

Nº 198

Tesis

TD

198

FÍSICA

**Universitat de València**

**Departamento de Óptica**



**Autoimágenes con luz espacialmente  
coherente e incoherente. Aplicaciones  
al procesado óptico de información**



**Memoria presentada por  
Juan Carlos Barreiro Hervás  
para optar al grado de  
Doctor en Física**

Marzo de 1992

UMI Number: U607723

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607723

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 1398

DATA 5-6-92

SIGNATURA J.D. 198

BIBLIOTECA

Nº LIBIS: 119479074

26 ms.

*A mi madre, Carmen, y a la memoria de mi  
padre, José María; las razones son obvias.*

*También a la memoria de Juan-Miguel  
Romá, mi primer maestro.*



## Agradecimientos

*Como todo aquel que ha pasado por este "trance" sabe, una tesis doctoral casi nunca es tarea de una única persona. Por eso quiero dedicar estas líneas a mostrar mi reconocimiento a todos aquellos que han colaborado en la realización de ésta. Confío en que el ritmo acelerado de estos días, inevitable al final de un largo trabajo, no me haga omitir algún nombre. Si éste no es el caso y alguien se siente olvidado, espero que pueda perdonarme.*

*En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento muy especial a Pedro Andrés, por la eficaz ayuda y la atención que en todo momento me ha prestado y por su entusiasmo contagioso, y a Jorge Ojeda, que ha aportado numerosas ideas que han resultado clave en este trabajo. De mis directores de tesis —a quienes considero, sobretodo, amigos— he aprendido que en un mundo tan competitivo como éste aún caben maneras generosas de hacer investigación. A Jorge Ojeda le agradezco, asimismo, la oportunidad que me ofreció de trabajar junto a él en el INAOE de Puebla. Mi estancia en México, país que me cautivó por su calidez, fue muy fructífera tanto profesional como personalmente.*

*A Amparo Pons, que tanto me ha ayudado en algunos de los experimentos que recoge esta memoria, le doy las gracias también por hacerme ver que llega un momento en el que hay que vaciar alguna cosa de la maleta. A Jorge Ibarra, técnico del INAOE y auténtico maestro en el laboratorio, le debo, además de su hospitalidad, su inapreciable ayuda en la realización del procesador lógico. La colaboración de Genaro Saavedra ha sido fundamental en las experiencias relativas al correlador de proyección geométrica perfecta, y tanto Francisco Pérez como Fernando Silva, el primero pasando el manuscrito al procesador de textos y el segundo ayudándome a resolver los problemas surgidos con el ordenador, han contribuido decisivamente al buen resultado estético de esta memoria.*

*También algunas instituciones han colaborado para que esta tesis se llevara a cabo. Por un lado, la Conselleria de Cultura, Educació i Ciència de la Generalitat Valenciana me concedió una beca, que disfruté —en aquella época aún pagaban puntualmente— durante los dos primeros años de doctorado y a la que renuncié al incorporarme como profesor a la Universitat de València. Por otro lado, una parte importante de esta investigación ha sido financiada por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (Proyecto PB87-0617) del Ministerio de Educación y Ciencia.*



*Este trabajo ha resultado mucho más agradable gracias a la simpatía y el apoyo que me han brindado todos mis compañeros del Departamento de Óptica, en general, y mis colegas del equipo de "rayas y perfiles" —con los que tanto me he reído—, en particular.*

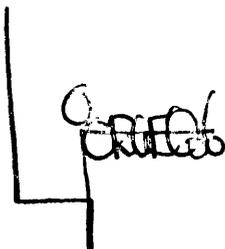
*Durante el tiempo que me ha costado concluir esta tesis —en especial, durante la fase de su redacción, que se ha dilatado más de lo que todos hubiésemos deseado— ha habido muchas cosas que me han permitido mantener la correcta proporción que, tanto en tiempo como en atención, debe ocupar el trabajo en la vida de una persona. Entre ellas quiero mencionar las cartas de "Amnistía" y a mis amigos del "grupo de adopción"; las excursiones de la asociación "Caroig", con cuyos socios comparto la afición por las bicicletas; las sobremesas del "Diamante"; la "Radio 3" de la época de "El Ciempiés" y de Agustín García Calvo; algunas noches en "Perdido" y el "Sirius" de Coleman Hawkins, antídoto infalible contra la melancolía.*



D. Pedro ANDRÉS BOU, Profesor Titular del Departamento de Óptica de la Universitat de València y D. Jorge OJEDA CASTAÑEDA, Investigador Titular "C" del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica de Puebla (México)

CERTIFICAN que la presente memoria: "**Autoimágenes con luz espacialmente coherente e incoherente. Aplicaciones al procesado óptico de información**", resume el trabajo de investigación realizado, bajo su dirección, por D. Juan Carlos BARREIRO HERVÁS y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente certificado en Valencia, a cuatro de Noviembre de mil novecientos noventa y uno.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Ojeda', written over a large, simple L-shaped graphic element.

Fdo: Dr. J. Ojeda-Castañeda

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'P. Andrés Bou', written over a large, stylized circular graphic element.

Fdo: Dr. P. Andrés Bou



# Índice

<b>I. Introducción general</b>	<b>1</b>
I.1 Motivaciones y objetivos.....	1
I.2 Esquema general .....	3
I.3 Referencias.....	4
<b>II. El efecto Talbot</b>	<b>7</b>
II.1 Introducción.....	7
II.2 Algunas propiedades de la difracción de Fresnel.....	9
II.3 Formación de autoimágenes.....	27
II.4 Algunos ejemplos relativos a redes de difracción.....	35
II.5 Conclusiones.....	62
II.6 Referencias.....	63
<b>III. Aplicaciones del efecto Talbot</b>	<b>67</b>
III.1 Introducción .....	67
III.2 Medida de distancias focales.....	69
III.3 Resultados experimentales .....	74
III.4 Red de frecuencia continuamente variable .....	82
III.5 Verificación experimental.....	84
III.6 Conclusiones.....	88
III.7 Referencias.....	90
<b>IV. El efecto Lau</b>	<b>92</b>
IV.1 Introducción.....	92
IV.2 Difracción con una fuente plana incoherente.....	94
IV.3 Franjas de Lau y patrones de Lau .....	98
IV.4 Consonancia de patrones bidimensionales .....	127
IV.5 Efecto Lau con dos redes de fase.....	141
IV.6 Conclusiones.....	146
IV.7 Referencias .....	148



<b>V. Procesado óptico de información con luz espacialmente incoherente</b>	<b>152</b>
V.1 Introducción.....	152
V.2 Filtraje espacial incoherente: experiencia de Abbe y Porter .....	156
V.3 Puertas lógicas binarias.....	165
V.4 Correlador bidimensional de proyección geométrica perfecta .....	173
V.5 Conclusiones .....	180
V.6 Referencias.....	181
<b>VI. Conclusión general</b>	<b>186</b>
VI.1 Un resumen y algunas perspectivas .....	186
VI.2 Referencias .....	190



# I. Introducción general

## I.1 Motivaciones y objetivos

La periodicidad longitudinal del campo coherente de radiación electromagnética difractado por una red fue descubierta por Talbot [I-1] hace algo más de 150 años. Cuando se ilumina una red de difracción con un haz monocromático colimado, en incidencia normal, se obtiene una secuencia de imágenes suyas espaciadas regularmente entre sí a lo largo de la dirección de propagación de la luz incidente. La separación  $z_T$  entre estas réplicas del objeto, llamadas convencionalmente autoimágenes, depende para esta situación exclusivamente del período de la red y de la longitud de onda de la radiación incidente. Lord Rayleigh [I-2] se interesó por este fenómeno de formación de imágenes sin necesidad de lentes o espejos unos 50 años más tarde, cuando realizaba copias fotográficas por contacto de redes de difracción. Este autor dió la primera explicación teórica del efecto descubierto por Talbot.

En 1948, Lau [I-3] descubrió un fenómeno, estrechamente relacionado con el anterior, que involucra el uso de dos redes de difracción del mismo período iluminadas con una fuente extensa monocromática. La primera de ellas actúa como fuente incoherente codificada linealmente, mientras que la segunda lo hace como transparencia objeto. Si la distancia entre ambas es un múltiplo entero de la mitad de la distancia  $z_T$ , en el plano focal de una lente situada después de esta configuración de doble red se obtiene un patrón de franjas semejante a una autoimagen de la red objeto. Posteriormente, se ha descrito también la formación de franjas de Lau a distancia finita [I-4]. Para ello la primera red del dispositivo debe tener ahora un período mayor que la segunda.

Desde distintos enfoques, varios autores han intentado describir conjuntamente el efecto Talbot y el efecto Lau [I-5 y I-6]. De hecho, ambos efectos son el resultado del acoplamiento existente entre las periodicidades lateral y axial de un campo de ondas electromagnéticas. Esta conexión es, en realidad, más general: si la intensidad mutua de un campo parcialmente coherente cuasimonocromático es periódica lateralmente en la coordenada media o en la coordenada diferencia, entonces lo es también longitudinalmente [I-7]. Este resultado proporciona un marco conceptual general que ha permitido describir los efectos Talbot y Lau de una manera unificada [I-8].

La formación de autoimágenes, tanto en su versión coherente como incoherente, ha atraído, desde su descubrimiento, la atención de muchos investigadores. El interés



por este fenómeno se justifica, no sólo por ser una propiedad básica de ciertos campos de ondas, sino también por las aplicaciones que, en especial en los últimos 25 años, ha permitido desarrollar. En el campo de la Óptica, estas aplicaciones se inscriben en las áreas de procesado óptico de imágenes, tecnología y control de calidad de elementos ópticos y metrología óptica [I-9].

En este trabajo, la profundización en la comprensión de estos efectos ha permitido desarrollar nuevas posibilidades y proponer varias aplicaciones originales. Dentro de este último aspecto, por un lado, se describen dos aplicaciones metroológicas del efecto Talbot: un método para la medida de la distancia focal de un sistema óptico cualquiera y una técnica para generar, en un plano fijo, un patrón periódico de frecuencia variable, de gran utilidad como test objeto para la determinación de la función de transferencia de un dispositivo óptico. Por otro lado, se presenta tanto una técnica para realizar ópticamente puertas lógicas binarias, como un correlador óptico para señales bidimensionales. Estos procedimientos de procesado de información aprovechan ciertas propiedades que exhibe el dispositivo del efecto Lau.

El interés que despiertan, desde la década de los 60, los métodos de procesado óptico de información se justifica por la capacidad de los sistemas ópticos para procesar información en paralelo, en contraste con el procedimiento en serie intrínseco a los sistemas electrónicos. Las técnicas ópticas presentan ventajas potenciales en capacidad y velocidad de procesado.

Desde que quedó establecida hace unas 4 décadas, la capacidad de una lente esférica para efectuar transformadas de Fourier con luz coherente [I-10 a I-14] es la clave para realizar multitud de operaciones de procesado óptico coherente de información. Esta propiedad de las lentes proporciona un acceso directo al espectro de frecuencias espaciales de la señal bidimensional de entrada, y por ende permite la manipulación de éstas con el fin de alterar las propiedades de dicha señal. El uso de las técnicas del análisis de Fourier, la sistemática explotación de la analogía existente entre sistemas ópticos y dispositivos electrónicos lineales, y la aplicación de las técnicas holográficas para generar filtros espaciales complejos han contribuido al rápido desarrollo de los métodos coherentes. En varios textos [I-15 a I-19] se recoge esta información.

Aparte del procesado óptico de imágenes convencional, es decir, con luz coherente monocromática procedente de una fuente láser, es cada vez más frecuente en Óptica realizar operaciones complejas de procesado de información con luz espacial (fuente extensa) o temporalmente (fuente policromática) incoherente [I-20 a I-24]. Los sistemas ópticos que trabajan con luz incoherente se caracterizan por su naturaleza multicanal, por lo que exhiben una mejor relación señal-ruido que los sistemas coherentes convencionales. Asimismo, poseen una menor exigencia en cuanto a estabilidad y una mayor flexibilidad, en principio, respecto al tipo de fuentes luminosas utilizables.

Las aplicaciones de procesado óptico de información que se describen en esta memoria, además de enmarcarse dentro de la tendencia más actual de la Óptica de Fourier de trabajar con iluminación incoherente, son del máximo interés. Así, por un lado, una de las aplicaciones prácticas más importante dentro del procesado de información es el reconocimiento de caracteres, es decir, la posibilidad de reconocer un patrón de referencia de entre un conjunto de señales. La mayoría de estos dispositivos se basan en la obtención por medios ópticos de la operación de correlación [I-25]. En este trabajo se describe un nuevo tipo de correlador óptico espacialmente incoherente que no requiere ninguna lente u otro elemento óptico para su funcionamiento. Por otro lado, parece claro que en un futuro relativamente próximo el fotón sustituirá al electrón como partícula portadora de información. De ahí el desarrollo que, entre otros campos, está adquiriendo últimamente la computación por medios ópticos. Las operaciones lógicas son el fundamento para la computación digital. En el transcurso de los últimos 10 años se han propuesto diferentes métodos para desarrollar puertas lógicas binarias [I-26]. Aquí se introduce un procesador lógico muy compacto que, explotando las propiedades inherentes de filtraje espacial que posee el dispositivo de Lau, es capaz de realizar cualquiera de las 16 operaciones lógicas binarias.

## I.2 Esquema general

Con el propósito de establecer sólidamente los fundamentos teóricos de la formación de autoimágenes con iluminación coherente, en el Capítulo II de este trabajo se estudian sus características más importantes. El formalismo matemático utilizado a lo largo de todo el trabajo es el de la aproximación de Fresnel de la integral de difracción. En este estudio se presta especial atención a las propiedades que exhibe el campo difractado por las redes de difracción, al ser éstos los objetos empleados en las aplicaciones propuestas posteriormente. Así pues, este capítulo sirve especialmente para introducir nuestro enfoque al abordar estos problemas, así como de revisión de los conocimientos en este tema.

A continuación, en el Capítulo III se presenta un método sencillo que, usando una única red de difracción, permite evaluar la distancia focal de un sistema óptico midiendo, como en el método de Bessel, sólo distancias axiales. Este procedimiento es válido para lentes gruesas o delgadas, tanto convergentes como divergentes. También se propone una técnica, basada de nuevo en el fenómeno de autoimágenes, para generar un patrón periódico con una variación continua, dentro de un cierto intervalo, de su frecuencia espacial fundamental. Asimismo, se mues-

tran los resultados experimentales obtenidos en la aplicación de ambas técnicas metrológicas.

La formación de autoimágenes con luz incoherente —efecto Lau— se trata en profundidad en el Capítulo IV. Aprovechando los resultados del Capítulo II, se estudia la formación de franjas de Lau, tanto a distancia finita como infinita, analizando la influencia que sobre el perfil de estas franjas poseen diversos parámetros de la red fuente del dispositivo. Igualmente, se discute la generalización de este fenómeno a una serie de nuevas situaciones. En particular, se analiza la obtención de franjas de Lau bidimensionales con redes objeto de amplitud o de fase y la formación de franjas equivalentes a las de Lau, con máximo contraste e irradiancia, empleando dos redes puras de fase.

En el Capítulo V, se demuestra primero cómo una variante adecuada del dispositivo convencional de Lau permite realizar filtraje espacial incoherente sin necesidad de lentes. Este resultado se utiliza para realizar ópticamente puertas lógicas binarias. Este método requiere una etapa de codificado de las señales binarias a procesar y la operación lógica entre dichas señales se obtiene mediante una operación equivalente a la de filtraje espacial. Sin embargo, en nuestro caso, las propiedades del efecto Lau permiten realizar este tipo de filtraje sin necesidad de ninguna lente y con iluminación incoherente. A continuación, se desarrolla la teoría básica de un correlador del espacio objeto para señales bidimensionales, que funciona apoyándose en el fenómeno de autoimágenes con luz espacialmente incoherente. De este modo, la propia propagación libre del campo electromagnético permite obtener, sin despreñar los efectos de difracción, la operación de correlación deseada, por lo que este dispositivo es, en cierto sentido, un correlador de proyección geométrica perfecta. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos en su aplicación en una experiencia sencilla de reconocimiento de caracteres.

Por último, en el Capítulo VI se resumen los logros alcanzados en este trabajo y se indican algunas de las posibilidades con las que vamos a proseguir nuestra investigación en este campo.

## I.3 Referencias

- [I-1] H.F. Talbot, "Facts relating to Optical Science. No.IV", *Philos. Mag.* 9, 401-407 (1836).
- [I-2] Lord Rayleigh, "On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith", *Philos. Mag.* 11, 197-205 (1880).

- [I-3] E. Lau, "Beugungserscheinungen and Doppelrastern", *Ann. Phys. (Leipzig)* **6**, 417-423 (1948).
- [I-4] K. Paturski, "Incoherent superposition of multiple self-imaging. Lau effect and moiré fringe explanation", *Optica Acta* **30**, 745-758 (1983).
- [I-5] J. Jahns, A.W. Lohmann, and J. Ojeda-Castañeda, "Talbot and Lau effects, a parageometrical approach", *Optica Acta* **31**, 313-324 (1984).
- [I-6] J. Ojeda-Castañeda and E.E. Sicre, "Quasi ray-optical approach to longitudinal periodicities of free and bounded wavefields", *Optica Acta* **32**, 17-26 (1985).
- [I-7] A.W. Lohmann and J. Ojeda-Castañeda, "Spatial periodicities in partially coherent fields", *Optica Acta* **30**, 475-479 (1983).
- [I-8] G. Indebetouw, "Propagation of spatially periodic wavefields", *Optica Acta* **31**, 531-539 (1984).
- [I-9] K. Paturski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Prog. Opt.* **27**, 3-108 (1989).
- [I-10] P.M. Duffieux, *L'intégrale de Fourier et ses Applications à l'Optique* (Univ. Besançon, 1946).
- [I-11] R.N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications* (McGraw-Hill, 1965).
- [I-12] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1968).
- [I-13] J.D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* (Wiley, 1978).
- [I-14] G.O. Reynolds, J.B. DeVelis, G.B. Parrent, and B.J. Thompson, *The new Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics* (SPIE, 1989).
- [I-15] W.T. Cathey, *Optical Information Processing and Holography* (Wiley, 1974).
- [I-16] D. Casasent, *Optical Data Processing, Topics in Applied Physics* (Springer-Verlag, 1978), vol. 23.
- [I-17] S.H. Lee, *Optical Information Processing, Topics in Applied Physics* (Springer-Verlag, 1981), vol. 48.
- [I-18] H. Stark, *Applications of Optical Fourier Transforms* (Academic, 1982).
- [I-19] J.L. Horner, *Optical Signal Processing* (Academic, 1987).



- [I-20] G.L. Rogers, *Noncoherent Optical Processing* (Wiley, 1977).
- [I-21] Idem Ref. [I-17], cap. 3.
- [I-22] Idem Ref. [I-18], cap. 12.
- [I-23] F.T.S. Yu, *White-Light Optical Signal Processing* (Wiley, 1985).
- [I-24] Idem Ref. [I-19], cap. 1.
- [I-25] Idem Ref. [I-19], cap. 2.2.
- [I-26] Número especial dedicado a "Optical Computing", *Appl. Opt.* **27**, 1641-1796 (1988).

# II. El efecto Talbot

## II.1 Introducción

Las distribuciones de amplitud que se generan, por propagación libre del campo electromagnético, en los planos paralelos a una abertura plana iluminada coherentemente constituyen las distintas figuras de difracción de la repartición de amplitudes existente en el plano de abertura. En las condiciones de validez de la teoría escalar de la difracción [II-1], es decir, cuando el campo difractado no se observa excesivamente cerca de la pupila difractante y ésta es grande frente a la longitud de onda de la luz incidente, la distribución de amplitud compleja de cada patrón de difracción de la abertura objeto en la región de Fresnel está ligada matemáticamente con la correspondiente a ésta mediante una transformada de Fresnel [II-2]. Este último resultado exige que la región de observación y la abertura sean pequeñas comparadas con la distancia entre ellas.

Desde el siglo pasado, se conoce que hay objetos para los que ciertos patrones de difracción de Fresnel son una réplica de ellos mismos. Así, por ejemplo, una red de difracción monodimensional (red 1-D) de baja frecuencia iluminada normalmente por un haz colimado de luz monocromática genera, sin necesidad de ningún elemento óptico, una secuencia de imágenes suyas —autoimágenes— igualmente espaciadas a lo largo de la dirección de propagación de la radiación incidente. Este fenómeno de formación de imágenes por simple difracción fue descubierto por Talbot [II-3], por lo que se denomina también efecto Talbot. En sus observaciones, Talbot utilizó tanto una red de difracción lineal como una red bidimensional cuya celda unidad era un círculo de pequeño diámetro. Para iluminar estas estructuras empleó una fuente de luz blanca (luz solar) de pequeño tamaño. Por eso, las distribuciones de irradiancia correspondientes a las autoimágenes que observó detrás de estas redes estaban coloreadas. Lord Rayleigh [II-4], interesado por los extraños fenómenos que aparecen en la red copia al duplicar fotográficamente redes 1-D, cuando el contacto entre el original y la placa fotográfica de registro es imperfecto, fue quien dió la primera explicación teórica del fenómeno de autoimágenes. Considerando la interferencia entre los haces de luz difractados por una red lineal cuando se ilumina con una onda plana monocromática, Lord Rayleigh demostró la periodicidad longitudinal del campo difractado por la red. Asimismo, obtuvo la expresión analítica para la separación entre las autoimágenes sucesivas de una red 1-D.

Este proceso de formación de imágenes por propagación libre de la luz difractada se observa también con una fuente puntual monocromática a distancia finita. Las posiciones de las autoimágenes de una red 1-D, también llamadas imágenes de Fourier, dependen de su período y de la longitud de onda y curvatura del haz incidente [II-5]. Además, en este caso, el aumento de las autoimágenes es tal que su tamaño coincide con el de la proyección geométrica de la red objeto desde la fuente puntual. Esta característica de las autoimágenes con iluminación esférica ha motivado el estudio de varios procedimientos de formación de imágenes de gran aumento sin necesidad de elementos ópticos convencionales [II-6 a II-8]. El efecto Talbot, por ser un fenómeno debido a la difracción, no es acromático. Si para iluminar el objeto se utiliza una radiación espacialmente coherente pero policromática, las autoimágenes correspondientes a cada longitud de onda están localizadas en posiciones diferentes. No obstante este hecho, se han descrito también diferentes métodos para compensar este efecto de dispersión cromática y obtener autoimágenes acromáticas [II-9 a II-11].

Los patrones de difracción de Fresnel situados entre los planos de autoimágenes han sido también estudiados, tanto para las redes lineales como para las bidimensionales (redes 2-D) [II-5 y II-12 a II-15]. El interés por conocer la distribución de irradiancia de estos patrones, también periódicos, se fundamenta, entre otras razones, en el posible empleo de redes de fase como transparencia objeto en muchos de los dispositivos basados en el efecto Talbot, con miras a mejorar su rendimiento luminoso. Una red pura de fase y sus autoimágenes tienen visibilidad nula, pero algunos perfiles de fase generan patrones de Fresnel de máximo contraste [II-6, II-16 y II-17].

La condición necesaria y suficiente para la periodicidad longitudinal del campo coherente difractado por un objeto, establecida por Montgomery [II-18], limita las regiones donde se permite que el espectro de Fourier del objeto sea no nulo a un conjunto de anillos concéntricos cuyos radios varían con la raíz cuadrada de los números naturales. El perfil general, en el dominio espacial, de los objetos que satisfacen la condición anterior —objetos de Montgomery— ha sido analizado en coordenadas polares [II-19]. Sin lugar a dudas, las redes de difracción representan el subconjunto más importante de los objetos de Montgomery.

Es evidente que el fenómeno de autoimágenes no se restringe tan sólo a las frecuencias ópticas del espectro electromagnético. De este modo, se ha descrito también la formación de imágenes de Fourier correspondientes a redes lineales y bidimensionales con un haz de rayos X "blandos" [II-20 y II-21]. Este fenómeno se presenta, igualmente, en la propagación de otros tipos de campos de ondas. Así, por ejemplo, se ha examinado su posible aplicación en difracción de electrones y microscopía electrónica [II-5, II-22 y II-23].

Dentro del campo de la Óptica, la formación de autoimágenes ha sido, en las últimas décadas, el sujeto de muchas investigaciones [II-24], bien de naturaleza teórica

o bien encaminadas a buscar una solución competitiva para diversos problemas científicos o tecnológicos. En una gran parte de los trabajos publicados sobre autoimágenes se utiliza la aproximación de Fresnel en la integral de difracción. Asimismo, se supone que el objeto tiene extensión infinita y que la iluminación es espacialmente coherente y cuasi-monocromática. Esta descripción teórica proporciona una precisión suficiente para muchos estudios y será la que se adopte en este trabajo. No obstante, la influencia de las desviaciones que en la práctica se dan respecto a este modelo ideal ha sido analizada por diversos autores. La influencia de la extensión finita del objeto ha sido considerada, entre otros, por Smirnov [II-25]. Los efectos de una iluminación parcialmente coherente han sido también abordados [II-26 a II-28]. En el caso de objetos periódicos, se ha estudiado tanto el alcance de los defectos locales en la estructura periódica [II-29], como el de las pequeñas desviaciones en el valor del período [II-30 y II-31]. La formación de autoimágenes de objetos periódicos fuera de las condiciones de validez de la aproximación paraxial ha sido también tratada [II-8, II-32 y II-33]. Se concluye que las redes 1-D sólo verifican la condición de formación de autoimágenes dentro de la aproximación de ángulos pequeños [II-34].

En este capítulo se estudian las características más importantes de la formación de autoimágenes con iluminación coherente. Primero, en la sección II.2 se revisan las propiedades de la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff de mayor trascendencia para el resto del trabajo, algunas de las cuales sorprendentemente no están tratadas en muchos textos. Con la ayuda de estos resultados, en la sección II.3 se describen de un modo muy simple el fenómeno de autoimágenes y las propiedades de simetría que exhibe el campo difractado por un objeto de Montgomery. Por último, la sección II.4 está dedicada al análisis de los patrones de Fresnel correspondientes a redes de difracción uni y bidimensionales, de amplitud o de fase. Los objetos que se consideran son, esencialmente, los que se han utilizado en las aplicaciones que se proponen en los capítulos ulteriores.

## II.2 Algunas propiedades de la difracción de Fresnel

Considérese una transparencia iluminada por una fuente puntual y monocromática, de longitud de onda  $\lambda$ , situada, tal y como muestra la Fig.2-1, a una distancia  $z$  de ella. La distribución de amplitud compleja  $U_0(x,y)$  en el plano de la transparencia —plano objeto— viene dada por

$$U_0(x,y) = \exp\left(ik \frac{x^2+y^2}{2z}\right) t(x,y) \quad , \quad (2-1)$$

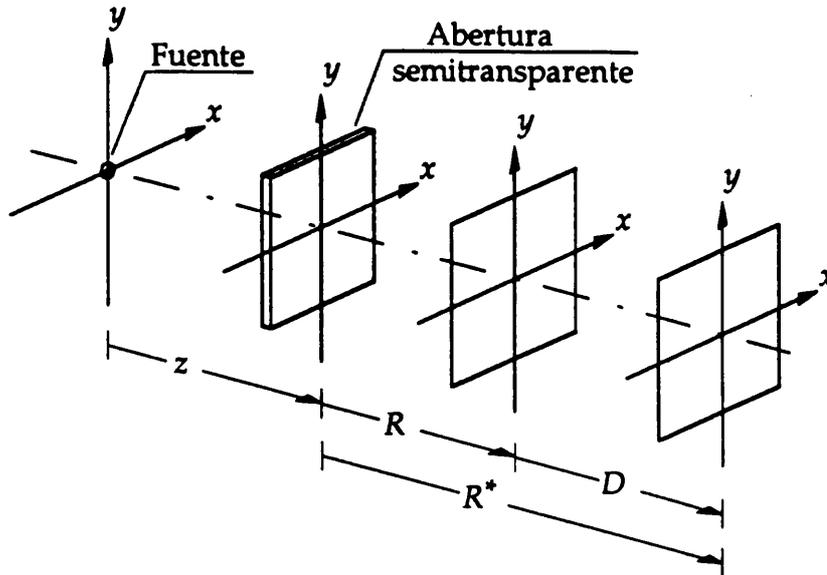


Fig. 2-1. Notación y esquema para el cálculo de la distribución de amplitud generada por una abertura difractinga. Las distancias  $z$ ,  $R$  y  $R^*$  son arbitrarias.

donde  $t(x,y)$  es la transmitancia en amplitud de la transparencia,  $k=2\pi/\lambda$  es el número de ondas y se ha tomado la aproximación cuadrática (en algunos textos denominada parabólica) de una onda esférica para representar la onda que la ilumina.

Esta distribución de amplitud genera, por propagación libre, imágenes desenfocadas de la transparencia —patrones de difracción de Fresnel— en los planos paralelos al de ésta situados detrás de ella. En uno cualquiera de estos planos, la distribución de amplitud compleja  $U_R(x,y)$  puede ser calculada, en el marco de la teoría escalar de la difracción, mediante la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff [II-2]. Suponiendo válidas las aproximaciones usuales, aproximaciones de Fresnel, la expresión matemática para  $U_R(x,y)$  es

$$U_R(x,y) = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda R} \exp\left(ik \frac{x^2+y^2}{2R}\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0,y_0) \exp\left(ik \frac{x_0^2+y_0^2}{2R}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{x_0x+y_0y}{\lambda R}\right) dx_0 dy_0, \quad (2-2)$$

en donde  $U_0(x_0,y_0)$  viene dada por la Ec.(2-1).

Supóngase que con un microscopio de pocos aumentos (para que su distancia de enfoque no sea muy pequeña) se enfoca al plano de la transparencia, la cual, por simplicidad, se va a suponer que es una red de difracción lineal de baja frecuencia. De este modo, mirando a través del microscopio se ve enfocada la red.

Si ahora se desplaza el microscopio y se observa un plano posterior a la transparencia, se verá uno de sus patrones de difracción de Fresnel que, en general, tendrá un aspecto distinto al de la red. La distribución de amplitud  $U_R(x,y)$  en dicho plano vendrá dada por la Ec.(2-2) y la distribución de irradiancia, que es lo que realmente se observa, será proporcional a  $|U_R(x,y)|^2$ . Puesto que el patrón de Fresnel considerado es real, esta misma distribución de irradiancia se obtiene si se coloca sobre el plano considerado una pantalla difusora.

Sin embargo, cuando se desplaza el microscopio en sentido contrario y se observa, a través de él, un plano anterior al de la transparencia, la distribución de irradiancia que se ve es muy diferente a la que se observaría si se colocase la pantalla difusora sobre ese plano. Frente al campo uniforme que se obtendría en este caso sobre la pantalla, mirando a través del microscopio se ve una repartición de irradiancia similar a la de los patrones de Fresnel reales de la red.

Puesto que se está observando a través de la red 1-D la onda incidente ya ha sido difractada por ella y por lo tanto, al mirar a través del microscopio lo que se ve es un patrón de difracción virtual de esta transparencia objeto. Esta distribución virtual de amplitud es aquella que por propagación libre, desde el plano de observación al plano del objeto, reconstruye la propia transparencia junto al factor de fase esférico que la multiplica, es decir, reconstruye  $U_O(x,y)$ .

Como pone de manifiesto esta sencilla experiencia, una transparencia iluminada coherentemente genera patrones de difracción tanto reales como virtuales. Además, la expresión analítica que proporciona la distribución de amplitud de estos patrones virtuales es también la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff [II-35]. Si, como indican las puntas de flecha de la Fig.2-1, se toma  $R$ , y también  $z$ , como una distancia orientada, la Ec.(2-2) resulta válida tanto para los patrones de difracción posteriores a la transparencia (patrones reales,  $R > 0$ ) como para los patrones anteriores a ella (patrones virtuales,  $R < 0$ ). En todo este trabajo, las distancias axiales orientadas se considerarán positivas si su sentido coincide con el de propagación de la luz incidente que se supondrá de izquierda a derecha. Consideremos de nuevo, la distribución de amplitud  $U_R(x,y)$  generada a una distancia arbitraria  $R$  por  $U_O(x,y)$ . Nada impide tratar a dicha función como una repartición objeto que genera, a su vez, patrones de Fresnel reales y virtuales. Es más, se puede pensar que la distribución de amplitud sobre un plano cualquiera —por ejemplo el situado, como en la Fig.2-1, a una distancia  $R^*$ — está generada bien por esta función, bien por la propia repartición objeto  $U_O(x,y)$ . Es razonable pensar que desde ambos puntos de vista se debe obtener el mismo patrón  $U_{R^*}(x,y)$ . Teniendo en cuenta la fórmula de la difracción y la notación de la Fig.2-1, se obtiene que la distribución de amplitud correspondiente al patrón de Fresnel generado por la transparencia en el plano localizado a la distancia  $R^*$  de ella, es

$$U_{R^*}(x,y) = \frac{\exp(ikR^*)}{i\lambda R^*} \exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2R^*}\right) \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0,y_0) \exp\left(ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2R^*}\right) \exp\left(-i2\pi\frac{x_0x+y_0y}{\lambda R^*}\right) dx_0 dy_0 \quad , \quad (2-3)$$

Considerando  $U_{R^*}(x,y)$  como el patrón generado por la distribución  $U_R(x,y)$  al propagarse libremente una distancia  $D=R^*-R$ , se puede calcular también su repartición de amplitud a partir de la fórmula de la difracción de Fresnel. De este modo,

$$U_{R^*}(x,y) = \frac{\exp(ikD)}{i\lambda D} \exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2D}\right) \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} U_R(x_R,y_R) \exp\left(ik\frac{x_R^2+y_R^2}{2D}\right) \exp\left(-i2\pi\frac{x_Rx+y_Ry}{\lambda D}\right) dx_R dy_R \quad , \quad (2-4)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de  $U_R(x_R,y_R)$  dado por la Ec.(2-2) y operando de manera conveniente, se comprueba [II-36] que la Ec.(2-4) se reduce a la Ec.(2-3). Por lo tanto, el patrón de Fresnel,  $U_{R^*}(x,y)$ , situado a una distancia  $R^*$  de la transparencia se puede considerar como generado por el patrón  $U_R(x,y)$  situado a una distancia  $R$ . Puesto que  $R^*$  y  $R$  son distancias arbitrarias, este hecho prueba que el conjunto de patrones de Fresnel de la transparencia objeto es el mismo que el generado por uno cualquiera de ellos. La información óptica asociada a la distribución  $U_0(x,y)$ , sin frecuencias espaciales mayores, en módulo, que la frecuencia de corte para la propagación libre ( $1/\lambda$ ), es por lo tanto la misma que la asociada a uno cualquiera de sus patrones de Fresnel. Dicho de otro modo, la distribución de amplitud en uno cualquiera de los planos paralelos a la transparencia caracteriza unívocamente el campo electromagnético que se genera, en todo el espacio, al iluminar ésta coherentemente.

Del conjunto de imágenes desenfocadas de la transparencia, nos vamos a interesar por el patrón (virtual en el caso representado en la Fig.2-1) que se genera precisamente en el plano que contiene a la fuente. Puesto que un factor de fase cuadrático realiza, bajo propagación libre, una transformación de Fourier, es lógico pensar que en el plano de la fuente se forma precisamente una representación del patrón de difracción de Fraunhofer de la transparencia. Matemáticamente la distribución de amplitud en este plano,  $U_S(x,y)$ , viene determinada por la Ec.(2-2) haciendo  $R=-z$ . De este modo se obtiene

$$U_s(x,y) = \frac{\exp(-ikz)}{-i\lambda z} \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} U_o(x_o,y_o) \exp\left(ik\frac{x_o^2+y_o^2}{-2z}\right) \exp\left(-i2\pi\frac{x_o x + y_o y}{-\lambda z}\right) dx_o dy_o ,$$

y teniendo en cuenta la Ec.(2-1) resulta

$$U_s(x,y) = \frac{\exp(-ikz)}{-i\lambda z} \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} t(x_o,y_o) \exp\left(-i2\pi\frac{x_o x + y_o y}{-\lambda z}\right) dx_o dy_o ,$$

$$U_s(x,y) = \frac{\exp(-ikz)}{-i\lambda z} \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right) \tilde{t}\left(-\frac{x}{\lambda z}, -\frac{y}{\lambda z}\right) , \quad (2-5)$$

donde  $\tilde{t}$  es la transformada de Fourier bidimensional de la función  $t$  (esta será la notación que, a lo largo de este trabajo, se utilizará para representar la transformada de Fourier de una función). Así pues, se puede llevar a cabo una transformación de Fourier bidimensional sin lentes y a distancia finita [II-35 a II-40]. Según la ecuación anterior, en el plano de la fuente, la relación entre las coordenadas cartesianas  $(x,y)$  y las frecuencias espaciales  $(u,v)$  de la transparencia es

$$x = -\lambda z u , \quad (2-6a)$$

$$y = -\lambda z v . \quad (2-6b)$$

Esta transformada de Fourier está multiplicada por un factor de fase cuadrático que converge hacia el plano de la transparencia. Su escala varía linealmente con la distancia fuente-transparencia y como todo fenómeno debido a la difracción sufre una fuerte aberración cromática de aumento (proporcional a  $\lambda$ ).

El fenómeno de la difracción se puede describir en términos de la Óptica de Fourier considerando la transformada de Fourier a distancia finita. Teniendo en cuenta que este patrón de Fraunhofer bidimensional no es más que una figura de difracción virtual de la repartición objeto y recordando que ésta y una cualquiera de sus figuras de difracción generan sobre un plano arbitrario la misma repartición de amplitudes, está claro pues que esta herramienta conceptual ofrece la propiedad notable de relacionar los patrones de difracción de Fresnel de la transparencia con su patrón de Fraunhofer. En efecto, el patrón de difracción de Fresnel de la transparencia sobre un plano genérico situado a una distancia  $R$  de ella (ver la Fig.2-1), se puede expresar como el patrón de Fresnel de la transformada de Fourier virtual localizado a una distancia  $z+R$  de ella. Así, de acuerdo con la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff,

$$U_R(x,y) = \frac{\exp[ik(z+R)]}{i\lambda(z+R)} \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z+R)}\right] \frac{\exp(-ikz)}{-i\lambda z} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}\left(-\frac{x_s}{\lambda z}, -\frac{y_s}{\lambda z}\right) \exp\left(-ik \frac{x_s^2+y_s^2}{2z}\right) \exp\left[ik \frac{x_s^2+y_s^2}{2(z+R)}\right] \exp\left[-i2\pi \frac{x_s x + y_s y}{\lambda(z+R)}\right] dx_s dy_s . \quad (2-7)$$

Reagrupando los factores de fase cuadráticos interiores a la integral resulta

$$U_R(x,y) = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda^2 z(z+R)} \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z+R)}\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}\left(-\frac{x_s}{\lambda z}, -\frac{y_s}{\lambda z}\right) \exp\left[-i\pi \frac{(x_s^2+y_s^2)R}{\lambda z(z+R)}\right] \exp\left[-i2\pi \frac{x_s x + y_s y}{\lambda(z+R)}\right] dx_s dy_s . \quad (2-8)$$

La Ec.(2-8) expresa que el patrón de Fresnel a una distancia  $R$  se puede obtener mediante un proceso de doble transformación de Fourier. Mediante la primera transformación se pasa del plano del objeto al de la fuente. La segunda transformación de Fourier nos lleva del plano de la fuente hasta el plano de observación si, tal y como indica el factor de fase cuadrático interior a la integral, se altera adecuadamente el contenido frecuencial de esta primera transformada.

Desde este punto de vista, es evidente que este factor de fase cuadrático no es más que el filtro espacial asociado a la propagación libre en el trayecto  $R$ . Teniendo en cuenta las Ecs.(2-6), cada frecuencia espacial del objeto ve modificada su fase por la cantidad

$$\exp\left[-i\pi \frac{(x_s^2+y_s^2)R}{\lambda z(z+R)}\right] = \exp\left[-i\pi \frac{\lambda z R(u^2+v^2)}{z+R}\right] . \quad (2-9)$$

Introduciendo esta expresión en la Ec.(2-8) y utilizando, de nuevo, la relación entre frecuencias espaciales y coordenadas cartesianas, Ecs.(2-6), resulta

$$U_R(x,y) = \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z+R)}\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u,v) \exp\left[-i\pi \frac{\lambda z R(u^2+v^2)}{z+R}\right] \exp\left[i2\pi \frac{z(ux+vy)}{z+R}\right] du dv . \quad (2-10)$$

Si no existiese difracción, lo que equivaldría a la ausencia del filtro de la Ec.(2-9), el patrón de Fresnel considerado sería el resultado de la transformación de Fourier inversa de  $\tilde{f}(u,v)$ , por lo que  $U_R(x,y)$  sería una copia, escalada, del objeto original.

Teniendo en cuenta el factor de escala de esta segunda transformación, el aumento de esta imagen sería  $(z+R)/z$ , por lo que, de acuerdo con la Óptica Geométrica,  $U_R(x,y)$  coincidiría con la proyección geométrica desde el punto fuente de la transparencia objeto. Obsérvese que, el factor de fase global de la Ec.(2-10),  $\exp[ik(x^2+y^2)/2(z+R)]$ , representa la aproximación cuadrática de la onda esférica que proviene de la fuente puntual. Por lo tanto, la imagen geométrica del objeto estaría "iluminada" por la onda emitida por la fuente. Según la Ec.(2-10), el fenómeno de la difracción simplemente altera, en la fase, el contenido frecuencial de esta imagen geométrica. Naturalmente, el factor de fase de la Ec.(2-9) es la función de transferencia ligada a la difracción con iluminación esférica. Las analogías con el proceso de formación de imágenes en un sistema óptico son desde este punto de vista evidentes.

A continuación vamos a demostrar otra importante propiedad del fenómeno de la difracción de Fresnel que será de utilidad en el posterior desarrollo de este trabajo.

Tal y como hemos discutido previamente, la Ec.(2-10) proporciona la distribución de amplitud  $U_R(x,y)$  que genera, a una distancia  $R$ , una transparencia objeto iluminada por una fuente puntual y monocromática situada a una distancia  $z$  de ella. Las distancias  $z$  y  $R$  son, como sabemos, arbitrarias y su valor caracteriza de manera unívoca el patrón de difracción de Fresnel de la transparencia que se obtiene en el plano considerado. Introduciendo los parámetros

$$\alpha = \frac{zR}{z+R} \quad (2-11)$$

$$\text{y } \mathcal{M} = \frac{z+R}{z} \quad (2-12)$$

en el integrando de la Ec.(2-10), resulta

$$U_R(x,y) = \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z+R)}\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp\left[i2\pi \frac{ux+vy}{\mathcal{M}}\right] dudv \quad (2-13)$$

Obsérvese que el parámetro  $\alpha$  tiene dimensiones de longitud, mientras que  $\mathcal{M}$  es adimensional y que al igual que  $z$  y  $R$ , también  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$  pueden tomar cualquier valor real. En el factor de fase global de la Ec.(2-13) no se ha expresado  $z+R$  en función de  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$ , porque así se visualiza mejor que la onda esférica que representa tiene su origen en el punto fuente. En todo caso, a partir de las Ecs.(2-11) y (2-12) es inmediato obtener dicha relación. Así resulta

$$z = \frac{\mathcal{M}\alpha}{\mathcal{M}-1} \quad (2-14)$$

$$y \quad R = \mathcal{M}\alpha \quad , \quad (2-15)$$

por lo que

$$z+R = \frac{\mathcal{M}^2\alpha}{\mathcal{M}-1} \quad .$$

Veamos cómo el cambio de variables efectuado permite analizar de una manera más sistemática la Ec.(2-13). La distribución de amplitud del patrón de Fresnel queda, ahora, especificada por los parámetros  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$ . El primero de ellos,  $\alpha$ , por figurar en el filtro asociado al desenfoque determina cómo se altera la fase de cada una de las frecuencias espaciales presentes en el objeto para configurar la distribución de amplitud del patrón de Fresnel. Por tanto,  $\alpha$  fija esencialmente el perfil del patrón. El parámetro  $\mathcal{M}$ , por aparecer exclusivamente en el factor de escala de la exponencial que realiza la transformación de Fourier inversa, caracteriza el aumento con el que se obtiene dicha distribución. Es decir,  $\mathcal{M}$  esencialmente define la escala del patrón de Fresnel. Parece, pues, que  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$  permiten caracterizar los distintos patrones de difracción de una abertura de una manera más natural que las distancias  $z$  y  $R$ . Nótese que para el objeto se tiene  $R=0$  y por tanto,  $\alpha=0$  y  $\mathcal{M}=1$ .

Obsérvese que, según la Ec.(2-11), para diferentes valores de las distancias  $z$  y  $R$  se puede obtener el mismo valor de  $\alpha$ . Para todas estas combinaciones, el patrón de Fresnel que se obtiene en el plano de observación es el mismo y corresponde a la transformada de Fourier inversa, debidamente escalada, del espectro de la transparencia en el que cada frecuencia espacial  $(u,v)$  ha visto alterada su fase en la cantidad  $\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha]$ . Ahora bien, para cada una de las parejas  $z, R$  que proporcionan el mismo valor de  $\alpha$ , el valor de  $\mathcal{M}$  correspondiente es distinto y también lo es, por tanto, la escala del patrón de Fresnel.

Estos hechos ponen de manifiesto que, en el dominio de validez de la aproximación de Fresnel, una transparencia iluminada por una onda esférica genera, independientemente de cuál sea la curvatura de la onda, un único conjunto de patrones de difracción. Cada una de estas figuras de difracción corresponde a uno de los infinitos valores reales distintos que puede tomar el parámetro  $\alpha$ . Por ello, el índice  $\alpha$  es suficiente para caracterizar, salvo en la escala, cada uno de los patrones de Fresnel de la transparencia. Para una curvatura dada de la onda incidente —y, por tanto, para un valor determinado de la distancia fuente-transparencia,  $z$ — la Ec.(2-11) fija qué patrón de Fresnel de la transparencia se obtiene a una distancia  $R$  de ella. La escala con que se obtiene en el plano de observación el patrón de índice  $\alpha$  viene dada por la Ec.(2-12). Por lo tanto, en cada uno de los planos paralelos a la transparencia se obtiene un patrón de Fresnel con un índice  $\alpha$  y con un aumento  $\mathcal{M}$  perfectamente definidos.

De manera análoga, si se desea obtener en el plano de observación el patrón de Fresnel de la transparencia de índice  $\alpha$  con una determinada escala  $\mathcal{M}$ , las Ecs.(2-14) y (2-15) proporcionan respectivamente, los valores de las distancias  $z$  y  $R$  que resuelven el problema.

Para clarificar el significado de los parámetros  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$ , consideremos ahora que la transparencia está iluminada por una onda plana monocromática que incide normalmente en ella. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que esta onda es de amplitud unidad. Para esta situación, la distribución de amplitud del patrón de Fresnel de la transparencia que se localiza a una distancia  $R$  de ella, se puede obtener haciendo el límite  $z \rightarrow \infty$  (iluminación plana) en la Ec.(2-13). Teniendo en cuenta que cuando  $z \rightarrow \infty$ , las Ecs.(2-11) y (2-12) se reducen, respectivamente, a

$$\alpha = R \quad , \quad (2-16)$$

$$y \quad \mathcal{M} = 1 \quad , \quad (2-17)$$

resulta

$$U_R(x,y) = \exp(ikR) \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv \quad . \quad (2-18)$$

Obsérvese que el índice  $\alpha$  que caracteriza a cada uno de los patrones de difracción de Fresnel de una transparencia resulta ser igual a la distancia  $R$  a la que se localiza, con iluminación plana, el patrón considerado. Además, en este caso, todas las figuras de difracción de Fresnel tienen la misma escala, al ser  $\mathcal{M}=1$ . Para iluminación esférica, el parámetro  $\mathcal{M}$  representa el aumento, respecto a iluminación plana, con el que se obtiene el patrón de Fresnel. De este modo, un patrón de Fresnel generado con iluminación esférica coincide con la proyección geométrica desde el punto fuente del mismo patrón generado con iluminación plana, suponiendo que éste se sitúa en el lugar de la transparencia. Además, teniendo en cuenta el significado del factor de fase global no constante de la Ec.(2-13), el patrón de Fresnel, en este caso, se puede considerar iluminado por la fuente puntual.

Por todo lo expuesto, el estudio del campo difractado por un objeto se puede restringir, sin pérdida de generalidad, al caso de iluminación plana. Los resultados que se obtengan serán válidos también cuando la onda que se difracta en el objeto sea esférica, con las matizaciones, ya manifestadas, relativas a la localización y aumento de las figuras de difracción de Fresnel.

Este hecho sugiere redefinir la repartición de amplitudes del patrón de Fresnel de índice  $\alpha$  de una transparencia como

$$t_{\alpha}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv \quad (2-19)$$

De este modo, la distribución de amplitud en un plano situado a una distancia  $R$  de la transparencia, cuando ésta se ilumina con una onda plana en incidencia normal, según la Ec.(2-18), es

$$U_R(x,y) = \exp(ikR) t_{\alpha}(x,y) \quad (2-20)$$

donde  $\alpha$  viene dado por la Ec.(2-16). Para iluminación esférica, de acuerdo con la Ec.(2-13), se tiene

$$U_R(x,y) = \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z+R)}\right] t_{\alpha}\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \quad (2-21)$$

donde  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$  vienen dados, respectivamente, por las Ecs.(2-11) y (2-12).

Obsérvese que, según la Ec.(2-19), para los patrones de Fresnel de índice  $\alpha$  y  $-\alpha$  la variación de fase de cada frecuencia espacial pasa de ser  $\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha]$  a ser  $\exp[i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha]$ , es decir, existe una relación de conjugación entre los filtros espaciales que proporcionan estos dos patrones de Fresnel.

Teniendo en cuenta el teorema relativo a la transformada de Fourier de un producto, la transformada de Fourier inversa que representa la Ec.(2-19) se puede expresar como

$$t_{\alpha}(x,y) = t(x,y) * \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv \quad (2-22)$$

En la Ec.(2-22) la integral que se convoluciona con  $t(x,y)$  no es más que la transformada de Fourier de un factor de fase cuadrático. La solución general para esta integral es (Ref.[II-41])

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\pi(x^2+y^2)a] \exp[-i2\pi(x\xi+y\eta)] dx dy = \frac{i}{a} \exp\left(-i\pi \frac{\xi^2+\eta^2}{a}\right) \quad (2-23)$$

por lo que la Ec.(2-22) se reduce a

$$t_{\alpha}(x,y) = \frac{-i}{\lambda\alpha} t(x,y) * \exp\left(i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda\alpha}\right) \quad (2-24)$$

Para el patrón de Fresnel de índice  $-\alpha$  se tiene

$$t_{-\alpha}(x,y) = \frac{i}{\lambda\alpha} t(x,y) * \exp\left(-i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda\alpha}\right) = \left(\frac{-i}{\lambda\alpha}\right)^* \left[ t^*(x,y) * \exp\left(i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda\alpha}\right) \right]^* .$$

Si  $t(x,y)$  es una función real,  $t(x,y)=t^*(x,y)$ , y por tanto

$$t_{-\alpha}(x,y) = \left(\frac{-i}{\lambda\alpha}\right)^* \left[ t(x,y) * \exp\left(i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda\alpha}\right) \right]^* = t_{\alpha}^*(x,y) .$$

En definitiva, para esta situación,

$$|t_{-\alpha}(x,y)|^2 = |t_{\alpha}(x,y)|^2 ,$$

y por tanto los patrones de Fresnel de parámetros  $\alpha$  y  $-\alpha$  tienen, en irradiancia, el mismo perfil. Recordando que para iluminación plana el parámetro  $\alpha$  coincide con la distancia  $R$ , se concluye que la irradiancia del campo difractado por un objeto real es simétrica, en la dirección de propagación de la onda plana incidente, respecto al plano del objeto.

Consideremos el caso en que la transmitancia en amplitud de la transparencia objeto es una función separable en coordenadas cartesianas, es decir,

$$t(x,y) = t_1(x)t_2(y) .$$

Para uno cualquiera de los patrones de Fresnel generados por esta transparencia, de acuerdo con la Ec.(2-24) se tiene

$$\begin{aligned} t_{\alpha}(x,y) &= \frac{-i}{\lambda\alpha} \left[ t_1(x)t_2(y) * \exp\left(i\pi \frac{x^2}{\lambda\alpha}\right) \exp\left(i\pi \frac{y^2}{\lambda\alpha}\right) \right] = \\ &= \left(\frac{-i}{\lambda\alpha}\right) \left[ t_1(x) * \exp\left(i\pi \frac{x^2}{\lambda\alpha}\right) \right] \left[ t_2(y) * \exp\left(i\pi \frac{y^2}{\lambda\alpha}\right) \right] \propto t_{1\alpha}(x) t_{2\alpha}(y) , \end{aligned} \quad (2-25)$$

donde las funciones  $t_{1\alpha}$  y  $t_{2\alpha}$  están definidas por las relaciones

$$t_{1\alpha}(x) = \left(\frac{-i}{\lambda\alpha}\right) \left[ t_1(x) * \exp\left(i\pi \frac{x^2}{\lambda\alpha}\right) \right] ,$$

$$\text{y } t_{2\alpha}(y) = \left(\frac{-i}{\lambda\alpha}\right) \left[ t_2(y) * \exp\left(i\pi \frac{y^2}{\lambda\alpha}\right) \right] ,$$

y corresponden al patrón de difracción de índice  $\alpha$  que genera cada una de las estructuras monodimensionales que constituyen el objeto.

En consecuencia, los patrones de difracción de Fresnel de un objeto separable son, a su vez, separables y resultan ser el producto de los patrones unidimensionales generados en el plano considerado por cada una de las funciones 1-D que definen aquél.

Estudiaremos ahora, más detalladamente, la localización con iluminación esférica de los distintos patrones de Fresnel de un objeto. Despejando  $R$  de la Ec.(2-11) resulta

$$R = \frac{z \alpha}{z - \alpha} \quad (2-26)$$

Cuando el objeto está iluminado por una onda esférica divergente, la distancia  $z$  es positiva. Por tanto, para los primeros valores positivos de  $\alpha$  los correspondientes patrones de Fresnel son, según la Ec.(2-26), reales y se sitúan detrás del objeto, más alejados de éste cuanto mayor es su índice  $\alpha$ . La figura de difracción de índice  $\alpha$  igual a  $z$  aparece localizada en el infinito. Los patrones de índice superior a éste proporcionan un valor de  $R$  negativo, son por tanto virtuales y se sitúan por delante de la fuente ( $|R| > z$ ). Para valores de  $\alpha$  tendiendo a infinito, las posiciones de los patrones tienden a confundirse con la de la fuente. Para valores negativos de  $\alpha$  la distancia  $R$  es siempre negativa y de módulo menor que  $z$ . En tal caso, los patrones son también virtuales pero están situados entre el objeto y la fuente. De nuevo cuando  $|\alpha|$  tiende a infinito las posiciones de los patrones tienden a confundirse con la de la fuente.

En el caso de iluminación esférica convergente, el valor de  $z$  es negativo. Un razonamiento análogo al anterior permite concluir que para valores positivos de  $\alpha$  todos los patrones son reales y se sitúan entre el objeto y la fuente virtual. Los primeros valores negativos de  $\alpha$  dan lugar a patrones virtuales cuyas posiciones se alejan del objeto a medida que aumenta su módulo. Nuevamente el patrón de índice  $\alpha$  igual a  $z$  aparece en el infinito. Si a partir de este valor se aumenta el módulo de  $\alpha$ , las figuras de difracción son reales y se acercan cada vez más a la posición de la fuente.

Es bien conocido que con iluminación plana el patrón de Fraunhofer de la transparencia se localiza en el infinito. Por tanto, este patrón corresponde a  $\alpha \rightarrow \infty$ . Si en la Ec.(2-26) se hace este límite se obtiene  $R = -z$ , es decir, tal y como hemos manifestado anteriormente, con iluminación esférica el patrón de Fraunhofer de la transparencia se obtiene en el plano de la fuente.

La Ec.(2-18) se ha obtenido como un caso límite de la Ec.(2-13), la cual a su vez se dedujo apoyándose en el patrón de Fraunhofer que se localiza en el plano que contiene a la fuente que ilumina al objeto. Puede parecer contradictorio usar un resultado en el que es esencial el hecho de que la fuente esté a distancia finita para

analizar qué ocurre cuando la fuente se localiza en el infinito. Veamos que un razonamiento más convencional conduce a la misma expresión para la distribución de amplitud de las figuras de difracción de Fresnel generadas con iluminación plana.

Consideremos la transparencia  $t(x,y)$  iluminada por una onda plana monocromática de amplitud unidad que incide normalmente en ella. La distribución de amplitud  $U_o(x,y)$  en el plano de la transparencia es, por tanto,  $U_o(x,y)=t(x,y)$ . En el plano paralelo al de la transparencia situado a una distancia  $R$  de ella, la distribución de amplitud  $U_R(x,y)$ , viene dada, de acuerdo con la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchoff, por

$$U_R(x,y) = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda R} \exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} t(x_o,y_o) \exp\left(ik\frac{x_o^2+y_o^2}{2R}\right) \exp\left(-i2\pi\frac{x_o x+y_o y}{\lambda R}\right) dx_o dy_o .$$

Teniendo en cuenta en esta ecuación, la relación entre una función y su espectro de frecuencias

$$t(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv ,$$

resulta

$$U_R(x,y) = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda R} \exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right) \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ik\frac{x_o^2+y_o^2}{2R}\right) \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[i2\pi(ux_o+vy_o)] du dv \right\} \exp\left(-i2\pi\frac{x_o x+y_o y}{\lambda R}\right) dx_o dy_o .$$

Cambiando el orden de integración se obtiene

$$U_R(x,y) = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda R} \exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right) \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ik\frac{x_o^2+y_o^2}{2R}\right) \exp[i2\pi(ux_o+vy_o)] \exp\left(-i2\pi\frac{x_o x+y_o y}{\lambda R}\right) dx_o dy_o \right\} du dv = \\ = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda R} \exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right) \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u,v) \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda R}\right) \exp\left\{-i2\pi \left[x_0 \left(\frac{x}{\lambda R} - u\right) + y_0 \left(\frac{y}{\lambda R} - v\right)\right]\right\} dx_0 dy_0 \right\} dudv . \quad (2-27)$$

Recordando la Ec.(2-23), se obtiene para la integral interior la solución

$$i\lambda R \exp\left\{-i\pi \left[\left(\frac{x}{\lambda R} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda R} - v\right)^2\right] \lambda R\right\} ,$$

que se puede factorizar como

$$i\lambda R \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2R}\right) \exp[-i\pi(u^2 + v^2)\lambda R] \exp[i2\pi(ux + vy)] .$$

Llevando este resultado a la Ec.(2-27) queda

$$U_R(x,y) = \exp(ikR) \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u,v) \exp[-i\pi(u^2 + v^2)\lambda R] \exp[i2\pi(ux + vy)] dudv ,$$

expresión que coincide, considerando la Ec.(2-16), con la Ec.(2-18), tal y como queríamos demostrar.

El procedimiento seguido en esta demostración también se puede aplicar en el caso de iluminación esférica. Así, partiendo de la Ec.(2-2), con el valor de  $U_0(x,y)$  dado por la Ec.(2-1), y siguiendo los mismos pasos que en la demostración anterior se llega, sin dificultad, a la expresión de  $U_R(x,y)$  dada por la Ec.(2-9). No obstante este hecho, nos parece que el procedimiento utilizado en la deducción de dicha ecuación es más conveniente que éste por poner de manifiesto de una manera más clara su significado e implicaciones físicas.

El concepto de transformada de Fourier a distancia finita facilita también el análisis de otras situaciones. Por ejemplo, la capacidad de una lente esférica de realizar transformaciones de Fourier bidimensionales se puede reducir simplemente a la de formar una imagen real de este patrón de Fraunhofer virtual. Es perfectamente válido considerar que una lente forma tanto la imagen de la transparencia como la de su transformada de Fourier virtual. De este modo, el plano de Fourier de un sistema óptico es siempre el plano imagen del que contiene a la fuente y las fórmulas de la Óptica Geométrica relativas a la posición y aumento de

una imagen se pueden utilizar para determinar la localización y el factor de escala de la transformada de Fourier proporcionada por el sistema.

Consideremos ahora la situación representada en la Fig.2-2, en la que, sin perder generalidad, el sistema formador de imágenes está constituido por una única lente, que vamos a suponer que se comporta como un sistema óptico perfecto. La lente L proporciona al mismo tiempo la transformada de Fourier y la imagen de la transparencia original. Ambas reparticiones están multiplicadas por sendos factores de fase cuadráticos que convergen/divergen hacia/de O' y S' respectivamente. Así, la repartición de amplitudes  $U_{O'}(x,y)$  en el plano de la imagen de la transparencia viene dada por

$$U_{O'}(x,y) \propto \exp\left(ik \frac{x^2+y^2}{2z'}\right) t'(x,y) \quad (2-28)$$

donde  $z'$  es la distancia entre S' y O' (ver la Fig.2-2) y  $t'(x,y)$  es la imagen de la transparencia objeto, es decir,

$$t'(x,y) = t\left(\frac{x}{\beta_o}, \frac{y}{\beta_o}\right) \quad (2-29)$$

siendo  $\beta_o$  el aumento lateral entre el plano del objeto y su plano conjugado.

Ahora bien, la lente L no sólo forma una imagen de la transparencia objeto y de su patrón de Fraunhofer virtual sino también de todos y cada uno de los patrones de Fresnel de ésta. Es lógico pensar que estas imágenes deben ser a su vez los patrones de difracción de Fresnel de  $U_{O'}(x,y)$ . Es decir, estas imágenes se deben localizar en las mismas posiciones que las figuras de difracción que genera la imagen  $t'(x,y)$  del objeto cuando la fuente que la ilumina está situada en S'.

