

Nº 269 TESIS DOCTORAL

18-12-95

Físicas
268
T.D

Universitat de València

Departament de Astronomía y Astrofísica

**Identificación y análisis de
imágenes en placas astrográficas**

Memoria presentada por
Amelia Ortiz Gil
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas

Valencia, Octubre 1995



UMI Number: U603133

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

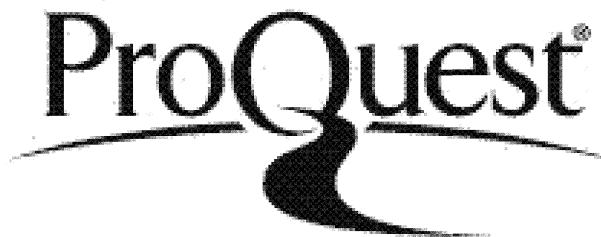
In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603133

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

↑
→ Físicas

Nº Registre 8579

DATA 24. I. 96

SIGNATURA

268.T.D

Nº LIBIS:

30 cms.

i 19723155



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

OBSERVATORI ASTRONÒMIC

ALVARO LOPEZ GARCIA, Profesor Titular de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica, adscrito al Departamento de Astronomía y Astrofísica de la Universitat de València, y Director del Observatorio Astronómico

CERTIFICA:

Que la presente Memoria: “ **Identificación y análisis de imágenes en placas astrográficas**”, ha sido realizada bajo su dirección en el Observatorio Astronómico de la Universitat de València por Doña Amelia Ortiz Gil y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Facultad de Ciencias Físicas de la Universitat de València la referida tesis, firmando el presente certificado en

Valencia, a treinta de Octubre de 1995

Fdo.: Alvaro López García



Contenido

1	Introducción.	7
1.1	Objetivos de este trabajo.	7
1.2	La fotografía en la astronomía.	8
1.3	La "Carte du Ciel" (CdC).	10
1.3.1	Introducción.	10
1.3.2	Tipo de telescopio.	12
1.3.3	Formato de las placas fotográficas.	13
1.3.4	Tipo de solapamiento entre las placas.	15
1.3.5	Utilización de un retículo impresionado en las placas.	15
1.3.6	Precisión mínima requerida en la determinación de las posiciones de las estrellas en las placas.	17
1.3.7	Número y duración de las exposiciones.	17
1.3.8	Resultados finales del proyecto.	18
1.4	Proyectos modernos relacionados con la CdC.	19
1.5	La observación fotográfica de asteroides.	20
2	Astrometría con placas fotográficas.	23
2.1	Métodos	23
2.1.1	Campo extenso y seguimiento sidéreo (una exposición).	23
2.1.2	Campo extenso y seguimiento diferencial.	28
2.1.3	Campo reducido.	30
2.2	Proyectos y aplicaciones.	31
2.2.1	Catálogos estelares.	31
2.2.2	Otros rastreos fotográficos.	32



3	Características de las placas fotográficas como detectores.	35
3.1	No linealidad de las placas fotográficas.	35
3.2	Ruido.	37
3.3	Efectos de adyacencia.	38
3.3.1	Turbiedad.	38
3.3.2	El efecto Kostinsky.	39
3.3.3	Conclusión.	40
3.4	Aberraciones ópticas.	41
4	Problemas específicos en las placas de la "Carte du Ciel".	45
4.1	Imágenes triples.	45
4.2	El retículo y su efecto sobre imágenes próximas.	50
4.3	Aberraciones ópticas.	51
5	Mejora de imágenes.	55
5.1	Introducción.	55
5.2	Realce por modificación del histograma.	56
5.2.1	Fundamentos.	56
5.2.2	Ecuación del histograma.	57
5.2.3	Especificación directa del histograma.	63
5.2.4	Resultados.	67
5.3	Teoría de conjuntos borrosos.	70
5.3.1	La lógica borrosa.	70
5.3.2	Concepto de conjunto borroso. Definiciones.	72
5.3.3	El principio de extensión.	73
5.3.4	Operaciones entre conjuntos borrosos.	75
5.3.5	Aplicaciones prácticas de la lógica y los conjuntos borrosos.	78
5.3.6	Aplicación al realce de imágenes astronómicas.	79
5.3.7	Definición de una imagen según la teoría de conjuntos borrosos.	80
5.3.8	El dominio borroso de propiedades.	80
5.3.9	Conjuntos borrosos y el concepto de realce de imágenes.	82
5.3.10	Selección de F_d y F_e previa a la operación de realce.	84
5.3.11	Algoritmos de realce de imágenes.	85

5.3.12	Resultados de la aplicación del algoritmo a imágenes astronómicas.	88
5.3.13	Evaluación del carácter borroso de una imagen y la magnitud del realce.	100
6	Identificación de imágenes en las placas astrográficas. Algoritmos originales.	111
6.1	Medida a partir de posiciones previas.	111
6.1.1	Introducción.	111
6.1.2	Escala y giro entre la tarjeta digitalizadora y el microscopio.	113
6.1.3	Determinación de las posiciones relativas entre las diferentes exposiciones.	114
6.1.4	Selección de estrellas iniciales y ruta.	116
6.1.5	Algoritmo de identificación de las imágenes.	117
6.1.6	Algoritmo de centrado final.	119
6.1.7	Resultados.	120
6.2	Placas de campo extenso con seguimiento sidéreo y una exposición. Solapamiento parcial de campos.	130
6.2.1	Algoritmo de identificación de las imágenes.	131
6.2.2	Selección y centrado final.	138
6.2.3	Resultados.	138
7	Análisis de imágenes. Astrometría y fotometría con las placas de la "Carte du Ciel".	141
7.1	Introducción.	141
7.2	Reducción de los datos.	142
7.3	Aberraciones ópticas: coma.	151
7.4	Precisión astrométrica.	152
7.4.1	Reducción interna de la placa.	153
7.4.2	Reducción placa-catálogo.	154
7.5	Fotometría.	163
8	Conclusiones.	169

Lista de Tablas

1.1	Observatorios y áreas asignadas.	12
2.1	Algunos de los rastreos con telescopios Schmidt que han sido publicados o que se encuentran en fase de realización.	32
5.1	Distribución de niveles de gris en el ejemplo del texto.	61
5.2	Funciones de transformación para diferentes modelos de densidad final de probabilidad.	66
5.3	i_{max} =intensidad máxima de la imagen. El intervalo de grises posible es $[0,255]$. El ruido y el fondo han sido expresados en tanto por ciento de intensidad máxima de la estrella en cada caso.	90
5.4	Posición del centro de la imagen antes y después de la aplicación de cada uno de los algoritmos de realce. El centro real de la imagen simulada se encuentra en el punto de coordenadas $(0,0)$	91
5.5	Posición del centro de la imagen antes y después de la aplicación de cada uno de los algoritmos de realce. El centro real de la imagen simulada se encuentra en el punto de coordenadas $(0,0)$. En este ejemplo el fondo de la imagen es nulo.	91
5.6	Evolución del valor del índice de borrosidad $\gamma(X)$ en la imagen real del ejemplo en función del número de iteraciones y del valor de F_e	105
5.7	Evolución del valor de la entropía $H(X)$ en la imagen real del ejemplo en función del número de iteraciones y del valor de F_e	105
7.1	Error cuadrático medio correspondiente a las exposiciones individuales en la reducción interna de la placa.	156
7.2	Error cuadrático medio correspondiente a las exposiciones individuales en la reducción externa de la placa con el catálogo.	156



Capítulo 1

Introducción.

1.1 Objetivos de este trabajo.

El objetivo de este trabajo es presentar el resultado de las investigaciones llevadas a cabo en la identificación y análisis de imágenes estelares en placas fotográficas. Las aplicaciones directas que serán aquí expuestas son dos. Por un lado, el desarrollo de programas que realizan de forma automática y eficiente la identificación y determinación de posiciones de imágenes en la máquina de medición de placas construída en el Observatorio Astronómico de la Universidad de Valencia (OAUUV). El objetivo fundamental es la determinación de posiciones de asteroides (ver secc. 1.5). Por otro lado, la obtención de las posiciones de las estrellas en las placas de la “Carte du Ciel”, en el marco del proyecto en el que estoy trabajando actualmente, denominado “*Salvaging an astrometric treasure*” con el objetivo principal de determinar los movimientos propios de unos 10 millones de estrellas distribuídas en todo el cielo, a través de la comparación con placas más recientes que constituyan la segunda época de observaciones (ver secc. 1.4).

Este primer capítulo es una breve introducción en la que tan sólo se pretende un contacto inicial con los dos temas en los que este trabajo ha sido desarrollado, a saber, el proyecto de la “Carte du Ciel” y la astrometría de asteroides con placas fotográficas. En el capítulo 2 expondré diferentes métodos utilizados en el campo de la astrometría con placas fotográficas,

para pasar posteriormente (cap. 3) a una descripción más detallada de las características de las emulsiones fotográficas como detectores. El capítulo 4 es una completa exposición de los problemas específicos que aparecen en las placas de la “Carte du Ciel”.

Los capítulos siguientes versan ya directamente acerca del tratamiento de imágenes y de los algoritmos desarrollados. En primer lugar (cap. 5) dos métodos de realce son aplicados a las imágenes presentes en las placas de asteroides (de campo pequeño) del Observatorio de Valencia. El algoritmo actualmente aplicado en el análisis automático de estas placas es descrito con detalle en el capítulo 6. En él también se exponen los últimos avances realizados en el algoritmo destinado al estudio automático de placas de campo extenso. Por último, en el capítulo 7 se presentan los resultados obtenidos en la determinación de posiciones y magnitudes precisas en las placas de la “Carte du Ciel”.

1.2 La fotografía en la astronomía.

A pesar de que ya en 1839 Niepce y Daguerre habían obtenido las primeras imágenes en placas fotográficas, no es hasta 1850 cuando se obtiene la primera fotografía de un objeto astronómico. Se trataba de la estrella Vega y la exposición fue realizada con el refractor de diez pulgadas del Harvard College Observatory. A partir de 1884 se empieza a considerar la fotografía como una herramienta útil para la astronomía. Es en este año cuando los hermanos Paul y Prosper Henry, astrónomos del Observatorio de París, construyen un telescopio capaz de trabajar como una cámara fotográfica y registran en una placa la imagen del cúmulo de Perseo. Este tipo de telescopio fue bautizado posteriormente con el nombre de *astrógrafo normal* (sus características vienen detalladas en la sección 1.3, apartado 1.3.2). Los experimentos de los hermanos Henry convencieron al almirante Mouchez, a la sazón director del Observatorio de París, de la viabilidad de un proyecto consistente en la construcción de una carta fotográfica del cielo (la denominada “Carte du Ciel (CdC)”) y de un catálogo astrográfico (el conocido como “Astrographic

Catalogue (AC)").

Este proyecto fue piedra angular en la historia de la astronomía ya que, además de dar lugar a la primera colaboración a nivel internacional entre los astrónomos, supuso la utilización por vez primera de monturas ecuatoriales de precisión, el uso sistemático de técnicas fotográficas en astronomía (nacimiento de la astrometría con placas fotográficas), de ópticas corregidas de algunos tipos de aberraciones y la realización de un proyecto que cubría todo el cielo.

El método fotográfico permitió una sustancial mejora en la precisión de las posiciones de las estrellas, pasándose de un error de $\simeq 0''.5$ en cada coordenada (en las observaciones con círculos meridianos) a uno de $0''.3$. También permitió el trabajar con objetos más débiles, es decir, alcanzar la magnitud 13 ó 14, en lugar de la 9¹.

En 1930 Bernard Schmidt inventó el telescopio que lleva su nombre y que se caracteriza por la combinación de un espejo esférico con una lente correctora. Construyó los telescopios de 18 y 48 pulgadas del observatorio de Monte Palomar con los que se ha llevado a cabo los dos proyectos de rastreo del cielo de dicho observatorio (ver cap. 2, secc. 2.2.1).

Este fue el inicio de la historia de la fotografía astronómica, que tantas aplicaciones ha tenido, tiene (ver capítulo 2, sección 2.2), y ciertamente tendrá en el futuro (Maury 1988) debido a la disponibilidad de mejores máquinas para el procesamiento de placas astrofotográficas (Quebatte *et al.* 1986) y de mejores emulsiones (Malin 1994). En efecto, es posible la producción de emulsiones con una curva característica mucho más lineal. Esto posibilita el empleo de técnicas de copiado de alto contraste, lo que permite la detección de estructuras extensas muy débiles. En el observatorio anglo-australiano, por ejemplo, esto significa alcanzar una magnitud límite

¹También hubo reticencias por parte de algunos astrónomos de renombre, como el alemán Artur Auwers, quien consideraba la aplicación de métodos fotográficos a la investigación astronómica como "algo contranatura".

$$B \simeq 28 \text{ mag/arsec}^2.$$

En ocasiones, la supremacía de la emulsión fotográfica sobre la CCD es clara. Por ejemplo, la eficiencia cuántica ² de una emulsión es del 8% o incluso del 10%, valor que supera a la eficiencia de una cámara CCD en la región azul del espectro (donde la razón entre el número de electrones registrados en la CCD y el flujo de fotones en el plano focal del telescopio es inferior al 5%). La razón para esta baja eficiencia de las CCDs reside en problemas de reflectancia del silicio, de transferencia de cargas y de la necesidad del uso de filtros que, en general, no poseen buenas características de transmisión.

En el caso de rastreos de grandes extensiones del cielo, las CCDs presentan importantes desventajas frente a las placas fotográficas. La más notoria quizás sea el que son capaces de cubrir como máximo un campo que es mucho menor que el cubierto por algunas placas. Así, mientras una CCD de 2000x2000 pixel sólo cubre un área de 3x3 cm, el área cubierta por una placa Schmidt es de unos 40x40 cm. Además, presentan una resolución que es del orden de cinco o diez veces menor que la de emulsiones como la IIIa J, capaz de resolver 200 líneas/mm.

1.3 La “Carte du Ciel” (CdC).

1.3.1 Introducción.

El comienzo oficial de los proyectos de la “Carte du Ciel” y del “Astrographic Catalogue” (Weimer 1988) tuvo lugar en el primer Congreso Internacional de la Carta del Cielo (“Congrès International de la Carte du Ciel”) celebrado en el observatorio de París en 1887, y organizado por el almirante Mouchez con la colaboración de Sir David Gill y Otto Struve. A la conferencia asistieron sesenta y cinco astrónomos procedentes de dieciséis naciones

²Cantidad relacionada con la velocidad de la emulsión, el gradiente de la curva D-logE, y la desviación cuadrática media de la granularidad de la emulsión a la densidad D a la que el gradiente es medido. E es la “exposición”, definida como la energía por unidad de área en cada punto del área fotosensitiva.

diferentes. En esta reunión se discutieron varios aspectos del proyecto, como las características específicas de los instrumentos a utilizar, el método de obtención de las placas, su medida y reducción y la conservación de todo el material para su utilización en el futuro. Se decidió también la creación de un comité internacional permanente que entre 1889 y 1909 revisó lo discutido en la primera reunión y tomó las decisiones finales acerca de los métodos y condiciones a seguir en la consecución del proyecto (IAU 1887). Interesantes comentarios y explicaciones sobre las decisiones tomadas antes de 1892 pueden encontrarse en Trépied (1892).

El objetivo era la construcción de un registro del cielo completo hasta la magnitud 14 (la “Carte du Ciel”) y de un catálogo estelar, completo hasta la magnitud 11 (el “Astrographic Catalogue”) (Eichhorn 1974).

El total de observatorios participantes en el proyecto fue de dieciocho. En la tabla [1.1] puede verse cuáles fueron las zonas del cielo asignadas a cada uno de ellos (O’Hora 1988). Por diversas causas, algunos de los observatorios elegidos en un principio tuvieron que ser sustituidos por otros diferentes.

En la reunión de 1887 y en posteriores de la comisión permanente se acordaron unas líneas generales que todos los observatorios debían de seguir para lograr unos resultados aproximadamente homogéneos. Estas directrices afectaban a los siguientes puntos:

- Tipo de telescopio a emplear.
- Formato de las placas fotográficas.
- Tipo de solapamiento entre los campos cubiertos por las placas.
- Utilización de un retículo impreso en las placas.
- Precisión mínima requerida en la determinación de las posiciones de las estrellas en las placas.
- Duración de las exposiciones.

Observatorios	Latitud	Zona asignada (declinación)	Distancia al cénit	% de área del cielo
Greenwich	+51°29'	+90° a +65°	-13°31' a -38°31'	4.7
Vaticano	+41°54'	+64° a +55°	-13°6' a -22°6'	4.4
Catania	+37°30'	+54° a +47°	-9°30' a -16°30'	4.4
Helsinki	+60°9'	+46° a +40°	+14°9' a +20°9'	4.4
Potsdam	+52°23'	+39° a +32°	+13°23' a +20°23'	5.6
Oxford	+51°46'	+31° a +25°	+20°46' a +26°46'	5.4
París	+48°50'	+24° a +18°	+24°50' a +30°50'	5.6
Burdeos	+44°50'	+17° a +11°	+27°50' a +33°50'	5.9
Toulouse	+43°37'	+10° a +5°	+33°37' a +38°37'	5.2
Argel	+36°48'	+4° a -2°	+32°48' a +38°48'	7.0
San Fernando	+36°28'	-3° a -9°	+39°28' a 45°28'	6.1
Tacubaya	+19°24'	-10° a -16°	+29°24' a +35°24'	5.9
Hyderabad (Santiago)*	-33°27'	-17° a -23°	-10°27' a -16°27'	5.7
Córdoba (La Plata)*	-34°55'	-24° a -31°	-3°55' a -10°55'	6.2
Perth (Rio de Janeiro)*	-22°54'	-32° a -40°	+9°6' a +17°6'	6.3
Cabo de Buena Esperanza	-33°56'	-41° a -51°	+7°4' a +17°4'	6.6
Sidney	-33°52'	-52° a -64°	+18°8' a +30°8'	5.9
Sidney (Melbourne)*	-37°50'	-65° a -90°	+27°10' a +52°10'	4.7

Tabla 1.1: Observatorios y áreas asignadas.

* El observatorio que figura entre paréntesis participaba en el proyecto inicial pero tuvo que ser sustituido por el nombrado aquí en primer lugar.

Paso a continuación a detallar un poco más cada uno de estos puntos, pues sus ventajas y dificultades son determinantes de la estrategia que se ha seguido a la hora del estudio de las placas de la CdC.

1.3.2 Tipo de telescopio.

El telescopio requerido en la ejecución del proyecto era un telescopio refractor doble: uno de los tubos actúa como "cámara fotográfica", mientras el otro se usa para el seguimiento. Ambos se encuentran montados sobre un mismo tubo de acero de sección rectangular, separados por una delgada plancha metálica.

Las características técnicas del tubo fotográfico son las siguientes:

- Abertura: 33 cm
- Longitud focal: 3438 mm

- Aplanático y acromático para una longitud de onda de 430.8 nm

Este diseño se eligió porque proporciona una escala tal que 1' en el cielo corresponde a 1 mm en la placa fotográfica.

El tubo de seguimiento presenta estas otras características:

- Abertura: 25 cm
- Longitud focal: 3650 mm

En Francia, P. Gautier construyó 9 monturas ecuatoriales para otros tantos tubos telescópicos contruídos por los hermanos Henry siguiendo las indicaciones del Comité. Y en Dublín H. Grubb construyó 7 telescopios más. El único observatorio donde no se utilizó un astrógrafo normal fue Hyderabad.

El bastidor del portaplacas es de latón y es apto para soportar placas de 16x16 cm; cuatro tornillos de ajuste permiten colocar la placa perpendicular al eje óptico del objetivo y para orientar el bastidor se emplea un círculo de posición provisto de su correspondiente tornillo de ajuste.

1.3.3 Formato de las placas fotográficas.

Los directores de cada observatorio eran libres de elegir el fabricante de placas fotográficas que desearan. Sin embargo, y como se acaba de indicar, sí se exigió que las placas tuvieran un tamaño de 16x16 cm, siendo la superficie útil para ser medida de 13x13 cm, con lo que el campo abarcado es de unos 2°x2° (fig. 1.1).

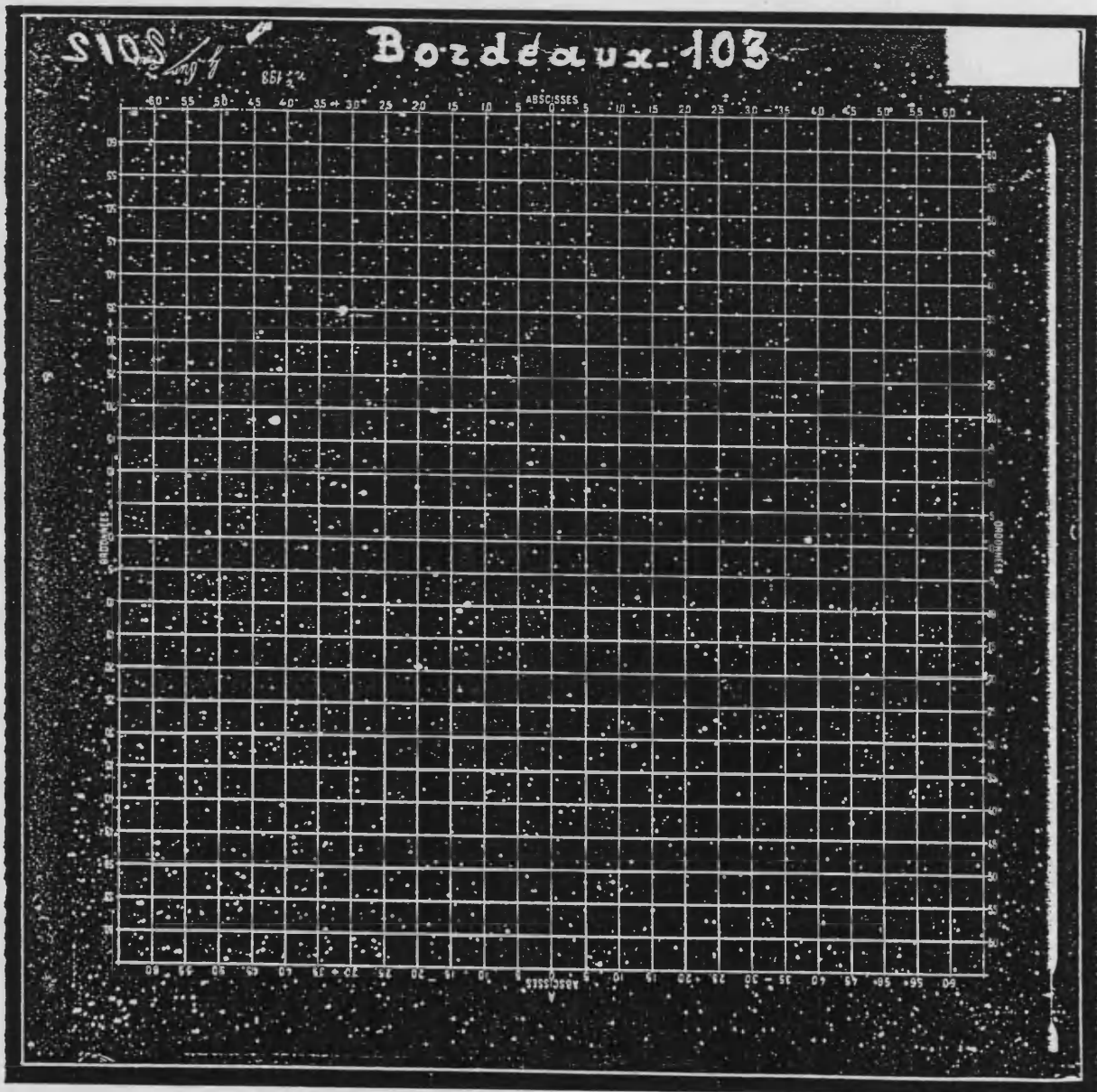


Figura 1.1: Placa correspondiente a la Carte du Ciel, procedente del archivo del observatorio de Burdeos.

1.3.4 Tipo de solapamiento entre las placas.

La disposición espacial de las placas se ideó de forma tal que cada zona del cielo estuviese cubierta como mínimo por dos de ellas. Así se acordó que, mientras la convergencia de los meridianos lo permitiera, las ascensiones rectas de los centros de placa deberían de encontrarse entre las dos ascensiones rectas de los centros de las placas vecinas, de modo que el cielo entero resultase cubierto por una serie de "losetas" en las cuales el centro de cada una coincide con un punto cercano a las cuatro esquinas de otras cuatro placas (ver fig. 1.2). Este tipo de solapamiento se conoce con el nombre de *solapamiento de esquina en el centro* ("corner-in-center overlap pattern"). Con él se consigue que cada imagen de una estrella esté como mínimo en dos placas y como máximo en cinco. Por tanto, las estrellas cercanas al centro de la placa pueden ser medidas en hasta cinco placas diferentes.

Con esto el número total de placas a realizar rondaba las 10000. Considerando que la magnitud límite era de 14 ó 15, esto supone que unos 10 millones de estrellas iban a ser fotografiados.

1.3.5 Utilización de un retículo impresionado en las placas.

Para poder detectar posibles desplazamientos de la emulsión, sobre todo durante el proceso de secado de las placas, se decidió grabar en ellas un retículo (fig. 1.1), previamente a su exposición a través del telescopio. Una vez que se comprobó que estos desplazamientos no existían y que el retículo permanecía inalterado, se pensó utilizarlo como referencia para facilitar la medición de las placas, además de permitir la comparación entre dos clichés de una misma región de la Carta o del Catálogo de forma rápida.

Este retículo consistía en una placa de vidrio recubierta por una película de plata. Sobre esta película se trazaron dos conjuntos perpendiculares entre sí de 27 líneas rectas paralelas. La distancia entre las líneas paralelas es de 5 mm y el trazado consistió en la eliminación de la película de plata a lo

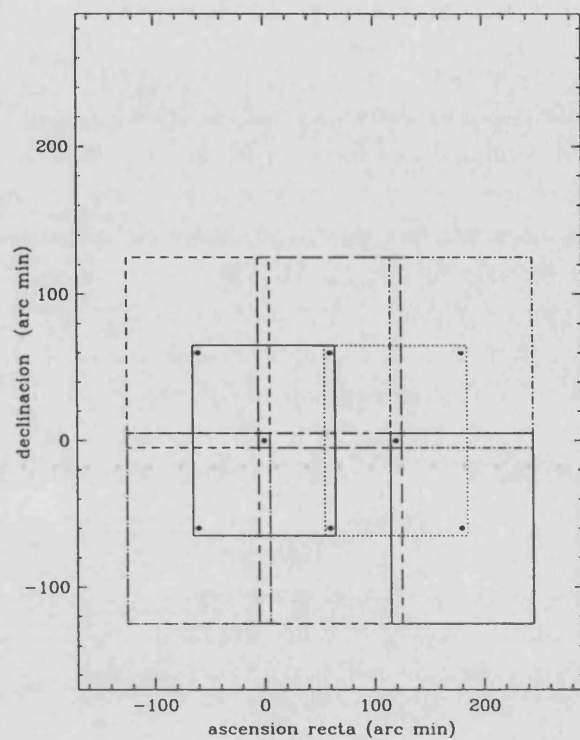


Figura 1.2: Solapamiento de las placas de la CdC en zonas próximas al ecuador.

largo de estas líneas. Numeradas de forma adecuada, uno de los sistemas representa coordenadas en ascensión recta y el otro coordenadas en declinación.

Para impresionar el cuadrículado sobre la placa se colocaba la placa de vidrio cerca de la fotográfica (a unos 0.5 mm) y una breve exposición de ambas a la luz grababa el retículo en la emulsión fotográfica.

En la época en que el proyecto fue llevado a cabo, la principal ventaja de este método radicaba en que una o varias estrellas podían ser remedidas en cualquier momento y sin necesidad de remedir las estrellas de referencia ya que las medidas se realizaron con referencia al cuadrado del retículo dentro del

cual se hallaba la imagen. El principal inconveniente era que la medida de las placas resultaba más lenta pues había que medir no sólo las posiciones de las estrellas sino también las de las líneas del retículo. Había además una pérdida de precisión debido a que las posiciones obtenidas eran sólo diferencias entre las posiciones de las líneas y las de las estrellas (ver secc. 1.3.6). Actualmente este retículo es, por desgracia, portador sólo de inconvenientes (ver secc. 4.2).

1.3.6 Precisión mínima requerida en la determinación de las posiciones de las estrellas en las placas.

El error cuadrático medio no debía de superar los $0''.3$ en ambas coordenadas. Las mediciones se realizaron siguiendo dos métodos diferentes, dependiendo del tipo de máquina que se estuviera utilizando al realizar la medición.

Uno de los modos de medición estaba basado en la determinación de la distancia entre las líneas del retículo y las imágenes de las estrellas con un tornillo micrométrico montado en el ocular del microscopio de medición. El otro consistía en determinar estas mismas distancias a través de una cruz de escalas que aparecía en el ocular.

La máquina construida con el propósito de realizar la medición de las placas fue diseñada por Gautier y permitía alcanzar una precisión de $5 \mu\text{m}$, es decir, los $0''.3$ requeridos.

1.3.7 Número y duración de las exposiciones.

Para la confección de la Carta se decidió la realización de dos series de placas. Una serie consistiría en placas cuyo centro se encontrase a una declinación par, y sólo se realizaría una exposición con una duración de 60 min. La otra serie sería la correspondiente a centros con declinación impar, y se llevarían a cabo tres exposiciones con cada placa, de 20 min de duración cada una. El objetivo era alcanzar la magnitud 14, así que se consideró que exposiciones de 20 min serían suficientes (IAU 1971). Sin embargo, se comprobó a *posteriori* que la magnitud alcanzada realmente era la 15. En la propuesta de la realización de estas dos series subyacía la idea de confeccionar la Carta

propiamente dicha con la serie de una exposición y emplear la serie de tres exposiciones como control para asegurar que las imágenes identificadas como estrellas en la otra serie lo eran realmente ya que con exposiciones múltiples resulta mucho más fácil distinguir lo que son imágenes estelares de lo que simplemente son errores o defectos en la placa.

En el caso en que se tomaran tres exposiciones por placa, se necesitaba en total 1 h 30 min de exposición, lo que requería al menos 2 horas de muy buen tiempo. Esta resultó ser una condición difícilmente alcanzable para algunos observatorios, como los de París o Londres. El resultado final fue que en muchos observatorios hicieron caso omiso de estas directrices (Greenwich, Oxford, París, Burdeos...) y en la mayoría sólo una de las dos series fue, como mínimo, parcialmente realizada. En San Fernando, por ejemplo, se finalizaron ambas.

Se dispuso asimismo que las tres exposiciones ocuparan los vértices de un triángulo que debía de ser aproximadamente equilátero en el centro de la placa. La distancia entre las exposiciones había de ser la suficiente como para que las tres exposiciones de las estrellas con magnitud inferior a la 11 apareciesen claramente separadas.

1.3.8 Resultados finales del proyecto.

Las primeras placas fueron tomadas en 1891 (Gliese 1988), y probablemente fueron las del Observatorio de la Marina de San Fernando (Cádiz), donde el registro de placas se inició en octubre de ese año (Azcarate 1921). La mayoría de las placas fueron realizadas antes de 1930.

El proyecto concerniente al Catálogo Astrográfico fue realizado en su totalidad, y declarado oficialmente terminado en 1964. En cambio, el proyecto de la Carta del Cielo nunca ha sido finalizado. Las dos series de placas que debían de completarse sólo se realizaron en parte. Y en algunas zonas no se llegó a tomar ninguna placa. Esto ocurrió en cuatro de ellas: Catania (+47° a +54°), Oxford (+25° a +31°), Hyderabad (Santiago) (-17° a -23°)

y Perth (Río de Janeiro) (-40° a -32°).

Por otra parte, todas las placas del Catálogo fueron medidas sistemáticamente, mientras que las correspondientes a la Carta nunca lo fueron. Actualmente se cree que alrededor de 7000 de las 10000 placas que se registraron se encuentran en buenas condiciones y son susceptibles de análisis.

1.4 Proyectos modernos relacionados con la CdC.

En la actualidad se están llevando a cabo diversos programas de investigación dirigidos al aprovechamiento de los datos recogidos tanto en la Carta como en el Catálogo Astrográfico. Su principal valor reside en que hace ya cerca de un siglo que fueron realizadas con lo que son una fuente de datos ideal para la detección de movimientos propios y, en general, de cualquier fenómeno que implique cambios del sistema estudiado que requieran un período de tiempo de esta magnitud.

Dos son los proyectos que yo consideraría más ambiciosos. Por una parte, en el Observatorio de Pulkovo se están remidiendo parte de las placas del Catálogo Astrográfico con el objetivo de construir un nuevo catálogo con posiciones y movimientos propios de alta precisión para unos 5 millones de estrellas, lo que calculan que supondrá unas 100 estrellas de referencia por grado cuadrado, con objetos hasta la magnitud $V=13$ (Potter 1995, Evdokimov 1995). Por otra, existe un proyecto europeo, encabezado por el "Sternwarte" del Instituto Astronómico de la Universidad de Bonn (Alemania) y en el que me encuentro incluida, con el objetivo de medir todas las placas de la Carta que aún se conservan en buen estado (Ortiz Gil *et al.* 1995). Los objetivos de este último proyecto son los siguientes:

- Extensión del sistema de referencia de Hipparcos a magnitudes más débiles.

- Cálculo de movimientos propios de hasta un máximo de unos 10 millones de estrellas con una precisión esperada de 2 milisegundos de arco por año.
- Cálculo de movimientos propios de cúmulos estelares, tanto abiertos como globulares.
- Determinación de magnitudes fotográficas con una precisión de 0.1^m a 0.2^m .
- Estudios relativos a estructura y cinemática galácticas (cinemática de halos, estrellas con grandes movimientos propios, separación cinemática de diferentes tipos de estrellas, etc.).

1.5 La observación fotográfica de asteroides.

La determinación y mejora de las órbitas de los asteroides proporciona datos de gran importancia en diferentes contextos (de Pascual 1979). Por un lado, las observaciones astrométricas de ciertos asteroides seleccionados (programa propuesto por el ITA de San Petersburgo y aprobado por la comisión 20 de la IAU en 1991) permiten la determinación de los parámetros de orientación de los sistemas de referencia celestes y de los errores sistemáticos de los catálogos estelares. Por otro lado, la existencia de perturbaciones hace necesario un seguimiento continuo de los asteroides de forma que no sean perdidos. Esta vigilancia es especialmente importante en el caso de familias cuyas órbitas cruzan la de la Tierra (Apolo y Amor) dado el peligro que supone la colisión con un asteroide cuyo diámetro sea de varios kilómetros.

Asimismo, la gran precisión con que es posible determinar sus posiciones y movimientos permite la verificación de diferentes aspectos de la teoría de perturbaciones, la determinación de masas en el Sistema Solar y la comprobación de teorías de la Mecánica Celeste.

Bibliografía.

de Azcárate, T. (1921) *Catálogo Astrográfico*. Observatorio de San Fernando, vol I.

de Pascual, M. (1979) "Asteroides". *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*.

Eichhorn, H. (1974) *Astronomy of star positions*. Frederick Ungar Publishing Co., Inc.

Evdokimov, A.E.; Potter, H.I. (1995) "Identification of stars from large catalogues "Carte du Ciel" and GSC on the modern plates" .*Proceedings del "Third International workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics"*, Cuenca, Octubre 1994.

Gliese, W. (1988) "Fundamental Catalogues". En "*Mapping the sky: past heritage and future directions*", *Proceedings IAU simposium no. 133*, París.

IAU (1887-1909) *Actas de las reuniones del Comité Internacional Permanente para la ejecución de la Carta Fotográfica del Cielo correspondientes a los años 1887, 1889, 1891, 1896, 1900 y 1909*. Institute de France, Académie des Sciences.

IAU (1971) *Proceedings of the XIV general assembly, Brighton, 1970*. Transactions of the IAU, vol. XIVb.

Malin, D. (1994) "Kodak and the future of astronomical photography". En "*Astronomy from wide-field imaging*", *Proceedings IAU simposium no. 161*, Potsdam (Alemania).

Maury, A. (1988) "Past, present and future of photographic surveys". En "*Mapping the sky: past heritage and future directions*", *Proceedings IAU simposium no. 133*, París.

O'Hara, N.P.H. (1988) "Astrographic Catalogues of British Observatories". En "*Mapping the sky: past heritage and future directions*", *Proceedings IAU simposium no. 133*, París.

Ortiz Gil, A.; Brosche, P.; Hiesgen, M. (1995) "Salvaging an astrometric treasure". *Astronomische Gesellschaft Abstr. Ser. no. 11*, p. 92. Bonn, Septiembre 1995.

Potter, H.; Polyakov, E.; Kopylov, I.; Kanayev, I.; Evdokimov, A.; López, A.; Flores, A.; Zalles, R. (1995) "CdC2 - The project of reobservation of the "Carte du Ciel" zone catalogues." *Proceedings del "Third International workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics"*, Cuenca, Octubre 1994.

Quebette, J.; Dumoulin, B.; West, R.M. (1986) "Grid Processing of Large Photographic Plates" , *The Messenger*, 46, p.7.

Trépied, Ch. (1892) *Comentaires des décisions prises par les Conférences Internationales pour l'exécution photographique d'une Carte du Ciel*. Observatoire de Paris.

Weimer, T. (1988) "Naissance et developpement de la Carte du Ciel en France". En "*Mapping the sky: past heritage and future directions*", *Proceedings IAU simposium no. 133*, París.

Capítulo 2

Astrometría con placas fotográficas.

2.1 Métodos

2.1.1 Campo extenso y seguimiento sidéreo (una exposición).

Catálogos estelares.

Una de las aplicaciones más importantes de las placas fotográficas es sin duda la producción de catálogos estelares. Sólo el gran campo que puede cubrirse con una placa permite la realización de registros de extensas áreas del cielo.

Un catálogo estelar es, básicamente, una lista de posiciones precisas de estrellas. A partir de esto, se pueden encontrar diferentes tipos de catálogos, dependiendo de cómo y con qué tipo de datos hayan sido construídos. Un *catálogo independiente* u *observacional* es una lista de posiciones que no ha sido construída a partir de posiciones publicadas anteriormente, mientras que en un *catálogo de compilación* las posiciones han sido determinadas combinando las posiciones dadas por más de un catálogo independiente. Además de posiciones, este último tipo de catálogos suele contener también movimientos propios. Un *catálogo relativo* es aquél en el que las posiciones son calculadas respecto de las posiciones de un conjunto de estrellas de referencia cuyas posi-

ciones se asume que son conocidas. En cambio, en un *catálogo absoluto* el método de determinación de las posiciones es independiente de posiciones estelares conocidas previamente. Si las posiciones se derivan de la observación directa con un círculo meridiano (u otro tipo de instrumento), el catálogo es entonces *visual*, siendo un *catálogo fotográfico* aquél cuyas posiciones se derivan de las posiciones relativas de las estrellas en placas fotográficas. Si la lista de posiciones se refiere sólo a estrellas que están dentro de una estrecha banda de declinación, el catálogo es un *catálogo de zona*. Un *catálogo fundamental* es un catálogo de observaciones de posiciones de estrellas obtenidas a través de métodos absolutos tanto en ascensión recta como en declinación. Estas observaciones son realizadas sin ninguna referencia a coordenadas que hayan sido determinadas con anterioridad para estas estrellas, y deben de repetirse en diferentes épocas, de modo que se disponga de la variación anual de las posiciones de las estrellas y de sus coordenadas en una época arbitraria. El término de *catálogo fundamental* también suele aplicarse al resultante de la combinación de varios catálogos con observaciones fundamentales.

Las posiciones que aparecen en los diferentes catálogos proceden de los datos directos de la observación, que han sido sometidos a un proceso de reducción adecuado. Estos datos deben de ser convertidos en primer lugar en posiciones aparentes correspondientes a la época de observación, aplicando correcciones instrumentales tales como acimut, colimación, etc. Las posiciones medias respecto del ecuador y el equinoccio a los cuales el catálogo se debe de referir se obtienen eliminando efectos de refracción, aberración diurna y anua, paralaje, nutación y precesión para la época de las observaciones.

En cuanto a la organización general de un catálogo, siempre suelen publicarse con un formato similar. Por ejemplo, el número de serie y la magnitud de cada estrella están casi siempre presentes. El dato más importante es, por supuesto, las posiciones medias en ascensión recta y declinación de las estrellas referidas a un sistema coordinado concreto. Algunos indican también el sistema fundamental al cual están referidas las posiciones. Otros incluyen el cálculo del efecto de la precesión sobre las posiciones, las componentes

del vector unitario de posición (coordenadas rectangulares de la estrella en la esfera unidad, en el sistema de coordenadas medias), el número de observaciones realizadas, el promedio de las épocas de observación (que para algunas estrellas pueden ser diferentes en ascensión recta y en declinación), los números asignados a las estrellas en otros catálogos, movimientos propios, tipos espectrales e índices de color.

Identificación de asteroides.

La aplicación de métodos fotográficos para el descubrimiento y estudio de asteroides fue llevada a cabo por primera vez por el profesor Max Wolf, de Heidelberg, en 1891 (Holden 1896). El método de Wolf permite la detección de los asteroides gracias a su movimiento aparente respecto de las estrellas.

