

7eris 206

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Física Teòrica

**DISTORSIONES EN LA OBSERVACION  
DE LA ESTRUCTURA A GRAN ESCALA  
DEL UNIVERSO**

Tesis Doctoral  
presentada por

JOSE F. MORENO MENDEZ

Valencia, 1992



UMI Number: U607726

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607726

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 4848  
DATA 26.5.93  
SIGNATURA T.D. 210  
BIBLIOTECA  
Nº LIBIS: i1949127x

→ FÍSICAS

dispositiu

LITRA

1948

27 ms.

1948

1948

1948

**D. MIGUEL PORTILLA MOLL, Profesor Titular de Física  
Teórica de la Universidad de Valencia**

**CERTIFICA:**

Que la presente Memoria "DISTORSIONES EN LA OBSERVACION DE LA ESTRUCTURA A GRAN ESCALA DEL UNIVERSO" ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Valencia por D. JOSE F. MORENO MENDEZ, para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que así conste, presenta la referida Memoria, firmando este Certificado en

Valencia, a 22 de Junio de 1992.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Miguel Portilla Moll', written over a horizontal line.

**Fdo.: Miguel Portilla Moll**



## Prólogo

La realización de esta tesis ha sido posible gracias a una buena dosis de "comprensión" por parte de las personas de las que de algún modo ha dependido mi trabajo durante estos años, en los diferentes campos en los que se ha desenvuelto.

En primer lugar, he de agradecer a todo el grupo de Astrofísica-Relatividad-Cosmología, tanto a quienes pertenecen al Departamento de Física Teórica como a quienes pertenecen al Departamento de Matemática Aplicada y Astronomía de la Facultad de Matemáticas, por el apoyo recibido, y especialmente a José María Ibáñez, por su constante apoyo en todos los sentidos, a Vicent Martínez, quien además me introdujo en el fabuloso mundo de los "catálogos de galaxias" y el análisis estadístico, a Diego Sáez, quien nos ayudó a comprender esos fenómenos que en el universo primitivo crearon las perturbaciones que hoy son las galaxias, y a J. Ferrando y J.A. Morales, cuya colaboración ha permitido el análisis de las analogías y diferencias entre diferentes modelos de universos inhomogéneos y que han permitido reproducir en esta memoria algunos resultados aún no publicados.

Especial mención requiere la paciencia de Miguel Portilla. Además de su tarea de *dirigir* —en el sentido estricto de la palabra— esta tesis, algo que nunca agradeceré lo suficiente es su capacidad de trabajo intensivo cuando ello era necesario y su adaptabilidad a trabajar los fines de semana, e incluso los domingos por la tarde, siempre en función de las disponibilidades de tiempo que me dejaban mis otras ocupaciones. No sé si los resultados obtenidos han compensado el esfuerzo, pero, aunque uno nunca se queda suficientemente satisfecho, nos quedamos con la sensación de que ha merecido la pena.

He de expresar también un profundo agradecimiento personal a D. Joaquín Meliá Miralles, Catedrático de Física Aplicada del Departamento de Termodinámica de la Facultad de Física de Valencia, cuya comprensión y tolerancia han hecho posible en último extremo el que esta tesis se haya

## II

---

podido llevar a cabo, restando algún tiempo a otros trabajos igualmente interesantes.

Desearía también expresar mi agradecimiento a mis compañeros del Departamento de Termodinámica, Demetrio Segarra y Soledad Gandía, cuyo apoyo y estímulo fueron constantes en los momentos de dificultad.

Lo cierto es que mi trabajo durante estos años se ha desarrollado en un esfuerzo por compatibilizar la investigación en campos muy diversos, en gran parte debido a necesidades laborales y económicas, y en realidad a veces también por "mera curiosidad". A quienes desde sus pequeñas atalayas personales no han sabido o no han querido comprender la diversificación, merecería la pena recordarles que el auténtico espíritu científico no distingue entre Departamentos, Unidades de Investigación, Proyectos o demás estructuras administrativas, sino consiste simplemente en dejarse impresionar por todo aquello que resulta novedoso o desconocido, con la única recompensa de la satisfacción personal que supone el profundizar en los misterios del Universo en el que vivimos.

Desearía dedicar este trabajo a mis padres, como una continuación de esos estudios que no se acaban nunca ... , así como a mi mujer, cuya comprensión posibilitó el trabajo en los "ratos libres", y a mis hijos, a quienes debería pedirles perdón por no haber compartido con ellos el tiempo que debería. Espero poder compensarlos ahora, ... una vez "leída la tesis".

---

## Agradecimiento

He de expresar mi agradecimiento al

National Space Science Data Center  
World Data Center A for Rockets and Satellites  
Astronomical Data Center  
NASA Goddard Space Flight Center  
Maryland, USA

por facilitarme gran parte de los datos observacionales utilizados en esta memoria, y en particular a Ms. Gail Schneider y Ms. Barbara A. Thomas, por su interés y cuidado en resolver los problemas y facilitar el rápido acceso a toda esta información.

Es importante destacar el servicio que dicho centro, de modo generoso y gratuito, está haciendo a la comunidad científica internacional.





## INDICE GENERAL

<b>Prólogo</b>	I
<b>Agradecimiento</b>	III
<b>Indice general</b>	V
<b>Introducción</b>	1
<b>1.- Estructura a gran escala del Universo</b>	7
1.1.- Modelos cosmológicos. El modelo de Einstein-de Sitter	8
1.2.- Observaciones en cosmología	15
1.2.1.- Principales test cosmológicos	15
1.2.2.- Efectos de selección: sesgos observacionales	21
1.2.3.- La escala temporal. Evolución en el <i>look back time</i>	22
1.2.4.- Radiación de fondo	23
1.2.5.- Movimientos a gran escala	24
1.2.6.- Estructura a gran escala del Universo	27
1.3.- Algunos temas controvertidos en el estudio de la estructura a gran escala del universo	32
<b>2.- Modelización de un universo inhomogéneo</b>	53
2.1.- Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para un modelo inhomogéneo	54
2.2.- Soluciones perturbativas de soluciones exactas para modelos homogéneos	56
2.2.1.- Perturbaciones a un modelo cosmológico	57
2.2.2.- Perturbaciones a pequeña escala y grandes perturbaciones cosmológicas	59
2.3.- Perturbaciones lineales a una métrica homogénea para describir regiones con contraste de densidad lineal: el modelo de Sachs-Wolfe	61
2.4.- Perturbaciones lineales a una métrica homogénea para describir regiones con contraste de densidad no lineal:	

---

la aproximación potencial	66
<b>3.- Determinación de las coordenadas de una fuente luminosa a partir de los observables redshift-ángulo</b>	<b>73</b>
3.1.- Determinación de las coordenadas comóviles en el gauge de Sachs-Wolfe	74
3.2.- Determinación de las coordenadas del gauge de la aproximación potencial	84
<b>4.- Interpretación de las observaciones en coordenadas redshift-ángulo</b>	<b>91</b>
4.1.- Determinación de distancias entre puntos de un entorno	92
4.2.- Efectos sobre la densidad numérica de galaxias observadas	96
4.2.1.- Contraste de densidad observado y contraste de densidad real	96
4.2.2.- Contraste medio en una muestra de profundidad dada	101
4.2.3.- Simulaciones numéricas	103
4.3.- Efectos sobre la densidad espectral observada	106
4.4.- Determinación del campo de velocidades peculiares	123
4.5.- Efectos ligados a la luminosidad de las fuentes	132
<b>5.- Tipos característicos de perturbación</b>	<b>149</b>
5.1.- Estructuras esféricamente simétricas	150
5.1.1.- Cúmulos de galaxias	155
5.1.2.- Vacíos cosmológicos	169
5.2.- La onda plana como modelo elemental de estructura a gran escala	181
<b>6.- Aplicaciones al análisis y corrección de catálogos de galaxias</b>	<b>203</b>
6.1.- Catálogos de galaxias "representativos" de la estructura a gran escala del universo	204

---

6.2.- Correcciones necesarias para interpretar un catálogo de galaxias	217
6.3.- Corrección de efectos debidos a velocidad peculiar del observador	226
6.4.- Corrección de efectos de redshift en la zona virializada interna de un cúmulo de galaxias	228
6.5.- Método general de corrección de catálogos basado en la modelización de cúmulos esféricos	243
6.6.- Método general de corrección de catálogos basado en la descomposición espectral en suma de ondas planas	248
6.7.- Distorsiones observacionales en el análisis estadístico de catálogos de galaxias	261
<b>Conclusiones</b>	<b>277</b>
<b>Apéndices</b>	
I.- Luminosidades y magnitudes de galaxias	285
II.- Sistemas de coordenadas en catálogos de galaxias	289
III.- El catálogo de galaxias del CfA	295
<b>Bibliografía</b>	<b>307</b>

1. Introduction  
2. Methodology  
3. Results  
4. Discussion  
5. Conclusion

## INTRODUCCION

---

Hasta hace poco más de 15 años, la mayor parte de los astrónomos y astrofísicos admitía que el universo, considerado a gran escala, era básicamente homogéneo y sin estructura. La evidente inhomogeneidad a pequeña escala (estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias) se suponía que se difuminaba al ir a una escala mayor. Pero nuestro conocimiento de la estructura a gran escala del universo ha aumentado notablemente en estos últimos años.

Al principio, los datos observacionales disponibles eran pocos y poco precisos, por lo que la cosmología se orientaba fundamentalmente a la modelización teórica, en base a modelos de universo generalmente poco realistas. Las cada vez más numerosas y precisas mediciones de redshift, juntamente con los descubrimientos acerca de la radiación de fondo de microondas, están constituyendo una primera posibilidad de acercarnos al conocimiento de la estructura a gran escala del universo a través del análisis de datos observacionales.

La enorme dificultad que supone el realizar observaciones en cosmología repercutió en un primer momento en una tal vez excesiva valoración de los propios datos, que incluso a veces resultaban contradichos por observaciones posteriores más precisas. El gran esfuerzo de obtención de los datos requería un tratamiento inmediato que justificase dicho esfuerzo, y así muchas veces se descuidó el detenido análisis de los mismos, y se pasó directamente a realizar ambiciosos estudios estadísticos acerca de las propiedades de la estructura a gran escala del universo, y a contrastar los datos observacionales con los modelos teóricos elaborados, casi al mismo tiempo que tales resultados observacionales resultaban disponibles.

Ahora, en la década de los noventa, disponemos ya de un conjunto de datos observacionales importantes. No tenemos ahora la premura de un tratamiento inmediato de los mismos para esbozar unos primeros apuntes acerca de las ideas básicas de la estructura a gran escala del universo. Lo que procede ahora es un tratamiento mas detallado y cuidadoso de los



mismos, con el fin de que las conclusiones extraídas puedan ser más sólidas y consistentes.

El presente trabajo obedece de hecho a ese intento de analizar los datos de modo más profundo, en el marco de modelos teóricos más realistas. No se pretende aquí estudiar el origen y evolución de las estructuras que hoy constituyen el universo observable. Ni siquiera se trata de entender la dinámica particular de algunas de tales estructuras. Nuestro objetivo es estudiar simplemente cómo deben observarse dichas estructuras, es decir, qué factores hay que tener en cuenta en la observación de las estructuras a gran escala para la correcta interpretación de las mismas.

El objetivo puede parecer poco ambicioso comparado con los estudios sobre los posibles orígenes de las diferentes alternativas de estructuración a gran escala que hoy se consideran posibles, pero en todo caso la resolución del problema de la mera observación parece ser previa a cualquier otro tipo de estudios que pretendan ir más allá en el análisis de dichas estructuras, y no siempre ha sido adecuadamente considerada esta cuestión en estudios ya realizados.

Si no se corrigen adecuadamente los datos observacionales, compilados en los catálogos de galaxias ya disponibles, las conclusiones a las que puede llegarse a través de ellos pueden ser completamente erróneas, o al menos no del todo correctas. El ejemplo más claro de cómo el análisis y las correcciones de los datos observacionales repercute sobre los resultados de dicha observación lo tenemos en la propia determinación de la constante de Hubble,  $H_0$ , fundamental en toda la cosmología. En el trabajo original de Hubble, éste encontraba un valor de  $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  para dicha constante, confirmado por el propio Hubble y por Humason en trabajos posteriores. En los años 50, mediante una recalibración, introducida por Baade, de las variables cefeidas, utilizadas como indicadores de distancia, se redujo el valor de  $H_0$  a  $260 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Posteriormente, los continuadores de Hubble, Humason, Mayal y Sandage, redujeron de nuevo el valor de  $H_0$  a  $180 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  a partir de nuevos datos observacionales. A principios de los 60, Sandage, revisando los criterios de distancia, dio a  $H_0$  el valor  $75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , valor que posteriormente él mismo rectificó a  $98 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Se terminaron asignando, de manera irreconciliable, dos valores a la constante  $H_0$ : por una lado, Sandage, Tamman y otros asignaron a  $H_0$  el valor  $\approx 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , mientras por otro lado se asignaba el valor 90-100  $\text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  a dicha constante. Aunque la discrepancia numérica no es muy

importante (un factor 2), el problema esencial es que si se analizan todos las determinaciones observacionales de  $H_0$ , la distribución resultante es claramente bimodal, lo que dificulta la asignación de un valor promedio e incluso pone en duda la propia existencia de una única constante, o al menos la capacidad de las observaciones para determinar un valor concreto para dicha constante. Recientemente, R. B. Tully (1988) ha vuelto sobre esta cuestión sugiriendo la posibilidad de que la actual incertidumbre en la determinación del valor de la constante de Hubble ( $H_0$ ) se deba en gran parte a la necesidad de corregir adecuadamente los datos observacionales utilizados para la determinación genérica de  $H_0$  a partir de diferentes muestras. Según Tully, la incertidumbre sobre el valor de  $H_0$  se debe a las grandes perturbaciones locales en los movimientos galácticos producidos por el exceso de masa en la región Coma-Sculptor. Si se prescinde de esta región problemática y se analiza el resto de los datos se encuentra un valor  $85-95 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , de modo estadísticamente consistente. Otros resultados aún más recientes, proporcionan de nuevo resultados contradictorios, pero el problema de las distorsiones observacionales sigue estando en el fondo de la cuestión. Los resultados observacionales sugieren claramente que las observaciones están mucho más fuertemente afectadas por la propagación de la luz en un medio inhomogéneo de lo que se suponía.

Las distorsiones en la observación de fuentes luminosas son esencialmente de tres tipos: alteración de la distancia radial, variación de la dirección angular en la que la fuente es efectivamente observada, y alteración de la luminosidad aparente de la fuente. La acumulación de los efectos de todas las inhomogeneidades existentes a lo largo de las trayectorias luminosas, desde las fuentes hasta nuestra posición, nos hace observar una "imagen alterada" de la realidad. Es sabido que además de la materia luminosa, posiblemente existe en el universo una notable cantidad de materia "oscura", que no es directamente observable. Para tal tipo de materia, estos efectos observacionales no son aplicables, pero como la observación de materia oscura se hace indirectamente a través de la observación de fuentes luminosas, es preciso comprender adecuadamente la observación de las fuentes luminosas antes de pretender entender la distribución y dinámica de la materia oscura que no vemos.

En este contexto, esta memoria trata de modelizar las distorsiones observacionales en el análisis de catálogos de galaxias, como compilaciones de referencia, básicas en el estudio de la estructura a gran escala del



universo. El contenido de esta memoria se ha sintetizado en 6 Capítulos, con el fin de agrupar al máximo la información, dejando como apéndices algunos aspectos concretos.

El Capítulo 1 representa un repaso de algunos aspectos teóricos y observacionales relacionados con la estructura a gran escala del universo. Algunos temas controvertidos relacionados con las distorsiones observacionales discutidas en esta memoria son planteados en el Capítulo 1, a modo de resumen.

En el Capítulo 2 se plantea la cuestión de la modelización de un universo inhomogéneo. Si bien el modelo de universo considerado es el modelo de Einstein-de Sitter ( $\Omega=1$ ), y no se plantean otras alternativas, sí se consideran diferentes alternativas a la hora de "perturbar" el modelo de Einstein-de Sitter con el fin de introducir las inhomogeneidades. Se discuten dos posibilidades: el modelo de Sach-Wolfe y la aproximación potencial, con sus analogías y diferencias, aunque resulten de hecho formalmente equivalentes. La modelización del universo inhomogéneo constituye la base para todo el desarrollo posterior, por lo que se le dedica especial atención a este problema.

En el Capítulo 3 se plantea, de modo absolutamente general, el problema de la determinación de coordenadas reales de posición de una galaxia a partir de las observaciones de redshift y posición angular. Se analiza por separado la determinación de coordenadas comóviles en el gauge de Sach-Wolfe y la determinación de las coordenadas de la aproximación potencial, siempre a partir de los observables redshift y posición angular. Se discuten las ventajas e inconvenientes de ambas descripciones, y se recupera la relación entre ambas coordenadas hallada en el Capítulo 2.

En el Capítulo 4 se analizan las distorsiones al interpretar las observaciones en coordenadas redshift-ángulo, derivadas de la relación establecida entre las coordenadas reales y los observables redshift-ángulo en el Capítulo 3. Particularmente interesante es el estudio de la distorsión en el contraste de densidad aparente, mediante simulaciones numéricas 2D y 3D, así como las distorsiones en la densidad espectral  $P(k)$  observada. Tales distorsiones observacionales en la densidad espectral pueden alterar notablemente la caracterización de la estructura a gran escala del universo, derivada a partir de  $P(k)$ . Se discute el problema de la determinación del campo de velocidades peculiares, tanto en el régimen lineal como en el

régimen no lineal, analizando el problema de la "convergencia del dipolo" al determinar la velocidad peculiar en un punto sumando las contribuciones de la materia en su entorno. Se discute la relación que existe entre el tamaño y profundidad de la muestra y la escala de tamaños de las estructuras en cuanto a las distorsiones presentes en la muestra, así como la importancia de la posición particular del observador en la distorsión de las observaciones. Se considera el problema de la luminosidad aparente, y los efectos de corte introducidos en muestras de luminosidad aparente límite.

En el Capítulo 5 se analizan con cierto detalle algunos casos particulares, que ilustran de modo concreto los efectos de las distorsiones observacionales antes discutidas. Se estudia el caso de simetría esférica, considerando tanto el caso de contraste de densidad positivo (cúmulos de galaxias) como el de contraste negativo (vacíos). También se considera el caso particular de una onda plana, como modelo genérico de perturbación. Se aprovecha la representatividad del caso de la onda plana para caracterizar de modo genérico algunos efectos, de un modo simple que ayude a entenderlos.

Por último, en el Capítulo 6 se plantea el análisis y corrección de catálogos de galaxias. Se discuten las correcciones necesarias para interpretar un catálogo de galaxias, y se introducen métodos originales para llevar a cabo algunas de tales correcciones, derivados del análisis realizado en los Capítulos 4 y 5. También se discuten las distorsiones observacionales en el análisis estadístico, en particular en las funciones de correlación radial y bidimensional (redshift-ángulo).

Algunos apéndices recogen información adicional, incluyendo algunos datos que se hallan dispersos en la literatura, o incluso no directamente publicados, relativos a catálogos de galaxias y tratamiento de los datos contenidos en dichos catálogos, particularmente el catálogo del CfA.

La disponibilidad de datos observacionales compilados en varios catálogos de galaxias, y en particular de la última versión actualmente distribuida del catálogo del CfA (1990), ha permitido esbozar la aplicación de correcciones en datos reales y el análisis estadístico de los mismos. Desgraciadamente, el no poder contar con los datos más recientes del CfA, ya que tales datos se hallan aún en el dominio de uso restringido, ha imposibilitado un análisis más completo, que necesariamente se ha de dejar para un trabajo posterior.



A excepción del Capítulo 1, de carácter introductorio, todos los restantes capítulos recogen aportaciones originales en esta memoria, algunas de las cuales han sido ya publicadas y otras se hallan en proceso de publicación. En cuanto a las figuras que ilustran esta memoria, todas ellas son originales, excepto aquellas que aparecen en el Capítulo 1, que han sido expresamente tomadas de la literatura por ser significativas de algunos de los efectos y distorsiones observacionales discutidos en esta memoria y resultan necesarias para una mejor comprensión de los mismos. De hecho, algunas de tales figuras han de ser comparadas con las análogas presentadas en capítulos posteriores a la hora de discutir cada uno de los efectos.

Como en todo trabajo de este tipo, son numerosas las cuestiones pendientes que han quedado abiertas y serán objeto de profundización en estudios posteriores. En primer lugar, modelos de universo inhomogéneo más realistas han de ser desarrollados, y ya hay trabajo iniciado al efecto, siguiendo el esquema proporcionado por la aproximación potencial, como perturbación al modelo de universo de Einstein-de Sitter. Sería también interesante analizar cómo se ven alterados estos efectos en el caso de modelos de universo con curvatura. Cabe citar también en este sentido el análisis más detallado de las luminosidades y distorsiones observacionales en las luminosidades aparentes de galaxias, así como las repercusiones de estos efectos en la estimación de la distancia-luz, y las distorsiones en la relación distancia luz-redshift.

Si bien el llevar hasta sus últimas consecuencias las repercusiones de la existencia de inhomogeneidades en la propagación de la luz permitiría especular sobre los límites en los que se puede "hacer cosmología" cuando realmente todo lo que vemos puede ser una imagen sesgada de la realidad, lo que sí es evidente es que un buen conocimiento de los fenómenos que pueden afectar de algún modo a las observaciones resulta imprescindible para interpretar correctamente los resultados. Es, pues, nuestro objetivo el modelizar y comprender tales distorsiones observacionales.

# Capítulo 1

## ESTRUCTURA A GRAN ESCALA DEL UNIVERSO

---

El conocimiento de la estructura a gran escala del universo ha sido un objetivo perseguido desde hace mucho tiempo, pero la posibilidad de observar realmente dicha estructura a gran escala ha supuesto el tener que superar dificultades de todo tipo. Gran parte de tales dificultades han sido de tipo tecnológico. Sin duda, nuestra capacidad actual ha venido condicionada por los nuevos dispositivos capaces de medir el redshift en cuestión de minutos cuanto antes se necesitaban largas horas de observación. La capacidad de observación desde el espacio, salvando el obstáculo de la atmósfera, está abriendo nuevas posibilidades. Pero el conocimiento de la estructura a gran escala del universo supone algo más que avances tecnológicos. Las mayores dificultades provienen de la falta de un marco teórico suficientemente establecido y completo que permita analizar convenientemente las observaciones y extraer de ellas resultados concluyentes.

Dejando a un lado los aspectos ligados a los grandes debates de la cosmología observacional (como la discusión de los valores de los parámetros cosmológicos  $H_0$ ,  $q_0$ ,  $\Lambda$ , o el origen cosmológico del desplazamiento hacia el rojo), por lo que respecta al objetivo de esta memoria las mayores dificultades se centran en entender adecuadamente como encajar los resultados observacionales —que indican que el universo es altamente inhomogéneo, con estructuras de tamaño comparable al tamaño del universo observado— con los modelos teóricos, utilizados incluso para analizar dichas observaciones, que se basan fundamentalmente en hipótesis simplificadoras tales como la isotropía y homogeneidad del universo a gran escala.

Si bien el problema aquí está en especificar qué es lo que vamos a entender por "gran escala", parece evidente que, al menos hasta donde alcanzan las observaciones actuales (y hay muestreos bastante profundos de más de 1000 Mpc (Broadhurst *et al.*, 1990) la hipótesis de homogeneidad para el universo debería revisarse. Al margen de la posible existencia de materia oscura, dominante incluso según algunos modelos, distribuida de tal modo que compense la inhomogeneidad de la materia luminosa dando como resultado una homogeneidad neta para el universo, al menos en lo que respecta a la distribución de materia luminosa los resultados parecen concluyentes.

Pero antes de analizar cómo describir dicho universo inhomogéneo y como analizar las observaciones de fuentes luminosas en un universo inhomogéneo, vamos a repasar brevemente el estado actual de las observaciones en cosmología, así como los sesgos observacionales por los que éstas se ven afectadas, y los modelos cosmológicos que tratan de explicar dichas observaciones.

### 1.1 MODELOS COSMOLOGICOS. EL MODELO DE EINSTEIN-DE SITTER

La selección de un modelo cosmológico (métrica espacio-temporal) adecuado es de una gran importancia, pues condiciona todo el desarrollo posterior.

El marco teórico generalmente admitido para describir un modelo de universo viene dado por la Relatividad General. El espacio-tiempo es considerado como una variedad riemanniana, cuyo invariante fundamental (métrica) viene dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad [1.1]$$

donde el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  representa los potenciales de la gravitación. Las ecuaciones de Einstein ligán el contenido material con las propiedades geométricas del espacio-tiempo, del modo

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda = \kappa T_{\mu\nu} \quad [1.2]$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci de la variedad,  $R$  la curvatura escalar y  $\Lambda$  la llamada "constante cosmológica".  $\kappa$  es una constante fijada por compatibilidad con la teoría newtoniana.

La forma que suele adoptarse en cosmología para el tensor energía-impulso del "fluido cosmológico" suele ser en general la de un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad [1.3]$$

donde  $\rho$  es la densidad en reposo de la partícula del fluido,  $c$  es la velocidad de la luz,  $p$  la presión y  $u^\mu$  la cuadrivelocidad del fluido, dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad [1.4]$$

Cualquier solución de las ecuaciones de Einstein viene determinada dando una expresión para el tensor energía-impulso  $T^{\mu\nu}$  y, generalmente, eligiendo una forma (coordenadas o simetría) para la métrica espacio-temporal  $g_{\mu\nu}$ . Los modelos cosmológicos tradicionales parten de la consideración de métricas del tipo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \quad [1.5]$$

donde  $R(t)$  es el llamado "factor de escala" y  $k$  una constante que determina la curvatura espacial ( $k=-1,0,1$ )

Las ecuaciones de Einstein vienen dadas en este caso, explícitamente, por las siguientes relaciones

$$8\pi\rho = -\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} + \dot{1} \quad [1.6]$$

$$\frac{8}{3}\pi\rho = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} \quad [1.7]$$

$$\rho R^3 = \text{cte} \quad [1.8]$$

donde  $\dot{\phantom{x}} \equiv \frac{d}{dt}$

Para caracterizar más fácilmente los distintos modelos cosmológicos, se introducen una serie de parámetros, los llamados "parámetros cosmológicos", tales como:

a/ La constante cosmológica  $\Lambda$

Introducida originalmente por Einstein como "el gran error de su vida", la constante cosmológica juega actualmente un papel crucial en las modernas teorías cosmológicas. Se trata esencialmente de añadir una constante al tensor  $G_{\mu\nu}$  en las ecuaciones de campo. Tradicionalmente, y de acuerdo con las observaciones, dicha constante se ha considerado nula. Un valor pequeño, pero no nulo, tendría notables repercusiones cosmológicas.

b/ Parámetro de curvatura  $k$ 

Este parámetro (cuyo valor puede ser 0,1 ó -1) se introduce en la métrica como una referencia del carácter de la curvatura en el universo (plano, cerrado o abierto)

c/ Parámetro de densidad  $\Omega_0$ 

Definido del modo

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad [1.9]$$

donde  $\rho_c$  representa la llamada "densidad crítica del universo", dada por

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} \quad [1.10]$$

que representa el valor límite que separa un universo abierto de un universo cerrado.

d/ Parámetro de presión  $\epsilon$ 

Definido del modo  $\epsilon = (p/\rho)$ , da cuenta de la influencia de la presión del fluido cosmológico considerado como medio de fondo. Generalmente este parámetro suele considerarse nulo ( $\epsilon = 0$ ).

e/ La constante de Hubble  $H_0$ 

Definida del modo

$$H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0} \quad [1.11]$$

representa el factor de escala en la velocidad de expansión del universo.

f/ Parámetro de deceleración  $q_0$ 

Definido del modo

$$q_0 = \frac{\ddot{R}_0 R_0}{\dot{R}_0^2} \quad [1.12]$$

representa la aceleración en la expansión del universo.

Ambos parámetros  $H_0$  y  $q_0$  aparecen cuando se explicita la relación entre la distancia y el redshift. En efecto, desarrollando en serie el factor de escala  $R(t)$  alrededor del valor  $R_0$  se tiene

$$R(t) = R_0 \left( 1 + \frac{\dot{R}}{R_0} (t - t_0) + \frac{\ddot{R}_0}{2R_0} (t - t_0)^2 + \dots \right) \quad [1.13]$$

Si bien en Relatividad General no hay una única definición de distancia, la más utilizada es la llamada distancia de luminosidad, definida del modo

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi I}} \quad [1.14]$$

donde L es la luminosidad intrínseca de la fuente y I su luminosidad aparente (observada). Esta distancia puede también expresarse del modo

$$d_L = R_0^2 \frac{r_1}{R_1} = r_1 R_0 (1+z) \quad [1.15]$$

En función de los parámetros cosmológicos  $H_0$  y  $q_0$ , la distancia de luminosidad resulta de este modo

$$d_L = \frac{1}{H_0} \left( z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right) \quad [1.16]$$

g/ Parámetro de tiempo cosmológico T

Este parámetro viene definido simplemente del modo

$$T = H_0 t \quad [1.17]$$

donde t es el tiempo transcurrido desde el origen del universo (tiempo de expansión).

Para  $p=0$ , entonces resulta simplemente

$$T = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{2} - q\right)y^2 + \frac{\Omega}{y} + q + 1 - \frac{3}{2}\Omega}} \quad [1.18]$$

Además, en este caso  $p=0$  se tiene que no todos estos parámetros descritos son independientes, y bastan tres de ellos para caracterizar cada uno de los modelos. Algunas relaciones entre tales parámetros (para  $p=0$ ) son

$$\Lambda = -3H^2 q \frac{\Omega}{2} \quad [1.19]$$

$$kc^2 = H^2 R^2 \left( \frac{3}{2}\Omega - q - 1 \right) \quad [1.20]$$

En el caso habitual de considerar  $\Lambda=0$ , entonces resulta

$$q = \frac{\Omega}{2} \quad k = \frac{H^2 R^2}{c^2} (2q - 1) \quad [1.21]$$

con lo que quedan solamente dos parámetros independientes, que generalmente suelen elegirse  $H_0$  y  $q_0$ . El universo será en este caso



cerrado o abierto según sea  $q_0$  mayor que  $1/2$  ó menor (o igual) que  $1/2$ , respectivamente.

El conjunto de 6 parámetros, o funciones en su caso, ( $\Lambda$ ,  $k$ ,  $\Omega_0$ ,  $\epsilon$ ,  $H_0$ ,  $q_0$ ) caracteriza un modelo cosmológico, al menos en su formulación tradicional. Otros modelos, no standard, utilizan más parámetros en la caracterización, pero no es el objetivo de esta memoria el discutir modelos cosmológicos homogéneos alternativos al standard, sino la introducción de inhomogeneidades en la distribución de materia en un modelo homogéneo standard.

### El modelo de universo de Einstein-De Sitter

Los modelos cosmológicos tradicionalmente considerados están basados en las métricas de Robertson-Walker (modelos de Friedman). Recientemente, sin embargo, es bastante común la consideración del modelo de universo de Einstein-deSitter, sobre todo por consideraciones teóricas relacionadas fundamentalmente con la etapa inflacionaria.

La consideración de la métrica de Einstein-de Sitter ( $\Omega=1$ ) para describir el universo está basada no sólo en consideraciones teóricas (modelo inflacionario), sino también en evidencias observacionales. Según Hoffman (1989), parece posible reconciliar el valor  $\Omega=1$  con las observaciones disponibles mediante una correcta corrección e interpretación de tales observaciones. De hecho, de acuerdo con el profundo análisis realizado por Rowan-Robinson *et al.* (1990) a partir de una muestra de redshift de galaxias del satélite IRAS, la corrección de efectos de velocidades peculiares locales en un entorno de  $50 h^{-1}$  Mpc conduce a una estimación de  $\Omega_0 = 0,7^{+0,3}_{-0,2}$ , suponiendo que las galaxias del

IRAS describen bien la distribución de masa total.

Sin entrar a discutir en detalle la adecuación de la métrica de Einstein-De Sitter para describir el universo, vamos a adoptar tal modelo como universo de fondo sobre el que discutir la introducción de inhomogeneidades en la distribución de materia.

La métrica de Einstein-de Sitter pertenece a aquellas que representan un espacio de curvatura constante, localmente caracterizados por la condición

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{12} R (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) \quad [1.22]$$

o equivalentemente

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \quad [1.23]$$

de modo que el tensor de Riemann está determinado solamente por la curvatura escalar de Ricci  $R$ . Contrayendo las identidades de Bianchi se tiene además que  $R$  es constante a lo largo de todo el espacio-tiempo. Este tipo de espacios son homogéneos, y las ecuaciones de Einstein son en este caso

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad [1.24]$$

El espacio de Einstein-de Sitter tiene una topología  $R^1 \times S^3$ . Al contrario que el espacio de Minkowski, el espacio de Einstein-de Sitter tiene un infinito espacial para líneas temporales y nulas, tanto en el futuro como en el pasado (Hawking y Ellis, 1973). Esta diferencia corresponde a la existencia en el espacio de Einstein-de Sitter tanto de horizontes de partículas como de sucesos para familias de geodésicas de observadores. Por otro lado, en el espacio de Minkowski, el cono de luz limitante de cualquier observador geodésico incluye la totalidad del espacio-tiempo, de tal modo que no existen sucesos que un observador geodésico no sea capaz de ver, mientras en el espacio de Einstein-de Sitter existe una separación entre sucesos que serán en algún momento observables, para un observador determinado, y aquellos que nunca serán observables para dicho observador.

La métrica de Einstein-de Sitter representa una solución de las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu} \quad [1.25]$$

(usamos un sistema de unidades en el que  $c=8\pi G=1$ , y seguimos el convenio de emplear índices griegos en el rango 0-4 (4-vectores), e índices latinos en el rango 1-3 (3-vectores)), con un tensor energía impulso del tipo  $T_{\mu\nu} = \rho(t) u_\mu u_\nu$ , es decir, un universo compuesto de materia en polvo (sin presión,  $p=0$ ), de curvatura espacial nula ( $k=0$ ).

En coordenadas polares esféricas, la métrica de Einstein-de Sitter puede escribirse del modo

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right) \quad [1.26]$$

donde

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad [1.27]$$

La constante  $t_0$  (edad del universo) viene dada por  $t_0 = \frac{2}{3 H_0}$

(donde  $H = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)$  es el parámetro de Hubble y  $H_0$  es su valor actual).

(El subíndice  $_0$  denota siempre la época actual (tiempo del observador)).

El radio del horizonte en esta métrica de Einstein-De Sitter viene dado por

$$r_H = \frac{2}{a_0 H_0} \quad [1.28]$$

Si normalizamos las unidades de la forma  $a_0 H_0 = 2$ , entonces el radio del horizonte resulta normalizado a la unidad ( $r_H = 1$ ).

Si en lugar de  $t$  empleamos la variable  $\eta$  definida del modo

$$t = \frac{2\eta^3}{3 H_0} \quad [1.29]$$

la métrica resulta

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad [1.30]$$

donde

$$a(\eta) = \frac{2\eta^2}{H_0} \quad [1.31]$$

( $\eta_{\alpha\beta}$  es la métrica de Minkowski (diagonal (-1,1,1,1)))

En el sistema de coordenadas utilizado  $x^\alpha = \{\eta, x^1, x^2, x^3\}$  todas las coordenadas son adimensionales, lo cual facilita la interpretación del significado de las mismas.

Como se trata de un modelo de presión nula ( $p=0$ ), se tiene además en este caso

$$\rho = \frac{3 H_0^2}{\eta^6} \quad [1.32]$$

y como

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1+z}}, \quad [1.33]$$

(donde  $z'$  denota el redshift aparente de una fuente; es decir, el redshift total medido por un observador sin tener en cuenta efectos correctivos)

resulta también

$$H = \frac{1}{a^2(\eta)} \frac{da}{d\eta} = H_0 (1+z')^{3/2} \quad [1.34]$$

$$\rho = \rho_0 (1+z')^3 \quad [1.35]$$

Con la normalización empleada, la coordenada  $\eta$  queda normalizada del modo  $\eta_R \equiv 1$ , con lo cual dicha coordenada temporal queda restringida a un rango  $[0,1]$ , donde el valor 1 corresponde a la época actual. (En la época de la recombinación se tiene  $(1+z'_c) \equiv 10^3$ , de modo que  $\eta_c \equiv 0.03$ )

## 1.2 OBSERVACIONES EN COSMOLOGIA

La historia de la cosmología moderna cabe dividirla en tres periodos bastante diferenciados: una primera fase desde 1929 hasta ~1950, en la cual se realizaron los primeros descubrimientos y se llevaron a cabo los primeros test clásicos, una segunda fase de consolidación desde 1950 hasta ~1980, y una tercera fase, en la cual nos encontramos actualmente, en la que los avances tecnológicos han permitido contar con una cantidad de observaciones sin precedentes en la historia de la cosmología. Durante la última década se han medido miles de redshift de galaxias, lo que ha permitido elaborar mapas bastante completos de la estructura del universo. Por otra parte, observaciones desde satélite (COBE, HST, IRAS, IUE, etc.) están permitiendo observaciones antes impensables.

Pero toda esta acumulación de resultados observacionales no han permitido aún cerrar muchos de los problemas cosmológicos abiertos desde los años veinte, generalmente debido a la notable repercusión de las distorsiones observacionales.

### 1.2.1 PRINCIPALES TEST COSMOLOGICOS

Entre los test desarrollados en cosmología para analizar la estructura a gran escala del universo y su evolución, cabe destacar los siguientes:

#### a/ La distribución numérica $N(m)$

Este test fue ideado como un ataque directo de la geometría experimental siguiendo el método de Gauss para las superficies. En un espacio curvo, el perímetro de un pequeño círculo de radio  $d$  (longitud de la

circunferencia) sobre la superficie de una esfera de radio R no es  $2\pi d$ , sino que viene dado por

$$L(d) = 2\pi d \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{d^2}{R^2} + \dots \right) \quad [1.36]$$

lo que permite determinar el radio de curvatura R midiendo L y d a lo largo de la superficie de la esfera.

De igual modo, el área de un casquete esférico de radio d sobre la superficie de una esfera de radio R no es  $\pi d^2$ , como en el espacio euclídeo, sino que viene dado por

$$A(d) = \pi d^2 \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{d^2}{R^2} + \dots \right) \quad [1.37]$$

lo que permite igualmente determinar de modo experimental R midiendo las desviaciones del área medida respecto al valor euclídeo  $\pi d^2$ .

Si el espacio presenta una curvatura gaussiana tridimensional, el volumen hasta una "distancia" d adecuadamente definida varía como

$$V(r) = \frac{4\pi d^3}{3} \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{d^2}{R^2} + \dots \right) \quad [1.38]$$

lo que proporcionaría un test cosmológico si el volumen propio pudiese ser medido. Hubble propuso contar el número de galaxias como una alternativa a esto, usando las magnitudes aparentes como indicadores de distancia y determinando el número N(m) de galaxias más brillantes que una magnitud dada m. Después de corregir las magnitudes aparentes de los efectos de redshift, Hubble consideró que la distancia correcta a usar era la distancia de luminosidad, basada en la relación

$$l \approx \frac{L}{4\pi d^2 (1+z)^2} \quad [1.39]$$

si el redshift z era debido a auténtica expansión, o bien la relación

$$l \approx \frac{L}{4\pi d^2 (1+z)} \quad [1.40]$$

si el redshift z no era debido a la expansión. L y l son la luminosidad absoluta y aparente, respectivamente, para un ancho de banda correspondiente a una cierta longitud de onda, corrigiendo la luminosidad aparente l del término selectivo K debido al redshift del espectro a través del ancho de banda.

Puede demostrarse que, para cualquier distribución de luminosidades absolutas  $\Phi(L)$ , la integración de  $\Phi(L)$  para el caso euclídeo de  $R = \infty$ , da como resultado  $N(m) \approx 10^{0.6m}$ , para todo m. La curvatura espacial lo que

hace es aplanar la curva  $N(m)$ , de modo que la ley de Hubble puede expresarse del modo

$$\log N(m) = \text{cte} + 0.6 (m - \Delta m) \quad [1.41]$$

donde  $\Delta m$  es una función de la distancia (redshift) que depende de la curvatura espacial  $R$ . El test radica, pues, en determinar la función  $\Delta m = f(z)$ , y a partir de ella estimar la curvatura espacial correspondiente.

La conclusión de Hubble fue que la desviación de la curva  $\log N(m)$  observada, con respecto a la pendiente teórica 0.6, era tan grande que, o bien  $R$  resultaba muy pequeño, con lo que resultaba evidente la curvatura del espacio, o bien que el redshift no era debido a la expansión del universo.

El problema de Hubble era que la teoría de relación distancia-redshift no había sido claramente establecida para cualquier curvatura espacial, y las fórmulas que usaba Hubble eran de hecho incorrectas para un análisis de ese tipo. Hubble suponía que la distancia  $d$  era simplemente proporcional al redshift para todas las geometrías. Sin embargo, la distancia correcta que se debería utilizar (Mattig, 1959; Sandage, 1961) es

$$r = \frac{c}{R_0 H_0 q_0^2 (1+z)} \left( z q_0 + (q_0 - 1) \left( \sqrt{1 + 2z q_0 - 1} \right) \right) \quad [1.42]$$

que evidentemente difiere de la distancia usada tradicionalmente

$$d = \frac{c z}{R_0 H_0} \quad [1.43]$$

La expresión correcta para el volumen contenido dentro de la coordenada comóvil  $r$  es

$$V(r) = \frac{4 \pi R^3 r^3}{3} \left( \frac{3}{2} \frac{\sin^{-1} r}{r^3} - \frac{3}{2} r^2 \sqrt{1 - r^2} \right) \quad [1.44]$$

que se puede poner en términos del redshift  $z$ , y desarrollar en serie del modo

$$V(z) = \frac{4 \pi z^3}{3 H_0^3} \left( 1 - \frac{3}{2} (1 - q_0) z + \dots \right) \quad [1.45]$$

Esta relación puede ponerse en función de la luminosidad aparente para determinar el valor teórico de  $N(m)$  para diferentes valores de  $q_0$ , como parámetro geométrico intrínseco, relacionado con la velocidad de expansión  $H_0$  y la curvatura espacial  $R_0$  mediante la ley

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = H_0^2 (2q_0 - 1) \quad [1.46]$$

El resultado es que  $N(m)$  es independiente de  $q_0$  a primer orden en  $z$ , y la dependencia aparece sólo en los términos  $z^2$ . Luego sólo a muy alto redshift, el efecto de la curvatura espacial es notable, con el que el test  $N(m)$  es prácticamente insensible al valor de  $q_0$ .

Por el contrario,  $N(z)$  sí es sensible al valor de  $q_0$  a primer orden en el término correctivo, por lo que debe usarse  $N(z)$  como test para la determinación de  $q_0$ . El test  $N(m)$  se utiliza actualmente a efectos de estudio de la evolución de la luminosidad de las galaxias, en lugar de un test de geometría intrínseca.

#### b/ La función $m(z)$ o el diagrama de Hubble

Este test es el más famoso, pues la primera formulación de Hubble de la relación lineal redshift-distancia data de 1929. Utilizando observaciones de las galaxias de cúmulos más brillantes, tales datos parecían corresponder a una relación del tipo  $m_c \propto 5 \log z$ , siendo  $m_c$  la magnitud aparente corregida solamente por el factor  $(1+z)$ , además de la parte del término  $K$  que da cuenta del corrimiento del espectro no plano de las galaxias por el paso de banda estacionario del detector (olvidando el término  $(1+z)$  de dilatación del paso de banda debido al redshift). Hubble interpretó los datos como si  $\log z \propto 0.2 m_c$  correspondiese a la verdadera relación lineal velocidad-distancia, y que las desviaciones respecto a esta ley indicaban un cambio de  $z$  con el tiempo (aceleración o deceleración). Pero la suposición de Hubble era incorrecta.

La expresión correcta a todos los órdenes en  $z$ , en el caso de expansión, para la distancia de luminosidad viene dada por un desarrollo en serie del tipo

$$R_0 r (1+z) = \frac{cz}{H_0} \left( 1 - \frac{z}{2} (1 - q_0) + O(z^2) \right) \quad [1.47]$$

Este difiere de la suposición de Hubble excepto cuando  $q_0=1$ , un caso altamente decelerado.

El primero en llamar la atención sobre esta diferencia fue Matting (1958), derivando la formulación exacta de la relación  $m(z)$  del modo

$$m_{bol} = 5 \log \frac{1}{q_0^2} \left\{ z q_0 + (q_0 - 1) \left[ \sqrt{1 + 2 z q_0} - 1 \right] \right\} - 5 \log H_0 + M \quad [1.48]$$

cuyo desarrollo en serie es

$$m = cte + 5 \log z + 1.086 (1 - q_0) z + \dots \quad [1.49]$$

Es importante destacar que incluso en el caso de aceleración nula ( $q_0 = 0$ ), la relación esperada para  $m(z)$  es  $5 \log z + 1.086z$ , en lugar de simplemente  $5 \log z$ , como usualmente se considera.

Actualmente, el principal problema que presenta la aplicación de este test es el desconocimiento del cambio evolutivo de  $M$  (magnitud absoluta) con el tiempo, debido esencialmente al proceso evolutivo de la población estelar de las galaxias.

De acuerdo con las observaciones, la relación velocidad-distancia se ajusta bien a una relación lineal hasta  $z \approx 0.5$ , y las desviaciones respecto a dicha ley para  $z > 0.5$  pueden interpretarse de tres modos: (a) un valor de  $q_0$  en el rango  $0.5 < q_0 < 2$ , (b) verdadera desviación respecto a la ley lineal, y (c) efectos combinados de  $q_0 \neq 1$  y evolución con el tiempo de la luminosidad.

Estudios recientes intentan determinar la universalidad de dicha relación, y los efectos que sobre el flujo de Hubble tienen grandes perturbaciones, particularmente cuando se detectan grandes flujos sistemáticos como en el caso del Gran Atractor. Aunque la expansión parece ser universal, este tipo de perturbaciones locales han de ser tenidas en cuenta a la hora de calcular los parámetros del flujo cosmológico de fondo. En cualquier caso, las desviaciones locales del flujo de Hubble no parecen superar el 15%.

### c/ El test diámetro angular-redshift

Este test no fue propuesto por Hubble, sino por Hoyle (1959). Se basa en la dependencia que  $\Theta(z)$  (el diámetro angular como una función del redshift) tiene con  $q_0$ , o en la análoga dependencia de  $\Theta(m)$  con  $q_0$ , en función de la relación  $m(z, q_0)$  antes establecida. El test proporciona además otra posibilidad de determinar  $q_0$  si  $\Theta$  no evolucionase con el tiempo. La relación  $\Theta(z)$  (isofotal), para las principales galaxias de los cúmulos, varía aproximadamente como  $z^{-1}$ .

Es éste un test muy robusto de la linealidad de la relación velocidad-distancia, pero sería equivalente al test del diagrama de Hubble  $m(z)$  si el brillo superficial fuera estrictamente constante para las principales galaxias de los cúmulos.

El estado actual del test de diámetro angular no indica evidencias de la esperada desviación hacia valores más altos de  $\Theta$  para valores grandes de  $z$ . Esto puede ser interpretado como un cambio, debido a evolución temporal,



en el tamaño métrico, o como una prueba de que la teoría está equivocada. Este punto es crítico, pues está ligado al carácter circular del análisis y justificación de cada test (es preciso un test que no sea contradictorio con sus propios argumentos, o se termina cayendo en un ciclo en el que "la pescadilla se muerde la cola").

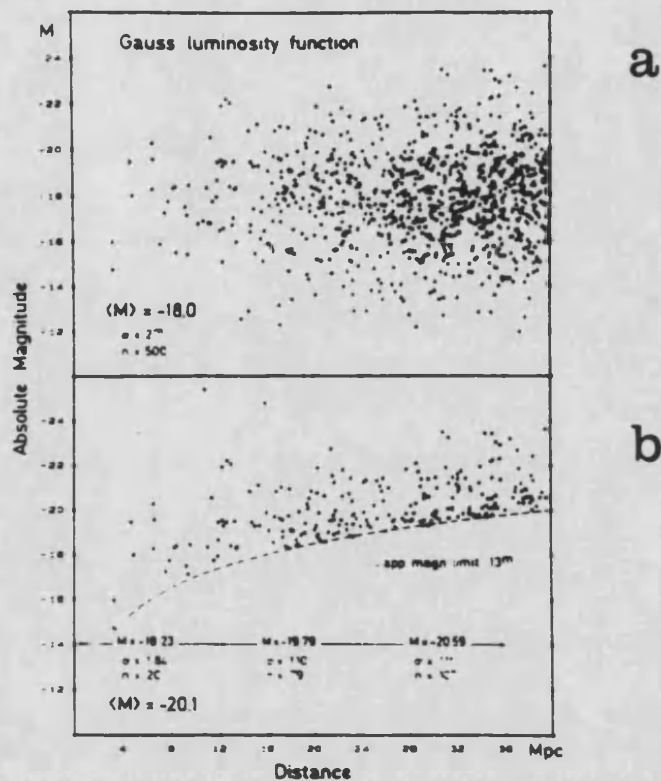
En cualquier caso, nunca es posible aplicar un test *usando los datos tal como son directamente medidos* (Sandage, 1987). Las discrepancias se suponen siempre debidas a efectos de evolución de las variables medidas (en particular la luminosidad), lo que hace imposible extraer conclusiones claras de ninguno de tales tests. La única conclusión es entonces la evidencia de la evolución cósmica.

La única forma de salvar esta inconsistencia es utilizando test compuestos, como el estudio paralelo de la relación tamaño angular-densidad de flujo ( $\Theta(S)$ ) (Swarup, 1975) y la relación contaje numérico-tamaño angular ( $N(\Theta)$ ) (Kapahi, 1975), para radiofuentes con un amplio rango de densidad de flujo, pero también en este caso los efectos de evolución son notablemente importantes.

El test  $\Theta(z)$  fue aplicado inicialmente a fuentes de radio, mostrando un resultado negativo. Pero en este caso hay un efecto de selección muy fuerte causado por el carácter de flujo limitado de la muestra de radio, lo que indica la gran importancia de los efectos de selección en la observaciones en cosmología.

#### **d/ El test de la escala temporal**

La potencia de este test radica en que no es tan dependiente de los efectos de evolución como los otros tests anteriormente mencionados. El test consiste en comparar la escala temporal derivada de la constante de Hubble ( $H_0^1$ ) con una determinación independiente de la edad del universo a partir de la edad de los cúmulos globulares (en función de la evolución estelar y añadiendo el periodo de gestación inicial) u otros indicadores indirectos. No hay conclusiones claras respecto a este test debido a las discrepancias en los valores de cada uno de los parámetros que entran en juego (en particular  $H_0$ ) y la dificultad de los análisis estimativos.



**Fig. 1.1** Simulación ilustrativa de los efectos de selección observacional derivados del llamado "sesgo de Malmquist": (a) distribución de magnitudes absolutas en una muestra de galaxias de volumen limitado, con  $\langle M \rangle = -18.0$  y  $\sigma(M) = 2$  mag. (b) fracción de las galaxias del total representado en (a) que serían observables en una muestra de magnitud aparente límite (en este ejemplo,  $m = 13$ ). La figura ha sido tomada de Sandage, 1987.

### 1.2.2 EFECTOS DE SELECCION: SESGOS OBSERVACIONALES

La existencia de efectos de selección que sesgan las observaciones en cosmología es bien conocida. La mayoría de tales efectos de selección formulados son variaciones del conocido "sesgo de Malmquist", que establece que si en una muestra de flujo (magnitud aparente) limitado, la luminosidad absoluta promediada de los elementos de la muestra más próximos es más débil que la de los elementos más distantes, con un cambio en el promedio  $\langle M(z) \rangle$  con la distancia, además del consiguiente efecto sobre la dispersión  $\sigma(M)$  y la variación con la distancia de  $\sigma(M)$  en la muestra.

Dicho efecto queda ilustrado claramente en la figura 1.1 (extraída de Sandage (1987)). La gráfica superior (a) muestra la distribución de magnitudes absolutas en una muestra de galaxias en un volumen limitado, tomando como valor medio  $\langle M \rangle = -18.0$  y desviación típica intrínseca  $\sigma(M) = 2$  mag. La gráfica inferior (b) corresponde a las galaxias del total representado en la gráfica (a) que serían observables en una muestra de magnitud aparente límite (en este ejemplo se toma  $m = 13$ ). La magnitud absoluta media a una distancia dada es claramente función de la distancia, luego toda muestra de magnitud aparente límite es una muestra sesgada por este tipo de efectos.

Si bien los resultados de la figura 1.1 proceden de una simulación (Spaenhauer, 1978), el efecto de observar galaxias más luminosas a mayores distancias en una muestra de magnitud aparente límite es detectable claramente en muestras reales de galaxias (Sandage, 1987), como se ha observado en todos los catálogos de galaxias actualmente disponibles.

### 1.2.3 LA ESCALA TEMPORAL. EVOLUCION EN EL *LOOK BACK TIME*

Un factor importante que afecta —o puede afectar, al menos— gran parte de las observaciones en cosmología es la evolución de las estructuras (galaxias en particular) en el tiempo que tarda la luz en llegar a nosotros. La combinación del efecto de distancia de la galaxia a nosotros con el efecto de evolución temporal de la propia galaxia puede producir falsas interpretaciones debido a que en realidad no sólo estamos mirando un objeto a una determinada distancia sino que además estamos mirando hacia atrás en el tiempo (*look back time*).

El famoso principio de Baade "*You must understand the galaxies before you can get the geometry right*" está claramente ligado con este tipo de problemas de evolución temporal, particularmente de las propias galaxias, como elementos básicos (puntos) en cualquier estudio de la estructura a gran escala del universo. Hay que tener en cuenta que si admitimos un origen para el universo, la evolución temporal es algo ineludible<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Existen teorías, cada vez más desacreditadas, que consideran el universo estacionario, sin un origen, y dan una interpretación completamente diferente a los efectos evolutivos,

Volveremos a discutir tales efectos evolutivos al repasar el estado actual en lo relativo a la observación de la estructura a gran escala del universo, en particular en lo relativo al problema del exceso en la densidad numérica de galaxias lejanas. Los procesos de evolución observados no parecen ser de naturaleza intrínseca, sino más bien de naturaleza interactiva entre unas galaxias y otras, particularmente ligados a la formación y dinámica de cúmulos galácticos.

La mayor evidencia de la evolución temporal viene dada por la observación de la densidad superficial de quasars como una función de la magnitud aparente. Parece evidente que es preciso admitir evolución en la densidad y/o en la luminosidad de tales objetos para poder explicar la pendiente de la función número de quasars  $N(m)$  más brillantes que  $B=21$  y el rápido decrecimiento de la pendiente para niveles de menos brillo.

#### 1.2.4 RADIACION DE FONDO

La detección del fondo de radiación de microondas en 1965 constituyó uno de los avances más firmes de la cosmología observacional. Numerosas observaciones desde la tierra corroboraron tal detección y matizaron aspectos de sus propiedades. Pero ha sido la observación de tal radiación de fondo desde el espacio, mediante satélites artificiales, lo que ha posibilitado una exploración más sistemática, rigurosa y con menos sesgos observacionales, gracias sobre todo a la eliminación del obstáculo de la atmósfera.

Los resultados proporcionados por el satélite COBE son bien conocidos. El primero de ellos fue la casi perfecta correspondencia del fondo de microondas con el espectro de radiación de un cuerpo negro, con una coincidencia realmente asombrosa. El segundo descubrimiento de COBE ha sido la primera detección (mediante evidencia en el fondo de radiación) de las inhomogeneidades primordiales que dieron lugar a la formación de la estructura a gran escala del universo hoy observada (Smoot *et al.*, 1992).

La detección de anisotropías en el fondo de radiación de microondas ha venido a consolidar el esquema cosmológico clásico, basado en la expansión

---

pero tales teorías han quedado prácticamente descartadas por las más recientes observaciones del fondo de radiación de microondas.

a partir de una explosión inicial. Tales anisotropías, predichas por todos los modelos de formación de estructura a gran escala (Holtzman, 1989) son necesarias para poder explicar la estructuración de galaxias hoy observada, pero, además, las propias estructuras pueden dar lugar a distorsiones observacionales en el estudio actual de las anisotropías primordiales.

Además, estos resultados recientes proporcionados por COBE son aún un tanto prematuros, y han de interpretarse con cuidado, particularmente hasta que dispongamos de las conclusiones definitivas tras el análisis completo de los datos, y la contrastación de los datos proporcionados por los diferentes detectores complementarios a bordo de COBE (DMR y DIRBE).

Un aspecto interesante a destacar en la observación del fondo de radiación de microondas es la clara anisotropía dipolar detectada ( $\Delta T/T \approx 10^{-3}$ ). Más que un efecto propio del fondo de radiación, dicho efecto ha sido interpretado como debido al movimiento propio de nuestra galaxia (Grupo Local) con respecto al fondo comóvil.

### 1.2.5 MOVIMIENTOS A GRAN ESCALA

La búsqueda de movimientos de nuestro Grupo Local a una escala mayor que la del Supercúmulo Local ha venido motivada fundamentalmente por la observación de la anisotropía dipolar en la radiación de fondo de microondas.

Los resultados obtenidos por Lubin, Epstein & Smoot (1983), utilizando un simple modelo dipolar, y realizando previamente una corrección de movimiento solar del tipo  $300 \sin l \cos b$ <sup>1</sup>, llevan a una velocidad peculiar de  $586 \text{ km s}^{-1}$  hacia la dirección  $\alpha = 17^{\text{h}} 42^{\text{m}} 24^{\text{s}}$ ,  $\delta = -28^{\circ} 55'$ .

De modo independiente, las mediciones de Fixsen, Cheng & Wilkinson (1983) daban como resultado una velocidad peculiar de  $614 \text{ km s}^{-1}$  hacia una dirección ligeramente diferente. La pequeña diferencia entre ambos resultados está dentro de los márgenes de error de ambos valores, y por lo tanto no es significativa.

---

<sup>1</sup> (l,b) son coordenadas galácticas, mientras ( $\alpha, \delta$ ) son coordenadas ecuatoriales (ver Apéndice II).

Dada la incertidumbre en el valor exacto tanto de la magnitud como de la dirección de dicho movimiento a gran escala, suelen tomarse unos valores promediados:  $V = 600 \pm 300 \text{ km s}^{-1}$ ,  $\alpha = 17^{\text{h}} 42^{\text{m}} 24^{\text{s}}$ ,  $\delta = -28^{\circ} 55'$

Utilizando una muestra de galaxias espirales a lo largo de toda la esfera celeste, Staveley-Smith y Davies (1989) han realizado más recientemente una descripción más completa del campo de velocidades peculiares extragaláctico, examinando las contribución a los términos dipolares y cuadrupolares observados en tales movimientos a gran escala.

La principal conclusión a la que llegan Staveley-Smith y Davies (1989), en pleno acuerdo con estudios anteriores, es que un simple atractor no es capaz de explicar todos los movimientos peculiares observados en las galaxias cercanas, pero la región que rodea al cúmulo de Centauro parece ser la contribución dominante a tales movimientos. Dicha región es conocida ya en la literatura como el Gran Atractor (*The Great Attractor*), término introducido por Lynden-Bell *et al.* (1988) para explicar las grandes velocidades peculiares observadas en galaxias elípticas por Dressler *et al.* (1987b).

Un primer efecto a tener en cuenta en la descripción del campo de velocidades peculiares en torno a nuestra galaxia es la caída hacia el cúmulo de Virgo. Según Staveley-Smith y Davies (1989), nuestra velocidad de caída hacia el cúmulo de Virgo es inferior a los valores hallados en estudios anteriores, siendo su valor real  $150 \pm 60 \text{ km s}^{-1}$ . Sin embargo, efectos externamente inducidos proporcionan un retardo adicional del flujo de Hubble en esta dirección, lo que hace que la velocidad peculiar total del Grupo Local relativa a Virgo sea de  $340 \pm 70 \text{ km s}^{-1}$ , en buen acuerdo con el valor de  $225 \pm 81 \text{ km s}^{-1}$  obtenido a partir del método independiente de relación de distancias Virgo-Coma.

Según los resultados obtenidos por Staveley-Smith y Davies (1989), las principales características del campo de velocidades peculiares extragaláctico son bien explicadas por un modelo simple del tipo Virgo + Gran Atractor. El mejor ajuste de los datos da como posición de dicho Gran Atractor

$$\begin{aligned} l_{\text{GA}} &= 295^{\circ} \pm 7^{\circ} \\ b_{\text{GA}} &= 23^{\circ} \pm 7^{\circ} \\ V_{\text{GA}} &= 3420 \pm 383 \text{ km s}^{-1} \end{aligned}$$

siendo la velocidad de caída de nuestro Grupo Local hacia el centro de masas del Gran Atractor de  $543 \pm 68 \text{ km s}^{-1}$ .



La posición del Gran Atractor es, pues, prácticamente idéntica a la posición del supercúmulo de Centauro. Esta posición es bien distinta de la posición del Gran Atractor determinada por Lynden-Bell *et al.* (1988),

$$l_{GA} = 307^\circ \quad b_{GA} = 9^\circ$$

( $20^\circ$  hacia el sur y a una gran distancia del supercúmulo de Hidra-Centauro), pero parece más precisa la determinación de Staveley-Smith y Davies (1989).

En una búsqueda preliminar en otras regiones, Staveley-Smith y Davies (1989) apuntan la posibilidad de existencia de un movimiento significativo de caída de galaxias hacia el extremo norte del supercúmulo de Perseo. De confirmarse este resultado, se tendrían evidencias de tres grandes atractores con notables efectos en el campo de velocidades peculiares: los supercúmulos de Virgo, Centauro y Perseo. No se han detectado efectos de este tipo en ningún otro supercúmulo, al menos por el momento.

Algunos resultados recientes sugieren que la supuesta evidencia de movimientos de deriva a gran escala en la región del cúmulo de Centauro está originada por un gran supercúmulo a una distancia de  $140 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$ , lo que se denomina la "concentración de cúmulos de Shapley" (Lahav *et al.*, 1989; Scaramella *et al.*, 1989; Raychaudhury, 1990). Pero Rowan-Robinson *et al.* (1990) sugieren que dicha estructura no tiene masa suficiente para producir velocidades del orden de  $500 \text{ km s}^{-1}$ , como las observadas en la zona de Centauro. Por otro lado, los cálculos de Rowan-Robinson *et al.* (1990) indican que dicha "concentración de Sapley" contribuye en no más de un 10% a la velocidad peculiar observada de nuestro Grupo Local.

Las observaciones realizadas a escalas mayores ( $z > 0.01$ ) no han dado hasta ahora resultados claros, siendo éstos más bien inconsistentes (Rubin *et al.*, 1976; Collins, Joseph y Robertson, 1986; James, Joseph y Collins, 1987; Lucey y Carter, 1988; Staveley-Smith y Davies, 1989). Aunque aún no del todo aclarado, parece evidente que el flujo de movimientos a gran escala se extiende más allá de las escalas hasta ahora estudiadas, y puede haber un flujo coherente aún a las escalas a las que tales flujos parciales han sido determinados (del orden de  $130 \text{ Mpc}$ ). Será preciso disponer de muestras más amplias y profundas para poder entender realmente el campo de velocidades peculiares a gran escala, siendo la situación actual un tanto desconcertante (Mathewson *et al.*, 1992). Tal vez el problema tenga que

ver, al menos en parte, con el modo de corregir los datos observacionales, según veremos más adelante en esta memoria.

### 1.2.6 ESTRUCTURA A GRAN ESCALA DEL UNIVERSO

Desde el punto de vista del objetivo de esta memoria, los resultados observacionales de más interés son aquellos relacionados con la determinación de la estructura a gran escala del universo.

La información observacional de la estructura a gran escala del universo proviene fundamentalmente de la medición precisa de la posición angular y brillo aparente de cada fuente luminosa, y la estimación de su distancia a partir de la medida del corrimiento hacia el rojo de las rayas de su espectro (redshift), además de la medida de los fondos cósmicos de radiación (microondas, rayos X, etc.). Tal información proporciona básicamente tres resultados generales en cuanto a la estructura a gran escala en el universo:

- a/ la posible anisotropía del fondo cósmico de radiación de microondas
- b/ las propiedades de agrupamiento de la distribución de galaxias, que determina la distribución de materia luminosa a gran escala
- c/ los movimientos a gran escala

Hasta hace poco, los análisis de los desplazamientos hacia el rojo de las galaxias, herramienta básica para la determinación de la estructura a gran escala, tenían sólo un alcance limitado, ya que requieren grandes cantidades de tiempo y telescopios de aberturas muy grandes. Los nuevos detectores, más rápidos y capaces de captar cantidades mayores de la luz disponible, han facilitado enormemente los análisis realizados, recortando drásticamente el tiempo de telescopio necesario.

Si bien los indicios de una posible estructura en el universo cabe remontarlos al siglo pasado, con la confección del *General Catalogue* de 1864, de John Herschel, y el *New General Catalogue* de 1888, de J.L.E. Dreyer, donde ya se apreciaba claramente la tendencia al agrupamiento, hasta los años 50 de este siglo no se dispuso de unos datos suficientemente amplios y precisos como para poder establecer algunas conclusiones.

Entre 1950 y 1954 se cartografió la totalidad del hemisferio celeste septentrional con el telescopio Schmidt de gran ángulo de 1.2 metros del Observatorio de Monte Palomar. Poco después, en 1958, George O. Abell, de la Universidad de California en Los Angeles, compiló un catálogo de



2712 cúmulos ricos de galaxias. Abell consideró cúmulo a toda aglomeración de galaxias donde hubiera, al menos, 50 galaxias brillantes dentro de una esfera de un radio de 6.5 millones de años luz. Según Abell, muchos cúmulos parecían formar parte de supercúmulos que tenían un promedio de 5 ó 6 cúmulos cada uno. Esta propuesta de Abell estaba en contradicción con otro catálogo de cúmulos compilado, a partir de la misma fuente de Monte Palomar, por Fritz Zwicky y colaboradores, del Instituto de Tecnología de California. El catálogo de Zwicky parecía indicar que los cúmulos no formaban supercúmulos de orden superior. De todos modos, este desacuerdo se debe a que tal como Zwicky define los cúmulos, éstos son mayores que los de Abell, y comprenden varios centros en torno a los cuales se agrupan las galaxias en una estructura de cúmulo múltiple.

Estos y otros catálogos de galaxias elaborados fueron estudiados posteriormente por P.J.E. Peebles y colaboradores, de la Universidad de Princeton, quienes, desarrollando técnicas estadísticas adaptadas a este tipo de datos, establecieron la conclusión evidente de la tendencia de los cúmulos a su agrupamiento en estructuras mayores.

Como complemento a las primeras observaciones concentradas en determinadas regiones y estructuras (Gregory, Thompson & Tifft, 1981), John P. Huchra, Marc Davis y sus colaboradores del Centro de Astrofísica de Harvard y del Observatorio Astronómico Smithsoniano dedicaron, de modo sistemático, cinco años de observación a completar la primera muestra suficientemente representativa (Huchra *et al.*, 1983) de la estructura a gran escala del universo (el original Catálogo del CfA). Midieron los redshifts de prácticamente todas las galaxias del hemisferio norte ecuatorial hasta una magnitud 14.5 (un brillo unas 2500 veces más débil que el perceptible a simple vista). Otros equipos llevaron a cabo posteriormente un estudio similar en el hemisferio sur (Da Costa *et al.*, 1988). Todos estos datos, utilizados conjuntamente con otros redshifts determinados por R. Brent Tully, de la Universidad de Hawai en Honolulu, proporcionaron un mapa completo del Supercúmulo Local donde se inscribe nuestra galaxia. Este supercúmulo consta de un núcleo formado por al menos once cúmulos de galaxias distintos, enlazados entre sí por puentes de baja densidad constituidos por galaxias individuales, rodeado por un halo formado por grupos de galaxias adicionales. El Supercúmulo Local se ramifica y se enlaza con otros supercúmulos alejados.

Llamó la atención la extraordinaria planitud de estas estructuras. Así, el conjunto de supercúmulos que, junto con nuestro Supercúmulo Local, constituyen la estructura hasta el momento conocida con más detalle, tiene un diámetro que alcanza los  $360 h_{75}^{-1}$  Mpc (lo que representa aproximadamente una décima parte del universo observable ( $\approx 0.09 c$ )), y sólo unos  $80 h_{75}^{-1}$  Mpc de grosor. La relación de dimensiones axiales es 4:2:1. Recientemente, Tully *et al.* (1992) han realizado una completa descripción "visual" de la distribución espacial de materia hasta hoy conocida.

En 1981, Robert P. Kirshner y varios colaboradores suyos de la Universidad de Michigan (Kirshner *et al.*, 1981) hallaron un enorme vacío en la constelación de Boötes. Esta región, cuyo radio es de unos  $62 h_{50}^{-1}$  Mpc, queda delimitada por "paredes" de galaxias. La región central de la zona vacía está llamativamente desprovista de galaxias normales, elípticas y espirales, aunque trabajos recientes del propio Kirshner y J. Ward Moody, de la Universidad de Nuevo México, indican que en el núcleo de la zona vacía quizás haya algunas galaxias enanas débiles (Kirshner *et al.*, 1987). Un aspecto que se deduce del completo catálogo elaborado por Tully, y que se intuye también en otras observaciones, es el que, al parecer, los vacíos en la distribución de galaxias tienen un tamaño mayor cuanto más alejados están de nosotros (Tully, 1986, 1987).

La extraordinaria planitud del complejo de supercúmulos más cercano a nosotros ha hecho especular sobre la posibilidad de que estemos realmente en la estrecha pared de una enorme burbuja de vacío (Bertschinger, 1985 b), o incluso en el intersticio entre dos burbujas, lo que tendría notables consecuencias respecto a las observaciones realizadas por nosotros, al ser unos observadores tan poco idóneos desde el punto de vista cosmológico.

Actualmente se han completado 11 secciones ("slices" de  $6^\circ$ ) del nuevo catálogo del CfA "completo" hasta magnitud aparente límite 15.5 (Vogeley *et al.*, 1992). Las mayores inhomogeneidades son comparables con el tamaño de la muestra, lo que impide una determinación consistente de las propiedades de la distribución de galaxias a gran escala, pero se observan estructuras (generalmente filamentosas) de supercúmulos, dejando entre ellos vacíos cuyo diámetro es del orden de  $\approx 25 h_{100}^{-1}$  Mpc (de Lapparent *et al.*, 1986). La determinación del tamaño máximo de las estructuras en el universo no puede realizarse debido fundamentalmente a que ni siquiera un

diez por ciento del volumen del universo ha recibido el análisis adecuado, aunque se han encontrado ya indicios de haber detectado una escala máxima de estructuración (Vogeley *et al.*, 1992).

Un aspecto interesante es la determinación de la topología concreta de la estructura a gran escala del universo. El interés en la determinación de la topología actual de las estructuras se debe, aparte del interés intrínseco de su conocimiento, a la posibilidad de relación de la topología observada actualmente con las condiciones iniciales que dieron lugar a la formación de los agrupamientos de galaxias, para lo cual debe establecerse un modelo adecuado de evolución dinámica. En definitiva, se trata de determinar si la distribución de galaxias a gran escala está mejor descrita por una jerarquía de cúmulos (topología de tipo "albóndiga") (Soneira y Peebles, 1978), un reticulado irregular de celdas o "burbujas" (topología de "queso suizo" o de tipo "espuma") (Joeveer y Einasto, 1978; De Lapparent, Geller y Huchra, 1986), una red de filamentos (topología de tipo "esponja") (Einasto *et al.*, 1983; Einasto, Klypin y Shandarin, 1984; Haynes y Giovanelli, 1986; Gott, Melott y Dickinson, 1986), o un conjunto de filamentos sin intersección, en particular en relación con la presencia de "cuerdas cósmicas" (topología de tipo "spagetti") (Turok, 1985; Vilenkin, 1985). Si bien una simple estimación de la topología general puede intuirse mediante apreciación visual a través de representaciones adecuadas de las estructuras, un grupo del observatorio de la universidad de Princeton y otras universidades han llevado a cabo un ambicioso trabajo de determinación de la topología a gran escala de universo mediante una medida cuantitativa tridimensional de parámetros relacionados con tal topología, en diferentes modelos, a partir de los muestreos existentes (Gott, Melott & Dickinson, 1986; Gott, Weinberg & Melott, 1987; Park *et al.*, 1992). Pero, si bien a cierta escala parece adecuada la topología de tipo espuma, aún no hay suficientes evidencias de que sea esto un resultado general, al menos hasta que se analicen "topológicamente" los catálogos de galaxias más recientemente completados (nuevo CfA), con mucha más resolución en la caracterización de las estructuras (Park *et al.*, 1992). Especialmente crítico es el hecho de que la mayor parte de los análisis topológicos hasta ahora realizados lo han sido en el espacio de redshift, lo que conlleva importantes distorsiones.

El análisis estadístico permite cuantificar las impresiones subjetivas de evidencia de agrupamiento en diferentes escalas en la distribución de galaxias que se observan en las muestras analizadas.

El método estadístico más fructífero hasta el momento ha sido la aproximación de la "función de correlación", desarrollada principalmente por Peebles y colaboradores (Peebles, 1980). Su elemento básico es la función de correlación de dos puntos de objetos cósmicos (galaxias, cúmulos, etc.),  $\xi(r)$ , definida por la expresión

$$dp(r) = n^2 (1 + \xi(r)) dv_1 dv_2 \quad [1.50]$$

donde  $dp(r)$  es la probabilidad combinada de encontrar dos objetos en volúmenes  $dv_1$  y  $dv_2$  separados por una distancia  $r$ ;  $n$  es la densidad numérica media de los objetos considerados, suponiendo implícitamente que el campo de fluctuaciones es homogéneo e isótropo.

Análisis de diferentes catálogos de galaxias muestran que

$$\xi_g(r) = \left( \frac{r_g}{r} \right)^\gamma \quad [1.51]$$

donde

$$r_g = (5 \pm 0.7) h^{-1} \text{ Mpc}$$

$$\gamma \cong 1.8, \text{ en el rango } 0.1 h^{-1} \lesssim r \lesssim 10 h^{-1} \text{ Mpc}$$

( $r_g$  es la longitud de correlación para galaxias).

En el caso de cúmulos ricos de galaxias, los análisis estadísticos realizados muestran que la función de correlación de dos puntos es similar a la del caso de galaxias, resultando

$$\xi_c(r) = \left( \frac{r_c}{r} \right)^{1.8} \quad [1.52]$$

en el rango  $7 h^{-1} \lesssim r \lesssim 150 h^{-1} \text{ Mpc}$ , con una longitud de correlación de  $r_c \cong 25 h^{-1} \text{ Mpc}$ .

Algunas observaciones, como por ejemplo la aparente topología de tipo "espuma" de la distribución de galaxias a gran escala, no pueden ser descritas por el análisis standard mediante funciones de correlación. Por ello, han sido recientemente introducidos algunos nuevos descriptores estadísticos, como la función de probabilidad de un vacío (Bouchet, Lachieze-Rey, 1986). La función de probabilidad de un vacío se define como la probabilidad de que un volumen aleatoriamente seleccionado, de forma y tamaño especificado, no contenga galaxias. Esto puede evaluarse mediante modelos estadísticos o dinámicos, y puede emplearse como un enlace entre varias aproximaciones, tales como el modelo jerárquico y las funciones de correlación, la presencia de vacíos y la percolación. La función de probabilidad de un vacío permite estudiar hasta qué punto es

estadísticamente significativa la presencia de tales estructuras en las muestras estudiadas (Otto *et al.*, 1986).

Dado que los estadísticos tradicionales no dan suficiente información debido al reducido tamaño de las muestras o a la debilidad de los efectos que pretenden medirse, se ha propuesto que las propiedades de agrupamiento de la distribución de galaxias pueden ser bien representadas por medio de multifractales (Martínez, 1989). El formalismo de multifractales proporciona un modo natural de comparar los modelos numéricos con los datos observacionales, así como un análisis complementario en la caracterización de las estructuras.

El análisis de la estructura a gran escala, si ésta constase fundamentalmente de grandes vacíos esféricos rodeados por paredes de cúmulos de galaxias, deberá abordarse a través del estudio de funciones de agrupamiento de vacíos como tales entidades, introduciendo funciones de correlación para vacíos o sistemas de empaquetamiento de vacíos como empaquetamiento de esferas u otros análogos geométricos (Icke & Van de Weygaert, 1987). Los nuevos datos observacionales requieren un nuevo tratamiento estadístico distinto al tradicionalmente seguido, de un modo matemáticamente riguroso (Elizalde, 1987), y deberá ser aplicado en los futuros análisis de los cada vez más completos catálogos.

En todo caso, al margen de cual sea el modelo más adecuado para describir la estructura a gran escala en el Universo, puede afirmarse que hay suficientes evidencias de la existencia de una estructura real a gran escala, que desde hace algún tiempo se considera probada (Suto, Gorski, Juskiewicz & Silk, 1988).

### **1.3 ALGUNOS TEMAS CONTROVERTIDOS EN EL ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA A GRAN ESCALA DEL UNIVERSO**

Aunque cada vez se tiene un conocimiento más completo de la estructura a gran escala del universo, y si bien es cierto que las observaciones van siendo cada vez más coherentes y se van unificando criterios y conclusiones, quedan sin embargo un conjunto de temas "controvertidos" que constituyen actualmente especial objeto de discusión.

Además de la cuestión de fondo de la elección de un modelo matemático de universo inhomogéneo al que referir todas las observaciones, y sin pretender ser exhaustivos y abarcar todos los temas actualmente candentes, citaremos simplemente aquellos temas que están más directamente relacionados con los aspectos discutidos en esta memoria, destacando los siguientes:

#### **A/ Distorsiones observacionales en la morfología de las estructuras de alta densidad**

Uno de los aspectos importantes en el análisis de la estructura a gran escala del universo es la posible distorsión en la propia morfología de las estructuras debida a efectos de velocidades peculiares sobre la observación del redshift, en especial en las zonas de alta densidad de materia en las que se originan velocidades peculiares realmente considerables. Esta distorsión tiene también notables repercusiones estadísticas, ya que en dichas zonas de alta densidad es donde se halla el mayor número de galaxias, por lo que una distorsión en sus posiciones observadas tiene un considerable peso estadístico al sumar las contribuciones para todas las galaxias de una muestra.

Dos son las principales distorsiones de redshift producidas en las zonas de alta densidad: la apariencia filamentaria de la zona interna más densa de cúmulos de galaxias debido a las grandes velocidades peculiares, de carácter aleatorio, que llegan a generarse en un régimen virializado, y, por otro lado, las llamadas "caústicas" de redshift, originadas por el aparente aplastamiento de las estructuras en la dirección perpendicular a la dirección radial de visión (Kaiser, 1987; McGuill, 1990).

Los efectos particularmente específicos en las zonas virializadas de cúmulos serán analizados en el Capítulo 6, en el contexto de corrección de este efecto en catálogos de galaxias. Las distorsiones de redshift que dan lugar a la formación de caústicas serán analizadas en el Capítulo 5, en particular en el caso de distorsión morfológica de estructuras esféricamente simétricas.

El efecto distorsionante de una estructura sobre la propia observación de dicha estructura, de cara a la determinación de su aspecto real a partir de su imagen aparente, es algo realmente poco estudiado. Especialmente interesante es el caso analizado por Kaiser (1987) acerca de la morfología

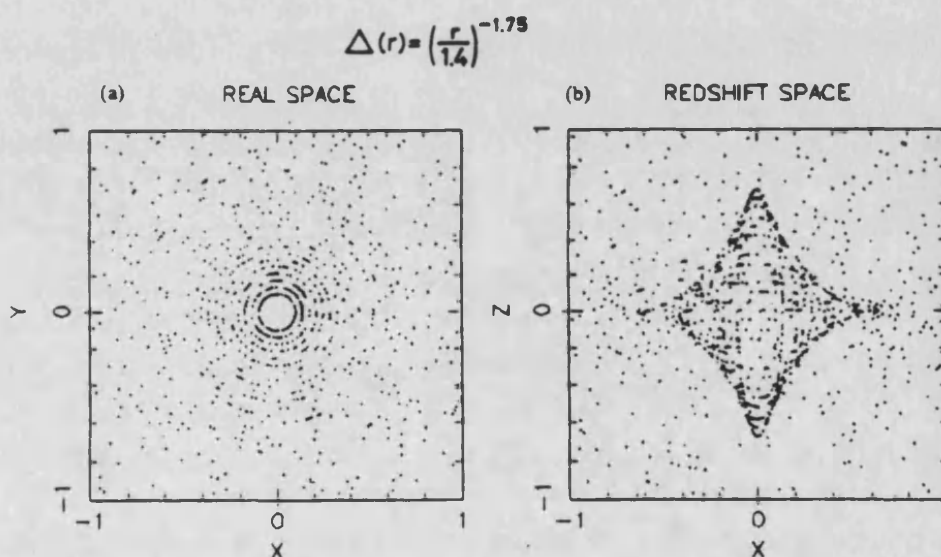
aparente de un cúmulo de galaxias, en relación con el tipo de distorsiones producidas por una mala interpretación de las observaciones de redshift (o más en concreto, por la interpretación como redshift cosmológico de efectos no directamente asociados a la expansión cosmológica). Kaiser analizó la apariencia de un cúmulo esférico en el espacio de redshift, debido a las distorsiones producidas por las velocidades peculiares del campo coherente de caída al centro del cúmulo para las galaxias del halo. Según Kaiser, este tipo de efectos tiende a producir estructuras transversales, con formación de caústicas en forma de anillo en torno al centro del cúmulo y transversales a la dirección del observador (ver figura 1.2). La distribución de galaxias observada tendría poco que ver, según estos efectos, con un modelo de cúmulo que en realidad es esféricamente simétrico. En el Capítulo 5 discutiremos este aspecto, revisando los resultados de Kaiser de acuerdo con una formulación no lineal de los efectos, y en el Capítulo 6 discutiremos la forma de considerar estos efectos en la corrección de las posiciones observadas de las galaxias agrupadas en estructuras.

También interesante es el análisis de los llamados vacíos cosmológicos, grandes estructuras con un déficit en la densidad de materia con respecto a la del fondo homogéneo. Dada la importancia observacional creciente de los vacíos cosmológicos, les dedicaremos especial atención en el Capítulo 5.

En relación con las distorsiones en la observación de un vacío cosmológico, Suto *et al.* (1984) estudiaron un efecto de distorsión del redshift, debido a las velocidades peculiares en el interior de las "burbujas" o "vacíos" de densidad. Según este efecto, las velocidades peculiares producen un mayor espesor aparente de la capa de alta densidad que constituye el borde del vacío. Si la anchura aparente de la pared del vacío se estima que es alrededor de una décima parte del radio del vacío, la pared real es alrededor de 20 veces más delgada que la aparente, de acuerdo con estos efectos (Suto *et al.*, 1984). Este mismo efecto ha sido estudiado de otro modo por Bertschinger (1985 b), con análogo resultado. Además, este mismo efecto de velocidades peculiares afecta a la determinación del parámetro de Hubble, con notables diferencias en el caso de un observador situado en el centro de una burbuja de vacío (que llegaría a sobreestimarla, y por lo tanto a subestimar la edad del universo, hasta en un 33% — o al menos en un 20%, en el caso de un vacío "compensado" (con todo el defecto de masa del vacío interior de la burbuja acumulado en la pared)—, y con

una dispersión del 10%, así como para un observador en la propia capa (con una sobreestimación el mismo orden) (Bertschinger, 1985b).

Si bien todos estos efectos han sido estudiados esencialmente en el régimen lineal, en la mayor parte de los casos el contraste de densidad (sobre todo en el caso de cúmulos) alcanza valores claramente no lineales, lo que obliga a considerar hasta qué punto los efectos de no linealidad pueden influir en las estimaciones de distorsiones observacionales realizadas para un régimen lineal. Discutiremos esta cuestión en el Capítulo 5 al volver a considerar el caso de cúmulos y vacíos esféricos.



**Fig 1.2** Apariencia de un cúmulo esférico, modelizado con una ley de potencias en la coordenada radial, en el espacio real (a), en comparación con su apariencia observacional en el espacio de redshift (b), de acuerdo con las distorsiones de redshift descritas por Kaiser (1987) para el régimen lineal. Los puntos correspondientes a la zona central virializada se han omitido, y las capas representadas tienen un movimiento de caída radial hacia el centro del cúmulo. La distorsión morfológica viene dada por la formación de caústicas en el espacio de redshift. En una representación 3D, dichas caústicas darían lugar a una figura en la que el efecto dominante podría ser descrito por la formación de dos "trompetas", dispuestas ambas en la dirección radial, en sentidos opuestos, con sus extremos cónicos pegados formando un anillo en torno a la posición real del cúmulo, desde el punto de vista del observador ( $X=0$ ) (la figura ha sido tomada de Kaiser, 1987).



## **B/ Variación de la densidad media de galaxias observadas con la profundidad de la muestra**

El estudio de la variación de la densidad radial de galaxias, en función del redshift, es de gran interés en cosmología, pues además de caracterizar las estructuras permite apuntar ideas acerca de su evolución temporal.

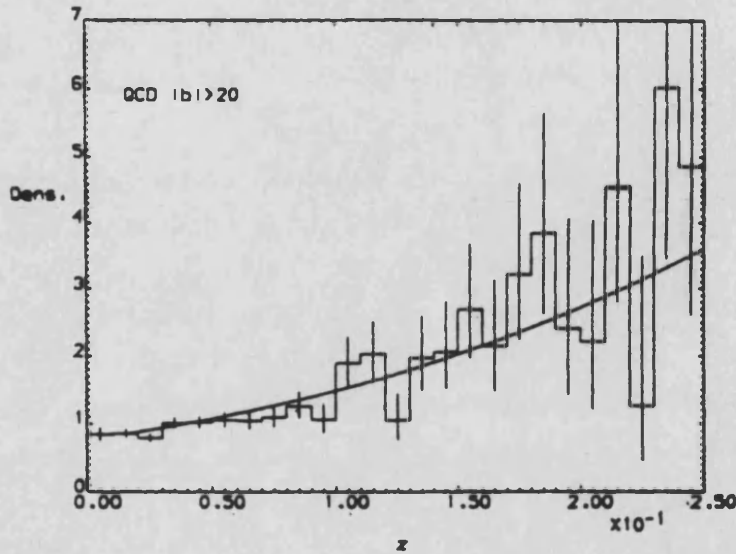
Existen ciertos resultados acerca de la variación de la densidad media de galaxias en función de la profundidad sobre muestras reducidas, pero dicha variación está directamente ligada a la existencia de estructuras particulares y los efectos de distorsión producidos por tales estructuras. Otro tipo de muestras, de mayor profundidad y amplitud, como la muestra del IRAS, sí permiten realmente caracterizar la posible evolución temporal de las estructuras.

Ahora bien, esta pretendida evolución temporal está ligada a tres tipos de efectos: evolución de la densidad numérica de galaxias (debida a procesos dinámicos en la interacción entre galaxias, lo que da lugar a la fusión de galaxias pequeñas en una única galaxia mayor), evolución de la luminosidad intrínseca de las galaxias, y —algo que tal vez no ha sido suficientemente considerado— las distorsiones observacionales que pueden "exagerar" esa aparente evolución temporal de las estructuras.

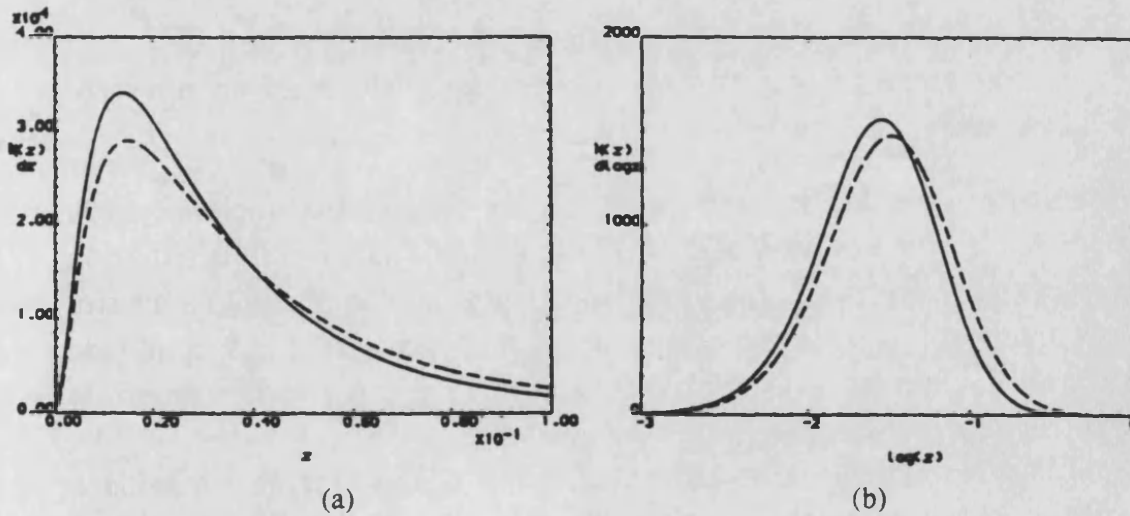
El caso de la muestra del IRAS resulta especialmente significativo a este respecto. Considerado tradicionalmente como uno de los ejemplos más claros de los efectos de evolución temporal (Saunders *et al.*, 1990), desde el principio hubo sospechas de que un análisis más detallado de los datos podía cambiar tales conclusiones.

Aunque la existencia de evolución temporal en la muestra del IRAS parece natural debido a las características de las galaxias de esta muestra (por la fuerte emisión en el infrarrojo), sin embargo los test de evolución temporal realizados mediante conteo numérico de galaxias han dado resultados no siempre coincidentes, y a veces contradictorios. Si se modeliza la densidad espacial comóvil de galaxias mediante una ley del tipo  $n(z) \propto (1+z)^\alpha$ , el parámetro de evolución  $\alpha$  ha sido estimado como 3-4 (Hacking, Condon & Houck, 1987) y como  $6.7 \pm 2.3$  (Saunders *et al.*, 1990) (ver Fig. 1.3).

Resultados recientes a partir de la muestra del IRAS (Fisher *et al.*, 1992) parecen indicar claramente que el "sesgo de Malmquist" antes



**Fig. 1.3** Distribución de densidad en función del redshift para las galaxias de la muestra del IRAS compilada por QMC-Cambridge-Durham (QCD), bajo la hipótesis de que la función de luminosidad no varía con el redshift, suponiendo sólo evolución en la densidad. Las unidades están normalizadas de modo que la densidad promediada sea la unidad, con lo que tales unidades representan realmente (densidad/densidad media de la muestra). Las barras indican los errores en la densidad calculada ( $1\sigma$ ). La curva indica el comportamiento teórico predicho por un modelo en el que la función de luminosidad variase de acuerdo con la ley  $\varphi_z(L) = (1+z)^{6.7}\varphi_0(L)$ . (La figura está tomada de Saunders *et al.*, 1990 (Fig. 11))



**Fig. 1.4** Distribución teórica  $N(z)$  del número de galaxias esperado  $N$  en función del redshift  $z$ . Los valores numéricos corresponden específicamente a la muestra del IRAS. La línea continua corresponde al caso sin evolución, mientras la línea de trazos corresponde al caso de evolución temporal del tipo  $(1+z)^{6.7}$ . (a) escala lineal, (b) escala logarítmica (Saunders *et al.*, 1990).

discutido puede de hecho dar lugar a una sobreestimación considerable de la evolución temporal inicialmente supuesta tras los primeros análisis. De hecho, Fisher *et al.* no encuentran evidencias significativas de tal evolución temporal.

Además, según veremos en el Capítulo 4 de esta memoria, las propias distorsiones observacionales en la densidad promedio estimada a partir de una muestra no debidamente corregida pueden dar lugar a importantes errores. Es más, si se observa un crecimiento sistemático de la densidad observada con la distancia hasta una distancia máxima de 100 Mpc, ello podría perfectamente interpretarse como indicios de la existencia de estructuras en escalas del orden de 200 Mpc que pueden dar lugar a tales distorsiones, como también veremos en el Capítulo 4 e ilustraremos en el Capítulo 5 con el ejemplo de la onda plana. Cabe señalar en este sentido que prácticamente todos los análisis realizados a partir de la muestra del IRAS (incluido el de Fisher *et al.*, 1992) se han realizado directamente en el espacio de redshift, así como la mayor parte los estudios realizados a partir de otras muestras, como la del CfA. Los análisis realizados en el espacio de redshift pueden desvirtuar completamente los resultados si existen estructuras a escalas comparables al tamaño de la propia muestra, como veremos más adelante.

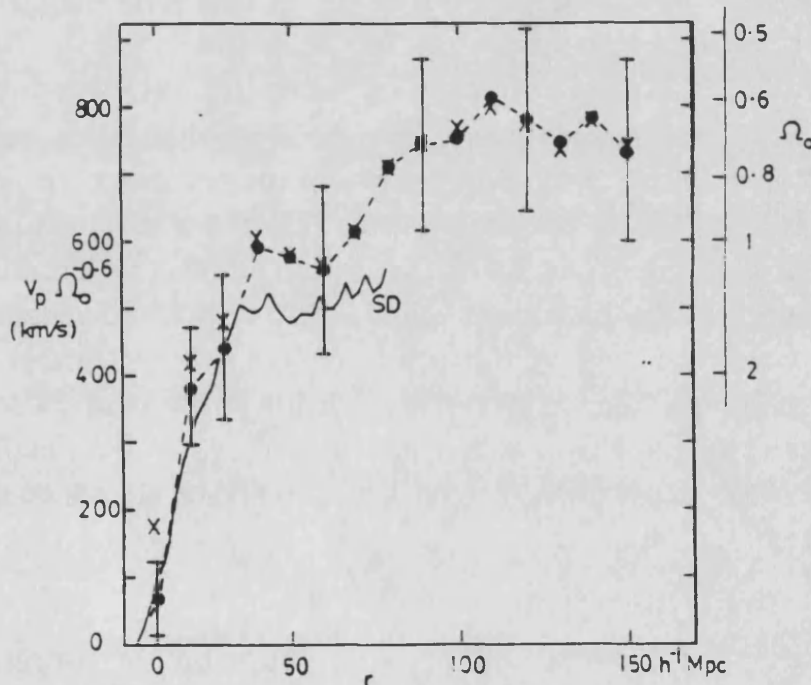
### **C/ Relación entre el dipolo del fondo de radiación de microondas y el campo de velocidades peculiares en nuestro entorno**

Otro de los grandes problemas de la cosmología observacional es la discrepancia existente entre el módulo y dirección del dipolo en la radiación de fondo de microondas (comunmente interpretado como debido a nuestra velocidad peculiar como observador, con respecto a dicho fondo de radiación) y nuestra velocidad peculiar estimada a partir del campo de densidad de materia en nuestros alrededores.

En principio, la velocidad peculiar del observador determinada a partir del dipolo de microondas debería coincidir, en módulo y dirección, con la velocidad peculiar estimada a partir del campo de densidad, siempre que se considere una región en torno al observador suficientemente grande para incluir toda la materia que efectivamente da lugar a dicho movimiento de velocidad peculiar. El problema es saber cuando se ha considerado

"toda" la materia que efectivamente contribuye, lo cual se determina a partir de la llamada "convergencia del dipolo", ya que el módulo y la dirección del dipolo determinados a partir del campo de densidad ha de "converger" a su valor real al aumentar el radio donde se calcula la contribución de la materia interior (ver Fig. 1.5).

Las discrepancias observacionales entre los valores esperados según el dipolo del fondo de microondas y los resultantes del análisis de catálogos de galaxias vienen dadas por el hecho de que, aunque aparentemente se observen convergencias ficticias, posiblemente aún no se ha observado toda la región que da lugar a nuestra velocidad peculiar.



**Fig. 1.5** Amplitud del dipolo de velocidad peculiar de nuestra galaxia (Grupo Local) en función de la profundidad de la muestra considerada para dicho cálculo. Las barras de error son estimaciones realizadas a partir de 10 simulaciones sobre distribuciones poissonianas de las galaxias en el volumen de la muestra. Los puntos negros y línea de trazos corresponden al cálculo a partir de la muestra del IRAS (Rowan-Robinson *et al.*, 1990), mientras la línea continua corresponde a los cálculos de Strauss & Davis (1988) a partir de otra submuestra del IRAS. El valor de  $\Omega_0$  indicado en el lateral derecho corresponde al valor equivalente requerido para explicar la velocidad peculiar de  $600 \text{ km s}^{-1}$  respecto al fondo de radiación de microondas, siempre según el análisis de la muestra del IRAS. Otros análisis a partir de muestras diferentes dan resultados contradictorios, dependiendo del volumen y profundidad de cada muestra. La figura ha sido tomada de Rowan-Robinson *et al.*, 1990.

De hecho, parece evidente según los resultados más recientes (Shaya *et al.*, 1992) que los movimientos que dan lugar al dipolo de microondas se desarrollan probablemente a escalas espaciales sustancialmente mayores que las cubiertas por los catálogos de galaxias actualmente elaborados, como ya habían sugerido Scaramella *et al.* (1991). Según esta idea, sólo una fracción del movimiento que da origen a dicho dipolo de microondas se origina dentro del campo de densidad de galaxias cubierto por la muestra del IRAS.

Además del hecho de que posiblemente aún no se ha considerado una región suficientemente grande a la hora de calcular nuestra velocidad peculiar, otro problema no menos importante es la distorsión que los efectos de velocidades peculiares mutuas entre las galaxias tienen sobre tal determinación, y sobre todo los efectos de distorsión introducidos por la posición particular del observador en la propia observación de las estructuras, sobre todo si el tamaño de las estructuras es comparable al tamaño en el cual se origina el campo de velocidades peculiares. Discutiremos este aspecto con detalle a lo largo de esta memoria.