Veamos de una manera más formal este resultado. El patrón de Fresnel de  $t'(x,y)$  que se localiza a una distancia  $R'$  viene dado, de acuerdo con la Ec. (2-13), por

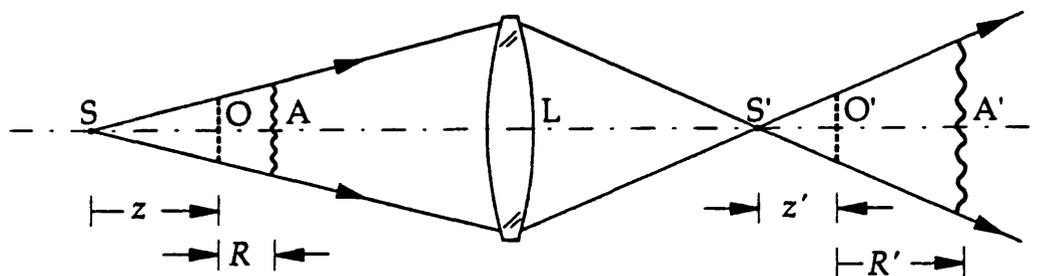


Fig. 2-2. Una lente ideal redistribuye ordenadamente la posición de los patrones de difracción de Fresnel de una abertura.

$$U_R(x,y) \propto \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z'+R')}\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}'(u',v') \exp[-i\pi(u'^2+v'^2)\lambda\alpha'] \exp\left[i2\pi \frac{u'x+v'y}{\mathcal{M}'}\right] du' dv' , \quad (2-30)$$

donde, por analogía con las Ecs.(2-11) y (2-12), se tiene

$$\alpha' = \frac{z'R'}{z'+R'} , \quad (2-31)$$

$$y \quad \mathcal{M}' = \frac{z'+R'}{z'} , \quad (2-32)$$

Teniendo en cuenta la relación entre el espectro de Fourier de una función y el de esa misma función escalada, la Ec.(2-29) conduce a

$$\tilde{t}'(u',v') = \beta_0^2 \tilde{t}(\beta_0 u', \beta_0 v') . \quad (2-33)$$

Considerando este resultado y haciendo el cambio de variables

$$u = \beta_0 u' ,$$

$$y \quad v = \beta_0 v' ,$$

la Ec.(2-30) se reduce a

$$U_R(x,y) \propto \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z'+R')}\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp\left(-i\pi\lambda\alpha' \frac{u^2+v^2}{\beta_0^2}\right) \exp\left[i2\pi \frac{ux+vy}{\mathcal{M}'\beta_0}\right] du dv . \quad (2-34)$$

Ahora bien, el plano que estamos considerando (plano que contiene al punto A' en la Fig.2-2) es el plano imagen de otro cuya posición la determina la ley de conjugación de las lentes. Sea  $R$  la distancia entre la transparencia objeto y este último plano (que es el que, en la Fig.2-2, contiene al punto A). En este plano se localiza un patrón de Fresnel de la transparencia caracterizado por un índice  $\alpha$  y un aumento  $\mathcal{M}$  perfectamente definidos por las Ecs.(2-11) y (2-12). Para relacionar estos parámetros con los índices  $\alpha'$  y  $\mathcal{M}'$  del patrón localizado en el plano considerado del espacio imagen, haremos uso de la relación [II-42]

$$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \beta_P \beta_Q , \quad (2-35)$$

que liga las distancias, en el espacio objeto e imagen, entre dos pares de planos conjugados (P,P') y (Q,Q') con sus respectivos aumentos laterales  $\beta_p$  y  $\beta_Q$ . Por un lado, aplicada al plano de la fuente y al de la transparencia objeto, esta relación se reduce a

$$z' = z \beta_s \beta_o \quad , \quad (2-36)$$

donde  $\beta_s$  es el aumento lateral entre el plano de la fuente y su plano imagen (plano de Fourier). Por otro lado, para los planos conjugados que contienen a O y O' y a A y A', la Ec.(2-35) se convierte en

$$R' = R \beta_o \beta_A \quad , \quad (2-37)$$

siendo  $\beta_A$  el aumento lateral entre el plano que contiene a A y su plano conjugado. Por último, aplicando ahora la Ec.(2-35) al plano de la fuente y al del patrón de Fresnel, resulta

$$z' + R' = (z + R) \beta_s \beta_A \quad . \quad (2-38)$$

Introduciendo los valores de  $z'$ ,  $R'$ , y  $z'+R'$  dados, respectivamente, por las Ecs.(2-36), (2-37) y (2-38), en las Ecs. (2-31) y (2-32), y utilizando las Ecs. (2-11) y (2-12) se obtiene

$$\alpha' = \beta_o^2 \frac{zR}{z+R} = \beta_o^2 \alpha \quad , \quad (2-39)$$

$$y \quad \mathcal{M}' = \beta_A \frac{z+R}{z\beta_o} = \frac{\beta_A}{\beta_o} \mathcal{M} \quad . \quad (2-40)$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, la Ec.(2-34) se transforma en

$$U_R(x,y) \propto \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z'+R')}\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp\left[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha\right] \exp\left[i2\pi \frac{ux+vy}{\mathcal{M}\beta_A}\right] du dv \quad ,$$

y finalmente, considerando la Ec.(2-19), resulta

$$U_R(x,y) \propto \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2(z'+R')}\right] t_\alpha\left(\frac{x}{\mathcal{M}\beta_A}, \frac{y}{\mathcal{M}\beta_A}\right) \quad . \quad (2-41)$$

La distribución de amplitud que se obtiene en el plano considerado corresponde esencialmente a la del patrón de Fresnel de índice  $\alpha$  de la transparencia, con un aumento igual a  $\mathcal{M}\beta_A$ , iluminado por la onda que proviene del punto fuente S'. Puesto que en el plano del que éste es conjugado se localiza este mismo patrón pero,



de acuerdo con la Ec.(2-21), con el aumento  $\mathcal{M}$  que proporciona la propagación libre, se concluye que el aumento del patrón en el espacio imagen, respecto al del patrón en el espacio objeto, es igual al aumento lateral  $\beta_A$  que proporciona la lente que los conjuga. Dado que el patrón de Fresnel considerado es uno cualquiera de los que genera la transparencia objeto, resulta, por tanto, que una lente ideal transforma el conjunto de patrones de difracción de Fresnel del espacio objeto en otro conjunto, en el espacio imagen, formado por los mismos patrones pero con una localización y escala distinta. La posición y el aumento de estos patrones coinciden, tal y como habíamos adelantado, con los de los patrones que genera la imagen de la transparencia objeto,  $t'(x,y)$ , iluminada por el punto fuente  $S'$ , imagen de la fuente  $S$ .

Este resultado es válido independientemente de cuál sea la disposición relativa entre la fuente y la transparencia objeto, es decir, es válido para iluminación convergente, plana o divergente y para cualquier tipo de lente convergente o divergente. Así, si la fuente  $S$  está situada en el foco objeto de la lente, en el espacio imagen se obtienen los patrones de difracción de la transparencia iluminados por una onda plana, por lo que todos ellos tienen la misma escala.

Hasta el momento, hemos considerado las características de los patrones de Fresnel de una transparencia generados con iluminación monocromática, plana en un caso y esférica en otro, pero, en ámbos, de la misma longitud de onda. Cuando se comparan las figuras de difracción de un objeto generadas con luz coherente de diferente longitud de onda, también se obtiene, independientemente de cuál sea ésta, el mismo conjunto de patrones de Fresnel, que es característico, por tanto, del objeto. Al igual que ocurre al modificar la curvatura del haz, variar la longitud de onda implica cambiar la localización y, en general también, el aumento de cada uno de estos patrones. Para poner de manifiesto estos hechos, en este caso, interesa redefinir el parámetro que designa cada patrón de Fresnel, mediante la relación

$$\mathcal{A} = \lambda \alpha \quad , \quad (2-42)$$

con lo que, a partir de la Ec.(2-19), para el patrón asociado al parámetro  $\mathcal{A}$  se tiene

$$t_{\mathcal{A}}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\mathcal{A}] \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv \quad .$$

De este modo, sin más que sustituir el subíndice  $\alpha$  por  $\mathcal{A}$  en las Ecs.(2-20) y (2-21), éstas siguen siendo válidas para la distribución de amplitud en un plano situado a una distancia  $R$  de la transparencia cuando la iluminación es, respectivamente, plana o esférica. Nótese que el parámetro  $\mathcal{A}$  tiene dimensiones de longitud al cuadrado. Para una situación particular, especificada por los valores de las distancias  $z$  y  $R$  y de la

longitud de onda  $\lambda$  de la fuente coherente, ahora, es el valor del parámetro  $\mathcal{A}$  el que determina el perfil del patrón de Fresnel que se obtiene en el plano de observación. Explícitamente, para iluminación plana, a partir de la Ec.(2-42) y considerando la Ec.(2-16), se obtiene

$$\mathcal{A} = \lambda R \quad ,$$

y, para iluminación esférica, teniendo en cuenta la Ec.(2-11), resulta

$$\mathcal{A} = \lambda \frac{zR}{z+R} \quad .$$

Para el aumento  $\mathcal{M}$  de los patrones de Fresnel siguen siendo válidas las Ecs.(2-17) y (2-12). Obsérvese que con iluminación plana, la posición de los patrones de Fresnel depende de la longitud de onda pero su aumento es independiente de ésta e igual a la unidad.

Puesto que en todas las situaciones que se van a analizar en este trabajo, se va a suponer que la iluminación es monocromática, vamos a seguir utilizando el parámetro  $\alpha$ , como en las Ecs.(2-19) a (2-21), para designar los patrones de Fresnel de una transparencia. Las ideas vertidas en esta sección nos van a permitir, a continuación, profundizar en la comprensión del efecto Talbot y analizar de una manera sencilla nuevas situaciones en las que se presenta.

## II.3 Formación de autoimágenes

Estamos ahora interesados en especificar bajo qué condiciones la distribución de amplitud  $U_R(x,y)$  en un plano situado a una distancia  $R$  de una transparencia  $t(x,y)$ , iluminada por una onda monocromática plana o esférica, es precisamente una réplica de ésta. De acuerdo con las Ecs.(2-20) y (2-21) esto es equivalente a determinar cuándo el patrón de Fresnel de la transparencia que se localiza en el plano considerado,  $t_\alpha(x,y)$ , coincide con el objeto. Recordando la Ec.(2-19),

$$t_\alpha(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv \quad ,$$

en el plano de observación se tendrá una imagen del objeto si se verifica que la función de transferencia para la propagación libre toma el mismo valor para todas las

frecuencias  $(u,v)$  en las que el espectro de Fourier de la transparencia es no nulo. Es decir, si se satisface que

$$\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] = C \quad , \quad (2-43)$$

cuando  $\tilde{t}(u,v) \neq 0$ , siendo  $C$  una constante compleja de módulo unidad. De este modo, la Ec.(2-19) se reduce a

$$t_\alpha(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[i2\pi(ux+vy)] du dv = C t(x,y) \quad , \quad (2-44)$$

y en el plano considerado se tiene esencialmente una copia, en general escalada, del objeto. Para poder pasar de la Ec.(2-19) a la Ec.(2-44) es necesario que  $\tilde{t}(u,v)$  sea distinta de cero exclusivamente para las frecuencias  $(u,v)$  que cumplen la Ec.(2-43). La exponencial del primer miembro de esta ecuación es una función periódica en  $\rho^2 = u^2 + v^2$ . Su período  $\tau$ , que tiene dimensiones de  $[L]^{-2}$ , vale

$$\tau = \frac{2}{\lambda|\alpha|} \quad , \quad (2-45)$$

donde  $\alpha$  se ha tomado en módulo porque puede ser una cantidad negativa. Por lo tanto, los puntos  $(u,v)$  donde esta exponencial toma un mismo valor son tales que los cuadrados de sus distancias al origen forman una sucesión periódica con período  $\tau$ .

Por esta razón, para que se satisfaga la Ec.(2-44) el espectro de Fourier de la transparencia debe tomar valores no nulos únicamente en una serie de anillos, anillos de Montgomery [II-18 y II-43], cuyos radios son equidistantes en  $\rho^2$ . A este período lo designaremos  $(1/d)^2$ , siendo  $d$  una constante positiva con dimensiones de longitud, cuyo valor inverso se denomina frecuencia fundamental del objeto de Montgomery. Puesto que en estos anillos la función  $\tilde{t}$  puede tomar cualquier valor, incluido el cero, la condición anterior no implica que  $\tilde{t}$  deba ser periódica en  $\rho^2$ , ni que posea simetría de revolución.

Un objeto de Montgomery presentará una transformada de Fourier discreta constituida en el caso más general, tal y como muestra la Fig.2-3, por una serie de anillos cuya separación en  $\rho^2$  es  $(1/d)^2$ . Recientemente Durnin [II-44] ha llamado la atención sobre el hecho de que uno cualquiera de estos anillos representa el espectro de Fourier de un haz adifraccional: un campo que, en su propagación, es inmune a la difracción. Las frecuencias espaciales  $(u,v)$  contenidas en el  $j$ -ésimo de estos anillos, de radio  $\rho_j$ , satisfacen la relación

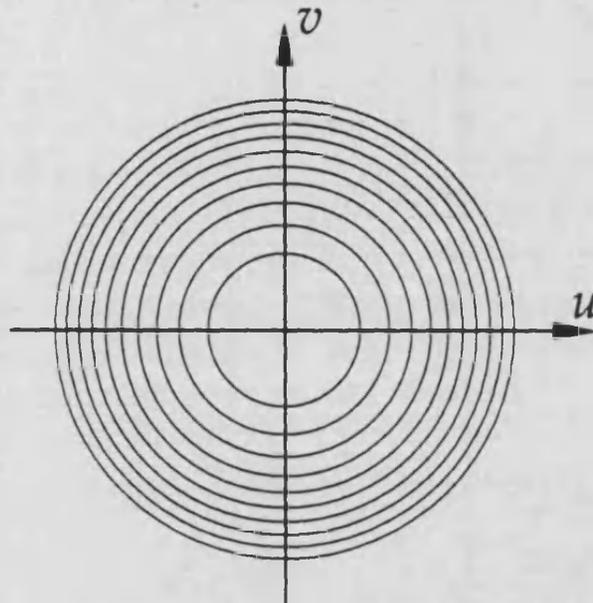


Fig. 2-3. Anillos de Montgomery. Los anillos indican las regiones en el dominio frecuencial en las que el espectro de Fourier de un objeto capaz de proporcionar autoimágenes puede ser no nulo.

$$u^2 + v^2 = \rho_j^2 = \rho_1^2 + \frac{j-1}{d^2} \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2-46)$$

donde  $\rho_1$  es el radio del primer anillo. Para que la función  $\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha]$  tome sobre estos anillos, donde la transformada puede ser no nula, un mismo valor  $C$  es necesario y suficiente que su período o un número entero,  $Q$ , de períodos coincida con el de la transformada. Es decir,

$$Q\tau = \frac{1}{d^2} \quad . \quad (2-47)$$

A partir de la Ec.(2-45) resulta

$$\frac{2Q}{\lambda\alpha} = \frac{1}{d^2} \quad , \quad (2-48)$$

en donde al sustituir  $\tau$  se ha suprimido el signo de tomar módulo en  $\alpha$ . Al hacerlo se acepta implícitamente que  $Q$  puede tomar valores negativos.

La condición expresada en la Ec.(2-48) indica que la autoimagen de índice  $Q$  está localizada en aquel plano transversal para el que el valor del parámetro  $\alpha$  es tal que el período  $\tau$  de la función de transferencia para la propagación libre es  $|Q|$  veces menor que el de la transformada de Fourier del objeto de Montgomery.

Reordenando la Ec.(2-48) se obtiene

$$\alpha = 2Q \frac{d^2}{\lambda} , \quad Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-49)$$

Por tanto, las autoimágenes de un objeto de Montgomery de frecuencia fundamental  $1/d$  son los patrones de Fresnel cuyo índice  $\alpha$  es un número entero de veces la cantidad  $2d^2/\lambda$ . La distancia  $z_T = 2d^2/\lambda$  se suele denominar distancia de Talbot del objeto de Montgomery y es un parámetro característico de éste. En la Ec.(2-49) se ha incluido el valor  $Q=0$  que corresponde a la propia transparencia objeto.

Para determinar la localización de los planos de autoimagen, basta con sustituir en la Ec.(2-49) el valor de  $\alpha$  dado por la Ec.(2-11), si la iluminación es esférica, o por la Ec.(2-16) si es plana. Para la primera situación se tiene

$$\frac{zR}{z+R} = 2Q \frac{d^2}{\lambda} = Q z_T , \quad Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-50)$$

Es decir, con iluminación esférica las posiciones de las autoimágenes dependen de la curvatura del haz incidente, de la frecuencia fundamental del objeto de Montgomery y de la longitud de onda  $\lambda$ . El efecto Talbot por ser un fenómeno debido a la difracción depende explícitamente de  $\lambda$ , esto es, no es acromático.

Cuando la iluminación es plana, al ser  $\alpha=R$ , resulta

$$R = 2Q \frac{d^2}{\lambda} = Q z_T , \quad Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-51)$$

Ahora la separación entre las autoimágenes sucesivas de un objeto de Montgomery es constante y de valor  $z_T$ . Además, según la Ec.(2-17), todas ellas tienen la misma escala que el objeto. Por tanto, con iluminación esférica, las autoimágenes presentan un aumento  $\mathcal{M}$ , respecto al objeto, dado por la Ec.(2-12).

El análisis realizado a partir de la Ec.(2-26) sobre la localización de los patrones de Fresnel de un objeto arbitrario es, claro está, válido también para las autoimágenes y conduce al esquema de la disposición relativa de éstas para iluminación divergente y convergente que aparece, respectivamente, en las Figs.2-4 y 2-5.

De acuerdo con la Ec.(2-46) el conjunto de anillos del espectro de un objeto de Montgomery está caracterizado por dos parámetros: la frecuencia fundamental,  $1/d$ , y el radio,  $\rho_1$ , del primer anillo. Tal y como hemos visto, en la ley que determina la localización de las autoimágenes del objeto participa sólo el primero de ellos. En cambio ambos influyen por igual en el valor de la constante compleja  $C$  que multiplica cada autoimagen. En efecto, teniendo en cuenta las Ecs.(2-46) y (2-49), para la autoimagen de índice  $Q$ , el valor que proporciona la Ec.(2-43) para el factor global de fase  $C$  es

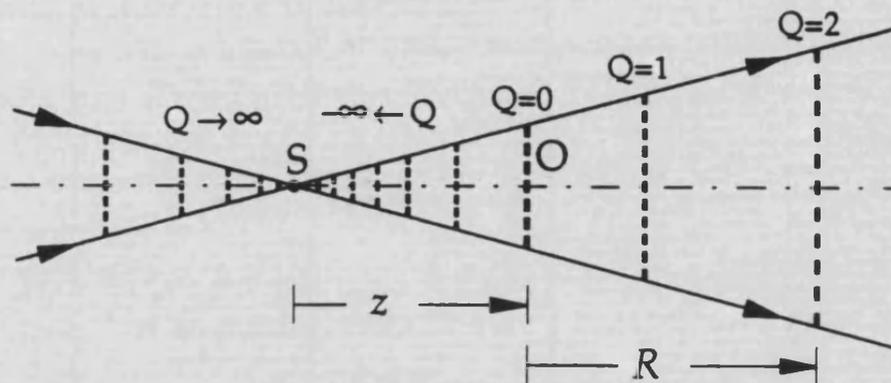


Fig. 2-4. Localización de las autoimágenes generadas por un objeto de Montgomery iluminado por una onda esférica divergente.

$$C = \exp\left[-i\pi\left(\rho_1^2 + \frac{j-1}{d^2}\right)2Qd^2\right] = \exp(-i2\pi Q\rho_1^2 d^2) \exp[-i2\pi Q(j-1)] = \exp(-i2\pi Q\rho_1^2 d^2) \quad (2-52)$$

Puesto que este valor depende también del índice  $Q$ , para cada una de las autoimágenes del objeto la fase global constante de la Ec.(2-43) es diferente. Ahora bien, la distribución de irradiancia de todas las autoimágenes es semejante.

Según hemos discutido previamente, un objeto de Montgomery iluminado por una onda plana da lugar a un conjunto de autoimágenes equidistantes entre sí. Como demostramos en la sección anterior, cada una de estas réplicas del objeto está iluminada por la misma onda plana que ilumina a éste por lo que considerada como objeto genera, con igual disposición relativa, los mismos patrones de Fresnel que el objeto real. Por lo tanto, el conjunto de patrones de Fresnel comprendidos entre el objeto y su primera autoimagen se repite entre dos autoimágenes sucesivas cualesquiera. Es decir, el campo difractado por un objeto de Montgomery iluminado por una onda plana es periódico en la dirección de propagación de ésta. Este período es

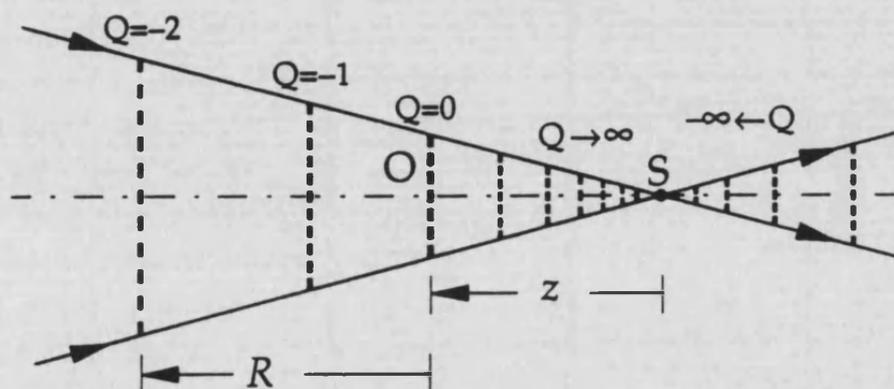


Fig. 2-5. Localización de las autoimágenes generadas por un objeto de Montgomery iluminado por una onda esférica convergente.

igual a la separación entre dos autoimágenes sucesivas, es decir, es igual a la distancia de Talbot  $z_T$  del objeto de Montgomery. Este hecho sugiere caracterizar los patrones de Fresnel de un objeto de Montgomery mediante un parámetro  $q$  definido por la relación

$$\alpha = (Q+q) z_T = 2 (Q+q) \frac{d^2}{\lambda} \quad (2-53)$$

donde  $Q$  es un número entero y  $0 \leq q < 1$ . De este modo para las autoimágenes resulta, teniendo en cuenta la Ec.(2-49), que el parámetro  $q=0$ .

Consideremos un patrón de Fresnel cualquiera del objeto de Montgomery caracterizado por un índice  $Q+q$ , con  $q$  en general no nulo. Según la Ec.(2-19) el espectro de Fourier de este patrón es

$$\tilde{f}_\alpha(u,v) = \tilde{f}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] = \tilde{f}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda(Q+q) z_T] \quad (2-54)$$

Para el patrón considerado, la función de transferencia modifica la fase de cada uno de los anillos del espectro del objeto, de modo que para un anillo genérico, de radio  $\rho_j$  dado por la Ec.(2-46), este filtro de fase toma el valor

$$\begin{aligned} \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda(Q+q) z_T] &= \exp\left[-i\pi\left(\rho_j^2 + \frac{j-1}{d^2}\right) 2(Q+q) d^2\right] = \\ &= \exp[-i2\pi\rho_j^2 d^2 (Q+q)] \exp[-i2\pi(j-1)(Q+q)] = \\ &= \exp[-i2\pi\rho_j^2 d^2 (Q+q)] \exp[-i2\pi(j-1)Q] \exp[-i2\pi(j-1)q] = \\ &= \exp[-i2\pi\rho_j^2 d^2 (Q+q)] \exp[-i2\pi(j-1)q] \quad (2-55) \end{aligned}$$

Obviando la fase global constante  $\exp[-i2\pi\rho_j^2 d^2 (Q+q)]$ , la distribución de amplitud correspondiente al patrón de Fresnel de índice  $Q+q$  de un objeto de Montgomery equivale a la imagen filtrada de éste obtenida colocando sobre cada anillo de su transformada de Fourier un filtro de fase del tipo  $\exp[-i2\pi(j-1)q]$ , siendo  $j$  el orden del anillo. Por tanto, se concluye que la distribución de irradiancia de todos los patrones de Fresnel con el mismo índice  $q$  ( $Q$  cualquiera) es semejante. Según las Ecs.(2-16) y (2-53) este resultado implica, tal y como hemos adelantado, que para iluminación plana la repartición de amplitudes en los planos perpendiculares al eje del sistema comprendidos entre una autoimagen cualquiera y la siguiente, se repite. Además un patrón de Fresnel de índice  $q$  aparece siempre a una distancia  $2qd^2/\lambda$  de la autoimagen que le precede. Asimismo la separación entre los sucesivos patrones con el mismo índice  $q$  es igual a la distancia de Talbot  $z_T$ . La Ec.(2-11), con el valor de  $\alpha$  dado por la

Ec.(2-53), proporciona, para la localización de los patrones de Fresnel con iluminación esférica, la relación

$$\frac{zR}{z+R} = 2(Q+q) \frac{d^2}{\lambda} \quad (2-56)$$

En este caso, los patrones de igual índice  $q$  no aparecen a la misma distancia de cada autoimagen ni igualmente espaciados entre sí.

Si la distancia  $z$  que separa la fuente del objeto se expresa en función de la distancia  $z_T$ , es decir,

$$z = (Q_0+q_0)z_T = 2(Q_0+q_0) \frac{d^2}{\lambda} \quad (2-57)$$

donde  $Q_0$  es un número entero y  $0 \leq q_0 < 1$ , la Ec.(2-56) se puede reescribir como

$$R = z \left( \frac{Q+q}{Q_0+q_0-Q-q} \right) \quad (2-58)$$

De este modo, las posiciones de los patrones vienen expresadas directamente en función de la distancia fuente-transparencia  $z$ . Obsérvese que es precisamente el patrón de Fresnel de índice  $Q+q=Q_0+q_0$  el que aparece en el infinito.

En la sección anterior hemos demostrado que los patrones de índice  $\alpha$  y  $-\alpha$  de un objeto cualquiera de transmitancia real verifican la relación

$$t_\alpha(x,y) = t_{-\alpha}^*(x,y) \quad (2-59)$$

Supongamos uno de estos objetos que sea además capaz de proporcionar autoimágenes. Si para el patrón asociado al parámetro  $\alpha$ , el índice que proporciona la Ec.(2-53) es  $Q+q$ , para el patrón de parámetro  $-\alpha$  se tiene que el índice correspondiente es  $Q'+q'$ , con  $Q' = -(Q+1)$  y  $q' = 1-q$ . De este modo, a partir de la Ec.(2-59), resulta

$$t_q(x,y) = t_{1-q}^*(x,y) \quad (2-60)$$

Por lo tanto, los patrones de índice  $q$  y  $1-q$  de un objeto de Montgomery de transmitancia real tienen, en irradiancia, el mismo perfil. Por esta razón, todos los patrones de Fresnel del objeto diferentes se pueden encontrar entre éste y su patrón de índice  $Q+q=0.5$ . Además este patrón es, al igual que el objeto, real ya que, según la Ec.(2-60), se tiene  $t_{0.5}(x,y) = t_{0.5}^*(x,y)$ .

Del conjunto de objetos de Montgomery tienen especial interés aquéllos para los que el parámetro  $\rho_1$  de la Ec.(2-46) es cero ( $\rho_1=0$ ). En este caso, de acuerdo con la Ec.(2-52), la constante de fase C es igual para todas las autoimágenes y se reduce a la unidad. Además, para estos objetos la Ec.(2-46) se convierte en

$$u^2 + v^2 = \rho_j^2 = \frac{j-1}{d^2} \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

y, por tanto, su espectro de Fourier puede tomar valores no nulos sólomente para aquellas frecuencias espaciales cuyos módulos valen  $\sqrt{j}/d$ , con  $j=0,1,2,\dots$ . Es decir, para los objetos considerados los radios de los anillos de Montgomery de su espectro siguen una ley de proporcionalidad respecto a la raíz cuadrada de los números naturales [II-18]. Como en este caso el primer anillo de Montgomery ha degenerado en el punto  $(0,0)$ , es más conveniente expresar los radios  $\rho_j$  de los sucesivos anillos como

$$\rho_j = \sqrt{j} \rho_1 \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2-61)$$

donde  $\rho_1$  es, ahora, el radio del verdadero primer anillo.

Obsérvese que con esta notación, el punto  $(0,0)$  es el "anillo" de radio  $\rho_0$  ( $\rho_0=0$ ) y que  $\rho_1$  coincide con la frecuencia fundamental del objeto de Montgomery ( $\rho_1=1/d$ ). Para el patrón de Fresnel de índice  $Q+q$  de uno de estos objetos, la función de transferencia de la Ec.(2-55) se reduce a

$$\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda(Q+q)z_T] = \exp(-i2\pi jq) \quad , \quad j=0, 1, 2, \dots, \quad (2-62)$$

donde para contar los anillos del espectro se ha utilizado la misma notación que en la Ec.(2-61). Usualmente, la condición de la Ec.(2-61) es la que se toma por la mayor parte de los autores como condición necesaria y suficiente para que un objeto exhiba autoimágenes. Asimismo se suele utilizar el nombre de objetos de Montgomery para referirse al subconjunto de ellos que verifica la anterior condición. De cualquier modo, tal y como hemos visto, la física del fenómeno de las autoimágenes está en la periodicidad en  $\rho^2$  de los módulos de las frecuencias espaciales y no en su proporcionalidad con la raíz cuadrada de los números naturales.

Particularizemos, a continuación, algunos de los resultados de esta sección para el subconjunto de objetos de Montgomery de mayor interés práctico: las redes de difracción.

## II.4 Algunos ejemplos relativos a redes de difracción

Consideremos, en primer lugar, una red de difracción lineal. Al ser ésta una estructura periódica, la función  $t(x,y)$  se reduce, mediante un desarrollo en serie de Fourier, a

$$t(x,y) \equiv t(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \quad (2-63)$$

donde  $d$  es su período espacial. Puesto que la red 1-D consta de un conjunto discreto de frecuencias espaciales, su transformada de Fourier se presenta como una serie de máximos de irradiancia —órdenes de difracción— equidistantes, cuya separación  $N$  es igual a la inversa del período de la red ( $N=1/d$ ). Es decir,

$$\bar{t}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \delta\left(u - \frac{m}{d}, v\right) \quad (2-64)$$

Las distancias,  $\rho_m$ , desde el origen a los sucesivos órdenes de difracción vienen dadas por  $\rho_m = |m|N$ , con  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Comparando esta relación con la Ec.(2-61) se observa que todos los órdenes de difracción de la red 1-D se localizan sobre algún anillo de Montgomery. Para ello basta con identificar el radio  $\rho_1$  del primer anillo de Montgomery de la Ec.(2-61), con la separación entre órdenes  $N$ . Por lo tanto, toda estructura periódica unidimensional es capaz de proporcionar autoimágenes. Además, para estos objetos, el parámetro  $d$  que determina su distancia de Talbot,  $z_T$ , es su período espacial. Este hecho justifica la elección de este símbolo para representar el período de la red.

Puesto que para una red 1-D el máximo de difracción de orden  $m$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , se sitúa sobre el anillo de Montgomery de índice  $j=m^2$ , el factor de fase de la Ec.(2-62) se puede expresar, en función de este número de orden  $m$ , como  $\exp(-i2\pi m^2 q)$ . Por lo tanto, considerando las Ecs.(2-54) y (2-64), el espectro de Fourier del patrón de Fresnel de índice  $q$  de una red 1-D se reduce a

$$\bar{t}_q(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp(-i2\pi m^2 q) \delta\left(u - \frac{m}{d}, v\right) \quad (2-65)$$

y, realizando una transformación de Fourier inversa resulta

$$t_q(x,y) = t_q(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp(-i2\pi m^2 q) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) . \quad (2-66)$$

Comparando con la Ec.(2-63) se observa que este patrón equivale a una red 1-D con el mismo período que la red original pero, en general, distinto perfil. Considerando las Ecs.(2-20) y (2-21) resulta que el campo difractado por un objeto periódico proporciona también una estructura periódica en todos los planos transversales a la dirección de propagación. Para iluminación esférica el período de esta estructura coincide con la proyección geométrica desde el punto fuente del de la red 1-D.

Para el conjunto de patrones de Fresnel caracterizados por  $q=0$ , la Ec.(2-66) se reduce a la Ec.(2-63) y se obtiene, por tanto, una réplica del objeto. Estos patrones son, como sabemos, las imágenes de Talbot o autoimágenes positivas de la red. Por otra parte, para los patrones con  $q=0'5$ , resulta

$$t_{0'5}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp(-i\pi m^2) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m (-1)^m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) .$$

Para estos patrones, la propagación libre altera en  $\pi$  la fase de los órdenes impares de la red. Se obtiene así un patrón idéntico a la red salvo por un desplazamiento de medio período respecto a ésta, ya que

$$t\left(x \pm \frac{d}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left[i2\pi m \frac{x \pm (d/2)}{d}\right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m (-1)^m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = t_{0'5}(x) .$$

Estos patrones se denominan autoimágenes negativas [II-14] porque para una red de Ronchi, es decir, para una red binaria cuadrada (de bandas opacas igual de anchas que las transparentes), desplazar medio período equivale a obtener su negativo.

La Ec.(2-50) —si la iluminación es plana, la Ec.(2-51)— permite determinar las posiciones de las autoimágenes negativas con tal de sustituir  $Q$  por el índice semi-impar  $Q+q$  ( $q=0'5$ ). Entre dos autoimágenes positivas siempre hay una negativa y a la inversa. Además, para iluminación plana resulta que cada autoimagen negativa aparece equidistante entre dos positivas y presenta el mismo período que éstas.

Teniendo en cuenta que  $\exp[-i2\pi m^2(q+0'5)] = (-1)^m \exp(-i2\pi m^2 q)$  otra propiedad a señalar es que los patrones de Fresnel de una red de parámetros  $q$  y  $q+0'5$  exhiben el mismo perfil, pero con un desplazamiento relativo de medio período. Esta propiedad junto a la ya demostrada relativa a que, si  $t(x,y)$  es real, los patrones de parámetros  $q$  y  $1-q$  tienen el mismo perfil en irradiancia, conduce a que la distribución de irradiancia en los patrones de índices  $q$  y  $0'5-q$  es, obviando el desplazamiento de medio período,

idéntica. Por tanto, todos los patrones de una red real diferentes se pueden encontrar entre ella y su patrón de índice  $Q+q=1/4$ .

Cuando una red de Ronchi se ilumina normalmente con un haz paralelo, la irradiancia del campo en los planos equidistantes entre dos autoimágenes sucesivas —una positiva y otra negativa— es constante [II-32]. Veamos cómo obtener este resultado desde nuestro punto de vista. Estos planos de campo uniforme corresponden a los valores  $q=1/4$  o  $q=3/4$ . En virtud de las propiedades de simetría estos patrones difieren entre sí tan sólo en un desplazamiento lateral de medio período por lo que basta con estudiar uno de ellos, por ejemplo el de índice  $q=1/4$ . La transmitancia en amplitud  $t(x)$  de una red de Ronchi viene dada por

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\pi m/2)}{\pi m} \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\pi m/2)}{\pi m} \cos\left(2\pi m \frac{x}{d}\right) . \quad (2-67)$$

Obsérvese que para esta red, los órdenes de difracción pares no existen al ser  $\text{sen}(\pi m/2)=0$  cuando  $m$  es par y que el sumatorio del segundo miembro de la Ec.(2-67), que contiene todos los órdenes de difracción salvo el orden cero, es igual a  $t(x)-1/2$ . Para el patrón de índice  $q=1/4$  de una red cualquiera el filtro de desenfoque se reduce a  $\exp[-im^2\pi/2]$  y equivale, por tanto, a introducir una variación de fase de  $-\pi/2$  en los órdenes impares. De este modo, para este patrón de la red considerada se tiene

$$\begin{aligned} t_{1/4}(x) &= \frac{1}{2} - 2i \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\pi m/2)}{\pi m} \cos\left(2\pi m \frac{x}{d}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - i \left( t(x) - \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-i) , & \text{cuando } t(x) = 1 . \\ \frac{1}{2}(1-i)i , & \text{cuando } t(x) = 0 . \end{cases} \end{aligned} \quad (2-68)$$

La Ec.(2-68) describe una distribución de amplitud, periódica y binaria, en la que los dos valores que toma esta magnitud están desfasados entre sí en  $\pi/2$ . La visibilidad de este patrón de Fresnel es nula al ser su irradiancia constante ya que  $|t_{1/4}(x)|^2=1/2$ . Nótese también que si se desfasan, de nuevo, los órdenes impares de  $t_{1/4}(x)$  en  $-\pi/2$ , como corresponde con iluminación plana a la propagación libre adicional de la luz difractada durante una distancia  $z_T/4$ , se debe obtener el patrón de índice  $q=1/2$  de la red. En efecto,

$$\frac{1}{2} - (-i)i \left( t(x) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \left( t(x) - \frac{1}{2} \right) = 1 - t(x) = t\left(x \pm \frac{d}{2}\right) = t_{0.5}(x) .$$

Por tanto el patrón de visibilidad nula genera a su vez un patrón, la autoimagen negativa de la red, de visibilidad máxima. Este resultado es lógico porque, como se razonó en la sección II.2, cualquier patrón de Fresnel genera a su vez el resto de los patrones de Fresnel del objeto.

Estos resultados sugieren un camino para diseñar redes puras de fase que generen, bajo iluminación coherente, patrones de Fresnel de alto contraste con una distribución de irradiancia periódica y binaria. Una red de fase binaria, cuadrada y de salto de fase  $\pi/2$  proporciona uno de tales objetos [II-17]. La transmitancia en amplitud  $t'(x)$  de esta red se puede expresar de cualquiera de las siguientes maneras

$$\begin{aligned} t'(x) &= \exp\left[i \frac{\pi}{2} t(x)\right] = \\ &= 1 + (i-1)t(x) = \\ &= \frac{1}{2}(i+1) + (i-1)\left(t(x) - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (2-69)$$

donde  $t(x)$  es la transmitancia en amplitud de la red de Ronchi, Ec.(2-67), del mismo período. Comparando la tercera de estas expresiones con la Ec.(2-68) se obtiene

$$t'(x) = (i+1) t_{1/4}(x) \quad .$$

Es decir, ambas distribuciones de amplitud son, salvo en el factor constante  $(i+1)$ , iguales. Por lo tanto, los patrones de Fresnel de esta red de fase son esencialmente los mismos que los generados por el patrón de Fresnel de índice  $q=1/4$  de la red de Ronchi, o, equivalentemente, iguales a los de esta misma red.

A partir de la relación anterior resulta

$$\tilde{t}'(u,v) = (i+1) \tilde{t}_{1/4}(u,v) \quad . \quad (2-70)$$

Por un lado, el espectro de Fourier de la red de fase se puede expresar, análogamente a la Ec.(2-64), como

$$\tilde{t}'(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C'_m \delta\left(u - \frac{m}{d}, v\right) \quad ,$$

Por otro lado, en virtud de la Ec.(2-65), para el espectro de  $t_{1/4}(x)$  se tiene

$$\bar{t}_{1/4}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(-i \frac{\pi}{2} m^2\right) \delta\left(u - \frac{m}{d}, v\right) ,$$

donde, según la Ec.(2-67), los coeficientes  $C_m$  son  $C_m = \text{sen}(\pi m/2)/\pi m$ . De estas expresiones y la Ec.(2-70) se concluye que

$$C'_m = (i+1) C_m \exp\left(-i \frac{\pi}{2} m^2\right) .$$

Para el patrón de Fresnel de índice  $q$  de la red de fase, la Ec.(2-66) proporciona la relación

$$t'_q(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C'_m \exp(-i2\pi m^2 q) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) ,$$

que, teniendo en cuenta la anterior expresión para  $C'_m$ , se puede reescribir como

$$\begin{aligned} t'_q(x) &= (i+1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(-i \frac{\pi}{2} m^2\right) \exp(-i2\pi m^2 q) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = \\ &= (i+1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left[-i2\pi m^2 \left(q + \frac{1}{4}\right)\right] \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) . \end{aligned}$$

El sumatorio del segundo miembro de esta ecuación no es más que  $t_{q+1/4}(x)$ , por lo que finalmente resulta

$$t'_q(x) = (i+1) t_{q+1/4}(x) ,$$

o, considerando la irradiancia

$$|t'_q(x)|^2 = 2 |t_{q+1/4}(x)|^2 .$$

El patrón de Fresnel de índice  $q$  de esta red de fase proporciona, por tanto, una distribución de irradiancia semejante a la del patrón de índice  $q+1/4$  de la red de Ronchi. En particular para  $q=1/4$ , se obtiene

$$t'_{1/4}(x) = (i+1) t_{0.5}(x) = (i+1) t\left(x \pm \frac{d}{2}\right) ,$$

y resulta una distribución de irradiancia análoga a la de una red de Ronchi y, por tanto, de visibilidad unidad. En virtud de las propiedades de simetría y periodicidad, todos los patrones de Fresnel de una red binaria de fase, cuadrada y de modulación  $\pi/2$ , caracterizados por un índice  $Q+q$ , con  $q=1/4$  ó  $3/4$  y  $Q$  entero, son patrones binarios de alto contraste. Con iluminación plana, estos patrones se localizan a mitad de camino entre cada par de autoimágenes sucesivas. El primero de ellos aparece, por tanto, a una distancia  $z_T/4$  de la red.

Para comprobar experimentalmente la existencia de estos patrones de visibilidad unidad se ha montado el sistema óptico que se describe a continuación. En un extremo de un banco triangular, de tipo Galileo, de 1m de longitud se situó un láser de He-Ne de 5mW de potencia y a continuación un filtro espacial constituido por un objetivo 40x y un estenope —o "pinhole"— de  $5\mu\text{m}$  de diámetro, que actuaba como fuente puntual cuasi-monocromática. El haz esférico emergente iluminaba la red 1-D de fase y un microscopio de pocos aumentos permitía observar la luz difractada por ésta.

Las fotografías de la Fig.2-6 corresponden a algunos de los resultados experimentales obtenidos con una red de período  $d=(0'253\pm 0'001)\text{mm}$ . La distancia fuente-transparencia era  $z=16'02\text{cm}$ , por lo que para la primera autoimagen negativa de la red ( $Q=0$ ,  $q=1/2$ ), según las Ecs.(2-57) y (2-58), se tiene  $R=27'43\text{cm}$ . La Fig.2-6a muestra la distribución de irradiancia de este patrón. En estas condiciones a una distancia  $R=7'39\text{cm}$  se localizaba el patrón de índice  $q=1/4$  ( $Q=0$ ) de la red, Fig.2-6b. Obsérvese que este patrón es de alto contraste, tal y como predice la teoría previamente expuesta, y que en él son visibles ciertas imperfecciones de la estructura de la red.

Para el registro de las redes de fase empleadas en la experiencia anterior se ha utilizado, como medio fotosensible, una fotorresina negativa (KPR-Kodak). Ésta se depositaba sobre una placa de vidrio y mediante una copia por contacto, a partir de una red de amplitud, binaria y cuadrada, se grababa en ella la estructura 1-D. El tiempo de exposición era el adecuado para obtener un salto de fase de valor  $\pi/2$  para la luz del láser de He-Ne ( $\lambda=632'8\text{nm}$ ).

Consideremos ahora el caso en el que la transparencia objeto sea una red de difracción bidimensional rectangular separable, es decir, aquélla cuya transmitancia en amplitud  $t(x,y)$  puede expresarse como el producto de las de dos redes 1-D cruzadas en ángulo recto. Para esta red  $t(x,y)=t_1(x)t_2(y)$ , siendo  $t_1$  y  $t_2$  las transmitancias de las redes 1-D, que se pueden expresar, análogamente a la Ec.(2-63), como

$$t_1(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d_1}\right) , \quad (2-71a)$$

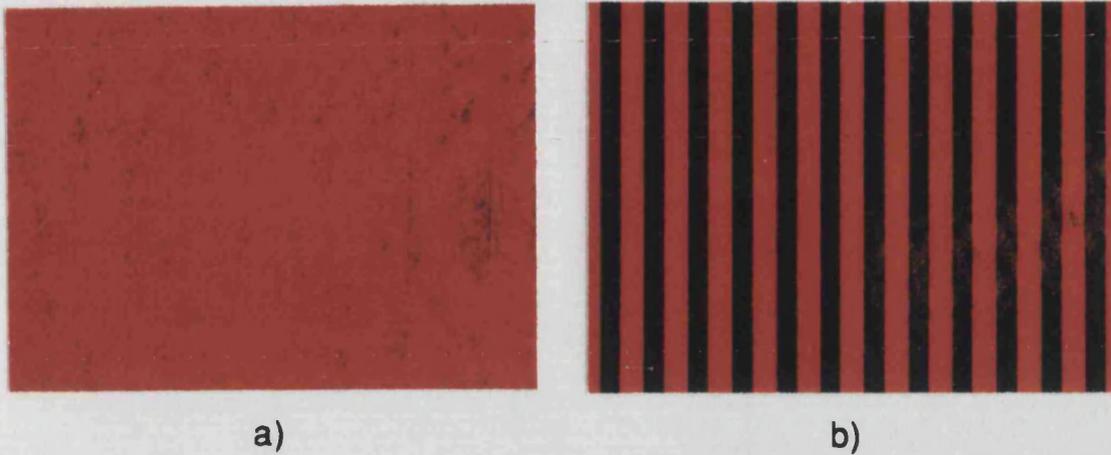


Fig. 2-6. Algunas de las distribuciones de irradiancia del campo difractado por una red de fase binaria, cuadrada y escalón  $\pi/2$  iluminada por una onda esférica: a) primera autoimagen negativa,  $Q=0$  y  $q=0.5$ , de la red. Nótese que, al igual que la red, tiene visibilidad prácticamente nula. b) El patrón de Fresnel de índice  $Q=0$  y  $q=1/4$  proporciona una distribución de irradiancia semejante a la de una red de Ronchi.

$$y \quad t_2(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \exp\left(i2\pi n \frac{y}{d_2}\right) , \quad (2-71b)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son sus respectivos períodos espaciales.

Puesto que la transmitancia  $t(x,y)$  de la red,

$$t(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d_1}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \exp\left(i2\pi n \frac{y}{d_2}\right) , \quad (2-72)$$

es una función separable, para su patrón de Fresnel de índice  $\alpha$ , según la Ec.(2-25), se tiene

$$t_\alpha(x,y) \propto t_{1\alpha}(x) t_{2\alpha}(y) ,$$

donde  $t_{1\alpha}$  y  $t_{2\alpha}$  son los patrones de Fresnel de índice  $\alpha$  de cada red 1-D. Al igual que en la Ec. (2-53), interesa caracterizar estos patrones monodimensionales mediante los parámetros  $p$  y  $r$  definidos a través de las relaciones

$$\alpha = 2(Q_1+p) \frac{d_1^2}{\lambda} , \quad (2-73a)$$

$$y \quad \alpha = 2(Q_2+r) \frac{d_2^2}{\lambda} , \quad (2-73b)$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son enteros y  $p$  y  $r$  pertenecen al intervalo  $[0,1[$ . De este modo, para el patrón de índice  $\alpha$  de la red 2-D resulta

$$t_\alpha(x,y) \propto t_{1p}(x) t_{2r}(y) \quad ,$$

donde, por analogía con la Ec.(2-66), se tiene

$$t_{1p}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \exp(-i2\pi m^2 p) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d_1}\right) \quad ,$$

$$\text{y } t_{2r}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \exp(-i2\pi n^2 r) \exp\left(i2\pi n \frac{y}{d_2}\right) \quad .$$

Por tanto, en el plano caracterizado por el índice  $\alpha$ , se localizan simultáneamente y cruzados en ángulo recto el patrón de índice  $(Q_1+p)$  de la red de período  $d_1$  y el de índice  $(Q_2+r)$  de la red de período  $d_2$ . Obviamente estos índices no son independientes sino que, tal y como indican las Ecs.(2-73), satisfacen la condición

$$2(Q_1+p) \frac{d_1^2}{\lambda} = 2(Q_2+r) \frac{d_2^2}{\lambda} \quad ,$$

de donde se obtiene

$$Q_1+p = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 (Q_2+r) = \gamma^2 (Q_2+r) \quad , \quad (2-74)$$

si se define  $\gamma$  para que  $d_2 = \gamma d_1$ .

Para asegurar la existencia de autoimágenes de la red 2-D es necesario que para alguna de sus figuras de Fresnel los dos patrones 1-D que la componen sean autoimágenes. Puesto que las autoimágenes positivas de una red 1-D están caracterizadas por un índice  $Q+q$  entero, se obtendrá una autoimagen de la red 2-D si se satisface la Ec.(2-74) con  $Q_1+p$  y  $Q_2+r$ , simultáneamente, enteros. Esta condición implica  $\gamma^2 = k_1/k_2$  con  $k_1$  y  $k_2$  números enteros. Por tanto, solamente para las redes 2-D cuya relación de períodos sea igual a la raíz cuadrada de un número racional se obtienen autoimágenes bidimensionales. En este caso, expresando  $\gamma^2$  como una fracción irreducible,

$$\gamma^2 = \frac{K}{L} \quad , \quad (2-75)$$

las posiciones de las autoimágenes 2-D vienen determinadas por la relación

$$\alpha = 2k \frac{Kd_1^2}{\lambda} = 2k \frac{Ld_2^2}{\lambda} , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-76)$$

Por tanto, los planos de autoimagen de la red 2-D rectangular coinciden con los de una red 1-D de período  $d$  dado por

$$d = \sqrt{K}d_1 = \sqrt{L}d_2 . \quad (2-77)$$

También ahora se puede expresar, al igual que para el resto de objetos de Montgomery, el parámetro  $\alpha$  que caracteriza cada una de las figuras de difracción de Fresnel de la red 2-D, en función de la distancia de Talbot de ésta. De este modo, se tiene

$$\alpha = 2(Q+q) \frac{d^2}{\lambda} ,$$

y con la ayuda de las Ecs.(2-73) y (2-77), resulta que la relación que hay entre el índice  $Q+q$  que caracteriza cada patrón de la red 2-D y los índices  $Q_1+p$  y  $Q_2+r$  de los patrones monodimensionales que lo componen es

$$Q_1+p = K(Q+q) ,$$

$$y \quad Q_2+r = L(Q+q) .$$

Como fácilmente se deduce de las ecuaciones anteriores, las dos estructuras unidimensionales que forman los patrones 2-D de índice  $q=0'5$  son siempre autoimágenes —bien negativas ámbas o bien una negativa y otra positiva— de las respectivas redes 1-D. Así, si  $K$  es par y  $L$  es impar, el patrón 2-D de índice  $q=0'5$  se compone de una autoimagen positiva de la red  $t_1$  ( $p=0$ ) y de una autoimagen negativa de la red  $t_2$  ( $r=0'5$ ). La situación contraria,  $p=0'5$  y  $r=0$ , se da cuando  $K$  es impar y  $L$  par. Por último, si ambos enteros son impares las dos autoimágenes 1-D son negativas. Por tanto, obviando los posibles desplazamientos laterales de medio período que puedan presentar, estos patrones son idénticos a la red 2-D, por lo que los denominaremos también autoimágenes. Reservaremos, no obstante, el calificativo de positivas para las autoimágenes que satisfacen la Ec.(2-76). De este modo, al igual que en el caso monodimensional, el conjunto de autoimágenes de la red 2-D está caracterizado por un índice  $Q+q$  entero o semientero. Obsérvese que para una red 2-D cuadrada ( $\gamma=1 \rightarrow K=L=1$ ), los patrones 1-D que componen cada patrón de Fresnel 2-D tienen el

mismo índice que éste, es decir,  $Q_1+p=Q_2+r=Q+q$ . Por lo tanto, cuando  $Q+q$  es un número semientero la autoimagen 2-D está formada por dos autoimágenes negativas, por lo que podemos denominar a estos patrones autoimágenes 2-D negativas. Así, para una red 2-D cuadrada se obtiene una autoimagen en todos los planos donde una cualquiera de las redes lineales que la constituyen genera una autoimagen. Consideremos, ahora, la red 2-D cuadrada que se obtiene al superponer en ángulo recto dos redes lineales de fase como la representada por la Ec.(2-69). Recordando que los patrones de Fresnel de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$  de una de estas redes son binarios y de contraste unidad, se concluye que el objeto 2-D de fase considerado genera, por difracción, redes 2-D binarias de máximo contraste en los planos caracterizados por los valores anteriores de  $q$ . El hecho de que una red 2-D rectangular sea un objeto de Montgomery única y exclusivamente cuando  $\gamma^2=K/L$  se puede entender, de manera alternativa, desde el punto de vista frecuencial. Haciendo uso del teorema relativo a la transformada de Fourier de un producto, el espectro de Fourier de la red 2-D rectangular es la convolución de los de las redes 1-D que la constituyen, es decir,

$$\tilde{t}(u,v) = \tilde{t}_1(u,v) * \tilde{t}_2(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) \quad (2-78)$$

La distancia  $\rho$  de un orden de difracción genérico  $(m,n)$  al origen de coordenadas es

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{m}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{d_2}\right)^2} ,$$

y teniendo en cuenta que  $d_2=\gamma d_1$  y la Ec.(2-75), resulta

$$\rho = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{d_1} = \sqrt{Km^2 + Ln^2} \frac{1}{\sqrt{K} d_1} , \quad m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-79)$$

Para cualquier valor de  $m$  y  $n$ , el número bajo el signo de la raíz es entero, por lo que tomando  $\rho_1=1/\sqrt{K} d_1$  y teniendo en cuenta la Ec.(2-61), se concluye que  $\rho$  es el radio de un anillo de Montgomery. El parámetro  $d$  que determina la localización de las autoimágenes es, como sabemos, el que proporciona la Ec.(2-77).

Consideremos, ahora, una red 2-D rectangular no separable. La transmitancia en amplitud  $t(x,y)$  de esta red viene dada por

$$t(x,y) = c(x,y) * \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md_1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - nd_2) \right] , \quad (2-80)$$

donde  $c(x,y)$  es la celda unidad de la red y el término entre corchetes corresponde a la red de puntos donde se repite ésta. La función  $t(x,y)$  es periódica en las direcciones  $x$  e  $y$ , siendo los períodos respectivos  $d_1$  y  $d_2$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $c(x,y)$  es nula fuera de un rectángulo de lados  $d_1$  y  $d_2$  —por ejemplo, el definido por el intervalo bidimensional  $]-d_1/2, d_1/2[ \times ]-d_2/2, d_2/2[$ . La transformada de Fourier de este objeto es

$$\tilde{t}(u,v) = \tilde{c}(u,v) \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi m d_1 u) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi n d_2 v) \right] \quad (2-81)$$

Haciendo uso de la identidad [II-45]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi n d u) = \frac{1}{|d|} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{n}{d}\right) \quad (2-82)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u,v) &= \frac{\tilde{c}(u,v)}{d_1 d_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{n}{d_2}\right) = \\ &= \frac{\tilde{c}(u,v)}{d_1 d_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}(m/d_1, n/d_2)}{d_1 d_2} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) \quad (2-83) \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $C_{mn}$  que modulan cada uno de los órdenes de difracción del espectro del objeto vienen dados por

$$C_{mn} = \frac{\tilde{c}(m/d_1, n/d_2)}{d_1 d_2} \quad (2-84)$$

Estos factores de peso son, en general, diferentes de los que modulan los órdenes de difracción del espectro de una red 2-D separable, Ec.(2-78). Sin embargo, las frecuencias espaciales de ambos objetos son iguales, por lo que la condición necesaria y suficiente para que una red 2-D rectangular no separable proporcione autoimágenes es, también,

que la razón entre sus períodos,  $d_2/d_1$ , sea igual a la raíz cuadrada de un número racional. El parámetro que determina la distancia de Talbot de la red viene dado, de nuevo, por la Ec.(2-77).

La Ec.(2-80) es válida también para las redes 2-D rectangulares separables. En esta situación particular, la función  $c(x,y)$  es una función separable en coordenadas cartesianas, es decir,

$$c(x,y) = a_1(x)a_2(y) \quad ,$$

por lo que la Ec.(2-80) se puede reescribir como

$$t(x,y) = \left[ a_1(x) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md_1) \right] \left[ a_2(y) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - nd_2) \right] = t_1(x)t_2(y) \quad , \quad (2-85)$$

siendo

$$t_1(x) = a_1(x) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md_1) \quad , \quad (2-86a)$$

$$y \quad t_2(y) = a_2(y) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - nd_2) \quad , \quad (2-86b)$$

las estructuras unidimensionales que componen la red 2-D.

Ahora la Ec.(2-81) se convierte en

$$\tilde{f}(u,v) = \left[ \tilde{a}_1(u) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi md_1 u) \right] \left[ \tilde{a}_2(v) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi nd_2 v) \right] \quad ,$$

donde se ha tenido en cuenta que la transformada de Fourier 2-D de una función separable es igual al producto de las transformadas 1-D de las funciones unidimensionales que la componen.

Como, en este caso, los coeficientes  $C_{mn}$  de la Ec.(2-84) se reducen a  $C_{mn} = A_{1m} A_{2n}$ , siendo

$$A_{1m} = \frac{\tilde{a}_1(m/d_1)}{d_1} \quad , \quad (2-87a)$$

$$y \quad A_{2n} = \frac{\tilde{a}_2(n/d_2)}{d_2} \quad , \quad (2-87b)$$

la Ec.(2-83) se transforma en

$$\tilde{t}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) .$$

Esta expresión coincide, como era de esperar, con la Ec.(2-78) ya que los coeficientes de las Ecs.(2-87) son, como vamos a demostrar, iguales a los de las Ecs.(2-71). En efecto, considerando por ejemplo  $A_{1m}$ , a partir de la definición de la transformada de Fourier de  $a_1(x)$  resulta

$$A_{1m} = \frac{1}{d_1} \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x) \exp\left(-i2\pi m \frac{x}{d_1}\right) dx ,$$

y teniendo en cuenta que  $a_1(x)$  es nula fuera del intervalo  $\left] -\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2} \right[$ , se obtiene

$$A_{1m} = \frac{1}{d_1} \int_{-d_1/2}^{d_1/2} a_1(x) \exp\left(-i2\pi m \frac{x}{d_1}\right) dx ,$$

que es la definición de los coeficientes de un desarrollo en serie de Fourier.

Obsérvese por tanto que las Ecs.(2-71) y (2-86) proporcionan dos maneras alternativas de expresar una función 1-D periódica. Para una red 2-D rectangular cualquiera, haciendo un desarrollo bidimensional en serie de Fourier se obtiene, del mismo modo, la expresión alternativa a la Ec.(2-80); a saber,

$$t(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp\left[i2\pi\left(m \frac{x}{d_1} + n \frac{y}{d_2}\right)\right] , \quad (2-88)$$

donde los coeficientes  $C_{mn}$  vienen dados por la Ec.(2-84).

Como sabemos, los patrones de Fresnel de índice  $Q+q$  semi-impar de una red rectangular separable que genera autoimágenes son, a su vez, réplicas, en general desplazadas lateralmente, de la red 2-D. Veámos que este resultado es válido también para las redes no separables. En virtud de la periodicidad longitudinal basta con considerar el caso  $Q+q=0'5$ . Según la Ec.(2-54), el espectro de Fourier de este patrón se obtiene, a partir del espectro del objeto, sin más que modificar la fase de cada orden  $(m,n)$  en la cantidad

$$\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda(Q+q)z_T] = \exp[-i\pi\rho^2\lambda z_T/2] = \exp[-i\pi(Km^2+Ln^2)] ,$$

donde se han tenido en cuenta las Ecs.(2-79) y (2-77) a la hora de valorar  $\rho$  y la distancia de Talbot,  $z_T=2d^2/\lambda$ , del objeto. De este modo, considerando la Ec.(2-83), la función  $\tilde{t}_{0,5}(u,v)$  se reduce a

$$\tilde{t}_{0,5}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp[-i\pi(Km^2+Ln^2)] \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) . \quad (2-89)$$

De los tres casos posibles para los valores de  $K$  y  $L$  consideremos, por ejemplo, el correspondiente a  $K$  y  $L$  impares. Para esta situación, la Ec.(2-89) se convierte en

$$\tilde{t}_{0,5}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} (-1)^{m+n} \delta\left(u - \frac{m}{d_1}, v - \frac{n}{d_2}\right) ,$$

por lo que, realizando una transformada de Fourier inversa, se tiene

$$\begin{aligned} t_{0,5}(x,y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} (-1)^{m+n} \exp\left[i2\pi\left(m \frac{x}{d_1} + n \frac{y}{d_2}\right)\right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp\left[i2\pi\left(m \frac{x \pm (d_1/2)}{d_1} + n \frac{y \pm (d_2/2)}{d_2}\right)\right] . \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la Ec.(2-88) se obtiene

$$t_{0,5}(x,y) = t\left(x \pm \frac{d_1}{2}, y \pm \frac{d_2}{2}\right) .$$

Por lo tanto, en este caso el patrón de Fresnel de índice  $q=0,5$  de la red 2-D es igual a ésta, pero con un desplazamiento lateral de medio período en las direcciones  $x$  e  $y$ . La extensión de este resultado a los otros dos casos posibles ( $K$  par,  $L$  impar y  $K$  impar,  $L$  par) es inmediata y como conclusión se tiene que, al igual que para las redes separables, todos los patrones de Fresnel de índice  $Q+q$  entero o semi-impar de una red 2-D rectangular cualquiera (con  $\gamma^2=K/L$ ) son réplicas de la red.

En alguna de las aplicaciones del efecto Lau que se exponen en el Capítulo V se utilizan redes 2-D oblicuas separables como transparencia objeto. Por esta razón, vamos a estudiar ahora bajo qué condiciones una de estas redes genera autoimágenes.

En la Fig.2-7 se representa una red 2-D constituida por dos redes 1-D de igual período,  $d$ , superpuestas formando un ángulo  $\theta$  entre ellas. La transmitancia en amplitud de la red de líneas paralelas al eje  $y$  es

$$t_1(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right),$$

y la de la otra red, de líneas paralelas al eje  $y'$ , es

$$t_2(x') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \exp\left(i2\pi n \frac{x'}{d}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \exp\left(i2\pi n \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{d}\right),$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación del cambio de coordenadas  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$  ( $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$ ).

La transmitancia en amplitud de la red compuesta es, por tanto,

$$t(x,y) = t_1(x)t_2(x') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} \exp\left(i2\pi \frac{x(m + n \cos \theta) + y n \sin \theta}{d}\right), \quad (2-90)$$

y su espectro de Fourier

$$\tilde{t}(u,v) = \tilde{t}_1(u,v) * \tilde{t}_2(u,v) =$$

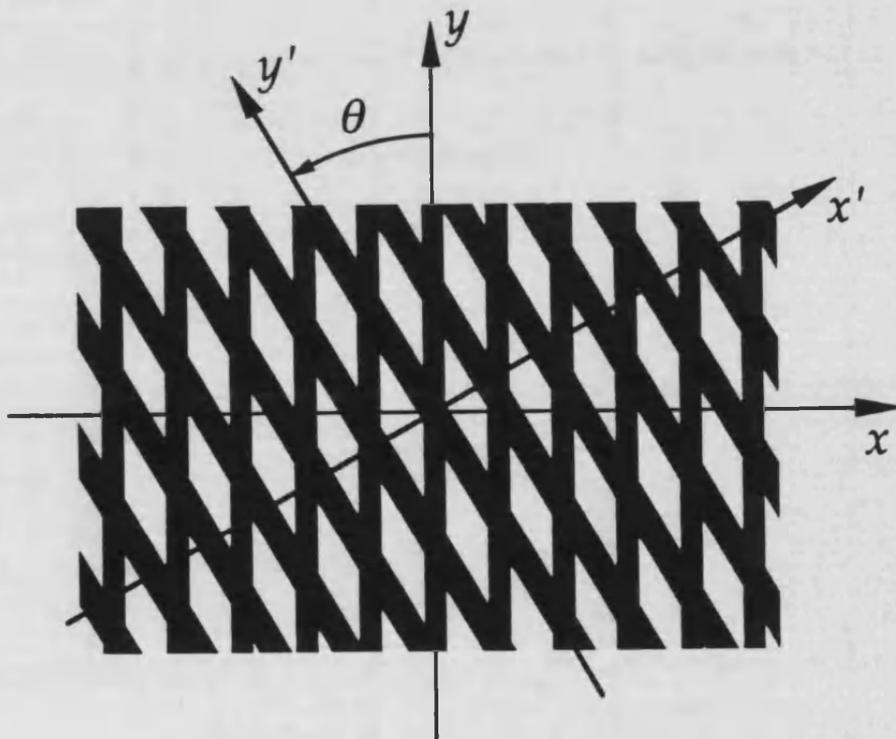


Fig. 2-7. Red 2-D oblicua separable compuesta por dos redes lineales del mismo período,  $d$ , giradas entre sí un ángulo  $\theta$  ( $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ,  $\theta \neq 0^\circ$ ). El ángulo  $\theta$  de la figura es positivo. El sistema de coordenadas  $(x,y)$  se ha tomado con el eje  $y$  paralelo a las líneas de una de las redes y el sistema  $(x',y')$ , girado un ángulo  $\theta$  respecto al anterior, con el eje  $y'$  paralelo a las líneas de la otra red. Las dos redes lineales no tienen, necesariamente, el mismo perfil.

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \delta\left(u - \frac{m}{d}, v\right) \right] * \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \delta\left(u - \frac{n \cos \theta}{d}, v - \frac{n \sin \theta}{d}\right) \right] = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} \delta\left(u - \frac{m + n \cos \theta}{d}, v - \frac{n \sin \theta}{d}\right) . \quad (2-91)
\end{aligned}$$

La frecuencia espacial  $(u, v)$  de un orden de difracción genérico  $(m, n)$  de la red 2-D es

$$(u, v) = \left( \frac{m + n \cos \theta}{d}, \frac{n \sin \theta}{d} \right) , \quad (2-92)$$

por lo que la distancia  $\rho$  de este orden al origen de coordenadas viene dada por

$$\rho = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mncos\theta}}{d} . \quad (2-93)$$

Tomando como radio del primer anillo de Montgomery de la red 2-D la frecuencia fundamental de las redes 1-D que la constituyen,  $\rho_1 = 1/d$ , los órdenes de difracción caerán sobre anillos de Montgomery, véase la Ec.(2-61), si para cualquier valor de  $m$  y  $n$  la cantidad bajo el signo de la raíz es un número natural. Para ello, basta con que  $2mncos\theta$  sea un número entero para cualquier valor de  $m$  y  $n$ .

En este caso, las soluciones posibles en el intervalo de interés, son únicamente:

a)  $\cos\theta=0 \leftrightarrow \theta=90^\circ$ . Para esta situación  $\rho = \sqrt{m^2+n^2} \rho_1$ . Esta solución corresponde a una red 2-D cuadrada y ya ha sido tratada previamente.

b)  $\cos\theta=\pm 1/2 \leftrightarrow \theta=\pm 60^\circ$ . Para esta situación  $\rho = \sqrt{m^2+n^2 \pm mn} \rho_1$  respectivamente. Esta solución corresponde a una red 2-D hexagonal.