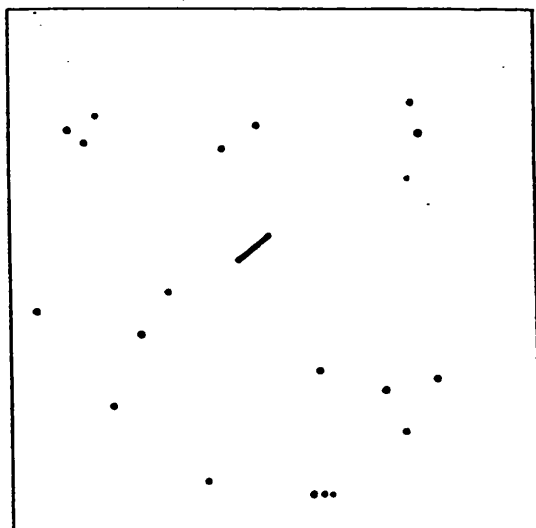


Figura 2.1: Método de Wolf. El seguimiento es sidéreo con lo que la imagen del asteroide resulta en un trazo.

Cuando el seguimiento es sidéreo y las exposiciones son de larga duración, las estrellas aparecen en las placas como puntos, mientras que debido a su



movimiento aparente, el asteroide da lugar a la aparición de un trazo en la emulsión (fig. 2.1). Este es un buen método para el descubrimiento de nuevos asteroides, ya que permite su identificación de forma inmediata en la placa. Wolf exponía dos placas de la forma siguiente: primero una sola placa durante una hora, al cabo de esa hora, empezaba a exponer la segunda placa. Al final de la segunda hora dejaba de exponer la primera placa y continuaba la exposición de la segunda hasta el final de la tercera hora. El resultado eran dos placas con un tiempo de exposición de dos horas cada una y cuya comparación permitía la detección rápida de imágenes espúreas.

Este método, sin embargo, presenta una serie de inconvenientes de importancia:

a) Los asteroides más débiles no quedan registrados al repartir su poca luz entre los diferentes puntos del segmento que van trazando en la placa.

b) Al tratarse de placas de larga exposición, las estrellas de catálogo resultan en imágenes saturadas en la emulsión, lo que dificulta la medida de su posición.

c) El largo tiempo de exposición favorece la degradación de las imágenes debida a la presencia de turbulencias atmosféricas y al velado de la placa causado por la luz de fondo del cielo.

d) En el trazo del asteroide es imposible conocer a qué instante corresponde cada punto, excepto en los puntos extremos del segmento, cuya posición, por otra parte, es bastante difícil de determinar al ser difícil definir estos puntos extremos.

Estos inconvenientes hacen que la versión del método de Wolf que se acaba de exponer no sea demasiado útil en la realización de estudios astrométricos, aunque es muy efectivo a la hora de descubrir asteroides relativamente brillantes. Sin embargo, algunas variantes sí permiten la obtención de posiciones precisas (de Pascual 1979).

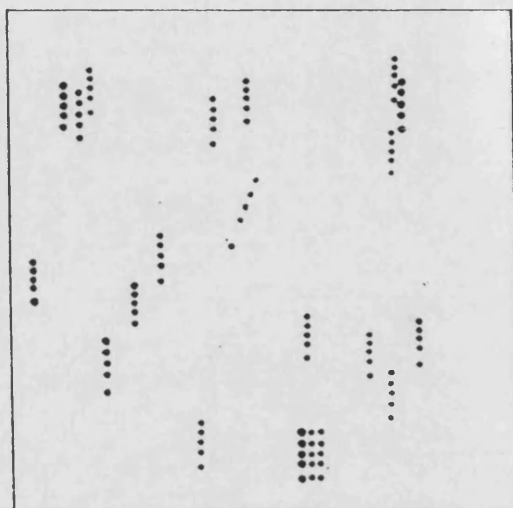


Figura 2.2: Método de Wolf con exposiciones cortas. El movimiento propio del asteroide le delata al dejar un rastro no paralelo al de las estrellas.

De lo anteriormente expuesto parece claro que lo ideal sería aplicar este método sólo a los asteroides más brillantes, realizando así exposiciones cortas. El problema aparece entonces en la identificación del asteroide, pues tendrá una imagen puntual, como cualquier otra estrella en el campo. Si se toman varias exposiciones cortas, dejando un intervalo suficiente entre ellas para que el objeto se mueva respecto del campo de estrellas, y además se desplaza el chasis ligeramente en declinación, se obtiene una placa con columnas de puntos paralelas entre sí todas excepto una, que es la que corresponde a las imágenes del asteroide (fig. 2.2). Si además el desplazamiento en declinación del chasis no es constante, será fácil reconocer el orden en que las exposiciones han sido tomadas. Con este método, por ejemplo, D. José Comas y Solá, director del Observatorio Astronómico de Fabra (Barcelona) descubrió un gran número de asteroides a principios del siglo, entre ellos el número 986 (llamado "Amelia" en honor de su esposa).

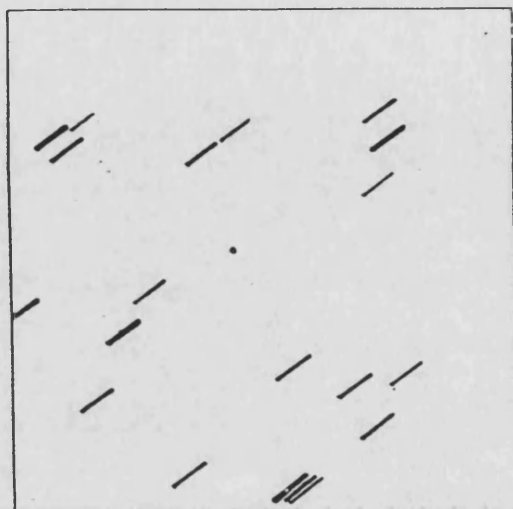


Figura 2.3: Método de Metcalf. Al tomarse la fotografía con seguimiento diferencial, la imagen del asteroide es puntual, mientras que las estrellas aparecen como trazos.

2.1.2 Campo extenso y seguimiento diferencial.

Con el método que ha sido expuesto anteriormente resulta bastante evidente que no es posible la detección y estudio de asteroides débiles. Por un lado, no tienen suficiente luz para dejar un rastro en la emulsión (según el método original). Por otro, sucesivas exposiciones darán imágenes enormes (e incluso puede que solapadas entre sí) correspondientes a las estrellas más brillantes, que suelen ser las que sirven de referencia por ser estrellas de catálogo.

Una solución inteligente a este problema es realizar un seguimiento diferencial en lugar de aplicar un seguimiento sidéreo. Este es el denominado **método de Metcalf** (de Pascual 1979). Si el movimiento del telescopio sigue el movimiento del asteroide, la luz procedente de éste siempre incide sobre el mismo punto de la placa, dando así lugar a una imagen puntual transcurrido un tiempo adecuado de exposición. (fig. 2.3). Por otro lado, las estrellas aparecerán como trazos en la placa. Esto da lugar al mismo problema que se describió antes a la hora de determinar las posiciones de las estrellas de referencia, aunque en este caso ello es menos grave ya que las

coordenadas de catálogo correspondientes son conocidas. La solución está de nuevo en realizar no una sino una serie de exposiciones sucesivas (ver fig. 2.4). Cuando el objeto es tan débil que puede ser confundido con imperfecciones en la placa, la realización de dos placas al mismo tiempo puede ayudar. Esta es precisamente una de las ventajas de los astrógrafos dobles, al permitir la exposición simultánea de dos placas que cubren un mismo campo.

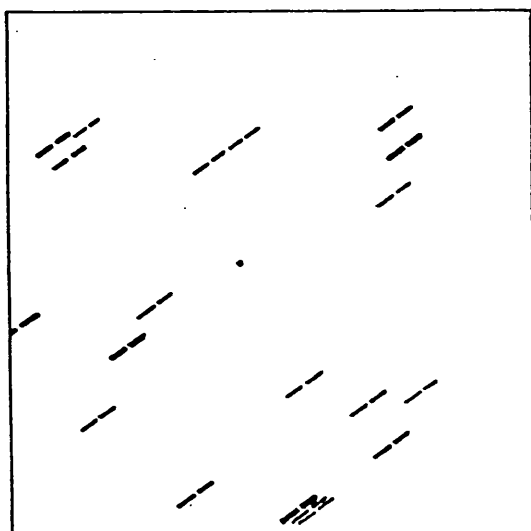


Figura 2.4: Método de Metcalf con exposiciones cortas. Presenta la ventaja de que es más fácil determinar la posición de las estrellas a partir de trazos lo más cortos posible.

La aplicación del método de Metcalf supone el conocimiento *a priori* del movimiento del asteroide. Es de poca utilidad, pues, en el descubrimiento de nuevos asteroides, y se utiliza sobre todo para la mejora de órbitas de objetos ya conocidos. Aunque puede servir para el descubrimiento de asteroides que pertenezcan a familias cuyo movimiento aproximado es conocido. Este es el procedimiento seguido en la actualidad por el programa de rastreo LUKAS (Lowell-UK Asteroid Survey) en el que el seguimiento se realiza siguiendo un movimiento medio de los asteroides (Russel *et al.* 1987). Las estrellas y galaxias son fácilmente reconocibles por su rastro más o menos constante en longitud y orientación. Pero las imágenes más débiles dejan rastros que aparecen fragmentados, lo que altera la longitud y orientación de los mis-

mos en hasta un 30% de las imágenes en la placa. Tomando muchas placas de una misma región, comparándolas unas con otras y exigiendo límites al movimiento del asteroide (esto es, estableciendo una longitud máxima de su rastro) es posible identificarlo con certeza entre el 85% y el 90% de los casos. Otra alternativa es realizar la identificación cruzada entre las imágenes de la placa y las presentes en algún mapa del cielo digitalizado. Las imágenes que coinciden son rechazadas, mientras que las restantes son consideradas cuerpos del Sistema Solar.

2.1.3 Campo reducido.

En el OAUV las observaciones de asteroides se realizan con el objetivo de mejorar sus órbitas. El descubrimiento no es posible ya que actualmente los asteroides que quedan por descubrir son de magnitudes superiores a la 16, lo que está muy lejos de las posibilidades de un telescopio situado en el corazón de una gran ciudad. Sin embargo, se ha participado en campañas de descubrimiento de asteroides en el observatorio de La Silla (Chile).

Las placas utilizadas en el OAUV cubren un campo pequeño, de $1.3^{\circ} \times 1.5^{\circ}$ y son obtenidas con un refractor Grubb de 6" y 2.30 m de focal. El método seguido en las observaciones es el de Wolf con exposiciones cortas, de forma que sólo asteroides con magnitudes menores a $B \approx 12$ pueden ser registrados, lo cual no es gran problema pues la mayoría de los asteroides seleccionados pertenecientes al programa del ITA cumplen esta condición. Por tanto, se obtienen imágenes puntuales tanto para el asteroide como para las estrellas. Entre una exposición y la siguiente se desplaza ligeramente el chasis de modo que el resultado es una placa con dos o tres exposiciones para cada objeto. Pero dado que el tiempo que transcurre entre una exposición y la siguiente es pequeño (en general, inferior a 10 minutos en la mayoría de los casos), no se puede apreciar directamente en la placa el movimiento aparente del asteroide respecto del campo de estrellas. La identificación visual del asteroide en las placas se realiza entonces comparando diferentes placas de dicho asteroide que hayan sido tomadas con un intervalo de tiempo suficiente entre ellas. Normalmente comparamos unas placas con las correspondientes realizadas

en los días anteriores o siguientes.

2.2 Proyectos y aplicaciones.

2.2.1 Catálogos estelares.

Todos los catálogos fundamentales han sido construídos a partir de observaciones con círculos meridianos, mientras que aquéllos obtenidos con datos registrados en placas fotográficas son siempre del tipo que antes se ha definido como catálogos de zonas. Entre ellos se encuentran, por ejemplo, el Catálogo Astrográfico (cap. 1), los catálogos AGK2 y AGK3 de la Astronomische Gesellschaft, los catálogos de Yale, los dos Catálogos Fotográficos de El Cabo, y los del Observatorio de Monte Palomar (POSS-I y POSS-II). A modo de ejemplo, en la tabla 2.1 (Morgan *et al.* 1987) se muestra un resumen de los rastreos celestes publicados (o en realización) con tres telescopios Schmidt: el 1.2 m de Monte Palomar, el UK Schmidt Telescope de 1.2 m y el 1.0 m de ESO. Los rastreos SERC son los realizados con el UK Schmidt. La distancia entre centros en los campos de los proyectos POSS-I y Palomar V es de 6° , mientras que en los restantes es de 5° . Además, los campos de SERC y POSS son de $6^\circ.4 \times 6^\circ.4$, mientras que los campos de ESO son de $5^\circ.5 \times 5^\circ.5$. La magnitud límite nominal viene dada en la columna designada por "mag", y las fechas corresponden a las fechas en que se tomaron las placas.

Es interesante notar que en cierto modo la evolución de los rastreos refleja la evolución de los tipos de emulsiones disponibles. La introducción de las emulsiones Kodak IIIa de grano fino coincidió con la realización de los dos rastreos ESO/SERC en el hemisferio sur, lo que hizo que sean aproximadamente 1.5 magnitudes más profundos que el antiguo rastreo del hemisferio norte de Monte Palomar. El poder alcanzar magnitudes cada vez mayores fue una de las razones que llevó al inicio de los nuevos rastreos UKST (UKST Equatorial Survey) y POSS-II.

Los catálogos fotográficos son pues de mayor importancia a la hora de

Proyecto	Color	Declinación	No. campos	mag	Fecha
POSS-I	azul	≥ -30	935	21	1950-58
POSS-I	rojo	≥ -30	935	21	1950-58
POSS-I	IR	$\geq 0^*$	80	19	1975-79
Palomar V	Optico	$\geq +6$	583	19	1982-83
ESO-B	azul	≤ -20	606	21	1973-78
ESO/SERC	azul	≤ -20	606	23	1974-87
ESO/SERC	rojo	≤ -20	606	22	1978-
SERC-EJ	azul	$-15 - 0$	288	23	1979-
SERC-EJ	rojo	$-15 - 0$	288	22	1984-
POSS-II	azul	≥ 0	894	?	1987-
POSS-II	rojo	≥ 0	894	?	1987-
POSS-II	IR	≥ 0	894	?	1987-

Tabla 2.1: Algunos de los rastreos con telescopios Schmidt que han sido publicados o que se encuentran en fase de realización.

* limitado a latitudes galáticas $\leq 10^\circ$

densificar los sistemas de referencia primarios que contienen sólo las estrellas más brillantes. Actualmente el disponer de nuevos instrumentos permite determinar posiciones estelares con una precisión del orden de $0''.01$ (el satélite Hipparcos, por ejemplo). Con estos nuevos datos, una nueva reducción de los contenidos en registros fotográficos tan antiguos como el Catálogo Astrográfico o la Carta del Cielo permite la determinación de movimientos propios con una precisión que puede alcanzar los 2 milisegundos de arco por año (ver secc. 1.4).

2.2.2 Otros rastreos fotográficos.

El registro fotográfico de grandes zonas del cielo tiene también otro tipo de aplicaciones aparte de la construcción de catálogos estelares. Existen series de catálogos de diversos objetos: el "Münster Redshift Project" de galaxias y cuásares (Seitter 1992), el "Edinburgh/Durham southern galaxy catalogue"

de galaxias (Nichol *et al.* 1992), el "ROE/NRL cluster catalogue" de cúmulos galácticos (Gursky *et al.* 1992), son unos pocos ejemplos. El conteo de estrellas permite la construcción de modelos de la estructura global de galaxias (Yamagata *et al.* 1987, Gardiner *et al.* 1987). Rastros de galaxias brillantes como el "APM bright galaxy survey" contribuyen al estudio de la distribución y movimiento a gran escala de las galaxias (Raychandhury 1992). Otros rastros tienen como objetivo la identificación en el óptico de fuentes en radio o rayos X (McLean *et al.* 1992, Wolstencroft *et al.* 1992).

Bibliografía.

de Veigt, Ch. (1987) "Status of Photographic Catalogs: available material and future developments". En "Mapping the sky: past heritage and future directions", Proceedings IAU Symposium no. 133, París.

de Pascual, M. (1979) "Asteroides". *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*.

Eichhorn, H. (1974) *Astronomy of star positions*. Frederick Ungar Publishing Co., Inc.

Gardiner, L.T.; Hawkins, M.R.S.; Hatzidimitriou, D. (1992) "The structure and stellar content of the Small Magellanic Cloud". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Gursky, H.; Cruddace, R.G.; Stuart, B.V.; Yentis, D.J.; MacGillivray, H.T.; Collins, C.A. (1992) "The ROE/NRL cluster catalogue: I. Correlation with southern Abell clusters". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Holden, E.S. (1896) "The photography of planetoids by Professor Max Wolf". *Pub. of the Astron. Soc. Pac. (PASP)*, 8, pp.23-24.

McLean, B.J.; Burg, R. (1992) "Optical identification of X-ray sources from digitised survey plates". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Morgan, D.H.; Tritton, S.B. (1987) "Mapping the sky - Surveys with Schmidt telescopes". En "Mapping the sky: past heritage and future directions", Proceedings IAU symposium no. 133, París.

Nichol, R.C.; Collins, C.A.; Guzzo, L.; Lumsden, S. (1992) "The Edinburgh/Durham southern galaxy catalogue". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Raychandhury, S. (1992) "The APM bright galaxy surveys". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Russel, K.S.; Bowell, E.; Bus, S.J.; Skiff, B. (1992) "Asteroid searches from UKST material". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Seitter, W.C. (1992) "The Münster Redshift Project - MRSP". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Wolstencroft, R.D.; MacGillivray, H.T.; Lonsdale, C.J.; Conrow, T.; Yentis, D.J.; Wallin, J.F.; Han, G. (1992) "Optical identification of sources in the IRAS faint source data base". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Yamagata, T.; Yoshii, Y. (1992) "UBV star counts in selected area 54, and global structure of the galaxy". *Digitised Optical Sky Surveys*, H.T. MacGillivray & E.B. Thompson, eds.

Capítulo 3

Características de las placas fotográficas como detectores.

3.1 No linealidad de las placas fotográficas.

Como es bien sabido, las placas fotográficas son detectores cuya respuesta es no lineal. Si se somete una placa a una serie de exposiciones, cada una de ellas más larga que la anterior en un factor constante, se procesa y luego se mide la densidad de los depósitos de plata que cada exposición ha generado, la curva resultante al dibujar la densidad en función del logaritmo de la exposición correspondiente es la llamada *curva característica* de la placa (fig 3.1). La *densidad* (D) se define como el logaritmo de la *opacidad* (O) del depósito de plata. La opacidad, a su vez, es la inversa de la *transmisión* (T), que es la razón entre el flujo de luz transmitida y el de luz incidente procedente del densitómetro (aparato utilizado para la medida de la densidad en placas fotográficas).

$$D = \log O = \log \frac{1}{T}, \text{ donde } T = \frac{\text{Flujo transmitido}}{\text{Flujo incidente}} \quad (3.1)$$

Finalmente, la *exposición* es la cantidad total de energía que actúa sobre la emulsión. Se mide en unidades de metro-candela-segundo.

En la curva característica se pueden apreciar tres regiones con pendientes diferentes. En el extremo inferior existe un punto, A, por debajo del cual la

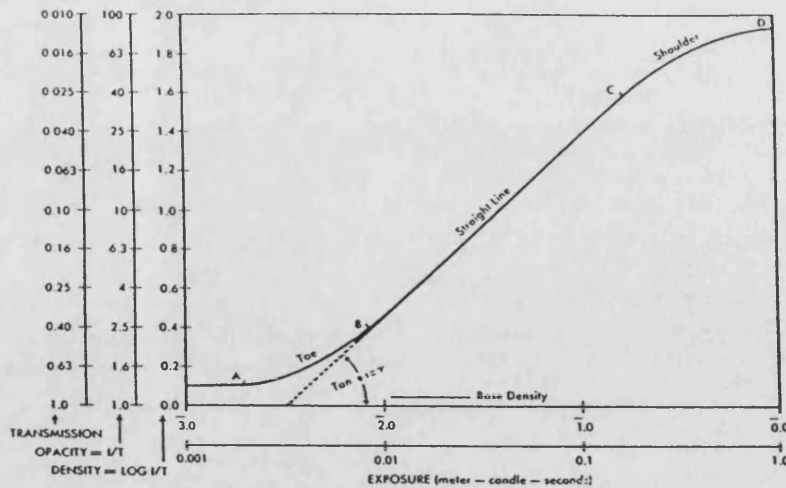


Figura 3.1: Curva característica de una emulsión fotográfica.

exposición es demasiado pequeña para dar lugar a una imagen susceptible de ser revelada. Entre A y B la pendiente o gradiente crece con exposiciones crecientes. La porción de curva entre B y C es el rango en el cual el gradiente es constante y la densidad crece linealmente con el logaritmo de la exposición. Esta es la región en la que se debe de trabajar cuando es importante conocer la relación entre la densidad de la imagen y la exposición (en la determinación de magnitudes fotométricas, por ejemplo). La región más allá del punto C es la región de sobreexposición. En ella el gradiente de la curva decrece cuando la exposición aumenta. A partir del punto D la curva se hace horizontal lo que significa que la densidad ya no cambia aún cuando las exposiciones sean diferentes.

La tangente del ángulo que la porción recta de la curva característica forma con el eje de la exposición recibe el nombre de *gamma* (γ) y su valor se utiliza para tener una medida cuantitativa del contraste de la emulsión, que depende tanto de las características de ésta como del grado de revelado a que ha sido sometida. Así, se observa que a medida que aumenta el grado de revelado (y, por tanto, el contraste en la imagen) el valor de gamma también crece hasta que se alcanza un máximo (fig. 3.2). Un grado de revelado excesivo resulta en una caída del valor de gamma y en la aparición de neblina en la imagen.

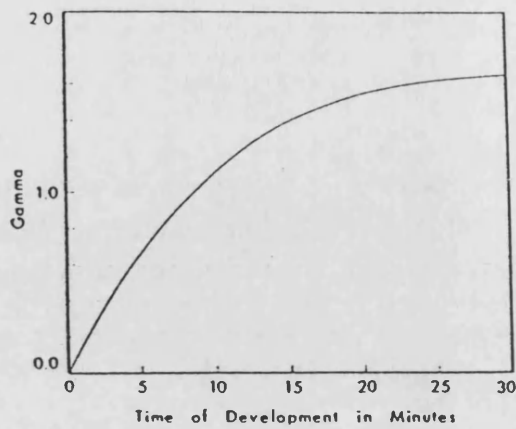


Figura 3.2: Evolución del parámetro gamma de una emulsión fotográfica en función del tiempo de revelado.

3.2 Ruido.

Una de las desventajas de las placas fotográficas es que en general presentan una relación señal/ruido baja. Dainty *et al.* (1974) demostraron teóricamente que el ruido de la emulsión es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad de la imagen D , mientras que Lee *et al.* (1982) establecieron que la precisión límite que puede alcanzarse en la medición de una posición en una emulsión fotográfica es

$$\epsilon_x = \epsilon_0 D_p^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

donde ϵ_0 es proporcional al microrruido (ver siguiente párrafo) de la emulsión correspondiente a una densidad $D = 1$, y D_p es el pico de densidad de la imagen.

El ruido total en una emulsión fotográfica puede ser considerado como la combinación de un *microrruido* y un *macrorruido*. Como microrruido se define la desviación cuadrática media de la variación del ruido de pixel a pixel, mientras que el macrorruido es la desviación cuadrática media de la variación sobre un nivel de fondo promedio calculado para la placa entera. El microrruido es, pues, ruido a escala del tamaño de la imagen por lo que es especialmente problemático en astrometría ya que influye en la determinación de las posiciones de las imágenes. Por otro lado, en fotografía fotométrica es el macrorruido el que limita la precisión de los resultados (por ejemplo, un

revelado no uniforme).

Existe sin embargo otro tipo de macrorruído que sí degrada la precisión en la medida de las posiciones. Es el ruido debido a desplazamientos de la emulsión, turbulencias atmosféricas, errores en el sistema óptico, errores en la máquina que mide las posiciones de los objetos en las placas (calibración, calentamiento de la máquina), etc.

3.3 Efectos de adyacencia.

Cuando dos imágenes pequeñas están muy próximas entre sí en una placa fotográfica, pueden aparecer los llamados *efectos de adyacencia* que son el efecto de turbiedad y el efecto Kostinsky.

3.3.1 Turbiedad.

El efecto de turbiedad es un fenómeno relacionado con la exposición de la placa. Mientras la exposición se lleva a cabo, el gradiente de la imagen latente que rodea a una imagen puede solapar el de la imagen contigua si ésta está suficientemente próxima y dar lugar a una imagen susceptible de ser procesada también por el revelador. El efecto resultante es una atracción entre ambas imágenes de forma que la medida de la distancia entre ellas resultará en una cantidad más pequeña que el valor real.

La magnitud de este efecto es máxima cuando las dos imágenes involucradas son del mismo tamaño, y suele ser despreciable excepto en el caso de imágenes muy pequeñas y cercanas, aunque en su aparición o no influyen también otros factores como el modo en que se ha llevado a cabo el revelado, el tipo de placa utilizado, el tipo de revelador, etc. Por ejemplo, una agitación vigorosa del revelador durante el tratamiento de la emulsión puede evitar en parte su aparición.

Frank E. Ross (1921) estudió este efecto obteniendo una ecuación que da

cuenta de la variación de la distancia entre exposiciones en función de su intensidad y de su distancia real. En el caso de imágenes en contacto llega a la conclusión de que la contracción es igual al incremento que tiene lugar en el radio de la imagen estelar cuando se duplica el tiempo de exposición, y es, en cambio, independiente de su tamaño.

3.3.2 El efecto Kostinsky.

El efecto Kostinsky está relacionado con la inhibición de la reacción química del revelador. Su nombre lo recibe del primer científico que parece que se dedicó a su estudio, S. Kostinsky, astrónomo del observatorio de Pulkovo (San Petersburgo, Rusia) que lo descubrió mientras realizaba estudios fotográficos de estrellas dobles (Kostinsky 1907).

El método seguido por Kostinsky para el análisis de este efecto fue sencillamente el ir midiendo las distancias entre los centros de una serie de imágenes de una estrella doble. Consideró tanto estrellas reales como artificiales e hizo variar el tiempo de exposición de forma que obtuvo una secuencia de imágenes que iban desde las más pequeñas posibles de obtener hasta aquéllas en las que empezaba el contacto o incluso se producía el solapamiento. El mismo procedimiento fue seguido por Ross (1921), quién descubrió que la magnitud de la repulsión depende del tipo de revelador empleado y de la proximidad entre el par de imágenes.

El fenómeno se explica, como dije antes, en términos de un agotamiento del revelador en la zona de contacto entre las dos imágenes. En efecto, los productos de la reacción son capaces de inhibirla y, en esta región en particular, se acumulan en mayor cantidad que en otros puntos alrededor de la imagen, ya que ahí contribuyen los obtenidos en las dos imágenes a la vez. El proceso de revelado es entonces menos intenso, mientras que en el resto de la imagen procede de forma normal. El resultado final es un aumento aparente de la distancia entre las dos imágenes (ver figs. 4.2 y 4.3).

3.3.3 Conclusión.

Hemos visto dos efectos de adyacencia que tienen lugar entre imágenes pequeñas y próximas entre sí. Sin embargo, son efectos cuyos resultados son de signo contrario: atracción debida al efecto de turbiedad y repulsión debida al efecto Kostinsky. Cabe, pues, preguntarse cuál será el resultado neto de la combinación de ambos. Se ha observado (Ross 1921) que mientras la exposición es normal el efecto que se manifiesta es el de turbiedad, mientras que en cuando la exposición es excesiva el dominante es el de Kostinsky.

En este trabajo sólo las placas de la Carta del Cielo presentan el efecto Kostinsky (ver cap. 4, secc. 4.1). En las placas de asteroides realizadas en el Observatorio de Valencia la separación típica entre exposiciones (unos 0.5 mm) es suficientemente grande para evitar que algún efecto de adyacencia tenga lugar. Por otro lado, el efecto de turbiedad no aparece en las placas de la Carta por la misma razón: la separación de unas 180 μm entre las exposiciones impide fenómenos de turbiedad, mientras que cuando son lo bastante grandes (estrellas de baja magnitud) como para conseguir que esta distancia disminuya de forma importante o incluso se produzca el solapamiento entre vecinas, el efecto Kostinsky lo enmascara completamente.

La modelización del efecto Kostinsky es muy compleja debido a que su magnitud depende de un gran número de factores, y hay que estudiarla en cada caso por separado de manera que no hay forma de conocer a priori cuál será su importancia y qué condiciones provocarán su aparición. El problema es aún más grave cuando se trata con las placas de la Carta del Cielo ya que se trata de placas que ya no se fabrican, hechas por diferentes fabricantes, reveladas bajo condiciones inciertas y dispares y, posiblemente, con diferentes tipos de productos químicos.

3.4 Aberraciones ópticas.

En los sistemas de lente presentes en los telescopios son tres los tipos de aberración más comunes: la aberración esférica, la aberración de coma y la aberración cromática (Conrady 1957, Hecht 1987). Su presencia dificulta el análisis de las imágenes registradas en las placas debido a las deformaciones que provocan en ellas.

La aberración esférica (fig. 3.3, extraída de Hecht (1987)) afecta a los rayos no paraxiales ¹, para los cuales la distancia focal depende del punto en la lente esférica sobre el que inciden. Afecta sólo a objetos situados sobre el eje óptico. Si se sitúa una pantalla en el plano focal de la lente, la imagen de una estrella parecerá como una mancha central brillante rodeada por el halo formado por el cono de rayos marginales. Existe una posición para dicho plano en la cual este halo adquiere un diámetro mínimo, que recibe el nombre de *disco de mínima confusión*.

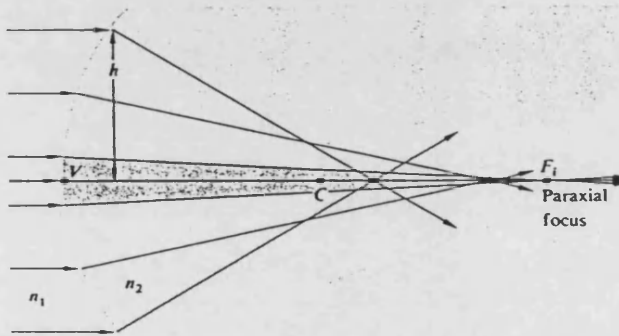


Figura 3.3: Aberración esférica. Rayos incidentes en diferentes puntos de la lente poseen distancias focales diferentes.

La aberración de coma (fig. 3.4) afecta a puntos de la imagen que yacen fuera del eje óptico. Los rayos que definen círculos concéntricos en la pupila de entrada definen una serie de círculos excéntricos en el plano focal, formando un cono. La región central de la lente forma una imagen puntual en el vértice de este cono. Esto lleva a una deformación de las imágenes

¹Un rayo es paraxial cuando el ángulo θ con que incide sobre la lente es $\theta \simeq 0^\circ$.

dándoles un aspecto similar al de un cometa, razón por la cual se le llamó “coma” a este tipo de aberración.

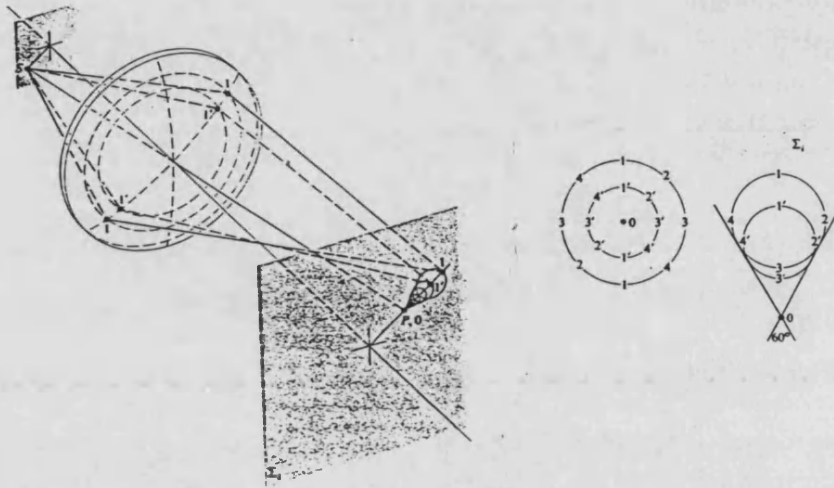


Figura 3.4: Aberración de coma. Rayos que definen círculos concéntricos en la pupila de entrada definen círculos excéntricos en el plano focal.

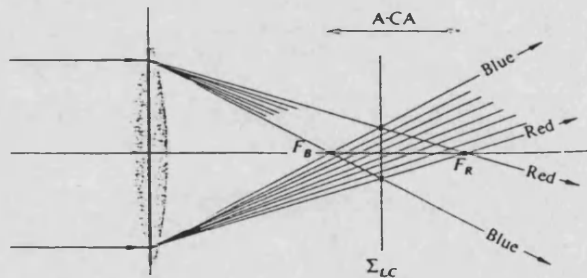


Figura 3.5: Aberración cromática. La distancia focal de un rayo es función de su longitud de onda.

Un sistema óptico se califica de *aplanático* cuando está corregido frente a las aberraciones esférica y de coma.

Por otro lado, la aberración cromática (fig. 3.5) consiste en que la longitud focal de un rayo es función de su longitud de onda, por lo que el punto

focal será diferente para cada color del espectro.

Bibliografía.

- Conrady, A.E. (1957).** *“Applied Optics and Optical Design”*. Dover Publications Inc.
- Hecht, E. (1987)** *“Optics.”* Addison-Wesley Pub. Co., Inc. (segunda edición).
- Kostinsky, S. (1907)** *“Über die Einwirkung zweier Bilder auf einander bei astrophotographischen Aufnahmen”*. Mitteilungen der Nikolai-Hauptsternwarte, Pulkowo, Band II, no. 14.
- Ross, F. E. (1921)** *“The mutual action of adjacent photographic images”*. Ap.J., vol. 53, no.5, Junio.

Capítulo 4

Problemas específicos en las placas de la “Carte du Ciel”.

4.1 Imágenes triples.

El proyecto original de la Carta del Cielo preveía la realización de dos series de placas, tal como se ha explicado en el capítulo 1. Una de ellas constaría de una sola exposición de 60 min de duración y la otra de tres exposiciones de 20 min cada una. Sin embargo, ninguna de las dos series llegó a completarse nunca y en muchos observatorios sólo se tomaron placas de uno de los dos tipos. En los observatorios franceses, por ejemplo, sólo se llevaron a cabo exposiciones triples.

En cuanto al tipo de geometría a seguir en el caso de las exposiciones múltiples la recomendación realizada por el Comité fue la de disponer las imágenes formando un pequeño triángulo equilátero (fig. 4.1). Sin embargo, en todas las placas que he estudiado hasta ahora el triángulo es más bien isósceles, hecho importante pues predice la asimetría de los posibles efectos de adyacencia entre las exposiciones triples, que afectarán en mayor grado a dos de ellas. En la placa que he tomado como ejemplo, que corresponde al campo del cúmulo abierto M67 y procede del observatorio de Burdeos, la distancia media entre las exposiciones 1 y 2 ($\simeq 170\mu m$) es menor que la existente entre los pares 1-3 y 2-3, que es en ambos casos de poco más de

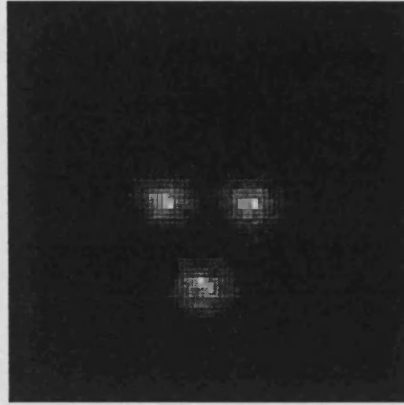


Figura 4.1: Exposiciones triples en la Carte du Ciel.

$190 \mu m$ (ver figs. 4.2 y 4.3)¹. Así, los efectos de adyacencia se manifestarán antes entre las estrellas que forman la base del triángulo.

Los problemas aparecen en las exposiciones múltiples de estrellas relativamente brillantes. Debido a que la separación entre las tres exposiciones es bastante pequeña, a partir de una magnitud $B \simeq 12.5$ empiezan a solaparse entre sí las exposiciones 1 y 2, solapándose las tres a partir de la magnitud $B \simeq 11$. Esto tiene dos consecuencias. Por un lado, el efecto Kostinsky (cap. 3, secc. 3.3) empieza a hacerse notar, pudiendo causar un desplazamiento de las imágenes en la placa respecto de su posición “correcta” en una cantidad de micras nada despreciable. En las figuras 4.2 y 4.3 se ve claramente cómo, a medida que la magnitud va decreciendo la distancia entre los pares de exposiciones considerados va en aumento, llegándose a alcanzar una distancia entre pares que puede superar en más de $40 \mu m$ a la distancia real (Ortiz Gil et al. 1995). Por otro, el solapamiento mutuo entre las tres exposiciones llega a casos extremos cuando las estrellas son muy brillantes, dando lugar a imágenes bastante deformes en las cuales es muy difícil a veces encontrar las tres componentes individuales (fig. 4.4).

¹La identificación de las diferentes exposiciones es como sigue: exposición 1 (vértice superior izquierdo), exposición 2 (vértice superior derecho), exposición 3 (vértice inferior).

Otro caso problemático es el de las estrellas dobles ya que las exposiciones correspondientes a cada una de ellas se mezclan entre sí (fig. 4.5). Cuando están muy cercanas o existe solapamiento entre ellas, su identificación y análisis se complica, manifestándose una vez más el efecto Kostinsky. Si también hay líneas del retículo cercanas, la situación se complica aún más pues puede haber un efecto Kostinsky añadido al anterior por la presencia de estas líneas, además de otros problemas (ver sec. 4.2).

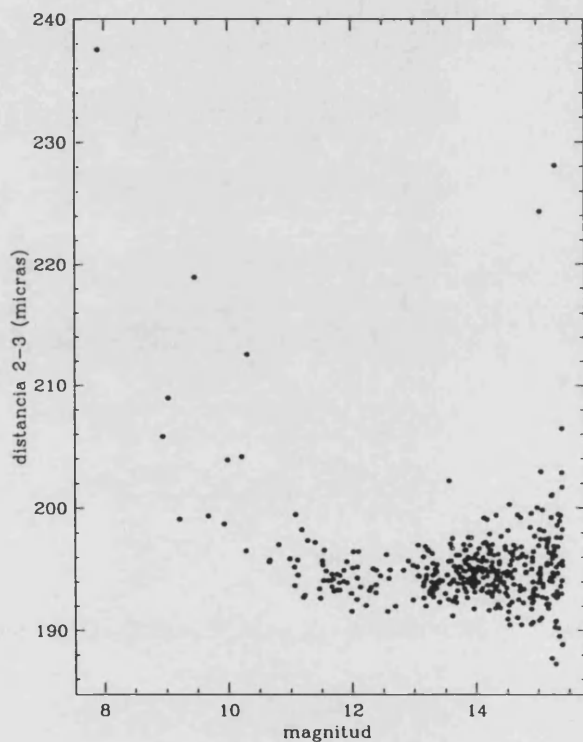


Figura 4.2: Distancia entre las exposiciones 2-3 en una placa de la CdC. Efecto Kostinsky: aparece un desplazamiento de las imágenes cuando las exposiciones están muy cercanas (ver cap. 3).

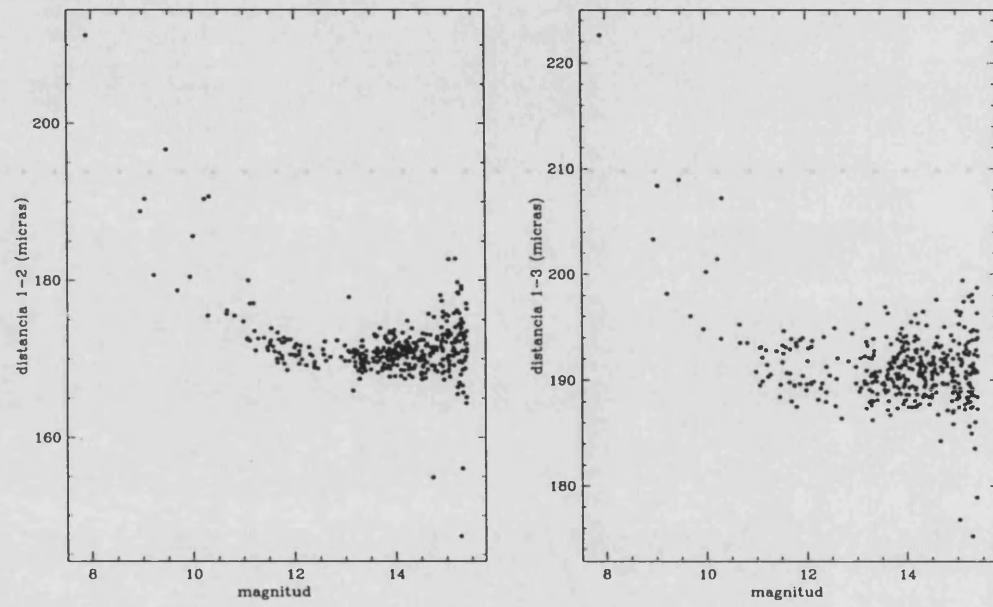


Figura 4.3: Distancia entre pares de exposiciones 1-2 y 1-3. Efecto Kostinsky (como en fig. 4.2).