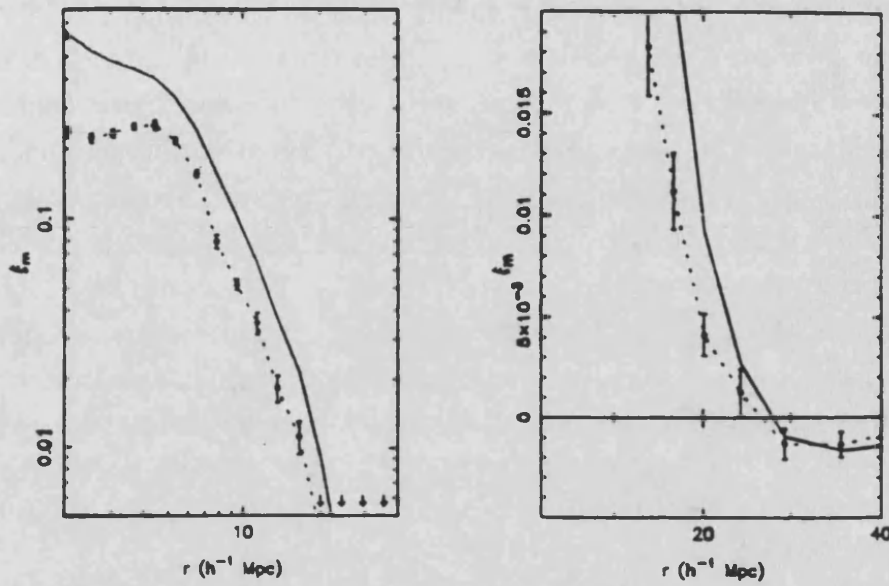
El problema de la "convergencia del dipolo" está también ligado con el problema de la determinación de  $\Omega_0$ , aspecto éste que no discutiremos ya que a lo largo de toda la memoria asumiremos  $\Omega_0 = 1$ . Recientemente, Y. Hoffman (1989), en un artículo titulado *Dynamics of superclusters: reconciling  $\Omega_0 = 1.0$  with observations?* sugería importantes consecuencias de la corrección de distorsiones en los datos observacionales en la determinación de  $\Omega_0$ , en relación con el mismo tipo de efectos de distorsión discutidos en esta memoria.

#### D/ Distorsiones observacionales en la función de correlación radial

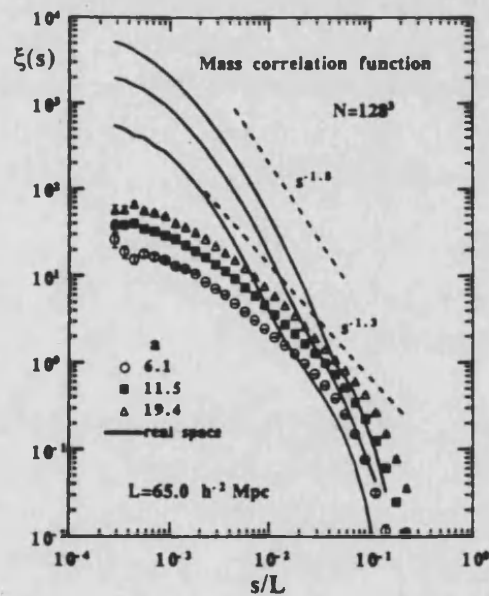
Las distorsiones observacionales en la función de correlación radial a dos puntos fueron modelizadas por Kaiser (1987), para el régimen lineal, mediante una serie de argumentos de tipo estadístico, del modo

$$\xi_s(r) \approx \left( 1 + \frac{2}{3} \Omega^{0.6} + \frac{1}{5} \Omega^{1.2} \right) \xi_r(r) \quad [1.53]$$

donde  $\xi_r(r)$  es la función de correlación en el espacio real y  $\xi_s(r)$  es la función de correlación observada en el espacio de redshift. Para  $\Omega=1$ , se tiene  $\xi_s(r) \approx (28/15) \xi_r(r)$  (ver figura 1.6).



**Fig. 1.6** Distorsiones en la determinación de la función de correlación radial a dos puntos  $\xi(r)$ , en el espacio de redshift (línea continua), en comparación con el resultado obtenido cuando ésta es calculada en el espacio real (línea de puntos). La figura ha sido tomada de Lilje & Efstathiou, 1989, y corresponde al caso de materia oscura fría (CDM), en el régimen lineal.



**Fig. 1.7** Distorsiones en la determinación de la función de correlación radial a dos puntos  $\xi(r)$ , en el espacio de redshift (diferentes símbolos, correspondientes a diferentes etapas evolutivas en una simulación de CDM), en comparación con el resultado obtenido cuando ésta es calculada en el espacio real (línea continua), según las simulaciones de Suto & Sugihara (1991) para un régimen no lineal.

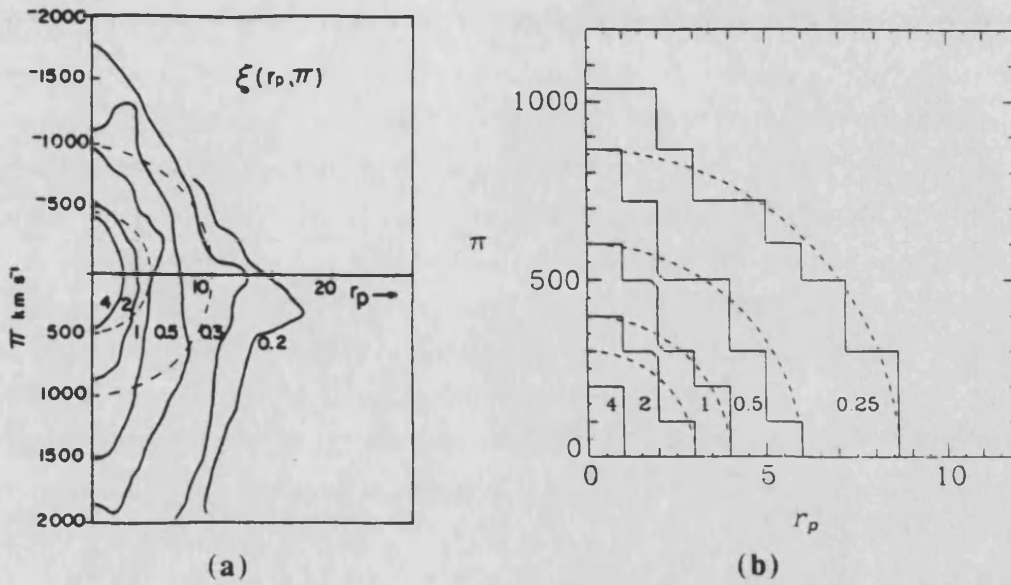
En cuanto al régimen no lineal, Suto & Sugihara (1991) han analizado con detalle las distorsiones en el espacio de redshift para  $\xi(r)$  mediante simulaciones de N-cuerpos en un escenario de materia oscura fría, sesgada, en un universo de Einstein-de Sitter. Sin entrar en detalles acerca de sus simulaciones, el resultado fundamental aparece ilustrado en la figura 1.7. Esencialmente, si bien en el régimen lineal la función de correlación  $\xi(r)$  en el espacio de redshift es mayor que en el espacio real ( $\xi_s(r) \approx 2 \xi_r(r)$ ), para distancias muy pequeñas, en el régimen no lineal, la función de correlación en el espacio real crece muy rápidamente, resultando para  $r$  próximo a cero  $\xi_s(r) \ll \xi_r(r)$ , invirtiéndose la tendencia del régimen lineal, debido a los efectos de dispersión de las velocidades peculiares. Los resultados de Suto & Sugihara (1991) reproducen también el comportamiento  $\xi_s(r) \approx 2 \xi_r(r)$  para el régimen lineal ( $\xi(r) < 1$ ).

De todos modos, hay que tener en cuenta que el régimen no lineal sólo entra en juego a escalas de unos pocos megaparsecs, donde se hallan las agrupaciones de galaxias que constituyen las estructuras densas, mientras el régimen lineal es aplicable a escalas mayores, siendo estas escalas mayores las que realmente caracterizan la estructura "a gran escala" del universo.

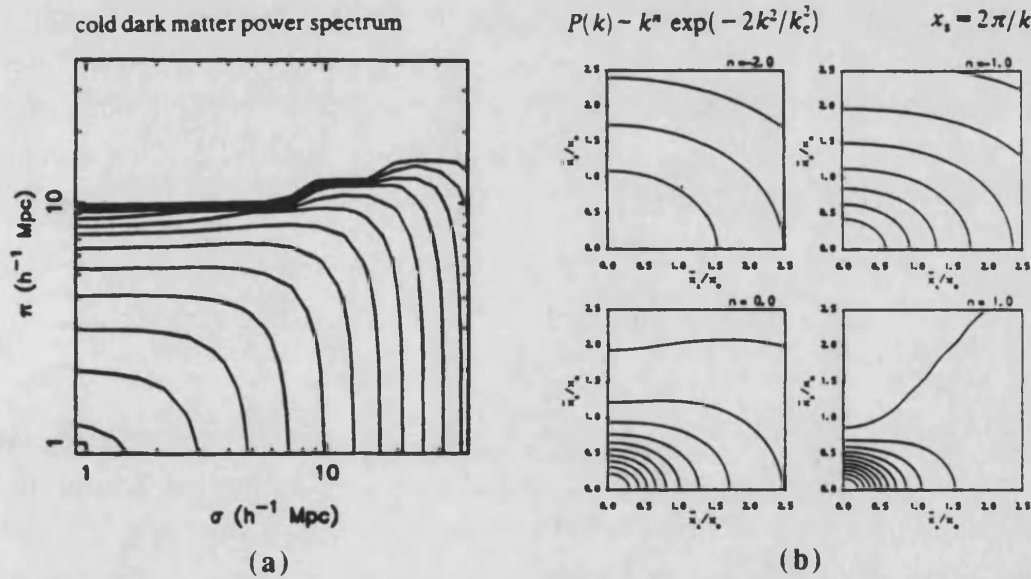
Según veremos posteriormente, las estimaciones de Kaiser (1987) y otros acerca de las distorsiones de  $\xi(r)$  no son del todo correctas, si bien describen adecuadamente los efectos dominantes. En el capítulo 6 discutiremos la influencia de diferentes posibles densidades espectrales  $P(k)$  en las distorsiones observacionales de  $\xi(r)$ .

### **E/ Distorsiones observacionales en la función de correlación bidimensional redshift-ángulo**

La función de correlación a dos puntos  $\xi(r)$  sólo da información acerca de las propiedades generales de agrupamiento de las galaxias, sin distinguir entre la diferencia de probabilidad, que en principio puede existir, entre el tener dos galaxias separadas una distancia  $r$  en la dirección radial o el hallar dos galaxias separadas una distancia  $r$  en dirección transversal. Un estadístico que distinga entre dirección radial y transversal contiene más información, y además permite caracterizar más apropiadamente las distorsiones producidas en el espacio de redshift. La función de correlación bidimensional  $\xi(\pi, \sigma)$  da cuenta de la diferencia radial-transversal en las propiedades de agrupamiento.



**Fig. 1.8** La función de correlación bidimensional redshift-ángulo  $\xi(\pi, \sigma)$ , tal como resulta al ser determinada directamente a partir de los datos observacionales (en ambos casos, a partir de la muestra de galaxias del CfA): (a) la muestra original del CfA completa hasta magnitud 14.5 (Davis&Peebles, 1983); (b) a partir de los dos primeras slices de la extensión de la muestra del CfA completa hasta magnitud 15.5 (De Lapparent *et al.*, 1988).



**Fig. 1.9** Estimaciones teóricas de las distorsiones observacionales en la función de correlación bidimensional redshift-ángulo  $\xi(\pi, \sigma)$ , en el régimen lineal. La función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$  en el espacio real se supone en todo caso que debería presentar curvas de niveles prácticamente circulares y concéntricas, dada la no existencia de direcciones privilegiadas: (a) según las simulaciones numéricas de Lilje y Efstathiou (1989); (b) según los cálculos semianalíticos de C. McGill (1990).



Introducida por Peebles (1979), los cálculos de  $\xi(\pi, \sigma)$  aplicados a muestras reales (Davis & Peebles, 1982; De Lapparent *et al.*, 1988) daban resultados en contradicción con las predicciones de la teoría lineal, como una clara evidencia de la importancia de los efectos no lineales, sobre todo en las muestras estudiadas (bastante contaminadas por la presencia de cúmulos densos con zonas virializadas) (ver figura 1.8).

Si bien se han realizado modelizaciones teóricas acerca de las propiedades de  $\xi(\pi, \sigma)$  en el régimen no lineal (Lilje & Efstathiou, 1989), la mayor parte de los análisis teóricos se han centrado en el régimen lineal. Aunque han sido varios los autores que han discutido este tipo de efectos, ha sido C. McGill (1990) quien ha propuesto unas estimaciones más sistemáticas de los efectos de distorsión en la función  $\xi(\pi, \sigma)$  en el espacio de redshift (ver figura 1.9).

La principal diferencia entre los resultados observacionales y las predicciones teóricas vienen dadas por la influencia de efectos no lineales. Al margen de tales efectos (que por otra parte han sido bien descritos por las teorías que dan cuenta de dicho régimen no lineal), la comparación entre las predicciones del régimen lineal y las observaciones viene condicionada por la especial dificultad matemática en el cálculo de  $\xi(\pi, \sigma)$ . En el Capítulo 6 discutiremos tales aspectos, y veremos nuevas predicciones para el régimen lineal en una escala de tamaños observacionalmente aún no explorada por el alto ruido que presentan las escasas muestras disponibles para escalas superiores a los 10-15 Mpc.

#### **F/ Crecimiento de la amplitud de la función de correlación con la profundidad de la muestra**

Un tema controvertido en el análisis estadístico de catálogos de galaxias utilizando la función de correlación radial es el crecimiento de la amplitud de la función de correlación con la profundidad de la muestra. Si bien parece que hay coincidencia en la realidad de dicho crecimiento, no está muy claro cual es su origen. De hecho, no está claro si se trata de un efecto real o un mero efecto espúreo en el contaje estadístico. De ser un efecto real, diferentes explicaciones pueden hallarse para tal crecimiento, siempre en relación con la variación de la densidad media con la profundidad de la muestra descrito anteriormente, y por supuesto en conexión con la relación

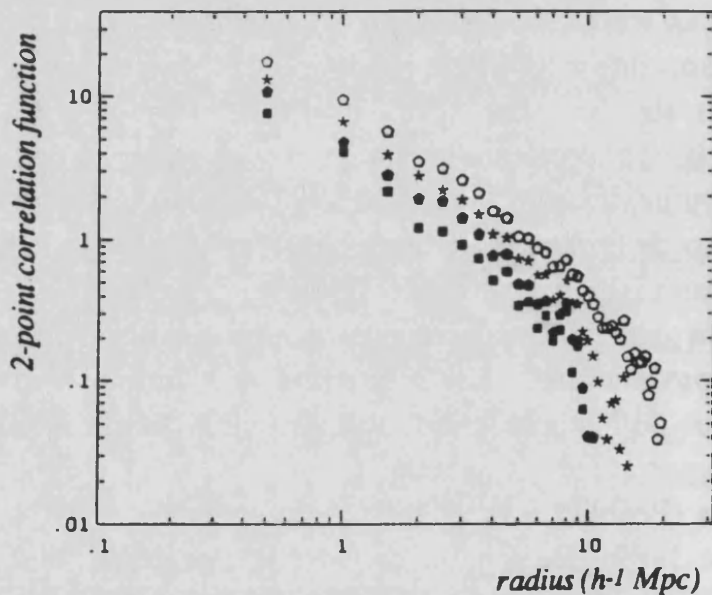
entre los tamaños reales de las estructuras y el tamaño de la muestra considerada en cada caso.

Una primera explicación vendría dada por el crecimiento natural de  $r_0$  si las estructuras observadas en muestras de mayor tamaño son cada vez mayores (Pietronero, 1987), en particular si el universo es un fractal simple, o al menos si  $P(k)$  crece con la escala en la zona de frecuencias espaciales "accesibles" para un tamaño de muestra dado. De hecho, la explicación más sencilla proporciona un crecimiento lineal de  $r_0$  con la profundidad de la muestra, lo cual no está completamente claro que sea así según los datos observacionales (Martínez, 1989). Si el crecimiento de  $r_0$  con la profundidad fuese no lineal, ello simplemente querría indicar que el universo no es un fractal simple, o que  $P(k)$  varía con la profundidad de la muestra de modo diferente al requerido para un crecimiento lineal de la amplitud de correlación.

La segunda explicación tiene que ver con los efectos de luminosidad presentes en muestras de diferente profundidad, dado el diferente comportamiento de la función de correlación para galaxias con diferentes rangos de luminosidad absoluta (Martínez, 1989) y las diferentes proporciones de galaxias de diferentes luminosidades absolutas en muestras de diferente profundidad. La "segregación de luminosidad", como un efecto intrínseco de los procesos de formación de galaxias y su evolución temporal, da lugar a que las galaxias más brillantes se correlacionen más que las débiles (Peebles *et al.*, 1988; Domínguez-Tenreiro & Martínez, 1989; Martínez, 1989). De acuerdo con los cálculos de Martínez (1989), los posibles efectos de segregación de luminosidad son del mismo orden de magnitud, o incluso inferiores, que los propios efectos de anomalías debidas a estructuras particulares dentro de la muestra concreta de galaxias considerada para cada cálculo, en particular cuando se trata de muestras pequeñas con estructuras muy dominantes, como sucede con el cúmulo de Coma en la muestra original del CfA.

La tercera explicación tendría que ver con efectos de distorsión observacional del tipo de los considerados en esta memoria, que serán discutidos en los capítulos posteriores. No se trata de justificar el efecto como una mera distorsión observacional, pero lo que no cabe duda es de que los datos utilizados para calcular las funciones de correlación posiblemente no han sido corregidos debidamente de las distorsiones observacionales que presentan, por lo que las conclusiones extraídas a partir de ellos no hay por

que tomarlas en sentido estricto, al menos hasta que se compruebe que las distorsiones observacionales no alteran tales conclusiones. Los resultados de Martínez (1989) acerca del efecto de las estructuras particulares en el cálculo de  $r_0$  y en particular en su variación con la profundidad sugieren que las distorsiones observacionales pueden llegar a ser notables. En particular, cuando una muestra está sesgada por la presencia de unos pocos cúmulos dominantes, las distorsiones morfológicas de los cúmulos y sus efectos de velocidades peculiares sobre los alrededores (efectos ambos que no han sido corregidos en la mayoría de las muestras utilizadas para análisis estadístico) pueden enmascarar completamente los resultados.



**Fig. 1.10** Variación de la amplitud de la función de correlación  $\xi(r)$  con la profundidad de la muestra (para cuatro submuestras de galaxias brillantes ( $M < -18.5$ ):  $D < 20$  Mpc (cuadrados negros),  $D < 25$  Mpc (pentágonos negros),  $D < 32$  Mpc (estrellas) y  $D < 40$  Mpc (pentágonos blancos). La normalización empleada tiene en cuenta la densidad efectiva de cada submuestra, lo que en principio elimina los efectos de fluctuaciones de densidad mayores a escalas cada vez mayores, resultando de ello un crecimiento "real" de la amplitud  $\xi(r)$  con la profundidad de la muestra (la figura ha sido tomada de Maurogordato & Lachieze-Rey, 1991). No obstante, si se aplican otras normalizaciones diferentes se obtienen resultados absolutamente opuestos, siendo además las variaciones calculadas del mismo orden que las debidas a calcular  $\xi(r)$  a partir de submuestras con diferentes localizaciones espaciales (Maurogordato & Lachieze-Rey, 1991).

Existe una cuarta explicación posible, que viene dada por la propia problemática estadística del cálculo de la función de correlación a partir de muestras de reducido tamaño, y más en concreto debido al problema de la

normalización de la función de correlación. El análisis estadístico realizado por Maurogordato & Lachieze-Rey (1991) acerca de la variación de las propiedades de agrupamiento de las galaxias según el rango de luminosidades, morfología, profundidad de la muestra y diferentes localizaciones espaciales de la muestra (efecto de estructuración local) han puesto de manifiesto el problema de la normalización. En concreto, la posible variación de la amplitud de la función de correlación con la profundidad de la muestra resulta ser simplemente un problema de normalización, pero sus resultados no parecen absolutamente convincentes, y no queda claro el papel que puedan jugar las propias distorsiones observacionales, incluso sean de carácter local.

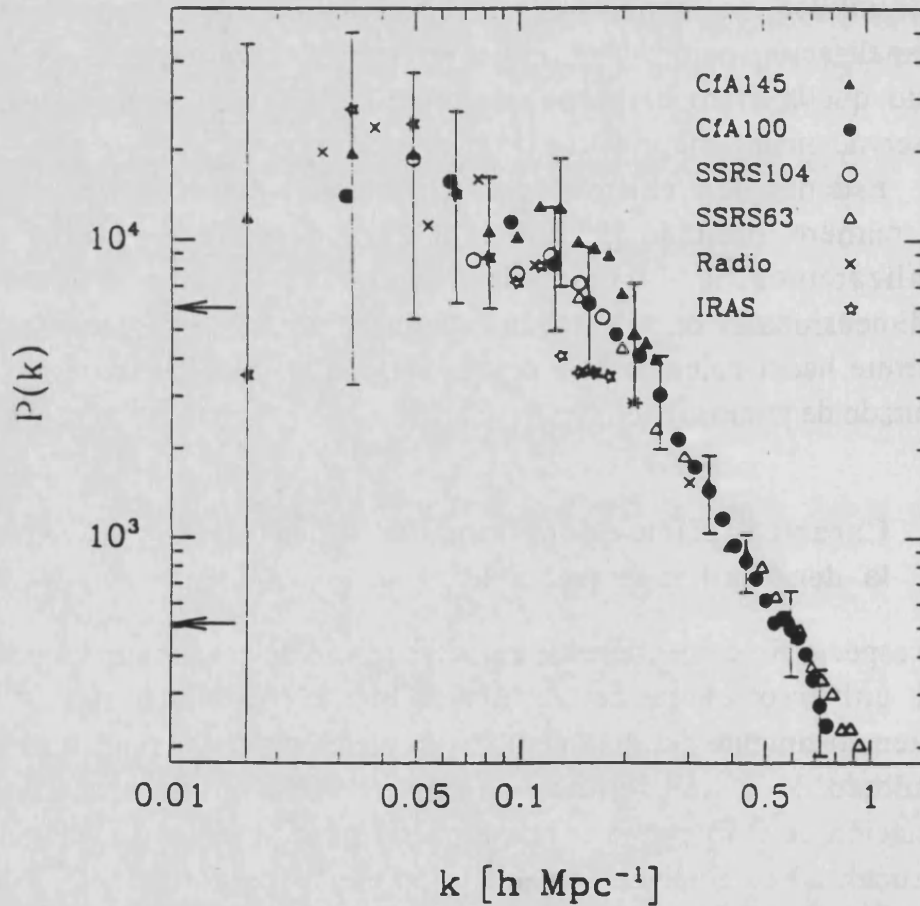
Este tipo de problemas estadísticos están ligados al cálculo a partir de un número limitado de puntos. Por tal motivo, en esta memoria analizaremos la función de correlación mediante simulaciones tridimensionales de la función (continua) contraste de densidad, lo que permite hacer cálculos más detallados que los resultantes de un número limitado de puntos.

#### **G/ Caracterización de los tamaños típicos de las estructuras: la densidad espectral $P(k)$**

Un aspecto fundamental en la caracterización de la estructura a gran escala del universo es la determinación de la densidad espectral  $P(k)$ , matemáticamente definida como el promedio en direcciones del módulo al cuadrado de la transformada de Fourier del contraste de densidad. La variación de  $P(k)$  con la escala espacial  $k$  (es decir, con el tamaño de las estructuras) caracteriza un modelo particular de universo inhomogéneo, tanto desde el punto de vista observacional como desde el punto de vista evolutivo, dado que la forma de dicha función  $P(k)$  está ligada al tipo de procesos físicos que dieron origen a las estructuras.

Hasta hace unos dos o tres años, había una gran controversia a la hora de determinar si se habían caracterizado ya las estructuras de mayor tamaño existentes en el universo (tamaño a partir del cual el universo podría considerarse esencialmente homogéneo) o si existían aún estructuras de mayor tamaño que las observadas. El problema venía dado por el hecho de que a medida que se observaban zonas del universo cada vez mayores, las estructuras observadas iban siendo cada vez mayores siendo el tamaño de las

estructuras sistemáticamente comparable con el tamaño de la muestra, lo que impedía llegar a conclusiones concretas al respecto (el ejemplo típico en el hemisferio norte ha sido el progresivo "crecimiento" de la Gran Pared a medida que se abarcaban muestras de mayor tamaño).



**Fig. 1.11** Densidad espectral  $P(k)$  determinada a partir de la muestra del CfA completa hasta magnitud 15.5, según los cálculos más recientes para las 11 slices de  $6^\circ$  ya completas (CfA145 y CfA100) (Vogeley *et al.*, 1992). Otras determinaciones a partir de muestras diferentes son indicadas para comparación, tras realizar las debidas normalizaciones. Las barras de error corresponden al intervalo de confianza del 95%, para la muestra del CfA. La figura ha sido tomada de Vogeley *et al.*, 1992.

Fue en las observaciones del hemisferio sur donde por vez primera se encontraron indicios de que se había llegado a un límite en el tamaño característico máximo de las estructuras observadas. Esta idea se ha visto recientemente confirmada con la determinación de la densidad espectral  $P(k)$  a partir de la muestra de galaxias más completa, densa y extensa actualmente disponible, el catálogo del CfA, (Vogeley *et al.*, 1992), donde se observa un pico máximo para estructuras de tamaño característico en torno a los 100 Mpc, con indicios de que  $P(k)$  tiende a caer para tamaños característicos mayores de los 150-200 Mpc, en coincidencia con los indicios apuntados por las estimaciones de  $P(k)$  a partir de la muestra del IRAS (Kaiser, 1991). En cualquier caso, la discusión esta abierta y no parece haber conclusiones claras, dada la escasa significancia estadística de la cola de  $P(k)$  para bajas frecuencias espaciales (Vogeley *et al.*, 1992). Además, según veremos en esta memoria, hay notables distorsiones observacionales en  $P(k)$ , y no solamente las predichas (Kaiser, 1987) por la teoría lineal  $P^{\text{obs}}(k) = (28/15) P^{\text{real}}(k)$ .

## H/ El problema de las galaxias lejanas

Especial mención requiere el llamado "problema de las galaxias lejanas". De acuerdo con las ideas generalmente admitidas en cosmología, cuanto más alejadas están las galaxias, las observamos en un instante más remoto del pasado, debido al tiempo que tarda la luz en llegar hasta nosotros.

El número completo de galaxias encontradas en los muestreos efectuados a lo largo de toda la esfera celeste, y en los límites actuales de detección óptica, es de unas  $2 \cdot 10^{10}$ . El gran número de objetos observados en los muestreos profundos favorece una curvatura hiperbólica (universo abierto infinito). La razón es que en un universo plano o cerrado, los volúmenes crecen demasiado lentamente con la distancia, de modo que tales modelos de universo no permiten el espacio necesario para albergar el número de galaxias observadas (Guiderdoni & Rocca-Volmerange, 1990). Sin embargo, existen modelos teóricos que permiten seguir pensando en un modelo de curvatura nula. En un esquema inflacionario, para reconciliar la teoría con las observaciones bastaría suponer que las galaxias fueron, a  $z=3$ , unas ocho veces más numerosas que en la actualidad. Las galaxias actuales serían, de este modo, el resultado de la fusión de galaxias más pequeñas a lo largo de la evolución del universo.

Algunos modelos de formación de galaxias predicen precisamente tal fusión de galaxias más pequeñas. Las galaxias gigantes habrían crecido de este modo progresivamente a partir de las galaxias más pequeñas del entorno. Las colisiones y fusiones entre galaxias serían en este modelo el esquema fundamental de la evolución galáctica.

El problema esencial radica en hallar cuáles son las galaxias primordiales. Incluso las galaxias más lejanas detectadas (0902+34 y 4C41.17) no son primordiales. Cowie ha sugerido la necesidad de introducir una constante cosmológica  $\Lambda$  no nula para solucionar el problema de las galaxias lejanas. En cualquier caso, el problema no está resuelto, y probablemente hay efectos de evolución tanto en densidad (numérica) de galaxias, como en la luminosidad intrínseca de las mismas. Ambos efectos combinados podrían explicar, de modo coherente con el resto de observaciones, el problema de las galaxias lejanas.

## **I/ Anisotropías a gran escala en la radiación de fondo de microondas**

Si bien el estudio del fondo cósmico de radiación de microondas, y en particular de las anisotropías observadas en tal radiación, no constituyen objetivo de esta memoria, el estado actual de la cosmología observacional hace imprescindible una mención especial acerca de las repercusiones que la detección de anisotropías en la radiación de fondo de microondas tiene sobre los modelos de estructura a gran escala del universo, y en particular sobre la función  $P(k)$  de las fluctuaciones de densidad que dieron origen a la formación de las estructuras que hoy constituyen las galaxias y cúmulos de galaxias (Smoot *et al.*, 1992). Pese al clamor inicial ante tal descubrimiento, no han sido pocos los que han puesto inconvenientes a tales conclusiones, alegando distorsiones observacionales locales que pueden enmascarar los resultados. En cualquier caso, habrá que esperar a un completo análisis de los datos antes de establecer conclusiones definitivas.

Los efectos observacionales de la presencia de macroestructuras sobre el fondo de radiación de microondas han sido bastante estudiados (Partridge, 1985; Kaiser & Silk, 1986; Dyer & Ip, 1988; Holtzman, 1989; Martínez-González, Sanz & Silk, 1990), incluyendo prácticamente todos los modelos posibles de estructuras (Holtzman, 1989), con lo que se puede en principio, mediante un análisis detallado de los datos, caracterizar lo que

son distorsiones observacionales y lo que son realmente fluctuaciones primordiales.

El análisis de las anisotropías en la radiación de fondo de microondas puede dar luz acerca del espectro de las fluctuaciones que originaron la estructuración. Dado que, según veremos a lo largo de esta memoria, existen importantes distorsiones observacionales en la densidad espectral observada (sobre todo para determinados tipos funcionales de densidad espectral), tal vez la comprensión de las distorsiones en la densidad espectral actualmente observada ayude a entender la relación entre la densidad espectral actual (real, y no la observada) y la densidad espectral de las fluctuaciones iniciales.

Todas estas cuestiones tienen especial interés a la hora de analizar, tanto desde un punto de vista morfológico como desde un punto de vista estadístico, las compilaciones de datos conocidas como "Catálogos de Galaxias", que hoy constituyen la base observacional del estudio de la estructura a gran escala del universo.

A lo largo de esta memoria iremos considerando estas cuestiones controvertidas que ahora han sido planteadas. Sin pretender dar solución a tales cuestiones, discutiremos hasta qué punto la consideración de distorsiones observacionales puede explicar algunos de los efectos descritos.





## Capítulo 2

# MODELIZACION DE UN UNIVERSO INHOMOGENEO

---

Para discutir adecuadamente los efectos que se producen en la observación de fuentes luminosas a un nivel cosmológico, lo primero que hay que hacer es construir una métrica espacio-temporal adecuada para la descripción de un universo inhomogéneo, dada la evidente inhomogeneidad en la distribución de la materia luminosa en el universo observado. Sin una métrica adecuada no es posible llegar a resultados que puedan ser comparados con las observaciones en el universo real.

Sin embargo, es muy difícil hacer un modelo realista de universo inhomogéneo dentro del marco de la Relatividad General. Gran parte de estas dificultades son de origen matemático, ligadas a la naturaleza no lineal de las ecuaciones de campo de Einstein y la complejidad que supone el hallar soluciones exactas que no representen modelos simplificados con simetrías restrictivas en alguno de los parámetros que describen la distribución de materia.

Dada la evidencia observacional de que el universo real no obedece a un modelo cosmológico simple, especialmente en lo relativo a la inhomogénea estructura material a gran escala, resulta necesario elaborar nuevos modelos cosmológicos que den cuenta de dichos datos observacionales, y en particular modelos capaces de describir un universo inhomogéneo.

Como señala Futamase (1988), en el contexto del estudio de la propagación de las trayectorias luminosas (Dyer y Roeder, 1972), *la carencia de una métrica realista de un universo inhomogéneo es la mayor ambigüedad en la teoría de lentes gravitatorias. Una vez que dicha métrica es conocida, el problema se convierte en una integración simple de la*

*ecuación de propagación de un haz de luz.* Desde este punto de vista, un especial esfuerzo es necesario en la modelización de un universo inhomogéneo para poder abordar el problema.

En general, uno se encuentra con tres principales cuestiones a la hora de fijar la métrica espacio-temporal para describir un universo inhomogéneo: por un lado, el tipo de simetría espacial requerida, caso de existir (esférica, por ejemplo), el tamaño de las estructuras a considerar, y el contraste de densidad que pueden alcanzar tales estructuras. Si el contraste de densidad es muy bajo es posible utilizar aproximaciones lineales, pero para contrastes de densidad superiores a la unidad otro tipo de tratamiento, distinto del lineal, ha de considerarse. El tamaño de las estructuras a considerar determina también el modelo a aplicar.

## 2.1 SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA UN MODELO INHOMOGENEO

Por supuesto, al intentar describir un modelo de universo inhomogéneo parece lo más lógico comenzar intentando hallar soluciones "exactas" de las ecuaciones de Einstein que describan distribuciones no homogéneas de materia, aunque sean modelos muy simplificados. La ventaja que tiene el considerar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein es que puede analizarse la distribución de materia considerada de modo riguroso, sin las dificultades matemáticas impuestas por trabajar con soluciones aproximativas, donde hay que distinguir los resultados intrínsecos de los artefactos matemáticos introducidos en la modelización (empalme de métricas diferentes en diferentes regiones del espacio, etc.)

Pero no es fácil hallar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, y menos soluciones realistas que describan un universo inhomogéneo sin ningún tipo de simetría, por lo que las soluciones obtenidas han considerado básicamente el caso de perturbaciones aisladas esféricamente simétricas.

Este tipo de soluciones tienen dos limitaciones: en primer lugar, describen perturbaciones aisladas y únicas en el universo, es decir, el modelo de universo consta de una región perturbada (localmente) y el resto del universo permanece imperturbado; en segundo lugar, tales inhomogeneidades han de ser esféricamente simétricas, tanto en su origen como en la evolución temporal de las mismas, en el caso de que también se considere la evolución temporal.

Como ejemplos clásicos de este tipo de modelos de universo inhomogéneo podemos considerar el modelo de queso suizo y los modelos de Bondi-Tolman para inhomogeneidades esféricas de densidad de materia.

Los modelos de "queso suizo" (Einstein y Strauss, 1945; Kantowski, 1969; Nottale, 1982) suponen la existencia de agujeros esféricamente simétricos en un medio de fondo correspondiente a un modelo de Friedman, de modo que la materia originalmente contenida dentro de cada agujero en el modelo homogéneo está ahora concentrada en el centro de cada uno de dichos agujeros. En el modelo de queso suizo tenemos, pues, un modelo de universo fondo de Friedman, al cual se le han quitado numerosas regiones esféricas a modo de agujeros, y dentro de cada uno de los agujeros (los cuales participan a su vez de la expansión general del Universo), se tiene simetría esférica, por lo que puede considerarse para tales regiones la métrica de Schwarzschild, la cual debe empalmarse con la métrica externa del modelo de Friedman. Cuando ambas métricas son empalmadas con unas condiciones de contorno adecuadas en el borde de cada uno de tales agujeros, la métrica resultante es solución de las ecuaciones de Einstein, y puede pues considerarse como un modelo cosmológico.

Este tipo de modelos de queso suizo han sido considerados en el contexto de la propagación de la luz en un universo inhomogéneo (Dyer y Oates, 1988), y no parecen ser realmente útiles para describir un modelo realista de universo inhomogéneo. Schneider (1989b) apunta tres razones para descartar este tipo de modelos de queso suizo en el contexto del efecto lente. En primer lugar, si se considera la densidad de materia a lo largo de cualquier camino arbitrario en el universo real, en este caso se tendría que la mayor parte del tiempo la luz estaría atravesando regiones en las que la densidad de materia es menor que el valor promedio de la misma en todo el universo, mientras que dicha densidad estaría ligeramente por encima del valor medio solo cuando la trayectoria luminosa atravesase un cúmulo de galaxias, o mucho mayor si cruzase una galaxia particular. Por el contrario, en el modelo de universo de "queso-suizo", la densidad a lo largo de una trayectoria es la mayor parte del tiempo justamente el valor promedio de la misma (la densidad media de la materia en el modelo de universo homogéneo de fondo), cae bruscamente cuando la trayectoria luminosa penetra en alguno de los agujeros y aumenta bruscamente cuando cruza por el centro de uno de tales agujeros donde se halla concentrada la materia, concentraciones que siempre están rodeadas de una región de baja

densidad (contraste negativo) en este tipo de modelos. En segundo lugar, la distribución de materia dentro de cada agujero ha de tener necesariamente simetría esférica en estos modelos. No se puede, pues, considerar el caso de otro tipo de estructuras no esféricas. En tercer lugar, Schneider argumenta que, si bien la interacción gravitatoria es en general de largo alcance, en los modelos de "queso-suizo" la interacción gravitatoria está confinada dentro de cada agujero, de modo que la concentración de materia en el centro de cada agujero no afecta para nada al medio externo al agujero. De este modo, un rayo de luz que pase cerca pero no penetre en el agujero no desvía en absoluto su trayectoria. En un universo real, la propagación de la luz se ve afectada por las concentraciones de materia que, aunque lejanas, ejercen influencia gravitatoria (en primera aproximación decrece con el cuadrado de la distancia, pero no existe una distancia corte a partir de la cual resulte despreciable). De hecho, existen modelos en los que la distorsión acumulativa a lo largo de un haz de rayos luminosos en un modelo con inhomogeneidades separadas a lo largo de la trayectoria no puede despreciarse.

Otro tipo de soluciones exactas inhomogéneas, los modelos de Bondi-Tolman, presentan el inconveniente de restringirse a espacios con simetría esférica, con lo que resultan convenientes para tratar estructuras aisladas particulares.

Otras soluciones exactas describen modelos de universo inhomogéneos para situaciones mucho más particulares, presentando incluso simetrías poco realistas (como la cilíndrica), lo que las hace poco apropiadas para describir un modelo general de universo inhomogéneo.

Este tipo de soluciones son útiles para la descripción general teórica de los efectos, pero no son apropiadas para describir de modo realista perturbaciones concretas, resultando particularmente difícil la descripción general de inhomogeneidades sin ningún tipo de simetría y a múltiples escalas espaciales.

## **2.2 SOLUCIONES PERTURBATIVAS DE SOLUCIONES EXACTAS PARA MODELOS HOMOGENEOS**

Dadas las dificultades existentes, fundamentalmente de tipo matemático, para obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que describan

adecuadamente las propiedades observadas en el universo real, y puesto que el universo como tal obedece bastante bien a ciertos modelos cosmológicos simples (como se deduce de la observación de la radiación de fondo), parece coherente introducir esos nuevos efectos de inhomogeneidad a través de perturbaciones a un modelo cosmológico homogéneo que represente una solución exacta de las ecuaciones de Einstein. La técnica de perturbación de una solución ya existente es matemáticamente más simple y conceptualmente, en general, más comprensible e interpretable que la obtención de soluciones exactas nuevas de notable complejidad.

La idea es, pues, introducir en un modelo cosmológico estandar las inhomogeneidades detectadas a gran escala en la distribución de materia, como perturbaciones a la métrica espacio-temporal que describe el modelo cosmológico de base.

### 2.2.1 PERTURBACIONES A UN MODELO COSMOLOGICO

La idea de perturbación de un espacio-tiempo fue discutida inicialmente, en un modo invariante de las coordenadas, por Sachs (1964), y posteriormente por Stewart y Walker (1974).

Esencialmente, en el cálculo de una perturbación se considera una familia uniparamétrica de variedades  $M_\epsilon$  (de 4 dimensiones) incluida en una variedad  $N$  de 5 dimensiones. Cada  $M_\epsilon$  representa un espacio-tiempo. El espacio-tiempo original (no perturbado) es denotado por  $M_0$ , y  $\epsilon$  es un parámetro pequeño.

Además, se necesita una "función de identificación del punto"  $p_\epsilon$  ( $p_\epsilon: M_0 \rightarrow M_\epsilon$ ) que indica qué punto en la variedad perturbada corresponde al "mismo" punto de la variedad original.

Esta función resulta convenientemente especificada dando un campo vectorial adicional  $X$  sobre  $N$ , transversal a  $M_\epsilon$ , de modo que todos los puntos sobre una misma curva integral  $\gamma$  de  $X$  deben ser considerados como el mismo punto. Resulta conveniente parametrizar dichas curvas  $\gamma$  mediante el parámetro  $\epsilon$ , de modo que

$$\frac{dx^\mu}{d\epsilon} = X^\mu \quad [2.1]$$

Sea entonces un campo geométrico  $Q_\epsilon$  definido sobre cada  $M_\epsilon$ . Para valores pequeños de  $\epsilon$  podemos desarrollar  $Q_\epsilon$  como una serie de Taylor sobre  $\gamma$ , de modo que

$$h_{\varepsilon}^*(Q_{\varepsilon}) = Q_0 + \varepsilon (\mathfrak{L}_X Q)_0 + O(\varepsilon^2) \quad [2.2]$$

donde  $\mathfrak{L}_X$  es la derivada de Lie a lo largo de  $X$  y  $h_{\varepsilon}^*$  es el función de transformación de  $M_{\varepsilon}$  a  $M_0$ . La cantidad  $\delta Q = \varepsilon (\mathfrak{L}_X Q)_0$  se denomina "perturbación lineal" de  $Q_0$ . Evidentemente,  $\delta Q$  depende de la elección de  $X$ , que en principio es arbitrario. Una elección particular de  $X$  es lo que se denomina una "elección de gauge". La diferencia entre dos elecciones,  $X$  e  $Y$ , es  $\Delta\delta Q = \varepsilon (\mathfrak{L}_{X-Y} Q)_0$ . Pero  $\xi = \varepsilon (X - Y)$  es un campo vectorial en cada  $M_{\varepsilon}$ , luego  $\delta Q$  es independiente de gauge ( $\Delta\delta Q = 0$ ) si y solo si  $\mathfrak{L}_{\xi_0} Q_0 = 0$ , para cuadvectores arbitrarios  $\xi_0$  en  $M_0$ . Esto se cumple si y solo si  $Q_0 = 0$ , o bien  $Q_0$  es un campo escalar constante, o si  $Q_0$  es una combinación lineal de productos de  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  con coeficientes constantes.

Para una descripción práctica de la teoría linealizada se hace uso explícito de coordenadas. En primer lugar, se elige un conjunto de coordenadas  $\{x^{\alpha}\}$  en  $M_0$ . Esto define un conjunto de coordenadas en cada  $M_{\varepsilon}$  exigiendo que  $x^{\alpha}$  sea constante a lo largo de las curvas integrales  $\gamma$  de  $X$ . Si consideramos la curva integral  $\eta$  de  $Y$  a través de un punto particular de  $M_0$ , que intersecte  $M_{\varepsilon}$  en un punto cuyas coordenadas sean  $y_{\varepsilon}^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi_0^{\alpha} + O(\varepsilon^2)$ . Un cambio de gauge puede interpretarse como una transformación de coordenadas sobre  $M_0$ :  $x^{\alpha} \rightarrow y_{\varepsilon}^{\alpha}$ , próxima a la identidad. Podemos entonces calcular el cambio en las componentes de  $Q_0$  bajo tal transformación, obteniendo finalmente  $\Delta\delta Q$ .

Existen dos grandes tipos de esquemas perturbativos a un modelo de universo homogéneo. El primero de ellos se basa en *perturbaciones en la geometría* del espacio-tiempo, y consisten en modificar el tensor  $g_{\mu\nu}$  añadiendo un termino pequeño  $\delta g_{\mu\nu}$ , que es tratado a primer orden en el desarrollo perturbativo. El segundo se basa en *perturbaciones en la materia*, que consisten en modificar el tensor energía-impulso  $T_{\mu\nu}$ , mediante un término  $\delta T_{\mu\nu}$  análogo.

Evidentemente, ambas perturbaciones no son independientes. La diferencia está en cual de los parámetros posibles es inicialmente perturbado (en función de simplicidad matemática o simetrías espaciales requeridas en la solución o bien en función del tipo de estructuras materiales que la nueva solución perturbativa se pretende sea capaz de describir). De hecho, una perturbación en la métrica se traduce, en función de las ecuaciones de Einstein, en una perturbación correspondiente en todas las componentes del tensor energía-impulso (y no sólo en la densidad material), mientras que

una perturbación en alguna de las componentes del tensor energía impulso se traduce en las perturbaciones consiguientes en la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

### 2.2.2 PERTURBACIONES A PEQUEÑA ESCALA Y GRANDES PERTURBACIONES COSMOLOGICAS

Aunque, en principio, las perturbaciones en la densidad de materia pueden corresponder a cualquier escala espacial (de hecho, diferentes teorías de formación de estructuras determinan diferentes leyes de formación de tales estructuras en función de la escala espacial de las mismas), dos grandes tipos posibles de perturbaciones en la densidad de materia suelen considerarse. El primero de ellos es útil para describir estructuras pequeñas, aunque de contraste de densidad elevado (no lineal), tales como estrellas o galaxias. El otro tipo de perturbaciones corresponde a grandes regiones espaciales (comparables incluso con el tamaño del horizonte), aunque el contraste de densidad es muy pequeño (régimen lineal).

Futamase (1988) introdujo una métrica con el objetivo expreso de ser utilizada como un modelo realista de universo inhomogéneo, con un tratamiento más coherente de tales inhomogeneidades en el marco de relatividad General y en un esquema de aproximación postnewtoniana.

Para analizar este aspecto, Futamase introduce dos parámetros independientes en su modelo, ambos pequeños,  $\epsilon$  y  $\kappa$ . El parámetro  $\epsilon$  está asociado con la amplitud de la perturbación  $h$  a la métrica  $g$  ( $h = O(\epsilon^2)$ ), y el parámetro  $\kappa$  está asociado con el cociente entre la escala de variación ( $\lambda$ ) de  $h$  y la escala de variación ( $L$ ) de la métrica  $g$  (y en particular del factor de expansión cosmológica  $a(t)$ ); es decir,  $\kappa = \lambda/L$ .

La aplicabilidad del modelo exige entonces como condición que  $\epsilon > \kappa$ . Así, en el caso de un cúmulo de galaxias, cuyo tamaño típico es del orden de pocos Mpc, entonces

$$\kappa \approx \frac{1 \text{ Mpc}}{10^4 \text{ Mpc}} \approx 10^{-4} \quad [2.3]$$

(pues  $L \approx 10^4$  Mpc, el tamaño actual del horizonte).

El modelo de Futamase está, pues, adaptado a perturbaciones de la métrica cuyas amplitudes ( $\approx O(\epsilon^2)$ ) sean mayores que  $10^{-8}$ . En el caso de un supercúmulo, cuyo tamaño es del orden de 50 Mpc, la amplitud de la perturbación de la métrica no cumple esta condición, por lo que el modelo de Futamase debe aplicarse a estructuras pequeñas (estrellas, galaxias y —a



lo sumo— cúmulos de galaxias), mientras que no es válida para grandes perturbaciones (cúmulos, supercúmulos, vacíos). Para este tipo de grandes perturbaciones hay que tener en cuenta términos de orden superior en el desarrollo de la métrica perturbada (términos del tipo  $\left(\frac{a''}{a}\right) \bar{h}$ , que son despreciados en el modelo de Futamase).

Como señalan Watanabe y Tomita (1990), a la hora de elegir un modelo de espacio-tiempo, incluso en el caso de inhomogeneidades no lineales, las perturbaciones a la métrica resultan pequeñas siempre que estemos considerando *inhomogeneidades cosmológicas usuales como estrellas, galaxias o cúmulos de galaxias*. Efectivamente, en este caso suele asumirse que la aproximación newtoniana es válida en un universo en expansión (Nariai y Ueno, 1960; Tomita, 1988; Watanabe y Tomita, 1990), y el formalismo a aplicar es considerado como *sistemático* en la formulación de Futamase (1988). Watanabe y Tomita (1990) centran su atención en modelos en los que toda la materia está condensada en objetos compactos (como galaxias) de tamaño actual fijado. Todos estos objetos compactos ("partículas") se supone que tienen la misma masa y el mismo tamaño. El potencial newtoniano puede ser entonces calculado para una distribución establecida de tales "partículas" y la métrica espacio-temporal aplicada es una perturbación al modelo de universo en polvo espacialmente plano de Einstein-de Sitter, usando como métrica para el universo inhomogéneo la aproximación potencial que luego discutiremos.

Este tipo de modelo de universo inhomogéneo es efectivamente válido siempre que estemos considerando inhomogeneidades del tipo de estrellas, galaxias y —sólo hasta cierto sentido— cúmulos de galaxias, pero *no* resulta aplicable en el caso de considerar inhomogeneidades de cúmulos de galaxias (grandes cúmulos) o supercúmulos, vacíos cosmológicos o cualquier otro tipo de estructura de gran tamaño, donde los efectos cosmológicos son ya notables a la escala del tamaño de las propias estructuras.

En precisamente en este caso de grandes estructuras cosmológicas cuando se hace necesario introducir una métrica capaz de dar cuenta de tales efectos cosmológicos incluso a la escala de la perturbación. No puede seguirse, pues, en este caso el planteamiento de suponer una inhomogeneidad localmente newtoniana sumergida en un medio cosmológico de fondo, sino

la propia estructura local no es ya newtoniana, sino que participa también la expansión general del medio cosmológico de fondo.

Dadas las dificultades en utilizar perturbaciones newtonianas para describir estructuras a gran escala en el universo, es preciso dedicar especial atención al tratamiento a seguir en el caso de perturbaciones muy grandes, comparables con el tamaño del horizonte, donde tales modelos pseudonewtonianos son claramente no aplicables.

### 2.3 PERTURBACIONES LINEALES A UNA METRICA HOMOGENEA PARA DESCRIBIR REGIONES CON CONTRASTE DE DENSIDAD LINEAL: EL MODELO DE SACHS-WOLFE

Las perturbaciones lineales a los modelos de universo de Einstein-de Sitter pueden expresarse mediante modificaciones de la métrica del tipo (Sachs & Wolfe, 1967):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) [\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}] dx^\alpha dx^\beta \quad [2.4]$$

Tales perturbaciones a la métrica representan una perturbación a la densidad del tipo  $\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho$

Sin pérdida de generalidad, podemos adoptar un sistema de coordenadas (de tipo lagrangiano)  $x^\mu$  que sean coordenadas comóviles y en las que la coordenada  $\eta$  esté relacionada con el tiempo propio comóvil  $t$  por la ecuación  $t = 2\eta^3/3H_0$ . La caracterización formal de dichas coordenadas viene dada por las siguientes relaciones (Sachs & Wolfe, 1967; y referencias allí citadas)

$$(a) \quad u^\alpha = \frac{1}{a(\eta)} \delta_0^\alpha \quad \left( u = \frac{1}{a(\eta)} (1, 0, 0, 0) \right)$$

(lo que es equivalente a hacer  $G_0^i = 0$ )

[2.5]

$$(b) \quad h_{00} = 0$$

Elegimos unas coordenadas de este tipo porque así tienen un significado directo independiente del esquema de aproximación. De este modo, en la aproximación lineal resulta finalmente un conjunto restringido de "transformaciones de gauge" permitidas

$$[x]^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha(x^\mu) \quad [2.6]$$

donde  $\xi^\alpha$  es pequeño (en el mismo sentido que consideramos pequeñas las perturbaciones  $h_{\alpha\beta}$ ). En la aproximación lineal, las condiciones [2.5] restringen la forma permitida de  $\xi^\alpha$  a las siguientes condiciones equivalentes

$$u^\alpha{}_{,\beta} \xi^\beta - \xi^\alpha{}_{,\beta} u^\beta = 0 \quad [2.7]$$

es decir,

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{b(x^k)}{a(\eta)} \\ \xi^i &= c^i(x^k) \end{aligned} \quad [2.8]$$

donde  $b$  y  $c^i$  son funciones arbitrarias sólo de las coordenadas espaciales  $x^k$ .

El cambio funcional inducido en  $h_{\alpha\beta}$  por estas transformaciones es la derivada de Lie de  $g_{\alpha\beta}$  respecto a  $\xi^\alpha$ , es decir,

$$\begin{aligned} [h]_{ik} &= h_{ik} + c_{i,k} + c_{k,i} + 2 \left( \frac{a'}{a^2} \right) b \eta_{ik} \\ [h]_{i0} &= \frac{b_{,i}}{a} + h_{i0} \\ [h]_{00} &= h_{00} = 0 \end{aligned} \quad [2.9]$$

En todas estas ecuaciones, evidentemente, los índices de todas las cantidades tensoriales que representan magnitudes pequeñas (del orden de la perturbación) suben y bajan con la métrica de Minkowski, de modo que  $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\rho} h_{\gamma\rho}$ .

Todo esto hace que cuando suponemos condiciones de regularidad apropiadas para  $h_{i0}$  y  $h_{ik}$  podemos encontrar la solución general de las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein (tratadas como perturbación a una métrica conocida solución de tales ecuaciones). El método consiste en tomar primero la transformada de Fourier espacial de  $h_{i0}$  y  $h_{ik}$ , de modo que entonces se obtienen las soluciones de la ecuación y se transforman tales soluciones de nuevo al espacio de posiciones.

Las soluciones generales de las ecuaciones de campo perturbadas, para el caso de presión nula, son

$$h_{ik} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{D_{ik}}{\eta} \right] - 2 \left( \frac{8}{\eta^3} - \frac{\Delta}{\eta} \right) (C_{i,k} + C_{k,i}) + \frac{A_{,ik}}{\eta^3} + \eta_{ik} B - \frac{\eta^2}{10} B_{,ik} \quad [2.10 a]$$

$$h_{i0} = -2 \frac{\Delta C_i}{\eta^2} \quad [2.10 \text{ b}]$$

$$\delta\rho = \frac{H_R^2}{4} \Delta \left[ \frac{6A}{\eta^9} - \frac{3B}{5\eta^4} \right] \quad [2.10 \text{ c}]$$

donde A y B son dos funciones "escalares" arbitrarias que sólo dependen de  $x^i$  (de las coordenadas espaciales), que corresponden a potenciales para las perturbaciones de densidad y vienen determinados por las condiciones iniciales,  $C_k$  es una función "vector" de las coordenadas espaciales  $x^i$ , que debe satisfacer la condición de transversalidad

$$C^{k,k} = 0 \quad [2.11]$$

que está relacionado con el tensor de rotación perturbado, y  $D_{ik}(\eta, x^i)$  es un "tensor" arbitrario que satisface:

$$D_{ik} = D_{ki} \quad (\text{simétrico}) \quad [2.12 \text{ a}]$$

$$D^k_k = 0 \quad (\text{traza nula}) \quad [2.12 \text{ b}]$$

$$D_{ki,k} = 0 \quad (\text{divergencia nula}) \quad [2.12 \text{ c}]$$

y que es solución de la ecuación de D'Alembert en el espacio plano

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Delta \right] D_{ik} = 0 \quad [2.13]$$

(de modo que dar  $D_{ik}$  es equivalente a dar 4 funciones sólo de  $x^i$ ).

Podemos preguntarnos qué transformaciones de gauge están todavía permitidas después de haber impuesto las restricciones [2.8] y haber exigido que las soluciones tengan la forma particular dada por las expresiones [2.10]. A partir de las expresiones [2.9] y [2.10] puede verse que las condiciones impuestas de momento son  $c_{i,k} + c_{k,i} = 0$  y  $b=0$ . Luego pueden hacerse aún transformaciones del tipo  $c_i = \epsilon_{ik} x^k + \epsilon_i$ , donde  $\epsilon_{ik} = -\epsilon_{ki} = \text{cte}$ ,  $\epsilon_i = \text{cte}$ . Es decir, nuestro sistema de coordenadas está fijado salvo posibles rotaciones ordinarias y traslaciones de las coordenadas espaciales.

Hay, pues, dos tipos de perturbaciones que describen fluctuaciones de densidad. Los términos responsables de tales fluctuaciones de densidad provienen de las magnitudes A y B introducidas en la solución general, para el caso de presión nula. En ambos casos, la perturbación  $\delta\rho$  ( $\equiv \rho - \bar{\rho}$ ) decrece, pero el contraste de densidad, definido del modo

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad [2.14]$$

crece como  $\delta = \delta_0 \eta^2$  (para el campo B) o decrece como  $\delta = \delta_0 \eta^{-3}$  (para el campo A), ( $\bar{\rho}$  representa la densidad del medio uniforme no perturbado).

Puesto que la mayoría de las galaxias resultan estar en proceso aglomerativo (formación de agrupamientos progresivos que suponen un incremento en la densidad en tales zonas de acumulación de galaxias), es comunmente aceptado que las fluctuaciones de densidad que originaron la estructura presente fueron del tipo creciente, ya que si  $\delta$  decreciese en una región entonces las galaxias serían individualmente lanzadas hacia fuera de dicha región, en contra de la evidencia observacional.

Este modo creciente es descrito por medio del campo escalar  $B(x)$ , independiente de la coordenada temporal  $x^0 = \eta$ , solución de una ecuación de Laplace

$$\Delta B = -20 \eta^2 \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \quad [2.15]$$

Ahora bien, como  $\left[ \eta^2 \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \right]$  es independiente de  $\eta$ , podemos hacer

$$\eta^2 \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} = \left[ \eta^2 \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \right]_{\eta = \eta_R} \quad [2.16]$$

y como  $\eta_R = 1$  (por normalización), resulta

$$\Delta B = -20 \left[ \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \right]_{\eta = \eta_R} = -20 \delta_0 \quad [2.17]$$

donde  $\delta_0$  es el valor actual del contraste de densidad.

En la deducción de la ecuación [2.17] se ha considerado la aproximación  $\delta = \delta_0 \eta^2$  (es decir, la evolución del contraste de densidad que prescribe la solución lineal), por lo que nos vemos obligados a aceptar que desde la época en la cual consideramos la aparición de la inhomogeneidad hasta la época actual el contraste de densidad evoluciona con el tiempo de acuerdo con la teoría lineal. Debemos limitarnos entonces a considerar inhomogeneidades sólo a un redshift ( $z$ ) no demasiado grande, pues la aproximación lineal es correcta para describir el campo de una gran inhomogeneidad, pero una mala aproximación para describir la evolución de la dinámica interna de la estructura.

La métrica correspondiente al modo creciente es, en esta aproximación lineal (Sachs & Wolfe, 1967)

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + (1+B) \delta_{ij} dx^i dx^j + \frac{\eta^2}{10} B_{,ij} dx^i dx^j \right] \quad [2.18]$$

es decir,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= B \delta_{ij} + \frac{\eta^2}{10} B_{,ij} \\ h_{00} &= h_{0i} = 0 \end{aligned} \quad [2.19]$$

En el caso de considerar inhomogeneidades con simetría esférica, para tales inhomogeneidades podemos obtener una solución de la ecuación de Laplace usando el teorema de Gauss, lo que da directamente

$$\vec{\nabla} B = -\frac{5}{\pi r^3} \vec{x} \quad [2.20]$$

siendo

$$\Delta(r) = 4\pi \int_0^r \delta(x) x^2 dx \quad [2.21]$$

es decir,  $\Delta(r)$  es el contraste total de densidad contenido en una esfera de radio  $r$ . El campo  $B$  viene entonces determinado por la integral

$$B(r) = -\frac{5}{\pi} \int_0^r \frac{\Delta(x)}{x^2} dx \quad [2.22]$$

Dicho campo  $B$  juega un papel similar al de un potencial newtoniano, como se deduce de la forma de las ecuaciones resultantes, en particular de la ecuación [2.10 c]. En efecto, si introducimos un "potencial newtoniano" definido del modo  $\Phi = -\frac{3}{10} B$ , es fácil ver que  $\Phi$  satisface la ecuación

$$\Delta \Phi = 4\pi G a^2 \delta \rho \quad [2.23]$$

que corresponde a la ecuación que satisface efectivamente el potencial newtoniano en la aproximación cosmológica newtoniana, donde la fuente no es la densidad de materia sino el contraste de densidad de materia (es decir, las perturbaciones de densidad del medio).

En el caso de simetría esférica, tomando el origen en el centro de dicha inhomogeneidad con simetría esférica, resulta

$$B_{,i} = B' \frac{x_i}{r} \quad [2.24]$$

$$B_{,ij} = \frac{B'}{r} \delta_{ij} + \left( \frac{B''}{r^2} - \frac{B'}{r^3} \right) x_i x_j \quad [2.25]$$

donde

$$B' \equiv \frac{dB}{dr} \quad B'' \equiv \frac{d^2B}{dr^2} \quad [2.26]$$

de modo que la métrica resultante es

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + \left( 1 + B + \frac{\eta^2 B'}{10r} \right) d\vec{x} \cdot d\vec{x} + \frac{\eta^2}{10} \left( \frac{B''}{r^2} - \frac{B'}{r^3} \right) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 \right] \quad [2.27]$$

y como

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = \delta_{ij} x^i dx^j = r dr \quad [2.28]$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \delta_{ij} dx^i dx^j = (dr)^2 + r^2((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta (d\phi)^2) \quad [2.29]$$

dicha métrica puede expresarse en coordenadas esféricas del modo

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + \left( \left( 1 + B + \frac{\eta^2 B'}{10r} \right) + \frac{\eta^2}{10r} (r B'' - B') \right) dr^2 + \left( 1 + B + \frac{\eta^2 B'}{10r} \right) r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \right] \quad [2.30]$$

En coordenadas esféricas, la ecuación [2.12] queda reducida a

$$\frac{d^2B}{dr^2} = -20 \left( \delta_o - \frac{\Delta_o}{2\pi r^3} \right) \quad [2.31]$$

(donde tanto  $\delta$  como  $\Delta$  son los correspondientes a la época actual ( $\delta_o, \Delta_o$ ))

#### 2.4 PERTURBACIONES LINEALES A UNA METRICA HOMOGENEA PARA DESCRIBIR REGIONES CON CONTRASTE DE DENSIDAD NO LINEAL: LA APROXIMACION POTENCIAL

Los resultados del apartado anterior (modelo de Sachs-Wolfe) son válidos para valores infinitesimales del contraste de densidad, pudiendo ser arbitrariamente grande el tamaño de la inhomogeneidad. En los catálogos de galaxias se alcanzan valores del orden de la unidad para el contraste de densidad en regiones pequeñas comparadas con el horizonte. El gradiente espacial del campo B es en ellas mucho mayor que B, y por lo tanto no pueden seguir despreciándose los términos cuadráticos en las derivadas

primeras de B. Necesitamos por lo tanto una extensión de la solución de Sachs-Wolfe para describir dichas regiones. Dautcourt (1968) criticó el uso de la métrica de Sachs-Wolfe en tales situaciones y propuso una perturbación de un modelo de Friedmann en el gauge longitudinal, del tipo

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ - (1 + 2\Phi) d\eta^2 + (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \} \quad [2.32]$$

con un potencial de la forma

$$\Phi = \frac{\tilde{\Phi}(x^i)}{a(\eta)} \quad [2.33]$$

El principal argumento para utilizar este gauge se basa en la ausencia de derivadas del potencial  $\Phi$  en la expresión de la métrica, que podrían alcanzar valores grandes en las zonas densas y que por tanto podemos describir zonas de contraste moderado con la ecuaciones de Einstein linealizadas. Este argumento es algo débil, porque los términos cuadráticos en las derivadas primeras no pueden despreciarse en dicho caso. La perturbación a la métrica en el gauge longitudinal se mantiene pequeña, pero el tensor energía-impulso contiene términos cuadráticos en el gradiente del potencial que se desprecian en la aproximación lineal. El cambio de gauge no resuelve el problema porque lo que se necesita es conservar términos cuadráticos (al menos en las derivadas primeras).

Dautcourt no estudió la relación de su métrica con la de Sachs-Wolfe. En este apartado veremos que la solución de Sachs-Wolfe puede escribirse como una perturbación en el gauge longitudinal, pero con un potencial independiente del tiempo. La extensión de la métrica de Sachs-Wolfe a las regiones de contraste intermedio puede hacerse de varias maneras. Podríamos seguir buscando soluciones de presión nula resolviendo las ecuaciones de Einstein a segundo orden. Otra posibilidad es mantener la forma de la perturbación de la métrica y analizar el significado del tensor de energía manteniendo los términos cuadráticos en el gradiente del potencial. Los resultados presentados a continuación están en su mayor parte tomados de Ferrando-Morales-Portilla (1992).

### Expresión de la métrica de Sachs-Wolfe en el gauge longitudinal

Consideremos de nuevo la métrica de Sachs-Wolfe en un sistema de coordenadas comóvil con la materia  $(\eta, x^i)$



$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -d\eta^2 + \left( (1+B) \delta_{ij} + \frac{1}{10} \eta^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^i dx^j \right\} \quad [2.34]$$

Según veremos en el capítulo siguiente, la expresión del redshift de una señal cuando la fuente y el observador están en reposo respecto al sistema de coordenadas  $\{\eta, x^i\}$  contiene un desarrollo con términos proporcionales a las derivadas del campo B tanto en la posición de la fuente como en la posición del observador,  $\dot{B}_E$  y  $\dot{B}_R$ , además de otros términos directamente proporcionales al campo B en la fuente y en el observador.

Los términos proporcionales a las derivadas del campo B no aparecerán si se calcula el redshift correspondiente a una fuente y un observador moviéndose con cuadrivelocidad

$$n^\alpha = \left( \frac{1}{a(\eta)}, V^i \right) \quad [2.35]$$

donde

$$V^i = -\frac{H_0}{20\eta} \partial_i B \quad [2.36]$$

Introduzcamos un sistema de coordenadas  $(\eta', x'^i)$  comovil respecto al campo vectorial  $n^\alpha$  (es decir, un sistema de coordenadas respecto al cual las curvas  $\{x'^i = \text{constante}\}$  son curvas integrales del campo vectorial  $n^\alpha$ ). Es evidente que la transformación debe ser de la forma

$$\eta' = \eta + \xi \quad [2.37]$$

$$x'^i = x^i + \int a(\eta) V^i d\eta \quad [2.38]$$

Expresemos en ellas la métrica de Sachs-Wolfe del modo

$$ds^2 = a^2(\eta') \left\{ - (1+h_{00}) d\eta'^2 + 2h_{0i} d\eta' dx'^i + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx'^i dx'^j \right\} \quad [2.39]$$

donde

$$h_{00} = -2\partial_\eta \xi \quad [2.40]$$

$$h_{0i} = \partial_i \xi + a(\eta) V^i$$

$$h_{ij} = B\delta_{ij} + \frac{1}{10}\eta^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + 2 \int a(\eta) V^i{}_{,j} d\eta \quad [2.41]$$

sustituyendo  $V^i$  obtenemos

$$ds^2 = a^2(\eta') \left\{ - (1 - 2\partial_\eta \xi) d\eta'^2 + 2(\partial_i \xi + a(\eta) V^i) d\eta' dx'^i + \right. \\ \left. + (1 + B) \delta_{ij} dx'^i dx'^j \right\} \quad [2.42]$$

Podemos introducir además coordenadas sincronas, ya que la ecuación  $h_{oi} = 0$ ,

$$\partial_i \xi + a(\eta) V^i = 0 \quad [2.43]$$

tiene siempre solución a primer orden en  $\phi$  dada por

$$\xi(\eta, x^i) = \frac{1}{10} \eta B \quad [2.44]$$

con lo que la métrica queda en la forma

$$ds^2 = a^2(\eta') \left\{ - (1 - 2\partial_\eta \xi) d\eta'^2 + (1 + B) \delta_{ij} dx'^i dx'^j \right\} \quad [2.45]$$

Finalmente, sustituyendo

$$\eta = \left( 1 + \frac{1}{3} \phi \right) \eta' \quad [2.46]$$

en la expresión de  $a(\eta)$ , y despreciando términos cuadráticos en  $B$  se obtiene

$$ds^2 = a^2(\eta') \left\{ - \left( 1 - \frac{3}{5} B \right) d\eta'^2 + \left( 1 + \frac{3}{5} B \right) \delta_{ij} dx'^i dx'^j \right\} \quad [2.47]$$

Introduciendo el potencial  $\phi$  de la forma

$$\phi = - \frac{3}{10} B \quad [2.48]$$

y efectuando el siguiente cambio de coordenadas

$$\eta' = \left( 1 - \frac{1}{3} \phi \right) \eta \quad [2.49]$$

$$x'^i = x^i - \frac{1}{6} \eta^2 \partial_i \phi \quad [2.50]$$

la métrica de Sachs-Wolfe se puede escribir

$$ds^2 = a^2(\eta') \left\{ - (1 + 2\phi) d\eta'^2 + (1 - 2\phi) \delta_{ij} dx'^i dx'^j \right\} \quad [2.51]$$

siendo  $\phi$  una función de las coordenadas espaciales únicamente. El sistema de coordenadas no es comóvil con la materia. La cuadrivelocidad de la materia es en estas coordenadas viene dada por

$$u'^{\alpha} = \left( \frac{1}{a(\eta')} \quad , \quad - \frac{H_0}{6\eta} \partial_i \phi \right) \quad [2.52]$$

### Extensión de la métrica de Sachs-Wolfe a regiones con contraste de densidad del orden de la unidad, a escalas mucho menores que el horizonte

Consideremos tres infinitésimos  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$  y consideremos regiones en las que se cumpla  $|\phi| = O(\epsilon_0)$ ,  $|\partial_i \phi| = O(\epsilon_1)$ ,  $|\partial_i \partial_j \phi| = O(\epsilon_2)$ . A escalas menores que el horizonte tendremos  $\epsilon_0 \ll \epsilon_1 \ll \epsilon_2$ . Supongamos además que  $\epsilon_1^2 = \epsilon_0$  y  $\epsilon_2 = O(1)$ . Es pues necesario guardar los términos cuadráticos en el gradiente del potencial (Ferrando-Morales-Portilla, 1992).

Una métrica del tipo

$$ds^2 = a^2(\eta') \left\{ - (1 + 2\phi) d\eta'^2 + (1 - 2\phi) \delta_{ij} dx'^i dx'^j \right\} \quad [2.53]$$

corresponde a un fluido con densidad energía, presión y flujo de energía

$$\rho = (1 - 2\phi) \rho_B + \frac{1 + 4\phi}{8\pi G a^2} \Delta \phi - \frac{3}{8\pi G a^2} \partial^m \phi \partial_m \phi \quad [2.78]$$

$$p = - \frac{1}{24\pi G a^2} (8\phi \Delta \phi - 7(\Delta \phi)^2) \quad [2.54]$$

$$q_i = - \frac{a}{4\pi G a^2} \partial_i \phi \quad [2.55]$$

y un tensor de presiones anisotrópico que no reproducimos aquí. La métrica en cuestión, con  $\phi$  independiente del tiempo, es conformemente estacionaria. El campo vectorial  $\partial_\eta$  es un vector conforme Killing. El vector unitario en la dirección  $\partial_\eta$  representa el único observador capaz de observar radiación isótropa (Ferrando *et al.*, 1992). Por lo tanto, parece natural interpretar el flujo de energía como movimiento colectivo de materia respecto al observador capaz de ver radiación isótropa.

La materia se mueve respecto al sistema de coordenadas  $(\eta', x'^i)$  con velocidad

$$V_i = - \frac{q_i}{\rho} = - \frac{2a^2}{3\dot{a}} \frac{1}{1 + \delta} \partial_i \phi \quad [2.56]$$

donde se ha escrito  $\delta = (\rho - \rho_B)/\rho_B$ .

La densidad de energía y presión, respecto al observador comóvil con la materia, vienen dadas respectivamente por

$$\rho' = (1 - 2\phi) \rho_B + \frac{1 + 4\phi}{8 \pi G a^2} \Delta\phi - \frac{3}{8 \pi G a^2} \partial^m \phi \partial_m \phi - \rho v^2 \quad [2.57]$$

$$p' = - \frac{1}{24 \pi G a^2} (8\phi \Delta\phi - 7(\Delta\phi)^2) - \frac{1}{3} \rho v^2 \quad [2.58]$$

La primera ecuación puede usarse para determinar el potencial a partir del contraste de densidad. En primera aproximación se tiene

$$\Delta\phi = 8 \pi G a^2 \rho_B \delta \quad [2.59]$$

Sustituyendo este resultado en la expresión que determina la presión resulta

$$p' = \frac{4}{3} \phi \rho_B \delta - \frac{1}{6 \pi G a^2} \left[ \frac{7}{4} + \frac{1}{3(1+\delta)} \right] (\Delta\phi)^2 \quad [2.60]$$

Esta presión puede interpretarse en el contexto de una teoría cinética, es decir como asociada a un sistema de partículas en interacción gravitatoria. De ella podemos obtener información de la velocidad cuadrática media de las partículas. Sin embargo, no podemos simplemente identificar  $p'$  con  $\rho' \langle v_{\text{aleatoria}}^2 \rangle / 3$ , debido a que cuando la función de correlación es no nula existe una contribución dinámica a la presión que debe tenerse en cuenta. No desarrollaremos aquí esta cuestión, pero señalemos que parece natural utilizar métricas de la forma [2.53] con potenciales determinados por la ecuación [2.59] para describir regiones con contraste de densidad del orden de la unidad.



## Capítulo 3

### DETERMINACION DE LAS COORDENADAS DE UNA FUENTE LUMINOSA A PARTIR DE LOS OBSERVABLES REDSHIFT-ANGULO

---

La determinación de la estructura a gran escala del universo se realiza fundamentalmente mediante la observación de fuentes luminosas, y la determinación de sus propiedades, tales como: sus posiciones angulares, su distancia (a través de distintos estimadores, como redshift u otros), su luminosidad (o magnitud aparente), sus propiedades morfológicas en el caso de tratarse de galaxias, etc. La observación de objetos no luminosos ha de hacerse siempre de modo indirecto y aún está más dentro del terreno especulativo que el meramente observacional.

Desgraciadamente, incluso en el caso de fuentes luminosas, gran parte de estas observaciones están sesgadas por las distorsiones sufridas por la luz desde la salida de dicha fuente en su camino hasta llegar a nosotros, con lo cual no realizamos tampoco mediciones directas sino siempre indirectas de las propiedades de cada galaxia.

Tales distorsiones afectan no sólo a la determinación de su distancia (que, por hacerse generalmente a través de la determinación del corrimiento hacia el rojo, es evidente que efectos de velocidades peculiares propias de cada galaxia afectan dicha determinación) sino que también se producen distorsiones en la posición angular de la galaxia tal como es observada en la bóveda celeste (por deflexión gravitatoria de la trayectoria luminosa).

Todos estos efectos hacen que en la observación de fuentes luminosas en un universo inhomogéneo lo que realmente estemos observando (redshift y posiciones angulares) no corresponden a la posición real (radial y

angular) de las galaxias, lo que hace necesario conocer como interpretar los observables redshift-ángulo en términos de coordenadas reales de las galaxias.

Comenzaremos analizando la descripción de los efectos en el gauge de Sachs-Wolfe, y después repetiremos el cálculo en el gauge de la aproximación potencial.

### 3.1 DETERMINACION DE LAS COORDENADAS COMOVILES EN EL GAUGE DE SACHS-WOLFE

De acuerdo con lo visto en el Capítulo 2 al analizar las diferentes formas de modelizar un universo inhomogéneo, determinemos en primer lugar las coordenadas comóviles (en función del redshift y de la posición angular observada) en el gauge de Sachs-Wolfe, es decir, adoptando como modelo de universo inhomogéneo el que viene dado por la solución de Sachs-Wolfe de las ecuaciones de campo de Einstein.

En Relatividad General, el cálculo de trayectorias equivale a resolver las ecuaciones que determinan las geodésicas nulas para la métrica que estamos considerando como modelo de universo inhomogéneo, y tales geodésicas nulas corresponderán a las trayectorias luminosas en dicho universo.

#### El problema de las geodésicas en el gauge de Sachs-Wolfe

Siguiendo el método desarrollado por Sachs y Wolfe (1967), las ecuaciones de las geodésicas de la métrica de Einstein-de Sitter linealmente perturbada pueden ser integradas usando técnicas conformes, haciendo uso del hecho conocido de que dos métricas soluciones de las ecuaciones de Einstein que sean conformemente equivalentes tienen iguales geodésicas nulas.

Consideremos, pues, la métrica  $g_{\alpha\beta}^*$  dada por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta = [\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}] dx^\alpha dx^\beta \quad [3.1]$$

que difiere de  $g_{\alpha\beta}$  en el factor conforme  $a^2(\eta)$ . Las ecuaciones de las geodésicas, expresadas de forma adecuada para calcular el vector tangente a las curvas geodésicas de dicha métrica  $g_{\alpha\beta}^*$ , son

$$\frac{d}{dw} \left[ (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{dx^\beta}{dw} \right] = \frac{1}{2} h_{\mu\nu, \alpha} \dot{k}^\mu \dot{k}^\nu \quad [3.2]$$

donde  $\dot{k}^{\beta} = \frac{dx^{\beta}(w)}{dw}$  es el vector tangente a la geodésica y  $w$  es el parámetro afín. Dicha ecuación [3.2] determina las geodésicas  $x^{\alpha}(w)$  correspondientes a la métrica  $g_{\alpha\beta}^*(x^{\sigma}(w))$ . Las geodésicas de  $g_{\alpha\beta}(x^{\sigma}(v))$  pueden ser obtenidas a partir de  $x^{\alpha}(w)$  mediante una simple reparametrización del tipo

$$dv = a^2(\eta) dw \quad [3.3]$$

y los nuevos vectores tangentes  $k$  ( $k^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}(v)}{dv}$  ( $v$  es el nuevo parámetro afín de las geodésicas de  $g_{\alpha\beta}$ )) estarán relacionados con los vectores  $\dot{k}^*$  del modo

$$\dot{k}^* = a^2(\eta) k \quad [3.4]$$

(pues  $\dot{k}^{\beta} = \frac{dx^{\beta}(w)}{dw} = \frac{dx^{\alpha}(v)}{dv} \frac{dv}{dw} = k^{\alpha} a^2(\eta)$ ).

La ecuación [3.2] puede ser resuelta mediante aproximaciones sucesivas, es decir, buscando una solución de la forma

$$x^{\alpha}(w) = {}_0x^{\alpha}(w) + {}_1x^{\alpha}(w) + {}_2x^{\alpha}(w) + \dots \quad [3.5]$$

Consideremos condiciones iniciales  $(x_E, \dot{k}_E^*)$  correspondientes a la emisión de luz desde un punto  $x_E = (\eta_E, \vec{x}_E)$  con vector tangente  $\dot{k}_E^* = (\dot{k}_E^0, \vec{v}_E)$

Elegimos el parámetro  $w$  imponiendo las condiciones  $w_E = 0$  y  $|\vec{v}_E| = +1$ , siendo  $|\cdot|$  la norma euclídea tridimensional; es decir, elegimos  $w$  tal que

$$\delta_{ij} v_E^i v_E^j = 1 \quad [3.6]$$

Como consecuencia de esto tenemos

$$\dot{k}_E^{*0} = 1 + \frac{1}{2} B(r_E) + \frac{\eta_E^2}{20} \frac{d^2 B}{dw^2} = 1 + \frac{1}{2} B(r_E) + \frac{\eta_E^2}{20} \vec{v}_E \cdot \vec{\nabla} [\vec{v}_E \cdot \vec{\nabla} B(r_E)] \quad [3.7]$$

$$\dot{k}_E^{*i} = \vec{v}_E \quad [3.8]$$

A orden cero tenemos

$${}_0\dot{k}^{\alpha} = \dot{k}_E^{*\alpha} \quad [3.9a]$$

$${}_0x^{\alpha}(w) = x_E^{\alpha} + \dot{k}_E^{*\alpha} w \quad [3.9b]$$





Así pues, a primer orden resultan las ecuaciones

$$\frac{d {}_1\mathbf{k}^{*o}}{dw} = \frac{1}{10} \frac{d}{dw} \left[ B - \eta \vec{v}_E \cdot \vec{\nabla} B \right] \quad [3.10a]$$

$$\frac{d {}_1\mathbf{k}^{*i}}{dw} = \frac{3}{5} B_{,i} - \frac{d}{dw} \left[ B v_E^i + \frac{\eta}{10} B_{,i} + \frac{\eta^2}{20} \frac{d}{dw} B_{,i} \right] \quad [3.10b]$$

Integrando tenemos

$$\mathbf{k}^{*o}(w) = \frac{d\eta}{dw} \equiv \mathbf{k}_E^{*o} + {}_1\mathbf{k}^{*o}(w) \quad [3.11a]$$

$$\mathbf{k}^{*i}(w) = \frac{dX^i}{dw} \equiv \mathbf{k}_E^{*i} + {}_1\mathbf{k}^{*i}(w) \quad [3.11b]$$

siendo, salvo términos cuadráticos en la perturbación,

$${}_1\mathbf{k}^{*o}(w) = - \frac{1}{10} \left| B(w) + \eta \frac{dB}{dw} \right|_{w_E}^w \quad [3.12a]$$

$${}_1\mathbf{k}^{*i}(w) = \frac{3}{5} \int_{w_E}^w B_{,i} dw - \left| B(w) v_E^i + \frac{\eta}{10} B_{,i} + \frac{\eta^2}{20} \frac{d(B_{,i})}{dw} \right|_{w_E}^w \quad [3.12b]$$

donde  $\frac{dB}{dw} = \vec{v}_E \cdot \vec{\nabla} B(w)$  [3.13]

Particularizando para la posición del observador resulta

$${}_1\mathbf{k}_R^{*o} = \frac{1}{10} \left[ B(r_R) - \vec{v}_E \cdot \vec{\nabla} B(r_R) - B(r_E) + \eta_E \vec{v}_E \cdot \vec{\nabla} B(r_E) \right] \quad [3.14a]$$

$${}_1\mathbf{k}_R^{*i} = \frac{3}{5} \int_{w_E}^{w_R} B_{,i} dw + F^i(w_E) - F^i(w_R) \quad [3.14b]$$

donde

$$\begin{aligned} F^i(r) &= B(r) v_E^i + \frac{\eta}{10} B_{,i} + \frac{\eta^2}{20} \frac{d}{dw} B_{,i} \\ &= B(r) v_E^i + \frac{1}{20} \frac{d}{dw} [\eta^2 B_{,i}] \end{aligned} \quad [3.15]$$

La integral de la ecuación [3.14b] debe ser calculada sobre la trayectoria luminosa correspondiente a la aproximación de orden cero, la cual puede ser parametrizada en la forma  $\vec{x}(w) \equiv {}_0\vec{x}(w) = \vec{x}(0) + w\vec{v}_E$ .

Los vectores tangentes a las geodésicas nulas de la métrica física  $g_{\alpha\beta}$  en los puntos de emisión y de recepción vienen dados respectivamente, a partir de la ecuación [3.4], por

$$k_E^\alpha = \frac{1}{a^2(\eta_E)} \dot{k}_E^\alpha \quad k_R^\alpha = \frac{1}{a^2(\eta_R)} \dot{k}_R^\alpha \quad [3.16]$$

Consideremos con detalle la componente espacial de la ecuación de las geodésicas. Integrando la ecuación 3.12b se tiene

$$\vec{X}(w_R) = \vec{X}_E + w_R \vec{v}_E + \int_{w_E}^{w_R} {}_1\dot{k}^*(w) dw \quad [3.17]$$

Tomando el origen en el observador, y multiplicando escalarmente ambos miembros de esta ecuación por  $\vec{v}_E$  se tiene

$$0 = R_E + w_R + \int_0^{w_R} (\vec{v}_E \cdot {}_1\dot{k}^*(w)) dw \quad [3.18]$$

$$\vec{v}_E = \vec{v} \left( 1 + \frac{1}{R_E} \int_0^{w_R} (\vec{v}_E \cdot {}_1\dot{k}^*(w)) dw \right) - \frac{1}{R_E} \int_0^{w_R} {}_1\dot{k}^*(w) dw \quad [3.19]$$

pues  $\vec{v}_E \cdot \vec{v}_E = 1$ , y  $\vec{v} = -\vec{X}_E/R_E$ . Como además se tiene que  $\vec{v}_E \cdot (\vec{X}_R - \vec{X}_E) = R_E$ , resulta

$$w_R = w_E + R_E - \int_0^{w_R} (\vec{v}_E \cdot {}_1\dot{k}^*(w)) dw \quad [3.20]$$

Consideremos el vector unitario  $\vec{N}_R$  en dirección opuesta a la tangente al rayo de luz

$$\vec{N}_R = - \frac{\vec{k}_R}{\|\vec{k}_R\|} \quad [3.21]$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{k}_R = \frac{1}{a^2(\eta_R)} \overset{*}{k}_R \quad [3.22]$$

$$\overset{*}{k}_R = \vec{v}_E + {}_1\overset{*}{k}_R \quad [3.23]$$

$$\|\vec{k}_R\| = \frac{1}{a^2(\eta_R)} \left( 1 + \frac{1}{2} B_R + \frac{1}{20} \ddot{B}_R + (\vec{v}_E \cdot {}_1\overset{*}{k}_R) \right) \quad [3.24]$$

y sustituyendo las expresiones anteriores para  ${}_1\overset{*}{k}_R$  se tiene

$$\begin{aligned} \vec{N}_R = \vec{N} \left( 1 - \frac{1}{2} B_R - \frac{1}{20} \dot{B}_R - (\vec{v}_E \cdot {}_1\overset{*}{k}_R) + \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} (\vec{v}_E \cdot {}_1\overset{*}{k}(w)) dw \right) \\ - {}_1\overset{*}{k}_R + \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} {}_1\overset{*}{k}(w) dw \end{aligned} \quad [3.25]$$

donde

$$\vec{N} = \frac{\vec{X}_E}{R_E} \quad [3.26]$$

Desarrollando las integrales resulta

$$\frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} {}_1\overset{*}{k}(w) dw = \vec{S} - \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} \vec{F}(w) dw + \vec{F}(w_E) \quad [3.27]$$

$$\frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} {}_1\overset{*}{k}(w) dw - {}_1\overset{*}{k}_R = \vec{S} - \vec{\Sigma} - \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} \vec{F}(w) dw + \vec{F}(w_R) \quad [3.28]$$

donde se han introducido los trivectores

$$\vec{\Sigma} = \frac{3}{5} \int_0^{R_E} \vec{\nabla} B(w) dw \quad [3.29]$$

$$\vec{S} = \frac{3}{5 R_E} \int_0^{R_E} \left( \int_0^w \vec{\nabla} B(w) dw \right) dw \quad [3.30]$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_0^{R_E} \vec{F}(w) dw = \int_0^{R_E} \dot{B}(w) dw - \frac{1}{20} \eta_E^2 \vec{\nabla} B_E + \frac{1}{20} \vec{\nabla} B_R \quad [3.31]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} {}_1\vec{k}^*(w) dw - {}_1\vec{k}_R^* &= \vec{S} - \vec{\Sigma} - \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} B(w) dw + \\ &+ \frac{1}{20 R_E} \eta_E^2 \vec{\nabla} B_E - \frac{1}{20 R_E} \vec{\nabla} B_R + \vec{F}(w_R) \end{aligned} \quad [3.32]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_E} \int_0^{R_E} (\vec{\nabla}_{E'} {}_1\vec{k}^*(w)) dw - (\vec{\nabla}_{E'} {}_1\vec{k}_R^*) &= -\frac{3}{5 R_E} \int_0^{R_E} \dot{B}(w) dw + \\ &+ \frac{2}{5} B_R + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{20 R_E} \right) \dot{B}_R + \frac{1}{20} \ddot{B}_R + \frac{1}{20 R_E} \eta_E^2 \dot{B}_E \end{aligned} \quad [3.33]$$

Sustituyendo en la expresión [3.25] para  $\vec{N}_R$  se tiene

$$\begin{aligned} \vec{N}_R &= \vec{N} \left[ 1 - \frac{1}{10} B_R + \frac{3}{5 R_E} \int_0^{R_E} B(w) dw + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{20 R_E} \right) \dot{B}_R + \frac{1}{20 R_E} \eta_E^2 \dot{B}_E \right] + \\ &+ \vec{S} - \vec{\Sigma} + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{20 R_E} \right) \vec{\nabla} B_R + \frac{1}{20 R_E} \eta_E^2 \vec{\nabla} B_E + \frac{1}{20 R_E} \frac{d}{dw} \vec{\nabla} B \Big|_R \end{aligned} \quad [3.34]$$

Establezcamos ahora la relación entre el trivector  $\vec{N}_R$  y los cosenos directores definidos por la referencia del telescopio. Necesitamos para ello una base espacial ortonormal en el punto ocupado por el observador (R). Es fácil ver que una base espacial ortonormal  $(\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)})$  en el punto R viene dada por

$$e_{(k)}^i = \left(1 + \frac{1}{2} B_R\right) \delta_k^i + \frac{1}{20} B_{,i k} \Big|_R \tag{3.35}$$

Los cosenos directores que determinan la dirección del vector  $\vec{N}_R$  respecto al sistema de referencia  $(\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)})$  vienen dados por  $\cos \alpha_{(k)} = (\vec{e}_{(k)}, \vec{N}_R)$ . Definiendo  $\hat{N}^k = \cos \alpha_{(k)}$  y calculando el producto escalar obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{N}^k = N^k & \left[ 1 - \frac{3}{5} B_R + \frac{3}{5 R_E} \int_0^{R_E} B(w) dw + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20 R_E}\right) \dot{B}_R + \frac{1}{20 R_E} \eta_E^2 \dot{B}_E \right] + \\ & + S^k - \Sigma^k + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20 R_E}\right) \partial_k B_R + \frac{1}{20 R_E} \eta_E^2 \partial_k B_E \end{aligned} \tag{3.36}$$

Consideremos ahora la componente temporal de la ecuación de las geodésicas. Integrando la ecuación [3.12a] se obtiene

$$\eta(w_R) - \eta_E = \int_{w_E}^{w_R} k^{*0}(w) dw \tag{3.37}$$

Imponiendo la condición de normalización  $\eta(w_R) \equiv 1$ , teniendo en cuenta que  $\eta(w) = \eta_E + w + O(B)$ , y mediante una integración por partes resulta finalmente la siguiente relación entre la coordenada temporal comóvil  $\eta_E$  de la fuente y la cordenada radial  $R_E$

$$\eta_E = 1 - R_E - \frac{1}{20} \left( \left| \frac{dB}{dw} \right|_R - \eta_E^2 \left| \frac{dB}{dw} \right|_E \right) + \frac{1}{10} (B_R - \eta_E B_E) -$$

$$- \frac{3}{5} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw \quad [3.38]$$

Dicha relación puede expresarse de la forma

$$\eta_E = 1 - R_E - P \quad [3.39]$$

siendo

$$P = \frac{1}{20} \left( \left. \frac{dB}{dw} \right|_R - \eta_E^2 \left. \frac{dB}{dw} \right|_E \right) - \frac{1}{10} (B_R - \eta_E B_E) + \frac{3}{5} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw \quad [3.40]$$

Expresado de este modo, el término P puede interpretarse como un "retraso temporal", ya que representa de hecho el papel de un retraso en la estimación de la coordenada temporal comóvil.

Por otra parte, para el redshift se tiene la expresión (Sachs & Wolfe, 1967)

$$1 + z = \frac{1}{\eta_E^2} (1 + f) \quad [3.41]$$

donde

$$f = \frac{1}{10} \left( (B_E - B_R) + \left. \frac{dB}{dw} \right|_R - \eta_E \left. \frac{dB}{dw} \right|_E \right) \quad [3.42]$$

de donde obtenemos

$$\eta_E = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \left\{ 1 + \frac{1}{20} \left( (B_E - B_R) + \left. \frac{dB}{dw} \right|_R - \eta_E \left. \frac{dB}{dw} \right|_E \right) \right\} \quad [3.43]$$

Será conveniente, para el estudio que haremos en los siguientes capítulos, introducir la coordenada radial de emisión  $\hat{R}_E$  de un objeto con redshift  $z_E$ , en un espacio de Einstein-de Sitter

$$\hat{R}_E = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z_E}} \quad [3.44]$$

La coordenada radial resultante es, pues,

$$\hat{R}_E = R_E + \frac{1}{2}(1 - R_E)f + P \quad [3.45]$$

Es decir

$$\begin{aligned} \hat{R}_E = R_E - \frac{1}{10} \eta_E^2 \left. \frac{dB}{dw} \right|_E + \frac{1}{20} (1 + \eta_E) \left. \frac{dB}{dw} \right|_R + \\ + \frac{1}{20} (3 \eta_E B_E - (2 + \eta_E) B_R) + \frac{3}{5} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw \end{aligned} \quad [3.46]$$

En el segundo miembro podemos sustituir  $\eta_E$  por  $(1 - R_E)$ , dentro del orden de aproximación en el que trabajamos.

### Obtención de las coordenadas de Sachs-Wolfe de la fuente luminosa

En primera aproximación, el conjunto de datos  $\{z, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}\}$  de un catálogo redshift-ángulo es interpretado como una distribución de puntos sobre el cono de luz pasado de un observador en un espacio de Friedmann - para  $z$  pequeño esto es equivalente a tomar  $z$  como un indicativo de distancia- ; dicho de otra manera: a cada punto del conjunto de datos se le hace corresponder un punto de un espacio de Einstein-de Sitter:

$$\{z, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}\} \rightarrow \{\hat{\eta}_E, \hat{X}_E^i\}$$

$$\hat{\eta}_E = \frac{1}{\sqrt{1+z}}$$

$$\hat{X}_E^i = \hat{R}_E \hat{N}^i, \quad \hat{R}_E = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}$$

$$\hat{N}^i = \cos \alpha_{(i)} = (\text{sen } \hat{\vartheta} \cos \hat{\varphi}, \text{sen } \hat{\vartheta} \text{sen } \hat{\varphi}, \cos \hat{\vartheta})$$

En toda esta memoria estamos suponiendo que el espacio-tiempo real es un espacio de Einstein-de Sitter perturbado; por lo tanto para interpretar correctamente los datos  $\{z, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}\}$  necesitamos determinar las coordenadas  $\{\eta_E, \vec{X}_E\}$  sobre el cono de luz pasado en el espacio-tiempo real (un Friedmann perturbado) Sustituyendo en la ecuación  $\hat{X}_E^i = \hat{R}_E \hat{N}^i$  las expresiones [3.36] y [3.45] obtenemos:

$$\hat{X}_E^i = X_E^i \left\{ 1 - \frac{3}{20R_E} B_R + \frac{3\eta_E}{20R_E} B_E + \frac{6}{5R_E} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw + \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{20R_E} \right) \dot{B}_R - \frac{\eta_E^2}{20R_E} \dot{B}_E \right\} + \quad [3.47]$$

$$+ R_E (S^i - \Sigma^i) + \left( \frac{R_E}{10} - \frac{1}{20} \right) \partial_i B_R + \frac{\eta_E^2}{20} \partial_i B_E$$

de donde podemos despejar finalmente el valor de  $X_E^i$ , resultando

$$X_E^i = \hat{X}_E^i \left\{ 1 + \frac{3}{20R_E} B_R - \frac{3\eta_E}{20R_E} B_E - \frac{6}{5R_E} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw - \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{20R_E} \right) \dot{B}_R + \frac{\eta_E^2}{20R_E} \dot{B}_E \right\} + \quad [3.48]$$

$$+ \hat{R}_E (S^i - \Sigma^i) - \left( \frac{R_E}{10} - \frac{1}{20} \right) \partial_i B_R - \frac{\eta_E^2}{20} \partial_i B_E$$

Escribiremos esta expresión en forma vectorial

$$\vec{\hat{X}}_E = (1 + A) \vec{X}_E + \vec{E} \quad [3.49]$$

donde

$$A = \frac{3}{20R_E} B_R - \frac{3\eta_E}{20R_E} B_E - \frac{6}{5R_E} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw - \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{20R_E} \right) \dot{B}_R + \frac{\eta_E^2}{20R_E} \dot{B}_E \quad [3.50]$$



$$\vec{E} = \hat{R}_E (\vec{S} - \vec{\Sigma}) - \left( \frac{R_E}{10} - \frac{1}{20} \right) \vec{V}_{B_R} - \frac{\eta_E^2}{20} \vec{V}_{B_E} \quad [3.51]$$

Por otra parte de la ecuación [3.43] se tiene

$$\eta_E = \hat{\eta}_E \left\{ 1 + \frac{1}{20} \left( (B_E - B_R) + \left. \frac{dB}{dw} \right|_R - \eta_E \left. \frac{dB}{dw} \right|_E \right) \right\} \quad [3.52]$$

donde  $\hat{\eta}_E = (1+z)^{-1/2}$ .

Las ecuaciones [3.49] y [3.52] definen una aplicación del espacio de Einstein-de Sitter sobre el espacio Einstein-de Sitter perturbado (de acuerdo con el modelo de Sachs-Wolfe):  $\{\hat{\eta}_E, \hat{X}_E\} \rightarrow \{\eta_E, \vec{X}_E\}$ . Esta aplicación desempeñará un papel importante en el resto del trabajo, pues determinará la relación entre las propiedades estadísticas de la distribución de galaxias en el catálogo y la distribución real (según el modelo de universo escogido).