Sólo para estas orientaciones privilegiadas una red 2-D oblicua separable es un objeto de Montgomery con distancia de Talbot igual a la de las redes 1-D que la constituyen. Ahora bien, hay otros valores del ángulo  $\theta$  para los que la red 2-D es un objeto de Montgomery de distancia de Talbot múltiplo de la de las redes 1-D [II-46]. Si se toma como frecuencia fundamental, la cantidad

$$\rho'_1 = \frac{1}{\sqrt{M} d} , \quad M = 1, 2, 3, \dots, \quad (2-94)$$

la Ec.(2-93) se convierte en

$$\rho = \sqrt{M(m^2+n^2+2mncos\theta)} \rho'_1 .$$

Ahora la red 2-D considerada generará autoimágenes si  $2Mmncos\theta$  es un número entero para cualquier valor de  $m$  y  $n$ . Las orientaciones  $\theta$  que satisfacen esta condición vienen dadas por

$$\cos\theta = \frac{N}{2M} \quad , \quad (2-95)$$

donde  $N=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y  $|N| < 2M$ . De este modo, resulta

$$\rho = \sqrt{M(m^2 + n^2) + Nm n} \quad \rho'_1 \quad , \quad (2-96)$$

y, por tanto, todos los órdenes de difracción de la red 2-D caen sobre anillos de Montgomery. Obsérvese que, como el radio  $\rho'_1$  del primer anillo de Montgomery viene dado por la Ec.(2-94), la distancia de Talbot  $z'_T$  de la red 2-D es

$$z'_T = 2M \frac{d^2}{\lambda} = M z_T \quad , \quad (2-97)$$

siendo  $z_T$  la distancia de Talbot de las redes 1-D. Nótese, también, que si el quebrado  $N/M$  no es irreducible, es decir,  $N/M = N'/M'$  con  $|N| < |N'|$  y  $M < M'$  la frecuencia fundamental de la red 2-D es  $\rho'_1 = 1/\sqrt{M'} d$  y, por tanto, su distancia de Talbot es  $z'_T = M' z_T$  y no  $M z_T$ .

En definitiva, dos redes de difracción lineales del mismo período  $d$ , de perfil cualquiera, superpuestas generan autoimágenes bidimensionales siempre que el ángulo  $\theta$  entre sus líneas satisfaga la Ec.(2-95) para alguna pareja de números enteros  $N$  y  $M$  ( $M > 0$ ) primos entre sí, con  $2M < N < 2M$ . Además, las posiciones de las autoimágenes coinciden con las de una red lineal de período  $d' = \sqrt{M} d$ .

Obsérvese que para un valor fijo del entero  $M$  existen  $4M-1$  orientaciones para las que la red 2-D que se obtiene genera autoimágenes. Entre ellas, siempre se encuentra la correspondiente a la red 2-D cuadrada ( $N=0 \rightarrow \theta=0^\circ$ ). Además si para un valor  $\theta$  se satisface la Ec.(2-95), también se cumple para el valor  $-\theta$  y, por tanto, la red de esta orientación genera a su vez autoimágenes.

Veamos ahora un dispositivo experimental compacto que permite verificar, de una manera sencilla, los resultados anteriores. Tal y como se representa en la Fig.2-8, se ilumina una red 1-D de período  $d$  con una onda plana monocromática. En uno de sus planos de autoimagen —por ejemplo, en el de su primera autoimagen negativa— se sitúa otra red del mismo período pero con sus líneas giradas respecto a las de aquélla un ángulo  $\theta$ . De este modo, la distribución de amplitud en dicho plano es equivalente a la de una red 2-D oblicua iluminada por una onda plana. En el plano de observación, separado de la segunda red lineal una distancia,  $Mz_T$ , múltiplo de la distancia de Talbot de ambas redes, se obtendrán autoimágenes de esta estructura

bidimensional siempre que el ángulo  $\theta$  entre las dos redes 1-D verifique la Ec.(2-95) para alguno de los posibles valores de  $N$ . Por lo tanto, si a partir de la situación en que las dos redes tienen sus líneas paralelas se gira lentamente una de ellas, por ejemplo la segunda, en el plano de observación se obtienen, sucesivamente, las distintas autoimágenes 2-D posibles para el valor de  $M$  elegido.

Utilizando este dispositivo se han realizado las fotografías que se muestran en la Fig.2-9, que corresponden a las autoimágenes 2-D que se obtienen para  $M=3$ . Para ello se emplearon dos redes de Ronchi iguales de período  $d=0'191mm$ . Para esta situación, a partir de la Ec.(2-95) se obtiene, dando valores a  $N$  crecientes en módulo, que los valores posibles de  $\theta$  son  $90^\circ$ ,  $\pm 80'4^\circ$ ,  $\pm 70'5^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$ ,  $\pm 48'2^\circ$  y  $\pm 33'6^\circ$ . En la Fig.2-9 se muestran los resultados experimentales correspondientes a los valores positivos de  $\theta$ .

Consideremos de nuevo una red 2-D para la cual el ángulo  $\theta$  verifica la Ec.(2-95) para ciertos valores enteros  $M$  y  $N$  primos entre sí. Las autoimágenes de esta red, al igual que las del resto de objetos de Montgomery, se caracterizan por un índice  $Q+q$  entero. Estudiemos ahora, bajo qué condiciones los patrones de Fresnel de esta red de índice  $q=0'5$  son autoimágenes —negativas— de ella. Para uno de estos patrones, por ejemplo el de índice  $Q+q=0'5$ , la función de transferencia para la propagación libre modifica, de acuerdo con la Ec.(2-54), la fase de cada orden  $(m,n)$  en la cantidad

$$\exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda(Q+q)z_T] = \exp\left(-i\pi\rho^2\lambda\frac{z_T}{2}\right) .$$

Teniendo en cuenta las Ecs.(2-96), (2-94) y (2-97), se obtiene

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\pi\rho^2\lambda\frac{z_T}{2}\right) &= \exp\left\{-i\pi[M(m^2+n^2)+Nmn]\right\} = \\ &= \exp[-i\pi M(m^2+n^2)] \exp(-i\pi Nmn) = \exp[-i\pi M(m^2+n^2)] (-1)^{Nmn} = \end{aligned}$$

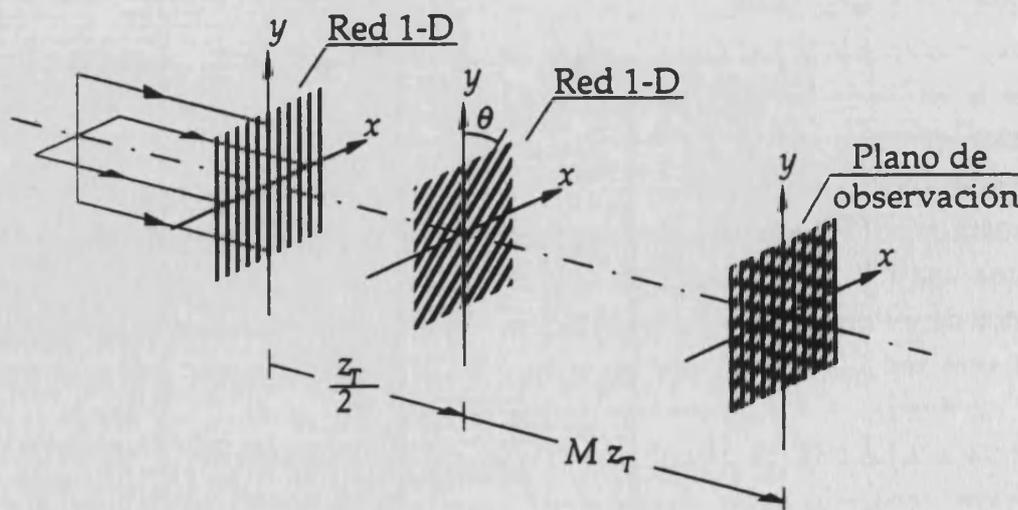
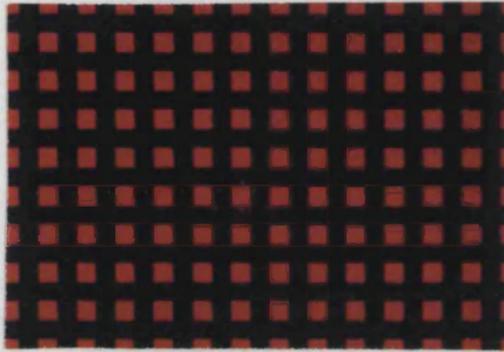


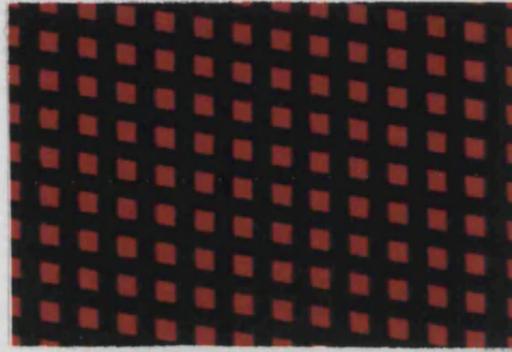
Fig. 2-8. Esquema del dispositivo experimental utilizado para comprobar para qué orientaciones  $\theta$  una red 2-D oblicua genera autoimágenes.

$$= (-1)^{M(m+n)} (-1)^{Nmn} .$$

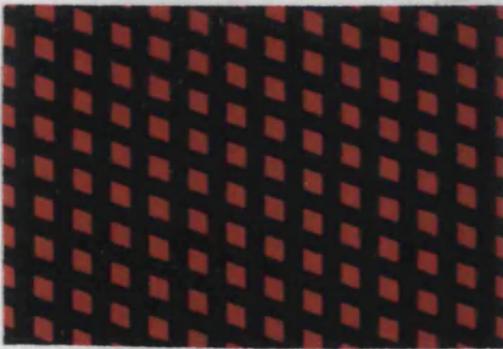
El espectro de Fourier de este patrón,  $\tilde{t}_{0.5}(u,v)$ , es por tanto



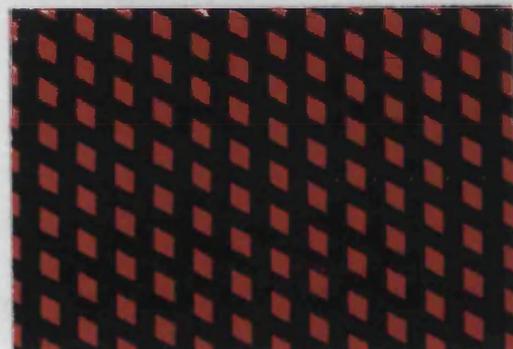
a)



b)



c)



d)



e)



f)

Fig. 2-9. Autoimágenes 2-D correspondientes al caso  $M=3$  ( $N \geq 0$ ). Las fotografías se obtuvieron utilizando el dispositivo experimental de la Fig.2-8. Los valores de  $N$  y  $\theta$  son: a)  $N=0 \rightarrow \theta=90^\circ$ , b)  $N=1 \rightarrow \theta=80'4''$ , c)  $N=2 \rightarrow \theta=70'5''$ , d)  $N=3 \rightarrow \theta=60^\circ$ , e)  $N=4 \rightarrow \theta=48'2''$ , f)  $N=5 \rightarrow \theta=33'6''$ . La discrepancia entre los valores teóricos y los experimentales es, en todos los casos, menor que  $0'2''$ .

$$\tilde{t}_{0.5}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{Nmn} (-1)^{M(m+n)} \delta\left(u - \frac{m+n\cos\theta}{d}, v - \frac{n\sin\theta}{d}\right). \quad (2-98)$$

Haciendo una transformación de Fourier inversa se obtiene

$$\begin{aligned} t_{0.5}(x,y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{Nmn} (-1)^{M(m+n)} \exp\left(i2\pi \frac{x(m+n\cos\theta) + yn\sin\theta}{d}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{Nmn} (-1)^{M(m+n)} \exp\left[i2\pi \frac{mx + n(x\cos\theta + y\sin\theta)}{d}\right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{Nmn} (-1)^{M(m+n)} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right). \end{aligned} \quad (2-99)$$

Analicemos en función de los valores de  $N$  y  $M$  el perfil de  $t_{0.5}(x,y)$ . Puesto que  $N$  y  $M$  son números primos entre sí, los casos posibles son que ambos enteros sean impares o que uno de ellos sea par y el otro impar. Cuando  $N$  es un número par, y por tanto  $M$  impar, se tiene que  $(-1)^{Nmn}=1$  y que  $(-1)^{M(m+n)}=(-1)^{m+n}$ , por lo que la Ec.(2-99) se reduce a

$$\begin{aligned} t_{0.5}(x,y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{m+n} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} (-1)^m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} (-1)^n \exp\left(i2\pi n \frac{x'}{d}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \exp\left(i2\pi m \frac{x \pm d/2}{d}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} \exp\left(i2\pi n \frac{x' \pm d/2}{d}\right) = \\ &= t_1\left(x \pm \frac{d}{2}\right) t_2\left(x' \pm \frac{d}{2}\right). \end{aligned} \quad (2-100)$$

La distribución de amplitud de este patrón es por tanto idéntica a la de la red 2-D oblicua salvo por el desplazamiento lateral de medio período de las redes 1-D que componen la estructura bidimensional. Estos patrones son las autoimágenes negativas de la red 2-D. Así resulta que para aquellas orientaciones que verifican la Ec.(2-95) con  $N$  par y  $M$  impar, la red 2-D resultante genera autoimágenes tanto positivas como negativas.

Cuando  $N$  es un número impar,  $(-1)^{Nmn} = (-1)^{mn}$ , y la Ec.(2-99) se convierte en

$$t_{0.5}(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{mn} (-1)^{M(m+n)} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{mn} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right), & \text{si } M \text{ es par.} \quad (2-101a) \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1m} A_{2n} (-1)^{mn} \exp\left(i2\pi \frac{m(x \pm d/2) + n(x' \pm d/2)}{d}\right), & \text{si } M \text{ es impar.} \quad (2-101b) \end{cases}$$

En este caso, el patrón  $t_{0.5}(x,y)$  es una estructura bidimensional periódica en las direcciones  $x$  y  $x'$ , pero de perfil diferente al del objeto. Por lo tanto, las redes 2-D que verifican la Ec.(2-95) con  $N$  impar, independientemente de que  $M$  lo sea o no, no generan autoimágenes negativas. Así ocurre por ejemplo con las redes 2-D con  $\alpha = \pm 60^\circ$  ( $M=1$ ,  $N \neq 1$ ). Estas redes son objetos de Montgomery de distancia de Talbot igual a la de las redes 1-D que las constituyen, pero a diferencia de éstas no generan autoimágenes negativas. Obsérvese que la red 2-D oblicua que representa la Ec.(2-101a) es la misma que la de la Ec.(2-101b) pero existe un desplazamiento relativo de medio período en las direcciones  $x$  y  $x'$  entre ambas.

En la Fig.2-10 se muestran las distribuciones de irradiancia de los patrones de índice  $q=0.5$  de las redes 2-D con  $M=3$  y ángulo  $\theta$  positivo (véase la Fig.2-9). Estas fotografías se obtuvieron con el dispositivo representado en la Fig.2-8, situando el plano de observación a una distancia  $Mz_T/2$  de la segunda red lineal. Obsérvese que de acuerdo con la teoría previa sólo se obtienen autoimágenes negativas cuando  $N$  es par ( $N=0 \rightarrow \theta=90^\circ$ ,  $N=2 \rightarrow \theta=70.5^\circ$ ,  $N=4 \rightarrow \theta=48.2^\circ$ ).

Del mismo modo que una red 2-D rectangular separable, Ec.(2-72), se puede expresar como una celda unidad que se repite en una red de puntos, Ec.(2-85), también la red 2-D oblicua de la Ec.(2-90) se puede entender como una celda unidad —los romboides de la Fig.2-7— que se repite en la red de puntos definida por los extremos de los vectores

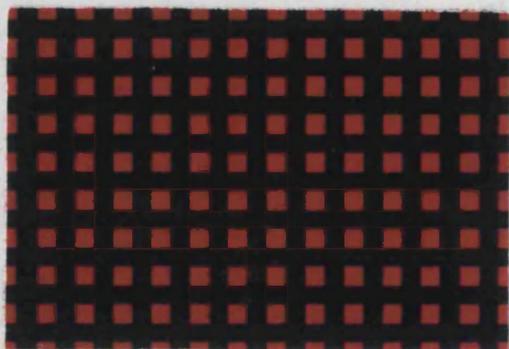
$$\vec{r} = n\vec{a} + m\vec{b}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-102)$$

donde  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  están dirigidos, respectivamente, en la dirección de los ejes  $y$  y  $y'$ , y su módulo,  $d/\text{sen}\theta$ , es igual a la separación, en dichas direcciones, entre romboides sucesivos, es decir,

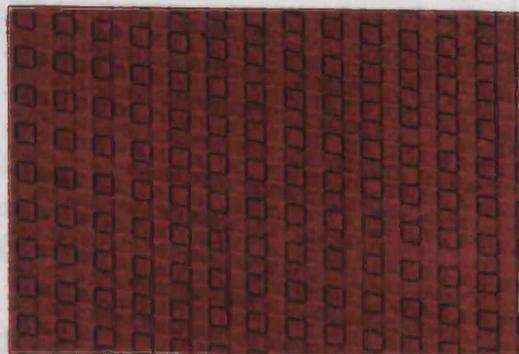
$$\vec{a} = \frac{d}{\text{sen}\theta} \vec{j}, \quad (2-103a)$$

$$y \quad \vec{b} = d \vec{i} - \frac{d}{\operatorname{tg} \theta} \vec{j} \quad , \quad (2-103b)$$

siendo  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  los vectores unitarios en la dirección de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. En la Fig.2-11 se han representado la red de puntos y la celda unidad correspondientes al objeto de la Fig.2-7. Desde este punto de vista, la transmitancia en amplitud de la



a)



b)



c)



d)



e)



f)

Fig. 2-10. Distribuciones de irradiancia de los patrones de índice  $q=0.5$  de las redes 2-D cuyas autoimágenes se muestran en la Fig.2-9.

red se expresa matemáticamente como

$$t(x,y) = c(x,y) * \Delta(x,y) \quad , \quad (2-104)$$

siendo  $c(x,y)$  la celda unidad de la red y

$$\Delta(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - md, y + m \frac{d}{\operatorname{tg}\theta} - n \frac{d}{\operatorname{sen}\theta}\right) \quad , \quad (2-105)$$

el conjunto infinito de funciones delta de Dirac de volumen unidad centradas en los puntos, definidos por la Ec.(2-102), donde se repite  $c(x,y)$ . Utilizando las propiedades de la función delta de Dirac, relativas a cambios de escala y desplazamientos laterales en su argumento,  $\Delta(x,y)$  se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \Delta(x,y) &= |\operatorname{sen}\theta| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md, x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - nd) = \\ &= |\operatorname{sen}\theta| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x' - nd) \quad . \end{aligned} \quad (2-106)$$

Tal y como indica esta ecuación las deltas de  $\Delta(x,y)$  se localizan en los puntos donde se cortan entre sí las rectas de la familia de ecuación  $x=md$  (rectas paralelas al eje  $y$ , espaciadas uniformemente) y las de ecuación  $x'=nd$  (rectas igualmente separadas, paralelas al eje  $y'$ ). Obsérvese que la función  $\Delta(x,y)$  es, según indica la Ec.(2-106),

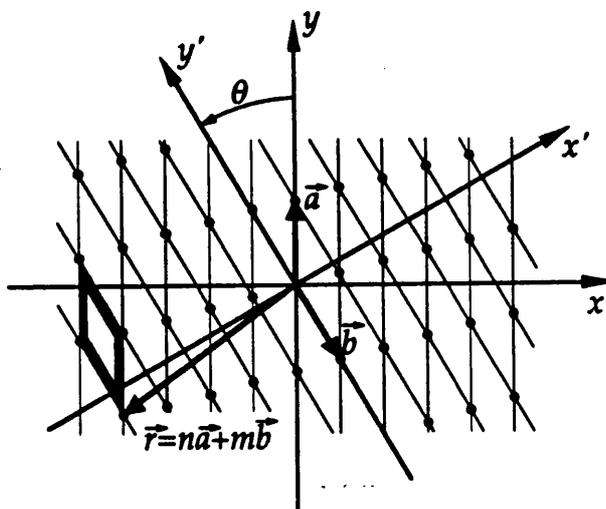


Fig. 2-11. Elementos que definen una red 2-D oblicua: celda unidad y red de puntos. La celda unidad (romboide) se repite centrada en la red de puntos de vectores elementales  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Los elementos de la figura corresponden a la red de la Fig.2-7.

separable en las direcciones  $x$  y  $x'$  en las que es periódica la red 2-D. Además, para esta red,  $c(x,y)$  es a su vez una función separable en estas direcciones,  $c(x,y)=a_1(x)a_2(x')$ , lo que justifica, desde esta perspectiva, que  $t(x,y)$  lo sea también.

Estos hechos permiten generalizar fácilmente el estudio hecho sobre el fenómeno de autoimágenes con redes 2-D oblicuas separables al caso de redes oblicuas cualesquiera, esto es, con celda unidad en general no separable. Para una de estas redes, a partir de la Ec.(2-104) y teniendo en cuenta la Ec.(2-105), se obtiene

$$\begin{aligned} t(x,y) &= c(x,y) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - md, y + m \frac{d}{\operatorname{tg}\theta} - n \frac{d}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c\left(x - md, y + m \frac{d}{\operatorname{tg}\theta} - n \frac{d}{\operatorname{sen}\theta}\right) . \end{aligned} \quad (2-107)$$

Como el espectro de Fourier de una función

$$g(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(x - m \frac{\beta_1}{D} + n \frac{\beta_2}{D}, y + m \frac{\alpha_1}{D} - n \frac{\alpha_2}{D}\right) ,$$

viene dado por [II-47]

$$\tilde{g}(u,v) = |D| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\alpha_1 n + \alpha_2 m, \beta_1 n + \beta_2 m) \delta(u - \alpha_1 n - \alpha_2 m, v - \beta_1 n - \beta_2 m) ,$$

siendo  $\beta_1, \beta_2, \alpha_1$  y  $\alpha_2$  constantes reales y  $D=\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1$ , la transformada de Fourier de  $t(x,y)$  se puede expresar como

$$\tilde{t}(u,v) = \frac{|\operatorname{sen}\theta|}{d^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}\left(n \frac{\cos\theta}{d} + \frac{m}{d}, n \frac{\operatorname{sen}\theta}{d}\right) \delta\left(u - n \frac{\cos\theta}{d} - \frac{m}{d}, v - n \frac{\operatorname{sen}\theta}{d}\right) .$$

Si se definen los coeficientes

$$C_{mn} = \frac{|\operatorname{sen}\theta|}{d^2} \tilde{c}\left(n \frac{\cos\theta}{d} + \frac{m}{d}, n \frac{\operatorname{sen}\theta}{d}\right) , \quad (2-108)$$

la relación anterior se reduce a

$$\tilde{t}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \delta\left(u - \frac{m + n\cos\theta}{d}, v - \frac{n\operatorname{sen}\theta}{d}\right) . \quad (2-109)$$

Los órdenes de difracción de esta red se localizan en las mismas posiciones que los de la red de la Ec.(2-91). Obsérvese que estas posiciones están definidas por los extremos de los vectores  $\vec{r}^k = n\vec{a}^k + m\vec{b}^k$ , siendo  $\vec{a}^k = (\cos\theta/d)\vec{i} + (\sin\theta/d)\vec{j}$  y  $\vec{b}^k = (1/d)\vec{i}$ . La red de puntos definida por los vectores  $\vec{r}^k$  es la red recíproca [II-48] de la definida por la Ec.(2-102) y los vectores  $\vec{a}^k$  y  $\vec{b}^k$  son los vectores fundamentales de la red recíproca. Para una red 2-D oblicua no separable ambas redes de puntos son iguales a las correspondientes a la red separable de igual ángulo  $\theta$  y período  $d$ . Por esta razón, la condición para que una red oblicua no separable genere autoimágenes es la misma que la obtenida para las redes separables, Ec.(2-95). En tal caso, la distancia de Talbot de la red 2-D viene dada como sabemos por la Ec.(2-97).

Haciendo una transformación de Fourier inversa, la Ec.(2-109) conduce a

$$\begin{aligned} t(x,y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp\left(i2\pi \frac{x(m + n\cos\theta) + ynsen\theta}{d}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp\left[i2\pi \frac{mx + n(x\cos\theta + ysen\theta)}{d}\right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right) . \end{aligned} \quad (2-110)$$

Esta ecuación es la generalización de la Ec.(2-90) para el caso de redes no separables. Los coeficientes  $C_{mn}$  de este desarrollo en serie vienen dados por la Ec.(2-108) y no es difícil demostrar que, al igual que ocurre para las redes rectangulares, se reducen a los de la Ec.(2-90),  $A_{1m} A_{2n}$ , cuando la función  $c(x,y)$  es separable — $c(x,y) = a_1(x)a_2(x')$ —.

Considerando estos hechos es evidente que el patrón de Fresnel de índice  $q=0.5$  de una red 2-D no separable de ángulo  $\theta$  dado por la Ec.(2-95), por analogía con la Ec.(2-99), viene dado por

$$\begin{aligned} t_{0.5}(x,y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} (-1)^{Nmn} (-1)^{M(m+n)} \exp\left[i2\pi \frac{mx + n(x\cos\theta + ysen\theta)}{d}\right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} (-1)^{Nmn} (-1)^{M(m+n)} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right) . \end{aligned}$$

Como en el caso de las redes separables, esta distribución es una autoimagen negativa de la red única y exclusivamente cuando  $N$  es un número par y  $M$  es impar. En este caso,

$$t_{0.5}(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} (-1)^{mn} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp\left[i2\pi \frac{m(x \pm d/2) + n(x' \pm d/2)}{d}\right] ,$$

y se obtiene una estructura idéntica al objeto, periódica en las direcciones  $x$  y  $x'$ , pero con un desplazamiento respecto a aquél de medio período en ambas direcciones.

Para finalizar este capítulo, vamos a considerar ahora la red 2-D oblicua de fase que se obtiene al superponer dos redes lineales como la que describe la Ec.(2-69), giradas entre sí un ángulo  $\theta$ . Supondremos que este ángulo satisface la Ec.(2-95) con valores de  $N$  y  $M$  primos entre sí, por lo que la distancia de Talbot de esta red vendrá dada por la Ec.(2-97). Queremos determinar para qué orientaciones los patrones de Fresnel de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$  de la red son, al igual que los de cada una de las dos redes lineales, binarios y de máximo contraste.

Para un patrón de Fresnel cualquiera de la red 2-D, de índice  $Q+q$ , la función de transferencia,  $\exp[-i\pi\rho^2\lambda(Q+q)z_T^2]$ , que modifica la fase de cada orden  $(m,n)$  de la red se reduce, teniendo en cuenta las Ecs.(2-96), (2-94) y (2-97), a

$$\exp[-i\pi\rho^2\lambda(Q+q)z_T^2] = \exp\{-i2\pi[M(m^2+n^2)+Nmn](Q+q)\} =$$

$$= \exp\{-i2\pi[M(m^2+n^2)+Nmn]q\} .$$

De este modo, el espectro de Fourier,  $\tilde{t}_q(u,v)$ , de este patrón viene dado, de acuerdo con las Ecs.(2-54) y (2-91), por

$$\tilde{t}_q(u,v) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ n=-\infty}}^{+\infty} C_m' C_n' \exp\{-i2\pi q M(m^2+n^2)\} \exp\{-i2\pi q N m n\} \delta\left(u - \frac{m + n \cos\theta}{d}, v - \frac{n \sin\theta}{d}\right) ,$$

donde, por ser las dos redes lineales que componen el objeto iguales, se ha sustituido por  $C_m'$  el coeficiente  $A_{1m}=A_{2m}$  de la Ec.(2-91). Los coeficientes  $C_m'$  son, claro está, los del desarrollo en serie de Fourier de una red lineal de fase, binaria, cuadrada y de salto de fase  $\pi/2$ . La distribución de amplitud del patrón de Fresnel considerado es, por tanto,

$$t_q(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_m' C_n' \exp\{-i2\pi q M(m^2+n^2)\} \exp\{-i2\pi q N m n\} \exp\left(i2\pi \frac{mx + nx'}{d}\right) ,$$

(2-111)

donde se ha tenido en cuenta que  $x \cos \theta + y \sin \theta = x'$ . Queremos determinar para qué valores de  $M$  y  $N$  esta distribución de amplitud se reduce, cuando  $q=1/4$  ó  $3/4$ , al producto de los patrones de Fresnel generados en dicho plano por las estructuras lineales que componen la red y cuándo estos patrones son, además, binarios y de visibilidad unidad. Para que se satisfaga la primera condición, para cualquier pareja de números enteros  $m$  y  $n$ , se debe de verificar que  $\exp(-i2\pi q N m n) = 1$ . Para los valores de  $q$  de interés, esta relación es equivalente a exigir que  $N$  sea un múltiplo entero de 4, es decir,

$$N = 4N' \quad , \quad N' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2-112)$$

Puesto que, por hipótesis,  $N$  y  $M$  son primos entre sí, la Ec.(2-112) implica que  $M$  debe ser un número impar. Con estas condiciones, la Ec.(2-111) se convierte en

$$t_q(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C'_m \exp(-i2\pi q M m^2) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n \exp(-i2\pi q M n^2) \exp\left(i2\pi n \frac{x'}{d}\right) .$$

Obsérvese que  $t_q(x,y)$  es una función separable en las direcciones  $x$  y  $x'$ , y que además las funciones monodimensionales que componen  $t_q(x,y)$  son iguales. Definiendo

$$t'(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C'_m \exp[-i2\pi q M m^2] \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) , \quad (2-113)$$

se tiene

$$t_q(x,y) = t'(x)t'(x') . \quad (2-114)$$

Nótese también que  $t'(x)$  es el patrón de Fresnel que generaría en el plano de interés cada una de las redes lineales de fase considerada en solitario. Puesto que el índice  $\alpha$  que caracteriza este plano es  $\alpha=(Q+q)z'_T=(Q+q)Mz_T$ , donde  $z_T$  es la distancia de Talbot de las redes lineales, para cada una de ellas el índice  $Q_1+p$  que caracteriza el plano estudiado es  $Q_1+p=(Q+q)M$ . Ahora bien como  $q=1/4$  ó  $3/4$  y  $M$  es un número impar, resulta que  $p$  es, a su vez,  $1/4$  ó  $3/4$ . En otras palabras,  $t'(x)$  es siempre, bajo estas condiciones, un patrón de índice  $p=1/4$  ó  $3/4$  de la red lineal por lo que, tal y como se demostró al principio de esta sección, tiene un perfil análogo al de una red de Ronchi.

Por lo tanto, en virtud de la Ec.(2-114), los patrones de Fresnel de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$  de la red 2-D de fase considerada son estructuras bidimensionales de máxima visibilidad (análogas a la red que resulta al superponer dos redes de Ronchi) siempre y cuando el entero  $N$  verifique la Ec.(2-112) y  $M$  sea, por tanto, impar.

Puesto que  $|N| < 2M$ , para un valor dado de  $M$  los valores de  $N$  que satisfacen la Ec.(2-112) son los correspondientes a  $N' = 0, \pm 1, \dots, \pm(M-1)/2$ . Por tanto, hay  $M$  valores de  $\theta$  para los que la red 2-D de fase genera patrones de Fresnel de contraste unidad. Entre ellos siempre se encuentra el correspondiente a la red 2-D cuadrada ( $N=0$ ). Ésta a su vez es la única solución posible para  $M=1$ . Con  $M=3$ , los valores posibles de  $N$  son 0 y  $\pm 1$  y los ángulos  $\theta$  correspondientes son, según la Ec.(2-95),  $\theta=0^\circ$  y  $\theta=\pm 48'19''$  respectivamente. La solución correspondiente a la red oblicua ( $\theta=\pm 48'19''$ ) será, como veremos, de utilidad en el funcionamiento del procesador lógico binario que se propone en el Capítulo V.

## II.5 Conclusiones

Se ha estudiado, en el dominio de validez de la aproximación de Fresnel de la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff, la relación existente entre los patrones de difracción de Fresnel que genera un objeto cuando se ilumina con una onda plana monocromática o con una esférica de distinta longitud de onda. Así, se ha puesto de manifiesto que un cambio tanto en la curvatura como en la longitud de onda del haz incidente se traduce, exclusivamente, en una variación en la localización y escala de sus patrones de Fresnel, sin que se modifique el perfil de éstos. De esta manera, siempre que el cociente  $\lambda zR/(z+R)$  sea constante (siendo  $z$  y  $R$ , respectivamente, las distancias entre la fuente y el objeto y entre éste y el plano de observación, y  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación monocromática), en el plano de detección se obtiene, salvo por un factor de escala, la misma distribución de irradiancia. La escala de esta distribución la determina el valor del parámetro  $\mathcal{N}=(z+R)/z$ .

Estos hechos se pueden reinterpretar de la siguiente forma. Está claro que un sistema óptico perfecto transforma el conjunto de patrones de difracción de una abertura del espacio objeto en el mismo conjunto de patrones en el espacio imagen, pero con una escala y posición distintas. Ahora bien, esta transformación es tal que las imágenes que la lente forma de los patrones de Fresnel de la abertura coinciden, en posición y aumento, con las figuras de difracción generadas por la imagen del objeto iluminada por el punto imagen de la fuente real. Este resultado está de acuerdo con el hecho de que el plano de Fourier de un sistema óptico es siempre el plano imagen del que contiene a la fuente (donde se localiza, real o virtualmente, el patrón de Fraunhofer del objeto).

Por otro lado, los conceptos anteriores se han aplicado para revisar las características más importantes que exhibe el fenómeno de formación de autoimágenes con iluminación coherente. También se ha discutido la condición necesaria y suficiente —condición de Montgomery— para que éste se produzca. Esta condición

exige que el espectro de Fourier de los objetos de Montgomery puede ser diferente de cero únicamente en una serie de anillos cuyos radios están igualmente espaciados en  $\rho^2$ , siendo  $\rho$  el módulo de la frecuencia espacial. Además, se han analizado los patrones de Fresnel de las redes 1-D, poniendo de relieve las propiedades de simetría que exhiben. Este análisis se ha extendido al caso de redes 2-D rectangulares. También se ha determinado cuándo una red 2-D oblicua separable en coordenadas cartesianas genera autoimágenes, obteniéndose que sólo verifican la condición de Montgomery aquellas redes para las que el ángulo  $\theta$ , entre las líneas de las dos estructuras de igual período que forman la red, satisface la relación  $\cos\theta=N/2M$ , con  $M$  un número natural y  $N$  un entero de módulo menor que  $2M$ . En tal caso, la distancia de Talbot de la red 2-D es  $M$  veces la de las redes lineales que la componen. De forma análoga, estos resultados son también aplicables para las redes 2-D oblicuas cuya celda unidad no es separable. Al mismo tiempo, se ha demostrado que una red 1-D binaria de fase, cuadrada y de salto  $\pi/2$  genera patrones de Fresnel de visibilidad unidad y se ha estudiado para qué redes 2-D, que sean el producto de dos de estas redes de fase, es válido este resultado. Las conclusiones principales del estudio teórico sobre estos objetos periódicos han sido también comprobadas experimentalmente. Nuestro interés por este tipo de objetos se verá claramente en los siguientes capítulos de este trabajo.

## II.6 Referencias

- [II-1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1968), pág. 32.
- [II-2] W.T. Cathey, *Optical Information Processing and Holography* (Wiley, 1974), pág. 10.
- [II-3] H.F. Talbot, "Facts relating to Optical Science. No.IV", *Philos. Mag.* **9**, 401-407 (1836).
- [II-4] Lord Rayleigh, "On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith", *Philos. Mag.* **11**, 197-205 (1880).
- [II-5] J.M. Cowley and A.F. Moodie, "Fourier images", Parts I-III, *Proc. Phys. Soc. B* **70**, 486-513 (1957).
- [II-6] J.M. Cowley and A.F. Moodie, "Fourier images IV: the phase grating", *Proc. Phys. Soc. B* **76**, 378-384 (1960).

- [II-7] D. Joyeux and Y. Cohen-Sabban, "High magnification self-imaging", *Appl. Opt.* **21**, 625-627 (1982).
- [II-8] Y. Cohen-Sabban and D. Joyeux, "Aberration-free nonparaxial self-imaging", *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 707-718 (1983).
- [II-9] B. Packross, R. Eschbach, and O. Bryngdahl, "Acromatization of the self-imaging (Talbot) effect", *Opt. Commun.* **50**, 205-209 (1984).
- [II-10] G. Indebetouw, "Polychromatic self-imaging", *J. Mod. Opt.* **35**, 243-252 (1988).
- [II-11] E.E. Sicre, J. Lancis, and P. Andrés, "Achromatic self-imaging: a quasi-ray picture", *Opt. Commun.* (enviado).
- [II-12] E.A. Hiedemann and M.A. Breazale, "Secondary interference in the Fresnel zone of gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **49**, 372-375 (1959).
- [II-13] G.L. Rogers, "A diffraction theory of insect vision II. Theory and experiments with a simple model eye", *Proc. Roy. Soc. (London) B* **157**, 83-98 (1962).
- [II-14] J.T. Winthrop and C.R. Worthington, "Theory of Fresnel images. I. Plane periodic objects in monochromatic light", *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 373-381 (1965).
- [II-15] R.F. Edgar, "The Fresnel diffraction images of periodic structures", *Optica Acta* **16**, 281-287 (1969).
- [II-16] K. Patorski and G. Parfjanowicz, "Self-imaging phenomenon of a sinusoidal complex object", *Optica Acta* **28**, 357-367 (1981).
- [II-17] T. Jinhong, "The diffraction near fields and Lau effect of a square-wave modulated phase grating", *J. Mod. Opt.* **35**, 1399-1408 (1988).
- [II-18] W.D. Montgomery, "Self-imaging objects of infinite aperture", *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 772-778 (1967).
- [II-19] P. Szwaykowski, "Self-imaging in polar coordinates", *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 185-191 (1988).
- [II-20] D.C. Flanders, A.M. Hawryluk, and H.I. Smith, "Spatial period division — A new technique for exposing submicrometer-linewidth periodic and quasi-periodic patterns", *J. Vac. Sci. Technol.* **16**, 1949-1952 (1979).
- [II-21] V.V. Aristov, S. Aoki, A.I. Erko, S. Kikuta, and V.V. Martynov, "Observation of Fourier images in soft X-ray radiation", *Opt. Commun.* **56**, 223-225 (1985).

- [II-22] G.L. Rogers, "Fourier images in electron microscopy and their possible misinterpretation", *J. Microsc.* **89**, 121-124 (1969).
- [II-23] H. Konitz, "Concerning the theory of Fourier images. II. Electron optics", *Optik* **54**, 9-19 (1979).
- [II-24] K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Prog. Opt.* **27**, 3-108 (1989).
- [II-25] A.P. Smirnov, "Fresnel images of periodic transparencies of finite dimensions", *Opt. Spectrosc.* **44**, 208-212 (1978).
- [II-26] A.W. Lohmann and J. Ojeda-Castañeda, "Spatial periodicities in partially coherent fields", *Optica Acta* **30**, 475-479 (1983).
- [II-27] A.W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and N. Streibl, "Spatial periodicities in coherent and partially coherent fields", *Optica Acta* **30**, 1259-1266 (1983).
- [II-28] G. Indebetouw, "Propagation of spatially periodic wavefields", *Optica Acta* **31**, 531-539 (1984).
- [II-29] A. Kalestyński and B. Smolinska, "Self-restoration of the autoidolon of defective periodic objects", *Optica Acta* **25**, 125-134 (1978).
- [II-30] B. Smolinska and A. Kalestyński, "Autoidolon of quasi-periodic optical objects", *Optica Acta* **25**, 257-263 (1978).
- [II-31] R. Uma Makeswari, N. Takai, and T. Asakura, "Talbot images by a spatially fluctuating grating", *Opt. Commun.* **81**, 259-266 (1991).
- [II-32] D. Malacara, "Some properties of the near field of diffraction gratings", *Optica Acta* **21**, 631-641 (1974).
- [II-33] P.M. Mejías and R. Martínez-Herrero, "Diffraction by one-dimensional Ronchi grids: on the validity of the Talbot effect", *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 266-269 (1991).
- [II-34] A.W. Lohmann, *Optical Information Processing* (Univ. Erlangen, 1978), pág. 104.
- [II-35] A. Pons, "Transformada de Fourier a distancia finita: Aplicaciones en la formación y procesado óptico de imágenes", Tesis Doctoral (Univ. Valencia, 1987), cap. 2.

- [II-36] J. Lancis, "Nuevas aplicaciones del concepto de transformada de Fourier virtual", Tesis de Licenciatura (Univ. Valencia, 1989), cap. 2.
- [II-37] J. Knopp and M.F. Becker, "Virtual Fourier transform as an analytical tool in Fourier optics", *Appl. Opt.* **17**, 1669-1670 (1978).
- [II-38] P.E. Klingsporn, "Fraunhofer diffraction patterns from apertures illuminated with nonparallel light", *Am. J. Phys.* **47**, 147-152 (1979).
- [II-39] M. Nazarathy and J. Shamir. "Fourier optics described by operator algebra", *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 150-159 (1980).
- [II-40] R. Józwicki, "Transformation of reference spheres by an aberration free and infinitely large optical system in the Fresnel approximation", *Optica Acta* **29**, 1383-1393 (1982).
- [II-41] J.D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* (Wiley, 1978), pág. 360.
- [II-42] R.S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics* (Longman, 1973), pág. 24.
- [II-43] Idem Ref. [II-35], cap. 3.
- [II-44] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory", *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 651-654 (1987).
- [II-45] Idem Ref. [II-41], pág. 206.
- [II-46] P. Szwaykowski and K. Patorski, "Properties of the Fresnel field of a double diffraction system", *J. Opt. (Paris)* **16**, 95-103 (1985).
- [II-47] Idem Ref. [II-41], pág. 310.
- [II-48] C. Kittel, *Introducción a la Física del Estado Sólido* (Reverté, 1975), pág. 66.

# III. Aplicaciones del efecto Talbot

## III.1 Introducción

El interés por la formación de autoimágenes se justifica no sólo por ser este fenómeno una propiedad básica de ciertos campos de ondas, sino también por las aplicaciones que ha permitido desarrollar tanto en óptica como en microscopía electrónica y acusto-óptica. En el campo de la Óptica, estas aplicaciones se inscriben en las áreas de procesado de imágenes, tecnología y control de calidad de elementos ópticos y metrología óptica [III-1].

La interferometría de tipo Talbot permite, con un dispositivo sencillo en extremo (un haz de luz colimado y dos redes de difracción), obtener información sobre la primera derivada de la estructura de fase del objeto transparente que se quiere analizar. Cuando el interferómetro opera con redes lineales [III-2 y III-3] se obtiene la derivada a lo largo de la dirección perpendicular a las líneas de la red. El uso de redes circulares [III-4] permite obtener el valor de la derivada radial y el de redes en espiral [III-5] el de la derivada radial o el de la azimutal de la distribución de fase. Este tipo de interferómetros se ha utilizado, por ejemplo, para la medida de aberraciones de lentes [III-3], para el análisis de las vibraciones de un objeto de fase [III-6], para la medida de gradientes en el índice de refracción de estructuras transparentes [III-7] y para la determinación de distancias focales de lentes [III-7 y III-8]. Otras aplicaciones metrológicas del efecto Talbot son su empleo en espectroscopía por transformada de Fourier [III-9] y en la medida de desplazamientos axiales [III-10]. En la primera de ellas se aprovecha la dependencia de la posición de las autoimágenes con la longitud de onda y en la segunda la variación del contraste de los patrones de Fresnel de una red de difracción con la distancia a ella.

En el área de procesado óptico de imágenes, el efecto Talbot se ha empleado para realizar síntesis de imágenes [III-11], es decir, obtener una imagen compuesta combinando las subestructuras que componen la celda elemental de un objeto periódico, para replicar de manera múltiple un objeto utilizando un filtro de muestreo [III-12 y III-13], para restaurar objetos periódicos imperfectos [III-14] y también para realizar filtraje espacial seleccionando determinadas componentes espectrales de objetos periódicos [III-15]. Estas técnicas no convencionales de procesado de información se

pueden utilizar en otros rangos de frecuencias del espectro electromagnético ya que no requieren el uso de elementos refractivos.

En tecnología óptica, este fenómeno se ha utilizado para generar redes de difracción de baja frecuencia de perfil asimétrico [III-16] y para obtener estructuras periódicas de paso submicrométrico [III-17]. Aparte de estos ejemplos que se han querido destacar, en el artículo monográfico de Patorski [III-1] se hace una exhaustiva revisión de la larga lista de aplicaciones propuestas basadas en el fenómeno de autoimágenes coherentes.

Las aplicaciones del efecto Talbot que aquí se presentan continúan explotando su utilización en metrología óptica. Así, se ha desarrollado, por un lado, un método de medida de distancias focales y, por otro, un procedimiento para generar en un plano fijo una red cuya frecuencia espacial se puede variar, dentro de un cierto intervalo, de un modo continuo. La primera de estas técnicas requiere tan sólo la medida de distancias axiales y es aplicable a lentes gruesas y delgadas, tanto convergentes como divergentes. El valor de la distancia focal de la lente bajo prueba, que puede ser esférica o cilíndrica, se obtiene con una elevada precisión a partir de un ajuste lineal por mínimos cuadrados de los datos experimentales. Estas características diferencian este método de los que, utilizando también el efecto Talbot, han sido previamente propuestos [III-7 y III-8]. Por otro lado, la técnica para generar el patrón periódico de frecuencia sintonizable precisa tan sólo de una fuente puntual monocromática y de una única red de difracción de período fijo. Variando la distancia que media entre la fuente puntual y la red y la existente entre ésta y el plano de observación, que se mantiene fijo, se selecciona el período de la autoimagen que se obtiene en dicho plano. Este patrón se puede utilizar como test objeto para evaluar la respuesta frecuencial, tanto con iluminación coherente como incoherente, de un sistema óptico formador de imágenes.

En la siguiente sección se discute la teoría básica y el procedimiento experimental del método de medida de distancias focales que se propone, el cual supone una extensión de una técnica nuestra presentada previamente [III-18]. En la sección III.3 se muestran los resultados obtenidos en la consiguiente verificación experimental. Los sistemas ópticos que se han empleado en esta comprobación son un objetivo para fotografía aérea, una lente esférica simple divergente y una lente cilíndrica convergente. En la sección III.4 se describe el procedimiento para generar el patrón periódico de frecuencia regulable. Los resultados experimentales correspondientes a esta técnica se indican en la sección III.5. El ejemplo que se muestra hace especial hincapié en la producción de un test visual periódico continuamente variable para la medida de la función de transferencia de modulación del sistema visual humano. Un trabajo preliminar en esta dirección ya ha sido reseñado por nosotros [III-19].

## III.2 Medida de distancias focales

Un conocido método para medir la longitud focal de una lente convergente es el denominado método de Bessel [III-20]. En él, la distancia focal  $f$  de la lente bajo prueba se obtiene a partir de la medida de dos distancias axiales: la distancia  $D$  entre dos planos dados y la distancia  $H$  entre las dos posiciones de la lente que hacen de uno de ellos el plano conjugado del otro. Este método sólo es aplicable a lentes delgadas y su funcionamiento exige que  $D$  sea mayor que  $4f$ .

Basándose en la idea de determinar distancias focales a partir de la medida de distancias axiales, se puede desarrollar un método para medir focales que se apoye en el efecto Talbot. En este caso, las distancias a medir son la existente entre una red 1-D y una cualquiera de sus autoimágenes y la que media entre las imágenes que la lente de focal desconocida proporciona de ellas.

Supongamos la situación representada en la Fig.3-1, en la que la lente cuya focal se quiere medir se dispone detrás de una red lineal iluminada coherentemente. Tal y como se discutió en la sección II.2, la lente forma una imagen tanto de la red como de todos y cada uno de los patrones de Fresnel que ésta genera. Consideremos en particular una de las autoimágenes de la red. Sean  $R$  y  $R'$  las distancias que existen entre la red y dicha autoimagen, en los espacios objeto e imagen respectivamente. Según la Ec.(2-37) estas distancias están ligadas entre sí a través de los aumentos laterales  $\beta_O$  y  $\beta_{A'}$ , que la lente proporciona para los planos que contienen a la red y a la autoimagen. A partir de la conocida relación de la Óptica geométrica [III-21],

$$\beta = -\frac{x'}{f} ,$$

que conecta el aumento lateral  $\beta$  entre dos planos conjugados a través de un sistema

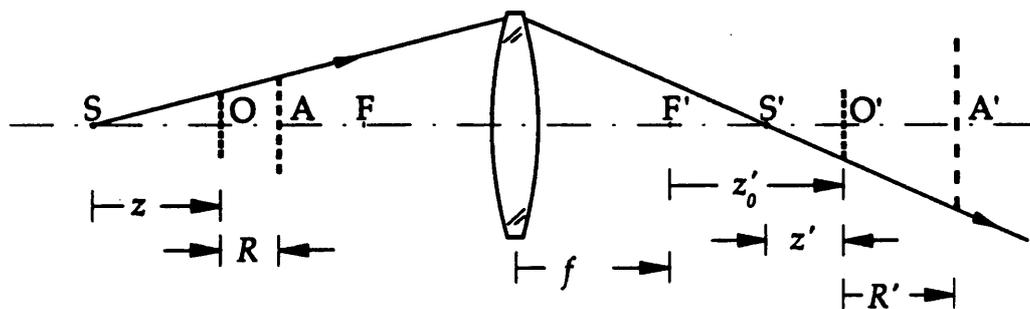


Fig. 3-1. Autoimágenes con iluminación esférica y sus imágenes conjugadas a través de una lente. Midiendo las distancias  $R$  y  $R'$ , para varias autoimágenes, se obtiene el valor de la focal de la lente.

con su distancia focal imagen  $f$  y con la distancia  $x'$  entre su foco imagen y el punto axial del plano imagen considerado, podemos escribir

$$\beta_0 = -\frac{z'_0}{f} ,$$

$$\text{y } \beta_A = -\frac{z'_0 + R'}{f} ,$$

donde se ha tenido en cuenta la notación de la Fig.3-1. Sustituyendo ambas expresiones en la Ec.(2-37), se obtiene

$$R' = \frac{R z'_0 (z'_0 + R')}{f^2} .$$

Reordenando esta ecuación, resulta

$$R' = \frac{R z'_0{}^2}{f^2 - R z'_0} ,$$

y por tanto

$$\frac{1}{R'} = \left(\frac{f}{z'_0}\right)^2 \frac{1}{R} - \frac{1}{z'_0} . \quad (3-1)$$

Así pues, la dependencia de  $1/R'$  respecto a  $1/R$  es lineal, siendo la pendiente,  $a$ , y la ordenada en el origen,  $b$ , de esta recta, respectivamente

$$a = \left(\frac{f}{z'_0}\right)^2 . \quad (3-2a)$$

$$\text{y } b = -\frac{1}{z'_0} . \quad (3-2b)$$

Este hecho permite, como vamos a ver, obtener el valor de  $f$ .

Para diferentes valores de  $R$  y sin modificar el valor de  $z'_0$ , se mide la correspondiente distancia axial imagen  $R'$ . Después, con este conjunto de datos experimentales se obtiene, mediante un ajuste lineal por mínimos cuadrados, la recta de regresión de  $1/R'$  frente a  $1/R$ . A partir de la pendiente,  $a$ , y de la ordenada en el origen,  $b$ , de esta recta, según las Ecs.(3-2), resulta

$$f^2 = \frac{a}{b^2} , \quad (3-3)$$

relación que permite determinar la focal, en módulo, de la lente problema.

Para variar los valores de  $R$ , basta con modificar alguno de los parámetros que determinan la localización de las autoimágenes en el espacio objeto. En la situación representada en la Fig.3-1 —correspondiente a iluminación monocromática esférica— estos parámetros son, según la Ec.(2-56), la distancia  $z$ , el índice de la autoimagen (que supondremos semientero, para incluir también a las autoimágenes negativas, y que vamos a representar por  $P$ ) y el período  $d$  de la red. Si para generar las autoimágenes se emplea iluminación plana, situación en la que también son válidas las ecuaciones anteriores, para cambiar los valores de  $R$  hay que variar  $d$  —sustituyendo la red objeto por otra—,  $P$  o ambos simultáneamente. Por otro lado, la manera más sencilla de garantizar que la distancia  $z_0$  es la misma para todos los datos experimentales con los que se construye la recta de regresión, es mantener constante la separación entre la lente y la red.

Desde el punto de vista experimental, hay que hacer notar que para poder medir  $R'$  las imágenes de la red y de la autoimagen elegida han de ser reales. Para ello, en el caso de lentes convergentes, la solución más inmediata es que la red y la autoimagen se localicen a la izquierda del foco objeto  $F$  de la lente (véase la Fig.3-1). En este caso, para que el dispositivo experimental ocupe la menor longitud posible, es decir, para que la distancia  $\overline{OA'}$  sea mínima, la autoimagen considerada debe estar situada a una distancia  $2f$  de la lente. Ahora bien, dado que esta condición sólo se puede satisfacer para una autoimagen de todas las utilizadas en la experiencia, interesa que se cumpla para aquélla que se encuentra más alejada de la red que la genera. Esto garantiza que para las autoimágenes con valores de  $R$  más pequeños que el de ésta, los correspondientes valores de  $R'$  son, a su vez, menores que el de la más alejada.

Por otro lado, la Ec.(3-1) es igualmente válida cuando se toman como redes de referencia —redes a partir de las que se miden los segmentos orientados  $R$  y  $R'$ — no la red original y su imagen a través de la lente sino una autoimagen cualquiera del espacio objeto y su conjugada en el espacio imagen. Esta idea permite diseñar una disposición experimental alternativa a la de la Fig.3-1, especialmente útil para lentes convergente de focal muy larga y, sobretodo, extender el método expuesto al caso de lentes divergentes.

La longitud total del dispositivo esquematizado en la Fig.3-1 es siempre mayor que  $4f$ . Este hecho dificulta, para lentes de distancia focal muy grande, la realización práctica del dispositivo. Ahora bien, una lente convergente (que para simplificar la discusión, supondremos delgada) proporciona imágenes reales no sólo de objetos reales situados antes de su foco objeto, sino también de objetos virtuales localizados detrás de ella. Las imágenes de estos objetos se obtienen entre la lente y su foco imagen.

Aprovechando esta circunstancia, el montaje representado en la Fig.3-2 permite reducir la longitud del dispositivo experimental para la medida de distancias focales.

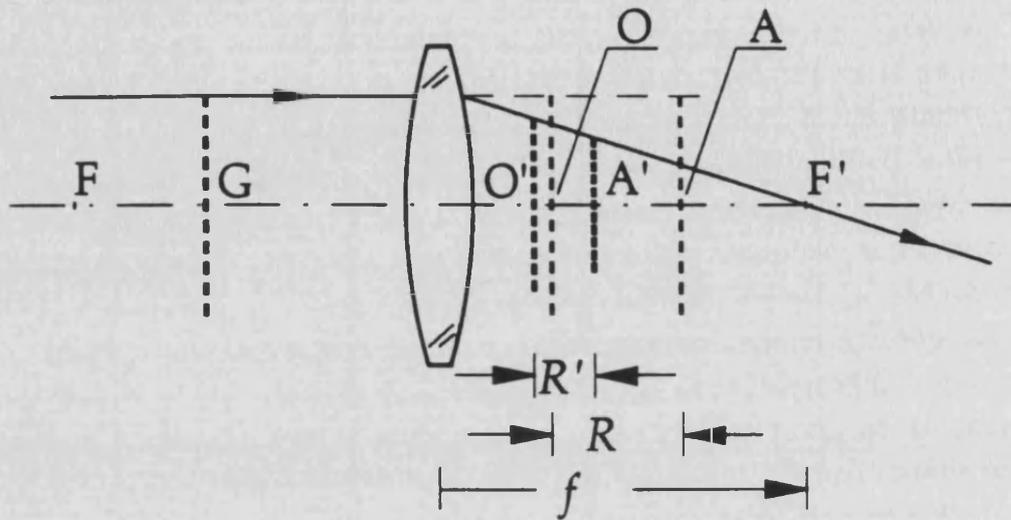


Fig. 3-2. Configuración alternativa a la de la Fig.3-1, que se adapta mejor al caso de lentes convergentes de focal grande. Se toma como red de referencia no la red original (situada en G), sino una de sus autoimágenes (localizada en O).

En este caso, para que los objetos que definen la distancia  $R$  sean virtuales se debe tomar como red de referencia, tal y como se ha dicho antes, una autoimagen adecuada de la red original. En la Fig.3-2 se ha supuesto que esta red está iluminada por una onda plana, naturalmente lo dicho es válido también cuando la fuente está a distancia finita.

El método descrito es también aplicable a lentes divergentes. Para obtener imágenes reales con una lente divergente es necesario, por ejemplo, si ésta es delgada, que el objeto se encuentre situado entre la lente y el foco objeto, es decir, el objeto ha de ser necesariamente virtual. Por tanto, de nuevo hay que tomar como red de referencia una autoimagen conveniente de la red objeto. En la Fig.3-3 se ha representado esta situación.

En los dos últimos casos discutidos, para asegurar que  $z'_0$  no se modifica cuando se varía la distancia  $R$ , la autoimagen que se toma como objeto de referencia —o equivalentemente la imagen que de ésta proporciona la lente— debe permanecer situada en la misma posición. Esto implica que la posición a lo largo del eje óptico de la red real se ha de variar ostensiblemente cuando, para modificar  $R$ , se varía su período.

En la situación de la Fig.3-3, para que la longitud del dispositivo experimental sea lo más corta posible interesa que la autoimagen que hace de red de referencia —la situada en O— esté lo más cerca posible de la lente (estará a su derecha para que su imagen sea real). De este modo, el resto de autoimágenes (por ejemplo, la situada en A) no estarán muy cerca del foco objeto F de la lente y así sus imágenes se formarán a distancias no muy grandes de ésta.

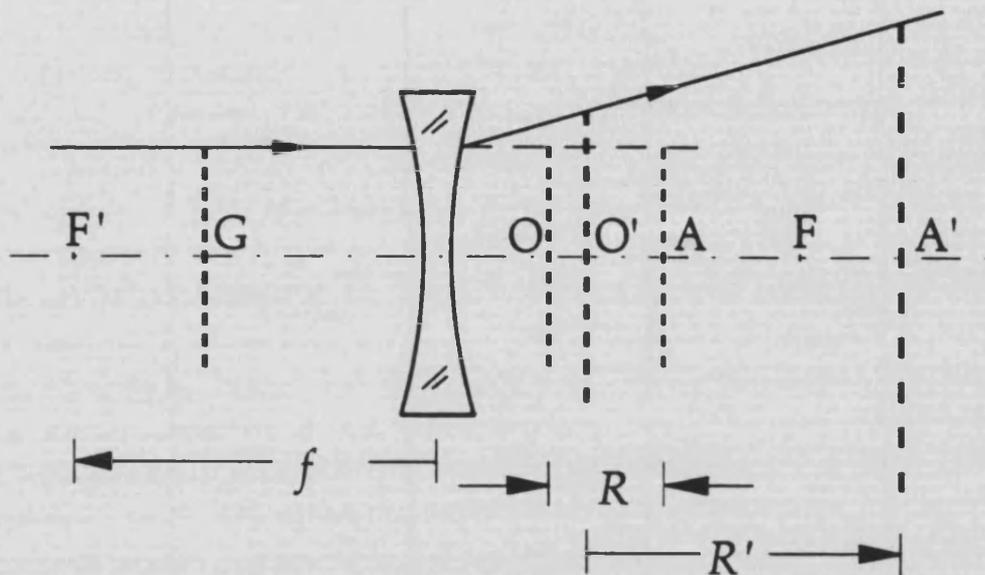


Fig. 3-3. Medida de la longitud focal de una lente divergente mediante el efecto Talbot.

Una característica importante de este método es que permite medir la distancia focal de lentes gruesas y sistemas ópticos cualesquiera, puesto que las distancias axiales  $R$  y  $R'$  no tienen su origen en los planos principales del sistema —la posición de los cuales es, en general, desconocida—. Por otro lado, dado que el dispositivo experimental es esencialmente un dispositivo monodimensional esta técnica de medida de focales es válida asimismo para lentes cilíndricas. En efecto, una lente cilíndrica es capaz de proporcionar una imagen de una red 1-D, si ésta se dispone con sus líneas orientadas perpendicularmente a la dirección en que es activa la lente.

Otra propiedad del método descrito es que, como resultado adicional, permite obtener la posición de los planos principales del sistema bajo estudio. A partir de la recta de regresión asociada a la Ec.(3-1) se obtiene tanto el valor de  $f$ , por medio de la Ec.(3-3), como el de la distancia  $z'_0$ , que según la Ec.(3-2b) es  $z'_0 = -1/b$ . Puesto que por definición  $z'_0$  es la distancia que media entre el foco imagen  $F'$  del sistema óptico y el plano donde se localiza la imagen de la red de referencia, esto es,  $z'_0 = \overline{F'O'}$  (véase la Fig.3-1) y dado que  $f$  es la distancia que existe entre el punto principal imagen  $H'$  y el foco  $F'$ , es inmediato obtener para la distancia  $\overline{O'H'}$  entre la red de referencia y el punto principal, en el espacio imagen, la relación

$$\overline{O'H'} = -z'_0 - f \quad (3-4)$$

Esta ecuación permite fijar la posición de  $H'$  respecto al plano imagen de la red de referencia. Una medida adicional (la de la distancia entre el punto  $O'$  y la última superficie del sistema óptico), permite referir la posición de  $H'$  respecto a dicha superficie, que es un elemento inherente al sistema.

Al igual que en el método de Cornu [III-22] para la determinación de los elementos cardinales de un sistema, con el fin de obtener la posición del punto principal objeto  $H$  de la lente bajo prueba, basta con invertir la posición de ésta y repetir el procedimiento descrito para localizar  $H'$ .

Por último, antes de pasar a analizar los resultados obtenidos en la verificación experimental de la técnica propuesta, queremos destacar dos características adicionales de ésta. Por un lado, dado que el efecto Talbot no es acromático, el método descrito requiere el empleo de luz monocromática, por lo que el valor de  $f$  que se obtiene corresponde a la distancia focal de la lente para la longitud de onda de la radiación empleada. Por otro lado, las ecuaciones que fundamentan esta técnica son válidas también cuando las distancias  $R$  y  $R'$  corresponden no a autoimágenes de la red objeto sino a otros patrones de Fresnel cualesquiera de ésta. Si se ha utilizado en la discusión las autoimágenes, ha sido por ser éstas patrones de Fresnel característicos de la red y fácilmente reconocibles. No obstante este hecho, en la técnica descrita se puede emplear, por ejemplo, una red lineal de fase como la de la Ec.(2-69) y utilizar sus patrones de Fresnel, binarios y de contraste unidad, de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$ .

### III.3 Resultados experimentales

Para comprobar experimentalmente la validez del método de medida de distancias focales se ha utilizado un objetivo compuesto para fotografía aérea, de focal bien conocida. Después, se ha empleado esta técnica para determinar la distancia focal de una lente esférica divergente y la de una lente cilíndrica convergente.

Los elementos ópticos utilizados en esta verificación experimental, se montaron sobre un banco triangular, de tipo Galileo, de 2m de longitud que disponía de una regla graduada en milímetros. Como fuente de luz se utilizó un láser de He-Ne de 5mW de potencia, que se dispuso en un extremo del banco. A continuación se situó un filtro espacial constituido por un objetivo de 40x y un diafragma de  $5\mu\text{m}$  de diámetro. Previamente, se habían alineado, con sumo cuidado, el banco y el haz de luz, para que la incidencia de éste en estos elementos ópticos y en los que se colocaron posteriormente fuese lo más posible en eje, con el propósito de trabajar en condiciones semejantes a las de la Óptica paraxial y, por tanto, reducir al mínimo las posibles aberraciones.

Para generar las autoimágenes del espacio objeto se utilizó iluminación plana, por lo que detrás del filtro espacial se situó una lente colimadora de 200mm de longitud focal. A continuación de esta lente, se situaba la red 1-D utilizada como red objeto y, por último, el sistema óptico bajo prueba. Para medir las distancias  $R$  y  $R'$  entre la red de referencia y la autoimagen seleccionada, en los espacios objeto e

imagen respectivamente, se utilizaba un microscopio compuesto por un objetivo de 25mm de focal y un ocular  $\times 10$ . El soporte del microscopio llevaba incorporado un nonius que permitía medir sobre la regla del banco distancias con una precisión de 0'1mm. En condiciones normales de observación, la profundidad de enfoque de un microscopio de estas características es del orden de  $60\mu\text{m}$  [III-23]. Este valor es pues inferior al error de sensibilidad de las medidas correspondientes a distancias axiales y por tanto no influyó en la precisión de estas medidas.