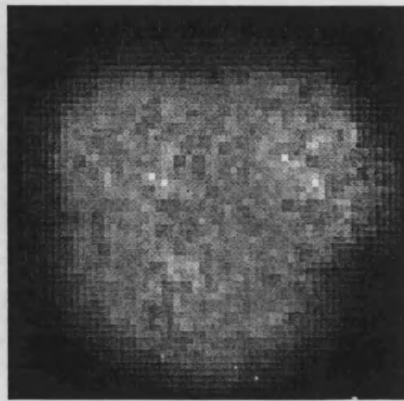


Figura 4.4: Exposición triple en la Carte du Ciel correspondiente a una estrella de magnitud $B \simeq 9$.

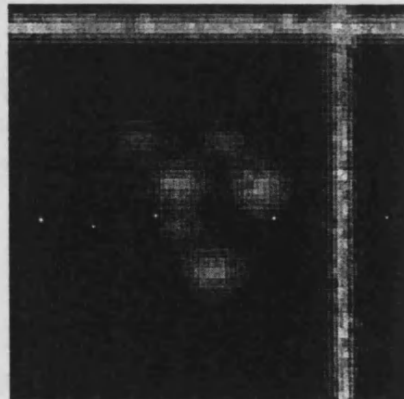


Figura 4.5: Imagen de una estrella doble. Se aprecian también irregularidades en la intensidad del retículo.

4.2 El retículo y su efecto sobre imágenes próximas.

La presencia del retículo impresionado sobre las placas de la Carta y del Catálogo tenía como fin, en un principio, la detección de desplazamientos de la emulsión y, posteriormente, facilitar la medida de las posiciones de las estrellas con las máquinas de que se disponía en la época (ver cap. 1, secc 1.3).

Este retículo es, en cambio, innecesario actualmente e incluso inconveniente cuando se trata de analizar las imágenes que desafortunadamente yacen justo debajo de alguna de las líneas (fig. 4.6) o que simplemente están muy próximas a ellas. Este es el caso de aproximadamente el 15% de las imágenes estelares en las placas.

Dos son los efectos que pueden presentarse. Cuando la imagen se halla cruzada por alguna línea del retículo, su densidad resulta alterada y, por tanto, cualquier estimación fotométrica que se lleve a cabo será errónea. Existe el problema añadido de que este efecto no es igual en todos los casos ya que no se trata de una simple adición lineal de intensidades y depende de la magnitud de las estrellas. En efecto, cuanto más intensa sea la imagen en cuestión más cerca se estará del “hombro” de la curva característica de la emulsión (ver fig. 3.1) y por tanto incrementos de intensidad ya no producen diferencias de densidad (se alcanza el límite de saturación de la placa). Además, la propia intensidad de estas líneas no es constante a lo largo de la placa (fig. 4.5), pues está alterada por pequeños defectos de impresión de la malla, defectos de la emulsión o puntos de mayor intensidad como son los puntos de cruce entre líneas ortogonales (Bonfond 1993).

Hay que tener en cuenta también la aparición de efectos de adyacencia, en este caso del efecto Kostinsky, cuando se trata con imágenes situadas tanto sobre como muy cerca de alguna de estas líneas. En consecuencia, la presencia del retículo provocará también una alteración en la posición del centro de las imágenes, introduciendo errores en las medidas de las posiciones que pueden llegar a ser bastante importantes.

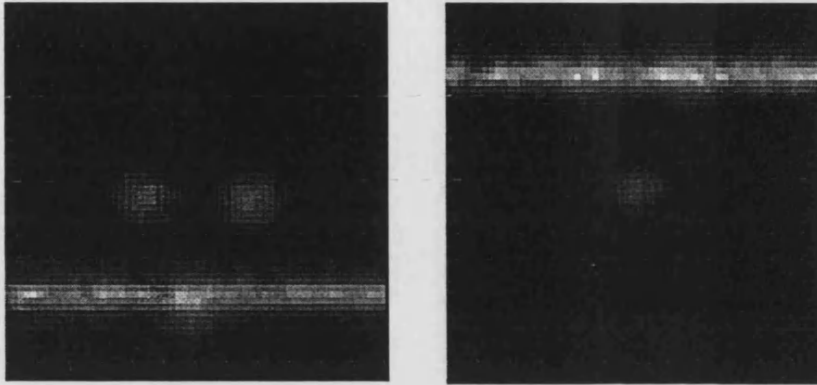


Figura 4.6: Dos imágenes triples afectadas de forma importante por la presencia del retículo.

4.3 Aberraciones ópticas.

A pesar de que una de las condiciones que debían de cumplir los telescopios era la de ser un sistema ópticamente aplanático (es decir, corregido frente a las aberraciones esférica y de coma), la mayoría de ellos presentan problemas de coma. Ello resulta en una distorsión de las imágenes situadas en los bordes de la placa. En la figura 4.8 puede verse dos de estas estrellas, y en la figura 4.7 se muestra la elipticidad media de las tres exposiciones de cada estrella en función de las coordenadas X e Y de la placa. Esta elipticidad la he definido en función de la razón entre los radios menor y mayor de la sección elíptica de cada imagen (Ortiz Gil *et al.* 1995):

$$e = 1 - \frac{b}{a} \quad (4.1)$$

donde a es el semieje mayor de la elipse y b es el menor. La longitud de los segmentos en la figura 4.7 es proporcional a esta elipticidad media de cada triplete de exposiciones, mientras que la dirección es la correspondiente a la dirección media de los ejes mayores de las tres elipses.

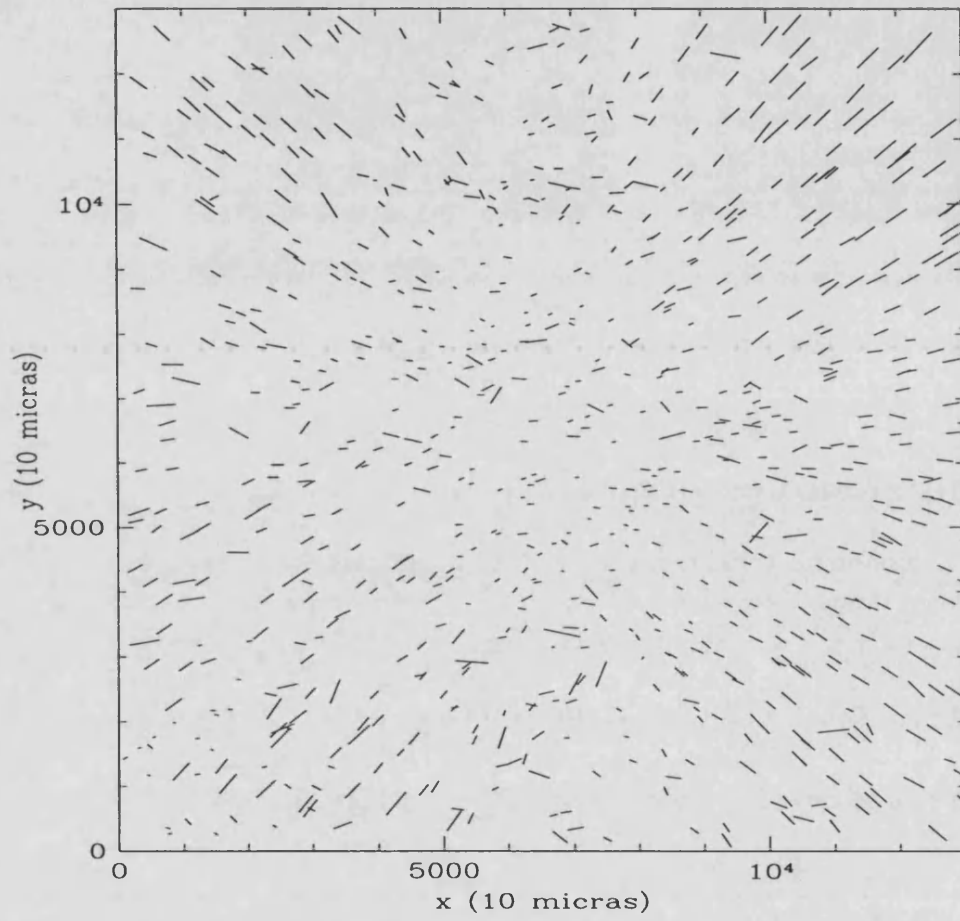


Figura 4.7: Aberración de coma. El dibujo muestra la elipticidad de las imágenes en función de sus coordenadas en la placa. La placa de este ejemplo es la no. 138 de la zona asignada a Helsinki.

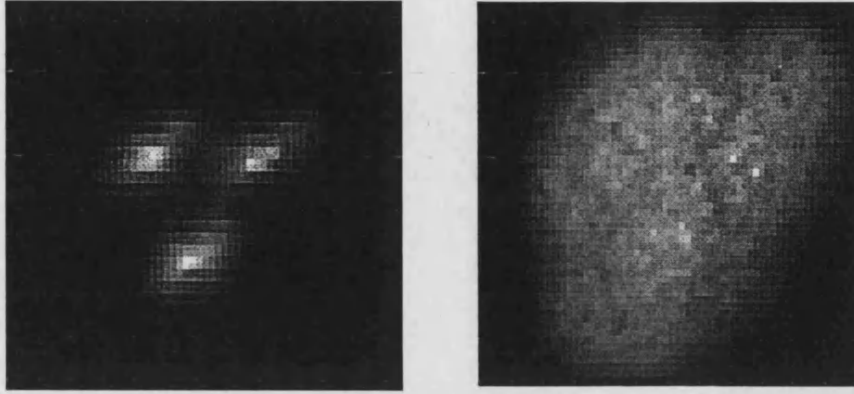


Figura 4.8: Efecto de coma en la imágenes situadas en los bordes de la placa.

Bibliografía.

Bonnefond, P. (1991) *“Analyse automatique des clichés a poses multiples. Application: exfoliation des clichés de la Carte du Ciel”*. DEA thesis, Observatoire de París.

Ortiz Gil, A.; Brosche, P.; Hiesgen, M. (1995) *“Salvaging an astrometric treasure”*. *Astronomische Gesellschaft Abstr. Ser. Bonn*, Septiembre 1995.

Capítulo 5

Mejora de imágenes.

5.1 Introducción.

Un problema muy común es el encontrar con frecuencia imágenes débiles en las emulsiones. En algunos casos, esas estrellas podrían engrosar el grupo de estrellas de referencia, lo que permitiría una determinación más precisa de la posición del asteroide (ver cap. 6) o, incluso, detectar al propio asteroide en las ocasiones en que ni siquiera se ve en la placa. Por otro lado, estamos elaborando un algoritmo que está permitiendo encontrar estrellas de magnitud mayor que $B = 15.5$ en las placas de la “Carte du Ciel”, aún cuando el límite “nominal” de estas placas es de $B \simeq 14$. Ello nos permitirá incrementar el número de estrellas a analizar en estas placas centenarias, con lo que el número de movimientos propios que sería posible determinar aumentaría también de forma importante.

El principal problema es que al trabajar con imágenes cuya magnitud está cercana a la magnitud límite de la placa, las posiciones que se obtienen son menos precisas que en el caso de estrellas más brillantes con imágenes de mayor calidad. En la figuras 4.2 y 4.3 se puede ver que alrededor de la magnitud $B = 15$ aparece una mayor dispersión en las posiciones debida a la pérdida de precisión.

En este capítulo, pues, pretendo mostrar dos tipos diferentes de algorit-

mos de realce de imágenes que nos permitirían la obtención de posiciones más precisas para estas estrellas más débiles.

5.2 Realce por modificación del histograma.

5.2.1 Fundamentos.

Un histograma de niveles de gris contiene una descripción global de la apariencia de una imagen. Los métodos que son discutidos a continuación llevan a cabo el realce de la imagen mediante la modificación de su histograma.

La modificación del histograma puede considerarse como una transformación puntual monótona $g = T\{f\}$ en la cual la amplitud o nivel de gris f (tal que $f_{min} \leq f \leq f_{max}$) es transformado en otro nivel g ($g_{min} \leq g \leq g_{max}$) tal que la distribución de probabilidad de la variable de salida $P_g\{g = b\}$ tiene una forma determinada por la distribución de probabilidad de la variable de entrada $P_f\{f = a\}$ donde a y b (variables de entrada y salida, respectivamente) son los llamados *valores de reconstrucción*. f representa el nivel de gris de los pixeles en la imagen que se pretende realzar. Por sencillez, se asumirá de ahora en adelante que los niveles de gris han sido normalizados de forma que se cumple

$$0 \leq f \leq 1 \quad (5.1)$$

donde $f = 0$ representa el negro y $f = 1$ representa el blanco en la escala de grises. Para cualquier f que se encuentre dentro de este intervalo se va a considerar transformaciones de la forma

$$g = T(f) \quad (5.2)$$

que proporciona un nuevo valor g para cada nivel de gris f en la imagen original. Se supondrá además que la función de transformación dada por (2) satisface las condiciones siguientes:

- a) $T(f)$ es monovaluada y monótonamente creciente en el intervalo $[0, 1]$.

b) $0 \leq T(f) \leq 1$ para $0 \leq f \leq 1$.

La condición a) preserva el orden de negro a blanco en la escala de grises, mientras que la b) garantiza una transformación que sea consistente con el rango permitido de niveles de gris en la imagen. La transformación inversa de g a f será entonces

$$f = T^{-1}(g), \quad 0 \leq g \leq 1 \quad (5.3)$$

donde se supone que $T^{-1}(g)$ satisface también las condiciones a) y b) respecto de la variable g .

Los niveles de gris en una imagen son cantidades aleatorias en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto, suponiendo de momento que se trata de variables continuas, los niveles de gris original y transformado pueden caracterizarse por sus funciones densidad de probabilidad $P_f\{f = a\}$ y $P_g\{g = b\}$, respectivamente. Según la teoría de probabilidad clásica (ver, por ejemplo, Spiegel (1988)) sabemos que si $P_f(f)$ y $T(f)$ son conocidos, y $T^{-1}(g)$ satisface la condición a) anterior, entonces la función densidad de probabilidad de los niveles de gris transformados viene dada por la relación

$$P_g(g) = \left[P_f(f) \left(\frac{df}{dg} \right) \right]_{f=T^{-1}(g)} \quad (5.4)$$

5.2.2 Ecualización del histograma.

Consideremos la transformación

$$g = T(f) = \int_0^f P_f(w) dw, \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (5.5)$$

donde la integral representa la función de distribución acumulativa de la variable de entrada f . Las dos condiciones establecidas en la sección anterior son satisfechas por esta función de transformación ya que crece monótonamente con f en $[0, 1]$.

Por tanto, (5.5) indica que la derivada de g respecto de f viene dada por

$$\frac{dg}{df} = P_f(w) \quad (5.6)$$

Sustituyendo este valor de $P_f(w)$ en (5.4) obtenemos

$$P_g(g) = \left[P_f(f) \frac{df}{dg} \right]_{f=T^{-1}(g)} = [1]_{f=T^{-1}(g)} = 1, \quad 0 \leq g \leq 1 \quad (5.7)$$

que es una densidad uniforme en el intervalo de definición de la variable g . Es importante notar que este resultado es independiente de la función de transformación inversa, que no siempre es fácil de obtener analíticamente. El desarrollo anterior indica que utilizar una transformación igual a la distribución acumulativa de f da como resultado una imagen cuyos niveles de gris tienen una densidad uniforme. En términos de realce esto implica un incremento en el rango dinámico de los píxeles, lo cual, como se verá, puede tener un efecto considerable en la apariencia de la imagen.

En el caso concreto de procesamiento de imágenes digitales, los conceptos desarrollados anteriormente han de ser reescritos en forma discreta. Para niveles de gris que toman valores discretos, se trabaja con probabilidades dadas por la relación

$$P_f(f_j) = \frac{n_j}{n}, \quad 0 \leq f_j \leq 1, \quad j = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.8)$$

donde L es el número de niveles, $P_f(f_j)$ es la probabilidad del nivel j -ésimo, n_j es el número de veces que este nivel aparece en la imagen, y n es el número total de píxeles de la imagen. La representación gráfica de $P_f(f_j)$ frente a f_j constituye el **histograma** de f , y la técnica empleada para la obtención de un histograma uniforme se denomina **ecualización o linearización del histograma**.

La forma discreta de la ecuación (5.5) viene dada por la relación

$$g_k = T(f_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} = \sum_{j=0}^k P_f(f_j) \quad (5.9)$$

donde $0 \leq f_j \leq 1$ y $j = 0, 1, \dots, L - 1$.

Tanto la transformación $T(f_j)$ como su inversa $T^{-1}(g_k)$ cumplen las condiciones a) y b) establecidas anteriormente y la función de transformación $T(f_j)$ se calcula directamente de la imagen con niveles discretos de gris utilizando (5.9).

Quizás sea conveniente mostrar un ejemplo para apreciar mejor cómo se lleva a cabo la ecualización de una imagen. El siguiente ejemplo ha sido extraído de González *et al.* (1987).

Sea una imagen de 64x64 pixeles con 8 niveles de gris, distribuidos de la forma mostrada en la tabla [5.1] (ver también figura 5.1). La función de transformación viene dada por (5.9). Así, se tiene que

$$g_0 = T(f_0) = \sum_{j=0}^0 P_f(f_j) = P_f(f_0) = 0.19$$

Análogamente,

$$g_1 = T(f_1) = \sum_{j=0}^1 P_f(f_j) = P_f(f_0) + P_f(f_1) = 0.44$$

y así sucesivamente se encuentran $g_2 = 0.65$, $g_3 = 0.81$, $g_4 = 0.89$, $g_5 = 0.95$, $g_6 = 0.98$, $g_7 = 1.00$.

Dado que tan sólo ocho niveles están permitidos en este ejemplo, hay que aproximar cada uno de los que acaban de ser obtenidos al más cercano de los niveles posibles:

$$g_0 \simeq 1/7, \quad g_1 \simeq 3/7, \quad g_2 \simeq 5/7, \quad g_3 \simeq 6/7, \quad g_4 \simeq 6/7, \quad g_5 \simeq 1, \quad g_6 \simeq 1 \quad g_7 \simeq 1$$

Hemos pasado de una imagen con ocho niveles a una nueva con sólo cinco: $g_0 = 1/7$, $g_1 = 3/7$, $g_2 = 5/7$, $g_3 = 6/7$, y $g_4 = 1$.

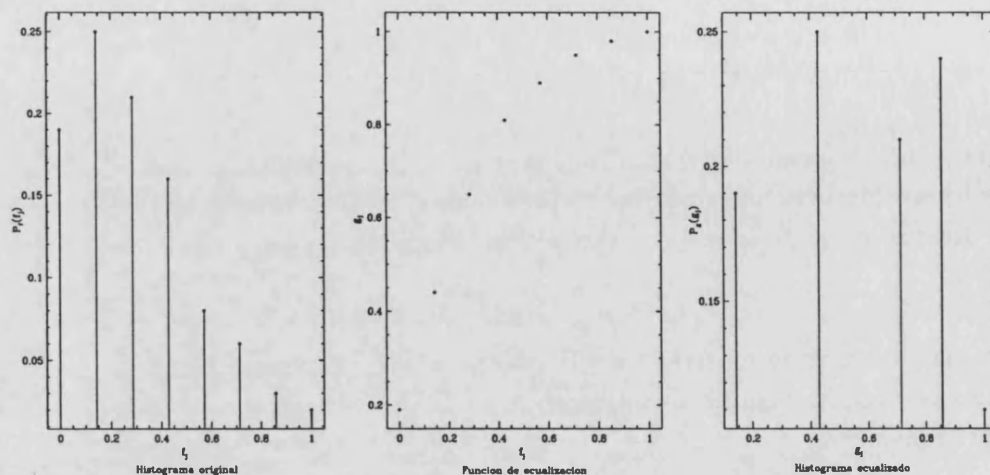


Figura 5.1: Histograma original, función de transformación e histograma ecualizado.

Veamos cómo ha quedado el nuevo histograma después del proceso de ecualización. Se tiene que f_0 ha sido transformado en el nivel $g_0 = 1/7$, con lo que ahora habrá 790 píxeles con este valor. Análogamente, hay 1023 píxeles con valor $g_1 = 3/7$ y 850 con valor $g_2 = 5/7$. Ahora bien, los niveles f_3 y f_4 han sido transformados en uno sólo, por lo que se tiene $656 + 329 = 985$ píxeles en el nivel $g_3 = 6/7$. De igual modo existen ahora $245 + 122 + 81 = 448$ píxeles con el valor $g_4 = 1$ (fig. 5.1).

La ecualización del histograma proporciona los mejores resultados cuando se aplica a imágenes con detalles “escondidos” en regiones con una distribución muy uniforme de intensidades ya que cuando la ecualización se realiza sobre una imagen cuyo histograma posee muy pocos niveles de gris que están además muy próximos entre sí, el resultado es un nuevo histograma definido en un rango mucho más amplio de grises (ver figuras de la (5.2) a la (5.5)). Sobre una imagen astronómica típica, por ejemplo, la ecualización del histograma extiende la escala de grises en las zonas correspondientes al fondo del cielo. Donde inicialmente había sólo píxeles con valores de gris dentro de un intervalo muy reducido, ahora se tiene un intervalo más amplio con lo que los objetos que se confundían con el fondo del cielo (nebulosas o galaxias débiles, por ejemplo) se apreciarán mejor en la imagen ecualizada puesto que ahora tienen intensidades más “distintas” o lejanas a las corres-

pendientes al fondo. En el caso de originales de buena calidad éstos suelen resultar degradados después del proceso.

f_j	n_j	$P_f(f_j)$
$f_0 = 0$	790	0.19
$f_1 = 1/7$	1023	0.25
$f_2 = 2/7$	850	0.21
$f_3 = 3/7$	656	0.16
$f_4 = 4/7$	329	0.08
$f_5 = 5/7$	245	0.06
$f_6 = 6/7$	122	0.03
$f_7 = 1$	81	0.02

Tabla 5.1: Distribución de niveles de gris en el ejemplo del texto.

En las figuras (5.2) a (5.5) puede verse el resultado de la ecualización de una imagen real de dos estrellas, junto con sus respectivos histogramas. Dado que el histograma es una aproximación a la función densidad de probabilidad, raramente se obtiene resultados perfectamente planos cuando se trabaja con niveles discretos, como es el caso en los histogramas de los ejemplos. Estas imágenes de 64x64 pixeles presentan 256 niveles discretos de gris y la transformación utilizada ha sido

$$g = [g_{max} - g_{min}]P_f(f) + g_{min} \quad (5.10)$$

donde $g_{max} = 255$ y $g_{min} = 0$. La densidad de probabilidad uniforme que se obtiene es de la forma

$$P_g(g) = \frac{1}{g_{max} - g_{min}}, \quad g_{min} \leq g \leq g_{max} \quad (5.11)$$

Es también necesario aproximar el nuevo nivel resultante de la transformación al nivel discreto más cercano a aquéllos de los que se dispone en la imagen.

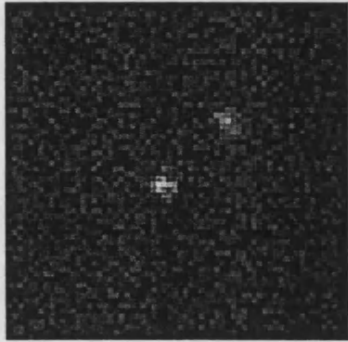


Figura 5.2: Imagen original.

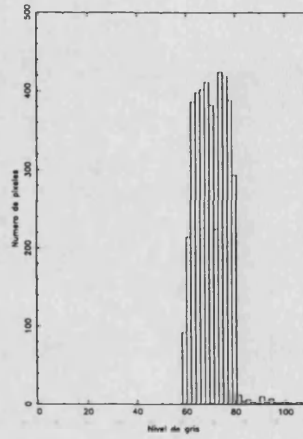


Figura 5.4: Histograma de la figura original.

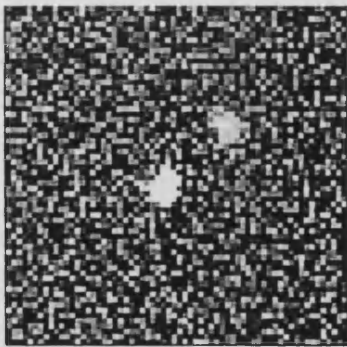


Figura 5.3: Imagen ecualizada.

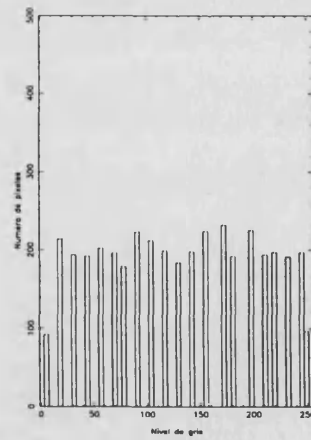


Figura 5.5: Histograma ecualizado.

5.2.3 Especificación directa del histograma.

Aunque el método anterior es bastante útil, no permite por sí mismo aplicaciones de realce de la imagen interactivas ya que se encuentra limitado a la generación de tan sólo un resultado, a saber, la aproximación a un histograma uniforme. A veces es deseable el poder especificar de forma interactiva histogramas particulares capaces de intensificar ciertos niveles de gris de la imagen. Para ver cómo se puede conseguir esto, se va a considerar de nuevo niveles de gris continuos, siendo $P_f(f)$ y $P_g(g)$ las funciones densidad de probabilidad original y buscada, respectivamente.

Supongamos que primero se realiza la ecualización de la imagen, empleando como antes la ecuación (5.5), es decir,

$$s = T(f) = \int_0^f P_f(w)dw$$

Si conociéramos la imagen resultante realzada, sus niveles podrían ser igualmente ecualizados mediante la función de transformación

$$\nu = G(g) = \int_0^g P_g(w)dw \quad (5.12)$$

El proceso inverso $g = G^{-1}(\nu)$, nos devolverá a los niveles iniciales de la imagen realzada buscada. Esto, por supuesto, es cierto teóricamente puesto que los niveles g son lo que estamos intentando obtener. Hay que tener en cuenta, sin embargo que $P_s(s)$ y $P_\nu(\nu)$ serán densidades uniformes idénticas dado que el resultado final de (5.5) es independiente de la densidad concreta que se emplee para evaluar la integral. Por tanto, si en lugar de utilizar ν en el proceso inverso empleamos los niveles uniformes s obtenidos a partir de la imagen original, los niveles resultantes, $g = G^{-1}(s)$, tendrán la función densidad de probabilidad deseada. Asumiendo que $G^{-1}(s)$ es monovaluada, el procedimiento puede resumirse como sigue (fig. 5.6):

- (1) Ecualización de los niveles de la imagen original empleando la ecuación (5.5).

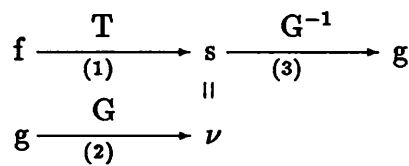


Figura 5.6: Especificación directa del histograma (ver secc. 5.2.3).

(2) Especificación de la función densidad deseada y obtención de la función de transformación $G(g)$ con la ecuación (5.12).

(3) Aplicación de la función de transformación inversa, $g = G^{-1}(s)$ a los niveles obtenidos en el paso (1).

Este procedimiento proporciona una versión procesada de la imagen original, donde los nuevos niveles de gris están caracterizados por la densidad especificada $P_g(g)$.

Aunque el método de especificación del histograma requiere dos funciones de transformación, $T(f)$ seguida por $G^{-1}(s)$, pueden combinarse ambas en una que nos proporcione los niveles buscados a partir de los pixeles originales. A partir de

$$g = G^{-1}(s) \quad (5.13)$$

sustituyendo (5.5) en (5.13) se obtiene la función de transformación combinada

$$g = G^{-1}[T(f)] \quad (5.14)$$

que relaciona f con g . Cuando $G^{-1}[T(f)] = T(f)$ se obtiene la ecualización del histograma.

La expresión (5.14) demuestra que no es necesario realizar la ecualización de la imagen de forma explícita sino que basta con determinar $T(f)$ y combinarla con G^{-1} . El verdadero problema radica en la obtención analítica de la función inversa. En el caso discreto no es tan grave ya que el número de niveles de gris diferentes suele ser pequeño y resulta posible calcular y almacenar una transformación para cada valor de pixel posible.

En la práctica, la transformación inversa de s a g no siempre es monovaluada. Esto ocurre cuando existen niveles que no se han llenado en el histograma especificado o cuando se lleva a cabo el proceso de redondeo de $G^{-1}(s)$ al más cercano de los niveles discretos permitidos. En general, la solución más sencilla a este problema es asignar los niveles de forma que coincidan con el histograma dado tanto como sea posible, tal como se ha hecho en este trabajo, donde los niveles del histograma final son exactamente iguales a los del inicial.

La principal dificultad en la aplicación del método de especificación del histograma radica en ser capaz de construir un histograma que tenga sentido. Dos soluciones a este problema son: a) especificar una función densidad de probabilidad particular (i.e. gaussiana, Rayleigh, logarítmica ...) y formar el histograma digitalizando la función dada, y b) especificar la forma del histograma por medio de un instrumento de trabajo con gráficos.

En este caso se ha elegido la opción primera y se ha aplicado el método para el caso de funciones densidad de probabilidad exponencial, Rayleigh, hiperbólica (de raíz cúbica) e hiperbólica (logarítmica). Las funciones de transformación concretas que han sido aplicadas son las que aparecen en la tabla [5.2] (Pratt, 1991).

Modelo de densidad de probabilidad de salida.	Función de transformación.
Exponencial	
$P_g(g) = \alpha \exp\{-\alpha(g_{max} - g_{min})\},$ $g \geq g_{min}$	$g = g_{min} - \left(\frac{1}{\alpha}\right) \ln[1 - P_f(f)]$
Rayleigh	
$P_g(g) = \left[\frac{(g-g_{min})}{\alpha^2}\right]^*$ $* \exp\left\{-\frac{(g-g_{min})^2}{2\alpha^2}\right\}, g \geq g_{min}$	$g = g_{min} + [2\alpha^2 \ln\left(\frac{1}{1-P_f(f)}\right)]^{1/2}$
Hiperbólica(raíz cúbica)	
$P_g(g) = \left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{g^{-2/3}}{g_{max}^{1/3}} - g_{min}^{1/3}\right]$	$g = [(g_{max}^{1/3} - g_{min}^{1/3})(P_f(f)) + g_{min}^{1/3}]^3$
Hiperbólica(logarítmica)	
$P_g(g) = \frac{1}{[g(\ln g_{max} - \ln g_{min})]}$	$g = g_{min} \left[\frac{g_{max}}{g_{min}}\right]^{P_f(f)}$

Tabla 5.2: Funciones de transformación para diferentes modelos de densidad final de probabilidad.

Con el método de hiperbolización del histograma la imagen de entrada es modificada por una función de transformación tal que la densidad de probabilidad de la imagen resultante es de forma hiperbólica. Así la densidad de probabilidad de la escala de grises resultante será uniforme si tenemos en cuenta los modelos de respuesta cúbica o logarítmica de los fotorreceptores del ojo. Por tanto, la ecualización es en este caso realizada por los conos de la retina.

5.2.4 Resultados.

Estos métodos han sido aplicados tanto a la imagen real anterior (fig. 5.2) como a una imagen simulada de dos estrellas con forma gaussiana sobre un fondo y con un cierto nivel de ruido distribuido uniformemente.

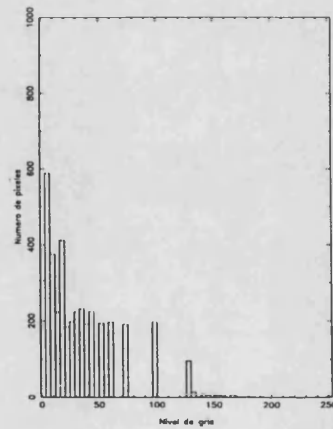
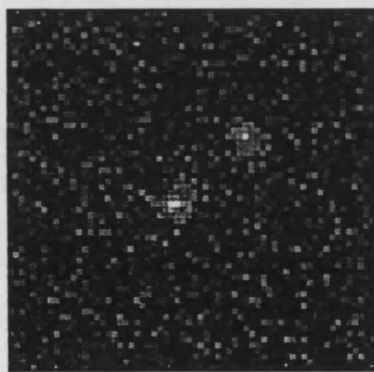


Figura 5.7: Imagen real e histograma con densidad de probabilidad de los niveles de gris de tipo exponencial.

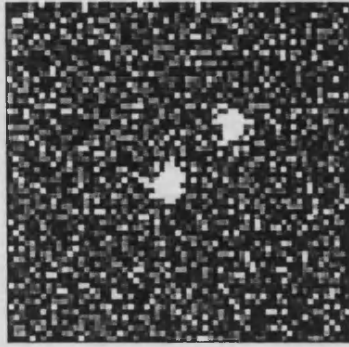


Figura 5.8: Imagen real con distribución de los niveles de gris de tipo Rayleigh.

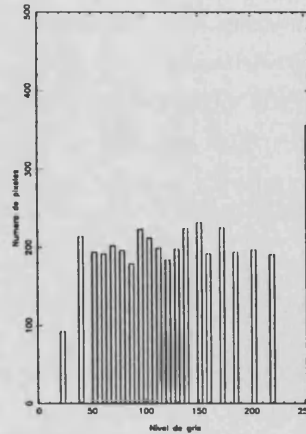


Figura 5.10: Histograma correspondiente a una densidad de probabilidad de tipo Rayleigh.

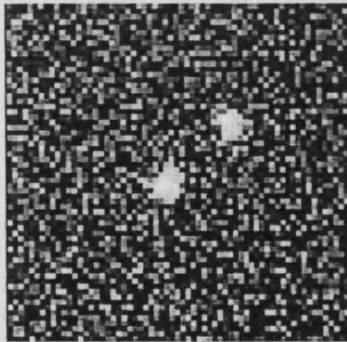


Figura 5.9: Imagen real con distribución de los niveles de gris de tipo hiperbólico de raíz cúbica.

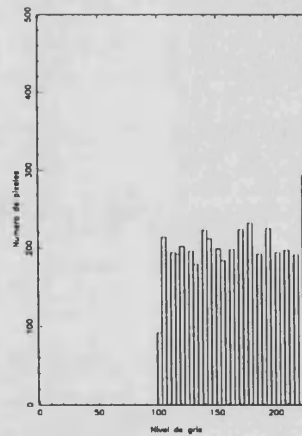


Figura 5.11: Histograma correspondiente a una densidad de probabilidad de niveles de gris de tipo hiperbólico de raíz cúbica.

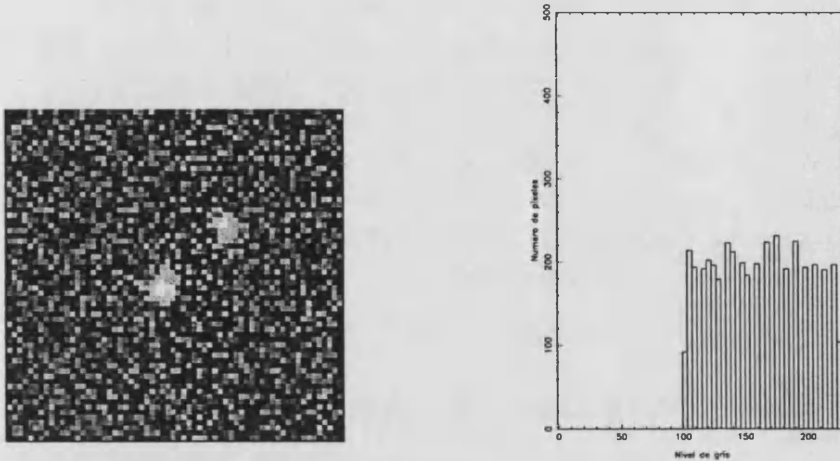


Figura 5.12: Imagen real e histograma con densidad de probabilidad de los niveles de gris de tipo hiperbólico logarítmico.

Las pruebas se han realizado para diferentes intensidades de las imágenes, diferentes niveles de ruido y de fondo, y diferentes separaciones entre las estrellas. Las conclusiones que se derivan de los resultados obtenidos son:

1) Por mera inspección visual se comprueba que todos los métodos descritos anteriormente (excepto la transformación según una distribución exponencial) son bastante eficaces a la hora de realzar imágenes débiles. En particular, la ecualización del histograma y, sobre todo, los métodos de hiperbolización dan buenos resultados en estos casos. En el caso exponencial, los píxeles correspondientes a la imagen adquieren todos ellos unos valores de gris menores, excepto los más intensos. Esto podría permitir el encontrar más fácilmente el centro en imágenes muy intensas. Sin embargo, la comparación realizada entre la posición real de la imagen simulada, la calculada antes del realce y la obtenida después del mismo, muestra que el centro de la imagen resulta, en este caso, desplazado a consecuencia del proceso de realce. Y el efecto de la transformación según la distribución exponencial sobre las imágenes débiles es disminuir aún más su intensidad.

2) Los métodos expuestos no son aplicables cuando se pretende resolver imágenes de estrellas que están muy cercanas ya que el resultado es una

mayor confusión y solapamiento entre ellas. En efecto, al resaltar más toda la imagen y no sólo una parte de ella (su centro, por ejemplo), donde antes el ojo podía adivinar la presencia de dos estrellas por existir dos zonas pequeñas con más intensidad que en los alrededores, ahora sólo se aprecia una mancha con la misma intensidad en casi toda su extensión. Sin embargo, la transformación exponencial aún podría ser de utilidad al tratar con imágenes brillantes ya que en esos casos sí se consigue el realce de sólo los píxeles centrales de la imagen. Pero en todo caso habría que tener cuidado con el efecto de desplazamiento del centro de que se ha hablado antes.

3) Son algoritmos rápidos que apenas consumen tiempo en los cálculos.

5.3 Teoría de conjuntos borrosos.

5.3.1 La lógica borrosa.

El concepto de conjunto difuso o borroso (“fuzzy set”) y la lógica borrosa o difusa asociada (“fuzzy logic”) fueron introducidos por el Dr. Lotfi A. Zadeh (Zadeh 1962, Zadeh 1965) como una extensión de la teoría de conjuntos de Cantor y la lógica clásica booleana. Zadeh perseguía el desarrollo de un sistema que permitiese considerar el concepto de verdad parcial, es decir, un sistema en el que hubiera valores de verdad comprendidos entre el “totalmente verdadero” y el “totalmente falso”. En un principio lo que pretendía era encontrar un modelo capaz de representar la vaguedad presente en el lenguaje natural. Expresiones como “muy largo”, “bastante largo”, “poco largo”, etc. son difíciles de representar en el marco de un lenguaje más preciso sin perder parte de su significado semántico: “la regla mide 30 cm” no dice nada acerca de si es muy larga o bastante o nada.

En 1965 Lotfi A. Zadeh publicó su trabajo “Fuzzy Sets” (Zadeh 1965)

en el que describía matemáticamente la teoría de conjuntos borrosos y, por extensión, la lógica borrosa, una lógica infinitamente multivaluada. En esta teoría, la llamada función de pertenencia (en el contexto de conjuntos borrosos o difusos) o valores de verdad y falsedad (en el marco de la lógica borrosa) toma valores en el intervalo real $[0, 1]$. En contraposición está la teoría clásica de conjuntos desarrollada por Cantor, donde un conjunto es una colección de objetos en la que cada elemento tiene definidos de manera precisa los criterios de pertenencia y donde la función de pertenencia toma valores en el conjunto $\{0,1\}$. Con el modelo borroso es posible tratar sistemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de criterios claramente definidos de tipos de pertenencia. No postula bordes bien definidos: la transición entre la pertenencia absoluta y la no pertenencia al conjunto es gradual. Sin embargo, dado que se trata de una generalización de la teoría de conjuntos, los teoremas y pruebas en la teoría de conjuntos borrosos se cumplen igualmente en el caso de la teoría de conjuntos tradicional (ver sección 5.3.3).

La Teoría de la Posibilidad como alternativa a la Teoría (clásica) de Probabilidad fue presentada por Zadeh en 1978 (Zadeh 1978). Se trata de una teoría de información que está relacionada con los conjuntos borrosos, pero que es independiente tanto de ellos como de la teoría de probabilidad. Así, la incertidumbre en un sistema puede tener dos orígenes diferentes:

1) La aleatoriedad de los sucesos, lo que constituye el campo de la teoría de la probabilidad.

2) La vaguedad de los sucesos. En este caso, la incertidumbre es de naturaleza posibilística más que probabilística.

Mientras en la teoría de la probabilidad los operadores que se utilizan son del tipo MAS/POR, en la teoría de la posibilidad son empleados los del tipo MAX/MIN o MAX/POR. Esto permite a la teoría de la posibilidad representar el indeterminismo de los sistemas estudiados (ver sección 5.3.4).

Zadeh introdujo asimismo el llamado **principio de consistencia entre**

probabilidad y posibilidad. Dado que lo imposible es también improbable, el principio de consistencia establece que el grado de posibilidad siempre excede o iguala al de probabilidad. Y, por tanto, un alto grado de posibilidad no implica un alto grado de probabilidad, ni un bajo grado de probabilidad implica un bajo grado de posibilidad. Por ejemplo, una guerra nuclear es actualmente muy posible (existen los medios necesarios para que se produzca) pero poco probable (es algo que casi nadie quiere que ocurra y que se tratará de evitar por todos los medios).

