.

Rothschild, M., (1973), "Models of Market Organization with Imperfect Information: A Survey" Journal of political Economy, 81, 1283-1308.

Rothschild, M. y J. E. Stiglitz, (1976) "Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information" Quarterly Journal of Economics, 90, 629-649.

Salop, S. y J. Stiglitz, (1976), "Bargains and Ripoffs: A Model of Monopolistically Competitive Prices", Review of Economic Studies, 44, 493-510.

Shapiro, C., (1986) ,"Exchange of Cost Information in Oligopoly", Review of Economic Studies, 53, 433-446.

Spence, M., (1973), "Job Market Signaling", Quarterly Journal of Economics, 87, 353-374.

Singh, N. y X. Vives, (1984), "Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly", Rand Journal of Economics, 15, nº4, 546-554.

Tirole, J. (1990), La Teoria de la Organización Industrial. Ariel.Barcelona.

Tonks, I., (1984), "A Bayesian Approach to the Production of Information with a Linear Utility Function", Review of Economics Studies, 51, 521-527.

Townsend, R.M. (1978), "Market Anticipations, Rational Expectations, and Bayesian Analysis", International Economic Review, 19, n° 2, 481-494.

Urbano, A., (1990), Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Urbano, A., (1992,a), "Monopoly Experimentation: A generalization". Mimeo. Universidad de Valencia.

Urbano, A., (1992,b), "Asymmetric Information and Duopoly Behaviour". Mimeo. Universidad de valencia.

Vives, X. (1984), "Duopoly Information Equilibrium: Cournot and Bertrand", Journal of Economic Theory 31, 71-94.

Vives, X., (1988), "Information and Competitive Adventage". Mimeo.

Vives, X., (1990), "How Fast Do Rational Agents Learn ?" W.P. 135.90. Institut d'Anàlisi Econòmica, CSIC. Universitat Autònoma de Barcelona.

Wilde, L. L. y A. Schwartz, (1979), "Equilibrium Comparison Shopping", Review of Economic Studies, 46, 543-554.

Wilson, R. (1985), "Multi-Dimensional Signalling", Economics Letters 19, 17-21.

Zellner, A.,(1981), An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. New York: Wiley.