### a) Medida de la focal de una lente convergente

En este apartado, se ha aplicado la técnica de medida de focales descrita en la sección III.2, para determinar la distancia focal del objetivo AERO-EKTAR de una cámara para fotografía aérea. Este objetivo de focal  $f=178\text{mm}$  se ha utilizado para poner a prueba la exactitud del método.

Dado que la longitud focal de esta lente es relativamente pequeña, se optó por emplear, por su mayor sencillez, la disposición experimental de la Fig.3-1 (con la salvedad de que se utilizó iluminación plana en lugar de esférica), en la que la red de referencia y las autoimágenes de interés son objetos reales para la lente.

Para obtener los diferentes valores de la distancia  $R$ , se utilizaron diversas autoimágenes de tres redes 1-D de Ronchi, sobre soporte de vidrio; las frecuencias espaciales de las cuales eran  $N_1=(3'951\pm 0'017)\text{mm}^{-1}$ ,  $N_2=(7'86\pm 0'04)\text{mm}^{-1}$  y  $N_3=(9'30\pm 0'05)\text{mm}^{-1}$ . En particular, se emplearon la primera autoimagen ( $P=0'5$ ) de la red de frecuencia  $N_1$ , las tres primeras autoimágenes ( $P=0'5$ , 1 y 1'5) de la red de frecuencia  $N_2$ , y las dos primeras ( $P=0'5$  y 1) de la de frecuencia  $N_3$ . Estos valores se escogieron teniendo en cuenta el conjunto de redes 1-D disponibles en el laboratorio y la longitud de la porción libre en el banco de óptica.

Antes de situar la lente problema en el dispositivo, se midieron los valores experimentales de  $R$ . Para ello, primero se enfocaba con el microscopio la red de referencia —que en este caso coincidía con la red objeto— y se leía el valor  $D_0$  que para la posición de aquél marcaba, sobre la regla graduada, el nonius de su soporte. Posteriormente, se desplazaba el microscopio hasta enfocar la primera de las autoimágenes elegidas de la red. Se leía su nueva posición,  $D$ , y se repetía el proceso para las siguientes autoimágenes seleccionadas. Este procedimiento se continuó hasta completar tres series de medidas para cada una de las autoimágenes de interés de las tres redes 1-D. No fue necesario un número mayor de medidas porque la dispersión de las así obtenidas era muy pequeña. Como valor de la distancia  $R$  asociada a cada una de estas autoimágenes se ha tomado el valor medio de las diferencias entre los correspondientes valores  $D_0$  y  $D$ . Como error absoluto,  $\epsilon(R)$ , de cada distancia  $R$  se ha tomado el valor mayor entre el error de sensibilidad instrumental de estas diferencias (en nuestro caso, 0'14 mm) y la desviación típica de la media de las mismas. Éste ha



sido el criterio que se ha seguido en toda esta sección para la estimación de las cotas de error de los valores que son la diferencia entre dos medidas directas. Los resultados de las medidas así efectuadas se resumen en la Tabla 3-1.

Una vez obtenidos los valores de  $R$ , se procedió a determinar la posición idónea de la lente de prueba para obtener la mayor sensibilidad posible en las medidas de  $R'$ , teniendo presente que el aumento axial de una lente es mayor cuanto más cerca está el objeto de su foco. Para ello, se colocaba el microscopio en el extremo libre del banco y se desplazaba la lente hasta que la autoimagen correspondiente al mayor valor de  $R$  apareciese enfocada a través de él. De este modo se asegura que siendo reales todas las imágenes de las redes de interés el aumento axial, y por tanto el valor de  $R'$ , es para cada una de ellas el máximo posible.

A continuación se midieron los valores de la distancia  $R'$ , siguiendo el procedimiento utilizado en la medida de los valores de  $R$ . Primero, se determinaron las posiciones de las imágenes de la red de referencia y de las autoimágenes de interés y a partir de ellas, se obtuvo el valor de  $R'$  asociado a cada una de las distancias  $R$  consideradas. Para asegurar que la posición de la red de referencia era siempre la misma, antes de reemplazar una red objeto por otra se enfocaba su imagen. Sin mover el microscopio, si era necesario se desplazaba ligeramente la nueva red hasta que su imagen se viese enfocada a través de él. Así se garantizaba que la distancia  $z'_0$  permanecía invariante en toda la experiencia.

Los resultados numéricos así obtenidos se recogen en la Tabla 3-1. En ella también se muestran los correspondientes valores de  $1/R$  y de  $1/R'$ . Para el cálculo del error de éstas y otras medidas indirectas se ha seguido el método usual de las derivadas parciales.

Obsérvese, por un lado, que el valor de  $z'_0$  (véase la Fig.3-1) depende de la posición

$R \pm \epsilon(R)$	$[1/R \pm \epsilon(1/R)] \times 10^{-2}$	$R' \pm \epsilon(R')$	$[1/R' \pm \epsilon(1/R')] \times 10^{-2}$
17'97 $\pm$ 0'17	5'56 $\pm$ 0'05	20'03 $\pm$ 0'14	4'99 $\pm$ 0'03
25'50 $\pm$ 0'14	3'92 $\pm$ 0'02	29'87 $\pm$ 0'14	3'348 $\pm$ 0'016
36'0 $\pm$ 0'2	2'778 $\pm$ 0'015	45'23 $\pm$ 0'14	2'211 $\pm$ 0'007
50'97 $\pm$ 0'14	1'962 $\pm$ 0'005	71'67 $\pm$ 0'14	1'395 $\pm$ 0'003
76'43 $\pm$ 0'14	1'308 $\pm$ 0'002	134'6 $\pm$ 0'3	0'7429 $\pm$ 0'0017
101'90 $\pm$ 0'14	0'9814 $\pm$ 0'0013	238'3 $\pm$ 0'2	0'4196 $\pm$ 0'0004

Tabla 3-1. Valores experimentales de las distancias  $R$  y  $R'$  obtenidos en la determinación de la focal de la lente convergente. Los valores numéricos están expresados, según sus dimensiones, en mm o  $\text{mm}^{-1}$ .

$R \pm \epsilon(R)$	$[1/R \pm \epsilon(1/R)] \times 10^{-2}$	$R' \pm \epsilon(R')$	$[1/R' \pm \epsilon(1/R')] \times 10^{-2}$
$17'97 \pm 0'17$	$5'56 \pm 0'05$	$24'23 \pm 0'14$	$4'13 \pm 0'02$
$25'50 \pm 0'14$	$3'92 \pm 0'02$	$36'30 \pm 0'14$	$2'755 \pm 0'011$
$36'0 \pm 0'2$	$2'778 \pm 0'015$	$55'33 \pm 0'14$	$1'807 \pm 0'005$
$50'97 \pm 0'14$	$1'962 \pm 0'005$	$89'10 \pm 0'14$	$1'1223 \pm 0'0018$
$76'43 \pm 0'14$	$1'308 \pm 0'002$	$173'2 \pm 0'2$	$0'5774 \pm 0'0007$
$101'90 \pm 0'14$	$0'9814 \pm 0'0013$	$326'53 \pm 0'14$	$0'30625 \pm 0'00013$

Tabla 3-2. Valores experimentales de la segunda serie de medidas hecha para la lente convergente. La red de referencia se acercó aproximadamente 10cm hacia la lente, desde la posición correspondiente a los datos de la Tabla 3-1. Los valores numéricos están expresados, según sus dimensiones, en mm o  $\text{mm}^{-1}$ .

a lo largo del eje de la red de referencia. Por otro lado, según la Ec.(3-1), la pendiente y la ordenada en el origen de la recta obtenida en el ajuste por mínimos cuadrados serán diferentes para cada conjunto de puntos experimentales correspondientes a un valor distinto de  $z_0$ . Sin embargo, de acuerdo con la Ec.(3-3), el valor calculado para la distancia focal de la lente debe ser independiente de este hecho. Como comprobación experimental se ha repetido todo el proceso anterior cambiando la posición inicial de la red de referencia. Los valores obtenidos se resumen en la Tabla 3-2.

A partir de los valores de  $1/R$  y  $1/R'$  que recogen las Tablas 3-1 y 3-2, en la Fig.3-4 se han representado los puntos  $(1/R, 1/R')$  correspondientes a cada una de las dos posiciones de la red de referencia. A ambas distribuciones de puntos experimentales se les ha ajustado, por mínimos cuadrados, una recta que también se ha representado en la Fig.3-4. Para cada una de ellas, se ha calculado asimismo el valor de su coeficiente de correlación  $r$ . De acuerdo con la Ec.(3-3), a partir de la pendiente  $a$  y la ordenada en el origen  $b$  de cada recta se ha calculado el valor de  $f$ .

Para los datos de la Tabla 3-1 los resultados obtenidos son

$$\begin{aligned}
 a &= (9'977 \pm 0'006) \times 10^{-1} \quad , \\
 b &= (-5'615 \pm 0'019) \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \quad , \\
 r^2 &= 0'9999 \quad , \\
 f &= (177'9 \pm 0'6) \text{ mm} \quad .
 \end{aligned}$$

Para los datos de la Tabla 3-2 los resultados obtenidos son

$$a = (8'336 \pm 0'006) \times 10^{-1} \quad ,$$

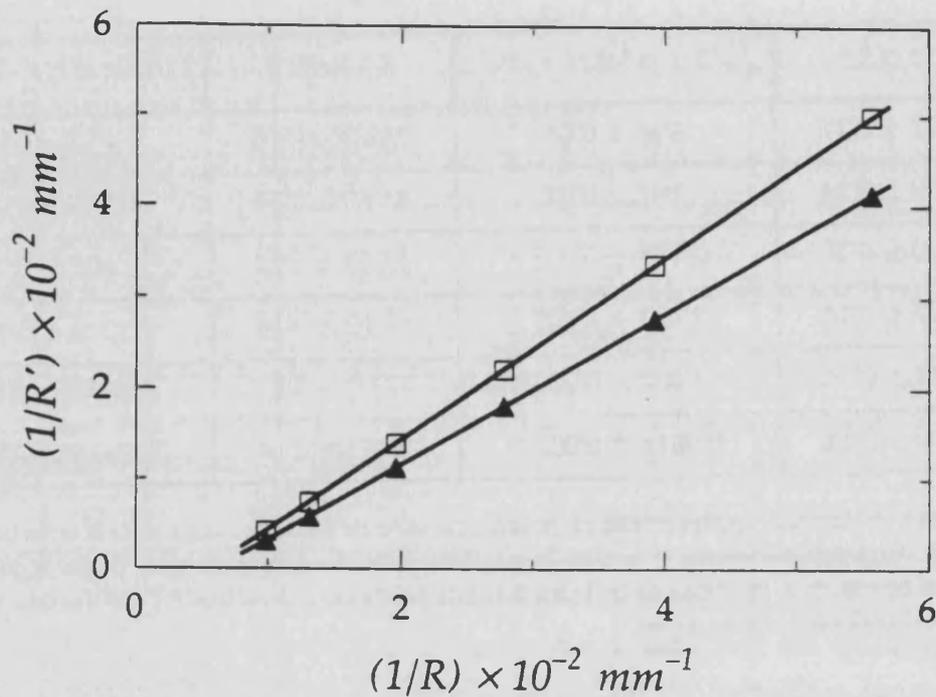


Fig. 3-4. Representación gráfica de  $1/R'$  frente a  $1/R$  en el caso de la lente convergente. Los puntos  $\square$  corresponden a los datos de la Tabla 3-1 y los  $\blacktriangle$  a los de la Tabla 3-2.

$$b = (-5'122 \pm 0'019) \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1} ,$$

$$r^2 = 0'9999 ,$$

$$f = (178'3 \pm 0'7) \text{ mm} .$$

Los errores de  $a$  y de  $b$  han sido calculados según el procedimiento indicado en la Ref.[III-24]. Como indican los valores del coeficiente de correlación,  $r$ , los datos experimentales se ajustan perfectamente a una recta. Además, los valores obtenidos para la focal de la lente (para la longitud de onda del láser de He-Ne) son prácticamente iguales en las dos serie y coinciden, dentro de los errores experimentales, con el valor dado por el fabricante.

### b) Medida de la focal de una lente esférica divergente y de una lente cilíndrica convergente.

Con el fin de comprobar las posibilidades adicionales de la técnica de medida de distancias focales, se ha utilizado ésta para medir la focal de una lente esférica simple divergente y de una lente cilíndrica convergente.

Por un lado, como se ha explicado en la sección III.2, para poder aplicar esta técnica a una lente divergente la red de referencia, origen de la distancia  $R$ , no puede ser la propia red objeto. Como red de referencia se debe tomar, para cada red objeto

que se emplee, una autoimagen conveniente que se comporte como un objeto virtual para la lente (ver la Fig.3-3).

Para obtener la mayor variación en los valores de  $R$ , interesa que la imagen (que ha de ser real) de la red de referencia se obtenga lo más cerca posible de la lente divergente y, al igual que antes, las redes objeto deben situarse junto a la lente colimadora. Ahora la focal de la lente problema, la longitud disponible del banco de óptica y la posición de la lente —que debe permitir que las diferentes redes objeto se puedan desplazar de modo que la imagen de la red de referencia, y por tanto ella misma, permanezca siempre en la misma posición—, determinan la cota superior para  $R$ .

A la vista de las características del dispositivo experimental y de las redes 1-D disponibles se decidió emplear, como redes objeto, únicamente las de frecuencias  $N_1$  y  $N_2$  del apartado anterior. Puesto que a medida que aumenta el índice  $P$  de las autoimágenes su calidad va degradándose paulatinamente, para cada red objeto interesa elegir como red de referencia la autoimagen de menor índice. En nuestro caso se eligieron la primera autoimagen negativa ( $P=0.5$ ) de la red de frecuencia  $N_1$  y la primera positiva ( $P=1$ ) de la de frecuencia  $N_2$ . En este último caso, por problemas puramente experimentales no se pudo situar la red objeto lo suficientemente cerca de la lente para que su primera autoimagen negativa coincidiese con la posición de la red de referencia. Para obtener los diferentes valores de  $R$  se emplearon las autoimágenes de índice  $P=1$  y  $1.5$  de la red de frecuencia  $N_1$  y las de índice  $P=1.5$ ,  $2$ ,  $2.5$ ,  $3.5$  y  $4$  de la otra red.

Una vez fijados los valores de  $R$ , la mayor sensibilidad en las medidas de  $R'$  se consigue desplazando la lente hasta que la imagen que ella proporciona de la autoimagen correspondiente al mayor valor de los  $R$  seleccionados aparezca localizada en el extremo del banco de óptica. De este modo se determinó la posición idónea para la lente divergente.

En este caso, al reemplazar una red por otra hay que variar su posición a lo largo del eje de forma apreciable para que la red de referencia, o equivalentemente su imagen, se mantenga en la misma posición.

En la medida de los valores experimentales de  $R$ , que se hizo antes de colocar la lente problema, y de  $R'$  se siguió el procedimiento utilizado en el apartado de la lente convergente. Los resultados así obtenidos se muestran en la Tabla 3-3.

Por otro lado, tal y como se ha discutido en el sección III.2, la técnica de medida de distancias focales es aplicable también a lentes cilíndricas. Si la red objeto se dispone con sus líneas orientadas perpendicularmente a la dirección en que es activa la lente cilíndrica, las propiedades de ésta relativas a la formación de imágenes son idénticas a las de una lente esférica de su misma distancia focal. Por este motivo, el procedimiento experimental seguido para la medida de la focal de la lente cilíndrica convergente ha sido el mismo que se describe en el apartado anterior. Los resultados

$R \pm \varepsilon(R)$	$[1/R \pm \varepsilon(1/R)] \times 10^{-3}$	$R' \pm \varepsilon(R')$	$[1/R' \pm \varepsilon(1/R')] \times 10^{-3}$
25'53 $\pm$ 0'14	39'2 $\pm$ 0'2	33'30 $\pm$ 0'14	30'03 $\pm$ 0'13
51'07 $\pm$ 0'14	19'58 $\pm$ 0'05	73'07 $\pm$ 0'14	13'69 $\pm$ 0'03
76'67 $\pm$ 0'14	13'04 $\pm$ 0'02	121'57 $\pm$ 0'14	8'226 $\pm$ 0'009
102'27 $\pm$ 0'14	9'778 $\pm$ 0'013	182'77 $\pm$ 0'14	5'471 $\pm$ 0'004
128'00 $\pm$ 0'14	7'813 $\pm$ 0'009	259'27 $\pm$ 0'17	3'857 $\pm$ 0'003
153'70 $\pm$ 0'14	6'506 $\pm$ 0'006	361'67 $\pm$ 0'14	2'7650 $\pm$ 0'0011
204'87 $\pm$ 0'14	4'881 $\pm$ 0'003	721'37 $\pm$ 0'14	1'3863 $\pm$ 0'0003

Tabla 3-3. Valores experimentales de  $R$  y  $R'$  correspondientes a la lente divergente. Los valores numéricos están expresados, según sus dimensiones, en mm o  $\text{mm}^{-1}$ .

experimentales obtenidos en las medidas de  $R$  y  $R'$  se resumen en la Tabla 3-4. En este caso, estos valores corresponden a las seis primeras autoimágenes de la red de frecuencia  $N_2$ .

A partir de los valores de  $1/R$  y  $1/R'$  que se muestran en las Tablas 3-3 y 3-4, en la Fig.3-5 se han representado los puntos  $(1/R, 1/R')$  y la recta resultante del ajuste lineal por mínimos cuadrados, correspondientes a las dos lentes empleadas en esta comprobación. Obsérvese que ambas distribuciones de puntos experimentales se ajustan extraordinariamente bien a una recta. Los valores de la pendiente  $a$  y de la ordenada en el origen  $b$  de cada una de las rectas nos han permitido calcular el valor de la focal de la lente divergente y de la lente cilíndrica.

$R \pm \varepsilon(R)$	$[1/R \pm \varepsilon(1/R)] \times 10^{-3}$	$R' \pm \varepsilon(R')$	$[1/R' \pm \varepsilon(1/R')] \times 10^{-3}$
25'53 $\pm$ 0'14	39'2 $\pm$ 0'2	13'58 $\pm$ 0'14	73'6 $\pm$ 0'8
51'13 $\pm$ 0'14	19'56 $\pm$ 0'05	32'35 $\pm$ 0'14	30'91 $\pm$ 0'13
76'77 $\pm$ 0'14	13'03 $\pm$ 0'02	59'93 $\pm$ 0'14	16'69 $\pm$ 0'04
102'63 $\pm$ 0'14	9'744 $\pm$ 0'013	105'00 $\pm$ 0'14	9'524 $\pm$ 0'013
128'47 $\pm$ 0'14	7'784 $\pm$ 0'008	191'1 $\pm$ 0'2	5'233 $\pm$ 0'005
154'47 $\pm$ 0'14	6'474 $\pm$ 0'006	419'3 $\pm$ 0'2	2'3849 $\pm$ 0'0011

Tabla 3-4. Valores experimentales de  $R$  y  $R'$  correspondientes a la lente cilíndrica convergente. Los valores numéricos están expresados, según sus dimensiones, en mm o  $\text{mm}^{-1}$ .

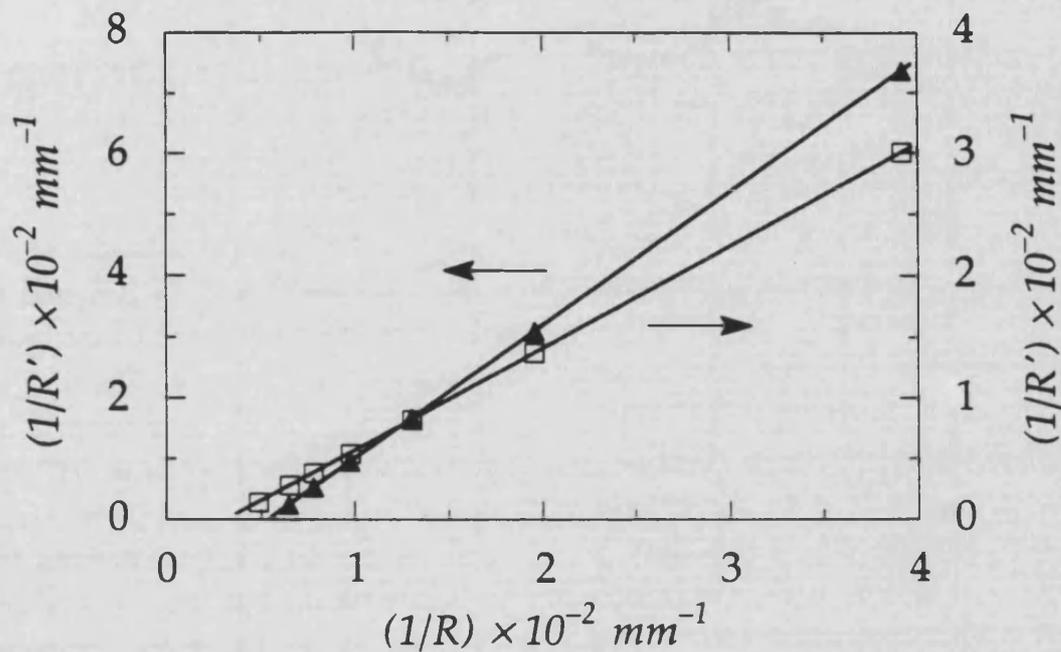


Fig. 3-5. Representación gráfica de  $1/R'$  en función de  $1/R$  para la lente esférica divergente (puntos  $\square$ ) y para la lente cilíndrica (puntos  $\blacktriangle$ ).

Para los datos de la Tabla 3-3 los resultados obtenidos son

$$a = (8'351 \pm 0'004) \times 10^{-1} \text{ ,}$$

$$b = (-2'677 \pm 0'008) \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \text{ ,}$$

$$r^2 = 0'9999 \text{ ,}$$

por lo que, a partir de la Ec.(3-3), resulta para la focal  $f$  de la lente divergente el valor

$$f = (-341'4 \pm 1'0) \text{ mm} \text{ .}$$

Para la lente cilíndrica los resultados obtenidos, utilizando los datos de la Tabla 3-4, son

$$a = (2'1792 \pm 0'0004) \text{ ,}$$

$$b = (-1'172 \pm 0'001) \times 10^{-2} \text{ mm}^{-1} \text{ ,}$$

$$r^2 = 0'9999 \text{ ,}$$

$$f = (126'0 \pm 0'1) \text{ mm} \text{ .}$$

A continuación vamos a discutir la segunda aplicación del efecto Talbot desarrollada: el procedimiento para generar en un plano fijo un patrón periódico cuya frecuencia espacial se puede variar continuamente dentro de un cierto intervalo.

### III.4 Red de frecuencia continuamente variable

Usualmente, la calidad de los sistemas ópticos formadores de imágenes se evalúa a partir de su función de transferencia en el dominio frecuencial. Según cuál sea el grado de coherencia de la radiación monocromática que ilumina el objeto, para un mismo sistema se tiene una función de transferencia distinta. En el caso de iluminación incoherente esta función se denomina función de transferencia óptica —"optical transfer function", OTF—. Frecuentemente, es el módulo de la OTF, que se conoce como la función de transferencia de modulación —"modulation transfer function", MTF—, el que se utiliza para valorar las prestaciones del sistema óptico. Aunque la caracterización que así se tiene de éste es incompleta, ya que se pierde la información sobre cómo se altera la fase relativa de las diferentes componentes espectrales, la MTF, cuya determinación experimental es más sencilla que la de la OTF, proporciona una descripción suficientemente útil del sistema formador de imágenes.

La medida de la MTF del ojo o de cualquier otro sistema óptico se realiza, normalmente, a partir de la imagen que éste forma bien de diversas redes, cada una de ellas con una frecuencia espacial diferente, bien de un único patrón que contiene un conjunto de redes de diferentes frecuencias. En cualquiera de estos dos procedimientos, la medida de la MTF se realiza para valores discretos de la frecuencia espacial. El método, basado en el fenómeno de autoimágenes, que describimos a continuación permite generar en un plano fijo un patrón unidimensional cuya frecuencia se puede variar de forma continua.

Consideremos la situación representada en la Fig.3-6, en la que una fuente puntual monocromática ilumina una red de difracción monodimensional (por ejemplo, una red cuadrada). Sea  $R$  la distancia a la que se localiza la autoimagen de índice  $P$  (semientero, para incluir también a las autoimágenes negativas) de la red, cuyo aumento  $\mathcal{M}$  viene dado por la Ec.(2-12). Nuestra intención es utilizar esta autoimagen como un patrón periódico cuya frecuencia espacial se puede sintonizar variando simplemente las distancias  $z$  y  $R$ .

En la sección II.2 se demostró que para obtener el patrón de Fresnel de índice  $\alpha$  de una abertura cualquiera con un determinado aumento  $\mathcal{M}$ , las distancias  $z$  y  $R$  que deben mediar, respectivamente, entre la fuente puntual y la abertura objeto y entre ésta y el plano de observación, han de satisfacer las Ecs.(2-14) y (2-15). En el caso particular que nos interesa, es decir, para la autoimagen de índice  $P$  de la red,  $\alpha$  viene dado por la Ec.(2-53), por lo que se tiene

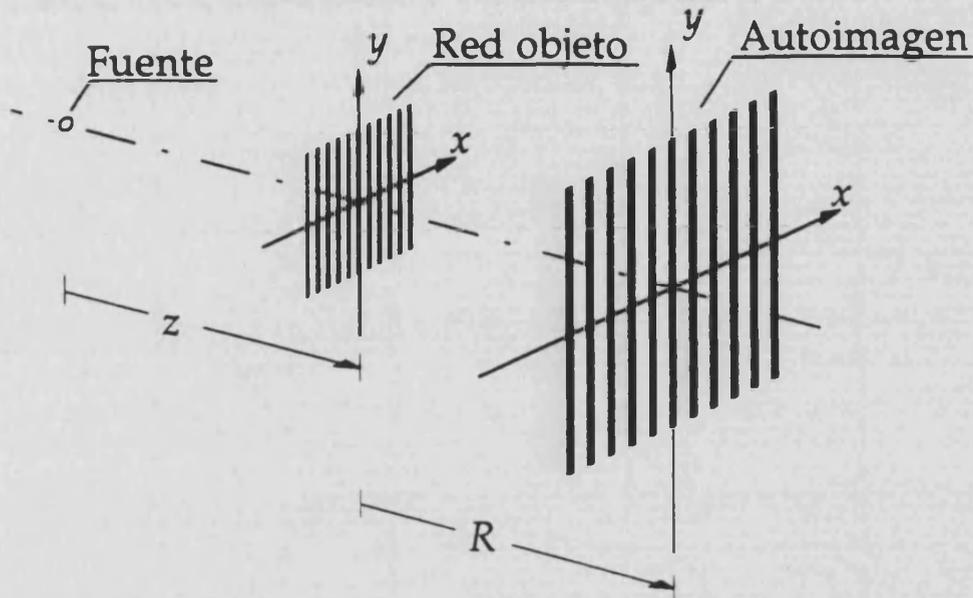


Fig. 3-6. La dependencia del aumento de las autoimágenes con las distancias  $z$  y  $R$ , permite seleccionar su período.

$$z = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}-1} 2P \frac{d^2}{\lambda} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}-1} P z_T, \quad (3-5)$$

$$y \quad R = \mathcal{M} 2P \frac{d^2}{\lambda} = \mathcal{M} P z_T, \quad (3-6)$$

siendo  $z_T$  la distancia de Talbot de la red objeto.

Para cada valor de  $\mathcal{M}$  mayor que cero, las Ecs.(3-5) y (3-6) proporcionan, respectivamente, los valores de las distancias axiales  $z$  y  $R$  que permiten obtener en el plano de observación la autoimagen de índice  $P$  con un período  $d' = \mathcal{M}d$ . En la Fig.3-7 se ha representado la variación de  $z/Pz_T$  y de  $R/Pz_T$ , respecto a  $\mathcal{M}$ . Los valores de  $\mathcal{M} > 1$  corresponden al caso, representado en la Fig.3-6, de iluminación esférica divergente. Ahora bien, las Ecs.(3-5) y (3-6) son también válidas cuando la onda que incide en la red es convergente. Para esta situación, la distancia  $z$  es negativa y el período de las autoimágenes de índice positivo es menor que el de la red objeto, es decir,  $0 < \mathcal{M} < 1$ . El valor  $\mathcal{M} = 1$  corresponde a iluminación plana.

De esta manera, se puede obtener un patrón periódico con una frecuencia espacial mayor o menor que la de la red original. Para seleccionar su frecuencia y que el plano de observación permanezca fijo basta con modificar las distancias desde la fuente y la red objeto a dicho plano. El patrón que así se genera, puede ser utilizado para evaluar la respuesta frecuencial de los sistemas coherentes formadores de imágenes. Obsérvese que en la técnica propuesta sólo se emplea una fuente puntual y una única red de difracción. Por otro lado, si sobre el plano de observación se coloca un vidrio difusor giratorio, se obtiene un patrón que ahora resulta válido para la medida de la

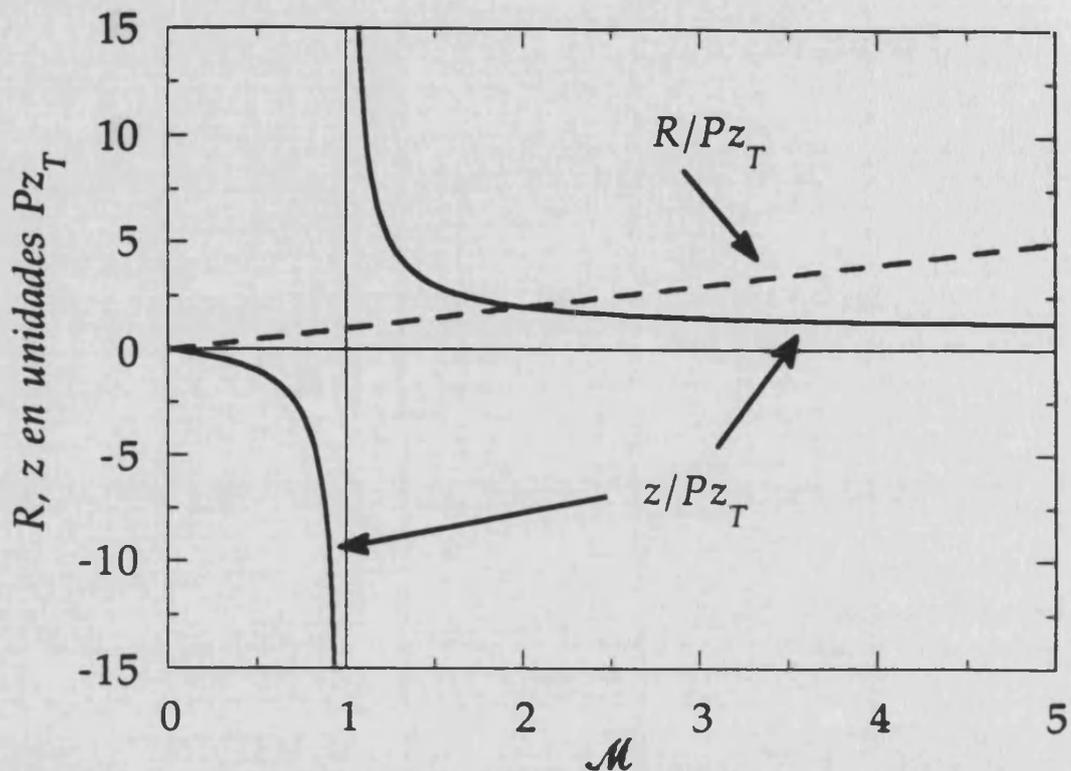


Fig. 3-7. Representación gráfica de  $z/Pz_T$  y  $R/Pz_T$  en función del aumento  $\mathcal{M}$  de la autoimagen de índice  $P$  ( $P>0$ ) de la red.

MTF de un sistema óptico. El vidrio deslustrado en movimiento rompe la coherencia existente entre dos puntos cualesquiera de la autoimagen de la red, con lo que ésta así se comporta como un patrón periódico iluminado por una fuente extensa.

A continuación vamos a proporcionar un ejemplo y algunos resultados experimentales que ilustran el método propuesto.

### III.5 Verificación experimental

Supongamos que, utilizando esta técnica, queremos generar un patrón cuyo período se puede variar entre dos valores extremos  $d'_m$  y  $d'_M$  ( $d'_m < d'_M$ ). Para fijar ideas, vamos a limitarnos a considerar la situación correspondiente a iluminación divergente ( $\mathcal{M}>1$ ). Sean  $\mathcal{M}_m$  y  $\mathcal{M}_M$  los valores del aumento  $\mathcal{M}$  que hacen que el período del test generado con una red de período  $d$ , sea respectivamente  $d'_m$  y  $d'_M$ . Esto es,

$$\mathcal{M}_m = \frac{d'_m}{d} \quad (3-7)$$

$$\text{y } \mathcal{M}_M = \frac{d'_M}{d} \quad (3-8)$$

Si se define el parámetro  $c$  como

$$c = \frac{d'_M}{d'_m} , \quad (3-9)$$

se tiene que  $\mathcal{M}_M = c\mathcal{M}_m$ . Para que en el plano de observación el período  $d'$  del patrón varíe entre  $d'_m$  y  $d'_M$ , es suficiente con que el aumento lo haga a su vez entre  $\mathcal{M}_m$  y  $c\mathcal{M}_m$ .

Por otro lado, la longitud total  $L$  (distancia entre la fuente puntual y el plano de observación) del dispositivo de la Fig.3-6 es

$$L = z + R = \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M} - 1} P z_T , \quad (3-10)$$

donde se han utilizado las Ecs.(3-5) y (3-6). En la Fig.3-8 se ha representado la variación de esta distancia (expresada en unidades  $Pz_T$ ) con el parámetro  $\mathcal{M}$ . Obsérvese que esta función toma su valor mínimo en  $\mathcal{M}=2$ , donde  $L=4Pz_T$ . Para nuestro propósito y con la intención de que el dispositivo experimental sea lo más compacto posible, interesa que el intervalo de valores de  $\mathcal{M}$  a utilizar incluya dicho valor mínimo. Por este motivo, vamos a exigir que para los valores extremos  $\mathcal{M}_m$  y  $c\mathcal{M}_m$  del aumento requerido la longitud  $L$  del dispositivo sea la misma. Obsérvese, tal y como se indica en la Fig.3-8, que, de este modo, esta longitud es mayor que la

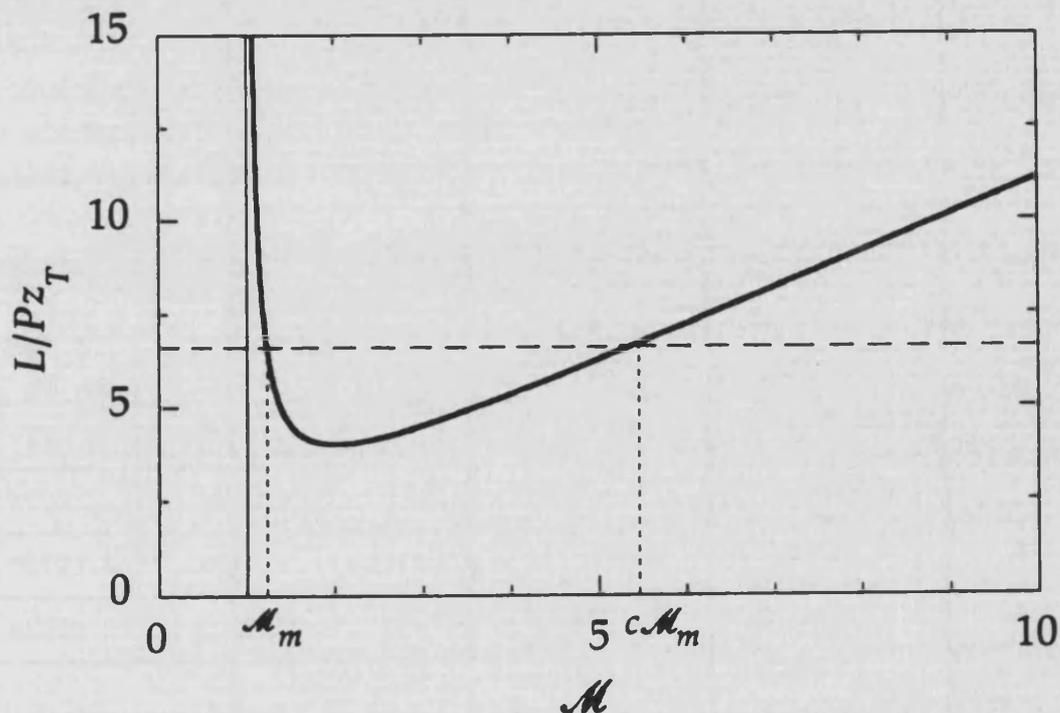


Fig. 3-8. Representación gráfica de  $L/Pz_T$  para  $\mathcal{M} > 1$ .

correspondiente a valores intermedios del aumento. Llevando la anterior condición a la Ec.(3-10) resulta

$$\frac{\mathcal{M}_m^2}{\mathcal{M}_m - 1} P z_T = \frac{c^2 \mathcal{M}_m^2}{c \mathcal{M}_m - 1} P z_T$$

$$\frac{1}{\mathcal{M}_m - 1} = \frac{c^2}{c \mathcal{M}_m - 1}$$

$$\mathcal{M}_m (c^2 - c) = c^2 - 1$$

$$\mathcal{M}_m = \frac{c^2 - 1}{c^2 - c} \quad (3-11)$$

Llevando este resultado a la Ec.(3-7) y despejando el valor de  $d$ , se obtiene

$$d = \frac{c^2 - 1}{c^2 - c} d'_m \quad (3-12)$$

Esta ecuación determina, dados los valores de  $d'_m$  y  $c$ , el período  $d$  de la red objeto con el que se satisfacen las condiciones exigidas.

Por otra parte, obsérvese que el índice  $P$  de la autoimagen utilizada es también un parámetro a elegir. Siguiendo el criterio de hacer lo más compacto posible el dispositivo interesa, en general, emplear la primera autoimagen negativa de la red ( $P=0'5$ ).

Veamos a continuación un ejemplo numérico que resume este procedimiento. La agudeza visual de un ojo humano normal es del orden de un minuto de arco. Para una distancia de observación de un metro esta separación angular corresponde, en un test visual periódico, a un período espacial de alrededor de 0'5mm. Supongamos que queremos disponer de un test visual cuyo período  $d'$  se pueda variar en torno a este valor. En particular, consideremos que los valores extremos de interés son

$d'$	0'1	0'25	0'5	0'75	1
$\mathcal{M}$	1'1	2'75	5'5	8'25	11
$z$	143'95	20'56	15'9	14'89	14'39
$R$	14'39	35'99	71'97	107'96	143'95
$L$	158'34	56'55	87'96	122'85	158'34

Tabla 3-5. Ejemplo numérico adaptado para generar un test visual de período sintonizable a partir de una única red de período  $d=0'091mm$  (se ha tomado  $\lambda=632'8nm$  y  $P=0'5$ ). Todas las distancias están expresadas en mm. En todos los casos la longitud  $L$  es menor de 16cm.

$d'_m=0.1\text{mm}$  y  $d'_M=1\text{mm}$ . A partir de la Ec.(3-9) resulta  $c=10$ , y de la Ec.(3-12) se obtiene para el período de la red objeto a utilizar el valor  $d=0.091\text{mm}$ . Para la longitud de onda del láser de He-Ne ( $\lambda=632.8\text{nm}$ ), la distancia de Talbot de esta red es  $z_T=26.1\text{mm}$ . En la Tabla 3-5 se muestran las distancias  $z$  y  $R$  adecuadas para obtener, utilizando la primera autoimagen negativa de la red ( $P=0.5$ ), ciertos valores particulares de  $d'$ .

Las fotografías de la Fig.3-9, correspondientes a algunos de los ejemplos numéricos anteriores, se han obtenido en la verificación experimental de esta técnica. Para generar la fuente puntual monocromática que iluminaba la red objeto, se utilizaron

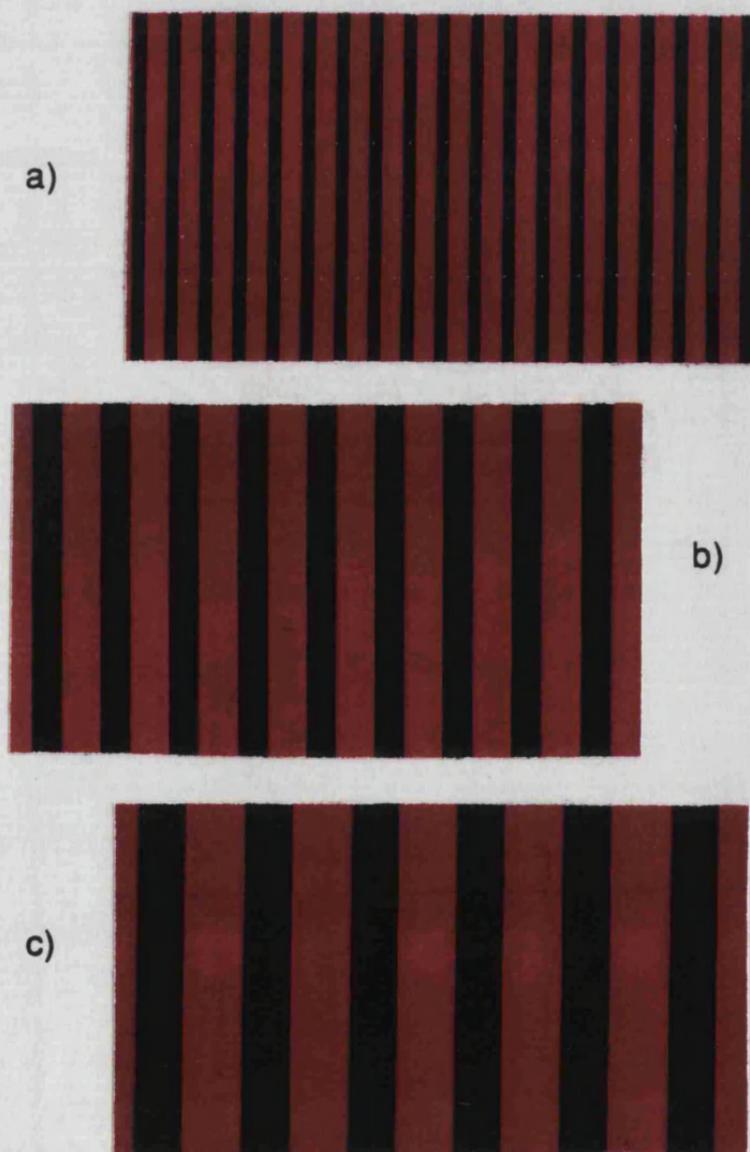


Fig. 3-9. Diferentes distribuciones de irradiancia (aumentadas) del patrón periódico variable correspondientes a los valores particulares de la Tabla 3-5 con: a)  $\mathcal{N}=2.75$ , b)  $\mathcal{N}=5.5$  y c)  $\mathcal{N}=8.25$ .

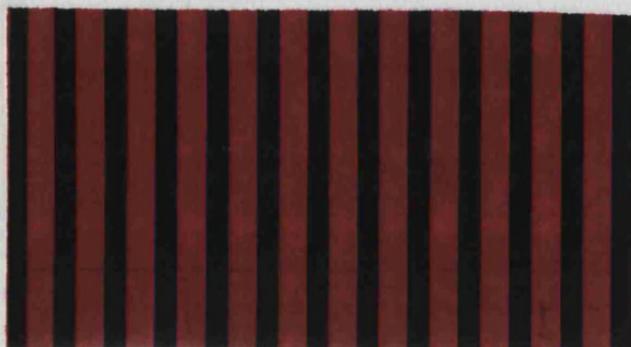


Fig. 3-10. Patrón periódico incoherente obtenido con una red de período  $d=0'091mm$ . En este caso,  $\mathcal{M}=4'13$ ,  $z=17'27mm$  y  $R=54'05mm$ . La cámara fotográfica se enfocó directamente al plano del vidrio difusor giratorio.

los elementos empleados anteriormente en el dispositivo experimental de la sección III.3. Sin embargo, con objeto de poder variar de forma sencilla la posición axial de la fuente puntual a continuación del filtro espacial se colocó una lente de 50mm de focal. De este modo, la imagen que ésta formaba de la fuente proporcionada por el filtro espacial actuaba como fuente puntual real del dispositivo. Variando las posiciones de la lente y de la red objeto a lo largo del eje se obtenían los valores de  $z$  y  $R$  deseados, sin modificar la posición del plano de observación.

Por último, en la Fig.3-10 se muestra la distribución de irradiancia que se obtiene cuando se sitúa un vidrio deslustrado giratorio sobre el plano de observación. El patrón que así resulta puede ser utilizado para la medida de la MTF de un sistema formador de imágenes.

## III.6 Conclusiones

En este capítulo se han desarrollado dos nuevas técnicas metrológicas, que se apoyan en la formación de autoimágenes con luz coherente.

Por un lado, se ha descrito un método para la medida de longitudes focales, que es aplicable a lentes gruesas, tanto convergentes como divergentes, y requiere solamente la medida de distancias axiales. En concreto, para diferentes autoimágenes de una red 1-D, generadas indistintamente con iluminación esférica o plana, se mide primero la distancia  $R$  existente entre cada una de ellas y la propia red objeto —o, en su defecto, una autoimagen particular de ella—, que actúa como red de referencia. Después, se repite este procedimiento con las correspondientes imágenes que la lente forma de la red de referencia y de las autoimágenes seleccionadas. De este modo, se obtienen las

distancias  $R'$ , conjugadas de las anteriores. A continuación, para este conjunto de datos experimentales se obtiene, mediante un ajuste lineal por mínimos cuadrados, la recta de regresión de  $1/R'$  frente a  $1/R$ . Por último, a partir de la pendiente y de la ordenada en el origen de esta recta, se determina el valor de la distancia focal  $f$  del sistema óptico problema. La precisión que se obtiene en la medida de  $f$  es similar a la que poseen los valores de  $R$  y  $R'$ , por lo que se puede conseguir, fácilmente, que ésta sea elevada.

La técnica propuesta es aplicable también a lentes cilíndricas, ya que utiliza un dispositivo monodimensional. Para ello, se debe orientar la red 1-D de modo que sus líneas estén dispuestas perpendicularmente a la dirección en la que es activa la lente.

Como comprobación experimental de sus posibilidades, esta técnica se ha utilizado para determinar la longitud focal, conocida previamente, de un objetivo compuesto convergente. En las dos series independientes de medidas realizadas, los valores obtenidos para  $f$  son prácticamente coincidentes, tanto entre sí como con el valor prescrito por el fabricante. Se ha medido además la distancia focal de una lente esférica divergente y de una lente cilíndrica convergente. De nuevo, los resultados obtenidos han sido completamente satisfactorios en ambos casos. A la vista de todos estos resultados experimentales, se puede concluir que la precisión de este método de medida de focales se puede estimar en un valor entorno al 0'3%. Asimismo, excluyendo posibles errores sistemáticos, la fiabilidad del método es alta, al obtenerse  $f$  a partir de un ajuste lineal por mínimos cuadrados con un coeficiente de correlación que, en todas las series de medidas realizadas, ha sido superior a 0'9999.

Como resultado complementario, la técnica desarrollada permite determinar también la localización de los elementos cardinales —puntos focales y principales— del sistema óptico bajo prueba.

Por otro lado, se ha desarrollado un procedimiento para generar en un plano fijo un patrón periódico de frecuencia espacial sintonizable. El método propuesto, que aprovecha la variación de escala que exhiben las autoimágenes generadas con iluminación esférica, requiere tan sólo el empleo de una fuente puntual monocromática y de una red de difracción 1-D. La selección de la frecuencia del patrón periódico resultante —una autoimagen de la red 1-D— se realiza modificando las distancias existentes entre la fuente puntual y la red objeto con el plano de observación. El patrón que se obtiene de este modo es directamente utilizable para evaluar la respuesta frecuencial, bajo iluminación coherente, de un sistema formador de imágenes. El empleo de un vidrio deslustrado giratorio, situado sobre el plano de observación, permite extender su utilización al caso de los sistemas iluminados con luz incoherente.

Se ha discutido también un ejemplo de aplicación de esta técnica para producir un test visual de período continuamente variable. Los resultados obtenidos en la comprobación experimental de este supuesto han sido satisfactorios.

## III.7 Referencias

- [III-1] K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Prog. Opt.* **27**, 3-108 (1989).
- [III-2] A.W. Lohman and D.E. Silva, "An interferometer based on the Talbot effect", *Opt. Commun.* **2**, 413-415 (1971).
- [III-3] S. Yokozeki and T. Suzuki, "Shearing interferometer using the grating as the beam splitter", *Appl. Opt.* **10**, 1575-1580 (1971).
- [III-4] D.E. Silva, "Talbot interferometer for radial and lateral derivatives", *Appl. Opt.* **11**, 2613-2624 (1972).
- [III-5] P. Szwaykowski, "Self-imaging in polar coordinates", *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 185-191 (1988).
- [III-6] H. Kaijun, J. Jahns, and A.W. Lohmann, "Talbot interferometry with a vibrating phase object", *Opt. Commun.* **45**, 295-300 (1983).
- [III-7] Y. Nakano and K. Murata, "Measurements of phase objects using the Talbot effect and moiré techniques", *Appl. Opt.* **23**, 2296-2299 (1984).
- [III-8] L.M. Bernardo and O.D.D. Soares, "Evaluation of the focal distance of a lens by Talbot interferometry", *Appl. Opt.* **27**, 296-301 (1988).
- [III-9] A.W. Lohmann, *Optical Information Processing* (Univ. Erlangen, 1978), pág. 104.
- [III-10] P. Chavel and T.C. Strand, "Range measurement using Talbot diffraction imaging of gratings", *Appl. Opt.* **23**, 862-871 (1984).
- [III-11] B. Packcross, R. Eschbach, and O. Bryngdahl, "Image synthesis using self imaging", *Opt. Commun.* **56**, 394-398 (1986).
- [III-12] O. Bryngdahl, "Image formation using self-imaging techniques", *J. Opt. Soc. Am.* **63**, 416-419 (1973).
- [III-13] A. Kołodziejczyk, "Lensless multiple image formation by using a sampling filter", *Opt. Commun.* **59**, 97-102 (1986).
- [III-14] H. Dammann, G. Groh, and M. Kock, "Restoration of faulty images of periodic objects by means of self-imaging", *Appl. Opt.* **10**, 1454-1455 (1971).

- [III-15] J. Ojeda-Castañeda and E.E. Sicre, "Tunable bandstop filter for binary objects: a self-imaging technique", *Opt. Commun.* 47, 183-186 (1983).
- [III-16] Z. Jaroszewicz and A. Kołodziejczyk, "Application of self-imaging to the production of gratings with asymmetrical groove profile", *Opt. Commun.* 55, 73-76 (1985).
- [III-17] D.C. Flanders, A.M. Hawryluk, and H.I. Smith, "Spatial period division — A new technique for exposing submicrometer-linewidth periodic and quasi-periodic patterns", *J. Vac. Sci. Technol.* 16, 1949-1952 (1979).
- [III-18] P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and J.C. Barreiro, "Focal length measuring technique using the Talbot effect", *Proc. SPIE* 701, 273-275 (1987).
- [III-19] P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and J.C. Barreiro, "Continuously variable periodic test target", *Proc. SPIE* 813, 257-258 (1987).
- [III-20] J. Berty et al., *Physique Pratique* (Vuibert, 1977), pág. 87.
- [III-21] R.S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics* (Longman, 1973), pág. 22.
- [III-22] Idem Ref. [III-20], pág. 89.
- [III-23] A. Moussa et P. Ponsonnet, *Cours de Physique I, Optique* (Desvigné, 1977), cap. 20.
- [III-24] G.L. Squires, *Física Práctica* (McGraw-Hill, 1972), pág. 36.

# IV. El efecto Lau

## IV.1 Introducción

El efecto Talbot requiere el empleo de una fuente de luz de alta coherencia espacial. Así, por ejemplo, las autoimágenes de una estructura periódica desaparecen cuando se aumentan las dimensiones laterales de la fuente que la ilumina. Sin embargo, se pueden obtener patrones de franjas semejantes a las autoimágenes iluminando la red objeto con una fuente extensa convenientemente codificada. De este modo, empleando dos redes de amplitud unidimensionales idénticas, orientadas paralelamente y separadas una determinada distancia, que depende del período de las redes y de la longitud de onda de la radiación incoherente incidente, se obtienen, en el infinito, franjas rectilíneas de alto contraste [IV-1]. La primera red de este dispositivo actúa como fuente incoherente codificada linealmente, mientras que la segunda lo hace como transparencia objeto. Este fenómeno de difracción se conoce como efecto Lau.

Se han dado diferentes explicaciones para la formación de las franjas de Lau. Estas interpretaciones se basan en la teoría de la difracción [IV-2], en la teoría de la coherencia [IV-3 y IV-4], en la OTF de un sistema [IV-5], en las funciones de Bloch [IV-6] o de Walsh [IV-7], en las propiedades de un interferómetro de doble red [IV-8 y IV-9], en la utilización de una representación dual espacio-fase [IV-10], o en la descripción de estas franjas como la superposición incoherente en consonancia bien de espectros de Fourier virtuales [IV-11], bien de autoimágenes [IV-12]. Desde este último punto de vista, para obtener franjas de Lau es necesario conseguir la superposición en consonancia, en un plano, de múltiples versiones incoherentes de alguna autoimagen de la red objeto. Esta perspectiva pone claramente de manifiesto la estrecha relación que existe entre el efecto Talbot y el efecto Lau y muestra cómo este primer fenómeno determina las características de los dispositivos de doble red, tanto para iluminación coherente como incoherente. Asimismo, esta interpretación ha permitido obtener, generalizando el dispositivo original, franjas de Lau a distancia finita con dos redes de diferente período [IV-12 y IV-13]; franjas equivalentes a las de Lau con alto contraste e irradiancia empleando una red de fase —red objeto— [IV-14] o dos —red objeto y red fuente— [IV-15]; franjas de Lau de aumento unidad [IV-16], colocando la red fuente en el plano focal objeto de una lente convergente, y anillos de Lau [IV-17], codificando en este caso la fuente a lo largo del eje del sistema.

El efecto Lau se ha utilizado para diseñar un vasto conjunto de técnicas muy simples y versátiles que funcionan con luz espacialmente incoherente [IV-18]. En ellas se intenta aunar la sencillez característica de los sistemas basados en el fenómeno de autoimágenes y las ventajas de la iluminación incoherente [IV-19 y IV-20], como son la mejor relación señal-ruido y las menores exigencias, en cuanto a estabilidad y tipos de fuentes de luz utilizables, de los dispositivos.

Por una parte, este fenómeno se ha empleado para desarrollar diversos interferómetros mono y bidimensionales que trabajan con luz incoherente [IV-17 y IV-21 a IV-25]. Dentro del procesado óptico de información, las propiedades inherentes de filtraje espacial que exhibe la configuración de Lau han permitido realizar filtraje espacial con luz incoherente [IV-16, IV-26 y IV-27]. La alta sensibilidad de las franjas de Lau al paralelismo entre las líneas de las redes objeto y fuente se ha aprovechado para decodificar objetos theta-modulados codificados con redes de amplitud [IV-28 y IV-29] o de fase [IV-30]. La dependencia con la longitud de onda de este fenómeno se ha utilizado para producir pseudocoloración de frecuencias espaciales [IV-31]. Otros ejemplos de aplicaciones basadas en el efecto Lau, dentro de este área, son su uso para realizar procesado no coherente [IV-32] o para diseñar un sintetizador de imágenes incoherente [IV-33].

También se ha estudiado las características del efecto Lau clásico cuando la iluminación incidente sobre el montaje de doble red es parcialmente coherente. Así, se demuestra que la sensibilidad de las franjas al giro de una de las redes del dispositivo depende del grado de coherencia espacial de la radiación incidente [IV-34 y IV-35]. Este hecho permite medir el grado de coherencia de la radiación que ilumina la red fuente [IV-36]. Por otro lado, la interferometría de tipo Lau se ha extendido asimismo al caso de iluminación parcialmente coherente [IV-37].

En este capítulo se establecen las condiciones para obtener franjas equivalentes a las de Lau con diversos dispositivos que suponen, de hecho, una generalización del montaje original del experimento de Lau. El tratamiento que se sigue unifica, en cierto modo, los de las Refs. [IV-2 y IV-12], por lo que parece más general y simple. En la sección IV.2 se examinan las características del campo difractado por una transparencia objeto iluminada por una fuente plana espacialmente incoherente. Este estudio preliminar permite, en la sección IV.3, explicar de una manera muy sencilla, aprovechando los resultados del Capítulo II, la formación de franjas de difracción unidimensionales de alto contraste, tanto a distancia finita como infinita, como el resultado de la superposición incoherente en consonancia bien de autoimágenes —franjas de Lau—, bien de otros patrones de difracción de Fresnel de una red 1-D —patrones de Lau—. Estas últimas figuras de difracción son, pues, una generalización de las mencionadas previamente. Los resultados de la sección IV.2 permiten, igualmente, justificar de forma directa la influencia de diversos parámetros de la red fuente en el perfil de las franjas y patrones de Lau. En la sección IV.4 se extiende el

estudio anterior a dos dimensiones, al abordar la consonancia de patrones de Fresnel de redes bidimensionales. La sección IV.5 se dedica a la formación de franjas de tipo Lau, de máximo contraste e irradiancia, con un dispositivo que opera con dos redes puras de fase. Parte de todos estos resultados ya han sido publicados [IV-14 y IV-15].

## IV.2 Difracción con una fuente plana incoherente

Supóngase una fuente plana de luz monocromática espacialmente incoherente que ilumina una abertura semitransparente, localizada a una distancia  $z$  de ella, tal y como se indica en la Fig.4-1. Estamos interesados en calcular la distribución de irradiancia  $I(x,y)$  que se obtiene en un plano situado a una distancia arbitraria,  $R$ , de la abertura. Sea  $I_S(x,y)$  la distribución de irradiancia, normalizada, de la fuente. Como ésta es incoherente, la función  $I(x,y)$  se obtiene, de acuerdo con el principio de superposición, sumando la contribución a la irradiancia de cada uno de los puntos emisores  $S'$  que componen la fuente, es decir,

$$I(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_S(\mu,\nu) I_R(x,y;\mu,\nu) d\mu d\nu \quad (4-1)$$

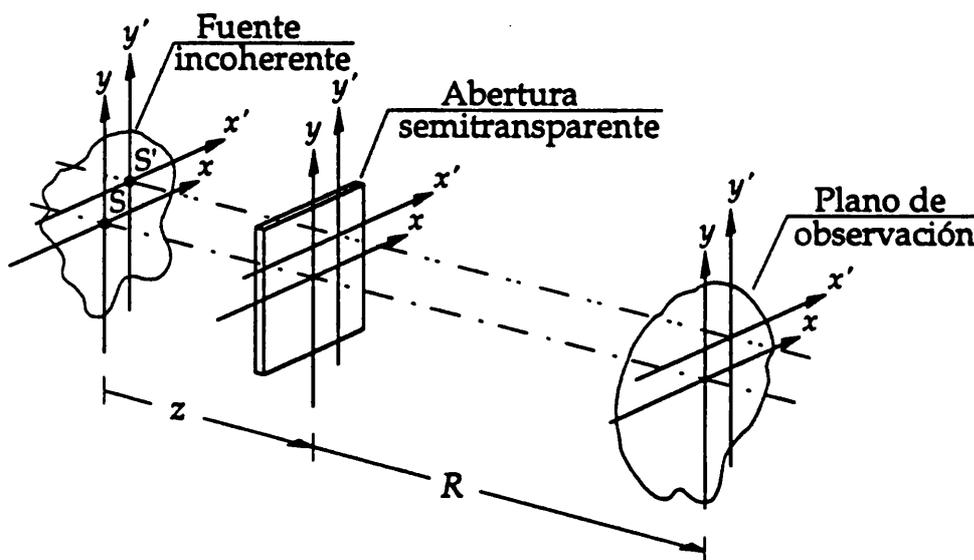


Fig. 4-1. Esquema del dispositivo para estudiar la difracción de Fresnel con una fuente plana incoherente. El sistema auxiliar de coordenadas  $(x',y')$  permite valorar fácilmente la distribución de irradiancia que genera, en el plano de observación, cada radiador elemental,  $S'$ , de la fuente extensa.

donde  $I_R(x,y;\mu,\nu)$  es la distribución de irradiancia que genera, en el plano de observación, el punto emisor de la fuente de coordenadas  $(\mu,\nu)$ . Esta distribución será igual al módulo cuadrado de la repartición de amplitudes  $U_R(x,y;\mu,\nu)$  que genera, en el plano de observación, el objeto  $t(x,y)$  iluminado por la fuente puntual considerada. Para calcular  $U_R(x,y;\mu,\nu)$  definamos un nuevo sistema de coordenadas  $(x',y')$  con origen en el punto S'. Sea  $t'(x',y')$  la transmitancia en amplitud del objeto en este sistema de coordenadas. Puesto que

$$x' = x - \mu \quad , \quad (4-2a)$$

$$y' = y - \nu \quad , \quad (4-2b)$$

se tiene

$$t'(x',y') = t(x'+\mu,y'+\nu) \quad . \quad (4-3)$$

Teniendo en cuenta que de este modo la fuente S' está situada en el eje del sistema, la distribución de amplitud  $U_R(x',y')$  —o, equivalentemente,  $U_R(x,y;\mu,\nu)$ — que se obtiene a una distancia R de la transparencia viene dada, de manera inmediata a partir de la Ec.(2-13), por

$$U_R(x',y') = \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ik \frac{x'^2 + y'^2}{2(z+R)}\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}'(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp\left(i2\pi \frac{ux'+vy'}{\mathcal{M}}\right) du dv \quad , \quad (4-4)$$

donde  $\alpha$  y  $\mathcal{M}$  satisfacen, respectivamente, las Ecs.(2-11) y (2-12). Por otro lado, considerando la Ec.(4-3), se obtiene

$$\tilde{t}'(u,v) = \exp[i2\pi(\mu u + \nu v)] \tilde{t}(u,v) \quad ,$$

donde se ha utilizado la propiedad de la transformación de Fourier relativa a un desplazamiento en el argumento de la función. Usando esta relación y las Ecs.(4-2), la Ec.(4-4) se puede reescribir como

$$U_R(x',y') = U_R(x,y;\mu,\nu) = \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ik \frac{(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2}{2(z+R)}\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[i2\pi(\mu u + \nu v)] \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp\left[i2\pi \frac{u(x-\mu) + v(y-\nu)}{\mathcal{M}}\right] du dv =$$

$$= \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ ik \frac{(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2}{2(z+R)} \right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(u,v) \exp[-i\pi(u^2+v^2)\lambda\alpha] \exp\left\{ i2\pi \frac{u[x + (\mathcal{M}-1)\mu] + v[y + (\mathcal{M}-1)\nu]}{\mathcal{M}} \right\} du dv .$$

Definiendo el parámetro

$$\mathcal{M}_S = \mathcal{M} - 1 , \quad (4-5)$$

y teniendo en cuenta la Ec.(2-19), finalmente, se obtiene

$$U_R(x,y;\mu,\nu) = \frac{z \exp(ikR)}{z+R} \exp\left[ ik \frac{(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2}{2(z+R)} \right] t_\alpha\left( \frac{x + \mathcal{M}_S\mu}{\mathcal{M}}, \frac{y + \mathcal{M}_S\nu}{\mathcal{M}} \right) . \quad (4-6)$$

Esta última expresión establece que en el plano de observación cada uno de los puntos radiantes de la fuente extensa plana proporciona, con la misma escala, el patrón de Fresnel,  $t_\alpha(x,y)$ , que genera el punto fuente S situado en el eje del sistema —véase la Ec.(2-21)—. Ahora bien, el centro del patrón depende de las coordenadas  $(\mu,\nu)$  en que se localiza el punto emisor S' que lo genera. Obsérvese asimismo que el factor de fase no constante de la Ec.(4-6) corresponde a la onda esférica emitida por S' y también que esta ecuación se reduce a la Ec.(2-21) cuando se considera el punto emisor S de la fuente, es decir, cuando  $(\mu,\nu)=(0,0)$ ,  $U_R(x,y;0,0)=U_R(x,y)$ .