5.3.2 Concepto de conjunto borroso. Definiciones.

Sea U un conjunto de objetos clásico, llamado *universo de discurso*, y cuyos elementos son x_1, x_2, \dots, x_n . Un **subconjunto difuso o borroso** A de U viene caracterizado por el par ordenado

$$A = (\mu_A(x_i), x_i) \tag{5.15}$$

donde la **función de pertenencia** $\mu_A(x_i)$, que toma valores positivos dentro del intervalo $[0,1]$, denota el grado con que un suceso x_i es miembro de A . Cuando el universo U considerado es fijo suele identificarse el conjunto borroso con su función de pertenencia. Cuanto más cercano a la unidad sea el valor de $\mu_A(x_i)$, más pertenece el elemento x_i a A . Si $\mu_A(x_i) = 0.5$, se dice x_i que es un **punto de cruce** en A .

La estimación práctica de las funciones de pertenencia no ha sido estudiada sistemáticamente en la bibliografía. A pesar de ello, algunos autores han propuesto diferentes métodos: método de ejemplificación de Zadeh (Zadeh 1972), los prototipos deformables (Bremermann 1976), la definición analítica implícita (Kochen & Badre 1976), el método de preferencias relativas (Saaty 1974), comparación de subconjuntos (Fung & Fu 1974) o la función de filtro (MacVicar-Whelan 1978). La utilizada en este trabajo es del tipo propuesto por Kochen y Badre: la función de pertenencia se asume que es continua y diferenciable, y se caracteriza por su forma de S. Ha sido la elegida porque sus características son las más adecuadas en el marco del procesamiento de

imágenes (ver sección 5.3.8).

El soporte de un conjunto borroso A es un subconjunto ordinario de U :

$$\text{sup}A = \{x_i \in U, \mu_A(x_i) > 0\} \quad (5.16)$$

Un conjunto borroso A se dice que está **normalizado** si y sólo si

$$\exists x_i \in U / \mu_A(x_i) = 1$$

El conjunto borroso A es **vacío** si se cumple que

$$\mu_A(x_i) = 0, \forall x_i \in U \quad (5.17)$$

Siendo U un conjunto finito, el **cardinal** $|A|$ de un conjunto borroso A en U se define como

$$|A| = \sum_{x_i \in U} \mu_A(x_i) \quad (5.18)$$

En ocasiones $|A|$ recibe el nombre de **potencia** de A .

$||A|| = |A|/|U|$ es el **cardinal relativo**, que puede interpretarse como la proporción de elementos de U que hay en A .

Si el universo U considerado es un espacio vectorial, se dice que un subconjunto borroso A de U es **convexo** si $\forall x, y \in U$ y todos los z que existen en el segmento \overline{xy} se tiene que

$$\mu_A(z) \geq \min[\mu_A(x), \mu_A(y)] \quad (5.19)$$

(Rosenfeld 1984).

5.3.3 El principio de extensión.

En esta sección se plantea el problema de la relación que existe entre los valores de la función de pertenencia y las probabilidades clásicas.

A nivel matemático, la propiedad de aditividad que se cumple en el caso de las probabilidades (esto es, la suma de todas ellas es la unidad) no es necesariamente cierta cuando se trata con funciones o grados de pertenencia (ver 5.3.4). Y aunque estos grados de pertenencia pueden ser determinados a partir de distribuciones de probabilidad, existen otros procedimientos que no tienen nada que ver con frecuencias o probabilidades. En cambio, todas las distribuciones de probabilidad sí son conjuntos borrosos (ver más adelante en esta misma sección). Tanto los conjuntos borrosos como la probabilidad forman parte de una Teoría Generalizada de la Información, que incluye muchos formalismos diferentes para representar la incertidumbre (conjuntos aleatorios, la teoría de la evidencia de Demster-Shafer, intervalos de probabilidad, teoría de la posibilidad, medidas generales borrosas, análisis de intervalos, etc.).

Otro aspecto importante es la diferente interpretación que reciben los grados de pertenencia y las probabilidades. Las afirmaciones probabilísticas se refieren a sucesos que pueden ocurrir o no, y sobre los que uno puede apostar si van o no a tener lugar. Pero en el marco de la teoría de conjuntos borrosos uno no puede decir si un suceso ha tenido lugar o no, sino que trata de establecer el grado en que dicho suceso ha ocurrido.

Por otro lado, esta teoría debe de interpretarse simplemente como un formalismo matemático que pretende la modelización de la incertidumbre. Los grados o funciones de pertenencia son números precisos. Es importante notar que la lógica borrosa es una lógica sobre sistemas borrosos pero que no es borrosa en sí misma: sus leyes no son vagas.

En (Trillas 1980) se demuestra que tanto los conjuntos "clásicos" como los borrosos son álgebras de Boole que pueden confundirse, es decir, entre ellos existe un isomorfismo de álgebras de Boole, o aplicación biyectiva que conserva las tres operaciones básicas de unión, intersección y complementariedad. Es pues correcto considerar el conjunto borroso como una extensión funcional del correspondiente clásico y, por tanto, todas las definiciones, teoremas, etc., válidos para conjuntos borrosos lo son también para conjuntos

nítidos (es decir, conjuntos clásicos con bordes o criterios de pertenencia bien definidos).

El cambio fundamental a realizar cuando se considera un conjunto borroso a partir de uno clásico consiste en reemplazar el concepto de que una variable tiene un valor por el concepto borroso de que una variable posee un grado de pertenencia a cada valor posible.

El enunciado de Zadeh no ha sido el único propuesto para el principio de extensión. Ver (Jain 1976), por ejemplo.

5.3.4 Operaciones entre conjuntos borrosos.

Conjunto complementario.

La función de pertenencia de los elementos del conjunto complementario, \bar{A} , a uno dado, A , es la siguiente:

$$\mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i), \forall x_i \in U \quad (5.20)$$

Unión e intersección de dos conjuntos borrosos. La ley del tercio excluso.

Las operaciones clásicas de unión e intersección de conjuntos ordinarios pueden ser ampliadas de acuerdo con las expresiones propuestas por Zadeh (Zadeh 1965).

Sean A , B dos conjuntos borrosos definidos en el universo de discurso U . Se tiene entonces que

$$\mu_{A \cup B}(x_i) = \max\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} \quad \forall x_i \in U \quad (5.21)$$

$$\mu_{A \cap B}(x_i) = \min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} \quad \forall x_i \in U \quad (5.22)$$

donde $\mu_{A \cup B}$ y $\mu_{A \cap B}$ son las funciones de pertenencia de $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente.



Y se dice que A y B , son disjuntos cuando

$$\mu_{A \cap B}(x) = 0 \quad \forall x_i \in U$$

Estas fórmulas se reducen a las usuales de la teoría clásica cuando las funciones de pertenencia toman valores en $\{0,1\}$. Una justificación de la elección de los operadores max y min fue dada por Bellman & Giertz (1973).

Aquí se ve claramente una de las más notables diferencias entre la teoría de conjuntos clásica y la borrosa. Cuando se considera sucesos independientes, la operación probabilística para la intersección es el producto, lo que es intuitivamente incorrecto cuando se trabaja con conjuntos borrosos. Según la probabilidad clásica, el resultado al que tiende una sucesión de intersecciones es 0.0, aunque los factores iniciales sean altos. Esto resulta equivocado desde el punto de vista borroso: si tenemos 10 factores con el valor 0.90 (correspondiente a “muy”), el resultado final debe de ser 0.90 (“muy”) de nuevo en lugar de 0.35 (correspondiente por ejemplo a “un poco”).

Algo similar ocurre con la operación de la unión de conjuntos. De acuerdo con la interpretación probabilística clásica, esta operación tiende a 1.0 a medida que se va considerando un número mayor de sumandos. Pero según la lógica borrosa un conjunto inicial de valores bajos de la función de pertenencia no debe de conducir a uno más alto sino que debe ser igual al mayor de los grados de pertenencia considerados.

Se ve claramente, pues, que las dos propiedades que expresan la ley del tercio excluso no se cumplen necesariamente en los conjuntos borrosos:

$$A \cup \bar{A} \neq U \quad (5.23)$$

ya que

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x_i) = \max\{\mu_A(x_i), 1 - \mu_A(x_i)\} \quad \forall x_i \in U$$

que es igual a la unidad sólo cuando $\mu_A(x_i) = 0$, y

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset \quad (5.24)$$

al ser

$$\mu_{A \cap \bar{A}}(x_i) = \min\{\mu_A(x_i), 1 - \mu_A(x_i)\} \quad \forall x_i \in U$$

que es cero sólo en el caso, de nuevo, en que $\mu_A(x_i) = 0$.

En Velarde (1991) se muestra cómo en el marco del álgebra booleana la posibilidad no es una medida (la reunión de todos los subconjuntos disjuntos no es necesariamente el conjunto total o unidad), en contraposición con la probabilidad que sí lo es.

Relación de inclusión entre dos conjuntos borrosos.

Se dice que A está incluido o es igual a B, $A \subseteq B$ si y sólo si

$$\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \quad \forall x_i \in U \quad (5.25)$$

Si consideramos tres subconjuntos difusos, A, B y C definidos en un universo U, caracterizados por las funciones de pertenencia μ, ν, π , respectivamente, se dice que B separa a A de C si $\forall x_i, x_k \in U, \forall \rho$ (camino de x_i a x_k), $\exists x_j \in \rho /$

$$\nu(x_j) \geq \min[\mu(x_i), \pi(x_k)] \quad (5.26)$$

donde min indica el mínimo de $\mu(x_i)$ y $\pi(x_k)$. Es decir, existe en el camino un punto cuyo grado de pertenencia a B es mayor que el de pertenencia a A o C.

Así, B rodea o contiene a A si separa A de la región no acotada O en la que $\mu(x_i) = 0$. Es decir, que B rodea a A si y sólo si

$$\forall x_i \in A, \forall x_j \in O, \forall \rho \text{ camino desde } x_i \text{ a } x_j, \exists x_k \in \rho / \nu(x_k) \geq \mu(x_i). \quad (5.27)$$

O sea, que existe un punto cuyo grado de pertenencia al subconjunto B es mayor que el de pertenencia al subconjunto A.

Diferencia entre dos conjuntos borrosos.

La extensión en la teoría borrosa del concepto clásico de diferencia entre dos conjuntos A y B es la denominada **diferencia finita**, $| - |$, definida por Zadeh como el conjunto de los elementos que pertenecen más a A que a B:

$$\mu_{A|-B}(x_i) = \max[0, \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)], \forall x_i \in U \quad (5.28)$$

Y mucho más...

Muchas más propiedades de los conjuntos borrosos han sido descritas en la literatura. Así, es posible calcular el grado de conectividad de un conjunto borroso, o su convexidad, compacidad, área, perímetro, extensión y diámetro, elongación, eje medio, grado de adyacencia entre dos de estos conjuntos, etc., o realizar sobre ellos operaciones de contracción y expansión, o similares, todas ellas de gran interés en la caracterización y clasificación de conjuntos borrosos.

Sin embargo, una descripción detallada de todo esto es innecesaria en este trabajo porque estos conceptos no van a ser utilizados. Más información sobre ellos puede encontrarse en el artículo de Rosenfeld (1984).

5.3.5 Aplicaciones prácticas de la lógica y los conjuntos borrosos.

La utilización de la lógica borrosa es cada día más amplia, sobre todo en los campos de la Inteligencia Artificial y el Control de Sistemas donde su capacidad de representar la información de un modo similar a la comunicación natural humana y de manipularla tal como lo haría un ser humano resulta de gran importancia. Y al no necesitar de modelos analíticos se ha convertido en una herramienta fundamental en el análisis y control de sistemas extremadamente complicados, para los que no se dispone de modelos matemáticos adecuados. Por ejemplo, permite diseñar de forma sencilla y eficiente tanto una turbina de vapor como un sistema antibloqueo de frenos para un automóvil, sistemas en los que un gran número de factores deben

de ser tenidos en cuenta (Cox 1992), o incluso la modelización del comportamiento de un astronauta (Long 1989).

En cuanto a sus aplicaciones en el campo del tratamiento de imágenes, un ejemplo es su utilización en el realce de imágenes astronómicas realizado en este trabajo y presentado a continuación. Sin embargo, el área en la que de momento la lógica borrosa ha sido más ampliamente usada es en la del reconocimiento de formas, ver por ejemplo Bezdek (1992).

5.3.6 Aplicación al realce de imágenes astronómicas.

Puede interpretarse que el procesamiento de imágenes se aplica a conjuntos borrosos, en los cuales la vaguedad viene causada por:

- a) La pérdida de información debida a la proyección en dos dimensiones de una imagen tridimensional.
- b) La falta de un análisis cuantitativo de la calidad de la imagen. El juicio suele ser subjetivo, basado en la percepción visual humana.
- c) La ambigüedad y vaguedad de algunas definiciones. Por ejemplo, no existen fronteras definidas entre bordes de objetos o entre regiones homogéneas y no homogéneas, cosa que ocurre siempre cuando se trata de imágenes de naturaleza astronómica.

Una imagen puede entonces ser considerada como un conjunto de unidades borrosas, cada una con una función de pertenencia que indica el grado de posesión de una propiedad, en este caso, de un determinado nivel de gris.

El estudio que sigue se centra en el tratamiento de imágenes con un número discreto de niveles de gris. La imagen posee cierto grado de ambigüedad debido a la posibilidad de que un pixel tenga diferentes valores, de acuerdo con los diferentes niveles de gris en la imagen. Ello supone el no poder decidir con exactitud si un pixel pertenece o no a una determinada

región de la imagen cuando en ella los contornos no están perfectamente definidos.

5.3.7 Definición de una imagen según la teoría de conjuntos borrosos.

Como se ha dicho, una imagen X de $M \times N$ píxeles y L niveles de gris puede ser interpretada como un conjunto de elementos borrosos, cada uno con una función de pertenencia cuyo valor está relacionado con el nivel de gris que poseen relativo a algún nivel concreto l , $l = 0, 1, 2, \dots, L - 1$. Podemos por tanto representarla con el par ordenado

$$X = (\mu_X(x_{mn}), x_{mn}), \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.29)$$

donde $\mu_X(x_{mn})$ ($0 \leq \mu_X(x_{mn}) \leq 1$) es la función de pertenencia borrosa asociada a la variable x_{mn} . Esta función representa el grado con que el píxel (m,n) -ésimo x_{mn} posee cierta propiedad p . Esta propiedad se puede definir de diferentes formas respecto de cualquier nivel de gris, dependiendo de los problemas con que se trate. En lo que sigue, usaré la notación p_{mn} cuando me refiera a la función de pertenencia asociada a x_{mn} en el plano de la variable p en vez de emplear $\mu_X(x_{mn})$, que es mucho más farragosa.

5.3.8 El dominio borroso de propiedades.

La función de pertenencia es la que transforma cada x_{mn} del plano espacial en su valor correspondiente del dominio de propiedades de interés, que en este caso es aquél que nos proporcione una imagen realzada, caracterizado por la variable p'_{mn} . Esta función puede ser de dos tipos:

a) Tipo S (fig. 5.13(a)): define la función de transformación correspondiente al plano borroso " x_{mn} es x_{max} ". En consecuencia, los valores p_{mn} indican el grado de posesión del nivel máximo de gris x_{max} correspondiente al píxel (m,n) -ésimo x_{mn} .

b) Tipo π (fig. 5.13(b)): define la función de transformación correspondiente al plano borroso " x_{mn} es l " siendo $0 < l < x_{max}$. Ahora los valores de p_{mn} indican el grado de posesión de algún nivel de gris l correspondiente al pixel (m,n) -ésimo x_{mn} .

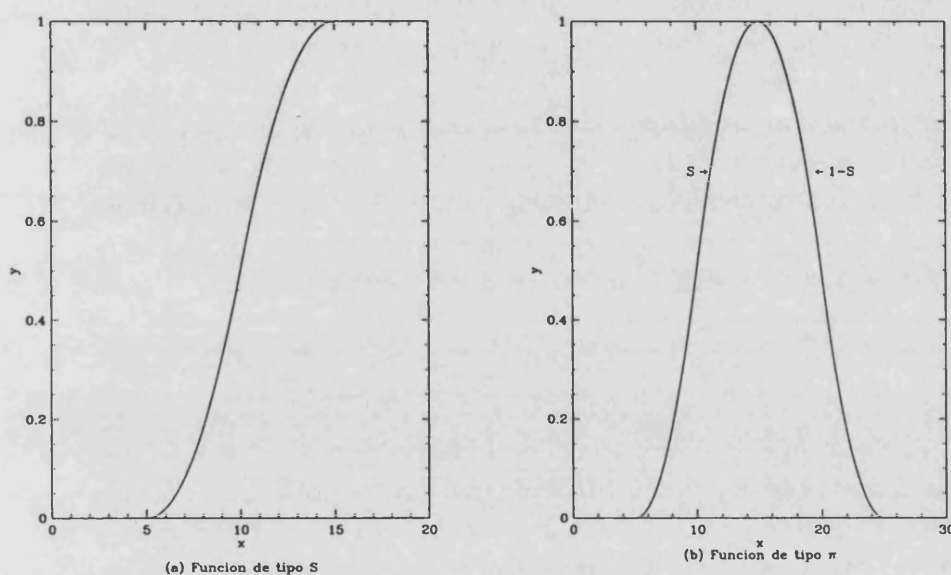


Figura 5.13: Funciones de tipo S y π .

La elección entre uno y otro tipo de función viene dado por las características del problema que se vaya a tratar. Por ejemplo, las funciones tipo π conducen a situaciones en las que no se cumplen ciertos requisitos de interés en la estimación del grado de borrosidad de una imagen (propiedades relativas a los índices de borrosidad y entropía, ver sección 5.3.13) que sí se cumplen cuando la función empleada es la de tipo S.

En Pal *et al.* (1981) se propone una función tipo S resultante de la composición de otras dos. La primera es la que nos da el paso del dominio espacial al dominio de propiedades sin realce alguno de la imagen:

$$p_{mn} = G_s(x_{mn}) = \left[1 + \frac{x_{max} - x_{mn}}{F_d} \right]^{-F_e} \quad (5.30)$$

donde x_{max} denota el nivel máximo de gris (L-1) considerado.

F_d y F_e tienen la misión de alterar la ambigüedad en el plano p , cambiando el punto de cruce y la pendiente de la función tipo S cuando cambian de valor. La función que transforma el dominio de propiedades normal en el de realce es la (5.35), que será tratada en la sección siguiente.

La ecuación (5.30) muestra que cuando $(x_{max} - x_{mn}) = 0$, se tiene $p_{mn} = 1$, y su valor decrece a medida que $(x_{max} - x_{mn})$ aumenta. Esto es, la propiedad borrosa p tal como ha sido definida es el *grado de posesión del nivel máximo de gris* x_{max} del pixel (m,n)-ésimo x_{mn} (efectivamente se trata de una función de tipo S). Cuando $x_{mn} = 0$, p_{mn} adquiere un valor positivo

$$\alpha = \left[1 + \frac{x_{max}}{F_d} \right]^{-F_e} \quad (5.31)$$

Por tanto, el plano p_{mn} queda restringido al intervalo $[\alpha, 1]$ en vez de estarlo al $[0, 1]$, como se ve en la figura 5.14. Dado que hay sólo $L(0, 1, \dots, L-1)$ niveles discretos de gris en una imagen, cada uno de los valores transformados x'_{mn} debe de ser asignado a su nivel más próximo, resultando así la imagen realzada X' . Y los valores $p'_{mn} \leq \alpha$ se hacen corresponder con valores $x'_{mn} = 0$ con el propósito de que el índice de borrosidad y la entropía cumplan las condiciones i) a iv) de la sección 5.3.13.

5.3.9 Conjuntos borrosos y el concepto de realce de imágenes.

El operador de intensificación de contraste (IC) sobre un conjunto borroso A genera otro conjunto borroso $A' = IC(A)$, cuya función de pertenencia es

$$\mu_{A'}(x) = \mu_{IC(A)}(x) = \begin{cases} 2[\mu_A(x)]^2, & 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2[1 - \mu_A(x)]^2, & 0.5 \leq \mu_A \leq 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

Esta transformación no lineal (de tipo S) reduce la "borrosidad" del conjunto A a través del incremento de los valores de $\mu_A(x)$ que son mayores que 0.5 y la disminución de aquéllos que son menores.

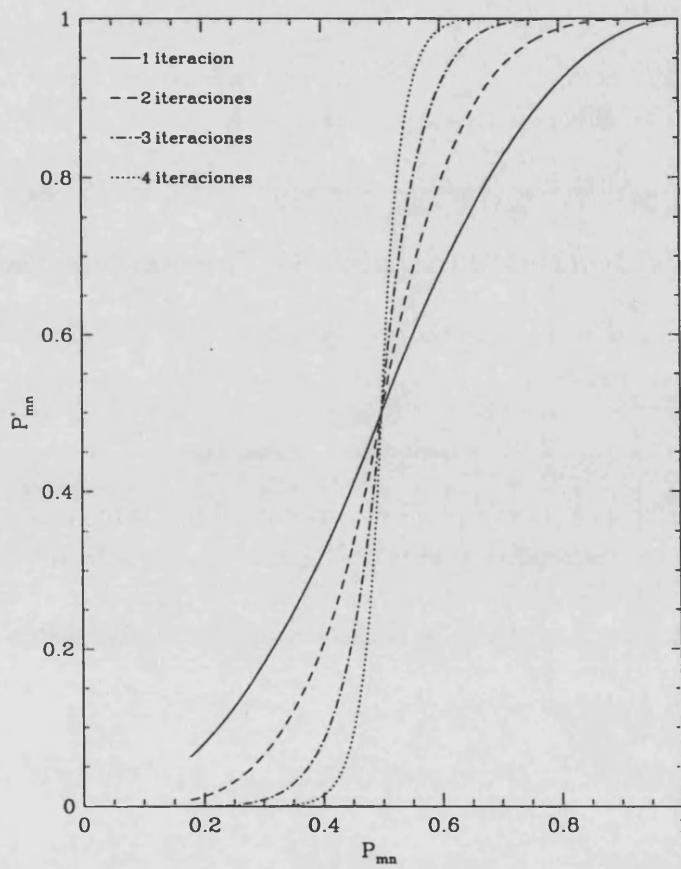


Figura 5.14: Función de realce tipo S.

Según esto, pues, cada p_{mn} en el dominio de propiedades puede ser transformado en un p'_{mn} de forma que se consiga un realce de la imagen X en dicho dominio de propiedades:

$$p'_{mn} = T_r(p_{mn}) = \begin{cases} T'_r(p_{mn}), & 0 \leq p_{mn} \leq 0.5 \\ T''_r(p_{mn}), & 0.5 \leq p_{mn} \leq 1 \end{cases} \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.33)$$

La función de transformación T_r viene definida por sucesivas aplicaciones de T_1 según la siguiente relación recursiva:

$$T_r(p_{mn}) = T_1(T_{r-1}(p_{mn})), \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

donde $T_1(p_{mn})$ representa el operador de intensificación de contraste, definido al principio de esta sección:

$$T_1(p_{mn}) = \begin{cases} 2[p_{mn}]^2, & 0 \leq p_{mn} \leq 0.5 \\ 1 - 2(1 - p_{mn})^2, & 0.5 \leq p_{mn} \leq 1 \end{cases} \quad (5.35)$$

La representación gráfica de las expresiones anteriores (fig. 5.14) muestra cómo, a medida que r va creciendo, la curva $p'_{mn}(p_{mn})$ tiende a la función escalón, de forma que en el caso límite, con $r \rightarrow \infty$, el resultado es una imagen binaria. Así, el valor de r permite la elección del grado de realce en la imagen.

5.3.10 Selección de F_d y F_e previa a la operación de realce.

Elegimos el punto de cruce x_c en el plano imagen de forma que a todo $x_{mn} \geq x_c$ en el dominio espacial le corresponda un $p_{mn} \geq 0.5$ en el dominio de propiedades, y a todo $x_{mn} \leq x_c$ le corresponda un $p_{mn} \leq 0.5$.

Situamos el umbral de la operación de realce entre los niveles l y $l + 1$, de forma que después del realce se obtenga

$$a) x'_{mn} > x_{mn} \quad \text{si } x_{mn} \geq l + 1$$

$$b) x'_{mn} < x_{mn} \quad \text{si } x_{mn} \leq l$$

Por tanto, se tendrá que $x_c = l + 0.5$ y $p_{x_c} = 0.5$, y el valor de F_d para un F_e específico vendrá dado a partir de la expresión (5.30):

$$F_d = \frac{x_{max} - x_c}{\left(\frac{1}{p_{x_c}}\right)^{\frac{1}{F_e}} - 1} \quad (5.36)$$

A mayor valor de F_e , mayor será la razón de aumento/disminución de los valores de p_{mn} y, por tanto, menor es el valor de r necesario para alcanzar un determinado grado de realce en la imagen.

5.3.11 Algoritmos de realce de imágenes.

De acuerdo con lo visto hasta ahora, el proceso de realce de una imagen en el marco de la teoría de conjuntos borrosos se concretaría en los pasos siguientes:

- 1) Evaluación de los x_{mn} y de x_{max} en el dominio espacial.
- 2) Una vez elegido el valor de F_e , determinación del valor del parámetro F_d a partir de la expresión (5.36).
- 3) Transformación de las variables del dominio espacial en sus correspondientes del espacio borroso de propiedades con la ecuación (5.30).
- 4) Aplicación del operador de realce $T_r(p_{mn})$ en el espacio de propiedades, obteniéndose así la imagen realzada en función de los nuevos valores de p_{mn} , p'_{mn} .
- 5) Paso al dominio espacial evaluando la relación inversa a la dada por (5.30):

$$x'_{mn} = G^{-1}(p_{mn}) = -F_d \left[\left(\frac{1}{p_{mn}} \right)^{\frac{1}{F_c}} - 1 \right] + x_{max} \quad (5.37)$$

obteniéndose así la imagen realzada en función de los x'_{mn} .

6) Aplicación de diferentes condiciones, como la anulación de los x'_{mn} correspondientes a $p'_{mn} \leq \alpha$, y aproximación de los valores x'_{mn} de forma que coincidan con los niveles de gris discretos que existen en la imagen.

En Li *et al.* (1989) se propone un algoritmo de relajación basado en una función de pertenencia que utiliza el histograma de la imagen como parámetro. El realce se consigue con pocas iteraciones y si el proceso continúa hasta la convergencia, el resultado es una imagen binaria. La función de transformación y realce utilizada es muy similar a la descrita anteriormente por lo que se puede omitir la descripción de este algoritmo.

En ocasiones, la utilización de un algoritmo de suavizamiento, justificada por el hecho de que puntos en la imagen que están cercanos tienden a poseer niveles casi iguales de gris, puede contribuir de forma positiva al resultado final. En Pal *et al.* (1981) se compara los resultados obtenidos al aplicar tres tipos diferentes de algoritmos de suavizamiento de la imagen realzada resultante después de la primera iteración. Estos algoritmos son:

a) Desenfoque: consistente en la aplicación de un filtro lineal no recursivo cuyo efecto es repartir parte de la intensidad de un pixel entre sus pixeles vecinos. La intensidad del pixel (m,n)-ésimo viene definida por

$$x'_{mn} = a_0 x_{mn} + a_1 \sum_{Q_1} x_{ij} + a_2 \sum_{Q_2} x_{ij} + \dots + a_s \sum_{Q_s} x_{ij} \quad (5.38)$$

donde

$$a_0 + N_1 a_1 + N_2 a_2 + \dots + N_s a_s = 1,$$

$$1 > a_1 > a_2 > \dots > a_s > 0,$$

$$(i, j) \neq (m, n), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad n = 1, 2, \dots, N$$

siendo x_{mn} el pixel (m, n) -ésimo de la imagen realizada después de la primera iteración. Q_1 es el conjunto de N_1 coordenadas (i, j) tales que están dentro de un círculo de radio R_1 centrado en el punto (m, n) , a excepción de dicho punto. Y Q_s es el conjunto de N_s coordenadas (i, j) tales que están dentro de un círculo de radio R_s centrado en el punto (m, n) y que no pertenecen al conjunto Q_{s-1} .

b) Promediado: consiste en realizar el promediado de las intensidades dentro de una región. Generalmente se utiliza para la eliminación del ruido del tipo denominado “sal y pimienta” (existen pixeles aislados que poseen el valor de gris mínimo o máximo posibles en la imagen, manifestándose como puntos muy claros en regiones oscuras y viceversa).

c) Regla del operador MAX-MIN (Nakagawa *et al.* 1978). En imágenes bi-valuadas (todos sus pixeles tienen valor 0 ó 1), se definen dos tipos de operaciones que permiten la eliminación de ruido en ellas y la detección de formas alargadas en la imagen. Estas operaciones son las de contracción (“shrinking”) y expansión (“expanding”). La contracción es equivalente al cálculo del operador lógico AND y la expansión al cálculo del operador OR. Los análogos a estos operadores en la teoría de los conjuntos borrosos son los operadores MAX y MIN. Esto permite una generalización de las operaciones de contracción y expansión al caso de imágenes con una serie continua de valores de gris: contraer equivale a sustituir el valor de un pixel por el mínimo de los valores de sus pixeles vecinos y el suyo propio, y expandir es asignarle el valor máximo. La combinación de ambos (su aplicación sucesiva u operador MAX-MIN) conduce a una atenuación en la imagen de las frecuencias espaciales más altas (correspondientes a bordes o ruido), consiguiéndose así una especie de emborronamiento o suavización de la misma.

5.3.12 Resultados de la aplicación del algoritmo a imágenes astronómicas.

En la literatura no he encontrado ningún artículo en el que los algoritmos anteriores fuesen aplicados a imágenes de naturaleza astronómica. Dado el innegable carácter borroso que poseen éstas (presencia, por ejemplo, de bordes poco definidos) decidí que sería muy interesante aplicarlos a algún caso sencillo y, sobre todo, comparar los resultados con los obtenidos por algoritmos más “tradicionales” como los basados en la modificación del histograma de la imagen.

Mi interés principal radica en la astrometría y, en consecuencia, en la determinación precisa del centro de las imágenes, en concreto, de las correspondientes a objetos puntuales (estrellas, asteroides, etc.). Por tanto, el objetivo es comprobar cuál de estos algoritmos modifica la imagen de forma que la estimación del centro de la estrella se vea mejorada respecto de la estimación previa al realce. He trabajado con imágenes simuladas, de tipo gaussiano, con centro en el pixel (0,0) (fig. 5.15). Las estimaciones del centro antes y después del realce se han realizado simplemente calculando los primeros momentos de la imagen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i,j} v_{ij} x_{ij}}{\sum_{i,j} v_{ij}} \quad (5.39)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i,j} v_{ij} y_{ij}}{\sum_{i,j} v_{ij}} \quad (5.40)$$

donde v_{ij} es el valor del pixel (i, j) en el punto de coordenadas (x_{ij}, y_{ij}) . Se podría haber aplicado otros procedimientos más sofisticados en la determinación del centro (como el ajuste de curvas) pero los primeros momentos son suficientes a mi propósito que es ver el resultado de la aplicación de los conjuntos borrosos en mi problema astrométrico.

Los diferentes algoritmos de realce utilizados son:

a) la ecualización del histograma, descrita en el apartado 5.2, pag. 56. En las tablas los resultados obtenidos aplicando este procedimiento aparecerán en la columna “ecual” (ver también figs. 5.16, 5.23 y 5.30).

b) la transformación del histograma según una función exponencial, descrita también en el apartado 5.2. En las tablas aparece como “expo”. En este caso concreto el valor del factor aplicado ha sido 0.033, que es el que he encontrado que proporciona los mejores resultados (figs. 5.17, 5.24 y 5.31).

c) el realce difuso o borroso descrito en la sección anterior. Se han realizado tres iteraciones, utilizando un valor de $F_e = 1.35$ (figs. 5.18, 5.25 y 5.32). En las tablas los resultados obtenidos se encuentran en la columna “borr”.

d) un cambio de contraste en la imagen consistente en la transformación lineal:

$$vp = \frac{255(vp_0 - v_{min})}{v_{max} - v_{min}}$$

donde vp es el nuevo valor (o nivel de gris) del pixel, vp_0 es el correspondiente a la imagen original, y v_{min} , v_{max} son los valores de los niveles de gris mínimo y máximo en la imagen original, respectivamente. Con esta función lo que se consigue es ampliar el rango de niveles de gris hasta los 256 de que dispone la pantalla, aumentando así el contraste entre las zonas más oscuras y las más brillantes de la imagen (figs. 5.19, 5.26 y 5.33). En las tablas los resultados obtenidos con este método aparecerán en la columna “cont”.

e) aplicación de la máscara binaria 11110000. Con ella se consigue una imagen realizada en la que no existen pixeles con un nivel de gris inferior a 00010000 (es decir, 16), excepto los de nivel 00000000 (correspondientes al “negro”), manteniéndose en la imagen, por tanto, sólo los de mayor valor o intensidad (figs. 5.20, 5.27 y 5.34). En las tablas aparece como “masc”.

	imagen1	imagen2	imagen3	imagen4	imagen5
imax	40	80	120	160	200
ruido	75	37.5	25	19	15
fondo	87.5	43.75	29.17	21.88	17.5

Tabla 5.3: $imax$ =intensidad máxima de la imagen. El intervalo de grises posible es $[0,255]$. El ruido y el fondo han sido expresados en tanto por ciento de intensidad máxima de la estrella en cada caso.

f) la supresión de un tanto por ciento de niveles en el histograma. Se trata de anular (es decir, convertir en correspondientes al “negro”) un determinado tanto por ciento de las barras del histograma correspondientes a los valores de gris más bajos. En este caso concreto se ha visto que un recorte del 70% da como resultado la imagen más “agradable” desde el punto de vista del ojo humano (fig. 5.21, 5.28 y 5.35). Los resultados de su aplicación se encuentran en la columna “modih”.

En la tabla [5.3] se muestra algunos de los parámetros que caracterizan las diferentes imágenes simuladas empleadas.

Los efectos de la aplicación de los algoritmos de realce descritos anteriormente sobre la posición del centro de la imagen a partir de los primeros momentos, aparecen en las tablas [5.4] y [5.5]. La posición real de la imagen simulada es $(0,0)$. La diferencia entre ambas tablas radica en la presencia o no de un cierto nivel de fondo en las imágenes. En la primera línea aparece la posición calculada antes de realzar la imagen.

Se aprecia, por ejemplo, que cuando se trabaja con imágenes que poseen un cierto nivel de fondo [tabla 5.4], la ecualización, la transformación del histograma según una función exponencial y la aplicación de la máscara binaria no afectan en absoluto al resultado final, debido a que el fondo es el que domina la estadística de la imagen. En cambio, los otros tres métodos

	imagen1	imagen2	imagen3	imagen4	imagen5
original	(2.35,2.39)	(2.26,2.29)	(2.17,2.20)	(2.09,2.12)	(2.01,2.04)
ecual	(2.35,2.39)	(2.26,2.29)	(2.17,2.20)	(2.09,2.12)	(2.01,2.04)
expo	(2.35,2.39)	(2.26,2.29)	(2.17,2.20)	(2.09,2.12)	(2.01,2.04)
borr	(-0.13,0.06)	(-0.07,0.02)	(-0.05,0.03)	(-0.05,0.03)	(-0.05,0.01)
cont	(1.67,1.87)	(1.35,1.51)	(1.12,1.25)	(0.98,1.09)	(0.84,0.94)
masc	(2.35,2.39)	(2.26,2.29)	(2.17,2.20)	(2.09,2.12)	(2.01,2.04)
modih	(2.27,2.30)	(2.15,2.18)	(2.03,2.06)	(1.93,1.97)	(1.83,1.86)

Tabla 5.4: Posición del centro de la imagen antes y después de la aplicación de cada uno de los algoritmos de realce. El centro real de la imagen simulada se encuentra en el punto de coordenadas (0,0).

	imagen1	imagen2	imagen3	imagen4	imagen5
original	(-1.14,-0.26)	(-0.57,-0.14)	(-0.37,-0.10)	(0.28,-0.07)	(0.223,-0.06)
ecual	(0.95,1.24)	(0.60,0.78)	(0.44,0.56)	(0.35,0.44)	(0.29,0.36)
expo	(0.95,1.24)	(0.60,0.78)	(0.44,0.56)	(0.35,0.44)	(0.29,0.36)
borr	(-0.11,0.98)	(-0.12,0.06)	(-0.07,0.06)	(-0.04,0.05)	(-0.05,0.02)
cont	(1.68,1.87)	(1.35,1.51)	(1.12,1.25)	(0.98,1.09)	(0.28,0.360)
masc	(-1.14,-0.26)	(-0.57,-0.14)	(-0.37,-0.10)	(-0.28,-0.07)	(-0.23,-0.06)
modih	(0.66,0.79)	(0.40,0.55)	(0.25,0.38)	(0.23,0.34)	(0.17,0.24)

Tabla 5.5: Posición del centro de la imagen antes y después de la aplicación de cada uno de los algoritmos de realce. El centro real de la imagen simulada se encuentra en el punto de coordenadas (0,0). En este ejemplo el fondo de la imagen es nulo.

sí mejoran la determinación de la posición del centro, destacando sobre todo el realce borroso, que conduce prácticamente al resultado correcto.

Cuando no existe fondo en la imagen [tabla 5.5], los resultados son más dispares. La ecualización del histograma y la transformación exponencial modifican la imagen de forma que la posición que se obtiene para el centro es peor que la calculada antes del proceso de realce. En cambio, la aplicación de la máscara no tiene ningún efecto en lo que a la determinación del centro se refiere, ya que su acción se limita a la eliminación de ruido en las zonas donde la señal es baja, anulando los píxeles correspondientes a los niveles de gris más bajos y manteniendo la imagen estelar prácticamente intacta.

Por otro lado, el cambio de contraste, que era el método mejor en el caso anterior (a excepción del realce borroso) es el que peores resultados proporciona ahora. El nivel de gris mínimo de la imagen coincide con el nivel mínimo del realce, siendo cero en ambos casos (al menos los píxeles que originalmente tenían valor negativo han sido obligados a tenerlo igual a cero para trabajar así con una imagen positiva). El valor de pixel máximo en la imagen, en cambio, está bastante alejado del utilizado para el realce (igual a 255) y al “estirar” el intervalo en el que los píxeles toman valores, la imagen viene modificada de forma tal que la media y los valores de las demás medidas de naturaleza estadística resultan alterados de modo importante. Este efecto es, lógicamente, cada vez menor a medida que las imágenes consideradas son más intensas.

La modificación del histograma en el caso de imágenes con fondo nulo empeora también la estimación de la posición del centro previa al realce y, aunque va mejorando con el aumento de la intensidad de la imagen, nunca llega a superar la estimación inicial. En cambio, el realce borroso sigue proporcionando nuevas imágenes que conducen a resultados notablemente superiores a los originales.

En ambos casos (imágenes con y sin fondo) el realce borroso es el método que más contribuye a la mejora de la determinación del centro en las estre-

llas simuladas, independientemente de la presencia o no de fondo en dichas imágenes, lo que evita el tener que sustraerlo previamente antes de realizar la operación de realce y llevarlo a cabo no tiene gran influencia en el resultado final. Los demás métodos sí se ven afectados por la presencia del fondo. Al tratarse de imágenes débiles, en las que la relación señal/ruido es muy baja, el fondo y el ruido son los que dominan la estadística en la imagen (sobre todo el fondo) de modo que la estimación de los primeros momentos de la imagen original está muy alejada del valor correcto real. Si el fondo es previamente sustraído, esta primera estimación es entonces bastante buena, mejorando con el aumento de la intensidad media de la imagen.

Se trata además de un algoritmo muy estable: una vez fijado un valor de F_e , una diferencia de dos en el número de iteraciones suele conducir a una diferencia del orden de las centésimas en la determinación del centro.

Por tanto, el realce borroso, gracias a la bondad de los resultados a los que conduce sin necesitar una previa eliminación del fondo (con la consiguiente pérdida de información en la imagen), es una herramienta muy útil cuando se trata de estimar la posición de imágenes estelares débiles y/o difusas (galaxias, por ejemplo). Además su aplicación sobre imágenes relativamente intensas también mejora la determinación de su centro al contrario de como ocurre con otros métodos (ver, por ejemplo, imagen 5 en las tablas 5.3 y 5.4) por lo que el realce puede aplicarse sin problemas en un campo en el que estén presentes tanto imágenes débiles como brillantes.

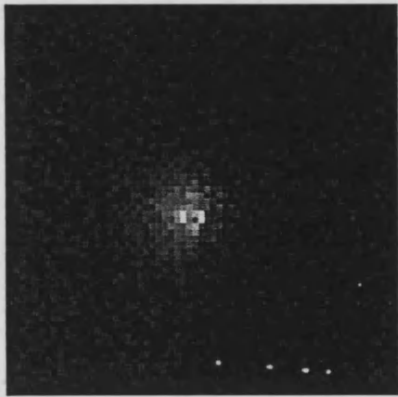


Figura 5.15: Imagen 1 (original).

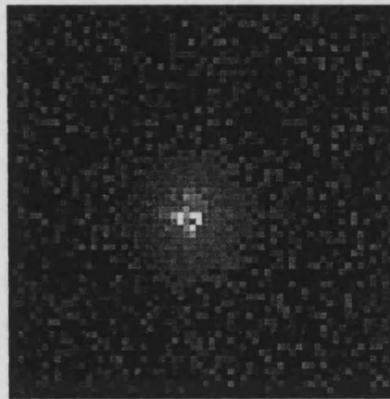


Figura 5.17: Densidad de probabilidad de los niveles de gris de tipo exponencial (imagen 1).