### 3.2 DETERMINACION DE LAS COORDENADAS DEL GAUGE DE LA APROXIMACION POTENCIAL

Análogamente al tratamiento seguido para calcular las coordenadas (comóviles) en el caso de un universo inhomogéneo (aunque de contraste de densidad lineal) descrito por el modelo de Sachs-Wolfe, podemos también desarrollar el correspondiente tratamiento para el caso de pequeñas estructuras cosmológicas, pero de elevado contraste de densidad, descritas por la aproximación potencial.

El formalismo matemático a seguir será el mismo que el aplicado en el apartado anterior para el modelo de Sachs-Wolfe. En primer lugar, es preciso resolver la ecuación de las geodésicas para determinar las trayectorias luminosas (geodésicas nulas).

#### El problema de las geodésicas en la aproximación potencial

Una ventaja evidente del gauge longitudinal es que en él es más sencilla la resolución de la ecuación de las geodésicas.

Escribamos primero la métrica correspondiente a la aproximación potencial en la forma

$$ds^2 = a^2(\eta')(1 - 2\phi) \{ - (1 + 4\phi)d\eta'^2 + \delta_{ij} dx'^i dx'^j \} \quad [3.53]$$

Esta métrica tiene las mismas geodésicas nulas que su conforme equivalente

$$ds^{*2} = - (1 + 4\phi)d\eta'^2 + \delta_{ij} dx'^i dx'^j \quad [3.54]$$

Si  $x(w^*)$  es una parametrización afín de las geodésicas nulas de  $ds^{*2}$ , el parámetro afín de las geodésicas de  $ds^2$  verifica

$$dw = \Omega^2(x(w^*)) dw^* \quad [3.55]$$

siendo  $\Omega$  el factor de conformidad entre las métricas

$$\Omega^2 = a^2(\eta') (1 + 2\phi) \quad [3.56]$$

Si introducimos las notaciones

$$q^{*\alpha} = \frac{dx^\alpha}{dw^*} \quad q^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dw} \quad [3.57]$$

tendremos que

$$q^{*\alpha} = a^2(\eta') (1 - 2\phi) q^\alpha \quad [3.58]$$

con lo que podemos entonces escribir la ecuación de las geodésicas.

La componente espacial es

$$\frac{d^2 x'^i}{dw^{*2}} = -2 (q^{*0})^2 \partial_i \phi \quad [3.59]$$

La componente temporal proporciona inmediatamente una integral primera:  $q_0^* = \text{constante}$ .

Por ser  $q^{*\alpha}$  un 4-vector nulo tendremos  $-(1-4\phi)(q^{*0})^2 + 3|q^*|^2 = 0$ . Si escogemos el parámetro afín  $w^*$  de manera que se verifique  $q^{*i}(0) = v_E^i$ , siendo  $v_E^i$  un trivector unitario ( $\delta_{ij} v_E^i v_E^j = 1$ ) caracterizando la dirección de salida, obtenemos

$$q_0^* = 1 + 2\phi_E \quad [3.60]$$

$$|q^*|^2 = 1 + 2(\phi_E - \phi_0) \quad [3.61]$$

La solución de la ecuación correspondiente a la condición inicial  $q^{*i}(0) = v_E^i$  viene dada por

$$q^{*i}(w) = v_E^i - 2 \int_0^w (\partial_i \phi) dw^* \quad [3.62]$$

e integrando de nuevo se tiene

$$x^i(w) = x_E^i + w^* v_E^i - 2 \int_0^w dw^* \left\{ \int_0^w (\partial_i \phi) dw^* \right\} \quad [3.63]$$

Multiplicando por  $v_E^i$  obtendremos el valor de  $w^*$  para el cual  $x^i(w_R^*) = 0$

$$w_R^* = R_E + 2 \int_0^w dw^* \left\{ \int_0^w v_E^i (\partial_i \phi) dw^* \right\} \quad [3.64]$$

y como

$$v_E^i \partial_i \phi = \frac{d\phi}{dw^*} \quad [3.65]$$

tenemos

$$w_R^* = (1 - 2\phi_E) R_E + 2 \int_0^{R_E} \phi dw^* + O(\phi^2 R_E) \quad [3.66]$$

Volviendo a la ecuación [3.63], con  $w = w_R^*$ , obtenemos la dirección inicial del rayo de luz que llega al observador

$$v_E^i = \left( 1 + 2\phi_E - \frac{2}{R_E} \int_0^{R_E} \phi dw^* \right) N^i + \frac{2}{R_E} \int_0^{w_R} dw^* \left\{ \int_0^w (\partial_i \phi) dw^* \right\} \quad [3.67]$$

siendo  $N^i = -X_E^i / R_E$ , vector relacionado con las coordenadas angulares por las relaciones euclídeas.

La dirección de llegada es  $v_R^i = q^{*i}(w_R^*) / |q^*|$  con  $q^{*i}(w_R^*)$  dado por la ecuación [3.62]

$$q^{*i}(w_R^*) = v_E^i - 2 \int_0^{R_E} (\partial_i \phi) dw^* \quad [3.68]$$

y, teniendo en cuenta [3.67] obtenemos

$$v_R^i = \left( 1 + 2\phi_o - \frac{2D}{R_E} \right) v^i + \frac{2}{R_E} \int_0^{w_R} dw^* \left\{ \int_0^w (\partial_i \phi) dw^* \right\} -$$

$$- 2 \int_0^{R_E} (\partial_i \phi) d w^* \quad [3.69]$$

que escribiremos en la forma

$$v'^i_R = \left( 1 + 2\phi_0 - \frac{2D}{R_E} \right) v^i + S^i + \Sigma^i \quad [3.70]$$

donde utilizamos las notaciones

$$D = \int_0^{R_E} \phi d w^* \quad [3.71]$$

$$\Sigma^i = - 2 \int_0^{R_E} (\partial_i \phi) d w^* \quad [3.72]$$

$$S^i = - \frac{2}{R_E} \int_0^{w_R} d w^* \left\{ \int_0^w (\partial_i \phi) d w^* \right\} \quad [3.73]$$

Una vez determinadas las relaciones fundamentales, y en particular las direcciones de salida ( $v^i_E$ ) y llegada ( $v^i_R$ ) de la señal luminosa, el resto del formalismo a aplicar es idéntico al analizado en detalle en el apartado anterior para el caso de la métrica de Sachs-Wolfe. Sin embargo, hay particularidades debido a la propia naturaleza de las coordenadas (no comóviles) de la aproximación potencial.

En primer lugar, se debe tener en cuenta la aberración de la luz. Los fotones son recogidos por un telescopio que se mueve respecto al sistema de coordenadas de la aproximación potencial; la dirección determinada por el telescopio y la dirección del trivector  $v'^i_R$  estarán relacionadas por

$$\tilde{v}^i_R = v'^i_R + \frac{1}{3} \partial_i \phi_R \quad [3.74]$$

Definamos los vectores  $\hat{N}^i \equiv -\tilde{v}^i_R$ , y sustituyendo en [3.70] resulta

$$\hat{N}^i = \left( 1 + 2\phi_R - \frac{2D}{R_E} \right) N^i + S^i - \Sigma^i - \frac{1}{3} \partial_i \phi_R \quad [3.75]$$

Con esto hemos terminado con la parte espacial de la ecuación de las geodésicas. Consideremos ahora a la componente temporal.

Puesto que tenemos una integral primera dada por

$$q_0^* = 1 + 2\phi_E \quad [3.76]$$

teniendo en cuenta la métrica reducida [3.54] se tiene

$$q_R^* = 1 + 2\phi_E - 4\phi(x^i) \quad [3.77]$$

e integrando la ecuación  $dx/dw^* = q_0^*$ , obtenemos

$$\eta'_R = \eta'_E + (1 + 2\phi_E)w_R^* - 4D \quad [3.78]$$

Sustituyendo

$$\eta'_R = 1 - \frac{1}{3}\phi_R \quad [3.79]$$

ya que hemos considerado  $\eta_R=1$ ,

y teniendo en cuenta la expresión [3.66] para  $w_R^*$ , obtenemos la relación entre la coordenada radial de la fuente y el tiempo de emisión

$$R'_E = 1 - \eta'_E + 2D - \frac{1}{3}\phi_R \quad [3.80]$$

El redshift se calcula de modo directo en estas coordenadas. El cuadrivector velocidad de la materia es ahora

$$u^\alpha = \left( \frac{1}{a(1+\phi)}, V^i \right) \quad [3.81]$$

donde

$$V^i = -\frac{H_0}{6\eta} \partial_i \phi \quad [3.82]$$

Cuando la fuente y el observador están en reposo respecto al campo de la materia, se tiene

$$1 + z = \frac{(k_E \cdot u_E)}{(k_R \cdot u_R)} \quad [3.83]$$

siendo  $k=dx/dw$  y  $w$  un parámetro afín de la métrica real [3.53]. Teniendo en cuenta la relación

$$dw = a^2(\eta') (1 - 2\phi) dw^* \quad [3.84]$$

resulta

$$k = \frac{1}{a^2(\eta')(1+\phi_E)} q^* \quad [3.85]$$

Sustituyendo se tiene

$$1 + z = \frac{\eta_R'^2}{\eta_E'^2} \left( 1 + \phi_R - \phi_E - \frac{1}{a(\eta'_E)} (\vec{V} \cdot \vec{V}_E) + \frac{1}{a(\eta'_R)} (\vec{V} \cdot \vec{V}_R) \right) \quad [3.86]$$

Sustituyendo  $a = 2\eta^2/H_0$ , y la expresión de  $V^i$  se tiene

$$1 + z = \frac{1}{\eta_E'^2} \left( 1 + \frac{1}{3}\phi_R - \phi_E - \frac{1}{3} (\eta_E \dot{\phi}_E - \dot{\phi}_R) \right) \quad [3.87]$$

de donde se obtiene el tiempo de emisión en función del redshift

$$\eta'_E = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \left( 1 + \frac{1}{6} \phi_R - \frac{1}{2} \phi_E + \frac{1}{6} (\eta_E \dot{\phi}_E - \dot{\phi}_R) \right) \quad [3.88]$$

Finalmente, teniendo en cuenta [3.80] obtenemos

$$R'_E = \hat{R}'_E - \frac{\eta+2}{6} \phi_R + \frac{\eta}{2} \phi_E - \frac{\eta}{6} (\eta_E \dot{\phi}_E - \dot{\phi}_R) + 2D \quad [3.89]$$

Es fácil ver que se cumplen las relaciones

$$\eta'_E = \left( 1 - \frac{1}{3} \phi \right) \eta_E \quad [3.90]$$

$$R'_E = R_E - \frac{1}{6} \eta^2 \phi \quad [3.91]$$

de acuerdo con la transformación de coordenadas establecida en el Capítulo 2.

### Obtención de las coordenadas de la fuente

Sean  $(\eta', X'^i)$  las coordenadas en el gauge longitudinal de los puntos del cono de luz pasado del observador. Sustituyendo en  $X^i = R'_E N^i$  las expresiones [3.89] y [3.75] obtenemos

$$X'^i_E = (1 + A') \hat{X}^i_E + E'^i \quad [3.92]$$

donde en este caso

$$A' = -\frac{11}{6} \phi_R - \frac{1}{2R_E} \phi_R - \frac{\eta_E}{6R_E} (\eta_E \dot{\phi}_E - \dot{\phi}_R) + \frac{\eta_E}{2R_E} \phi_E + \frac{4D}{R_E} \quad [3.93]$$

$$E'^i = R'_E \left( \Sigma'^i - S'^i + \frac{1}{3} \partial_i \phi_R \right) \quad [3.94]$$

y de la ecuación [3.88] obtenemos

$$\eta'_E = \hat{\eta}_E \left( 1 + \frac{1}{6} \phi_R - \frac{1}{2} \phi_E + \frac{1}{6} (\eta_E \dot{\phi}_E - \dot{\phi}_R) \right) \quad [3.95]$$

recuperándose de este modo un formalismo completamente análogo para una descripción en términos de la métrica de Sachs-Wolfe y en términos de la aproximación potencial.



## Capítulo 4

### INTERPRETACION DE LAS OBSERVACIONES EN COORDENADAS REDSHIFT-ANGULO

---

Las propiedades estadísticas de la distribución espacial de galaxias se estudian, en primera aproximación, interpretando los datos en bruto proporcionados en un catálogo (redshift y coordenadas angulares), como una distribución de puntos sobre el cono de luz pasado de un observador en un universo de Friedmann (Einstein-de-Sitter en nuestro caso),

$$\left\{ \hat{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1+z}}, \quad \hat{\vec{X}} = \hat{R} \hat{\vec{N}} \right\} \quad [4.1]$$

$$\hat{R} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad [4.2]$$

$$\hat{\vec{N}} = (\sin \hat{\vartheta} \cos \hat{\varphi}, \sin \hat{\vartheta} \sin \hat{\varphi}, \cos \hat{\vartheta}) \quad [4.3]$$

En realidad, los datos  $(z, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$  del catálogo definen una distribución de puntos sobre el cono de luz pasado de un observador en un espacio de Friedmann perturbado. En el Capítulo 3 obtuvimos las coordenadas comóviles  $(\eta, \vec{X})$  para tal observador, en función de los observables  $(z, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$  del catálogo, definiendo una aplicación de una región del cono de luz pasado de un espacio de Einstein-de Sitter sobre una región del cono de luz pasado de un observador en un Einstein-de Sitter perturbado, que da cuenta de las distorsiones en la determinación de las coordenadas de posición de cada galaxia a partir de su redshift y la posición angular observada. El estudio de esta función permite relacionar las propiedades estadísticas de las



dos distribuciones: una en el espacio de Einstein-de Sitter, la otra en el espacio real Einstein-de Sitter perturbado.

Ademas de los efectos ligados a la relación entre las coordenadas comóviles y los observables redshift-ángulo —o derivados de ella— se tienen distorsiones importantes en la observaciones cuando éstas son interpretadas en términos de las coordenadas redshift-ángulo, como sucede habitualmente al analizar los datos proporcionados por un catálogo de galaxias. Para interpretar adecuadamente las observaciones hay que conocer cuáles son tales distorsiones en cuanto a la determinación de distancias entre galaxias y determinación de la densidad de galaxias mediante contaje numérico, así como de los efectos de la luminosidad aparente de las galaxias. Sólo mediante una adecuada comprensión —y corrección en su caso— de tales distorsiones es posible una interpretación coherente de las observaciones realizadas.

#### 4.1 DETERMINACION DE DISTANCIAS ENTRE PUNTOS DE UN ENTORNO

Como ya se ha indicado, la determinación de las coordenadas reales (bien sea de las comóviles o de las coordenadas de la aproximación potencial), pese a ser el aspecto fundamental de la distorsión, no da cuenta por sí sola de las consecuencias de dichos efectos perturbadores sobre la distribución observada, debido a que la métrica espacio-temporal es no euclídea, y por lo tanto influye también en la determinación de distancias y volúmenes.

Para tener en cuenta tal influencia, vamos a considerar la transformación de la distancia propia (real) desde un punto dado a un punto próximo del entorno teniendo en cuenta estos efectos. Este procedimiento es el que debería seguirse en un catálogo de galaxias para estimar correctamente la distancia de una galaxia a otras galaxias vecinas del entorno.

Para determinar la distancia propia entre dos galaxias vecinas en un catálogo redshift-angulo, si las galaxias están suficientemente próximas, podemos considerar el 3-vector  $\vec{\xi}_0 = \vec{X}_{01} - \vec{X}_{02}$ , en el espacio del catálogo (Einstein-de Sitter) (el subíndice  $0$  denota en este caso la coordenada observada). La aplicación definida en el Capítulo 3 le asocia un vector  $\vec{\xi}$  en el espacio real (Einstein de Sitter perturbado). Consideremos, pues, la

ecuación que determina las coordenadas comóviles  $X^i$  en función de las coordenadas de emisión  $X_0^i$ . Escribiremos dicha ecuación en la forma  $X^i = (1 + A) X_0^i + E^i$ . Las componentes del vector  $\vec{\xi}$  serán pues

$$\xi^i = (1+A)\xi_0^i + \xi_0^m \partial_m A X_0^i + \xi^m \partial_m E^i \quad [4.4]$$

o introduciendo trivectores, para facilitar el cálculo,

$$\vec{\xi} = (1+A)\vec{\xi}_0 + \vec{\xi}_0 \cdot \nabla A \vec{X}_0 + (\vec{\xi}_0 \cdot \nabla) \vec{E} \quad [4.5]$$

El módulo con la métrica euclídea es

$$|\vec{\xi}|^2 = (1+2A)|\vec{\xi}_0|^2 + 2 \vec{\xi}_0 \cdot \nabla A \vec{X}_0 \cdot \vec{\xi}_0 + 2(\vec{\xi}_0 \cdot \nabla) \vec{E} \cdot \vec{\xi}_0 \quad [4.6]$$

y la norma con la métrica del espacio Einstein-de Sitter perturbado

$$\|\vec{\xi}\|^2 = a^2 \left\{ (1+B)|\vec{\xi}|^2 + \frac{\eta^2}{10} B_{ij} \xi_0^i \xi_0^j \right\} |\vec{\xi}|^2 \quad [4.7]$$

con lo que

$$\|\vec{\xi}\| = \left\{ 1 + \frac{1}{2} B + A + \frac{\vec{\xi}_0 \cdot \nabla A \vec{X}_0 \cdot \vec{\xi}_0}{|\vec{\xi}_0|^2} + \frac{(\vec{\xi}_0 \cdot \nabla) \vec{E} \cdot \vec{\xi}_0}{|\vec{\xi}_0|^2} + \frac{\eta^2}{20} \frac{B_{ij} \xi_0^i \xi_0^j}{|\vec{\xi}_0|^2} \right\} a |\vec{\xi}_0| \quad [4.8]$$

La contribución dominante se obtiene sustituyendo

$$A = - \frac{\eta^2}{20R} N^m \partial_m B + \frac{1}{20R} N^m \partial_m B(R) \quad [4.9]$$

$$E^i = - \frac{\eta^2}{20} \partial_i B \quad [4.10]$$

y teniendo en cuenta las relaciones

$$(\vec{\xi}_0 \cdot \nabla) \vec{E} \cdot \vec{\xi}_0 = - \frac{\eta^2}{20} B_{ij} \xi_0^i \xi_0^j + \frac{\eta}{10} \vec{N} \cdot \vec{\xi}_0 \xi_0^m \partial_m B \quad [4.11]$$

$$\vec{N} \cdot \vec{\xi}_0 = |\vec{\xi}_0| \cos v \quad [4.12]$$

$$\vec{X}_0 \cdot \vec{\xi}_0 = R_0 |\vec{\xi}_0| \cos v \quad [4.13]$$

siendo  $v$  el ángulo que forma el vector desplazamiento  $\vec{\xi}_0$  con la dirección radial desde el observador, obtenemos

$$\|\vec{\xi}\| = \left\{ 1 + A + \frac{\vec{\xi}_o \cdot \nabla A}{|\vec{\xi}_o|} R_o \cos v + \frac{\eta(\vec{\xi}_o \cdot \nabla)B}{10|\vec{\xi}_o|} \cos v \right\} \text{al } \vec{\xi}_o \quad [4.14]$$

Consideremos los valores de  $\|\vec{\xi}\|$  para  $v=0$  (radial y alejándose del observador),  $v=\pi$  (radial y hacia el observador) y  $v=\pi/2$  (transversal) que designaremos respectivamente por  $\|\vec{\xi}\|_{L+}$ ,  $\|\vec{\xi}\|_{L-}$  y  $\|\vec{\xi}\|_T$ :

$$\|\vec{\xi}\|_{L+} = \left\{ 1 + A + R_o \vec{N} \cdot \nabla A + \frac{\eta(\vec{N} \cdot \nabla)B}{10} \right\} \text{al } \vec{\xi}_o \quad [4.15]$$

$$\|\vec{\xi}\|_{L-} = \left\{ 1 + A - R_o \vec{N} \cdot \nabla A - \frac{\eta(\vec{N} \cdot \nabla)B}{10} \right\} \text{al } \vec{\xi}_o \quad [4.16]$$

$$\|\vec{\xi}\|_T = (1 + A) \text{al } \vec{\xi}_o \quad [4.17]$$

Un cálculo simple conduce al siguiente resultado

$$\vec{N} \cdot \nabla A = -\frac{\eta^2}{20R} N^m N^n \partial_m \partial_n B + \frac{(\vec{N} \cdot \nabla)B}{20R^2} - \frac{(\vec{N} \cdot \nabla)B}{10} \quad [4.18]$$

con lo que obtenemos

$$\|\vec{\xi}\|_{L+} = \left\{ (1 + A - \frac{\eta^2}{20} N^m N^n \partial_m \partial_n B + \frac{(\vec{N} \cdot \nabla)B - (\vec{N} \cdot \nabla)B_R}{20R} \right\} \text{al } \vec{\xi}_o \quad [4.19]$$

$$\|\vec{\xi}\|_{L-} = \left\{ (1 + A + \frac{\eta^2}{20} N^m N^n \partial_m \partial_n B - \frac{(\vec{N} \cdot \nabla)B - (\vec{N} \cdot \nabla)B_R}{20R} \right\} \text{al } \vec{\xi}_o \quad [4.20]$$

Puede ser útil también calcular el promedio respecto a  $v$  en la expresión de  $\|\vec{\xi}\|$  que denotaremos por  $\xi$

$$\xi = \left( 1 - \frac{1}{40} N^n N^m \partial_m \partial_n B + \frac{1}{40R} N^m \partial_m B \right) \text{a } \xi_o \quad [4.21]$$

$$\xi = \left( 1 - \frac{1}{40} \text{div}[\vec{N} \cdot \nabla B \vec{N}] + \frac{3}{40R} N^m \partial_m B \right) \text{a } \xi_o \quad [4.22]$$

y el promedio de  $\xi$  en un sector esférico de profundidad  $D$ :  $\langle \xi \rangle_D$ . Para ello escribamos primero  $\xi$  en la forma

$$\xi = \left( 1 - \frac{1}{40} \text{div}[\vec{N} \cdot \nabla B \vec{N}] + \frac{3}{40R} N^m \partial_m B \right) \text{a } \xi_o \quad [4.23]$$

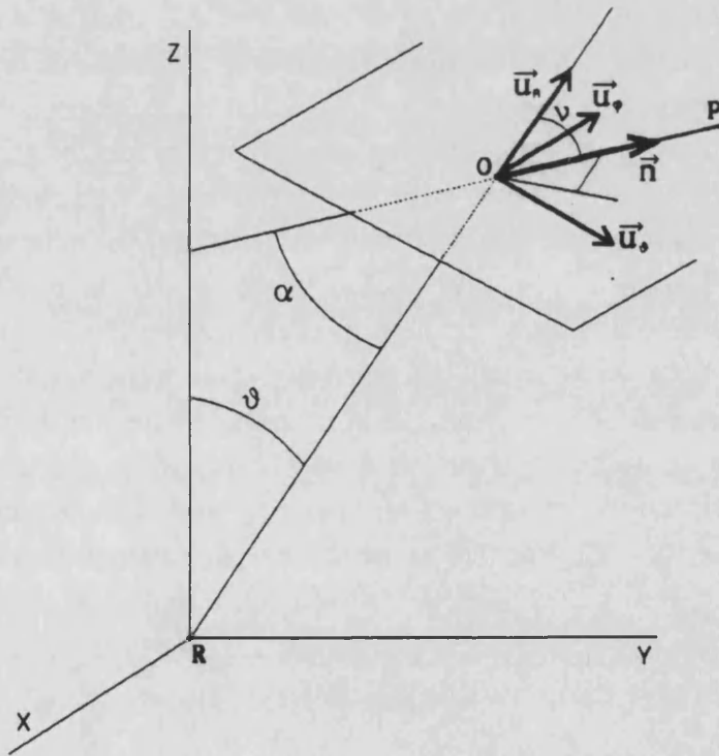
de donde

$$\langle \xi \rangle_D = \left( 1 - \frac{1}{40V_D} \int_{\sigma} \eta^2 \nabla B \cdot d\vec{\sigma} + \frac{3}{40V_D} \int_V \frac{N^m \partial_m B}{R} dV \right) a \xi_0 \quad [4.24]$$

Sobre una esfera de radio D obtendríamos

$$\langle \xi \rangle_D = \left( 1 + \frac{1}{2} \langle \delta \rangle_D + \frac{3}{40V_D} \int_V \frac{N^m \partial_m B}{R} dV \right) a \xi_0 \quad [4.25]$$

Este tipo de estimaciones de la distancia propia de un punto (galaxia) a puntos de su entorno tiene repercusiones en los análisis estadísticos basados precisamente en la estimación de distancias entre puntos, tales como las funciones de correlación.



**Fig. 4.1** Definición de las variables consideradas para el cálculo de la distancia propia de una galaxia a otra galaxia vecina de su entorno, en un medio inhomogéneo.

## 4.2 EFECTOS SOBRE LA DENSIDAD NUMERICA DE GALAXIAS OBSERVADAS

Una de las principales consecuencias de las distorsiones observacionales producidas por la presencia de inhomogeneidades en la distribución de materia es la variación de la propia distribución espacial de las galaxias, con un efecto particularmente notable en el recuento observacional del número de galaxias por unidad de volumen.

### 4.2.1 CONTRASTE DE DENSIDAD OBSERVADO Y CONTRASTE DE DENSIDAD REAL

Las primeras propiedades estadísticas estudiadas de un catálogo de galaxias son el campo de densidad y las funciones de correlación. En ambos casos, el estudio se basa en el conteo de galaxias en el interior de celdas de determinado tamaño. Consideremos un punto  $p^*$  del cono de luz pasado en el espacio de Einstein-de Sitter y sea  $A_{p^*}$  un entorno de  $p^*$  sobre el cono. Los puntos de  $A_{p^*}$  no son simultáneos con  $p^*$  respecto al observador comóvil con la materia. Pero, como las coordenadas que estamos usando son comóviles con la materia, la proyección temporal sobre la superficie de simultaneidad de  $p^*$  da la intersección de las líneas de universo con la superficie de simultaneidad. Lo mismo puede decirse de los puntos de  $A_{p^*}$  sobre el cono pasado en un Einstein-de Sitter perturbado, si usamos coordenadas comóviles. En cambio si usamos las coordenadas del gauge longitudinal y queremos que se conserve el número de partículas se debe hacer una corrección del tipo  $(\eta_0 - \eta_0^*)V^i(p^*)$  para dar correctamente las posiciones de las galaxias en el instante  $\eta_0^*$ . Aunque este efecto es despreciable, daremos las fórmulas completas trabajando en coordenadas comóviles. Sólo hay que tener la precaución de usar la métrica en el gauge de Sach-Wolfe, pero esto no añade dificultad al cálculo.

Supongamos que conocemos el contraste de densidad real y estimemos lo que veríamos en un catálogo en bruto, analizando directamente los datos redshift-ángulo observados. Al menos en el régimen lineal, es posible hallar una expresión analítica para la "apariencia" del contraste de densidad real como consecuencia de los efectos observacionales aquí considerados.

Una región de volumen  $dV_{\text{obs}}$  en el espacio Einstein-de Sitter se transforma en una región en el espacio real de volumen  $dV_{\text{real}}$ ; el número de galaxias  $N$  en ambas regiones debe ser el mismo, así que tendremos

$$N = n_{\text{real}} dV_{\text{real}} = n_{\text{obs}} dV_{\text{obs}} \quad [4.26]$$

siendo  $n$  la densidad numérica de galaxias (número de galaxias por unidad de volumen) en cada caso.

Como la métrica espacial tridimensional es  $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$ , el determinante de la parte espacial de la métrica puede aproximarse del modo  $\det [a^2(\eta) \gamma_{ij}] = a^6(\eta) (1 + \text{tr}(h_{ij})) = a^6(\eta) (1 + 3B - 2\eta^2\delta)$ , resultando las expresiones geométricas siguientes para los elementos de volumen

$$dV_{\text{real}} = \sqrt{-g} d^3\vec{X} = a^3(\eta) \left( 1 - \eta^2 \delta_E + \frac{3}{2} B_E \right) d^3\vec{X} \quad [4.27]$$

$$dV_{\text{obs}} = a^3(\hat{\eta}) d^3\vec{X} \quad [4.28]$$

obtenemos

$$n_{\text{obs}} = n_{\text{real}} \left( 1 - \eta^2 \delta_E + \frac{3}{2} B_E \right) \frac{a^3(\eta)}{a^3(\hat{\eta})} \frac{d^3\vec{X}}{d^3\vec{X}} \quad [4.29]$$

que puede escribirse en la forma

$$n_{\text{obs}} a^3(\hat{\eta}) = n_{\text{real}} a^3(\eta) \left( 1 - \eta^2 \delta_E + \frac{3}{2} B_E \right) \frac{d^3\vec{X}}{d^3\vec{X}} \quad [4.30]$$

La densidad  $n$  está relacionada con el contraste de densidad  $\delta$  del modo

$$n = n_B (1 + \delta) \quad [4.31]$$

siendo  $n_B$  el valor medio del número de galaxias por unidad de volumen (densidad numérica media).

Sustituyendo en [4.30] y teniendo en cuenta que la densidad de un espacio de Einstein-de Sitter es inversamente proporcional a  $a^3(\eta)$ , obtenemos para el contraste de densidad

$$(1 + \delta_E^{\text{obs}}) = (1 + \delta) \left( 1 - \eta^2 \delta_E + \frac{3}{2} B_E \right) \frac{d^3\vec{X}}{d^3\vec{X}} \quad [4.32]$$

Calculemos el Jacobiano de la transformación,

$$\frac{d^3 \vec{X}}{d^3 \overset{\Delta}{X}} = \frac{\partial(X_E, Y_E, Z_E)}{\partial(\overset{\Delta}{X}_E, \overset{\Delta}{Y}_E, \overset{\Delta}{Z}_E)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_E}{\partial \overset{\Delta}{X}_E} & \frac{\partial X_E}{\partial \overset{\Delta}{Y}_E} & \frac{\partial X_E}{\partial \overset{\Delta}{Z}_E} \\ \frac{\partial Y_E}{\partial \overset{\Delta}{X}_E} & \frac{\partial Y_E}{\partial \overset{\Delta}{Y}_E} & \frac{\partial Y_E}{\partial \overset{\Delta}{Z}_E} \\ \frac{\partial Z_E}{\partial \overset{\Delta}{X}_E} & \frac{\partial Z_E}{\partial \overset{\Delta}{Y}_E} & \frac{\partial Z_E}{\partial \overset{\Delta}{Z}_E} \end{pmatrix} \quad [4.33]$$

despreciando términos de segundo orden, se obtiene

$$\left| \frac{d^3 \vec{X}}{d^3 \overset{\Delta}{X}} \right| = 1 + 3A + (\overset{\Delta}{X} \cdot \vec{\nabla} A) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \quad [4.34]$$

ya que

$$\vec{X} = (1 + A) \overset{\Delta}{X} + \vec{E} \quad [4.35]$$

con A y  $\vec{E}$ , dados en el Capítulo 3.

Teniendo en cuenta los resultados

$$3A = \frac{3}{20 \hat{R}_E} [\eta_E^2 (\dot{B}_E - \dot{B}_R)] - \frac{9}{20 \hat{R}_E} (\eta_E B_E - B_R) - \frac{3}{20} \dot{B}_R - \frac{18}{5 \hat{R}_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \quad [4.36]$$

$$\begin{aligned} (\overset{\Delta}{X} \cdot \vec{\nabla} A) = & -\frac{1}{20} \eta_E^2 \ddot{B}_E - \frac{1}{20 \hat{R}_E} (\eta_E^2 \dot{B}_E - \dot{B}_R) + \frac{1}{20} \dot{B}_E + \\ & + \frac{3}{20 \hat{R}_E} (\eta_E B_E - B_R) + \frac{6}{5 \hat{R}_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \end{aligned} \quad [4.37]$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \eta_E^2 \delta_E - \frac{1}{10} \eta_E \dot{B}_E - \frac{1}{10} \dot{B}_R - \frac{3}{5} \hat{R}_E \dot{B}_R \quad [4.38]$$

resulta finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \vec{X}}{d^3 \Delta} = & 1 - \frac{1}{20} \eta_E^2 \ddot{B}_E + \frac{1}{10 \hat{R}_E} (\eta_E^2 \dot{B}_E - \dot{B}_R) + \eta_E^2 \delta_E - \\ & + \left( \frac{1}{20} - \frac{\eta_E}{10} \right) \dot{B}_E - \frac{3}{10 \hat{R}_E} (\eta_E B_E - B_R) - \\ & - \frac{1}{20} \dot{B}_R - \frac{3}{5} \hat{R}_E \dot{B}_R - \frac{12}{5 \hat{R}_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \end{aligned} \quad [4.39]$$

Sustituyendo en la expresión del contraste, y despreciando términos de segundo orden, se tiene

$$\begin{aligned} \delta_E^{\text{obs}} = & \delta_E - \frac{1}{20} \eta_E^2 \ddot{B}_E + \frac{1}{10 \hat{R}_E} (\eta_E^2 \dot{B}_E - \dot{B}_R) + \\ & + \frac{1}{20} (\dot{B}_E - \dot{B}_R) - \frac{1}{10} \eta_E \dot{B}_E - \frac{3}{10 \hat{R}_E} (\eta_E B_E - B_R) + \\ & + \frac{3}{2} B_E - \frac{3}{5} \hat{R}_E \dot{B}_R - \frac{12}{5 \hat{R}_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \end{aligned} \quad [4.40]$$

En la literatura sobre este tema, todo el desarrollo del cálculo está construido a partir del segundo término de la derecha ( $-\frac{1}{20} \eta_E^2 \ddot{B}_E$ ), mientras el tercer término se desprecia porque se cree que las muestras de galaxias disponibles son lo suficientemente profundas como para suponer que no existen estructuras del orden del tamaño de la muestra (más adelante, en este mismo capítulo, veremos las repercusiones de este término en la estimación del campo de velocidades peculiares, y en el Capítulo 5 ilustraremos el orden de magnitud de cada término en el caso de una onda plana). La evidencia observacional va claramente en sentido contrario, por lo tanto no despreciaremos el tercer término, y supondremos que la densidad espectral contiene contribuciones a longitudes de onda superiores a la profundidad de la muestra.

El segundo y tercer término pueden simplificarse teniendo en cuenta la identidad vectorial siguiente, válida para  $R_E \neq 0$ ,



$$\ddot{B}_E = N^i N^j \partial_i \partial_j B_E = \vec{\nabla} \cdot \left( (\vec{N} \cdot \vec{\nabla} B_E) \vec{N} \right) - \frac{2}{\hat{R}_E} (\vec{N} \cdot \vec{\nabla} B) \quad [4.41]$$

con lo que se consigue la simplificación

$$-\frac{1}{20} \eta_E^2 \ddot{B}_E + \frac{1}{10 \hat{R}_E} \eta_E^2 \dot{B}_E = -\frac{1}{20} \eta_E^2 \vec{\nabla} \cdot \left( (\vec{N} \cdot \vec{\nabla} B_E) \vec{N} \right) \quad [4.42]$$

resultando de este modo

$$\begin{aligned} \delta_E^{\text{obs}} = & \delta_E - \frac{1}{20} \eta_E^2 \vec{\nabla} \cdot \left( (\vec{N} \cdot \vec{\nabla} B_E) \vec{N} \right) - \frac{1}{10 \hat{R}_E} \dot{B}_R + \\ & + \frac{1}{20} (\dot{B}_E - \dot{B}_R) - \frac{1}{10} \eta_E \dot{B}_E - \frac{3}{10 \hat{R}_E} (\eta_E B_E - B_R) + \\ & + \frac{3}{2} B_E - \frac{3}{5} \hat{R}_E \dot{B}_R - \frac{12}{5 \hat{R}_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \end{aligned} \quad [4.43]$$

o, introduciendo  $\eta_E^2$  dentro de la divergencia ( $\eta = 1 - \hat{R}_E$ ), lo cual es razonable al orden de aproximación en que se trabaja,

$$\begin{aligned} \delta_E^{\text{obs}} = & \delta_E - \frac{1}{20} \vec{\nabla} \cdot \left( \eta_E^2 (\vec{N} \cdot \vec{\nabla} B_E) \vec{N} \right) - \frac{1}{10 \hat{R}_E} \dot{B}_R + \\ & + \frac{1}{20} (\dot{B}_E - \dot{B}_R) - \frac{1}{10} \eta_E \dot{B}_E - \frac{3}{10 \hat{R}_E} (\eta_E B_E - B_R) + \\ & + \frac{3}{2} B_E - \frac{3}{5} \hat{R}_E \dot{B}_R - \frac{12}{5 \hat{R}_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \end{aligned} \quad [4.44]$$

La integral

$$\int_0^{R_E} B(w) dw \quad [4.45]$$

representa una contribución que da cuenta fundamentalmente de los efectos residuales que el retraso temporal y la desviación angular de las trayectorias luminosas por efecto lente producen sobre el contraste de densidad. La

evaluación de estos términos requiere un modelo concreto de perturbación. En cualquier caso, este tipo de efectos son solamente residuales en la mayor parte de los casos a efectos de cálculo del contraste de densidad.

En todo este planteamiento de lo relativo al contraste de densidad real y el contraste de densidad observado hay que señalar algunos aspectos fundamentales que subyacen en las aproximaciones asumidas, y, si bien no suponen condicionantes importantes, han de tenerse en cuenta a la hora de interpretar los resultados obtenidos.

En primer lugar, la idea de reconstruir mediante puntos aislados una distribución de masa con densidad supuesta teóricamente continua puede llegar a ser un tanto inadecuada, sobre todo cuando consideramos densidades muy bajas, donde una distribución numérica con pocos puntos puede alejarse bastante del modelo teórico de variación del contraste de densidad.

En segundo lugar, y como consecuencia de lo anterior, el planteamiento seguido —que coincide con el habitualmente seguido en este tipo de análisis— supone considerar que la densidad *numérica* de galaxias coincide con la densidad *másica* de galaxias. Esto no es cierto salvo que se suponga que todas las galaxias tienen la misma masa. Como es evidente que la masa de las galaxias varía de unas a otras, en función de los diferentes tipos morfológicos y otras propiedades características, el análisis de la densidad numérica y la densidad másica de galaxias ha de hacerse con cuidado cuando deseen estudiarse estructuras con detalle, sobre todo cuando haya indicios de segregación morfológica (y másica) en la distribución espacial de las galaxias.

No obstante, en el estudio de la estructura a gran escala este tipo de consideraciones no tienen gran importancia, y el análisis de la distribución numérica de galaxias es la metodología habitual de abordar este estudio.

#### 4.2.2 CONTRASTE MEDIO EN UNA MUESTRA DE PROFUNDIDAD DADA

Tal como comentamos en el Capítulo 1 acerca de las cuestiones que hoy son controvertidas en el estudio de la estructura a gran escala del universo, un aspecto de gran importancia es la variación de la densidad media (o equivalentemente, del contraste de densidad) con la profundidad de la muestra.

Consideremos primero una esfera de radio  $D$  centrada en el observador. Calculemos el valor medio del contraste observado en el catálogo teniendo en cuenta sólo el término de la divergencia,

$$\langle \delta_o \rangle_D = \langle \delta \rangle_D - \frac{1}{20V_D} \int_{\sigma} \eta^2 \nabla B \cdot d\vec{\sigma} \quad [4.46]$$

donde  $V_D$  es el volumen de la esfera y la integral se extiende sobre su superficie. Si  $D$  es pequeño comparado con el horizonte podemos sustituir  $\eta = 1$  y aplicando el teorema de Gauss tenemos

$$\begin{aligned} \langle \delta_o \rangle_D &= \langle \delta \rangle_D - \frac{1}{20V_D} \int \Delta B \, dV = \\ &= \langle \delta \rangle_D + \frac{1}{V_D} \int \delta \, dV = 2\langle \delta \rangle_D \end{aligned} \quad [4.47]$$

El contraste medio observado en una esfera centrada en el observador es el doble del contraste real. Los catálogos profundos de galaxias no cubren tanto ángulo sólido alrededor del observador. Consideremos ahora un sector esférico definido por un cono de ángulo  $\alpha$  con vértice en el observador y una esfera de radio  $D^1$ . Calculemos el valor medio del contraste en dicha región teniendo en cuenta sólo el término de la divergencia

$$\langle \delta_o \rangle_D = \langle \delta \rangle_D - \frac{1}{20V_D} \int_{\sigma} \eta^2 \nabla B \cdot d\vec{\sigma} \quad [4.48]$$

o en términos del campo  $\phi$

$$\langle \delta_o \rangle_D = \langle \delta \rangle_D + \frac{1}{6V_D} \int_{\sigma} \eta^2 \nabla \phi \cdot d\vec{\sigma} \quad [4.49]$$

La integral se extiende sobre el casquete esférico intersección del cono con la esfera de radio  $D$ , y  $V$  es el volumen del sector esférico

$$V_D = \frac{2\pi D^3(1-\cos(\alpha/2))}{3} \quad [4.50]$$

Así pues, el contraste promedio observado dependerá fuertemente de las estructuras presentes, y de la relación entre la escala de tales estructuras y el tamaño de la zona observada. Es más, resulta especialmente influyente la materia fuera de la región que constituye la muestra pero que da

<sup>1</sup> El catálogo CfA-I (Huchra *et al.* 1983) contiene galaxias en una región de estas características.

contribuciones al campo  $\phi$ , y sus derivadas, sobre la superficie sobre la que se calcula la integral.

### 4.2.3 SIMULACIONES NUMERICAS

Con el fin de ilustrar los efectos observacionales sobre el contraste de densidad, y como complemento a las estimaciones analíticas antes realizadas, se ha desarrollado un conjunto de simulaciones numéricas para ilustrar aquellos efectos que no pueden ser descritos de modo sencillo en el desarrollo analítico.

La simulación se basa en elegir una determinada densidad espectral  $P(k)$  para caracterizar las estructuras (las escalas de tamaños de las estructuras). A partir de  $P(k)$  podemos generar los módulos de las componentes de Fourier de un campo arbitrario de densidad. Generando aleatoriamente las fases para tales componentes de Fourier, podemos, mediante transformada inversa de Fourier, calcular el contraste real en el espacio de posiciones  $(X,Y,Z)$  para cada uno de los posibles  $P(k)$  considerados. Análogamente, una vez conocida las amplitudes y las fases de las componentes espectrales del contraste de densidad, resulta inmediato calcular el campo  $B$  y sus derivadas primeras y segundas respecto a las coordenadas espaciales. El campo  $B$  y sus derivadas se calculan mediante transformada de Fourier inversa de las respectivas componentes en el espacio de frecuencias que pueden también ser generadas a partir de  $P(k)$ .

Una vez que el contraste de densidad real, así como el campo  $B$  y sus derivadas, han sido determinados en el espacio de posiciones  $(X,Y,Z)$ , basta aplicar las ecuaciones anteriormente deducidas para calcular el contraste de densidad comóvil observado en función del contraste de densidad real calculado.

Variando la elección de  $P(k)$  pueden simularse múltiples modelos de universo inhomogéneo, correspondientes a diferentes tipos característicos de materia (materia oscura fría, neutrinos masivos, etc.).

Una vez que las funciones contraste de densidad real y contraste de densidad observado son generadas (como funciones "continuas" definidas sobre un reticulado espacial), podemos calcular a partir de ellas otras magnitudes, tales como el promedio en direcciones del contraste de densidad radial, contraste promedio dentro de una esfera de radio  $r$

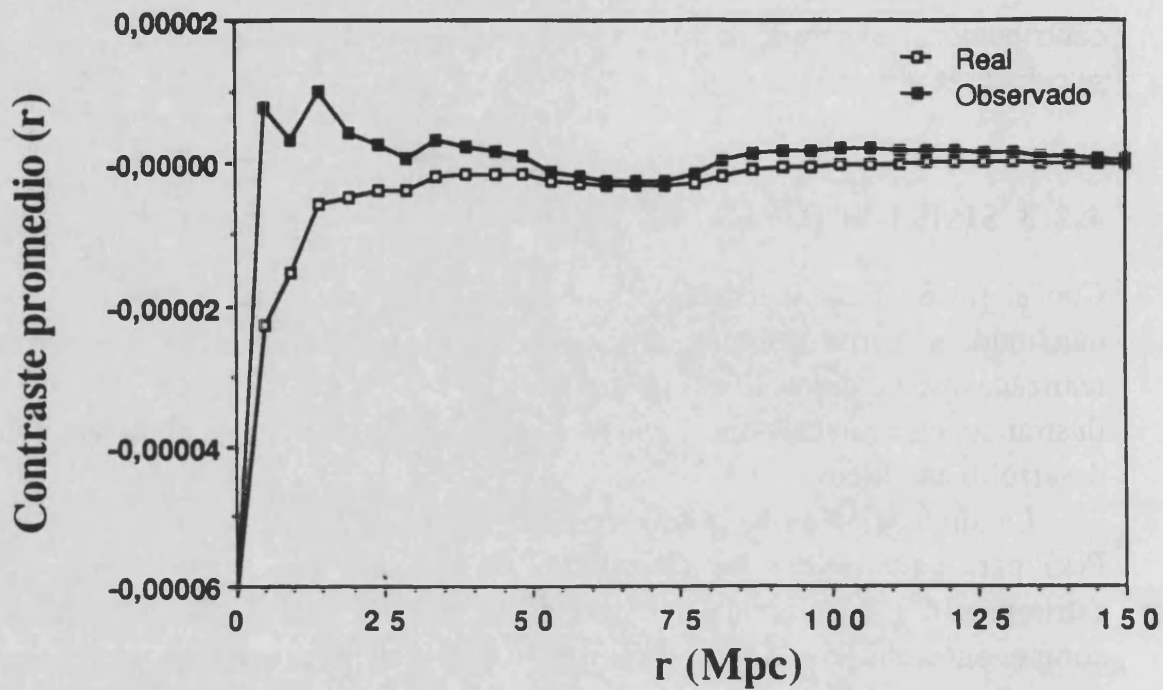


Fig. 4.2 Distorsiones observacionales en la densidad radial promedio (contraste de densidad promediado dentro de una esfera de radio  $r$ ), como una función de la distancia radial  $r$ , para una densidad espectral correspondiente a materia oscura fría (CDM).

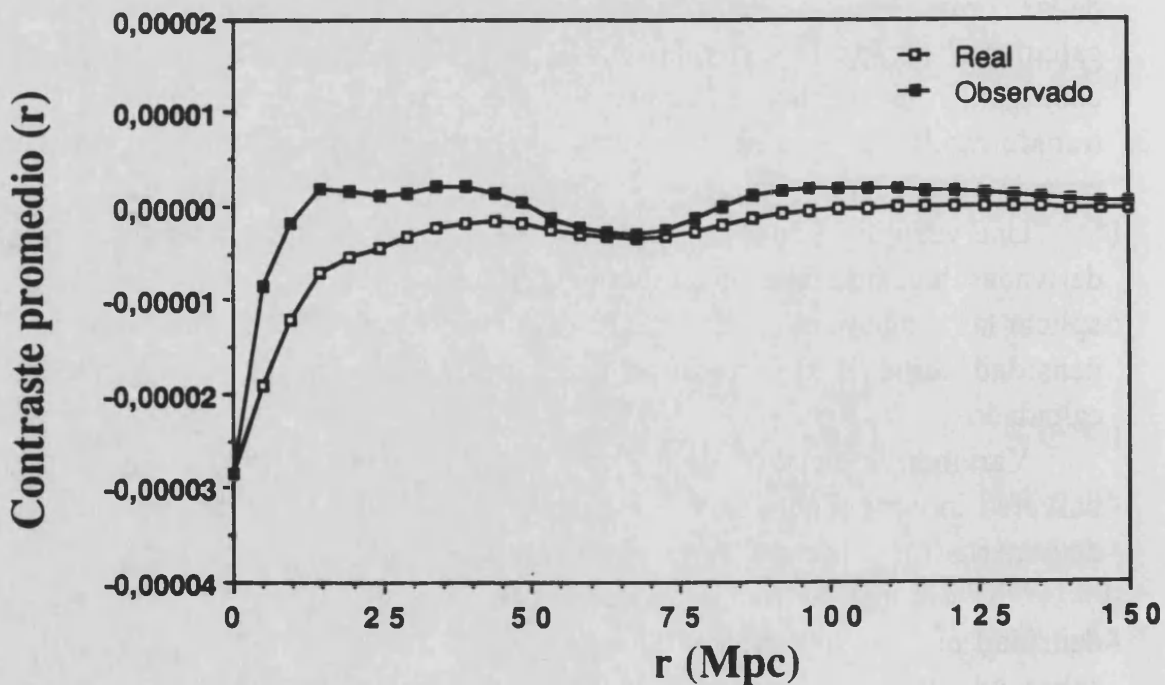
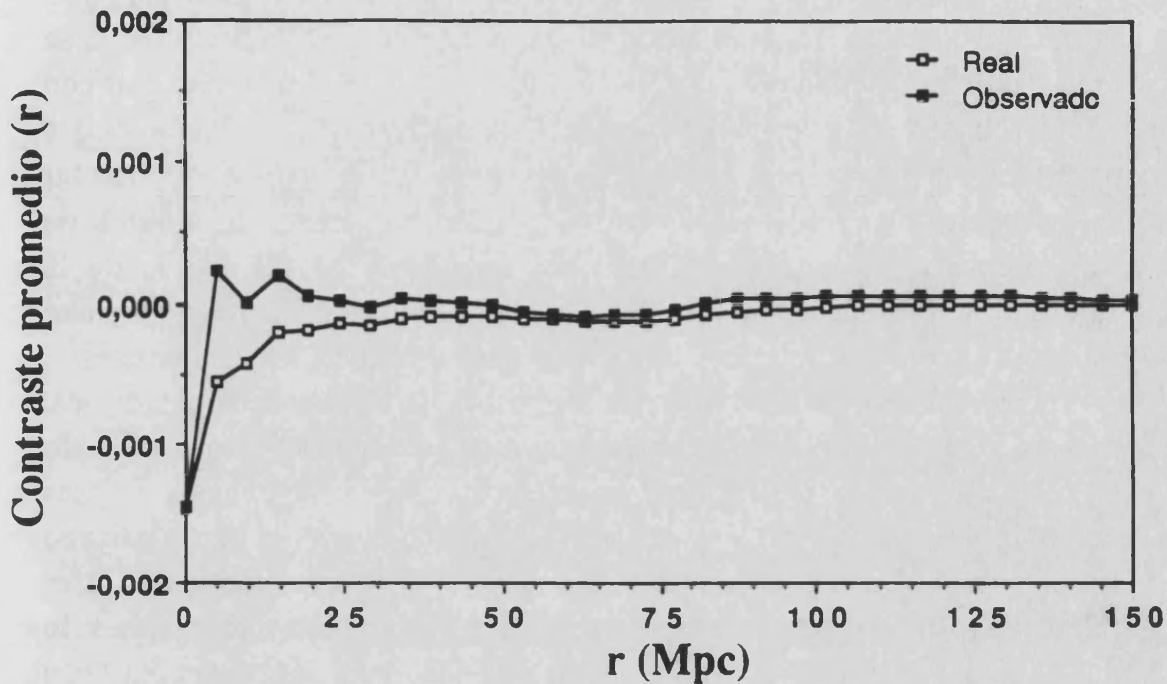


Fig. 4.3 Distorsiones observacionales en la densidad radial promedio, como una función de la distancia radial  $r$ , para una densidad espectral correspondiente a neutrinos masivos (HDM).



**Fig. 4.4** Distorsiones observacionales en la densidad radial promedio (contraste de densidad promediado dentro de una esfera de radio  $r$ ), como una función de la distancia radial  $r$ , para una densidad espectral modelizada como una simple ley de potencias ( $n=-1$ ), en el rango de frecuencias de la simulación.

Las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 son el resultado de una simulación tridimensional ( $64^3$ ), para una elección aleatoria de las fases, dada una determinada densidad espectral. La elección de fases considerada ha sido la misma en los tres casos, con el fin de poder comparar los efectos de variación en la amplitud de la densidad espectral. La simulación tiene en cuenta todos los términos en la expresión del contraste de densidad observado con respecto al contraste de densidad real.

(representado en las figuras 4.2, 4.3 y 4.4) u otro tipo de análisis morfológico o estadístico.

En primer lugar, se realizaron simulaciones bidimensionales, dada su mayor simplicidad numérica y la mayor facilidad de visualización de resultados. La resolución de la simulación era de  $1024 \times 1024$  puntos, lo que representa una muy buena resolución para este tipo de simulaciones. Sin embargo, a lo largo del análisis comprobamos que determinado tipo de resultados (sobre todo relacionados con estimaciones de distorsiones en la densidad espectral observada que veremos en el apartado siguiente) podían ser dependientes de trabajar en dos o en tres dimensiones, ya que el cálculo de laplacianas es diferente en ambos casos cuando se trabaja con potencias de la coordenada radial.

Por tal motivo, se realizaron también simulaciones tridimensionales. Por problemas de memoria y otros condicionantes de la simulación, ésta se redujo a una malla numérica  $64 \times 64 \times 64$ . La ventaja que tiene el contar con una simulación 3D y una simulación análoga 2D de mayor resolución es que permite controlar mejor todos los aspectos, e incluso "controlar visualmente" los resultados. De hecho, se han utilizado equipos de tratamiento digital de imágenes para visualizar los resultados de la simulación 2D o planos bidimensionales de la simulación 3D, lo que permite un control sobre el resultado y un análisis morfológico de las distorsiones.

Con el fin de analizar todas las escalas, se han realizado simulaciones, para un  $P(k)$  fijado, variando el tamaño de celda (o equivalentemente el lado  $L$  del cubo de la simulación) desde escalas de 1 Mpc hasta escalas comparables con el tamaño del horizonte. También se han realizado simulaciones fijando el tamaño  $L$  y variando  $P(k)$ , para una elección de fases (aleatorias) fijadas, y también fijando  $L$  y  $P(k)$  y variando sólo las fases, lo que equivale a tomar diferentes realizaciones concretas de simulaciones con las mismas propiedades estadísticas.

A lo largo de esta memoria iremos dando resultados procedente casi siempre de este tipo de simulaciones.

### **4.3 EFECTOS SOBRE LA DENSIDAD ESPECTRAL OBSERVADA**

Una de las mejores formas de caracterizar la estructura a gran escala del universo es la determinación de la densidad espectral  $P(k)$  (es decir, el promedio en direcciones del módulo al cuadrado de las intensidades de la transformada de Fourier del contraste de densidad).

En realidad, la función  $P(k)$  da sólo información sobre el tamaño típico de las estructuras. Para caracterizar por completo la morfología de las estructuras, tal como vienen descritas por la función contraste de densidad, es preciso conocer no sólo las intensidades sino también las fases de la transformada de Fourier del contraste de densidad. Sin embargo, hay razones teóricas para suponer que la distribución de las fases es esencialmente aleatoria, siendo únicamente crítica su determinación para la caracterización de las estructuras en el entorno más próximo a un observador dado en concreto, por lo que son las intensidades ( $P(k)$ ) las que

realmente caracterizan un modelo de universo, y especialmente la estructuración de la materia.

Hasta hace muy poco, los datos disponibles eran demasiado escasos para acometer la determinación de  $P(k)$ . Ello era debido a que para poder determinar  $P(k)$  en un rango suficientemente amplio de valores de  $k$  como para que dicha determinación resulte significativa, se requieren muestras que abarquen un volumen espacial suficientemente amplio (esto determina el  $k$  mínimo), y suficientemente densas en cuanto a número de galaxias como para establecer un "bin" fino que permita determinar  $P(k)$  con suficiente resolución sin que el ruido de fondo impida una determinación clara de  $P(k)$  (el tamaño del "bin" determina el  $k$  máximo). Sólo dentro del rango  $[k_{\min}, k_{\max}]$  es posible entonces la determinación de  $P(k)$ , si bien, dependiendo de tales valores extremos y dependiendo de cual sea el  $P(k)$  real del universo, la determinación puede verse sesgada para valores de  $k$  próximos a los extremos debido a la frecuencia de corte (frecuencia de Nyquist) introducida por la discretización en el cálculo limitándolo a un rango particular de  $k$ . Por otro lado, para que la determinación sea óptima sería preciso que el volumen espacial al que corresponde la muestra de galaxias considerada fuese geoméricamente simple, a ser posible una figura cúbica. Aunque existen técnicas numéricas que permiten determinar  $P(k)$  para cualquier tipo de geometría de la muestra (Baumgart & Fry, 1991), se introducen importantes sesgos si tal geometría es muy complicada, como ha sucedido de hecho con algunas de las muestras analizadas, ya que el cálculo implícitamente supone un volumen cúbico, y las regiones del mismo en las que no hay información son rellenadas con una muestra aleatoria expresamente generada, o bien el efecto de las regiones sin información es restado en el propio proceso de determinación de  $P(k)$ . En cualquier caso, si existen valores de  $P(k)$  suficientemente significativos para valores de  $k$  del orden del tamaño de la muestra, la determinación de dichos valores  $P(k)$  a partir de la muestra serán probablemente inexactos.

Dos tipos de aproximaciones se han seguido para determinar el  $P(k)$  del universo. El primero de ellos (seguido con las muestras del CfA y del IRAS) se ha basado en completar muestras suficientemente densas en volúmenes suficientemente grandes y compactos como para poder hacer una determinación "tridimensional" de  $P(k)$  (Vogeley *et al.*, 1992). El segundo de ellos se ha basado en explorar regiones angularmente muy pequeñas, pero con mucha profundidad en la medida de distancias, con lo que se hace



una determinación "unidimensional" de  $P(k)$  a partir únicamente de observaciones de redshift (Broadhurst *et al.*, 1990; Kaiser & Peacock, 1991). Este segundo tipo de estimaciones es bastante más incompleto (y probablemente impreciso) que el método tridimensional (que es el que da una auténtica estimación de  $P(k)$ ), pero tiene la ventaja de que permite esbozar las propiedades generales de  $P(k)$  en cuanto al tamaño de las estructuras más características (el valor de  $k$  para el que  $P(k)$  es máximo) y el comportamiento creciente o decreciente de  $P(k)$  al variar  $k$ . De este modo se tiene una referencia para saber si las muestras tridimensionales consideradas contienen un volumen representativo o si dicho volumen tridimensional es demasiado pequeño para caracterizar en detalle posibles grandes estructuras detectadas en muestreos profundos unidimensionales.

Además del interés meramente observacional que presenta la determinación de  $P(k)$ , por ser un caracterizador ideal de la estructura a gran escala, dicha determinación de  $P(k)$  presenta además el aliciente de ser una herramienta decisiva para corroborar o descartar ciertas teorías cosmológicas acerca del origen y evolución de las estructuras.

#### La densidad espectral $P(k)$ según diferentes teorías sobre el origen y evolución de las estructuras

De acuerdo con las teorías de evolución dinámica de las estructuras generalmente admitidas en cosmología, la densidad espectral de las fluctuaciones de densidad de materia evoluciona con el tiempo de acuerdo con una ley del tipo (Bardeen *et al.*, 1986)

$$P(k, t_f) = \left[ \frac{b(t_i)}{b(t_f)} \right]^2 T^2(k, t_f) P(k, t_i) \quad [4.51]$$

donde  $T(k, t_f)$  es la llamada función de transferencia

$$T(k, t_f) = \frac{b(t_i)}{b(t_f)} \frac{F(k, t_i)}{F(k, t_f)} \quad [4.52]$$

siendo  $b(t)$  una función que especifica la ley de crecimiento lineal de las perturbaciones de gran longitud de onda y  $F(k, t)$  son las componentes de Fourier del campo de densidad.

De acuerdo con los trabajos de Bardeen (1985), Bond y Szalay (1983), Bond y Efstathiou (1984) y Efstathiou y Bond (1985), recopilados por Bardeen *et al.* (1986), es posible derivar, a partir de estimaciones analíticas y simulaciones numéricas, fórmulas de ajuste que reproducen de modo

bastante preciso las funciones de transferencia para tiempos recientes en universos dominados por reliquias (en regimen de no colisiones) del big-bang, en las cuales la densidad bariónica  $\Omega_B$  es mucho menor que la densidad de materia oscura  $\Omega_X$ . Tales funciones de ajuste dependen considerablemente del tipo de materia considerado:

A.- Materia oscura fría con fluctuaciones adiabáticas:

$$T_{\text{CDC,ad,X}}(k) = \frac{\ln(1+2.34q)}{2.34q [1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4]^{1/4}} \quad [4.53]$$

donde

$$q \equiv \frac{k \vartheta^{1/2}}{\Omega_X h^2 \text{ Mpc}^{-1}} \quad [4.54]$$

$\vartheta$  tiene que ver con el tipo de materia, pero normalmente se toma  $\vartheta=1$ .

B.- Neutrinos masivos (una sola especie), con fluctuaciones adiabáticas:

$$T_{\text{v,ad}}(k) = \frac{\exp\left(-0.16(kR_{fv}) - \frac{(kR_{fv})^2}{2}\right)}{1 + 1.6q + (4.0q)^{3/2} + (0.92q)^2} \quad [4.55]$$

siendo

$$R_{fv} = \frac{2.6}{\Omega_v h^2} \text{ Mpc} \quad [4.56]$$

y

$$q \equiv \frac{k \vartheta^{1/2}}{\Omega_v h^2 \text{ Mpc}^{-1}} \quad [4.57]$$

de modo que puede establecerse la aproximación

$$T_{\text{v,ad}}(k) \approx \exp(-3.9q - 2.1q^2) \quad [4.58]$$

Existen además numerosas variantes de estas teorías, que representan en definitiva la introducción de nuevos parámetros en las funciones de ajuste o la reparametrización de algunas de tales dependencias. No obstante, tales teorías introducen pequeñas modificaciones que sólo son notables cuando se

hace evolución temporal de las estructuras o cuando se pretenden analizar determinados efectos observacionales en una zona de frecuencias espaciales muy específica. Como en este caso se pretende un análisis general de las repercusiones sobre la distorsión observacional de la densidad espectral, nos limitaremos al estudio de los principales tipos característicos de densidades espectrales resultantes de las principales teorías actualmente en consideración.

Para determinar la densidad espectral a considerar finalmente en nuestras simulaciones es preciso adoptar una densidad espectral como condición inicial, de modo que aplicando la ecuación [4.51] pueda obtenerse la densidad espectral actual. Para ello, la suposición generalmente admitida es una ley de potencias con índice espectral  $n$

$$P(k, t_i) \approx k^n \quad [4.59]$$

En particular, el índice  $n=1$  define el llamado "espectro de Zeldovich" resultante del proceso inflacionario. La forma asintótica de la densidad espectral resultante de las fluctuaciones de densidad de materia oscura fría es del tipo  $\approx Ak$  para pequeños valores de  $k$  (longitudes de onda largas) y  $\approx A \frac{(\ln k)^2}{k^3}$  para valores grandes de  $k$  (longitudes de onda pequeñas), siendo

$A$  una amplitud de normalización. En el caso de neutrinos masivos y materia oscura tibia o caliente el espectro de potencias queda reducido prácticamente a cero para pequeñas escalas.

Otros tipos de funcionales para la densidad espectral han sido también considerados en nuestras simulaciones: la simple ley de potencias

$$P(k) = k^n \quad (\text{generalmente con } n \text{ negativo}) \quad [4.60]$$

y una modelización del tipo

$$P(k) = k^n \exp\left(-\frac{k^2}{k_c^2}\right) \quad [4.61]$$

Si bien estos casos no corresponden a procesos físicos concretos, son modelizaciones matemáticas generales que pueden describir cualquier tipo de funcional  $P(k)$ , por lo que resultan ilustrativos a la hora de describir los efectos que aquí vamos a considerar.

### Distorsiones observacionales descritas en la densidad espectral

La densidad espectral efectivamente observada (calculada a través de las posiciones observadas de las galaxias redshift-ángulo) no corresponde a la densidad espectral real, salvo que se hagan las oportunas correcciones.

El tratamiento clásicamente seguido para analizar las distorsiones en el espacio de redshift se basa en la hipótesis (nunca justificada) de considerar una región suficientemente distante del observador, que comprende un ángulo pequeño desde el observador, de modo que las distorsiones radiales pueden tratarse como correcciones a lo largo de un eje cartesiano en una proyección plana del volumen considerado. En este caso simplificado, la amplitud aparente de cualquier perturbación de densidad lineal viene dada por (Kaiser, 1987)

$$\delta_{\text{obs}} = \delta_{\text{real}} \left( 1 + \frac{\Omega^{0.6} \mu^2}{b} \right) \quad [4.62]$$

donde  $\mu$  es el coseno del ángulo formado por el vector de onda  $\vec{q}$  y la dirección radial de visión  $\vec{u}_r$ , ( $\mu = \vec{q} \cdot \vec{u}_r$ ). Al hacer un promedio azimutal, el resultado de dicha distorsión en el contraste de densidad sobre la densidad espectral observada viene dado simplemente por un factor constante 28/15, si no se introducen efectos de sesgo ( $b=1$ ) y para el caso  $\Omega=1$ ,

$$P(k) \rightarrow 1.87 P(k) \quad [4.63]$$

Para pequeñas escalas, esta simple corrección lineal [4.63] no puede aplicarse, debido a las dispersiones aleatorias de velocidades peculiares en un régimen virializado que constituyen el efecto dominante en el agrupamiento de las galaxias. Suponiendo que dicha dispersión de velocidades puede considerarse gaussiana y caracterizada por un valor  $\sigma_v$ , se tiene como variación del contraste de densidad aparente

$$\delta_{\text{obs}} \approx \delta_{\text{real}} \exp \left[ - \frac{1}{2} \left( \frac{k \mu \sigma_v}{H} \right)^2 \right] \quad [4.64]$$

Al hacer el promedio azimutal se tiene como ley de transformación de la densidad espectral observada

$$P(k) \rightarrow P(k) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\text{erf} \left( \frac{k \sigma_v}{H} \right)}{\frac{k \sigma_v}{H}} \quad [4.65]$$

resultando que los modos con altos valores de  $k$  son sólo amortiguados por una potencia de  $k$ , en lugar de caer exponencialmente.

Ahora bien, según vimos en el Capítulo 3 de esta memoria, las distorsiones producidas en el contraste de densidad efectivamente observado no vienen unicamente descritas por la ecuación [4.62] sino que dicha ecuación representa sólo el término dominante de toda una serie de términos que han de tenerse en cuenta. De hecho, el término considerado en [4.62] es dominante siempre que estemos en la hipótesis de considerar una región relativamente pequeña y muy alejada de la posición del observador, pero dicho término es comparable a algunos de los restantes términos en situaciones más realistas.

Según veremos, la ecuación [4.62] deducida en la aproximación de observador muy lejano, constituye un resultado válido como general para otras situaciones, pero existen casos en los que la situación cambia drásticamente si el observador está próximo a la región analizada, y particularmente si existen componentes dominantes en la densidad espectral con longitudes de onda mayores que la distancia de dicha región considerada a la posición del observador.

#### Estimación analítica de las distorsiones observacionales en $P(k)$

Consideremos el cubo centrado en el observador de lado  $2L$ ,  $C_L = \{x^1, x^2, x^3\}$  con  $-L \leq x^i \leq L$ . Supongamos que el campo de densidad  $\delta(x)$  es periódico en  $C_L$  y consideremos su desarrollo de Fourier

$$\delta(x) = \sum_k \delta_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad [4.66]$$

$$\delta_k = \frac{1}{(2L)^3} \int_{C_L} \delta(x) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x \quad [4.67]$$

$$k = (n_1, n_2, n_3) \frac{\pi}{L}, \quad -\infty < n_i < \infty \quad [4.68]$$

La función de correlación del campo  $\delta(x)$  en el cubo  $C_L$  viene dada por

$$\xi(\vec{R}) = \langle \delta(\vec{X} + \vec{R}) \delta(\vec{X}) \rangle_D \quad [4.69]$$

de modo que

$$\xi(\vec{R}) = \sum_k |\delta_k|^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \quad [4.70]$$

Supondremos que las fases de  $\delta_k$  son aleatorias, con lo que habremos de considerar el promedio respecto a las fases en la expresión anterior. Una cantidad importante es la densidad espectral  $P(k) = \langle |\delta_k|^2 \rangle$  (aquí el promedio es respecto a las fases).

Consideremos la expresión del contraste de densidad observado  $\delta_o$ , de la que sólo tomaremos los dos primeros términos:

$$\delta_o = \delta + Y(x) \quad [4.71]$$

$$Y(x) = - \frac{1}{20} \operatorname{div}[\eta^2 \vec{N} \cdot \nabla B \vec{N}] \quad [4.72]$$

Sean  $\delta_o(k) = \delta_k + Y(k)$ , sus componentes de Fourier. Teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\int_{C_L} \operatorname{div}(\vec{F}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x = \int_{\partial C_L} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{C_L} i\vec{F}\cdot\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x \quad [4.73]$$

obtenemos

$$Y(k) = \frac{1}{(2L)^3} \sum_{k'} \frac{\delta_{k'}}{|k'|^2} \int_{C_L} \frac{\vec{X}\cdot\vec{k}\vec{X}\cdot\vec{k}'}{R^2} e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{x}} d^3x \quad [4.74]$$

Calculemos la densidad espectral observada

$$P_o(k) = \langle |\delta_o(k)|^2 \rangle = P(k) + \langle \delta(k)Y(k)^* + \delta(k)^*Y(k) \rangle + \langle Y(k)Y(k)^* \rangle \quad [4.75]$$

donde  $P(k)$  es la densidad espectral real. Tendremos en cuenta la simplificación  $\langle \delta(k)\delta(k')^* \rangle = |\delta(k)|^2 \delta^K_{kk'}$  (donde  $\delta^K$  significa delta de Kronecher). El primer promedio es elemental

$$\langle \delta(k)Y(k)^* + \delta(k)^*Y(k) \rangle = 2 \frac{1}{(2L)^3} \frac{|\delta_k|^2}{|k|^2} \int_{C_L} \frac{(\vec{X}\cdot\vec{k})^2}{R^2} d^3x \quad [4.76]$$

la integral se calcula teniendo en cuenta

$$\int_{C_L} \frac{X^m \cdot X^n}{R^2} d^3x = \frac{(2L)^3}{3} \delta_{K_{mn}} \quad [4.77]$$

con lo que se obtiene

$$\langle \delta(k)Y(k)^* + \delta(k)^*Y(k) \rangle = \frac{2}{3} |\delta_k|^2 \quad [4.78]$$

El último promedio es un poco más complicado. En primer lugar escribamos

$$\begin{aligned} \langle Y(k)Y(k)^* \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2L)^6} \sum_{k'} \frac{|\delta_{k'}|^2}{|k'|^4} \left| \int_{C_L} \frac{X^{\vec{k}} \cdot \vec{k} X^{\vec{k}'} \cdot \vec{k}'}{R^2} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x \right|^2 \end{aligned} \quad [4.79]$$

Separemos la contribución del sumando  $k' = k$

$$\langle Y(k)Y(k)^* \rangle = \frac{1}{9} |\delta_k|^2 + \sum_{k' \neq k} \frac{|\delta_{k'}|^2}{|k'|^4} |k^m k'^n I_{mn}(q)|^2 \quad [4.80]$$

donde

$$I_{mn}(q) = \frac{1}{(2L)^6} \int_{C_L} \frac{X^m \cdot X^n}{R^2} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x \quad [4.81]$$

con lo cual tenemos la fórmula

$$P_0(k) = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) P(k) + \sum_{k' \neq k} \frac{|\delta_{k'}|^2}{|k'|^4} |k^m k'^n I_{mn}(q)|^2 \quad [4.82]$$

Esta expresión difiere de la considerada habitualmente (Kaiser 1987)

$$P_0(k) = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) P(k) \quad [4.83]$$

Si bien la discrepancia numérica es pequeña (en nuestro caso obtenemos  $16/9=1.78$  mientras Kaiser obtenía  $28/15=1.87$ ), las consecuencias son cualitativamente importantes, ya que este nuevo método representa un modo más detallado —y posiblemente más correcto— de calcular las distorsiones en  $P(k)$ .

Los resultados no pueden coincidir por dos motivos: primero porque nosotros estamos considerando términos de la forma  $N^m \partial_m B/R$  en la expresión del contraste de densidad, que no tuvo en cuenta Kaiser.

En este caso consideramos

$$\delta_o = \delta + Y(x) = \delta - \frac{1}{20} \ddot{B}_E + \frac{1}{10R} \dot{B}_E \quad [4.84]$$

en lugar de simplemente

$$\delta_o = \delta - \frac{1}{20} \ddot{B}_E \quad [4.85]$$

En segundo lugar, el resultado no puede coincidir porque Kaiser no calculó realmente la cantidad  $P_o(k) = \langle |\delta_o(k)|^2 \rangle$ , sino que partiendo de la expresión

$$\delta(x) = \sum_k (1 + \cos^2 \vartheta) \delta_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad [4.86]$$

donde  $\vartheta$  es el ángulo que forma  $\vec{X}$  con  $\vec{k}$ , identifica  $P_o(k)$  con

$$P_o(k) = \sum_k \langle (1 + \cos^2 \vartheta)^2 \rangle |\delta_k|^2 \quad [4.87]$$

donde el promedio es respecto a las direcciones  $\vartheta$ . Este procedimiento no es correcto porque  $P_o(k) = \langle |\delta_o(k)|^2 \rangle$ , y  $\delta_o(k)$  no es igual a  $(1 + \cos^2 \vartheta) \delta_k$ , ya que existe todavía una dependencia espacial en  $\vartheta$ .

Es este diferente modo de calcular el promedio para determinar  $P(k)$  lo que conduce al diferente resultado, ya que ambas formulaciones no son equivalentes. Además, estas estimaciones analíticas dan cuenta sólo de los términos dominantes, y se requieren simulaciones numéricas para considerar el resto de los términos.



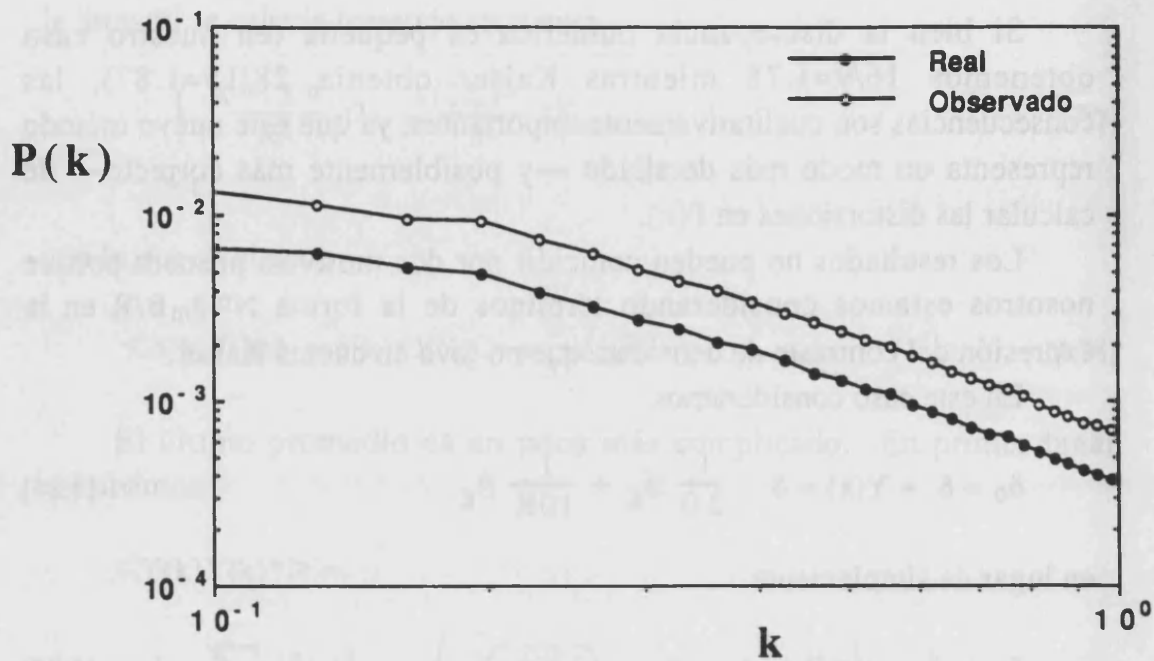


Fig. 4.5 Distorsiones observacionales en la densidad espectral  $P(k)$  observada, para una densidad espectral "real" correspondiente a materia oscura fría (CDM).

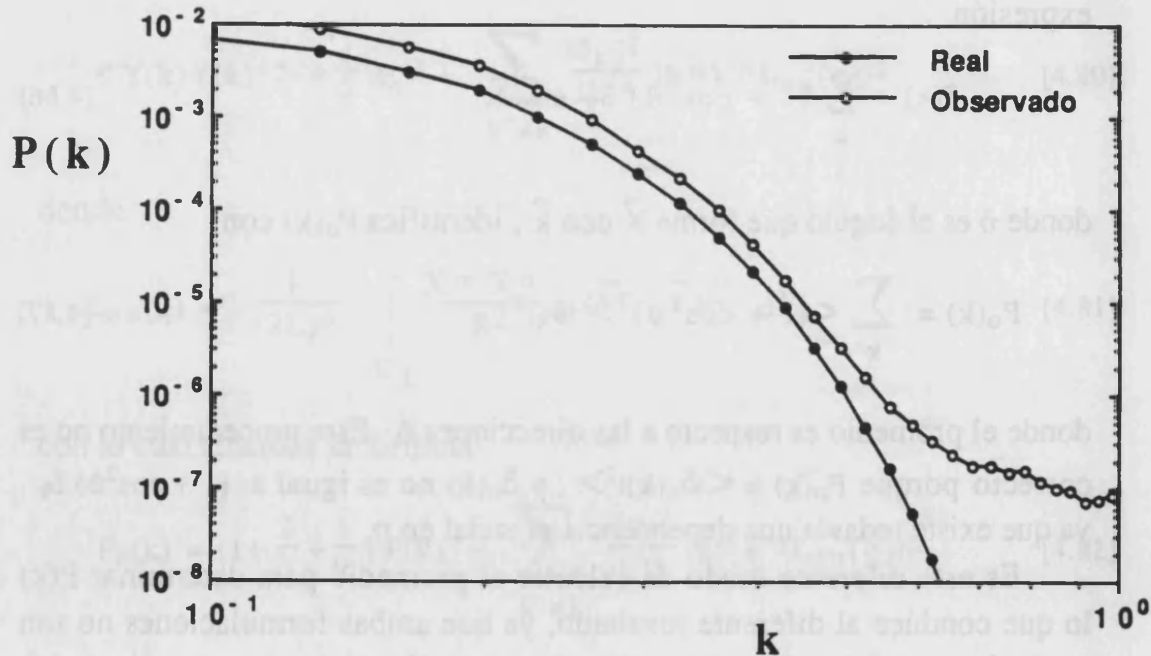
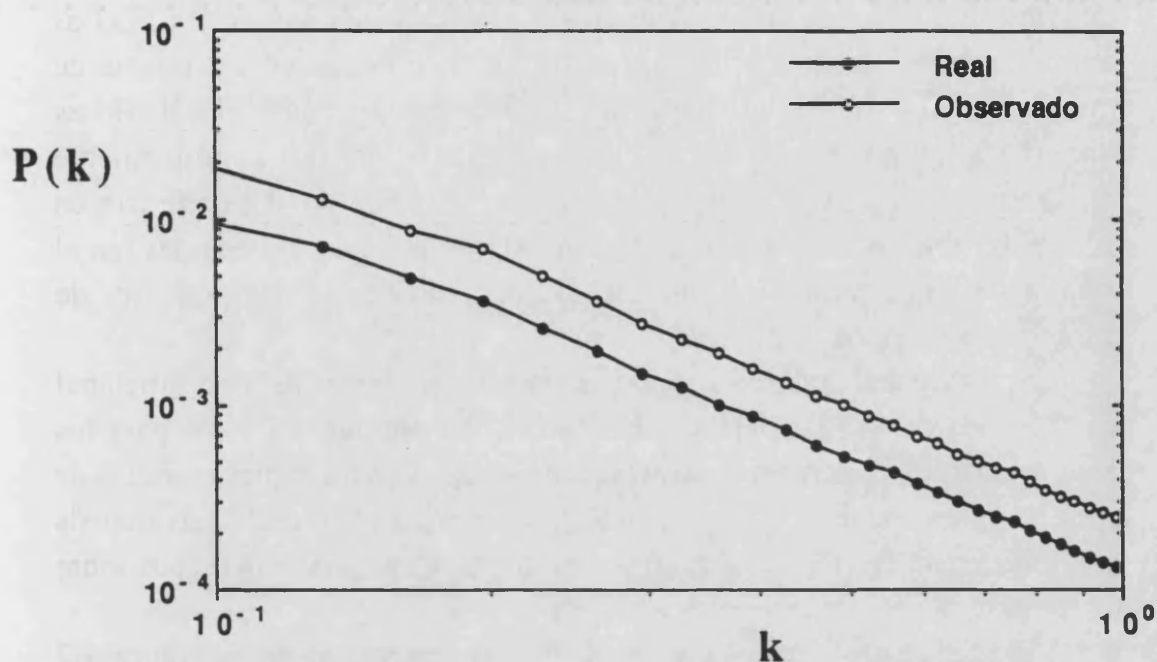


Fig. 4.6 Distorsiones observacionales en la densidad espectral  $P(k)$  observada, para una densidad espectral "real" correspondiente a neutrinos masivos (HDM).



**Fig. 4.7** Distorsiones observacionales en la densidad espectral  $P(k)$ , tomando como  $P_{\text{real}}(k)$  la densidad espectral "observada" en la muestra del CfA, modelizando dicha  $P(k)$  mediante el ajuste de Vogeley *et al.* (1992). Este análisis permite estimar hasta qué punto pueden existir distorsiones observacionales en el  $P(k)$  determinado a partir de la muestra del CfA, pero este análisis no descarta que el  $P^{\text{obs}}(k)$  observado proceda de un  $P_{\text{real}}(k)$  mucho más diferente (no una mera proporcionalidad respecto al observado), en el que las distorsiones observacionales puedan haber jugado un papel más importante, sobre todo dada la escasa significación estadística del ajuste de Vogeley *et al.* (1992).

Las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 son el resultado de la simulación tridimensional ( $64^3$ ), para la misma elección de fases aleatorias en los tres casos, con el fin de poder comparar los efectos de variación en la amplitud de la densidad espectral. La simulación se hace realmente sobre el contraste de densidad, y  $P(k)$  se calcula promediando en direcciones el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier del contraste de densidad.

### Simulaciones numéricas

Haciendo uso de las simulaciones tridimensionales descritas en el apartado anterior se han estudiado de modo numérico las distorsiones observacionales en  $P(k)$ , con el fin de, por un lado, corroborar los resultados de las estimaciones analíticas, y, por otro lado, ver la influencia de aquellos términos que no han sido directamente considerados en las estimaciones analíticas por la dificultad matemática y la dependencia de dicho cálculo de la realización concreta de las fases para un  $P(k)$  supuesto dado.

Hay que tener en cuenta que en las simulaciones numéricas  $P(k)$  es directamente calculado mediante transformada de Fourier del contraste de densidad (real y observado), con lo que matemáticamente el cálculo es completamente análogo al cálculo del contraste de densidad, simplemente añadiendo el cálculo final de la transformada de Fourier del contraste en cada caso.  $P(k)$  viene determinado como el promedio en direcciones (en el espacio de frecuencias) del módulo al cuadrado de las componentes de Fourier del contraste de densidad.

Los resultados obtenidos son altamente dependientes del tipo funcional de  $P(k)$  considerado. Aparecen ilustrado en las figuras 4.5 y 4.6 para los casos de materia oscura fría y neutrinos masivos. Otros simples modelos de leyes de potencias fueron considerados, y también se han realizado análisis de la influencia de la elección particular de fases en cada realización sobre los resultados obtenidos (Fig. 4.10).

Especialmente interesante es el caso representado en la figura 4.7 correspondiente al ajuste de Vogeley *et al.* (1992) a la densidad espectral real determinada a partir de la muestra del CfA. Este análisis permite analizar hasta qué punto tales estimaciones de  $P(k)$  a partir de la muestra del CfA puede estar distorsionadas. De acuerdo con estos resultados, el  $P(k)$  estimado debe corresponder bastante bien a la densidad espectral real, salvo un factor constante.

Esto no es lo que sucede para un  $P(k)$  correspondiente a un modelo de neutrinos masivos (Fig. 4.6) y en general en modelos en los que  $P(k)$  caiga rápidamente a cero al aumentar  $k$  (Fig. 4.8). En tales casos, las distorsiones observacionales ligadas a los términos

$$\sum_{k' \neq k} \frac{|\delta_{k'}|^2}{|k'|^4} |k^m k'^n I_{mn}(q)|^2 \quad [4.88]$$

dan lugar a una "cola" de mucha mayor amplitud que el  $P(k)$  real para tales valores de  $k$ . El cociente  $P^{obs}(k)/P^{real}(k)$ , que en general se mantiene igual a 1.8 (de completo acuerdo con la estimación teórica), crece rápidamente en tales zonas al aumentar  $k$ , alcanzando un máximo varios órdenes de magnitud por encima de dicho valor 1.8, para luego caer de nuevo a medida que aumenta  $k$  (ver figura 4.9).

Este efectos de distorsión en  $P(k)$  es nuevo, y no ha sido anteriormente descrito.

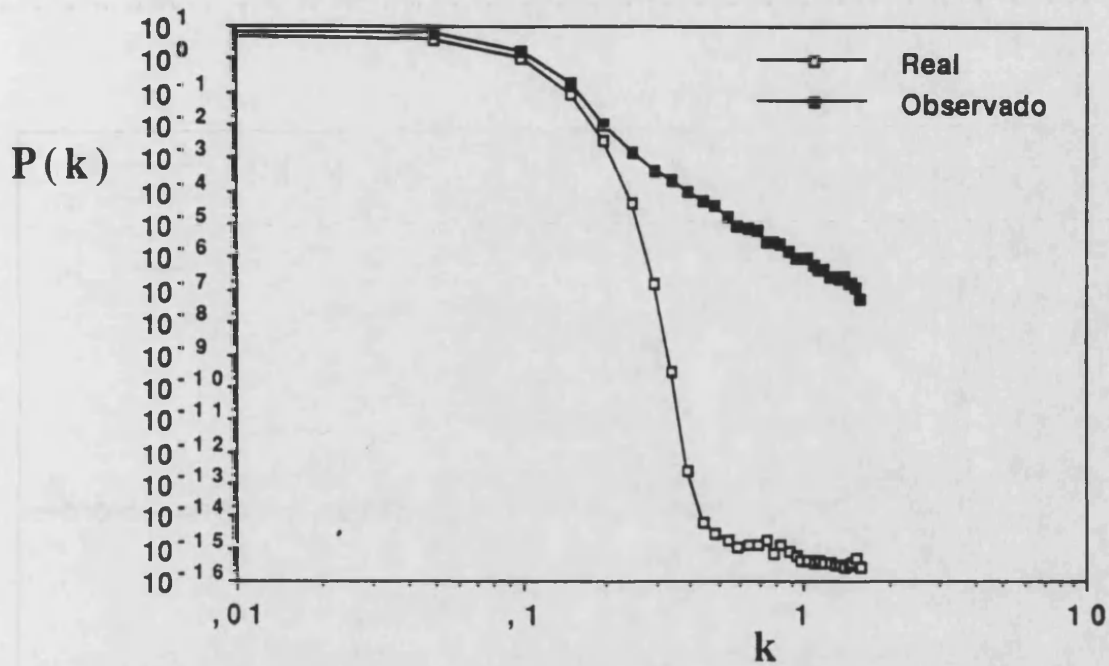


Fig. 4.8 Distorsiones observacionales en la densidad espectral  $P(k)$ , para una densidad espectral "real" modelizada genéricamente mediante una ley del tipo  $P(k) = k^n \exp(-k/k_c)$ . En este caso  $n=1$ , y  $k_c$  se ha elegido para reproducir la escala a la que se observa el máximo en la determinación de  $P(k)$  a partir de la muestra del CfA.

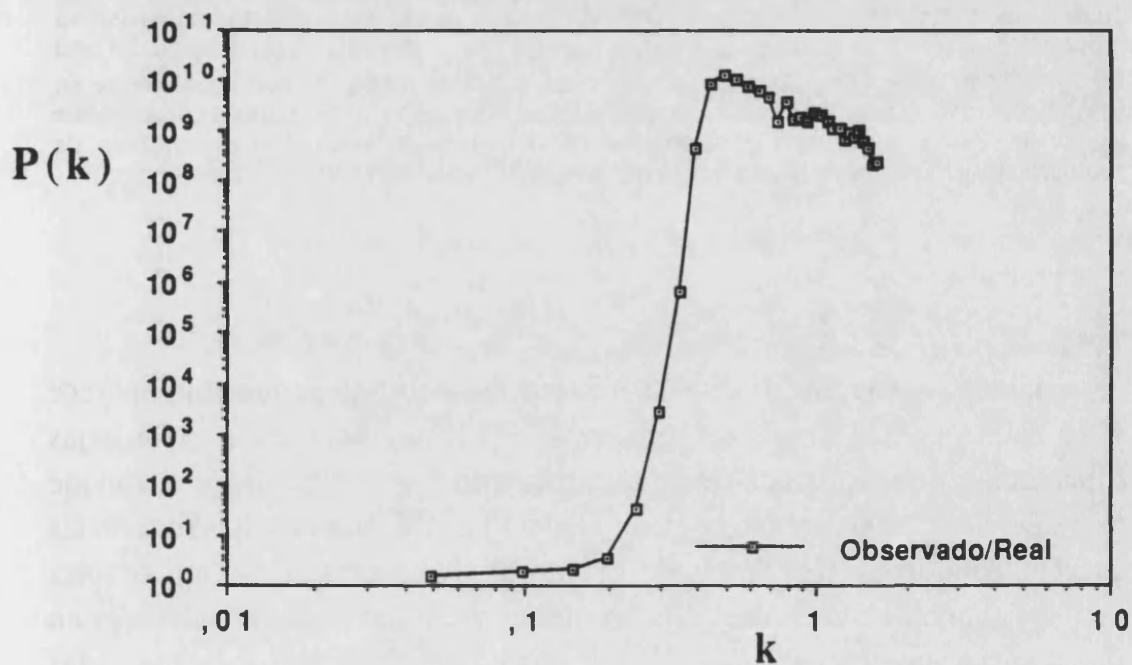
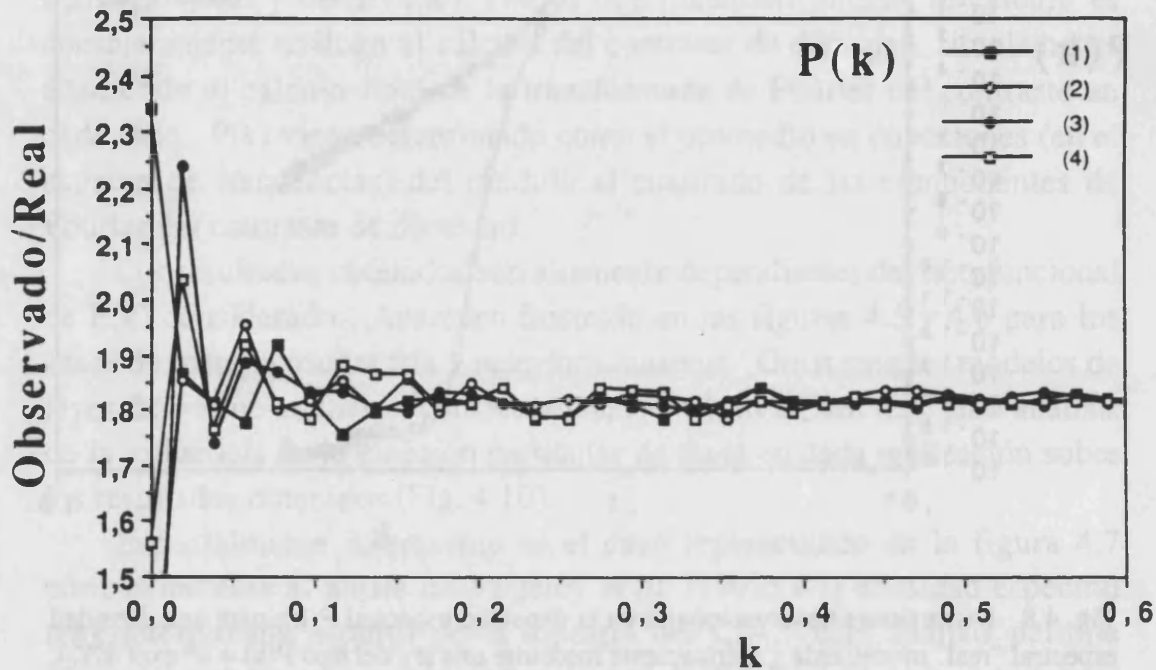
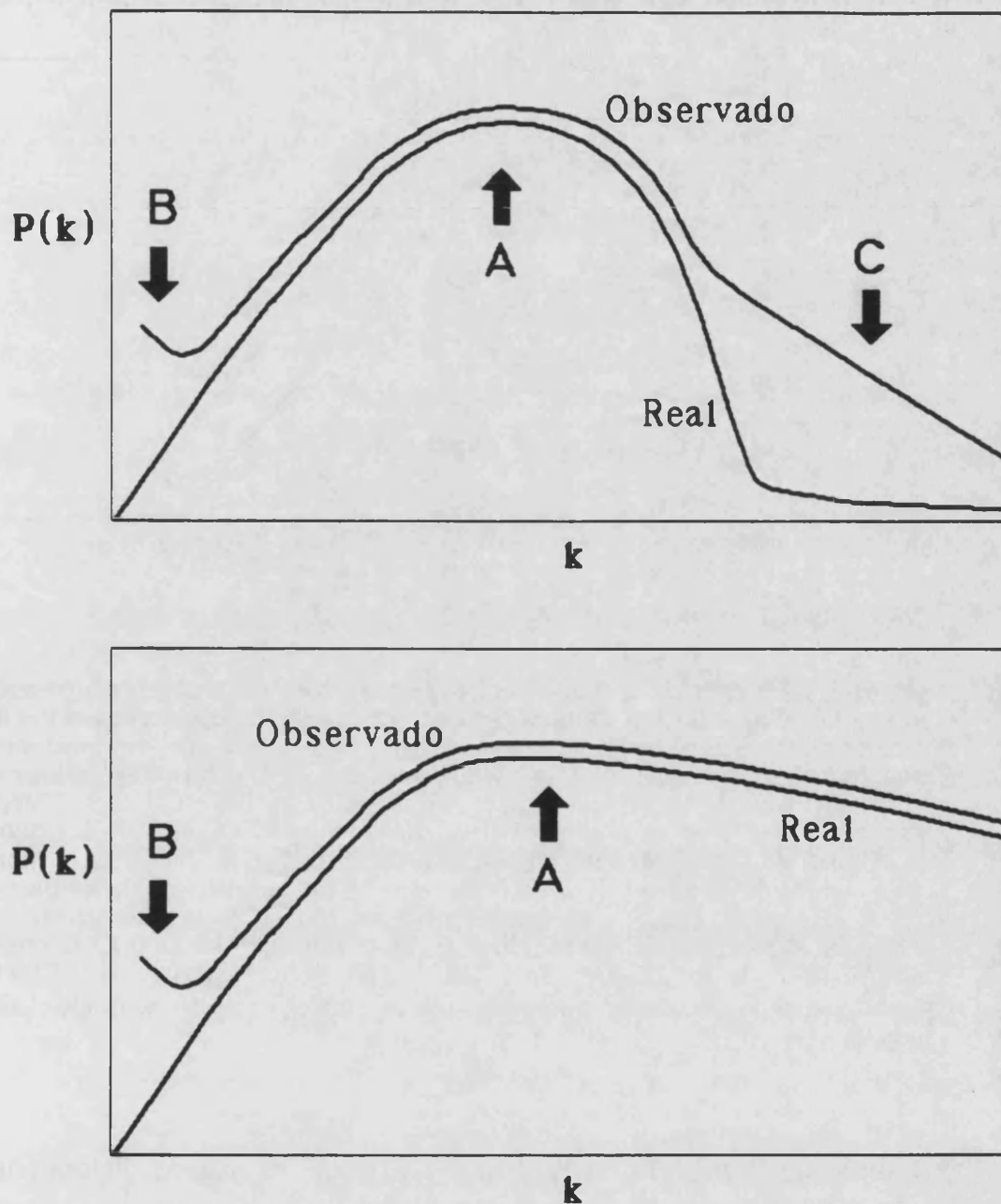


Fig. 4.9 Cociente entre la densidad espectral  $P(k)$  observada y la densidad espectral real, para el caso representado en la figura anterior (4.8)

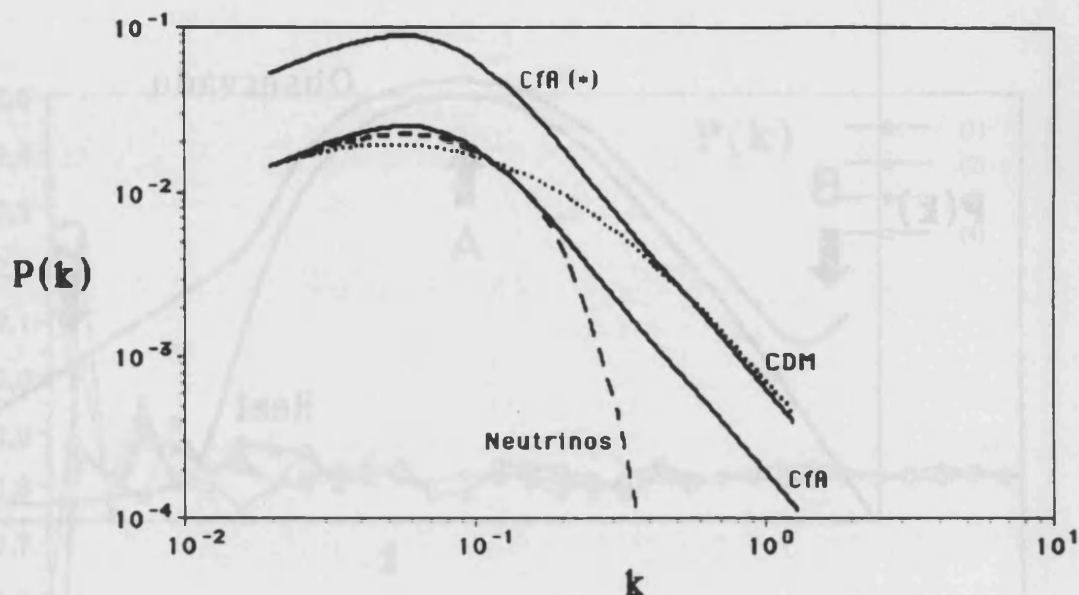


**Fig. 4.10** Analisis de la influencia de la estructuración concreta resultante en cada realización aleatoria de las fases consideradas en la simulación sobre las distorsiones observacionales; en particular, sobre el cociente  $P_{\text{obs}}(k)/P_{\text{real}}(k)$ . En este caso se trata de cuatro elecciones completamente diferentes de las fases, para una misma densidad espectral fijada. Aunque la figura corresponde al caso de una densidad espectral del tipo  $P(k) = k^n$ , con  $n=-1$ , el resultado es representativo: se encuentra de modo coherente un valor 1.8 para dicho cociente, con mayores diferencias para valores pequeños de  $k$ , donde la simulación deja de ser representativa dado el tamaño limitado del volumen de simulación y el corte introducido por la frecuencia límite de Nyquist.