Introduciendo en la Ec.(4-5) la definición de  $\mathcal{M}$ , Ec.(2-12), se tiene

$$\mathcal{M}_S = \frac{R}{z} , \quad (4-7)$$

por lo que el patrón de Fresnel de la Ec.(4-6) está centrado en el punto de coordenadas  $(-R\mu/z, -R\nu/z)$ . La posición de este punto se puede visualizar geoméricamente mediante la intersección de la recta que une la fuente S' y el punto axial O de la transparencia con el plano de Fresnel considerado, tal y como se indica en la Fig.4-2.

Como  $I_R(x,y;\mu,\nu) = |U_R(x,y;\mu,\nu)|^2$ , a partir de la Ec.(4-6) resulta

$$I_R(x,y;\mu,\nu) = \left( \frac{z}{z+R} \right)^2 \left| t_\alpha\left( \frac{x + \mathcal{M}_S\mu}{\mathcal{M}}, \frac{y + \mathcal{M}_S\nu}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \right)^2 \left| t_\alpha\left( \frac{x + \mathcal{M}_S\mu}{\mathcal{M}}, \frac{y + \mathcal{M}_S\nu}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 .$$

Llevando este resultado a la Ec.(4-1) se obtiene

$$I(x,y) = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} I_S(\mu,\nu) \left| t_\alpha\left( \frac{x + \mathcal{M}_S\mu}{\mathcal{M}}, \frac{y + \mathcal{M}_S\nu}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 d\mu d\nu ,$$

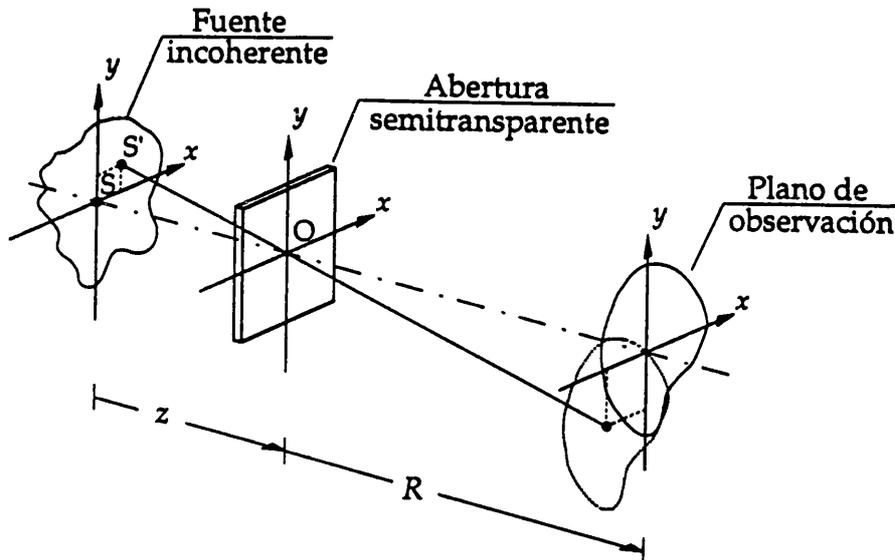


Fig. 4-2. Cada uno de los puntos emisores elementales de la fuente genera el mismo patrón de Fresnel, pero desplazado lateralmente de tal modo que su centro coincide siempre con la proyección geométrica del punto fuente que lo genera, a través del punto O.

y haciendo el cambio de variables  $\mu' = -\mathcal{M}_s \mu$  y  $v' = -\mathcal{M}_s v$ , resulta

$$\begin{aligned}
 I(x,y) &= \left( \frac{1}{\mathcal{M}_s \mathcal{M}_s} \right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} I_s \left( \frac{-\mu'}{\mathcal{M}_s}, \frac{-v'}{\mathcal{M}_s} \right) \left| t_\alpha \left( \frac{x-\mu'}{\mathcal{M}}, \frac{y-v'}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 d\mu' dv' = \\
 &= \left( \frac{1}{\mathcal{M}_s \mathcal{M}_s} \right)^2 \left\{ I_s \left( \frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s} \right) * \left| t_\alpha \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \right\} , \quad (4-8)
 \end{aligned}$$

donde  $*$  representa la operación de convolución. Recordando que esta operación es conmutativa y que para dos funciones cualesquiera  $f(x)$  y  $g(x)$  se satisface la relación  $f(x) * g(x) = f(x) \otimes g^*(-x)$ , donde  $\otimes$  denota la operación de correlación, finalmente se obtiene

$$I(x,y) = \left( \frac{1}{\mathcal{M}_s \mathcal{M}_s} \right)^2 \left\{ \left| t_\alpha \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \otimes I_s \left( \frac{x}{\mathcal{M}_s}, \frac{y}{\mathcal{M}_s} \right) \right\} . \quad (4-9)$$

Por lo tanto, la propagación libre bajo iluminación espacialmente incoherente implica una operación de correlación entre dos funciones bien definidas: el patrón de Fresnel, en irradiancia, que se obtiene en el plano de observación y la distribución de irradiancia de la fuente [IV-2 y IV-38]. Este hecho ha sido convenientemente utilizado en el diseño de correladores ópticos que operan con luz incoherente [IV-38], como se

verá en el Capítulo V de este trabajo. Asimismo, este resultado se va a emplear, a continuación, para analizar la formación y propiedades de las franjas de Lau.

### IV.3 Franjas de Lau y patrones de Lau

Particularicemos estos resultados para el caso concreto en que la fuente está compuesta por un número finito de líneas emisoras de ancho infinitesimal y de longitud  $\Omega$ , equidistantes entre sí y dispuestas en la dirección del eje  $y$ . La distribución de irradiancia normalizada,  $I_S(x,y)$ , de esta fuente es

$$I_S(x,y) = \frac{1}{(2L+1)\Omega} \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x - jd') \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right), \quad (4-10)$$

donde  $L$  es un número natural,  $d'$  es la separación entre líneas fuente sucesivas, y la función  $\operatorname{rect}(y)$  es no nula (e igual a uno) únicamente cuando  $|y| \leq 1/2$ . Obsérvese que la Ec.(4-10) representa una red lineal de extensión finita. Consideremos, asimismo, que el objeto es una red 1-D de período  $d$ , con sus líneas paralelas al eje  $y$ . En este caso, de acuerdo con la Ec.(2-63), se tiene

$$t(x,y) \equiv t(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right).$$

El patrón de Fresnel de la red objeto que se localiza en el plano de observación —a una distancia  $R$  de ella— se puede caracterizar, como en la Ec.(2-53), por un índice  $Q+q$ . De este modo, según la Ec.(2-66), se tiene

$$t_\alpha(x,y) \equiv t_q(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp(-i2\pi m^2 q) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C'_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right), \quad (4-11)$$

donde  $C'_m = C_m \exp(-i2\pi m^2 q)$ .

Para esta situación, la Ec.(4-9) se reduce a

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_S}\right)^2 \left\{ \left| t_q\left(\frac{x}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \otimes \left[ \frac{1}{(2L+1)\Omega} \sum_{j=-L}^{+L} \delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}_S} - jd'\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\Omega\mathcal{M}_S}\right) \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_S}\right)^2 \left[ \frac{1}{(2L+1)\Omega} \right] \left[ \left| t_q\left(\frac{x}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \otimes \sum_{j=-L}^{+L} \delta\left(\frac{x - j\mathcal{M}_S d'}{\mathcal{M}_S}\right) \right] \left[ 1 \otimes \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\Omega\mathcal{M}_S}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s} \right)^2 \left[ \frac{1}{(2L+1)\Omega} \left[ |\mathcal{M}_s| \sum_{j=-L}^{+L} \left| t_q \left( \frac{x}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \otimes \delta(x - j\mathcal{M}_s d') \right] \Omega |\mathcal{M}_s| \right] = \\
&= \left[ \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \right] \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \left| t_q \left( \frac{x + j\mathcal{M}_s d'}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \right], \quad (4-12)
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que  $f(x) \otimes \delta(x-a) = f(x+a)$ , siendo  $a$  una constante. La distribución de irradiancia de la Ec.(4-12) se obtiene sumando la irradiancia de  $2L+1$  réplicas del patrón de Fresnel de índice  $q$  de la red —todas ellas con igual aumento  $\mathcal{M}$ — centradas en la dirección  $x$  en las posiciones  $x_j = -j\mathcal{M}_s d'$ . Obsérvese que cada una de estas réplicas está generada por una de las líneas de la fuente. Como la función  $|t_q(x/\mathcal{M})|^2$  es periódica con período  $|\mathcal{M}|d$ , si se exige que el desplazamiento relativo,  $|\mathcal{M}_s|d'$ , entre dos réplicas consecutivas cualesquiera sea un número entero de veces este período, en el plano de observación las  $2L+1$  réplicas del patrón se superponen en consonancia: todas ellas proporcionan en cada punto del plano la misma irradiancia. Es decir, cuando

$$\mathcal{M}_s d' = K \mathcal{M} d, \quad (4-13)$$

con  $K$  un número entero, la Ec.(4-12) se reduce a

$$\begin{aligned}
I(x,y) &= \left[ \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \right] \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \left| t_q \left( \frac{x + jK\mathcal{M}d}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \right] = \left[ \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \right] \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \left| t_q \left( \frac{x}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left| t_q \left( \frac{x}{\mathcal{M}} \right) \right|^2, \quad (4-14)
\end{aligned}$$

y por tanto se tiene una distribución de irradiancia que es esencialmente la del patrón de Fresnel de índice  $q$  de la red —véase la Ec.(2-21)—. Ahora bien, como esta distribución de irradiancia se obtiene promediando la de  $2L+1$  patrones se disminuye la influencia de los pequeños defectos que puedan tener éstos: se mejora así la relación señal-ruido.

Obsérvese que dependiendo de cuál sea el valor de  $R$ , los parámetros  $\mathcal{M}_s$  y  $\mathcal{M}$  pueden ser positivos o negativos. Teniendo en cuenta que  $z$  es una cantidad positiva, las tres situaciones posibles son:  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_s$  positivos,  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_s$  negativos y, por último,  $\mathcal{M}$  positivo y  $\mathcal{M}_s$  negativo. Según cuál de estos casos sea el de la situación particular considerada, el entero  $K$  de la Ec.(4-13) será positivo o negativo. De cualquier manera,  $|K|$  indica el número de períodos que desplaza cada línea fuente la réplica del patrón que genera respecto a la que genera la línea contigua.

Desde un punto de vista práctico usualmente se dispone de una red objeto y de una red fuente de períodos  $d$  y  $d'$ , respectivamente, y se quiere obtener la superposición incoherente en consonancia para el patrón de Fresnel de índice  $Q+q$  de la red objeto. Introduciendo en la Ec.(4-13) los valores de  $\mathcal{M}_s$  y  $\mathcal{M}$  que proporcionan, respectivamente, las Ecs.(4-7) y (2-12) resulta

$$Rd' = K(z+R)d \quad ,$$

$$d' = K \left( \frac{z+R}{R} \right) d \quad .$$

Sustituyendo en esta última ecuación el valor de  $(z+R)/R$  que se deduce de la Ec.(2-56) se obtiene, tras reordenar el resultado, que la separación  $z$  entre las redes que resuelve el problema es

$$z = 2(Q+q) \frac{d d'}{K\lambda} \quad . \quad (4-15)$$

Para valores crecientes de  $|K|$ , disminuye la separación entre las redes y aumenta el número de períodos que se desplaza el patrón generado por una línea emisora respecto al de su vecina. Por otro lado, variando la separación entre ambas redes se modifica a voluntad el índice del patrón en consonancia.

Utilizando la Ec.(2-58), los parámetros  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_s$ , se pueden expresar como

$$\mathcal{M}_s = \frac{Q+q}{Q_0+q_0-Q-q} \quad ,$$

$$\text{y } \mathcal{M} = \frac{Q_0+q_0}{Q_0+q_0-Q-q} \quad ,$$

donde  $Q_0+q_0$  es el índice del patrón que se localiza en el infinito. De este modo, la condición de consonancia, Ec.(4-13), resulta equivalente a

$$(Q+q)d' = K(Q_0+q_0)d \quad ,$$

y también a

$$Q+q = \frac{K}{\kappa} (Q_0+q_0) \quad , \quad K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (4-16)$$

donde  $\kappa$  se ha definido de modo que

$$d' = \kappa d \quad . \quad (4-17)$$

Para una separación  $z$  dada entre la red fuente de período  $d'$  y la red objeto de período  $d$  —valores que fijan  $\kappa$ —, la Ec.(2-57) determina el valor del índice  $Q_0+q_0$  del patrón del infinito. En estas condiciones, para cada valor entero no nulo de  $K$ , la Ec.(4-16) proporciona un valor del índice  $Q+q$  para el que se satisface la condición de consonancia. La Ec.(4-16) se puede expresar como

$$(Q+q) = K(Q'+q') \quad , \quad K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4-18)$$

siendo  $Q'+q'=(Q_0+q_0)/\kappa$  el índice del patrón para el que se obtiene la superposición en consonancia con desplazamiento relativo entre los patrones que generan líneas contiguas de la fuente igual a un período ( $K=1$ ). En función de este índice la distancia  $z$  se puede expresar, teniendo en cuenta las Ecs.(2-57) y (4-17), como

$$z = 2(Q'+q') \frac{d d'}{\lambda} = 2(Q'+q') \kappa \frac{d^2}{\lambda} \quad . \quad (4-19)$$

Obsérvese, por otro lado, que en general los índices  $q$ ,  $q'$  y  $q_0$  son diferentes.

De este modo, se obtiene simultáneamente la superposición incoherente en consonancia de patrones de Fresnel reales o virtuales en infinitos planos a distancia finita [IV-39]. En principio, en cada uno de estos planos el patrón que entra en consonancia presenta un perfil distinto. Recordando que para los patrones reales, el índice  $Q+q$  es positivo y menor que  $Q_0+q_0$  se concluye, a partir de la Ec.(4-16), que para obtener la consonancia de patrones de la Ec.(4-14) en planos situados detrás de la red objeto,  $\kappa$  debe ser necesariamente mayor que  $K$  —que ha de ser, a su vez, positivo— o, equivalente, que el período de la red fuente debe ser mayor que el de la red objeto. La distancia  $R$  a la que se localiza cada plano de consonancia la determina la Ec.(2-58), que, teniendo en cuenta la Ec.(4-16), se reduce a

$$R = z \frac{K}{\kappa - K} \quad , \quad K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4-20)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la Ec.(4-20) el aumento  $\mathcal{M}$  del patrón en consonancia, dado por la Ec.(2-12), se puede expresar como

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa}{\kappa - K} \quad . \quad (4-21)$$

El patrón que se localiza en el infinito estará en consonancia siempre que  $\kappa$  sea un número entero, es decir, siempre que  $d'$  sea un múltiplo de  $d$ . Este hecho es cierto independientemente de cuál sea la separación entre las dos redes del dispositivo.

En el dispositivo de Lau convencional se obtienen franjas rectilíneas de alto contraste en el infinito —o en el plano focal de una lente convergente— cuando se iluminan con una fuente de luz espacialmente incoherente dos redes lineales de amplitud, binarias y de baja modulación, idénticas, separadas entre sí una determinada distancia. La primera red de este dispositivo actúa como la fuente plana incoherente, codificada espacialmente, que ilumina la segunda red. Puesto que la modulación —relación entre la anchura de las bandas transparentes y el período— de la red fuente es pequeña, en primera aproximación vamos a describir, despreciando la influencia del ancho finita de estas bandas, su distribución normalizada de irradiancia mediante la Ec.(4-10), que corresponde a una red fuente de líneas emisoras de ancho infinitesimal. Al final de esta sección analizaremos qué efecto tiene sobre el patrón de franjas la extensión finita de las rendijas de una fuente real.

Las franjas de Lau convencionales se obtienen estableciendo la superposición incoherente de patrones en consonancia de la Ec.(4-14) para alguna autoimagen de la red objeto localizada en el infinito. Puesto que las dos redes del dispositivo son iguales ( $d'=d \rightarrow \kappa=1$ ), tal y como se ha discutido previamente, para el patrón del infinito, cuyo índice  $Q_0+q_0$  lo determina la Ec.(2-57), se verifica siempre la condición de consonancia y además —véase la Ec.(4-16)— con  $K=1$ . Como el índice asociado a las autoimágenes, positivas y negativas, de una red es entero o semi-impar, en el infinito se obtendrá una autoimagen cuando, según la Ec.(2-57), la distancia  $z$  sea

$$z = L \frac{d^2}{\lambda}, \quad L = 1, 2, 3, \dots \quad (4-22)$$

Por lo tanto, mediante esta configuración de dos redes idénticas en tándem se obtienen, en el infinito, franjas altamente contrastadas, similares a las autoimágenes de la red objeto, cuando la separación entre ellas verifica la Ec.(4-22).

De una manera más general, se pueden obtener franjas análogas a las de Lau utilizando redes objeto binarias de transmitancia y período cualesquiera. Si se establece la consonancia de patrones para alguna de las autoimágenes de la red localizada a distancia finita, la distribución de irradiancia resultante constituye lo que se denomina franjas de Lau a distancia finita [IV-12 y IV-29]. Si las redes fuente y objeto se sitúan separadas una distancia  $z$  que satisface la Ec.(4-19) con  $Q'+q'=0.5$  se consigue la consonancia para la primera autoimagen. Simultáneamente se establece asimismo, según la Ec.(4-18), la superposición en consonancia en todos los planos de autoimagen. Ahora el perfil de los patrones en consonancia es el mismo en todos los casos. De este modo, en infinitos planos, reales o virtuales, se consiguen franjas de Lau a distancia finita.

Por último, el patrón de franjas —en general, no binario— que se obtiene cuando se establece, tal y como se ha supuesto en la discusión inicial de este apartado, la

condición de consonancia para uno cualquiera de los patrones de Fresnel de la red objeto, lo vamos a denominar, por ser esta situación una generalización de las anteriores, patrón de Lau. Obviamente, según cuál sea la visibilidad del patrón de Fresnel para el que se establece la consonancia así será la visibilidad del patrón de Lau resultante.

En la Fig.4-3 se representa el dispositivo experimental utilizado para obtener en el laboratorio tanto franjas como patrones de Lau de alto contraste. Para ello, el haz de luz proveniente de un láser de He-Ne ( $\lambda=632'8nm$ ) se hace pasar a través de un vidrio deslustrado que se hace girar mediante un motor auxiliar. Con la ayuda de una lente se forma la imagen de la zona iluminada del vidrio difusor sobre el plano donde se sitúa la red fuente. De este modo, la radiación que incide sobre esta red es monocromática pero incoherente desde el punto de vista espacial. A continuación se sitúa la red objeto del dispositivo, a la distancia adecuada para que en el plano de observación se obtenga la superposición en consonancia para el patrón deseado. En la Fig.4-4 se recogen algunos de los resultados obtenidos con este dispositivo, utilizando como red fuente una red almena de período  $d'=(0'801\pm 0'003)mm$  y modulación  $s'=0'06$  y como red objeto una red de Ronchi de período  $d=(0'253\pm 0'001)mm$ . Estableciendo la condición de consonancia para la primera autoimagen de la red ( $Q'+q'=0'5$ ) se obtienen las franjas de Lau de la Fig.4-4a. El patrón de Fresnel de índice  $Q'+q'=0'41$  de esta misma red, que posee también buen contraste, se muestra en la Fig.4-4b. Estableciendo la condición de consonancia para esta figura de difracción, se obtiene el patrón de Lau de la Fig.4-4c. En ella se aprecia claramente la desaparición del ruido coherente. Entre los patrones que, de este modo, se ponen al mismo tiempo en consonancia se encuentra, según la Ec.(4-18), el de índice  $Q+q=0'82$  ( $K=2$ ). La distribución de irradiancia de este patrón de Lau se muestra en la Fig.4-4d.

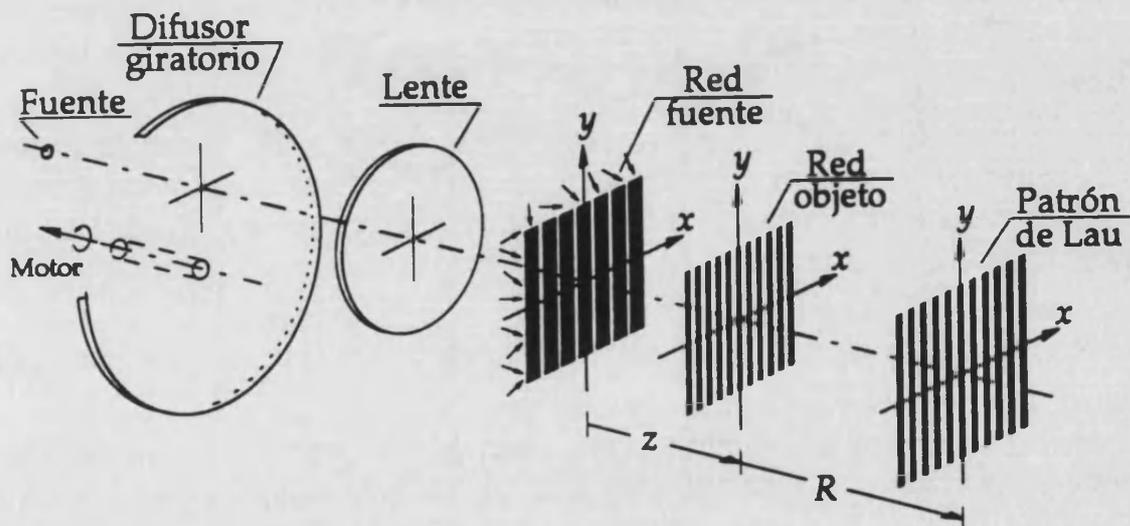


Fig. 4-3. Esquema del dispositivo experimental para obtener patrones de Lau. El vidrio difusor giratorio y la lente proporcionan una iluminación espacialmente incoherente de la red fuente.

La baja modulación de la red fuente hace que tanto las franjas como los patrones de Lau obtenidos con un dispositivo como el de la Fig.4-3 presenten un nivel de irradiancia relativamente bajo. La eficacia luminosa del dispositivo se puede mejorar notablemente utilizando una red objeto pura de fase —en la que prácticamente no hay absorción de luz— en lugar de la red de amplitud [IV-12, IV-30 y IV-40]. En particular, con una red de fase binaria de salto de fase  $\pi/2$  como la representada por la Ec.(2-69), se pueden obtener patrones de Lau con una distribución de irradiancia semejante a la de las franjas de Lau, es decir, binaria y de contraste unidad. Para ello basta con establecer la condición de consonancia para uno cualquiera de sus patrones de Fresnel de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$ . De hecho, si se establece esta condición para el primero de ellos, entre los patrones que, simultáneamente, se ponen en consonancia se encuentran todos los demás. En efecto, haciendo  $Q'+q'=1/4$ , por un lado, la Ec.(4-19) se reduce a

$$z = \frac{dd'}{2\lambda} \quad (4-23)$$

y por otro, según la Ec.(4-18), todos los patrones con  $q=1/4$  ó  $3/4$  están en consonancia. Obsérvese que de este modo las autoimágenes de la red, de visibilidad nula, también entran en consonancia. En la Fig.4-5 se muestra uno de estos patrones de Lau —el de índice  $Q+q=1/4$ — obtenido con una red de fase, de las características indicadas, de período  $d=0'253mm$  y la red fuente utilizada para obtener las franjas de Lau de la Fig.4-4.

A continuación vamos a estudiar dos importantes características que exhibe el dispositivo de doble red. En primer lugar, vamos a determinar cuál es la distribución de irradiancia que se obtiene en los planos situados entre los de consonancia, y después vamos a analizar cómo afecta al contraste de las franjas de Lau —y, por ende, de los patrones de Lau— la falta de paralelismo entre las líneas de las dos redes del dispositivo.

Consideremos un plano situado a una distancia  $R$  para la que, fijados los períodos  $d$  y  $d'$  de las dos redes y la separación  $z$  entre ellas, no se satisfaga la condición de consonancia. Para esta situación, los correspondientes valores  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_s$  son tales que, en lugar de la Ec.(4-13), se verifica la relación

$$\mathcal{M}_s d' = \mathcal{M} d(K + \Delta) \quad (4-24)$$

siendo  $K$  el número entero adecuado para que  $0 < \Delta < 1$ . La distribución de irradiancia en este plano viene dada por la Ec.(4-12), que utilizando la relación anterior se reduce a

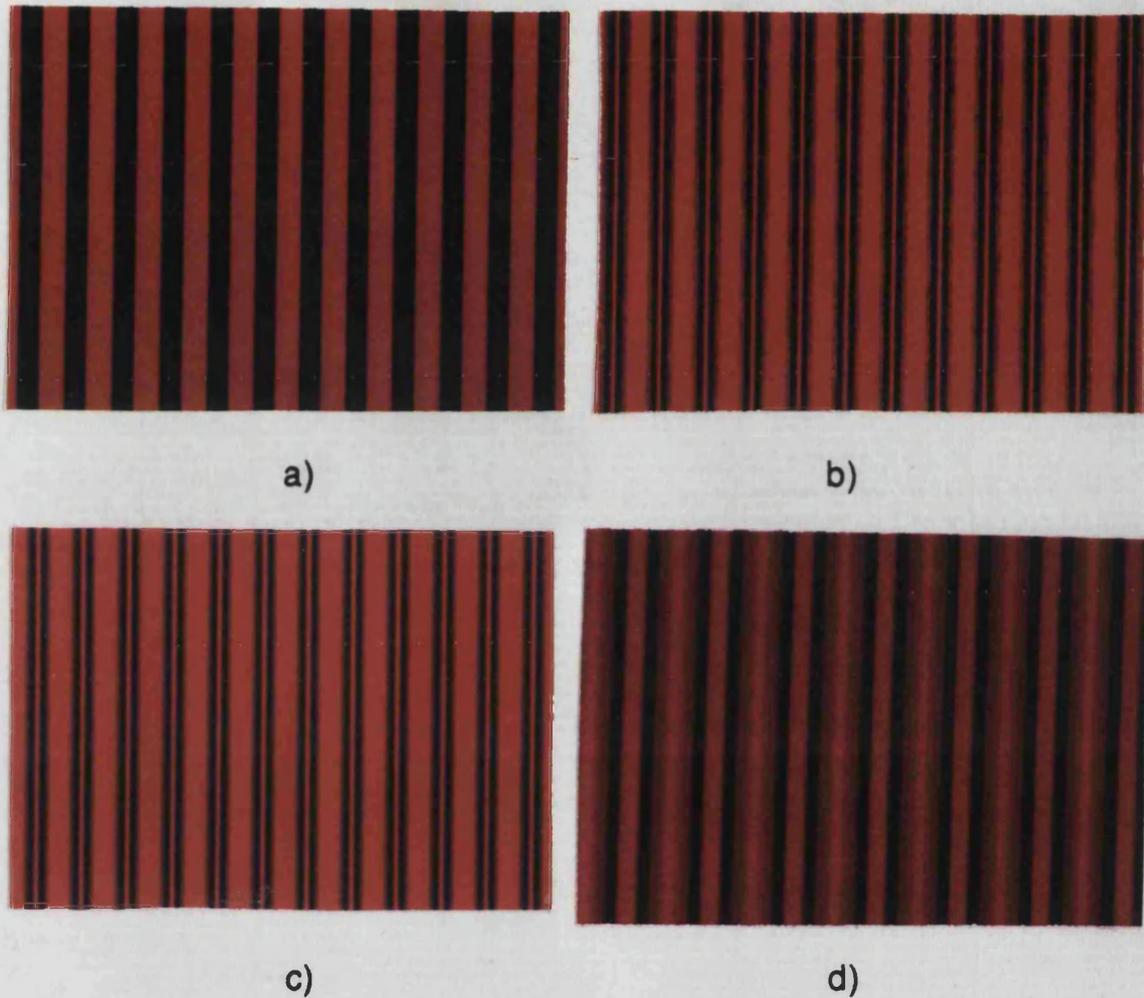


Fig. 4-4. Superposición incoherente de patrones de Fresnel en consonancia obtenidos con una red fuente lineal de período  $d'=0.801\text{mm}$  y modulación  $s'=0.06$  y una red objeto de período  $d=0.253\text{mm}$  y modulación  $s=0.5$ . a) Franjas de Lau a distancia finita correspondientes a la primera autoimagen ( $Q'+q'=0.5$ ). Las distancias  $z$  y  $R$  eran, de acuerdo con las Ecs.(4-19) y (4-20),  $z=32.02\text{cm}$  y  $R=14.79\text{cm}$ . b) Patrón de Fresnel de índice  $Q'+q'=0.41$  de la red objeto. La fuente puntual se situó a  $z=26.26\text{cm}$ , por lo que el patrón estaba localizado a una distancia  $R=12.12\text{cm}$ . c) Para el mismo valor de  $z$ , este patrón se puso en consonancia utilizando la red fuente lineal. La distancia  $z$  es la misma en ambos casos para que las dos figuras posean la misma escala y se puedan comparar directamente. La desaparición, en el patrón de Lau, del ruido coherente es evidente. d) Con esta misma disposición experimental, el patrón de índice  $Q+q=0.82$  estaba también en consonancia.

$$\begin{aligned}
 I(x,y) &= \left[ \frac{1}{(2L+1) \mathcal{M}^2} \right] \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \left| t_q \left( \frac{x + j \mathcal{M} d (K + \Delta)}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \right] = \\
 &= \left[ \frac{1}{(2L+1) \mathcal{M}^2} \right] \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \left| t_q \left( \frac{x + j \mathcal{M} d \Delta}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \right], \quad (4-25)
 \end{aligned}$$



Fig. 4-5. Con la red fuente indicada en la Fig.4-4, y una red objeto de fase, binaria y de salto de fase  $\pi/2$ , de período  $d=0'253mm$  se puso en consonancia el patrón de índice  $Q'+q'=1/4$ . Las distancias  $z$  y  $R$  eran  $z=16'01cm$  y  $R=7'39cm$ . Obsérvese la gran similitud de este patrón con las franjas de Lau de la Fig.4-4a.

donde se ha tenido en cuenta que el patrón de Fresnel  $t_q(x/\mathcal{A})$  tiene período  $|\mathcal{A}|d$ . Los  $(2L+1)$  patrones que se promedian para obtener  $I(x,y)$  están desplazados entre sí cantidades que son múltiplo de  $\Delta\mathcal{A}d$ . Cuando el número de patrones que se suma es suficientemente grande —y, por tanto, lo es también el número de líneas emisoras de la fuente— es razonable pensar que el resultado del promedio es prácticamente igual para todos los puntos del plano de observación y se aproxima al valor medio de la irradiancia del patrón de Fresnel que se localiza en dicho plano. Veamos que esto es así.

La irradiancia  $|t_q(x/\mathcal{A})|^2$  es, al igual que  $t_q(x/\mathcal{A})$ , una función periódica de período  $|\mathcal{A}|d$  por lo que se puede expresar, a su vez, mediante un desarrollo en serie de Fourier, es decir,

$$\left| t_q\left(\frac{x}{\mathcal{A}}\right) \right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{A}d}\right) . \quad (4-26)$$

Los coeficientes  $A_m$  de este desarrollo están, obviamente, relacionados con los coeficientes  $C'_m$  del desarrollo de  $t_q(x/\mathcal{A})$  —véase la Ec.(4-11)—. Teniendo en cuenta que  $|t_q(x/\mathcal{A})|^2 = t_q(x/\mathcal{A})t_q^*(x/\mathcal{A})$ , y las Ecs.(4-11) y (4-26) es fácil obtener que

$$A_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_{m+n} C_n^* . \quad (4-27)$$

Por otro lado, sustituyendo en la Ec.(4-25) el valor de  $|t_q(x/\mathcal{A})|^2$  que proporciona la Ec.(4-26), se obtiene

$$I(x,y) = \left[ \frac{1}{(2L+1) \mathcal{M}^2} \right] \left\{ \sum_{j=-L}^{+L} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\left(i2\pi m \frac{x + j\mathcal{M}d\Delta}{\mathcal{M}d}\right) \right] \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \exp(i2\pi m j \Delta) \right] \exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) \right\} .$$

Definiendo los coeficientes

$$B_m = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^{+L} \exp(i2\pi m j \Delta) , \quad (4-28)$$

finalmente resulta

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) . \quad (4-29)$$

Esta expresión corresponde al desarrollo en serie de Fourier de la distribución de irradiancia del plano de observación, que es una distribución periódica de período  $|\mathcal{M}|d$ . Los coeficientes de este desarrollo en serie son esencialmente los del desarrollo en serie de la irradiancia del patrón de Fresnel,  $A_m$ , modificados por un factor,  $B_m$ , debido al promediado entre las réplicas de este patrón que generan las distintas líneas emisoras de la fuente. Ahora bien, es precisamente el valor de estos coeficientes, que según la Ec.(4-28) depende de  $\Delta$ , el que determina el grado de similitud entre  $I(x,y)$  y la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel.

Definiendo, para simplificar la notación, el parámetro

$$\delta = 2\pi m \Delta , \quad (4-30)$$

la Ec.(4-28) se puede reescribir como

$$B_m = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^{+L} \exp(ij\delta) = \frac{1}{2L+1} \left[ \sum_{j=-L}^0 \exp(ij\delta) + \sum_{j=0}^{+L} \exp(ij\delta) - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2L+1} \left[ \sum_{j=0}^{+L} \exp(-ij\delta) + \sum_{j=0}^{+L} \exp(ij\delta) - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2L+1} \left[ \sum_{j=0}^{+L} \{ \exp(-i\delta) \}^j + \sum_{j=0}^{+L} \{ \exp(i\delta) \}^j - 1 \right] . \quad (4-31)$$

Recordando que para una serie geométrica de razón  $r$  (de términos  $a_n = a_0 r^n$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ ) se verifica que

$$\sum_{n=0}^N a_n = a_0 \frac{r^{N+1} - 1}{r - 1} \quad ,$$

la suma de la serie geométrica de razón  $\exp(-i\delta)$  de la Ec.(4-31) se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+L} \{ \exp(-i\delta) \}^j &= \frac{\exp[-i\delta(L+1)] - 1}{\exp(-i\delta) - 1} = \\ &= \frac{\exp[-i\delta(L+1)/2] \{ \exp[-i\delta(L+1)/2] - \exp[i\delta(L+1)/2] \}}{\exp(-i\delta/2) \{ \exp(-i\delta/2) - \exp(i\delta/2) \}} = \\ &= \exp(-i\delta L/2) \frac{\{ \exp[-i\delta(L+1)/2] - \exp[i\delta(L+1)/2] \}}{\{ \exp(-i\delta/2) - \exp(i\delta/2) \}} \quad , \end{aligned}$$

o equivalentemente a

$$\sum_{j=0}^{+L} \{ \exp(-i\delta) \}^j = \exp(-i\delta L/2) \frac{\text{sen}[\delta(L+1)/2]}{\text{sen}(\delta/2)} \quad .$$

Del mismo modo,

$$\sum_{j=0}^{+L} \{ \exp(i\delta) \}^j = \exp(i\delta L/2) \frac{\text{sen}[\delta(L+1)/2]}{\text{sen}(\delta/2)} \quad .$$

Llevando estas expresiones a la Ec.(4-31), se obtiene

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{1}{2L+1} \left\{ [\exp(-i\delta L/2) + \exp(i\delta L/2)] \frac{\text{sen}[\delta(L+1)/2]}{\text{sen}(\delta/2)} - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{2L+1} \left\{ 2 \cos(\delta L/2) \frac{\text{sen}[\delta(L+1)/2]}{\text{sen}(\delta/2)} - 1 \right\} \quad , \end{aligned}$$

y recordando la Ec.(4-30), finalmente resulta

$$B_m = \frac{1}{2L+1} \left\{ 2 \cos(\pi m \Delta L) \frac{\text{sen}[\pi m \Delta (L+1)]}{\text{sen}(\pi m \Delta)} - 1 \right\} . \quad (4-32)$$

Para estimar el valor de los coeficientes  $B_m$  hay que estudiar la función

$$F(\chi) = \frac{1}{2L+1} \left\{ 2 \cos(\pi L \chi) \frac{\text{sen}[\pi(L+1)\chi]}{\text{sen}(\pi \chi)} - 1 \right\} , \quad (4-33)$$

cuyo comportamiento lo determina su parte no constante

$$G(\chi) = 2 \cos(\pi L \chi) \frac{\text{sen}[\pi(L+1)\chi]}{\text{sen}(\pi \chi)} .$$

Esta función oscilante tiene un comportamiento parecido al del patrón de difracción de Fraunhofer que genera un conjunto finito de fuentes puntuales idénticas, coherentes entre sí, dispuestas regularmente a lo largo de una línea [IV-41].  $G(\chi)$ , y por tanto  $F(\chi)$ , es una función par y periódica con período 1 en la que el término  $2\cos(\pi L \chi)\text{sen}[\pi(L+1)\chi]$  oscila rápidamente mientras que la función que lo modula,  $[\text{sen}(\pi \chi)]^{-1}$ , varía de una forma relativamente lenta. El producto de ambos factores da lugar a una serie de máximos principales, separados por un conjunto de máximos y mínimos locales —de "altura" apreciablemente menor— que se suceden alternativamente. La diferencia entre el valor que toma  $G(\chi)$  en los máximos principales y en los extremos secundarios se acentúa a medida que el parámetro  $L$  crece. Los máximos principales se obtienen donde  $\text{sen}(\pi \chi)=0$ , es decir, cuando

$$\chi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-34)$$

En estos puntos —para los que, simultáneamente, se anula el  $\text{sen}[\pi(L+1)\chi]$ — la regla de L'Hôpital, proporciona para  $G(\chi)$  el valor  $2(L+1)$  (y, por tanto,  $F(\chi)=1$ ). Este valor es el máximo absoluto de la función. Por otro lado, entre dos máximos principales sucesivos el numerador de  $G(\chi)$  se anula, a su vez, en  $2L$  ocasiones más —entre ellas,  $L$  veces  $\text{sen}[\pi(L+1)\chi]=0$  y otras  $L$  veces  $\cos(\pi L \chi)=0$ —. Como entre cada dos de estos ceros sucesivos se obtiene un máximo ó un mínimo relativo, el número total de ellos, localizados entre máximos principales contiguos, es  $2L-1$ . Estos extremos locales ( $L$  mínimos y  $L-1$  máximos) se disponen alternativamente. El comportamiento descrito, relativo a la posición y número de los máximos principales y de los máximos y mínimos secundarios, es a su vez válido para la función  $F(\chi)$ , tal y como queda patente en la Fig.4-6. En ella se representa  $F(\chi)$ , a lo largo de dos períodos, para

tres valores distintos del parámetro  $L$  ( $L=2, 5, 10$ ). Obsérvese como a medida que crece  $L$  se van haciendo más estrechos los picos correspondientes a los máximos principales. De este modo, para valores suficientemente grandes de  $L$ , es decir, para una red fuente con un número de líneas emisoras relativamente grande, la función  $F(\chi)$  toma valores apreciables únicamente cuando  $\chi$  es un número entero.

Comparando las Ecs.(4-32) y (4-33), se tiene que  $B_m = F(\chi_m)$ , siendo

$$\chi_m = m \Delta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-35)$$

Puesto que, por hipótesis,  $\Delta$  es una cantidad comprendida entre 0 y 1, los puntos  $\chi_m$  diferentes de  $\chi_0$  se localizan, hablando en términos generales, en zonas comprendidas entre máximos principales de  $F(\chi)$ . Obsérvese que, en cambio,  $\chi_0=0$  independientemente del valor de  $\Delta$ : este punto se localiza siempre en el máximo principal central y, por tanto,  $B_0 = F(0) = 1$ . De este modo, los coeficientes  $B_m = F(\chi_m)$  serán, en general, apreciablemente menores que  $B_0$  —tanto más pequeños cuanto mayor sea el número de líneas emisoras de la fuente—. Recordando la Ec.(4-29), este hecho implica que los coeficientes  $A_m$  del desarrollo en serie de  $I(x,y)$ , con excepción de  $A_0$ , son fuertemente atenuados por los coeficientes  $B_m$ . Por tanto, en primera aproximación, la distribución de irradiancia en el plano de observación se reduce a

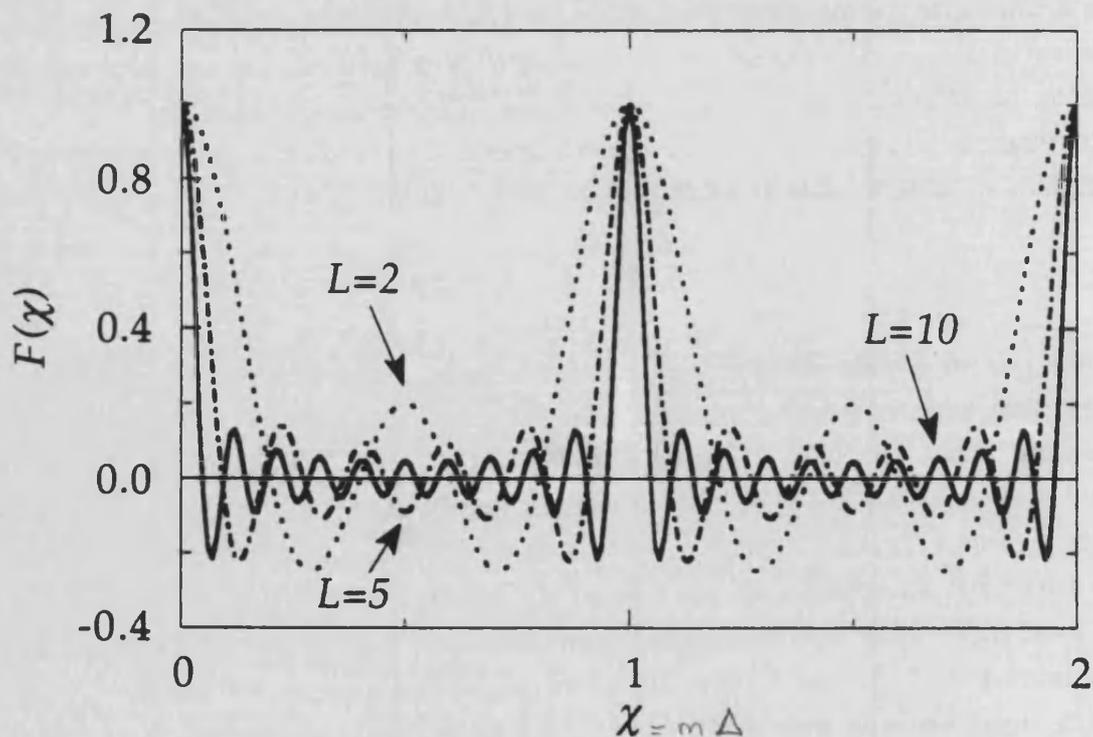


Fig. 4-6. Representación gráfica de la función  $F(\chi)$  de la Ec.(4-33). Las curvas de trazo continuo, discreto y a puntos corresponden, respectivamente, a valores del parámetro  $L$  iguales a 10, 5 y 2.

$$I(x,y) = \frac{A_0 B_0}{\mathcal{M}^2} = \frac{A_0}{\mathcal{M}^2} \quad (4-36)$$

Dado que el orden cero del desarrollo en serie de Fourier de una función es el valor medio de ésta y teniendo en cuenta la Ec.(4-26), se concluye que la distribución de irradiancia constante de la Ec.(4-36) corresponde a la irradiancia media del patrón de Fresnel que se localiza en el plano de observación. Así, a efectos prácticos resulta que con este dispositivo de doble red, se obtiene una distribución de irradiancia constante en todos los planos salvo en aquéllos que satisfacen la condición de consonancia.

La Ec.(4-29) es válida también para los planos de consonancia. En efecto, comparando las Ecs.(4-13) y (4-24) se concluye que, para esta situación particular,  $\Delta=0$  por lo que  $\chi_m=0$ . Teniendo en cuenta que  $B_m=F(\chi_m)$ , ahora resulta  $B_m=1$ , para todo valor de  $m$ .

Llevando este resultado a la Ec.(4-29) se obtiene

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) \quad (4-37)$$

expresión que se reduce, sin más que considerar la Ec.(4-26), a la Ec.(4-14), tal y como habíamos dicho. De este modo, la Ec.(4-29) permite valorar la distribución de irradiancia que se obtiene con el dispositivo de doble red del efecto Lau en un plano cualquiera —real o virtual—. Asimismo, esta expresión pone claramente de manifiesto las propiedades de filtraje espacial de frecuencias espaciales inherentes a este dispositivo. Los coeficientes  $B_m$  modifican la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel que se obtiene en el plano de observación, atenuando de manera diferente sus distintas frecuencias espaciales. El grado de atenuación de éstas lo determina la función  $F(\chi)$ , a través de los valores  $\chi_m$  de la Ec.(4-35). Las situaciones representadas, respectivamente, por las Ecs.(4-36) y (4-37) corresponden a los dos casos particulares límite: en la primera se filtran completamente todos los órdenes, salvo el cero, del espectro de  $|t_q(x,y)|^2$ , obteniéndose una irradiancia constante y en la segunda se transmiten todos ellos sin sufrir alteración, resultando una distribución de irradiancia como la del patrón de Fresnel. Una situación intermedia se obtiene, por ejemplo, cuando  $\Delta$  es un número fraccionario, es decir,

$$\Delta = \frac{M}{N} \quad , \quad (4-38)$$

con  $N$  y  $M$  enteros primos entre sí y  $M < N$ . Ahora, la Ec.(4-35) se reduce a

$$\chi_m = m \frac{M}{N} \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y por tanto los únicos puntos que caen bajo máximos principales de  $F(\chi)$  son aquéllos para los que  $m$  es un múltiplo entero de  $N$  ( $m=nN$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Para estos valores,  $B_m = F(\chi_m) = 1$  y para el resto de valores  $B_m = 0$ . En este caso, la Ec.(4-29) se reduce a

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{A}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n,N} \exp\left(i2\pi nN \frac{x}{\mathcal{A}d}\right) \quad (4-39)$$

De este modo, en el plano de observación se filtran todas las frecuencias espaciales de  $|t_q(x/\mathcal{A})|^2$  a excepción del orden cero, el orden  $N$ -ésimo, y los órdenes de índice múltiplo de éste. Así, la distribución  $I(x,y)$  tiene un período,  $|\mathcal{A}|d/N$ ,  $N$  veces menor que el de  $|t_q(x/\mathcal{A})|^2$  y una visibilidad que está determinada por el valor de los coeficientes  $A_{n,N}$  del desarrollo en serie de  $|t_q(x/\mathcal{A})|^2$  —por tanto es la visibilidad de este patrón la que, en última instancia, determina la de  $I(x,y)$ —. Si se elige el plano de observación adecuadamente, este tipo de filtraje de supresión de frecuencias espaciales se puede realizar sobre alguna autoimagen de la red objeto, por lo que el resultado será equivalente a haberlo realizado sobre ésta.

La red fuente de la Ec.(4-10) contiene un número impar de líneas emisoras. Es evidente que las propiedades del dispositivo de Lau manifestadas, deben ser las mismas cuando la red fuente tenga un número de líneas par. Para una red fuente de  $2L$  líneas cuya distribución normalizada de irradiancia sea

$$I_5(x,y) = \frac{1}{2L\Omega} \left[ \sum_{j=1}^{+L} \delta[x - (j-1/2)d'] + \sum_{j=1}^{+L} \delta[x + (j-1/2)d'] \right] \text{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right) \quad (4-40)$$

se obtiene, operando de igual modo que en la deducción de la Ec.(4-29), que la distribución de irradiancia en un plano cualquiera viene dada por

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{A}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m \exp\left[i2\pi m \left(\frac{x}{\mathcal{A}d} \pm \frac{1}{2}\right)\right] \quad (4-41)$$

donde

$$B_m = \frac{1}{L} \cos(\pi m \Delta L) \frac{\text{sen}[\pi m \Delta L]}{\text{sen}(\pi m \Delta)} \quad (4-42)$$

y el factor  $\Delta$ , definido por la Ec.(4-24), verifica la relación  $0 \leq \Delta < 1$ . Las características de la distribución de irradiancia de la Ec.(4-41) son análogas a las de la Ec.(4-29) al ser el comportamiento de los coeficientes  $B_m$  de la Ec.(4-42) esencialmente igual al de los de

la Ec.(4-32). El desplazamiento de medio período que presenta la función  $I(x,y)$  de la Ec.(4-41) respecto al patrón de Fresnel  $|t_q(x/\mathcal{M})|^2$  es debido al hecho de haber elegido el origen del sistema de ejes coordenados  $(x,y)$  centrado en la red fuente de extensión finita. Esta elección deliberada simplifica la deducción y el análisis de los valores de los coeficientes  $B_m$ , que, al ser simétrica la función  $I_S(x,y)$ , resultan reales .

Estudiemos, a continuación, qué efecto tiene sobre los patrones de Lau el giro de una de las redes del dispositivo. A fin de simplificar este análisis consideremos, en primer lugar, una fuente incoherente formada por una sola línea emisora, de ancho infinitesimal y longitud  $\Omega$ , que ilumina una red objeto situada a una distancia  $z$  y girada un ángulo  $\theta$  respecto a la línea fuente. Eligiendo el origen del sistema de coordenadas  $(x,y)$  centrado en dicha línea, su distribución normalizada de irradiancia,  $I'_S(x,y)$ , viene dada por

$$I'_S(x,y) = \frac{\delta(x)}{\Omega} \text{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right) . \quad (4-43)$$

Por otra parte, utilizando un sistema auxiliar de coordenadas  $(x',y')$ , con el eje  $y'$  paralelo a las líneas de la red, la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel de índice  $q$ , que se obtiene a una distancia  $R$  de ella, se puede expresar, de manera análoga a la Ec.(4-26), como

$$\left| t_q\left(\frac{x'}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\left(i2\pi m \frac{x'}{\mathcal{M}d}\right) , \quad (4-44)$$

donde, por un lado, los coeficientes  $A_m$  verifican la Ec.(4-27) y, por otro,  $x'$  satisface la relación

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta . \quad (4-45)$$

Para esta situación, la distribución de irradiancia que se obtiene a una distancia  $R$  de la red objeto, viene dada, según la Ec.(4-8), por

$$I'(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_S}\right)^2 \left[ I'_S\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_S}, \frac{-y}{\mathcal{M}_S}\right) * \left| t_q\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \right] , \quad (4-46)$$

donde, de acuerdo con la Ec.(4-43), se tiene que

$$I'_s\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) = \frac{\delta\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}\right)}{\Omega} \operatorname{rect}\left(\frac{-y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) = \frac{\delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}\right)}{\Omega} \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right), \quad (4-47)$$

y, según la Ecs.(4-44) y (4-45), resulta

$$\left|t_a\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right)\right|^2 = \left|t_q\left(\frac{x'}{\mathcal{M}}\right)\right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right). \quad (4-48)$$

Llevando estas expresiones a la Ec.(4-46) se obtiene

$$\begin{aligned} I'(x,y) &= \frac{1}{\Omega(\mathcal{M}\mathcal{M}_s)^2} \left\{ \left[ \delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) \right] * \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\Omega(\mathcal{M}\mathcal{M}_s)^2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \left\{ \left[ \delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) \right] * \left[ \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta}{\mathcal{M}d}\right) \exp\left(i2\pi m \frac{y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] \right\} \right\} = \\ &= \frac{1}{\Omega(\mathcal{M}\mathcal{M}_s)^2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \left\{ \left[ \delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}\right) * \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] \left[ \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) * \exp\left(i2\pi m \frac{y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (4-49)$$

siendo ahora los términos entre corchetes convoluciones unidimensionales. Teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac, el primero de estos términos se reduce a

$$\delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}\right) * \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta}{\mathcal{M}d}\right) = |\mathcal{M}_s| \delta(x) * \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta}{\mathcal{M}d}\right) = |\mathcal{M}_s| \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta}{\mathcal{M}d}\right). \quad (4-50)$$

Para valorar el segundo término, calculemos previamente

$$\operatorname{rect}\left(\frac{y}{a_1}\right) * \exp(ia_2y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\beta}{a_1}\right) \exp[ia_2(y-\beta)] d\beta = \int_{-ia_1/2}^{ia_1/2} \exp[ia_2(y-\beta)] d\beta.$$

Teniendo en cuenta que  $\exp[ia_2(y-\beta)]/(-ia_2)$  es una primitiva de  $\exp[ia_2(y-\beta)]$ , de manera inmediata resulta

$$\operatorname{rect}\left(\frac{y}{a_1}\right) * \exp(ia_2y) = \frac{i}{a_2} \exp(ia_2y) \left[ \exp\left(\frac{-i/a_1|a_2}{2}\right) - \exp\left(\frac{i/a_1|a_2}{2}\right) \right] =$$

$$= \frac{2}{a_2} \exp(ia_2 y) \operatorname{senc}\left(\frac{|a_1|a_2}{2}\right) = |a_1| \exp(ia_2 y) \frac{\operatorname{senc}\left(\frac{|a_1|a_2}{2}\right)}{\frac{|a_1|a_2}{2}} .$$

Recordando la definición de  $\operatorname{senc}(x) = \operatorname{senc}(\pi x) / \pi x$ , finalmente se obtiene

$$\operatorname{rect}\left(\frac{y}{a_1}\right) * \exp(ia_2 y) = |a_1| \exp(ia_2 y) \operatorname{senc}\left(\frac{|a_1|a_2}{2\pi}\right) = |a_1| \exp(ia_2 y) \operatorname{senc}\left(\frac{a_1 a_2}{2\pi}\right) . \quad (4-51)$$

Considerando este resultado, la convolución que depende de la variable  $y$  en la Ec.(4-49), se reduce a

$$\operatorname{rect}\left(\frac{y}{\mathcal{M}_s \Omega}\right) * \exp\left(i2\pi m \frac{y \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) = \Omega / \mathcal{M}_s \exp\left(i2\pi m \frac{y \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) \operatorname{senc}\left(\frac{m \mathcal{M}_s \Omega \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) , \quad (4-52)$$

por lo que, teniendo también en cuenta la Ec.(4-50), se tiene para la distribución  $I'(x, y)$  el resultado

$$\begin{aligned} I'(x, y) &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \operatorname{senc}\left(\frac{m \mathcal{M}_s \Omega \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) \exp\left(i2\pi m \frac{x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \operatorname{senc}\left(\frac{m \mathcal{M}_s \Omega \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) \exp\left(i2\pi m \frac{x'}{\mathcal{M} d}\right) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m S_m \exp\left(i2\pi m \frac{x'}{\mathcal{M} d}\right) , \end{aligned} \quad (4-53)$$

donde los coeficientes  $S_m$  están definidos por la relación

$$S_m = \operatorname{senc}\left(\frac{m \mathcal{M}_s \Omega \operatorname{sen} \theta}{\mathcal{M} d}\right) . \quad (4-54)$$

La Ec.(4-53) permite analizar sencillamente el efecto que, sobre la distribución de irradiancia del plano de observación, tiene el giro de la línea fuente. Por un lado, obsérvese que ésta distribución es una función periódica en la dirección  $x'$  y por tanto, las líneas que la constituyen tienen siempre la misma orientación que las de la red objeto. Cuando ésta y la fuente lineal se orientan perfectamente paralelas ( $\theta=0 \rightarrow \operatorname{sen} \theta=0$  y  $x'=x$ ) se tiene que, según la Ec.(4-54),  $S_m=1$ , por lo que la Ec.(4-53) coincide, naturalmente, con la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel que generaría en el plano de observación una fuente puntual situada en el centro de la línea emisora —véanse las Ecs.(4-44) y (2-21)—. Por otro lado, nótese la gran similitud que existe entre las Ecs.(4-53) y (4-29). En ellas los coeficientes  $S_m$  y  $B_m$  desempeñan un

papel análogo: determinan cómo se atenúan las diferentes frecuencias espaciales de la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel de índice  $q$ , para formar la distribución de irradiancia del plano de observación. En el caso que nos ocupa, es la función seno-cociente la que determina el amortiguamiento de los coeficientes  $A_m$ , al ser, según la Ec.(4-54),

$$S_m = \text{senc}(\gamma_m) \quad , \quad (4-55)$$

con

$$\gamma_m = \frac{m \mathcal{A}_s \Omega \text{sen} \theta}{\mathcal{A} d} \quad . \quad (4-56)$$

Como es bien conocido la función  $\text{senc}(\gamma)$ , cuya representación gráfica se da en la Fig.4-7, es una función oscilante que toma su valor máximo absoluto en  $\gamma=0$ , donde  $\text{senc}(0)=1$ ; que se anula siempre que  $\gamma$  es un número entero no nulo y que posee una serie de máximos y mínimos relativos alternados, uno entre cada dos ceros sucesivos, cuya "altura" disminuye fuertemente al aumentar  $\gamma$ . Por esta razón, para un valor  $\theta \neq 0$ , los coeficientes  $S_m$  de la Ec.(4-55) se hacen, hablando en términos generales, progresivamente más pequeños (en módulo) a medida que crece el índice  $m$ , por irse alejando del origen los puntos  $\gamma_m$  de la Ec.(4-56). En cambio, el coeficiente  $S_0=1$  siempre, por ser  $\gamma_0=0$  independientemente del valor de  $\theta$ . La diferencia entre  $S_0$  y el resto de los coeficientes  $S_m$  se hace más marcada a medida que el ángulo  $\theta$  es más grande.

Cuando la línea fuente y la red objeto están perfectamente paralelas ( $\theta=0$ ), la distribución de irradiancia de la Ec.(4-53) coincide, tal y como se ha demostrado previamente, con la del patrón de Fresnel asociado al plano de observación y por tanto, la visibilidad de  $I'(x,y)$  es la visibilidad de este patrón. Si partiendo de esta situación se aumenta progresivamente el ángulo  $\theta$  la visibilidad de  $I'(x,y)$  se hace paulatinamente menor, ya que decrecen los valores de los coeficientes  $S_m$  mientras que se mantiene constante  $S_0$ . En particular, cuando

$$\text{sen} \theta = \frac{\mathcal{A} d}{\mathcal{A}_s \Omega} \quad , \quad (4-57)$$

todos los puntos  $\gamma_m$  toman, según la Ec.(4-56), valores enteros, por lo que  $S_m=0$  para  $m \neq 0$ . En este caso, la Ec.(4-53) se reduce a

$$I'(x,y) = \frac{A_0 S_0}{\mathcal{A}^2} = \frac{A_0}{\mathcal{A}^2} \quad , \quad (4-58)$$

y se obtiene, como en la situación de la Ec.(4-36), una distribución de irradiancia constante. Por tanto, el giro, bien de la línea fuente o bien de la red, de un ángulo  $\theta = \arcsen(\mathcal{M}d/\mathcal{M}_s\Omega)$  hace que el contraste de la distribución de franjas de la Ec.(4-53) pase de ser el del patrón de Fresnel a ser nulo.

La Ec.(4-57) permite, como vamos a ver, estimar la tolerancia que presentan los patrones de Lau a la falta de paralelismo entre las líneas de las dos redes del dispositivo. Para ello, previamente vamos a extender los resultados previos al caso de una fuente formada por  $2L+1$  líneas emisoras regularmente espaciadas, que ilumina una red lineal girada un ángulo  $\theta$ . La distribución normalizada de irradiancia de la red fuente viene dada por la Ec.(4-10) y a una distancia  $R$  de la red objeto se obtiene una distribución de irradiancia  $I(x,y)$  dada por la Ec.(4-8), donde, ahora,  $|t_\alpha(x/\mathcal{M}, y/\mathcal{M})|^2$  satisface la Ec.(4-48) y, de acuerdo con la Ec.(4-10),  $I_s(-x/\mathcal{M}_s, -y/\mathcal{M}_s)$  es

$$\begin{aligned} I_s\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s}, -\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) &= \frac{1}{(2L+1)\Omega} \sum_{j=-L}^{+L} \delta\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s} - jd'\right) \text{rect}\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) = \\ &= \frac{1}{(2L+1)\Omega} \sum_{j=-L}^{+L} \delta\left(-\frac{x + j\mathcal{M}_s d'}{\mathcal{M}_s}\right) \text{rect}\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) = \\ &= \frac{1}{(2L+1)\Omega} \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_s d', y) \right] * \left[ \delta\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s}\right) \text{rect}\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s\Omega}\right) \right] , \end{aligned}$$

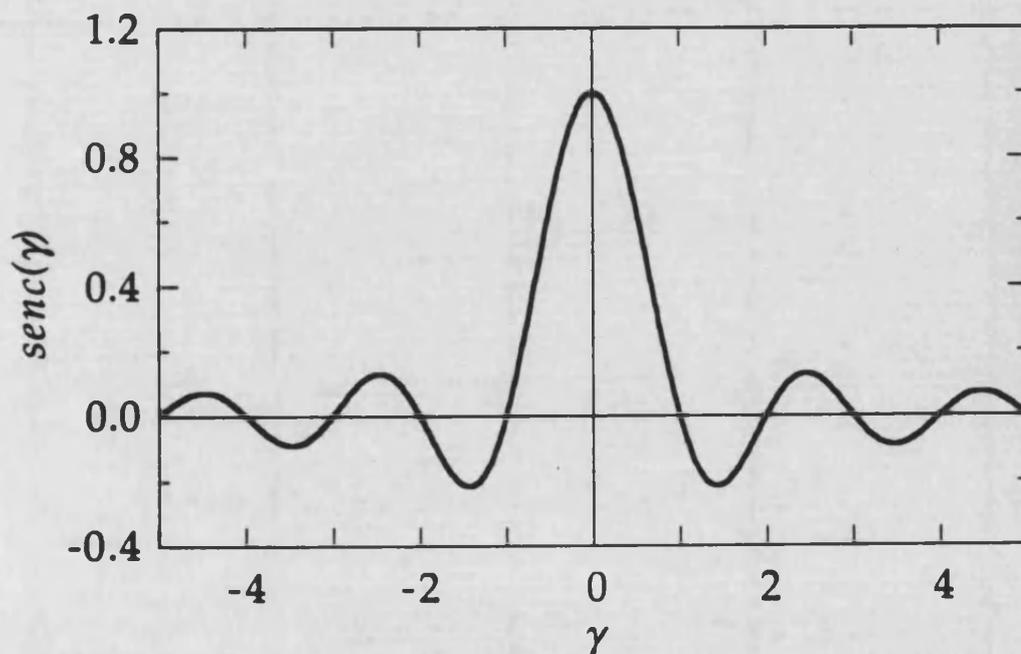


Fig. 4-7. Representación gráfica de la función  $\text{sinc}(\gamma)$ . Esta función determina los valores de los coeficientes de amortiguamiento  $S_m$ .

o, teniendo en cuenta la Ec.(4-47), equivalentemente

$$I_S\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_S}, -\frac{y}{\mathcal{M}_S}\right) = \frac{1}{2L+1} \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_S d', y) \right] * I'_S\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_S}, -\frac{y}{\mathcal{M}_S}\right) . \quad (4-59)$$

Considerando este resultado, la Ec.(4-8) se reduce a

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_S}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2L+1} \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_S d', y) \right] * I'_S\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_S}, -\frac{y}{\mathcal{M}_S}\right) \right\} * \left| t_\alpha\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 ,$$

y, utilizando la propiedad asociativa de la operación de convolución, se tiene

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_S}\right)^2 \frac{1}{2L+1} \left\{ \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_S d', y) \right] * \left[ I'_S\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_S}, -\frac{y}{\mathcal{M}_S}\right) * \left| t_\alpha\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \right] \right\} ,$$

El resultado de la convolución entre corchetes es, según la Ec.(4-46),  $I'(x,y)$ , por lo que resulta

$$I(x,y) = \frac{1}{2L+1} \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_S d', y) \right] * I'(x,y) .$$

Sustituyendo ahora  $I'(x,y)$  por el valor que proporciona la Ec.(4-53), teniendo en cuenta la Ec.(4-45) se obtiene

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_S d', y) \right] * \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m S_m \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m S_m \left\{ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x + j\mathcal{M}_S d', y) * \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m S_m \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \exp\left(i2\pi m \frac{(x + j\mathcal{M}_S d')\cos\theta + y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m S_m \left[ \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^{+L} \exp\left(i2\pi m j \frac{\mathcal{M}_S d' \cos\theta}{\mathcal{M}d}\right) \right] \exp\left(i2\pi m \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\mathcal{M}d}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m S_m B'_m \exp\left(i2\pi m \frac{x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta}{\mathcal{M}d}\right) \quad (4-60)$$

donde

$$B'_m = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^{+L} \exp\left(i2\pi m j \frac{\mathcal{M}_s d' \cos\theta}{\mathcal{M}d}\right) \quad (4-61)$$

Estos coeficientes son esencialmente iguales a los coeficientes  $B_m$  de la Ec.(4-28) —como se ve sin más que asociar el parámetro  $\Delta$  de esta ecuación a  $\mathcal{M}_s d' \cos\theta / \mathcal{M}d$ —, por lo que, de acuerdo con la Ec.(4-32), se pueden expresar como

$$B'_m = \frac{1}{2L+1} \left\{ 2 \cos\left(\pi m \frac{\mathcal{M}_s d' \cos\theta}{\mathcal{M}d} L\right) \frac{\operatorname{sen}\left[\pi m \frac{\mathcal{M}_s d' \cos\theta}{\mathcal{M}d} (L+1)\right]}{\operatorname{sen}\left(\pi m \frac{\mathcal{M}_s d' \cos\theta}{\mathcal{M}d}\right)} - 1 \right\} \quad (4-62)$$

De nuevo, la distribución de irradiancia del plano de observación se obtiene atenuando las distintas componentes frecuenciales —en este caso por la acción combinada de los coeficientes  $S_m$  y  $B'_m$ — de la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel asociado a dicho plano. Obsérvese que los coeficientes  $S_m$  son debidos a la rotación relativa existente entre la red fuente y la red objeto, mientras que los  $B'_m$  tienen su origen en la falta de consonancia entre el período  $\mathcal{M}_s d'$  de la proyección de la fuente y el valor  $\mathcal{M}d/\cos\theta$  de la proyección del período,  $\mathcal{M}d$ , del patrón de Fresnel en la dirección perpendicular a las líneas de la red fuente (dirección del eje  $x$ ).