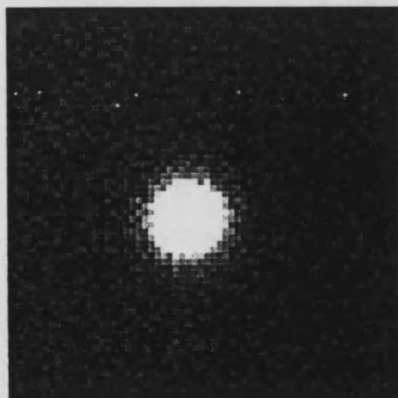


Figura 5.16: Imagen 1 ecualizada.

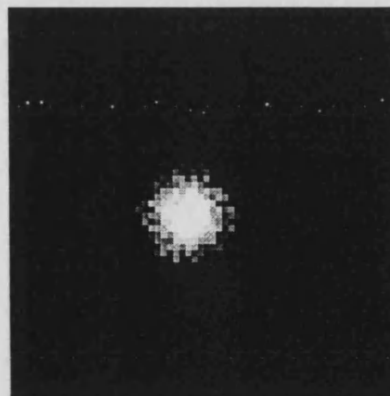


Figura 5.18: Algoritmo de conjuntos borrosos (imagen 1).

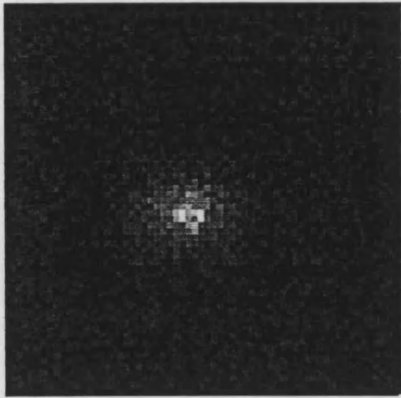


Figura 5.19: Cambio de contraste (imagen 1).

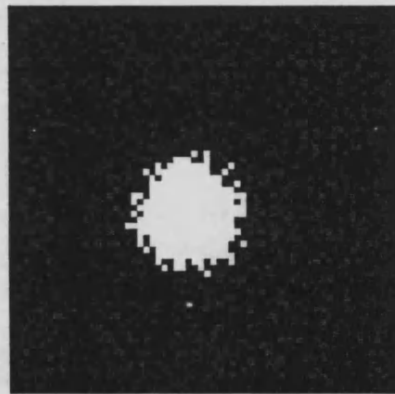


Figura 5.21: Eliminación de un 70% de los niveles del histograma de la imagen original (imagen 1).

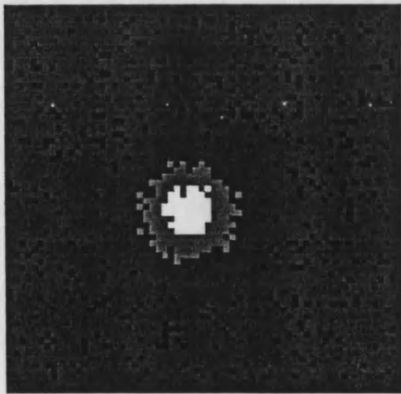


Figura 5.20: Aplicación de la máscara binaria 11110000 (imagen 1).

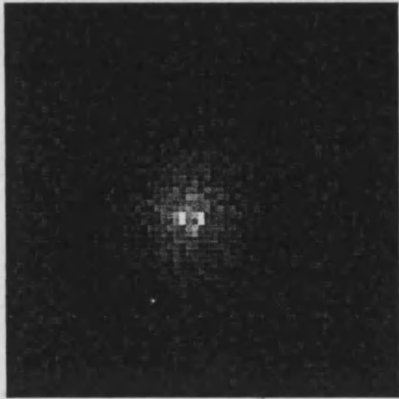


Figura 5.22: Imagen 1 con fondo=0.
(Original).

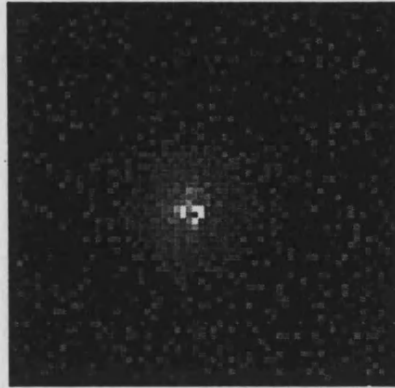


Figura 5.24: Densidad de probabilidad de los niveles de gris de tipo exponencial (imagen 1, fondo=0).

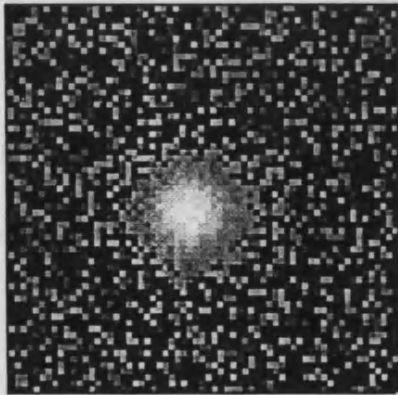


Figura 5.23: Imagen 1 (fondo=0) ecualizada.

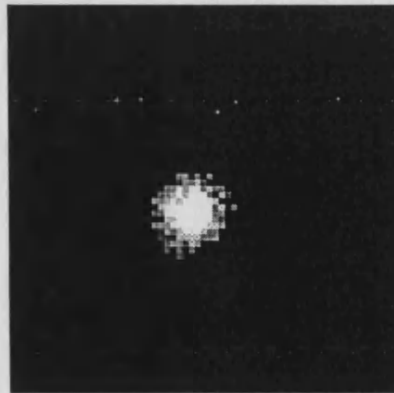


Figura 5.25: Algoritmo de conjuntos borrosos (imagen 1, fondo=0).

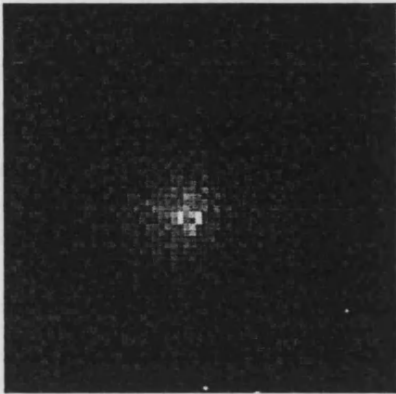


Figura 5.26: Cambio de contraste (imagen 1, fondo=0).

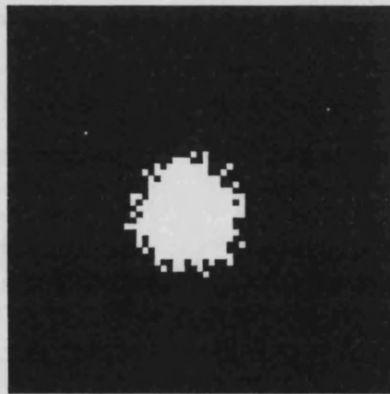


Figura 5.28: Eliminación de un 70% de los niveles del histograma original (imagen 1, fondo=0).

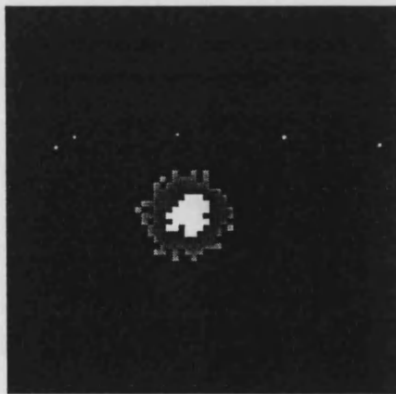


Figura 5.27: Aplicación de la máscara binaria 11110000 (imagen 1, fondo=0).

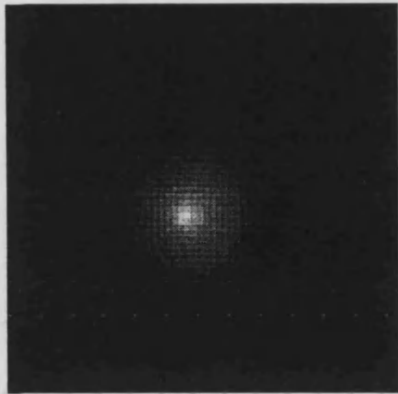


Figura 5.29: Imagen 5 con fondo $\neq 0$ (original).

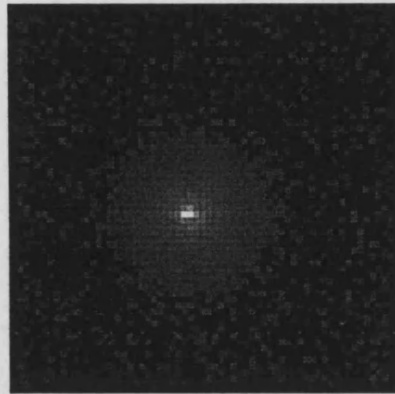


Figura 5.31: Densidad de probabilidad de los niveles de gris de tipo exponencial (imagen 5).

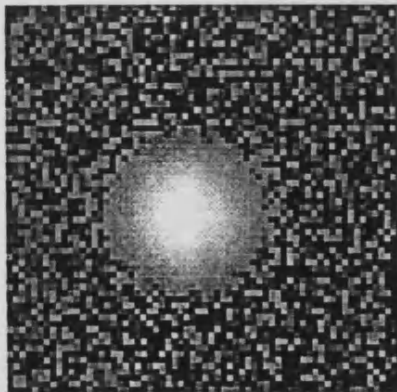


Figura 5.30: Imagen 5 ecualizada.

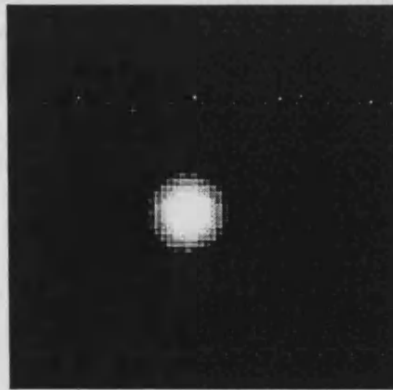


Figura 5.32: Algoritmo de conjuntos borrosos (imagen 5).

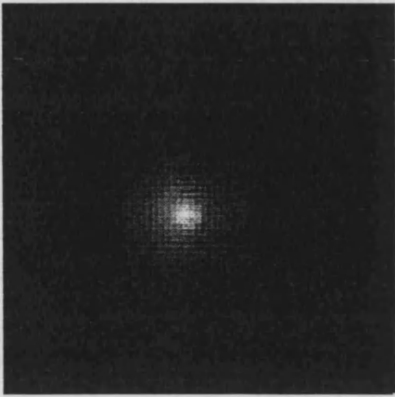


Figura 5.33: Cambio de contraste (imagen 5).

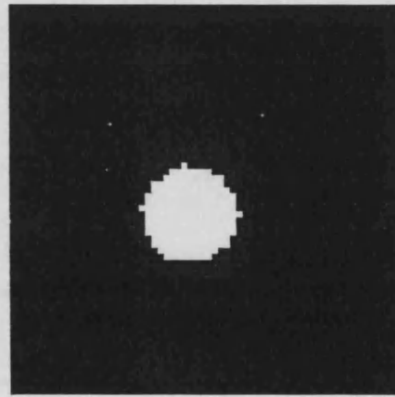


Figura 5.35: Eliminación de un 70% de los niveles del histograma de la imagen original (imagen 5).

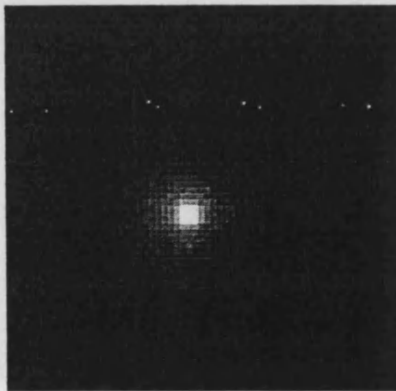


Figura 5.34: Aplicación de la máscara binaria 11110000 (imagen 5).

5.3.13 Evaluación del carácter borroso de una imagen y la magnitud del realce.

El problema que se nos presenta a continuación es el de obtener una medida cuantitativa del realce en una imagen a partir de la evaluación de su "borrosidad" o "fuzziness". Este grado de borrosidad debe de representar la dificultad en decidir qué elementos pertenecen al conjunto borroso considerado y cuáles no, es decir, da razón de la información promedio recibida en base a la cual hay que tomar una decisión.

Se trata pues de encontrar una función de transformación ξ del conjunto de todos los subconjuntos borrosos definidos en uno no-borroso sobre el intervalo $[0, \infty[$, que satisfaga las condiciones sugeridas por De Luca y Termini (De Luca *et al.* 1972):

1) $\xi(A) = 0$ si y sólo si A es un subconjunto ordinario de U , siendo U el universo de discurso.

2) $\xi(A)$ es máximo si y sólo si $\mu_A(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in U$.

3) $\xi(\underline{A}) \leq \xi(A)$, siendo \underline{A} la versión no borrosa de A . Este conjunto \underline{A} se define como el conjunto tal que $\mu_{\underline{A}}(x_i) = 0$ si $\mu_A(x_i) \leq 0.5$ y $\mu_{\underline{A}}(x_i) = 1$ en caso de que $\mu_A(x_i) > 0.5$. Esto implica que $\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_A(x)$ si $\mu_A(x) \leq \frac{1}{2}$ y $\mu_{\underline{A}}(x) \geq \mu_A(x)$ si $\mu_A(x) \geq \frac{1}{2}$.

4) $\xi(A) = \xi(\bar{A})$, donde \bar{A} es el conjunto borroso complementario de A .

Dos formas particulares de esta función son el índice de borrosidad (Kaufmann 1975) y la entropía (De Luca *et al.* 1972).

Índice de borrosidad de un conjunto difuso.

Sea un conjunto difuso A de n elementos. Su índice de borrosidad se define como

$$\gamma(A) = \frac{2}{n^k} d(A, \mathbf{A}) \quad (5.41)$$

donde $d(A, \mathbf{A})$ es la distancia entre el conjunto borroso A y su conjunto ordinario más cercano, \mathbf{A} . El número 2 y la constante k hacen que $\gamma_A \in [0, 1]$.

El valor de k depende del tipo de distancia que sea considerado. Así, $k = 1$ corresponde a la distancia generalizada de Hamming:

$$d(A, \mathbf{A}) = \sum_i |\mu_A(x_i) - \mu_{\mathbf{A}}(x_i)| = \sum_i \mu_{A \cap \bar{A}}(x_i) \quad (5.42)$$

Y el correspondiente índice de borrosidad es:

$$\gamma_1(A) = \frac{2}{n} \sum_i \mu_{A \cap \bar{A}}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.43)$$

donde $A \cap \bar{A}$ es la intersección entre el conjunto borroso A y su complementario. $\mu_{A \cap \bar{A}}(x_i)$ denota el grado de pertenencia de x_i a dicho conjunto intersección, y viene definido por la expresión (5.22).

Si se considera la extensión al plano bidimensional de una imagen, X , se tiene que

$$\gamma_1(X) = \frac{2}{MN} \sum_m \sum_n \mu_{X \cap \mathbf{X}}(x_{mn}) \quad (5.44)$$

con

$$m = 1, 2, \dots, M \quad n = 1, 2, \dots, N$$

El valor $k = 0.5$ es el correspondiente al caso en que la distancia considerada entre los dos conjuntos sea la euclídea. En ese caso, el índice de borrosidad viene dado por:

$$\gamma_{0.5}(X) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \left[\sum_m \sum_n (\mu_X(x_{mn}) - \mu_{\mathbf{X}}(x_{mn}))^2 \right]^{0.5} \quad (5.45)$$

donde \mathbf{X} es el plano imagen ordinario más cercano al plano borroso X .

Las ecuaciones (5.44) y (5.45) definen la cantidad de "borrosidad" presente en el plano de la imagen X.

Fácilmente se comprueba que el índice de borrosidad, tal como ha sido definido, cumple las propiedades expuestas anteriormente:

i) $(\gamma_1)_{min} = 0$. Corresponde al caso en que $\mu(x_i) = 0$ ó 1 donde $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, el conjunto considerado no es borroso.

ii) $(\gamma_1)_{max} = 1$. Corresponde al caso en que $\mu(x_i) = 0.5$, que es cuando todos los puntos pertenecen en igual grado a un conjunto y a su complementario.

iii) $\gamma_1(A) \geq \gamma_1(\mathbf{A})$, donde \mathbf{A} es la versión de A con bordes bien definidos.

iv) $\gamma_1(A) = \gamma_1(\bar{A})$, donde \bar{A} es el conjunto complementario de A.

Entropía de un conjunto difuso.

La definición de la entropía en un conjunto borroso A ha sido propuesta por De Luca y Termini (1972):

$$H(A) = \frac{1}{n \ln 2} \sum_i sn(\mu_A(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.46)$$

donde

$$sn(\mu_A(x_i)) = -\mu_A(x_i) \ln \mu_A(x_i) - (1 - \mu_A(x_i)) \ln(1 - \mu_A(x_i)) \quad (5.47)$$

es la *función de Shannon*.

Con esta definición, la entropía de un conjunto borroso cumple también las condiciones antes mencionadas, a saber:

i) Cuando $\mu_A(x_i) = 0$ ó 1 se tiene que $H(A) = H_{min} = 0$. Intuitivamente es el caso correspondiente al "menor desorden" y, por tanto, el caso de en-

tropía mínima, H_{min} .

ii) Cuando $\mu_A(x_i) = 0.5, \forall x_i \in A$, se tiene $H(A) = H_{max} = 1$. Correspondería al caso de "mayor desorden" o de H_{max} .

iii) $H(A) \geq H(\bar{A})$, es decir, la versión borrosa de un conjunto es "más desordenada" que la versión con bordes bien definidos.

iv) $H(A) = H(\bar{A})$. Un conjunto borroso y su complementario son "igualmente desordenados".

La extensión de la definición de la entropía de un conjunto difuso al plano bidimensional X de una imagen es:

$$H(A) = \frac{1}{MN \ln 2} \sum_m \sum_n Sn(\mu_X(x_{mn})) \quad (5.48)$$

con

$$Sn(\mu_X(x_{mn})) = -\mu_X(x_{mn}) \ln \mu_X(x_{mn}) - (1 - \mu_X(x_{mn})) \ln(1 - \mu_X(x_{mn}))$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Interpretación de $\gamma(X)$ y $H(X)$ en el contexto del realce de imágenes.

En una imagen X cuyos pixeles pueden adquirir diferentes tonos de gris hay siempre presente una cierta ambigüedad a la hora de decidir, por ejemplo, si el pixel (m,n)-ésimo x_{mn} pertenece a un determinado objeto o región de la imagen cuando en ella los contornos no están perfectamente definidos, como es el caso de las imágenes astronómicas. Esta incertidumbre puede ser medida a través de $\mu_{X \cap \bar{X}}(x_{mn})$ o de $Sn(\mu_X(x_{mn}))$. Ambas cantidades se comportan de acuerdo con lo que nuestra intuición exige en cada situación:

i) Si $\mu_X(x_{mn}) = 0$ ó 1 , es decir, si sabemos que el punto pertenece o no al conjunto A, no existe ninguna incertidumbre, en perfecto acuerdo con el

hecho de que $\mu_{X \cap \bar{X}}(x_{mn})$ y $Sn(\mu_X(x_{mn}))$ tomen valores nulos.

ii) En cambio, cuando $\mu_X(x_{mn}) = 0.5$, se considera que el punto pertenece por igual al conjunto A y a su complementario, lo que da lugar a una situación de incertidumbre máxima, acorde con los valores máximos que en este caso toman $\mu_{X \cap \bar{X}}(x_{mn})$ y $Sn(\mu_X(x_{mn}))$.

De acuerdo con esto, las cantidades $\gamma(X)$ y $H(X)$ pueden interpretarse como medidas de la cantidad promedio de información perdida cuando se considera un sistema borroso (imagen con diferentes niveles de gris, por ejemplo) en lugar del correspondiente no-borroso (imagen bimodal, por ejemplo).

Experimentalmente se comprueba que los valores absolutos de $\gamma(X)$ y $H(X)$, en el caso en que el punto de cruce se mantiene fijo, van disminuyendo a medida que la pendiente de la curva G_s (ec. 5.30) va creciendo (lo que se consigue aumentando los valores de F_d y F_e) resultando todo ello en una disminución de la ambigüedad en el dominio p a medida que la imagen va siendo más y más realzada. Existe, pues, una fuerte dependencia respecto de los valores elegidos para F_d y F_e .

Por otro lado, cuando no se exige la condición $\alpha = 0$, los valores absolutos de $\gamma(X)$ y $H(X)$ son mayores que cuando sí se aplica. Y en una imagen cuyo histograma ha sido ecualizado, estos parámetros también son mayores que cuando el histograma no ha sido modificado, debido a que entonces existe un gran número de píxeles en las cercanías del punto de cruce.

He realizado un estudio de los valores de $\gamma(X)$ y $H(X)$ y de su evolución en función del número de iteraciones utilizado en el proceso de realce. La imagen considerada es una imagen real de dos estrellas, en la que la intensidad máxima es de 224 y la mínima es 148, siendo $[0, 255]$ el intervalo de intensidades permitido por el equipo. El resultado de este estudio queda resumido en las tablas [5.6] y [5.7].

iteraciones	F_e						
	0.05	0.15	0.45	1.35	4.05	12.15	36.45
1	0.9509	0.8562	0.6902	0.5840	0.5430	0.5288	0.5241
2	0.9054	0.7488	0.5048	0.3820	0.3395	0.3255	0.3208
3	0.8232	0.5695	0.3058	0.2046	0.1744	0.1648	0.1617
4	0.6877	0.3662	0.1543	0.0964	0.0808	0.0760	0.0745
5	0.4981	0.1923	0.0718	0.0447	0.0375	0.0353	0.0346
6	0.2949	0.0892	0.0336	0.0210	0.0176	0.0165	0.0162
7	0.1435	0.0411	0.0157	0.0095	0.0077	0.0071	0.0069
8	0.0648	0.0192	0.0067	0.0033	0.0023	0.0021	0.0020
9	0.0298	0.0085	0.0018	0.0005	0.0002	0.0002	0.0002

Tabla 5.6: Evolución del valor del índice de borrosidad $\gamma(X)$ en la imagen real del ejemplo en función del número de iteraciones y del valor de F_e .

iteraciones	F_e						
	0.05	0.15	0.45	1.35	4.05	12.15	36.45
1	0.9974	0.9791	0.9059	0.8340	0.8012	0.7892	0.7851
2	0.9910	0.9345	0.7640	0.6338	0.5820	0.5640	0.5579
3	0.9697	0.8231	0.5336	0.3814	0.3310	0.3147	0.3093
4	0.9076	0.6160	0.2936	0.1862	0.1563	0.1471	0.1442
5	0.7634	0.3624	0.1382	0.0857	0.0718	0.0676	0.0662
6	0.5253	0.1733	0.0642	0.0403	0.0340	0.0320	0.0314
7	0.2791	0.0790	0.0306	0.0195	0.0160	0.0154	0.0151
8	0.1263	0.0370	0.0095	0.0085	0.0066	0.0059	0.0057
9	0.0574	0.0178	0.0055	0.0019	0.0011	0.0009	0.0009

Tabla 5.7: Evolución del valor de la entropía $H(X)$ en la imagen real del ejemplo en función del número de iteraciones y del valor de F_e .

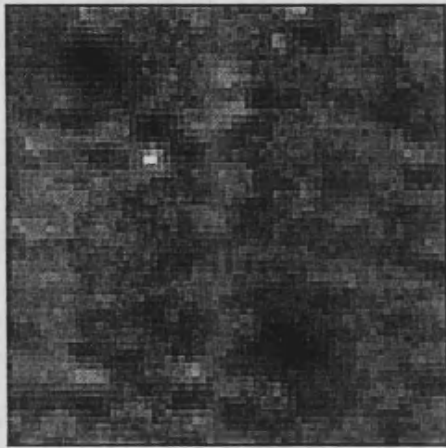


Figura 5.36: Imagen original.

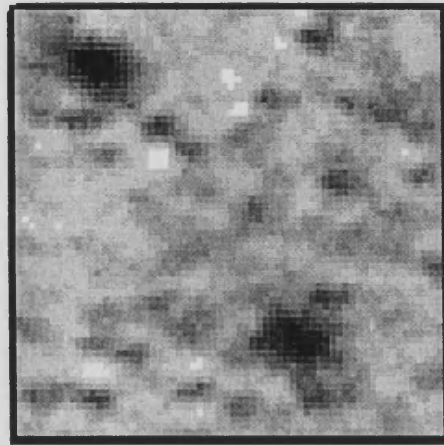


Figura 5.38: Imagen después de 2 iteraciones.

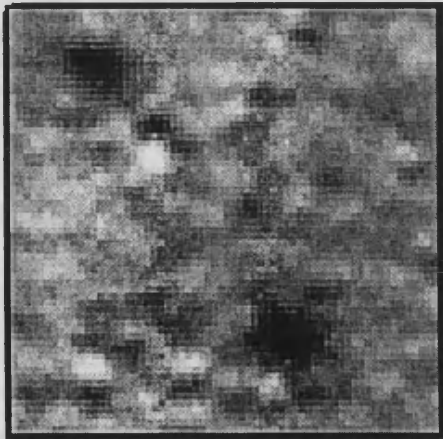


Figura 5.37: Imagen después de 1 iteración.

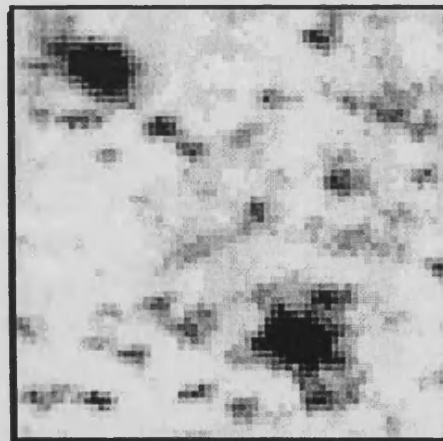


Figura 5.39: Imagen después de 3 iteraciones.

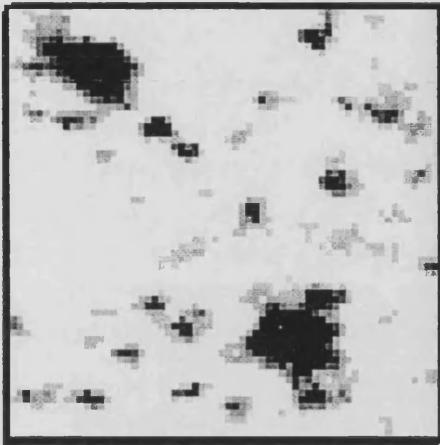


Figura 5.40: Imagen después de 5 iteraciones.

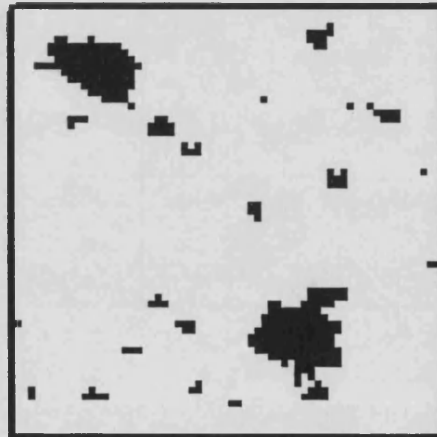


Figura 5.42: Imagen después de 9 iteraciones.

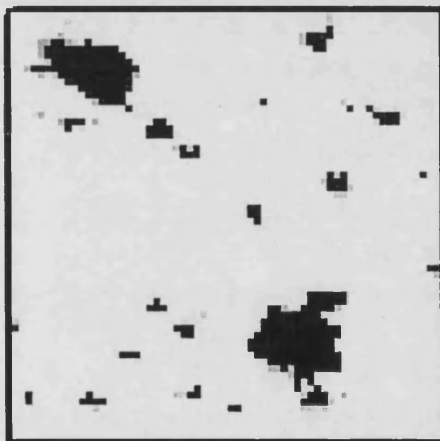


Figura 5.41: Imagen después de 7 iteraciones.

Las figuras 5.36 a 5.42 (pags. 106 y 107) son imágenes correspondientes a diferente número de iteraciones en el algoritmo de realce para un valor $F_e = 1.35$.

Se ve claramente que a mayor valor de F_e corresponde un valor menor de $H(X)$ y $\gamma(X)$ para un mismo número de iteraciones. Por tanto, cuanto mayor sea el valor de F_e menor será el número de iteraciones necesario para alcanzar el límite de imagen bimodal.

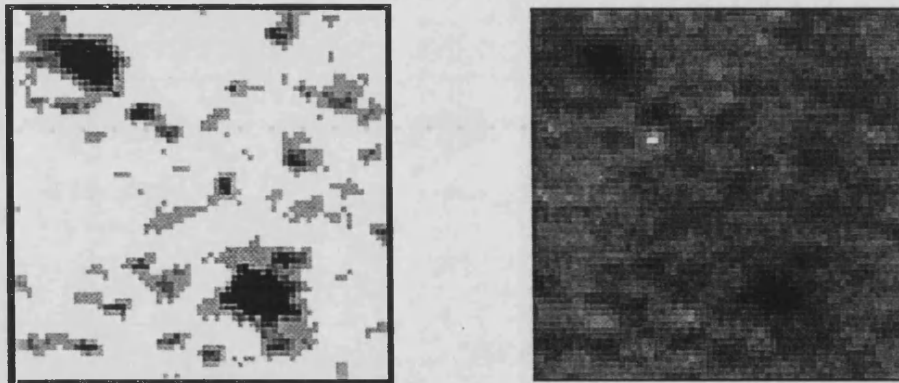


Figura 5.43: La figura izquierda corresponde a 3 iteraciones con $F_e = 0.15$, y la derecha corresponde a 1 iteración con $F_e = 1.35$. Los valores de γ son 0.5695 y 0.5840, respectivamente.

Debido a la dependencia de $\gamma(X)$ y $H(X)$ con F_e , estos parámetros son sólo útiles en la comparación de una misma imagen con diferentes grados de realce para un valor fijo de F_e . En las tablas se pueden apreciar ejemplos de imágenes correspondientes a diferentes F_e con un valor de $\gamma(X)$ muy similar y que se corresponden con grados muy diferentes del realce, es decir, situaciones en las que el grado de borrosidad es claramente diferente. Ocurre lo mismo con $H(X)$. Un ejemplo es el de la figura (5.43), donde se tiene dos imágenes con valores de $\gamma(X)$ (0.5695 y 0.5840) mucho más cercanos de lo que cabría esperar en dos imágenes tan diferentes.

Así pues los valores de los parámetros $\gamma(X)$ y $H(X)$ son útiles a la hora de tener una estimación del grado de borrosidad de una imagen y, por consiguiente, del grado en que ha sido realizada por el algoritmo, para un valor determinado de F_e . Además, proporcionan un criterio objetivo para establecer una relación entre los grados de realce de diferentes imágenes, siempre teniendo en cuenta que el valor de F_e utilizado en los realces ha de ser el mismo en todos los casos para que la comparación sea válida.

Bibliografía.

- Bellman, R.E.; Giertz, M. (1973) "On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets". *Inf. Sci* 5, 149-157.
- Bezdek, J.; Pal, S.K. (1992) "Fuzzy Models for Pattern Recognition". New York: IEEE Press.
- Bremermann, H. (1976) "Pattern Recognition". *Systems Theory in the Social Sciences*, pp. 116-159. H. Bossel, S. Klaszko, and N. Müller, eds., Birkhaeuser, Basel.
- Buil, C. (1989) *Astronomie CCD*. Société d'Astronomie Populaire. pp.189-195.
- Cox, E. (1992) "Fuzzy fundamentals". *IEEE Spectrum*, pp. 58-61, Oct.
- De Lucca, A.; Termini, S. (1972) "A definition of a non probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory". *Inform. Contr.*, 20, pp. 301-312, May.
- Fung, L.W.; Fu, K.S. (1974) "The k -th optimal policy algorithm for decision-making in fuzzy environments". *Identification and System Parameter Estimation*, pp.1052-1059. P. Eykhoff, ed., North-Holland Publ., Amsterdam.
- González, R.C.; Wintz, P. (1987) *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company. pp.144-160.
- Jain, R. (1976) "Tolerance analysis using fuzzy sets". *Int. J. Syst. Sci.* 7, No. 12, pp.1393-1401.
- Kaufmann, A. (1975) "Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets", vol.1. Academic Press, New York.
- Kochen, M.; Badre, A.N. (1976) "On the precision of adjectives which denote fuzzy sets". *J. Cybern.* 4, No. 1, pp. 49-59.
- Li, H.; Yang, H.S. (1989) "Fast and reliable image enhancement using fuzzy relaxation technique". *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, 19, no. 5, September/October.
- Long, S. (1989) "The astronaut's Fuzzy Control Model and prospect for its application". IAF, International Astronautical Congress, 40th, Málaga, Spain, Oct. 7-13.
- MacVicar-Whelan, P.J. (1978) "Fuzzy sets, the concept of height and the hedge very". *IEEE Trans. Syst., Man Cybern.* 8, pp. 507-511, 1978.
- Nakagawa, Y.; Rosenfeld, A. (1978) "A Note on the Use of Local min and max Operations in Digital Picture Processing". *IEEE Trans. Syst., Man and Cybern.*, vol. SMC-8, no. 8, August, 1978.

- Pal, S.K.; King, R.A. (1981) "Image enhancement using smoothing with fuzzy sets". *IEEE Trans. Syst., Man and Cybern.*, vol. SMC-11, no. 7, pp. 494-501, July, 1981.
- Pal, S.K. (1982) "A Note on the Quantitative Measure of Image Enhancement Through Fuzziness". *IEEE Trans. on Pattern Analys. and Machine Intell.*, vol. PAMI-4, no. 2, March, 1982.
- Pratt, W.K. (1991) *Digital Image Processing*. John Wiley & Sons, Inc. pp. 275 - 284.
- Rosenfeld, A. (1984) "The fuzzy geometry of image subsets". *Patt. Recognition Lett.*, 2, 311-317.
- Saaty, T.L. (1974) "Measuring the fuzziness of sets". *J. Cybern.* 4, No. 4, 53-61.
- Spiegel, M.R. (1988) *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill Book Co., USA.
- Trillas, E. (1980) "Conjuntos borrosos". Ed. Vicens-Vives.
- Velarde Lombrana, J. (1991) "Gnoseología de los sistemas difusos". Servicio de Publicaciones, Universidad de Oviedo.
- Zadeh, L. (1962) *Proc. Institute of Radio Engineers*, vol. 50, pp. 856-865.
- Zadeh, L. (1965) "Fuzzy sets". *Inf. Control* 8, 338-353.
- Zadeh, L. (1972) "On fuzzy algorithms". *Memo UCB/ERL M-325*. Univ. of California, Berkeley.
- Zadeh, L. (1975) "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning". Parts 1, 2 and 3, *Inf. Sci.* 8, pp. 199-249; 8, pp.301-357; 9, pp. 43-80.
- Zadeh, L. (1978) "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility". *Fuzzy Sets and Systems*, 1, pp.3-28.

Capítulo 6

Identificación de imágenes en las placas astrográficas. Algoritmos originales.

6.1 Medida a partir de posiciones previas.

6.1.1 Introducción.

En esta sección se describe el proceso de medida de placas tal como se viene llevando a cabo actualmente en el OAUV (López *et al.* 1993), con los microscopios diseñados y construídos por el equipo que allí trabaja.

Las placas estudiadas son las obtenidas con el refractor Grubb de 6" y 2.30 m de focal del observatorio de Valencia. Se trata de placas pequeñas, de tan sólo 6x9 cm² de área, que cubren un campo de 1.3°x1.5° en el cielo. El objetivo es la obtención de posiciones precisas de asteroides respecto de las estrellas en el campo, ya que ello proporciona información útil para la mejora de sus órbitas (Duncome *et al.* 1982) y la mejora de los catálogos de referencia (Batrakov *et al.* 1991). La magnitud límite que se suele alcanzar es del orden de $B \approx 12$.

Estas placas son de exposición múltiple (generalmente dos o tres exposi-

ciones separadas entre sí cierta fracción de mm) y el seguimiento es de tipo sidéreo, según el métodos de Wolf modificado para exposiciones cortas, expuesto en el capítulo 2. En los campos fotografiados suele haber entre 6 y 30 estrellas del catálogo PPM (cuya posición es, por tanto, conocida). Los catálogos utilizados actualmente son PPM y GSC.

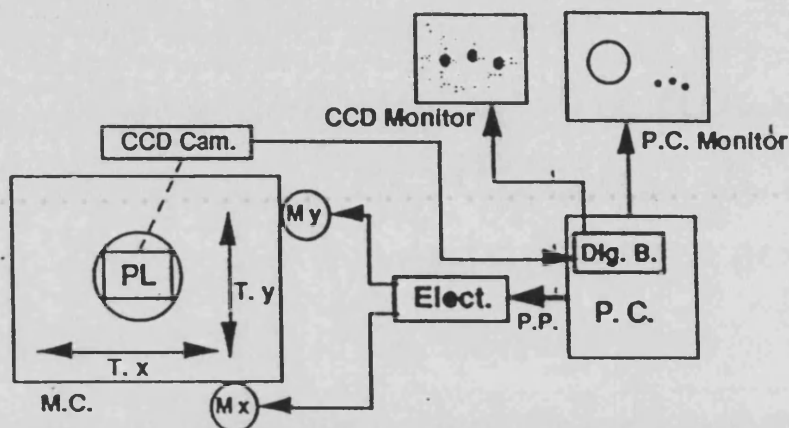


Figura 6.1: Esquema del equipo utilizado en el OAUV para la medición de placas de asteroides.

El equipo utilizado para la digitalización de la placas (fig. 6.1) y la estimación de las posiciones de las estrellas consta básicamente de un microscopio ("M. C." en el dibujo) al que va acoplada una cámara CCD en blanco y negro cuyo funcionamiento viene gobernado por una tarjeta digitalizadora ("Dig. B." en la figura) de 512x512 pixeles y 256 niveles de señal. El campo visual es de unos 2.5x3 mm, por lo que todas las exposiciones de cada objeto yacen dentro del mismo, siendo la resolución espacial de unas 5 μm por pixel. Un ordenador PC permite el control del sistema completo y el análisis de las placas en tiempo real, de forma rápida y evitando el almacenamiento de la enorme cantidad de datos que supone la digitalización completa de las placas. Pueden encontrarse más detalles sobre este equipo en López *et al.* (1991).

6.1.2 Escala y giro entre la tarjeta digitalizadora y el microscopio.

El primer paso en el proceso de medida es la determinación del ruido de fondo de la placa, que se realiza a partir de la lectura de la señal en un conjunto de puntos en los que se rechazan los que se encuentran próximos a zonas oscuras o imágenes estelares. Esta medida del ruido de fondo permite elegir un cierto nivel de gris, que será tomado como el nivel umbral de la placa. Los píxeles con nivel de gris por encima del nivel umbral serán considerados como pertenecientes a la imagen de un objeto. Un procedimiento alternativo es la definición del umbral a partir de los niveles de gris máximo y mínimo, de forma arbitraria.

A continuación se calcula cuál es la transformación entre los sistemas de coordenadas de la placa digitalizadora y del microscopio. El procedimiento utilizado es la medición de una misma imagen en 9 posiciones diferentes, tal como se muestra en la figura 6.2. La función de transformación se obtiene por medio de un ajuste por mínimos cuadrados de un polinomio de 4 coeficientes a partir de las 9 lecturas realizadas. Este método es el más comúnmente utilizado en las máquinas de medición de placas.

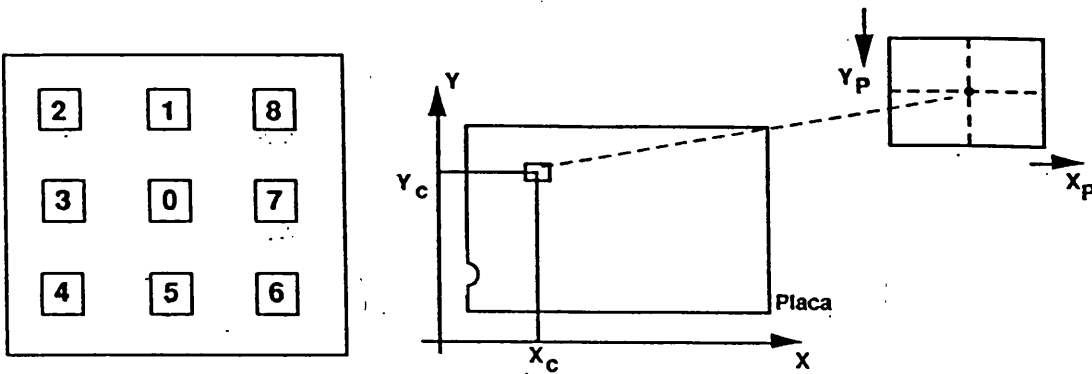


Figura 6.2: Determinación de la escala y giro entre la placa digitalizadora y el microscopio por medio de la lectura de las coordenadas de una misma imagen en 9 posiciones diferentes.

6.1.3 Determinación de las posiciones relativas entre las diferentes exposiciones.

Un dato muy útil a la hora de identificar imágenes cuando se tiene placas con exposiciones múltiples es la posición relativa entre las diferentes exposiciones. Ello permite rechazar fácilmente imágenes espúreas, quizás debidas a la presencia de otra estrella, cuando las imágenes no ocupan el lugar que deberían unas respecto de las otras.