Además de la "cola" de alta frecuencias espaciales, que sólo aparece para determinados tipos funcionales de  $P(k)$ , hay una "cola" para bajas frecuencias, que sí aparece siempre, de acuerdo con nuestro modelo, aunque fuera del alcance observacional (ver Fig. 4.11). Tal cola de bajas frecuencias está ligada a los efectos del campo B sobre escalas espaciales comparables con el tamaño del horizonte, escalas que también han sido consideradas en nuestras simulaciones. La cola de altas frecuencias está ligada a las distorsiones producidas por la observación de estructuras en escalas de tamaños comparables a la distancia entre la estructura y el observador.



**Fig. 4.11** Representación esquemática de las distorsiones observacionales en la densidad espectral  $P(k)$ , en el régimen lineal. Tres tipos de efectos cabe destacar: la zona A, donde  $P^{obs}(k)$  es simplemente proporcional a  $P^{real}(k)$ ; la zona de bajas frecuencias espaciales, donde aparece la cola B, debida a los efectos del campo  $B(x,y,z)$  sobre grandes escalas espaciales; y la zona de altas frecuencias espaciales, donde aparece la cola C, debida a la observación de estructuras en escalas comparables con la distancia entre la propia estructura y el observador. Dicha cola C sólo aparece si  $P^{real}(k)$  decrece bruscamente al aumentar  $k$  (primer caso), y no aparece si  $P^{real}(k)$  decrece suavemente al aumentar  $k$  (segundo caso).



**Fig. 4.12** Ilustración de la relación entre la densidad espectral observada (determinada partir del catálogo del CfA) y los principales modelos teóricos: materia oscura fría (CDM), y materia oscura caliente (neutrinos masivos). Tradicionalmente se considera que el modelo que mejor reproduce las observaciones es CDM, si bien hay problemas para reproducir el comportamiento de  $P(k)$  para  $k$  pequeño (grandes estructuras) (comparéanse las curvas CDM (línea de puntos) y CfA(\*) (línea continua)). El modelo de neutrinos no es compatible con las observaciones, pero si se tienen en cuenta las distorsiones observacionales, el modelo de neutrinos "observado" podría —al menos para ciertas elecciones de parámetros— corresponder mejor con las evidencias observacionales que la propia CDM, sin necesidad de introducir sesgos adicionales. La curva CfA corresponde esencialmente a la curva de "neutrinos" que sería efectivamente observada. CfA y CfA(\*) son diferentes normalizaciones para los datos del catalogo del CfA, tomando el ajuste de Vogeley *et al.* (1992).

Cabe señalar por último (ver Fig. 4.12) que las nuevas distorsiones observacionales aquí descritas van en el sentido de "favorecer" de algún modo a los modelos de materia tibia o caliente (HDM) con respecto a los modelos de materia oscura fría (CDM). El  $P(k)$  observado (CfA) podría corresponder, para una cierta elección de parámetros, a un  $P(k)$  real del "tipo HDM", ya que las distorsiones observacionales tiende a deformar un  $P(k)$  de este tipo haciéndolo más parecido al  $P(k)$  observado, lo que no sucede en ningún caso con un  $P(k)$  "tipo CDM".

#### 4.4 DETERMINACION DEL CAMPO DE VELOCIDADES PECULIARES

Además de la determinación de las posiciones tridimensionales de las galaxias en el espacio y de la derivación a partir de dichas posiciones del campo de densidad de materia, y por lo tanto de la morfología de las estructuras, otro aspecto interesante a derivar también de las observaciones es el campo de velocidades peculiares, que ha de ser compatible con la densidad de materia dado que la interacción dominante en la generación del campo de velocidades es la propia interacción gravitatoria (excepto en determinadas zonas particulares en las que las presiones son importantes y se alcanza un régimen virializado que ha de ser considerado al margen del contexto que ahora estamos estudiando).

La determinación del campo de velocidades peculiares, supuestamente conocida la distribución (real) de materia una vez corregidas las posiciones aparentes observadas de las galaxias, viene dada simplemente por la aplicación de las reglas que rigen la propia interacción gravitatoria. Parecería pues, en principio, trivial la determinación del campo de velocidades peculiares, pero cabe hacer ciertas consideraciones, especialmente dependientes del régimen de velocidades a considerar (lineal o no lineal). En cualquier caso dicho régimen viene determinado por la densidad (material) de las estructuras, más que por la propia magnitud de las velocidades que entran en juego, que en ningún caso son tan elevadas como para necesitar un tratamiento netamente relativista. De hecho, toda la discusión acerca del campo de velocidades peculiares puede hacerse en un contexto meramente newtoniano.

##### Régimen lineal

En la teoría lineal, las componentes contravariantes de la velocidad peculiar de una galaxia vienen dadas, en términos del campo  $B$ , por una ley del tipo

$$V^i = \frac{H_0}{20\eta} \partial_i B \quad [4.89]$$

o análogamente en términos del campo  $\phi$ ,

$$V^i = -\frac{H_0}{6\eta} \partial_i \phi \quad [4.90]$$



Consideremos un sistema de referencia  $\{e_{(i)}\}$ , cuyas componentes contravariantes vienen dadas por

$$e_{(i)}^\alpha = \frac{1}{a(\eta)} \delta_{(i)}^\alpha \quad [4.91]$$

y cuyas componentes covariantes vienen dadas por

$$e_{(i)\alpha} = a(\eta) \delta_{(i)\alpha} \quad [4.92]$$

Las proyecciones de la velocidad peculiar  $V$  sobre los ejes coordenados del sistema de referencia  $\{e_{(i)}\}$  pueden calcularse del modo

$$V_{(i)} = (V, e_{(i)}) = a(\eta) V^i = \frac{\eta}{10} \partial_i B \quad [4.93]$$

En notación vectorial para las tres componentes resultantes se tiene

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\eta}{10} \vec{\nabla} B(\vec{r}) \quad [4.94]$$

Es decir, la velocidad peculiar de una galaxia resulta directamente proporcional al momento dipolar de la distribución de materia alrededor de dicha galaxia.

### Regimen no lineal

Cuando el contraste de densidad de las estructuras es lo suficientemente elevado ( $\delta \approx 1$ ) el régimen lineal deja de ser aplicable, y es preciso recurrir a las fórmulas que describen el movimiento de materia en régimen no lineal.

En dicho régimen, la velocidad peculiar de cada galaxia viene dada en términos del campo  $B$  por una ley del tipo

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\eta}{10} \frac{1}{1 + \eta^2 \delta} \vec{\nabla} B(\vec{r}) \quad [4.95]$$

tal como se dedujo en el Capítulo 2 para la aplicación de la aproximación potencial al régimen no lineal.

Este resultado puede compararse con el tipo de aproximaciones que suelen aplicarse para modelizar la velocidad peculiar en el régimen no lineal, mediante ajuste de simulaciones de  $N$  cuerpos o otro tipo de estimaciones semianalíticas. En el caso de simetría esférica, este tipo de campo de velocidades es, por ejemplo, el que produce la caída coherente de todas las galaxias del halo hacia el centro de un cúmulo, situación que

modelizaremos en el Capítulo 5. Para la modelización de tal campo de velocidades, la aproximación analítica de Yahil (1985) a lo que sería un completo modelo no lineal de caída sobre el centro de un cúmulo supone una buena aproximación ( $\Omega = 1$ )

$$\vec{v} = -\frac{2}{3} \eta \overline{\delta} \vec{r} \frac{1}{(1 + \overline{\delta})^{1/4}} \quad [4.96]$$

donde la perturbación promedio viene dada por

$$\overline{\delta}(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \delta(x) x^2 dx \quad [4.97]$$

si bien en general debería aplicarse [4.95], que en el caso de simetría esférica puede escribirse del modo

$$\vec{v} = -\frac{2}{3} \eta \overline{\delta} \vec{r} \frac{1}{1 + \eta^2 \overline{\delta}} \quad [4.98]$$

#### Determinación del campo de velocidades peculiares en el entorno de un observador

Según vimos anteriormente, en coordenadas comóviles se tiene  $\Delta B = -20 \delta$ , tomando como unidades  $8\pi G = 1$ , y, aplicando la teoría lineal, la velocidad peculiar viene dada por la ecuación [4.94], siendo

$$B(\vec{x}) = \frac{5}{\pi} \int \delta(\vec{x}') \frac{d^3 \vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \quad [4.99]$$

$$\vec{V}_B(\vec{x}) = -\frac{5}{\pi} \int \delta(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3 \vec{x}' = -\frac{5}{\pi \rho_B} \int \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3 \vec{x}' \quad [4.100]$$

Es decir,

$$\vec{V}(\vec{r}) = -\frac{\eta}{2\pi} \int \delta(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3 \vec{x}' \quad [4.101]$$



La densidad de energía de una distribución de N partículas puntuales viene dada por

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{g_{00}^2 u^0}{\sqrt{-g}} m_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^N a^3(\eta) \left(1 - \frac{3}{2} B_i + \eta^2 \delta_i\right) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad [4.102]$$

y el gradiente del campo B, que determinará la velocidad peculiar de cada partícula (galaxia), viene dado por

$$\vec{\nabla}_B(\vec{x}) = -\frac{5 a^3(\eta)}{\pi \rho_B} \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{3}{2} B_i + \eta^2 \delta_i\right) \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \quad [4.103]$$

Usando las expresiones de la coordenadas comóviles en términos de las coordenadas del espacio de redshift tenemos

$$\vec{x} = (1+A)\vec{x}_o + \vec{E} \quad [4.104]$$

$$\vec{x} - \vec{x}_n = (\vec{x}_o - \vec{x}_{on}) + (A\vec{x}_o - A_n\vec{x}_{on} + \vec{E} - \vec{E}_n) \quad [4.105]$$

donde el subíndice  $_o$  denota las coordenadas observadas.

De este modo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x} - \vec{x}_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|^3} &= \frac{\vec{x}_o - \vec{x}_{on}}{|\vec{x}_o - \vec{x}_{on}|^3} + \frac{(A\vec{x}_o - A_n\vec{x}_{on} + \vec{E} - \vec{E}_n)}{|\vec{x}_o - \vec{x}_{on}|^3} + \\ &+ \frac{(\vec{x}_o - A_n\vec{x}_{on} + \vec{E} - \vec{E}_n) \cdot (\vec{x}_o - \vec{x}_{on})}{|\vec{x}_o - \vec{x}_{on}|^5} (\vec{x}_o - \vec{x}_{on}) \end{aligned} \quad [4.106]$$

que serían las expresiones a utilizar de hecho para calcular la velocidad peculiar en un punto del espacio mediante conteo numérico de galaxias en su entorno, en definitiva, mediante la estimación del contraste de densidad "real" en su entorno, estimando correctamente las posiciones de las galaxias que trazan dicho contraste de densidad.

Con el fin de ilustrar el efecto de los términos tradicionalmente no considerados en las correcciones del redshift a la hora de calcular el campo de velocidades peculiares, hemos utilizado la simulación tridimensional descrita en el apartado 4.2.

Siguiendo el método antes descrito, en primer lugar se genera una distribución correspondiente al contraste de densidad real, a partir de una

densidad espectral  $P(k)$  fijada y una elección aleatoria de las fases en las componentes del desarrollo de Fourier del contraste de densidad. Análogamente se calculan el campo  $B$  y sus derivadas, y a partir de ellos el contraste de densidad "observado" por un observador situado en cualquier punto del espacio, dentro del volumen de la simulación.

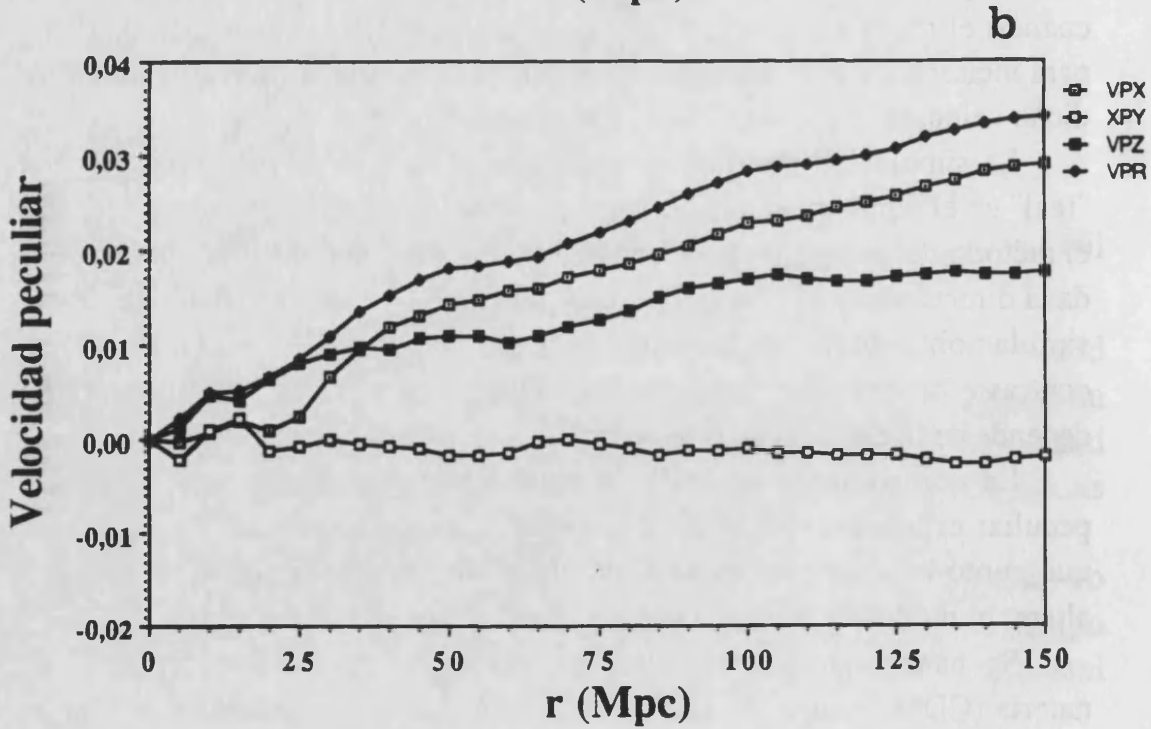
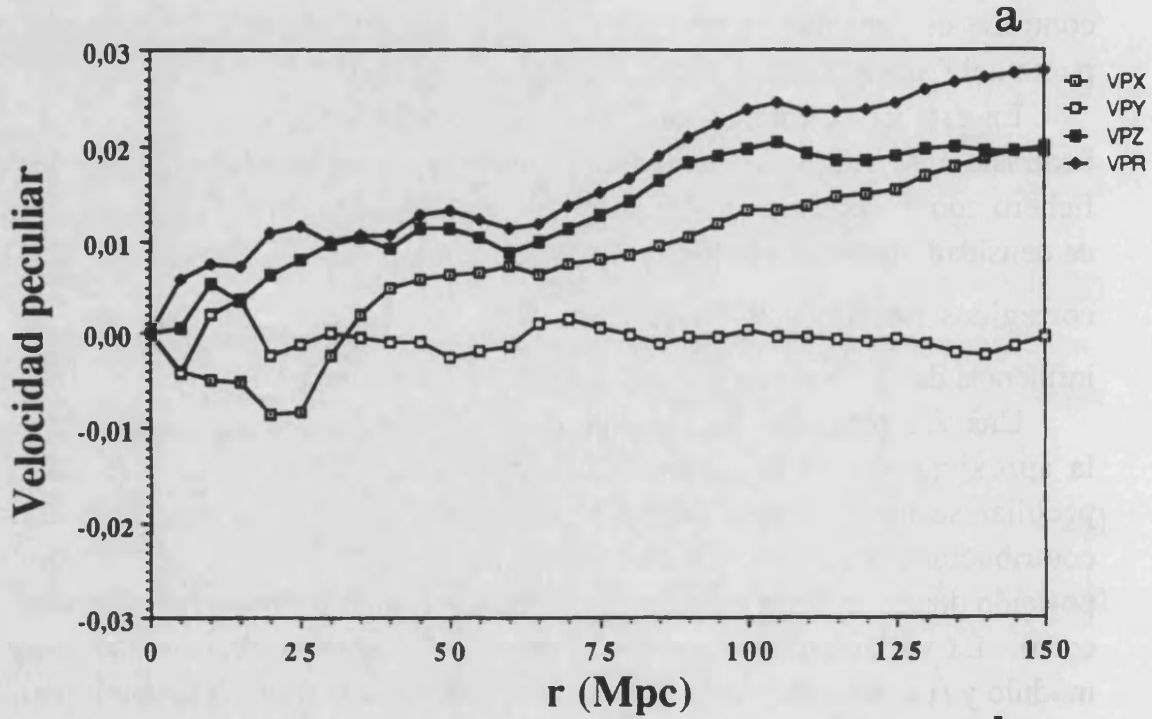
En este caso, además de calcular el contraste de densidad real y el contraste observado, para una realización dada, se ha generado también un fichero con el contraste de densidad que resultaría de corregir el contraste de densidad observado de los términos dominantes que son tradicionalmente corregidos (términos  $\ddot{B}$  en el contraste), para poner de manifiesto la influencia de los términos  $\dot{B}/R$  que no suelen considerarse.

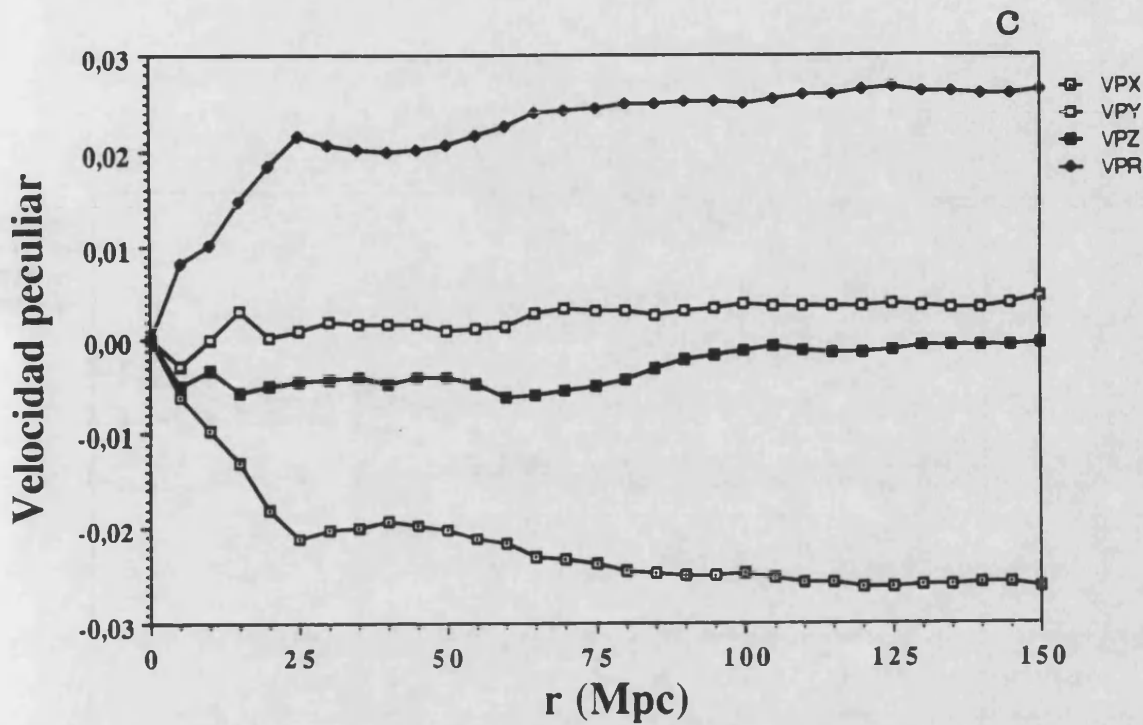
Una vez generadas las funciones contraste real, contraste observado y la aproximación en el contraste observado, el cálculo de la velocidad peculiar se hace a partir de las fórmulas antes indicadas, sumando las contribuciones de la materia dentro de una esfera de radio  $r$  centrada en la posición donde se desea calcular la velocidad peculiar (el observador en este caso). La variación de la velocidad peculiar de este modo calculada (su módulo y sus tres componentes espaciales) han de converger a su valor real cuando el radio de la esfera considerada es suficientemente grande como para incluir toda la materia que contribuye efectivamente a la generación de dicha velocidad peculiar ("convergencia del dipolo").

La simulación permite además conocer cual es la velocidad peculiar "real" en el punto en el que se desea calcular la velocidad peculiar mediante el método del contraste de densidad. Dicha velocidad peculiar "real" viene dada directamente por las derivadas del campo  $B$ , que son calculadas por la simulación a partir de las amplitudes y fases de las componentes del contraste de densidad, para un  $P(k)$  dado, y cuyo valor en el observador depende de la elección de fases concreta.

La comparación entre la velocidad peculiar "real" y la velocidad peculiar estimada a partir del contraste de densidad permite ilustrar hasta qué punto las distorsiones en el contraste de densidad pueden contribuir a alterar el módulo y dirección de la velocidad peculiar estimada.

Se han generado diferentes simulaciones para diferentes tipos de materia (CDM, neutrinos masivos, etc.). Los resultados aparecen reflejados en las figuras 4.13 y 4.14.





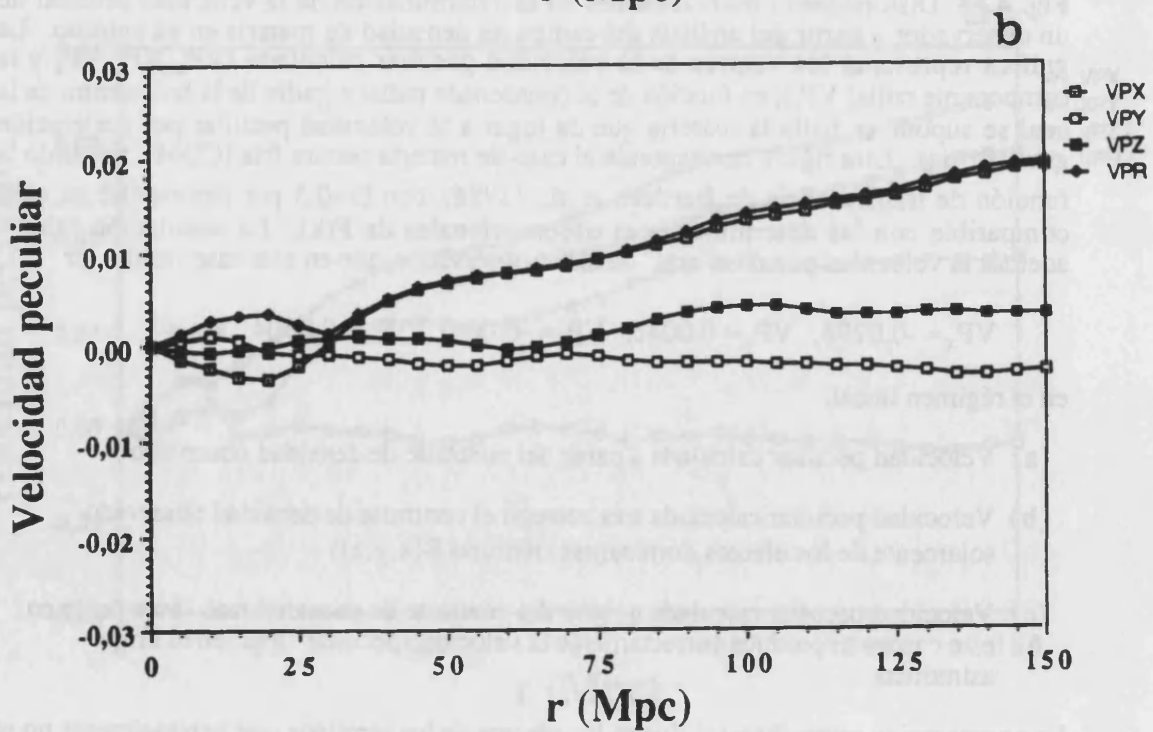
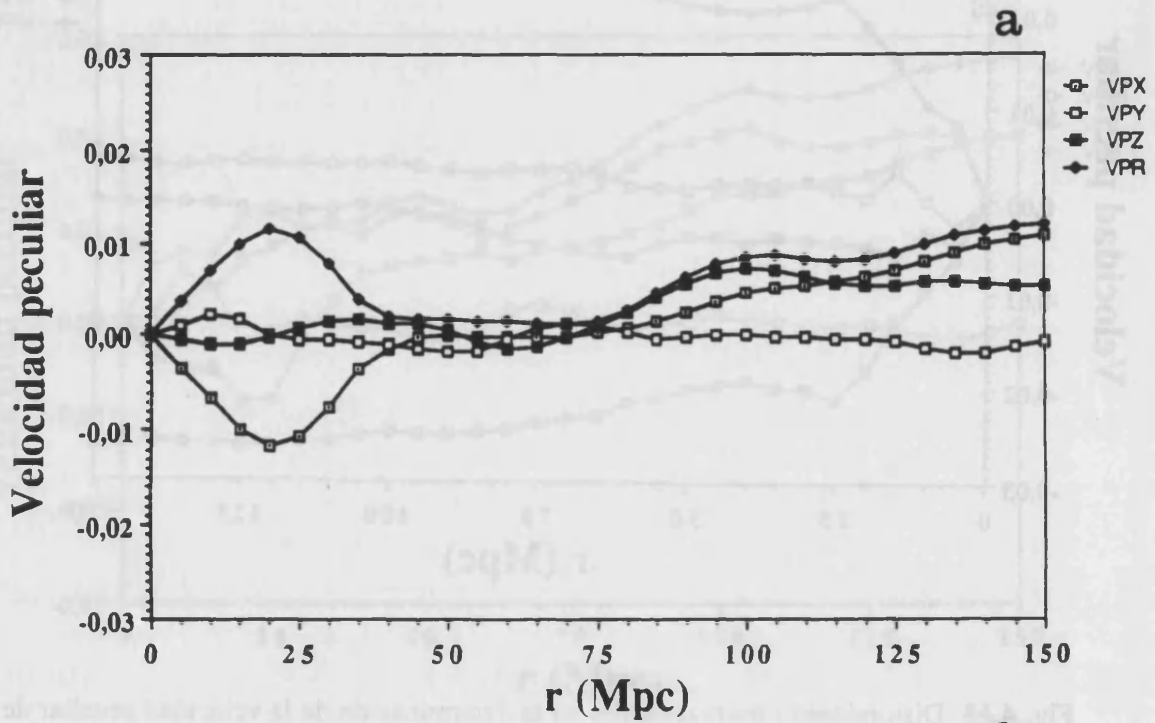
**Fig. 4.13** Distorsiones observacionales en la determinación de la velocidad peculiar de un observador a partir del análisis del campo de densidad de materia en su entorno. La gráfica representa los valores de la velocidad peculiar calculada ( $VP_x, VP_y, VP_z$  y la componente radial  $VP_r$ ), en función de la coordenada radial  $r$  (radio de la bola dentro de la cual se supone se halla la materia que da lugar a la velocidad peculiar por aceleración gravitatoria). Esta figura corresponde al caso de materia oscura fría (CDM), tomando la función de transferencia de Bardeen *et al.* (1986), con  $\Omega=0.5$  por representar un caso compatible con las determinaciones observacionales de  $P(k)$ . La simulación calcula además la velocidad peculiar "real" de dicho observador, que en este caso resulta ser

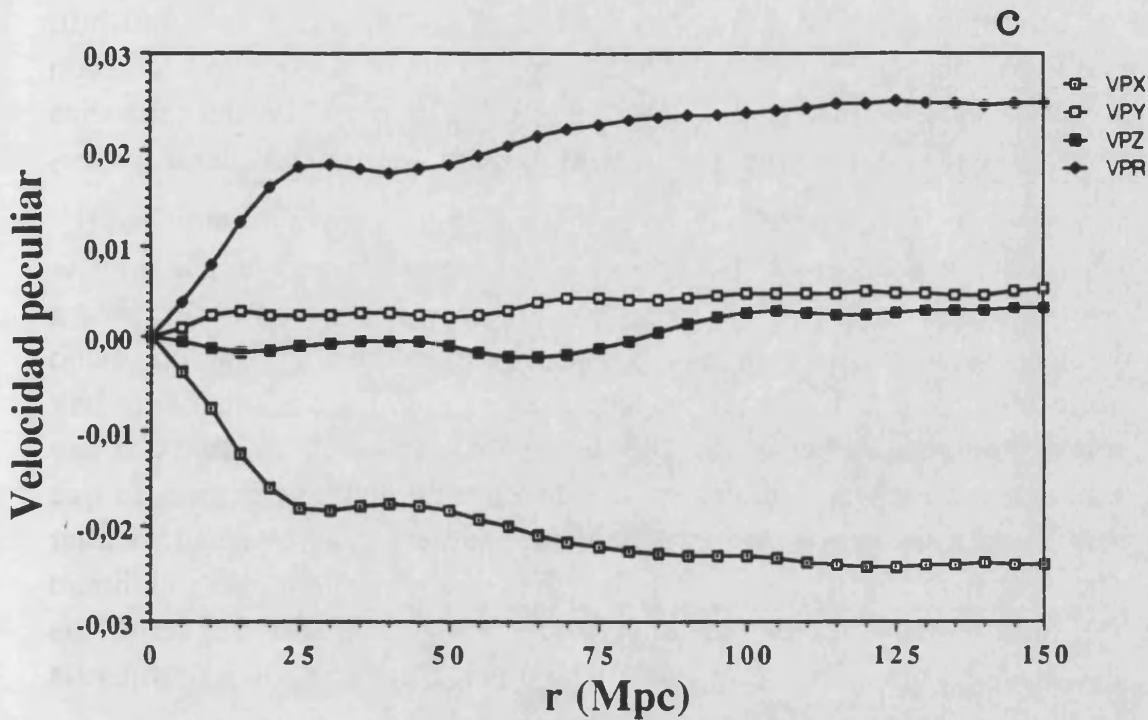
$$VP_x = -0.0298, \quad VP_y = 0.0046, \quad VP_z = -0.0041, \quad VP_r = 0.0304 \quad \text{km s}^{-1}$$

en el régimen lineal.

- (a) Velocidad peculiar calculada a partir del contraste de densidad observado
- (b) Velocidad peculiar calculada tras corregir el contraste de densidad observado solamente de los efectos dominantes (término  $\ddot{B}(x,y,z)$ )
- (c) Velocidad peculiar calculada a partir del contraste de densidad real. Solamente en este caso se reproduce correctamente la velocidad peculiar "real" en el límite asintótico.

La comparación entre (b) y (c) ilustra los efectos de los términos que habitualmente no se tienen en cuenta a la hora de corregir las distorsiones observacionales del redshift.





**Fig. 4.14** Distorsiones observacionales en la determinación de la velocidad peculiar de un observador a partir del análisis del campo de densidad de materia en su entorno. La gráfica es análoga a la figura 4.13, pero en este caso el tipo de materia corresponde a neutrinos masivos (HDM), tomando la función de transferencia de Bardeen *et al.* (1986), también con  $\Omega=0.5$  por representar un caso compatible con las determinaciones observacionales de  $P(k)$ . La velocidad peculiar "real" de dicho observador calculada por la simulación resulta ser en este caso

$$VP_x = -0.0256, \quad VP_y = 0.0049, \quad VP_z = 0.0026, \quad VP_r = 0.0262 \text{ km s}^{-1}$$

en el régimen lineal.

- (a) Velocidad peculiar calculada a partir del contraste de densidad observado
- (b) Velocidad peculiar calculada tras corregir el contraste de densidad observado solamente de los efectos dominantes (término  $\ddot{B}(x,y,z)$ )
- (c) Velocidad peculiar calculada a partir del contraste de densidad real. Al igual que en el caso de CDM, también sólo cuando se corrigen todas las distorsiones en el contraste de densidad observado se reproduce correctamente la velocidad peculiar "real" en el límite asintótico.



Nótese que este tipo de tratamiento es un caso ideal, ya que supone que en la aproximación de corregir sólo el término dominante en el redshift, este término es corregido de modo exacto, lo cual no sucede de hecho con las observaciones reales. De este modo, en el caso real las discrepancias podrían llegar a ser aún mayores, pues al hecho de no considerar los términos  $\dot{B}/R$  se añade el hecho de no corregir de modo exacto los términos  $\ddot{B}$ .

A la vista de estos resultados se comprende la problemática en la determinación de la velocidad peculiar "correcta" para un observador a partir de la medida del campo de densidad en su entorno, a menos que dicho campo de densidad sea adecuadamente corregido. No solamente hay notables alteraciones en el módulo de la velocidad estimada, sino que hay también importantes cambios en la dirección de dicha velocidad, lo que podría explicar tanto la discrepancia en módulo entre la velocidad peculiar calculada para nuestra galaxia a partir de la materia del entorno y el dipolo del fondo de radiación de microondas (ver Capítulo 1), como las discrepancias entre la dirección de dicho dipolo y las direcciones estimadas a partir de diferentes muestras de galaxias.

Hay que destacar además que el problema no sólo está ligado al radio de la bola centrada en el observador dentro de la cual se calculan las contribuciones de la materia a la velocidad peculiar, sino que incluso en el caso de considerar una bola de radio suficientemente grande como para contener toda la materia que da lugar a dicha velocidad peculiar, el resultado final puede no converger al valor real de la velocidad peculiar, especialmente en cuanto a la dirección, debido al efecto acumulativo de las distorsiones para las capas de materia más próximas al observador.

En un trabajo futuro se prevee aplicar este tipo de técnicas a la estimación de la velocidad peculiar a partir de los datos contenidos en un catálogo de galaxias real, aplicando los métodos de corrección y las técnicas de cálculo aquí descritas.

#### **4.5 EFECTOS LIGADOS A LA LUMINOSIDAD DE LAS FUENTES**

El hecho de que cada galaxia tenga una luminosidad intrínseca, debida a su propia naturaleza y estado evolutivo, condiciona el hecho de que ésta resulte observable o no por un observador situado a una distancia radial dada de

dicha fuente, dependiendo de la "sensibilidad" del observador, es decir, de cual es el menor brillo que dicho observador puede detectar, caracterizado generalmente en términos de magnitud aparente (ver Apéndice I).

El primer aspecto a caracterizar es la luminosidad intrínseca de las fuentes y la función de distribución de probabilidad del número de fuentes en función de su luminosidad ("función de luminosidad"). Una vez establecida dicha función característica pueden describirse los efectos observacionales introducidos por la existencia de una magnitud aparente límite en toda muestra de galaxia, supuestas conocidas (o despreciables) las propias distorsiones en las luminosidades aparentes debido a la deflexión de las trayectorias luminosas ("efecto lente").

### La función de luminosidad

Las luminosidades de las galaxias observadas aparecen distribuidas de acuerdo con una ley conocida como función de distribución de la luminosidad, o simplemente *función de luminosidad*.

La determinación de dicha función de luminosidad no es nada simple, y así se tienen en general determinaciones diferentes dependiendo de las muestras consideradas en cada caso, pero es generalmente admitido que dicha distribución de luminosidades obedece a una ley del tipo

$$\Phi(L) dL = \Phi^* u^\alpha e^{-u} du \quad [4.107]$$

donde  $u \equiv \frac{L}{L^*}$ , y  $\Phi(L) dL$  es el número de galaxias por unidad de volumen en el intervalo de luminosidades  $(L, L+dL)$ .

Esta función de luminosidad, conocida como "función de Schechter", es dependiente de tres parámetros:  $\alpha$ ,  $\Phi^*$ ,  $L^*$ , cuyos valores no están aún bien determinados salvo para determinadas muestras bien estudiadas.

Expresada en función de magnitud, la función de luminosidad es

$$\Phi(M) dM = \frac{2 \ln 10}{5} \Phi^* \left( 10^{0.4(M^* - M)} \right)^{\alpha+1} \exp \left( 10^{0.4(M^* - M)} \right) dM \quad [4.108]$$

De acuerdo con los resultados observacionales establecidos, los parámetros de dicha distribución de luminosidad de Schechter, según Efstathiou *et al.*, (1988) son los siguientes:

$$\alpha = -1.07 \pm 0.05$$

$$M^* = -19.68 \pm 0.10$$

$$\Phi^* = (1.56 \pm 0.34) 10^{-2} h^3 \text{ galaxias Mpc}^{-3}$$

(para  $H_0 = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ )

si bien hay discrepancias en algunos valores, y en concreto el de  $\alpha$ , entre los diferentes análisis de los datos observacionales (debidos fundamentalmente al diferente tipo de función de luminosidad para cada tipo de galaxias y la diferente abundancia de cada tipo de galaxias en cada muestra estudiada).

La luminosidad de referencia  $L^*$  se calcula a partir de la magnitud de referencia  $M^*$  mediante la relación

$$\log \left( \frac{L}{L^*} \right) = -0.4 (M - M^*) \quad [4.109]$$

(fórmula de Pogson) (Ver Apéndice I).

#### Alteración de la luminosidad aparente de las fuentes por deflexión gravitatoria de las trayectorias luminosas

Teniendo en cuenta el hecho de que la intensidad específica es constante a lo largo de un rayo de luz en un campo gravitatorio (conservación del número de fotones) podemos derivar (P. Young *et al.*, 1980) la luminosidad aparente  $I$  de una fuente, del modo

$$I = A I' \quad [4.110]$$

donde  $I'$  representa la luminosidad aparente en el caso de que no hubiese inhomogeneidades, siendo  $A$  el "factor de amplificación".

La amplificación luminosa de una fuente celeste como efecto observacional debido a la presencia de elementos deflectores (efecto lente) es algo conocido y detectado, si bien el mecanismo de amplificación, la evaluación de la magnitud de la misma (factor de amplificación) y las repercusiones del fenómeno (conservación del flujo neto total, efecto sobre estadística de fuentes distantes, etc.) han sido tradicionalmente objeto de discusión, incluso la propia definición del factor de amplificación, y aún la propia razón de definir un "factor de amplificación" comparando la situación real con una situación ficticia, definida *ad hoc*, y desde luego no bien justificada.

La definición de *factor de amplificación* más comunmente usada en la literatura es de naturaleza geométrica. Tiene en cuenta los efectos geométricos de la deflexión de los rayos luminosos, pero no tiene en cuenta efectos de dilatación temporal o redshift debidos a los campos

gravitacionales locales en la fuente y en el observador. Esta es, pues, una definición apropiada cuando se considera el *número de fotones*, y es la definición natural para discutir la "conservación del *número* de fotones" (en lugar de la "conservación del *flujo* de fotones", que no es correctamente expresada por esta definición usual de factor de amplificación).

Definido de este modo, el factor de amplificación relaciona el número de fotones observado en un universo con deflexiones con el número de fotones observado en un universo sin deflexión, pero la definición concreta depende del tipo de geometría considerada para definir el problema, y en definitiva de las aproximaciones que se hagan en las relaciones angulares que entran en juego.

En el caso de considerar geometría plana, el factor de amplificación viene dado simplemente por relaciones de trigonometría plana, en primera aproximación (ver fig. 4.15). Este caso es aplicable cuando la fuente, la perturbación deflectora y el observador están los tres prácticamente alineados y muy distantes unos de otros.

Avni y Shulami (1988) han analizado con cierto detalle el concepto de factor de amplificación, su correcta definición y algunas consecuencias de la correcta interpretación del mismo. La principal conclusión del estudio de Avni y Shulami es que resulta fundamental la consideración de una geometría esférica para el estudio del factor de amplificación en el caso de ángulos de posición de las fuentes relativamente grandes, en lugar de la geometría plana comunmente usada para deflexiones de ángulos de impacto pequeño. La consideración de la geometría esférica representa un caso más general que la simetría plana, pero tampoco tiene en cuenta efectos de redshift ni campos gravitacionales locales en la fuente y el observador, por lo que tampoco describe bien la conservación del flujo de fotones.

Aun restringiéndonos al criterio de relación del número de fotones observado en un elemento de ángulo sólido en el caso de presencia de inhomogeneidades y en el caso de ausencia de inhomogeneidades, en el caso de considerar geometría esférica se tienen también varias alternativas de definición (ver figura 4.16).

Desde el punto de vista del observador (el punto de vista tradicionalmente seguido) el "factor de amplificación" se define como

$$A = \left| \frac{d \Omega_{\text{obs}}}{d \Omega'_{\text{obs}}} \right| \quad [4.111]$$

donde  $d\Omega_{\text{obs}}$  es el elemento de ángulo sólido (desde el observador) de un haz que cubre un elemento de superficie de la fuente, en presencia de las "lentes", y  $d\Omega'_{\text{obs}}$  es el elemento de ángulo sólido (desde el observador) de un haz que cubre el mismo elemento de superficie de la esfera en la que se halla la fuente, en el caso de ausencia de las "lentes". Por otro lado, desde el punto de vista de la fuente, el "factor de amplificación" puede también definirse como

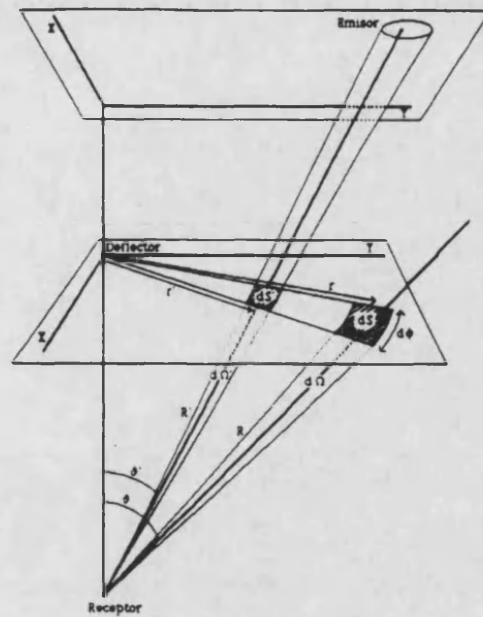
$$A = \left| \frac{d\Omega_{\text{emi}}}{d\Omega'_{\text{emi}}} \right| \quad [4.112]$$

pero ahora  $d\Omega_{\text{emi}}$  es el elemento de ángulo sólido (desde la fuente) de un haz que cubre un elemento de superficie del observador, en presencia de las "lentes", y  $d\Omega'_{\text{emi}}$  es el elemento de ángulo sólido (desde la fuente) de un haz que cubre el mismo elemento de superficie del observador, en el caso de ausencia de las "lentes".

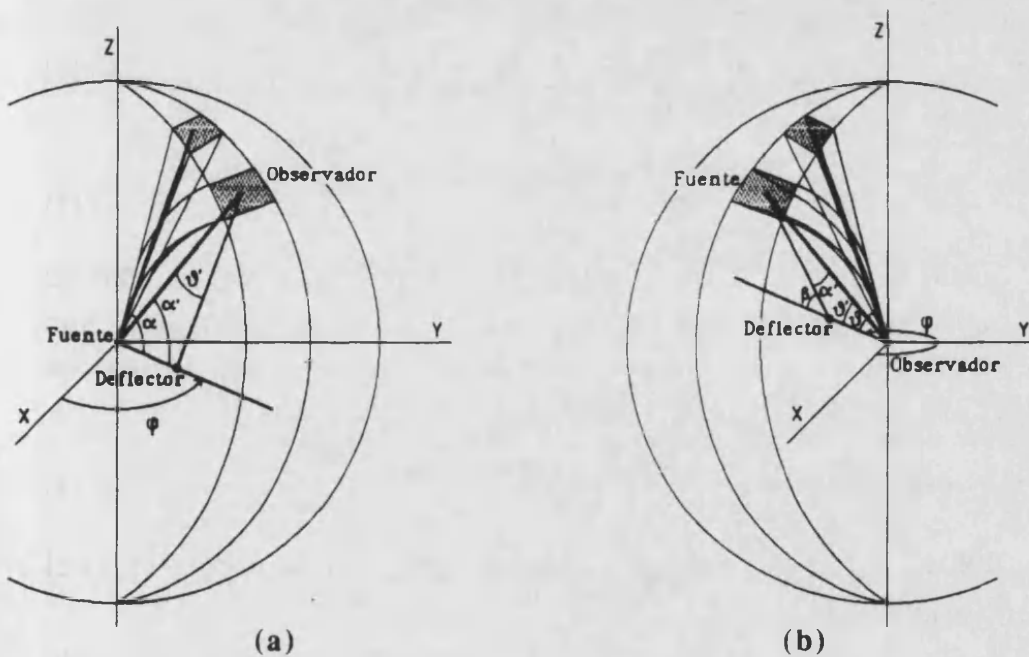
El teorema de reciprocidad garantiza que ambas definiciones del factor de amplificación sean equivalentes, si bien la evaluación numérica rigurosa del factor de amplificación será diferente en ambos puntos de vista si se tiene en cuenta el flujo de fotones y los campos gravitatorios locales (en fuente y observador), así como el retraso temporal.

Desde un punto de vista lógico, el factor de amplificación debería definirse siempre respecto a la fuente. En definitiva, lo que cuenta en la definición de factor de amplificación es determinar donde llega la luz emitida por una fuente. Si se considera la amplificación respecto a la posición de un observador, dentro de un elemento de ángulo sólido de un observador, en un caso real, puede recibirse luz procedente de distintas fuentes luminosas situadas a distintas distancias y posiciones angulares, por lo que la luz captada por el observador ha seguido diferentes trayectorias procediendo de diferentes regiones de perturbación (contraste de densidad) diferente. Si se plantea la amplificación desde el punto de vista de la fuente, todos los fotones salen de una región de contraste dado y su trayectoria puede calcularse desde dicho punto de emisión común.

Sin embargo, cuando se analiza la cuestión desde el punto de vista observacional, resulta más interesante discutir el factor de amplificación con respecto al observador, pues es en este caso cuando podremos comparar las predicciones teóricas del modelo con observaciones reales.



**Fig. 4.15** Configuración geométrica simplificada de la trayectoria luminosa emisor-deflector-receptor, de donde puede deducirse el significado geométrico del factor de amplificación y las relaciones matemáticas que lo definen en el caso de considerar una geometría plana para describir el efecto.



**Fig. 4.16** Configuración geométrica correspondiente a la definición del factor de amplificación respecto a la posición de la fuente (a) y respecto a la posición del observador (b), con las relaciones matemáticas que lo definen en el caso de considerar una geometría esférica para describir el efecto.

Para interpretar correctamente el "factor de amplificación", es preciso discutir su significado, a partir del concepto de "luminosidad aparente" de una fuente en Relatividad General.

El flujo aparente observado (energía/superficie/tiempo) procedente de una fuente con luminosidad absoluta  $L$  viene dado por

$$I_R = \frac{L}{4\pi} \frac{d\Omega(u_E)}{d\Sigma_R} \frac{(k_{R,u_R})^2}{(k_{E,u_E})^2} \quad [4.113]$$

Utilizando el teorema de reciprocidad,

$$(\vec{k}_R \cdot \vec{u}_R)^4 \frac{d\Omega(u_R)}{d\Sigma_E} = (\vec{k}_E \cdot \vec{u}_E)^4 \frac{d\Omega(u_E)}{d\Sigma_R} \quad [4.114]$$

podemos escribir la relación anterior en función del ángulo sólido medido por el observador  $d\Omega(u_R)$

$$I_R = \frac{L}{4\pi} \frac{d\Omega(u_R)}{d\Sigma_E} \frac{(k_{R,u_R})^4}{(k_{E,u_E})^4} \quad [4.115]$$

y teniendo en cuenta que el redshift  $z$  correspondiente a un fotón emitido por una fuente con cuadrivelocidad  $u_E^\alpha$  y recibido por un observador con cuadrivelocidad  $u_R^\alpha$  viene dado por

$$1 + z = \frac{(k_{E,u_E})}{(k_{R,u_R})} \quad [4.116]$$

resulta finalmente

$$I_R = \frac{1}{4\pi} \frac{L}{(1+z)^4} \frac{d\Omega(u_R)}{d\Sigma_E} \quad [4.117]$$

En esta expresión, por las propiedades generales de un haz de geodésicas convergentes a una posición dada, el elemento de ángulo sólido  $d\Omega(u_R)$  respecto a dicha posición ocupada por el observador ( $u_R$ ) viene dado por

$$d\Omega(u_R) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left( \frac{d\Sigma_R}{d\lambda} \right) \quad [4.118]$$

donde  $d\lambda = (\vec{k}_R \cdot \vec{u}_R) \Delta v$  es el elemento de distancia propia ( $v$  es el parámetro afín de las geodésicas).

En las coordenadas utilizadas en este caso, dicho elemento de ángulo sólido viene dado por

$$d\Omega(u_R) = \sin \hat{\theta} \, d\hat{\theta} \, d\hat{\phi} \quad [4.119]$$

siendo  $(\hat{R}_E, \hat{\vartheta}, \hat{\phi})$  coordenadas esféricas respecto a la posición del observador (coordenadas de emisión).

Por otro lado, el elemento de superficie  $d\Sigma_E$  a calcular en este caso es el caracterizado por la siguiente parametrización

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta}_E &= \text{cte} \\ \hat{R}_E &= \text{cte} \\ \hat{\vartheta} &= \hat{\vartheta}(R_E, \vartheta', \phi') \\ \hat{\phi} &= \hat{\phi}(R_E, \vartheta', \phi') \end{aligned} \right\} \quad [4.120]$$

Dado que trabajamos en coordenadas comóviles ( $g_{oi}=0$ ), y sobre una hipersuperficie a tiempo constante, podemos considerar únicamente en el cálculo la parte espacial de la métrica, restringiendonos a un problema en tres dimensiones.

El vector normal a dicha superficie viene dado por el gradiente, respecto a las coordenadas consideradas  $(\eta_E, R_E, \vartheta', \phi')$ , de la ecuación que define dicha superficie.

En este caso se tiene

$$N_\alpha = (1, 0, 0) \quad [4.121]$$

con lo que el vector unitario normal a dicha superficie viene dado por

$$n_\alpha = \left( \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}}, 0, 0 \right) \quad [4.122]$$

El elemento de área normal a la dirección espacial  $\vec{n}$ , y para una hipersuperficie a tiempo constante ( $\eta = \text{cte}$ ) en el espacio cuatridimensional de Sach-Wolfe, en las coordenadas esféricas  $(\hat{R}_E, \hat{\vartheta}, \hat{\phi})$ , viene dado por

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{-\det[g_{\alpha\beta}(\hat{R}_E, \hat{\vartheta}, \hat{\phi})]} \det[\vec{n}, \vec{\partial}_{\vartheta}, \vec{\partial}_{\phi}] = \\ &= \sqrt{-\det[g_{\alpha\beta}(\hat{R}_E, \hat{\vartheta}, \hat{\phi})]} \begin{vmatrix} n_r & n_{\vartheta} & n_{\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\hat{\vartheta} d\hat{\phi} \quad [4.123] \end{aligned}$$

donde  $(n_r, n_{\vartheta}, n_{\phi})$  son las componentes esféricas covariantes del vector  $\vec{n}$ .

En el caso más general, el factor de amplificación vendrá dado por la relación



$$A = \left| \frac{I_R^{(SW)}}{I_R^{(EdS)}} \right| \quad [4.124]$$

donde  $I_R^{(SW)}$  es el flujo observado en el universo real (Sach-Wolfe) y  $I_R^{(EdS)}$  es el flujo que se observaría en un universo homogéneo (Einstein-de Sitter). Lo que hacemos es considerar un espacio de referencia de Einstein-de Sitter (homogéneo) con el comparar nuestras observaciones en el universo inhomogéneo (real) descrito por la métrica de Sach-Wolfe.

Si definimos los elementos de área sobre una esfera de radio (comóvil) constante (en particular puede tomarse la esfera unidad), entonces queda simplemente un cociente entre los ángulos sólidos correspondientes

$$A = \left| \frac{d\Omega}{d\Omega'} \right| \quad [4.125]$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido (desde el observador) de un elemento de superficie en la esfera centrada en el observador que contiene la fuente en el caso de presencia de la perturbación deflectora, y  $d\Omega'$  es el correspondiente ángulo sólido en el caso de no existencia de la perturbación, es decir, para un medio de fondo de Einstein-de Sitter no perturbado.

Si bien el nivel de "amplificación" de las fuentes lejanas por las inhomogeneidades presentes a lo largo de la trayectoria de la fuente al observador puede llegar a ser importante en determinadas configuraciones geométricas muy particulares, de cara a los efectos considerados en esta memoria tal amplificación resulta de hecho despreciable, pues viene dada por los términos de distorsión angular en la ecuación que determina la posición comóvil de una galaxia a partir de los observables redshift-ángulo, y dichos efectos angulares son de segundo orden respecto a las distorsiones dominantes en redshift.

Tales efectos están ligados a la parte angular de "distorsión" de coordenadas descrita en el Capítulo 3. Proyectando la ecuación de determinación de las coordenadas comóviles resultante en el plano emisor (plano en la fuente perpendicular a la dirección fuente-observador), de este modo las distorsiones radiales no contribuyen, resultando como "efectos angulares" de deflexión gravitatoria

$$\Delta X'_E = -\frac{3}{5} R_E \vec{n}_E \int_{w_E}^{w_R} \left( (\vec{n}_E \cdot \vec{\nabla} B(w)) - \frac{1}{R_E} \int_{w_E}^w (\vec{n}_E \cdot \vec{\nabla} B(w)) dw \right) dw$$

[4.126]

Esta transformación expresada en el plano emisor constituirá la base para el análisis de las distorsiones angulares producidas por cualquier tipo de inhomogeneidades (descritas por el campo B) sobre la trayectoria luminosa procedente de una fuente a una distancia comovil  $R_E$ , de modo bastante más general que el tradicionalmente seguido, dado que con este formalismo no estamos limitados a ningún tipo particular de geometría en las inhomogeneidades presentes en el medio de fondo.

Otro aspecto observacional ligado a la luminosidad de las fuentes es la estimación de distancias basada en medidas de luminosidad. En el tratamiento tradicional del estudio de la propagación de la luz en un medio inhomogéneo, y en particular del efecto lente gravitatorio (Refsdal, 1964) se utiliza la relación redshift-distancia, pero no siempre está claro qué tipo de distancia se utiliza en cada caso, como señalan Watanabe y Tomita (1990). La mayoría de los autores utilizan la distancia de diámetro angular o la distancia de parámetro afín, pero sin suficientes explicaciones, y utilizando además las fórmulas para estas distancias en el modelos standard (Friedmann-Robertson-Walker), el cual asume homogeneidad e isotropía, siendo evidente la inhomogeneidad en el universo, y siendo precisamente tales inhomogeneidades las que producen el efecto lente estudiado.

En realidad, el efecto lente gravitatio cambia la luminosidad de las fuentes distantes, y cambia por lo tanto la distancia de diámetro angular a las mismas. No tiene, pues, sentido utilizar las fórmulas del modelo standard para discutir la amplificación luminosa por efecto lente gravitatorio.

Para discutir la relación redshift-distancia en el marco de la Relatividad General, es conveniente emplear las ecuaciones de las geodésicas nulas y las ecuaciones de las congruencias de geodésicas nulas (Sachs, 1961):

$$\begin{aligned} k^\alpha{}_{;\beta} k^\beta &= 0 \\ t^\alpha{}_{;\beta} k^\beta &= 0 \\ \frac{d\vartheta}{dv} + \vartheta^2 + |\sigma|^2 + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta &= 0 \end{aligned}$$

[4.127]

$$\frac{d\sigma}{dv} + 2\sigma\vartheta + R_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\mu \bar{t}^\beta \bar{t}^\nu = 0$$

donde  $v$  es el parámetro afín de la geodésica nula  $x^\alpha(w)$  y  $k^\alpha = \frac{dx^\alpha(v)}{dv}$  es el vector tangente a la geodésica nula.  $t^\alpha$  es un vector complejo nulo, y  $\bar{t}^\alpha$  es su complejo conjugado, que satisfacen las siguientes relaciones:

$$k^\alpha k_\alpha = t^\alpha t_\alpha = k^\alpha t_\alpha = 0 \quad [4.128]$$

$$t^\alpha \bar{t}_\alpha = 1$$

El comportamiento de la congruencia de geodésicas nulas es descrito por las magnitudes  $\vartheta = k_{\alpha\beta} t^\alpha \bar{t}^\beta$  (expansión de las geodésicas) y  $\sigma = k_{\alpha\beta} \bar{t}^\alpha \bar{t}^\beta$  (distorsión de las geodésicas).

No obstante, la noción cosmológica de distancias no es trivial, y debe ser definida mediante cantidades observables.

Para ello, consideremos la siguiente ecuación

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \vartheta D \quad [4.129]$$

con las siguientes condiciones de contorno sobre  $\vartheta$  :

a/  $\vartheta = \infty$  , en la posición del observador

b/  $\vartheta = -\infty$  , en la posición de la fuente

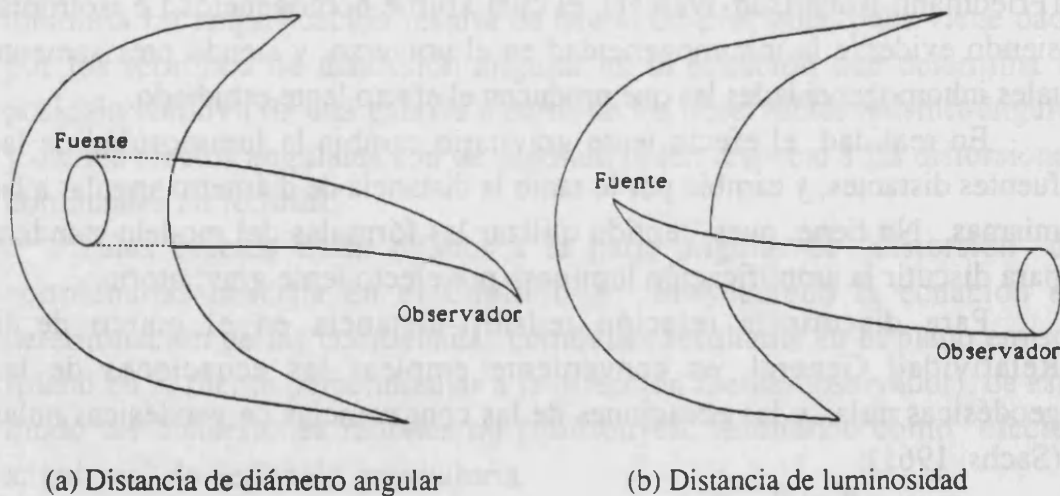


Fig. 4.17 Diferentes definiciones de distancia a una fuente luminosa en relación con el estudio de la luminosidad de la misma

La condición (a) corresponde a un haz de rayos luminosos enfocados hacia la posición de un observador, y la condición (b) corresponde a un haz de rayos emergiendo desde una fuente (figura 4.17).

Escogiendo una normalización para  $D$  de la forma  $D \equiv \frac{cz}{H_0}$  para  $z \ll 1$ , entonces la distancia  $D$  resultante de imponer la condición (a) es la distancia de diámetro angular ( $d_A$ ), mientras que la distancia  $D$  resultante de imponer la condición (b) es la distancia-luminosidad ( $d_L$ ):

$$d_A = \left. \frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dv} \right|_{\vartheta_{\text{observ}} = \infty} \quad [4.130]$$

$$d_L = \left. \frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dv} \right|_{\vartheta_{\text{fuente}} = \infty} \quad [4.131]$$

La distancia-luminosidad  $d_L$  de una fuente luminosa está definida por su luminosidad aparente, y la distancia de diámetro angular  $d_A$  está definida por su tamaño angular aparente.

Existe otra definición de distancia, en un contexto cosmológico, basada en el movimiento propio de la fuente. Esta distancia de movimiento propio  $d_M$  se determina si se conoce de algún modo la velocidad peculiar propia de la fuente luminosa, y en particular la velocidad peculiar real transversal a la línea de visión.

El "teorema de reciprocidad" establece una relación general entre las diferentes distancias en cualquier espacio-tiempo (Etherington, 1933; Ellis, 1971)

$$d_L = (1+z) d_M = (1+z)^2 d_A \quad [4.132]$$

de modo que el conocimiento de varias de tales distancias para una misma fuente no aporta ninguna nueva información, salvo el posible uso de estas relaciones como test del origen cosmológico del redshift <sup>1</sup>.

En términos de la distancia-luminosidad y la contribución sobre el medio de fondo, el factor de amplificación puede definirse de un modo simple y absolutamente general mediante la relación

<sup>1</sup> Existen otras posibles definiciones de "distancia" en Cosmología, tales como la distancia de paralaje  $d_P$ , basada en una medida de triangulación, es decir, midiendo el paralaje trigonométrico causado por un cambio real de un punto observacional. Esta medida no necesita el conocimiento de parámetros propios de la fuente, y por lo tanto no depende tanto de efectos de evolución como las otras definiciones de distancia, pero no tiene interés esta definición de distancia en el estudio de la luminosidad de una fuente.

$$A = \left( \frac{d_L (\text{modelo homogéneo})}{d_L (\text{universo real})} \right)^2 \quad [4.133]$$

o, equivalentemente, teniendo en cuenta la relación [3.166]

$$A = \left( \frac{d_A (\text{modelo homogéneo})}{d_A (\text{universo real})} \right)^2 \quad [4.134]$$

El modelo de fondo homogéneo considerado en esta definición absolutamente general debe ser el resultante del promediado espacial del universo inhomogéneo real, es decir, un modelo con tensor energía-impulso  $T^{\mu\nu}$  resultante del promediado espacial del  $T^{\mu\nu}$  del universo real

$$T_{\text{homogéneo}}^{\mu\nu} = \langle T_{\text{inhomogéneo}}^{\mu\nu} \rangle \quad [4.135]$$

Uno de los principales problemas que presentaban los originales modelos matemáticos que pretendían describir la alteración de la luminosidad aparente de las fuentes por efectos de deflexión gravitatoria era la "conservación del flujo de fotones" (es decir, la no existencia de una amplificación neta total resultante). En tales modelos matemáticos, el flujo total de fotones no era conservado, resultando una amplificación neta no nula de las fuentes cuando se integraba el efecto de las lentes sobre todo el conjunto de la esfera celeste.

Evidentemente, parece absurdo que la deflexión de las trayectorias luminosas pueda producir un efecto amplificador neto del número de fotones emitidos por la fuente, si exceptuamos los fenómenos de absorción de fotones por determinados efectos cuánticos a su paso por estructuras galácticas o estelares, absorción que resulta despreciable a una escala cosmológica. Si un determinado observador u observadores en determinadas zonas de la esfera celeste detectan amplificación del flujo de fotones procedentes de una fuente como consecuencia de la presencia de un elemento deflector de estructura material y geométrica apropiada, debe haber otros observadores, situados en otras zonas de la esfera celeste, que detecten una disminución (deamplificación) del flujo de fotones procedentes de dicha fuente, de modo que el efecto neto de las lentes sobre la totalidad de la esfera celeste sea nulo en cuanto a la amplificación del flujo de fotones.

Como señalaban recientemente Fang y Wu (1989) y Wu (1990), la conservación del flujo de fotones por una lente gravitatoria (Weinberg, 1976) puede ser utilizada como un método efectivo de validación de los cálculos numéricos realizados en los estudios estadísticos de lentes gravitatorias y sus efectos.

El argumento de conservación del flujo de fotones puede ser expresado explícitamente del modo (Ehlers y Schneider, 1986)

$$\langle A \rangle = \left( \frac{D_L}{D_{L0}} \right)^2 \quad [4.136]$$

donde  $\langle A \rangle$  es la amplificación media,  $D_L$  es la distancia-luminosidad (o diámetro angular) de Dyer-Roeder (1972, 1973) y  $D_{L0}$  es la distancia-luminosidad (o diámetro angular) de Dyer-Roeder en el modelo de Friedmann (Einstein-de Sitter) no perturbado.

El problema que tiene el empleo de la distancia de luminosidad de Dyer-Roeder para la determinación del factor de amplificación promedio es que dicha distancia fue originalmente desarrollada por Dyer y Roeder para el caso de un modelo de universo vacío donde toda la materia está concentrada en pequeñas "bolas" compactas, de tal modo que la propagación de la luz tiene lugar esencialmente por un medio vacío, viéndose dicha propagación afectada por la presencia de las inhomogeneidades puntuales que representan las agrupaciones de materia. Tales aglomeraciones de materia representan galaxias (como puntos de la distribución) u otro tipo de estructura de tamaño reducido comparado con las distancias que entran en juego en el cálculo del efecto lente. Cuando consideramos inhomogeneidades de gran tamaño, y la deflexión de las trayectorias luminosas es provocada por tales grandes inhomogeneidades, la distancia de Dyer-Roeder deja de ser aplicable.

#### **Efectos de la luminosidad aparente límite sobre el contraste de densidad efectivamente observado**

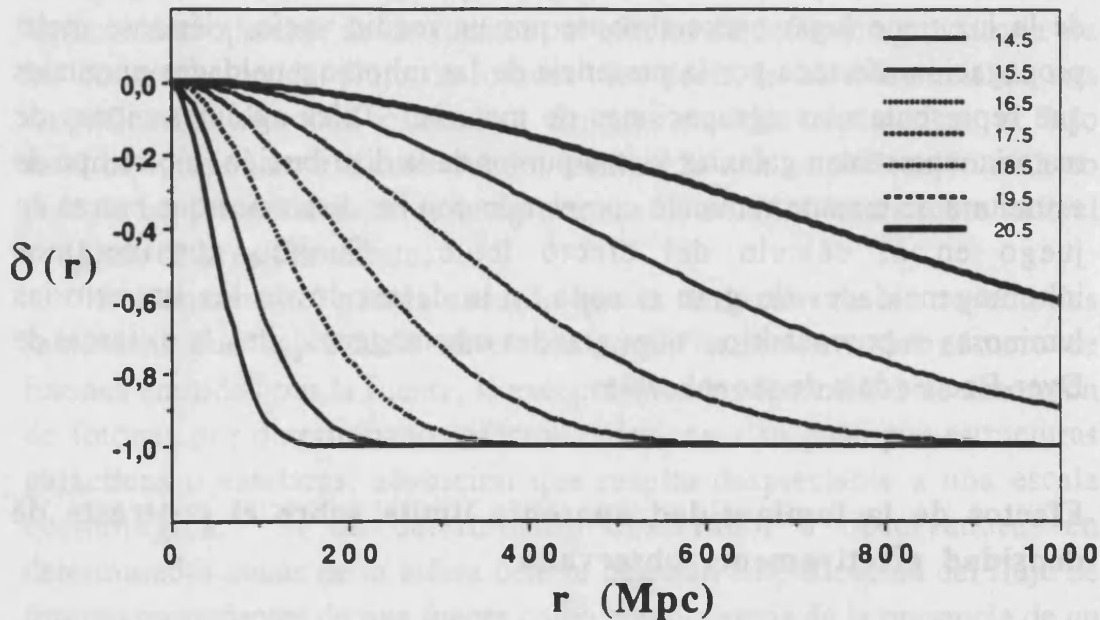
En toda muestra real de galaxias se plantea siempre el problema de la completitud, relacionado con la luminosidad límite del muestreo. La existencia de una luminosidad límite en los muestreos de galaxias realizados es un condicionante observacional imposible de evitar, si bien gracias a las nuevas técnicas se están alcanzando muestreos a luminosidades aparentes límites realmente bajas.

La luminosidad aparente límite establece un corte observacional sobre la densidad numérica de galaxias observadas, como una función de la distancia radial desde el observador. La amplificación de luminosidades

constituye un efecto añadido sobre el corte observacional en luminosidad, con lo que tal corte ha de ser analizado en función de la amplificación local.

Este tipo de efectos tienen una influencia especialmente notable sobre la densidad numérica de galaxias observadas, alterando la densidad numérica efectivamente observada con respecto a la que vería un observador ideal capaz de ver todas las galaxias independientemente de la luminosidad intrínseca de cada una de ellas y de su distancia relativa al observador, como se supuso en el apartado 4.2.

La influencia de los efectos de corte observacional impuesto por una luminosidad límite, para una muestra dada, aparecen reflejados en la figura 4.18.



**Fig. 4.18** Contraste de densidad efectivamente observado, en función de la distancia radial  $r$ , para diversos valores de la magnitud aparente límite de la muestra en cada caso. En esta figura se considera un universo estrictamente homogéneo ( $\delta=0$ ), con el fin de describir los efectos puramente ligados a la influencia de la luminosidad. En un universo real ( $\delta \neq 0$ ) estas curvas serían moduladas por el contraste de densidad en cada caso, dependiendo del tipo y tamaño de las estructuras.

Dicho caso representa la situación que de hecho se da en las observaciones reales, donde se tiene siempre un límite (impuesto

generalmente sobre la magnitud aparente) que hace que la densidad numérica de galaxias "observada" sea realmente diferente de la que vería un observador ideal sin límite de luminosidad aparente.

El contraste de densidad observado, en el caso de no existir distorsiones observacionales sino únicamente el corte impuesto por la luminosidad (suponiendo una función de luminosidad de Schechter), vendrá dada por una ley del tipo

$$\delta_{\text{obs}} = \left[ (1 + \delta_{\text{real}}) \frac{\Gamma(\alpha + 1, u_{\text{lim}})}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] - 1 \quad [4.137]$$

donde

$$u_{\text{limite}} = 9 h^{-2} 10^{0.4(M^* + 25 - m_{\text{limite}})} z^2$$

siendo  $\Gamma(\alpha + 1, u_{\text{limite}})$  la función  $\Gamma$  incompleta.

Si se tienen en cuenta los efectos de distorsión observacional en el contraste de densidad, entonces el contraste de densidad efectivamente observado vendrá dado por

$$\delta_{\text{obs}} = \left[ (1 + \hat{\delta}) \frac{\Gamma(\alpha + 1, u_{\text{lim}}^{\text{obs}})}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] - 1 \quad [4.138]$$

Si además se tienen en cuenta los efectos de amplificación de luminosidad (el factor de amplificación  $A$  dependerá de las coordenadas de cada punto), entonces la expresión para el contraste de densidad observado es

$$\delta_{\text{obs}} = \left[ (1 + \hat{\delta}) \frac{\Gamma\left(\alpha + 1, \frac{u_{\text{lim}}^{\text{obs}}}{A}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] - 1 \quad [4.139]$$

que sería la fórmula a aplicar para estimar la densidad numérica real de galaxias al analizar datos observacionales.

De este modo puede calcularse la distribución de densidad observada para una luminosidad aparente límite dada y un contraste de densidad real conocido. Si no se consideran las distorsiones angulares y de redshift, sino únicamente el hecho de la existencia de una luminosidad aparente límite para la distribución observada, el contraste de densidad decrece monótonamente con la distancia (de acuerdo con la ley dada por  $\Gamma(\alpha + 1, u_{\text{lim}})$ ) (Fig. 4.18). En cambio, si se tienen en cuenta los efectos angulares y de redshift que perturban la distribución en el espacio comóvil, la distribución efectivamente observada es considerablemente diferente, dependiendo del tipo y tamaño de las estructuras. Los efectos son más



notables para magnitudes aparentes límites más bajas —donde el corte observacional es más fuerte— que para magnitudes aparentes altas, para las cuales llegan a observarse prácticamente todas las galaxias de la distribución real.

## Capítulo 5

### TIPOS CARACTERISTICOS DE PERTURBACION

---

En los capítulos anteriores hemos desarrollado un modelo de análisis de las distorsiones producidas en la propagación de las trayectorias luminosas, determinando el modo de calcular las coordenadas comóviles de una fuente a partir de los observables redshift-ángulo y las distorsiones producidas en la interpretación de observaciones en coordenadas redshift-ángulo, en comparación con el análisis en el espacio real.

Hasta ahora no hemos discutido ningún modelo concreto de perturbación, sino aspectos generales derivados de un determinado modelo de universo caracterizado por una densidad espectral  $P(k)$ . Se trata ahora de discutir las consecuencias que este tipo de efectos tienen sobre determinados modelos concretos de perturbación. Estudiaremos básicamente dos situaciones: estructuras esféricamente simétricas (cúmulos de galaxias y vacíos cosmológicos, como las dos grandes estructuras que hoy se consideran dominantes), y el caso particular de la onda plana como modelo elemental de estructura a gran escala.

El tratamiento seguido en los capítulos anteriores era un tratamiento más genérico y global acerca del tipo de inhomogeneidades que pueden encontrarse en el universo. En este caso lo que pretendemos es un tratamiento más detallado de determinados tipos de estructuras, analizando las distorsiones observacionales particulares. Recuperaremos de este modo los resultados obtenidos mediante un análisis clásico de deflexión de trayectorias luminosas (efecto lente) y distorsiones de redshift, a través del análisis general introducido en el Capítulo 3 que relaciona directamente las coordenadas comóviles reales con los observables redshift-ángulo.

### 5.1 ESTRUCTURAS ESFERICAMENTE SIMETRICAS

La consideración de estructuras esféricamente simétricas en el estudio de la estructura a gran escala del universo viene esencialmente condicionada por dos factores: la simplicidad matemática que representan (fundamental a la hora de modelizar analíticamente muchos de los efectos) y la existencia real de estructuras que pueden ser descritas mediante modelos de simetría esférica, tales como los cúmulos de galaxias y los vacíos cosmológicos.

Para ilustrar mejor la situación en el caso de estructuras esféricamente simétricas, relacionaremos los resultados del Capítulo 3 con la descripción tradicional de las distorsiones en redshift (por velocidades peculiares) y la deflexión angular de las trayectorias luminosas. Veremos como el resultado obtenido en el Capítulo 3 no es sino una generalización de la descripción usual de este tipo de efectos.

Con el fin de entender mejor el significado físico de cada uno de los términos que van a jugar un papel fundamental en la descripción de las distorsiones, en el caso de perturbaciones esféricamente simétricas resulta conveniente introducir la siguiente magnitud

$$\bar{\delta}(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \delta(x) x^2 dx = \frac{\delta M}{M} \quad [5.1]$$

que mide el contraste de densidad total contenido en una esfera de radio  $r$ , es decir, la media de la perturbación dentro de una esfera de radio  $r$ , y que resulta ser igual al cociente entre el incremento de masa total y la masa total contenida en ella.

La densidad media en una esfera de radio  $r$  viene dada entonces por  $\langle \rho(r) \rangle = \bar{\rho} [1 + \bar{\delta}(r)]$ , y evidentemente  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\delta}(r) = 0$ , por la definición de

la densidad media  $\bar{\rho}$ . La masa total contenida dentro de una esfera de radio  $r$ ,  $M(r)$ , viene dada entonces por

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi \langle \rho(r) \rangle r^3 = \frac{4}{3} \pi \bar{\rho} r^3 [1 + \bar{\delta}(r)] \quad [5.2]$$

La expresión de la perturbación media en una esfera de radio  $r$

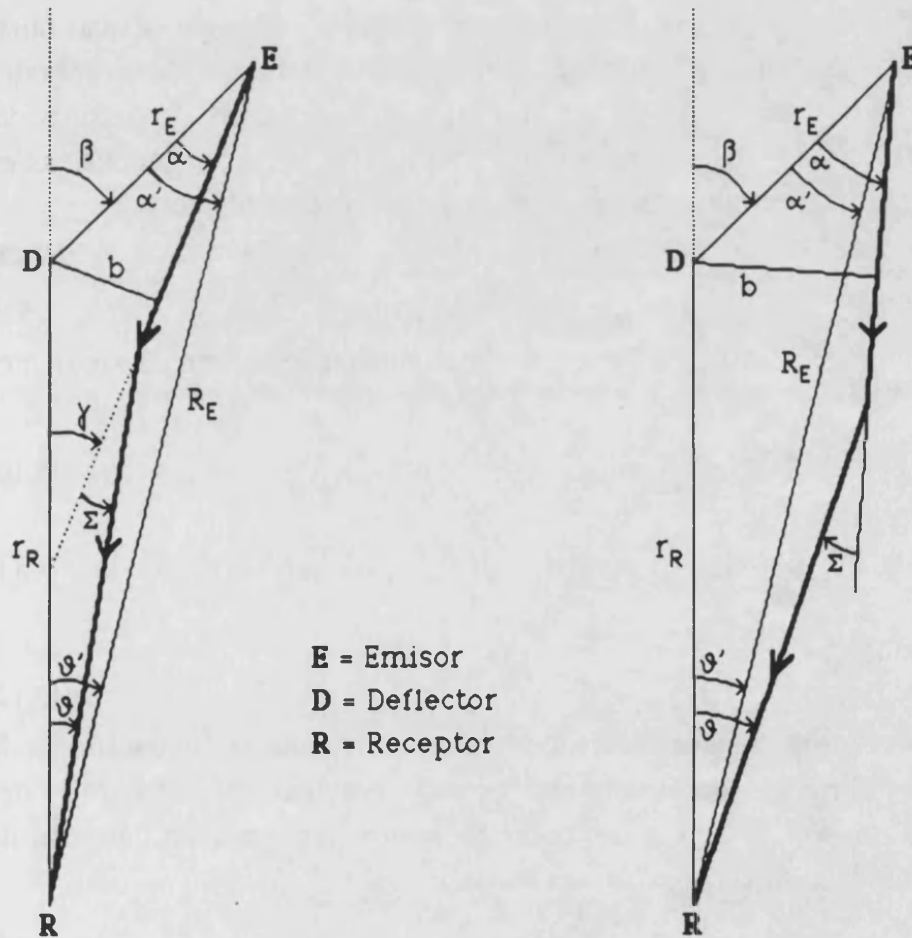
$$\bar{\delta}(r) = \frac{\langle \rho(r) \rangle - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad [5.3]$$

es muy similar a la expresión para el contraste de densidad en cada capa  $r$ .

La magnitud que va a caracterizar los efectos en simetría esférica es  $(\delta - \bar{\delta})$ . Esta magnitud tiene un claro significado físico. Representa la diferencia entre la densidad en una capa a una distancia  $r$  del centro de la inhomogeneidad y la densidad media en la esfera de radio  $r$  interior a dicha capa; concretamente

$$\delta - \bar{\delta} = \frac{\rho - \langle \rho(r) \rangle}{\bar{\rho}} \quad [5.4]$$

Consideremos una perturbación esférica situada en el punto D, una fuente (E) y un observador (R) dispuestos según la figura 5.1.



a.- Trayectoria divergente

b.- Trayectoria convergente

**Fig. 5.1** Configuración geométrica de la trayectoria luminosa emisor-receptor, para trayectorias convergentes y divergentes respecto al deflector esférico situado en D.

Sean  $(r_E, \beta)$  las coordenadas polares de un punto de emisión (E), tomando el origen de coordenadas en el centro de la inhomogeneidad y como eje polar la línea que une el punto donde se halla el observador y el centro de la inhomogeneidad. Denotamos por  $r_R$  la coordenada radial del observador (R), e introducimos los ángulos siguientes

$$\alpha = \text{ángulo } (-\vec{x}_E, \vec{V}_E) \quad [5.5]$$

$$\vartheta = \text{ángulo } (\vec{x}_R, \vec{V}_R) \quad [5.6]$$

$$\gamma = \text{ángulo } (\vec{x}_R, \vec{V}_E) \quad [5.7]$$

definidos tal como se indica en la figura 5.1.

De acuerdo con los resultados del Capítulo 3, es fácil calcular en el caso de una inhomogeneidad con simetría esférica, utilizando las variables  $(r, \alpha)$  introducidas, las expresiones de los vectores tangentes a las geodésicas nulas en los puntos de emisión y recepción de la señal, así como las integrales correspondientes a lo largo de la trayectoria de orden cero, no perturbada, fuente-observador. Los valores del parámetro afín  $w$  de las geodésicas en los puntos de emisión y recepción dependen de  $\alpha$  de acuerdo con

$$w_E = (\vec{x}_E \cdot \vec{V}_E) = -r_E \cos \alpha \quad [5.8]$$

$$w_R = (\vec{x}_R \cdot \vec{V}_E) = r_R \cos(\beta - \alpha) = r_R \cos \gamma \quad [5.9]$$

Mediante geometría euclídea elemental pueden deducirse las siguientes relaciones

$$\beta(\vartheta') = \alpha' + \vartheta' = \arcsin\left(\frac{r_R}{r_E} \sin \vartheta'\right) + \vartheta' \quad [5.10]$$

$$R_E(r_E, r_R, \beta) = \sqrt{r_E^2 + r_R^2 + 2r_E r_R \cos \beta} \quad [5.11]$$

De modo que resulta

$$\vartheta(r_E, r_R, \alpha, \beta) = \Sigma + \beta - \alpha \quad [5.12]$$

Esta ecuación trascendente constituye de hecho la "ecuación de la lente" que habría que resolver (en general, numéricamente) para poder calcular la deflexión de las trayectorias luminosas, para un "ángulo de deflexión"  $\Sigma$  dado por

$$\Sigma = - {}_1\vec{k}_R \cdot \vec{n} \quad [5.13]$$

donde  $\vec{v}_E$  el vector unitario en la dirección de salida del rayo luminoso desde la fuente y  $\vec{n}$  un vector unitario perpendicular a  $\vec{v}_E$ .

La solución que estamos siguiendo en este tratamiento es equivalente a linealizar dicha ecuación de la lente suponiendo que las deflexiones angulares son siempre muy pequeñas, recuperándose de este modo los resultados obtenidos mediante análisis de deflexión gravitatoria (efecto lente) a través de un análisis más general de la determinación de coordenadas comóviles a partir de los observables redshift-ángulo.

Una vez resuelta la ecuación de la lente [5.12], lo que tendremos por resultado será un valor de  $\alpha$ , a partir del cual podremos determinar el valor de  $\vartheta$ , que es el ángulo de observación de una fuente situada realmente en una posición angular  $\vartheta'$ , siguiendo el tratamiento de deflexión gravitatoria de las trayectorias.

Ahora bien, este valor de  $\vartheta$  no es realmente el ángulo físico con el cual observaremos la fuente, pues  $\vartheta$  es un ángulo euclídeo (definido mediante una métrica euclídea) auxiliar, definido a lo largo del cálculo por simplicidad, pero que no representa una dirección física de observación. El ángulo físico medido por el observador, que denotaremos  $\hat{\vartheta}$ , vendrá dado por la métrica física empleada (Sachs-Wolfe) a partir de la ecuación (Moreno & Portilla, 1990)

$$\hat{\vartheta} = \cos^{-1} \left[ \left( 1 - \eta_E^2 (\delta_E - \bar{\delta}_E) \sin^2 \alpha \right) \cos \vartheta \right] \quad [5.14]$$

de modo que la expresión final resultante, linealizada, para el ángulo de observación es

$$\hat{\vartheta} = \vartheta' + \frac{r_R}{R_E} \sin \vartheta' \left[ \frac{3}{5} (B_E - B_R) - \frac{1}{3} \left( \eta_E^2 \bar{\delta}_E - (1 - 2 R_E) \bar{\delta}_R \right) \right] \quad [5.15]$$

Análogamente puede obtenerse las expresiones para la coordenada radial de emisión  $\hat{R}_E$  en función de la coordenada comóvil  $R_E$

$$\begin{aligned} \hat{R}_E = R_E + \frac{3 - R_E}{20} (B_E - B_R) - \frac{1}{10} R_E B_E - \\ - \frac{2}{3} \eta_E^2 r_E \bar{\delta}_E \cos \alpha' - \frac{2 - R_E}{3} r_R \bar{\delta}_R \cos \vartheta' + \\ + \frac{3}{5} \int_0^{R_E} B(w) dw \end{aligned} \quad [5.16]$$

con la expresión adicional para  $\eta_E$  dada por

$$\eta_E = 1 - R_E + \frac{1}{3} \left( \eta_E^2 r_E \bar{\delta}_E \cos \alpha + r_R \bar{\delta}_R \cos (\beta - \alpha) \right) + \frac{1}{10} (B_R - \eta_E B_E) - \frac{3}{5} \int_{w_E}^{w_R} B(w) dw \quad [5.17]$$

La integral

$$\int_{w_E}^{w_R} B(w) dw \quad [5.18]$$

debe ser calculada explícitamente para cada modelo particular de perturbación (esféricamente simétrica en este caso) que sea considerada.

Debe tenerse en cuenta que en el esquema perturbativo que estamos considerando las funciones  $B(r)$ ,  $\delta(r)$  y  $\bar{\delta}(r)$  deben tomar valores pequeños para aquellos valores de  $r$  para los que es aceptable esta aproximación.

El desarrollo de la expresiones obtenidas en el Capítulo 4 permite determinar el contraste de densidad observado, en función del contraste de densidad real y de la geometría de la observación, para el caso de simetría esférica, resultando

$$\begin{aligned} \delta_E^{\text{obs}} = & \delta_E + \eta_E^2 \left[ \frac{1}{3} \bar{\delta}_E + (\delta_E - \bar{\delta}_E) \cos^2 \alpha' \right] + \\ & + \frac{2}{3 R_E} \left[ \eta_E r_E \bar{\delta}_E \cos \alpha' + r_R \bar{\delta}_R \cos \vartheta' \right] + \\ & + \frac{1 - 2\eta_E}{3} r_E \bar{\delta}_E \cos \alpha' + \frac{1}{3} r_R \bar{\delta}_R \cos \vartheta' + \\ & - \frac{3}{10 R_E} (\eta_E B_E - B_R) + \frac{3}{2} B_E - \\ & + \frac{20}{5} r_R R_E \bar{\delta}_R \cos \vartheta' - \frac{12}{5 R_E} \int_0^{R_E} B(w) dw \quad [5.19] \end{aligned}$$

Dado que el modelo de perturbación esféricamente simétrica considerado supone la presencia de una única inhomogeneidad localizada en una región relativamente pequeña dentro de un medio de fondo homogéneo, los términos que dependen de la posición del observador  $r_R$  sólo son significativos cuando se trata de un observador cercano a la inhomogeneidad.

### 5.1.1 CUMULOS DE GALAXIAS

En primer lugar, estudiaremos el caso de estructuras con contraste de densidad positivo ( $\delta > 0$ ). En realidad, aunque emplearemos siempre la palabra "cúmulo" de galaxias, nos referiremos en general al caso de grandes estructuras de contraste positivo (con la restricción a la simetría esférica impuesta como simplificación del problema), de modo que esto incluye también el caso de supercúmulos de galaxias. De hecho, dado que este modelo describe fundamentalmente grandes estructuras de contraste de densidad bajo sería aplicable con más propiedad al caso de supercúmulos.

#### Modelos de cúmulos de galaxias

El problema de la determinación de un modelo adecuado de cúmulo de galaxias está ligado a dificultades observacionales, principalmente debido a los problemas derivados de la estadística de pocos números, ya que son pocos los cúmulos bien estudiados y en muchos casos el número de galaxias con información completa (coordenadas angulares precisas, redshift, magnitud, tipo morfológico, etc.) es pequeño.

Para entender hasta qué punto resulta difícil caracterizar un cúmulo de galaxias basta tener en cuenta la dificultad en la determinación de las coordenadas del centro del cúmulo. Por citar un ejemplo típico, incluso en el caso del cúmulo de Coma —un cúmulo rico relativamente próximo, y desde luego uno de los más y mejor estudiados— no está perfectamente definido un centro para dicho cúmulo, sino que existen discrepancias según el método seguido para el análisis de los datos observacionales:

Zwicky y Herzog, 1963	$\alpha = 12^h 57.1^m$	$\delta = +28^\circ 06'$
Rood <i>et al.</i> , 1972	$\alpha = 12^h 57.4^m$	$\delta = +28^\circ 14'$
Bahcall, 1973	$\alpha = 12^h 57.4^m$	$\delta = +28^\circ 15'$
Abell, 1977	$\alpha = 12^h 56.9^m$	$\delta = +28^\circ 14'$



y todo esto es simplemente para definir un centro "geométrico" para la distribución. El problema se complica notablemente cuando se trata de determinar un centro "dinámico" que dé cuenta de la distribución de masas, velocidades peculiares, y dinámica global del cúmulo, y que sería lo que realmente nos interesaría en este caso.

Los datos relativos a un cúmulo derivados de la observación de posición de galaxias suelen constar de unas 100-200 entradas correspondientes a galaxias dentro de un radio  $R \approx 1-2 h^{-1} \text{ Mpc}$  en torno al centro del cúmulo (Dressler, 1980). Los modelos de contraste de densidad que parecen más adecuados, tanto por constituir una aproximación bastante precisa a la realidad como por la simplicidad matemática que representan, son los modelos de potencias en la coordenada radial. Un caso extremo es considerar una única potencia de  $r$  para describir el contraste de densidad desde la zona central del cúmulo hasta la parte más externa del halo, pero esto no es muy realista, dada la diferente dinámica de la materia en cada región y la diferente ley de contraste que cabe de ella esperar.

En general, cabe distinguir fundamentalmente 3 zonas en un cúmulo de galaxias: la parte central virializada (núcleo), la parte que rodea dicho núcleo y la parte más externa o halo del cúmulo. Un modelo realista de cúmulo debe distinguir al menos dos partes claramente diferenciadas (núcleo y halo), con una zona intermedia de transición.

En cuanto a la zona central virializada, ésta suele ser muy pequeña (0.5-1 Mpc), pero contiene un gran número de galaxias dada la elevada densidad en esta zona. En el caso del cúmulo de Coma, por poner un ejemplo, si fuésemos capaces de determinar las posiciones reales de las galaxias que constituyen el cúmulo de Coma (o, lo que sería equivalente, corregir el redshift observado de los efectos debidos a velocidades peculiares), la distribución de galaxias observada sería una estructura aproximadamente con simetría esférica con un radio de  $\approx 1 h^{-1} \text{ Mpc}$  para dicha zona central del cúmulo (Geller y Huchra, 1989). La densidad numérica de galaxias en la parte central (virializada) del cúmulo es del orden de  $300 \text{ galaxias Mpc}^{-3}$ , lo que supone un contraste de densidad muy elevado en el centro de un cúmulo denso (muy superior a la unidad en todo caso).

Para muchos cúmulos, la densidad numérica de galaxias en la parte central mas interna (virializada) del cúmulo varía radialmente de acuerdo con una ley del tipo

$$\rho_b(r) = \frac{\rho_o}{\left(1 + \frac{r^2}{r_o^2}\right)} \quad [5.20]$$

( $\rho_b(r)$  es la densidad numérica de galaxias, que en principio es proporcional a la densidad de masa).

En el caso del cúmulo de Coma, por ejemplo, el perfil de densidad proyectada al plano celeste puede ajustarse analíticamente para dicha zona interna virializada del cúmulo mediante una ley del tipo (The & White, 1986)

$$\Sigma(r) = \Sigma_o \left(1 + \left(\frac{R}{r_c}\right)^2\right)^{(1-\gamma)/2} \quad [5.21]$$

donde  $\Sigma_o = 1176$  galaxias grado<sup>-2</sup>,  $r_c = 298 h_{50}^{-1}$  kpc, y  $\gamma = 2.72$ .

Aplicando el método de inversión estándar de Abell se obtiene la correspondiente expresión para el perfil de densidad espacial de galaxias en el cúmulo

$$\rho(r) = 2.2 \Sigma_o r_c^{-1} \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-\gamma/2} \quad [5.22]$$

Por otro lado, para la parte más externa del cúmulo (el halo), la densidad numérica de galaxias varía de acuerdo con una potencia negativa de la coordenada radial  $r$ , es decir, con una ley del tipo

$$\rho_b(r) = \left(\frac{r_c}{r}\right)^\gamma \quad [5.23]$$

A la hora de comparar la ley esperada  $\rho_g \propto r^{-3}$  con las observaciones de la distribución de galaxias, debe tenerse en cuenta que la distribución de masas de las galaxias  $\rho_g$  no es necesariamente proporcional a la distribución observada del número de galaxias por unidad de volumen, debido a que la masa media de las galaxias es conocido que depende de la distancia del centro del cúmulo (las galaxias elípticas predominan sobre las espirales en las partes más internas del cúmulo). El perfil de densidad numérica de galaxias se estima que es menos pronunciado que el perfil de densidad másica de galaxias.

El empalme de ambos tipos de variación (en la zona interna y en la zona del halo) nos proporcionará una ley válida para todo el cúmulo, desde su parte más externa hasta el límite del mismo en su confusión con las galaxias del fondo.

Las condiciones para este empalme serán, lógicamente, la continuidad de la ley de variación de la densidad y la continuidad de la derivada primera de dicha función, respecto a la coordenada radial  $r$ . Ambas condiciones implican un punto de empalme de ambas leyes de variación radial de la densidad numérica con la coordenada radial.

Un modelo que cumple estos requisitos y representa una aproximación bastante realista al perfil de densidad de un cúmulo típico es aquel para el cual la densidad varía como la de una esfera isoterna ( $\rho \approx r^{-2}$ ) para  $r < r_c$ , con un cambio en la pendiente para  $r = r_h$ , siendo la densidad proporcional a  $r^{-\gamma}$  para  $r > r_h$ . Dicho modelo viene dado por la expresión (Miralda-Escudé, 1990)

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{r}{r_h}\right)^2\right)^{\frac{\gamma-2}{2}}} \quad [5.24]$$

donde  $r_c$  es el radio característico del nucleo más interno, y  $r_h$  es el radio característico externo en la transición hacia el halo. Valores típicos de los parámetros en esta expresión para cúmulos de galaxias son

$$\begin{aligned} r_c &= 0.06 \text{ Mpc} \\ r_h &= 0.5 \text{ Mpc} \\ \gamma &= 2.25 \\ \rho_0 &= \frac{\sigma_{11}^2}{2 \pi G r_c^2} \end{aligned}$$

donde  $\sigma_{11} = 1500 \text{ km s}^{-1}$ .

El valor  $\gamma=2.25$  corresponde a un cúmulo que sufre una caída (secundaria) radial de materia en un universo de Einstein-de Sitter (Gunn y Gott, 1972).

En este tipo de modelos aun ha de hacerse un nuevo empalme para que la densidad termine cayendo con una ley del tipo  $r^{-2}$  en la zona más externa del halo ( $r \lesssim 30 \text{ Mpc}$ ).

Otro tipo de modelos que consideran una doble ley de potencias para modelizar el contraste de densidad en el halo del cúmulo se basan en argumentos estadísticos derivados de la función de correlación cúmulo-galaxia. Utilizando la función de correlación cúmulo-galaxia calculada por Lilje y Efstathiou (1988), y suponiendo una función de correlación cúmulo-

cúmulo del tipo  $\left(\frac{r}{2.3 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}}\right)^{-1/8}$ , Olivier *et al.* (1990) encuentran un ajuste estadístico dado por la ley

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{r}{8.8 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}}\right)^{-2.2} - \left(\frac{r}{4.9 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}}\right)^{-1.5} \quad [5.25]$$

para  $r \leq 15 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$ .

Si en lugar de considerar un modelo de cúmulo con varias zonas concéntricas con perfiles de densidad diferente en cada una de ellas (esencialmente, con diferente potencia  $\gamma$  en la coordenada radial  $r$ ), se considera una única ley de potencias con un único  $\gamma$  para describir el halo del cúmulo, Maoz y Bekenstein (1990) han demostrado la prevalencia del valor  $\gamma=3$  para el perfil de densidad genérico en el entorno de un cúmulo.

Observacionalmente se ha establecido que la densidad numérica espacial de galaxias puede ajustarse mediante una ley del tipo  $r^{-3 \pm 0.4}$  para la mayor parte de los cúmulos (Bahcall, 1977). Para el cúmulo de Coma —el cúmulo mejor estudiado— el perfil de densidad se ajusta bastante bien (Rood, Thorne y Kintner, 1972; Binney y Tremaine, 1987) por una ley del tipo  $r^{-3}$ . Pero este tipo de dependencias no se estima de modo directo, sino a través de distribuciones proyectadas en el plano, de donde surgen discrepancias. Así, por ejemplo, Oemler (1974) encuentra densidades superficiales de galaxias que varían según una ley  $r^{-3}$  (lo que implica una densidad espacial variando de acuerdo con  $r^{-4}$ ) para la parte más externa de un cúmulo, mientras Yahil (1974) encuentra una dependencia  $r^{-1}$  para la distribución superficial ( $r^{-2}$  para la distribución espacial).

Otro tipo de argumentos basados en el estudio de la función de correlación cúmulo-galaxia (Seldner & Peebles, 1977) establecen una ley  $r^{-2.4}$  para el perfil de densidad típico en el halo de cúmulos de galaxias.