Cuando el ángulo  $\theta$  es cero se tiene, como sabemos,  $S_m=1$  y, como se observa recordando las Ecs.(4-24) y (4-28),  $B'_m=B_m$ , por lo que la Ec.(4-60) se reduce a la Ec.(4-29). Si además se satisface la condición de consonancia, Ec.(4-13), en el plano de observación se obtiene un patrón de Lau. Para esta situación, la visibilidad de las franjas del patrón decae progresivamente a medida que crece el ángulo de rotación entre las dos redes del dispositivo. En particular, la visibilidad se hace nula cuando, de acuerdo con las Ecs.(4-57) y (4-13), se verifica que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d'}{K\Omega} \quad (4-63)$$

Para valores de  $\theta$  cercanos al anterior la visibilidad de las franjas del patrón de Lau es muy baja también al ser el producto  $S_m B'_m$  (para  $m \neq 0$ ) una cantidad pequeña frente a  $S_0 B'_0$ . Esto es así, debido fundamentalmente a los bajos valores que toman los

coeficientes  $S_m$ . De este modo, el ángulo  $\theta$  que proporciona la Ec.(4-63), se puede tomar como el valor límite a partir del cual se obtiene, en el plano de observación, una distribución de irradiancia casi uniforme. Obsérvese que esta cota superior, decrece a medida que el índice  $K$  aumenta, es decir, la sensibilidad de los patrones de Lau a la falta de paralelismo entre las redes del dispositivo, se incrementa en los sucesivos planos de consonancia.

Para una situación experimental típica, como puede ser la correspondiente a los resultados de las Figs.4-4 y 4-5, en la que las líneas de la fuente tienen longitud  $\Omega \approx 15\text{mm}$  y el período de ésta es  $d' \approx 0.8\text{mm}$ , la Ec.(4-63) proporciona, para el primer plano de consonancia ( $K=1$ ), el valor  $\theta \approx 3^\circ$ . Para los siguientes planos de consonancia resulta, por ejemplo,  $\theta \approx 1.5^\circ$  para  $K=2$  y  $\theta \approx 1^\circ$  para  $K=3$ . Estos valores numéricos concuerdan satisfactoriamente con los obtenidos por otros autores [IV-28 y IV-36]. Por lo tanto es suficiente un giro de unos pocos grados entre las dos redes del dispositivo para que la visibilidad de los patrones de Lau se haga prácticamente nula. Esta elevada sensibilidad de los patrones de Lau se ha aprovechado convenientemente en el desarrollo de algunos de los dispositivos basados en este fenómeno, tal y como se verá en el Capítulo V.

Para finalizar esta sección vamos a estudiar la influencia que, sobre el perfil de los patrones de Lau, tiene la anchura finita de las rendijas emisoras de una red fuente real. Consideremos una red fuente binaria de período  $d'$  y modulación  $s'$  ( $0 < s' < 1$ ), de extensión finita. El ancho de las líneas emisoras es  $s'd'$ , su longitud  $\Omega$  y el número total de ellas es  $2L+1$ . La distribución normalizada de irradiancia,  $I'_5(x,y)$ , de esta fuente se puede expresar como

$$I'_5(x,y) = \frac{1}{(2L+1)\Omega s'd'} \sum_{j=-L}^{+L} \left[ \delta(x - jd') * \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right) \quad (4-64)$$

o, equivalentemente, teniendo en cuenta las propiedades de la delta de Dirac y de la operación de convolución

$$\begin{aligned} I'_5(x,y) &= \frac{1}{(2L+1)\Omega s'd'} \sum_{j=-L}^{+L} \left[ \delta(x - jd') * \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'}\right) \right] \left[ \text{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right) * \delta(y) \right] = \\ &= \frac{1}{(2L+1)\Omega s'd'} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'}\right) \delta(y) \right] * \left[ \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x - jd') \text{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right) \right] \end{aligned}$$

Considerando la Ec.(4-10) se tiene

$$I'_s(x,y) = \frac{1}{s'd'} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'}\right) \delta(y) \right] * I_s(x,y) \quad (4-65)$$

La distribución de irradiancia,  $I'(x,y)$ , que se obtiene en un plano de observación genérico cuando se utiliza esta red como fuente del dispositivo de Lau, satisface la Ec.(4-8). En ella, la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel de la red objeto, viene dada por la Ec.(4-26) y, teniendo en cuenta que para la operación de convolución se verifica que [IV-42]

$$f\left(\frac{x}{b}\right) * h\left(\frac{x}{b}\right) = b/g\left(\frac{x}{b}\right) \quad (4-66)$$

siendo  $g(x)=f(x)*h(x)$ , para la proyección de la fuente, de acuerdo con la Ec.(4-65), se tiene

$$I'_s\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s}, -\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) = \frac{1}{s'd'\mathcal{M}_s^2} \left[ \text{rect}\left(-\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) \delta\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * I_s\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s}, -\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \quad (4-67)$$

De este modo, teniendo en cuenta esta relación y la Ec.(4-8), resulta

$$\begin{aligned} I'(x,y) &= \frac{1}{s'd'\mathcal{M}_s^2\mathcal{M}_s^4} \left[ \text{rect}\left(-\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) \delta\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) * I_s\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s}, -\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * \left| t_\alpha\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{s'd'\mathcal{M}_s^2\mathcal{M}_s^4} \left[ \text{rect}\left(-\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) \delta\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * \left[ I_s\left(-\frac{x}{\mathcal{M}_s}, -\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) * \left| t_\alpha\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \right] \end{aligned}$$

y considerando, de nuevo, la Ec. (4-8) se obtiene

$$I'(x,y) = \frac{1}{s'd'\mathcal{M}_s^2} \left[ \text{rect}\left(-\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) \delta\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * I(x,y) \quad (4-67)$$

donde  $I(x,y)$  es la distribución de irradiancia que generaría en el plano de observación la red fuente de líneas de ancho infinitesimal de la Ec.(4-10). Introduciendo en la Ec.(4-67), la expresión que para  $I(x,y)$  proporciona la Ec.(4-29) —correspondiente al caso, más general, de falta de consonancia entre los períodos de las dos redes del dispositivo— resulta

$$\begin{aligned} I'(x,y) &= \frac{1}{s'd'\mathcal{M}_s^2} \left[ \text{rect}\left(-\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) \delta(y) \right] * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) = \\ &= \frac{1}{s'd'\mathcal{M}_s/\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) * \exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) \right] \end{aligned} \quad (4-68)$$

donde se han utilizado las propiedades de la convolución de funciones bidimensionales separables, las de la función delta de Dirac y el hecho de que  $rect(x)$  es una función par. Según la Ec.(4-51), el resultado de la convolución de la Ec.(4-68) es

$$rect\left(\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) * exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) = |\mathcal{M}_s|s'd' exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) senc\left(m \frac{s'd'\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}d}\right) ,$$

por lo que dicha ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} I'(x,y) &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m senc\left(m \frac{s'd'\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}d}\right) exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m senc[m(K+\Delta)s'] exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) , \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la Ec. (4-24). Si se definen los coeficientes

$$D_m = senc[m(K+\Delta)s'] , \quad (4-69)$$

finalmente, resulta

$$I'(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m B_m D_m exp\left(i2\pi m \frac{x}{\mathcal{M}d}\right) . \quad (4-70)$$

Comparando esta relación con la Ec.(4-29), correspondiente a la red fuente ideal, se observa que el ancho finito de las líneas emisoras de una red fuente real se traduce en la presencia de un nuevo factor de amortiguamiento  $D_m$ , de las diferentes componentes de Fourier de la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel que se localiza en el plano de observación. Al igual que ocurre en el caso de una rotación entre las dos redes del dispositivo de Lau, es la función seno-cociente la que determina el valor de los coeficientes  $D_m$ . Obsérvese que, de nuevo, el orden cero no se atenúa (al ser  $D_0=1$ ) y que son las frecuencias espaciales más altas las que, grosso modo, sufren un mayor amortiguamiento. Este comportamiento se hace más acentuado cuanto mayor es el valor de  $K+\Delta$ . Nótese asimismo que en el límite  $s' \rightarrow 0$ , en el que la Ec.(4-64) se convierte en la Ec.(4-10), se tiene  $D_m=1$  por lo que la Ec.(4-69) se reduce, como era de esperar, a la Ec.(4-29).

Por otro lado, la distribución de irradiancia de la Ec.(4-70) se hace constante cuando la modulación  $s'$  de la red fuente es

$$s' = \frac{1}{K+\Delta} ,$$

al ser, en este caso,  $D_m=0$  cuando  $m \neq 0$ . Para los patrones de Lau ( $\Delta=0$ ), esta relación se reduce a  $s'=1/K$ . Esta condición limita —salvo para el primer patrón de Lau, correspondiente a  $K=1$ — el valor máximo de la modulación  $s'$  de la red fuente que permite obtener patrones de Lau de alto contraste. Por este motivo, en una experiencia típica, la red fuente del dispositivo tiene una modulación muy baja ( $s'=0.06$  en el caso de los resultados experimentales de las Figs.4-4 y 4-5). De este modo, al menos para los primeros planos de consonancia, la influencia de los coeficientes  $D_m$  sobre la distribución de irradiancia de los patrones de Lau es relativamente pequeña y se traduce en una ligera pérdida de definición en los detalles, respecto al patrón de Fresnel para el que se establece la consonancia. Por tanto como consecuencia de la mayor atenuación que sufren las frecuencias espaciales altas, se suaviza el perfil del patrón en consonancia. En cambio, en los patrones de Lau con un índice  $K$  de valor próximo a  $1/s'$  la influencia de los coeficientes  $D_m$  es decisiva y hace que la distribución de irradiancia resultante sea, a efectos prácticos, uniforme.

A continuación, vamos a analizar el perfil teórico de las franjas de Lau. Como sabemos éstas se obtienen utilizando una red objeto de amplitud binaria y estableciendo la condición de consonancia para alguna de sus autoimágenes. La distribución de amplitud de esta red se puede expresar, al igual que se hizo en las Ecs.(2-86), como

$$t(x,y) = t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{sd}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md) , \quad (4-71)$$

siendo  $s$  y  $d$ , respectivamente, la modulación y el período de la red y  $\text{rect}(x/sd)$  su celda unidad.

Para valorar la distribución de irradiancia,  $I'(x,y)$ , de las franjas de Lau vamos a utilizar la Ec.(4-67). En ella,  $I(x,y)$  se puede expresar, según la Ec.(4-14), como

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left| t_q\left(\frac{x}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left| t\left(\frac{x}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 = \frac{1}{\mathcal{M}^2} t\left(\frac{x}{\mathcal{M}}\right) , \quad (4-72)$$

donde se ha tenido en cuenta que el patrón de Fresnel para el que se establece la condición de consonancia es una autoimagen de la red y que, por ser ésta binaria y de máximo contraste,  $|t(x)|^2=t(x)$ . Considerando las Ecs.(4-71) y (4-66), la Ec.(4-72) se reduce a

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2 |\mathcal{M}_s|} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s\mathcal{M}d}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}} - md\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s\mathcal{M}d}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d) \right]$$

Llevando esta expresión a la Ec.(4-67), resulta

$$\begin{aligned} I'(x,y) &= \frac{1}{s'd'\mathcal{M}^2\mathcal{M}_s^2} \left[ \text{rect}\left(-\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) \delta\left(-\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s\mathcal{M}d}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d) \right] = \\ &= \frac{1}{s'd'\mathcal{M}^2\mathcal{M}_s^2} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) * \text{rect}\left(\frac{x}{s\mathcal{M}d}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d) \right] \left[ \delta\left(\frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) * 1 \right] = \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left\{ \frac{1}{s'd'|\mathcal{M}_s|} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{s'd'\mathcal{M}_s}\right) * \text{rect}\left(\frac{x}{s\mathcal{M}d}\right) \right] \right\} * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d) \quad (4-73) \end{aligned}$$

Esta ecuación describe una distribución de irradiancia periódica, con período  $|\mathcal{M}|d$ , en la que el término entre corchetes corresponde a su celda unidad. Ésta se obtiene, obviando el factor constante normalizador  $(|\mathcal{M}_s|s'd')^{-1}$ , convolucionando dos rectángulos: uno de ellos, el de anchura  $|\mathcal{M}_s|s'd'$ , es la proyección geométrica de la celda unidad de la red fuente a través del punto axial de la red objeto, y el otro, cuyo ancho es  $|\mathcal{M}|sd$ , es la celda unidad de la autoimagen. Teniendo en cuenta la condición de consonancia, Ec.(4-13), se obtiene que  $|\mathcal{M}_s|s'd' = |\mathcal{M}|d|K|s'$ , por lo que el perfil de las franjas de Lau lo determina, en definitiva, la convolución de un rectángulo de ancho  $|\mathcal{M}|d|K|s'$  con otro de ancho  $|\mathcal{M}|sd$ . El resultado, inmediato, de esta operación es un trapecio cuya base mayor tiene anchura  $|\mathcal{M}|sd + |\mathcal{M}_s|s'd' = |\mathcal{M}|d(s + |K|s')$  y cuya base menor tiene un ancho igual a  $||\mathcal{M}|sd - |\mathcal{M}_s|s'd'| = |\mathcal{M}|d|(s - |K|s')|$ . En la Fig.4-8 se representa esta función, para el caso en que  $|K|s' < s$ . Como se ha razonado previamente, ésta es la situación experimental más frecuente al ser, usualmente, la modulación de la red fuente mucho menor que la de la red objeto y  $K$  un entero pequeño. En este razonamiento hemos supuesto implícitamente que no hay solapamiento entre dos o más de los trapecios centrados en deltas de la Ec.(4-73) que sean contiguas. En caso contrario, el perfil de las franjas de Lau se torna más complicado y se obtiene sumando la contribución de todos los trapecios, centrados en deltas adyacentes, que se superponen a lo largo de un período cualquiera del patrón de franjas.

Para obtener franjas de Lau de contraste máximo es necesario que la irradiancia  $I'(x,y)$  de la Ec.(4-73) se anule en algún intervalo. Para ello es suficiente con que la base de la celda unidad trapezoidal sea menor que el período,  $|\mathcal{M}|d$ , de la distribución de franjas. De este modo no hay solapamiento entre las celdas unidades centradas en dos deltas contiguas de la Ec.(4-73) y se garantiza la existencia de intervalos de irradiancia

nula. Si se define la modulación,  $s_L$ , de una red trapezoidal de este tipo como la razón entre la base de su celda unidad y el período, resulta

$$s_L = \frac{|\mathcal{M}_s| d(s + |K/s'|)}{|\mathcal{M}| d} = s + |K/s'| \quad (4-74)$$

por lo que la condición para obtener franjas de Lau de contraste unidad equivale a que  $s_L < 1$ . Obsérvese que  $s_L$  crece a medida que aumenta  $|K|$ . Para franjas de Lau reales, este hecho implica que cuanto más cerca de la red objeto esté el plano de consonancia —menor sea  $K$ — más parecida será la modulación de las franjas a la de la red.

La Ec.(4-73) proporciona una visión de las franjas de Lau complementaria de la que proporciona la Ec.(4-70). Obviamente, ambas ecuaciones (particularizando, claro está, la Ec.(4-70) al caso de las franjas de Lau) describen la misma distribución de irradiancia. La manera más sencilla de comprobar esta afirmación es, tal vez, verificar la igualdad de los espectros de Fourier de ambas expresiones.

Por un lado, operando de igual modo, que en la obtención del espectro de Fourier, Ec.(2-83), de una red 2-D rectangular no separable, Ec.(2-80), a partir de la Ec.(4-73) resulta

$$\tilde{I}(u,v) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{senc}\left(m \frac{s'd'\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}d}\right) \text{senc}(ms) \delta\left(u - \frac{m}{\mathcal{M}d}\right) \quad (4-75)$$

Por otro lado, suponiendo la situación de consonancia perfecta ( $\Delta=0 \rightarrow B_m=1$ ), a partir

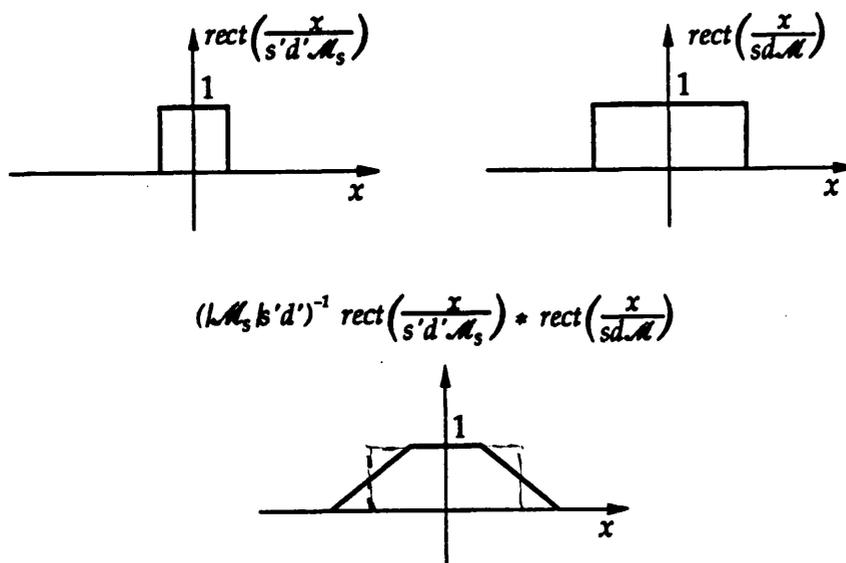


Fig. 4-8. El resultado de la convolución de dos rectángulos determina la celda unidad trapezoidal de las franjas de Lau.



de la Ec.(4-70), de manera inmediata, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{I}'(u,v) &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m D_m \delta\left(u - \frac{m}{\mathcal{M}d}\right) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s \operatorname{senc}(ms) \operatorname{senc}(mKs') \delta\left(u - \frac{m}{\mathcal{M}d}\right) , \end{aligned} \quad (4-76)$$

donde se ha tenido en cuenta la Ec.(4-69) y el hecho de que para una red binaria, de amplitud, de modulación  $s$  —para la que  $t(x)=|t(x)|^2$ — los coeficientes  $A_m$  son

$$A_m = \frac{\operatorname{sen}(\pi ms)}{\pi m} = s \operatorname{senc}(ms) .$$

Por último, la condición de consonancia, Ec.(4-13), garantiza la igualdad de las Ecs.(4-75) y (4-76) y, por tanto, la de las Ecs.(4-73) y (4-70).

Al igual que ocurre para las franjas de Lau, también para la distribución de irradiancia de un patrón de Lau cualquiera existe una expresión, alternativa a la de la Ec.(4-70), análoga a la de la Ec.(4-73). Expresando la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel que se pone en consonancia como

$$|t_q(x)|^2 = i_q(x) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md) ,$$

siendo  $i_q(x)$  la celda unidad del patrón (en irradiancia), y realizando las mismas operaciones algebraicas que en la deducción de la Ec.(4-73), es inmediato obtener para la distribución de irradiancia del patrón de Lau correspondiente la relación

$$I'(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left\{ \frac{1}{s'd'|\mathcal{M}_S|} \left[ \operatorname{rect}\left(-\frac{x}{s'd'|\mathcal{M}_S|}\right) * i_q\left(\frac{x}{\mathcal{M}}\right) \right] \right\} * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d) . \quad (4-77)$$

De este modo, la celda unidad de los patrones de Lau queda determinada por la convolución de las celdas unidades (convenientemente escaladas) de las distribuciones de irradiancia de la red fuente y del patrón de Fresnel que se pone en consonancia. La Ec.(4-77) se aplica, por ejemplo, al patrón de Lau de la Fig.4-5, obtenido con la red de fase binaria de salto de fase  $\pi/2$ ; aunque, en este caso, al ser el patrón de índice  $q=1/4$  de esta red semejante a una red de Ronchi se tiene  $i_q(x)=\operatorname{rect}[x/(d/2)]$  por lo que la Ec.(4-77) se reduce a la Ec.(4-73).

## IV.4 Consonancia de patrones bidimensionales

A continuación vamos a ver cómo se pueden obtener patrones de Lau bidimensionales, como resultado de la superposición incoherente en consonancia de patrones de Fresnel de redes 2-D.

Para fijar ideas, vamos a considerar primero una red objeto 2-D rectangular separable. La transmitancia en amplitud,  $t(x,y)=t_1(x)t_2(y)$ , de esta red viene dada por la Ec.(2-72), siendo  $d_1$  y  $d_2$  los períodos de esta función en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. Tal y como se vió en el Capítulo II, cada patrón de Fresnel,  $t_\alpha(x,y)$ , de esta red es, a su vez, separable en coordenadas cartesianas y está formado por el producto de los patrones de índice  $\alpha$  de las redes 1-D —véase la Ec.(2-25)—. Si se caracterizan estos patrones monodimensionales por los índices,  $Q_1+p$  y  $Q_2+r$ , definidos por las Ecs.(2-73), se tiene que

$$t_\alpha(x,y) \approx t_{1p}(x) t_{2r}(y) \quad , \quad (4-78)$$

verificándose, además, según la Ec.(2-74), la relación

$$Q_1+p = \gamma^2(Q_2+r) \quad ,$$

donde

$$\gamma = \frac{d_2}{d_1} \quad . \quad (4-79)$$

De acuerdo con estos hechos, para obtener patrones de Lau bidimensionales con esta red objeto, es necesario que se produzca simultáneamente la superposición en consonancia de los patrones 1-D que constituyen el patrón de Fresnel 2-D. A la vista de los resultados de la sección anterior, es lógico pensar que para ello se debe utilizar una red fuente constituida por la superposición de dos redes fuente monodimensionales como la que describe la Ec.(4-10), una de ellas dispuesta en la dirección  $x$ , y la otra en la dirección  $y$ . De este modo, cada fuente lineal pone en consonancia la componente 1-D del patrón de Fresnel de la red objeto, orientada en su misma dirección —para ello, claro está, se debe verificar la adecuada condición de consonancia—.

La distribución normalizada de irradiancia de esta red fuente 2-D, viene dada por

$$I_S(x,y) = \left(\frac{1}{2L+1}\right)^2 \sum_{j=-L}^{+L} \sum_{h=-L}^{+L} \delta(x - jd'_1, y - hd'_2) \quad (4-80)$$

y corresponde al producto de la de dos redes lineales como la de la Ec.(4-10) orientadas perpendicularmente, siendo la anchura de las líneas  $\Omega_1=(2L+1)d'_1$  para una de ellas y  $\Omega_2=(2L+1)d'_2$  para la otra. Esta fuente 2-D está compuesta por un conjunto de  $(2L+1)^2$  puntos emisores elementales dispuestos en las intersecciones de las líneas de una y otra red 1-D (sin pérdida de generalidad hemos supuesto el mismo número de líneas,  $2L+1$ , en cada red).

La distribución de irradiancia que se obtiene con esta combinación de redes 2-D en un plano caracterizado por un índice  $\alpha$ , viene dada por la Ec.(4-8), que teniendo en cuenta la Ec.(4-80) se convierte, de manera inmediata, en

$$I(x,y) = \left[\frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}}\right]^2 \sum_{j=-L}^{+L} \sum_{h=-L}^{+L} \left| t_\alpha \left( \frac{x + j\mathcal{M}_S d'_1}{\mathcal{M}}, \frac{y + h\mathcal{M}_S d'_2}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \quad (4-81)$$

Cada punto emisor de la fuente, asociado a un valor particular de  $j$  y  $h$ , genera una réplica del patrón de Fresnel, con aumento  $|\mathcal{M}|$ , desplazada lateralmente una cantidad  $-j\mathcal{M}_S d'_1$  en la dirección  $x$  y  $-h\mathcal{M}_S d'_2$  en la dirección  $y$ . Estos patrones se superponen en consonancia si se verifica, simultáneamente para ambas direcciones, que el desplazamiento relativo entre los patrones generados por dos puntos fuente contiguos es un número entero de veces el período de los patrones en la dirección considerada. Análogamente al caso unidimensional, véase la Ec.(4-13), esta condición se expresa matemáticamente mediante las relaciones

$$\mathcal{M}_S d'_1 = K_1 \mathcal{M} d_1 \quad (4-82a)$$

$$\text{y } \mathcal{M}_S d'_2 = K_2 \mathcal{M} d_2 \quad (4-82b)$$

donde los números enteros  $K_1$  y  $K_2$  tienen el mismo significado que  $K$  en la Ec.(4-13). Cuando se satisfacen simultáneamente estas ecuaciones, la Ec.(4-81) se reduce a

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \left| t_\alpha \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 \quad (4-83)$$

y en el plano de observación se obtiene un patrón de Lau 2-D.

Por un lado, combinando las Ecs.(4-82) y la Ec.(4-79) se deduce que

$$\gamma' = \frac{d_2'}{d_1'} = \frac{K_2}{K_1} \gamma \quad (4-84)$$

Por otro lado, aplicando a este caso la Ec.(4-15), que expresa la condición de consonancia en función de la separación,  $z$ , entre las redes y el índice del patrón que se pone en consonancia, se obtiene

$$z = \frac{2(Q_1+p)}{K_1\lambda} d_1 d_1' \quad (4-85a)$$

$$y \quad z = \frac{2(Q_2+r)}{K_2\lambda} d_2 d_2' \quad (4-85b)$$

o, equivalentemente

$$d_1' = \frac{K_1\lambda z}{2(Q_1+p)d_1} \quad (4-86a)$$

$$y \quad d_2' = \frac{K_2\lambda z}{2(Q_2+r)d_2} \quad (4-86b)$$

Así pues, al igual que para las redes 1-D, dado un valor de  $d_1$  y elegidos los valores de  $z$ ,  $(n_1+q_1)$  y  $K_1$  queda determinado el período  $d_1'$  de la red fuente. Al ser ahora la transparencia objeto una red 2-D, dado el valor de  $d_2$  —o equivalentemente el de  $\gamma$ —, la Ec.(4-84) determina el valor de  $\gamma'$  —y por tanto el de  $d_2'$ — de la red fuente necesaria para establecer la consonancia en esta segunda dirección con  $K_2$  períodos desplazados. En el caso más usual ( $K_1=K_2=1$ ), los períodos de la red fuente y los de la red objeto guardan la misma proporción.

En estas condiciones, para determinar la localización de los patrones de Lau 2-D basta con aplicar la Ec.(2-56) —o la Ec.(2-58)— a una cualquiera de las dos direcciones.

Si se dispone de una red objeto y de una red fuente, ambas bidimensionales, sólo se podrá establecer la consonancia para los distintos patrones de Fresnel si la razón entre  $\gamma'$  y  $\gamma$  es un número racional. Suponiendo válida esta condición, desde un punto de vista práctico, si se quiere obtener la superposición en consonancia, con  $K_1$  períodos desplazados, para el patrón cuyo índice para la dirección  $x$  es  $Q_1+p$ , la separación entre ambas redes debe verificar la Ec.(4-85a). Con este valor de  $z$ , a partir de las Ecs.(4-85b) y (2-74) se concluye que el patrón de Fresnel 2-D estará automáticamente en consonancia sólo si  $K_1$  es un múltiplo entero del denominador del quebrado  $\gamma'/\gamma$  expresado en forma irreducible.

Asimismo, dado un valor para la distancia  $z$ , los índices  $Q_1'+p'$  y  $Q_2'+r'$  de los patrones 1-D, uno en la dirección  $x$  y otro en la dirección  $y$ , para los que se obtiene la

consonancia con  $K_1=1$  y  $K_2=1$  períodos desplazados, quedan determinados por las Ecs.(4-85). Es decir,

$$Q_{i+p'} = \frac{\lambda z}{2d_1 d_1'} \quad , \quad (4-87a)$$

$$\text{y } Q_{2+r'} = \frac{\lambda z}{2d_2 d_2'} \quad , \quad (4-87b)$$

y la relación entre ellos es

$$Q_{i+p'} = \frac{d_2 d_2'}{d_1 d_1'} (Q_{2+r'}) = \gamma \gamma' (Q_{2+r'}) \quad . \quad (4-88)$$

Simultáneamente, tal y como señala la Ec.(4-18), se consigue la consonancia para la dirección  $x$  en todos los planos caracterizados por los índices

$$Q_{1+p} = (Q_{i+p'}) K_1' \quad , \quad K_1' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (4-89)$$

y la consonancia para la dirección  $y$  en los asociados a los índices

$$Q_{2+r} = (Q_{2+r'}) K_2' \quad , \quad K_2' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (4-90)$$

Entre los planos definidos por las Ecs.(4-89) y (4-90) se encuentra un plano de consonancia 2-D cada vez que para alguna combinación particular de  $K_1'$  y  $K_2'$ , los índices correspondientes satisfacen la Ec.(2-74). Teniendo en cuenta las Ecs.(4-89) y (4-90), esta relación se reduce a

$$Q_{i+p'} = \gamma^2 \frac{K_2'}{K_1'} (Q_{2+r'}) \quad .$$

Comparando esta ecuación y la Ec.(4-88), se deduce que

$$\frac{K_2'}{K_1'} = \frac{\gamma'}{\gamma} \quad . \quad (4-91)$$

En consecuencia, únicamente se producirá la superposición 2-D incoherente en consonancia en aquellos planos caracterizados por un valor de  $K_1'$  que sea múltiplo del denominador del quebrado  $\gamma'/\gamma$  expresado de forma irreducible. En el caso más frecuente,  $\gamma'/\gamma=1$ , la Ec.(4-91) asegura que  $K_2'=K_1'$  y, por tanto, todos los planos de

consonancia 1-D correspondiente a cualquiera de las dos direcciones son, a su vez, planos de consonancia 2-D.

En el caso de las redes 2-D cuadradas ( $\gamma=1$ ) al ser para todos sus patrones de Fresnel  $Q_1+p=Q_2+r=Q+q$ , la obtención de patrones de Lau se reduce, suponiendo también  $\gamma'=1$ , a un caso unidimensional y es, por tanto, directamente aplicable todo lo dicho a este respecto en la sección anterior. Así, por ejemplo, estableciendo la superposición en consonancia para la primera autoimagen de una red 2-D cuadrada ( $Q'+q'=0'5$ ), todas las autoimágenes 2-D reales y virtuales se convierten en franjas de Lau. Asimismo, utilizando como red objeto una red 2-D cuadrada de fase, compuesta por dos redes 1-D como la de la Ec.(2-69) cruzadas en ángulo recto, y poniendo en consonancia su patrón de índice  $Q'+q'=1/4$ , se obtienen patrones de Lau 2-D binarios y de contraste máximo en todos los planos caracterizados por un índice  $q=1/4$  ó  $3/4$  ( $Q$  cualquiera). Los resultados experimentales correspondientes a las dos últimas situaciones se muestran en la Fig.4-9.

Una vez analizada con detalle la obtención de patrones de Lau con redes 2-D rectangulares separables, vamos a estudiar la extensión de estos resultados a otras situaciones. Para abreviar la discusión, en particular, vamos a considerar primero el caso de las redes 2-D separables no ortogonales (tanto de amplitud como de fase) y después el de las correspondientes redes 2-D no separables. Con las redes de amplitud nos limitaremos a estudiar la obtención de franjas de Lau (consonancia de autoimágenes) y con las redes de fase nos restringiremos a los patrones de Lau correspondientes a patrones de Fresnel binarios de alto contraste. Ambas situaciones particulares son las que mayor interés práctico tienen y son las que se han utilizado en alguna de las aplicaciones propuestas en el Capítulo V. Asimismo, su estudio permite entender, de manera casi inmediata, otras situaciones más generales.

A la luz de los resultados previos (tanto uni como bidimensionales) debe estar claro que para obtener patrones de Lau con redes 2-D cualesquiera basta con superponer, en un mismo plano, diferentes réplicas mutuamente incoherentes del mismo patrón de Fresnel, desplazadas entre sí regularmente en las dos direcciones en que es periódico éste. Para ello se debe utilizar una fuente plana incoherente en la que los puntos emisores se dispongan formando una red 2-D, periódica en las mismas direcciones en las que el patrón de Fresnel —y por tanto, la red objeto— lo es, y se debe establecer la adecuada condición de consonancia. En lo que sigue vamos a tomar, sin pérdida de generalidad, esta condición como equivalente a exigir que el desplazamiento relativo entre los patrones que se superponen sea igual a un período. En las situaciones ya tratadas, esto implica tomar los enteros  $K$ ,  $K_1$  y  $K_2$  iguales a uno.

Consideremos, por tanto, una red objeto compuesta por dos redes lineales del mismo período,  $d$ , giradas entre sí un ángulo  $\theta$ . Para esta estructura bidimensional,  $t(x,y)$  viene dada por la Ec.(2-90). De acuerdo con la Ec.(2-95), una de estas redes genera autoimágenes si y sólo si se verifica que

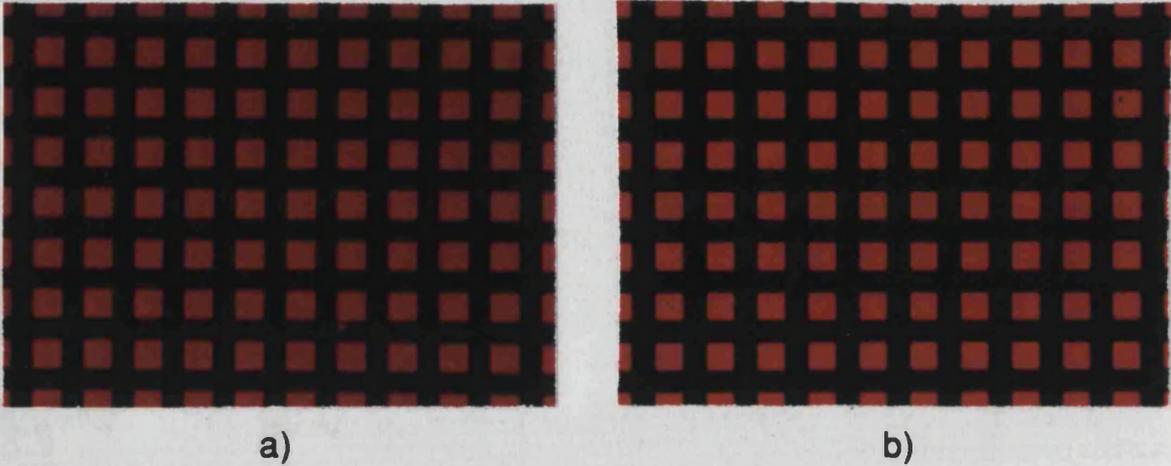


Fig. 4-9. Distribuciones de irradiancia obtenidas utilizando el dispositivo de Lau con dos redes 2-D cuadradas. La red fuente era la superposición, en ángulo recto, de dos redes fuente lineales como la empleada en la Fig.4-4. a) Franjas de Lau 2-D correspondientes a una red objeto que era, también, la versión bidimensional de la de la Fig.4-4. Los valores de  $Q'+q'$ ,  $z$  y  $R$  coinciden con los de la Fig.4-4a. b) Con la red objeto que resulta de la superposición en ángulo recto de dos redes de fase como la de la Fig.4-5 se ha obtenido este patrón de Lau de máximo contraste. El índice  $Q'+q'$  y las distancias  $z$  y  $R$  son los mismos que en la Fig.4-5.

$$\cos\theta = \frac{N}{2M} ,$$

siendo  $N=0, \pm 1, \pm 2, \dots, |N| < 2M$  y  $N/M$  irreducible. Tal y como se discutió en la sección II.4, las posiciones de las autoimágenes de esta red coinciden con las de una red lineal de período  $\sqrt{M}d$ , por lo que, para iluminación esférica, la ley que determina la localización de sus patrones de Fresnel es

$$\frac{zR}{z+R} = 2(Q+q) \frac{Md^2}{\lambda} . \quad (4-92)$$

De acuerdo con el razonamiento previo, para obtener franjas de Lau con esta red objeto basta con utilizar una fuente incoherente en la que los puntos emisores se dispongan en los puntos de corte de las rectas  $x=jd'$  y  $x'=hd'$  (siendo  $j$  y  $h$  números enteros). Suponiendo que el número de puntos fuente en ambas direcciones  $x$  y  $x'$  es  $2L+1$ , la distribución normalizada de irradiancia de esta fuente es

$$\begin{aligned} I_S(x,y) &= \frac{|\text{sen}\theta|}{(2L+1)^2} \sum_{j=-L}^{+L} \sum_{h=-L}^{+L} \delta(x - jd', x' - hd') = \\ &= \left(\frac{1}{2L+1}\right)^2 \sum_{j=-L}^{+L} \sum_{h=-L}^{+L} \delta\left(x - jd', y + j \frac{d'}{\text{tg}\theta} - h \frac{d'}{\text{sen}\theta}\right) . \end{aligned} \quad (4-93)$$

Esta red fuente coincide esencialmente con la que se obtiene al superponer dos redes fuente lineales como la de la Ec.(4-10), con sus líneas orientadas respectivamente en las direcciones  $y$  y  $y'$ . Por este motivo, la manera más sencilla de obtener esta red, experimentalmente, es superponiendo dos redes fuente, como la del dispositivo de Lau unidimensional, giradas entre sí un ángulo  $\theta$ .

Con estas redes 2-D dispuestas paralelamente, en un plano de autoimagen cualquiera se obtiene una distribución de irradiancia que, a partir de la Ec.(4-8), resulta ser

$$I(x,y) = \left[ \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}} \right]^2 \sum_{j=-L}^{+L} \sum_{h=-L}^{+L} \left| t_1 \left( \frac{x + j\mathcal{M}_5 d'}{\mathcal{M}} \right) t_2 \left( \frac{x' + h\mathcal{M}_5 d'}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \right)^2 \left| t \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \right|^2$$

donde, se ha supuesto, además que se verifica la condición

$$\mathcal{M}_5 d' = \mathcal{M} d \quad .$$

Esta relación garantiza la superposición de patrones en consonancia simultáneamente tanto en la dirección  $x$  como en la  $x'$ . Sustituyendo en ella los valores de  $\mathcal{M}_5$  y  $\mathcal{M}$  —dados por las Ecs.(4-7) y (4-12), respectivamente— y utilizando la Ec.(4-92), se obtiene que el período  $d'$  de la red fuente 2-D necesario para poner en consonancia la autoimagen de índice  $Q'$  es

$$d' = \frac{\lambda z}{2Q' M d} \quad . \quad (4-94)$$

Desde un punto de vista práctico resulta más útil la relación

$$z = 2Q' \frac{M d d'}{\lambda} \quad , \quad (4-95)$$

que proporciona la distancia  $z$  que debe mediar entre las dos redes oblicuas (de períodos  $d$  y  $d'$  dados).

De nuevo, al poner en consonancia la autoimagen de índice  $Q'$ , se obtiene asimismo la consonancia para otros planos de autoimagen. En particular, se obtienen franjas de Lau en todos los planos caracterizados por un índice  $Q = KQ'$ , siendo  $K$  el número entero cuyo módulo indica el desplazamiento relativo, en número de períodos, que hay entre los patrones generados por puntos fuente contiguos (bien en la dirección  $x$  o bien en la  $x'$ ). La localización de estos planos, la determina la Ec.(4-92) sin más que dar al índice  $Q+q$ , el valor  $Q$  correspondiente.

Cuando  $N$  es un número par y  $M$  impar, según la Ec.(2-100) la red 2-D resultante genera también autoimágenes negativas ( $q=0'5$ ). En este caso, si se establece la condición de consonancia para la primera autoimagen negativa de la red, se obtienen franjas de Lau en todos los planos de autoimágenes —tanto positivas como negativas— de ella. Para ello se debe verificar la Ec.(4-95) sustituyendo en ella  $Q'$  por  $Q'+q'=0'5$ .

Por último, con una red 2-D oblicua de fase compuesta por la superposición de dos redes lineales como la de la Ec.(2-69), se pueden obtener patrones de Lau binarios y de contraste unidad sin más que establecer la condición de consonancia para uno cualquiera de sus patrones de Fresnel de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$ . Para ello, por un lado, el entero  $N$  que define el ángulo  $\theta$  debe verificar la Ec.(2-112) y, por otro lado, se debe satisfacer la Ec.(4-95) —sustituyendo en ella, ahora, el entero  $Q'$  por  $Q'+q'$  con  $q'=1/4$  ó  $3/4$ —. La mejora que se obtiene en el rendimiento luminoso del dispositivo de Lau con el empleo de estas redes de fase, en lugar de las correspondientes redes de amplitud, es tan apreciable en el caso bidimensional que hace el uso de estas redes objeto casi imprescindible.

Consideremos ahora el caso de las redes 2-D no separables. Dado que, tal y como se vió en la sección II-4, el comportamiento de estas redes en lo que respecta a la formación de autoimágenes es igual al de las correspondientes redes separables, las condiciones ya expuestas para obtener franjas de Lau 2-D con este último tipo de redes (tanto rectangulares como oblicuas) son directamente aplicables al caso que nos ocupa.

Así con una red fuente como la correspondiente a la Ec.(4-93) y una red 2-D oblicua de celda cualquiera, como la de la Ec.(2-107), se obtienen franjas de Lau (que en este caso no tienen necesariamente el aspecto de una trama de líneas) sin más que situar las dos redes bidimensionales paralelamente y separadas una distancia que verifique la Ec.(4-95). Naturalmente, implícitamente estamos suponiendo que la red objeto genera autoimágenes, es decir, que satisface la Ec.(2-95).

Igualmente se pueden obtener franjas de Lau con una red objeto rectangular como la de la Ec.(2-80), para la que el cociente,  $\gamma$ , entre sus períodos verifique la Ec.(2-75) —que para evitar confusiones en la notación vamos a escribir  $\gamma^2=k_1/k_2$ —, y con una red fuente de irradiancia dada por la Ec.(4-80) —para la que supondremos  $\gamma'/\gamma=1$ —. Para tal fin se deben de verificar simultáneamente las Ecs.(4-85). Recordando que las autoimágenes 2-D de la red se obtienen cuando los parámetros  $Q_1+p$  y  $Q_2+r$  verifican las relaciones

$$Q_1+p = k_1(Q+q) \quad ,$$

$$\text{y } Q_2+r = k_2(Q+q) \quad ,$$

siendo  $Q+q$  el índice semientero asociado a cada autoimagen 2-D y denotando por  $Q'+q'$  el índice de aquella que se quiere poner en consonancia con  $K_1=K_2=1$ , las Ecs.(4-85) se reducen a

$$z = \frac{2k_1(Q'+q')}{\lambda} d_1 d_1' = \frac{2k_2(Q'+q')}{\lambda} d_2 d_2' \quad (4-96)$$

Al igual que en las situaciones previas, con esta condición se consigue simultáneamente la consonancia de todas las autoimágenes para las que su índice  $Q+q=K(Q'+q')$ , siendo  $K$  un entero. Puesto que según la Ec.(2-77), las posiciones de las autoimágenes 2-D coinciden con las de una red lineal de período  $d=\sqrt{k_1} d_1 = \sqrt{k_2} d_2$ , la Ec.(2-56) proporciona para la localización de los sucesivos planos de franjas de Lau la relación

$$\frac{zR}{z+R} = 2(Q+q) \frac{k_1 d_1^2}{\lambda} = 2(Q+q) \frac{k_2 d_2^2}{\lambda} \quad (4-97)$$

Para concluir esta sección vamos a discutir cómo afecta a la distribución de irradiancia de los patrones de Lau el hecho de que los elementos emisores de una red fuente 2-D real no son fuentes puntuales ideales. Vamos a seguir un razonamiento similar al utilizado al final de la sección anterior, correspondiente al caso monodimensional. En lo que sigue, vamos a suponer, haciendo en cada caso las matizaciones oportunas, que las dos redes del dispositivo son bien redes oblicuas o bien redes rectangulares.

La distribución normalizada de irradiancia  $I'_5(x,y)$  de una red fuente real se puede expresar como

$$I'_5(x,y) = i_5(x,y) * I_5(x,y) \quad , \quad (4-98)$$

siendo  $I_5(x,y)$  la distribución normalizada de irradiancia de la correspondiente fuente ideal —Ec.(4-80) para las redes rectangulares y Ec.(4-93) para las oblicuas— y  $i_5(x,y)$  la celda unidad, en irradiancia, de la red, que vamos a suponer normalizada a la unidad ( $\iint i_5(x,y) dx dy = 1$ ).

La distribución de irradiancia,  $I''(x,y)$ , que se obtiene con el dispositivo de doble red en un plano de observación cualquiera, según la Ec.(4-8), es ahora

$$\begin{aligned} I''(x,y) &= \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s}\right)^2 \left\{ \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 i_5\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) * I_5\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * \left| t_a\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 i_5\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) * \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s}\right)^2 I_5\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) * \left| t_a\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 i_s\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) * I(x,y) \quad , \quad (4-99)$$

donde  $I(x,y)$  es la distribución de irradiancia que se generaría, en las mismas condiciones, con la correspondiente red fuente ideal. Si nos restringimos al caso de consonancia de autoimágenes,  $I(x,y)$  coincide como sabemos con la distribución de irradiancia debidamente escalada del objeto, es decir,

$$I(x,y) = \frac{1}{\mathcal{M}^2} \left| t\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right|^2 \quad . \quad (4-100)$$

Puesto que  $|t(x,y)|^2$  es una función periódica, se puede escribir como

$$|t(x,y)|^2 = i(x,y) * \Delta(x,y) \quad , \quad (4-101)$$

siendo  $i(x,y)$  su celda unidad y  $\Delta(x,y)$  la red de puntos donde se repite ésta. En los casos de nuestro interés,  $\Delta(x,y)$  viene dada por la Ec.(2-105) para las redes oblicuas y por

$$\Delta(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md_1, y - nd_2) \quad , \quad (4-102)$$

para las redes rectangulares.

Utilizando las Ecs.(4-100) y (4-101), la Ec.(4-99) se reduce a

$$\begin{aligned} I'(x,y) &= \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 i_s\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) * \left\{ \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 i\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) * \Delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 i_s\left(\frac{-x}{\mathcal{M}_s}, \frac{-y}{\mathcal{M}_s}\right) * i\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right] * \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \Delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right] \quad . \quad (4-103) \end{aligned}$$

Esta ecuación describe una distribución de irradiancia periódica, con una celda unidad que es el resultado de la convolución de las celdas elementales, debidamente escaladas, de las distribuciones de irradiancia de las redes fuente y objeto. Puesto que la red de puntos donde se repite esta celda unidad coincide, salvo por el aumento  $\mathcal{M}$  debido a la proyección geométrica, con la de la red objeto, las franjas de Lau son periódicas a su vez en las mismas direcciones que ésta.

Si las dos redes del dispositivo son separables y binarias (es decir, cada una de ellas es el resultado de superponer dos redes lineales binarias), las franjas de Lau resultantes tienen perfil trapezoidal en las dos direcciones en que son periódicas las redes. Al igual que ocurre en el caso monodimensional, si la modulación de las redes

lineales que componen la fuente es pequeña, el perfil de las franjas de Lau se asemeja mucho al de la red objeto.

La Ec.(4-103) resulta también válida para los patrones de Lau, sin más que sustituir en ella la celda unidad  $i(x/\mathcal{M}, y/\mathcal{M})$  del objeto por la celda unidad  $i_o(x/\mathcal{M}, y/\mathcal{M})$  de la distribución de irradiancia del patrón de Fresnel de éste que se pone en consonancia.

Utilizando la relación existente entre las operaciones de convolución y de correlación, la Ec.(4-103) se puede expresar como

$$I'(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 i\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \otimes i_s\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}, \frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \Delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right] \quad (4-104)$$

De este modo, el perfil de las franjas de Lau resulta igual a la correlación entre  $\mathcal{M}_s^{-2} i(x/\mathcal{M}, y/\mathcal{M})$  y  $i_s(x/\mathcal{M}_s, y/\mathcal{M}_s)$ . Si las celdas elementales de las dos redes son iguales, la celda unidad de las franjas de Lau se reduce a una autocorrelación. En este caso, en el plano de observación se obtiene una distribución regular de máximos de irradiancia, correspondientes a los máximos característicos de una autocorrelación. Este hecho se ha utilizado para verificar la validez de los resultados anteriores. Para ello, se ha sustituido cada red del dispositivo de Lau por una red 2-D cuadrada cuya celda unidad era un carácter alfabético binario, como los que se muestran en la Fig.4-10. Así se tiene que

$$i_s(x,y) = a_1\left(\frac{x}{M_1}, \frac{y}{M_1}\right) \quad (4-105a)$$

$$\text{y } i(x,y) = a_2\left(\frac{x}{M_2}, \frac{y}{M_2}\right) \quad (4-105b)$$

siendo  $a_1(x,y)$  y  $a_2(x,y)$  las transmitancias en intensidad de dichos caracteres y  $M_1$  y  $M_2$  factores de escala que permiten una mayor flexibilidad a la hora de obtener experimentalmente las redes.

Tal y como se ha discutido previamente, la obtención de franjas de Lau con redes 2-D cuadradas es equivalente al caso unidimensional. Por lo tanto, la distancia  $z$  debe de satisfacer la Ec.(4-19) para que se verifique la condición de consonancia —Ec.(4-13) con el parámetro  $K=1$ — para una autoimagen ( $Q'+q'$  semientero) de la red objeto. Bajo estos supuestos la Ec.(4-104), teniendo en cuenta las Ecs.(4-105), se reduce a

$$I'(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}_s}\right)^2 a_2\left(\frac{x}{\mathcal{M}M_2}, \frac{y}{\mathcal{M}M_2}\right) \otimes a_1\left(\frac{x}{\mathcal{M}_sM_1}, \frac{y}{\mathcal{M}_sM_1}\right) \right] * \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \Delta\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \right] \quad (4-106)$$



Fig. 4-10. Versión escalada de los caracteres binarios, utilizados como celda unidad de una red 2-D cuadrada: a) carácter A, y b) carácter S.

Estableciendo la condición

$$\mathcal{M}M_2 = \mathcal{M}_S M_1 \equiv \Lambda \quad , \quad (4-107)$$

que garantiza la igualdad en la escala de las dos funciones que se correlacionan, en el plano de observación —cuya posición la determina, por ejemplo, la Ec.(4-20)— se obtienen franjas de Lau cuyo perfil corresponde a la correlación de las señales  $a_2$  y  $a_1$ . Obsérvese que si se eligen convenientemente los valores de  $M_1$  y  $M_2$  se puede conseguir que el factor de escala  $\Lambda$  sea igual a la unidad.

Utilizando la Ec.(4-13), la Ec.(4-107) proporciona la relación

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{d}{d'} \quad , \quad (4-108)$$

para el cociente entre las escalas de los caracteres en la red objeto y en la red fuente, que coincide, por tanto, con la razón entre los períodos de éstas.

Asimismo, como quedó establecido en la sección anterior, al poner en consonancia una autoimagen se obtiene, simultáneamente, la consonancia para otras autoimágenes. Para éstas, se verifica la Ec.(4-13) con valores de  $K \neq 1$ , por lo que, utilizando además la Ec.(4-108), resulta

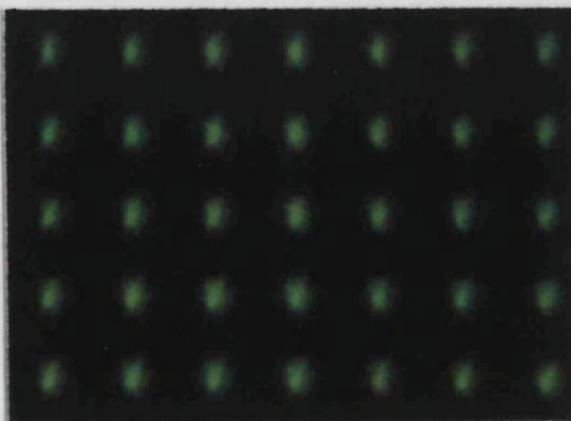
$$\mathcal{M}_S M_1 = K \mathcal{M} M_2 \quad .$$

De este modo, de acuerdo con la Ec.(4-106), el perfil de las franjas de Lau que se obtienen para los diferentes valores de  $K$  —cuya localización fija la Ec.(4-20)— corresponde a la correlación entre  $a_2(x/\mathcal{M}M_2, y/\mathcal{M}M_2)$  y  $a_1(x/K\mathcal{M}M_2, y/K\mathcal{M}M_2)$ . Es decir, en los sucesivos planos de consonancia, se obtiene la correlación de las dos señales con una escala relativa entre ellas igual a  $K$ .

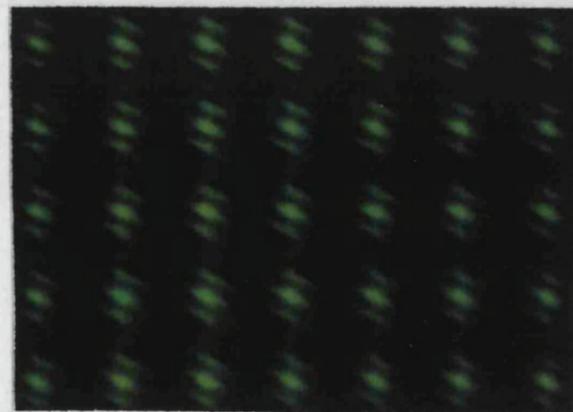


Fig. 4-11. Distribución de irradiancia de la primera autoimagen negativa de la red 2-D de caracteres S.

En los experimentos llevados a cabo, se han empleado redes 2-D cuya celda unidad era uno de los caracteres de la Fig.4-10. El período de las redes utilizadas como fuente era  $d'=0'404mm$  mientras que el de las redes objeto era  $d=0'205mm$ . Como fuente de luz del dispositivo se utilizó un láser de argón ionizado, de longitud de onda  $\lambda=514nm$ . Con objeto de hacer lo más compacto posible el montaje, la condición de consonancia se establecía para la primera autoimagen negativa ( $Q'+q'=0'5$ ) de la red objeto —patrón que, para el caso de la red de caracteres S, se muestra en la Fig.4-11—.



a)



b)

Fig. 4-12. Franjas de Lau obtenidas con dos redes 2-D: a) de caracteres A, y b) de caracteres S. La celda unidad de las franjas corresponde a la autocorrelación: a) del carácter A de la Fig.4-10a, y b) del carácter S de la Fig.4-10b. En ambos casos se puso en consonancia la primera autoimagen negativa ( $Q'+q'=0'5$ ) de la red objeto (de período  $d=0'205mm$ ). Para ello, teniendo en cuenta que  $d'=0'404mm$  y  $\lambda=514mm$ , las distancias  $z$  y  $R$  eran, según las Ecs.(4-19) y (4-20),  $z=16'11cm$  y  $R=16'60cm$ .

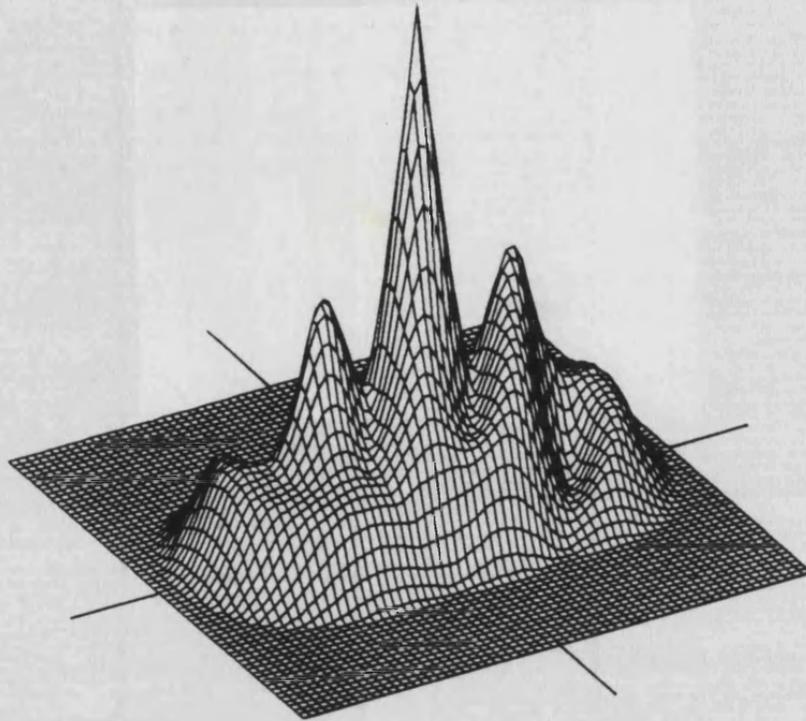


Fig. 4-13. Representación gráfica de la distribución de irradiancia asociada a la autocorrelación del carácter S de la Fig.4-10a.

En la Fig.4-12 se presentan algunos de los resultados experimentales obtenidos utilizando como redes del dispositivo de Lau: a) dos redes de caracteres A, y b) dos redes de caracteres S. Obsérvese que en ambos casos es claramente detectable en cada celda unidad de las franjas de Lau el máximo central de irradiancia correspondiente a una autocorrelación. Como prueba adicional, se ha calculado numéricamente la autocorrelación del carácter S, a cuyo resultado corresponde la gráfica de la Fig.4-13. Como se puede apreciar existe un alto grado de similitud entre esta gráfica y la distribución de irradiancia de cada una de las celdas del patrón de la Fig.4-12b. Por

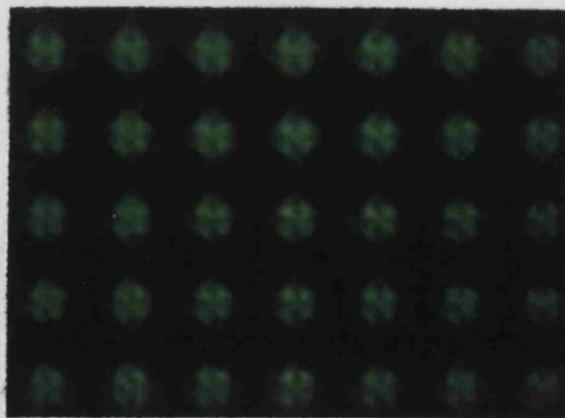


Fig. 4-14. Distribución de irradiancia de las franjas de Lau cuyo perfil corresponde a la correlación entre el carácter S de la Fig.4-10 y el mismo carácter girado  $90^\circ$ . Los valores de  $\lambda$ ,  $d$ ,  $d'$ ,  $Q'+q'$ ,  $z$  y  $R$  son los mismos que en la Fig.4-12.

último, la Fig.4-14 corresponde a las franjas de Lau que se obtienen con las dos redes de la Fig.4-12b, cuando una de ellas —en este caso, la red objeto— se gira  $90^\circ$ . El perfil de estas franjas corresponde a la correlación entre el carácter S y el mismo carácter dispuesto perpendicularmente.

## IV.5 Efecto Lau con dos redes de fase

A pesar de su sencillez, el dispositivo de Lau convencional posee una baja eficacia luminosa, debido a la absorción de luz que se produce en las dos redes de amplitud. Esta limitación se hace más evidente cuando se utilizan redes bidimensionales. El empleo de una red objeto de fase, tal y como se ha descrito en las secciones anteriores, supone una mejora en el rendimiento luminoso del dispositivo.

En esta sección vamos a ver cómo es posible incrementar todavía más la eficacia luminosa del dispositivo de Lau, utilizando dos redes puras de fase. Así, se va a describir el modo de obtener patrones de Lau de máxima visibilidad y de alta irradiancia, tanto a distancia finita como infinita [IV-15]. Con el propósito de simplificar la discusión, y sin pérdida de generalidad, vamos a limitar ésta al caso unidimensional. La extensión de este análisis al caso de redes bidimensionales es, a la vista de los resultados de la sección anterior, inmediata.

En las experiencias realizadas previamente —y así es como se hace por la mayor parte de los autores— el dispositivo de doble red se ilumina con la luz monocromática que emite un láser. Para que la iluminación de la red fuente sea espacialmente incoherente el haz de luz, previamente expandido, se hace incidir sobre un vidrio difusor giratorio y, con la ayuda de una lente, se forma la imagen de la mancha de luz en el vidrio sobre la red fuente.

Estos mismos elementos (una fuente coherente de luz monocromática y un vidrio difusor) y una red de fase de perfil adecuado, permiten obtener una fuente incoherente, de irradiancia periódica, que puede utilizarse como red fuente del dispositivo de Lau. En particular, vamos a considerar una red lineal de fase, binaria, cuadrada y de salto de fase  $\pi/2$ . Este objeto, bajo iluminación coherente genera como sabemos patrones de difracción (los caracterizados por un índice  $q=1/4$  ó  $3/4$ ) que son binarios y de máximo contraste. La distribución periódica de irradiancia de uno de estos patrones se puede convertir en una fuente incoherente binaria sin más que situar, en el plano donde éste se forma, un vidrio deslustrado giratorio (véase la Fig.4-15). De este modo, el difusor giratorio destruye la coherencia existente entre dos puntos cualesquiera del patrón de Fresnel, por lo que su distribución de irradiancia es análoga a la de una red de Ronchi iluminada con una fuente incoherente monocromática.

Para obtener, en la situación representada en la Fig.4-15, la posición de los patrones de Fresnel binarios y de contraste unidad de la red de fase -cuyo período denominaremos  $d'$ -, es conveniente expresar, como se hizo en la Ec.(2-57), la distancia  $z_s$  en función de la distancia de Talbot  $z_T'$  de la red; es decir,

$$z_s = (Q_0 + q_0) z_T' = 2(Q_0 + q_0) \frac{d'^2}{\lambda} \quad (4-109)$$

De este modo, la Ec.(2-58) proporciona para la distancia  $R_s$  a la que se localizan los patrones de nuestro interés, la relación

$$R_s = z_s \frac{Q + q}{Q_0 + q_0 - Q - q} \quad (4-110)$$

siendo  $Q$  un número entero y  $q=1/4$  ó  $3/4$ . La Ec.(4-110) determina así dónde se debe situar el vidrio difusor giratorio que proporciona la fuente incoherente. El período  $d''$  de esta distribución coincide como sabemos con la proyección geométrica del de la red de fase,

$$d'' = \frac{z_s + R_s}{z_s} d' \quad ,$$

y teniendo en cuenta las Ecs.(4-109) y (4-110), se puede expresar como

$$d'' = \frac{Q_0 + q_0}{Q_0 + q_0 - Q - q} d' \quad (4-111)$$

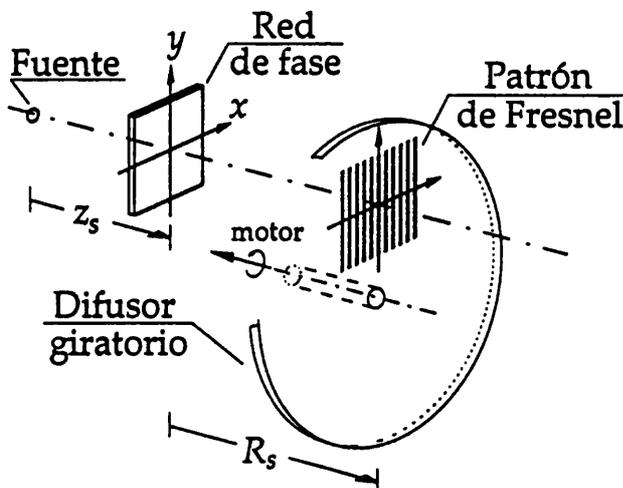


Fig. 4-15. Esquema del dispositivo óptico utilizado para obtener con una fuente puntual, una red de fase y un difusor giratorio, una fuente incoherente de distribución de irradiancia periódica y binaria.