Las placas de exposición múltiple se llevan a cabo desplazando ligeramente el chasis entre cada par de exposiciones. Este desplazamiento no es necesariamente lineal, sino que es muy probable también el que se produzca al mismo tiempo una pequeña rotación (ver fig. 6.3). El desplazamiento total D vendrá, pues, dado por la composición de los operadores de traslación T y de rotación R :

$$D = T(\delta x, \delta y) * R(x_g, y_g, \alpha) \quad (6.1)$$

T da cuenta de los desplazamientos lineales δx y δy , mientras que R corresponde a una rotación de ángulo α con centro en un punto (x_g, y_g) . Este modelo posee, pues, cinco parámetros libres, con lo que necesitaremos medirlos en al menos 3 estrellas para que el sistema de ecuaciones sea determinado. Sin embargo, hemos comprobado que el algoritmo de identificación funciona muy bien incluso cuando sólo se realiza una aproximación del movimiento total a una única rotación de ángulo α , con lo cual tendremos un modelo con tres parámetros libres y tan sólo será necesario medir dos estrellas:

$$D \approx R'(x'_g, y'_g, \alpha') \quad (6.2)$$

La rotación afecta de diferente modo a las imágenes según sea su distancia al centro de giro.

Para determinar cuál es el ángulo α correspondiente a cada pareja de exposiciones, se determina en primer lugar, de forma manual, las posiciones relativas entre las exposiciones de estas dos estrellas (que designamos como

E1 y E2) que se encuentran situadas sobre extremos opuestos de una de las diagonales de la placa.

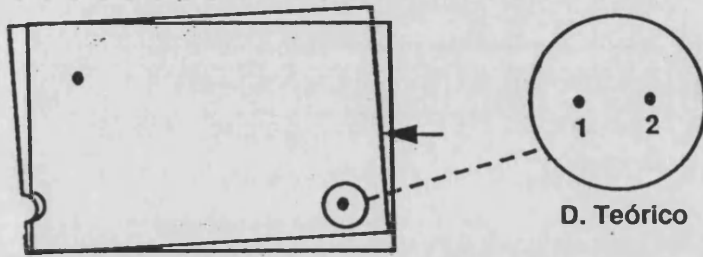


Figura 6.3: Desplazamiento de la placa entre dos exposiciones consecutivas.

La perpendicular al segmento que une dos exposiciones de la primera estrella (E1) y la perpendicular correspondiente a la segunda estrella (E2) se encuentran en un punto que será considerado como el centro de giro (CG) de la placa (fig. 6.4). El ángulo entre las dos exposiciones de la estrella E1, definido con centro en el punto CG anterior, será aproximadamente el mismo que el ángulo entre las mismas exposiciones de la estrella E2, observadas desde el mismo punto. Por tanto, considerando que el valor medio de ambos es el ángulo entre las dos exposiciones de todas las estrellas, podemos obtener la posición relativa entre las exposiciones de cualquier estrella, teniendo en cuenta el valor de su propio radio de giro.

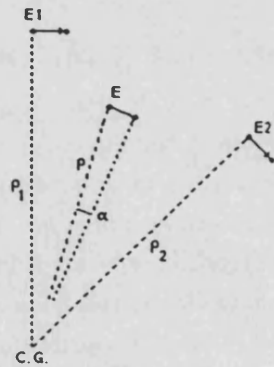


Figura 6.4: Aproximación del desplazamiento de la placa a una rotación única.

6.1.4 Selección de estrellas iniciales y ruta.

El proceso de medida comienza con la determinación de la relación entre las coordenadas del microscopio y las ecuatoriales de las estrellas en la placa. Para ello se eligen dos estrellas (E1 y E2) de buena calidad, es decir, de magnitud suficiente como para encontrarlas a simple vista en la placa, sin el auxilio del microscopio, pero tampoco excesiva ya que entonces la imagen aparece deformada a causa de la saturación de la emulsión. Además deben de estar tan separadas entre sí como sea posible y, preferiblemente, situadas sobre una de las diagonales de la placa.

La selección de las diferentes exposiciones de estas dos estrellas iniciales la realiza el operador humano, tomándose como coordenadas de las imágenes los centros de gravedad de la intensidad:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x_i I(x_i, y_j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(x_i, y_j)} ; y_c = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N y_j I(x_i, y_j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(x_i, y_j)} \quad (6.3)$$

donde x_c, y_c son las coordenadas del centro, x_i, y_j las del pixel i, j , $I(x_i, y_j)$ es la intensidad del pixel i, j , y $M * N$ es el número total de pixeles considerado. Los pixeles que forman parte de este cálculo son aquéllos situados dentro de un cierto radio alrededor del centro inicial (centro determinado en un principio y de forma aproximada por el algoritmo o el operador humano del sistema) y cuya intensidad esté por encima del umbral.

A continuación, se procede a la selección de una ruta de medición. Dicha ruta consiste en la lista ordenada de las estrellas de la placa cuyas posiciones son elegidas como referencia en la determinación de la posición del objeto (el asteroide en este caso). Por tanto, se debe de intentar elegir estrellas que estén distribuídas lo más uniformemente posible entorno del objeto, para compensar posibles errores en las posiciones medidas para dichas estrellas. Esta ruta debe incluir a las dos estrellas empleadas en la determinación de la transformación entre los dos sistemas de coordenadas. Gracias a que esta transformación es ahora conocida y que también lo es la orientación

relativa entre las diferentes exposiciones de cada estrella, el sistema es capaz de encontrar de forma automática aquéllas que forman parte de la ruta a partir de sus posiciones en el catálogo.

La medición se realiza dos veces, girando la placa 180° al iniciar la segunda medida. Ello permite la cancelación de parte de los errores sistemáticos del equipo y que afectan a las posiciones calculadas en ambas medidas.

6.1.5 Algoritmo de identificación de las imágenes.

En lo que respecta a la identificación de las imágenes, se ha experimentado con diferentes algoritmos, comprobando la eficiencia de cada uno de ellos.

En un principio, se definían “cadenas” parciales o completas, es decir, zonas de la placa adyacentes en las que la señal estuviese por encima del umbral. Este método permite identificar fácilmente imágenes irregulares en la placa, como rayas, polvo, etc., que pueden ser entonces eliminadas. Sin embargo, es un algoritmo que requiere un gran número de operaciones algebraicas, por lo que es muy lento y puede dar lugar a un desplazamiento del centro estimado de la imagen de un objeto cuando ésta se encuentra cerca de alguna imagen espúrea.

El algoritmo que se emplea actualmente, en cambio, es más rápido y eficiente y es el que paso a describir a continuación con mayor detalle.

A partir de las coordenadas de catálogo de cada estrella de la ruta, el sistema mueve la placa de forma que las exposiciones de cada estrella queden cerca del centro del campo visual de 512×512 píxeles del sistema óptico (ver fig. 6.10, por ejemplo).

Dentro de una ventana horizontal que contiene las exposiciones de cada objeto, se procede a la identificación de pequeños cuadrados de 9×9 píxeles cuya señal media sea mayor que el umbral antes establecido. A estos cuadra-

dos los denominamos **cuadrados activos** de la imagen (fig. 6.11).

El paso siguiente es la identificación de la imagen propiamente dicha. Los cuadrados activos encontrados son ordenados según intensidad decreciente. Se selecciona el de mayor intensidad y todos los cuadrados activos que existan en su entorno son considerados como pertenecientes a la misma imagen, siendo eliminados de la lista previa. El radio de búsqueda de cuadrados activos se establece en función del número de cuadrados activos en perímetros sucesivos de la imagen conforme nos alejamos de su centro. Cada una de estas agrupaciones de píxeles activos constituye lo que llamamos una **zona activa**. Así, se repite este proceso hasta que finalmente todos los cuadrados activos han sido asignados a alguna imagen. Las distancias entre las diferentes exposiciones de cada objeto son suficientes para que cada zona activa corresponda a una sola exposición. Las varias zonas activas que son detectadas en cada ventana (fig. 6.12) y que se consideran como correspondientes a imágenes estelares reales, son seleccionadas en función de su posición relativa, que es comparada con la orientación y distancia entre exposiciones de la estrella en cuestión (fig. 6.13).

El centrado preliminar realizado en esta fase se obtiene a partir de las distribuciones marginales de la intensidad en los píxeles de la imagen:

$$D_x = \sum_{j=1}^N I(x_i, y_j) \quad j = 1, \dots, N \quad (6.4)$$

$$D_y = \sum_{i=1}^M I(x_i, y_j) \quad i = 1, \dots, M \quad (6.5)$$

donde D_x, D_y son las distribuciones marginales de intensidad según la dirección de los ejes X, Y, respectivamente, x_i, y_j son las coordenadas de los píxeles de la imagen, $I(x_i, y_j)$ es la intensidad de dichos píxeles y $M * N$ es su número. Las coordenadas correspondientes al centro de estas distribuciones constituyen el centro preliminar de la imagen.

El algoritmo proporciona la posibilidad de cambio en el valor de algunos

parámetros de forma interactiva durante el proceso de medida. En ocasiones, por ejemplo, es conveniente rebajar un poco el umbral para poder detectar imágenes más débiles o quizás aumentarlo, si se está trabajando en una zona especialmente ruidosa de la placa.

La búsqueda e identificación automática en el caso de las estrellas falla en muy pocas ocasiones. En el caso del asteroide, el proceso pasa a modo manual para permitir el centrado de las imágenes ya que las efemérides que se introducen en el fichero de la placa son siempre aproximadas. Manualmente se procede al desplazamiento de la placa de forma que las diferentes exposiciones del asteroide ocupen el centro de la ventana de medida. La identificación inicial del asteroide dentro de esta ventana puede fallar a causa de su movimiento propio, que resulta en un desplazamiento de las imágenes respecto de las correspondientes a las estrellas, además de dar lugar a imágenes ligeramente alargadas y, por tanto, más débiles. Pero variando ligeramente algunos de los parámetros del programa casi siempre es posible la identificación automática. En caso de que ésta falle, es posible realizar una identificación manual.

6.1.6 Algoritmo de centrado final.

Este último centrado de las imágenes está también basado en el cálculo de las distribuciones marginales. Tomando como centro el estimado durante el proceso de identificación, se estudia cuál es la señal en una cierta área circular. En el momento en que la señal esté por debajo del umbral se considera agotada el área correspondiente a la imagen y su radio es el que define el radio límite de dicha imagen.

El centrado final viene dado por una nueva aplicación del centrado por distribuciones marginales, tomando como centro de partida el dado por la iteración anterior, y considerando un radio ligeramente menor al último utilizado (fig. 6.14). El error estimado en la posición se obtiene a partir de la diferencia entre centros sucesivos. Este error tiene en cuenta posibles irregu-

laridades en la imagen, pero no incluye errores de origen mecánico debidos a la máquina de medir.

6.1.7 Resultados.

A continuación presento una serie de figuras con el objetivo de ilustrar el funcionamiento del algoritmo frente a diferentes situaciones. La placa utilizada es de exposición triple, y corresponde al asteroide 88-Thisbe (figs. 6.5 a 6.9).

Los diferentes pasos del proceso aplicados a una estrella que se podría calificar de “normal” se muestran en las figuras 6.10 a 6.14.

Las figuras 6.15 a 6.19 son un ejemplo de identificación de una estrella muy débil. Como el umbral utilizado en la definición de los cuadrados activos es función de la razón señal/ruido en la ventana de medida, el valor umbral empleado por el algoritmo en este caso es menor que el del correspondiente a una estrella “normal” y, por tanto, el número de cuadrados activos encontrados es mayor (fig. 6.16). El conocimiento previo de las posiciones relativas entre las tres exposiciones es un dato muy importante a la hora de detectar imágenes tan débiles como éstas. Sin embargo, esto no es suficiente en algunas ocasiones y un valor pequeño en la relación señal/ruido puede inducir errores en la identificación. Esto ocurre en el ejemplo de las figuras 6.20 a 6.24, en el que se aprecia cómo la exposición central ha sido detectada en una posición ligeramente diferente a aquélla en la que ha sido identificada la misma exposición correspondiente a otras estrellas.

Otro caso problemático es la presencia de imágenes solapadas, que se presenta, por ejemplo, en las imágenes de estrellas relativamente brillantes (figs. 6.25 a 6.29). De nuevo el algoritmo se muestra capaz de resolver la situación, encontrando todas las imágenes individuales presentes. Nótese en la figura 6.26 el pequeño número de cuadrados activos encontrado, debido al umbral relativamente alto utilizado en este caso al tener la relación señal/ruido un valor grande.

Un ejemplo relacionado en cierto modo con el anterior es el de las estrellas dobles (figs. 6.30 a 6.34), que en el caso de exposiciones triples dan lugar a seis imágenes muy próximas entre sí. El conocimiento *a priori* de la posición de cada estrella según el catálogo, y las posiciones relativas entre las tres exposiciones permiten al algoritmo el realizar la identificación de forma correcta en la mayoría de los casos.

La presencia de imágenes espúreas, como manchas o rayas, es otro problema bastante frecuente en estas placas. El algoritmo realiza la identificación correcta en la mayoría de los casos (figs. 6.35 a 6.39), aunque, por supuesto, no es infalible (ver figs.6.40 a 6.44).

El algoritmo descrito permite la determinación de la posición del asteroide en la placa con una precisión del orden de $0.3''$ en el cielo, suficiente a la hora de calcular correcciones diferenciales en las órbitas de los asteroides estudiados.

Se trata de un proceso bastante rápido, empleándose entre diez y quince minutos en el análisis de una placa con veinte estrellas en el campo. El factor determinante de la duración del proceso es el desplazamiento de una estrella de la ruta a la siguiente, por lo que esta ruta debe ser optimizada tanto como sea posible.

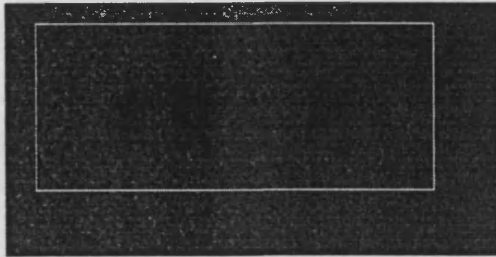


Figura 6.5: Exposiciones múltiples del asteroide 88-Thisbe dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones.

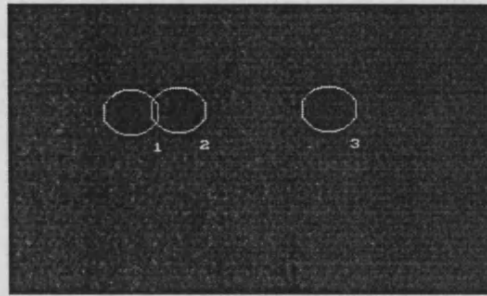


Figura 6.8: Eliminación de las imágenes espúreas e identificación de las tres correspondientes al asteroide. Fin del proceso de identificación e inicio del de medida de la posición a través del cálculo de las distribuciones marginales.

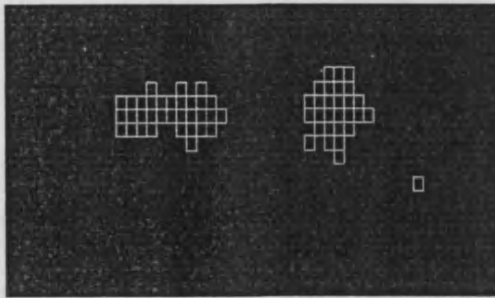


Figura 6.6: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida.

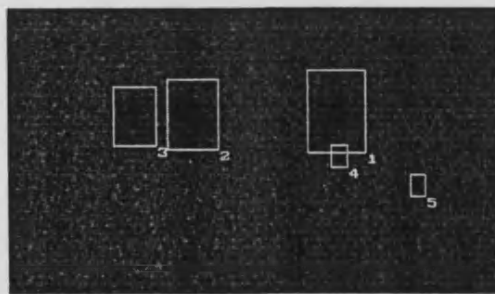


Figura 6.7: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

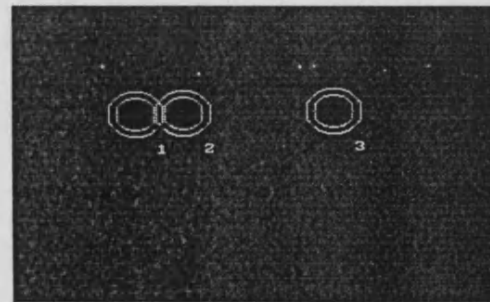


Figura 6.9: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.



Figura 6.10: Exposiciones múltiples de una estrella dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones.

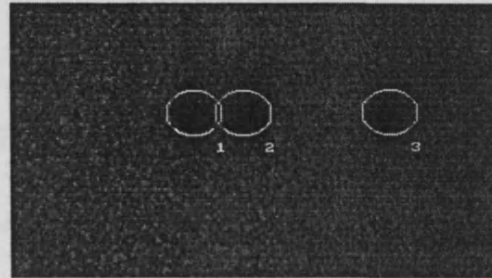


Figura 6.13: Eliminación de las imágenes espúreas e identificación de las tres correspondientes a la estrella. Fin del proceso de identificación e inicio del de medida de la posición a través del cálculo de las distribuciones marginales.

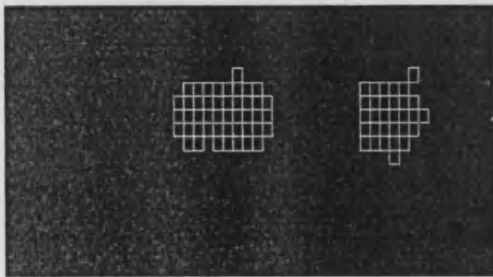


Figura 6.11: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida.

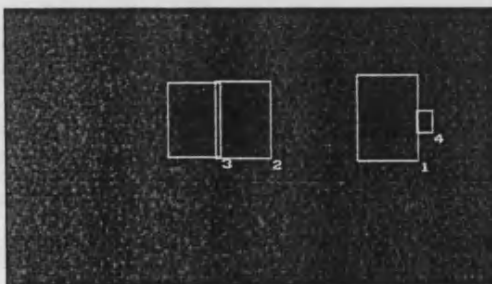


Figura 6.12: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

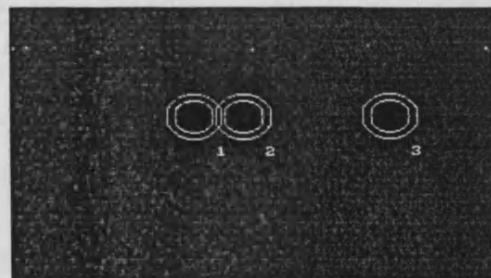


Figura 6.14: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.



Figura 6.15: Exposiciones múltiples de una estrella débil dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones.

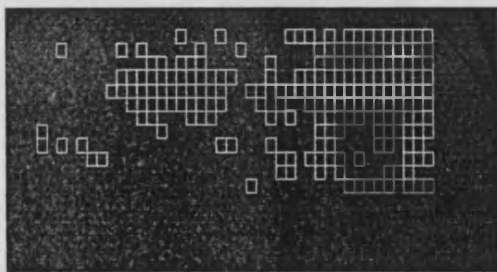


Figura 6.16: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida. Un valor pequeño de la relación señal/ruido implica un umbral bajo, con lo que el número de cuadrados activos aumenta en comparación con un caso "normal".

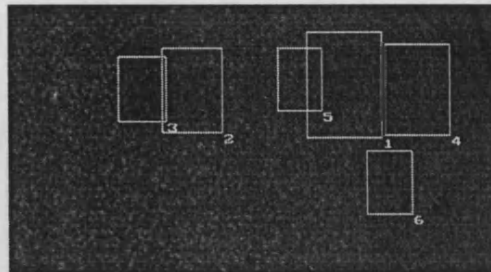


Figura 6.17: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

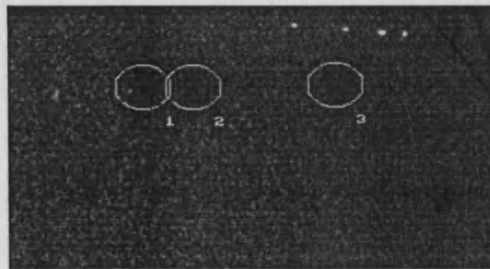


Figura 6.18: Eliminación de las imágenes espúreas, identificación de las tres correspondientes a la estrella e inicio del de medida de la posición.

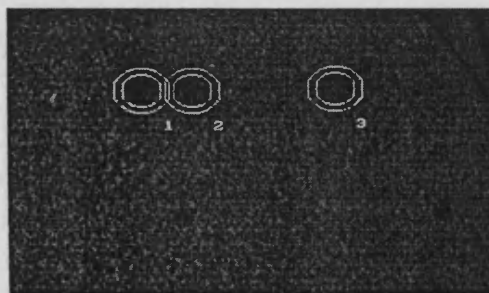


Figura 6.19: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.

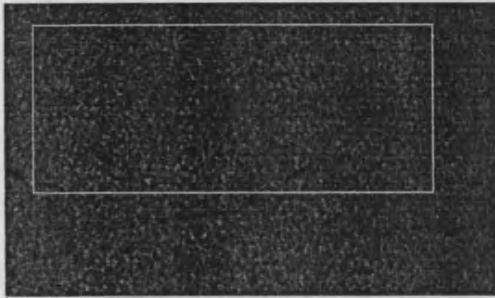


Figura 6.20: Exposiciones múltiples de una estrella dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones.

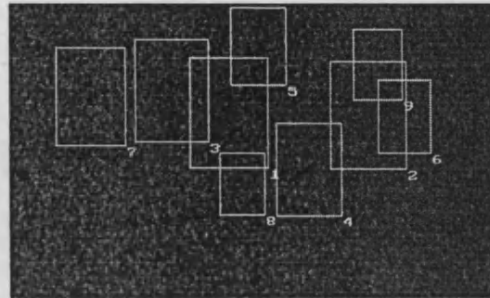


Figura 6.22: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

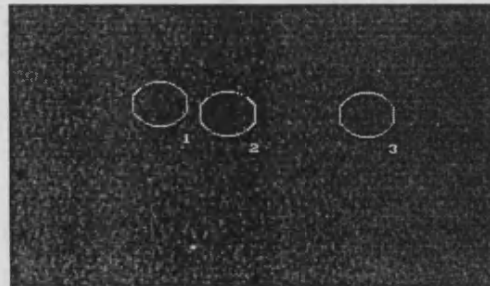


Figura 6.23: Como en fig. 6.18. La identificación falla en este caso debido al pequeño valor de la relación señal/ruido.

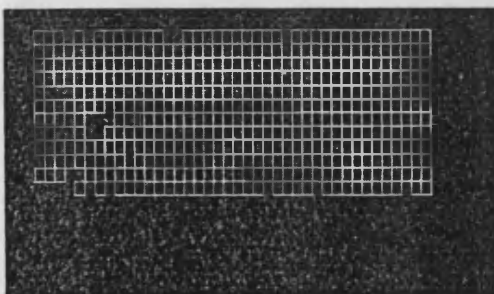


Figura 6.21: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida (como en fig. 6.16).

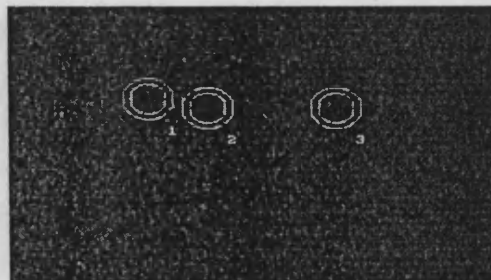


Figura 6.24: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.



Figura 6.25: Exposiciones múltiples de una estrella brillante dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones. Dos de ellas están parcialmente solapadas.

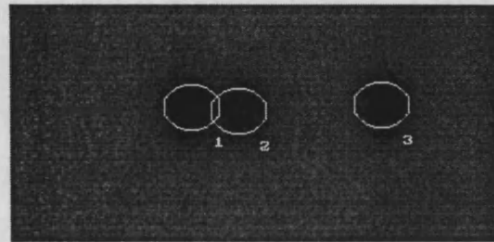


Figura 6.28: Como en fig. 6.13 . La identificación es correcta a pesar del solapamiento entre dos de las exposiciones.

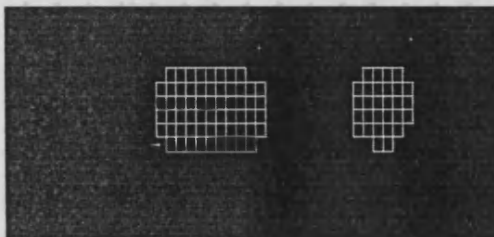


Figura 6.26: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida. Un valor alto de la relación señal/ruido da lugar a un umbral alto, con lo que el número de cuadrados activos es pequeño.

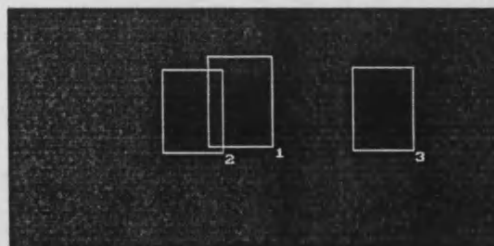


Figura 6.27: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

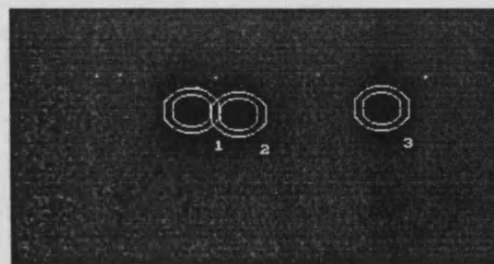


Figura 6.29: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.

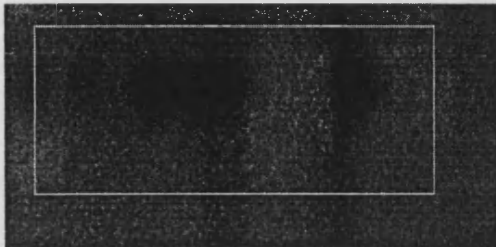


Figura 6.30: Exposiciones múltiples de dos estrellas dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones.

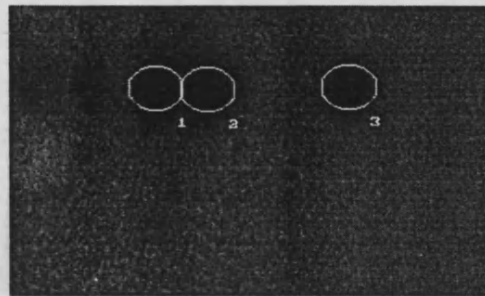


Figura 6.33: Como en fig. 6.13 . La identificación es correcta a pesar del gran número de imágenes reales presente.

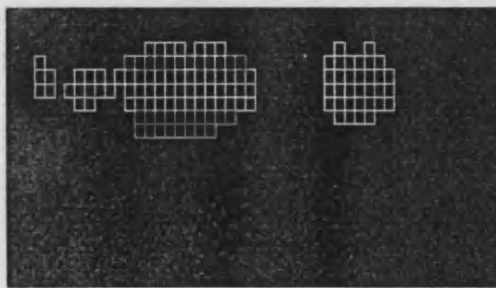


Figura 6.31: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida.

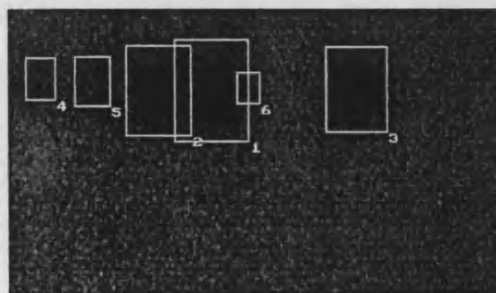


Figura 6.32: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

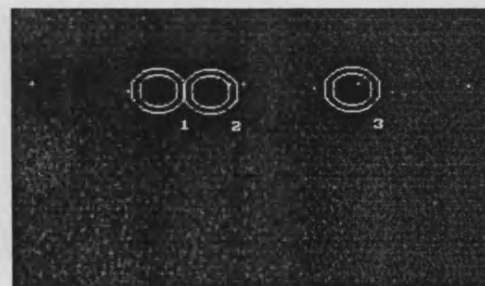


Figura 6.34: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.

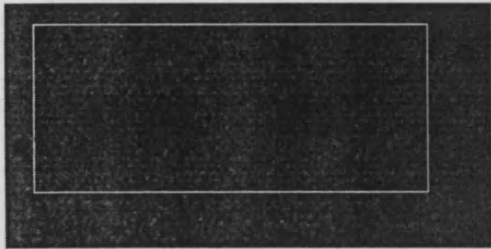


Figura 6.35: Exposiciones múltiples de una estrella dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones. Nótese la presencia de una pequeña mancha circular en las proximidades de una de las exposiciones.

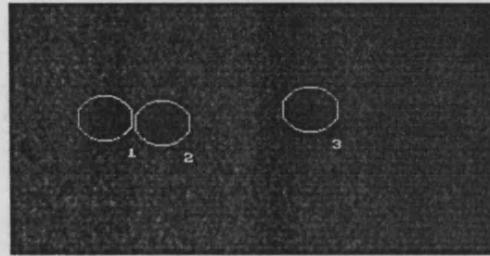


Figura 6.38: Como en fig. 6.13 . La identificación es correcta pese a la presencia de la imagen circular espúrea que podría ser interpretada por el algoritmo como una de las exposiciones.

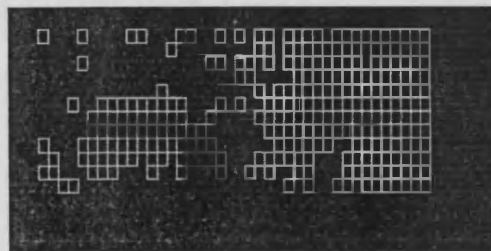


Figura 6.36: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida.

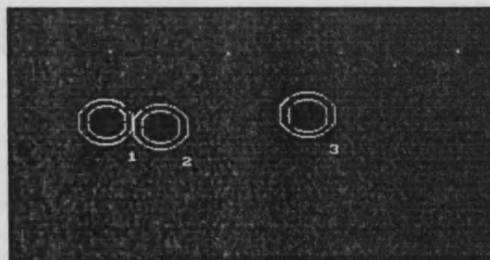


Figura 6.39: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.

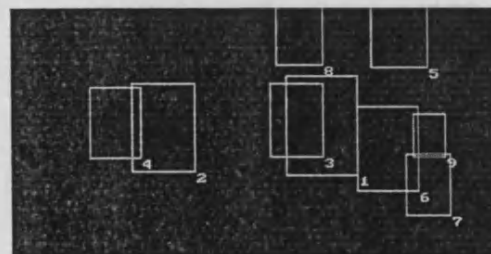


Figura 6.37: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

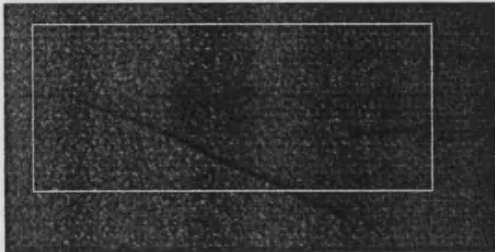


Figura 6.40: Exposiciones múltiples de una estrella dentro de la ventana donde se realizará el proceso de identificación y medida de las posiciones. Presencia de varias rayas y defectos que afectan a las imágenes.

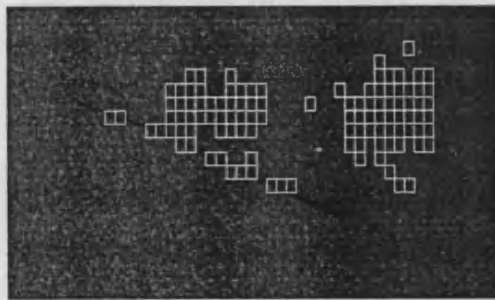


Figura 6.41: Búsqueda de los cuadrados activos dentro de la ventana de medida.

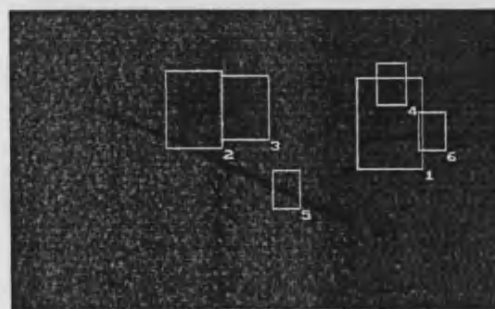


Figura 6.42: Identificación de las zonas activas correspondientes a posibles imágenes reales del objeto.

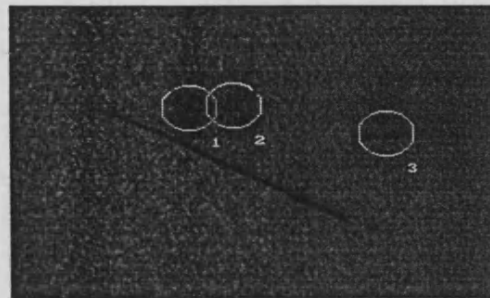


Figura 6.43: Como en fig. 6.13. La identificación no es correcta debido a la presencia de una raya en contacto con una de las tres exposiciones.

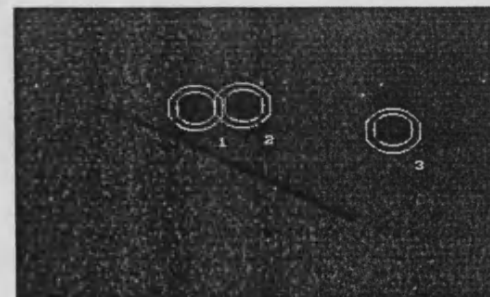


Figura 6.44: Con posterioridad al centrado preliminar, se lleva a cabo el centrado definitivo. Fin del proceso de medida.

El almacenamiento de todas las imágenes digitalizadas no es posible debido a que ello supone un volumen extremadamente grande de datos en comparación con el poco espacio realmente disponible para ello. Así que tan sólo se conserva la información relativa a la posición de las imágenes en la placa (coordenadas X,Y del microscopio) y su error estimado, así como la señal total de la imagen.

El método utilizado en la obtención de las posiciones es el ajuste por mínimos cuadrados de un polinomio de cuatro o seis coeficientes, o el método de dependencias, eliminando previamente las estrellas cuya error en la posición calculada sea mayor de $2''$.

Hasta la fecha alrededor de 750 placas han sido medidas, con muy buenos resultados. Los equipos y algoritmos empleados han sido perfeccionados en el OAUV a lo largo de los últimos diez años.

6.2 Placas de campo extenso con seguimiento sidéreo y una exposición. Solapamiento parcial de campos.

En el análisis de placas de gran campo aparecen dos problemas fundamentalmente. El primero es que el campo cubierto por la placa es mucho mayor que el que es posible cubrir con la cámara CCD. Ello obliga a la división de la placa en diferentes campos, que deben de presentar cierto grado de solapamiento entre sí para asegurar que ninguna estrella queda partida por la frontera entre dos campos adyacentes. El orden en que estos campos serán analizados será aquél que optimice el movimiento del portaplacas del microscopio al pasar de un campo de la CCD al siguiente. En el caso expuesto en la sección 6.1 se da la misma circunstancia, pero en ese caso no es necesaria la digitalización de la placa entera ya que se conoce *a priori* la posición de las imágenes que se desea analizar.

El segundo problema es la necesidad de crear un algoritmo de identifi-

cación de imágenes que sea capaz de encontrarlas sin conocimiento *a priori* de sus coordenadas en la placa. Trabajar con placas astrográficas (y, por tanto, de campo extenso) supone el estudio y análisis de placas con un gran número de estrellas o con objetos de posición desconocida (nuevos asteroides o cometas, supernovas, etc.). En estos casos, el algoritmo de identificación descrito anteriormente deja de ser útil, también por la existencia de objetos muy próximos entre sí y, en ocasiones, agrupados de forma compleja, así que hemos desarrollado un nuevo proceso, que está siendo aplicado a placas procedentes del astrográfo de Tarija (Bolivia) y del telescopio Maksutov de Cerro El Roble (Chile), amablemente cedidas al OAUV por el observatorio de Pulkovo (Rusia). Además, este algoritmo, convenientemente adaptado, será aplicado en el futuro a las placas de la “Carte du Ciel” que, como se ha visto en el capítulo 4, presentan problemas peculiares (existencia del retículo, aberraciones de las imágenes, estructura compleja de las imágenes triples, etc.)

El proceso que a continuación se expone ha sido aplicado tanto a imágenes simuladas como reales de campos estelares, en los que hay un gran número de estrellas, con diferentes grados de solapamiento entre las imágenes en algunos casos. El seguimiento sidéreo permite que las imágenes estelares presenten una forma aproximadamente circular, característica que será tomada en cuenta a la hora de decidir si una imagen concreta corresponde a una estrella o no. Las imágenes reales son campos de 512x512 píxeles, con 256 niveles de gris, mientras que en el caso de las simuladas se tienen campos de 320x200 puntos con 64 niveles de gris.

6.2.1 Algoritmo de identificación de las imágenes.

El algoritmo se inicia, al igual que en el caso anterior (sec. 6.1.1), con la determinación de la señal de fondo de la placa. Se mide la señal en 121 puntos uniformemente distribuidos en el área cubierta por la CCD (fig. 6.49). Algunos de estos puntos pueden corresponder a una estrella, por lo que para evitar una sobreestimación del fondo eliminamos los N valores mayores. Se define entonces un umbral local de la placa en esta región, asignándole un valor que es la suma del fondo más un múltiplo del error cuadrático medio

resultante de los 121-N valores antes obtenidos.

En campos con muchas estrellas, si el umbral es muy alto (por ejemplo, del orden del fondo más cinco veces el error cuadrático medio del fondo local estimado) se obtendrá mayor número de imágenes resueltas que en el caso en que sea pequeño (fig. 6.46); sin embargo, esto será a costa de perder las estrellas más débiles. Si, por el contrario, el umbral no es excesivamente alto (el fondo más unas dos veces el error cuadrático medio del fondo local) las estrellas más débiles sí serán detectadas, pero existirá un gran número de imágenes solapadas allí donde haya estrellas muy cercanas (fig. 6.47). Una solución, que parece razonable y que es por ello la que hemos adoptado, es la de tomar un umbral que permita la detección de todas las estrellas del campo y la construcción de un algoritmo para la identificación de las imágenes individuales en las regiones donde estén solapadas entre sí.

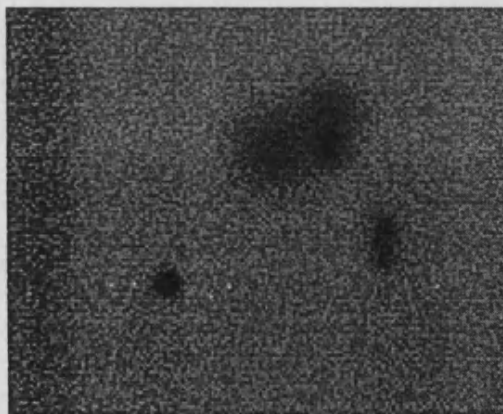


Figura 6.45: Imagen simulada original.

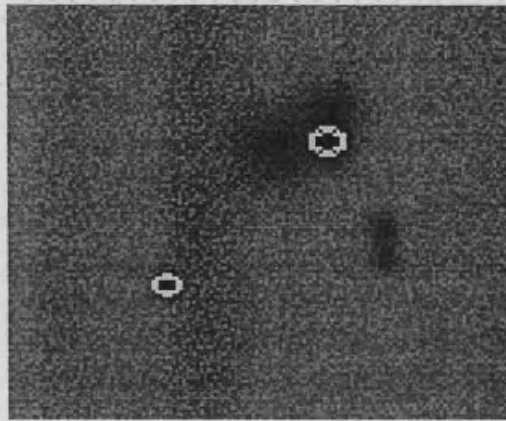


Figura 6.46: Cuando el umbral es alto, se obtiene un mayor número de imágenes resueltas que en el caso en que es pequeño, a costa de perder las estrellas más débiles.

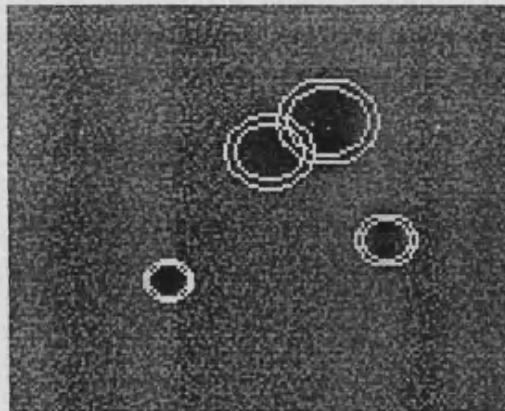


Figura 6.47: Cuando el umbral es bajo, las estrellas más débiles sí serán detectadas, pero las imágenes que están muy próximas entre sí no son resueltas.

Al igual que en el caso expuesto en la sección 6.1.5, el paso siguiente es la selección de los cuadrados activos de la imagen (fig. 6.50) y su ordenación según intensidad decreciente. Se selecciona entonces el cuadrado de señal máxima y se buscan los límites de la imagen a lo largo de 16 radios con centro en dicho cuadrado. Los extremos de dichos radios vienen definidos por los últimos píxeles cuya señal está por encima del umbral. Estos extremos permiten acotar la imagen dentro de una zona poligonal (fig. 6.51) y todos los cuadrados activos que se encuentran dentro de ella son eliminados de la lista previa donde se encuentran ordenados. Se busca entonces el siguiente cuadrado activo con señal máxima presente en dicha lista y se repiten los pasos anteriores. El proceso finaliza cuando ya no quedan más cuadrados activos en la lista.