El razonamiento de Maoz y Bekenstein (1990) para llegar a esta conclusión se basa tanto en aspectos observacionales como en argumentos teóricos ligados a la dinámica de un cúmulo de galaxias.

En concreto, Maoz y Bekenstein encuentran evidencias teóricas y observacionales para una ley  $r^{-2.9 \pm 0.1}$  para el perfil de densidad en el halo de un cúmulo. Ahora bien, como ellos mismos comentan, a esta ley correspondería realmente a la distribución de masa en el halo del cúmulo, que no tiene porque ser necesariamente proporcional a la densidad numérica observada debido a que la masa media por galaxia depende a su

vez de la distancia al centro del cúmulo. Por lo tanto, el perfil de densidad "numérica" de galaxias ha de ser menos pronunciado que el perfil de densidad "máscica" de galaxias.

En general, cuanto más realista quiera plantearse el modelo de cúmulo, más complicadas serán las expresiones a tratar, a veces para llegar a similares resultados. Como en este caso pretendemos analizar fundamentalmente el efecto de las distorsiones estudiadas sobre las galaxias en el halo, nos limitaremos a considerar un modelo simplificado de cúmulo que describa bien la zona del halo y aproxime simplemente de modo adecuado la parte central, donde no vamos a entrar en detalles. La consideración de un modelo simplificado es especialmente útil en el tipo de cálculos a realizar, sobre todo cuando hagamos simulaciones numéricas con un gran número de puntos (galaxias) reproduciendo el contraste de densidad elegido.

### Modelo simplificado de cúmulo con bola central homogénea y halo $r^{-\gamma}$

Un modelo de cúmulo especialmente interesante en el esquema de aproximación considerado, por tratarse de un modelo bastante realista y gran simplicidad matemática, es el modelo con bola central homogénea y halo con un perfil de densidad con caída como una potencia  $\gamma$  de  $r$ .

En este modelo de cúmulo, el perfil de densidad viene dado por

$$\delta(r) = \begin{cases} \delta_0 & (r < r_c) \\ \delta_0 \left(\frac{r_c}{r}\right)^\gamma & (r_c < r < r_{\max}) \\ 0 & (r > r_{\max}) \end{cases} \quad [5.26]$$

(en la práctica tomaremos  $r_{\max}$  suficientemente grande para que el halo termine confundiendo con el medio de fondo homogéneo).

El contraste de densidad promedio  $\bar{\delta}(r)$  y el campo  $B(r)$  vienen dados en este caso por las siguientes expresiones:

a/  $r < r_c$

$$B(r) = -\frac{10}{3} \delta_0 r^2 \quad [5.27]$$

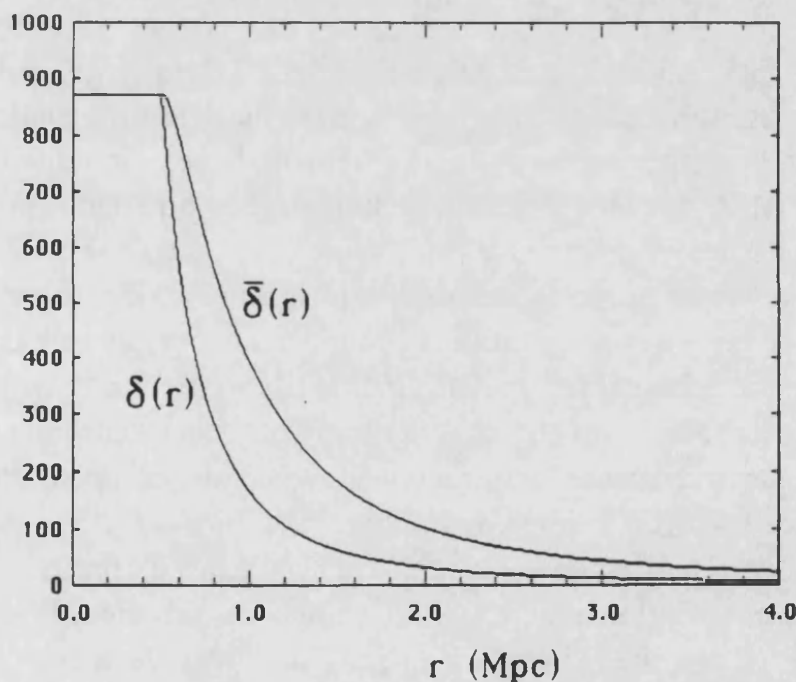
$$\bar{\delta} = \delta_0 \quad [5.28]$$

b/  $r > r_c$

Para  $\gamma \neq 3$ ,

$$B(r) = -\frac{20}{3} \delta_0 \left\{ r_c^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{(3-\gamma)(2-\gamma)} - \frac{\gamma}{(3-\gamma)} \left( 1 - \frac{r_c}{r} \right) \right] + \frac{3 r^2}{(3-\gamma)(2-\gamma)} \left( \frac{r_c}{r} \right)^\gamma \right\} \quad [5.29]$$

$$\bar{\delta}(r) = \frac{\delta_0}{3-\gamma} \left[ 3 \left( \frac{r_c}{r} \right)^\gamma - \gamma \left( \frac{r_c}{r} \right)^3 \right] \quad [5.30]$$



**Fig. 5.2** Funciones  $\delta(r)$  y  $\bar{\delta}(r)$  para un modelo de cúmulo con perfil de densidad caracterizado por una bola interior homogénea y caída radial como una simple potencia de  $r$  ( $\delta_0 = 872$  galaxias  $\text{Mpc}^{-3}$ ,  $r_c = 0.5$  Mpc,  $\gamma = 2.4$ ). Los parámetros han sido elegidos para reproducir la amplitud correspondiente en la zona lineal ( $r > 5$  Mpc), lo que da como resultado el valor requerido para  $\delta_0$ .

Para  $\gamma = 3$ ,

$$B(r) = -\delta_0 r_c^2 \left\{ 3.0 - \left(\frac{r_c}{r}\right) \left[ \frac{8.0}{3} - 2.0 \ln\left(\frac{r_c}{r}\right) \right] \right\} \quad [5.31]$$

$$\bar{\delta}(r) = \delta_0 \left(\frac{r_c}{r}\right)^3 \left[ 1 - \ln\left(\frac{r_c}{r}\right) \right] \quad [5.32]$$

En cuanto a la ley de potencias a considerar, tomaremos para  $\gamma$  el valor 2.4, como un valor típico suficientemente establecido, intermedio entre la ley  $r^{-1.7}$  utilizada por Kaiser (1987), que es un valor excesivamente bajo, y la ley  $r^{-3}$  sugerida por Maoz y Bekenstein (1990), que tal vez sea un valor un tanto elevado para densidad numérica. La gráfica adjunta (figura 5.2) muestra el comportamiento de tales funciones para este modelo de cúmulo.

### Velocidades peculiares en cúmulos de galaxias

Al analizar un cúmulo de galaxias, un primer efecto a tener en cuenta — destacando como rasgo distintivo de la presencia de un cúmulo rico de galaxias en el espacio redshift-ángulo— es la dispersión de velocidades peculiares en la zona virializada más interna. Por otro lado, otro efecto importante a tener en cuenta es la caída sobre el cúmulo de la materia en sus alrededores, lo que provoca una tendencia sistemática de las velocidades peculiares de las galaxias en torno al cúmulo a una componente dominante en la dirección radial del centro del cúmulo. Esta componente radial es más dominante cuanto más nos alejamos del cúmulo, si bien se debilita a medida que el efecto puramente gravitacional va siendo compensado por la dinámica de expansión del flujo de Hubble.

Dado el elevado contraste de densidad que llega a alcanzarse en la zona interna de un cúmulo de galaxias, el campo de velocidades peculiares asociado a la distribución esféricamente simétrica de masa (el campo coherente radial) llega a alcanzar velocidades peculiares importantes en la zona más interna. No obstante, el efecto dominante a la hora de estudiar el campo de velocidades peculiares en un cúmulo de galaxias no es el campo coherente radial, sino el campo aleatorio generado en la zona virializada. Cuando el cúmulo está dinámicamente evolucionado y dicha zona más interna alcanza un estado de virialización, el campo de velocidades resulta

aleatorio debido a las presiones generadas. Como la presión alcanzada es alta, la velocidad promedio de las galaxias en el régimen virializado llega a ser dominante sobre el campo de caída coherente al centro del cúmulo.

Este tipo de efectos debidos a la presión en la zona central del cúmulo no pueden ser descritos con el modelo que estamos considerando, que es un modelo de materia en polvo (presión nula). Además, el tipo de fenómenos que entran en juego en la zona interna del cúmulo se deben a efectos no gravitatorios, cuya descripción se escapa de los objetivos de esta memoria. Por tal motivo, los efectos de velocidades peculiares aleatorias en la zona central del cúmulo serán incluidos en nuestro modelo como una adición *ad hoc* cuando tengamos que considerarlos al abordar la corrección de catálogos de galaxias reales, donde los efectos de las zonas virializadas de los cúmulos son especialmente notables.

En cuanto a la zona externa del halo, las velocidades peculiares generadas corresponden esencialmente en una caída radial hacia el centro de la inhomogeneidad, y quedan bien modelizadas con la aproximación de presión nula. Debemos no obstante aplicar un régimen no lineal para describir el campo de velocidad coherente radial, dadas las notables velocidades peculiares que llegan a alcanzarse.

### **Distorsión del contraste de densidad observado**

La figura 5.3 representa el contraste de densidad real (a) y observado (b) para un cúmulo con perfil de densidad en caída como una potencia  $\gamma$  de  $r$  y con bola interior homogénea, caracterizado por los parámetros  $\delta_0 = 872$  galaxias  $\text{Mpc}^{-3}$ ,  $r_c = 0.5$  Mpc,  $\gamma = 2.4$ .

Hay que tener en cuenta que lo que estamos representando en la figura es el contraste de densidad "lineal", y las distorsiones descritas en el contraste de densidad en el régimen lineal, y de ahí el truncamiento de las figuras para  $|\delta| > 1$ . Evidentemente, el resultado ya no es significativo incluso para valores del contraste  $> 0.1$ , pero esta zona sí ha sido representada con el fin de ilustrar la tendencia en la transición del régimen lineal al régimen no lineal.

La posición del observador es en todos los casos (0,-100), es decir, está situado a 100 Mpc del centro de la perturbación deflectora. Se trata, pues, de un caso de "observador lejano", para estudiar los efectos característicos



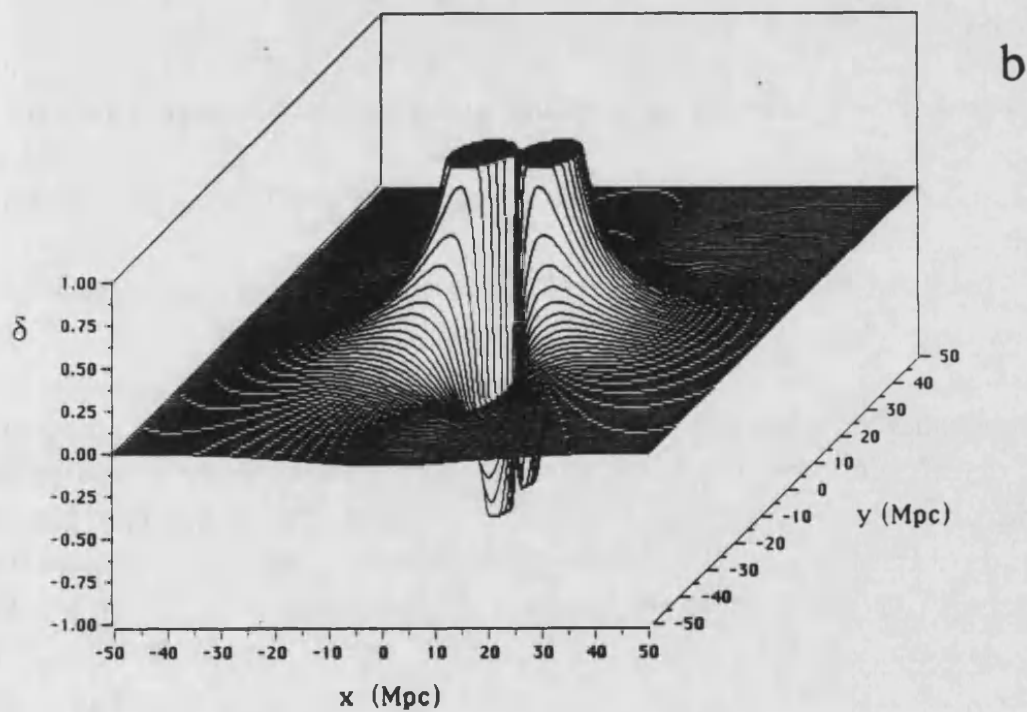
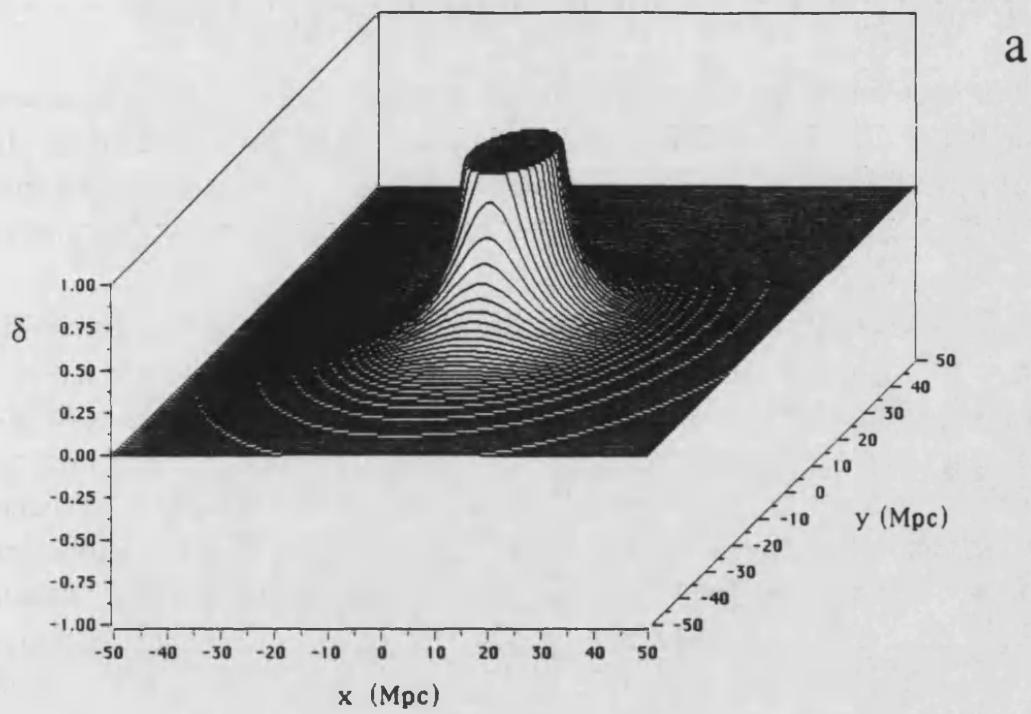
de este tipo de perturbaciones sobre las galaxias próximas al cúmulo, aisladamente de la contribución que supone un observador cercano.

En el régimen puramente lineal, el efecto dominante es la formación de "vacíos" delante y detrás de la posición del cúmulo según la dirección de visión del observador. Para un observador muy alejado, ambos vacíos son aproximadamente simétricos respecto al centro del cúmulo, mientras para un observador más cercano a la inhomogeneidad, el vacío situado delante del cúmulo (como lo ve el observador) resulta más pronunciado que el posterior al centro del cúmulo. Evidentemente, en la figura estos vacíos están muy pronunciados, debido a la extrapolación a un régimen en el que se viola la aproximación lineal, pero tales vacíos aparentes existen, mucho menos pronunciados, en el régimen no lineal, y son debidos a las galaxias del medio que rodea al cúmulo (halo) que son desplazadas hacia el centro del cúmulo cuando las observaciones se interpretan en términos de redshift.

Dejando a un lado la extrapolación al régimen no lineal, y quedándonos únicamente en la zona del halo del cúmulo en la que el régimen lineal es claramente aplicable, vemos como las distorsiones observacionales (fundamentalmente en el redshift) pueden generar una estructuración aparente ficticia (incluso desde el punto de vista morfológico) que puede camuflar la estructuración real. La estructuración descrita en el espacio redshift-ángulo puede ser muy diferente de la existente en el espacio real.

Hay que tener en cuenta que gran parte de la masa de un cúmulo está situada en la zona del halo, dispersa en una gran región del espacio. Normalmente tiende a estudiarse de modo prioritario la parte más densa central, virializada, pero, como señalan Rowan-Robinson *et al.* (1990), suponiendo que la distribución de densidad típica de un cúmulo (en la zona del halo) es de la forma  $r^{-1.6}$ , y que dicho halo del cúmulo se extiende hasta  $30 h^{-1}$  Mpc, como se considera normalmente, esto supone que sólo un 4% de la masa del cúmulo está incluida dentro de un radio de  $3 h^{-1}$  Mpc, y sólo un 1,5% está dentro del radio nominal de Abell del cúmulo de  $1,5 h^{-1}$  Mpc (Abell, 1958). Desde este punto de vista, el interés por la zona del halo de los cúmulos está plenamente justificado, más allá de una mera restricción en la aplicabilidad de un modelo lineal de presión nula.

La distorsión morfológica del propio cúmulo que aparece en la figura 5.3 no es significativa, y corresponde de hecho a la distorsión descrita por Kaiser (1987), en la cual un cúmulo esférico aparece con un anillo toroidal respecto a la dirección de la visual del observador.



**Fig. 5.3** Distorsión del contraste de densidad para un modelo de cúmulo con bola interior homogénea caracterizado por los parámetros ( $\delta_0 = 872 \text{ galaxias Mpc}^{-3}$ ,  $r_c = 0.5 \text{ Mpc}$ ,  $\gamma = 2.4$ ): (a) contraste de densidad real, (b) contraste de densidad observado.

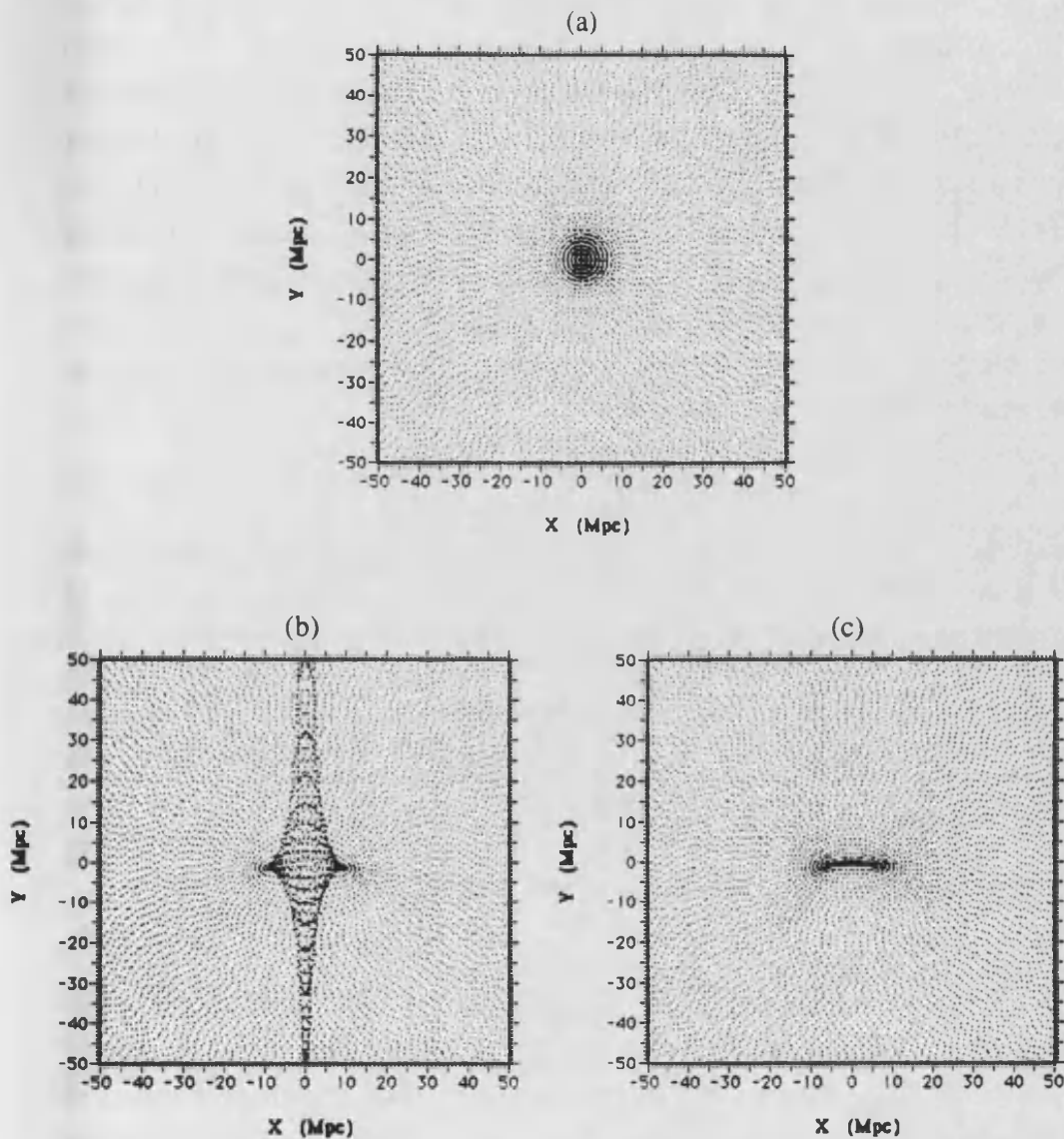
### **Distorsión en la apariencia observacional de un cúmulo**

Las repercusiones de las distorsiones redshift-ángulo sobre la estructura aparente de un cúmulo son de gran interés a la hora de estudiar la morfología —y dinámica— de cúmulos de galaxias, si es que tales efectos distorsionantes alteran de modo notable la apariencia observada del cúmulo con respecto a su estructura real.

La mayor parte de los estudios realizados al respecto se han basado en la aplicación de estimaciones derivadas de un régimen lineal. Pese a que a medida que nos acercamos al centro del cúmulo el modelo lineal es cada vez menos aceptable, el estudio de la transición —como tendencia a un límite no lineal— puede ayudar a interpretar los efectos que cabría esperar en dicho régimen no lineal, con lo que siempre se tiene la tentación de extrapolar los resultados de la zona lineal hacia la zona más interior del cúmulo. Kaiser (1987), en un intento de estudiar cómo los efectos distorsionantes que aquí estamos considerando pueden afectar la estructura aparente observada de un cúmulo de galaxias supuesto realmente esférico, obtuvo como resultado —utilizando sólo correcciones lineales de redshift— el indicado en la figura 1.2, según vimos en el Capítulo 1, apartado 1.3.

La figura 5.4 muestra la distribución de galaxias en el espacio coordinado real (a) y la distribución observada en el espacio redshift-ángulo, aplicando las ecuaciones del régimen lineal (Kaiser, 1987) (b) y aplicando las ecuaciones deducidas en el Capítulo 2 correspondientes al régimen no lineal (c).

La distribución de galaxias presentada en estas figuras no pretende ser realista, sino mostrar el efecto. Se ha considerado un número muy alto de galaxias (un total de 12382 para la figura 5.4) con el fin de que los efectos considerados resulten más evidentes. Por otro lado, en lugar de considerar una distribución absolutamente aleatoria (siguiendo la ley de contraste de densidad establecida) se ha considerado una distribución aleatoria por capas, pues al tratarse de una perturbación esféricamente simétrica, un análisis en términos de capas concéntricas ( $r=cte$ ) permite discutir mejor la dependencia del efecto con la coordenada  $r$ . De este modo, la figura 5.4 debe considerarse más bien esquemática que indicadora de una posible distribución real de galaxias, si bien la proporción numérica relativa de galaxias en cada capa sigue la ley de contraste de densidad asumida.



**Fig. 5.4** Análisis de los efectos de no linealidad en el campo de velocidades peculiares sobre la distribución aparente de galaxias en el entorno de un cúmulo con perfil de densidad con bola interior homogénea ( $\delta_0 = 872 \text{ galaxias Mpc}^{-3}$ ,  $r_c = 0.5 \text{ Mpc}$ ,  $\gamma = 2.4$ ). La figura (a) representa la distribución real de galaxias considerada. La figura (b) muestra la distribución observada aplicando la teoría lineal para describir los efectos de velocidades peculiares sobre el redshift. La figura (c) muestra la distribución observada aplicando las fórmulas correctas (teoría no lineal) para describir los efectos de velocidades peculiares en las regiones de contraste de densidad próximo o superior a la unidad.

Efectivamente, el resultado de Kaiser coincide con el aquí obtenido cuando consideramos la aproximación lineal (basta comparar la figura 5.4b con la figura 1.2). De hecho, la diferencias entre ambas figuras son debidas al ligeramente diferente modelo de cúmulo considerado, y, por otro lado, a que Kaiser situa el observador muy lejos (de hecho, en el infinito), mientras aquí el observador es lejano (100 Mpc), pero no lo suficiente como para notar aún la curvatura de convergencia de las líneas de coordenada radial hacia la posición del observador.

El modelo de cúmulo considerado por Kaiser es extremadamente simple: una ley de potencias del tipo

$$\delta(r) = \left(\frac{r_c}{r}\right)^\gamma \quad [5.33]$$

Este simple modelo, si bien describe adecuadamente el contraste de densidad en la zona del halo de un cúmulo, no describe adecuadamente el comportamiento de  $\bar{\delta}$ , magnitud fundamental en el estudio de este tipo de efectos.

Para un cúmulo descrito por la ley [5.33],  $\bar{\delta}$  viene dado por

$$\bar{\delta} = \frac{3}{3-\gamma} \left(\frac{r_c}{r}\right)^\gamma \quad [5.34]$$

con lo cual  $\bar{\delta}(r)$  diverge para  $r$  tendiendo a cero (mientras en el modelo de cúmulo con bola central homogénea aquí considerado  $\bar{\delta}(r)$  tiende a  $\delta(r)$  para  $r$  pequeño), como corresponde a un modelo realista de cúmulo. Mientras estemos en la zona externa del halo esto no es muy importante, pero si pretendemos usar las fórmulas correspondientes al régimen lineal —como hace Kaiser— para extrapolar el resultado a la zona no lineal más interna del cúmulo, hay que cuidar la descripción de  $\bar{\delta}(r)$  para no llegar a conclusiones erróneas.

La principal consecuencia de una descripción no-lineal de los efectos es la cancelación de las predicciones de Kaiser acerca de las distorsiones en la morfología de un cúmulo, al menos de aquellos efectos más notables, quedando únicamente como distorsión morfológica del cúmulo un aplastamiento en la dirección transversal a la dirección radial de observación. Para un observador más próximo al cúmulo, la apariencia de éste es un semicírculo ("media-luna") siguiendo el arco radial centrado en la

posición del observador. Para un observador muy lejos del cúmulo, el efecto es prácticamente la formación de una caústica transversal. Es el factor  $(1 + \eta^2 \delta)^{-1}$  el que cancela los efectos exageradamente amplificadas por la descripción lineal.

Si a tales efectos unimos la distorsión debida a las velocidades peculiares aleatorias en zona central del cúmulo, la apariencia de un cúmulo esférico en el plano redshift-ángulo, para un observador lejano, es una especie de cruz, donde el tramo vertical corresponde al régimen virializado y el tramo transversal corresponde a la caída coherente radial al centro del cúmulo.

### 5.1.2 VACIOS COSMOLOGICOS

Si bien la estructura "cúmulo de galaxias" es ya clásica en el estudio de la estructura a gran escala del universo, recientemente —y sobre todo a raíz de las evidencias observacionales sobre su existencia— ha cobrado gran interés el estudio de otro tipo de estructuras denominadas "vacíos cosmológicos", es decir, grandes regiones con un déficit en la densidad numérica de galaxias observadas respecto al medio de fondo homogéneo.

Como, además, este tipo de estructuras, tanto por su apariencia observacional como por los modelos teóricos sobre su origen y evolución que han sido establecidos, presentan generalmente simetría esférica y gran tamaño, resultan especialmente adecuadas para ser descritas por el modelo propuesto.

#### Modelos de vacíos

El estudio de la dinámica de una perturbación esférica negativa aislada en la densidad de un medio de fondo inicialmente homogéneo ("vacíos cosmológicos") ha sido ampliamente abordado, ya que las evidencias observacionales han estimulado notablemente su estudio. Existe, sin embargo, un cierto desorden en las conclusiones obtenidas debido a los diferentes contextos en que se han desarrollado los modelos teóricos (paredes finas en relatividad general, aproximación newtoniana, dinámica de fluidos, modelos de formación y evolución de burbujas en transiciones de fase en teoría cuántica de campos, etc..).

Los estudios de la dinámica de una sola "burbuja" esférica de baja densidad han sido abordados fundamentalmente desde tres puntos de vista:

a/ Planteamiento cosmológico, en el marco de la Relatividad General, limitándose al estudio de perturbaciones esféricas con un perfil de densidad en escalón que consta de un medio interior "vacío", pared (infinitesimalmente delgada) y medio exterior homogéneo a lo largo de toda la evolución. Este modelo tan sencillo lleva sólo a resultados cualitativos globales poco concretos, pero tiene la ventaja de permitir diferentes modelos de universo de fondo y estudiar la dinámica a tiempos grandes y a escalas de tamaños comparables con el tamaño del horizonte.

b/ Planteamiento newtoniano, limitándose al estudio de una región del universo pequeña comparada con el tamaño del horizonte y velocidades pequeñas (comparadas con la velocidad de la luz), pero haciendo un estudio más detallado, con perturbaciones negativas de densidad esféricamente simétricas pero de múltiples tipos (escalón, gaussianas, potencias, etc..), lo que ha permitido el estudio de fluctuaciones de densidad más realistas y modelos de evolución de estructuras reales. La complejidad de las ecuaciones diferenciales resultantes en tales modelos más realistas dificulta el llegar a resultados más precisos, pero se han tratado con cierto detalle incluso ligeras perturbaciones de la esfericidad (Fujimoto, 1983; Bertschinger, 1985b; Peebles, 1987).

c/ Búsqueda particular de soluciones autosemejantes, particularmente en el caso de la aproximación newtoniana, con el fin de hallar soluciones analíticas concretas a costa de perder generalidad en el planteamiento, de modo que, si bien tales soluciones son sólo válidas en casos particulares, la analiticidad de las mismas, o al menos su tratamiento numérico mediante más simples ecuaciones diferenciales, ha permitido llegar a resultados más detallados y concretos (Bertschinger, 1985 b).

Desde hace bastante tiempo es conocido (Lynden-Bell, 1964; Lin *et al.*, 1965) que una nube de polvo elipsoidal homogénea colapsa de tal modo que cualquier ligera desviación de la esfericidad es sistemáticamente amplificada durante la evolución de la nube. En vista de este resultado conocido, Icke (1973) lo extendió argumentando que todo exceso de densidad a gran escala en el universo conducirá a una estructura filamentaria, dando lugar a la formación de cúmulos de galaxias muy elongados. Mediante una simple inversión del argumento de Lynden-Bell, es fácil darse cuenta de que el razonamiento inverso del anterior resulta

igualmente válido. Un vacío puede ser considerado como una región de densidad negativa en un medio de fondo con un promedio de energía positiva. De este modo, mientras las condensaciones de materia colapsan, los vacíos deben expandirse. Además, una inversión en el signo de la densidad significa que a medida que el vacío va siendo más grande, su desviación de la esfericidad debe ir gradualmente desapareciendo (Icke, 1984). Este resultado suele conocerse en la literatura como el "teorema de la burbuja".

Si efectivamente la estructura del universo a gran escala estuviese dominada por la presencia de grandes vacíos (estructuras de baja densidad), este resultado indica que aquellas regiones que representan la mayor parte del volumen del universo tendrían una estructura geométrica muy simple: simetría esférica. Tiene, pues, sentido intentar construir un modelo de universo donde efectivamente la distribución de masas consista esencialmente en burbujas de baja densidad (vacíos) esféricamente simétricos, y donde las condensaciones de galaxias ocupen los espacios intersticiales de un empaquetamiento de esferas de diferentes tamaños en expansión, como una posible topología a gran escala del universo.

Han sido varios los autores que han propuesto modelos para la evolución de las regiones de baja densidad en un medio externamente homogéneo. En las primeras teorías, como la de Zel'dovich y sus colaboradores (modelo de la torta delgada) (Zel'dovich, 1970), los vacíos aparecían como una consecuencia de la formación de láminas donde la materia colapsa fusionándose en supercúmulos. En este escenario, los vacíos no tienen una entidad propia, y aparecen simplemente como una consecuencia secundaria de la formación de supercúmulos.

En otros modelos, los vacíos tienen una entidad propia, siendo la estructura dominante, cuya presencia da lugar a la aparición de las restantes estructuras. Ostriker y Cowie (1981) e Ikeuchi (1981) sugirieron que las ondas de choque esféricas, generadas por "semillas" explosivas primordiales (por ejemplo, quasares y supernovas) podrían propagarse radialmente desde dicho foco explosivo, evacuando de este modo la materia en las regiones que darían lugar de este modo a los vacíos esféricos. Pero las burbujas con diámetros mayores que 5 Mpc son difícilmente explicables con este mecanismo. Parece posible llegar a explicar la formación de un agujero con 50 Mpc de diámetro (como se ven en las observaciones) si se supone la existencia de amplificación mediante algún tipo de reacciones en



cadena de detonaciones (Bertschinger, 1985 a) aunque tales explosiones semilla tendrían que haber ocurrido en instantes muy primitivos en el universo.

La posibilidad de que se desarrolle un agujero de densidad en el flujo de Hubble como consecuencia de un déficit inicial en la densidad de masa fue estudiada por Peebles (1982), Hausman *et al.* (1983), Hoffman *et al.* (1983), e Icke (1984). Este último mostró explícitamente que cualquier región que es inicialmente menos densa que el promedio se expandirá de tal modo que va siendo cada vez más esférica. Este efecto se aprecia claramente en las simulaciones numéricas llevadas a cabo por Centrella y Melott (1983) y por Fujimoto (1983), quien demostró que un vacío elipsoidal en expansión tiende a tomar una forma esférica en el curso de la expansión. Bertschinger (1985b) desarrolló un método numérico, basado en un modelo hidrodinámico bidimensional con simetría axial, para analizar la expansión de una región no esférica de baja densidad, y de este modo confirmó la predicción de Icke (1984). Peebles (1982) desarrolló un método de integración numérica de la ecuación del movimiento para 2000 capas de masa concéntricas, encontrando un perfil de densidad resultante que constaba de un anillo de masa prominente alrededor de un agujero de baja densidad; el campo de velocidades alrededor del agujero tenía velocidades peculiares que representaban solamente una pequeña fracción de la expansión general de Hubble. Hoffman *et al.* (1983) construyeron modelos de Bondi-Tolman esféricamente simétricos de presión nula para la formación de agujeros en universos de Friedmann, suponiendo una región de baja densidad ("subdensa") inicialmente uniforme, rodeada por una región de alta densidad ("sobredensa") que compensase el efecto de la región subdensa dando lugar a un balance neto nulo sobre el medio de fondo. Hausman *et al.* (1983) realizaron un estudio similar, partiendo de una perturbación de densidad inicial esféricamente simétrica, y examinando su crecimiento y evolución no lineal. De este modo, encontraron posibles elecciones del perfil de densidad inicial capaces de dar lugar a profundos agujeros que no están rodeados por capas de alta densidad. Establecieron así las condiciones que dan lugar a la formación de capa de alta densidad alrededor del vacío de baja densidad, como límite temporal a partir de unas condiciones iniciales dadas, lo que permite caracterizar el destino de una perturbación negativa inicial en la densidad en función de unos parámetros ligados solamente a las condiciones iniciales.

Buscando modelos matemáticos más simples, Schwarz, Ostriker y Yahil (1975), Sato y Maeda (1983), Maeda y Sato (1983), Bertschinger (1983, 1985b), Ickeuchi, Tomisaka y Ostriker (1983) y Vishniac *et al.* (1985) estudiaron algunas soluciones generales de evolución autosemejante de vacíos en universos en expansión, relacionadas con la solución de semejanza de Sedov. Tales soluciones podrían corresponder a vacíos originados por fluctuaciones de densidad suficientemente grandes. Fillmore y Goldreich (1984) también obtuvieron soluciones de semejanza, las cuales describen la evolución de vacíos esféricamente simétricos en un universo de Einstein-de Sitter perturbado lleno de materia fría sin colisiones entre las partículas. El carácter de una solución depende del perfil de densidad inicial: las perturbaciones graduales (perfiles moderados) dan lugar a agujeros con perfil de densidad suavemente creciente con  $r$  (la coordenada radial desde el centro de la perturbación), mientras las perturbaciones con perfiles iniciales muy pronunciados dan siempre lugar a vacíos rodeados por una fina capa de muy alta densidad que delimita claramente el agujero. lo que constituye un agudo pico en el perfil de densidad resultante.

Los cálculos analíticos de dinámica de fluidos han sido aplicados (Sato, 1982; Maeda y Sato, 1983a,b) para demostrar que tales vacíos pueden desarrollarse a partir de perturbaciones iniciales de densidad ligeramente subcríticas, es decir, a partir de leves perturbaciones de la densidad del medio de fondo, sin necesidad de que se originen de partida grandes perturbaciones en la densidad, dado el proceso amplificador de la perturbación que constituye la dinámica del agujero de densidad. Este trabajo fue ampliado por Lake y Pim (1985) y Pim y Lake (1986), quienes estudiaron la evolución de agujeros de densidad esféricos completamente vacíos o llenos de radiación, en un universo de fondo de Robertson-Walker, dentro del contexto de la aproximación de pared fina y usando técnicas de empalme de soluciones de las ecuaciones de Einstein (métricas en diferentes regiones) con los métodos usuales en Relatividad General (método de Gauss-Codazzi), incluyendo además la posible existencia de presión en el medio de fondo, masa interior dentro del agujero, y presión superficial en la capa que rodea el agujero en el modelo de burbuja de la perturbación. Según sus resultados, los vacíos que no colapsan por algún motivo acaban creciendo, a tiempos suficientemente grandes, como el horizonte de partículas.

Peebles (1987) desarrolló un método numérico de tratamiento de la evolución de las perturbaciones de densidad en un contexto puramente de dinámica de fluidos, mediante un código que permite tratar de modo simple cualquier perturbación de densidad no necesariamente con simetría esférica y sin las limitaciones que tienen las simulaciones de N cuerpos para algunos casos. De este modo se han estudiado algunas perturbaciones positivas y negativas con diferentes perfiles.

Las simulaciones de N cuerpos del agrupamiento de galaxias dan como resultado estructuras filamentosarias con vacíos entre ellas. Si bien las primeras simulaciones no eran capaces de reproducir vacíos del tamaño observado, otras simulaciones más recientes con modelos de materia oscura fría y a través de espectros de fluctuaciones sesgados adecuadamente pueden llegar a justificar vacíos del tamaño promedio de la muestra de De Lapparent *et al.* (1986), de un diámetro de unos 25 Mpc. Pero la existencia de cierta arbitrariedad en la elección del tipo de materia dominante y el tipo de espectro de fluctuaciones a considerar hace que tales modelos no sean plenamente satisfactorios.

El estudio de la dinámica de múltiples vacíos no ha sido abordado aún. Existen numerosos trabajos de tipo estadístico analizando aspectos muy generales de la dinámica global de universos de tipo celular (Hoffman, Salpeter, Wasserman, 1983; Icke, Van de Weygaert, 1987), y algunos intentos de abordar la dinámica de dos burbujas contiguas (H. Sato, 1982; Hawking, Moss, Stewart, 1982; Chao, 1983; Midorikawa, 1985; Ellis, Fairall, 1988), pero siempre de un modo muy simplista y sin tener en cuenta los efectos de alta densidad y alta presión que pueden originarse en las regiones situadas entre las paredes de vacíos en expansión. De confirmarse la topología de tipo "espuma" del universo sería muy importante conocer la dinámica de un sistema físico de estructura celular y cómo puede originarse dicha estructura. )

Las llamadas perturbaciones de "tipo burbuja" son modelizaciones discretas de vacíos, como simplificación matemática para el cálculo. Este tipo de modelos no representan realmente perturbaciones posibles generadas por procesos físicos conocidos, pero este tratamiento simplificado es el que ha permitido avanzar en el conocimiento de la dinámica de sistemas físicos realistas equivalentes, con los cuales resulta prácticamente imposible llevar a cabo cálculos detallados. Las perturbaciones de tipo burbuja pueden a su vez distinguirse según tengan

una "pared" alrededor del vacío central o no. En el caso de burbujas sin pared, el perfil de densidad consta simplemente de un escalón, con un medio de baja densidad para  $r < R_0$ , y un medio exterior homogéneo para  $r > R_0$ . En el caso de burbujas con pared, el perfil de densidad consta de un medio interior de baja densidad ( $r < R_1$ ), una pared, generalmente de alta densidad ( $R_1 < r < R_2$ ), y un medio exterior homogéneo ( $r > R_2$ ). Hay a su vez tres casos posibles de burbujas con pared. Si partimos de un medio inicialmente homogéneo, podemos entender la perturbación como un déficit de masa en el "vacío" interior y un exceso de masa en la pared que lo rodea. Una burbuja "compensada" es aquella en la que el déficit de masa del vacío interior es igual al exceso de masa en la pared, de modo que el balance neto del total de la perturbación es nulo respecto al medio exterior. Una burbuja "no compensada" es aquella en la que hay un déficit neto de masa en la perturbación respecto al medio exterior. Una burbuja "sobrecompensada" es aquella en la que hay un exceso neto de masa en la perturbación respecto al medio exterior, es decir, la masa acumulada en la pared supera el déficit de masa del "vacío" interior.

En este caso vamos a considerar un modelo en escalón que, resultando matemáticamente muy simple, permite analizar los principales efectos producidos por la presencia de un vacío cosmológico en el caso general. La consideración de un modelo simplificado de perturbación es algo necesario si se pretende llegar a resultados numéricos concretos, dada la complejidad matemática que representarían unos modelos muy realistas. Por otro lado, dada la falta de un modelo más concreto de vacío deducido de resultados observacionales, parece necesario trabajar con modelizaciones teóricas muy genéricas.

Tomando como modelo simplificado de vacío un modelo de perturbación en escalón, el perfil de densidad viene dado por un contraste del tipo

$$\delta(r) = \begin{cases} \delta_1 & (r < r_1) \\ \delta_2 & (r_1 < r < r_2) \\ 0 & (r > r_2) \end{cases} \quad [5.35]$$

según indica la figura 4.5.



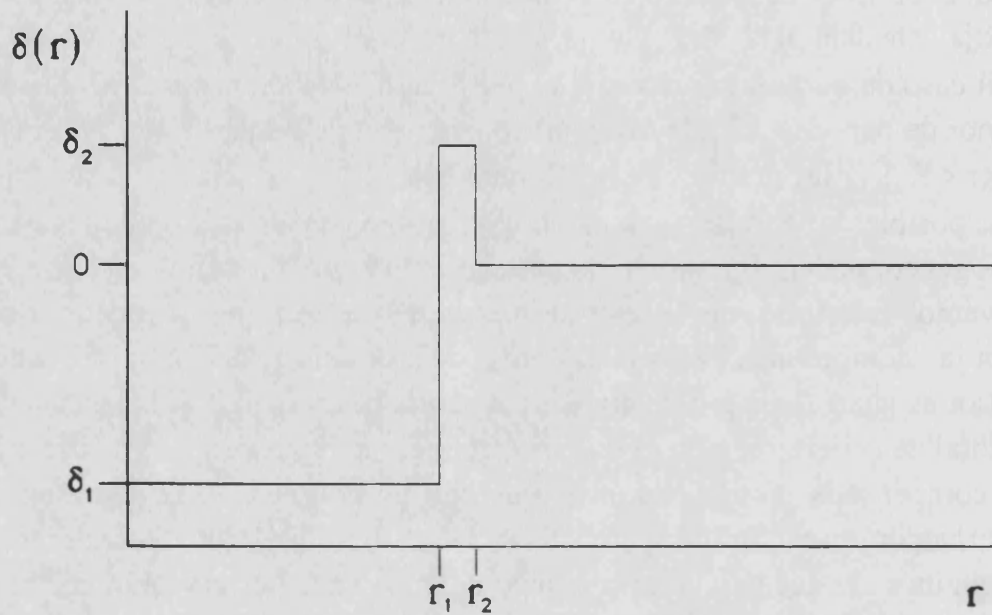


Fig. 4.5 Modelo simplificado de vacío en escalón.

Las expresiones resultantes para el campo  $B(r)$  y el contraste de densidad promedio  $\bar{\delta}(r)$  vienen dadas por:

a/  $r > r_2$

$$B(r) = -\frac{20}{3} \left[ \frac{3}{2} (\delta_2 r_2^2 + r_1^2 (\delta_1 - \delta_2)) - \frac{\delta_2 r_2^3 + r_1^3 (\delta_1 - \delta_2)}{r} \right] \quad [5.36]$$

$$\bar{\delta}(r) = \delta_1 \frac{r_1^3}{r^3} + \delta_2 \frac{r_2^3 - r_1^3}{r^3} \quad [5.37]$$

b/  $r_1 < r < r_2$

$$B(r) = -\frac{10}{3} \left[ 3 r_1^2 (\delta_1 - \delta_2) + \delta_2 r^2 + 2 \frac{r_1^3}{r} (\delta_1 - \delta_2) \right] \quad [5.38]$$

$$\bar{\delta}(r) = \delta_2 + \frac{r_1^3}{r^3} (\delta_1 - \delta_2) \quad [5.39]$$

c/  $r < r_1$

$$B(r) = -\frac{10}{3} \delta_1 r^2 \quad [5.40]$$

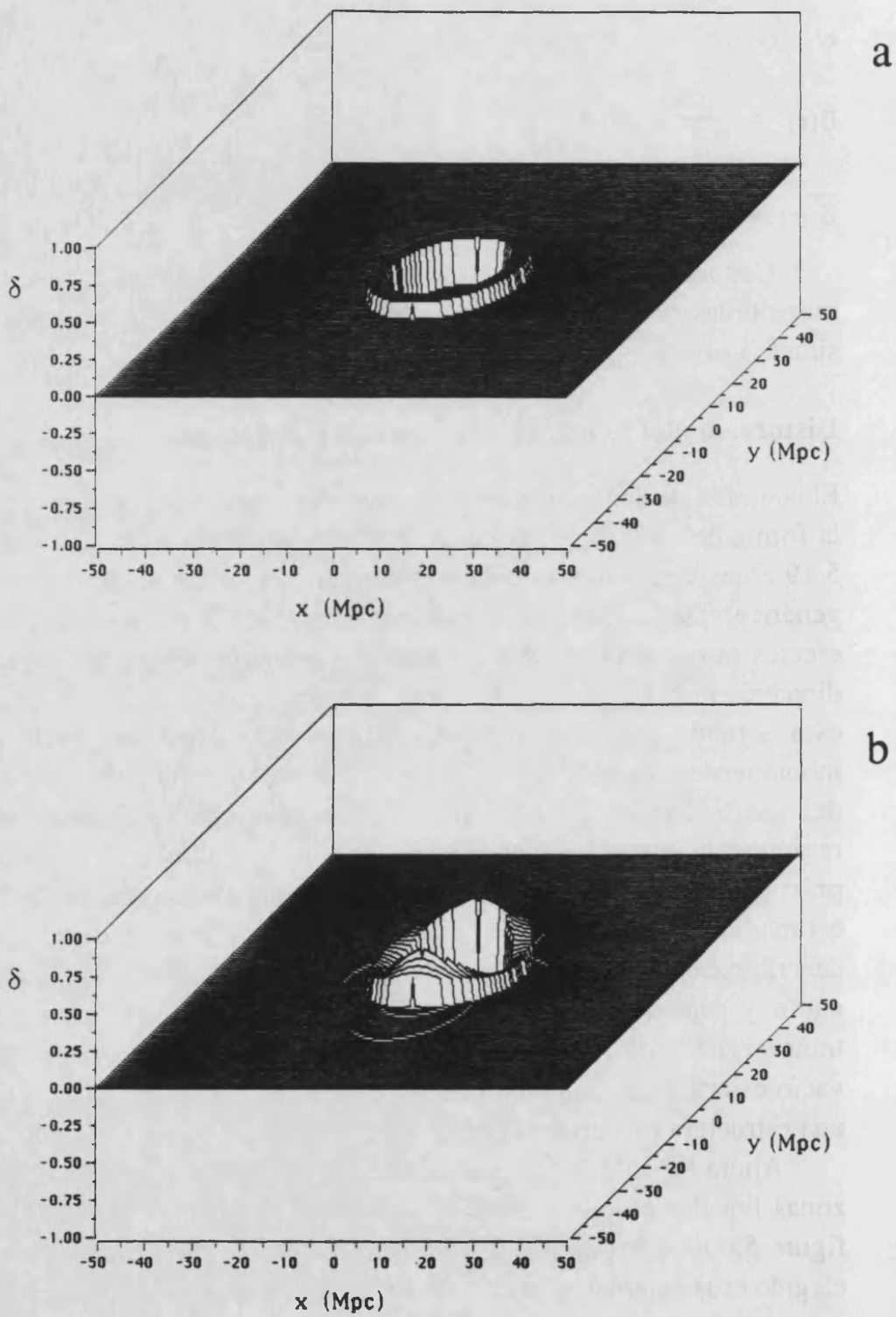
$$\bar{\delta}(r) = \delta_1 \quad [5.41]$$

Conocidas las funciones  $\delta(r)$ ,  $B(r)$ , y  $\bar{\delta}(r)$  pueden calcularse todas las magnitudes que entran en juego para el caso de inhomogeneidades con simetría esférica.

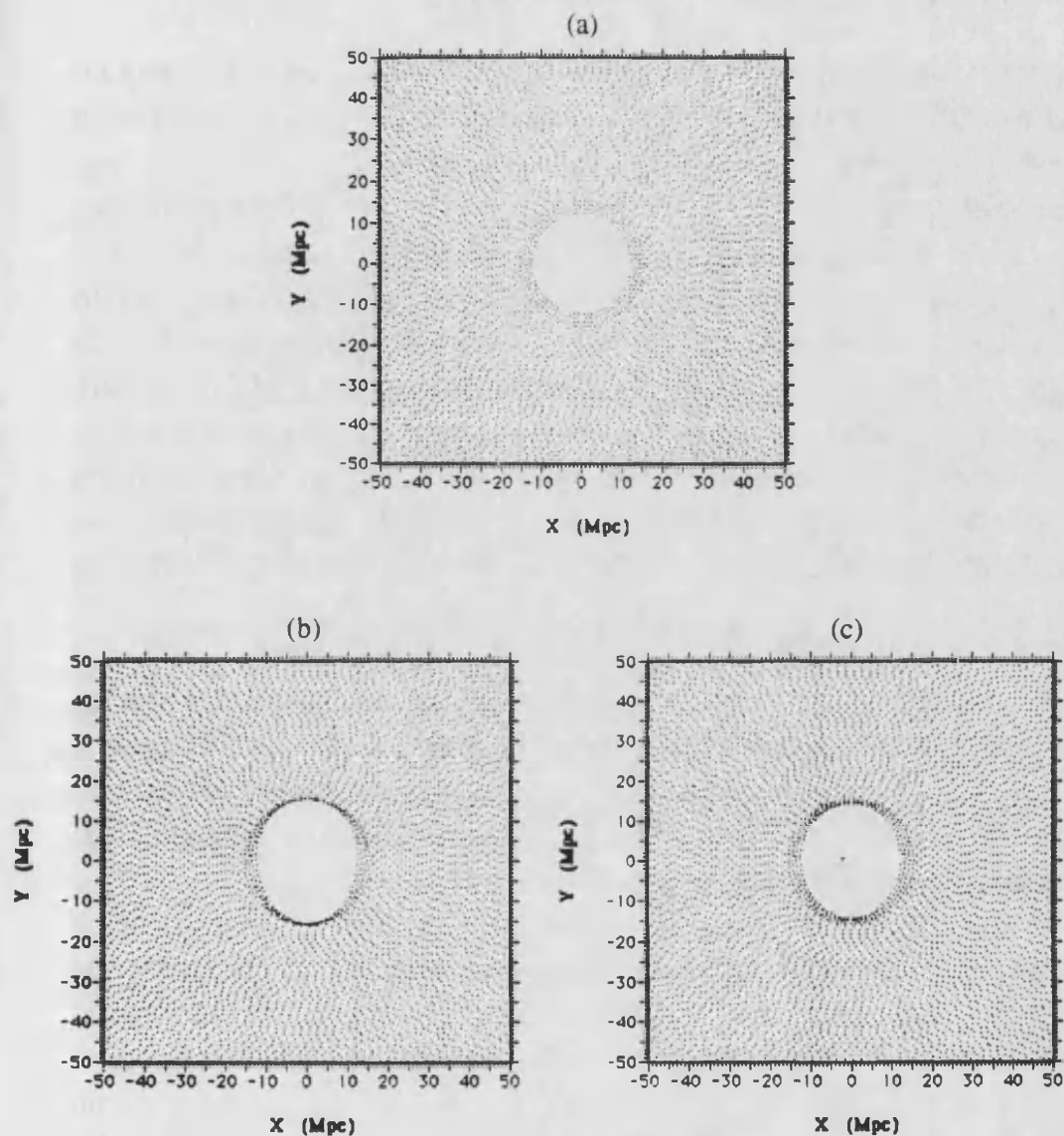
### Distorsión del contraste de densidad observado

El contraste de densidad real y observado para una perturbación supuesta en la forma de un vacío esférico, en el régimen lineal (aplicando la ecuación 5.19 antes deducida) aparece representado en la figura 5.6 para un caso genérico. Dadas las particularidades de un modelo de vacío tan simple, los efectos se pueden describir fácilmente como un mero aplastamiento en la dirección radial de la capa que rodea el vacío central. Como el observador está situado en el punto (0,-100), a 100 Mpc del centro de la inhomogeneidad, el efecto consiste en aplanar la parte anterior y posterior del vacío, dando lugar a paredes aparentemente más densas en tales regiones, mientras los laterales del vacío en la dirección visual quedan prácticamente inalterados. El resultado es una anisotropía en la densidad estimada en torno al vacío. Lo que interpretaría un observador puede describirse como dos paredes transversales, una anterior y otra posterior al vacío y un vacío intermedio más pronunciado entre la dos paredes transversales. El observador podría no interpretar la observación como un vacío esférico con una pared regular a todo el borde del vacío, sino como una estructura mucho más irregular.

Ahora bien, la utilización de la ecuación 5.19 nos obliga a considerar zonas lineales en el contraste de densidad. De hecho, el resultado de la figura 5.6 no corresponde estrictamente a un régimen lineal, pero se han elegido esos parámetros con el fin de "exagerar" la apariencia de los efectos para que éstos resulten más evidentes. De haber utilizados un modelo devacío estrictamente en el régimen lineal el resultado no es muy diferente, dada la escasa importancia de los efectos no lineales en el caso de un vacío.



**Fig. 5.6** Distorsión del contraste de densidad para un modelo de vacío en escalón caracterizado por los parámetros ( $r_1=12$  Mpc,  $r_2=16$  Mpc,  $\delta_1=-0.2$ ,  $\delta_2=0.1$ ): (a) contraste de densidad real, (b) contraste de densidad observado.



**Fig. 5.7** Análisis de los efectos de no linealidad en el campo de velocidades peculiares sobre la distribución aparente de galaxias en el entorno de un vacío cosmológico, caracterizado por los parámetros  $r_1 = 12$  Mpc,  $r_2 = 16$  Mpc,  $\delta_1 = -1.0$ ,  $\delta_2 = 0.4$  (es decir, se trata de un vacío absoluto interior). La figura (a) representa la distribución real de galaxias considerada. La figura (b) muestra la distribución observada aplicando la teoría lineal para describir los efectos de velocidades peculiares sobre el redshift. La figura (c) muestra la distribución observada aplicando las fórmulas correctas (teoría no lineal) para describir los efectos de velocidades peculiares en las regiones de contraste de densidad próximo o superior a la unidad.



### Distorsión en la apariencia observacional de un vacío

La consideración de las fórmulas apropiadas para describir el régimen no lineal nos permite analizar los efectos distorsionantes sobre la observación de la estructura del propio vacío.

Si bien en el caso de un vacío el campo de velocidades peculiares generado por la perturbación de densidad es mucho más pequeño que el campo de velocidades generado por un cúmulo de galaxias, y por lo tanto los efectos no lineales no llegan a ser tan importantes como en el caso de cúmulos, la descripción no lineal es en todo caso más adecuada para contrastes de densidad que no puedan considerarse estrictamente lineales.

La figura 5.7c ilustra los efectos de tratar el campo de velocidades peculiares de acuerdo con la formulación no lineal, en comparación con el resultado obtenido mediante la aplicación de las fórmulas linealizadas (5.7b), para el caso de un vacío cosmológico esférico (5.7a).

Como puede verse, aunque la variación no es tan notable como en el caso de cúmulos, particularmente interesante en el caso de vacíos son las anisotropías introducidas en la distribución radial, dando lugar a variaciones en la esfericidad, así como a variaciones en el contraste de densidad aparente en la capa que rodea el vacío, lo que tiene consecuencias observacionales importantes.

El aspecto fundamental es en todo caso la falsa estimación de la densidad en la capa que rodea el vacío que obtendría el observador al interpretar directamente las observaciones redshift-ángulo, así como ligeras desviaciones en la forma y tamaño del vacío interior.

Un aspecto interesante a comentar en el caso de vacíos no estrictos (con  $\delta \neq -1$  en la región interior) es la notable influencia del término  $(1+\delta)^{-1}$ . En efecto, para  $\delta > 0$  este término tiende a reducir la velocidad peculiar que se calcularía aplicando la fórmula lineal, pero para  $\delta < 0$  el efecto es justamente el contrario, amplificando la velocidad que daría una aproximación lineal. Este efecto no se aprecia en la figura debido a que se ha tomado  $\delta_1 = -1$ , y además un modelo en escalón. Los efectos del término  $(1+\delta)^{-1}$  serían más evidentes en el caso de modelizar un vacío como una función continua en la densidad radial, donde el "vacío" interior no sea un vacío estricto. La aparente divergencia para  $\delta = -1$  no es tal, pues en este caso no hay materia en el vacío, y la velocidad peculiar es nula en tales regiones.

## 5.2 LA ONDA PLANA COMO MODELO ELEMENTAL DE ESTRUCTURA A GRAN ESCALA

Como una alternativa a la modelización de un universo inhomogéneo como un continuo homogéneo sobre el que se distribuyen cúmulos locales de acuerdo con alguna ley de distribución, podemos considerar el caso de una onda plana, como modelo genérico de estructura a gran escala.

La onda plana no es una perturbación localizada, sino que se extiende por todo el espacio, con lo que representa realmente una "estructura a gran escala". Por otra parte, una elección adecuada de la amplitud y la fase de la onda plana permite simular múltiples estructuras mediante un mismo modelo matemático relativamente simple.

Por supuesto, la consideración de una única onda plana aislada en el espacio no representa ningún modelo realista de perturbación, pero mediante la superposición de múltiples ondas planas pueden reconstruirse modelos de perturbación auténticamente realistas. De hecho, el caso extremo de considerar un número muy alto de ondas planas (que ya hemos considerado siguiendo técnicas basadas en el análisis de Fourier) permite estudiar cualquier tipo genérico de perturbación. En cualquier caso, el análisis detallado de una única onda plana es una vía para entender la fenomenología general de tales distorsiones observacionales.

Consideremos, pues, que el contraste de densidad viene dado por una relación del tipo

$$\delta(\vec{r}) = \delta_0 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad [5.42]$$

Teniendo en cuenta la relación general para las perturbaciones lineales a la métrica de Einstein-de Sitter estudiadas en el Capítulo 2, y en particular la ecuación

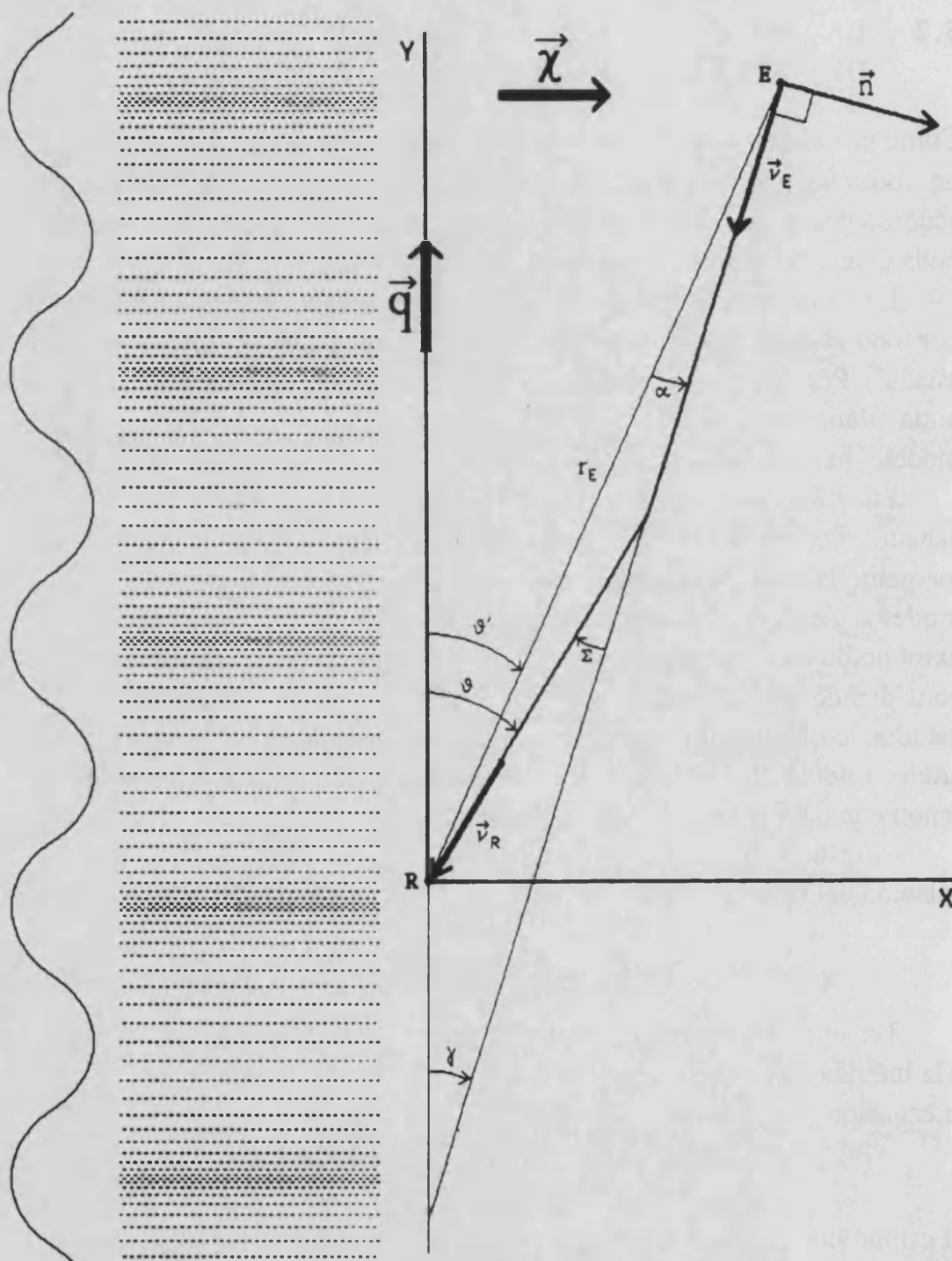
$$\Delta B(\vec{r}) = -20 \delta(\vec{r}) \quad [5.43]$$

el campo  $B(\vec{r})$  viene determinado en este caso por

$$B(\vec{r}) = \frac{20 \delta_0}{q^2} \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad [5.44]$$

(donde  $q^2 = \delta_{ij} q^i q^j$ )

y sus derivadas son



**Fig. 5.8** Configuración geométrica considerada en el estudio de las trayectorias luminosas en el campo de densidad correspondiente a una onda plana.

$$B_{,i}(\vec{r}) = -\frac{20 \delta_0}{q^2} q^i \sin(\vec{q} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad [5.45]$$

$$B_{,ij}(\vec{r}) = -\frac{20 \delta_0}{q^2} q^i q^j \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad [5.46]$$

Elegimos un sistema de coordenadas con origen en el observador ( $\vec{r}_R = 0$ ), de modo que utilizamos como coordenadas que definen el punto emisor  $\vec{r}_E = (r_E, \vartheta')$ , donde  $\vartheta'$  es el ángulo formado por  $\vec{r}_E$  y el vector de la onda  $\vec{q}$ . Por simplicidad consideramos el vector  $\vec{q}$  paralelo al eje Y (ver figura 5.8).

Algunas relaciones geométricas de interés, para el sistema de coordenadas elegido, son las siguientes

$$\vec{q} \cdot \vec{v}_E = -q \cos \gamma \quad [5.47]$$

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = -q \sin \gamma \quad [5.48]$$

A la hora de interpretar el comportamiento de la onda plana en las coordenadas utilizadas, es preciso tener en cuenta que el vector de onda  $q$  caracteriza el tamaño típico de las estructuras descritas por los parámetros de la onda plana,  $q \approx 2\pi/x$ , siendo  $x$  la distancia entre dos crestas consecutivas (tamaño típico de las estructuras).

La métrica espacio-temporal viene dada en este caso por

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) [\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}] dx^\alpha dx^\beta = \\ &= a^2(\eta) [-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j] \end{aligned} \quad [5.49]$$

donde

$$h_{ij} = B \delta_{ij} + \frac{\eta^2}{10} B_{,ij} = \frac{20 \delta_0}{q^2} (\delta_{ij} - \frac{\eta^2}{10} q_i q_j) \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad [5.50]$$

$$h_{00} = h_{0i} = 0$$

El vector tangente a las geodésicas nulas en el punto de emisión lo denotamos  $\vec{v}_E$  (siguiendo la misma notación que en el caso de simetría esférica) y el vector tangente en el punto de llegada (observador) viene dado por

$$\vec{k}_R^* = \vec{v}_E + {}_1\vec{k}_R^* \quad [5.51]$$

donde  ${}_1\vec{k}_R^*$  viene dado por una expresión del tipo

$${}_1\vec{k}_R^* = A(\vec{q}) \vec{q} + B(\vec{q}) \vec{v}_E \quad [5.52]$$

siendo

$$A(\vec{q}) = \frac{\delta_o}{q^2} \left[ \frac{12}{(\vec{q} \cdot \vec{v}_E)} \left( \cos(\vec{q} \cdot (\vec{r}_E + w_R \vec{v}_E) + \varphi) - \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) \right) - \right. \\ \left. - 2 \left( \eta_E \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right) \cdot (\vec{q} \cdot \vec{v}_E) \left( \eta_E^2 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) \right] \quad [5.53]$$

$$B(\vec{q}) = \frac{20\delta_o}{q^2} \left( \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) \quad [5.54]$$

Siguiendo este esquema de cálculo pueden determinarse todas las magnitudes que intervienen en el formalismo, de un modo análogo al seguido para el caso de perturbaciones con simetría esférica.

A partir de la figura 5.8 puede deducirse la siguiente relación angular

$$\vartheta(\alpha) = \vartheta' + \Sigma(\alpha) - \alpha \quad [5.55]$$

o bien, teniendo en cuenta que  $\gamma = \vartheta' - \alpha$ , la expresión equivalente

$$\vartheta(\gamma) = \gamma + \Sigma(\gamma) \quad [5.56]$$

Esta ecuación viene a representar el papel de "ecuación de la lente" en este caso, siendo el "ángulo de deflexión" definido del modo

$$\Sigma = - {}_1\vec{k}_R^* \cdot \vec{n} \quad [5.57]$$

donde  $\vec{v}_E$  es el vector unitario en la dirección de salida del rayo luminoso desde la fuente y  $\vec{n}$  un vector unitario perpendicular a  $\vec{v}_E$ .

Sustituyendo la expresión de  ${}_1\vec{k}_R^*$  en este caso, y operando resulta

$$\Sigma = \frac{\delta_o \sin(\vartheta' - \alpha)}{q} \left[ \frac{12}{q \cos(\vartheta' - \alpha)} \left( \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + q \cos(\vartheta' - \alpha) \left( \eta_E^2 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) - \\
 & - 2 \left( \eta_E \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right) \quad ] \quad [5.58]
 \end{aligned}$$

expresión que desarrollada en función del ángulo  $\gamma$  resulta

$$\begin{aligned}
 \Sigma(\gamma) = \delta_o \tan \gamma \left[ \frac{1}{q^2} \left( \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) + \right. \\
 \left. + \cos^2 \gamma \left( \eta_E^2 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) - \right. \\
 \left. - \frac{2 \cos \gamma}{q} \left( \eta_E \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right) \right] \quad [5.59]
 \end{aligned}$$

Para hallar una relación entre los ángulos  $\vartheta$  y  $\gamma$  es preciso recurrir al cálculo explícito de las trayectorias geodésicas mediante integración del vector tangente a la geodésica en cada punto, siguiendo el procedimiento de cálculo aplicado en el caso general en el Capítulo 3.

Evidentemente, el ángulo  $\vartheta$  es un parámetro utilizado para el cálculo pero no corresponde al ángulo físico con el cual es observada la señal luminosa a su llegada al observador. Para determinar tal ángulo de observación vamos a introducir el vector  $\vec{u}_q$  como un vector unitario en la dirección del vector de la onda  $\vec{q}$ . Para ello definimos el cuadrivector  $\xi$  que tendrá componentes  $\xi = (0, \vec{q})$ . Definimos además el cuadrivector  $k_R$ , del modo  $k_R = (0, \vec{k}_R)$ . El ángulo (real) entre los vectores  $\vec{q}$  y  $\vec{k}_R$  viene dado por

$$\cos \hat{\vartheta} = - \frac{(\xi, k_R)}{\|\xi\| \|k_R\|} \quad [5.60]$$

con lo que el ángulo físico de observación viene dado finalmente por la siguiente relación

$$\hat{\vartheta} = \cos^{-1} \left[ \cos \vartheta \left( 1 - \delta_o \cos \varphi \sin^2 \vartheta \right) \right] \quad [5.61]$$

Al igual que en el caso de simetría esférica, las relaciones establecidas permiten obtener una solución linealizada de la ecuación de la lente, y el ángulo físico de observación  $\hat{\vartheta}$  viene dado en este caso por

$$\hat{\vartheta} = \vartheta' + G^{(1)}(r_E, \vartheta') \quad [5.62]$$

siendo

$$\begin{aligned} G^{(1)}(r_E, \vartheta') = & \frac{\delta_o \sin \vartheta'}{q} \left[ \left( \frac{(1 - r_E)^2}{r_E} + \frac{12}{q^2 r_E \cos^2 \vartheta'} \right) \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \right. \\ & - \left( \frac{(1 - 2r_E)}{r_E} + \frac{12}{q^2 r_E \cos^2 \vartheta'} \right) \sin \varphi - \\ & \left. - \frac{12}{q \cos \vartheta'} \cos \varphi \right] \quad [5.63] \end{aligned}$$

(donde  $\vec{q} \cdot \vec{r}_E = q r_E \cos \vartheta'$ ).

Como puede verse, en esta expresión todos los términos que contribuyen a la perturbación de la coordenada angular  $\vartheta'$  son inversamente proporcionales al módulo del vector de onda  $q$ , el cual es a su vez inversamente proporcional a la escala de tamaño típico de las estructuras. La perturbación a la coordenada angular será, pues, tanto mayor cuanto mayor sea el tamaño típico de tales estructuras, siendo prácticamente despreciable en el caso de estructuras muy pequeñas.

En el caso de la onda plana, la coordenada radial de emisión observada  $\hat{r}_E$ , relacionada directamente con el redshift medido, viene dada, en términos de la variable  $r_E$  (coordenada radial comóvil), por la siguiente relación, análoga a la deducida para el caso de simetría esférica

$$\hat{r}_E = r_E + P + \frac{1}{2} (1 - r_E) f(r_E, \vartheta') \quad [5.64]$$

siendo en este caso

$$f(r_E, \vartheta') = \frac{2 \delta_o}{q^2} \left( \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) - \frac{2 \delta_o \cos \vartheta'}{q} \left( \eta_E \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right) \quad [5.65]$$

y el retraso temporal (P) viene dado por

$$P(r_E, \vartheta') = \left[ \frac{12}{q^3 \cos \vartheta'} - \frac{(1 - r_E)^2 \cos \vartheta'}{q} \right] \delta_o \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) + \frac{2 \delta_o}{q^2} \left( \eta_E \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right) + \left[ \frac{\cos \vartheta'}{q} - \frac{12}{q^3 \cos \vartheta'} \right] \delta_o \sin \varphi \quad [5.66]$$

de modo que

$$\hat{r}_E = r_E + F^{(1)}(r_E, \vartheta') \quad [5.67]$$

siendo

$$F^{(1)}(r_E, \vartheta') = \left[ \frac{\delta_o}{q^2} \left( 3(1 - r_E) \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - (3 - r_E) \cos \varphi \right) - \frac{12 \delta_o}{q^3 \cos \vartheta'} \left( \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right) + \frac{\delta_o \cos \vartheta'}{q} \left( 2(1 - r_E)^2 \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - (2 - r_E) \sin \varphi \right) \right] \quad [5.68]$$

donde  $\hat{r}_E$  es la coordenada radial de emisión efectivamente "observada" como consecuencia de tales efectos de redshift, incluyendo aquellos debidos al retraso temporal.

Es preciso señalar que la relación entre las coordenadas comóviles reales  $(r_E, \vartheta')$  y las deducidas directamente de las observaciones  $(\hat{r}_E, \hat{\vartheta})$  reproduce los resultados obtenidos en el Capítulo 3 de modo general para



cualquier tipo de inhomogeneidad. La descripción aquí aplicada al caso de la onda plana lo que hace es recuperar tales resultados siguiendo el formalismo matemático tradicionalmente aplicado para describir los efectos en un contexto de deflexión de las trayectorias luminosas por inhomogeneidades, análogo al aplicado en la descripción del caso de simetría esférica.

De este modo pueden determinarse las coordenadas comóviles de una fuente luminosa en el campo de densidad de una onda plana sin más que aplicar el formalismo de cálculo desarrollado en el Capítulo 3.

Cabe hacer algunas consideraciones de tipo analítico para ilustrar mejor la relación entre las coordenadas comóviles reales y los observables, para luego realizar simulaciones numéricas que permitan visualizar gráficamente tales efectos.

En primer lugar, una onda plana puede desarrollarse en serie del modo

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_{L=0}^{\infty} i^{L(2L+1)} j_L(qr_E) P_L(\cos\vartheta') \quad [5.69]$$

donde  $j_L(qr_E)$  son las funciones esféricas de Bessel,  $P_L(\cos\vartheta')$  son los polinomios de Legendre y  $\vartheta'$  el ángulo formado por los vectores  $\vec{q}$  y  $\vec{r}_E$ .

Expresando las observaciones  $(\hat{r}_E, \hat{\vartheta})$  del modo

Expresando las observaciones  $(\hat{r}_E, \hat{\vartheta})$  del modo [5.70]

$$\hat{r}_E = r_E + F^{(1)}(r_E, \vartheta') \quad [5.71]$$

se tiene  $\hat{\vartheta} = \vartheta' + G^{(1)}(r_E, \vartheta')$

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_{L=0}^{\infty} i^{L(2L+1)} j_L(q\hat{r}_E) P_L(\cos\hat{\vartheta}) \quad [5.72]$$

Puesto que

$$P_L(x) = 2^{-L} \sum_{n=0}^{[L/2]} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2L-2n)!}{(L-n)!(L-2n)!} x^{L-2n} \quad [5.73]$$

(donde  $[L/2]$  representa la parte entera de  $L/2$ ), y

$$j_L(x) = x^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (2L+2n+1)!!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \quad [5.74]$$

resulta, teniendo en cuenta la propiedad general

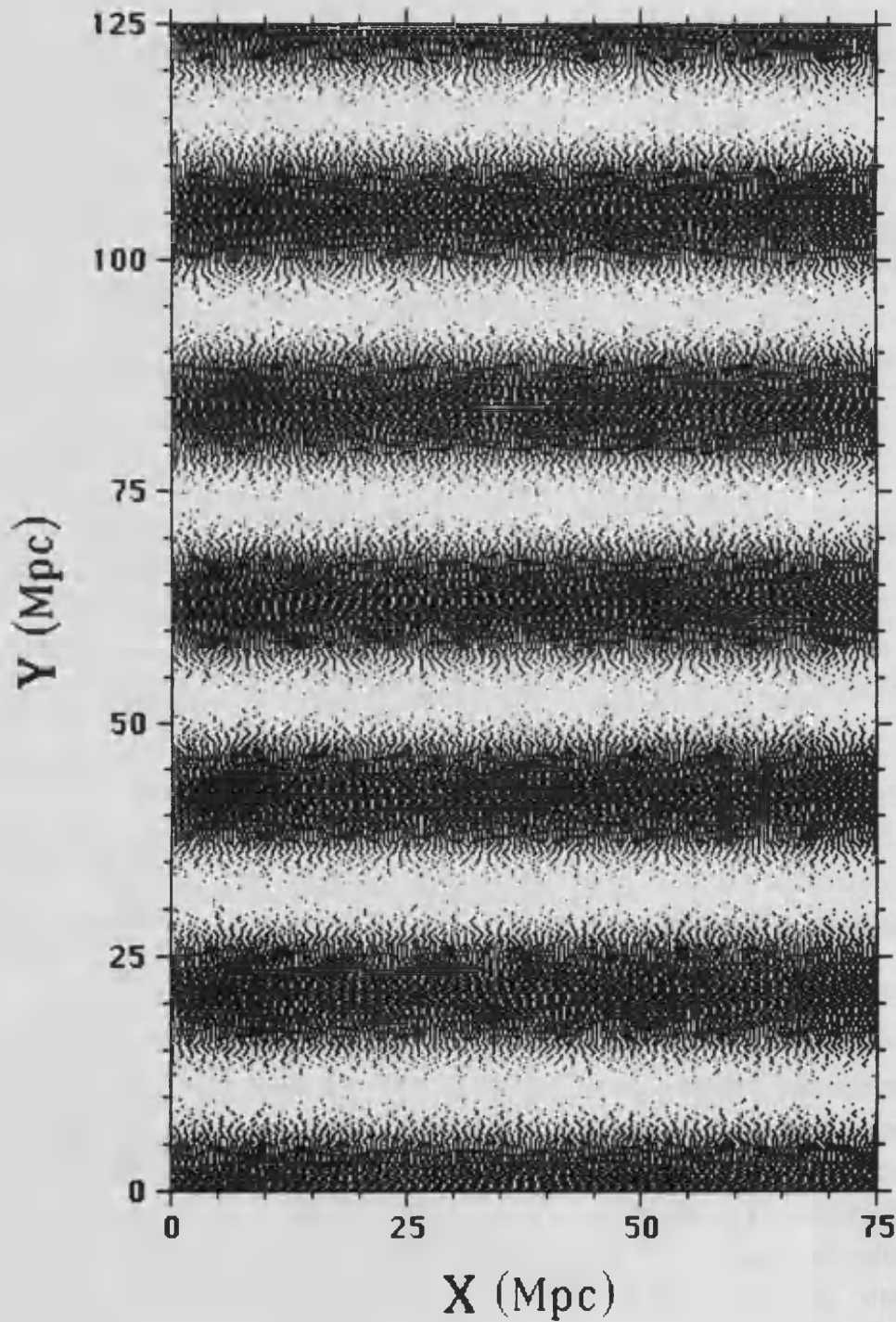
$$(a + \epsilon)^n \approx a^n + n a^{n-1} \epsilon \quad (\text{para } \epsilon \ll 1), \quad [5.75]$$

la siguiente expresión para la onda plana observada en coordenadas comóviles

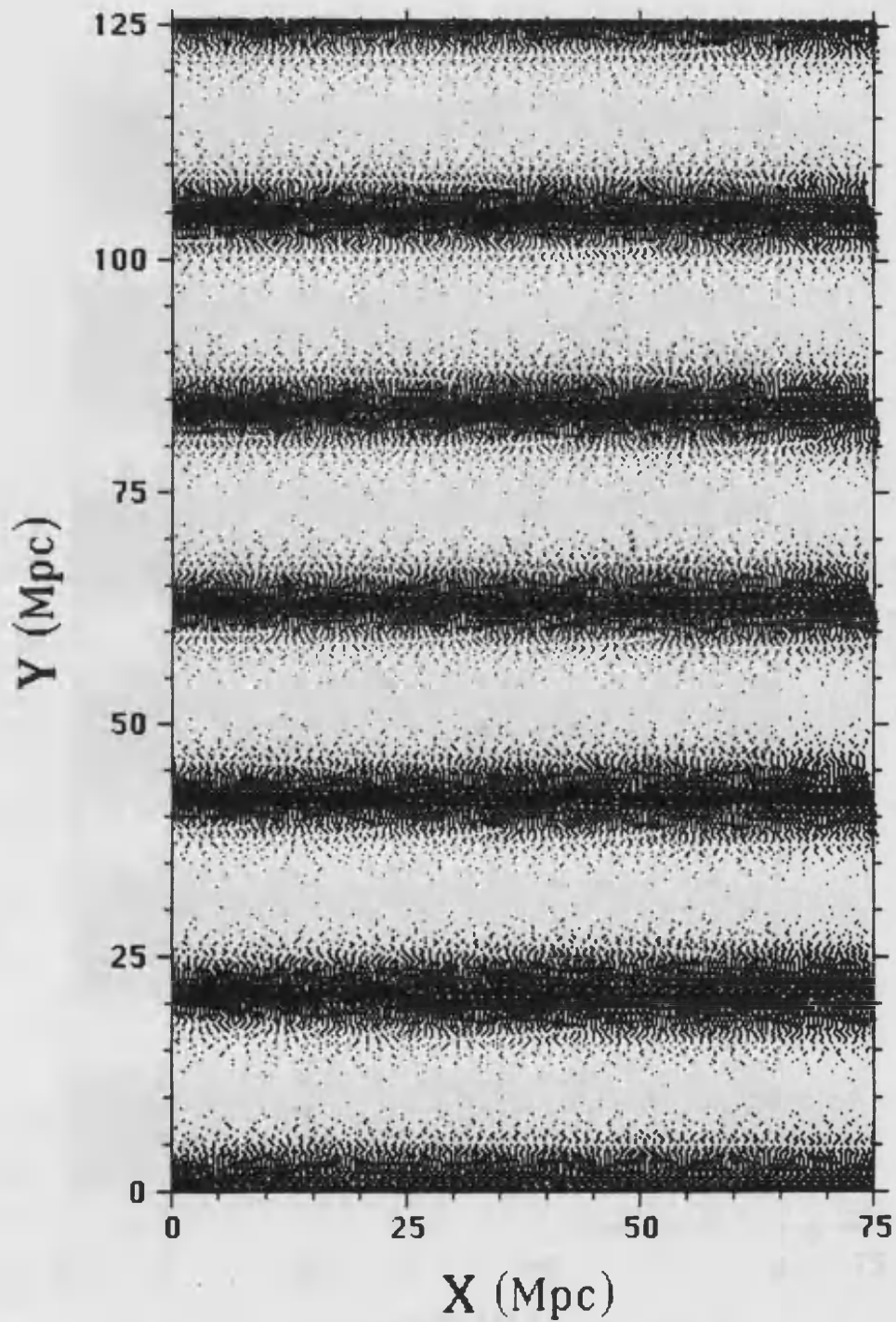
$$\begin{aligned} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} &= e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} + \frac{F^{(1)}}{r_E} \sum_{L=0}^{\infty} i^{L(2L+1)} \left[ L j_L(q r_E) + \right. \\ &+ 2(q r_E)^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)! (2L+2n+1)!!} \left. \left(\frac{(q r_E)^2}{2}\right)^n \right] P_L(\cos \vartheta') - \\ &- G^{(1)} \sin \vartheta' \sum_{L=0}^{\infty} i^{L-2L} (2L+1) j_L(q r_E) \sum_{n=0}^{[L/2]} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2L-2n)! (\cos \vartheta')^{L-2n-1}}{(L-n)! (L-2n-1)!} \end{aligned} \quad [5.76]$$

Esta expresión es útil a efectos de análisis semianalítico de las consecuencias de tales distorsiones en la estadística de galaxias, particularmente cuando la distribución de galaxias es expresada como un desarrollo en serie de ondas planas.

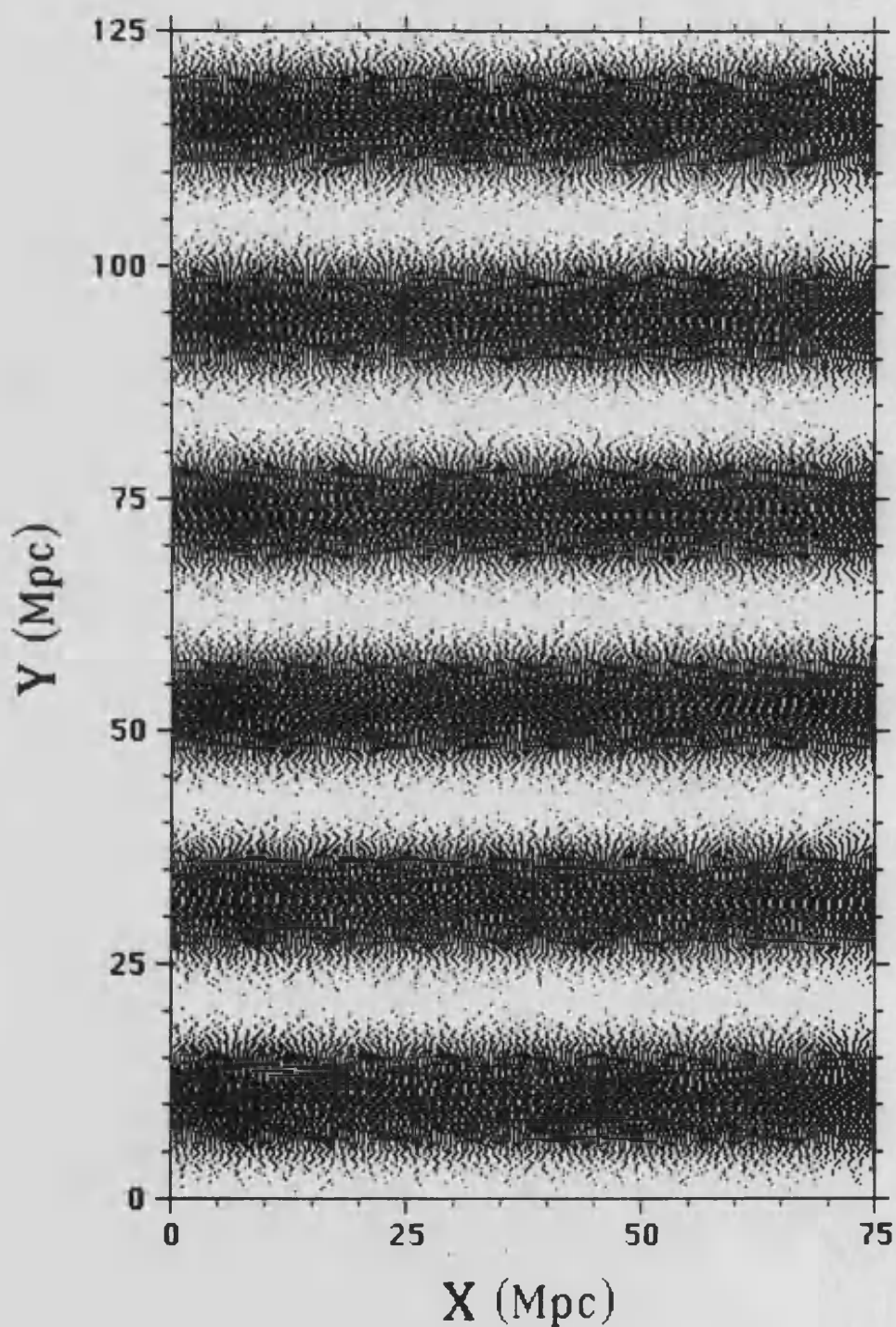
Los efectos sobre los observables  $(\hat{r}_E, \hat{\vartheta})$  en función de las coordenadas comóviles reales  $(r_E, \vartheta')$  quedan ilustrados en las figuras 5.9 y 5.10, donde se representa dicha alteración de las coordenadas comóviles para dos casos genéricos: observador sobre una cresta (máximo) y sobre un valle (mínimo) del contraste de densidad, como las dos situaciones extremas que pueden considerarse. Tales figuras se han realizado mediante simulaciones sobre una nube de puntos que reconstruye la forma de la perturbación, para un contraste de densidad real dado, y generando lo que sería la distribución observada resultante en cada caso.



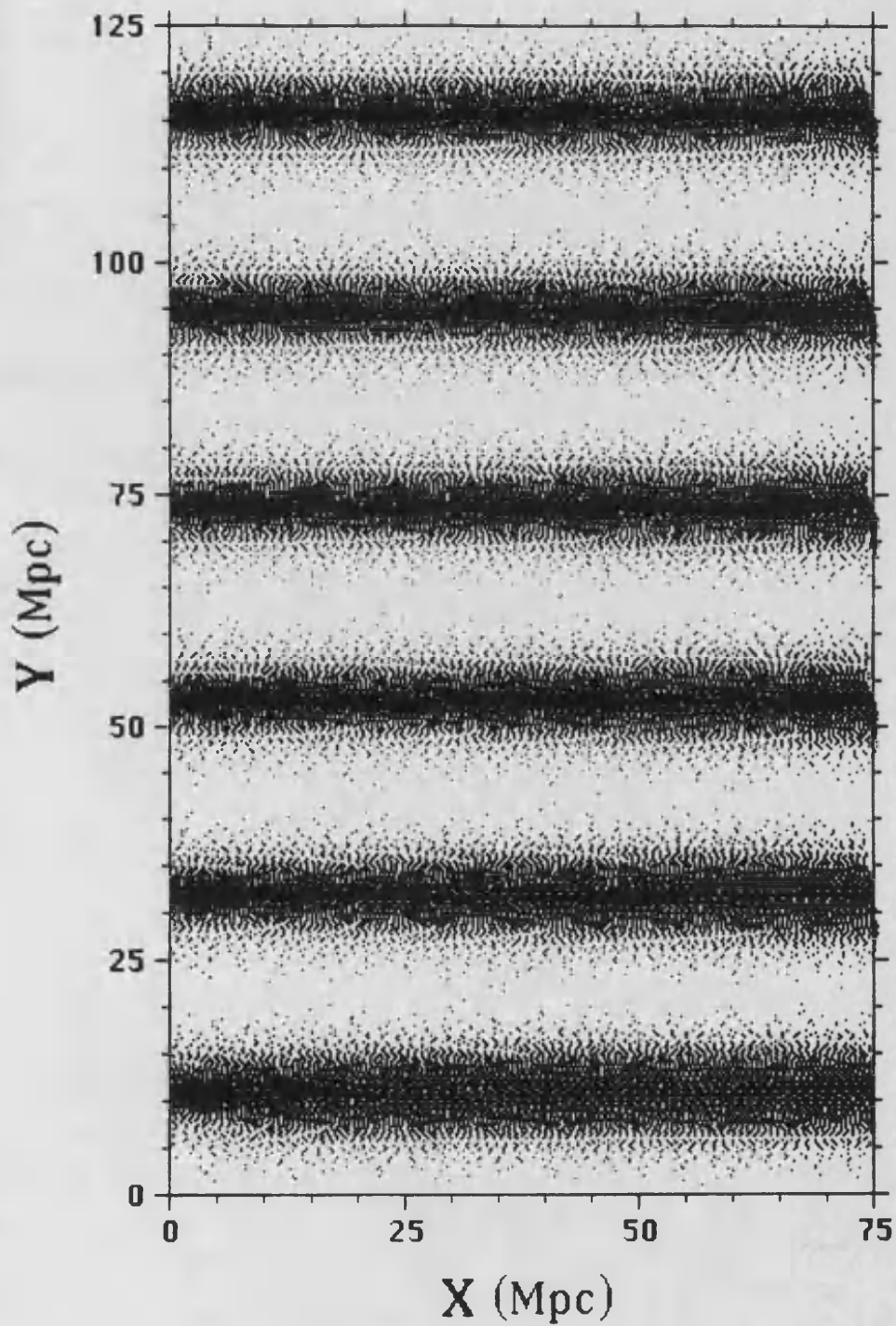
**Fig. 5.9a** Distribución correspondiente a la densidad real definida por el contraste dado por una onda plana. Observador situado en una cresta del contraste de densidad ( $\delta = \text{máximo}$ ).



**Fig. 5.9b** Distribución observada teniendo en cuenta ambos efectos angulares y de redshift, en coordenadas comóviles. Observador situado en una cresta del contraste de densidad ( $\delta = \text{máximo}$ )



**Fig.5.10a** Distribución correspondiente a la densidad real definida por el contraste dado por una onda plana. Observador situado en un valle del contraste de densidad ( $\delta = \text{mínimo}$ ).



**Fig. 5.10b** Distribución observada teniendo en cuenta ambos efectos angulares y de redshift, en coordenadas comóviles. Observador situado en un valle del contraste de densidad ( $\delta = \text{mínimo}$ ).

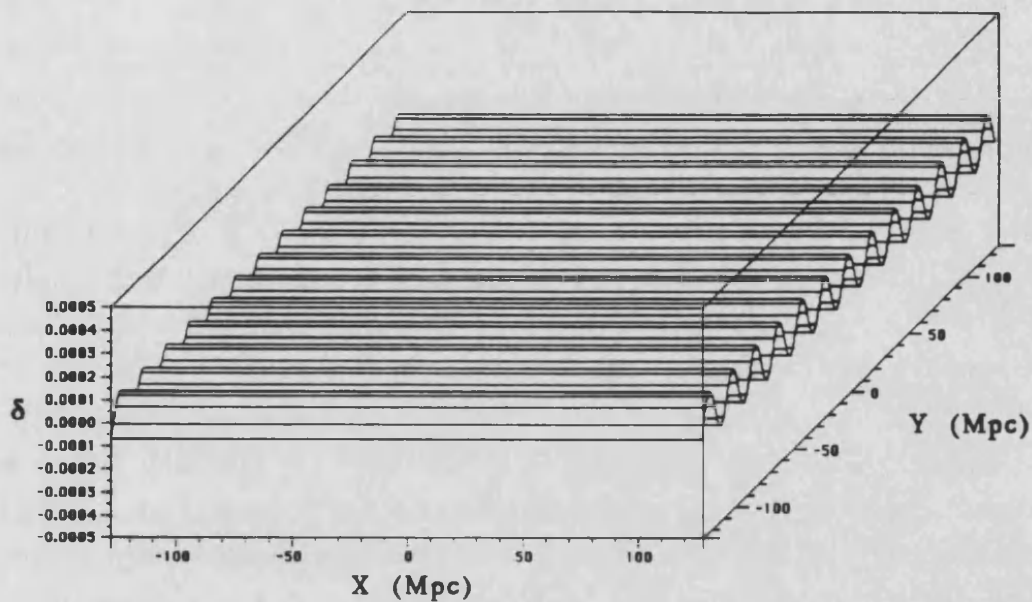
Los casos representados corresponden a una onda plana caracterizada por los parámetros  $\delta_0 = 0.4^1$ ,  $q = 0.3$  (estructuras de tamaño típico = 21 Mpc), para diferentes posiciones del observador en la onda (es decir, por diferentes valores de la fase  $\varphi$  en el sistema de coordenadas elegido). La posición del observador resulta importante en este caso, pues como la onda plana se extiende en principio por todo el espacio, las posiciones de las fuentes no presentan ningún tipo de simetría privilegiada, siendo especialmente determinante sólo la posición del observador. De todos modos, como puede deducirse de las figuras, la posición del observador no resulta de gran importancia en este caso, repercutiendo sólo en un entorno local del mismo, y siendo el efecto global sobre la distribución resultante cualitativamente independiente de la posición del observador.