Supongamos ahora, tal y como se indica en la Fig.4-16, que esta distribución incoherente de irradiancia se utiliza como red fuente de un dispositivo de Lau en el que la red objeto es otra red de fase, del mismo perfil pero de período  $d$ . Como se discutió en la sección IV.3, para obtener patrones de Lau de máximo contraste con esta red basta con establecer la condición de consonancia para uno de sus patrones binarios y de visibilidad unidad. Para ello, si denotamos por  $P'+p'$  el índice de dicho patrón ( $P'$  entero y  $p'=1/4$  ó  $3/4$ ), la distancia  $z$  entre la red fuente efectiva del dispositivo y la red objeto, según la Ec.(4-19), debe ser

$$z = 2(P'+p') \frac{d d''}{\lambda} = 2(P'+p') \kappa \frac{d^2}{\lambda} \quad (4-112)$$

donde, como en la Ec.(4-17),  $\kappa$  verifica la relación

$$\kappa = \frac{d''}{d} \quad (4-113)$$

La distancia  $R$  a la que se obtiene el patrón de Lau, la determina la Ec.(4-20) haciendo el parámetro  $K=1$ . De este modo resulta

$$R = \frac{z}{\kappa - 1} \quad (4-114)$$

Por otro lado, puesto que tanto la red fuente efectiva como el patrón de Fresnel de índice  $P'+p'$  son distribuciones binarias de modulación 0'5, el perfil del patrón de Lau

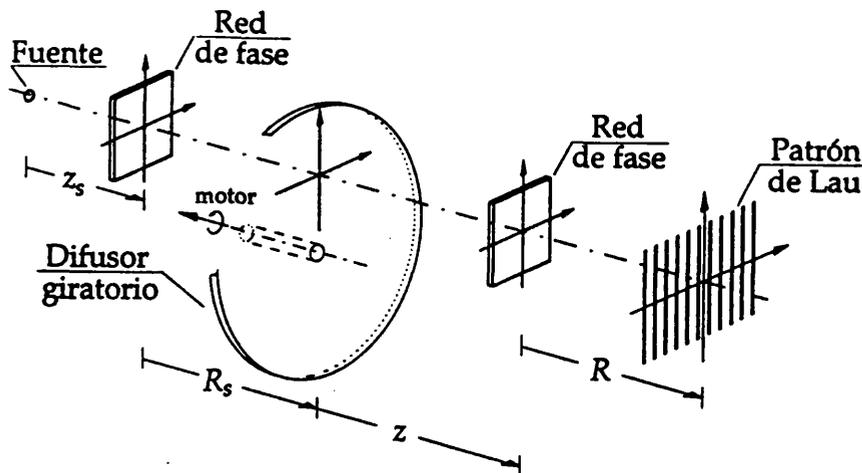


Fig. 4-16. Esquema del dispositivo utilizado para obtener el efecto Lau, a distancia finita o en el infinito, con dos redes de fase.

es equivalente al que tendrían las franjas de Lau obtenidas con un dispositivo que empleara dos redes de Ronchi. En este caso, el perfil de las franjas lo determina la convolución de dos rectángulos cuyo ancho es la mitad del período de éstas, por lo que el perfil trapezoidal de la Fig.4-8 degenera en uno triangular. De este modo, la modulación de las franjas toma, según la Ec.(4-74), el valor unidad.

Tal y como se estableció en la sección IV.3, al poner en consonancia el patrón de índice  $P'+p'$  de la red se obtienen, de acuerdo con la Ec.(4-18), patrones de Lau también en todos los planos caracterizados por un índice  $P^*+p^*=K(P'+p')$ , siendo  $K=\pm 1, \pm 2, \dots$ . La localización de estos patrones de Lau la determina la Ec.(4-20). Estos planos corresponden bien a planos de autoimágenes (siempre que  $K$  es par) o bien a planos de patrones binarios de contraste unidad (cuando  $K$  es impar). A pesar de esto, el único patrón de Lau real de visibilidad máxima es el asociado al valor  $K=1$  (el de índice  $P'+p'$ ). Para los otros patrones de Lau, el solapamiento que existe —y que evidencia el hecho de que la modulación de las franjas sea, según la Ec.(4-74), mayor que uno cuando  $|K|>1$ — entre celdas unidad consecutivas hace disminuir su visibilidad. Obviamente cuando además  $K$  es par, la irradiancia del patrón de Lau es uniforme por serlo a su vez la de las autoimágenes de la red objeto. Por estas razones en lo que resta vamos a centrar nuestra discusión en el patrón de Lau de máximo contraste.

Con el dispositivo de la Fig.4-16, este patrón de Lau se puede obtener tanto a distancia finita como en el infinito. En este último caso, según las Ecs.(4-114) y (4-113) se debe verificar que  $d''=d$ . Asimismo, y a diferencia de lo que ocurre en el dispositivo convencional del efecto Lau, este montaje permite obtener patrones de Lau a distancia finita utilizando dos redes de fase idénticas (es decir, con  $d'=d$ ). Para ello basta con que  $\kappa>1$ , y por tanto que  $d''>d$ .

Consideremos a continuación el caso particular en que la fuente puntual que ilumina la primera red de fase se sitúa, usando un colimador, en el infinito. Ahora la ecuación que determina la localización del patrón de la red de índice  $Q+q$  y el plano dónde debe situarse el vidrio giratorio, según las Ecs.(2-53) y (2-16), es

$$R_s = 2(Q+q) \frac{d'^2}{\lambda} = (Q+q) z'_T \quad (4-115)$$

Al ser el aumento para iluminación plana igual a la unidad, la red fuente efectiva tiene período  $d''=d'$ . Las Ecs.(4-112), (4-113) y (4-114) —que proporcionan la distancia que debe mediar entre esta red y la red objeto y la localización del patrón de Lau— siguen siendo válidas sin más que tener en cuenta la precisión anterior. Si como en el montaje original del efecto Lau las dos redes tienen además igual período ( $d'=d$ ), el patrón de Lau se obtiene, de acuerdo con las Ecs.(4-113) y (4-114), en el infinito, o

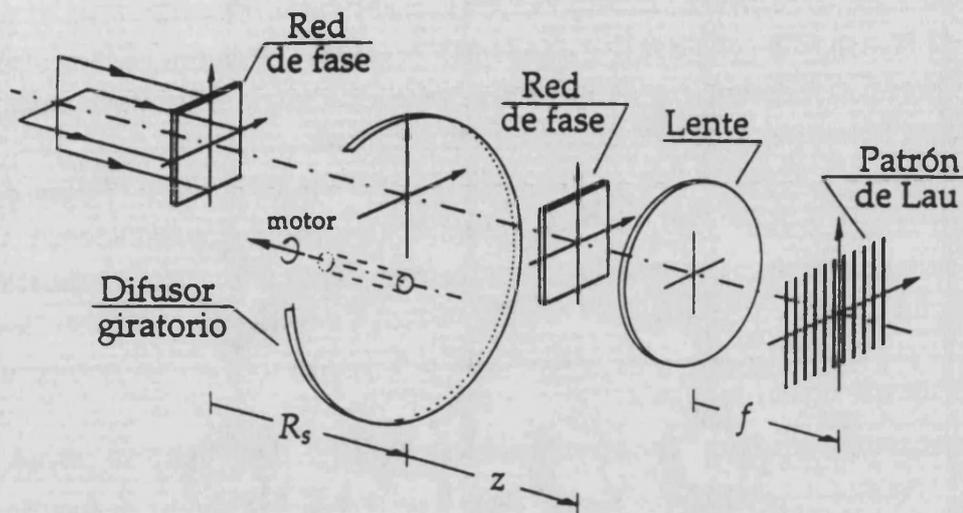


Fig. 4-17. Esquema del montaje que permite obtener franjas de Lau, en el infinito, de máximo contraste y alta irradiancia. Este dispositivo guarda cierta similitud con el del experimento de Lau clásico.

equivalentemente en el plano focal imagen de una lente convergente (véase la Fig.4-17).

Para verificar experimentalmente las ideas anteriores, se ha realizado el experimento de Lau, con dos configuraciones distintas, utilizando dos redes de fase y un láser de He-Ne ( $\lambda=632'8nm$ ). En la primera configuración se obtenía, como en la de la Fig.4-16, el patrón de Lau de alto contraste a distancia finita. Los períodos de las redes empleadas eran  $d'=0'318mm$  y  $d=0'254mm$ . Con el fin de obtener un dispositivo lo más compacto posible, para producir, como en la Fig.4-15, la fuente incoherente se utilizó el patrón de Fresnel caracterizado por  $Q=0$  y  $q=1/4$ . Asimismo, se exigió que  $d''=2d$  ( $\kappa=2$ ). De este modo, a partir de la Ec.(4-111) se obtiene  $Q_0+q_0=4/3$ , y de las

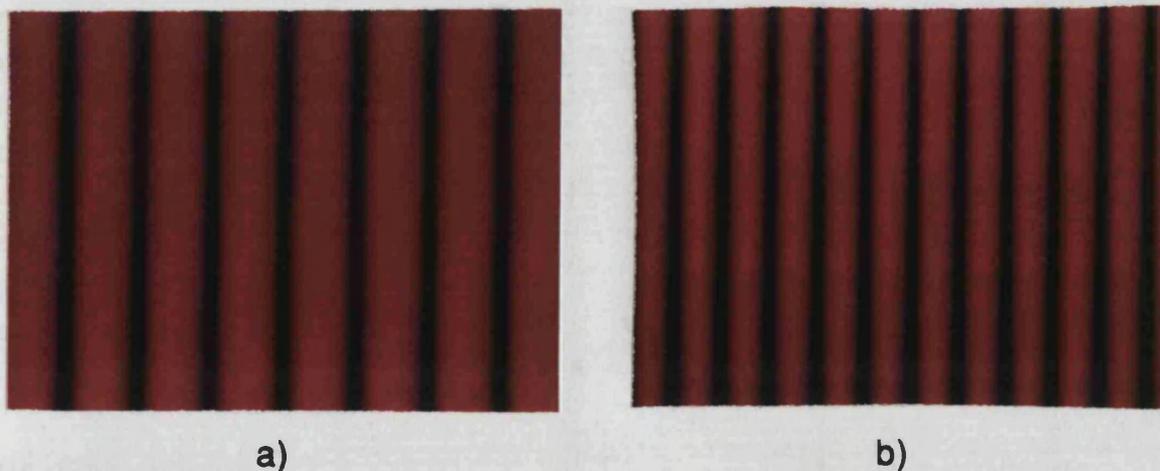


Fig. 4-18. Empleando únicamente redes de fase se han obtenido franjas análogas a las de Lau: a) a distancia finita como en la Fig.4-16, y b) en el infinito como en la Fig.4-17.

Ecs.(4-109) y (4-110) resulta, respectivamente,  $z_s=21'36cm$  y  $R_s=12'76cm$ . El patrón de Fresnel de la segunda red de fase que se puso en consonancia era el caracterizado por  $P'=0$  y  $p'=1/4$ . De este modo, a partir de las Ecs.(4-112) y (4-114) se tiene  $z=R=10'20cm$ . El patrón de Lau así obtenido se muestra en la Fig.4-18a.

En el segundo experimento se utilizó el dispositivo de la Fig.4-17 para obtener el patrón de Lau en el infinito. El período de las dos redes era  $d'=d=0'254mm$ . Como en la experiencia anterior se eligió  $Q=0$  y  $q=1/4$ , pero ahora se puso en consonancia el patrón de índice  $P'=0$  y  $p'=3/4$ . Así, las Ecs.(4-115) y (4-112) proporcionan los valores  $R_s=5'10cm$  y  $z=15'29cm$ . Para la observación del patrón de Lau se empleó una lente convergente de focal  $f=200mm$ . La distribución de irradiancia que se obtenía en el plano focal imagen de esta lente se muestra en la Fig.4-18b. Como se puede apreciar en estos resultados, el perfil de las franjas es triangular como corresponde a la convolución de dos rectángulos iguales, de ancho la mitad de un período.

## IV.6 Conclusiones

El cálculo de la distribución de irradiancia que se obtiene, en un plano cualquiera, por propagación libre de la luz difractada por una abertura semitransparente iluminada con una fuente plana monocromática incoherente conlleva una operación de correlación. Específicamente, dicha distribución resulta ser la correlación entre la distribución de irradiancia de la figura de difracción que se obtendría en ese mismo plano al iluminar la transparencia con un único punto de la fuente y la distribución normalizada de irradiancia, convenientemente escalada, de la fuente extensa. Este resultado de la difracción en la región de Fresnel con iluminación incoherente se ha utilizado para analizar la formación de franjas de Lau.

Primero, se ha estudiado la situación ideal en la que la primera red del dispositivo de Lau, que actúa como la fuente incoherente codificada espacialmente que ilumina la segunda red, posee líneas emisoras de ancho infinitesimal. En este caso, la operación de correlación se reduce a superponer la irradiancia de múltiples réplicas (una por cada una de las líneas emisoras de la red fuente), desplazadas lateralmente de modo regular, del patrón de Fresnel de la red objeto correspondiente al plano de observación. Cuando la separación entre dos de estas réplicas, producidas por dos líneas consecutivas de la red fuente, es un número entero de veces el período del patrón de Fresnel en cuestión, se obtiene un patrón de Lau: la superposición incoherente en consonancia de diferentes copias de un mismo patrón de Fresnel de la red objeto.

Esta condición de consonancia relaciona la distancia  $z$  entre las dos redes, los períodos  $d'$  y  $d$  de éstas, la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación y el índice  $Q'+q'$  que

caracteriza al patrón de difracción. Variando la separación entre ambas estructuras periódicas es posible establecer la superposición en consonancia para cualquier patrón de difracción fijado de antemano. Además, simultáneamente, se obtienen patrones de Lau en todos aquellos planos en donde se localizan patrones de Fresnel caracterizados por un índice  $Q+q$  múltiplo de  $Q'+q'$ . Por el contrario, se ha demostrado que en el resto de los planos, si el número de líneas emisoras de la red fuente es suficientemente grande, el resultado de la superposición de las réplicas es, en términos generales, una distribución uniforme de irradiancia. En el caso particular en el que una de estas figuras de Fresnel que se encaja en consonancia sea precisamente una autoimagen de la red objeto, las franjas de difracción resultantes son las denominadas usualmente como franjas de Lau.

Asimismo, se ha analizado cómo afecta el giro de una de las dos redes lineales del dispositivo a la distribución de irradiancia de los patrones de Lau. La falta de paralelismo entre las redes se traduce en una atenuación de las frecuencias espaciales, exceptuado el orden cero, de la distribución de irradiancia del patrón de Lau y provoca una disminución de su visibilidad. En particular, a partir de la expresión analítica de los factores de amortiguamiento, se ha estimado el valor del ángulo de giro entre las redes que anula la visibilidad. En las condiciones de las experiencias de Lau realizadas a lo largo de este capítulo, que son representativas de una situación experimental típica, este ángulo crítico es aproximadamente igual a  $3^\circ$ .

A continuación, se ha analizado la influencia de la anchura finita de los elementos emisores lineales de una red fuente real sobre el perfil de los patrones de Lau. En este caso, la celda unidad de éstos, queda determinada por la convolución de las celdas unidades, con un factor de escala apropiado, de las distribuciones periódicas de irradiancia de la red fuente y del patrón de Fresnel que se pone en consonancia. Cuando no hay solapamiento, el perfil resultante para las franjas de Lau obtenidas con redes binarias es trapezoidal. Además, en los sucesivos planos de consonancia, éste se separa cada vez más del de las autoimágenes de la red objeto. La anchura finita de las líneas emisoras de la red fuente restringe, asimismo, el número de planos donde se pueden obtener franjas de Lau de contraste máximo.

El estudio anterior del dispositivo de Lau unidimensional se ha extendido de una manera sencilla al caso bidimensional. De este modo, se ha expuesto cómo obtener patrones de Lau (y, por ende, franjas de Lau) con redes 2-D rectangulares y oblicuas, utilizando tanto redes objeto de amplitud como de fase. Las previsiones teóricas de este estudio también se han comprobado experimentalmente. Así, por ejemplo, se han obtenido franjas de Lau con redes 2-D cuya celda unidad es un carácter alfabético binario, de modo que su perfil corresponde a la autocorrelación del carácter elegido.

Por último, se ha descrito un dispositivo óptico para producir el efecto Lau con alta irradiancia, utilizando un haz de luz coherente, dos redes de fase y un vidrio difusor giratorio. Este montaje permite obtener patrones de Lau de máxima

visibilidad, tanto a distancia finita como infinita. Al mismo tiempo, presenta el máximo rendimiento luminoso posible, lo que soluciona el problema de la baja eficacia luminosa que ostentan las distintas variantes del dispositivo de Lau usado hasta la fecha (con red fuente de amplitud). Igualmente, se han verificado experimentalmente dos configuraciones particulares de esta nueva versión del experimento de Lau.

## IV.7 Referencias

- [IV-1] E. Lau, "Beugungserscheinungen and Doppelrastern", *Ann. Phys. (Leipzig)* 6, 417-423 (1948).
- [IV-2] J. Jahns and A.W. Lohmann, "The Lau effect (a diffraction experiment with incoherent illumination)", *Opt. Commun.* 28, 263-267 (1979).
- [IV-3] F. Gori, "Lau effect and coherence theory", *Opt. Commun.* 31, 4-8 (1979).
- [IV-4] R. Sudol and B.J. Thompson, "Lau effect: Theory and experiment", *Appl. Opt.* 20, 1107-1116 (1981).
- [IV-5] K.H. Brenner, A.W. Lohmann, and J. Ojeda-Castañeda, "Lau effect: OTF theory", *Opt. Commun.* 46, 14-17(1983).
- [IV-6] J. Sethuraman, "Bloch functions and Lau effect", *Opt. Commun.* 52, 377-379 (1985).
- [IV-7] C. Colautti, E.E. Sicre, and M. Garavaglia, "Analysis of the Lau effect using Walsh functions", *Opt. Lett.* 13, 1069-1071 (1988).
- [IV-8] G.J. Swanson and E.N. Leith, "Lau effect and grating imaging", *J. Opt. Soc. Am.* 72, 552-555 (1982).
- [IV-9] G.J. Swanson and E.N. Leith, "Analysis of the Lau effect and generalized grating imaging", *J. Opt. Soc. Am. A* 2, 789-793 (1985).
- [IV-10] J. Ojeda-Castañeda and E.E. Sicre, "Quasi ray-optical approach to longitudinal periodicities of free and bounded wavefields", *Optica Acta* 32, 17-26 (1985).
- [IV-11] J. Jahns, A.W. Lohmann, and J. Ojeda-Castañeda, "Talbot and Lau effects, a parageometrical approach", *Optica Acta* 31, 313-324 (1984).

- [IV-12] K. Patorski, "Incoherent superposition of multiple self-imaging. Lau effect and moiré fringe explanation", *Optica Acta* 30, 745-758 (1983).
- [IV-13] A. Pons, "Transformada de Fourier a distancia finita: Aplicaciones en la formación y procesado óptico de imágenes", Tesis Doctoral (Univ. Valencia, 1987), págs. 76-84.
- [IV-14] P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, M. Martínez-Corral y J.C. Barreiro, "Superposición incoherente en consonancia de patrones de difracción de Fresnel", *Optica Pura y Apl.* 21(3), 25-31 (1988).
- [IV-15] J.C. Barreiro, P. Andrés, and J. Ojeda-Castañeda, "Lau effect with only phase gratings", *Opt. Commun.* 73, 106-110 (1989).
- [IV-16] J. Ojeda-Castañeda, J. Ibarra, and J.C. Barreiro, "Noncoherent Talbot effect: coherence theory and applications", *Opt. Commun.* 71, 151-155 (1989).
- [IV-17] P. Andrés, E. Tepichín, and J. Ojeda-Castañeda, "Lau rings: in-register incoherent superposition of radial self-images", *Opt. Commun.* 72, 47-53 (1989).
- [IV-18] K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Prog. Opt.* 27, 3-108 (1989).
- [IV-19] P. Chavel and S. Lowenthal, "Noise and coherence in optical image processing. II. Noise fluctuations", *J. Opt. Soc. Am.* 68, 721-732 (1978).
- [IV-20] W.T. Rhodes and A.A. Sawchuk, "Incoherent Optical Processing", en *Optical Information Processing*, ed. S.H. Lee (Springer-Verlag, 1981), págs. 69-73.
- [IV-21] H.O. Bartelt and J. Jahns, "Interferometry based on the Lau effect", *Opt. Commun.* 30, 268-274 (1979).
- [IV-22] H.O. Bartelt and Y. Li, "Lau interferometry with cross gratings", *Opt. Commun.* 48, 1-6 (1983).
- [IV-23] N. Bolognini, J. Ojeda-Castañeda, and E.E. Sicre, "Interferometry based on the Lau effect. A quasi-ray description", *Optica Acta* 32, 409-422 (1985).
- [IV-24] K. Patorski, "Incoherent superposition of multiple self-imaging under plane wavefront illumination", *Appl. Opt.* 25, 2396-2403 (1986).
- [IV-25] J. Ojeda-Castañeda, J.C. Barreiro, and J. Ibarra, "Schardin-Lau interferometer", *Opt. Commun.* 67, 325-330 (1988).

- [IV-26] C. Colautti, E.E. Sicre, and M. Garavaglia, "Incoherent optical spatial filtering based on the Lau effect", *Opt. Commun.* 57, 16-20 (1986).
- [IV-27] J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés, and J.C. Barreiro, "Abbe-Porter experiment and logic operations", *Opt. Commun.* 71, 145-150 (1989).
- [IV-28] J. Ojeda-Castañeda and E.E. Sicre, "Theta-modulation decoder based on the Lau effect", *Opt. Commun.* 59, 87-91 (1986).
- [IV-29] P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and J. Ibarra, "Lensless theta decoder", *Opt. Commun.* 60, 206-210 (1986).
- [IV-30] J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés, and J. Ibarra, "Lensless theta decoder with high light throughput", *Opt. Commun.* 67, 256-260 (1988).
- [IV-31] D. Courjon, J. Bulabois, and C. Mered, "Spatial frequency pseudocolor encoding using coarse gratings", *Appl. Opt.* 23, 1642-1646 (1984).
- [IV-32] S. Jutamulia, T. Asakura, and H. Fujii, "Lau effect and noncoherent processing", *Opt. Commun.* 53, 77-80 (1985).
- [IV-33] E. Bonet, J. Ojeda-Castañeda, and A. Pons, "Image synthesis using the Lau effect", *Opt. Commun.* 81, 285-290 (1991).
- [IV-34] S. Chitralakha, K.V. Avudainayagam, and S.V. Pappu, "Sensitivity of Lau fringes to grating rotation: theoretical analysis", *Appl. Opt.* 29, 125-128 (1990).
- [IV-35] J. Tu and L. Zhan, "Two-dimensional theory of the Lau-Talbot-Moiré effect under partially coherent illumination", *Opt. Commun.* 82, 229-235 (1991).
- [IV-36] S. Chitralakha, K.V. Avudainayagam, and S.V. Pappu, "Role of spatial coherence on the rotation sensitivity of Lau fringes: an experimental study", *Appl. Opt.* 28, 345-349 (1989).
- [IV-37] L. Liu, "Interferometry based on the partially coherent effect lying between the Talbot and Lau effects", *J. Mod. Opt.* 35, 1605-1618 (1988).
- [IV-38] S. Jutamulia and T. Asakura, "A general approach to noncoherent correlations", *J. Opt. (Paris)* 16, 121-125 (1985).
- [IV-39] M. Martínez-Corral, "Patrones de difracción de alto contraste obtenidos con un dispositivo de doble red iluminado incoherentemente", Tesis de Licenciatura (Univ. Valencia, 1988), cap. 3.

- [IV-40] T. Jinhong, "The diffraction near field and Lau effect of a square-wave modulated phase grating", *J. Mod. Opt.* 35, 1399-1408 (1988).
- [IV-41] E. Hecht and A. Zajac, *Optica* (Fondo Educativo Interamericano, 1977).
- [IV-42] J.D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* (Wiley, 1978), pág. 166.

# V. Procesado óptico de información con luz espacialmente incoherente

## V.1 Introducción

En la actualidad es cada vez más frecuente en Óptica realizar operaciones complejas de procesado de información con luz espacial (fuente extensa) o temporalmente (fuente policromática) incoherente [V-1 a V-5]. Estos procesadores se caracterizan por su naturaleza multicanal y por la posibilidad de procesar información en paralelo, por lo que exhiben una mejor relación señal-ruido que sus homólogos coherentes. Dentro de esta tendencia de la Óptica moderna, el efecto Lau se ha utilizado, como ya se ha indicado en el capítulo precedente, para desarrollar diversas técnicas de procesado incoherente de información. En este trabajo se proponen dos nuevas aplicaciones, dentro del área de procesado óptico de información, de este fenómeno de formación de autoimágenes con luz espacialmente incoherente. Así, se ha desarrollado un procesador lógico binario y un correlador óptico para señales bidimensionales.

Una de las técnicas de procesado óptico de mayor interés práctico es el reconocimiento de caracteres, es decir, la posibilidad de reconocer un patrón determinado —señal de referencia— de entre un conjunto de objetos —señal de entrada—. La mayoría de estos dispositivos se basan en la consecución por medios ópticos de la operación de correlación con luz coherente o incoherente.

El desarrollo actual de los correladores ópticos permite agruparlos fundamentalmente en dos categorías: los correladores que trabajan en el espacio de Fourier y los que lo hacen en el espacio objeto [V-6]. Los correladores del espacio de Fourier se basan en el teorema de la transformada de Fourier relativo a la correlación. A esta categoría pertenecen los dispositivos que se apoyan en la idea clásica del filtro adaptado de Vander Lugt [V-7]. En vez de utilizar la señal de referencia directamente, estos sistemas emplean como filtro su transformada de Fourier codificada en un holograma de Fourier. El producto de este filtro por la transformada de la señal de entrada permite, tras otra operación de transformación de Fourier, obtener la correlación deseada sin la necesidad de realizar ningún tipo de desplazamiento lateral

entre ambas señales. Así pues, la habilidad que poseen las lentes para realizar transformadas de Fourier bajo iluminación coherente se aprovecha en este caso para resolver el problema. A partir de esta idea clave han surgido nuevas posibilidades que mejoran las características iniciales de este tipo de correladores, como son el uso de filtros adaptados de fase [V-8 y V-9] y binarios de fase [V-10 a V-12], la utilización de filtros tándem [V-13 y V-14], etc.

En contraposición, los correladores del espacio objeto se basan en la superposición y posterior desplazamiento, sin más pasos intermedios, de ambas señales, usando a continuación algún método para integrar la energía final de la onda resultante. Estos correladores presentan potencialmente ciertas ventajas prácticas respecto a los anteriores. La primera de ellas es que los filtros empleados son esencialmente las propias señales de referencia y de entrada, por lo que se evita la obtención del filtro adaptado holográfico y, por tanto, las pérdidas energéticas inherentes al proceso holográfico. De este modo, la producción de los correspondientes filtros es relativamente sencilla, especialmente cuando ambas funciones son reales y positivas. La segunda es la capacidad de este tipo de correladores para poder ser controlados en tiempo real por ordenador. Además, muchos de ellos funcionan con luz incoherente, con lo que las exigencias de estabilidad mecánica son menores, se pueden utilizar objetos autoluminosos y se mejora la relación señal-ruido del proceso lo que permite reducir drásticamente el número de "falsas alarmas" en la detección.

En contraste con estas ventajas potenciales, el desarrollo de este tipo de procesadores es todavía incipiente, debido fundamentalmente a los problemas asociados con la consecución del desplazamiento relativo entre las dos señales, que ahora es necesario para la realización de la operación de correlación. Además, los desarrollos teóricos de estos dispositivos obvian, en general, los efectos de difracción, por lo que sólo se resuelve en primera aproximación el problema planteado. Ambos hechos son la causa de que, hasta ahora, los resultados conseguidos no sean tan espectaculares como en los descritos en primer lugar. A pesar de todo, se han conseguido algunas soluciones muy elegantes en este campo. Unas se apoyan en las técnicas de proyección geométrica [V-15], que evitan los desplazamientos mecánicos de las señales aprovechando las propiedades de la iluminación espacialmente incoherente, mientras que otras lo hacen en las de multiplexado en función de la longitud de onda de la radiación incidente [V-16], usando para ello las propiedades dispersivas de ciertos elementos ópticos.

Dentro de los correladores que trabajan en el espacio de Fourier se incluyen también los correladores conjuntos —"joint transform correlators"—. En estos correladores coherentes, el patrón a reconocer y la señal objeto se sitúan contiguos y simultáneamente en el plano de entrada del dispositivo. En una primera fase, se registra la distribución de intensidades correspondiente al espectro de Fourier conjunto. Tras esta detección cuadrática, una nueva transformación de Fourier

permite obtener fuera de eje la correlación buscada. Desde su introducción por Rau [V-17] e, independientemente, por Weaver y Goodman [V-18], los correladores conjuntos son una herramienta muy interesante en el reconocimiento óptico de patrones, ya que, en síntesis, estos dispositivos intentan combinar los métodos de los correladores del espacio de Fourier con algunas de las ventajas de los del espacio objeto: la correlación buscada se obtiene en un proceso de dos pasos, pero sin necesidad de ningún filtro adaptado. A partir de este esquema base se han sugerido algunas variantes del dispositivo [V-19 y V-20], se han propuesto distintas arquitecturas para su utilización en tiempo real [V-21 a V-24], lo que ha llevado al estudio de los efectos de la binarización, y de otras operaciones no lineales, en el espectro de potencia conjunto [V-25 a V-29] o conjuntamente en él y en el plano de entrada del dispositivo [V-30], así como a solucionar ciertos problemas asociados con el uso de moduladores espaciales de luz [V-31 y V-32], y se ha comparado su comportamiento con el del correlador de filtro adaptado [V-33 a V-36].

En esta memoria se avanza un paso más. En ella se presenta un correlador del espacio objeto para señales bidimensionales, que funciona además con luz espacialmente incoherente, de forma que, aprovechándose del fenómeno de autoimágenes, la simple propagación libre permite obtener, dentro de la aproximación de Fresnel, la correlación buscada. De este modo, el correlador propuesto no requiere el uso de ninguna lente, con lo que es posible aplicarlo en otros dominios del espectro electromagnético fuera del rango visible (por ejemplo, rayos X). De otro lado, trabaja con luz incoherente, lo que hace que exhiba una elevada relación señal-ruido. Además, al tratarse de un correlador del espacio objeto, la producción de los correspondientes filtros es relativamente sencilla. Por último, el desplazamiento relativo entre ambas señales se consigue del mismo modo que en los correladores de proyección geométrica. Tal y como se ha puesto de manifiesto en el Capítulo IV, el efecto Lau va intrínsecamente unido a una operación de correlación, que hasta el momento se había considerado como algo negativo ya que distorsionaba el perfil ideal de las franjas de Lau. Ahora, en cambio, se explota este hecho para desarrollar un correlador bidimensional de proyección geométrica perfecta.

Por otro lado, un área de investigación en Óptica muy activa en los tiempos recientes es la de la computación óptica. Frente al procesado en serie característico de los sistemas electrónicos, en este campo se intenta aprovechar la capacidad inherente de los dispositivos ópticos de procesar, a alta velocidad, información en paralelo. Así, en el presente, el computador digital óptico parece una prometedora posibilidad en la tecnología de los ordenadores [V-37]. El procedimiento básico de operación de todo computador digital es la realización de operaciones lógicas binarias. Dado su carácter no lineal, en el funcionamiento de un procesador lógico basado en métodos puramente ópticos se desea preservar las ventajas de la Óptica y al mismo tiempo se

debe superar el comportamiento lineal que, de ordinario, presentan los montajes ópticos.

Para resolver esta cuestión se han aportado en el transcurso de los últimos 10 años diferentes soluciones. En una serie de ellas, tales como las que se fundamentan en las técnicas de proyección geométrica [V-38 y V-39] o de filtraje espacial en el dominio frecuencial [V-40 y V-41], se recurre al codificado espacial de las señales de entrada y al posterior decodificado de la señal de salida. En las primeras, las imágenes codificadas se superponen directamente, o junto a un filtro operacional [V-42], para obtener un patrón compuesto, el cual se proyecta desde un conjunto de fuentes cuasipuntuales que lo iluminan. La codificación se realiza alterando la transmitancia de los píxeles mediante pantallas binarias [V-38 y V-43] o modificando su estado de polarización [V-44]. En las segundas, la operación binaria se consigue al filtrar espacialmente, en el plano de Fourier de un procesador óptico coherente, el patrón resultante de la superposición de ambas señales de entrada codificadas. En esta técnica se han desarrollado también diferentes posibilidades de codificación, como son el empleo de redes en distintas orientaciones [V-45], de difusores aleatorios [V-46], de difusores anisótropos [V-47] o de láminas de media onda para variar el estado de polarización [V-48]. Por otra parte, otras soluciones aprovechan las no linealidades de ciertos dispositivos optoelectrónicos —moduladores espaciales de luz— como, por ejemplo, las válvulas ópticas [V-49], los cristales PROM [V-50], los moduladores magneto-ópticos [V-51] y las pantallas de cristal líquido [V-52].

En este trabajo, el efecto Lau bidimensional, con alta irradiancia y máxima visibilidad, se utiliza para proponer un nuevo procesador lógico binario. En este método cada valor binario de ambas señales de entrada se codifica únicamente con una red de fase, de salto de fase  $\pi/2$ , pero en diferentes orientaciones. El producto de los dos objetos codificados actúa como red objeto en el dispositivo de Lau, mientras que como red fuente se emplea una red 1-D o la superposición, con un cierto ángulo, de dos de ellas idénticas. Las propiedades de filtraje espacial inherentes a este dispositivo de tipo Lau permiten realizar las 16 operaciones lógicas posibles entre dos variables binarias, seleccionando cada puerta lógica mediante una determinada red fuente. La sencillez del dispositivo, que no requiere el empleo de lentes, y el hecho de que opera con luz espacialmente incoherente diferencian esta técnica de los métodos que utilizan procedimientos de filtraje coherente citados anteriormente. Por otro lado, visto como un sistema de proyección con una fuente codificada espacialmente, resulta que en su funcionamiento no se desprecian los efectos de difracción, por lo que también representa una ventaja frente a los métodos puramente geométricos.

El experimento de filtraje espacial de Abbe y Porter [V-53 y V-54] es un hito dentro del procesado óptico de imágenes. En la sección V.2 se muestra cómo una variante adecuada del dispositivo del efecto Lau permite reproducir dicha experiencia, pero en una versión incoherente y sin necesidad de utilizar lentes. Estos resultados se recogen

en forma más abreviada en una publicación [V-55]. En ese trabajo ya se avanza su posible aplicación para la elaboración de algunas operaciones lógicas. A continuación, en la sección V.3 se modifica ligeramente la idea anterior para desarrollar una técnica capaz de realizar las 16 puertas lógicas binarias con un alto nivel de irradiancia. La fuente correcta genera franjas de alto contraste, en el plano de detección, únicamente en las regiones —o "píxeles"— asociadas con el valor lógico 1 de la correspondiente tabla de verdad. También se muestran los resultados experimentales obtenidos en esta aplicación, que se presentaron en el congreso "Optics in Computing" [V-56]. Una versión preliminar de este dispositivo, en la que el codificado se realiza con redes de amplitud, se encuentra en la Ref. [V-57]. En la sección V.4 se presenta el nuevo correlador óptico incoherente para señales bidimensionales que se propone y, al mismo tiempo, se recogen los resultados de una experiencia sencilla de reconocimiento de caracteres. Nuestras primeras ideas en este campo nos llevaron a publicar alguna configuración original, pero más complicada que la que se discute aquí [V-58 y V-59].

## V.2 Filtraje espacial incoherente: experiencia de Abbe y Porter

Tal y como ha quedado establecido en el capítulo anterior, para obtener franjas de Lau bidimensional es necesario que se produzca simultáneamente la superposición en consonancia de autoimágenes de la red objeto, en las dos direcciones en que es periódica ésta. Para ello, se debe utilizar una fuente plana en la que los puntos emisores incoherentes se dispongan formando una red 2-D periódica en las mismas direcciones que el objeto. Desde un punto de vista práctico la forma más sencilla de obtener esta red fuente es superponiendo dos redes lineales binarias de modulación baja, como las del dispositivo de Lau monodimensional. Es evidente, asimismo, que con esta red fuente 2-D también es posible poner en consonancia las autoimágenes (y el resto de patrones de Fresnel) de una red objeto 1-D, ya que sus puntos emisores constituyen un subconjunto de los de una red fuente lineal. El único inconveniente de esta situación es la menor irradiancia que se obtiene en el plano de observación.

Veámos ahora cómo una disposición de las redes invertida respecto a la anterior, permite realizar filtraje espacial incoherente de una manera sencilla. Consideremos, por tanto, una experiencia de Lau en la que la red objeto sea una red bidimensional y la red fuente una red lineal. Para fijar ideas, en principio vamos a suponer que la red objeto es una red 2-D cuadrada formada por dos redes 1-D binarias mutuamente perpendiculares y del mismo período  $d$ , y que las líneas de la red fuente —que tiene período  $d'$ — están orientadas paralelamente a una de las dos direcciones (que tomaremos como dirección del eje  $y$ ) en que es periódica la red objeto. Esta situación

se representa en la Fig.5-1. Exijamos también que la distancia  $z$  entre las dos redes verifique la condición de consonancia de la Ec.(4-19) para un valor del índice  $Q'+q'$  semientero, correspondiente a una determinada autoimagen de la red objeto. En el plano donde se localiza ésta —situado a la distancia  $R$  que proporciona, para  $K=1$ , la Ec.(4-20)—, cada uno de los puntos emisores elementales que componen la red fuente genera una autoimagen de la red objeto desplazada lateralmente, en general, tanto en la dirección paralela como en la perpendicular a las líneas de la fuente. En esta última dirección (que es la del eje  $x$ ), dicho desplazamiento es siempre un múltiplo entero del período de la autoimagen por lo que la superposición de autoimágenes 2-D está en consonancia. En cambio, en la dirección paralela a las líneas de la fuente el desplazamiento relativo entre autoimágenes, en general, no es un múltiplo entero del período de éstas. Por este motivo, el resultado neto de la superposición incoherente es, en esta dirección, una irradiancia constante igual al valor promedio. Por tanto, en el plano de observación se obtiene como resultado global de la superposición incoherente de autoimágenes, una estructura periódica monodimensional de perfil binario orientada en la dirección de las líneas de la fuente. De este modo se selecciona, sin necesidad de ninguna lente, una de las componentes espaciales de la autoimagen de la red 2-D.

Veamos a continuación cómo se obtiene este resultado formalmente, a partir de la Ec.(4-8). Consideremos que la red fuente es una fuente ideal de extensión limitada, como la que describe la Ec.(4-10). La transmitancia en amplitud de la red objeto viene dada por

$$t(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m A_n \exp\left(i2\pi \frac{mx + ny}{d}\right) \quad (5-1)$$

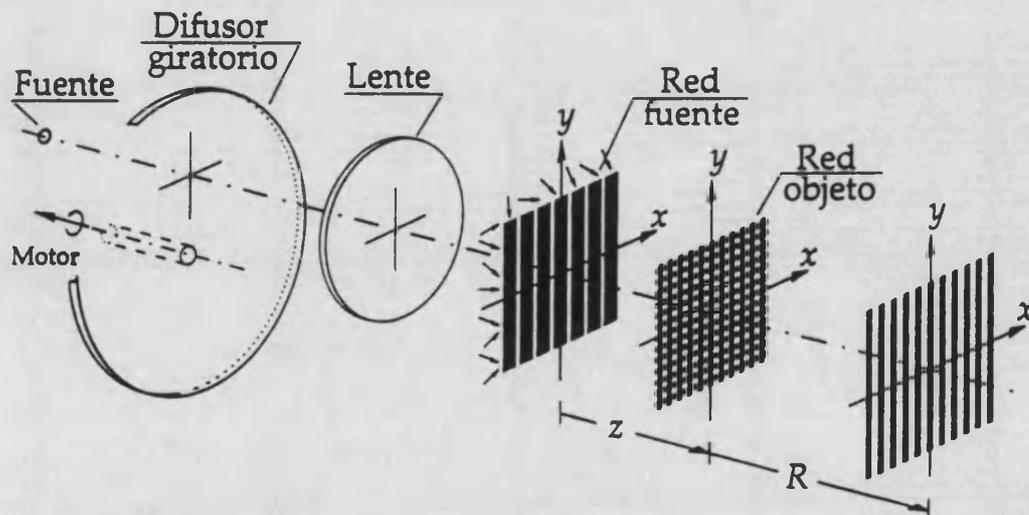


Fig. 5-1. Dispositivo óptico para establecer una versión incoherente y sin lentes del experimento de Abbe y Porter de filtraje espacial.

Por ser el plano de observación un plano de autoimagen y la red objeto binaria, se tiene que

$$\left| t_{\alpha} \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 = \left| t \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \right|^2 = t \left( \frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}} \right) \quad (5-2)$$

Llevando estas expresiones a la Ec.(4-8) se obtiene, tras una breve manipulación algebraica, para la distribución de irradiancia  $I(x,y)$  del plano de observación la relación

$$I(x,y) = \left( \frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s} \right)^2 \left[ \frac{1}{(2L+1)\Omega} \right] \left\{ |\mathcal{M}_s| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \left\{ \sum_{j=-L}^{+L} \exp \left[ i2\pi \frac{m(x + j\mathcal{M}_s d')}{\mathcal{M}d} \right] \right\} \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left[ \text{rect} \left( \frac{y}{\mathcal{M}_s \Omega} \right) * \exp \left( i2\pi \frac{ny}{\mathcal{M}d} \right) \right] \right\} .$$

Teniendo en cuenta la condición de consonancia —expresada por la Ec.(4-13), con  $K=1$ — y utilizando la Ec.(4-51) resulta

$$I(x,y) = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \right)^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp \left( i2\pi \frac{mx}{\mathcal{M}d} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \text{senc} \left( \frac{\mathcal{M}_s \Omega n}{\mathcal{M}d} \right) \exp \left( i2\pi \frac{ny}{\mathcal{M}d} \right) = \\ = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \right)^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp \left( i2\pi \frac{mx}{\mathcal{M}d} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A'_n \exp \left( i2\pi \frac{ny}{\mathcal{M}d} \right) , \quad (5-3)$$

donde el nuevo coeficiente  $A'_n$  es

$$A'_n = A_n \text{senc} \left( \frac{\mathcal{M}_s \Omega n}{\mathcal{M}d} \right) = A_n \text{senc} \left( \frac{\Omega n}{d'} \right) .$$

Nótese que para valores grandes de  $\Omega$  este coeficiente es prácticamente cero salvo cuando  $n=0$ . Por lo tanto, si  $\Omega$  es suficientemente grande, la Ec.(5-3) se convierte en

$$I(x,y) = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \right)^2 A_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp \left( i2\pi \frac{mx}{\mathcal{M}d} \right) . \quad (5-4)$$

Como esta ecuación claramente indica, en estas condiciones, se filtra totalmente la componente de la red en la dirección del eje  $y$ . La Fig.5-2a corresponde a la primera autoimagen negativa de la red objeto utilizada en la verificación experimental de esta

técnica. En la Fig.5-2b se muestra la imagen filtrada de este patrón, obtenida con una red fuente con sus líneas orientadas verticalmente. Un resultado similar se obtiene cuando se gira la red fuente  $90^\circ$ . En este caso se selecciona la componente de la red 2-D en la dirección del eje  $y$ . La fotografía de la Fig.5-2c corresponde a esta situación.

Los resultados expuestos son en cierto modo análogos a los que se emplean para ilustrar el método de filtraje espacial, con iluminación coherente, desarrollado a principios de siglo por Abbe y Porter [V-60]. La principal ventaja de esta técnica incoherente es su mayor sencillez (no requiere ningún sistema óptico) y la mejor relación señal-ruido en los resultados, característica de la iluminación incoherente.

Al igual que en la experiencia de Abbe y Porter, en el plano de observación del

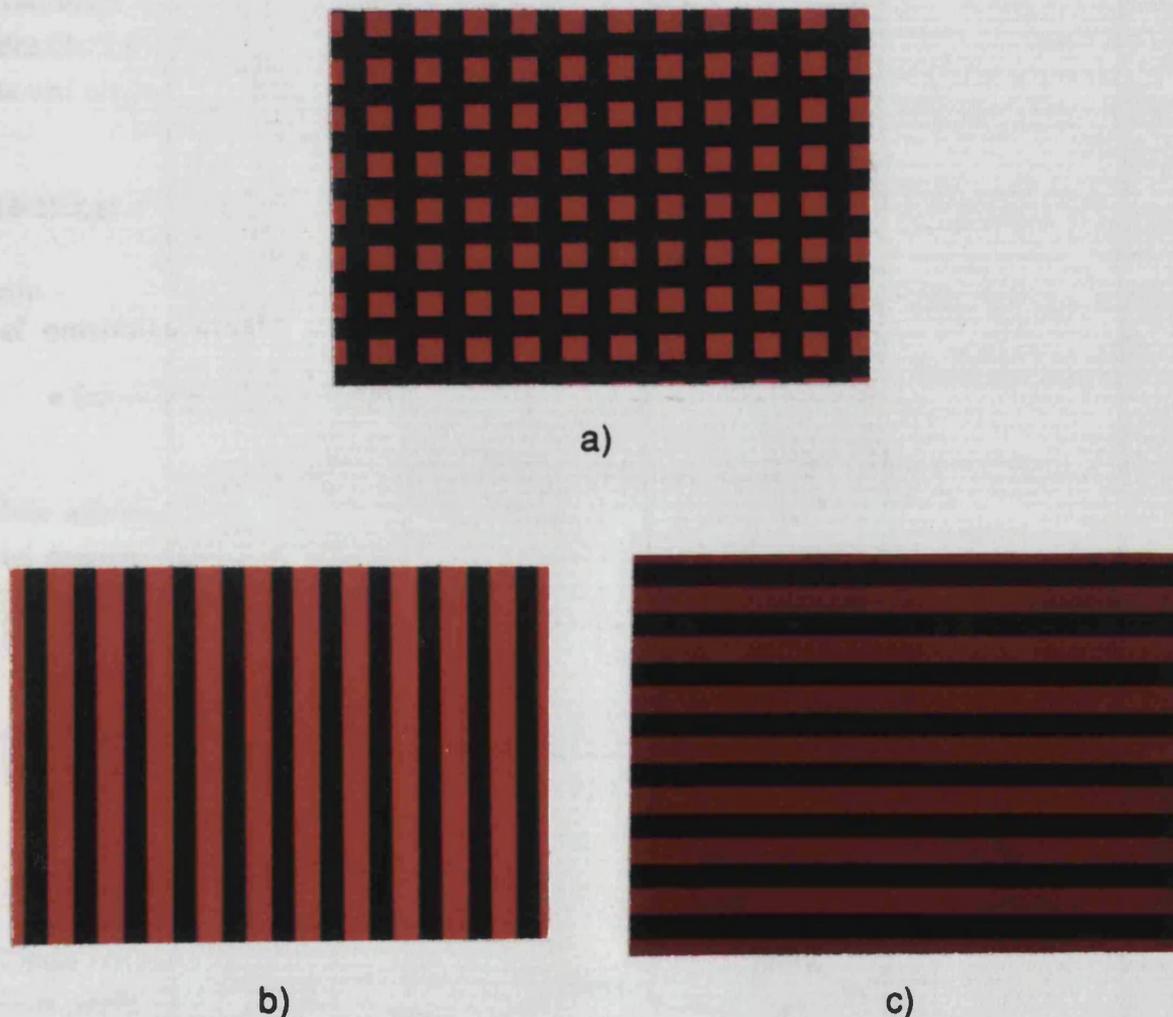


Fig. 5-2. Resultados obtenidos en la versión incoherente del experimento de Abbe y Porter. a) Primera autoimagen negativa ( $Q'+q'=0.5$ ) de la red objeto 2-D cuadrada, de período  $d=0.25\text{mm}$ . La fuente puntual ( $\lambda=632.8\text{nm}$ ) se situó a  $z=31.61\text{cm}$  de la red, por lo que  $R=14.37\text{cm}$ . b) y c) Imágenes filtradas del patrón anterior, obtenidas empleando en el dispositivo de la Fig.5-1 una red fuente de período  $d'=0.80\text{mm}$  dispuesta vertical y horizontalmente, respectivamente. Las distancias  $z$  y  $R$  eran las mismas que en a).

dispositivo de la Fig.5-1 también se pueden obtener franjas orientadas en otras direcciones.

Consideremos ahora que la red fuente se dispone con sus líneas orientadas en la dirección de una de las diagonales de la celda unidad cuadrada de la red 2-D, esto es, formando un ángulo de  $45^\circ$  con cada una de las redes lineales que componen el objeto. Sea  $d''$  el período de la red fuente. Para valorar la distribución de irradiancia,  $I(x,y)$ , en el plano de observación resulta conveniente tomar el eje  $y$  del sistema de coordenadas en la dirección de las líneas de la fuente. Con esta elección, la distribución normalizada de irradiancia de ésta,  $I_s(x,y)$ , viene dada por

$$I_s(x,y) = \frac{1}{(2L+1)\Omega} \sum_{j=-L}^{+L} \delta(x - jd'') \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\Omega}\right), \quad (5-5)$$

y la transmitancia en amplitud del objeto se expresa como

$$t(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m A_n \exp\left[i2\pi \frac{m(x-y) + n(x+y)}{\sqrt{2}d}\right]. \quad (5-6)$$

Introduciendo estas expresiones en la Ec.(4-8), teniendo en cuenta asimismo la Ec.(5-2), se obtiene sin dificultad la relación

$$I(x,y) = \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m A_n \operatorname{senc}\left[\frac{(n-m)\mathcal{M}_s\Omega}{\sqrt{2}\mathcal{M}d}\right] \times \\ \times \left\{ \sum_{j=-L}^{+L} \exp\left[i2\pi \frac{(m+n)j\mathcal{M}_s d''}{\sqrt{2}\mathcal{M}d}\right] \right\} \exp\left[i2\pi \frac{(m+n)x + (n-m)y}{\sqrt{2}\mathcal{M}d}\right]. \quad (5-7)$$

Ahora, para valores suficientemente grandes de  $\Omega$ , se tiene que

$$\operatorname{senc}\left[\frac{(n-m)\mathcal{M}_s\Omega}{\sqrt{2}\mathcal{M}d}\right] \approx 0,$$

salvo cuando  $n=m$ . De este modo, la Ec.(5-7) se reduce a

$$I(x,y) = \frac{1}{(2L+1)\mathcal{M}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^2 \left\{ \sum_{j=-L}^{+L} \exp\left[i2\pi \frac{mj\mathcal{M}_s\sqrt{2}d''}{\mathcal{M}d}\right] \right\} \exp\left[i2\pi \frac{mx}{\mathcal{M}(d/\sqrt{2})}\right].$$

Exigiendo la condición de consonancia

$$\mathcal{M}_5 \sqrt{2} d'' = K \mathcal{M} d \quad , \quad (5-8)$$

análoga a la que proporciona la Ec.(4-13), finalmente se obtiene

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^2 \exp\left[i2\pi \frac{mx}{\mathcal{M}(d/\sqrt{2})}\right] \quad . \quad (5-9)$$

Esta expresión corresponde a una red monodimensional, de período  $\mathcal{M}(d/\sqrt{2})$ , con sus líneas orientadas en la dirección de las de la red fuente (o, equivalentemente, en la dirección de la bisectriz del ángulo que forman las redes lineales que componen la red objeto). Para analizar el perfil de las franjas de la Ec.(5-9) es útil recordar las dos maneras equivalentes de expresar una función periódica, que proporcionan las Ecs.(2-71a) y (2-86a). Si representamos la celda unidad de las redes 1-D que componen la red objeto por  $a(x)$ , en el caso que nos ocupa la expresión alternativa a la Ec.(5-9), es

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right)^2 a'(x) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - m \mathcal{M} \frac{d}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad (5-10)$$

con

$$a'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\mathcal{M}d} a\left(\frac{\sqrt{2}x}{\mathcal{M}}\right) * a\left(\frac{\sqrt{2}x}{\mathcal{M}}\right) \quad . \quad (5-11)$$

Esta afirmación se puede comprobar sencillamente, verificando que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier asociados a la Ec.(5-10), que se obtienen a partir de la Ec.(2-87a), coinciden con los de la Ec.(5-9) —que, utilizando de nuevo la Ec.(2-87a), resultan ser  $A_m^2 = \tilde{a}^2(m/d)/d^2$ —.

Si la red objeto está formada por dos redes binarias de amplitud, de modulación  $s$  —para las que  $a(x) = \text{rect}(x/sd)$ —, la Ec.(5-11) se convierte en

$$a'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\mathcal{M}d} \text{rect}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\mathcal{M}sd}\right) * \text{rect}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\mathcal{M}sd}\right) = s \text{tri}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\mathcal{M}sd}\right) \quad , \quad (5-12)$$

donde  $\text{tri}(x)$  representa la función triángulo [V-61]. La Ec.(5-12) describe una función cuyo perfil es un triángulo de base  $2\mathcal{M}sd/\sqrt{2}$  y altura  $s$ . Recordando que el período de  $I(x,y)$  es  $\mathcal{M}d/\sqrt{2}$ , se concluye que el perfil de esta distribución de irradiancia será triangular siempre que no exista solapamiento entre dos de los triángulos contiguos de la Ec.(5-10). Para ello basta con que  $s \leq 0.5$ . Si se define la modulación  $s_f$  de estas franjas como se hizo en el caso de las franjas de Lau trapezoidales, Ec.(4-74), se tiene

que  $s_F=2s$ . Para las redes de Ronchi ( $s=0'5$ ), la modulación de las franjas que así se obtienen es  $s_F=1$ .

Por otro lado, obsérvese que en esta última experiencia de filtraje espacial, la condición de consonancia que se debe verificar entre los períodos de las redes fuente y objeto —dada por la Ec.(5-8)— es ligeramente distinta de la que se debe satisfacer —y que proporciona la Ec.(4-13)— para seleccionar las componentes originales de la red 2-D. Por este motivo, si se desea realizar ambos tipos de filtraje sin modificar la posición del plano de observación, se debe emplear dos redes fuente distintas: una de ellas para seleccionar las franjas de la Ec.(5-4) y la otra para las de la Ec.(5-9). La relación que debe existir entre los respectivos períodos  $d'$  y  $d''$ , según las Ecs.(5-8) y (4-13), es

$$d'' = \frac{d'}{\sqrt{2}} \quad (5-13)$$

La fotografía de la Fig.5-3, corresponde a la verificación experimental del resultado de la Ec.(5-9). Nótese que, de acuerdo con la teoría expuesta, las franjas triangulares obtenidas tienen una modulación  $s_F=1$ , al estar la red objeto (cuya autoimagen se muestra en la Fig.5-2a formada por dos redes binarias de modulación  $s=0'5$ ).

Veamos ahora una manera complementaria de entender la formación de estas franjas oblicuas. Cuando se superponen dos redes de difracción 1-D idénticas, de período  $d$ , giradas entre sí un ángulo  $\theta$ , se obtiene un patrón periódico de franjas paralelas a la bisectriz del ángulo girado. El período  $d_m$  de estas franjas de moiré [V-62] es



Fig. 5-3. Con una red fuente de período  $d''=0'57mm$  girada  $45^\circ$  respecto a la vertical se obtiene, en el plano correspondiente a los resultados de la Fig.5-2, un patrón de franjas de perfil triangular.

$$d_m = \frac{d}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)} \quad (5-14)$$

En el caso de una red 2-D cuadrada ( $\theta=90^\circ$ ), las franjas de moiré se disponen en la dirección de la diagonal de la celda unidad cuadrada, es decir, formando un ángulo de  $45^\circ$  con cada una de las redes monodimensionales que la componen, y su período  $d_m$ , de acuerdo con la Ec.(5-14), es  $d_m=d/\sqrt{2}$ . Además, cuando las redes son binarias y de modulación  $s \leq 5$ , el perfil de las franjas de moiré resultantes es triangular [V-63].

Estos hechos permiten interpretar el patrón de franjas de la Ec.(5-9) como el resultado de poner en consonancia las franjas de moiré correspondientes a la autoimagen de la red 2-D, localizada en el plano de observación. De este modo, teniendo en cuenta las características (período y orientación) de este patrón de moiré, se entiende fácilmente por qué la red fuente lineal necesaria para obtener estas franjas oblicuas con el dispositivo de Lau, debe tener una orientación y un período tan particulares. Respecto a este último, es inmediato comprobar que la Ec.(5-8) es un caso particular de la Ec.(4-13), sin más que tener presente que el período del patrón que se quiere poner en consonancia es  $\mathcal{M}d_m$  (con  $d_m=d/\sqrt{2}$ ), en lugar de  $\mathcal{M}d$ .

Los resultados de la experiencia de filtraje espacial incoherente discutida, se pueden entender de un modo global más fructífero desde el punto de vista frecuencial. El espectro de Fourier de la distribución de irradiancia de la autoimagen de la red, está formado por un conjunto discreto de órdenes de difracción distribuidos regularmente formando una red 2-D cuadrada de "puntos" (análoga a la que describe la Ec.(2-91), para  $\theta=90^\circ$ ). El factor de peso que modula cada orden de difracción ( $m,n$ ) es igual al producto  $A_m A_n$ . Teniendo en cuenta el valor de los coeficientes de los desarrollos en serie de las Ecs.(5-4) y (5-9) es fácil percatarse de que las redes lineales que éstas representan son el resultado de filtrar todos los órdenes del espectro de la autoimagen, salvo los caracterizados, respectivamente, por las relaciones  $n=0$  y  $n=m$ . Estos órdenes se distribuyen, en ambos casos, a lo largo de una recta que pasa por el origen. La orientación de esta recta y la separación entre órdenes, situados en ella, sucesivos, determinan la orientación y el período de la red que se obtiene en la imagen filtrada. Específicamente, las líneas de esta red son perpendiculares a dicha recta y su período es el valor inverso de la separación entre órdenes. Por tanto, son también estos parámetros los que fijan la orientación y el período de la red fuente, que permite obtener en el plano de observación del dispositivo de la Fig.5-1, la imagen filtrada.

Desde este punto de vista es inmediato extender las posibilidades del dispositivo de filtraje espacial. Éste permite seleccionar no sólo las componentes originales de la autoimagen de la red 2-D y su patrón de moiré, sino también cualquier otra componente espacial que resulte de filtrar todos los órdenes del espectro de la distribución de irradiancia de la autoimagen salvo los alineados en una recta que

contenga al orden cero. La discusión precedente aclara cómo determinar la orientación y el período de la red fuente necesaria en cada caso. Otra ventaja de este punto de vista es la de poner de manifiesto la clara analogía existente entre esta técnica de filtraje espacial de objetos periódicos y la desarrollada en las experiencias de Abbe y Porter. Una diferencia importante entre ambas es que el filtraje se realiza sobre las componentes espectrales correspondientes, en la técnica clásica, a la distribución de amplitud del objeto y, en la incoherente, a su distribución de irradiancia.

Para finalizar esta sección, consideremos ahora que la transparencia objeto es una red bidimensional oblicua, de amplitud, como la que describe la Ec.(2-90). Supongamos, además, que el ángulo  $\theta$  entre las dos redes lineales verifica la Ec.(2-95) para algún valor particular del número natural  $M$  y del entero  $N$ . Para esta situación, el comportamiento de la red bidimensional en cuanto a posiciones de las autoimágenes es similar al de una red lineal de período  $\sqrt{M}d$ .

Ahora, manteniendo la red lineal como fuente incoherente del dispositivo de Lau se pueden seleccionar también las diferentes componentes espectrales de la red oblicua. En particular vamos a discutir cómo seleccionar las redes lineales que componen una autoimagen del objeto y el patrón de franjas de moiré que éstas producen, por ser estas situaciones las utilizadas en la aplicación que se describe en la sección siguiente.

En el primer caso, se debe poner en consonancia, en un plano de autoimagen, una de las dos estructuras unidimensionales que componen ésta. La condición de consonancia que se debe satisfacer, y que es idéntica a la que se aplica para obtener franjas de Lau 2-D con una red fuente 2-D, viene dada por la Ec.(4-95). La selección de la imagen filtrada se consigue haciendo que las líneas de la red fuente sean paralelas a una u otra estructura original. El plano donde se obtiene esta imagen, lo determina la Ec.(4-92).

Para la segunda situación, la red fuente lineal se debe disponer con sus líneas paralelas a la dirección de las franjas de moiré (esto es, en la bisectriz del ángulo  $\theta$ ). Además, si se desea mantener fijo el plano de observación —y por tanto, los valores de  $z$  y  $R$  de la situación anterior—, el período  $d''$  de dicha red debe de satisfacer la relación

$$d'' = \frac{d'}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)} \quad (5-15)$$

Es decir, los períodos de las redes fuente que permiten seleccionar, respectivamente, las franjas de moiré y las componentes originales de la autoimagen elegida, deben de guardar la misma proporción —dada por la Ec.(5-14)— que los períodos de dichas estructuras 1-D.

Teniendo en cuenta la Ec.(2-95), la Ec.(5-15) se puede expresar como

$$d'' = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2M - N}} d' \quad (5-16)$$

y utilizando la Ec. (4-94), finalmente resulta

$$d'' = \frac{\lambda z}{2Q'd\sqrt{M(2M - N)}} \quad (5-17)$$

Cuando  $N$  es un número par y  $M$  impar la red 2-D resultante genera también, tal y como se discutió en la sección II.4, autoimágenes negativas. En este caso, se pueden realizar las operaciones de filtraje anteriores sobre una autoimagen negativa de la red. Las ecuaciones previas se aplican también a este caso, sustituyendo, claro está, el entero  $Q'$  por el índice semientero que caracteriza la autoimagen considerada.

En realidad, la técnica de filtraje espacial descrita, se puede aplicar a la distribución de irradiancia de cualquier patrón de Fresnel de la red 2-D objeto. El resultado de la imagen filtrada dependerá evidentemente de cuál sea el perfil del patrón elegido. En particular, con una red 2-D oblicua de fase compuesta por la superposición de dos redes lineales como la de la Ec.(2-69), se pueden obtener las mismas imágenes filtradas de alto contraste que se obtienen con la correspondiente red binaria de amplitud. Para ello basta con seleccionar las componentes espectrales de alguno de los patrones 2-D binarios y de alto contraste que esta red genera —cuando el entero  $N$  que define el ángulo  $\theta$  verifica la Ec.(2-112)—. Las ecuaciones de la discusión anterior, relativa a las redes oblicuas de amplitud, son válidas en este caso sin más que cambiar en ellas el índice  $Q'$  por el índice  $Q'+q'$ , con  $q'=1/4$  ó  $3/4$ , que caracteriza el patrón de Fresnel de alto contraste elegido.

A continuación se describe cómo los resultados anteriores, encuentran una aplicación práctica en el desarrollo de puertas lógicas ópticas.

## V.3 Puertas lógicas binarias

Las operaciones lógicas pertenecen a la clase de operaciones no lineales de procesamiento de información. Para poder realizar estas operaciones por métodos ópticos hay que superar el comportamiento lineal que, de ordinario, presentan los dispositivos ópticos. En el método que se propone a continuación, esto se logra mediante un codificado espacial no lineal de las funciones binarias a combinar. De este modo, el proceso para realizar la operación lógica deseada se puede dividir en tres etapas: al codificado no lineal de los dos objetos binarios de entrada le sigue una etapa de filtraje espacial incoherente, utilizando el dispositivo de la sección 5.2, que, junto a una

decodificación no lineal posterior, permite obtener el resultado de la operación deseada.

Para la etapa de codificado de los datos de entrada, se ha utilizado la técnica de modulación theta [V-64]. La idea básica de esta técnica es codificar cada celda de información del objeto, mediante la orientación angular —de ahí el nombre de modulación theta— de una red monodimensional. Así, un objeto theta-modulado consiste en dos o más redes contiguas con diferentes orientaciones azimutales.