El centrado de cada una de las zonas poligonales permite al mismo tiempo decidir si se trata de una zona donde hay presentes una o varias imágenes estelares. A partir del píxel de señal máxima se determina de nuevo los 16 radios. Es mejor emplear como centro preliminar un centro de tipo geométrico en lugar del centro de gravedad de la zona activa ya que si ésta contiene imágenes de varias estrellas este centro de gravedad puede estar muy alejado del centro geométrico, que es el de interés en esta fase del algoritmo. Por tanto, tomamos como centro preliminar el punto de coordenadas (x_c, y_c) , definidas como sigue:

$$x_c = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} ; y_c = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \quad (6.6)$$

donde $x_{max}, x_{min}, y_{max}, y_{min}$ son las coordenadas máximas y mínimas de los extremos de los 16 radios según las direcciones X,Y. A partir de este centro preliminar se consideran de nuevo otros 16 radios hasta el límite de la imagen.

Si estos radios son todos aproximadamente de la misma longitud y ésta no es inferior o superior a ciertos valores límite, se considera que la zona corresponde a una imagen individual y se calcula su centro como el punto de coordenadas x_m, y_m , que son los valores medios de las coordenadas x, y de los extremos de los 16 radios.

Si, por el contrario, las longitudes de los radios son muy dispares se considera que la zona contiene varias estrellas. En este caso es más sencillo empezar por identificar una de las imágenes que está sólo parcialmente mezclada con las demás y que por ello mismo debe de estar localizada en el borde de la zona. Para ello se selecciona el radio máximo y se elige un punto sobre este radio que esté próximo al borde de la zona. Desde este centro se buscan tres límites de la imagen en las direcciones perpendiculares al radio máximo y en la de dicho radio. Esto se repite varias veces, variando cada vez ligeramente la posición del punto considerado como centro, ya sea sobre el radio máximo o en direcciones perpendiculares a él. Como he mencionado antes, las imágenes presentes en este tipo de placas son de forma aproximadamente circular, así que tomamos como centro de la imagen individual aquel punto desde el cual el borde de la zona, determinado por los tres límites considerados, se aproxime más a una circunferencia. Se calcula entonces su radio medio y se ajusta su perfil a lo largo de uno de los ejes según un modelo gaussiano con simetría circular (Lindgren 1978). Si dicho perfil es muy ruidoso, se le suaviza aplicando de forma iterativa el siguiente filtro lineal:

$$I'_j = \frac{I_{j-1} + I_j + I_{j+1}}{3}, \quad j = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (6.7)$$

donde j es el pixel actualmente considerado, $j - 1$ y $j + 1$ son los pixeles inmediatamente anterior y posterior en el perfil, y N es el número total de pixeles. Se procede entonces a la sustracción en la imagen de secciones circulares con este perfil gaussiano (fig. 6.52).

La zona poligonal restante vuelve a ser centrada y analizada de la forma que acaba de ser descrita, repitiendo el proceso hasta que todas las imágenes individuales que hay en ella han sido detectadas y eliminadas.

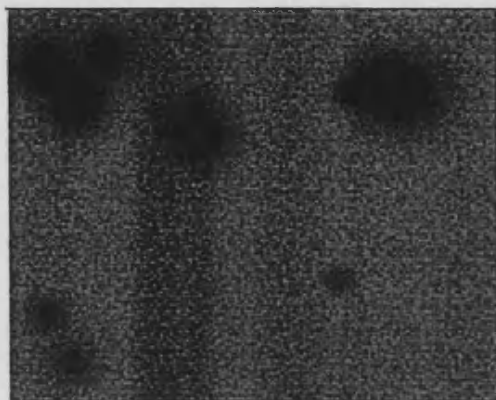


Figura 6.48: Imagen simulada original.

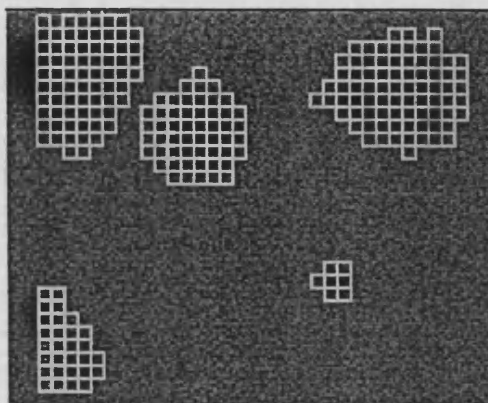


Figura 6.50: Búsqueda de cuadrados activos.

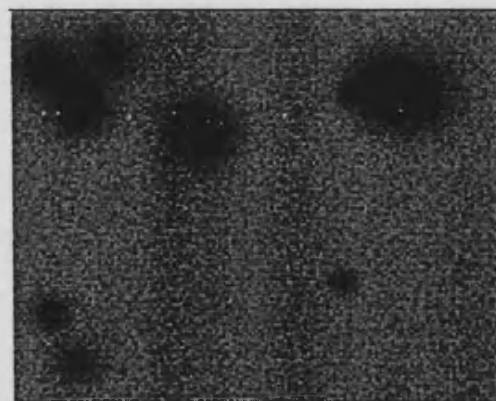


Figura 6.49: Determinación del umbral.

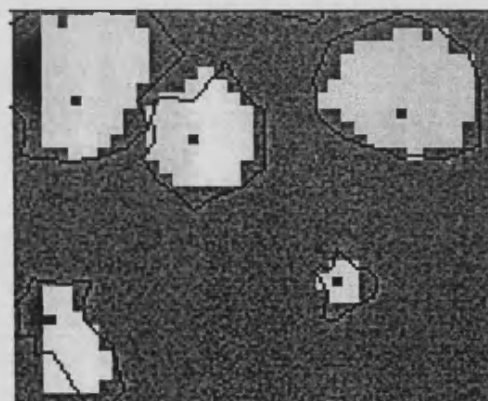


Figura 6.51: Localización de zonas activas poligonales y eliminación de cuadrados activos.

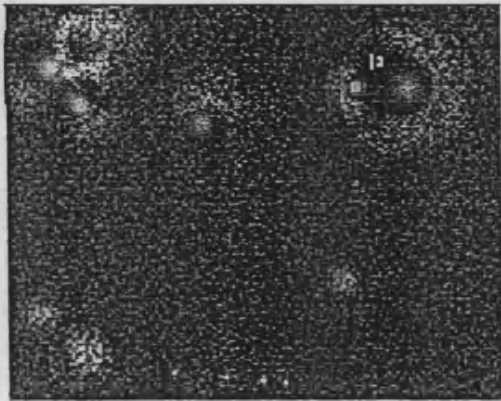


Figura 6.52: Eliminación de secciones gaussianas.

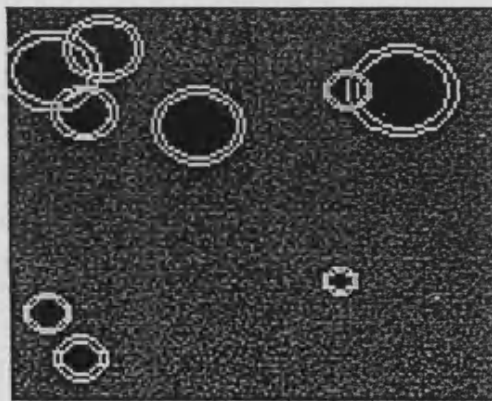


Figura 6.54: Centrado final calculando las distribuciones marginales.

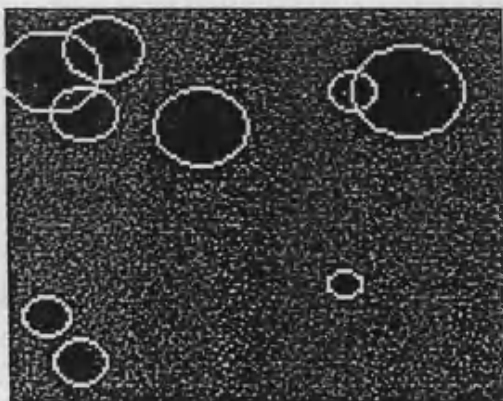


Figura 6.53: Imágenes detectadas.

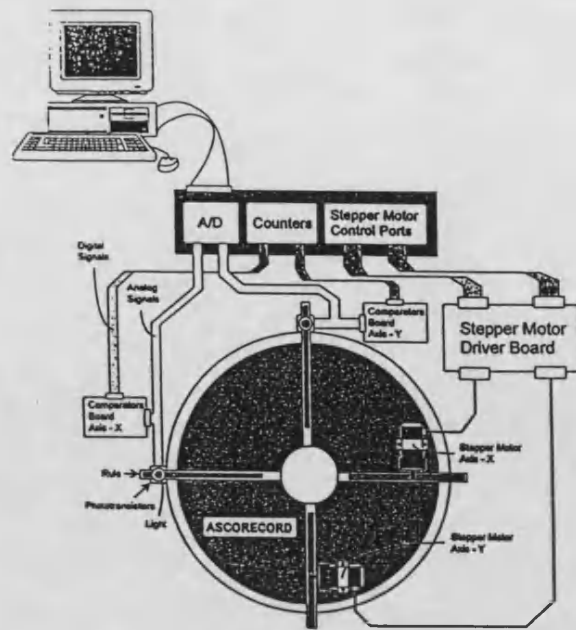


Figura 6.55: Esquema del ASCORECORD que está siendo automatizado en el observatorio de Valencia.

6.2.2 Selección y centrado final.

Una vez encontradas todas las imágenes individuales, se procede a su selección: aquellas cuyo tamaño es muy pequeño o mucho mayor que la media, o que presentan una forma poco circular, son consideradas como imágenes espúreas.

Las imágenes restantes son aceptadas como válidas (fig. 6.53) y se procede a su centrado a través del cálculo de sus distribuciones marginales (fig. 6.54), del mismo modo que se explicó en la sección 6.1.5.

6.2.3 Resultados.

Actualmente empezamos a trabajar con imágenes reales a las que se aplica el algoritmo descrito, por lo que los datos de que disponemos sobre su eficiencia en la detección de todos los objetos presentes en el campo no son definitivos. Este algoritmo será empleado en el programa destinado a realizar la medición de placas astrográficas de campo grande con el ASCORECORD que está siendo automatizado en el OAUV (fig. 6.55).

Los campos simulados que han sido empleados son campos con estrellas

creadas con un perfil gaussiano, a los que se ha añadido un cierto nivel de fondo y una cierta cantidad de ruido de tipo aleatorio.

La aplicación del algoritmo en estos campos simulados proporciona un nivel de éxito en la detección de imágenes individuales que varía entre el 85% y el 100% de las estrellas presentes. Los casos más difíciles son, lógicamente, aquéllos en los que el solapamiento entre las imágenes es completo (Ortiz Gil *et al.* 1994).

El error en la determinación de las posiciones de los centros es suficientemente pequeño como para garantizar que durante el proceso real la precisión obtenida será del orden de la micra, tal como ocurre en el caso expuesto en 6.1. Sin embargo, en algunos de los casos en los que el solapamiento es muy grande la sustracción de los modelos gaussianos no elimina completamente la contribución “extraña” de las restantes imágenes adyacentes por lo que el centrado no resulta tan bueno. Esto se puede corregir en un paso posterior de refinamiento del centrado aplicando diferentes métodos especialmente desarrollados para estos casos como, por ejemplo, el algoritmo de Richardson-Lucy o el ajuste según modelos más sofisticados, como gaussianas bi-dimensionales de sección elíptica (ver capítulo 7).

Como ya se ha dicho, este algoritmo es también una de las posibles soluciones al problema de la identificación de las imágenes triples solapadas que aparece en las placas de la “Carte du Ciel”.

Bibliografía.

Batrakov, Yu.V.; Shor, V.A.; Makarova, E.N.; Vashkevich, A.S. (1991) “Some results on determining SAO catalogue systematic errors using observations of minor planets”. *Proceedings of the First Spanish-Sovietic workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*. Valencia, Marzo, 1991.

Duncombe, R.L.; Hemenway, P.D. (1982) “A comparison of astrometric measurement techniques as applied to minor planets”. *Celestial Mechanics*, 26, pp. 207-212.

Lindgren, L. (1978) “Photoelectric astrometry. A comparison of methods for precise image location.” *Modern astrometry*. IAU Coll. no. 48, eds. F.V Prochazka and R.H. Tucker, University Observatory Vienna.

López García, A.; Valdés, J.L.; Pérez, G. (1991) "Automatic plate measurement with images digitalization". *Proceedings of the First Spanish-Sovietic workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*. Valencia, Marzo 1991.

López García, A.; Valdés, J.L.; Ortiz Gil, A. (1993) "Image identification: strategies and algorithms". *Proceedings of the Second International workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*. Valencia, 1992.

Ortiz Gil, A.; López García, A.; Martínez González, J.M.; Yershov, V. (1994) "Automatic measurement of images on astrometric plates". *Planet. Space Sci.*, vol. 42, no. 4, pp. 349-357.

Capítulo 7

Análisis de imágenes. Astrometría y fotometría con las placas de la “Carte du Ciel”.

7.1 Introducción.

En este capítulo presentaré los resultados preliminares que he obtenido en la determinación de posiciones y magnitudes en placas de la “Carte du Ciel”. Estos son los primeros pasos que hay que dar a la hora de recuperar la información contenida en estas placas (Ortiz Gil *et al.* 1995). El objetivo principal es constatar y demostrar que se puede conseguir una precisión muy buena en la determinación de posiciones y movimientos propios con este material, gracias a que el intervalo de tiempo entre estas placas y la época actual es de alrededor de cien años.

Hasta el momento, sólo dos placas han sido estudiadas parcialmente, aunque ambas son suficientemente representativas del tipo de datos de que se dispone cuando se trabaja con este material como para que los resultados obtenidos sean extrapolables a todas las demás. Una de ellas es la placa número 138 de la zona de Helsinki, que cubre un campo de unos $2^{\circ} \times 2^{\circ}$ cen-

trado en $\alpha = 3^h 15^m$ y $\delta = 41^\circ 0'$, y fue tomada en febrero de 1902. La otra procede del archivo del Observatorio de Burdeos y también cubre un campo de $2^\circ \times 2^\circ$ con centro en $\alpha = 8^h 50^m$ y $\delta = 11^\circ 48'$. El principal interés de este campo concreto reside en que contiene al cúmulo abierto M67. Esta placa fue tomada en 1922. Ambas placas corresponden a la serie de placas con exposiciones triples (fig. 4.1), situadas en los vértices de un triángulo, y ambas han sido escaneadas y digitalizadas con el microdensitómetro PDS 2020 GM^{plus} del Instituto Astronómico de Münster (Alemania).

7.2 Reducción de los datos.

Para el cálculo de las posiciones de cada una de las componentes de las imágenes triples he realizado un ajuste de mínimos cuadrados empleando como modelo la suma de tres distribuciones gaussianas bi-dimensionales (Dick *et al.* 1993). Por tanto, consideraremos que la densidad medida en el pixel i, j , $D_{i,j}$, viene dada por la siguiente expresión:

$$D_{ij} = B + \sum_{k=1}^3 A_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t_k^2} \left(\left(\frac{x_{ij}-x_{ck}}{\sigma_{xk}} \right)^2 + \left(\frac{y_{ij}-y_{ck}}{\sigma_{yk}} \right)^2 + 2t_k \left(\frac{x_{ij}-x_{ck}}{\sigma_{xk}} \right) \left(\frac{y_{ij}-y_{ck}}{\sigma_{yk}} \right) \right) \right] \right\} \quad (7.1)$$

En la ecuación anterior, B es el fondo de la imagen. Dado que las imágenes triples permanecen confinadas en regiones o ventanas no mayores de 81×81 pixel, este fondo B puede considerarse constante dentro de esta área. A_k es la densidad de pico de la imagen k -ésima, mientras que x_{ij}, y_{ij} son las coordenadas del pixel i, j y x_{ck}, y_{ck} son las coordenadas del centro de la imagen k -ésima. σ_{xk}, σ_{yk} y t_k son los parámetros de una elipse con orientación y longitud de sus ejes arbitrarios (fig. 7.1). A partir de estos tres parámetros es inmediato el cálculo de los semiejes mayor y menor de esta elipse a_k y b_k , así como de su orientación:

$$a_k = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xk} + \sigma_{yk}) + \sqrt{(\sigma_{xk} - \sigma_{yk})^2 + 4t_k^2 \sigma_{xk} \sigma_{yk}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.2)$$

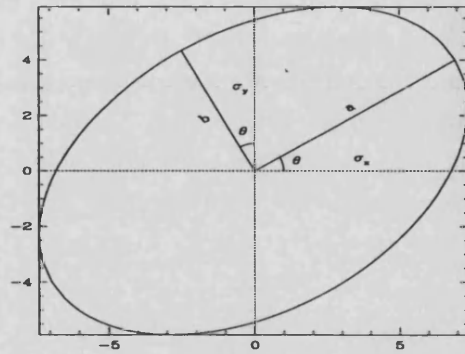


Figura 7.1: Relación entre los parámetros que resultan del ajuste del modelo gaussiano y los ejes y orientación de la correspondiente elipse de densidad constante.

$$b_k = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xk} + \sigma_{yk}) - \sqrt{(\sigma_{xk} - \sigma_{yk})^2 + 4t_k^2 \sigma_{xk} \sigma_{yk}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

y el ángulo que forma el eje a_k con el eje cartesiano X es

$$\theta_k = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_k - \sigma_{xk}}{t_k \sqrt{\sigma_{xk} \sigma_{yk}}} \right)^2}} \quad (7.4)$$

donde

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xk} + \sigma_{yk}) + \sqrt{(\sigma_{xk} - \sigma_{yk})^2 + 4t_k^2 \sigma_{xk} \sigma_{yk}} \right] \quad (7.5)$$

El parámetro s_k es un parámetro que da cuenta de la saturación de la emulsión fotográfica achatando los picos de las gaussianas de acuerdo con el grado de saturación de cada imagen. Valores menores o iguales a 1 corresponden al caso en que la saturación de la emulsión no se ha alcanzado mientras que valores superiores son indicativos de la presencia de una imagen saturada.

El proceso de ajuste se realiza aplicando el algoritmo de Levenberg - Marquardt (Marquardt 1963) de ajuste no lineal por mínimos cuadrados. De este

modo se obtienen los valores de los 22 parámetros libres que aparecen en el modelo. El ajuste se aplica en áreas o ventanas de 61x61 pixel o 81x81 pixel (en el caso de las estrellas más brillantes) en las que está incluido el conjunto de tres exposiciones correspondiente a cada estrella individual. En las figuras de la 7.2 a la 7.7 se pueden ver los diagramas de contornos originales de dos estrellas, junto con los resultantes después del proceso de ajuste gaussiano y los diagramas de la diferencia entre los datos originales y los ajustados. En ambos casos se aprecia cómo el ajuste reproduce bien los datos originales pues la señal restante después de sustraer el resultado del ajuste de la imagen original (figs. 7.4 y 7.7) es completamente aleatoria, es decir, sólo contiene ruido. Es de destacar, además, que el algoritmo funciona bien tanto en el caso en que es aplicado a imágenes resueltas como cuando se aplica a exposiciones entre las cuales existe un cierto grado de solapamiento. En relación con este último ejemplo, se puede ver en la fig. 7.7 cómo la imagen espúrea situada en la parte inferior izquierda de las imágenes estelares no ha sido asimilada por el proceso de ajuste incluyéndola junto con las imágenes reales, sino que ha sido eliminada.

Uno de los principales objetivos es el de reducir el número de parámetros libres de modo que el algoritmo sea más estable y eficiente. Para ello se recurrirá a una serie iterativa de ajustes como el aplicado actualmente, pero imponiendo ciertas condiciones sobre los valores de los parámetros después de la primera iteración. Por ejemplo, dado que el tiempo de exposición es el mismo para las tres imágenes el coeficiente de saturación es aproximadamente el mismo en las tres exposiciones de cada estrella. Asimismo, la orientación de las correspondientes elipses es también aproximadamente la misma. En las figuras 7.8 a 7.15 pueden verse los histogramas correspondientes a los valores de estos 22 parámetros obtenidos con el ajuste gaussiano. Los errores son errores internos, estimados a partir de la matriz de covarianzas resultante del ajuste. En estas figuras se aprecia bien, por ejemplo, que todas las imágenes tienen un mismo valor del fondo, o que la orientación es la misma (equivalentemente, el valor del parámetro t_k es el mismo) para la mayoría de ellas, lo cual es de esperar, siendo las elipses que difieren en su orientación solamente las correspondientes a estrellas afectadas por la aberración de coma. En los

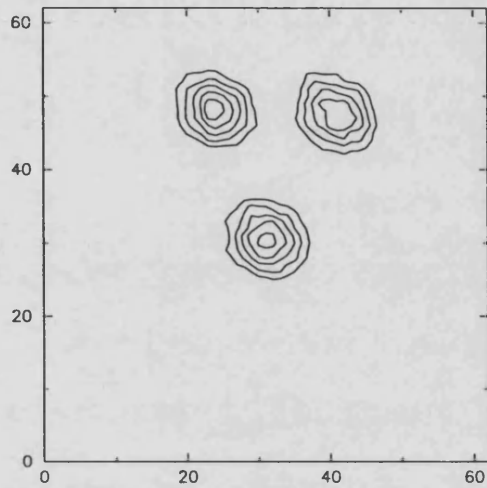


Figura 7.2: Contornos de densidad constante correspondientes a una imagen triple.

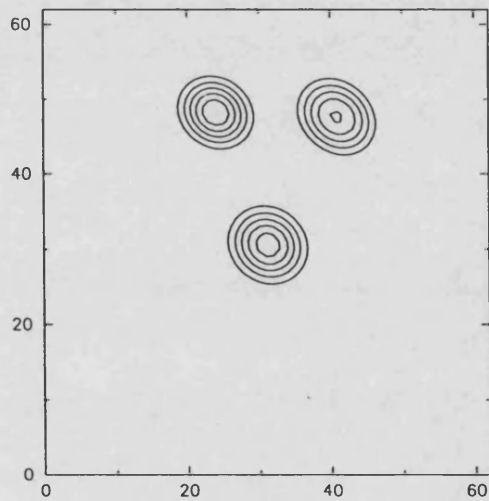


Figura 7.3: Contornos de densidad constante correspondientes a la imagen 7.2 después de realizar el ajuste gaussiano.

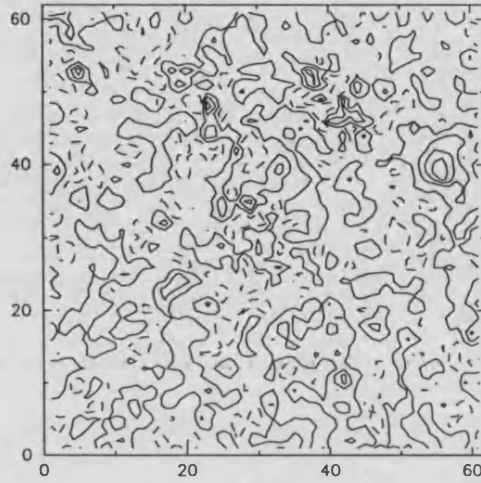


Figura 7.4: Diagrama de contornos de la diferencia entre las figuras 7.2 y 7.3 . Los trazos discontinuos corresponden a diferencias negativas.

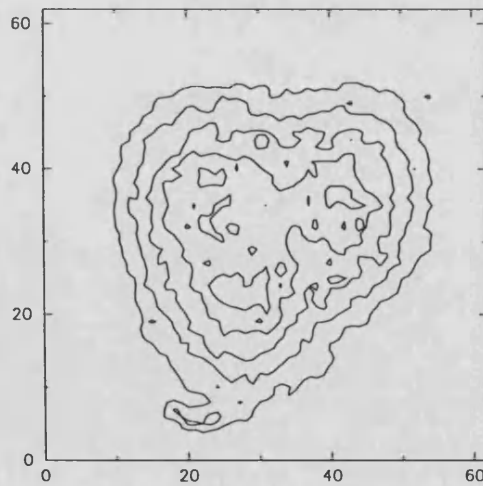


Figura 7.5: Contornos de densidad constante correspondientes a una imagen triple.

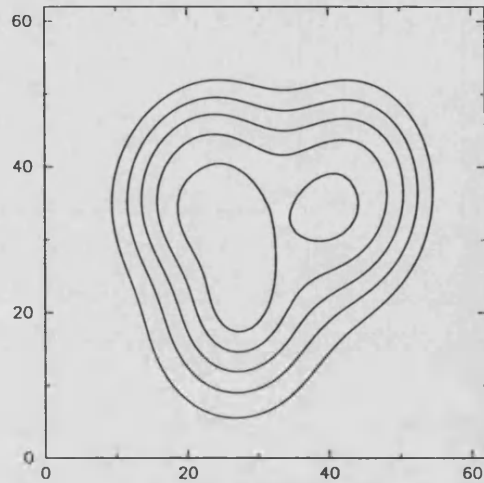


Figura 7.6: Contornos de densidad constante correspondientes a la imagen 7.5 después de realizar el ajuste gaussiano.

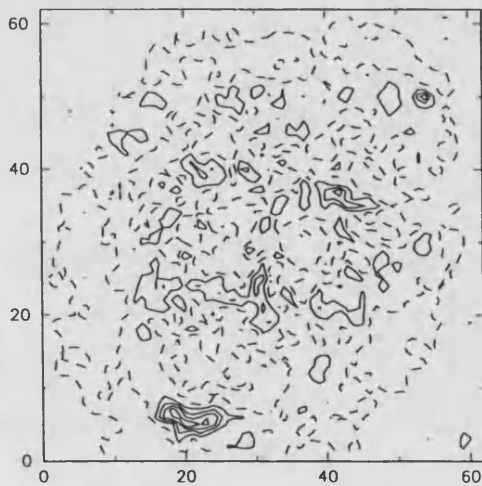


Figura 7.7: Diagrama de contornos de la diferencia entre 7.5 y 7.6 . Los trazos discontinuos corresponden a diferencias negativas.

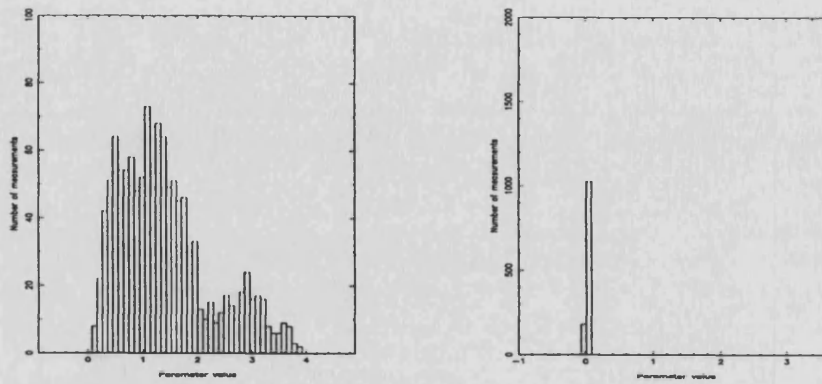


Figura 7.8: Histogramas de A_k y su error.

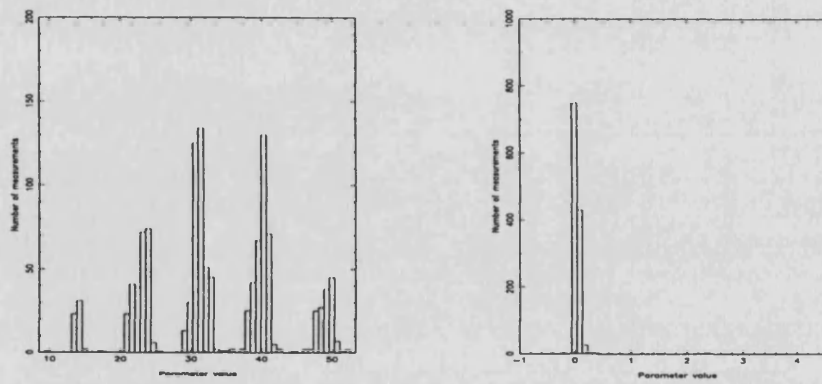


Figura 7.9: Histogramas de x_{ck} y de su error.

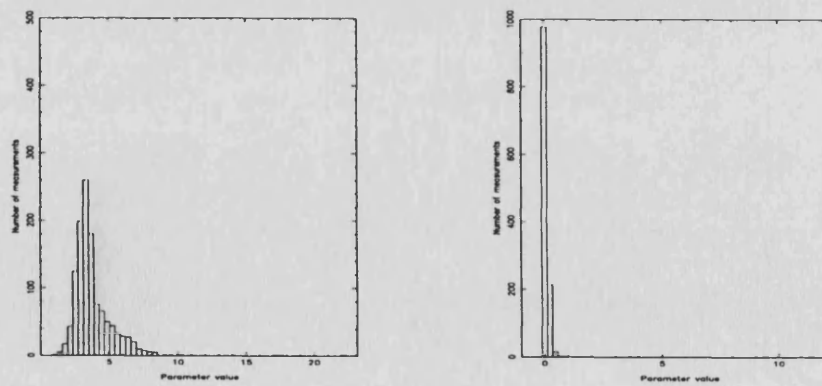


Figura 7.10: Histogramas de σ_{xk} y de su error.

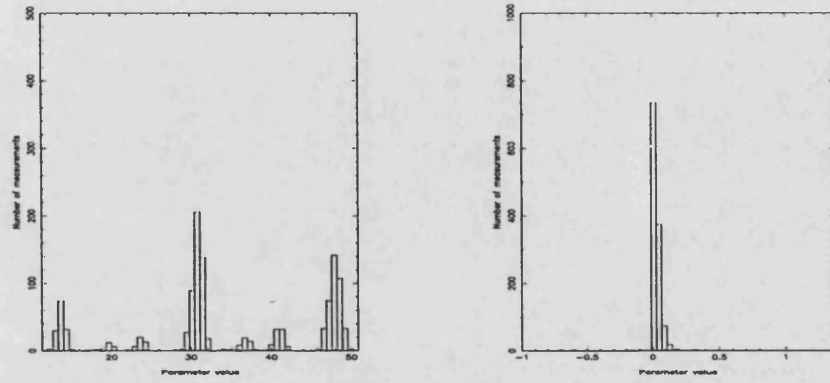


Figura 7.11: Histogramas de y_{ck} y su error.

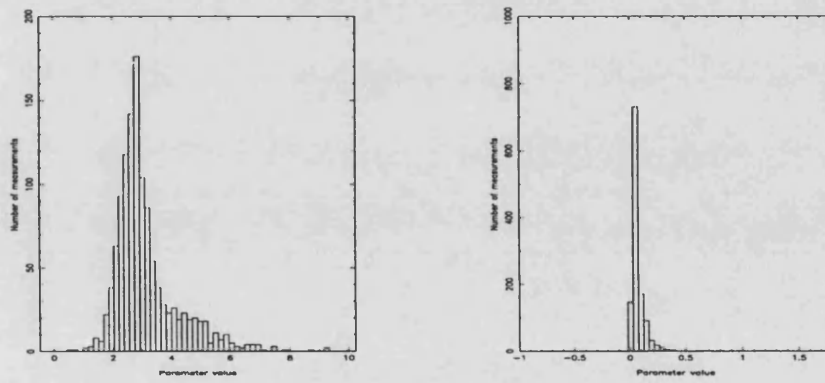


Figura 7.12: Histogramas de σ_{yk} y su error.

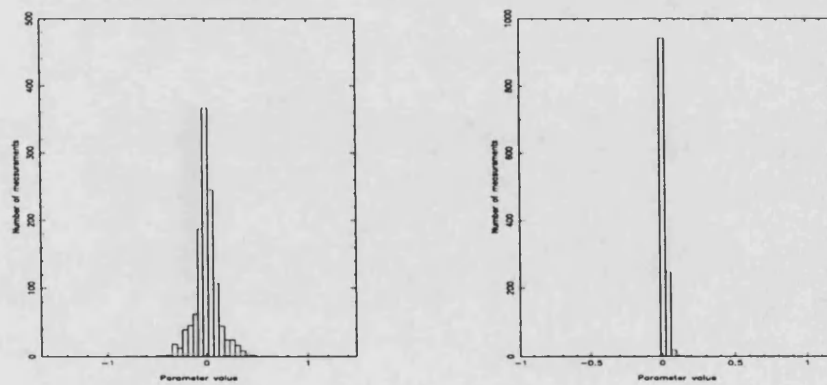


Figura 7.13: Histogramas de t_k y de su error.

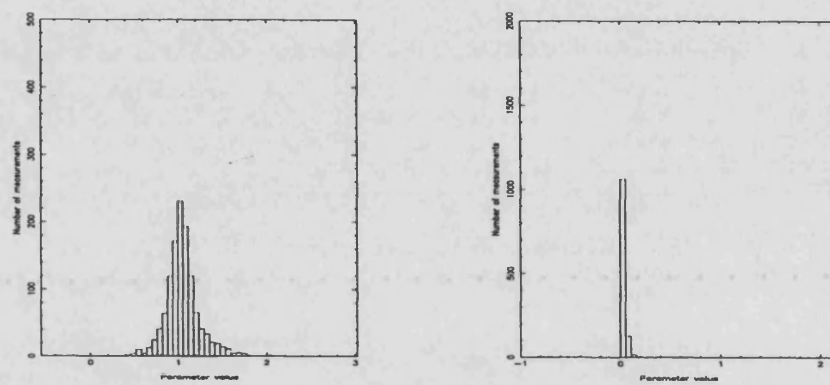


Figura 7.14: Histogramas de s_k y su error.

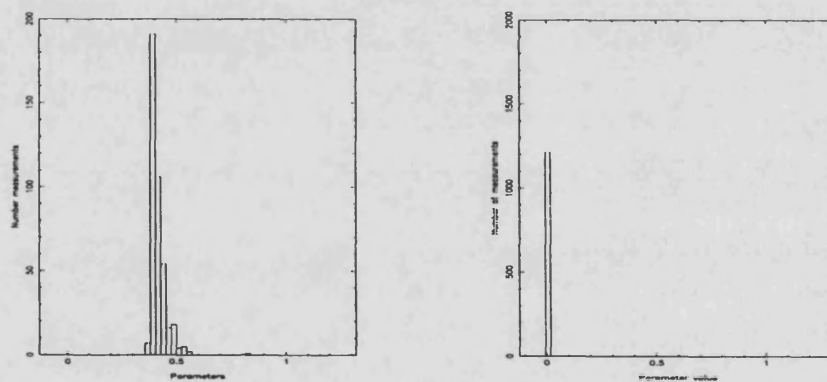


Figura 7.15: Histogramas de B y su error.

histogramas correspondientes a las coordenadas del centro de cada imagen el valor de éstas está referido al sistema de coordenadas interno de la ventana correspondiente a cada exposición triple, así que tan sólo indican que el centro de la ventana está sobre el centro de una de las tres exposiciones, siendo diferente la exposición concreta que ocupa este centro cuando se considera diferentes estrellas. Esto es debido a que el programa que actualmente se está utilizando para la detección de las imágenes no ha sido aún completamente optimizado, aunque en un futuro cercano una nueva versión adaptada a los requerimientos de este trabajo estará disponible (Hiesgen 1995).

7.3 Aberraciones ópticas: coma.

A través del estudio de la elipticidad de los contornos de densidad constante de las imágenes, una vez realizado el ajuste, se detecta la presencia de un fuerte efecto de coma en el sistema óptico. Esta elipticidad ha sido definida como una función de la razón entre los semiejes menor y mayor de la elipse correspondiente a la exposición k -ésima:

$$e_k = 1 - \frac{b_k}{a_k} \quad (7.6)$$

Su comportamiento ha sido estudiado en la placa no. 138 de la zona de Helsinki. En ese ejemplo concreto, el valor máximo de la elipticidad que ha sido encontrado es de $\simeq 0.5$. En la figura 4.7 puede verse cómo los efectos de la aberración son mayores en las esquinas de la placa. La longitud de los segmentos es proporcional a la elipticidad media de las tres exposiciones correspondientes a cada estrella, mientras que su orientación respecto del eje X es la media de los tres ángulos θ_k de las exposiciones triples.

Este efecto seguramente estará presente en todas las placas de la "Carte du Ciel" ya que todas ellas fueron realizadas con el mismo tipo de óptica en los telescopios (cap. 1). En la figura 4.4 se muestran dos ejemplos de estrellas afectadas por la aberración de coma en la placa correspondiente al campo del cúmulo abierto M67.

7.4 Precisión astrométrica.

Existen en estas placas otros tipos de problemas que también afectan a la precisión de los cálculos astrométricos. La presencia del retículo, por ejemplo, convierte en inutilizables (al menos de momento) las estrellas que yacen justo sobre él o muy cerca (fig. 4.6), lo que supone aproximadamente un 15% del número total de estrellas en una placa. Como se explicó en el capítulo 4, estas líneas provocan cambios de densidad en las imágenes e introducen alteraciones en sus posiciones debido a la manifestación de efectos fotográficos de adyacencia (ver sec. 3.3). Este efecto altera también la posición de aquellas imágenes estelares que se encuentren en contacto o muy cercanas entre sí. Debido a la pequeña separación entre las diferentes exposiciones de cada estrella ($\approx 10''$), éstas empiezan a entrar en contacto cuando la estrella en cuestión tiene una magnitud inferior a $B \approx 12.5$, y, por consiguiente, el efecto Kostinsky aparece (figs. 4.2 y 4.3) provocando cambios en las posiciones verdaderas de las imágenes que pueden ser considerables (se han encontrado variaciones en la posición de hasta $\approx 40\mu m$). La modelización de este efecto es muy difícil ya que varía de placa a placa y depende del proceso de revelado concreto al que haya sido sometida cada una de ellas.

Las estrellas dobles no son bien ajustadas por el modelo de las tres gaussianas, presentando además el problema añadido de que los efectos de adyacencia también se presentan en estos casos.

Debido a todo esto, tanto en la reducción interna de la placa como en la reducción externa con el catálogo he prescindido de las estrellas que están cerca de líneas del retículo, de las estrellas dobles, y de aquellas que son más brillantes de $B = 12.5$. Sin embargo, en el futuro espero poder hacer uso también de estas estrellas brillantes. Dick *et al.* (1993) apuntan la posibilidad de utilizar el centro geométrico de estas imágenes como datos de interés astrométrico.

Los datos que presento a continuación se refieren sólo a la placa correspondiente al cúmulo M67 debido a la existencia de un buen catálogo astrométrico

de dicho campo (Girard *et al.* 1989). En cambio, la comparación de la placa no. 138 de la zona de Helsinki con un catálogo externo no ha sido posible debido a la falta de estrellas de catálogo en la placa que no presenten ninguno de los problemas antes mencionados. En el caso del PPM, por ejemplo, tan sólo seis estrellas del catálogo fueron identificadas en la placa, mientras que de la base de datos SIMBAD y del catálogo del observatorio Lick se obtuvo datos para menos de 30 estrellas. Esto, junto con la pobre calidad de la placa (relación señal/ruido bastante baja y presencia de muchas imágenes espúreas) me indujo a dejar de lado su reducción, de momento. La reducción interna de esta placa aún no ha sido llevada a cabo.

7.4.1 Reducción interna de la placa.

Para obtener la precisión interna de la placa, he transformado las posiciones de dos de las tres exposiciones al sistema de referencia de la tercera, aplicando una transformación lineal entre dichos sistemas y calculando entonces las desviaciones respecto de las nuevas coordenadas obtenidas. Esto equivaldría a considerar que en realidad lo que se tiene son datos de tres placas diferentes concernientes al mismo campo y con las mismas estrellas, y lo que se pretende es averiguar la transformación que proporcione todas las coordenadas en un mismo sistema de referencia. Esta transformación lineal la calculé a través de un ajuste por mínimos cuadrados de las posiciones de 337 estrellas presentes en el campo y con magnitud mayor que $B = 12.5$. Si se supone que todas las exposiciones contribuyen por igual a los errores, se puede calcular el error cuadrático medio para cada exposición individual. Los resultados han sido presentados en la tabla 7.1. El sistema de referencia común elegido para las tres exposiciones ha sido el de la exposición 1. La diferencia entre los errores en las direcciones X e Y podría explicarse en términos de desplazamientos de la emulsión durante el proceso de revelado o durante el tiempo que ha estado almacenada (83 años) en posición vertical, o, finalmente, por la presencia de aberraciones ópticas.

7.4.2 Reducción placa-catálogo.

Como catálogo externo he utilizado el catálogo de Girard *et al.* (1989), cuyo error externo en las posiciones de las estrellas es de $0''.16$. La época media de las placas utilizadas en la construcción de este catálogo es 1950.8. El campo considerado en la placa de Burdeos cubre un área de $1^\circ \times 1^\circ$ (fig. 7.17), encontrándose el cúmulo $10'$ al norte del centro de la placa.