El contraste de densidad observado viene dado en este caso, en función del contraste de densidad real, por

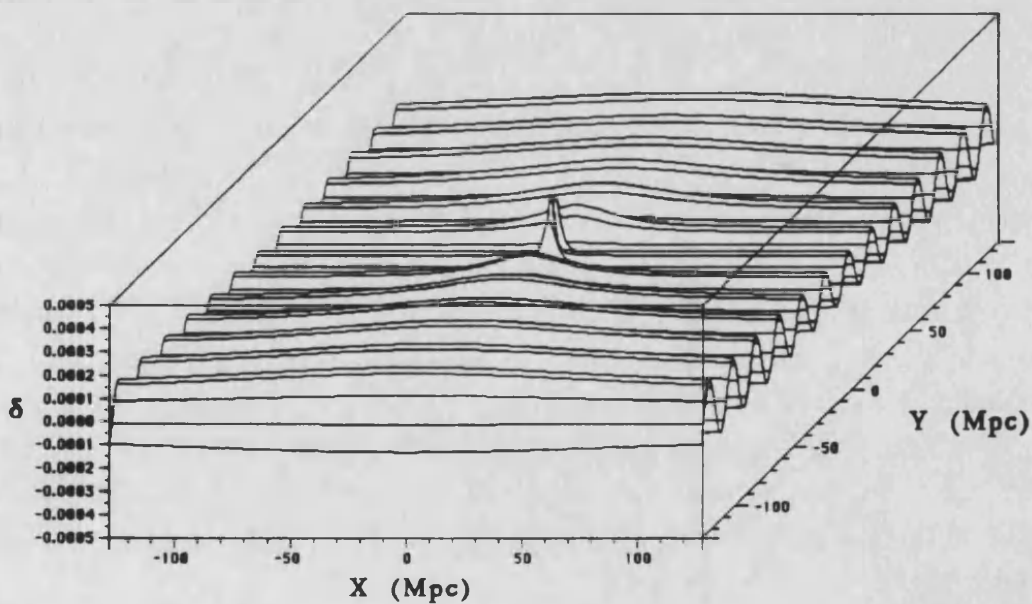
$$\begin{aligned} \delta_E = \delta_0 & \left[ \left( 1 + \eta_E^2 \cos^2 \vartheta' \right) \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) + \right. \\ & + \frac{2 \cos \vartheta'}{q r_E} \left[ \eta_E^2 \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right] + \\ & + \frac{\cos \vartheta'}{q} \left[ (1 - 2 \eta_E) \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - (1 + 12 r_E) \sin \varphi \right] - \\ & - \frac{6}{q^2 r_E} \left[ \eta_E \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \cos \varphi \right] + \\ & \left. + \frac{30}{q^2} \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \frac{48}{q^3 r_E \cos \vartheta'} \left( \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi) - \sin \varphi \right) \right] \end{aligned} \quad [5.77]$$

Esta expresión conduce a un resultado de gran importancia, principalmente por la notable influencia que el segundo término, proporcional a  $\sin(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi)$  va a tener, sobre todo para  $r_E < q$ , dado que

<sup>1</sup> Con el fin de que los efectos sean apreciables en las figuras, la nube de puntos considerada no corresponde realmente a un contraste lineal, dado el elevado valor de  $\delta_0$ , pero como el contraste y las distorsiones son directamente proporcionales a  $\delta_0$ , esta representación lo que hace es simplemente multiplicar el efecto por un factor constante respecto a lo que sería el régimen puramente lineal.



(a) Contraste de densidad real



(b) Contraste de densidad observado

Fig. 5.11 Distorsión observacional en el contraste de densidad aparente de una distribución de materia modelizada como una onda plana con  $\lambda = 20$  Mpc y  $\varphi = 0$ . De este modo, el observador se halla sobre una cresta del contraste de densidad.



en este caso llega a contrarrestar los términos proporcionales al contraste real (términos que van como  $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_E + \varphi)$ ), produciendo como resultado un cambio en la fase de la distribución del contraste de densidad observado, lo que tiene importantes repercusiones sobre la apariencia de las estructuras incluso en el régimen lineal.

La figura 5.11 muestra el contraste de densidad real y el contraste de densidad observado para un caso particular de onda plana, que resulta genérico. La distorsión dominante es un cambio en la amplitud del contraste de densidad, que resulta modulada por el ángulo entre el vector de onda  $\vec{q}$  y la dirección radial de visión de cada punto de la onda plana, desde el punto ocupado por el observador. Las distorsiones son mayores en el entorno del observador, mientras que lejos del observador queda simplemente un efecto de un factor 2 entre el contraste observado y el real, en la dirección del vector de onda  $\vec{q}$  ( $\vartheta'=0$ ), con una modulación proporcional a  $(1 + \cos^2 \vartheta')$  a medida que nos alejamos de la dirección dada por  $\vec{q}$ . En el entorno más próximo del observador las distorsiones son más complejas, siendo dominantes los efectos de la superposición de los términos con la fase en seno y con la fase en coseno.

Con el fin de entender mejor tales efectos, resulta interesante discutir el problema en la dirección del vector de onda  $\vec{q}$ , es decir, haciendo  $\vartheta'=0$  en todos los desarrollos. El resultado aparece ilustrado en las figuras 5.12 (para un observador en un máximo del contraste) y 5.13 (para un observador en un mínimo del contraste de densidad). Se representan en tales figuras el contraste de densidad real y el observado. Como puede verse, sólo para escalas del orden del tamaño de la longitud de onda, y en la zona más próxima al observador, es donde las distorsiones son más notables. Para las zonas más alejadas del observador, resulta simplemente  $\delta^{\text{obs}} = 2\delta^{\text{real}}$ , como corresponde a dicha dirección  $\vartheta'=0$ , incluso en la descripción tradicional de tales efectos de distorsión, donde sólo se tienen en cuenta los efectos dominantes en el redshift.

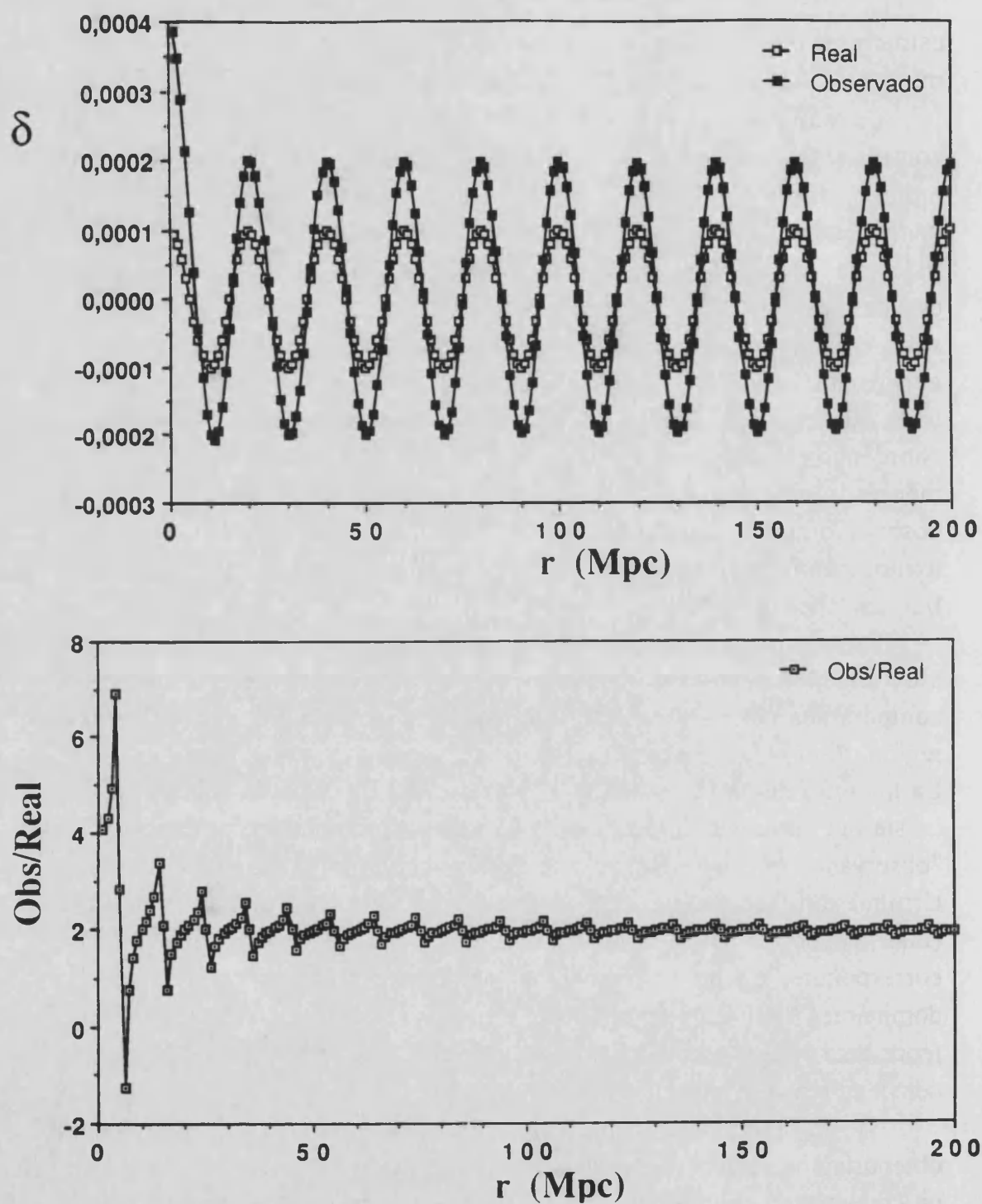
Según se deduce de las figuras 5.12 y 5.13, la posición del observador es crítica en el entorno más próximo del mismo (téngase en cuenta que en dicha figura se han representado los dos casos extremos posibles, situando el observador sobre un máximo y un mínimo del contraste, respectivamente), pero dicha posición parece tener poca repercusión sobre la observación de

estructuras a escalas superiores a la longitud de onda, ya que se obtiene el mismo resultado en los dos casos extremos considerados.

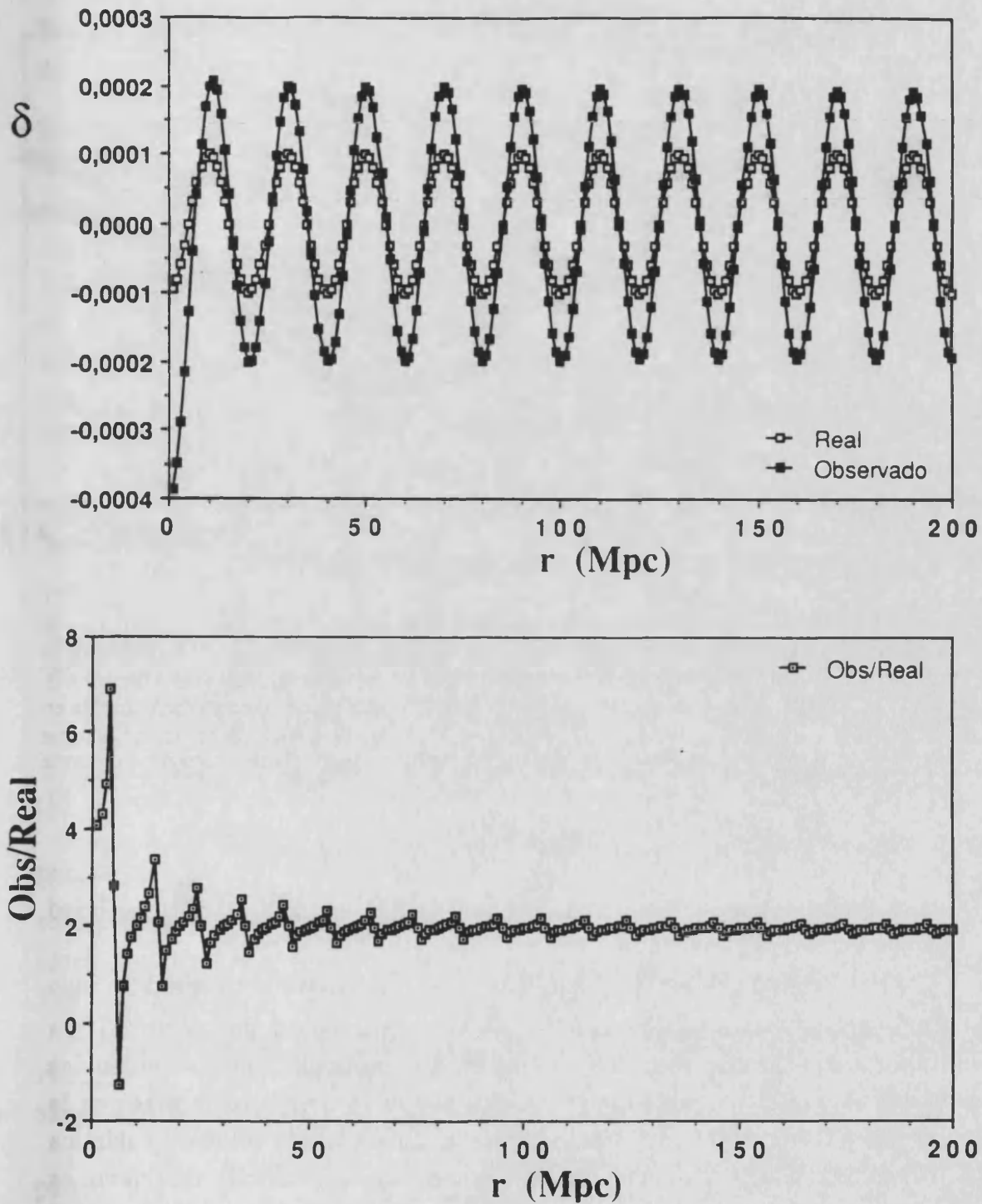
En ambos casos se ha representado también el cociente entre el contraste de densidad observado y el real, en función de la coordenada radial  $r$ . En la descripción tradicional de los efectos de redshift para una onda plana en la dirección  $\vartheta'=0$  dicho cociente debería ser constante ( $=2$ ) e independiente por lo tanto de la coordenada  $r$ . Pues bien, lo que resulta en este caso es que el cociente tiende efectivamente al valor 2 para valores de  $r$  suficientemente grandes (comparados con la longitud de onda de la perturbación), pero para valores más pequeños de  $r$  el cociente observado/real dista mucho del valor 2, siguiendo la ley de la tangente en la coordenada radial, amortiguada con un factor que debilita el efecto a medida que crece  $r$ . Para la posición del observador, el cociente observado/real es sistemáticamente 4, mientras crece con  $r$  en un primer tramo, para luego oscilar en torno al valor 2 decreciendo la amplitud de las fluctuaciones al crecer  $r$ .

Especialmente interesante es el análisis de un caso de longitud de onda muy larga, en cuyo caso pueden producirse distorsiones notables a escalas comparables con la longitud de onda de la perturbación, sobre toda la región observada. Un caso de este tipo aparece ilustrado en la figura 5.14. La longitud de onda es 200 Mpc, y el observador se halla situado en una cresta del contraste de densidad. La comparación de las curvas "real" y "observado" es ilustrativa del tipo de distorsión producida al considerar el término con fase en seno en combinación con el proporcional al contraste (fase coseno). Por comparación se representa también la curva correspondiente a la "aproximación" de considerar solamente los términos dominantes (derivadas segundas del campo B solamente). Tal aproximación representa en este caso simplemente un factor 2 con respecto al contraste de densidad real.

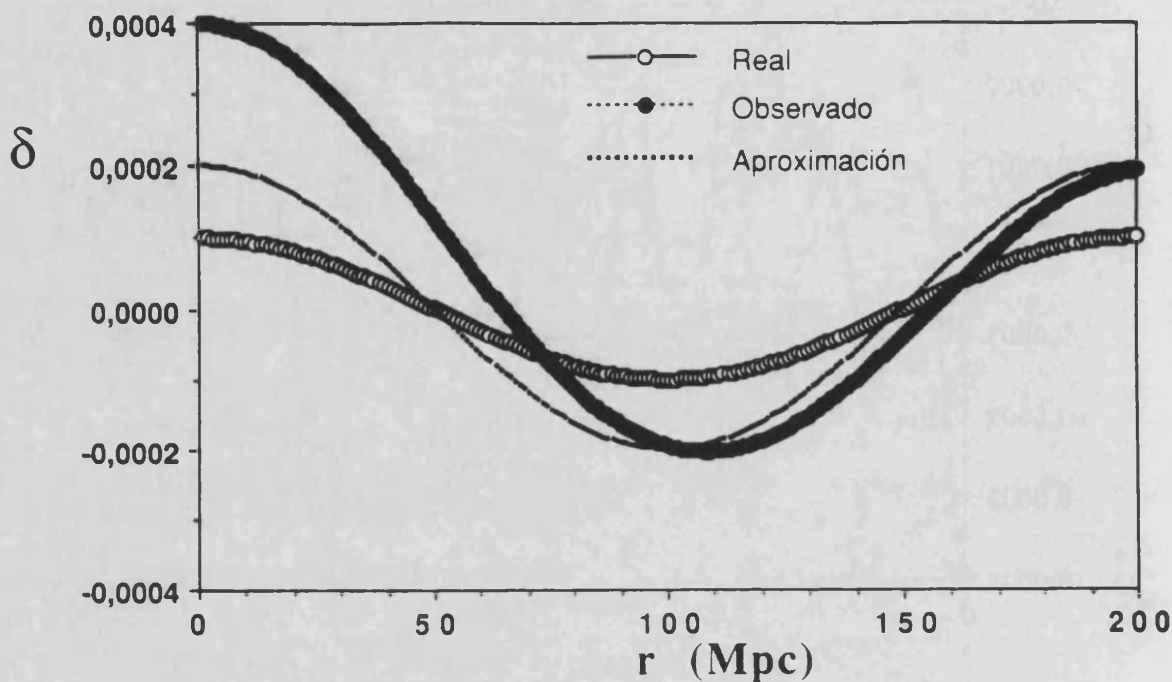
Si en este caso representásemos el cociente observado-real obtendríamos de nuevo —análogamente al caso de las figuras 5.12 y 5.13— un crecimiento radial del contraste de densidad, tomando el valor 4 para la posición del observador y creciendo sistemáticamente en el primer tramo, para luego caer bruscamente y subir de nuevo siguiendo la ley de la tangente para la longitud de onda de la perturbación. Lo interesante del hecho radica en que, para una longitud de onda larga, existe un tramo considerable de distancia radial en el cual el contraste de densidad observado es mayor al



**Fig. 5.12** (a) Distorsión del contraste de densidad para un modelo de onda plana, en la dirección del vector de onda ( $\vartheta'=0$ ) y con parámetros:  $\delta_0=0.0001$ ,  $\lambda=20$  Mpc,  $\varphi=0$  (observador en un máximo del contraste de densidad). (b) Cociente entre el contraste de densidad observado y el contraste de densidad real, en función de la distancia radial  $r$ , para el mismo caso de la figura (a).



**Fig. 5.13** (a) Distorsión del contraste de densidad para un modelo de onda plana, en la dirección del vector de onda ( $\vartheta' = 0$ ) y con parámetros:  $\delta_0 = 0.0001$ ,  $\lambda = 20$  Mpc,  $\varphi = \pi$  (observador en un mínimo del contraste de densidad). (b) Cociente entre el contraste de densidad observado y el contraste de densidad real, en función de la distancia radial  $r$ , para el mismo caso de la figura (a).



**Fig. 5.14** Distorsión del contraste de densidad para un modelo de onda plana, en la dirección del vector de onda ( $\vartheta'=0$ ) y con parámetros:  $\delta_0 = 0.0001$ ,  $\lambda = 200$  Mpc,  $\varphi = 0$ . Se indica además la curva correspondiente a la aproximación seguida tradicionalmente en la que sólo se tienen en cuenta los términos  $\ddot{B}$ , despreciando el resto de los términos, que sin embargo resultan significativos para observaciones a la escala de la longitud de onda de la perturbación.

valor real, aumentando sistemáticamente la diferencia con la profundidad (distancia radial).

Si bien esto sólo sería así para una sólo onda plana con longitud de onda muy larga, y este efecto es tal sólo en la dirección del vector  $\vec{q}$ , la importancia de este resultado radica en que coincide con las evidencias observacionales de aumento de la densidad de galaxias observadas con la distancia (o redshift), problema vinculado a efectos de evolución galáctica (el problema de las galaxias lejanas), pero que tal vez no todo este efecto es debido a efectos evolutivos, sino que parte de ese aumento de la densidad con la distancia podría estar ligado a efectos de distorsión observacional. La existencia de componentes en la densidad espectral con longitudes de onda superiores a los 200 Mpc podría dar lugar a efectos de este tipo. De este modo, sería necesaria una menor evolución de las estructuras para poder explicar la densidad observada.

### Descomposición de las perturbaciones en un sumatorio de ondas planas

En un modelo de universo realista, lo que se tiene no son perturbaciones esféricas aisladas sino un continuo de cúmulos, vacíos entre ellos, filamentos que entrelazan diferentes cúmulos, agrupaciones de cúmulos en grandes supercúmulos y otras estructuras. Una descripción realista de un universo inhomogéneo resulta prácticamente imposible, dado el desconocimiento que se tiene acerca de los detalles de dicha estructura inhomogénea y la dificultad matemática en modelizar un universo inhomogéneo. La descomposición de la perturbación en un sumatorio de ondas planas es un modo adecuado de modelizar inhomogéneas más realistas.

En este modelo, el campo de densidad puede describirse fácilmente en términos de sus componentes de Fourier. Asumiremos que el universo es periódico (al menos en un determinado volumen del mismo), de tal modo que los vectores de onda  $\vec{q}$  toman solamente valores discretos. Realizando la descomposición habitual en ondas planas independientes, el contraste de densidad puede entonces expresarse del modo

$$\delta(\vec{r}) = \sum_{\vec{q} \neq 0} \delta_o(\vec{q}) \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \Phi_{\vec{q}}) \quad [5.78]$$

(El valor  $\vec{q} = 0$  se excluye, pues el valor medio de  $\delta(\vec{r})$  se supone es cero).

El campo de densidad inicial se supone habitualmente como aleatorio gaussiano. Con esta hipótesis, las fases  $\Phi_{\vec{q}}$  de cada una de las componentes se extraen de una distribución aleatoria, mientras las amplitudes  $\delta_o(\vec{q})$  se extraen de una distribución de Rayleigh (Bardeen *et al.*, 1986; Couchman, 1987).

El problema de la superposición de efectos debidos a una combinación lineal de ondas planas puede ser de este modo planteado de un modo bastante simple, al menos en el caso lineal.

La idea básica consiste en expresar la métrica de Einstein-de Sitter perturbada del modo

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{q}_{(1)}) + h_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{q}_{(2)}) + h_{\alpha\beta}^{(3)}(\vec{q}_{(3)}) + \dots \quad [5.79]$$

donde

$$h_{o_o}^{(k)}(\vec{q}_{(k)}) = 0 \quad [5.80]$$

$$h_{oi}^{(k)}(\vec{q}(k)) = 0 \quad [5.81]$$

$$h_{ij}^{(k)}(\vec{q}(k)) = \frac{20 \delta_0}{q^2} \left( \delta_{ij} - \frac{\eta^2}{10} q_i q_j \right) \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad [5.82]$$

Es decir, se trata de expresar la métrica como un sumatorio de términos perturbativos cada uno de ellos correspondiente a una componente del desarrollo en ondas planas (caracterizado por el vector de onda  $\vec{q}$ ).

El vector tangente a las trayectorias luminosas ( $\vec{k}_R^*$ , y en concreto  ${}_1\vec{k}_R^*$ ) está adecuadamente descrito y definido unívocamente. De este modo, si consideramos no una única onda plana sino una superposición de ellas, podemos definir un vector  ${}_1\vec{k}_R^*$  efectivo para la superposición del modo

$${}_1\vec{k}_R^* = \sum_{q \neq 0} {}_1\vec{k}_R^*(\vec{q}) \quad [5.83]$$

donde dicho sumatorio ha de entenderse en sentido vectorial, ya que el vector  ${}_1\vec{k}_R^*$  recoge los efectos tridimensionales debidos a las deferentes direcciones de los vectores de onda  $\vec{q}$  de cada componente en el sumatorio.

Luego dado el vector de onda  $\vec{q}$  y el vector de salida de la señal luminosa desde la fuente  $\vec{v}_E$ , el problema queda completamente determinado, conociéndose el correspondiente  ${}_1\vec{k}_R^*(\vec{q})$  para cada onda  $\vec{q}$ , con lo que puede llevarse a cabo la superposición.

## Capítulo 6

### APLICACIONES AL ANALISIS Y CORRECCION DE CATALOGOS DE GALAXIAS

---

Las observaciones en cosmología están fuertemente condicionadas por la tecnología disponible y las limitaciones que imponen las propias características de tales observaciones. En cualquier caso, lo que parece comunmente aceptado es que sólo conocemos con cierto detalle aproximadamente un diez por ciento del universo observable, es decir, de la zona del universo que queda dentro de nuestro actual horizonte.

Limitándonos a la región del universo teóricamente accesible (con un radio de unos 6000 Mpc), cabe en principio suponer que la observación de dicha región no es sino un problema tecnológico. No existen restricciones físicas, y detectores suficientemente sensibles serían capaces de captar la luz procedente de las fuentes más lejanas. Desgraciadamente, tales condicionantes tecnológicos son realmente serios, y no se prevee que en un plazo relativamente corto pueda elaborarse un mapa tridimensional detallado de las estructuras en dicha zona. Realmente, sólo disponemos de un conocimiento bastante detallado de las estructuras en nuestro entorno más próximo (dentro de un radio de unos 150 Mpc).

Como, de acuerdo con lo visto en los capítulos anteriores, existen efectos de distorsión observacional directamente ligados a la escala de tamaños de las estructuras, será fundamental determinar cuál es el tamaño característico de las estructuras observadas, y como se correlacionan las distorsiones observacionales, el tamaño de las estructuras, y la escala de la observación.

En particular, resulta especialmente importante determinar qué condiciones ha de cumplir una muestra de galaxias (en cuanto a tamaño, profundidad y resolución de luminosidad) para que pueda considerarse "representativa" de la estructura a gran escala del universo.



Una vez definidas las características de tal muestra (catálogo de galaxias), habría que determinar si existe o puede existir en un futuro relativamente próximo alguna muestra que cumpla tales requisitos. Pero, además, habrá que plantearse qué correcciones hay que aplicar, y cómo se han de aplicar éstas sobre los datos observacionales brutos, con el fin de reconstruir la estructuración real a partir de los observables. Se llega así a plantear el problema del análisis y corrección de catálogos de galaxias.

Es importante destacar que los datos observacionales compilados en los catálogos de galaxias corresponden a datos observacionales prácticamente "en bruto", sin que haya sido aplicada ninguna corrección sobre los mismos, precisamente para que cada usuario aplique las correcciones que considere oportunas en cada caso, dada la carencia de unas reglas establecidas y unificadas para llevar a cabo tales correcciones.

Es precisamente el objetivo de este capítulo la discusión de este tipo de correcciones que han de aplicarse a los datos contenidos en los catálogos de galaxias, y el estudio de cómo pueden influir los efectos distorsionantes discutidos en esta memoria en la elaboración de modelos más detallados para tales correcciones, y en el análisis morfológico y estadístico de tales catálogos.

### **6.1 CATALOGOS DE GALAXIAS "REPRESENTATIVOS" DE LA ESTRUCTURA A GRAN ESCALA DEL UNIVERSO**

La mayor parte del estudio de la estructura a gran escala del universo, tanto desde un punto de vista morfológico como desde un punto de vista estadístico se hace a partir de los llamados "Catálogos de Galaxias" (tomando la galaxia como unidad elemental), compilaciones que intentan sistematizar todos los datos disponibles, confrontando diferentes datos observacionales cuando éstos sean contradictorios, y disponiendo toda la información de modo que ésta sea directamente utilizable sin necesidad de conocer demasiados detalles técnicos sobre cada una de las submuestras a partir de las cuales se han elaborado tales compilaciones.

En principio, un catálogo de galaxias es cualquier compilación que reúna datos sobre todo un conjunto de galaxias, pero en este caso estamos interesados en lo que denominaremos catálogos "representativos" de la estructura a gran escala. Será preciso ante todo clarificar qué condiciones

ha de cumplir un catálogo de galaxias para que éste pueda resultar "representativo" <sup>1</sup>.

### **Requisitos volumen-profundidad-resolución para una muestra "representativa" de la estructura a gran escala del universo**

En toda muestra real de galaxias se han de considerar siempre factores de carácter geométrico y de sensibilidad luminosa, que determinan el volumen total de la muestra a estudiar, la profundidad de la misma y su nivel de resolución.

La relación volumen-profundidad está relacionada con la geometría de la región del universo explorada. Esta relación es muy importante a la hora de plantear las observaciones. Una tendencia extrema viene dada por muestras de gran abertura angular, intentando abarcar en principio todo el universo observable, exceptuando únicamente las zonas inaccesibles por ocultación galáctica, pero con relativamente poca profundidad (un ejemplo típico de este tipo de muestras es la del CfA). La otra tendencia extrema consiste en analizar regiones angularmente muy reducidas, pero con una gran profundidad en redshift ("pencil beam surveys") (Broadhurst *et al.*, 1990; Shectman *et al.*, 1992). El primer tipo permite analizar con detalle la morfología de las estructuras y un análisis estadístico más completo, aunque a veces el tamaño limitado de las muestras no permite caracterizar las estructuras de tamaño comparable al de la propia muestra. Por el contrario, el segundo tipo intenta determinar cuál es el tamaño máximo de las estructuras, o al menos si existen evidencias de estructuración a muy gran escala, aunque se tenga una información muy pobre acerca de las características de tales estructuras, con un análisis estadístico elemental.

Especial mención merece en este sentido la estrategia seguida en el muestreo del CfA, basado en la observación de tiras en forma de "slice", bastante profundas (150 Mpc), cubriendo una amplia abertura angular en ascensión recta y una anchura fija (6 grados) en declinación. Sólo se miden redshift dentro de una de tales tiras hasta que se han medido los de todas las galaxias con magnitud aparente menor de 15.5, y cuando una "slice" es completada se pasa a la contigua, abarcando otros 6 grados en declinación. Esta estrategia de muestreo, además de ahorro de tiempo de telescopio y

---

<sup>1</sup> Se ha preferido utilizar el término "catálogo representativo" como traducción de la habitual expresión inglesa "fair sample".

operatividad de las observaciones, permite que una vez completa una slice se pueda extraer de ella información significativa, sin necesidad de esperar ha que sea completada la totalidad del muestreo. Dado que cada slice es una especie de "muestra bidimensional" que representa un "plano" en un muestreo tridimensional, el analisis de una slice es en cierto sentido equivalente a estudiar en un plano la geometría del espacio. Es esta adecuada estrategia lo que ha hecho especialmente fructífera la muestra del CfA, desde la primera slice completada (de Lapparent *et al.*, 1986) hasta las 11 actualmente completas (Vogeley *et al.*, 1992).

Además, la relación volumen-profundidad ha de ser considerada teniendo en cuenta factores de luminosidad de las galaxias, y la luminosidad más baja que es capaz de observarse (el umbral de sensibilidad). Dos muestras abarcando el mismo volumen, pero con diferente profundidad, pueden dar lugar a resultados muy distintos, debido a los efectos de corte introducidos por la luminosidad aparente límite. Especial mención requiere además el problema de la evolución temporal, sobre todo en la densidad, pero también en la luminosidad. En muestras muy profundas, los efectos de evolución temporal pueden ser importantes.

Por otro lado, la relación entre el volumen y la resolución de la muestra está evidentemente condicionada por requerimientos de tipo técnico (sensibilidad de los instrumentos y tiempo de observación). Por supuesto, una muestra pequeña suele ser más densa, lo que permite un análisis más detallado de las estructuras, mientras una muestra de gran volumen suele tener menos resolución. En este caso la "resolución" viene dada de hecho por la luminosidad aparente límite del muestreo, que esencialmente viene condicionada por la relación entre el brillo intrínseco de una galaxia y su distancia al observador (ver Apéndice I).

En muestras que sólo detecten objetos muy brillantes se tendrá poca resolución, y además habrá sesgos importantes, ya que las galaxias más brillantes tienden a estar entre sí relativamente más agrupadas. Para tener una muestra significativa, la luminosidad de los objetos detectados debería ser lo suficientemente baja para garantizar un número total de galaxias "detectadas" que realmente trace la distribución de materia sin los sesgos asociados a la segregación de luminosidad.

El objetivo central de todo el estudio de la estructura a gran escala del universo se centra en definitiva en definir lo que sería una muestra "representativa", y los estudios realizados sobre las muestras disponibles en

definitiva lo que tienden es a ver hasta qué punto dichas muestras son "representativas". El sentido de representatividad tiene como siempre la connotación de "significancia estadística", pero en este caso puede plantearse más claramente como una muestra de tamaño al menos dos veces superior al tamaño de las mayores estructuras existentes realmente en el universo, de modo que permita caracterizar la densidad espectral  $P(k)$  que define las propiedades de estructuración.

Según los conocimientos actuales, sería necesaria una muestra, completa al menos hasta magnitud aparente 15.5, y cubriendo un volumen de muestra preferentemente de geometría cúbica con al menos 200 Mpc de lado para poder caracterizar realmente el  $P(k)$  del universo, si las evidencias de que  $P(k)$  tiene un máximo para escalas del orden de 150 Mpc son correctas. Los resultados que puedan obtenerse a partir de muestras de menos de  $(200 \text{ Mpc})^3$  han de tomarse con cuidado, dadas las notables distorsiones que pueden darse en muestras de menor volumen, que además no son "representativas" de la estructura a gran escala del universo. Evidentemente, no hace falta decir que se está lejos de cubrir una muestra de este tipo. Aunque, según ciertos resultados muy recientes del grupo del CfA, aún no publicados, muy pronto se podrá disponer de muestras de tamaño comparable, éstas sólo son comparables en "uno de los lados", y no cubren un volumen cúbico tan grande, con lo que los resultados que puedan obtenerse no serán plenamente significativos.

Además de estos requisitos, deberíamos añadir que en una muestra representativa "ideal", el observador debería estar situado en la posición central del cubo que constituye el volumen de la muestra. Ello es debido a que las estructuras más distorsionadas son las que se hallan más próximas al observador, y si el observador está situado dentro o fuera de la muestra o si el observador está en el centro o hacia un lado del volumen de la muestra, las distorsiones pueden estar sesgadas. Este tipo de efectos fueron analizados en nuestras simulaciones numéricas 3D descritas en el Capítulo 4 variando la posición del observador dentro y fuera del cubo de simulación, lo que se traducía en importantes cambios en el contraste de densidad observado con respecto al contraste real considerado el mismo para todas las posiciones diferentes del observador.

Por otro lado, solamente cuando nuestra muestra pueda ser considerada una muestra "representativa" dicha muestra puede ser estudiada en sí misma independientemente de cualquier factor externo, pero cuando

sepamos de entrada que nuestra muestra no puede ser considerada una "muestra representativa", deberemos utilizar información "externa" a la propia muestra para poder interpretarla correctamente, dados los sesgos introducidos por estructuras que pueden ser externas a la muestra, o estar contenida en la muestra sólo parcialmente.

Un aspecto fundamental a la hora de estudiar una muestra determinada, sobre todo cuando el volumen es muy limitado (escalas menores de 50 Mpc) es el posible sesgo de la muestra por la presencia de una única —o varias— estructuras dominantes. Dado que se ha comprobado que existe estructuración en escalas de hasta 100 Mpc, una muestra muy pequeña estar completamente sesgada por las estructuras dominantes (como sucede de hecho con la presencia del cúmulo de Coma en la región más estudiada de la muestra del CfA). En tales casos, no tiene sentido el utilizar dicha muestra para caracterizar la estructura a gran escala del universo, sino que únicamente servirá para una caracterización local de las estructuras particulares existentes en dicha región.

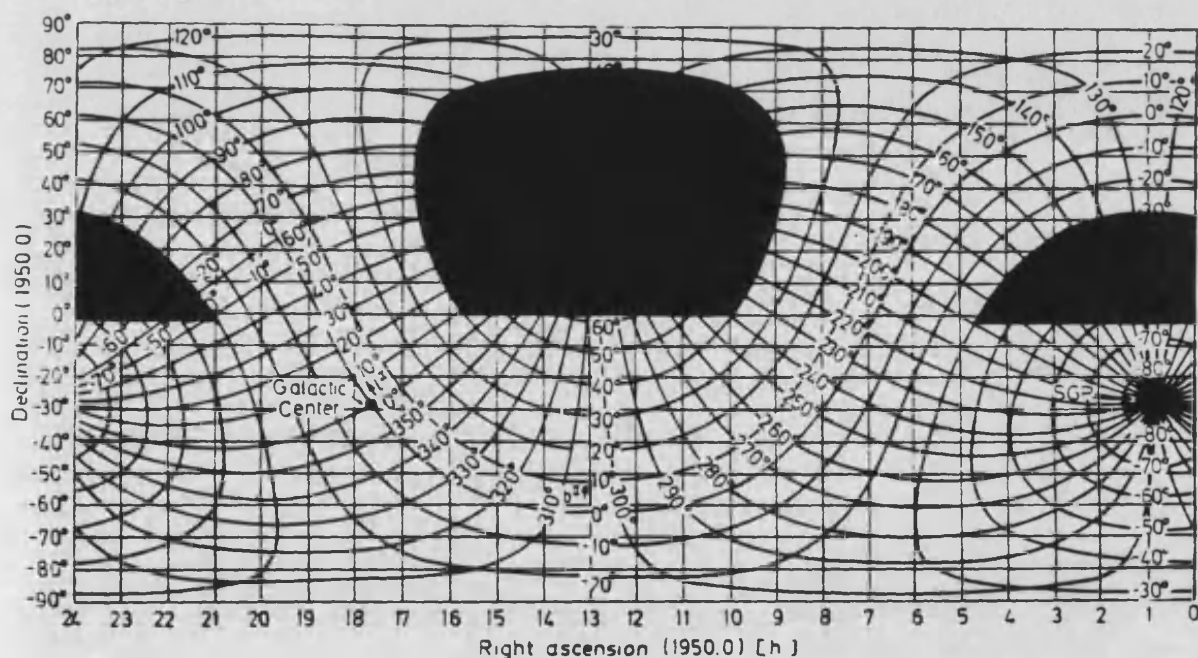
La caracterización del tamaño de las estructuras observadas (en definitiva, la determinación de  $P(k)$ ) es fundamental para caracterizar las distorsiones en la muestra, ya que son las distorsiones en  $P(k)$  las que determinan las propias correcciones a aplicar. En efecto, si las distorsiones en  $P(k)$  son adecuadamente caracterizadas, es posible desarrollar un método de corrección, basado en la transformada de Fourier del contraste de densidad, que permite corregir de modo efectivo las posiciones observadas de las galaxias y reconstruir de este modo la distribución real.

### **Catálogos de galaxias "representativos"**

Existe en la actualidad una gran cantidad de catálogos de galaxias a nuestra disposición. Tales catálogos suelen proceder de algún proyecto particular de observaciones o de algún intento de compilación de datos previamente publicados por diversos observadores. En cuanto a la cobertura espacial, tales catálogos van desde aquellos que intentan compilar todo el universo observado (generalmente con un límite en la distancia máxima, la llamada "profundidad" del catálogo), o bien catálogos muy detallados de un cúmulo particular de galaxias. La profundidad de los catálogos viene determinada por los condicionantes de la medida del redshift. En general, los catálogos más completos tienen una profundidad muy pequeña ( $5000 \text{ km s}^{-1}$ ). Si bien

hay catálogos de galaxias con profundidades del orden de  $100000 \text{ km s}^{-1}$ , el análisis estadístico suele reducirse a los  $15000 \text{ km s}^{-1}$  de profundidad.

Los datos que típicamente suelen contener tales catálogos son las coordenadas angulares de posición de cada galaxia y su redshift (como estimador de la distancia), así como la luminosidad. Algunos catálogos incorporan otro tipo de información, como la morfología, el diámetro aparente, etc., pero estos datos suelen ser incompletos y sólo disponibles para algunas de las galaxias de la muestra, dada la prioridad observacional en la determinación de las coordenadas de posición con el fin de poder trazar el mapa de la estructura tridimensional del universo.



**Fig. 6.1** Región del universo para la que se pretende establecer un "catálogo completo de galaxias", al menos hasta una magnitud aparente límite 15.5. La zona sombreada corresponde a la zona de completitud del catálogo original del CfA (el hemisferio sur fue inicialmente excluido por dificultades observacionales). La versión actual del catálogo incluye también el hemisferio sur. La zona en forma de U excluida se debe a la ocultación producida por nuestra propia galaxia.

Sin duda alguna, el catálogo de galaxias que hoy podemos considerar más "representativo" de la estructura a gran escala del universo es el catálogo del Center for Astrophysics (CfA) de Harvard. Este catálogo está basado en el original "CfA redshift survey", el cual tenía como pretensión original el medir los redshifts de todas las galaxias en una muestra resultante de la unión de los catálogos de Zwicky *et al.* (1961-1968) y Nilson (1973), con la limitación impuesta por la ocultación galáctica  $|b_{II}| \gtrsim 40^\circ$ , y magnitud límite  $m_{B(O)} \leq 15.5$ . En dicha muestra, cuando esté completa, debería haber  $\sim 12000$  galaxias.

Por razones de operatividad, y especialmente por ahorro de tiempo de telescopio, se comenzó realizando exploraciones sobre volúmenes de tipo "slice" (ver figuras 6.4 y 6.5), es decir, pequeñas franjas en declinación abarcando un amplio rango de ascensión recta, y para la magnitud aparente límite establecida. La completitud de sucesivas slices adyacentes permite de este modo la reconstrucción de un volumen estadísticamente representativo, objetivo final del estudio.

En el Apéndice III se da una descripción técnica del contenido del catálogo del CfA, así como el formato actual del mismo con toda la información en él contenida, por ser el principal catálogo de galaxias actualmente existente.

En la última versión disponible del catálogo del CfA (1990) aparecen un total de 38909 galaxias, de las cuales 28307 contienen el dato de magnitud (aparente) determinado. Como este dato es fundamental para estimar la completitud del catálogo, las galaxias sin magnitud determinada, aunque con posición angular determinada, han de eliminarse por el momento en el análisis de dicho catálogo. Por otro lado, de las 38909 galaxias totales, sólo hay 22746 galaxias con redshift medido (y facilitado en el catálogo, pues hay bastantes galaxias con redshift ya medido pero sin este dato introducido en el catálogo por diferentes razones). En total resultan finalmente 15654 galaxias con ambos datos de redshift y magnitud determinados en el catálogo, que serían las que en principio podrían utilizarse. Sin embargo, este conjunto de 15654 galaxias no representa ninguna submuestra completa en magnitud (para alguna magnitud aparente límite).

Los valores de magnitudes (aparentes) oscilan entre 0.02 y 23.69 para todo el conjunto del catálogo<sup>1</sup>. En el rango de magnitudes entre 0.0 y 15.5 hay en el catálogo un total de 20741 galaxias.

Como el objetivo final de la muestra del CfA es conseguir un catálogo completo hasta magnitud aparente 15.5, el haber incluido en la nueva versión del catálogo todas las galaxias conocidas hasta magnitud aparente límite 15.5 (aunque muchas de éstas no tengan redshift medido) permite conocer hasta qué punto dicha versión del catálogo es incompleta en la zona particular en la que estemos interesados (pues para determinadas regiones el catálogo ya es completo hasta 15.5).

Las versiones más recientes de este catálogo de galaxias son bastante precisas en la determinación de las posiciones de las galaxias, tanto en coordenadas angulares como en redshift. En cuanto a las coordenadas angulares, la precisión con la que se especifican dichas coordenadas en el catálogo del CfA es de 0.1" para ascensión recta ( $\alpha$ ) y 1" para declinación ( $\delta$ ). Esto representa  $7.3 \cdot 10^{-6}$  radianes en el caso de  $\alpha$  y  $4.8 \cdot 10^{-6}$  radianes en el caso de  $\delta$ . Para una distancia de  $10.000 \text{ km s}^{-1}$ , esto representa distancias transversales del orden de  $0.05\text{-}0.07 \text{ km s}^{-1}$ . A distancias típicas del cúmulo de Coma ( $70\,000 \text{ km s}^{-1}$ ), por ejemplo, esto representa errores en distancias transversales del orden de  $0.3\text{-}0.5 \text{ km s}^{-1}$ . Aunque ésta no es la precisión con la que realmente están medidas las posiciones de muchas de las galaxias, sí parece ser ésta la precisión a la que se pretende llegar, utilizando nuevas técnicas instrumentales en las nuevas mediciones de posiciones angulares.

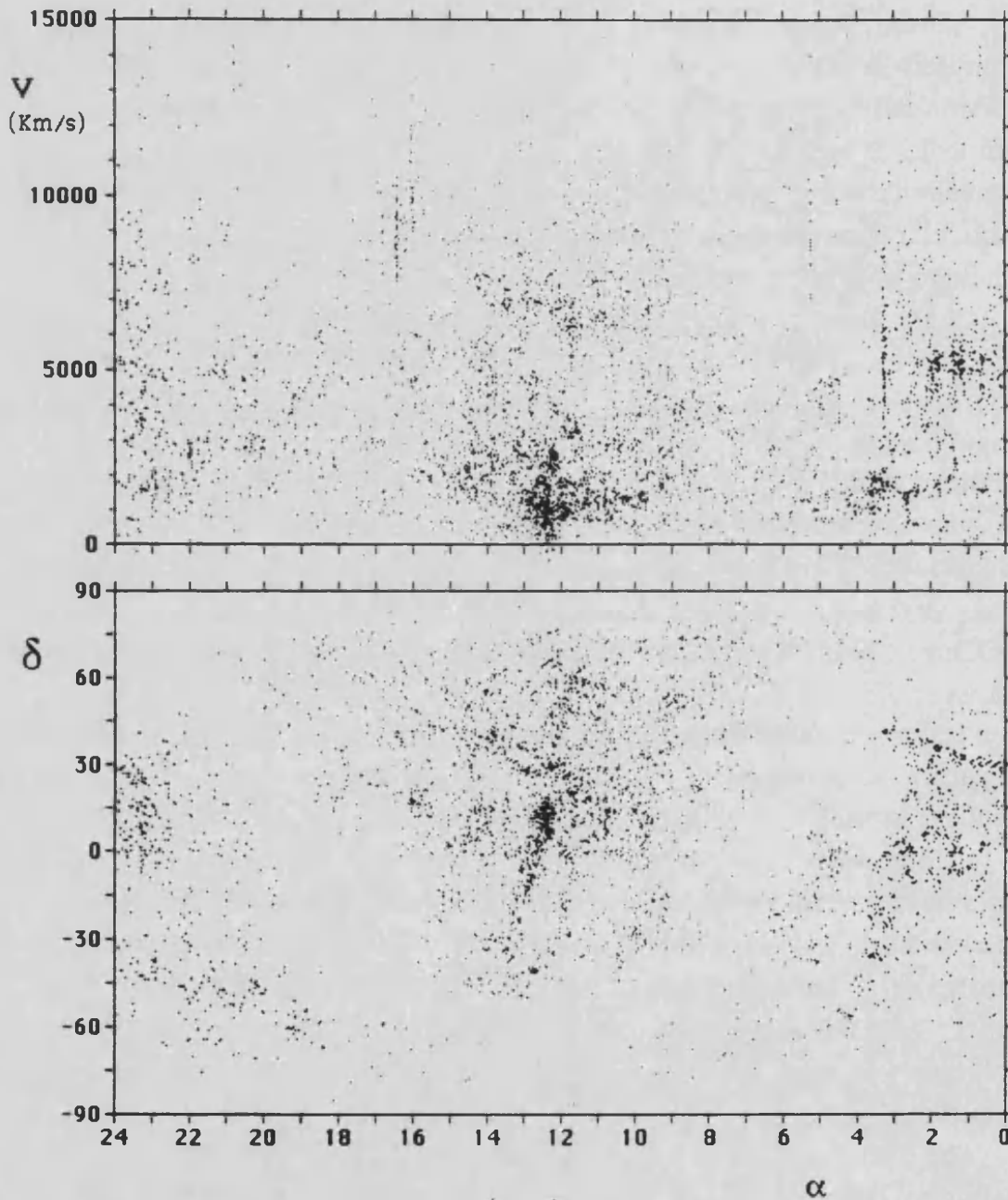
Con este nivel de precisión actual en la medida de las posiciones de las galaxias, efectos tradicionalmente despreciados pueden llegar a ser relevantes. Concretamente, en lo que se refiere al redshift, el pasar de errores del orden de  $100 \text{ km s}^{-1}$  de hace unos años a errores del orden de  $30 \text{ km s}^{-1}$  actuales supone reconsiderar algunas correcciones (movimiento solar, movimiento galáctico) en un modo más preciso que el anteriormente seguido.

Si bien el catálogo de galaxias considerado en este estudio ha sido el catálogo del CfA, otros catálogos actualmente disponibles han sido

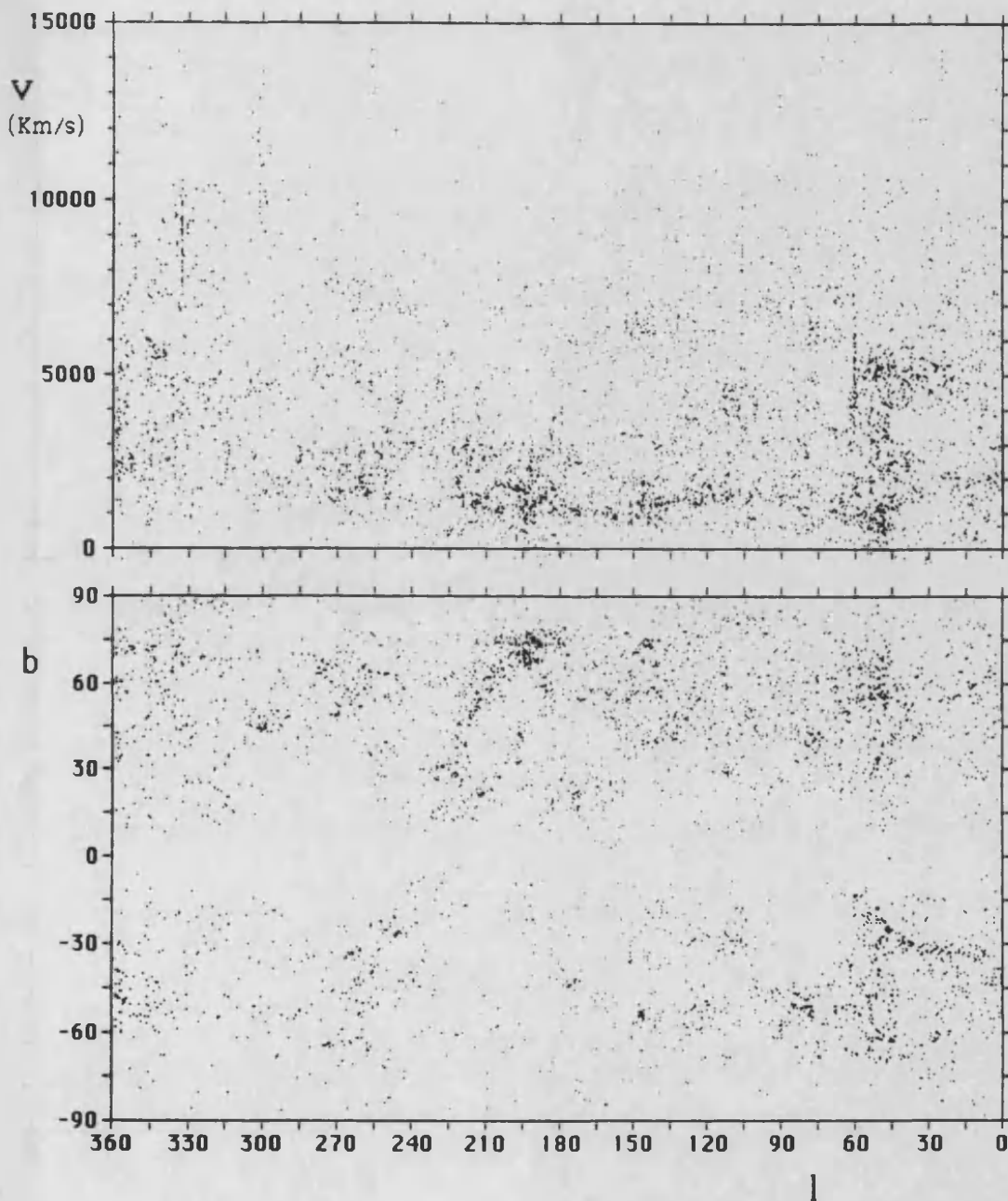
---

<sup>1</sup> Estos valores han sido ya debidamente corregidos de la falta de homogeneidad en los valores de magnitudes dados por diferentes observadores, basados en diferentes sistemas de medida de la magnitud. Los valores indicados resultan de la transformación de todos los valores a magnitudes azules fotográficas ( $m_B$ )

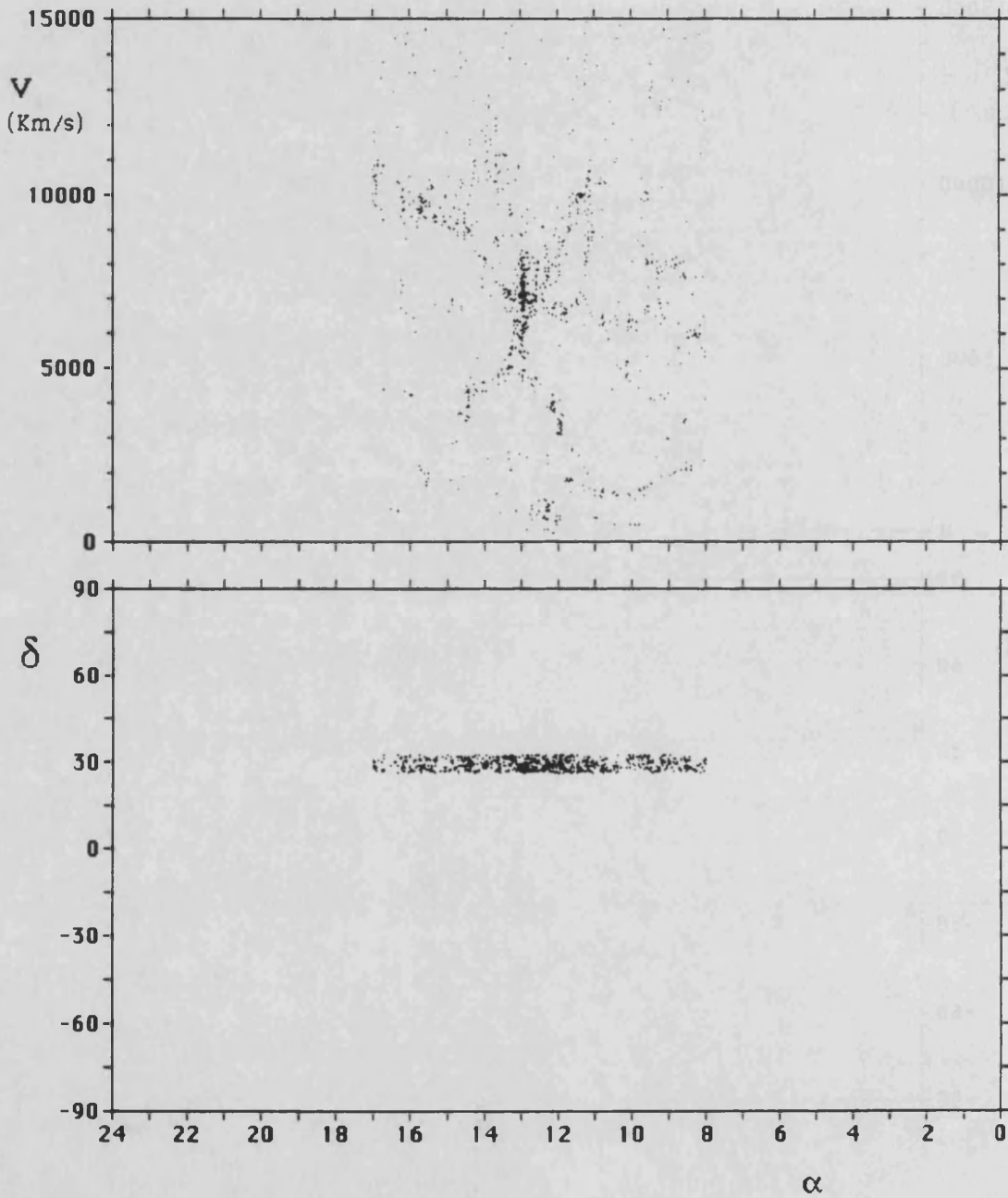




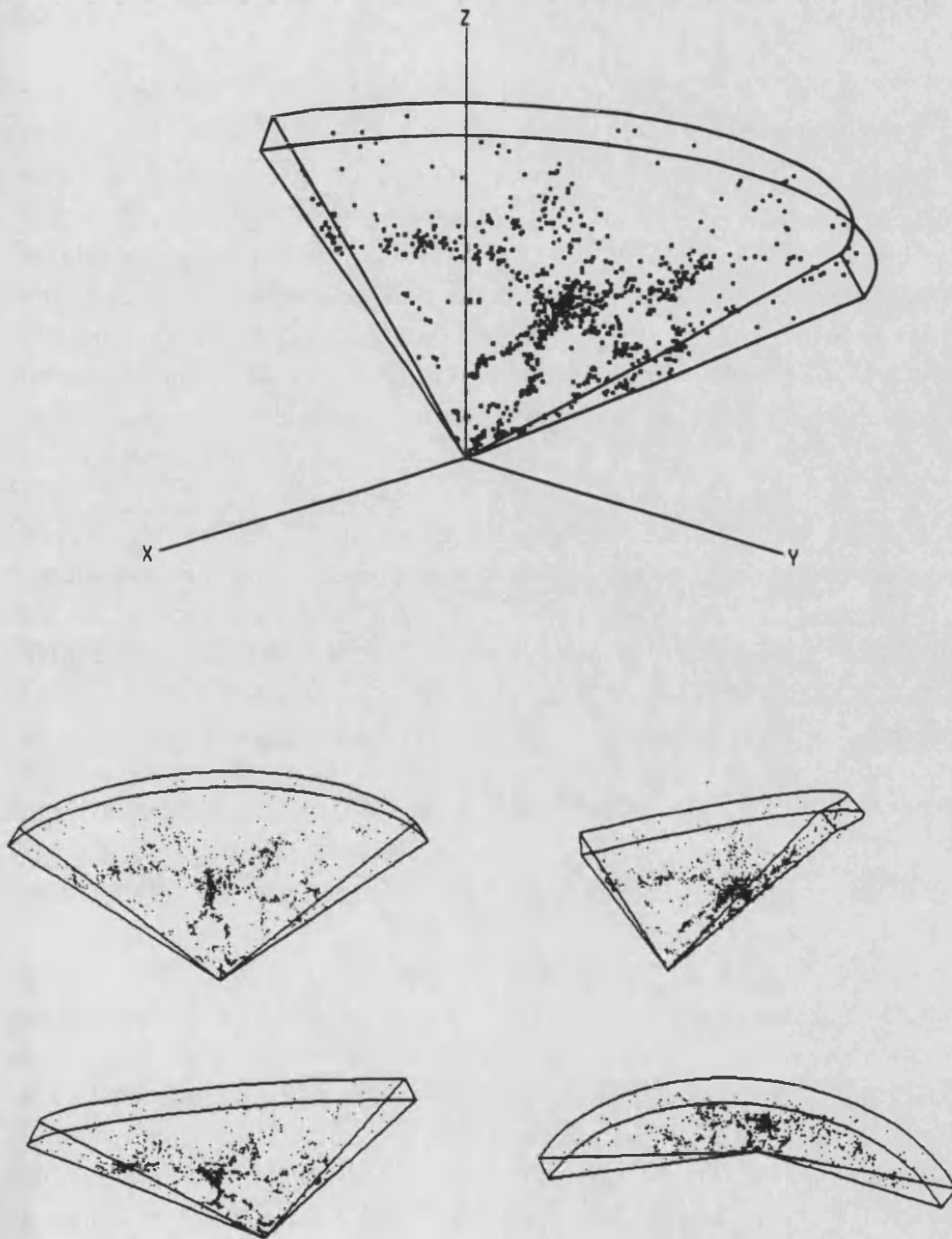
**Fig. 6.2** Catálogo de galaxias del CfA, representado en coordenadas ecuatoriales en proyección ascensión recta-declinación-redshift, para una más directa identificación de las coordenadas. Las galaxias representadas han sido extraídas del catalogo completo de 38909 galaxias, seleccionando aquellas que tienen magnitud aparente menor de 14.5 (por completitud del catálogo) y  $V < 15000 \text{ km s}^{-1}$ , resultando un total de 4661 galaxias.



**Fig. 6.3** Catálogo de galaxias del CfA, representado en coordenadas galácticas, en proyección latitud galáctica-longitud galáctica-redshift. Las coordenadas galácticas permiten delimitar mejor la zona de completitud de la muestra debido a la ocultación por nuestra propia galaxia, lo que motiva la franja aparentemente vacía de galaxias para latitudes galácticas próximas a cero.



**Fig. 6.4** Representación en proyección ascensión recta-declinación-redshift de la región del universo mejor conocida y estudiada hasta ahora ( $\alpha \in [8h, 17h]$ ,  $\delta \in [26.5^\circ, 32.5^\circ]$ ,  $V \in [0 \text{ km s}^{-1}, 15000 \text{ km s}^{-1}]$ ), completa hasta magnitud aparente 15.5, conteniendo 1054 galaxias. El procedimiento de muestreo seguido se basa en ir observando "tiras" de este tipo hasta completar todo el catálogo CfA hasta magnitud aparente 15.5.



**Fig. 6.5** La misma región de la figura 6.4 (slice [8-17, 26.5-32.5, 0-15000]) representada en coordenadas ecuatoriales cartesianas (X,Y,Z). La representación tridimensional permite estudiar la disposición real de las galaxias en la geometría particular de la muestra en forma de "slice". La posibilidad de ver dicha distribución desde distintos ángulos es una herramienta muy útil en el análisis de las estructuras.

utilizados para analizar algunos aspectos concretos de los modelos de corrección propuestos.

Especial mención merece el catálogo de galaxias compilado por Einasto *et al.* (1984). Este catálogo está confeccionado con un claro interés de aplicación práctica del mismo al tratamiento estadístico de los datos, en lugar de una compilación de referencia al estilo del catálogo CfA. Para cada una de las galaxias contenidas en el catálogo de Einasto *et al.* (1984) se proporcionan un total de 10 datos: número de referencia, latitud galáctica (dato importante a efectos de completitud del catálogo), declinación ecuatorial (otro dato importante para análisis estadísticos que requieran completitud del catálogo), y coordenadas supergalácticas cartesianas (X,Y,Z) (en km/s). Las coordenadas supergalácticas tridimensionales (ver Apéndice II) son muy útiles para el tratamiento estadístico. Las otras coordenadas proporcionadas en el catálogo sirven para delimitar la zona de completitud de la muestra al hacer los correspondientes análisis estadísticos.

Especial mención requiere también el catálogo procedente de las observaciones en infrarrojo realizadas por el satélite IRAS, que constituye un fuente de información diferente acerca de la estructura a gran escala del universo. Si bien disponemos también del catálogo del IRAS como un catálogo independiente, es preciso señalar que las galaxias contenidas en el catálogo del IRAS han sido ya incorporadas a la versión actual del catálogo del CfA, con lo que el catálogo del CfA se convierte en la compilación más completa existente, recopilando prácticamente toda la información disponible (ver Apéndice III).

Otros catálogos resultan interesantes por el hecho de ser muy completos aunque sólo en una región limitada. Disponemos así de muestras correspondientes a un cúmulo en concreto, como el de Virgo, Coma o el A2670 que utilizaremos en el apartado 6.4. Otro aspecto interesante es la fusión de información procedente de diferentes catálogos para aplicar determinados tipos de correcciones, como la utilización de catálogos de cúmulos de galaxias para la corrección de catálogos correspondientes a posiciones individuales de galaxias.

La elaboración de métodos sistemáticos de corrección de efectos perturbadores en los catálogos de galaxias existentes es uno de los objetivos actualmente prioritarios a la hora de extraer de tales catálogos unas conclusiones claras y objetivas acerca de la estructura a gran escala del universo.

## 6.2 CORRECCIONES NECESARIAS PARA INTERPRETAR UN CATALOGO DE GALAXIAS

Si bien la mayoría de los estudios realizados, y en particular aquellos que han tomado como base el catálogo del CfA, han utilizado el catálogo original sin hacer prácticamente ninguna corrección de los datos brutos en él proporcionados (analizando las propiedades estadísticas de la distribución "observada" de galaxias), otros han preferido realizar correcciones a los datos brutos del catálogo con el fin de poder estimar de algún modo la morfología y caracterización estadística de la distribución "real" de galaxias en el espacio.

Un ejemplo de catálogo de galaxias "corregido" de los principales efectos distorsionantes es el catálogo generado por Einasto *et al.* (1984), que consiste esencialmente en el catálogo del CfA (con algunas galaxias añadidas), pero en el cual se han realizado, al menos, las principales correcciones a aplicar, algunas de las cuales están estandarizadas y se aplican de modo sistemático y otras son específicas del modelo de corrección propuesto por Einasto *et al.* (1984).

Tales correcciones que —al menos algunas— suelen aplicarse habitualmente a los datos observacionales que constituyen un catálogo de galaxias son las siguientes:

### a/ Corrección del movimiento solar en nuestra galaxia

Las velocidades radiales (redshift) que aparecen en los catálogos de galaxias están medidas con respecto a nuestra posición (sistema solar), y suelen por ello denominarse velocidades heliocéntricas.

Puesto que nuestro sistema solar está a su vez en movimiento en nuestra galaxia es preciso hacer unas correcciones debidas al movimiento solar.

Tal corrección (muy estandarizada) suele realizarse con respecto al centroide de velocidades del Grupo Local, usando la determinación realizada por Humason, Mayall y Sandage (1956). De acuerdo con la convención adoptada por la IAU, esta corrección se realiza aplicando la relación (Ferguson & Sandage; 1990; Aaronson *et al.*, 1986)

$$V' = V_{\odot} + 300 \sin l \cos b \quad [6.1]$$

siendo  $V_{\odot}$  la velocidad radial (heliocéntrica) medida para cada galaxia,  $(l, b)$  las coordenadas galácticas de dicha galaxia, y  $V'$  es la velocidad corregida. Otros autores usan otro tipo de correcciones. Así, por ejemplo, Maurogordato & Lachize-Rey (1991) usan como fórmula de corrección

$$V' = V_{\odot} - 79 \cos l \cos b + 296 \sin l \cos b - 36 \sin b \quad [6.2]$$

(tomando como dirección del movimiento  $l = 105^{\circ}$ ,  $b = -7^{\circ}$ , con un módulo de  $308 \text{ k s}^{-1}$ ), siguiendo a Yahil *et al.*, 1977.

#### b/ Corrección del efecto de velocidad peculiar de nuestra galaxia

Este efecto, debido a la velocidad peculiar de nuestra galaxia (realmente de todo nuestro Grupo Local) por su movimiento de caída hacia el cúmulo de Virgo, además de otras contribuciones de cúmulos y supercúmulos más alejados (incluyendo el posible Gran Atractor), resulta dominante en todo catálogo, y es el primer efecto que debe corregirse.

Einasto *et al.* (1984) aplican como fórmula de corrección

$$V'^* = V' + 300 \sin b \quad [6.3]$$

considerando que la dirección del movimiento coincide simplemente con la dirección del polo norte galáctico. Esta no es, sin embargo, la corrección aplicada por otros autores, si bien no existe unanimidad y en este caso hay aún más discrepancias que en el caso de la corrección por el movimiento solar en la galaxia. En un apartado posterior dentro de este mismo capítulo volveremos sobre este punto.

Es preciso señalar que la corrección de velocidades peculiares debería hacerse mediante una composición relativista de velocidades, y no mediante una simple composición aditiva. Tales efectos relativistas introducen una pequeña corrección a la mera suma de velocidades, que viene dada por

$$V'^* = V' - \frac{V_R + z_C v_R}{1 + z_C} \quad [6.4]$$

donde  $V_R$  es la componente radial de la velocidad peculiar de la galaxia,  $v_R$  es la componente radial de la velocidad peculiar del observador y  $z_C$  es el redshift de origen puramente cosmológico.

**c/ Corrección de las velocidades peculiares en las zonas virializadas de cúmulos de galaxias**

El método desarrollado por Einasto *et al.* (1984) para corregir el efecto de la velocidad peculiar de cada galaxia dentro del cúmulo al que pertenece se basa en suponer ciertos parametros que caracterizan a cada cúmulo. De este modo, el método de corrección parte del supuesto de que la estructura dominante son los cúmulos de galaxias, y además que las posiciones de tales cúmulos, así como algunas propiedades de los mismos, son conocidas *a priori* para poder aplicar la corrección.

Se establecen dos tipos de cúmulos según su tamaño aparente estimado. Para los llamados cúmulos del Tipo 2, su tamaño aparente estimado (en unidades de velocidad radial) es  $\Delta V = 110 \text{ km s}^{-1}$ , de modo que en este caso

$$\left( D_0 - \frac{110 \text{ km s}^{-1}}{V_0} \right) \leq D \leq \left( D_0 + \frac{110 \text{ km s}^{-1}}{V_0} \right) \quad [6.5]$$

$$\left( A_0 - \frac{110 \text{ km s}^{-1}}{V_0 \cos D_0} \right) \leq A \leq \left( A_0 + \frac{110 \text{ km s}^{-1}}{V_0 \cos D_0} \right) \quad [6.6]$$

mientras que para los llamados cúmulos del Tipo 3, su tamaño aparente estimado es  $\Delta V = 225 \text{ km s}^{-1}$ , de modo que en este caso

$$\left( D_0 - \frac{225 \text{ km s}^{-1}}{V_0} \right) \leq D \leq \left( D_0 + \frac{225 \text{ km s}^{-1}}{V_0} \right) \quad [6.7]$$

$$\left( A_0 - \frac{225 \text{ km s}^{-1}}{V_0 \cos D_0} \right) \leq A \leq \left( A_0 + \frac{225 \text{ km s}^{-1}}{V_0 \cos D_0} \right) \quad [6.8]$$

Para ambos tipos de cúmulos, el rango de velocidades radiales considerado en dicha corrección es

$$(V_0 - 2.5 S) \leq V \leq (V_0 + 2.5 S) \quad [6.9]$$

el cual es función simplemente de la dispersión de velocidades  $S$  de cada cúmulo.

Las velocidades radiales relativas (con respecto a la velocidad media del cúmulo) de las galaxias dentro de dicha región de influencia de cada cúmulo son comprimidas a lo largo de dicha dirección radial de acuerdo con una ley del tipo

$$V = V_0 + C \left( \frac{W - V_0}{S} \right) \quad [6.10]$$



donde  $W$  es la velocidad radial original (medida) y  $V$  es la velocidad radial corregida. La constante  $C$ , cuyo valor se fija de modo un tanto arbitrario para cada cúmulo, representa el punto crítico de este modelo de corrección. En la corrección del catálogo realizada por Einasto *et al.* (1984), el valor de la constante  $C$  fue fijado "by trial and error" hasta conseguir que las dimensiones radiales de los cúmulos fuesen inferiores a sus dimensiones tangenciales. Siguiendo este procedimiento Einasto *et al.* encontraron como valor de  $C = 30 \text{ km s}^{-1}$ , si bien, según ellos mismos señalan, es posible que un valor un poco mayor hubiese dado mejores resultados, ya que algunos cúmulos aparecen ligeramente aplanados transversalmente a la dirección radial al analizar el catálogo corregido.

Evidentemente, este método de compresión de las velocidades radiales de las galaxias dentro de cada cúmulo atribuye una dispersión de velocidades (rms) constante para todos los cúmulos. Einasto *et al.* (1984) sugieren como posible mejora de su método el correlacionar la dispersión de velocidades (valor de  $C$ ) con la riqueza del cúmulo (o su tamaño).

De hecho, en un artículo posterior, Einasto *et al.* (1986) utilizan diferentes valores de  $C$  para ambos tipos de cúmulos considerados, siendo  $C = 30 \text{ km s}^{-1}$  para los cúmulos cuya riqueza corresponde a la clase 2 y  $C = 100 \text{ km s}^{-1}$  para aquellos que pertenecen a la clase 3.

En esta línea propondremos más adelante en el presente trabajo un método alternativo, más detallado, para llevar a cabo tal corrección de velocidades peculiares en la zona interna virializada de un cúmulo de galaxias.

#### **d/ Corrección de magnitudes aparentes por absorción galáctica**

Al margen de las correcciones de velocidad radial (distancia aparente) de cada galaxia, es preciso hacer también correcciones sobre su luminosidad (o magnitud) aparente debido a los efectos de absorción que se producen como consecuencia del paso de la luz procedente de dicha fuente por nuestra propia galaxia antes de llegar a nuestra posición dentro de ella. En coordenadas galácticas, tal corrección será función únicamente de la latitud galáctica, por lo que puede aplicarse una relación del tipo

$$\Delta m = - \frac{A}{\sin |b^{II}|} \quad [6.11]$$

El coeficiente de absorción generalmente utilizado es  $A = 0.23$  (Felten, 1985).

Otra fórmula que también suele aplicarse es (Calzetti & Giavalisco, 1990)

$$\Delta m = 0.196 \left( 1 - \frac{1}{\sin |b^{II}|} \right) \quad [6.12]$$

Normalmente sólo se consideran las galaxias con  $|b^{II}| > 40^\circ$ , para evitar los efectos de oscurecimiento galáctico a bajas latitudes, y las fórmulas [6.11] ó [6.12] sólo se aplican a dichas galaxias, pues tales relaciones no valen para latitudes galácticas más bajas.

Aún con estas correcciones, se han observado efectos de selección residuales (Calzetti & Giavalisco, 1990), debido probablemente a la confusión entre galaxias y estrellas a bajas latitudes. Este efecto es mayor cuanto menor es la magnitud aparente, y parece ser nulo para la magnitud límite del catálogo del CfA,  $m_{B(O)} = 15.5$ , por lo que en ocasiones se desprecian muestras con  $m_{B(O)} < 13.5$ , para evitar este tipo de problemas.

Además de esta corrección sistemática de magnitudes aparentes debida a efectos de absorción galáctica, hay otras correcciones a tener en cuenta debido a los diferentes criterios seguidos por grupos observacionales para asignar magnitudes aparentes a galaxias en cada muestra o submuestra estudiada. Este tipo de correcciones está asociado a la problemática intrínseca de definición de magnitud (o luminosidad) para una galaxia, lo que no es tan trivial como para el caso de estrellas (ver Apendice I). Por otro lado, a veces se utilizan diferentes tipos de luminosidad (fotográfica, azul, etc.) para establecer la magnitud aparente de una galaxia. Esto no es un problema cuando se sigue un mismo criterio de modo coherente para toda la muestra, pero es realmente grave cuando se mezclan diferentes muestras para constituir un catálogo de galaxias global. Esto es lo que sucede en el caso del catálogo del CfA, donde, dado que las magnitudes que aparecen en el catálogo han sido tomadas de diferentes fuentes, para poder utilizarlas de modo coherente se han de hacer las correspondientes correcciones para referir todas las magnitudes a un patrón de referencia común. Estas correcciones dependen de cada muestra, por lo que no pueden

establecerse reglas generales. Para el caso del catálogo del CfA, en el Apéndice III se detallan las correspondientes correcciones a aplicar.

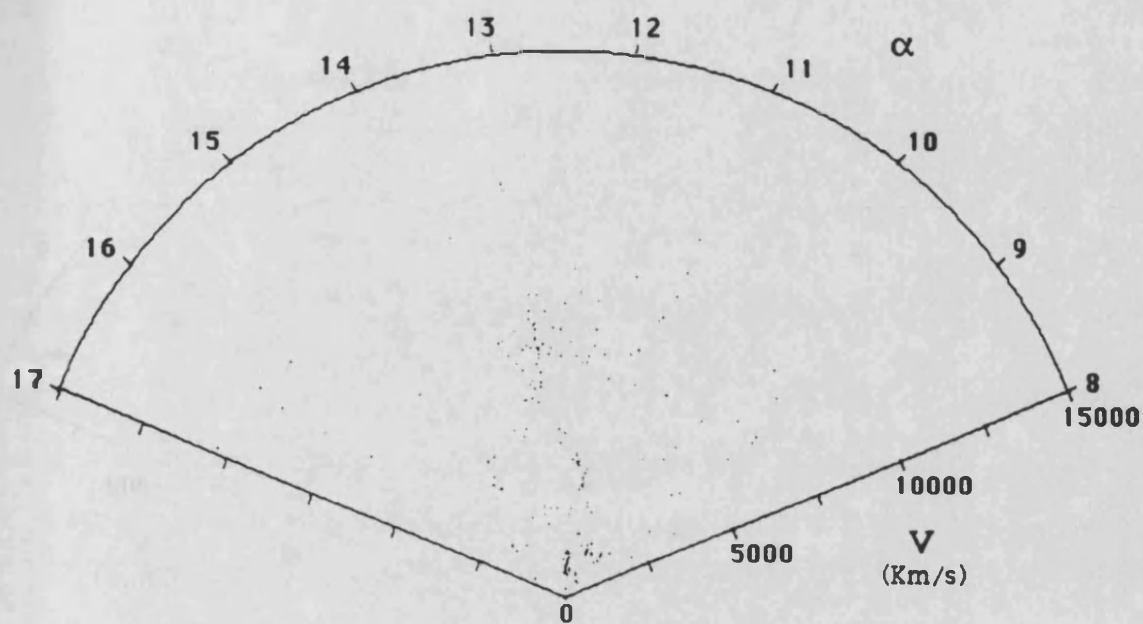
Con el fin de ilustrar las repercusiones de tales correcciones en la distribución de galaxias estimada a partir de los datos observacionales brutos proporcionados por el catálogo del CfA, las figuras 6.6, 6.7 y 6.8 muestran diferentes regiones en la distribución original (a partir de los datos del CfA) y en el catálogo corregido según el modelo de Einasto *et al.* (1986). En todos los casos se considera magnitud aparente límite 14.5, por ser ésta la magnitud límite de completitud del catálogo del CfA en la versión del mismo actualmente completa y la magnitud aparente límite del catálogo corregido por Einasto *et al.*

En todos los casos, la figura (a) es la distribución observada (CfA), mientras la figura (b) es la distribución corregida de tales efectos observacionales (Einasto *et al.*). La diferencia en el número de galaxias en cada par de figuras es debida a los efectos de selección introducidos por el cambio en la posición radial de las galaxias para una muestra con magnitud aparente límite 14.4 en ambos casos, supuesta fijada la magnitud absoluta de cada galaxia de la muestra.

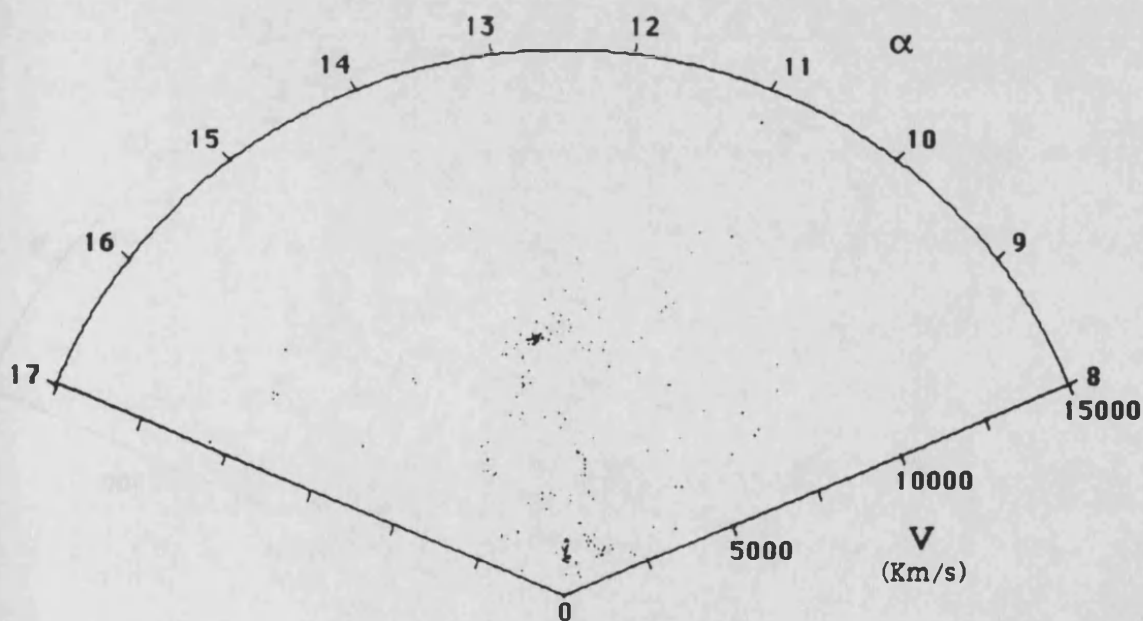
El efecto dominante en este tipo de correcciones, particularmente visible en las figuras, es el debido a la corrección de redshift en la zona virializada interna de cúmulos ricos de galaxias, lo que tiene notables repercusiones en la apariencia de las estructuras en el plano redshift-ángulo debido a la aparición de estructuras muy alargadas ("Dedos de Dios") en la dirección radial de visión.

La figura 6.6 corresponde a la famosa "slice" en el entorno del cúmulo de Coma (ya descrita anteriormente en las figuras 6.4 y 6.5 para la versión actualmente completa hasta magnitud aparente 15.5). El efecto dominante es el cambio en la apariencia del cúmulo de Coma en ambas figuras (a) y (b) al eliminar el efecto de velocidades aleatorias en el centro del cúmulo.

En el caso de la figura 6.7, correspondiente al entorno del cúmulo de Virgo, dada la proximidad del mismo y los efectos de velocidad peculiar del observador debido a nuestra caída en dicha dirección, son también notables los efectos debidos a tales correcciones de velocidad peculiar del observador en la distribución general de galaxias de toda la muestra y no sólo el efecto de "Dedo de Dios" en la parte más interna del propio cúmulo de Virgo.

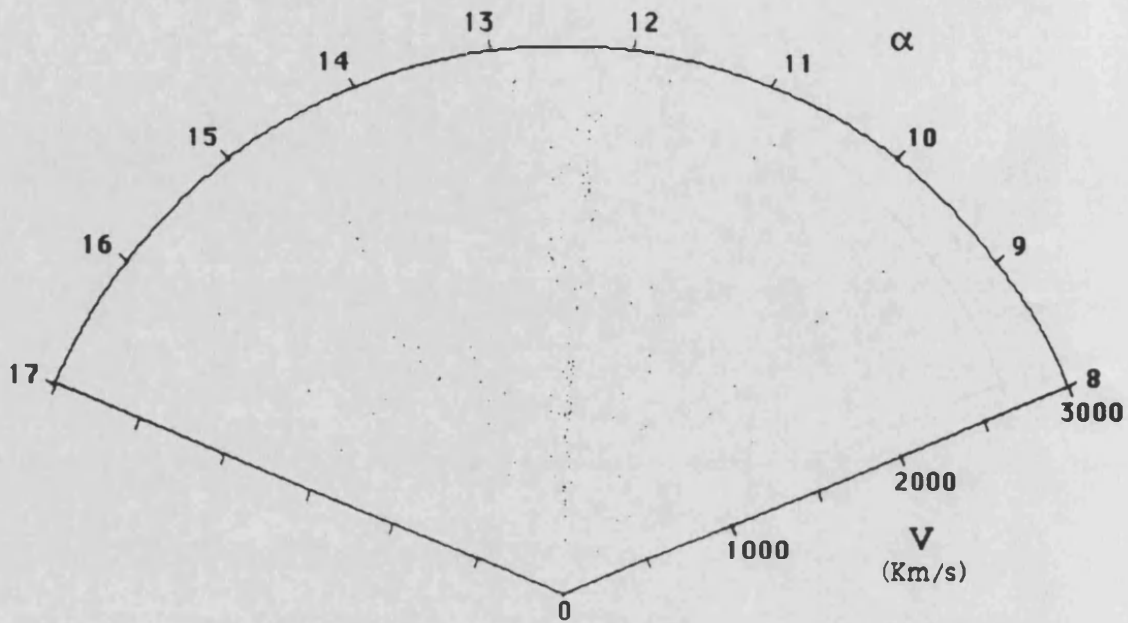


(a)

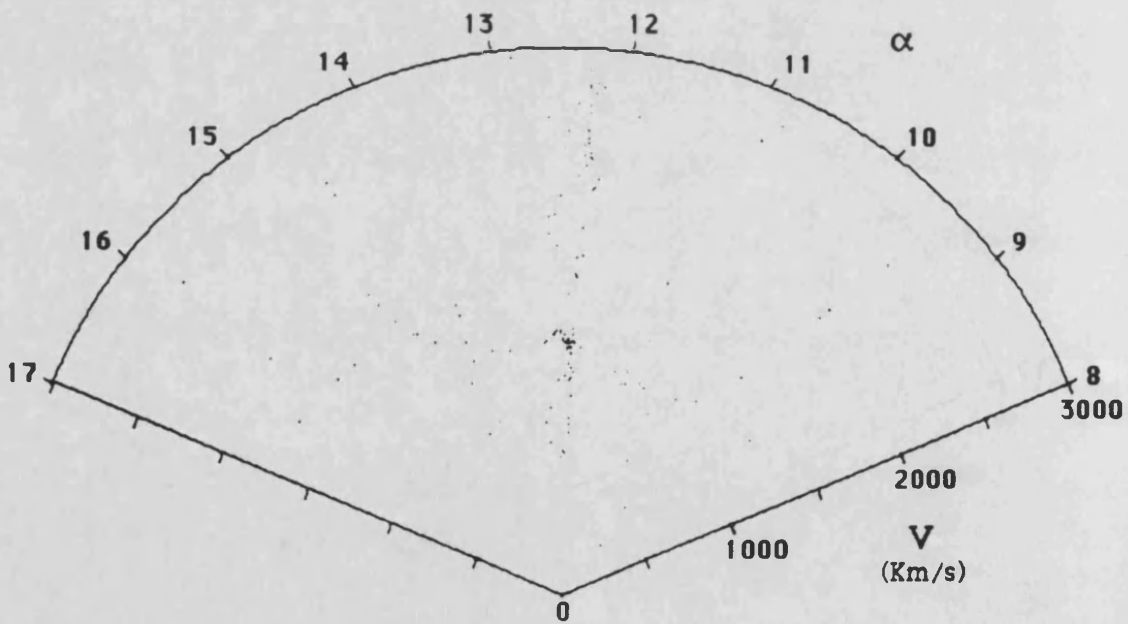


(b)

**Fig. 6.6** Región del universo correspondiente al entorno del cúmulo de Coma ( $8 \text{ h} \leq \alpha \leq 17 \text{ h}$ ,  $26^\circ 30' \leq \delta \leq 32^\circ 30'$ ). En la figura (a), extraída del catálogo CfA, hay un total de 191 galaxias, mientras en la figura (b), extraída del catálogo corregido, hay un total de 223 galaxias, siendo en ambos casos una muestra con magnitud aparente límite 14.5 y distancia máxima  $V_{\text{max}} = 15000 \text{ km s}^{-1}$ .

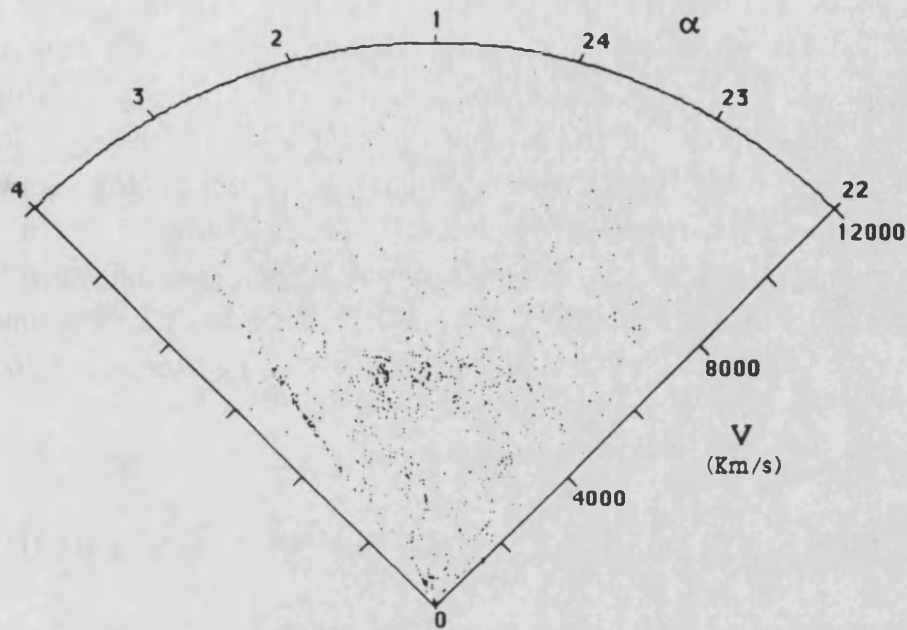


(a)

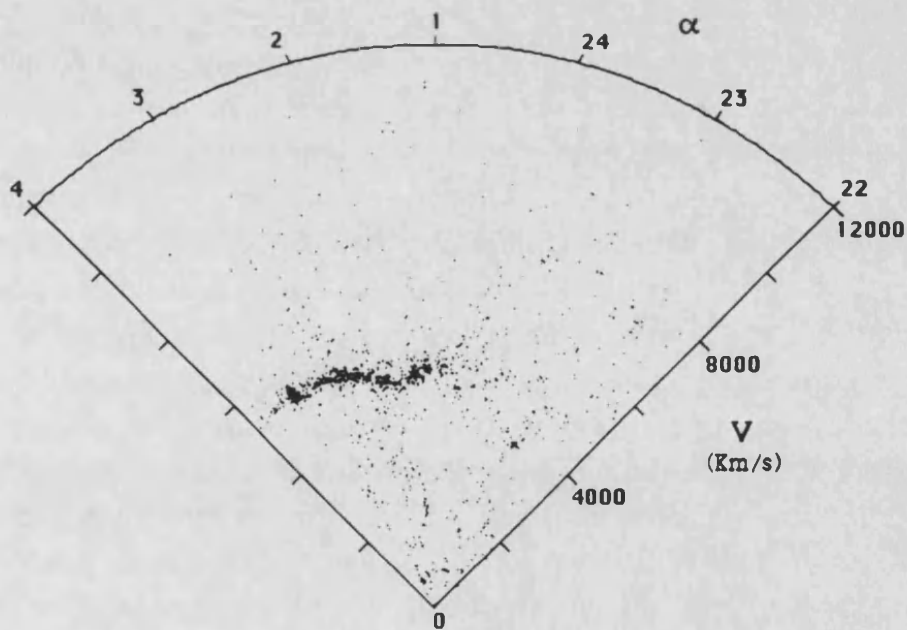


(b)

**Fig. 6.7** Región del universo correspondiente al entorno del cúmulo de Virgo ( $8 \text{ h} \leq \alpha \leq 17 \text{ h}$ ,  $4^\circ 40' \leq \delta \leq 10^\circ 40'$ ). En la figura (a), extraída del catálogo CfA, hay un total de 129 galaxias, mientras en la figura (b), extraída del catálogo corregido, hay un total de 134 galaxias, siendo en ambos casos una muestra con magnitud aparente límite 14.5 y distancia máxima  $V_{\text{max}} = 3000 \text{ km s}^{-1}$ .



(a)



(b)

**Fig. 6.8.-** Región del universo correspondiente al entorno del cúmulo de Perseo ( $22^{\text{h}} \leq \alpha \leq 4^{\text{h}}$ ,  $0^{\circ} 0' \leq \delta \leq 50^{\circ} 0'$ ). En la figura (a), extraída del catálogo CfA, hay un total de 738 galaxias, mientras en la figura (b), extraída del catálogo corregido, hay un total de 1227 galaxias, siendo en ambos casos una muestra (incompleta) con magnitud aparente límite 14.5 y distancia máxima  $V_{\text{max}} = 12000 \text{ km s}^{-1}$ .

En cuanto a la figura 6.8, ante todo hay que tener en cuenta que se trata de una zona en la que ninguno de los dos catálogos es completo, debido a la proximidad a la zona de ocultación galáctica. El catálogo corregido (Einasto *et al.*, 1986) contiene bastantes más galaxias en la zona de los supercúmulos de Piscis-Perseo que la antigua versión del catálogo del CfA, y de ahí el mayor número de galaxias de la figura 6.8b incluso restringiendonos a magnitud aparente límite 14.5. El efecto más notable en esta figura es, no obstante, la desaparición del filamento de Perseo, uno de los "Dedos de Dios" más prominentes, lo que cambia completamente el patrón de la distribución de galaxias en su entorno.

### 6.3 CORRECCION DE EFECTOS DEBIDOS A VELOCIDAD PECULIAR DEL OBSERVADOR

De entre las correcciones a aplicar a un catálogo de galaxias descritas en el apartado anterior, las primeras a aplicar son aquellas debidas al hecho de que el observador que mide las posiciones radiales y angulares de las galaxias contenidas en el catálogo no es un observador inercial, sino que, en general, el propio observador tiene a su vez un movimiento de velocidad peculiar que ha de ser corregido.

La velocidad peculiar del observador es un término en sí mismo no bien definido, pues depende de cual es el sistema de referencia inercial respecto al que se define dicha velocidad peculiar. En cualquier caso, la velocidad peculiar a corregir depende de cuál sea la escala a la que se va a abordar la corrección del catálogo. No es lo mismo que la corrección sea justo en el entorno más próximo al observador (en cuyo caso hay que considerar únicamente el movimiento de nuestra galaxia con respecto a la galaxia o galaxias más próximas) que la corrección a aplicar intente abordar correcciones en zonas distantes (en cuyo caso lo que cuenta es el valor promediado resultante de la velocidad peculiar del observador como consecuencia de toda la materia situada entre el observador y la zona en la cual se va aplicar la corrección). En el primer caso sólo cabe considerar el movimiento de caída de nuestra galaxia sobre el Cúmulo Local. En el segundo caso habría que considerar movimientos más complejos de caída hacia el "Gran Atractor o incluso a escalas superiores, tal como fue discutido en el apartado 1.3.

En principio, las posiciones medidas de las galaxias estan referidas al sistema de referencia terrestre, si bien dadas las escalas que entran en juego, en este caso no cabe distinguir entre sistema terrestre y sistema solar, por lo que las velocidades (redshift) medidas se consideran referidas al sistema heliocéntrico, con centro en el centro de masas del sistema solar.

En lo único en lo que hay consenso es en la corrección de las velocidades radiales heliocéntricas debida al movimiento del Sol en nuestra galaxia, según la fórmula [6.1],  $V' = V_{\odot} + 300 \sin l \cos b$ . Todas las demás correcciones a aplicar son realmente especulativas, y no existe en absoluto consenso acerca de cual es la velocidad peculiar de nuestra galaxia que debe ser aplicada a la hora de corregir un catálogo de galaxias, por lo que es éste un problema que se plantea al abordar una corrección.

La respuesta depende de cual sea el objetivo de la corrección y cuál sea el área abarcada por el catálogo, por lo que no existe una respuesta unívoca.

El efecto de velocidad peculiar del observador puede ser corregido realmente al margen de los datos observacionales procedentes del análisis de la distribución de galaxias, y de ahí el que sea el primer efecto a corregir. La información sobre la velocidad peculiar del observador puede extraerse del análisis de las anisotropías en el fondo cósmico de radiación de microondas.

Una vez conocida la dirección del dipolo de microondas, la corrección del catálogo de galaxias debida al efecto de velocidad peculiar del observador se realiza aplicando la fórmula

$$V_R = V_{DIP} \cos \vartheta' = V_{DIP} [\cos \delta_{DIP} \cos \delta \cos(\alpha_{DIP} - \alpha) + \sin \delta_{DIP} \sin \delta] \quad [6.13]$$

donde  $(\alpha, \delta)$  son las coordenadas ecuatoriales (ascensión recta, declinación) de la galaxia considerada, y  $(\alpha_{DIP}, \delta_{DIP})$  son las coordenadas ecuatoriales de la dirección del dipolo (dirección del movimiento, velocidad peculiar del observador).

El problema radica en la determinación de  $(\alpha_{DIP}, \delta_{DIP})$  y  $V_{DIP}$ . Los resultados observacionales actualmente disponibles permiten establecer los siguientes valores (Staveley-Smith & Davies, 1989):

$$V_{DIP} = 340 \pm 70 \text{ km s}^{-1} \text{ (caída hacia el cúmulo de Virgo).}$$

pero un mejor valor actualmente disponible es, considerando el modelo supercúmulo de Virgo + "Gran Atractor", en coordenadas galácticas,

$$V_{DIP} = 543 \pm 68 \text{ km s}^{-1}, \quad l_{DIP} = 295^\circ \pm 7^\circ, \quad b_{DIP} = 23^\circ \pm 7^\circ$$



(que coincide aproximadamente con la posición del supercúmulo de Centauro).

Las correcciones que representan el efecto de velocidad peculiar del observador son realmente notables. Así, por ejemplo, la velocidad heliocéntrica observada para el cúmulo de Virgo es  $V_{\text{Virgo}} = 1151 \pm 38 \text{ km s}^{-1}$  (Huchra, 1985). Si corregimos dicha velocidad del movimiento solar relativo al fondo de microondas (CMB) se obtiene  $V'_{\text{Virgo}} = 1492 \pm 38 \text{ km s}^{-1}$ . La velocidad del flujo de Hubble para Virgo es  $1296 \pm 72 \text{ km s}^{-1}$  (Staveley-Smith & Davies, 1989). La velocidad peculiar resultante (relativa al CMB) para el cúmulo de Virgo es por lo tanto  $1492 (\pm 38) - 1296 (\pm 72) = 196 (\pm 81) \text{ km s}^{-1}$ , que es la velocidad peculiar real de Virgo.

Sin embargo, el retardo "aparente" del flujo de Hubble local viene dado por la diferencia entre la velocidad de Virgo en el sistema de referencia del Grupo Local y la velocidad del flujo de Hubble para Virgo,  $(1151(\pm 38) + 300 \sin 284^\circ \cos 74^\circ) - 1296(\pm 72) = -225 (\pm 81) \text{ km s}^{-1}$  valor diferente a la velocidad peculiar. Ambos valores están de acuerdo con los resultados obtenidos a partir de la dinámica de galaxias cercanas.