El proceso de comparación o reducción entre las coordenadas del catálogo y las de la placa se inicia con el cálculo de las coordenadas estándar de las estrellas del catálogo a partir de sus coordenadas ecuatoriales. El principal problema geométrico a considerar en la fotografía astronómica es la proyección de una región de la esfera celeste sobre un plano, constituido por la placa. Este plano es análogo al llamado *plano tangencial*, que es un plano paralelo al definido por la placa y tangente a la esfera celeste en un punto denominado *punto tangencial* (fig. 7.16). Las coordenadas resultantes de la proyección de las posiciones de la esfera celeste sobre este plano utilizando como centro el punto tangencial (proyección gnomónica) son las llamadas *coordenadas estándar*, que sólo son, por tanto, las coordenadas rectangulares en el plano tangencial. La relación entre las coordenadas ecuatoriales y las estándar viene dada por las expresiones siguientes:

$$\xi = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A)} \quad (7.7)$$

$$\eta = \frac{\cos D \sin \delta - \sin D \cos \delta \cos(\alpha - A)}{\sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A)} \quad (7.8)$$

donde A, D son las coordenadas estándar del punto tangencial, y α, δ las ecuatoriales que se pretende transformar (Green 1993). Multiplicando ξ y η por la focal del telescopio se obtienen las coordenadas rectangulares de la placa. En este caso concreto, como la época media del catálogo es 1950.8 y la placa fue tomada en 1922, previa a la proyección se realizó la corrección de las posiciones de las estrellas debida a su movimiento propio, dato que fue extraído directamente del catálogo de Girard que es, fundamentalmente, un catálogo de movimientos propios.

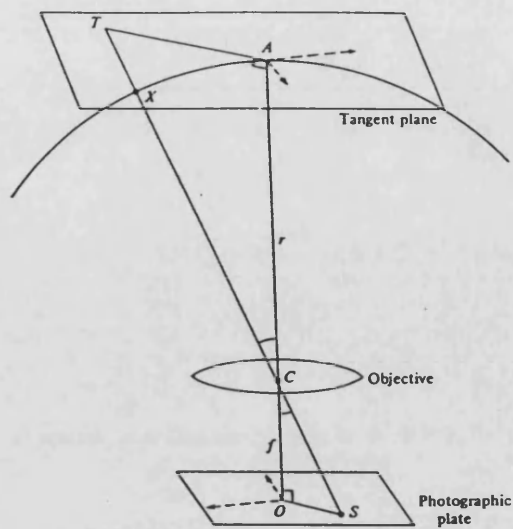


Figura 7.16: Proyección gnomónica de la esfera celeste sobre el plano tangencial.

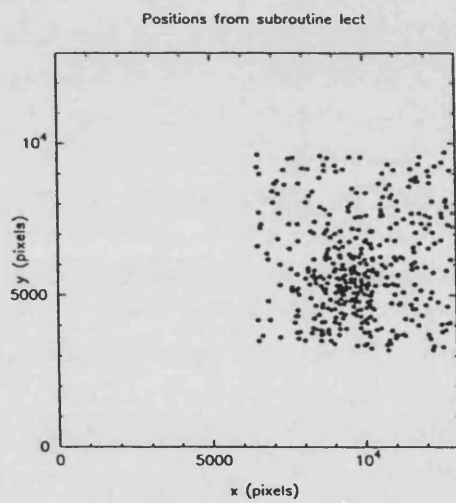


Figura 7.17: Campo correspondiente a M67 que ha sido estudiado en la placa de la "Carte du Ciel".

	Exposición 1	Exposición 2	Exposición 3
Δx	0".12	0".12	0".11
Δy	0".08	0".08	0".08

Tabla 7.1: Error cuadrático medio correspondiente a las exposiciones individuales en la reducción interna de la placa.

	Exposición 1	Exposición 2	Exposición 3
Δx	0".20	0".21	0".20
Δy	0".25	0".23	0".25
Número de estrellas	198	197	197

Tabla 7.2: Error cuadrático medio correspondiente a las exposiciones individuales en la reducción externa de la placa con el catálogo.

Una vez obtenidas las posiciones del catálogo en coordenadas rectangulares, se procede a la identificación en la placa de las estrellas del catálogo, en base a las posiciones relativas entre ellas, es decir, identificando triángulos semejantes en los dos sistemas. Ello nos proporciona la lista de estrellas (casi 200 en el caso concreto estudiado) que son utilizadas en el ajuste por mínimos cuadrados de polinomios en X e Y de segundo grado que corresponden a la transformación entre el sistema de coordenadas estándar y el rectangular de la placa. Comparando las posiciones del catálogo con las calculadas con esta transformación para las de la placa, se comprueba que el error cuadrático medio en la determinación de las posiciones con el algoritmo aquí expuesto es el mostrado en la tabla 7.2. Tres estrellas que daban lugar a errores excesivamente grandes fueron eliminadas del proceso de ajuste de la placa. Asimismo, después del ajuste también fue eliminada la estrella que mostraba el mayor error.

Las diferencias entre las precisiones internas y externas en la coordenada x están en perfecto acuerdo cuando se considera el error externo del catálogo. Sin embargo, el acuerdo no es igual de bueno en el caso de la coordenada y

ya que a partir de las precisiones interna de la placa y externa del catálogo hay que esperar que la precisión sea de alrededor $0''.18$, es decir, $0''.07$ menos del valor que se ha obtenido en realidad. Esta diferencia podría deberse al hecho de que el campo considerado se encuentra en el borde derecho de la placa, donde la presencia de distorsiones ópticas es muy probable. Otra causa posible sería el desplazamiento de la emulsión durante el proceso de secado o almacenado. Si la placa es colocada en posición vertical durante el secado, por ejemplo, es posible que se produzcan pequeños desplazamientos de la emulsión en dirección paralela a uno de los ejes de coordenadas.

Otra forma posible de llevar a cabo la reducción externa de este tipo de placas es considerar una exposición media, cuya posición sería la media de las tres posiciones correspondientes a las tres exposiciones de cada estrella. Esto permite la reducción del ruido en los datos, y el resultado debería mejorar los obtenidos con cada exposición por separado. De hecho, éste es el procedimiento habitual seguido en la determinación de posiciones de estrellas con placas fotográficas, donde se toma un gran número de éstas cubriendo el mismo campo. Al igual que antes, sería interpretar nuestras exposiciones triples como si en realidad se dispusiera de tres placas diferentes. Sin embargo, al llevar a cabo la reducción en la forma en que se acaba de exponer, no conseguí ninguna mejora en la precisión externa de la placa. Esto me llevó al estudio de la existencia de una posible correlación entre los errores correspondientes a las diferentes exposiciones. En efecto, encontré una fuerte correlación entre ellos. En el caso, por ejemplo, de las exposiciones 1 y 2, los coeficientes de correlación tiene unos valores de 0.83 y 0.91 en X e Y, respectivamente (fig. 7.18).

El origen de esta correlación no es demasiado claro, aunque he descartado ya que sea causada por el proceso de ajuste por mínimos cuadrados de la función suma de las tres gaussianas bi-dimensionales. No sería descabellado pensar que el ajuste obliga de algún modo a que la disposición relativa de los centros de las tres exposiciones sea siempre el mismo. A partir de la matriz de covarianzas resultante del ajuste, se puede realizar el cálculo de los coeficientes de correlación asociados a las posiciones de las diferentes

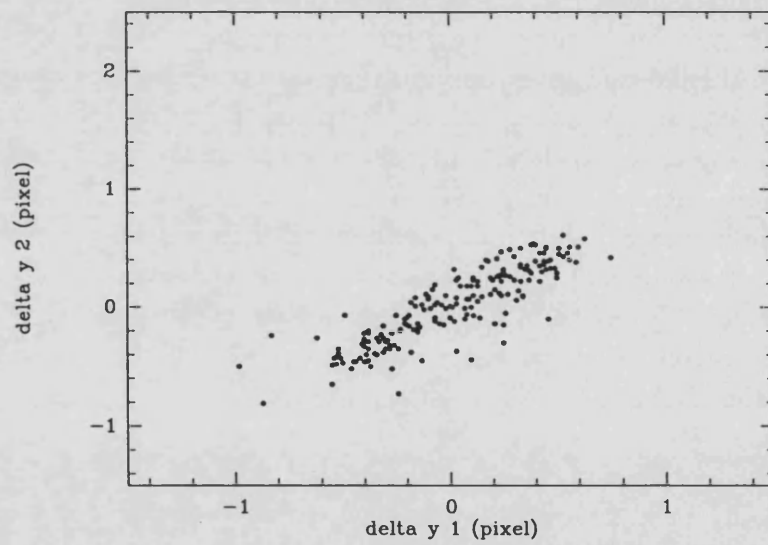
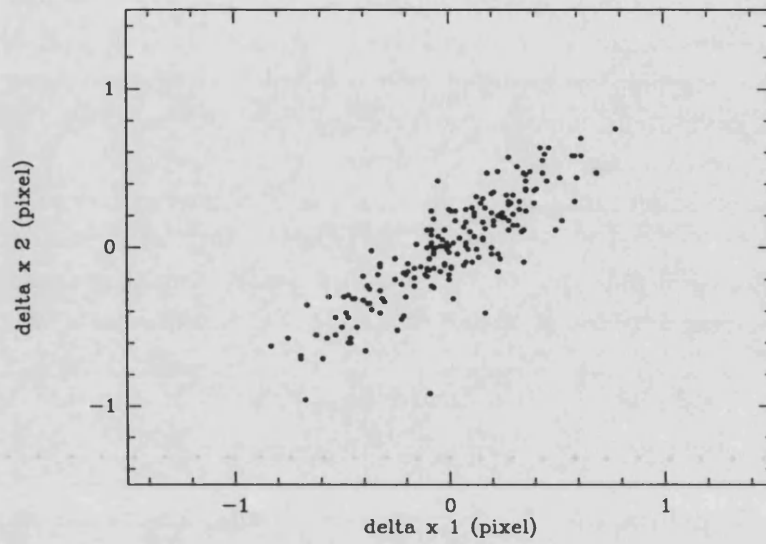


Figura 7.18: Correlación entre los errores en las posiciones de dos exposiciones diferentes después de realizar la reducción de la placa con un catálogo externo.

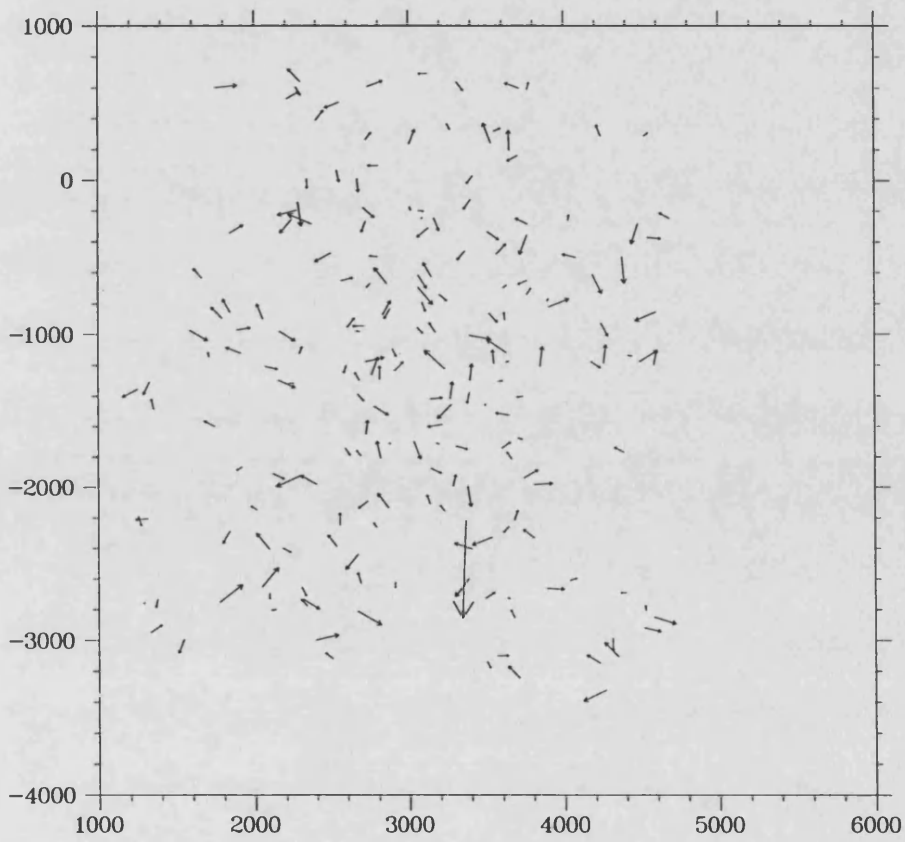


Figura 7.19: Residuos en la posiciones de la exposición 3 en función de la posición en la placa (en pixel). La longitud individual de las flechas es arbitraria, pero la relativa entre ellas es función del valor exacto del residuo en cada caso.

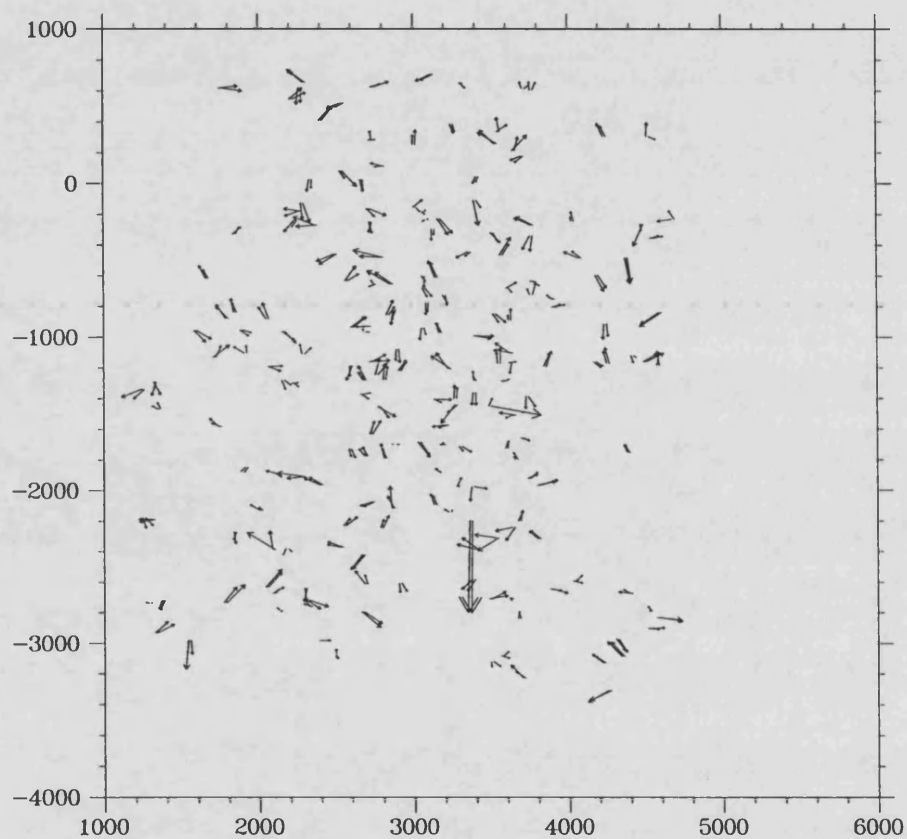


Figura 7.20: Residuos en las posiciones de las exposiciones 1 y 2 en función de su posición en la placa (en pixel). Claramente se puede ver que muchos de los residuos son los mismos en ambos casos (flechas paralelas y de módulo similar), mostrando la correlación que existe entre ellos.

exposiciones. El valor encontrado fue de menos de 0.01 en casi todos los casos.

La presencia de errores sistemáticos globales en la placa sería otra posible respuesta. Sin embargo, de haber existido habrían podido ser absorbidos por el modelo utilizando polinomios de grado superior, lo que no ha sido el caso: los resultados no fueron significativamente mejores cuando se realizó la reducción de la placa con un polinomio de tercer grado. En la figura 7.19 he dibujado los residuos en las posiciones de una exposición en función de sus coordenadas en la placa. Se aprecia claramente que no existe ninguna correlación entre ellos, lo que viene a confirmar la idea de que no hay errores sistemáticos globales presentes en la placa. Por otro lado, en la figura 7.20 se puede ver muy claramente la correlación que existe entre los residuos de las posiciones cuando se comparan diferentes exposiciones.

La presencia de errores sistemáticos en el catálogo también podría justificar de algún modo estas correlaciones entre los errores. El catálogo ha sido, sin embargo, elaborado con material de primera calidad. Se utilizaron un total de 44 placas con una distribución temporal bastante uniforme entre los años 1904 y 1970. Una de ellas fue incluso tomada en 1922, el mismo año en que se tomó la placa que nos ocupa. Todas ellas fueron realizadas con el mismo telescopio, el refractor de 40 pulgadas de Yerkes. El campo cubierto es bastante pequeño, sólo $32' \times 42'$, que viene a ser un 5% del área cubierta por la placa de la "Carte du Ciel". Se obtiene, en consecuencia, una alta resolución espacial, que se traduce en una precisión interna de 21 mas, siendo de 10 mas en el caso de las estrellas con magnitud menor que $V=14$. Su baja precisión externa de sólo $0''.16$ (baja en comparación con la interna) viene justificada por haberse realizado el ajuste externo con tan sólo 6 estrellas de catálogo. La influencia de este error externo en nuestros datos no es clara. Cuando se realiza la transformación de las coordenadas ecuatoriales a coordenadas rectangulares (estándar) se debe de recuperar esta precisión de 21 mas en las posiciones, lo cual está muy por debajo de la precisión que puede esperarse en placas del tipo de las de la "Carte du Ciel", que es de aproximadamente unos $0''.1$. A este nivel, dos factores podrían todavía hacer que el error externo tuviese algún efecto:

a) Que se esté utilizando un modelo de transformación a coordenadas rectangulares que no es capaz de reproducir las coordenadas de placa de Girard de forma exacta. Sin embargo, con sólo 6 estrellas de referencia parece que no hayan podido utilizar un modelo que no fuese lineal, igual al empleado aquí en la transformación.

b) Que mi elección del punto tangencial en el centro del cúmulo haya introducido un error que no aparecería de haberlo elegido en el centro de la placa.

Dos son los procedimientos que podrían indicar si los errores en el catálogo influyen en mis resultados:

a) Buscar este mismo catálogo en una versión que contenga las coordenadas de placa o averiguar cuál ha sido el modelo concreto aplicado en la reducción a un catálogo externo.

b) Realizar la reducción de una placa diferente con sólo una exposición por estrella con este mismo catálogo. Si los errores encontrados son más pequeños, entonces parecerá claro que la explicación de las correlaciones está en la placa de la "Carte du Ciel". Si, en cambio, los errores fueran similares, entonces sería el catálogo el responsable. Esta última posibilidad, sin embargo, nos parece muy improbable.

Finalmente, cabe también la posibilidad de que estén presentes en la placa errores sistemáticos locales, que actúen sólo en las áreas que contienen cada conjunto de tres exposiciones, y que estos errores sean diferentes para los diversos tripletes de imágenes. Estos errores locales podrían quizás tener explicación en términos de fenómenos de adyacencia, como el de turbiedad.

7.5 Fotometría.

El primer paso ha sido la determinación de una magnitud instrumental interna a partir de la densidad medida de las imágenes correspondientes a cada exposición. Para ello he hecho uso del volumen contenido debajo de cada gaussiana y esta magnitud interna la he definido entonces del modo siguiente:

$$m_k = -2.5 \log(vol_k), \quad (7.9)$$

donde $vol_k = A_k(\pi a_k b_k)$, siendo A_k el pico de densidad de la exposición k -ésima en cada imagen triple, y a_k, b_k los semiejes del contorno elíptico correspondiente a $\sigma_{xk} = 1$ y $\sigma_{yk} = 1$ en la gaussiana, y donde $k = 1, 3$.

La calibración con un catálogo fotométrico externo fue complicada. Los datos que estoy manejando contienen magnitudes entre $B \approx 8$ y $B \approx 15$, que se supone que es el límite de la placa (ver cap. 5). Las estrellas más brillantes, que son precisamente las presentes en casi todos los catálogos, mostraban un alto grado de solapamiento entre las diferentes exposiciones y no fueron tenidas en cuenta ya que resultan en errores mucho mayores que el error medio.

En el caso de la placa no. 138 de la zona de Helsinki no pude encontrar ningún catálogo fotométrico y, como mencioné antes, tampoco fue posible utilizar datos fotométricos contenidos en catálogos astrométricos debido al escaso número de estrellas de catálogo identificadas en la placa. Aparte de esto, el pobre estado de la propia placa me hizo desistir (al menos momentáneamente) de realizar su calibración fotométrica ya que los resultados que se obtengan serán peores que los que se pueden conseguir por norma general con estas placas y mi primer interés radica en conocer cuál es la precisión que se puede alcanzar en los casos "normales" con el algoritmo aquí descrito.

Por lo que respecta a M67, la situación es diferente. Se trata de un campo que ha sido muy bien estudiado y en la base de datos SIMBAD encontré

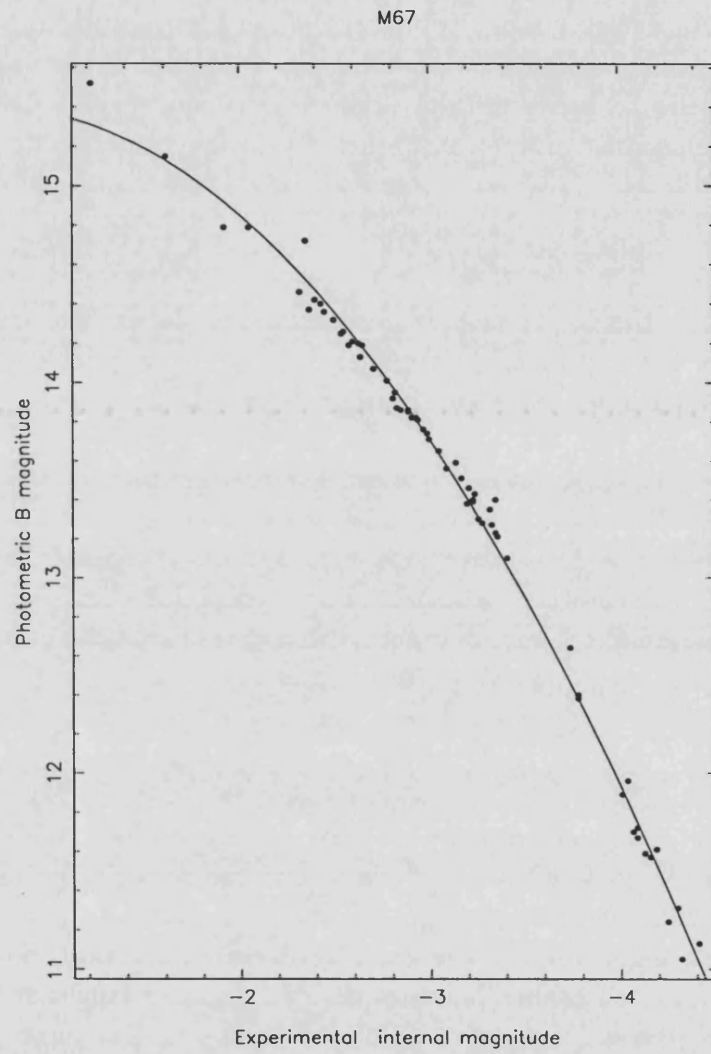


Figura 7.21: Calibración fotométrica con un polinomio de segundo grado en el intervalo de magnitudes $[11, 14.5]$. Las magnitudes fotométricas han sido tomadas de la base de datos SIMBAD.

M67

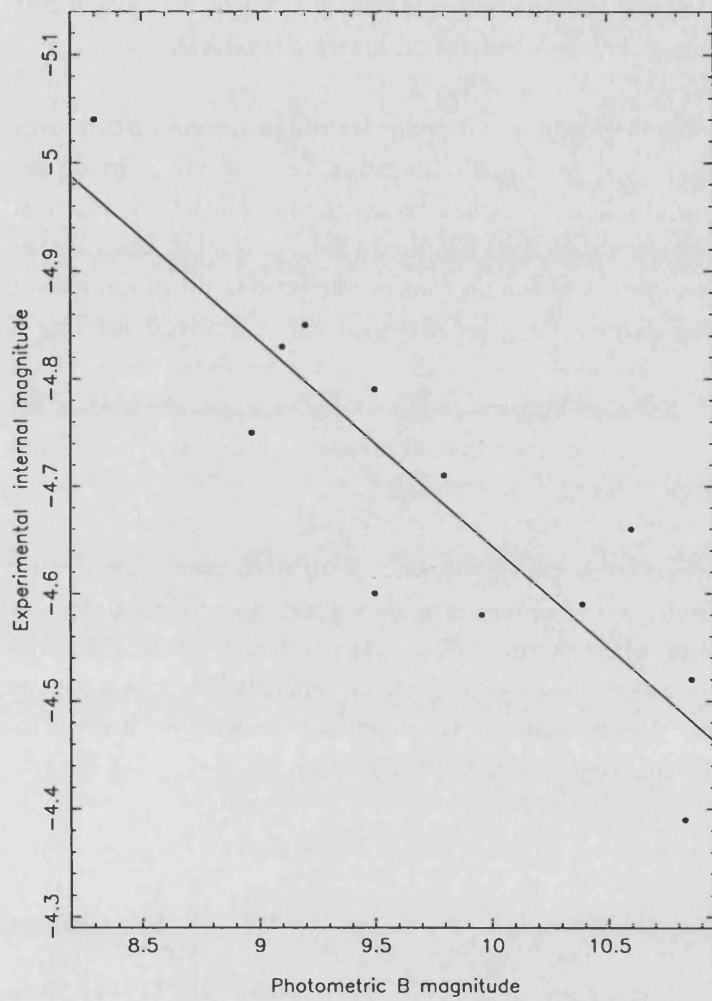


Figura 7.22: Calibración fotométrica con un polinomio de primer grado aplicado a las estrellas con magnitud inferior a la 11. La magnitudes fotométricas han sido tomadas de la base de datos SIMBAD.

datos fotométricos referentes a 226 estrellas que fueron identificadas en la placa. El catálogo de Girard *et al.* en formato electrónico sólo contiene datos relativos a la magnitud V, mientras que en el artículo original aparecen datos sobre B-V para la mayoría de las estrellas. Estas magnitudes fueron obtenidas de otras fuentes, no fueron determinadas por ellos, así que decidí trabajar directamente sólo con los datos obtenidos en SIMBAD.

El modelo ajustado fue elegido dependiendo del rango de magnitud considerado. Realicé un ajuste por mínimos cuadrados de un polinomio de segundo grado para determinar la relación entre las magnitudes instrumental y fotométrica en el intervalo entre B=11 a B=14.5 (fig. 7.21). Tres estrellas con errores muy superiores a la media fueron eliminadas de modo que el resultado del ajuste fuese mejor. Para las estrellas con magnitud inferior a B=11 observé que un modelo lineal se ajustaba mejor a los datos, aunque en este caso disponía de un número muy pequeño de datos experimentales, así que no considero que el resultado sea excesivamente significativo (fig. 7.22) en este rango de magnitudes.

En cuanto a la precisión conseguida, el error cuadrático medio resultante en la comparación entre los datos externos y los valores obtenidos al aplicar los modelos resultantes del ajuste es de 0.3^m . Este resultado puede ser mejorado utilizando modelos de orden superior o más sofisticados junto con un mayor número de datos, permitiendo el alcanzar la precisión de 0.2^m o incluso 0.1^m que es uno de nuestros objetivos (cap. 1).

Bibliografía.

Dick, W.R.; Tucholke, H-K; Brosche, P.; Galas, R.; Geffert, M.; Guibert, J. (1993) "Hipparcos link with Carte du Ciel triple images". *A. & A.*, 279, 267-272.

Girard, T.M.; Grundy, W.M.; López, C.E.; Van Altena, W.F (1989) "Relative proper motions and the stellar velocity dispersion of the open cluster M67". *Astron. Journal*, 98, 1, July 1989.

Green, R.M. (1993) *Spherical astronomy*. Cambridge University Press.

Hiesgen, M. (1995) Comunicación privada.

Marquardt, D.W. (1963). *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol.11, pp. 431-441.

Ortiz Gil, A.; Brosche, P.; Hiesgen, M. (1995) "Salvaging an astrometric treasure". *Astronomische Gesellschaft Abstr. Ser. no. 11*, p.92. Bonn, Septiembre 1995.

Capítulo 8

Conclusiones.

En esta tesis se presentan los resultados obtenidos en la identificación y análisis de imágenes astronómicas en el contexto de dos proyectos aparentemente diferentes, pero que son dos aspectos de un mismo problema, de modo que los resultados obtenidos en un caso son directamente aplicables al otro. Ambos tienen como objetivo común la determinación precisa de la posición de estrellas o de asteroides mediante la utilización de placas fotográficas.

En primer lugar, se ha visto que la fotografía es todavía hoy, en la época de los sensores CCD, una herramienta muy útil, sobre todo cuando se trabaja en las longitudes de onda más cortas del espectro visible y cuando se trata del registro de regiones del cielo de gran extensión (cap. 1). Varios proyectos se están llevando a cabo actualmente en este sentido como, por ejemplo, el segundo rastreo de Monte Palomar (Palomar Observatory Sky Survey II, es decir, POSS-II).

He considerado conveniente realizar después un repaso de los métodos empleados en el registro de las placas, cuyo objetivo es el proporcionar datos de tipo astrométrico y fotométrico (cap. 2). Así, los métodos de Wolf y Metcalf han sido expuestos, junto con algunas de sus variantes. Con ambos métodos se ha conseguido descubrir la mayor parte de los asteroides hasta hoy conocidos, además de obtener posiciones que permiten el cálculo de sus órbitas y su seguimiento a lo largo de las mismas, de modo que no se pier-

dan a causa de las perturbaciones a las que se hallan sometidos, debidas, fundamentalmente, a los grandes planetas del Sistema Solar. Más concretamente, el proyecto de observación de asteroides, en el que participa el OAUV y en cuyo contexto ha sido realizado parte de este trabajo, es de gran importancia en la determinación de los parámetros de orientación de los sistemas de referencia celestes y de los errores sistemáticos de los catálogos estelares. En la realización de estas observaciones en el OAUV se utiliza el método de Wolf con exposiciones cortas, registrándose, de este modo, asteroides de hasta magnitud $B \approx 11.5$.

Por supuesto, un tema obligado es el estudio de las características de las placas fotográficas como detectores de imágenes. Así, han sido revisadas ciertas peculiaridades como la no linealidad en la respuesta de las emulsiones frente a la radiación incidente, los diferentes tipos de ruido presentes o la aparición de efectos de adyacencia (turbiedad y Kostinsky) cuando dos imágenes ocupan posiciones muy próximas en la emulsión. También se ha hecho un repaso de los tres tipos de aberraciones ópticas más habituales en los sistemas telescópicos: la aberración esférica, la cromática y la de coma.

A esto sigue un análisis de los problemas que se presentan en los casos concretos aquí tratados (y algunos de los cuales han sido ya resueltos), a saber, las placas de asteroides del OAUV, y las placas utilizadas en el proyecto de la "Carte du Ciel" (cap. 4). Estos son la aparición de aberraciones ópticas (en concreto, de la aberración de coma), del efecto de adyacencia conocido como efecto Kostinsky y el solapamiento entre las diferentes exposiciones de una misma estrella, problema que afecta de forma especial a las placas de la "Carte du Ciel", donde la presencia de exposiciones triples para cada estrella, separadas tan sólo unas $170\mu\text{m}$, aproximadamente, da lugar a un solapamiento entre las imágenes correspondientes a estrellas con magnitud inferior a $B \approx 12.5$. Este solapamiento es origen de dos problemas. Uno es la identificación de las componentes individuales en las imágenes que contienen varias exposiciones parcialmente confundidas. Otro es el desplazamiento que sufren estas imágenes que las aleja de su posición real y que es debido al efecto Kostinsky. En los ejemplos estudiados en este trabajo se ha visto

que no es raro encontrar cambios en las posiciones de más de $40\mu\text{m}$. Un problema adicional en las placas de la "Carte du Ciel" es la presencia de un retículo impresionado en las mismas, que provoca cambios en la densidad de las imágenes estelares que yacen sobre él (alterando cualquier tipo de cantidad fotométrica que pueda ser medida en ellas) y efectos de adyacencia que afectan a las que están en sus proximidades.

Un tema de gran interés es el problema del aprovechamiento de los objetos más débiles en la placa, que tiene una solución clara en la utilización de algoritmos de realce de imágenes (cap. 5). Esto significa, en el caso de las placas de asteroides, el disponer de un mayor número de estrellas de referencia, con lo que se mejora la determinación de la posición del asteroide, e incluso encontrarlo cuando es de magnitud alta y no puede ser visto directamente en la placa. En el caso de las placas de la "Carte du Ciel" esto supone también la determinación de movimientos propios para una mayor cantidad de estrellas, aprovechando las posibilidades que nos ofrecen nuevos programas de detección de imágenes que han encontrado en ellas estrellas de magnitud superior a la $B \approx 16$, cuando la magnitud límite "teórica" era de tan sólo $B \approx 15$. Especialmente efectivo en esta cuestión se ha mostrado el realce de las imágenes según un algoritmo basado en la teoría de los conjuntos borrosos y que he desarrollado en este trabajo. Con él he conseguido mejorar la estimación de la posición de varias imágenes débiles simuladas, obteniendo su valor correcto y demostrando la superioridad de este método sobre otros algoritmos de realce clásicos (ecualización del histograma o especificación directa del mismo según diferentes modelos, aplicación de máscaras binarias, o eliminación de niveles en el histograma).

Los algoritmos desarrollados con el objeto de servir a la identificación automática de las imágenes estelares durante la digitalización de las placas fotográficas han demostrado su eficacia y fiabilidad en su aplicación al análisis de las placas en tiempo real. Por un lado, el algoritmo actualmente empleado en la máquina de medición de placas astrográficas del OAUV, basado en el conocimiento previo de las posiciones de las estrellas de referencia en el campo, ha permitido ya el análisis de una importante cantidad de placas

destinadas a la mejora de órbitas de asteroides (cap. 6), obteniéndose posiciones en el cielo con una precisión de $0.3''$. Es de destacar la eficiencia de este algoritmo a la hora de identificar las imágenes correctas en la gran mayoría de los casos, aún cuando éstas son muy débiles, están solapadas entre sí, o existen defectos o imágenes espúreas cercanos a ellas. Se trata además de un algoritmo rápido, capaz de medir una placa con 20 estrellas en tan sólo 10 ó 15 minutos.

Por otro parte, el algoritmo desarrollado para la medición de posiciones en placas de gran campo (donde las posiciones de las estrellas no son conocidas con anterioridad a su estudio) y de campos con gran número de estrellas (donde es muy frecuente el solapamiento entre diferentes imágenes, lo que dificulta la identificación de las componentes individuales) se ha revelado como un método muy rápido, capaz además de resolver entre el 80% y el 100% de las imágenes que aparecen solapadas. Este algoritmo es de gran importancia tanto para el estudio de placas cuyo objetivo es el descubrimiento de nuevos asteroides, como para el análisis de las placas de la "Carte du Ciel".

El método descrito en esta tesis para el tratamiento de las exposiciones triples presentes en las placas de la "Carte du Ciel" ha conducido también a varios y muy importantes resultados. En primer lugar, se ha visto que se obtiene una precisión de $0''.2$ en las posiciones de las estrellas con esta primera versión del algoritmo. Por tanto, a través de diferentes mejoras (como la reducción del número de parámetros libres en el modelo) que lo hagan más robusto y estable, mejoraremos esta precisión. Este resultado viene a confirmar también la obtención de movimientos propios con una precisión de 2 milisegundos de arco por año. Para un futuro inmediato quedan el aprovechamiento de las estrellas cuyas exposiciones aparecen solapadas entre sí (mediante la utilización del centro geométrico de las tres exposiciones o métodos de resolución de imágenes como el expuesto en esta tesis), y la mejora de la precisión en las posiciones de las estrellas de magnitud superior a $B \approx 15$, mediante la utilización del algoritmo de realce basado en la teoría de conjuntos borrosos, soluciones que ya han sido señaladas en los capítulos 6, 7 y 5, respectivamente.

Finalmente, otro importante resultado obtenido en el estudio de la “Carte du Ciel” ha sido la determinación de magnitudes estelares con una precisión de 0.3^m , que también podrá ser mejorada en los próximos meses. (cap.7).

En resumen, los principales logros conseguidos en este trabajo son los siguientes:

- Construcción de algoritmos de realce que permiten detectar las estrellas más débiles, lo cual conduce a:
 - a) Una mejora en la precisión de las posiciones obtenidas para los asteroides.
 - b) Un sustancial incremento del número de estrellas en las placas de la “Carte du Ciel” cuyas posiciones son obtenidas con una mayor precisión que la que se alcanza sin aplicar el realce, permitiendo la extensión del sistema de referencia de movimientos propios de Hipparcos a una magnitud aún más elevada de lo esperado inicialmente.
- Desarrollo de un algoritmo de identificación y análisis de imágenes con placas de asteroides a partir del conocimiento previo de las posiciones de las estrellas de referencia, con tres características básicas:
 - a) Detección correcta de todas las imágenes en la gran mayoría de las placas.
 - b) Rapidez del algoritmo, lo que permite el análisis de las placas en tiempo real, evitando así el almacenamiento de una gran cantidad de datos.
 - c) Rapidez del proceso global, el cual emplea entre 10 y 15 minutos en el análisis de cada placa.

- Desarrollo de un algoritmo de identificación de imágenes en placas de gran campo (sin conocimiento previo de las posiciones de las estrellas) y en campos con gran número de estrellas (muchas de las imágenes aparecen parcialmente amalgamadas), que se caracteriza por:
 - a) Ser un algoritmo muy rápido.
 - b) Identificar entre el 80% y el 100% de las imágenes individuales en los casos en que aparecen solapadas.
- Un algoritmo que permite la obtención de posiciones en las placas de la “Carte du Ciel” con una precisión de 0.2” en su primera versión, capaz de realizar el análisis simultáneo de las componentes individuales de las exposiciones triples y de obtener buenos resultados incluso con las estrellas afectadas por la aberración de coma presente en los bordes de las placas. Además, este proceso permite, actualmente, la obtención de magnitudes con una precisión de 0.3^m.

Agradecimientos

En este rincón de mi tesis quiero mostrar mi agradecimiento a tanta gente que con su ayuda y estímulo han hecho posible que fuera escrita. Mis padres merecen una mención especial, pues gracias a su apoyo he podido realizar mis estudios y este trabajo.

A mi “jefe”, Alvaro López García, le estoy también muy agradecida por haberme guiado en mis primeros pasos en la investigación en el campo de la Astronomía, a través de interesantes discusiones y sugerencias, facilitándome además el contacto con otros investigadores extranjeros y animándome a solicitar dos estancias en otros tantos observatorios, el de Trieste en Italia y el “Sternwarte” de la Universidad de Bonn (Alemania), donde me encuentro trabajando en la actualidad. En especial, quiero agradecer a Fabio Pasian y Marco Fulle su dedicación durante el tiempo que permanecí en Trieste, y gracias a los cuales me inicié en el manejo de MIDAS y en el estudio de un “bicho raro” llamado 2060-Chiron. Y agradezco también a mi actual supervisor alemán, el Profesor Doctor Peter Brosche, por darme la oportunidad de colaborar en un proyecto tan fascinante y ambicioso como es la reducción de las placas de la “Carte du Ciel”, nunca medidas hasta ahora. Aquí quiero también mencionar a Michael Odenkirchen, quien con paciencia infinita me ha ido instruyendo en diversos aspectos relacionados con la astrometría. A este Michael, junto con Michael Geffert y Hans-Joachim Tucholke quiero agradecer horas de deliciosas discusiones sobre los problemas y misterios que encierra la “Carte du Ciel”, además de los ánimos y consejos que me han proporcionado en no pocas ocasiones. Especialmente notable ha sido el esfuerzo que Klaas de Boer (director del Sternwarte) ha realizado leyendo la



versión preliminar de esta tesis y realizando muy interesantes comentarios acerca de ella.

También quiero recordar aquí a tanta gente en cuya compañía he trabajado, y que han contribuido a la atmósfera de amistad que he encontrado allá donde he estado. En primer lugar, mis compañeros del OAUUV, José Luis Valdés, Juan Sánchez (la mejor ayuda frente a la burocracia de esta Universitat), José Manuel Martínez González, y de la universidad de Castellón, María José Martínez Usó (mi especialista en catálogos) y Alicia Cordero.

En el grupo de los italianos quiero incluir a Andrea Balestra, Mauro Pucillo, Paolo Santin, Giorgio Sedmak, Ricardo Smareglia y Claudio Vuerli, que contribuyeron a hacer de mi estancia en Trieste una experiencia estupenda. También agradezco a mi anfitrión en Milán, Filippo Maria Zerbi (un experto en estrellas δ Scutti y en apagar incendios), el conseguir que me sintiera como en mi propia casa.

Por último, quiero agradecer a toda la gente con la que trabajo en Bonn el ambiente cordial y cálido que allí se respira. Ellos son Yolanda Aguilar (el otro "toque español" del instituto), Klaus Bagschi, Thilo Bauer, Dominik Bomans, Elisabeth Danne, Andrea Dieball, Hilde Domgörgen, Justina Engelman, Wolfram Herkendell, Sven Kohle, Ralf Kohley, Michael Hilker, Günter Lay, María José Rioja (el "toque español" en el vecino MPI), Jörg Sanner, Stephan Schneider, Jelena Schmidt, Armin Theißen, Jean-Marie Will y Johannes Wunsch.

Finalmente, y de modo especial, agradezco a Alberto Fernández Soto su infinita paciencia leyendo versiones preliminares de esta tesis, las discusiones sobre estadística, su experiencia en el manejo de L^AT_EX, Super Mongo y Pgplot, y su constante apoyo en todo momento.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÈNCIES FÍSQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data, acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral d'En/ Na/ N' Amelie 176 Otto Gil

la qualificació d' Apto cum laude

València a 18 de desembre de 1915

El Secretari,

El President,



[Handwritten signatures of the President and Secretary]