En el caso del cúmulo de Coma, si suponemos como suele hacerse que dicho cúmulo está en reposo con respecto al CMB, entonces la velocidad del flujo de Hubble correspondiente a Coma es su propia velocidad radial observada,  $6931 \pm 45 \text{ km s}^{-1}$  (Aaronson *et al.*, 1986). Para el cúmulo de Coma sólo es preciso hacer la corrección debida a la componente de la velocidad peculiar de nuestro Grupo Local relativa al CMB en la dirección de Coma ( $272 \text{ km s}^{-1}$ ), es decir

$$V'_{\text{Coma}} = (6931 \pm 45) + 272 \text{ km s}^{-1} = 7203 \pm 45 \text{ km s}^{-1}$$

Como puede verse, este tipo de correcciones de velocidades peculiares no son nada despreciables, y hay que hacerlas con sumo cuidado pues se pueden obtener importantes desviaciones en los resultados obtenidos por uno u otro método.

#### 6.4 CORRECCION DE EFECTOS DE REDSHIFT EN LA ZONA VIRIALIZADA INTERNA DE UN CUMULO DE GALAXIAS

Según vimos anteriormente, lo primero que llama la atención en el análisis de un catálogo de galaxias, especialmente cuando éste es representado en

proyección coordenadas angulares-redshift, es la existencia de estructuras filamentosas dispuestas de modo perfectamente alineado en dirección radial. Tales artefactos observacionales (conocidos como "Dedos de Dios") no son más que la consecuencia de la existencia de zonas localmente virializadas (típicamente las zonas más internas de cúmulos de galaxias), en las cuales se alcanzan velocidades peculiares en un régimen dinámico (no coherente) realmente importantes, comparables incluso a la propia velocidad de expansión del flujo de Hubble. Como se trata de zonas virializadas, el régimen de velocidades peculiares es prácticamente aleatorio, siendo la composición de velocidad de expansión y la proyección radial del vector velocidad peculiar lo que determina dicha estructura aparentemente filamentaria en el espacio de redshift.

Ahora bien, aunque la idea general del efecto parece clara, el análisis detallado del mismo, así como de su corrección, requiere ciertas consideraciones. La primera de ellas está relacionada con la propia composición matemática de velocidades radiales. Dada la magnitud de las velocidades que entran en juego, la simple composición aditiva no es correcta, y la "suma" de la velocidad de expansión y la velocidad peculiar ha de hacerse en un contexto relativista.

A partir de los principios de la Relatividad General puede deducirse la siguiente fórmula para la composición de la velocidad de expansión y las velocidades peculiares propias de cada galaxia, con respecto a un observador dado,

$$1 + z = (1 + z') \frac{\sqrt{1 + V_R^2}}{\sqrt{1 + V_E^2}} \frac{1 + V_E}{1 + V_R} \quad [6.14]$$

siendo  $z$  redshift de la galaxia, miembro de un cúmulo de galaxias, con velocidad peculiar radial  $V_E$ . El observador tiene una velocidad peculiar radial  $V_R$ .  $z'$  sería el redshift de la galaxia si fuesen cero todas las velocidades peculiares dentro del cúmulo.

Despreciando términos cuadráticos en velocidades peculiares, la ecuación [6.14] puede escribirse del modo

$$1 + z = (1 + z') (1 + V_E - V_R) \quad [6.15]$$

Tomando promedios en esta expresión para todas las galaxias del cúmulo resulta la siguiente relación

$$\langle z \rangle = \langle z' \rangle + \langle V_E \rangle - V_R + \langle z' \rangle (\langle V_E \rangle - V_R) \quad [6.16]$$

Por otro lado, para el centro de masas del cúmulo podemos escribir la relación

$$V_{CM} = z'_{CM} + \langle V_E \rangle \quad [6.17]$$

lo que nos permite estimar las posiciones del centro dinámico de un cúmulo, cuando éste es desconocido, o la relación entre el valor medio de las velocidades peculiares y la velocidad del centro dinámico del cúmulo, si éste es conocido.

### **Análisis estadístico de la dispersión de velocidades peculiares dentro de un cúmulo de galaxias**

En un artículo clásico, Quintana y Lawrie (1982) analizaron detalladamente la determinación de la dispersión de velocidades en cúmulos de galaxias (particularmente en cúmulos del tipo cD). La idea central de su trabajo consistía en probar, mediante argumentos estadísticos, que la presencia de un cuerpo masivo central constituyendo el centro dinámico del cúmulo (galaxia cD) es compatible con los datos observacionales respecto a media y dispersión de velocidades radiales observadas. Sin embargo, esto no es algo claramente justificado, y parece evidente que, al margen de aspectos puramente estadísticos, puede haber una razón física de fondo que explique las discrepancias observadas en numerosos cúmulos entre la hipótesis de un centro dinámico conocido y la distribución de velocidades peculiares observadas.

Suponiendo que la velocidad media de un cúmulo de galaxias puede ser determinada *a priori* mediante algún procedimiento, la dispersión de velocidades radiales observada viene dada por

$$\sigma_{obs}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - V_o)^2}{n} \quad [6.18]$$

donde  $v_i$  es la velocidad radial de un miembro del cúmulo con respecto a nuestro grupo local (corregida del efecto de velocidad peculiar del observador), y  $V_o$  es la velocidad media conocida del cúmulo. Estas velocidades se obtienen a partir de medidas del redshift usando las relaciones del efecto Doppler relativista (Harrison, 1974; Faber, Dressler, 1977).  $n$  es el número de galaxias en la muestra, excluyendo el objeto que nos proporciona el valor de  $V_o$ .

El efecto de los errores  $\varepsilon_i$  en la medición de cada velocidad radial  $v_i$  debe ser también considerado, y descontado en el cálculo de la dispersión real a partir de la observada. De acuerdo con los cálculos de Danese *et al.* (1980), el valor estimado de la verdadera dispersión de velocidades radiales viene dado por

$$\sigma_{\text{est}}^2 = \sigma_{\text{obs}}^2 - \frac{\bar{\varepsilon}_i^2}{\left(1 + \frac{V_0}{c}\right)^2} \quad [6.19]$$

Es muy importante estimar correctamente los límites del intervalo de confianza, teniendo en cuenta tanto la propia dispersión intrínseca de velocidades peculiares como los errores (en sentido observacional) en las mediciones de redshift.

Realmente, para ser absolutamente rigurosos, la dispersión de velocidades de las galaxias del cúmulo viene dada por

$$\sigma_v = c\sigma_z = \left( \frac{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2}{(1 + \langle z \rangle)^2} \right)^{1/2} \quad [6.20]$$

### Método de corrección

El método propuesto para el análisis y corrección de los efectos de redshift en las zonas virializadas de los cúmulos de galaxias está realmente derivado de las técnicas de análisis de la dinámica de cúmulos. Consta esencialmente de tres etapas, y puede esquematizarse del modo siguiente:

#### A.- Determinación de las estructuras dominantes (cúmulos de galaxias) que poseen zonas virializadas

Lo primero a determinar es, evidentemente, cuáles son las zonas del catálogo de galaxias considerado en las que se dan este tipo de efectos, es decir, cuales son las zonas virializadas donde cabe aplicar este tipo de correcciones.

La identificación de las zonas virializadas en un catálogo de galaxias es bastante directa, sobre todo cuando el catálogo es representado en la proyección angulo-redshift. Las estructuras filamentosarias radiales son entonces fácilmente identificables, incluso mediante simple inspección

visual. No obstante, es conveniente aplicar algoritmos más efectivos para la búsqueda de estructuras virializadas en un catálogo de galaxias que la mera inspección visual.

Afortunadamente, además de catálogos de "galaxias" disponemos de catálogos de "cúmulos de galaxias", con lo que es fácil poner en correspondencia ambos catálogos e identificar las zonas virializadas, que corresponderán con las posiciones de cúmulos ricos (densos) suficientemente evolucionados.

Los catálogos de cúmulos de galaxias son compilaciones que a su vez proceden del análisis de catálogos de galaxias (generalmente no catálogos globales, sino catálogos más detalladas comprendiendo sólo aquellas zonas en las que se hallan los cúmulos dominantes), aunque algunos catálogos de cúmulos proceden directamente de la observación de cúmulos, con lo que resultan complementarios de los catálogos de galaxias. Los catálogos de cúmulos fueron inicialmente elaborados a partir de proyecciones bidimensionales sobre la esfera celeste (prescindiendo de la coordenada radial más difícil de determinar) de la distribución de galaxias. Los cúmulos identificados de este modo como tales pueden ser entonces estudiados con más detalle midiendo redshifts de galaxias que ya de antemano se sabe se hallan dentro de dichos cúmulos.

Einasto *et al.* (1986) utilizaron más de 90 cúmulos para llevar a cabo la corrección por ellos propuesta. La corrección que ahora estamos discutiendo es de hecho muy similar a la realizada por Einasto *et al.*, pero pretende ser más completa en cuanto a los detalles y en la sistemática a aplicar.

Es en todo caso preferible utilizar datos precisos y contrastados para cada uno de los cúmulos, utilizando una compilación de cúmulos de galaxias no realizada *ad hoc* a partir de relaciones publicadas de modo disperso, sino que de algún modo represente una compilación coherentemente realizada combinando todos los datos observacionales disponibles y ponderando las discrepancias —a menudo frecuentes— entre los mismos. Existen actualmente compilaciones de este tipo, como por ejemplo *A compilation of redshifts and velocity dispersions for Abell clusters* (Struble y Rood, 1987), que recopilan todos los datos anteriores y proporcionan unos valores promedios ponderados de redshift, dispersión de velocidades y número de galaxias para cada cúmulo. Como la idea de los autores de las compilaciones es ir actualizando dichos datos a medida que se vayan disponiendo de más

determinaciones de redshift, parece adecuado el utilizar una compilación más establecida que listas de cúmulos extraídas de publicaciones concretas, donde en ocasiones los datos no han sido adecuadamente contrastados y ponderados con otras observaciones.

#### **B.- Determinación del conjunto de galaxias que constituyen cada perturbación (cúmulo)**

Antes de entrar a discutir el método a aplicar en la corrección de los efectos de velocidades peculiares debidos al hecho de que las galaxias interaccionan entre sí agrupándose en cúmulos de galaxias, es preciso analizar hasta qué punto puede establecerse claramente qué galaxias pertenecen a un determinada cúmulo.

La existencia de cúmulos en la distribución de galaxias es evidente, e incluso en muchos de tales cúmulos es fácil determinar, mediante la observación, un centro dinámico de dicho cúmulo o al menos el centro de masas aproximado del mismo. Establecida así la presencia del cúmulo y su localización espacial, para corregir los efectos perturbadores de la presencia de la agrupación hay que establecer cuántas y cuáles son las galaxias que constituyen dicha agrupación.

En principio puede parecer trivial la composición del catálogo de galaxias y el catálogo de cúmulos para establecer cuales son las galaxias de nuestro catálogo que pertenecen a la zona de influencia de cada cúmulo, pero el problema no es en absoluto trivial. La mayor dificultad viene dada por la presencia de un fondo de galaxias en el medio sobre el que se halla la sobreabundancia local que constituye el cúmulo, y resulta difícil establecer en qué punto termina la agrupación y podemos ya decir que nos hallamos en el medio de fondo, pues en general se trata de una transición brusca o al menos de perfil no muy definido.

Además, hay que tener en cuenta el hecho de que el efecto de velocidades peculiares es precisamente tendente a aumentar dicha confusión de las galaxias del cúmulo con las del fondo, dada la dispersión espacial del cúmulo en el plano redshift-ángulo.

En todo caso, la determinación del conjunto de galaxias que van a constituir el "cúmulo" a considerar en el resto del proceso de corrección es algo que dependerá siempre de un criterio más o menos coherente y justificado.

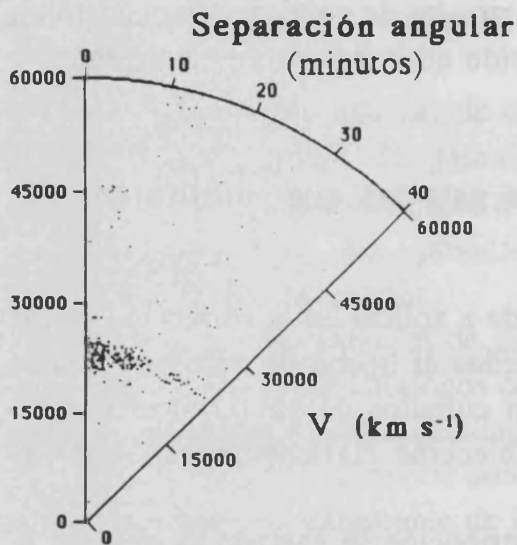


Fig. 6.9 Ejemplo típico de cúmulo rico en galaxias, con estructura geométrica bien definida y una galaxia cD dominante que constituye el centro dinámico del cúmulo. Se trata del cúmulo A2670 ( $\alpha=23^{\circ}52'$ ,  $\delta=-10^{\circ}41'$ ,  $z=0.076$ ). Los datos de posiciones de galaxias correspondientes a este cúmulo han sido utilizados en el desarrollo de los algoritmos de corrección de las distorsiones de redshift en zonas virializadas, en particular en lo relativo a la determinación de las galaxias que constituyen la perturbación, dada la idoneidad en la separabilidad entre galaxias de fondo y galaxias del propio cúmulo que puede apreciarse en esta representación (la escala angular ha sido ampliada un factor 67.5 para una mejor visualización).

Este problema se ha planteado siempre que se ha intentado analizar con detalle la estructura y dinámica de algún determinado cúmulo en concreto, y las soluciones que tradicionalmente se han dado dependen de la precisión requerida en cada caso.

Yahil y Vidal (1977) propusieron un criterio basado sólo en el análisis de velocidades radiales, según el cual una galaxia cuya velocidad se desvía más de 3 desviaciones estándar (calculada excluyendo la galaxia cuya pertenencia al cúmulo está siendo estudiada) de la media del resto de velocidades, entonces es clasificada como no perteneciente al cúmulo. El procedimiento fue ideado con el fin principal de eliminar galaxias del campo de fondo de una muestra preestablecida como galaxias (N) miembros del cúmulo. En primer lugar, se elimina la galaxia cuya velocidad radial se aleja más de la media de todo el conjunto, y se recalcula la media y desviación estándar para el resto de las galaxias (N-1). Si la velocidad de la galaxia eliminada se desvía de la nueva media así determinada más de 3 veces la nueva desviación estándar, entonces dicha galaxia es definitivamente eliminada como una contaminación de la muestra por galaxias del fondo. El proceso se continua de este modo hasta llegar a considerar una galaxia que sí resulte aceptada como perteneciente al cúmulo, en cuyo caso ya todas las demás serán también consideradas como tales.

Este procedimiento corta la distribución gaussiana a un nivel de  $3\sigma$ . Hay, pues, una probabilidad de 0.009 de que haya una galaxia fuera de dicho rango de  $3\sigma$ , de modo que algunas galaxias realmente pertenientes a un cúmulo rico pueden ser eliminadas por este procedimiento. Yahil y Vidal (1977) argumentan que la distribución de velocidades peculiares en un cúmulo no es realmente gaussiana, sino que existe realmente un corte en la velocidad de escape del cúmulo (por argumentos puramente gravitatorios), y el margen de error cometido normalmente por establecer el corte en  $3\sigma$  está dentro de las incertidumbres observacionales y estadísticas de la modelización. La elección del corte a  $3\sigma$  viene determinada como una solución de compromiso entre la contaminación por presencia de galaxias de fondo en las muestras y los efectos de borde introducidos por el corte en esas mismas muestras (Yahil y Vidal, 1977).

Este método ha sido utilizado en la mayor parte de los estudios de este tipo llevados a cabo desde entonces, si bien en algunos casos se han desarrollado métodos más sofisticados de análisis (Teague, Carter y Gray, 1990), basados en técnicas estadísticas más elaboradas. En todo caso, se trata siempre de argumentos meramente estadísticos los que determinan la pertenencia o no de una galaxia a un determinado cúmulo.

Dados los objetivos del presente estudio, y las limitaciones que conlleva una modelización estadística excesivamente compleja de la morfología de un cúmulo de galaxias, seguiremos el criterio de Yahil y Vidal (1977) en el análisis de los cúmulos considerados.

Cabe comentar, no obstante, que la aproximación seguida por Einasto *et al.* (1984) para determinar la zona de influencia de cada cúmulo, aunque simple, puede resultar práctica cuando se trata de corregir un catálogo de galaxias muy amplio donde deban considerarse muchos cúmulos, y sin tener además un número de galaxias suficiente en cada cúmulo para modelizar una corrección detallada, dada la magnitud aparente límite de la muestra global del catálogo.

### **C.- Determinación de las velocidades peculiares de cada galaxia respecto al centro dinámico del cúmulo**

Una vez corregido el efecto de velocidad peculiar del observador y determinado el conjunto de galaxias que debemos considerar para cada cúmulo, el resto del proceso depende del conocimiento que pueda tenerse,



por algún método directo o indirecto, de algunos de los parámetros del cúmulo de galaxias en consideración, y particularmente de la posible existencia de un centro dinámico del cúmulo conocido y del conocimiento de la dinámica (estado evolutivo) del propio cúmulo, en particular en función de ese centro dinámico que suponemos establecido. Si no existe un claro centro dinámico del cúmulo; o no es posible determinarlo con los datos observacionales disponibles, el proceso a seguir será diferente.

Distinguiremos por ello estas dos alternativas.

#### **a/ Centro dinámico del cúmulo conocido**

Este es el caso típico de algunos cúmulos de galaxias, como los muy estudiados cúmulos del tipo cD. Si dicho centro dinámico es conocido, entonces el problema se simplifica notablemente.

Es generalmente asumido que las galaxias cD determinan el centro cinemático de de cúmulos ricos, así como igualmente el centro geométrico espacial (Quintana y Lawrie, 1982; Teague, Carter y Gray, 1990). Se supone también que algún tipo de galaxias dominantes determinan el centro cinemático de cúmulos mas pobres (Kriss, Cioffi y Canizares, 1983). Por el contrario, el intenso estudio realizado sobre el cúmulo rico de tipo cD A2670 (con unas 220 galaxias) por Sharples, Ellis y Gray (1988) ha revelado que la galaxia cD central puede tener una velocidad peculiar grande con respecto a la media del cúmulo.

De acuerdo con el análisis realizado por Teague, Carter y Gray (1990), para cúmulos con una sola galaxia dominante de tipo cD o D (por ejemplo, 0627-54N, A1146, Ser 40/6, 00035-3500, y Shapley 8) se observa que en todos excepto uno de los casos la galaxia cD está realmente en el centro cinemático del cúmulo, y, si bien para el caso de Shapley 8 se observa una diferencia significativa, puede concluirse que en estos casos la galaxia cD está próxima al centroide de velocidades del cúmulo (con una diferencia de velocidades inferior a  $200 \text{ km s}^{-1}$ )

Para los cúmulos con más de una galaxia central dominante, el resultado es lógicamente diferente. En el caso de 0627-54 S, ambas galaxias dominantes estan separadas del centro cinemático del cúmulo. En el caso de cúmulos con tres o cuatro galaxias dominantes (A1680, 22315-3800 y DC 0622-64) se observa que en todos los casos hay sólo una de las galaxias dominantes en —o cerca del— centro cinemático del cúmulo, mientras las otras galaxias dominantes estan lejos de dicho centroide.

En el caso de cúmulos con un centro dinámico conocido, el problema puede abordarse combinando criterios de tipo estadístico con criterios de tipo cinemático.

#### **b/ Centro dinámico del cúmulo desconocido**

En este caso el problema es lógicamente mucho más complejo. De acuerdo con los resultados obtenidos por Teague, Carter y Gray (1990) en el caso de cúmulos sin centro dinámico conocido (o varios centros dinámicos), el problema debe abordarse desde criterios meramente estadísticos.

Los intentos por elaborar algún tipo de modelos cinemáticos para estos casos pueden fracasar. El cúmulo SC 2357-61, clasificado en el grupo de los que no presentan galaxias dominantes, presenta sin embargo una radiogalaxia brillante (42), pero que está situada lejos del centro con una velocidad peculiar grande ( $\approx 900 \text{ km s}^{-1}$ ) respecto a la media del cúmulo.

Así pues, en caso de dudas acerca la existencia de un claro centro dinámico del cúmulo, lo mejor es recurrir a argumentos meramente estadísticos de la distribución de velocidades.

#### **D.- Corrección sistemática de velocidades peculiares para reconstruir la distribución real de galaxias**

El modelo propuesto para la corrección de redshift en la zona virializada interna de un cúmulo de galaxias se basa en asumir las siguientes hipótesis básicas:

a/ el centro del cúmulo es conocido (por ejemplo, una galaxia cD), o bien ha sido previamente determinado por algún procedimiento directo o indirecto de los antes indicados (en cualquier caso, si no existe una determinación mejor, se considera el valor medio de las velocidades radiales directamente observadas para todas las galaxias del catálogo dentro de la zona virializada del cúmulo)

b/ el cúmulo es esférico, y su radio  $r_0$  es conocido.

c/ la distribución de velocidades peculiares en la zona virializada es gaussiana.

La hipótesis más restrictiva es (b), dado que obliga a considerar cúmulos esféricamente simétricos en el espacio real (independientemente de cual es la forma aparente del cúmulo en el espacio de redshift), pero se trata de una hipótesis perfectamente razonable, salvo que existan subestructuras

internas o se trate de un cúmulo compuesto de la fusión de varios cúmulos más primitivos. La actual disponibilidad de datos no permite considerar este tipo de situaciones anómalas, por lo que adoptaremos (b) como hipótesis generalmente válida.

Con estas tres hipótesis, la velocidad peculiar del centro dinámico del cúmulo es cero,  $V_{PD} = 0$ .

La velocidad radial  $V_E$  de cada galaxia del cúmulo viene dada por

$$V_E = z'_E + V_{PE} \quad [6.21]$$

donde  $z'_E$  es la velocidad radial de origen puramente cosmológico (redshift) y  $V_{PE}$  es la velocidad peculiar de la galaxia respecto al centro del cúmulo.

Tomando promedios en dicha expresión se tiene

$$\langle V_E \rangle = \langle z'_E \rangle + \langle V_{PE} \rangle \quad [6.22]$$

y para el centro del cúmulo se tiene (por las hipótesis (a) y (b) )

$$V_D = \langle z'_E \rangle \quad (\text{pues } V_{PD} = 0) \quad [6.23]$$

de donde

$$\langle V_{PE} \rangle = \langle V_E \rangle - V_D \quad [6.24]$$

Es decir, la media de la distribución de velocidades peculiares se obtiene simplemente de la diferencia entre la media de las velocidades radiales de las galaxias del cúmulo y la velocidad radial del centro dinámico del mismo.

La desviación estandard de la distribución de velocidades peculiares ( $\sigma_{PE}$ ) la suponemos en principio igual a la desviación estandard de las propias velocidades radiales ( $\sigma_E$ )

$$\sigma_{PE} = \sigma_E \quad [6.25]$$

con lo que tenemos determinados los dos parámetros ( $\langle V_{PE} \rangle, \sigma_{PE}$ ) que caracterizan la distribución gaussiana de velocidades peculiares asumida en la hipótesis (c).

En la aproximación de redshift bajo (que es lo usual cuando hablamos de catálogos de galaxias; por ejemplo,  $z_{\max} = 0.05$  para el Catálogo del CfA), se tiene  $V_E \approx 2 R'_E$ , ( $c=1$ ).

Luego

$$\langle R'_{PE} \rangle = \langle R'_E \rangle - R'_D \quad [6.26]$$

Ahora bien, puesto que hemos asumido que el cúmulo es esférico y de radio  $r_0$  conocido, dados  $R'_E$  y  $R'_D$ , los posibles valores de  $R'_{PE}$  están comprendidos en un rango conocido

$$R'_{PE}^{(-)} \leq R'_{PE} \leq R'_{PE}^{(+)} \quad [6.27]$$

donde (ver figura 6.10)

$$R'_{PE}^{(-)} = R'_E - \left[ R'_D \cos \vartheta' - \sqrt{r_0^2 - R_D'^2 \sin^2 \vartheta'} \right] \quad [6.28]$$

$$R'_{PE}^{(+)} = R'_E - \left[ R'_D \cos \vartheta' + \sqrt{r_0^2 - R_D'^2 \sin^2 \vartheta'} \right] \quad [6.29]$$

La corrección se centrará, pues, en la determinación de  $R'_{PE}$  dentro de este intervalo.

En principio, puesto que la distribución de los valores de  $R'_{PE}$  obedece a una distribución gaussiana, cabría asignar a  $R'_{PE}$  el valor más probable dentro del intervalo de valores posibles para un  $R'_E$  dado.

Este método es rápido y eficaz, pues comprime toda la distribución de galaxias a la esfera dentro de la cual se halla realmente el cúmulo.

Sin embargo, las simulaciones numéricas realizadas (mediante métodos de Montecarlo) para testar estos modelos de corrección conducían a resultados un tanto incoherentes en cuanto a la distribución de galaxias resultante dentro de la esfera de radio  $r_0$ .

En efecto, éste método no proporcionaría una caída radial del perfil de densidad desde el centro del cúmulo, ni una distribución resultante de velocidades peculiares acorde con la distribución teórica (gausiana) inicialmente supuesta.

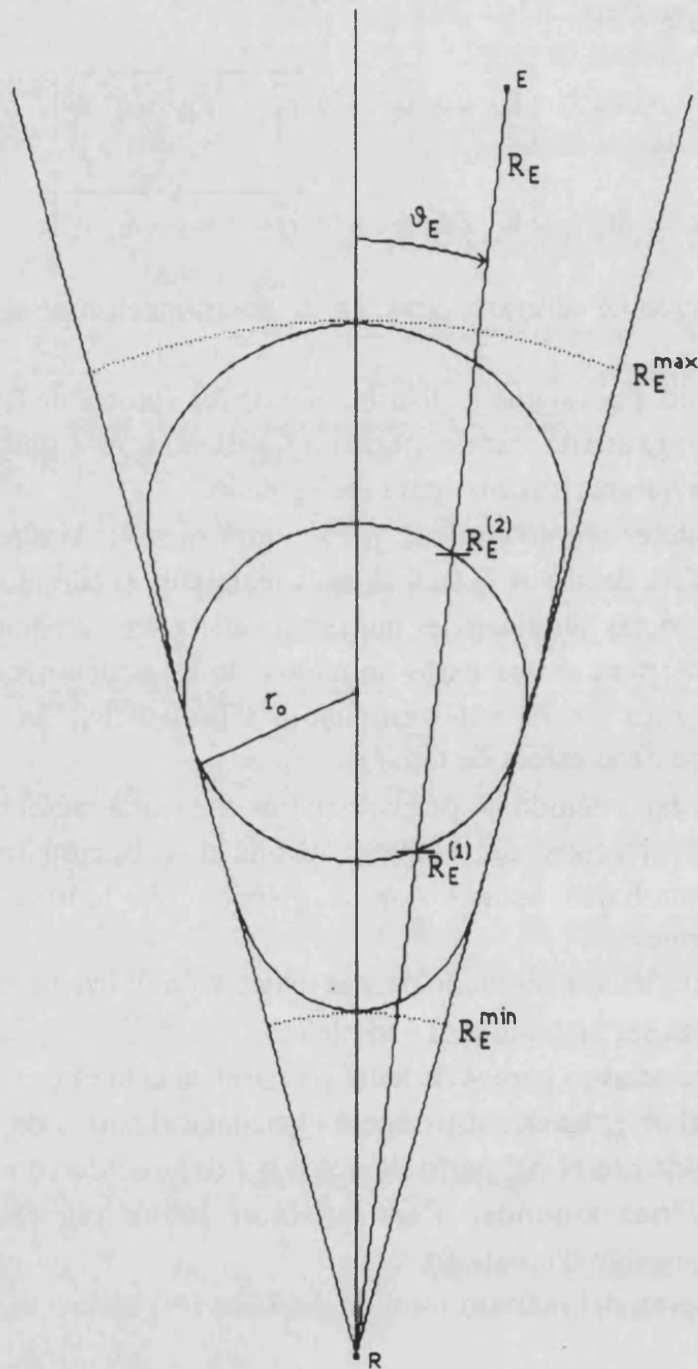
Por ello, el método adoptado para la asignación del valor de  $R'_{PE}$  a cada galaxia ha debido ser un tanto más complejo.

Dos condicionantes hemos de tener en cuenta a la hora de reconstruir la distribución real de galaxias: distribución gaussiana aleatoria de velocidades peculiares y caída radial del perfil de densidad de acuerdo con la hipótesis de simetría esférica asumida. Para satisfacer ambos requerimientos, el procedimiento seguido consiste en:

a/ determinación del número total de galaxias (N) dentro de dicha zona virializada

b/ generación de una distribución de velocidades aleatorias  $v_i$  ( $i=1,N$ ), gaussiana, caracterizada por los parámetros ( $\langle V_{PE} \rangle, \sigma_{PE}$ )

c/ generación de una distribución de posiciones aleatorias  $r_i$  ( $i=1,N$ ) siguiendo una distribución radial con caída en ley de potencias ( $r^\gamma$ ) en torno a la posición central del cúmulo (el parámetro característico  $\gamma$  es



**Fig. 6.10** Esquema correspondiente a la geometría considerada para describir el efecto de distorsión de redshift producida por velocidades peculiares aleatorias en la zona virializada interna de cúmulos de galaxias. La escala angular está deliberadamente exagerada.

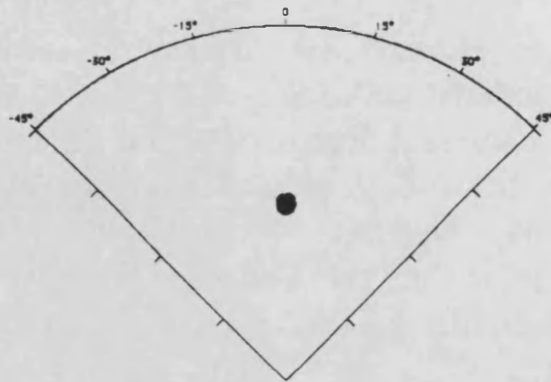
proporcionado por el catálogo de cúmulos de galaxias del que se extrajo inicialmente la información sobre los cúmulos de galaxias a considerar, o bien se estima a partir de la proyección angular de las galaxias del cúmulo)

d/ Para la corrección de cada galaxia, se le asigna como posición real dentro del cúmulo aquella correspondiente a una  $r_i$  (extraída de la distribución de posiciones) compatible con la  $v_i$  extraída de la distribución aleatoria de velocidades que resulte compatible con el rango de posiciones posibles  $[R_{PE}^{(-)}, R_{PE}^{(+)})$  y compatible con el rango de velocidades peculiares posibles  $[R_E' - R_{PE}^{(-)}, R_E' - R_{PE}^{(+)})$ .

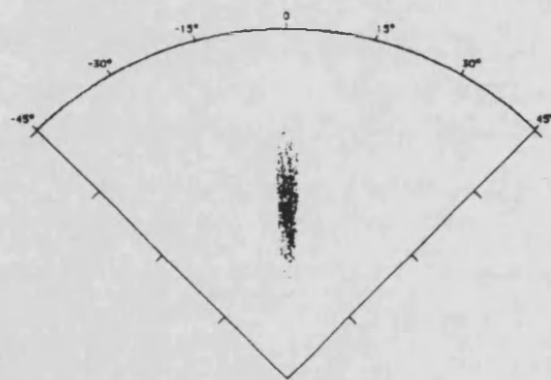
En principio, lo más probable es que exista una única combinación de valores  $(r_i, v_i)$  que satisfaga ambas condiciones. Si existieran varios pares  $(r_i, v_i)$  que satisfagan ambas condiciones, basta seleccionar aquella que proporciona una velocidad peculiar más pequeña (en módulo). La aplicación sistemática de este criterio elimina ambigüedades. Una vez que a una determinada galaxia se le asignado un par  $(r_i, v_i)$  de las distribuciones aleatorias de posiciones y velocidades generadas, ambos valores  $r_i$  y  $v_i$  se eliminan de las correspondientes distribuciones para que no puedan ser asignados a otra galaxia del catálogo. De este modo se garantiza que la distribución resultante en el espacio real sea plenamente compatible con la distribución teórica supuesta a partir de las observaciones en el espacio de redshift, y, por otro lado, se tiene un método unívoco y sistemático de asignar una velocidad peculiar a una galaxia situada en una zona en la que por hipótesis las velocidades peculiares son aleatorias.

La figura 6.11 muestra un ejemplo de aplicación de esta sistemática de corrección en un ejemplo teórico ideal. En primer lugar, se ha generado una distribución de puntos (a) a los cuales se les han asignado velocidades peculiares aleatorias gaussianas, que se han sumado a la velocidad de expansión para dar la distribución observada (b). La distribución "real" reconstruida a partir de la observada (c) es prácticamente coincidente con la distribución inicial supuesta. Sin embargo, en el caso de datos reales las cosas no son tan simples, dado que la distribución de velocidades peculiares reales no es estrictamente gaussiana y es difícil conseguir un resultado de este tipo.

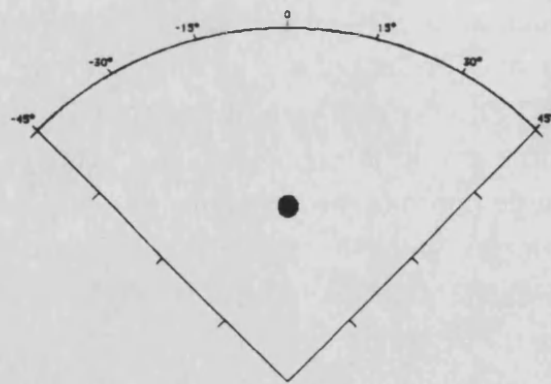
Desgraciadamente, el problema es que no podemos valorar la precisión de la distribución corregida resultante en casos reales, y lo único que podemos afirmar es que dicha distribución resultante será en todo caso "mas



a/ Distribución original de los puntos (galaxias) que constituyen el cúmulo



b/ Apariencia observacional de las galaxias que constituyen el cúmulo debido al efecto de velocidades peculiares aleatorias (se supone distribución gaussiana con  $\sigma=800 \text{ km s}^{-1}$ )



c/ Resultado de la corrección

**Fig. 6.11** Simulación numérica para ilustrar el efecto de los "Dedos de Dios" en la zona virializada interna de los cúmulos de galaxias, y el procedimiento para su corrección descrito en el texto. En este caso la concordancia entre la distribución real (a) y la corregida (c) es prácticamente perfecta, dado que la distribución de velocidades peculiares aleatorias generadas es efectivamente gaussiana.

parecida a la real" de lo que es la distribución observada directamente en el espacio de redshift. Como normalmente este tipo de correcciones va destinadas a un análisis estadístico de los catálogos de galaxias corregidos y no a un análisis morfológico detallado de estructuras particulares, este tipo de metodología de corrección es perfectamente válido. Cuando el objetivo sea el análisis de una estructura particular será preciso desarrollar algoritmos específicos adaptados a las peculiaridades de cada estructura.

### 6.5 METODO GENERAL DE CORRECCION DE CATALOGOS BASADO EN LA MODELIZACION DE CUMULOS ESFERICOS

Siguiendo el esquema propuesto por Sheldner y Peebles (1977) y Bahcall (1986), y aplicado posteriormente en numerosos estudios (Olivier *et al.*, 1990), podemos suponer que la distribución espacial de galaxias en un volumen suficientemente grande  $V$  viene caracterizada por una función densidad numérica de galaxias  $n(\vec{r})$  que puede aproximarse como la superposición de dos componentes: por un lado, halos esféricos de galaxias agrupadas en torno a los centros de un número finito  $N_c$  de cúmulos, siguiendo una ley de densidad característica local  $\rho(r)$  dependiente únicamente de la distancia radial ( $r$ ) al centro del cúmulo correspondiente; por otro lado, una componente de galaxias no agrupadas en cúmulos (medio de fondo), que viene dada por  $(1-f)\bar{n}$ , donde  $\bar{n}$  es la densidad numérica media de galaxias, y  $f$  es la fracción de todas las galaxias que están agrupadas en cúmulos.

Bajo estas hipótesis, la densidad numérica de galaxias viene dada por

$$n(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_c} \rho(|\vec{r} - \vec{r}_i|) + (1-f)\bar{n} \quad [6.30]$$

donde  $\vec{r}_i$  es la posición del centro de cada cúmulo  $i$ .

Siguiendo este esquema, podemos construir un modelo de universo con cúmulos a partir de los resultados obtenidos en el Capítulo 5 para cada cúmulo individualmente. La componente no agrupada en cúmulos se vería inalterada por este tipo de efectos, al ser esencialmente un medio de fondo homogéneo imperturbado —en primera aproximación— por la



componente de galaxias agrupadas en cúmulos, mientras dicha componente de galaxias sufriría el tipo de distorsiones descritas anteriormente.

Sin embargo, pese a ser éste un esquema de cálculo tradicionalmente seguido en el estudio de modelos cosmológicos inhomogéneos, el tipo de efectos angulares y de redshift que estamos considerando no se comportan como mera suma en este sentido de  $N$  cúmulos aislados, sino que la acumulación de efectos de varias inhomogeneidades depende de la trayectoria seguida por la luz desde la fuente hasta el observador a través de las diversas estructuras presentes en el camino. Por tal motivo, no es válido hacer un modelo acumulativo de efectos de  $N$  cúmulos, sino que es preciso proceder a una modelización más general de este tipo de efectos descomponiendo la perturbación global en un desarrollo de Fourier en ondas planas, como veremos seguidamente.

Para ilustrar la dificultad en considerar un modelo de  $N$  cúmulos compuesto por la suma de efectos de cúmulos (esféricos) aislados, basta considerar el simple caso de dos cúmulos esféricos alineados entre sí (y distantes entre ellos) y alineados con la posición del observador. Sólo en el caso de que los dos cúmulos estén suficientemente aislados para que pueda considerarse que el efecto de uno es independiente del otro (de modo que la luz cruza primero la zona de influencia del cúmulo más lejano del observador, y el resultado del paso por dicha zona del primer cúmulo se considera la señal de entrada en la zona de influencia del segundo cúmulo) puede encontrarse una solución explícita para la trayectoria.

De todas formas, el considerar las perturbaciones en el universo como superposición de cúmulos esféricamente simétricos es una alternativa que resulta apropiada en primera aproximación al problema, e incluso es perfectamente aceptable para describir muchas de las estructuras observadas.

El proceso de corrección de catálogos basado en la modelización de cúmulos esféricos es un tanto completo, pero autoconsistente, si bien es bastante dependiente de la precisión en la determinación de la posición del centro de cada cúmulo a partir de métodos independientes del propio análisis del catálogo de galaxias que se pretende corregir. Esencialmente consta de las siguientes etapas:

1/ En primer lugar es preciso definir los cúmulos a considerar en el proceso de corrección. Del análisis del catálogo, una vez discriminados en

el mismo los diferentes cúmulos de galaxias dominantes que en principio cabe considerar, podemos modelizar cada cúmulo de galaxias de acuerdo con el esquema paramétrico discutido en el Capítulo 5, de modo que cada cúmulo podrá caracterizarse por las funciones  $\delta(r_E)$  y  $\bar{\delta}(r_E)$  (suponiendo  $B(r_E)$  despreciable para este tipo de inhomogeneidades), y siendo  $r_E$  la distancia radial respecto al centro del cúmulo. Estas tres funciones de  $r_E$  dependerán de unos pocos parámetros ( $r_c, \gamma, \dots$ ) dependiendo de la modelización considerada para los cúmulos, que son los que realmente habrá que determinar en cada caso.

2/ Seguidamente, a aquellas galaxias situadas en el núcleo de cada cúmulo se les asigna la distancia del propio cúmulo (estimada de modo independiente a la propia medición de redshift por algún otro procedimiento), siempre que la diferencia de velocidades radiales de recesión no se desvie más de  $2000 \text{ km s}^{-1}$  de la media del cúmulo.

3/ A las demás galaxias que no han sido asignadas directamente a un cúmulo particular se les asignan distancias estimadas directamente a través de la velocidad de recesión, mediante un modelo de velocidades peculiares muy simple. Este modelo depende de la precisión que se desee alcanzar. Por ejemplo, Rowan-Robinson *et al.* (1990) utilizan un modelo en el que las galaxias con  $V_o < 2000 \text{ km s}^{-1}$  son corregidas de los efectos del Grupo Local (dipolo de  $300 \text{ km s}^{-1}$  hacia la dirección  $(l,b) = (90,0)$ ), mientras las galaxias con  $V_o > 2000 \text{ km s}^{-1}$  son corregidas primero del movimiento con respecto al fondo de radiación de microondas (dipolo de  $600 \text{ km s}^{-1}$  hacia la dirección  $(l,b) = (268,27)$ ). En este simple modelo, el Grupo Local se mueve de modo compacto siguiendo la dirección del dipolo de microondas, mientras las galaxias más distantes están "en reposo" con respecto al fondo de microondas. El problema es determinar el radio de la región local que se mueve conjuntamente. Aunque no parece que éste sea un parámetro crítico (Rowan-Robinson *et al.*, 1990), su valor puede depender de cual sea el volumen total de la muestra que se pretende corregir, en relación con el volumen considerado "entorno local".

4/ Para cada galaxia, una vez corregida su velocidad de recesión de acuerdo con el modelo anterior y determinada su distancia radial aparente, se calcula su distancia a todos y cada uno de los  $N$  cúmulos considerados,

asignándose como "perteneciente" al cúmulo más próximo a la misma, si dicha distancia al centro de cúmulo es menor de 30 Mpc, considerada como distancia máxima a la que puede extenderse el halo de influencia de un cúmulo.

5/ Para aquellas galaxias asignadas de este modo a un cúmulo particular, la velocidad peculiar de dicha galaxia hacia el centro del cúmulo al que pertenece en entonces calculada modelizando dicha caída radial. Rowan-Robinson *et al.* (1990) modelizan dicha caída mediante una ley del tipo

$$V = \frac{A}{r^n} \quad [6.31]$$

siendo  $r$  la distancia radial al centro del cúmulo ( $4 < r < r_2 \leq 30$  Mpc) o bien

$$V = \frac{A r_2^2}{r^2 r_2^n} \quad (\text{para } r > r_2) \quad [6.32]$$

suponiendo que el cúmulo termina abruptamente para  $r=r_2$ .

La zona central, con radio de 4 Mpc es tratada de modo distinto por los problemas de no linealidad. En realidad, según vimos en el Capítulo 2 de esta memoria, para dar cuenta de los efectos no lineales, dicha caída radial debería ser modelizada mediante una ley del tipo

$$V = \frac{1}{1+\delta} \frac{A}{r^n} \quad [6.33]$$

Otros tipo de modelos compuestos de varias leyes de potencias en la coordenada radial pueden ser considerados, reproduciendo de este modo comportamientos más realistas para cúmulos de galaxias.

Para determinar el parámetro  $n$  y la distancia de corte  $r_2$ , Rowan-Robinson *et al.* (1990) primero calculan la velocidad peculiar de cada galaxia a partir del contaje numerico de las galaxias en su entorno es decir, a partir del campo de densidad, de acuerdo con el procedimiento descrito en 4.4. Una vez determinada la componente de caída radial hacia el centro del cúmulo más próximo,  $n$  y  $r_2$  se determinan a partir de todo el conjunto de cúmulos considerados por un método de mínimos cuadrado, minimizando la cantidad

$$\sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{n_i} w_j \left( v_j - \frac{A_i}{r_j^n} \right)^2 \quad [6.34]$$

siendo  $N_c$  el número de cúmulos considerados, y  $n_i$  el número de galaxias que pertenecen al cúmulo  $i$ .  $w_j$  es una función peso que tiene en cuenta de

los efectos de selección por luminosidad aparente límite de las muestras considerdas. De hecho,  $w_j$  es la inversa de la función de selección

$$w_j = \frac{1}{\phi_j} \quad [6.35]$$

La minimización de [6.34] proporciona como solución un valor de  $A$ , que es el utilizado para el calculo de la velocidad peculiar resultante.

Este procedimiento es útil cuando se intenta analizar el campo de velocidades de modo detallado en un volumen espacial limitado, pero no es apropiado cuando se trata de corregir sistemáticamente un catálogo de galaxias que abarque un volumen suficientemente grande como para ser una muestra "representativa" del universo observable. Por tal motivo, en la aplicación de este tipo de técnicas a la corrección de catalogos de galaxias resulta más conveniente determinar primero  $n$  y  $r_2$ , y a partir de ellos modelizar la caída al centro del cúmulo, en lugar de determinar  $n$  y  $r_2$  mediante las velocidades peculiares calculadas a partir del campo de densidad, que es el procedimiento seguido cuando lo que se pretende es determinar precisamente el campo de velocidades.

6/ Una vez que la posición de cada galaxia es corregida de acuerdo con el modelo de cúmulo al que pertenece, hay que comprobar que la distribución de materia resultante de la corrección efectivamente corresponde con la ley de distribución supuesta a la hora de aplicar tal corrección. Si ello es así (dentro de un determinado umbral de error), la corrección puede considerarse satisfactoria. Si no es así, será preciso desarrollar un procedimiento iterativo hasta que la distribución resultante coincida con la distribución supuesta al aplicar la corrección.

El procedimiento de corrección de catálogos basado en la modelización de cúmulos (el que sean esféricos es simplemente una restricción adicional) supone la primera aproximación al abordar un modelo de corrección. El principal problema que presenta es la necesidad de conocer *a priori* cuales van a ser las inhomogeneidades a tener en cuenta en el proceso de corrección. Esta necesidad es un grave condicionante, ya que no siempre es fácil determinar los cúmulos presentes en una muestra de galaxia. Además, se plantea el problema de la modelización de cada cúmulo y el de la estimación de las velocidades peculiares cuando hay contribuciones de múltiples cúmulos próximos.

Por todos estos inconvenientes, en el próximo apartado plantearemos un método alternativo de corrección de catálogos que no necesita conocimiento *a priori* de la posición y características de cada una de las inhomogeneidades presentes.

### **6.6 METODO GENERAL DE CORRECCION DE CATALOGOS BASADO EN LA DESCOMPOSICION ESPECTRAL EN SUMA DE ONDAS PLANAS**

Siguiendo nuestro objetivo de elaboración de un procedimiento sistemático de corrección de catálogos de galaxias, y como una alternativa a la modelización de cúmulos esféricos sobre un medio de fondo homogéneo seguida en el apartado anterior, vamos a considerar la descomposición espectral en un sumatorio de ondas planas como una modelización más general, ya que con un modelo de cúmulos esféricos no pueden describirse estructuras tales como filamentos y paredes observadas en los catálogos de galaxias.

Una manera absolutamente general de abordar el problema del análisis y corrección de catálogos de galaxias es el análisis de Fourier, que permite describir cualquier distribución de materia como una suma (en principio de infinitos términos) de ondas planas. La herramienta matemática a utilizar es la transformada de Fourier y el análisis de las componentes espectrales de la distribución.

En efecto, dada una distribución arbitraria de materia (que supondremos consistente en una nube de puntos de coordenadas  $(x,y,z)$  dadas) podemos caracterizar dicha distribución mediante una función discreta tridimensional, que represente el contraste de densidad como un conteo numérico por celdas. La función "contraste de densidad" de este modo determinada será dependiente del tamaño de celda, condicionado por el número total de puntos en la distribución y el tamaño del espacio al que dicha distribución corresponde, pero a partir de dicha función discreta podemos generar una función "continua" que represente el contraste de densidad, para a partir de ella calcular las correspondientes correcciones. Es éste un potente método de abordar las correcciones debidas a distorsiones observacionales (fundamentalmente en el redshift) en catálogos de galaxias reales.

Tres etapas hay que seguir en la corrección de las coordenadas de cada galaxia: En primer lugar, hay que determinar la función "contraste de densidad"  $\delta(\vec{x})$ , que será la función base para todo el cálculo posterior. En segundo lugar, habrá que calcular el campo  $B(\vec{x})$  (o  $\Phi(\vec{x})$ ) correspondiente a dicha función  $\delta(\vec{x})$ , así como sus correspondientes derivadas primera y segunda en cada punto. Por último, la aplicación de las fórmulas correspondientes, para el campo  $B$  y sus derivadas de este modo determinadas, dará lugar a la distribución (puntual) de galaxias resultante, o, en su caso, a la función "contraste de densidad real" resultante de este cálculo.

#### **A.- Determinación del contraste de densidad en cada punto a partir de la distribución puntual de galaxias**

El primer paso ha de ser la determinación de una función contraste de densidad  $\delta(\vec{x})$ , como función continua de las coordenadas espaciales  $(x,y,z)$ . Partimos para ello de los datos proporcionados por el catálogo de galaxias. En tales catálogos, la información es meramente puntual (cada galaxia es tratada como un punto con unas determinadas propiedades en cuanto a masa, luminosidad o morfología). La representación tridimensional del catálogo de galaxias daría lugar a una nube de puntos, a partir de la cual existen en principio infinitas posibilidades de definir una función contraste de densidad.

Aparte de otras consideraciones, el principal problema que aparece a la hora de definir el contraste de densidad es el nivel de detalle con el que el campo de densidad pretende ser reconstruido. Dependiendo de la escala espacial a la que deseen estudiarse los efectos, tal determinación puede ser más global (promediando estructuras pequeñas) o bien manteniendo las estructuras presentes en escalas intermedias. Dejando a un lado las técnicas de tipo "paramétrico" que lo que intentan es encontrar los parámetros característicos de estructuras espacialmente caracterizadas mediante una morfología predefinida, nos centraremos en aquellos métodos "no-paramétricos" que no hacen *a priori* ningún tipo de hipótesis acerca de la morfología de las estructuras a describir.

El método más elemental de definir una función contraste de densidad consiste en discretizar el espacio, definiendo unas celdas en forma de cubo,

y contar cuantas galaxias hay en cada celda. El tamaño de la celda constituye así el parametro crítico que determina la escala espacial a la cual va a reconstruirse el contraste de densidad. El problema que presenta este método es que diferentes valores del tamaño de celda dan lugar a estimaciones muy diferentes de  $\delta(\vec{x})$ , lo que convierte la elección de tamaño de celda en una cuestión crítica. Además, la función  $\delta(\vec{x})$  de este modo reconstruida es altamente discontinua, lo que presenta dificultades en el cálculo numérico posterior.

Para evitar este tipo de problemas, hemos adoptado como método el llamado "método de estimación del núcleo" (o método de Parzen) ampliamente utilizado en estadística para la evaluación de funciones de densidad de probabilidad a partir de los datos proporcionados por una muestra aleatoria. La idea central de este método es que el contraste de densidad en un punto viene determinado no solamente por los puntos más próximos del entorno, sino por todos los puntos de la distribución, de acuerdo con una función "peso" que hace contribuir cada punto de la muestra de acuerdo con su "distancia estadística" al punto en el cual se pretende calcular el contraste de densidad.

De acuerdo con este criterio, el contraste de densidad en cada punto viene dado por una ecuación del tipo

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^3} K\left(\frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{h}\right) \quad [6.36]$$

donde K es una función conocida como el núcleo de la estimación, y h es una función del número total de puntos en la distribución (N).

El núcleo de la estimación K(z) ha de cumplir las siguientes condiciones:

$$a/ \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = 1 \quad (\text{normalizado a la unidad}) \quad [6.37]$$

$$b/ \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz < \infty \quad (\text{integrable}) \quad [6.38]$$

$$c/ \sup |K(z)| < \infty \quad (\text{acotado}) \quad [6.39]$$

$$d/ \lim_{z \rightarrow \infty} |z K(z)| = 0 \quad (\text{ha de tender a cero más rápido que } 1/z) \quad [6.40]$$

La elección más corriente de la función núcleo es la distribución normal tridimensional, que satisface todas las propiedades anteriormente citadas

$$K\left(\frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{h}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Sigma|^{-1/2}} \exp\left(\frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)^T \Sigma (\vec{x} - \vec{x}_i)}{h^2}\right) \quad [6.41]$$

La función  $h(N)$  ha de cumplir las siguientes condiciones

$$a/ \lim_{N \rightarrow \infty} h(N) = 0 \quad (\text{asintóticamente insesgada}) \quad [6.42]$$

$$b/ \lim_{N \rightarrow \infty} Nh(N) = \infty \quad (\text{congruencia asintótica}) \quad [6.43]$$

$$c/ \lim_{N \rightarrow \infty} Nh^2(N) = \infty \quad (\text{congruencia uniforme}) \quad [6.44]$$

La elección de la función  $h(N)$  suele ser

$$h(N) = N^{-a/3} \quad [6.45]$$

donde  $0 < a < 0.5$ .

En el caso unidimensional, el estimador de Parzen es simplemente

$$\delta(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad [6.46]$$

con lo que el uso de un núcleo del tipo

$$K(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right) \quad [6.47]$$

es equivalente a considerar una curva normal centrada en cada punto de la muestra y sumar el resultado del producto de la gaussiana con todos los demás puntos en la muestra. El parámetro  $s$  es un "factor de suavizado" en este contexto. Dependiendo del valor del parámetro  $s$ , la función contraste de densidad resultante recogerá información de altas frecuencias espaciales (resultando picos de alto valor del contraste) o bien reconstruirá un campo de densidad de variación suave, donde los picos desaparecen y sólo son notables las frecuencias espaciales más bajas. De este modo, a partir de un contraste de densidad inicialmente altamente no lineal, puede reconstruirse el contraste correspondiente en un refimen lineal, sin más que elegir un parámetro de suavizado  $s$  suficientemente grande, y a costa de perder detalles de las estructuras.

De cara a la implementación efectiva de estos algoritmos, se utiliza la transformada rápida de Fourier (FFT) para la evaluación de la función



$\delta(\vec{x})$ , mediante convolución de la  $\delta(\vec{x})$  directamente determinada de la nube de puntos con la función núcleo adecuada, dado que en el espacio de frecuencias espaciales la convolución de funciones se convierte en un simple producto de sus transformadas, con lo que el cálculo resulta mucho más efectivo. Este tipo de técnicas es habitualmente utilizado en estadística (Silverman, 1982) para determinar la función de distribución de probabilidad a partir de un conjunto de datos discretos cuando dicha distribución no responde a un modelo funcional simple.

### B.- Cálculo del campo $B(x,y,z)$ , y sus derivadas, a partir del contraste de densidad $\delta(x,y,z)$

El campo  $B(x,y,z)$ , así como sus derivadas primeras y segundas, e incluso la integral del mismo sobre una determinada trayectoria espacial, puede calcularse a partir de la función contraste de densidad inicial, utilizando igualmente técnicas basadas en la transformada de Fourier de  $\delta(x,y,z)$ .

En realidad, el campo  $B(x,y,z)$  resulta de aplicar un filtro a las intensidades en la transformada de Fourier.

$$B(x,y,z) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{20}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.48]$$

Analogamente, las derivadas primeras y segundas del campo  $B$  pueden ser calculadas por un procedimiento similar

$$\frac{\partial B(x,y,z)}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_x}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) e^{-i\pi/2} \right] \quad [6.49]$$

$$\frac{\partial B(x,y,z)}{\partial y} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_y}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) e^{-i\pi/2} \right] \quad [6.50]$$

$$\frac{\partial B(x,y,z)}{\partial z} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_z}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) e^{-i\pi/2} \right] \quad [6.51]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,z)}{\partial x^2} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_x^2}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.52]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,z)}{\partial y^2} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_y^2}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.53]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,z)}{\partial z^2} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_z^2}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.54]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \mathcal{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_x q_y}{q^2} \mathcal{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.55]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,z)}{\partial x \partial z} = \mathfrak{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_x q_z}{q^2} \mathfrak{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.56]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \mathfrak{F}^{-1} \left[ - \frac{20 q_y q_z}{q^2} \mathfrak{F}(\delta(x,y,z)) \right] \quad [6.57]$$

Estas fórmulas permiten una implementación rápida y efectiva de todos los términos que intervienen en el cálculo del contraste de densidad, velocidades peculiares y las posiciones de cada galaxia en la muestra haciendo uso de propiedades de la transformada de Fourier.

Nótese que para el cálculo de las derivadas primeras es preciso aplicar un filtro de fase de  $\pi/2$  sobre la transformada de Fourier del contraste de densidad, para dar cuenta del cambio de fase en el desarrollo en ondas planas correspondiente. Esto no es necesario para las derivadas segundas, ya que están en fase con el campo B, y por lo tanto también con el contraste de densidad  $\delta$ .

Ahora bien, las ecuaciones 6.48-6.57 corresponden al caso en el que se conociese el contraste de densidad real, pues  $\delta$  representa en tales ecuaciones el contraste real, y no el efectivamente observado que es el que se puede calcular a partir de un catálogo de galaxias.

En realidad, la ecuación a resolver para calcular el campo B(x,y,z) a partir del contraste de densidad observado es una ecuación diferencial muy complicada, del tipo

$$\Delta B(x,y,z) = -20 \delta^{\text{real}}(\delta^{\text{obs}}; B; B_{,i}; B_{,ij}) \quad [6.58]$$

donde  $\delta^{\text{obs}}$  incluye términos con funciones del campo B y sus derivadas primera y segundas. Para determinar el campo B a partir de [6.58] sería necesario un procedimiento iterativo que, partiendo de la hipótesis  $\delta^{\text{real}} = \delta^{\text{obs}}$ , fuese sucesivamente convergiendo al valor real de  $\delta$  al considerar las fórmulas completas en la expresión [6.58].

Ahora bien, si tenemos en cuenta que para ciertos funcionales P(k) la relación entre la densidad espectral observada y la real viene dada por una simple proporcionalidad del tipo

$$[P(k)]^{\text{obs}} \approx 1.8 [P(k)]^{\text{real}} \quad [6.59]$$

según vimos en el Capítulo 4, entonces, en primera aproximación, suponiendo que las componentes  $\delta(k)$  puedan considerarse isótropas, tales componentes  $\delta(k)$  del desarrollo en ondas planas del campo B pueden ser calculadas a partir de las  $\delta^{\text{obs}}(k)$  determinadas a partir de la transformada de Fourier del contraste de densidad observado  $\delta^{\text{obs}}(x,y,z)$ . del modo

$$\delta(k) \approx 0.75 \delta^{\text{obs}}(k) \quad [6.60]$$

con lo que efectivamente pueden calcularse las expresiones 6.48- 6.57.

### C.- Modelo de corrección

Una vez determinado el campo  $B(x,y,z)$  y sus derivadas, el modelo de corrección propiamente dicho se basa simplemente en aplicar las fórmulas halladas en el Capítulo 3 para la determinación de las coordenadas reales a partir de los observables redshift-ángulo.

Evidentemente, antes de aplicar propiamente el método aquí descrito es preciso aplicar aquellas corrección "externas", tales como la corrección específica de redshift en las zonas virializadas y la corrección de velocidad peculiar del observador (especialmente si éste no está contenido dentro del volumen que constituye la muestra a corregir, o si dicha muestra a corregir no incluye toda la región en la que se halla la materia que da lugar a la velocidad peculiar del observador).

### Aplicación a la corrección del catalogo del CfA (Slice 1986)

Dado que no disponemos de datos suficientes para abordar la corrección "tridimensional" del catálogo, nos hemos limitado a la consideración de un plano del mismo. De hecho, el análisis realizado en dos dimensiones será directamente extrapolable al caso de tres dimensiones. Por otro lado, el análisis en el plano tiene la ventaja de una mejor representación visual de los resultados, y una mejor comprensión de cómo opera el método de corrección aplicado<sup>1</sup>.

Para esta aplicación hemos seleccionado un cuadrado extraído de la famosa Slice-1986, la primera "slice" completada hasta una magnitud aparente 15.5. Aunque dicha slice no corresponde a un plano (ver Fig. 6.5), la proyección sobre el plano tangente a la zona del cúmulo de Coma, para un entorno relativamente pequeño, no supone distorsiones geométricas

<sup>1</sup> De hecho, la corrección aplicada puede considerarse como un caso teórico, a modo de simulación, en el cual se ha recuperado a modo de ejemplo la zona del entorno del cúmulo de Coma, con el fin de reproducir situaciones realistas en la distribución de galaxias, pero sin pretender considerar esta corrección como una corrección absoluta del propio catalogo del CfA, dado que no se han tenido en cuenta los efectos de luminosidad que determinan la incompletitud de la muestra estudiada.

importantes, y permite trabajar en un plano bidimensional en lugar de sobre una superficie geoméricamente tan complicada como la que realmente representa el slice.

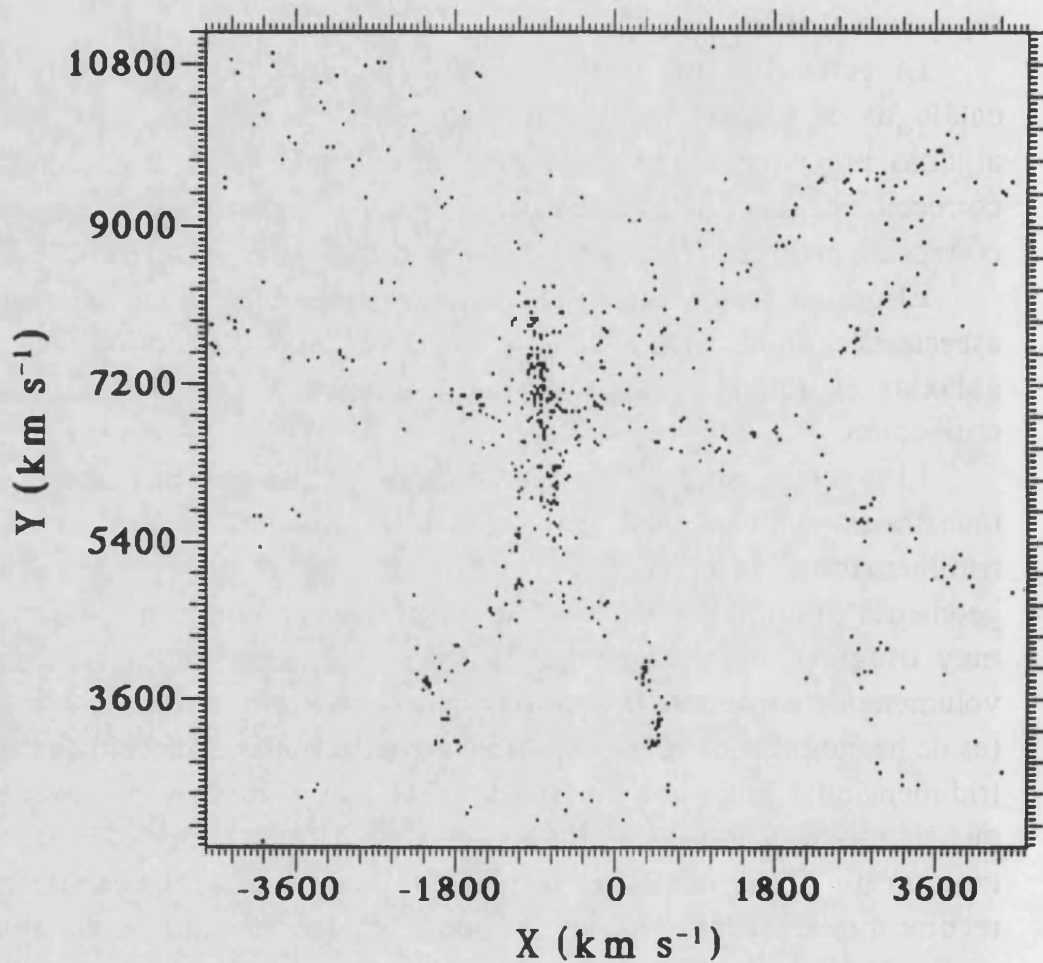
La generalización de este tipo de técnicas para la corrección de catálogos de galaxias tridimensionales resulta evidente. Sin embargo, algunas precisiones han de tenerse en cuenta a la hora de abordar la corrección de un catálogo de galaxias real, particularmente si se desea una corrección precisa y realista, teniendo en cuenta todos los factores.

El primer factor a tener en cuenta es la "completitud" del catálogo, aspecto éste íntimamente ligado a la función de luminosidad de la muestra de galaxias estudiada, y aspecto que es común a cualquier modelo de corrección.

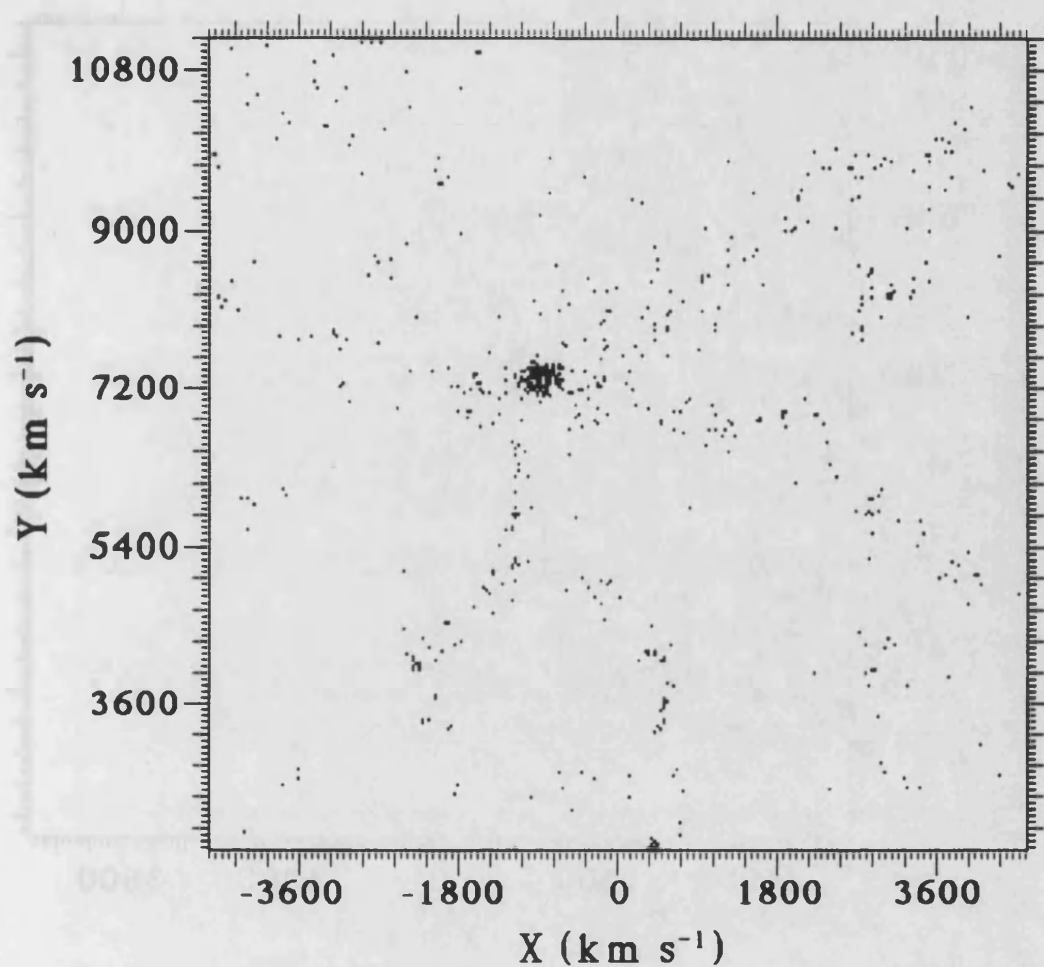
El segundo aspecto es la geometría de la muestra. En principio, toda muestra es tridimensional, pero, si bien la geometría ideal sería un cubo tridimensional, la geometría real dista mucho de ello (es frecuente la geometría en forma de "slice", lo que representa un volumen tridimensional muy irregular, como vimos en la figura 6.5). La forma concreta del volumen que constituye la muestra puede ser un factor altamente limitante (es de hecho prácticamente imposible modelizar una corrección de carácter tridimensional sobre una muestra tipo "slice"), y aunque existen técnicas que permiten "compensar" de algún modo el efecto del volumen de la muestra ninguna solución es plenamente satisfactoria. Generalmente se recurre a rellenar las zonas de las que se carece de datos de una muestra artificial absolutamente aleatoria hasta completar un "volumen de muestra" regular, preferiblemente cúbico. Otra alternativa es introducir "factores de forma" que compensen en el cálculo la geometría del volumen.

En este caso, al aplicar la corrección a una geometría tipo "slice", se ha decidido proyectar la distribución sobre un plano y seleccionar solamente el cuadrado central del slice, con lo que no hay efectos de bordes en la geometría a considerar en el cálculo, ya que la muestra es completa dentro del cuadrado considerado. Dado que la diferencia de profundidad en la muestra es pequeña, los efectos de diferente anchura del slice (de  $6^\circ$ ) con la profundidad resultan despreciables, al menos en primera aproximación.

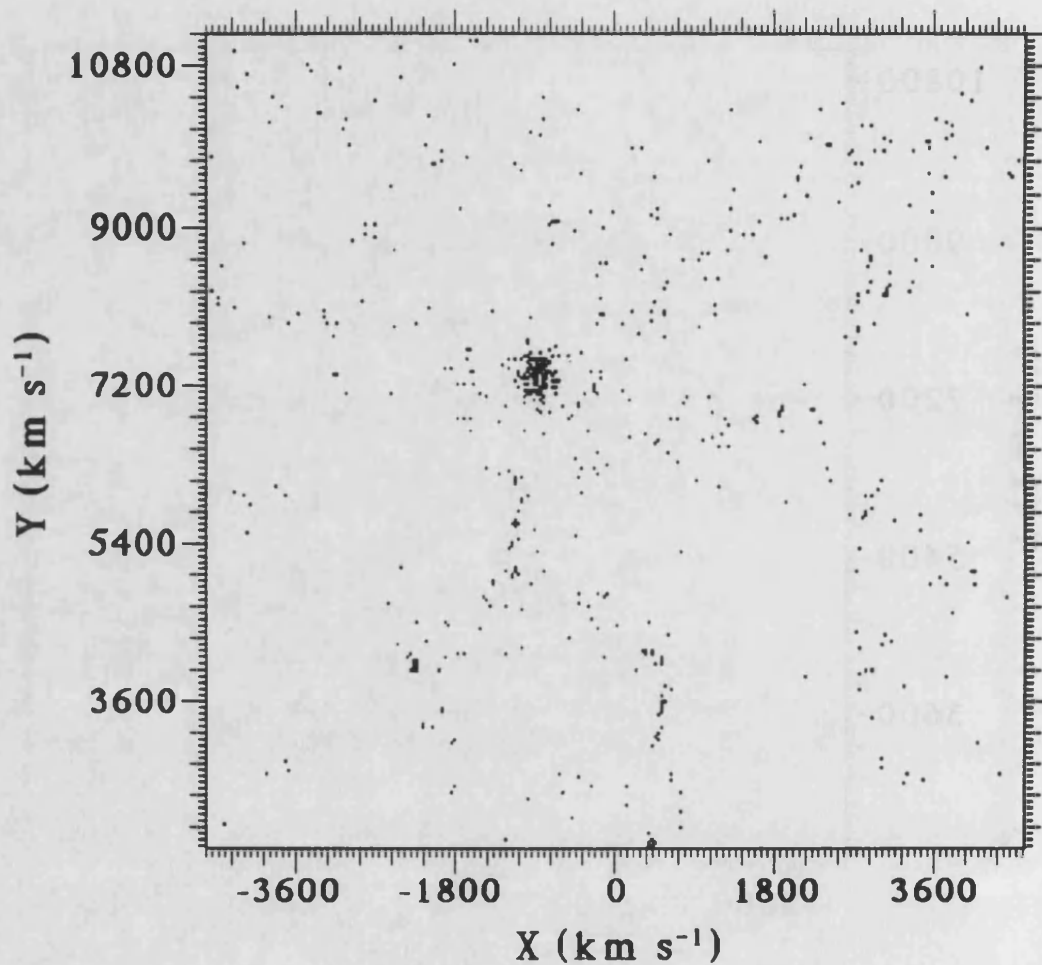
El cuadrado seleccionado dentro del slice tiene  $9216 \text{ km s}^{-1}$  de lado. Cada lado es dividido en 256 celdas de  $36 \text{ km s}^{-1}$  cada una, lo que determina una partición de la muestra considerada en 65536 celdas en el plano. Dicho cuadrado cubre el área  $X \in [-4608, +4608] \text{ km s}^{-1}$ ,  $Y \in [1914, 11130] \text{ km s}^{-1}$ ,



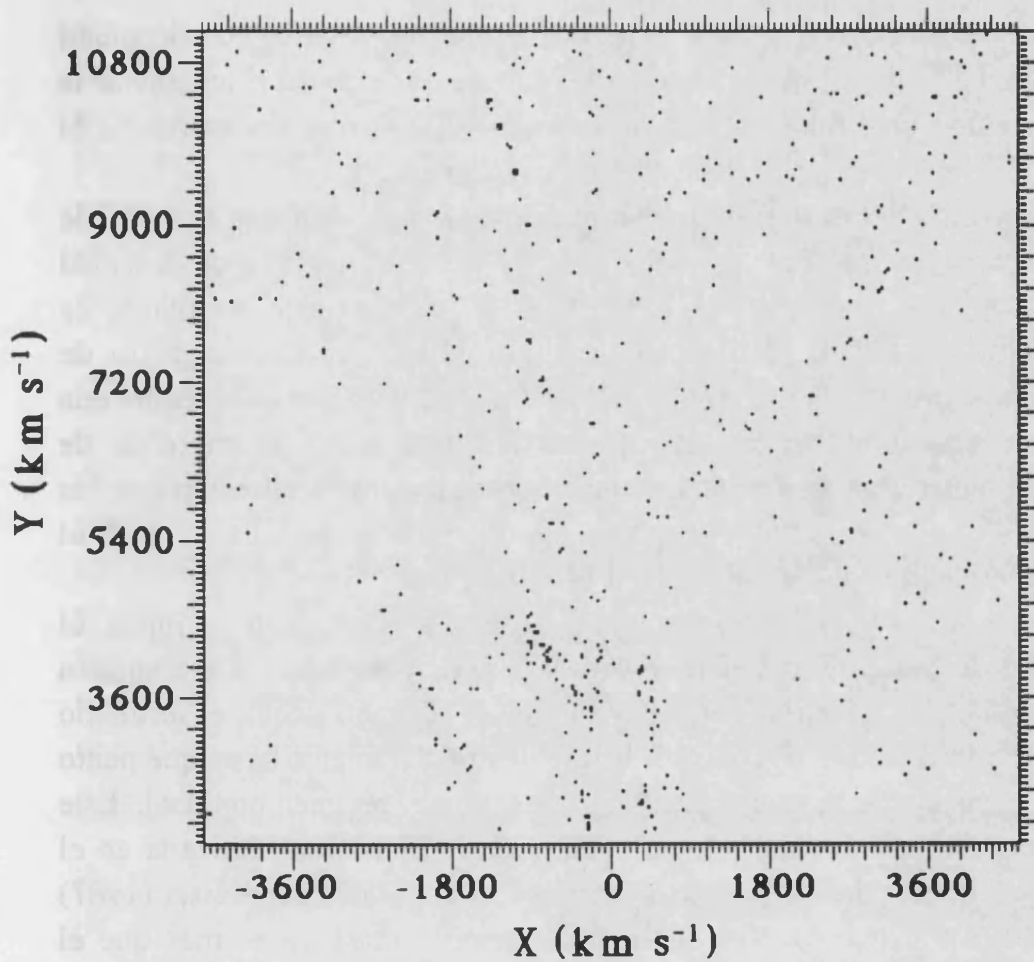
**Fig. 6.12** Distribución de puntos correspondiente a posiciones de galaxias en una submuestra completa ( $m=15.5$ ) del catálogo de galaxias del CfA (slice [8-17, 26.5-32.5, 0-15000]). La distribución ha sido proyectada sobre un plano para un análisis más simplificado. La muestra considerada representa un ejemplo típico de las estructuras realmente observadas en el universo, sin pretender en este caso una corrección específica correspondiente a dicha muestra, sino más bien analizar un ejemplo genérico que resulte realista. Por este motivo, no se tienen en cuenta efectos de completitud ni efectos de luminosidad límite en las galaxias que han sido consideradas, con el fin de no reducir excesivamente el tamaño de la muestra y poder así caracterizar realmente las estructuras. El análisis resulta así más preciso desde el punto de vista morfológico que desde un punto de vista estadístico.



**Fig. 6.13** La misma distribución de galaxias representada en la figura 6.12, pero ahora corrigiendo los efectos dominantes en la distorsión de redshift producidos por velocidades peculiares. En primer lugar se han corregido los efectos de velocidades aleatorias en la zona virializada interna de los cúmulos (7 cúmulos han sido considerados dentro de la región de dicho slice). También han sido corregidos los redshifts de los efectos de movimiento del sistema solar en nuestra galaxia, y de la velocidad peculiar (dipolo) de nuestra galaxia (Grupo Local) respecto a nuestro entorno.



**Fig. 6.14** Resultado de aplicar sobre la distribución de galaxias mostrada en la figura 6.13 la corrección de velocidades peculiares mutuas entre las galaxias, basada en la descomposición de las estructuras en un sumatorio de ondas planas tomando la transformada de Fourier del contraste de densidad determinado a partir de la nube de puntos (un filtro gaussiano sobre una escala de  $100 \text{ km s}^{-1}$  ha sido aplicado con el fin de suavizar la función contraste de densidad resultante). El campo  $B(x,y)$  puede entonces ser calculado, así como sus derivadas, con lo que puede calcularse el vector velocidad peculiar de cada galaxia. La corrección de velocidad peculiar se ha realizado aplicando las fórmulas correspondientes al régimen no lineal, dados los elevados valores del contraste de densidad en algunas zonas.



**Fig. 6.15** Resultado de aplicar las mismas correcciones que en el caso de la figura 6.14, pero aplicando las fórmulas lineales para llevar a cabo la corrección en lugar de las fórmulas correspondientes al régimen no lineal. Aunque sería discutible la forma de tratar el régimen no lineal seguido en 6.14, sobre todo en lo relativo a la transición entre las zonas de alta densidad de presión nula y las zonas virializadas con velocidades peculiares aleatorias, como puede deducirse claramente de la comparación de estas figuras lo que es evidente es que el régimen lineal no puede ser aplicado en este caso, por lo que la aplicación aproximada de ecuaciones para el régimen no lineal produce resultados mucho más coherentes.



en coordenadas, con centro en el observador, adaptadas a la disposición del slice, tal como se indica en la figura 6.12.

En esta muestra hay 636 galaxias, lo que representa una densidad media de  $9.8572 \cdot 10^{-3}$  galaxias celda<sup>-1</sup>. El contraste de densidad resultante de la discretización en celdas está en el rango [-1,202], antes de introducir el "suavizado" espacial para definir la función continua  $\delta(x,y)$ .

Con la introducción de un promediado espacial con una función de filtro caracterizada por el parámetro  $s=100 \text{ km s}^{-1}$ , el contraste de densidad resultante baja al rango [-1,32]. Es decir, el contraste resultante es claramente no lineal. Se tienen dos alternativas: aplicar un filtro de suavizado sobre una escala mayor de  $100 \text{ km s}^{-1}$ , con lo que se obtendrá una mayor difuminación de las estructuras y por lo tanto un contraste de densidad más próximo al régimen lineal, o bien considerar directamente las fórmulas que determinan el campo de velocidades peculiares para el régimen no lineal a la hora de aplicar la corrección.

Si se aplican las fórmulas correspondientes al régimen no lineal, el resultado de la corrección es el mostrado en la figura 6.14. Si se aplican directamente las fórmulas correspondientes al régimen lineal, el resultado es el que aparece en la figura 6.15, lo que ilustra claramente hasta qué punto son inadecuadas las fórmulas lineal para describir el régimen no lineal. Este resultado está directamente relacionado con la discusión realizada en el Capítulo 5 acerca de las supuestas "trompetas" sugeridas por Kaiser (1987) como un artefacto observacional, y que según vimos no es más que el resultado de extrapolar fórmulas del régimen lineal a zonas en las que tales fórmulas no son aplicables.

Mención aparte merece el problema de las luminosidades, que no ha sido considerado en los ejemplos presentados en las figuras correspondientes a la corrección del slice CfA-I. Dos alternativas se tienen para incorporar los efectos de luminosidad en este contexto: la limitación a considerar una muestra con una luminosidad absoluta máxima límite, lo que garantiza completitud si dicha luminosidad absoluta es adecuadamente definida dependiendo de la profundidad de la submuestra considerada, o bien la consideración de una función peso (función de selección) en el conteo numérico de galaxias para determinar el contraste de densidad observado, con el fin de compensar el aparente exceso de galaxias más próximas y déficit de galaxias más alejadas. Este segundo método es el más utilizado, y el que de hecho pretendemos utilizar en posteriores aplicaciones

de este método a otro tipo de catálogos, pues permite "aprovechar" todos los puntos disponibles y da como resultado un tratamiento estadísticamente consistente y la vez permite una descripción morfológica más detallada de las estructuras. El método basado en una luminosidad absoluta máxima es estadísticamente válido (salvo que existan sesgos intrínsecos debido a segregación de luminosidades en el rango de profundidad de la muestra), pero conlleva necesariamente una pérdida importante de puntos en la muestra resultante con respecto a la muestra inicial de partida, lo que no es deseable dadas las limitadas muestras disponibles.

De hecho, se ha realizado también una corrección del slice CfA-I, similar a la mostrada en las figuras, pero teniendo en cuenta los efectos de completitud de la muestra por luminosidad aparente límite (seleccionando de entrada solamente aquellas galaxias con magnitud absoluta menor que la magnitud absoluta correspondiente a una galaxia de magnitud aparente 15.5 situada a una distancia correspondiente al extremo más alejado de la muestra), pero el número de puntos resultante era tan pequeño que las figuras no resultarían representativas de los efectos que tales correcciones tienen sobre la morfología de las estructuras. Las figuras presentadas no son estadísticamente "válidas" pero ilustran mejor la alteración de la morfología.

En cualquier caso, la corrección aquí aplicada trata de ser simplemente ilustrativa, y el objetivo es aplicar este mismo esquema de corrección, pero de un modo más completo y detallado, y en la versión tridimensional, a la muestra del CfA actualmente completa hasta magnitud 15.5 (11 slices), cuando tales datos salgan del ámbito de investigadores privilegiados y estén disponibles para el resto de la comunidad científica.

## **6.7 DISTORSIONES OBSERVACIONALES EN EL ANALISIS ESTADISTICO DE CATALOGOS DE GALAXIAS**

Si bien el tipo de análisis que proporciona una información más intuitiva en el estudio de la estructura a gran escala del universo es el análisis morfológico (o topológico) de las estructuras y la elaboración de mapas tridimensionales de las mismas, otro tipo de análisis que permite

caracterizar el tipo de estructuras dominantes y las propiedades generales de dicha estructuración en el análisis estadístico.

Las dificultades que presenta el análisis estadístico vienen dadas por el hecho de la escasez de datos observacionales, en particular en lo referido a determinaciones de redshift, lo que hace que las muestras disponibles sean bastante incompletas para llevar a cabo profundos estudios estadísticos, o — dicho de otro modo— que las muestras aptas para llevar a cabo dicho estudio contienen un pequeño número de galaxias, lo que obliga a prescindir de análisis más sofisticados y utilizar estimadores estadísticos generalmente poco robustos.

Entre dichos estimadores estadísticos destacan, por el uso generalizado que se ha venido haciendo de ellas en los últimos diez años, las funciones de correlación. Por tal motivo, centraremos el estudio en el análisis de cómo afectan las distorsiones observacionales consideradas en la función de correlación radial a dos puntos  $\xi(s)$  y en la función de correlación completa bidimensional redshift-ángulo  $\xi(\pi, \sigma)$ , como estadístico ideal para analizar este tipo de efectos.

### La función de correlación radial a dos puntos $\xi(s)$

Uno de los estadísticos más utilizados para caracterizar la estructura a gran escala del universo es la función de correlación radial (a dos puntos)  $\xi(s)$ , basado en considerar la distribución de galaxias como una distribución de puntos en un espacio (euclídeo) tridimensional y calcular simplemente su función de correlación.

Si consideramos las galaxias como objetos puntuales en el estudio de la estructura a gran escala del universo, su distribución puede describirse mediante un sumatorio de funciones delta de Dirac, del modo

$$n(\vec{r}) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad [6.61]$$

donde  $n(\vec{r})$  es la densidad espacial media de galaxias (densidad numérica de puntos). La probabilidad de encontrar un objeto (una galaxia) en el punto  $\vec{r}$  y dentro del elemento de volumen  $dV$  es

$$dP = n(\vec{r}) dV = n(1 + \xi(\vec{r})) dV \quad [6.62]$$

Promediando la expresión [6.62] sobre todos los puntos de la muestra, obtenemos la probabilidad promedio de encontrar un objeto dentro de un elemento de volumen  $dV$  en un punto arbitrario del espacio

$$\delta P = \langle dP(\vec{r}) \rangle = \langle n \rangle dV \quad [6.63]$$

donde  $\langle n \rangle$  es la densidad promedio de la muestra, la cual viene dada por

$$\langle n \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} n(\vec{r}) d^3 \vec{r} \quad [6.64]$$

y  $V_m$  es el volumen de la muestra considerada.

La función de correlación espacial a dos puntos  $\xi(\vec{r})$  se define como el segundo momento de la función de densidad  $n(\vec{r})$ ; es decir,

$$\xi(\vec{r}) = \frac{\langle (n(\vec{r}_o) - \langle n \rangle)(n(\vec{r}_o + \vec{r}) - \langle n \rangle) \rangle}{\langle n \rangle^2} \quad [6.65]$$

Promediando sobre toda la muestra y sobre todas las direcciones  $\vec{r}$  se obtiene directamente la función de correlación radial a dos puntos  $\xi(s)$ . La función de correlación espacial suele entonces determinarse como función de la separación  $s$  en el espacio de redshift, dada por

$$s = \frac{(V_i^2 + V_j^2 - 2 V_i V_j \cos \vartheta_{ij})^{1/2}}{H_0} \quad [6.66]$$

donde  $V_i$  y  $V_j$  son las velocidades radiales de dos galaxias separadas por un ángulo  $\vartheta_{ij}$  sobre la esfera celeste, y  $H_0$  es la constante de Hubble.

Básicamente, se tienen dos métodos de cálculo para la estimación de  $\xi(s)$ : uno de ellos basado en estimación de la densidad media de galaxias en la muestra y comparación del número de galaxias observadas en un determinado volumen con las esperadas en el mismo volumen de acuerdo con la densidad media estimada; y otro basado en la generación de una muestra de puntos aleatoria en el mismo volumen ocupado por nuestra muestra de galaxias real y comparación del número de pares a una determinada distancia entre una galaxia de la muestra y todas las demás de la muestra con el número de pares a esa misma distancia entre la misma galaxia de la muestra y las galaxias de la muestra aleatoria generada. Uno y

otro método tiene sus ventajas e inconvenientes, y dentro de cada uno hay además diferencias en cuanto al método de evaluación de  $\xi(s)$ .

Cuando se trabaja con muestras limitadas a un volumen finito, y particularmente si dicho volumen tiene una forma un tanto irregular o no responde a una figura geométrica simple (y por lo tanto no resulta fácil calcular dicho volumen y sobre todo el dar cuenta de los efectos de borde en las regiones extremas de la muestra) suele ser útil generar una distribución aleatoria, limitada en magnitud, uniforme, en el mismo volumen que el ocupado por la muestra real. La función de correlación puede ser entonces estimada simplemente del modo

$$\xi(s) = \frac{N_{dd}(s)}{N_{dr}(s)} - 1 \quad [6.67]$$

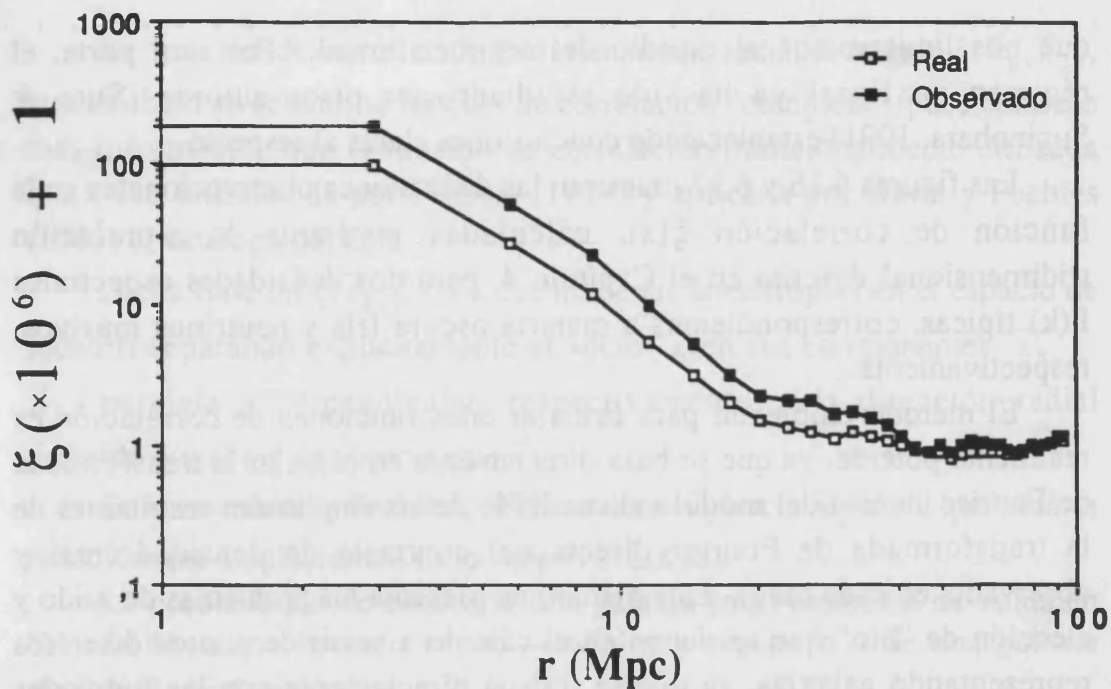
donde  $N_{dd}(s)$  es dos veces el número de pares independientes de galaxias con separación  $s$  en la muestra, y  $N_{dr}(s)$  es el número de pares de galaxias separadas por una distancia  $s$ , pero la primera de ellas extraída de la muestra y la segunda extraída de la distribución aleatoria generada en el mismo volumen.

A efectos de cálculo, los intervalos (bins) en  $s$  suelen tomarse lineales hasta los  $6 h^{-1}$  Mpc y logarítmicos para grandes escalas. De este modo, el ruido de fondo  $(N)^{1/2}$  es aproximadamente constante en el rango  $3-20 h^{-1}$  Mpc.

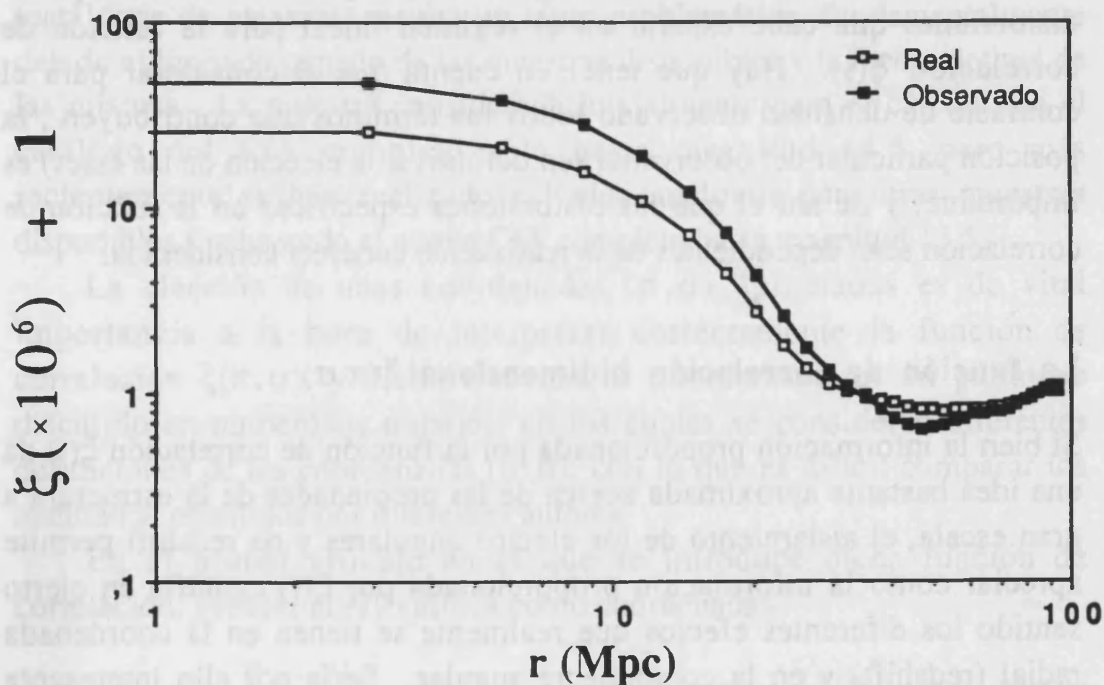
El efecto de las distorsiones de redshift (debida a efectos de velocidades peculiares) sobre la función de correlación radial a dos puntos fue estudiado por Kaiser (1987), y sus resultados siguen siendo válidos en cuanto al análisis aquí realizado (salvo la discrepancia del factor 1.78 en lugar del 1.87 estimado por Kaiser).

Cabe destacar, sin embargo, que todo el análisis realizado por Kaiser se refiere al régimen lineal, extrapolando al régimen no lineal las conclusiones a las que se llega para el régimen lineal. Según hemos visto, la consideración de efectos no lineales supone notables diferencias con respecto a la mera extrapolación del régimen lineal, particularmente en la estimación de las velocidades peculiares que son las que dan lugar a los efectos distorsionantes en la función de correlación.

Así pues, sería necesario un reanálisis de las repercusiones de tales efectos no lineales (descritos por la aproximación potencial) sobre la función de correlación  $\xi(s)$ , pero ello se escapa de nuestros objetivos, por lo



**Fig. 6.16** Distorsiones observacionales en la función de correlación radial a dos puntos  $\xi(r)$  para un espectro de materia oscura fría (CDM).



**Fig. 6.17** Distorsiones observacionales en la función de correlación radial a dos puntos  $\xi(r)$  para un espectro de neutrinos masivos (HDM).

que nos limitaremos al estudio del régimen lineal. Por otra parte, el régimen no lineal ya ha sido estudiado por otros autores (Suto & Sugihara, 1991) estableciendo conclusiones claras al respecto.

Las figuras 6.16 y 6.17 muestran las distorsiones observacionales en la función de correlación  $\xi(s)$ , calculadas mediante la simulación tridimensional descrita en el Capítulo 4, para dos densidades espectrales  $P(k)$  típicas, correspondientes a materia oscura fría y neutrinos masivos, respectivamente.

El método empleado para calcular tales funciones de correlación es realmente potente, ya que se basa directamente en calcular la transformada de Fourier inversa del módulo al cuadrado de las amplitudes resultantes de la transformada de Fourier directa del contraste de densidad (real y observado, en cada caso). Este método no presenta los problemas de ruido y elección de "bin" que se tienen en el cálculo a partir de puntos discretos representando galaxias, ya que se trabaja directamente con las funciones (contínuas) contraste de densidad. Si bien las figuras corresponden a una realización concreta de las fases aleatorias, y de ahí las particularidades de cada caso, el resultado resulta ser genérico y representativo del tipo de distorsiones que cabe esperar en el régimen lineal para la función de correlación  $\xi(s)$ . Hay que tener en cuenta que al considerar para el contraste de densidad observado todos los términos que contribuyen, la posición particular del observador (en definitiva, la elección de las fases) es importante, y de ahí el que las distorsiones específicas en la función de correlación sean dependientes de la realización concreta considerada.

### La función de correlación bidimensional $\xi(\pi, \sigma)$

Si bien la información proporcionada por la función de correlación  $\xi(r)$  da una idea bastante aproximada acerca de las propiedades de la estructura a gran escala, el aislamiento de los efectos angulares y de redshift permite apreciar como la información proporcionada por  $\xi(r)$  camufla en cierto sentido los diferentes efectos que realmente se tienen en la coordenada radial (redshift) y en la componente angular. Sería por ello interesante definir un nuevo estadístico, similar a la función de correlación, pero que fuese capaz de diferenciar los efectos angulares de los efectos de redshift, proporcionando de este modo una información más rica que la propia información proporcionada por  $\xi(r)$ .

La función de correlación bidimensional redshift-ángulo  $\xi(\vec{x}_{\parallel}, \vec{x}_{\perp})$ , que también se denomina función de correlación "completa" (pues contiene más información que la función de correlación tradicionalmente utilizada  $\xi(s)$ ), fue introducida por Peebles (1979) y aplicada por Davis y Peebles (1983) al catálogo del CfA.

Dicha función  $\xi(\vec{x}_{\parallel}, \vec{x}_{\perp})$  da cuenta de las anisotropías en el espacio de redshift separando explícitamente el vector  $\vec{x}$  en sus componentes  $\vec{x}_{\parallel}$  y  $\vec{x}_{\perp}$ , paralela y perpendicular, respectivamente, a la dirección radial definida por el eje de observación  $\vec{n}$ .

En la notación de Peebles (1979) se tiene  $\vec{x}_{\parallel} \equiv \pi$ ,  $\vec{x}_{\perp} \equiv \sigma$ , que será la notación que emplearemos en lo sucesivo  $\xi(\pi, \sigma)$ .

La probabilidad de encontrar una galaxia en el elemento de volumen  $\delta V = \delta\pi \delta A$ , a una distancia  $(\pi, \sigma)$  —radial  $\pi$  y angular  $\sigma$ — de una galaxia elegida aleatoriamente, es

$$\delta P = n (1 + \xi(\pi, \sigma)) \delta\pi \delta A \quad [6.68]$$

La determinación de  $\xi(\pi, \sigma)$  a partir de datos observacionales reales (catálogos de galaxias) resulta un tanto problemática, fundamentalmente debido al limitado tamaño de las muestras disponibles y la incompletitud de las mismas. La muestra considerada inicialmente para el cálculo fue el catálogo del CfA completo sólo hasta magnitud 14.5, pero más recientemente se han realizado cálculos análogos con otras muestras disponibles (incluyendo el nuevo CfA completo hasta magnitud 15.5).

La elección de unas coordenadas  $(\pi, \sigma)$  apropiadas es de vital importancia a la hora de interpretar correctamente la función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$ , y dicha elección de coordenadas es un punto no discutido en numerosos trabajos, en los cuales se consideran diferentes definiciones de las coordenadas  $(\pi, \sigma)$ , con lo que es difícil comparar los resultados obtenidos por diferentes autores.

En el primer artículo en el que se introduce dicha función de correlación, Peebles (1979) utiliza como coordenadas

$$\pi = \frac{V_i - V_i}{H_0} \quad \sigma = \frac{V_i}{H_0} \vartheta_{ij} \quad [6.69]$$

(con esta definición,  $\pi$  y  $\sigma$  vienen dados en Mpc).



Posteriormente, Davis y Peebles (1982) y de Lapparent *et al.* (1988) utilizan como coordenadas

$$\pi = \frac{V_j - V_i}{H_0} \quad \sigma = \frac{V_i + V_j}{H_0} \tan \frac{\vartheta_{ij}}{2} \quad [6.70]$$

Por otro lado, Bean *et al.* (1983) utilizan como coordenadas

$$\pi = \frac{V_j - V_i}{H_0} \quad \sigma = \frac{\sqrt{V_i V_j}}{H_0} \vartheta_{ij} \quad [6.71]$$

En definitiva, si bien es cierto que en el límite de ángulos pequeños ( $\vartheta_{ij} \ll 1$ , o lo que es lo mismo, observador muy lejano) todas estas definiciones de coordenadas resultan equivalentes, para  $\vartheta_{ij}$  un poco mayores los resultados pueden ser notablemente diferentes, dadas las sutilezas que conlleva esta definición en la interpretación de la función de correlación.

La manera más natural de definir unas coordenadas  $(\pi, \sigma)$  adecuadas es exigir que la definición de  $\pi$  sea la indicada

$$\pi = \frac{V_j - V_i}{H_0} \quad [6.72]$$

mientras que la definición de  $\sigma$ , que es la que resulta más problemática, se hace exigiendo la condición

$$s^2 = \frac{V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \vartheta_{ij}}{H_0^2} = \pi^2 + \sigma^2 \quad [6.73]$$

es decir,  $(\pi, \sigma)$  representan de este modo las coordenadas "cartesianas" en el entorno de cada punto, siendo  $s$  la distancia radial entre cada dos galaxias consideradas.

Imponiendo esta condición, la coordenada  $\sigma$  resulta de este modo

$$\sigma = \frac{\sqrt{V_i V_j}}{H_0} \sin \left( \frac{\vartheta_{ij}}{2} \right) \quad [6.74]$$

o equivalentemente

$$\sigma = \sqrt{\frac{V_i}{V_j}} \frac{V_i}{H_0} \sin \left( \frac{\vartheta_{ij}}{2} \right) \quad [6.75]$$

De este modo,  $\pi$  mide la separación aproximada de pares de galaxias a lo largo de la línea de visión y  $\sigma$  mide la separación de pares perpendiculares a la línea de visión. Para  $|\pi| \ll \frac{V_i}{H}$ ,  $\sigma$  y  $\pi$  representan aproximadamente coordenadas cilíndricas.

El método de cálculo de la función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$  se basa en considerar para cada galaxia  $i$  un sistema de coordenadas en el entorno de dicha galaxia. Consideramos siempre que  $\sigma$  y  $\pi$  son pequeñas comparadas

con la distancia de las galaxias consideradas en la muestra y nuestra posición como observadores, pues de este modo  $\xi(\pi, \sigma)$  es independiente de la distancia.

La función de correlación bidimensional puede calcularse mediante modelos análogos a los seguidos para el cálculo de la función de correlación a dos puntos unidimensional  $\xi(s)$ .

Es preciso señalar además que la determinación de la función  $\xi(\pi, \sigma)$  es difícil incluso en el cálculo de simulaciones numéricas del contraste de densidad, ya que dado el carácter local de la definición de coordenadas  $(\pi, \sigma)$  no es posible calcular las funciones de correlación como transformada de Fourier del módulo al cuadrado de las componentes espectrales en el espacio de frecuencias.

Normalmente, la función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$  se estudia, desde un punto de vista de modelización teórica, en base a las discrepancias esperadas entre la función de correlación espacial real ( $\xi_{\text{real}}(\pi, \sigma)$ ) y la función de correlación observada ( $\xi_{\text{obs}}(\pi, \sigma)$ ), debido a las velocidades peculiares (y errores observacionales en la medida de las velocidades radiales) que disturban el patrón de agrupamiento, pero sólo en la dirección de  $\pi$  (velocidades radiales).

Así, Peebles (1979) y Bèan *et al.* (1983) modelizan este efecto del modo

$$\xi_{\text{obs}}(\pi, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\text{real}} \left( \left[ \left( \pi - \frac{w}{H_0} \right)^2 + \sigma^2 \right]^{1/2} \right) f(w) dw \quad [6.76]$$

donde  $w$  es una variable extraída de la función de distribución de velocidades peculiares  $f(w)$ .

En el caso de considerar no sólo los efectos de velocidades peculiares radiales (efectos de redshift) sino también los efectos angulares (desplazamientos transversales a la dirección de visión), la función de correlación observada  $\xi_{\text{obs}}(\pi, \sigma)$  debería ser modelizada del modo

$$\xi_{\text{obs}}(\pi, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dw \xi_{\text{real}} \left( \left[ \left( \pi - \frac{w}{H_0} \right)^2 + (\sigma - \mu)^2 \right]^{1/2} \right) f(w) g(\mu)$$

[6.77]

donde  $f(w)$  da cuenta de los efectos de velocidades peculiares (radiales) y  $g(\mu)$  da cuenta de los efectos de perturbación angular. El problema radica evidentemente en la dificultad de estimación teórica de las funciones  $f(w)$  y, sobre todo,  $g(\mu)$ .

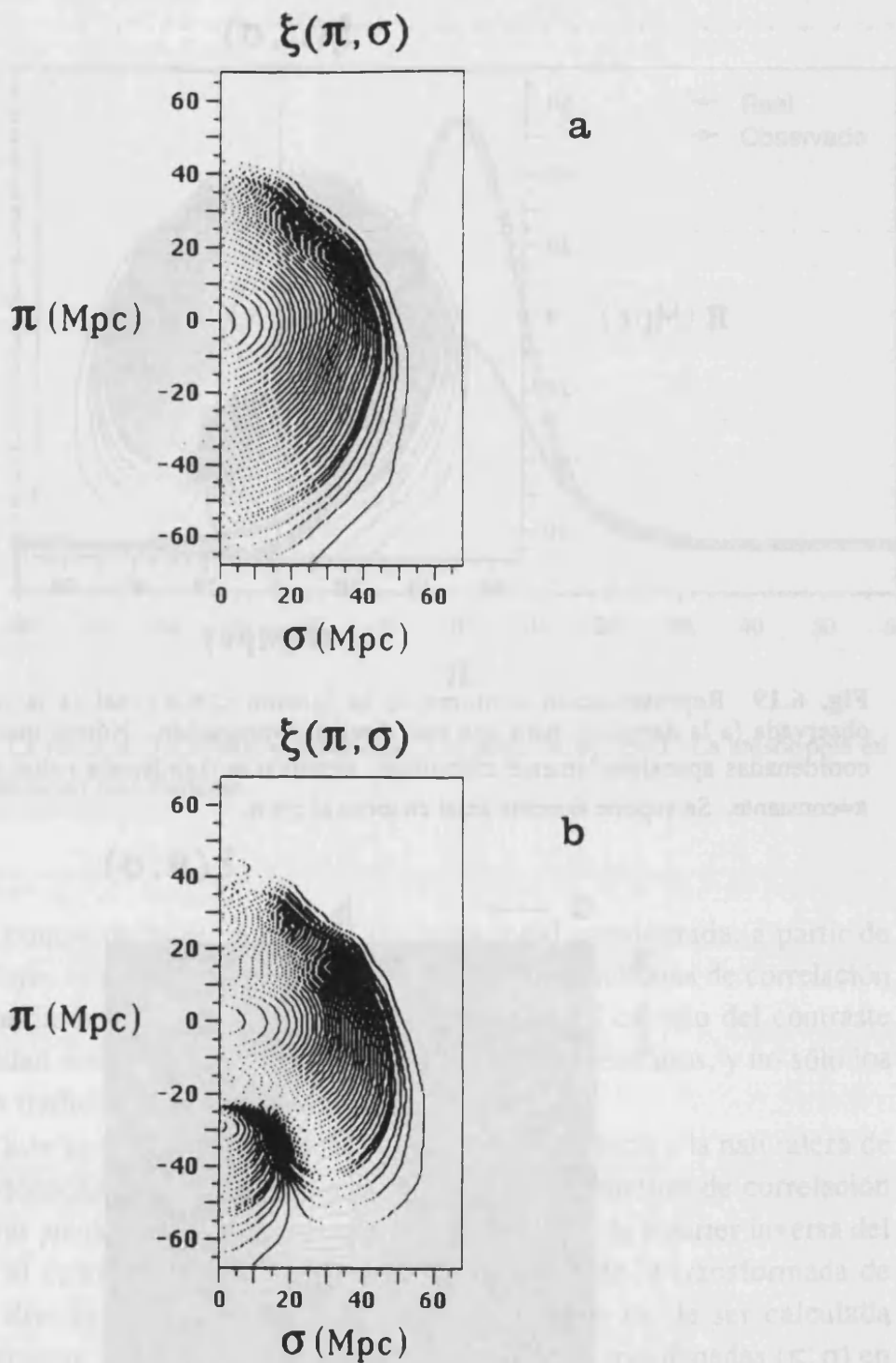
Como los efectos de redshift son considerablemente dominantes sobre los efectos angulares, la modelización tradicionalmente seguida (Peebles, 1979; Bean *et al.*, 1983) es esencialmente válida. Los efectos angulares están por el momento por debajo del umbral de precisión en las medidas observacionales y en las estimaciones de  $\xi(\pi, \sigma)$  a partir de tales datos observacionales.

Una modelización más detallada fue desarrollada por Collin McGill (1990), considerando solamente los términos dominantes sobre las distorsiones de redshift, en el sentido discutido en el Capítulo 4 (es decir, considerando sólo las derivadas segundas del campo B y no las derivadas primeras divididas por la distancia radial, que en ciertos casos dan contribuciones del mismo orden).

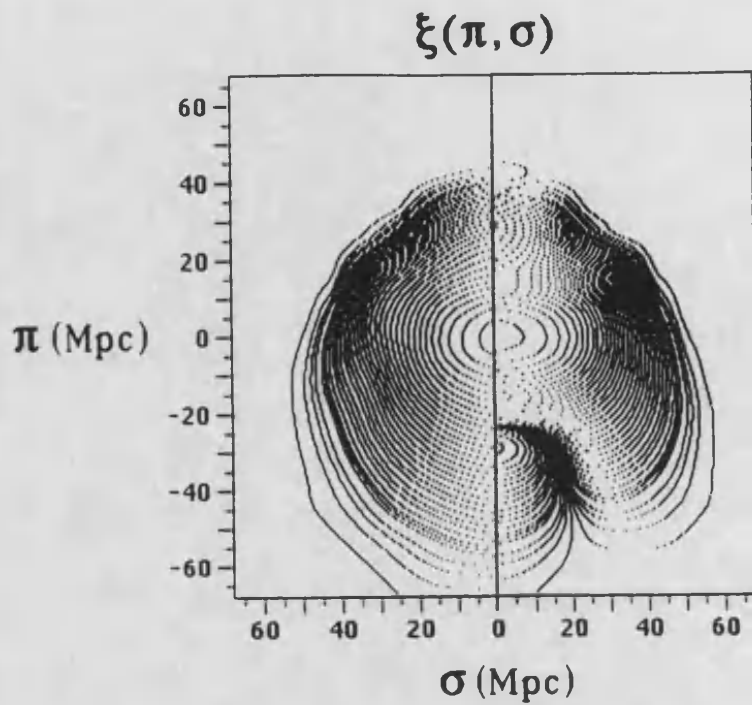
La principal conclusión del trabajo de McGill (1990), en concordancia con otros trabajos de Lilje y Efstathiou (1989), es el aplastamiento transversal de las curvas de nivel  $\xi(\pi, \sigma) = \text{cte}$  en el espacio redshift-ángulo, dando lugar a elipses deformadas, en lugar de la apariencia circular que deberían tener tales curvas de nivel es el espacio real (ver Capítulo 1, apartado 1.3).

En este caso pretendemos un estudio más detallado del régimen lineal, sin entrar a discutir aspectos relativos al régimen no lineal, que sólo es aplicable en escalas de valores pequeños en  $\sigma$  y cuyos efectos ya son por otro lado conocidos.

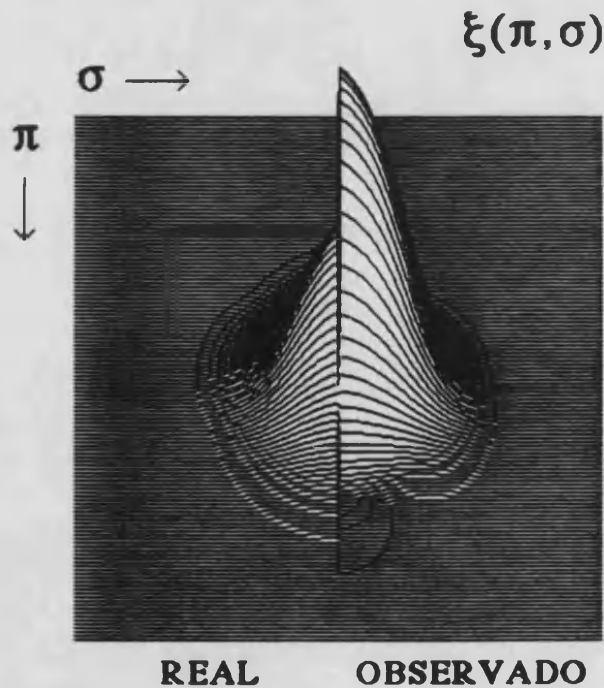
El modelo seguido para analizar las distorsiones observacionales en la determinación de la función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$  se ha basado en la simulación 3D (64<sup>3</sup>) que ya fue utilizada en el Capítulo 4 para modelizar efectos sobre el contraste de densidad observado y la densidad espectral  $P(k)$ . Siguiendo el esquema entonces indicado, en primer lugar se parte de un  $P(k)$  dado, y se genera una distribución de densidad de acuerdo con dicha función  $P(k)$  dentro de un cubo de volumen prefijado (en Mpc). Se calcula también el contraste de densidad que determinaría un observador situado en cualquier parte del interior del cubo (o incluso fuera del cubo). Una vez que las funciones contraste de densidad real ( $\delta^{\text{real}}(x, y, z)$ ) y contraste de densidad observado ( $\delta^{\text{obs}}(x, y, z)$ ) son determinadas para cada uno de los



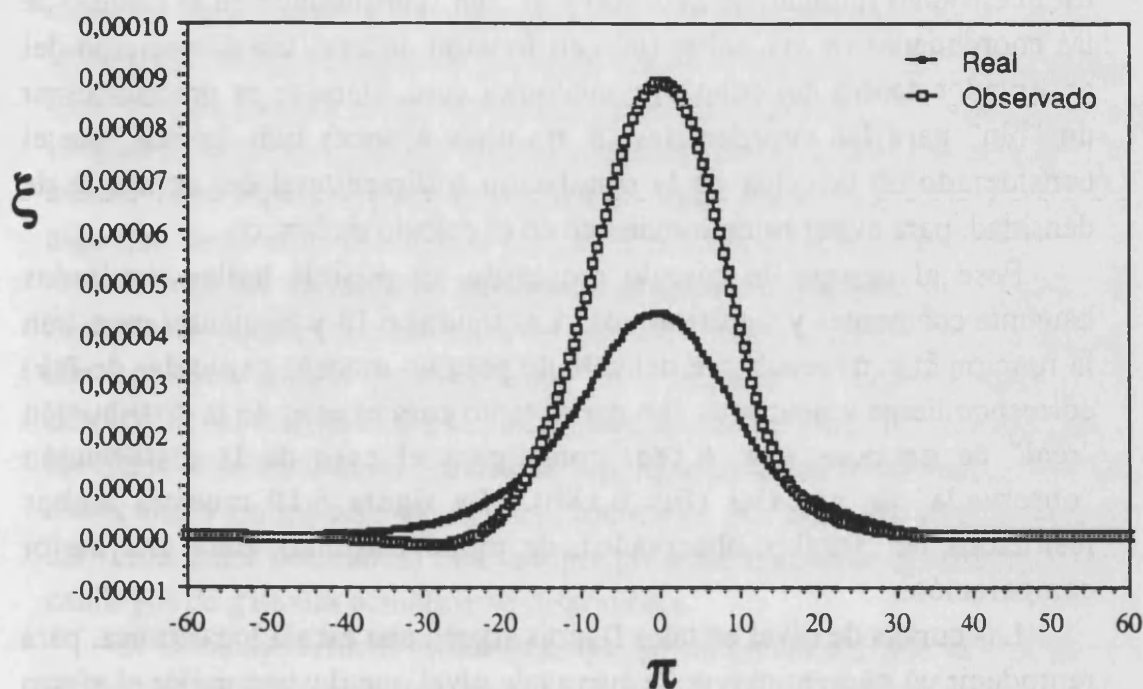
**Fig. 6.18** Distorsiones observacionales en la función de correlación bidimensional  $\xi(\pi, \sigma)$ : (a) calculada en el espacio real, (b) calculada en el espacio de redshift. Las curvas de nivel siguen una escala logarítmica. Aunque esta figura corresponde al caso de un espectro de neutrinos masivos (HDM), el comportamiento parece ser genérico, variando en todo caso la escala y la magnitud de la anisotropía en la dirección  $\pi$ .



**Fig. 6.19** Representación conjunta de la función  $\xi(\pi, \sigma)$  real (a la izquierda) y observada (a la derecha), para una más directa comparación. Nótese que se trata de coordenadas aproximadamente cilíndricas, siendo  $\sigma$  la coordenada radial en un plano  $\pi = \text{constante}$ . Se supone simetría axial en torno al eje  $\pi$ .



**Fig. 6.20** Representación 3D de los mismos datos representados en la figura 6.19, para la función  $\xi(\pi, \sigma)$  real y observada. En este caso, la escala es lineal, lo que permite apreciar mejor el nivel de la distorsión y el tipo de anisotropía.



**Fig. 6.21** La función  $\xi(\pi, \sigma)$  real y observada, a lo largo del eje  $\sigma=0$ . La anisotropía en  $\pi$  es de este modo más evidente.

262144 puntos de la red numérica tridimensional considerada, a partir de tales valores es posible calcular, explícitamente las funciones de correlación correspondientes, según vimos anteriormente. En el cálculo del contraste de densidad observado se tienen en cuenta todos los términos, y no sólo los términos tradicionalmente considerados dominantes.

En este caso la tarea es mucho más laboriosa, debido a la naturaleza de las coordenadas  $(\pi, \sigma)$ . Debido a tal naturaleza, la función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$  no puede ser calculada como la transformada de Fourier inversa del módulo al cuadrado de las intensidades resultantes de la transformada de Fourier directa del contraste de densidad, sino que ha de ser calculada explícitamente a partir de la propia definición de las coordenadas  $(\pi, \sigma)$  en el espacio de posiciones  $(x, y, z)$  mediante un algoritmo específico. La convolución de cada nodo de la red tridimensional con todos los nodos de su entorno ha de calcularse punto a punto, debido a que las coordenadas  $(\pi, \sigma)$  son diferentes para diferentes nodos de la red. Además, resulta especialmente crítica la relación entre el "bin" considerado en la simulación

tridimensional (tamaño de la celda) y el "bin" considerado en el cálculo de las coordenadas  $(\pi, \sigma)$ , sobre todo en función de cual sea disposición del observador dentro del cubo. En cualquier caso, siempre es preciso tomar un "bin" para las coordenadas  $(\pi, \sigma)$  unas 4 veces más grande que el considerado en la celda de la simulación tridimensional del contraste de densidad, para evitar ruido estadístico en el cálculo de  $\xi(\pi, \sigma)$ .

Pese al tiempo de cálculo requerido, es posible hallar resultados bastante coherentes y significativos. Las figuras 6.18 y siguientes muestran la función  $\xi(\pi, \sigma)$  resultante del cálculo para un modelo particular de  $P(k)$  correspondiente a neutrinos con masa, tanto para el caso de la distribución "real" de galaxias (fig. 6.18a) como para el caso de la distribución "observada" de galaxias (fig. 6.18b). La figura 6.19 muestra ambos resultados de (real y observado), de modo conjunto, para una mejor comparación.

Las curvas de nivel en tales figuras siguen una escala logarítmica, para reproducir un número mayor de curvas de nivel que ilustren mejor el efecto observacional. Ello implica que los niveles entre sucesivas curvas de nivel son proporcionales, pero en escala logarítmica. La figura 6.20 es una representación tridimensional, en escala lineal, para ilustrar la magnitud real del efecto.

La figura 6.21 corresponde a variaciones en la coordenada  $\pi$ , manteniendo  $\sigma$  constante ( $\sigma=0$ ), para poner mejor de manifiesto los rasgos esenciales de dicho efecto sobre la función de correlación  $\xi(\pi, \sigma)$ .

Desde el punto de vista del análisis de datos observacionales, y en particular del estudio de los cada vez más completos catálogos de galaxias, la clave fundamental de todo este planteamiento viene determinada por el siguiente dilema: si hacemos un análisis estadístico de la distribución de galaxias a partir de los datos observacionales brutos, entonces no es necesario hacer ninguna hipótesis previa sobre el tipo de estructuras o modo de estructuración que se supone hay en el universo, pero el precio que se paga es que al trabajar con datos observacionales brutos las conclusiones a las que se llegue pueden ser en gran parte erróneas, ya que tales datos observacionales pueden estar notablemente distorsionados por efectos debidos a la propia observación de las estructuras (velocidades peculiares, efecto lente, etc.). Por el contrario, si se hacen correcciones a los datos observacionales brutos con el fin de poder hacer un análisis estadístico más

riguroso de la distribución espacial "real" de galaxias, para poder realizar tales correcciones es preciso partir de algún modo de un cierto modelo o hipótesis de partida sobre el tipo de estructuras que hay en el universo e incluso es necesario conocer algunos detalles acerca de tales estructuras. El asumir tales hipótesis previas implica de algún modo el asumir de partida algo que luego se ha de intentar ver con el análisis estadístico posterior.

Si bien las técnicas de análisis estadístico comparando *pre* y *post* la realización de tales correcciones de los datos observacionales brutos puede ser un buen medio precisamente para desarrollar tales modelos de corrección, el dilema sobre la conveniencia o no de realizar correcciones a los datos observacionales brutos que supongan de algún modo un modelo de estructura y un modelo de efectos producidos por tales estructuras (como las velocidades peculiares) está siempre presente al abordar el análisis de los catálogos de galaxias actualmente disponibles.

Si bien hay técnicas estadísticas que permiten caracterizar la estructura global del universo con unas premisas mínimas (como las propias funciones de correlación o el análisis multifractal), nuestros resultados indican la conveniencia de abordar la realización de cuantas correcciones sean precisas con el fin de reconstruir en la medida de lo posible la distribución real de galaxias. Admitida la existencia de distorsiones en los datos observacionales, el análisis estadístico debe contemplarlas, pues los efectos que tales correcciones producen en los estadísticos son muy notables, y algunas de las hipótesis subyacentes en los modelos estadísticos serían de hecho falsas (como la escala de homogeneidad del medio de fondo). Las distorsiones observacionales han de ser tenidas en cuenta al comparar tales observaciones con los modelos teóricos elaborados. Algunos efectos podrían enmascarar importantes datos observacionales que podrían ser decisivos en la discriminación entre diferentes modelos teóricos propuestos.







## CONCLUSIONES

---

En primer lugar, se ha analizado el problema de la modelización de un universo inhomogéneo considerando soluciones realistas de las ecuaciones de Einstein que puedan describir las características de alta heterogeneidad observadas en el universo real. De entre las diferentes modelizaciones posibles de un universo inhomogéneo, dos tipos de modelos son considerados. Ambos representan perturbaciones lineales al modelo homogéneo de Einstein-de Sitter. El primero de ellos, basado en la solución de Sachs-Wolfe, permite una descripción adecuada de grandes estructuras (tamaño comparable con el tamaño del horizonte), si bien está condicionado por la restricción a contrastes de densidad muy bajos (perturbaciones lineales en la densidad). Una interpretación alternativa es derivada de la aproximación potencial, perturbación lineal a un modelo homogéneo que permite describir, sin embargo, estructuras con elevado contraste de densidad, aunque el tamaño de tales estructuras ha de ser relativamente pequeño (escala no superior al cúmulo de galaxias). Se encuentra una transformación de coordenadas que permite conjugar ambos modelos para el rango de parámetros en los que ambas soluciones son formalmente equivalentes. Se analiza el significado de ambas soluciones y la conveniencia de una u otra para analizar las estructuras dependiendo de la escala de tamaños considerada. Para analizar la estructura a muy gran escala parece necesario trabajar en las coordenadas, comóviles, de la métrica de Sachs-Wolfe, dada la simplicidad de las ecuaciones resultantes en este formalismo para describir el potencial en función del campo de densidades.

Por otro lado, se analiza la utilización de la aproximación potencial para describir zonas con contraste de densidad elevado (régimen no lineal), considerando los términos que realmente contribuyen en dicho régimen no

lineal, y no la extrapolación del régimen lineal que se ha considerado en anteriores estudios.

Se ha detallado el modo de calcular las coordenadas reales de una fuente luminosa a partir de los observables redshift-ángulo, tanto para el caso de las coordenadas comóviles del gauge de Sachs-Wolfe como para las coordenadas de la aproximación potencial. Una vez obtenida la relación entre las coordenadas reales y los observables redshift-ángulo, se analizan las repercusiones de la interpretación de observaciones en el espacio redshift-ángulo, caracterizando las distorsiones resultantes respecto a lo que sería el análisis en el espacio real. Se han realizado cálculos analíticos y simulaciones numéricas para analizar tales distorsiones.

Las distorsiones observacionales resultan caracterizadas por la relación entre el tamaño de la muestra (escala de la observación) y la distancia de la muestra al observador. En el caso de observación a escalas superiores al tamaño característico de las estructuras el único factor determinante es la posición del observador. Sólo si la muestra contiene o está próxima a la posición del observador los efectos de distorsión son realmente notables, y todos los términos, incluidos los  $\dot{B}$ ,  $\dot{B}/R$  y  $B/R$  han de ser tenidos en cuenta al modelizar las distorsiones. En otro caso, las distorsiones pueden ser bien descritas mediante los términos  $\dot{B}$  solamente, como se hace tradicionalmente. Por el contrario, en el caso de existencia de estructuras iguales o mayores al tamaño de la muestra, las distorsiones han de describirse aplicando todos los términos que describen el contraste de densidad, especialmente si la muestra está próxima al observador. En el caso de conocimiento de existencia de estructuras mayores que la propia muestra o contenidas parcialmente en ella, es necesario utilizar información "externa" a la muestra para modelizar las distorsiones. Dado que las mayores distorsiones observacionales se producen en el entorno más próximo del observador, la posición de dicho observador con respecto a la muestra estudiada resulta crítica en todo caso.

Por destacar aquellos resultados que representan una contribución directa a la interpretación de algunos de los efectos señalados como "controvertidos" en el Capítulo 1, señalaremos los siguientes:

**A/ Distorsión en la morfología aparente de las estructuras**

En contradicción con los resultados obtenidos por Kaiser (1987), las distorsiones descritas en la morfología aparente de un cúmulo de galaxias son meramente un artefacto resultante de aplicar las fórmulas que describen el régimen lineal a zonas claramente no lineales. La correcta consideración de los términos no lineales elimina las distorsiones predichas por el régimen lineal, resultando como simple distorsión morfológica el aplastamiento transversal. Se pone de manifiesto la necesidad de considerar las fórmulas no lineales para describir las distorsiones morfológicas.

**B/ Distorsión en el contraste de densidad observado**

Contrariamente a la descripción tradicional que sólo da cuenta del término dominante ( $\bar{B}$ ), se han detallado todos los términos que contribuyen a la descripción de las distorsiones del contraste de densidad. Se encuentra que algunos de los términos tradicionalmente despreciados ( $\bar{B}/R$ ) pueden dar contribuciones del mismo orden que  $\bar{B}$  en algunas situaciones (estructuras próximas al observador). Son de hecho los términos  $\bar{B}/R$  los responsables de la mayor parte de las nuevas distorsiones que han sido descritas en esta memoria.

La posible existencia de estructuras de tamaño comparable a la profundidad de las muestras estudiadas (100-200 Mpc) podría tal vez explicar parte del crecimiento de la densidad radial con la profundidad de la muestra, así como también este tipo de distorsiones tendría que ver con el aparente crecimiento de la amplitud de la función de correlación con la profundidad, sobre todo si se tiene en cuenta que las muestras de las que se han extraído tales conclusiones no han sido corregidas de estos efectos.

**C/ Distorsión en la densidad espectral observada  $P(k)$** 

Dada la reciente determinación observacional de  $P(k)$  (Vogeley *et al.*, 1992), se ha realizado un exhaustivo análisis de las distorsiones observacionales en la densidad espectral  $P(k)$ , utilizando para ello simulaciones numéricas 2D ( $1024^2$ ) y 3D ( $64^3$ ), así como cálculos analíticos detallados, en contraposición con las aproximaciones tradicionalmente seguidas para estimar las distorsiones observacionales en  $P(k)$ . Se han considerado 4 tipos de espectros característicos: materia oscura fría

(CDM), neutrinos masivos (HDM). ley de potencias y combinaciones potencia-exponencial.

Las principales conclusiones pueden sistematizarse del modo siguiente:

- a/ Contrariamente al resultado obtenido aplicando las aproximaciones tradicionalmente asumidas, la relación general, para el régimen lineal, entre  $P(k)$  observado y  $P(k)$  real, no es  $P^{\text{obs}}(k) = (27/15) P^{\text{real}}(k)$ , como fue obtenido por Kaiser (1987) y McGuill (1990), sino que dicha relación queda modificada del modo  $P^{\text{obs}}(k) = 1.8 P^{\text{real}}(k)$ . Este resultado se ha obtenido a partir de numerosas simulaciones numéricas para diferente tamaño y resolución de la simulación, y se ha corroborado mediante cálculos analíticos independientes. Aunque numéricamente se trata de un cambio pequeño, conceptualmente representa un cambio importante en la forma de "promediar" la transformada de Fourier del contraste de densidad.
- b/ Además del efecto dominante descrito en (a), en ciertos casos, dependiendo del tipo de espectro real considerado, aparecen "colas" para escalas grandes (estructuras pequeñas), que alejan notablemente los valores de  $P^{\text{obs}}(k)$  respecto a  $P^{\text{real}}(k)$ . Tales efectos están ligados a la observación en escalas comparables al tamaño de las estructuras. La existencia de esta "cola" permitiría explicar la densidad espectral observada como una  $P(k)$  correspondiente a un modelo HDM distorsionada por las observaciones. Además, estas distorsiones observacionales van en el sentido de alejar aún más el  $P(k)$  de CDM de las observaciones, constituyendo un argumento más en contra de las teorías de CDM, así como un cierto apoyo a las teorías de materia tibia o caliente, como los neutrinos masivos.
- c/ Además de la "cola" de altas frecuencias espaciales, aparece otra pequeña cola para escalas próximas a cero (estructuras de tamaño comparable con la escala del horizonte) debido a los efectos de los términos directamente proporcionales al campo  $B$  que tradicionalmente no son considerados, y que sólo llegan a ser significativos para observaciones a muy gran escala. Este tipo de efectos están por el momento fuera del alcance observacional.

**D/ Distorsiones en la estimación de velocidades peculiares**

Mediante simulaciones numéricas se han calculado las repercusiones de las distorsiones descritas en el contraste de densidad (especialmente los términos  $\dot{B}/R$ ) en la estimación de velocidad peculiar a partir del campo de densidad de materia en el entorno, hallándose grandes diferencias entre el valor real y el calculado mediante el contraste de densidad distorsionado o corregido sólo del término dominante (tanto en el módulo como en la dirección de dicha velocidad peculiar). De este modo, tales distorsiones pueden perfectamente explicar la discrepancia entre la velocidad peculiar calculada para nuestra galaxia mediante catálogos de galaxias para el entorno y el dipolo observado en el fondo de radiación de microondas.

**E/ Distorsiones en la función de correlación radial  $\xi(r)$** 

Dado que la información contenida en la función de correlación radial  $\xi(r)$  es de hecho equivalente a la información contenida en  $P(k)$ , las distorsiones observacionales en  $\xi(r)$  son también equivalentes a las distorsiones descritas para  $P(k)$ . El principal efecto viene dado por el cambio en la amplitud de la función de correlación observada  $\xi^{\text{obs}}(r)$  con respecto a la real  $\xi^{\text{real}}(r)$ ,  $\xi^{\text{obs}}(r) = 1.8 \xi^{\text{real}}(r)$ , en contradicción con el resultado tradicionalmente admitido para el régimen lineal  $\xi^{\text{obs}}(r) = (27/15) \xi^{\text{real}}(r)$ . Este resultado ha sido corroborado también mediante simulaciones numéricas para diferentes tipos de densidades espectrales, si bien los términos  $\dot{B}/R$  y  $B/R$  hacen la relación  $\xi^{\text{obs}}(r) / \xi^{\text{real}}(r)$  dependiente de la realización concreta del campo de densidad.

**F/ Distorsiones en la función de correlación bidimensional**

$\xi(\pi, \sigma)$

Dejando a un lado la zona no lineal, donde ya se han establecido conclusiones claras, las distorsiones estudiadas para el régimen lineal pueden resumirse en:

- a/ En la zona anteriormente explorada ( $\pi < 20$  Mpc,  $\sigma < 20$  Mpc), las conclusiones obtenidas son similares a las obtenidas por otros autores, relativas al aplastamiento transversal de las curvas de nivel  $\xi(\pi, \sigma) = \text{cte}$ .
- b/ En la zona antes no explorada, el rasgo más distintivo es la anisotropía en la dirección de  $\pi$ , con una mayor correlación para  $\pi > 0$  que para  $\pi < 0$ . La detección observacional de tales anisotropías sería un test para esta caracterización de las distorsiones.

### **G/ Correcciones para interpretar un catálogo de galaxias**

Las técnicas de corrección de observaciones de efectos distorsionantes desarrolladas en esta memoria han sido aplicadas a la corrección de datos reales, en particular a una región extraída del catálogo de galaxias del Center for Astrophysics (CfA), mediante la implementación de los correspondientes algoritmos, algunos de los cuales son originales.

Dos esquemas diferentes son propuestos en la corrección de catálogos de galaxias. El primero de ellos se basa en la descomposición en cúmulos individuales. El segundo de ellos, más general, no necesita hacer hipótesis previas sobre el tipo de estructuras presentes, y permite una corrección sistemática basada en la transformada de Fourier del contraste de densidad numérica, estimada a partir de la propia muestra.

Es preciso destacar que dados los altos valores del contraste de densidad que llegan a encontrarse en ciertas regiones de los catálogos de galaxias, resulta imprescindible aplicar las fórmulas correspondientes al régimen no lineal (el factor  $(1+\delta)^{-1}$ ) para llevar a cabo las correcciones, hallándose resultados completamente incoherentes si se aplican las fórmulas correspondientes al régimen lineal.

Resulta evidente de nuestro análisis la necesidad de hacer correcciones antes de llevar a cabo análisis estadísticos de catálogos de galaxias. El problema de la posible necesidad de hacer algún tipo de hipótesis acerca de las estructuras para poder llevar a cabo tales correcciones (lo que puede comprometer el análisis estadístico derivado posteriormente) no constituye un argumento en contra de la aplicación de correcciones. Si estas correcciones son adecuadamente aplicadas, el análisis estadístico será siempre más adecuado en el espacio real que en el espacio de redshift. Los análisis estadísticos realizados en el espacio de redshift *no* describen la estructura real del universo, y las correcciones de catálogos resultan ineludibles. En el caso de análisis morfológicos o topológicos, los argumentos son aún más fuertes a favor de la necesidad de aplicar las correcciones.

La conclusión relativa a la conveniencia de utilización de coordenadas comóviles para describir la estructura a gran escala del universo supone un planteamiento de *geometría experimental*, al estilo de los primeros test desarrollados para analizar dicha estructura a gran escala, donde las

distancias entre puntos se miden con las reglas que prescribe la geometría del espacio en el que estamos. Los análisis de la estructura a gran escala del universo se han realizado casi siempre a partir de la hipótesis de que el universo puede considerarse localmente euclídeo, y la física localmente newtoniana. Si bien esto es claramente cierto a una escala local, no está claro para qué tamaño de estructuras comienzan a entrar en juego los efectos "cosmológicos". En todo caso, el abordar el estudio de la estructura topológica a gran escala del universo mediante herramientas geométricas parece ser realmente el único método capaz de abordar dicho estudio más allá del régimen puramente local, y permitir analizar realmente la estructura geométrica *a muy gran escala* del universo observable.





# Apéndice I

## LUMINOSIDADES Y MAGNITUDES DE GALAXIAS

---

Si bien la luminosidad de una estrella parece estar perfectamente definida desde el punto de vista observacional, en el caso de galaxias la definición no es tan evidente, debiendo hablarse más bien de una luminosidad "efectiva" para la galaxia como tal, definida a partir de las luminosidades de su población de estrellas constituyentes, o en general de las luminosidades del conjunto de fuentes luminosas individuales que constituyen la galaxia.

De este modo, aunque en la práctica la luminosidad de una galaxia —o equivalentemente la magnitud— se trata de modo análogo a la luminosidad de una estrella, tiene realmente un significado físico diferente, siendo una cualidad asignada a la galaxia como parámetro efectivo más que como cualidad intrínseca de la misma.

De hecho, existe gran dificultad observacional —y notables discrepancias— en la asignación de magnitudes a una galaxia, dependiendo del procedimiento observacional o criterio seguido en tal asignación.

En el Apéndice III volveremos sobre esta cuestión al discutir los diferentes criterios seguidos para asignar magnitudes a las galaxias del catálogo del CfA en cada una de las submuestras que componen el catálogo total, y el procedimiento sugerido para "normalizar" todos los valores a un criterio de referencia global.

### **Relación luminosidad-magnitud**

Si bien la variable que caracteriza el brillo de un astro es su "luminosidad", en astronomía es más habitual utilizar la "magnitud" para dicha caracterización. Ambas cantidades son equivalentes, si bien la definición de

la magnitud debe precisarse mediante la fijación de una escala de magnitudes, y particularmente del cero de dicha escala.

Los antiguos astrónomos fijaron las ideas que, por tradición, han definido la escala de magnitudes. Por otra parte, según la famosa ley de Fechner, las sensaciones siguen los términos de una progresión aritmética, mientras las causas que provocan dichas sensaciones siguen los términos de una progresión geométrica. Si  $L$  y  $L'$  son los brillos de dos cuerpos celestes de magnitudes  $m$  y  $m'$ , la razón  $K$  de la progresión geométrica de las magnitudes vendrá definida por la relación

$$\frac{L}{L'} = K^{(m' - m)} \quad [A1.1]$$

siendo  $K = 2.512$ .

Esta relación, conocida con el nombre de *fórmula de Pogson*, puede escribirse del modo

$$m' - m = \frac{1}{\log K} (\log L - \log L') = 2.5 (\log L - \log L') \quad [A1.2]$$

Mediciones de brillos estelares han puesto de manifiesto que la escala de magnitudes es aproximadamente logarítmica en brillo aparente, de modo que una diferencia de 5 magnitudes corresponde aproximadamente a un factor 100 en brillo aparente. Para mantener los valores astronómicos y por razones de tradición, se decidió que la antigua nomenclatura debía mantenerse, pero introduciendo como definición precisa

$$\frac{L_1}{L_2} = 100^{\left(\frac{m_2 - m_1}{5}\right)} = 2.512^{(m_2 - m_1)} \quad [A1.3]$$

$$m_2 - m_1 = 2.500 \log \left(\frac{L_1}{L_2}\right) \quad [A1.4]$$

De este modo, una diferencia de una magnitud corresponde a un cociente entre luminosidades de 2.512. Para fijar el cero de la escala de magnitudes, se ha tomado como referencia la media de un gran número de estrellas débiles de un catálogo muy extenso. Es debido a esta determinación por lo que hay estrellas muy brillantes cuya magnitud resulta inferior a la unidad e incluso negativas.

### Magnitud aparente

La magnitud aparente es la magnitud del objeto astronómico obtenida directamente por la observación, no corregida de la absorción provocada

por la materia cósmica interestelar y directamente influida por el grado de sensibilidad del instrumento receptor empleado.

### **Magnitud absoluta**

La magnitud absoluta de un cuerpo celeste se define como el valor que tendría la magnitud de dicha fuente si se refiriera a una distancia standard, para la cual se ha adoptado el valor de 10 parsecs.

Teniendo en cuenta la ley del inverso del cuadrado de la distancia, la relación entre la luminosidad absoluta  $L$  y la luminosidad aparente  $\ell$  es

$$\frac{L}{\ell} = \left(\frac{r}{10}\right)^2 \quad [A1.5]$$

Teniendo en cuenta la ecuación [A1.2], a partir de la ecuación [A1.5] se puede definir de manera precisa la magnitud absoluta  $M$  de una fuente cuya magnitud aparente es  $m$ . Se tiene en este caso

$$M - m = 2.5 \log \frac{D_0^2}{d^2} = 5 (\log D_0 - \log d) \quad [A1.6]$$

donde  $D_0$  es la distancia típica correspondiente a  $M$ , adoptada por definición como 10 parsecs, resultando pues

$$M = m + 5 - 5 \log d \quad [A1.7]$$

donde ahora  $d$  es la distancia real a la fuente (galaxia) de magnitud aparente  $m$  ( $d$  debe ser expresado en parsecs).

En cosmología es más usual expresar las distancias en Megaparsecs (Mpc). En este caso se tiene

$$M = m - 25 - 5 \log d \quad [A1.8]$$

donde ahora  $d$  debe expresarse en Mpc.

Teniendo en cuenta la definición de luminosidad se llega a las siguientes relaciones entre luminosidad, magnitud aparente y magnitud absoluta de una galaxia, de gran utilidad en cosmología:

Si introducimos una luminosidad de referencia  $L^*$ , que corresponderá a una magnitud absoluta de referencia  $M^*$ , a partir de la ecuación [A1.4] resulta la siguiente relación

$$\log \left(\frac{L}{L^*}\right) = -0.4 (M - M^*) \quad [A1.9]$$

o lo que es lo mismo

$$M - M^* = 2.500 \log \left( \frac{L}{L^*} \right) \quad [A1.10]$$

El cociente

$$u = \frac{L}{L^*} \quad [A1.11]$$

tiene un gran interés en la definición de las propiedades estadísticas de la distribución de luminosidad de las galaxias observadas, y en particular en la definición de la función de luminosidad y el factor de amplificación de una fuente luminosa, pues expresadas en función de  $u$ , las ecuaciones [A1.9] y [A1.10] resultan

$$M - M^* = 2.500 \log u \quad [A1.12]$$

$$u = 10^{0.4 (M^* - M)} \quad [A1.13]$$

Así, si una galaxia sufre una amplificación  $A$ , como consecuencia del efecto lente, se tendrá

$$L = A L' \quad [A1.14]$$

o lo que es lo mismo

$$u = A u' \quad [A1.15]$$

de donde

$$\begin{aligned} M &= M^* - 2.500 \log u = M^* - 2.500 \log Au' = \\ &= (M^* - 2.500 \log u') - 2.500 \log A \end{aligned} \quad [A1.16]$$

Es decir,

$$M = M' - 2.500 \log A \quad [A1.17]$$

siendo  $M' = M^* - 2.500 \log u'$ .

La ecuación [A1.17] representa el cambio en la magnitud absoluta asignada a una galaxia que experimenta una amplificación  $A$  en su luminosidad aparente como consecuencia del efecto lente debido a la presencia de inhomogeneidades que alteran las trayectorias luminosas.

Así pues, para conseguir un cambio de una unidad en la magnitud aparente de una galaxia (o equivalentemente, en la magnitud absoluta que erróneamente se le atribuiría de no tener en cuenta el efecto de amplificación) hace falta una amplificación  $A=2.5$ , para un incremento en la luminosidad, o  $A = 0.4$ , para una disminución en la luminosidad.

## Apéndice II

### SISTEMAS DE COORDENADAS EN CATALOGOS DE GALAXIAS

---

En cosmología observacional es habitual trabajar con diversos sistemas de coordenadas, cada uno de los cuales resulta más idóneo para un determinado tipo de estudio u objetivo.

Para quienes el manejo de datos observacionales es algo habitual, este apéndice resultará un tanto elemental. La idea es recoger aquí una serie de datos y fórmulas útiles para quienes deban manejar catálogos de galaxias y deban realizar cambios de sistemas de coordenadas dependiendo de las aplicaciones de tales datos.

#### II.1 COORDENADAS ECUATORIALES

El sistema de coordenadas más utilizado es el llamado "ecuatorial". Es éste un sistema tradicionalmente esférico (aunque podrían definirse coordenadas cartesianas equivalentes), donde la coordenada radial suele darse en  $\text{km s}^{-1}$  (o Mpc) para observaciones en cosmología, y cuyas coordenadas angulares son la ascensión recta y la declinación.

El sistema se basa en la definición de un Polo Norte Celeste y un origen para el plano ecuatorial con respecto al cual definir la correspondiente coordenada polar (punto  $\Upsilon$ ).

Habitualmente el ángulo "ascensión recta" suele darse en horas(0-24), minutos(0-60) y segundos(0-60), mientras la "declinación" suele darse en grados ( $-90^\circ, 90^\circ$ ).

No es preciso entrar en detalles acerca de este sistema de coordenadas pues es suficientemente conocido. Baste comentar que aunque es un sistema "inercial" para periodos de tiempo cortos, en realidad sufre una precesión que ha de ser tenida en cuenta si se referencian observaciones sobre periodos de tiempo largos. Por este motivo, todas las observaciones suelen

referenciarse para el sistema de coordenadas correspondiente al equinocio de 1950.

## II.2 COORDENADAS GALACTICAS

Un sistema de coordenadas especialmente interesante en el estudio de catálogos de galaxias, sobre todo en cuanto a la discusión de su completitud angular (generalmente limitada por la ocultación galáctica) son las coordenadas galácticas, basadas en la definición de un Polo Norte Galáctico y un origen para el plano galáctico.

El centro de nuestra galaxia tiene coordenadas ecuatoriales

$$\alpha = 17^{\text{h}} 42^{\text{m}} 24^{\text{s}} \quad \delta = -28^{\circ} 55'$$

para el equinocio de 1950 (Blaauw *et al.*, 1960).

El polo norte galáctico viene definido por la intersección de la esfera celeste con la prolongación hacia el norte (ecuatorial) del eje de rotación de nuestra galaxia. Las coordenadas ecuatoriales del polo norte galáctico son

$$\alpha = 12^{\text{h}} 49^{\text{m}} \quad \delta = 27^{\circ} 24'$$

para el equinocio de 1950 (Blaauw *et al.*, 1960).

El ecuador galáctico es el círculo máximo definido por la intersección de la esfera celeste y la proyección del plano de nuestra galaxia. El plano del ecuador galáctico está inclinado un ángulo de  $62^{\circ} 36'$  con respecto al plano del ecuador celeste.

El sistema de coordenadas galáctico viene definido por la coordenada radial  $V$  (velocidad respecto al centro galáctico), latitud galáctica  $b^{\text{II}}$ , y longitud galáctica  $l^{\text{II}}$ .

La latitud galáctica  $b^{\text{II}}$  de un objeto celeste es el ángulo en grados desde el ecuador galáctico del objeto, medido a lo largo del círculo de latitud galáctica que pasa a través de dicho objeto. La latitud galáctica es positiva o negativa cuando se mide al norte o al sur del ecuador galáctico, respectivamente.

La longitud galáctica  $l^{\text{II}}$  es el ángulo en grados medido hacia el este a lo largo del ecuador galáctico desde el centro galáctico hasta el círculo de longitud galáctica que pasa por la posición de dicho objeto.

El antiguo sistema de coordenadas galácticas (Ohlsson, 1932) tenía su polo norte galáctico en  $\alpha = 12^h 40^m$ ,  $\delta = -28^\circ$ , para el equinocio de 1900, y el punto origen de longitudes se tomó como la intersección del plano galáctico y el ecuador celeste en el equinocio de 1900. Las coordenadas del centro galáctico en el antiguo sistema de coordenadas galácticas son  $(l^I = 327.69^\circ, b^I = -40^\circ)$ . Las coordenadas del nuevo polo galáctico en el antiguo sistema de coordenadas son  $(l^I = 347.7^\circ, b^I = 88.51^\circ)$ . La inclinación entre los dos sistemas es  $1.4866^\circ$ .

Las fórmulas para pasar del antiguo sistema de coordenadas galácticas  $(l^I, b^I)$  al nuevo sistema  $(l^{II}, b^{II})$ , o viceversa, pueden deducirse fácilmente a partir de las siguientes relaciones

$$\cos b^{II} \cos(l^{II} - 109.9497^\circ) = \cos b^I \cos(l^I - 77.6500^\circ)$$

$$\cos b^{II} \sin(l^{II} - 109.9497^\circ) = \cos b^I \cos(l^I - 77.6500^\circ) \cos 1.4866^\circ + \sin b^I \sin 1.4866^\circ$$

$$\sin b^{II} = -\cos b^I \sin(l^I - 77.6500^\circ) \sin 1.4866^\circ + \sin b^I \cos 1.4866^\circ$$

Estas fórmulas se deducen de la inclinación de  $1.4866^\circ$  del nuevo sistema de coordenadas galácticas con respecto al antiguo sistema, y las coordenadas del nodo ascendente (del plano galáctico II con respecto al plano galáctico I) son  $(l^I = 77.6500^\circ, b^I = 0^\circ)$ ,  $(l^{II} = 109.9497^\circ, b^{II} = 0^\circ)$ .

### II.3 COORDENADAS SUPERGALACTICAS

Es el sistema de coordenadas que constituye la referencia natural para las galaxias más lejanas, externas a nuestro grupo local. El motivo de la introducción de este sistema de coordenadas viene dado por la existencia de un plano donde se sitúan las mayores estructuras (lo que permite definir el "plano supergaláctico") y a partir de dicho plano puede completarse un sistema de referencia, especialmente útil para estudios morfológicos y estadísticos de la estructura a gran escala, ya que este sistema de coordenadas viene a ser análogo al sistema galáctico pero aplicado a escala "supergaláctica"

El polo norte supergaláctico es  $(l^I = 15^\circ, b^I = 5^\circ)$ .



El origen del sistema de coordenadas supergaláctico se toma en el punto de coordenadas galácticas ( $l^I = 105^\circ$ ,  $b^I = 0^\circ$ ).

Con estas definiciones pueden calcularse las transformaciones entre las coordenadas ecuatoriales y las supergalácticas y las galácticas y la supergalácticas siguiendo técnicas similares a las descritas para el caso de las coordenadas galácticas.

#### II.4 COORDENADAS DE VELOCIDAD PECULIAR

De cara al estudio de los movimientos peculiares en el entorno local de nuestra galaxia resulta a veces conveniente introducir un sistema de coordenadas en el que sea más fácil expresar dicho movimiento, sistema de denotaremos simplemente  $(x, y, z)$ .

La transformación entre las coordenadas galácticas y el sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  empleado para la corrección del efecto de caída al cúmulo local viene dada por (Aaronson et al., 1986)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.73384 & -0.64216 & -0.22158 \\ 0.67632 & 0.72123 & 0.14969 \\ 0.06369 & -0.25971 & 0.96358 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos l \cos b \\ \sin l \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

En el sistema  $(x, y, z)$ , el eje  $z$  apunta directamente hacia M87 y el eje  $y$  apunta aproximadamente hacia el polo supergaláctico.

Existen numerosos sistemas de coordenadas similares útiles para casos particulares, pero muchos de ellos no están claramente definidos.

#### Ventajas e inconvenientes de la elección de un sistema particular de coordenadas

La definición de las posiciones de las galaxias en uno u otro sistema de coordenadas no es sino un problema matemático simple, ya que fácilmente pueden transformarse unas coordenadas en otras si tal transformación es necesaria <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> A lo largo de la elaboración de esta memoria se han desarrollado las subrutinas correspondientes para transformar coordenadas de uno a otro sistema, que pueden ser utilizadas de modo genérico para cualquier catálogo de galaxias.

El problema, no obstante, viene dado por la elección de las coordenadas "básicas" en las que referenciar las observaciones y en las que definir los catálogos de galaxias correspondientes. Es preciso señalar a este respecto que el sistema de referencia "natural" en el que deberían definirse las observaciones es el ecuatorial, que es de hecho el utilizado para confeccionar la mayoría de los catálogos de galaxias existentes.

Hay que tener en cuenta que los demás sistemas de coordenadas, aunque útiles para cierto tipo de análisis, no son sistemas bien definidos. En efecto, el polo norte galáctico no está absolutamente definido, por lo que no es ésta una buena referencia. Peor aún es la definición del polo norte supergaláctico, por no comentar otras referencias aún peor definidas.

Así pues, al trabajar con catálogos de galaxias asumiremos siempre coordenadas ecuatoriales como base, transformando las posiciones a otros sistemas de coordenadas sólo cuando ello pueda ser conveniente.



## Apéndice III

### EL CATALOGO DE GALAXIAS DEL CfA<sup>1</sup>

---

#### 1. Introducción

El *Center for Astrophysics* (CfA) de la Universidad de Harvard está llevando a cabo uno de los proyectos más ambiciosos en lo que se refiere al estudio de la estructura a gran escala del universo. Se trata de la elaboración del ya conocido como *The CfA Redshift Catalogue* resultante del original *CfA survey*.

El original *CfA survey*, con magnitud aparente límite 14.5, fue completado en 1981 (Huchra *et al.*, 1983). En 1984 se decidió ampliar dicha muestra original, con el fin de cubrir la misma área sobre la bóveda celeste pero con magnitud aparente límite 15.5

El nuevo catálogo (distribuido en 1990) incorpora muchos de los últimos datos de velocidades radiales del Whipple Observatory y otras fuentes, así como velocidades procedentes de anteriores compilaciones como el *Second Reference Catalogue* de De Vaucouleurs, De Vaucouleurs y Corwin, el *Index of Galaxy Spectra* de Gisler y Friel, y el *Catalogue of Radial Velocities of Galaxies* de Palumbo, Tanzella-Nitti y Vettolani. También incluye magnitudes BT, los correspondientes números UGC (para correspondencia con otros catálogos) y una más completa información sobre las fuentes para los datos de velocidad radial (debido al deseo por parte de muchos investigadores por conocer el origen del dato de velocidad radial proporcionado en el catálogo, lo cual no fue facilitado, al menos de modo completo, en las iniciales versiones del catálogo).

---

<sup>1</sup> Este Apéndice es esencialmente una reelaboración, con algunos añadidos, del documento *The Center for Astrophysics redshift catalogue*, de John P. Huchra, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics (Versión del 5 Diciembre 1989, que es la última actualización del catálogo). El documento está disponible en la base de datos NASA Goddard Space Flight Center (Astronomical Data Center) y, además de contener información básica sobre el catálogo CfA, recoge las sucesivas versiones.

En la tabla 1 de este apéndice se da una descripción detallada del formato para la lectura del actual catálogo del CfA (ZCAT), con lo que puede verse en detalle el contenido del mismo. Como el catálogo está siendo continuamente actualizado y puesto al día, se producen alteraciones de unas versiones a otras que a veces afectan a su propio formato. Se detallan por ello los dos formatos actualmente existentes en las versiones del catálogo en uso.

Los datos contenidos en el catálogo del CfA fueron inicialmente reunidos con el propósito de estudiar la estructura a gran escala del universo, y, por lo tanto, son prácticamente completos en cuanto a la información de redshift, pero no son necesariamente completos en otro tipo de informaciones tales como diámetros, magnitudes y comentarios y referencias con las codificaciones seguidas en otros catálogos. Este tipo de información adicional va siendo añadida en sucesivas ediciones del catálogo del CfA a medida que se dispone de ella.

## 2. Coordenadas angulares

Aunque todas las coordenadas en el listado del catálogo son referenciadas con una precisión de  $0.1''$  y  $1''$  (para  $\alpha$  y  $\delta$ , respectivamente) con el fin de seguir un formato estandarizado para el futuro, la precisión real de las posiciones (angulares) de las galaxias varía considerablemente. En general, las coordenadas tomadas de los catálogos de Zwicky o Nilson están referenciadas con una precisión de  $1'$  y su precisión real está ligeramente por debajo del minuto. Las coordenadas tomadas del MCG llegan a tener errores de más de dos minutos. Algunas coordenadas con una precisión de hasta  $5''$ - $6''$  han sido tomadas del RC2, Spellman, Madore & Helou (1989), del catálogo del ESO y otras listas similares. En un pequeño número de casos, usualmente en las regiones más internas de cúmulos de galaxias, las coordenadas angulares han sido directamente medidas de nuevo por el personal que elabora el catálogo del CfA, o colaboradores, con el fin de introducir unas coordenadas más precisas en el catálogo. Un grupo de galaxias en el catálogo (cada vez mayor a medida que aparecen nuevas versiones) tiene coordenadas medidas con una precisión de segundos de arco, mediante dispositivos más avanzados. Las coordenadas para fuentes del IRAS que han sido tomadas de PSC tienen una precisión de  $20''$ - $30''$ ,

mientras otras fuentes brillantes en muestreos que han sido digitalizados tendrán coordenadas más precisas.

En todo caso, en la elaboración del catálogo se ha tenido especial cuidado en utilizar un sistema de coordenadas perfectamente definido (coordenadas ecuatoriales) y adecuadamente referido a 1950, procurando no utilizar sistemas de referencia pseudoinerciales no muy bien definidos (Grupo Local, etc), inadecuados para referir un catálogo de galaxias.

### 3. Velocidades radiales

Las velocidades indicadas en el catálogo son heliocéntricas y los redshifts ( $z$ ) han sido convertidos en velocidades aplicando simplemente la relación  $v = zc$ , siendo  $c = 2.99792458 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1}$ . El redshift viene definido por

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Se indican directamente las velocidades heliocéntricas para permitir a los usuarios que lo deseen el hacer las debidas correcciones aplicando aquellos modelos que resulten más apropiados en cada caso (en particular, el empleo de un sistema de referencia basado en coordenadas galácticas, u otro tipo de sistemas inerciales con respecto al grupo local de galaxias o con respecto al supercúmulo de Virgo, u otros sistemas pseudo-inerciales de referencia).

En los casos en los que algún tipo de corrección se había aplicado a los datos previamente publicados y que han servido como fuente para la elaboración del catálogo del CfA, se han aplicado las transformaciones correspondientes para recuperar las velocidades heliocéntricas, pero quedan aún confusiones en aquellos casos en los que los autores no establecen explícitamente qué correcciones se han aplicado a los datos que proporcionan. En tales casos, para su introducción en el catálogo del CfA se ha considerado  $300 \sin l \cos b$  ( $\text{kms}^{-1}$ ) como la corrección galactocéntrica aplicada. Es preciso tener en cuenta que ahora que la medición de velocidades con una precisión inferior a  $30 \text{ kms}^{-1}$  es bastante corriente, la corrección heliocéntrica debida al movimiento solar es absolutamente necesaria.

Las referencias de las que se han tomado los valores de velocidades radiales aparecen indicadas en el campo correspondiente del catálogo. Las velocidades con indicativo de referencia negativo están todavía en el dominio privado y no pueden usarse sin el apropiado consentimiento de los autores que han realizado tales mediciones. En las versiones iniciales del catálogo la codificación de dichas referencias era alfabética, pero como en versiones más recientes se han añadido nuevas referencias, se ha adoptado un esquema cronológico de codificación numérica.

Los objetos listados en el catálogo que no tienen velocidad radial medida y no tienen indicativo de referencia de velocidad (en el hemisferio norte), son objetos cuya observación está prevista en la extensión de la muestra del CfA en curso de realización. Los objetos para los que no consta la velocidad radial pero sí tienen indicativo de referencia quiere decir que dicha velocidad ha sido ya medida (por la referencia dada) pero el dato aún no ha sido publicado. Se da la referencia por si algún usuario desea pedir tales datos no publicados personalmente a los autores citados.

#### **4. Errores de velocidad radial**

En general, los errores referenciados para las velocidades radiales son los que aparecen indicados en las correspondientes fuentes de donde se ha tomado el dato de velocidad radial (generalmente el dato corresponde a los errores aleatorios, despreciándose los sistemáticos). La única excepción es cuando el dato se ha tomado de múltiples mediciones, lo que ha mejorado la precisión. Algunas fuentes indican errores que son realmente el error medio "interno" (es decir, la varianza en las velocidades medidas a partir de múltiples líneas en un único espectro de una galaxia). Estos casos a menudo no incluyen los errores de posición del cero, ni los errores provocados por no situar perfectamente centrada la galaxia en la placa de observación y otros problemas instrumentales, con lo que se trata de errores que siempre representan subestimaciones del error "externo" verdadero en la determinación de la velocidad.

Algunas fuentes son mejores que otras. Los errores de velocidad en las mediciones originales de la muestra del CfA y la mayor parte de las fuentes basadas en mediciones de 21-cm están aproximadamente dentro de la unidad del error externo verdadero (los errores del CfA son solamente alrededor del 10-20% más bajos), mientras las imprecisiones referenciadas en trabajos

más antiguos, como el RC2 y el RSA, son subestimaciones de un factor mayor que dos.

Un pequeño número de las velocidades listadas (y medidas por el CfA) tienen el indicativo "POOR VELOCITY" en el campo de comentarios. Esto quiere decir que se trata de velocidades con importantes diferencias, o incluso incoherencias, entre diversas determinaciones disponibles, o bien velocidades estimadas a partir de una sola línea de emisión que han de ser posteriormente comprobadas, y está previsto hacerlo en el futuro. En general, hay bastante información en los espectros para sugerir que son aproximadamente correctas, pero si se desea un estudio preciso tales galaxias deberían excluirse por el momento en los análisis del catálogo.

## 5. Magnitudes

La determinación de magnitudes de galaxias es un problema siempre presente y controvertido. En el catálogo del CfA se ha intentado hacer lo posible por adoptar un sistema más o menos uniforme para el mayor número de galaxias. Este sistema es el "B(0)-Zwicky system", B(0)-Zw. Otro tipo de magnitudes (B-T) son proporcionadas en otro campo del catálogo, por referencia, cuando éstas han sido determinadas. Estas magnitudes son generalmente en torno a 0.4 magnitudes más brillantes que las magnitudes en el sistema B(0)-Zw.

Algunas magnitudes, especialmente para objetos en muestreos más profundos, proceden de digitalización de placas fotográficas. Estas magnitudes, por definición, son realmente difíciles de comparar con sistemas de magnitudes más estandarizados (isofotal o total fotográfico B), pues cada caso requiere un diferente punto cero y correcciones de color.

Se han deducido unas fórmulas muy aproximadas de corrección de otros sistemas de magnitudes para pasarlas al sistema B(0)-Zwicky. Estas fórmulas de corrección son usadas temporalmente, hasta que el catálogo quede completamente unificado.

Tales correcciones dependen de la referencia de valores de magnitudes de que se trate, de acuerdo con la siguiente tabla



Referencia del valor de magnitud		Corrección a aplicar
3	(Tully-Fisher)	$B(0) = M + 1.38$
4	(Rubin-Ford, Thonnard-Roberts-Graham)	$B(0) = M + 0.34$
5	(Markarian)	$B(0) = M + 0.5$
6	(BT, 2 Reference Catalogue)	$B(0) = M + 0.4$
7	(MCG Vorontsov-Velyaminov)	$B(0) = M + 0.5$
R (ITYPE $\leq 1$ )	(Magnitudes rojas para elípticas B-R)	$B(0) = M + 1.8$
R (ITYPE $> 1$ )	(Magnitudes rojas para espirales B-R)	$B(0) = M + 1.4$
V (ITYPE $\leq 1$ )	(Magnitudes visuales para elípticas B-V)	$B(0) = M + 1.0$
V (ITYPE $> 1$ )	(Magnitudes visuales para espirales B-V)	$B(0) = M + 0.7$

Estas correcciones **no** han sido aplicadas en el catálogo del CfA tal como se facilita en su versión original, sino que más bien representan correcciones sugeridas para el futuro y uso posterior de estos datos. Todas estas correcciones han sido aplicadas en los resultados presentados en esta memoria.

Los valores de las magnitudes están tomados preferentemente del *1st Reference Catalogue* de De Vaucouleurs —corregido  $B(0)$ — y del catálogo de Zwicky. Otras referencias para las magnitudes son utilizadas sólo cuando ello es necesario, por no estar éstas disponibles en tales catálogos. La elección de este sistema de magnitudes maximiza el número de magnitudes de galaxias disponible y permite una fácil conversión a otros sistemas, siempre que se tenga información sobre el diámetro y tipo morfológico.

## 6. Tipos morfológicos

Los tipos morfológicos considerados son los tipos T de De Vaucouleurs, tomados del *RC2*, *Uppsala Catalog* y el *Revised Shapley-Ames Catalog*. Algunos tipos adicionales han sido definidos para objetos peculiares sin tipo definido y para aquellos objetos que figuraban como "objetos extragalácticos" pero que realmente son galaxias.

En el catálogo del CfA se han incluido tanto objetos galácticos como regiones HII que son parte de otras galaxias y otros objetos de este tipo, con el fin de confeccionar un catálogo más amplio. Cuando el catálogo del CfA se utiliza como simple "catálogo de galaxias" se han de eliminar los objetos con número de tipo morfológico superior a 20.

El formato para las designaciones de los tipos morfológicos consta de 4 códigos (ver tabla con el formato detallado).

Algunos tipos morfológicos para galaxias en la región de la muestra del CfA han sido directamente determinados por J. Huchra a partir de copias de las placas del *Palomar Sky Survey*. Los tipos morfológicos para las galaxias del hemisferio sur han sido tomados del catálogo del ESO y del catálogo de Vorontsov-Velyaminov.

## 7. Diametros

Los diámetros galácticos están dados en minutos de arco obtenidos a partir del *Blue Palomar Sky Survey* o del *ESO blue survey*. Es preciso señalar que, aunque el formato con el que consta el dato de diámetro en el fichero es F4.1, algunas galaxias tienen diámetros que exceden los 99.9 minutos de arco (como M31 y M33) y aparecen referenciadas en el catálogo como F4.0. Por otro lado, otras galaxias, especialmente débiles, tienen diámetros más pequeños de 1 minuto de arco y han sido medidas con precisión de 2 cifras decimales.

## 8. Submuestras "completas" del catálogo

Hay varios catálogos que representan submuestras "completas" del catálogo del CfA. Una de ellas, ya publicada (Huchra *et al.*, 1983), contiene todas las galaxias en el catálogo combinado Zwicky-Nilson con las siguientes propiedades<sup>1</sup>:

$$B \leq 14.5 \quad (\text{para todo el catálogo})$$

y

$$\left. \begin{array}{l} b^{\text{II}} \geq 40^\circ \\ \delta \geq 0.0^\circ \end{array} \right\} \quad (\text{para el hemisferio norte galáctico})$$

<sup>1</sup> Este catálogo se conoce como "North Zwicky Forty", debido al nombre inicialmente dado al fichero (NZ40).

$$\left. \begin{array}{l} b^{\text{II}} \leq -30^{\circ} \\ \delta \geq -2.5^{\circ} \end{array} \right\} \quad (\text{para el hemisferio sur galáctico})$$

Para esta muestra, los datos de velocidad son completos. El catálogo contiene  $\approx 2400$  galaxias (y una estrella, III ZW 92, derivada de un error en el catálogo original de Zwicky).

Existe otro catálogo que contiene otra región extensa para la cual se dispone de una muestra "completa" de galaxias, con magnitud aparente límite. Dicho catálogo es el *Bright Galaxy Redshift Catalogue*, y contiene todas las galaxias conocidas más brillantes que  $B(0) = 13.21$  en el sistema de magnitudes adoptado por el CfA. Se trata de un catálogo de todo el cielo y los datos de velocidades correspondientes son completos en un 99%. El catálogo contiene  $\approx 1350$  galaxias. (Este subcatálogo había circulado previamente como comunicación personal, pero ahora es de dominio público). Este catálogo es de hecho muy parecido al *Revised Shapley-Ames Catalogue* de Sandage y Tammann.

La versión actual del catálogo del CfA (ZCAT) contiene ya los datos correspondientes al Southern Galaxy Redshift Survey (Da Costa *et al.*, 1987), y también contiene información (aunque no las velocidades radiales, por el momento) sobre la muestra del *IRAS galaxy survey* de M. Davis, J. Huchra, M. Strauss, J. Tonry y A. Yahil, así como todos los datos procedentes del *Nearby Galaxy Catalogue* de Tully and Fisher (1987), y está siendo continuamente puesto al día con los datos procedentes de la muestra del catálogo UGC de Bothun *et al.* (1986). Muchas fuentes —aunque no todas— procedentes de la muestra del satélite IRAS son designadas en el catálogo mediante el indicativo "IRnnnnn" en el campo de comentarios del fichero.

La versión de la que actualmente disponemos del catálogo del CfA (ZCAT) contiene —aunque sin información completa sobre velocidades— todas las galaxias del catálogo de Zwicky (1961) con  $m_B \leq 15.5$  en la región de la muestra del CfA.

Finalmente, esta versión del catálogo del CfA contiene la información relativa a velocidades y tipo morfológico para el primer "slice" de la muestra más profunda del CfA:

$$\begin{array}{l} 26^{\circ}.5 \leq \delta \leq 32^{\circ}.5 \\ 8 \text{ h} \leq \alpha \leq 17 \text{ h} \end{array}$$

(Huchra *et al.*, 1989), pero no contiene completa información sobre las restantes diez "slices" ya completadas.

## 9. Nomenclaturas y comentarios

Uno de los principales objetivos del catálogo del CfA ha sido el unificar nomenclaturas y definiciones. En muchos casos se han publicado redshifts medidos para una misma galaxia pero con diferente identificación y diferentes posiciones angulares. Ello produce duplicidades en el catálogo al ser interpretadas como diferentes galaxias siendo en realidad una sola. Parece ser que aún quedan en la última versión del catálogo del CfA duplicidades de este tipo, que deberían ser eliminadas.

Muchas galaxias aparecen listadas en más de un catálogo (es bastante usual encontrar una misma galaxia en los catálogos de Zwicky, Nilson, el MCG, etc). Para las galaxias que existe designación MCG, ésta se encuentra en el campo de comentarios, y generalmente es de la forma "nn-mm-ppp", donde nn es la zona de declinación (las zonas negativas están precedidas por el carácter "-"), mm es el campo celeste de la muestra en la zona, partiendo desde 0 h, y ppp es el número de galaxia. Las designaciones del ESO aparecen indicadas en la forma "ESO nnn-Gmm", donde nnn es el número de campo de la muestra del ESO y mm es el número de galaxia en la placa.

En unos pocos casos se referencian en el catálogo velocidades discrepantes (donde dos medidas de velocidades discrepan en más del doble de sus errores externos combinados) obtenidas de otras fuentes. Tales discrepancias se citan en el campo de "comentarios" (por ejemplo, 1234(9) indica que se da una velocidad de 1234 en la referencia 9 para las fuentes de los datos de velocidad. En general, las velocidades listadas en el catálogo son las mejores disponibles según los errores reportados. Para la mayor parte de las galaxias hay una única fuente de velocidad radial disponible. Con buen criterio, los compiladores del catálogo no han considerado apropiado promediar datos antiguos de baja calidad con datos nuevos mucho mejores y más precisos.

Las galaxias con velocidades radiales mayores de  $100,000 \text{ km s}^{-1}$  se hallan contenidas en un catálogo adicional (ZBIG), si bien este catálogo es incompleto e irregular, dado que no es objetivo prioritario del CfA su elaboración sistemática. Otro catálogo adicional, derivado del CfA,

contiene velocidades radiales promediadas para cúmulos de Abell (ABELL).

El propósito del catálogo, al menos por el momento, es servir de lista de referencia para velocidades radiales, con el fin de ser utilizada en estudios estadísticos. Los datos de redshift y posiciones angulares son, pues, prioritarios frente a cualquier otro tipo de datos. El catálogo está siendo continuamente actualizado a medida que se dispone de nuevos datos, pero no con la suficiente celeridad y a veces de modo un tanto "caótico" <sup>1</sup>.

La compilación de galaxias conocida como Catálogo del CfA ha sido realizada principalmente por John Huchra (IAU Working Group on Galaxy Redshifts), del Center for Astrophysics, y sus colaboradores Dinah Danby, Bob Davis, Marc Davis, Peggy Geller, Ed Horine, Dave Latham, April Michel, Jon Morse, Jim Peters, Suzanne Rapp, Susan Tokarz y John Tonry. También han colaborado directamente, aportando sus datos, Tony Fairall, Riccardo Giovanelli, Martha Haynes, George Helou, Lyle Hoffman, Nathan Krumm, Otto Richter y Ed Salpeter, como un esfuerzo colectivo internacional por realizar una compilación completa de las galaxias conocidas. Este trabajo ha sido también financiado por la Institución Smithsonian y la NASA, que es finalmente la encargada del archivo y distribución de los catálogos a través del *Astronomical Data Center* del Goddard Space Flight Center.

---

<sup>1</sup> El catálogo se distribuye con la advertencia THE CATALOGUERS MAKE NO CLAIM THAT THIS ISSUE IS COMPLETE OR FREE FROM ERRORS. Desgraciadamente, tal advertencia está perfectamente justificada, pues son bastantes e importantes los errores existentes en las versiones más recientes, lo que obliga a veces a trabajar con versiones más antiguas para garantizar que han sido debidamente depuradas de tales errores.

Tabla III.1a FORMATO DEL CATALOGO ZCAT (Versión 1989)

Variable	Formato FORTRAN	Posición (columnas)
GALAXIA (DESIGNACION I.A.U.)	A10	1 - 10
ASCENSION RECTA* (HORAS)	I2	11 - 12
ASCENSION RECTA* (MINUTOS)	I2	13 - 14
ASCENSION RECTA* (SEGUNDOS)	F4.1	15 - 18
SIGNO DE LA DECLINACION	A1	19
DECLINACION* (GRADOS)	I2	20 - 21
DECLINACION* (MINUTOS)	I2	22 - 23
DECLINACION* (SEGUNDOS)	I2	24 - 25
MAGNITUD APARENTE (AZUL) (ZWICKY-B(0))	F5.2	26 - 30
VELOCIDAD (HELIOCENTRICA)	I5	31 - 35
ERROR EN VELOCIDAD	I3	36 - 38
REFERENCIA PARA MAGNITUD	A1	39
REFERENCIA PARA VELOCIDAD	I2	40 - 41
OTRAS REFERENCIAS PARA VELOCIDAD	I2	42 - 43
TIPO MORFOLOGICO (T)	I2	44 - 45
TIPO MORFOLOGICO (BAR)	A1	46
CLASE DE LUMINOSIDAD	I1	47
ESTRUCTURA	A1	48
DIAMETRO (EJE MAYOR)	F4.1	49 - 52
DIAMETRO (EJE MENOR)	F4.1	53 - 56
	I1	57
MAGNITUD BT	F5.2	58 - 62
NUMERO CORRESPONDIENTE EN UGC	I5, A1	63 - 68
DISTANCIA (EN Mpc) **	F4.2	69 - 72
INDICATIVO	A1	73
COMENTARIOS	A31	74 - 104

\* Las coordenadas angulares ascensión recta ( $\alpha$ ) y declinación ( $\delta$ ) son para 1950.

\*\* Distancia en Mpc determinada a partir de medidas de distancia independientes de la velocidad.

Tabla III.1b FORMATO DE LA ANTIGUA VERSION DEL CATALOGO

Variable	Formato FORTRAN	Posición (columnas)
GALAXIA (DESIGNACION I.A.U.)	A 11	1 - 11
ASCENSION RECTA* (HORAS)	I 2	12 - 13
ASCENSION RECTA* (MINUTOS)	I 2	14 - 15
ASCENSION RECTA* (SEGUNDOS)	F4.1 **	16 - 19
SIGNO DE LA DECLINACION	A 1	20
DECLINACION* (GRADOS)	I 2	21 - 22
DECLINACION* (MINUTOS)	I 2	23 - 24
DECLINACION* (SEGUNDOS)	I 2	25 - 26
MAGNITUD APARENTE (AZUL) (ZWICKY-B(0))	F5.2	27 - 31
VELOCIDAD (HELIOCENTRICA)	I 5	32 - 36
ERROR EN VELOCIDAD	I 3	37 - 39
REFERENCIA PARA MAGNITUD	A 1	40
REFERENCIA PARA VELOCIDAD	I 2	41 - 42
TIPO MORFOLOGICO (T)	I 2	43 - 44
TIPO MORFOLOGICO (BAR)	A 1	45
CLASE DE LUMINOSIDAD	I 1	46
ESTRUCTURA	A 1	47
DIAMETRO (EJE MAYOR)	F4.1	48 - 51
DIAMETRO (EJE MENOR)	F4.1 1X	52 - 55 56
TIPO MORFOLOGICO DE NILSON	A 1 2X	57 58 - 59
DISTANCIA-VELOCIDAD ***	I 4	60 - 63
COMENTARIOS	A 20	64 - 83

\* Las coordenadas angulares ascensión recta ( $\alpha$ ) y declinación ( $\delta$ ) son para 1950.

\*\* En una versión más antigua del catálogo esta coordenada angular tenía formato I2. En versiones más recientes se añadió una cifra decimal para mayor precisión.

\*\*\* Distancia en  $\text{km s}^{-1}$  definida como  $\text{DIST} * 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

## BIBLIOGRAFIA

---

- Abell, G.O., 1958, *Astrophys. J. Suppl.* **3**, 211
- Anvi, Y., Shulami, I., 1988, *Astrophys. J.*, **332**, 113
- Bardeen, J.M., Bond, J.R., Kaiser, N. and Szalay, A.S., 1986, *Astrophys. J.*, **304**, 15
- Baumgart, D.J., Fry, J.N., 1991, *Astrophys. J.*, **375**, 25
- Batuski, D.J., Burns, J.O., 1985, *Astrophys. J.*, **299**, 5
- Bean, A.J., Efstathiou, G., Ellis, R.S., Peterson, B.A. and Shanks, T., 1983, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **205**, 605
- Bertschinger, E., 1983, *Astrophys. J.*, **268**, 17
- Bertschinger, E., 1985 a, *Astrophys. J.*, **295**, 1
- Bertschinger, E., 1985 b, *Astrophys. J. Suppl.*, **58**, 1
- Blandford, R.D., Jaroszynski, M., 1981, *Astrophys. J.*, **246**, 1
- Blandford, R.D., Phinney, E.S., Narayan, R., 1987, *Astrophys. J.*, **313**, 28
- Bouchet, F.R., Lachieze-Rey, M., 1986, *Astrophys. J. Letters*, **302**, L37
- Bourassa, R.R., Kantowski, R., 1975, *Astrophys. J.*, **195**, 13
- Broadhurst, T.J., Ellis, R.S., Koo, D.C., Szalay, A.S., 1990, *Nature*, **343**, 726
- Calzetti, D., Giavalisco, M., Ruffini, R., 1988, *Astron. Astrophys.*, **198**, 1
- Canizares, C.R., 1982, *Astrophys. J.*, **263**, 508
- Cavaliere, A., Maccacaro, T., 1990, *Astrophys. J.*, **358**, 1
- Centrella, J.M., Melott, A.L., 1983, *Nature*, **305**, 196



- Chao, W.Z., 1983, *Phys. Rev. D*, **28**, 1898
- Da Costa, L.N., Pellegrini, P.S., Sargent, W.L., Tonry, J., Davis, M., Meiksin, A., Latham, D.W., Menzies, J.W., Coulson, I.A., 1988, *Astrophys. J.*, **327**, 544
- Danese, L., De Zotti, G., Di Tullio, G., 1980, *Astron. Astrophys.*, **82**, 322
- Dautcourt, G., 1969, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **144**, 255
- Davis, M., Peebles, P.J.E., 1983, *Astrophys. J.*, **267**, 465
- De Lapparent, V., Geller, M.J., Huchra, J.P., 1986, *Astrophys. J. Letters*, **302**, L1
- De Lapparent, V., Geller, M.J., Huchra, J.P., 1988, *Astrophys. J.*, **332**, 44
- Domínguez-Tenreiro, R., Martínez, V.J., 1989, *Astrophys. J. Letters*, **339**, L9
- Dressler, A., Faber, S.M., Burstein, D., Davies, R.L., Lynden-Bell, D., Terlevich, R.J. and Wegner, G., 1987b, *Astrophys. J. Letters*, **313**, L37
- Dyer, C.C., 1984, *Astrophys. J.*, **287**, 26
- Dyer, C.C., Ip, P.S.S., 1988, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **235**, 895
- Dyer, C.C., Oattes, L.M., 1988, *Astrophys. J.*, **326**, 50
- Dyer, C.C., Roeder, R.C., 1972, *Astrophys. J. Letters*, **172**, L115
- Dyer, C.C., Roeder, R.C., 1973, *Astrophys. J. Letters*, **173**, L31
- Efstathiou, G., Ellis, R.S., Peterson, B.A., 1988, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **232**, 431
- Einasto, J., Joeveer, M., and Saar, E., 1980, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **193**, 353
- Einasto, J., Klypin, A.A., and Shandarin, S.F., 1983, *IAU Symposium 104, Early Evolution of the Universe and Its Present Structure*, ed. G.O. Abell y G. Chincarini (Dordrecht: Reidel), p. 405
- Einasto, J., Klypin, A.A., Saar, E., and Shandarin, S.F., 1984, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **206**, 529

- Einasto, J., Klypin, A.A., and Saar, E., 1986, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **219**, 457
- Einstein, A., and Straus, E.G., 1945. *Rev. Mod. Phys*, **17**, 120
- Elizalde, E., 1987, *J. Math. Phys.*, **28**, 2977
- Ellis, G.F.R., 1971, in *General Relativity and Cosmology*, Ed. B.K. Sachs, New York, Academic, pag. 104
- Ellis, G.F.R., and Fairall, A.P., 1988. *Astrophys. J.*, **327**, 34
- Etherington, I.M.H., 1933. *Phil. Mag.*, **15**, 761
- Ferrando, J.J., Morales, J.A., Portilla, M., 1992, en preparación
- Fillmore, J.A., Goldreich, P., 1984. *Astrophys. J.*, **281**, 9
- Fisher, K.B., Strauss, M.A., Davis, M., Yahil, A., and Huchra, J.P., 1992, *Astrophys. J.*, **389**, 188
- Fujimoto, M., 1983, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **35**, 159
- Futamase, T., 1988, *Phys. Rev. Letters*. **61**, 2175
- Futamase, T., and Sasaki, M., 1989, *Phys. Rev. D*, **40**, 2502
- Geller, M.J., Huchra, J.P., 1988, *International Meeting on Large Scale Structure and Motions in the Universe*, Trieste, April, 1988. Ed. Mezzetti, E., Giuricin, G., Mardirossian, F. and Ramella, M., Kluwer A.P., 1989, pp. 3-18
- Geller, M.J., Huchra, J.P., 1989, *Science*. **246**, 897
- Gorenstein, M.V., Falco, E.E., Shapiro, I.I., 1988, *Astrophys. J.*, **327**, 693
- Gott III, J.R., Melott, A.L., Dickinson, M., 1986, *Astrophys. J.*, **306**, 341
- Gott III, J.R., Weinberg, D.H., Melott, A.L., 1987, *Astrophys. J.*, **319**, 1
- Gregory, S.A., Thompson, L.A., Tifft, W.G., 1981, *Astrophys. J.*, **243**, 411
- Grossman, S. A., Narayan, R., 1988. *Astrophys. J. Letters*, **324**, L37
- Guiderdoni, B., Rocca-Volmerange, B., 1990, *Astron. Astrophys.*, **227**, 362

- Gunn, J.E., 1966, *Astrophys. J.*, **147**, 61
- Harrison, E.R., 1974, *Astrophys. J.*, **191**, L51-52
- Hausman, M.A., Olson, D.W., Roth, B.D., 1983, *Astrophys. J.*, **270**, 351
- Haynes, M.P., Giovanelli, R., 1986, *Astrophys. J. Letters*, **306**, L55
- Hawking, S.W., Ellis, G.F.R., 1973, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge
- Hawking, S.W., Moss, I.G., Stewart, J.M., 1982, *Phys. Rev. D*, **26**, 2681
- Hoffman, Y., 1989, *Astrophys. J.*, **340**, 69
- Hoffman, G.L., Salpeter, E.E., Wasserman, I., 1983, *Astrophys. J.*, **268**, 527
- Holtzman, J.A., 1989, *Astrophys. J. Suppl.* **71**, 1
- Hoyle, F., 1959, in *Paris Symposium on Radio Astronomy*, Ed.: R. N. Bracewell, Stanford Univ. Press, p. 529
- Huchra, J., Davis, M., Latham, D., Tonry, J., 1983, *Astrophys. J. Suppl.*, **52**, 89
- Icke, V., 1973, *Astron. Astrophys.*, **27**, 1
- Icke, V., 1984, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **206**, 1P
- Icke, V., Van de Weygaert, R., 1987, *Astron. Astrophys.*, **184**, 16
- Ikeuchi, S., 1981, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **33**, 211
- Ikeuchi, S., Tomisaka, K., Ostriker, J.P., 1983, *Astrophys. J.*, **265**, 583
- Joeveer, M., Einasto, J., 1978, *IAU Symposium 79, The Large Scale Structure of the Universe*, ed. M.S. Longair y J. Einasto (Dordrecht: Reidel), p. 241
- Kasai, M., 1988, *Prog. Theor. Phys.*, **79**, 777
- Kaiser, N., 1982, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **198**, 1033
- Kaiser, N., 1987, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **227**, 1
- Kaiser, N., Peacock, J.A., 1991, *Astrophys. J.*, **379**, 482
- Kayser, R., Refsdal, S., Stabell, R., 1986, *Astron. Astrophys.*, **166**, 36

- Kayser, R., Schramm, T., 1988. *Astron. Astrophys.*, **191**, 39
- Kirshner, R.P., Oemler, A., Schechter, P.L., Shectman, S.A., 1981, *Astrophys. J. Letters*, **248**, L57
- Kirshner, R.P., Oemler, A., Schechter, P.L., Shectman, S.A., 1987, *Astrophys. J.*, **314**, 493
- Kochanek, C.S., Apostolakis, J., 1988. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **235**, 1073
- Lake, K., 1980, *Astrophys. J.*, **240**, 744
- Lake, K., 1984, *Phys. Rev. D*, **29**, 1861
- Lake, K., Pim, R., 1985, *Astrophys. J.*, **298**, 439
- Lilje, P.B., Efstathiou, G., 1989. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **236**, 851
- Lin, C.C., Mestel, L., Shu, F.H., 1965. *Astrophys. J.*, **142**, 1431
- Lonsdale, C.J., Hacking, P.B., Conrow, T.P., Rowan-Robinson, M., 1990, *Astrophys. J.*, **358**, 60
- Lubin, P.M., Epstein, G.L., Smoot, G.F., 1983, *Phys. Rev. Letters*, **50**, 616
- Lyndell-Bell, D., 1964, *Astrophys. J.*, **139**, 1195
- Maeda, K., 1986, *Gen. Rel. Grav.*, **18**, 931
- Maeda, K., Sasaki, M., Sato, H., 1983. *Prog. Theor. Phys.*, **69**, 89
- Maeda, K., Sato, H., 1983 a, *Prog. Theor. Phys.*, **70**, 772
- Maeda, K., Sato, H., 1983 b, *Prog. Theor. Phys.*, **70**, 1276
- Maoz, E., Bekenstein, J.D., 1990. *Astrophys. J.*, **353**, 59
- Martínez, V.J., 1989, *La textura de l'Univers*. Tesis Doctoral, Universitat de València
- Martínez-González, E., Sanz, J.I., Silk, J., 1990, *Astrophys. J. Letters*, **355**, L5
- Mattig, W., 1958, *Astron. Nach.*, **284**, 109
- Mattig, W., 1959, *Astron. Nach.*, **285**, 1

- Maurogordato, S., Lachieze-Rey, M., 1987, *Astrophys. J.*, **320**, 13
- Maurogordato, S., Lachieze-Rey, M., 1991, *Astrophys. J.*, **369**, 30
- McGill, C., 1990, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **242**, 428
- Midorikawa, S., 1985, *Phys. Letters B.* **158B**, 107
- Moreno, J., Portilla, M., 1990, *Astrophys. J.*, **352**, 399
- Nilson, P., 1973, *Uppsala General Catalogue of Galaxies*, Uppsala Astr. Obs. Ann. V, Vol. 1
- Olson, D.W., Silk, J., 1979, *Astrophys. J.*, **233**, 395
- Ostriker, J.P., Cowie, L.L., 1981, *Astrophys. J. Letters*, **243**, L127
- Otto, S., Politzer, H.D., Preskill, J., Wise, M.B., 1986, *Astrophys. J.*, **304**, 62
- Paczynski, B., 1986, *Astrophys. J.*, **284**, 1
- Park, C., Gott III, J.R., Melott, A.L., Karachentsev, 1992, *Astrophys. J.*, **387**, 1
- Peacock, J.A., 1991, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **253**, 1P
- Peacock, J.A., Nicholson, D., 1991, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **253**, 307
- Peebles, P.J.E., 1973, *Astrophys. J.*, **185**, 413
- Peebles, P.J.E., 1980, *The Large Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press
- Peebles, P.J.E., 1982, *Astrophys. J.*, **257**, 438
- Peebles, P.J.E., 1987, *Astrophys. J.*, **317**, 576
- Pellegrini, P.S., Da Costa, L.N., 1990, *Astrophys. J.*, **357**, 408
- Pim, R., Lake, K., 1986, *Astrophys. J.*, **304**, 75
- Refsdal, S., 1964, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **128**, 295
- Refsdal, S., 1970, *Astrophys. J.*, **159**, 357
- Roberts, D.H., Greenfield, P.E., Burke, B.F., 1979, *Science*, **205**, n° 4409, 894

- Rowan-Robinson, M., Lawrence, A., Saunders, W., Crawford, J., Ellis, R., Frenk, C.S., Parry, I., Xiaoyang, X., Allington-Smith, J., Efstathiou, G., Kaiser, N., 1990, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **247**, 1
- Ruffini, R., Lee, H.W., 1990. *Nuovo Cimento B*, **105 B**, 1021
- Sachs, R.K., 1961, *Proc. Roy. Soc. London A*, **264**, 309
- Sachs, R.K., 1964, *Relativity, Groups and Topology*, Ed. C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach, New York
- Sachs, R.K., Wolfe, A.M., 1967. *Astrophys. J.*, **147**, 73
- Sandage, A., 1961a, *Astrophys. J.* **133**. 313
- Sandage, A., 1961b, *Astrophys. J.* **134**. 916
- Sandage, A., 1987, in *Observational Cosmology*, Ed.: A. Hewitt *et al.*, p. 1
- Sasaki, M., 1987, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **228**, 653
- Saslaw, W.C., Narasimha, D., Chitre, S. M., 1985, *Astrophys. J.*, **292**, 348
- Sato, H., 1982, *Prog. Theor. Phys.*, **68**, 236
- Sato, H., Maeda, K., 1983, *Prog. Theor. Phys.*, **70**, 119
- Saunders, W., Rowan-Robinson, M., Lawrence, A., Efstathiou, G., Kaiser, N., Ellis, R.S., Frenk, C.S., 1990, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **242**, 318
- Saunders, W., Frenk, C.S., Rowan-Robinson, M., Efstathiou, G., Lawrence, A., Kaiser, N., Ellis, R.S., Crawford, J., Xia, X.Y., Parry, I., 1991, *Nature*. **349**, 32
- Scaramella, R., Vettolani, G. and Zamorani, G., 1991, *Astrophys. J. Letters*, **376**, L1
- Schechter, P.L., 1976, *Astrophys. J.* **203**, 297
- Schneider, P., 1987, *Astrophys. J.* **319**. 9
- Schneider, P., 1989b, in *Cosmology and Gravitational Lensing*, Proceedings of the Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysic Workshop, Ringberg-Castle, Tegernsee (Germany), 22-23 June 1989. Ed.: Börner, G., Buchert, T. and Schneider, P., **MPA/P3**, October 1990, pp. 61-77

- Schneider, P., Weiss, A., 1987, *Astron. Astrophys.*, **171**, 49
- Schneider, P., Weiss, A., 1988, *Astrophys. J.*, **327**, 526
- Schwarz, J., Ostriker, J.P., Yahil, A., 1975, *Astrophys. J.*, **202**, 1
- Sharples, R.M., Ellis, R.S., Gray, P.M., 1988, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **231**, 479
- Shaya, E.J., Tully, R.B., Pierce, M.J., 1992, *Astrophys. J.*, **391**, 16
- Silverman, B.W., 1982, *Applied Statistics*, **31**, 93
- Smoot, G.F. *et al.* (28 autores), April 1992, preprint
- Soltan, A., 1985, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **216**, 537
- Soneira, R.M., Peebles, P.J.E., 1978, *Astronom. J.*, **83**, 845
- Spaenhauer, A.M., 1978, *Astron. Astrophys.*, **65**, 313
- Staveley-Smith, L., Davies, R.D., 1989, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **241**, 787
- Stewart, J.M., 1990, *Class. Quantum Gravity*, **7**, 1169-1180
- Stewart, J.M., Walker, M., 1974, *Proc. R. Soc. A*, **341**, 49-74
- Strauss, M.A., Davis, M., 1988, in *IAU Symposium 130, Large Scale Structures of the Universe*, Ed. J. Audouze, M.C. Pelletan and A. Szalay, Dordrecht, Kluwer, pag. 191
- Suto, Y., Gorski, K., Juskiewicz, R., Silk, J., 1988, *Nature*, **332**, 328
- Suto, Y., Sato, K., Sato, H., 1984, *Prog. Theor. Phys.*, **71**, 938
- Suto, Y. and Sugihara, T., 1991, *Astrophys. J. Letters*, **370**, L15
- Teague, P.F., Carter, D., and Gray, P.M., 1990, *Astrophys. J. Suppl.*, **72**, 715
- The, L.S., White, S.D.M., 1986, *Astronom. J.*, **92**, 1248
- Thompson, K.L., Vishniac, E.T., 1987, *Astrophys. J.*, **313**, 517
- Tomita, K., 1988, *Prog. Theor. Phys.*, **79**, 258
- Tully, R.B., 1986, *Astrophys. J.*, **303**, 25

- Tully, R.B., 1987, *Astrophys. J.*, **323**, 1
- Tully, R.B., 1988, *Nature*, **334**, 209
- Tully, R.B., Scaramella, R., Vettolani, G., Zamorani, G., 1992, *Astrophys. J.*, **388**, 9
- Turner, E.L., Ostriker, J.P., Gott, J.R., 1984, *Astrophys. J.*, **284**, 1
- Turok, N., 1985, *Phys. Rev. Letters*, **55**, 1801
- Tyson, J.A., 1988, *Astronom. J.*, **96**, 1
- Vettolani, G., de Souza, R.E., Marano, B., Chincarini, G., 1985, *Astron. Astrophys.*, **144**, 506
- Vilenkin, A., 1985, *Phys. Rep.*, **121**, 263
- Vishniac, E.T., Ostriker, J.P., Bertschinger, E., 1985, *Astrophys. J.*, **291**, 399
- Vogele, M.S., Park, C., Geller, M.J., Huchra, J.P., 1992, *Astrophys. J. Letters*, **391**, L5
- Walsh, D., Carswell, R.F., Weymann, R.J., 1979, *Nature*, **279**, n° 5712, 381
- Watanabe, K., Tomita, K., 1990, *Astrophys. J.*, **355**, 1
- Webster, R.L., 1985, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **213**, 871
- Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology*, Ed. Wiley, New York
- Weinberg, S., 1976, *Astrophys. J. Letters*, **208**, L1
- Weymann, R.J., Chaffee, F.H., Davis, M., Carleton, N.P., Walsh, D., Carswell, R.F., 1979, *Astrophys. J. Letters*, **233**, L43
- Wolfe, A.M., 1969, *Astrophys. J.*, **156**, 803
- Yahil, A., Vidal, N.V., 1977, *Astrophys. J.*, **214**, 347
- Yahil, A., Tammann, G.A., Sandage, A., 1977, *Astrophys. J.*, **217**, 903
- Young, P., Gunn, J.E., Kristian, J., Oke, J.B., and Westphal, J.A., 1980, *Astrophys. J.*, **241**, 507
- Zel'dovich, Y.B., 1970, *Astron. Astrophys.*, **5**, 84



Zwicky, F., Herzog, Wild, P., Karpowicz, M., and Kowal, C.T., 1961-1968, *Catalog of Galaxies and of Cluster of Galaxies*, Vols. I-IV, Pasadena, California Institute of Technology

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÈNCIES FÍSQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data, acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral

d'En/ Na/ N' José F. Moreno Méndez  
la qualificació de Apto "cum laude"

València a 29 de setembre de 1992

El Secretari,

El President,



A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Vicent Ferrer", written over a large, stylized circular flourish.