Consideremos, por tanto, dos objetos binarios que se desea combinar mediante una determinada operación lógica booleana. En la Fig.5-4 se muestra esquemáticamente un ejemplo del proceso de codificado de dos de estos objetos, representados en blanco y negro. Primero, se prepara independientemente una versión theta-modulada de cada uno de los objetos originales. De esta forma, cada valor binario de las dos funciones de entrada queda codificado por una única estructura periódica unidimensional. La orientación de estas redes 1-D es tal que, por un lado, un valor lógico dado queda codificado, en uno y otro objeto, por redes mutuamente perpendiculares y, por otro lado, los dos valores binarios diferentes de cada objeto se codifican con redes 1-D que forman entre sí un ángulo  $\varphi$ , tal y como se muestra en la Fig.5-4b. Las redes 1-D que se empleen en este proceso pueden ser tanto de amplitud como de fase. El valor particular del ángulo  $\varphi$  depende del tipo de redes que se utilicen. En este trabajo, vamos a considerar que el codificado de los objetos se realiza con redes binarias cuadradas, puras de fase, con un salto de fase  $\pi/2$ . Para esta situación, el valor más conveniente para el ángulo  $\varphi$  es  $41'8^\circ$ . La elección de este valor y el empleo de estas redes de fase se justifica en la discusión posterior. La técnica para

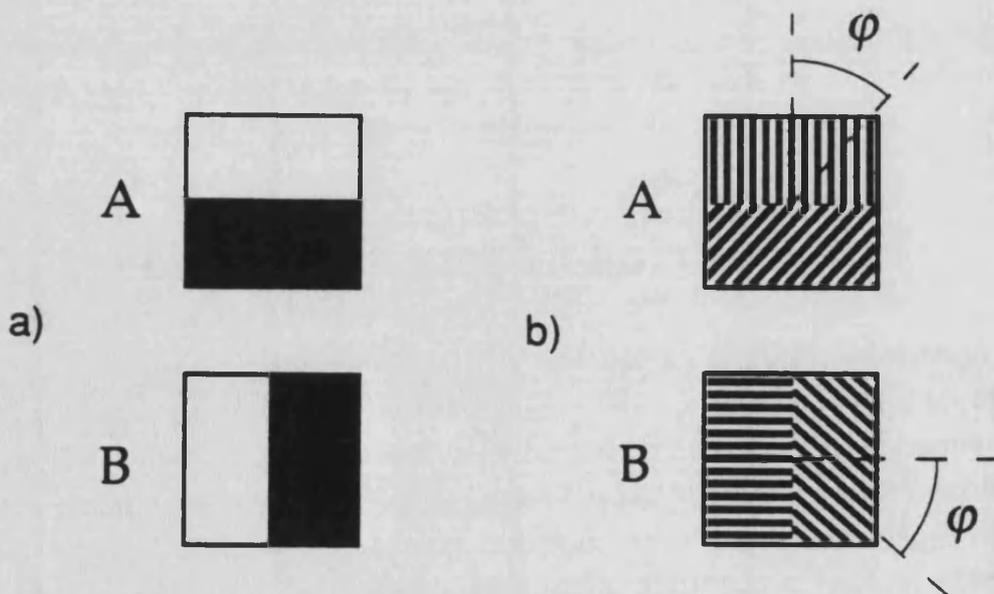


Fig. 5-4. Etapa de codificado no lineal. a) Objetos binarios originales (en negro, valor lógico 0; en blanco, valor lógico 1). b) Objetos codificados por modulación theta. Las redes lineales tienen la misma frecuencia espacial.

establecer las puertas lógicas binarias empleando en el codificado redes de amplitud, se recoge en un trabajo preliminar [V-57] y es análoga a la que aquí se va a tratar.

Para la etapa del procesamiento lógico, se sustituye la red objeto del dispositivo de Lau por la transparencia que resulta al superponer los dos objetos theta-modulados. En ésta, cada una de las cuatro combinaciones posibles con dos variables binarias, está representada por su propia red 2-D de fase, tal y como se indica en la Fig.5-5. Para dos de estas redes el ángulo de rotación entre las estructuras lineales que las componen es  $\theta=90^\circ$  y para las otras dos es  $\theta=48'2''$ . Sin embargo, nótese también que la orientación global de las redes 2-D de igual ángulo  $\theta$ , correspondientes a combinaciones lógicas diferentes, es distinta.

Tal y como se discutió al final de la sección II.4, tanto para la red 2-D de fase cuadrada como para la red oblicua de  $\theta=48'2''$  los patrones de Fresnel de índice  $q=1/4$  ó  $3/4$  son binarios y de alto contraste. La distancia de Talbot de la primera de ellas coincide con la de las redes lineales de período  $d$  que la componen ( $z_T=2d^2/\lambda$ ), mientras que para la segunda —que corresponde a la solución de la Ec.(2-95) con  $M=3$  y  $N=4$ — es, según la Ec.(2-97),  $z'_T=Mz_T=6d^2/\lambda$ . La localización del patrón de Fresnel de índice  $Q+q=3/4$  de la red cuadrada la determina, teniendo en cuenta las Ecs.(2-11) y (2-53), la relación

$$\frac{zR}{z+R} = \frac{3d^2}{2\lambda} \quad (5-18)$$

Como se comprueba aplicando de nuevo las mismas ecuaciones, la Ec.(5-18) fija asimismo la posición del patrón de índice  $Q+q=1/4$  de la red oblicua.

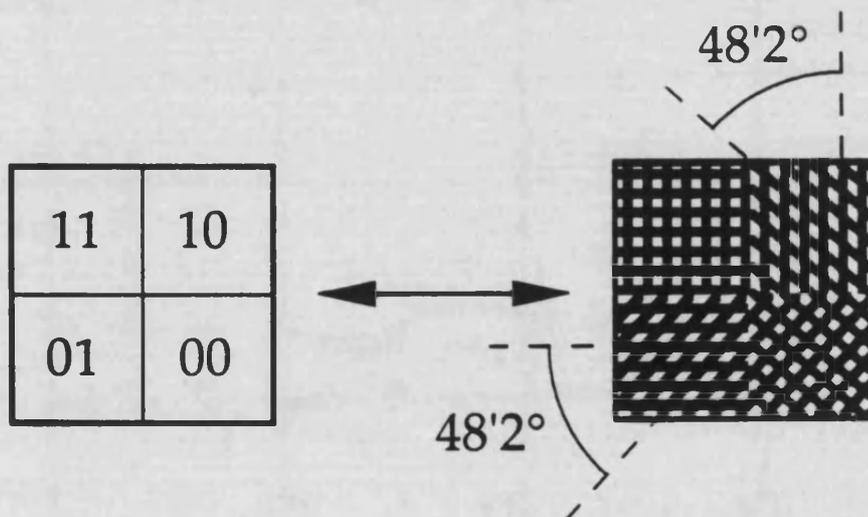


Fig. 5-5. Superposición de los dos objetos theta-modulados de la Fig.5-4. Las combinaciones lógicas 11 y 00 quedan así codificadas por una red cuadrada ( $\theta=90^\circ$ ). Una respecto a otra están giradas  $41'8''$ . Las regiones asociadas a los valores 10 y 01 están codificadas por una red 2-D oblicua con  $\theta=48'2''$ . Ahora, el giro relativo entre ellas es  $90^\circ$ .

Por estos motivos, cada una de las diferentes estructuras bidimensionales de fase que componen la transparencia representada en la Fig.5-5 genera, en el plano definido por la Ec.(5-18), una red 2-D binaria y de contraste máximo, con su misma orientación. El período de las redes lineales que forman estos patrones es  $\mathcal{M}d$ , siendo  $\mathcal{M}$  el aumento geométrico —dado por la Ec.(2-12)— asociado al plano de observación. Por otro lado, existe un patrón de franjas de moiré asociado a cada una de las cuatro regiones de este plano. Según se ha discutido en la sección anterior el período de estas franjas, véase la Ec.(5-14), y su orientación, respecto a la dirección horizontal, para las cuatro combinaciones de variables lógicas posibles 11, 10, 01 y 00, son, respectivamente,  $\mathcal{M}d/\sqrt{2}$ ,  $-45^\circ$ ;  $\sqrt{3/2}\mathcal{M}d$ ,  $-24'1^\circ$ ;  $\sqrt{3/2}\mathcal{M}d$ ,  $65'9^\circ$  y  $\mathcal{M}d/\sqrt{2}$ ,  $-3'2^\circ$  (los ángulos con sentido horario se han tomado como positivos y al contrario). La razón de enfatizar estos hechos, es el importante papel que juegan en nuestro procedimiento para realizar ópticamente operaciones lógicas.

Eligiendo convenientemente la fuente codificada del dispositivo de Lau se puede obtener el resultado de la operación binaria que se desee. La red fuente permite seleccionar, en el plano que determina la Ec.(5-18), cada una de las redes lineales componentes de las estructuras 2-D, las propias redes 2-D, cada patrón de franjas de moiré o una combinación cualquiera de dos de éstos. La fuente codificada específica de cada operación debe generar franjas de Lau en las regiones asociadas a las combinaciones de valores lógicos para los que la operación elegida proporciona, de acuerdo con la correspondiente tabla de verdad, el valor lógico 1. De este modo, en cada región del plano de detección el resultado de la operación aparece codificado por la presencia de franjas de alto contraste (lineales o bidimensionales) cuando es 1 o por una irradiación uniforme cuando es 0.

En la Fig.5-6 se resume el procedimiento a seguir para obtener con este método las 16 operaciones lógicas binarias posibles. Consideremos, por ejemplo, la operación A OR B. Según la tabla de verdad correspondiente, el resultado de esta operación es 1 para las combinaciones lógicas 11, 01 y 10. Las componentes horizontales y verticales de las redes 2-D asociadas a estas combinaciones en la etapa de preprocesado son las estructuras características de estas regiones, y que las distinguen de la cuarta región donde las componentes de la red 2-D asociada tienen otra orientación. Teniendo en cuenta las propiedades de filtraje espacial del dispositivo de Lau discutidas en la sección anterior, para seleccionar simultáneamente estas componentes horizontales y verticales basta con utilizar una red fuente 2-D formada por dos redes lineales de período  $d'$  superpuestas en ángulo recto y orientadas en la dirección horizontal y vertical respectivamente. La separación  $z$  entre la red fuente y el objeto ha de satisfacer la condición de consonancia

$$z = \frac{3dd'}{2\lambda} \quad , \quad (5-19)$$

que se deduce directamente de la Ec.(4-19), sin más que recordar que el plano donde se realiza el filtraje incoherente corresponde al patrón de índice  $Q'+q'=3/4$  de la red cuadrada. La posición de este plano se determina, fijado el valor de  $z$  por la Ec.(5-19),

Operación	Tabla de Verdad	Fuente	Resultado Teórico									
A	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	1	0	0	0	Red 1-D Período $d'$ $\phi=0^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	1										
0	0	0										
B	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	0	0	1	0	Red 1-D Período $d'$ $\phi=90^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	0										
0	1	0										
$\bar{A}$	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	0	0	1	1	Red 1-D Período $d'$ $\phi=41'8^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	0										
0	1	1										
$\bar{B}$	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	1	0	0	1	Red 1-D Período $d'$ $\phi=-48'2^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	1										
0	0	1										
A AND B	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	0	0	0	0	Red 1-D Período $d'/\sqrt{2}$ $\phi=45^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	0										
0	0	0										
A NOR B	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	0	0	0	1	Red 1-D Período $d'/\sqrt{2}$ $\phi=86'8^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	0										
0	0	1										
A AND $\bar{B}$	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	1	0	0	0	Red 1-D Período $\sqrt{3}/2 d'$ $\phi=65'9^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	1										
0	0	0										
$\bar{A}$ AND B	<table border="1"> <tr><td><math>\frac{A}{B}</math></td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	0	0	1	0	Red 1-D Período $\sqrt{3}/2 d'$ $\phi=-24'1^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	0										
0	1	0										

Fig. 5-6. Resultado teórico y fuentes codificadas correspondientes a las 16 operaciones lógicas binarias. El ángulo  $\phi$  representa la rotación global del conjunto de toda la red, lineal o bidimensional, respecto a la vertical (se ha tomado como positivo cuando tiene sentido horario). Las líneas de la red fuente quedan siempre paralelas a las de los patrones de Lau del plano de salida, indicados en la última columna de esta figura.

mediante la Ec.(5-18). Con estas condiciones, la propia propagación libre de la luz difractada en el objeto se encarga de resaltar las estructuras lineales mencionadas y de atenuar las otras. Con los objetos de prueba utilizados, se obtienen franjas de Lau de alto contraste en la mitad superior y en el cuadrante inferior izquierdo de la figura proyectada de la transparencia objeto.

Consideremos ahora la operación  $\bar{A}$  AND B, que proporciona el valor 1 sólo para

Operación	Tabla de Verdad	Fuente	Resultado Teórico									
A OR B	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	1	0	1	0	Red 2-D, $\theta=90^\circ$ Período $d'$ $\phi=0^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	1										
0	1	0										
A NAND B	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	1	0	1	1	Red 2-D, $\theta=90^\circ$ Período $d'$ $\phi=41'8^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	1										
0	1	1										
A OR $\bar{B}$	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	1	0	0	1	Red 2-D, $\theta=48'2^\circ$ Período $d'$ $\phi=0^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	1										
0	0	1										
$\bar{A}$ OR B	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	0	0	1	1	Red 2-D, $\theta=48'2^\circ$ Período $d'$ $\phi=90^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	0										
0	1	1										
A EQV B	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	0	0	0	1	Red 2-D, $\theta=90^\circ$ Período $d'/\sqrt{2}$ $\phi=45^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	0										
0	0	1										
A XOR B	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	1	0	1	0	Red 2-D, $\theta=90^\circ$ Período $\sqrt{3/2} d'$ $\phi=65'9^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	1										
0	1	0										
1	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	1	1	0	1	1	Red 2-D, $\theta=41'8^\circ$ Período $d'$ $\phi=0^\circ$	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	1	1										
0	1	1										
0	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{A}{B}</math></td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>	$\frac{A}{B}$	1	0	1	0	0	0	0	0	No codificada	
$\frac{A}{B}$	1	0										
1	0	0										
0	0	0										

Fig. 5-6 (continuación).

la combinación lógica 01. En este caso, el patrón de franjas característico de esta combinación es el patrón de moiré asociado a la red 2-D que la codifica. Para poner en consonancia exclusivamente este patrón, se debe utilizar una red fuente 1-D con sus líneas dispuestas formando un ángulo de  $-24'1''$  con la horizontal. Para que el plano de detección sea el mismo que en la situación anterior, el período de la red fuente debe ser  $\sqrt{3}/2d'$ . Ahora se obtienen franjas de alto contraste, para los objetos utilizados, exclusivamente en el cuadrante inferior izquierdo de la proyección del objeto.

Como último ejemplo discutamos la operación A EQV B. Según la correspon-

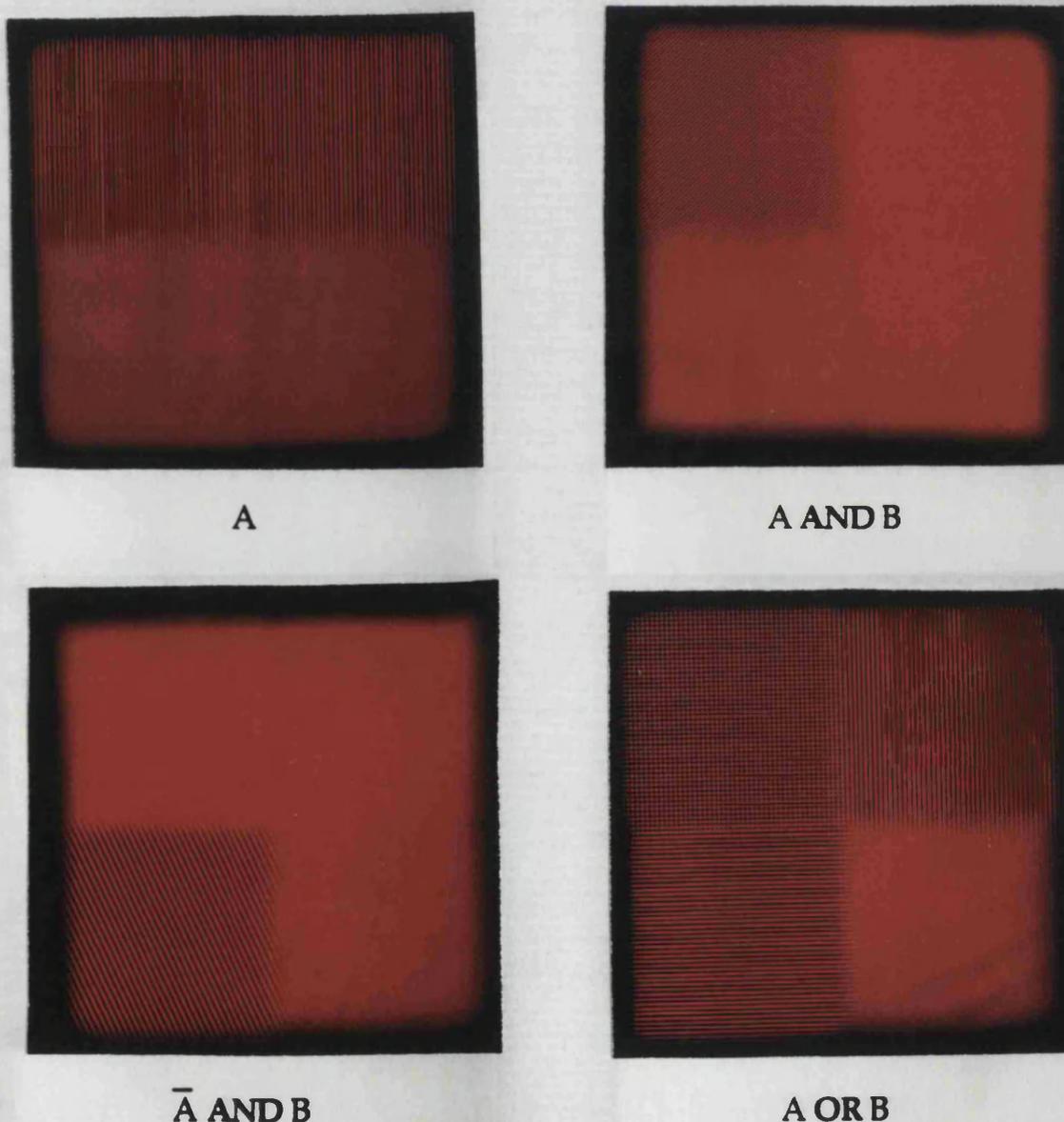
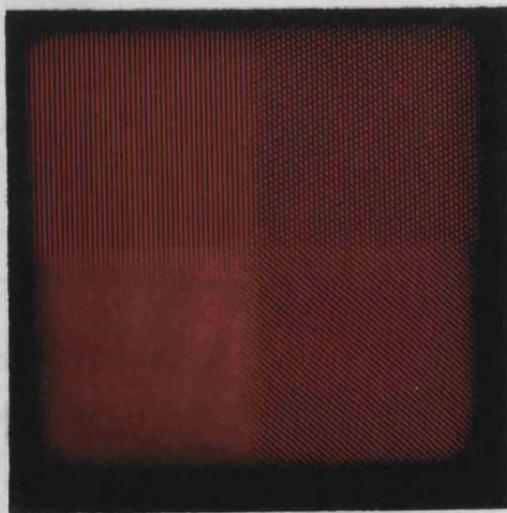
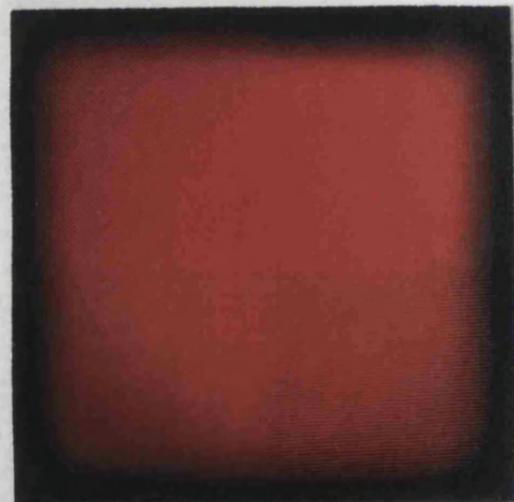


Fig. 5-7. Resultados experimentales correspondientes a algunas de las puertas lógicas de la Fig.5-6. En el plano de detección, el valor lógico 1 aparece codificado por la presencia de franjas de Lau lineales o bidimensionales y el valor 0 como un fondo uniforme. Cada una de estas operaciones lógicas requiere una red fuente diferente (véase el texto).

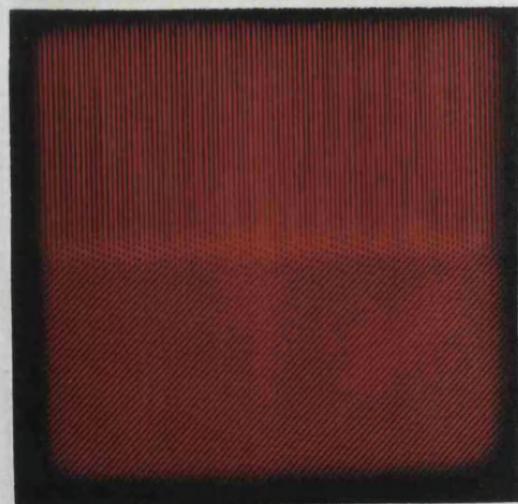
diente tabla de verdad, esta operación se evalúa a 1 para las combinaciones 11 y 00. Los patrones de franjas característicos de estas combinaciones son las franjas de moiré asociadas a las dos redes cuadradas. Para poner en consonancia simultáneamente estos patrones, se debe utilizar la red fuente 2-D oblicua que resulta al superponer dos redes lineales iguales con un ángulo de rotación  $\theta=41'8''$ . Esta red se debe orientar para que sus líneas constituyentes formen ángulos de  $-45^\circ$  y  $-3'2''$ , respectivamente, respecto a la horizontal. Además, para mantener fija la posición del plano de detección, el período de las redes fuente lineales debe ser  $d'/\sqrt{2}$ . Para los objetos de prueba utilizados las franjas lineales de alto contraste se obtienen, en este caso, en el cuadrante superior izquierdo y en el inferior derecho.

A OR  $\bar{B}$ 

A EQV B



A XOR B



1

Fig. 5-7 (continuación).

Teniendo presentes estos ejemplos, no es difícil entender las siguientes afirmaciones. Las puertas lógicas que realiza las operaciones  $A$ ,  $\bar{A}$ ,  $B$  y  $\bar{B}$  requieren una red fuente lineal de período  $d'$ . Para las de las operaciones  $A \text{ AND } B$  y  $A \text{ NOR } B$  el período de la red fuente lineal debe ser  $d'/\sqrt{2}$  y para las correspondientes a  $A \text{ AND } \bar{B}$  y  $\bar{A} \text{ AND } B$ , debe ser  $\sqrt{3/2}d'$ . Empleando una red fuente 2-D cuadrada de período  $d'$  se obtienen las operaciones  $A \text{ OR } B$  y  $A \text{ NAND } B$ , mientras que si el período de la red 2-D es  $\sqrt{3/2}d'$  se tiene la puerta lógica correspondiente a  $A \text{ XOR } B$ . Para las operaciones  $A \text{ OR } \bar{B}$  y  $\bar{A} \text{ OR } B$  se necesita una red fuente 2-D oblicua (con  $\theta=48'29''$ ), teniendo sus componentes un período  $d'$ . Para establecer la puerta lógica correspondiente a  $A \text{ EQV } B$  se requiere una red 2-D oblicua de ángulo  $\theta=41'8''$  y período  $d'/\sqrt{2}$ . Por último, la operación lógica 1 se obtiene con una red igual que la anterior, pero de período  $d'$  y la operación trivial 0 se realiza utilizando una fuente extensa sin codificar. Como es obvio en las puertas lógicas que emplean la misma red fuente la orientación de ésta es diferente según la operación particular que realicen. En todos los casos, las líneas de la red fuente son paralelas a las de los patrones de Lau que se obtienen en el plano de observación.

Para verificar la técnica propuesta, se han utilizado los objetos de prueba binarios de la Fig.5-4. Algunos de los resultados experimentales obtenidos se recogen en la Fig.5-7. En ella se muestra, para cada una de las redes fuente diferentes que requiere esta técnica, un ejemplo del resultado que se obtiene en el plano de detección. Las redes de fase utilizadas en la etapa de codificado eran de período  $d=0'16\text{mm}$ . Las dimensiones globales de los objetos codificados eran  $15\times 15\text{mm}$  aproximadamente. Dado que el período  $d'=0'64\text{mm}$ , la distancia entre la red fuente y el plano objeto se tomó igual a  $z=24'27\text{cm}$ . De este modo se satisface la Ec.(5-19) para  $\lambda=632'8\text{nm}$ . Consecuentemente —véase la Ec.(5-18)— el plano de detección se situó a una distancia  $R=8'09\text{cm}$ . Como se aprecia en la Fig.5-7, los resultados obtenidos concuerdan satisfactoriamente con las expectativas teóricas previamente expuestas y exhiben una alta relación señal-ruido, característica de la iluminación incoherente.

## V.4 Correlador 2-D de proyección geométrica perfecta

Para finalizar este capítulo, veamos cómo las propiedades del campo difractado por una transparencia bajo iluminación incoherente, en conjunción con el efecto Talbot, permiten desarrollar un nuevo correlador óptico incoherente para señales bidimensionales positivas.

Consideremos una fuente plana monocromática incoherente, cuya distribución normalizada de irradiancia, que en ocasiones anteriores se denotó por  $I_s$ , es conveniente identificar ahora con

$$I_s(x,y) = a_1(x,y) \quad , \quad (5-20)$$

que ilumina, con una geometría similar a la de la Fig.4-2, a una transparencia objeto de transmitancia en irradiancia dada por

$$T(x,y) = a_2\left(\frac{x}{\eta}, \frac{y}{\eta}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - md, y - nd) \quad , \quad (5-21)$$

donde las funciones, de soporte compacto,  $a_1(x,y)$  y  $a_2(x,y)$  son las distribuciones de irradiancia que se desea correlacionar y  $\eta$  es un factor de escala. La red 2-D cuadrada de la Ec.(5-21) iluminada coherentemente genera autoimágenes, tanto positivas como negativas, si sus variaciones de fase preservan la estructura periódica. El índice semi-entero asociado a estos patrones, cuya localización determina la Ec.(2-56), lo vamos a representar, como en el Capítulo III, por  $P$ . Para la situación considerada, la distribución de irradiancia,  $I(x,y)$ , en uno de estos planos de autoimagen, de acuerdo con la Ec.(4-9), es

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s}\right)^2 \left\{ T\left(\frac{x}{\mathcal{M}}, \frac{y}{\mathcal{M}}\right) \otimes I_s\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}, \frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right\} \quad ,$$

en donde los aumentos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_s$  vienen dados, por supuesto, por las Ecs.(2-12) y (4-7), respectivamente. Teniendo en cuenta las Ecs.(5-20) y (5-21) se obtiene la expresión

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s}\right)^2 \left[ a_2\left(\frac{x}{\eta\mathcal{M}}, \frac{y}{\eta\mathcal{M}}\right) \otimes a_1\left(\frac{x}{\mathcal{M}_s}, \frac{y}{\mathcal{M}_s}\right) \right] * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d, y - n\mathcal{M}d) \quad .$$

Si se exige, además, que

$$\eta\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \quad , \quad (5-22)$$

finalmente resulta

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}_s}\right)^2 \left[ a_2\left(\frac{x}{\eta\mathcal{M}}, \frac{y}{\eta\mathcal{M}}\right) \otimes a_1\left(\frac{x}{\eta\mathcal{M}}, \frac{y}{\eta\mathcal{M}}\right) \right] * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\mathcal{M}d, y - n\mathcal{M}d) \quad . \quad (5-23)$$

Esta ecuación describe una distribución de irradiancia que corresponde a una red 2-D cuadrada, de período  $Md$ , cuya celda unidad es el resultado de la correlación entre las señales  $a_2$  y  $a_1$ , ambas reescaladas con el mismo factor  $\eta M$ . En la interpretación de este resultado estamos suponiendo implícitamente que el período  $Md$  de esta red es lo suficientemente grande para que no haya solapamiento entre dos celdas contiguas. Si suponemos que  $a_1(x,y)$  y  $a_2(x,y)$ , como funciones de soporte compacto que son, se anulan fuera de un intervalo bidimensional cuadrado de longitud  $\Lambda$ , se tiene que la correlación  $a_2(x/\eta M, y/\eta M) \otimes a_1(x/\eta M, y/\eta M)$  es nula, a su vez, fuera de un cuadrado de lado  $2\eta M\Lambda$ . Por este motivo, la condición anterior de no solapamiento equivale a que  $2\eta M\Lambda \leq d$ . Dado que en la red objeto la celda unidad se inscribe en un cuadrado de lado  $\eta\Lambda$ , esta relación establece que la fracción no idénticamente nula del período —o, simplemente, modulación— de dicha red,  $\eta\Lambda/d$ , debe ser igual o menor que 0.5.

Por todo ello, bajo los supuestos anteriores, la simple propagación libre de la luz emitida por la fuente permite realizar la operación de correlación deseada y además ésta se obtiene, en el plano de detección, de una manera múltiple. La periodicidad del filtro de referencia permite que la proyección de este patrón desde cada punto de la fuente coincida exactamente, para ciertos planos, con su sombra geométrica. Este dispositivo se comporta, de este modo, como un correlador de los de proyección geométrica en el que ésta es perfecta.

Introduciendo en la Ec.(5-22) los valores que para  $M$  y  $M_s$  proporcionan, respectivamente, las Ecs.(2-12) y (4-7), se obtiene

$$\frac{z+R}{R} = \frac{1}{\eta} \quad (5-24)$$

Llevando esta relación a la Ec.(2-56) —sustituyendo en ella el índice  $Q+q$  por el semientero  $P$ — y despejando el valor de  $z$  resulta

$$z = \frac{2Pd^2}{\eta\lambda} = \frac{1}{\eta} Pz_T \quad (5-25)$$

Despejando ahora  $R$  de la Ec.(5-24) se tiene

$$R = \frac{\eta}{1-\eta} z \quad (5-26)$$

y teniendo en cuenta la Ec.(5-25), en definitiva, resulta

$$R = \frac{1}{1-\eta} Pz_T \quad (5-27)$$



Dados los valores particulares de  $\eta$  y  $d$ , las Ecs.(5-25) y (5-27) proporcionan, respectivamente, las distancias  $z$  y  $R$  que permiten obtener en el plano de observación (caracterizado por el índice  $P$  seleccionado) la correlación buscada. La Ec.(5-25) establece que  $P$  debe ser una cantidad positiva, al ser  $z$  y  $z_T$  mayores que cero. De acuerdo con la Ec.(5-27), para que el plano de observación sea real ( $R>0$ ) es necesario también que  $\eta<1$ . Por tanto, en el caso de autocorrelación ( $a_2=a_1$ ), la escala de la señal  $a_2$  en la red objeto debe ser menor que la de la señal  $a_1$  que compone la fuente.

Utilizando de nuevo las Ecs.(4-7) y (5-26), se obtiene que el factor de escala  $\mathcal{M}_S$ , en el plano de detección, de las señales que se correlacionan vale

$$\mathcal{M}_S = \frac{\eta}{1 - \eta} \quad (5-28)$$

Es sencillo demostrar que en el intervalo de interés ( $0<\eta<1$ )  $\mathcal{M}_S$  es una función monótona creciente con  $\eta$ . Para  $\eta=0.5$  resulta  $\mathcal{M}_S=1$  y, según las Ecs.(5-25) y (5-27),  $z=R=2Pz_T$ .

Con objeto de comprobar sus posibilidades, el dispositivo descrito se ha utilizado en un experimento de reconocimiento de caracteres. El objetivo de esta experiencia fue detectar la presencia y posición de un determinado carácter alfabético binario en una señal de entrada compuesta. En particular, en esta discusión se supone que esta señal está formada por un conjunto de  $H_1 \times H_2$  caracteres, en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, de modo que la extensión de cada uno de ellos en ambas direcciones es  $\Lambda_1$ . La distribución de los caracteres individuales es tal que los cuadrados de lado  $\Lambda_1$  que limitan su extensión están repartidos de modo regular y con sus centros separados entre sí una distancia  $2\Lambda_1$ . En la Fig.5-8 se muestra una señal de estas características (para  $H_1=3$  y  $H_2=2$ ). Estas condiciones garantizan que no hay solapamiento entre las correlaciones individuales de cada carácter de la señal de entrada con el de referencia.

En el correlador propuesto, al igual que ocurre en los de proyección geométrica, se utiliza la propia señal de referencia como fuente incoherente del dispositivo. Sin embargo, como filtro de referencia se emplea la señal de referencia, convenientemente escalada, replicada espacialmente en forma de red 2-D cuadrada. La transmitancia en irradiancia de este filtro coincide formalmente con la Ec.(5-21) y es, por tanto, el que se emplea como red objeto en el montaje descrito previamente.

Para esta situación, la Ec.(5-23) sigue siendo válida sin más que tener en cuenta que  $a_1(x,y)$  representa, ahora, la distribución normalizada de irradiancia de la señal de entrada compuesta. Además, en este caso, para evitar que haya solapamiento entre celdas adyacentes en el plano de detección, la modulación  $\Lambda_2/d$  —siendo  $\Lambda_2=\eta\Lambda_1$  la extensión, en el filtro de referencia, del carácter a reconocer— de la red objeto debe verificar la relación

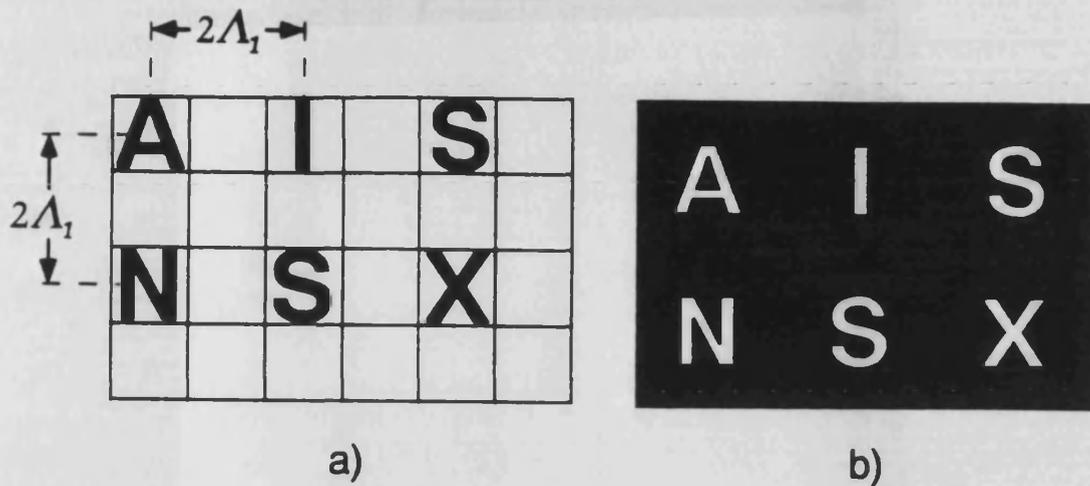


Fig. 5-8. Señal de entrada compuesta: a) Esquema de la disposición de los caracteres individuales que la componen; b) Filtro objeto que se sitúa en el plano de entrada del correlador y que corresponde al negativo, excluida la trama, del esquema de a).

$$\frac{\Lambda_2}{d} \leq \frac{1}{2H}$$

donde  $H$  es el máximo entre  $H_1$  y  $H_2$ . Desde un punto de vista práctico, para obtener el mayor rendimiento luminoso posible interesa que la modulación de la red objeto sea lo mayor posible, es decir,  $\Lambda_2 = d/2H$ .

En la Fig.5-8b se muestra, ampliada, la señal de entrada que se ha utilizado en la experiencia llevada a cabo. Para esta señal,  $\Lambda_1 = 0'12 \text{ mm}$ . Esta transparencia, iluminada de igual modo que la red fuente del dispositivo de Lau representado en la Fig.4-3, actuaba como fuente incoherente para el filtro de referencia periódico. Como señal de referencia se ha utilizado la letra S presente en el anterior conjunto de 3x2 caracteres. El período del filtro de referencia construido con esta celda unidad era  $d = 0'308 \text{ mm}$ , y para el factor de reducción de los caracteres de este filtro, respecto a los de la señal de entrada, se ha tomado el valor  $\eta = 0'5$ . En la Fig. 5-9 se muestra la primera autoimagen negativa de esta red 2-D.

Con objeto de hacer el dispositivo experimental lo más compacto posible, se eligió como plano de detección el correspondiente a la anterior autoimagen ( $P = 0'5$ ). Con estas condiciones y  $\lambda = 514 \text{ nm}$ , las Ecs.(5-25) y (5-27) proporcionan, respectivamente,  $z = R = 36'91 \text{ cm}$ . La Fig.5-10 corresponde a la distribución de irradiancia que se obtenía en el plano de salida del sistema. La celda unidad compuesta de esta distribución, contiene las señales asociadas a la correlación del carácter S de referencia con cada uno de los caracteres que componen la señal de entrada. En cada celda unidad del patrón de la Fig.5-10, se aprecian claramente los picos de irradiancia máxima que detectan la presencia y la localización del carácter S en la señal de entrada. Obsérvese que, debido



Fig. 5-9. Primera autoimagen negativa del filtro de referencia. La fuente puntual que iluminaba éste se situó a una distancia  $z=3691\text{cm}$ , por lo que  $R=3691\text{cm}$ .

a que el dispositivo propuesto realiza la correlación entre la señal de referencia y la señal de entrada, y no al contrario, la disposición relativa de las correlaciones individuales dentro de cada celda elemental está invertida respecto a la de los correspondientes caracteres dentro de la señal de entrada.

Como comprobación adicional, se ha calculado numéricamente el resultado de la correlación de las señales empleadas. La distribución de irradiancia correspondiente a esta señal se muestra, en forma de niveles de gris, en la Fig.5-11. Como se observa con la ayuda de la Fig.5-12, que corresponde a la distribución experimental de irradiancia de una de las celdas del plano de detección, la similitud entre el resultado numérico y



Fig. 5-10. Repartición de irradiancia obtenida en el plano de detección del correlador. En ella se aprecian claramente, en cada una de las celdas elementales, los picos de la autocorrelación de los dos caracteres S presentes en la señal de entrada.



Fig. 5-11. Representación en niveles de gris del resultado teórico de la correlación de las señales empleadas en el experimento.

el experimental es altamente satisfactoria.

Esta sencilla experiencia confirma la validez de la teoría expuesta previamente y permite entrever las posibilidades prácticas del correlador incoherente propuesto.

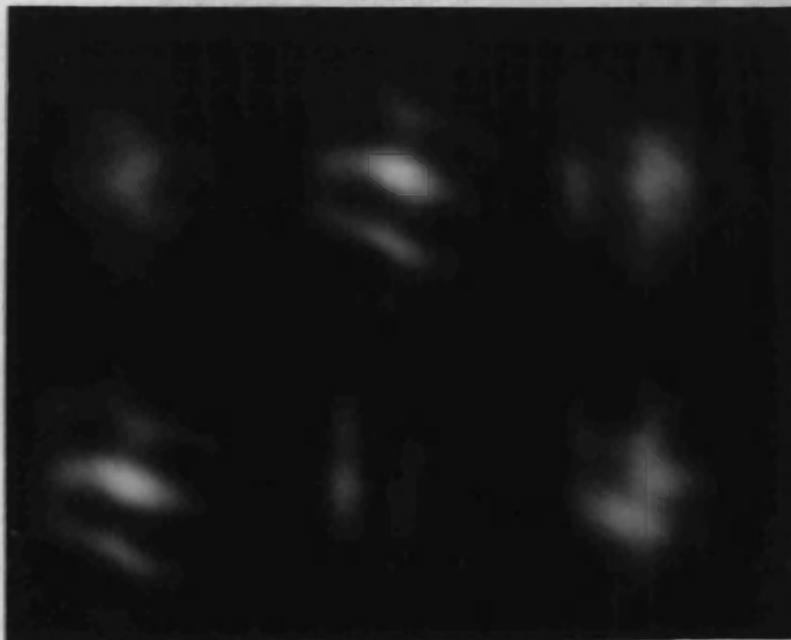


Fig. 5-12. Distribución de irradiancia correspondiente a una de las celdas unidad del patrón periódico de la Fig.5-10.

## V.5 Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto un correlador y un método para realizar ópticamente las puertas asociadas a las 16 operaciones lógicas binarias posibles. Los dos procesadores de información se apoyan en el fenómeno de autoimágenes con luz incoherente (efecto Lau), por lo que sorprendentemente, en ambos casos, su funcionamiento no requiere el uso de lentes y el resultado final de la operación exhibe una alta relación señal-ruido propia de este tipo de iluminación.

Respecto al procesador lógico, como paso previo se ha demostrado que es posible seleccionar, utilizando una red fuente lineal, las diferentes componentes espectrales unidimensionales de una autoimagen cualquiera de una red objeto 2-D que verifique la condición de Montgomery. La orientación del armónico lineal que se quiere seleccionar determina cuál debe ser la orientación y el período de la red fuente. En particular, para las redes 2-D oblicuas consideradas en el Capítulo II, se ha discutido cómo seleccionar tanto cada una de las dos estructuras lineales que componen sus autoimágenes —o sus patrones de máximo contraste, si son redes de fase— como el patrón de franjas de moiré definido por la intersección de aquéllas. Los resultados obtenidos con esta versión modificada del dispositivo de Lau guardan una estrecha analogía con los del experimento clásico, realizado por Porter, sobre la técnica de filtraje espacial coherente introducida por Abbe.

A continuación, estos hechos aplicados a ciertas redes 2-D de fase, rectangulares u oblicuas, se han utilizado para diseñar puertas lógicas binarias. En la técnica propuesta se distinguen tres etapas. Primero, se prepara una versión codificada, mediante el método de modulación theta, de los objetos binarios de entrada. Después, se sustituye la red objeto del dispositivo tipo Lau de filtraje incoherente por la transparencia que resulta de la superposición de los dos objetos theta-modulados. De este modo, cada combinación lógica queda apropiadamente codificada con una red 2-D diferente. Para obtener una determinada operación lógica se utiliza como red fuente bien una red lineal o bien la superposición de dos de ellas iguales, con la orientación entre ellas, el giro global y el período adecuados. Los valores lógicos 1 y 0, es decir, el resultado de la operación, aparecen codificados, en el plano de observación, por la presencia o ausencia de patrones de Lau (lineales o bidimensionales), respectivamente. Este hecho justifica la necesidad de una última etapa de decodificado no lineal. Los resultados experimentales obtenidos con esta técnica incoherente han sido plenamente satisfactorios.

Para la etapa de codificado de las variables binarias, se puede utilizar también redes lineales de amplitud. Sin embargo, el empleo de las de fase mejora el rendimiento luminoso del dispositivo y aumenta su flexibilidad al permitir, en principio, el uso de elementos acusto-ópticos en este proceso.

La última aportación de este trabajo ha sido el desarrollo de un correlador incoherente, del espacio objeto, para señales bidimensionales basado en el efecto Lau. Al igual que en los correladores de proyección geométrica, la señal de entrada actúa como fuente incoherente del dispositivo. Sin embargo, como filtro de referencia se utiliza la propia señal de referencia pero codificada sobre un soporte periódico espacialmente. A diferencia de todos los correladores de este tipo descritos hasta la fecha, esta periodicidad transversal permite obtener en el plano de salida del dispositivo la correlación exacta de ambas señales. Como resultado adicional, esta correlación se obtiene de forma múltiple en dicho plano.

Con el fin de verificar sus posibilidades prácticas, este correlador se ha aplicado en una experiencia sencilla de reconocimiento de caracteres. La presencia del carácter S se ha identificado en una señal de entrada compuesta. Las propiedades de detección e invariancia a desplazamientos del correlador han quedado patentes.

## V.6 Referencias

- [V-1] G.L. Rogers, *Noncoherent Optical Processing* (Wiley, 1977).
- [V-2] W.T. Rhodes and A.A. Sawchuk, "Incoherent Optical Processing", en *Optical Information Processing*, ed. S.H. Lee (Springer-Verlag, 1981).
- [V-3] H. Bartelt, S.K. Case, and R. Hauck, "Incoherent Optical Processing", en *Applications of Optical Fourier Transforms*, ed. H. Stark (Academic, 1982).
- [V-4] F.T.S. Yu, *White-Light Optical Signal Processing* (Wiley, 1985).
- [V-5] J.L. Horner, *Optical Signal Processing* (Academic, 1987), cap. 1.
- [V-6] H. Bartelt, "Unconventional Correlators", en *Optical Signal Processing*, ed. J.L. Horner (Academic, 1987).
- [V-7] A. Vander Lugt, "Signal detection by complex spatial filtering", *IEEE Trans. Inf. Theory* IT-10, 139-145 (1964).
- [V-8] J. L. Horner and P.D. Gianino, "Phase-only matched filtering", *Appl. Opt.* 23, 812-816 (1984).
- [V-9] B.V.K.V. Kumar and Z. Bahri, "Phase-only filters with improved signal to noise ratio", *Appl. Opt.* 28, 250-257 (1989).
- [V-10] D. Psaltis, E.G. Pack, and S.S. Venkatesh, "Optical image correlation with a binary spatial light modulator", *Opt. Eng.* 23, 698-704 (1984).

- [V-11] J.L. Horner and J. Leger, "Pattern recognition with binary phase-only filters", *Appl. Opt.* **24**, 609-611 (1985).
- [V-12] M.W. Farn and J.W. Goodman, "Optical binary phase-only matched filters", *Appl. Opt.* **27**, 4431-4437 (1988).
- [V-13] H. Bartelt, "Computer-generated holographic component with optimum light efficiency", *Appl. Opt.* **23**, 1499-1502 (1984).
- [V-14] H. Bartelt, "Applications of the tandem component: an element with optimum light efficiency", *Appl. Opt.* **24**, 3811-3816 (1985).
- [V-15] M.A. Monahan, K. Bromley, and P.R. Bocker, "Incoherent optical correlators", *Proc. IEEE* **65**, 121-129 (1977).
- [V-16] H. Bartelt, "Image correlation in white-light by wavelength multiplexing", *Opt. Commun.* **29**, 37-40 (1979).
- [V-17] J.E. Rau, "Detection of differences in real distributions", *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1490-1494 (1966).
- [V-18] C.S. Weaver and J.W. Goodman, "A technique for optically convolving two functions", *Appl. Opt.* **5**, 1248-1249 (1966).
- [V-19] F.T.S. Yu, C. Zhang, Y. Jin, and D.A. Gregory, "Nonconventional joint-transform correlator", *Opt. Lett.* **15**, 922-924 (1989).
- [V-20] F.T.S. Yu and J.E. Ludman, "Joint Fourier transform processor", *Micro. Opt. Technol. Lett.* **1**, 374-377 (1988).
- [V-21] F.T.S. Yu and X.J. Lu, "A real-time programmable joint transform correlator", *Opt. Commun.* **52**, 10-16 (1984).
- [V-22] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, T.W. Lin, and D.A. Gregory, "Adaptive real-time pattern recognition using a liquid crystal TV based joint transform correlator", *Appl. Opt.* **26**, 1370-1372 (1987).
- [V-23] E.C. Tam, F.T.S. Yu, D.A. Gregory, and R.D. Juday, "Autonomous real-time object tracking with an adaptive joint transform correlator", *Opt. Eng.* **29**, 314-320 (1990).
- [V-24] K.H. Fielding and J.L. Horner, "1-f binary joint transform correlator", *Opt. Eng.* **29**, 1081-1087 (1990).

- [V-25] B. Javidi and C.J. Kuo, "Joint transform image correlation using a binary spatial light modulator at the Fourier plane", *Appl. Opt.* **27**, 663-665 (1988).
- [V-26] F.T.S. Yu and T. Nagata, "Binary phase only joint transform correlator", *Micro. Opt. Technol. Lett.* **2**, 15-19 (1989).
- [V-27] B. Javidi and S.F. Odeh, "Multiple object identification by bipolar joint transform correlation", *Opt. Eng.* **27**, 295-300 (1988).
- [V-28] F.T.S. Yu, F. Cheng, T. Nagata, and D.A. Gregory, "Effects of fringe binarization of multiobject joint transform correlation", *Appl. Opt.* **28**, 2988-2990 (1989).
- [V-29] B. Javidi, "Nonlinear joint power spectrum based optical correlation", *Appl. Opt.* **28**, 2358-2367 (1989).
- [V-30] B. Javidi and J.L. Horner, "Single spatial light modulator joint transform correlator", *Appl. Opt.* **28**, 1027-1032 (1989).
- [V-31] F.T.S. Yu, S. Wu, and A.W. Mayers, "Applications of phase conjugation to a joint transform correlator", *Opt. Commun.* **71**, 156-160 (1989).
- [V-32] E.C. Tam, S. Wu, A. Tanone, F.T.S. Yu, and D.A. Gregory, "Closed-loop binary phase correction of an LCTV using a point diffraction interferometer", *IEEE Photonics Technol. Lett.* **2**, 143-146 (1990).
- [V-33] F.T.S. Yu, Q.W. Song, Y.S. Cheng, and D.A. Gregory, "Comparison of detection efficiencies for Vander Lugt and joint transform correlators", *Appl. Opt.* **29**, 225-232 (1990).
- [V-34] X.J. Lu, F.T.S. Yu, and D.A. Gregory, "Comparison of Vander Lugt and joint transform correlators", *Appl. Phys. B* **51**, 153-164 (1990).
- [V-35] B. Javidi, "Comparison of binary joint transform correlators and phase-only matched filter correlators", *Opt. Eng.* **28**, 267-272 (1989).
- [V-36] B. Javidi, "Comparison of nonlinear joint transform correlator and nonlinear matched filter based correlator", *Opt. Commun.* **75**, 8-13 (1990).
- [V-37] Número especial dedicado a "Optical Computing", *Appl. Opt.* **27**, 1641-1796 (1988).
- [V-38] J. Tanida and Y. Ichioka, "Optical logic array processor using shadowgrams", *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 800-809 (1983).

- [V-39] Y. Ichioka and J. Tanida, "Optical parallel logic gates using a shadow-casting system for optical digital computing", *Proc. IEEE* **72**, 787-801 (1984).
- [V-40] J. Weigelt, "Binary logic by spatial filtering", *Opt. Eng.* **26**, 28-33 (1987).
- [V-41] J. Weigelt, "Space-bandwidth product and crosstalk of spatial filtering methods for performing binary logic optically", *Opt. Eng.* **27**, 883-892 (1988).
- [V-42] T. Yatagai, "Optical space-variant logic-gate array based on spatial encoding technique", *Opt. Lett.* **11**, 260-262 (1986).
- [V-43] D. Sanger and E. Wihardjo, "Parallel optical logic gates using one-dimensional spatial encoding", *Opt. Eng.* **29**, 690-695 (1990).
- [V-44] Y. Li, G. Eichmann, and R.R. Alfano, "Optical computing using hybrid encoded shadow casting", *Appl. Opt.* **25**, 2636-2638 (1986).
- [V-45] H. Bartelt, A.W. Lohmann, and E.E. Sicre, "Optical logical processing in parallel with theta modulation", *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 944-951 (1984).
- [V-46] A.W. Lohmann and J. Weigelt, "Optical logic processing based on scattering", *Opt. Commun.* **52**, 255-258 (1984).
- [V-47] A.W. Lohmann and J. Weigelt, "Optical logic by anisotropic scattering", *Opt. Commun.* **52**, 81-86 (1985).
- [V-48] A.W. Lohmann and J. Weigelt, "Spatial filtering logic based on polarization", *Appl. Opt.* **26**, 131-135 (1987).
- [V-49] M.T. Fatehi, K.C. Wasmundt, and S.A. Collins, Jr., "Optical logic gates using liquid crystal light valve: implementation and application example", *Appl. Opt.* **20**, 2250-2256 (1981).
- [V-50] T. Minemoto, K. Okamoto, and K. Miyamoto, "Optical parallel logic gate using spatial light modulators with the Pockels effect", *Appl. Opt.* **24**, 2055-2062 (1985).
- [V-51] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, and T. Lu, "Optical parallel logic based on magneto-optical spatial light modulators", *Opt. Commun.* **63**, 225-229 (1987).
- [V-52] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, and D.A. Gregory, "Optical parallel logic gates using inexpensive liquid-crystal televisions", *Opt. Lett.* **12**, 1050-1052 (1987).
- [V-53] E. Abbe, "Beiträge zur theorie des mikroskops und der mikroskopischen wahrnehmung", *Archiv. Mikroskopische Ana.* **9**, 413-459 (1873).

- [V-54] A.B. Porter, "On the diffraction theory of microscopic vision", *Phil. Mag.* **11**, 154-166 (1906).
- [V-55] J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés, and J.C. Barreiro, "Abbe-Porter experiment and logic operations", *Opt. Commun.* **71**, 145-150 (1989).
- [V-56] P. Andrés, J.C. Barreiro, and J. Ojeda-Castañeda, "Binary logic based on the high light throughput Lau effect", *Proc. Optics in Computing (Toulouse, 1989)*, págs. 85 y 86.
- [V-57] P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and J.C. Barreiro, "Lau effect and binary logic", *Proc. SPIE* **963**, 642-645 (1989).
- [V-58] P. Andrés, J.C. Barreiro, G. Saavedra, and J. Lancis, "Incoherent optical correlator", *Proc. SPIE* **1319**, 430 (1990).
- [V-59] J.C. Barreiro, P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and J. Lancis, "Multiple incoherent 2-D optical correlator", *Opt. Commun.* **84**, 237-241 (1991).
- [V-60] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1968), pág. 142.
- [V-61] J.D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* (Wiley, 1978), pág. 45.
- [V-62] A.W. Lohmann, *Optical Information Processing* (Univ. Erlangen, 1978), cap. 3.
- [V-63] K. Patorski, S. Yokozeki, and T. Suzuki, "Moiré profile prediction by using Fourier series formalism", *Japan. J. Appl. Phys.* **15**, 443-456 (1976).
- [V-64] J.D. Armitage and A.W. Lohmann, "Theta modulation in optics", *Appl. Opt.* **4**, 399-403 (1965).

# VI. Conclusión general

## VI.1 Un resumen y algunas perspectivas

Entre otros objetos, las redes de difracción unidimensionales, y ciertas redes bidimensionales, iluminadas con luz monocromática son capaces de proporcionar un duplicado de sí mismas en una serie de planos paralelos a ellas sin necesidad de ningún componente óptico. Esta formación de imágenes bajo propagación libre de la luz difractada —o fenómeno de autoimágenes— ha sido en los últimos tiempos tema de muchas investigaciones.

En los Capítulos II y IV de esta memoria, este fenómeno se ha estudiado bajo dos situaciones que consideramos complementarias, a saber, para el caso en el que la iluminación monocromática incidente proviene de una fuente puntual —fenómeno de autoimágenes con luz coherente o efecto Talbot— y para la de una fuente extensa incoherente codificada linealmente —efecto Lau a distancia finita e infinita—. Todo este estudio ha permitido introducir y estudiar las características de una serie de figuras de difracción nuevas —patrones de Lau uni y bidimensionales—, las cuales pueden exhibir un alto contraste e irradiancia y han sido observadas experimentalmente.

En el Capítulo III, las propiedades de la formación de autoimágenes con luz coherente se han aprovechado para presentar, y verificar experimentalmente de modo completamente satisfactorio, dos técnicas ópticas originales. Se ha indicado cómo es posible, midiendo tan solo distancias axiales, determinar la longitud focal, y por extensión la posición de los planos principales, de un sistema óptico arbitrario con un error del 0'3%. También se ha expuesto cómo producir, sin despreciar los efectos de difracción, un test visual periódico, altamente contrastado, de frecuencia espacial fácilmente variable.

En contraposición a la anterior situación, en el Capítulo V, la formación de autoimágenes, pero ahora con luz incoherente, ha permitido proponer dos nuevas configuraciones ópticas para procesado incoherente de información, que a modo de prueba han sido montadas con éxito en el laboratorio. Así, se han establecido las bases para el funcionamiento de un nuevo tipo de correlador incoherente —que hemos denominado correlador de proyección geométrica perfecta—, el cual se ha aplicado en un experimento de reconocimiento de caracteres. También, se ha mostrado un procesador lógico binario, sin lentes, de alto rendimiento luminoso, que en cierto

sentido combina las características de los de proyección geométrica con los de filtraje espacial. Cada punto de la fuente da una proyección geométrica perfecta del producto de los dos patrones de entrada debidamente codificados, pero éstos se distribuyen espacialmente de tal forma que permiten seleccionar —filtrar— en cada "pixel", según la operación deseada, ninguna, algunas o todas sus componentes espectrales lineales.

Una visión global de este trabajo permite concluir que se ha estudiado a fondo un fenómeno, tanto con luz coherente como incoherente, que, por su carácter simple y versátil, se presenta como una herramienta muy útil en el procesado óptico de información.

Nuestro objetivo final es formular nuevas arquitecturas ópticas para procesado de información con luz espacial y/o temporalmente incoherente. El efecto Lau ya ha permitido elaborar a nuestro grupo de investigación todo un conjunto de técnicas sencillas y flexibles que funcionan con luz espacialmente incoherente, algunas de las cuales se integran como parte fundamental de esta memoria. Muchas posibilidades interesantes se ofrecen para proseguir nuestro trabajo en un futuro próximo en esta dirección.

Concentrando nuestra atención en el correlador incoherente propuesto, aparte de estudiar cuantitativamente sus características para el reconocimiento de patrones mediante la estimación de ciertos parámetros, como su relación señal-ruido, su factor de discriminación, etc., consideramos sencillo llevar a cabo algunas variantes en su esquema base para diseñar nuevas aplicaciones. De este modo, parece evidente que variando las distancias del objeto a la fuente y al plano de observación se puede, de modo análogo al método de generación de un test visual indicado en el Capítulo III, diseñar un correlador invariante a la escala de la señal de entrada. También se puede obtener un correlador invariante a rotaciones si la señal con la que, por repetición, se construye el filtro de referencia no es la propia señal de referencia sino alguno de sus armónicos circulares. No es tampoco complicado reconocer que la arquitectura propuesta está especialmente adaptada para realizar correlaciones de forma sucesiva. Apoyándose en las propiedades de difracción que exhibe un arreglo de estructuras idénticas de fase repetidas de forma periódica en dos dimensiones, es sencillo desarrollar un reconocedor óptico en el que la detección de un carácter no se haría por un pico de intensidad sino por un zero en la distribución brillante de irradiancia del plano de salida del instrumento. Además, al igual que otros tipos de correladores desarrollados hasta la fecha, tenemos también especial interés en aplicar este dispositivo a sustitución simbólica y a la realización óptica de redes neuronales.

Por último, queremos resaltar otras dos posibilidades que parece que se pueden incorporar de un modo relativamente simple al mencionado correlador.

Por una parte, con miras a ampliar todavía más la versatilidad de estos sistemas, una de ellas es la utilización de moduladores espaciales de luz para la generación de

los filtros, puesto que éstos son simplemente las propias señales de entrada y de referencia, esta última montada sobre una estructura periódica bidimensional.

Los moduladores de luz alteran la distribución espacial de fase, polarización, amplitud o intensidad del haz de la radiación incidente [VI-1 y VI-2]. Estos dispositivos activos permiten, pues, separar la emisión de radiación luminosa de su modulación espacial, lo que confiere al diseño de los sistemas que los utilizan un grado de libertad muy útil. Parece evidente que con el desarrollo de nuevos materiales optoelectrónicos su utilización va a incrementarse sustancialmente. En particular, nuestra atención se va a centrar en las pantallas de cristal líquido. La transmitancia en amplitud, tanto en módulo como en fase, de estos dispositivos se puede gobernar localmente en función del campo eléctrico aplicado, lo que permite obtener diferentes niveles de gris [VI-3] y/o distintos saltos de fase [VI-4 a VI-6]. Las principales ventajas de estos componentes son su bajo coste y su capacidad de ser controlados en tiempo real por ordenador o por una cámara de vídeo, lo que hace que estos moduladores sean muy prácticos en muchas aplicaciones de procesado óptico de información. Así, ya se han empleado en filtraje espacial [VI-7]; en procesado de datos [VI-8]; en reconocimiento de patrones, bien mediante filtraje adaptado con luz monocromática [VI-9] o policromática [VI-10], bien con un correlador de proyección geométrica [VI-11]; en procesado de señales con luz blanca [VI-12]; en pseudocolocación de niveles de gris [VI-13 y VI-14] y en metrología "speckle" [VI-15 y VI-16].

Como ya quedó reseñado en el Capítulo V, estas pantallas se han utilizado también en el diseño de procesadores lógicos [VI-17 a VI-19] y de correladores conjuntos con objetos monocromáticos, de amplitud [VI-20 y VI-21] o de fase [VI-22], y policromáticos [VI-23]. Operando como moduladores puros de fase, estos dispositivos permiten generar hologramas kinoform [VI-24] y placas zonales "blazé" [VI-25]. Últimamente, también se han aplicado para la construcción de memorias asociativas con redes neuronales en combinación con una lente formadora de imágenes de gran apertura numérica [VI-26 y VI-27], o con un arreglo de lentes [VI-28] o de espejos [VI-29]. El uso de pantallas en color permite la consecución de redes neuronales policromáticas [VI-30].

La incorporación de estos dispositivos electrónicos a nuestro montaje permitirá que el proceso de detección se realice en tiempo real y aumentará considerablemente su capacidad de adaptación al entorno.

Por otra parte, dada la simplicidad del sistema propuesto, consideramos factible extender el uso de este tipo de correladores al caso de luz policromática, compensando el efecto de dispersión cromática inherente al fenómeno de difracción. La meta es, pues, desarrollar un nuevo correlador incoherente acromático que sea capaz de reconocer patrones cromáticos.

El estudio de un sistema óptico trabajando con fuente puntual y policromática —iluminación temporalmente incoherente— puede realizarse de modo análogo al

caso coherente si cada longitud de onda es considerada como un canal independiente al cual se le aplica un tratamiento coherente. De este modo, los patrones de difracción policromáticos resultan de la superposición en intensidades de los distintos patrones monocromáticos. Sin embargo, debido a la dependencia del fenómeno de la difracción con la longitud de onda, el uso de luz policromática en los sistemas ópticos usuales conduce a un emborronamiento cromático de los patrones de difracción. Así, por ejemplo, en los procesadores de Fourier usuales, la transformada de Fourier de la señal de entrada se localiza en el mismo plano para todas las longitudes de onda, pero su escala depende explícitamente de ella.

Los procesadores ópticos acromáticos están diseñados para compensar simultáneamente esta dispersión cromática. La transformada de Fourier dada por un transformador acromático ideal está localizada en un único plano, pero además posee la misma escala para todas las longitudes de onda [VI-31]. Se han propuesto varios métodos para obtener una transformada de Fourier acromática. Algunos utilizan combinaciones de lentes dispersivas especialmente diseñadas para tal efecto [VI-32], mientras que otros usan acoplamientos apropiados de varios objetivos dispersivos con elementos ópticos holográficos [VI-33 a VI-35]. Desde nuestro punto de vista, los dispositivos más interesantes reportados hasta la fecha son los que emplean dos elementos ópticos holográficos y una o dos lentes no dispersivas [VI-33 y VI-36 a VI-38]. Estas últimas configuraciones permiten, dada su relativa simplicidad, desarrollar algunas aplicaciones de filtraje conjugado y otras técnicas de procesamiento óptico con iluminación policromática.

Recientemente, nuestro grupo de investigación ha propuesto dos arquitecturas ópticas [VI-39 y VI-40] para obtener el patrón de difracción de Fraunhofer de cualquier pupila, independientemente del contenido espectral de la fuente, con menos elementos ópticos y/o menor aberración cromática residual que los reportados hasta ahora. Para ello, en lugar de buscar soluciones rigurosamente acromáticas, que conllevan en general arreglos ópticos complicados, se estudian soluciones aproximadas (con un buen grado de aproximación) que a cambio conduzcan a dispositivos simples en su funcionamiento y muy compactos. Las arquitecturas ópticas que nos interesan deben emplear exclusivamente elementos ópticos comunes que puedan encontrarse en el mercado, en concreto, objetivos acromáticos y elementos ópticos holográficos en eje del tipo placa zonal "blazé"—o lente "kinoform"—. Estos últimos elementos trabajan por difracción, por lo que presentan una fuerte aberración cromática que se había considerado hasta ahora como un grave inconveniente para su utilización en óptica. Sin embargo, estos transformadores acromáticos aprovechan precisamente este hecho para conseguir su objetivo. En concreto, el segundo dispositivo propuesto solamente utiliza dos placas zonales y, sin perder el acromatismo, la escala de la transformada de Fourier es variable.

Ya ha quedado claro a lo largo de este trabajo que, a diferencia de lo que podría parecer a primera vista, la difracción en la región de Fresnel también es adecuada para el desarrollo de técnicas de procesado óptico. Así pues, la obtención de patrones de difracción de Fresnel acromáticos es otro objetivo interesante. Algunos trabajos en esta dirección ya han sido reportados para los casos de hologramas de Fresnel [VI-41] y autoimágenes [VI-42 a VI-44]. Una versión simplificada de los transformadores de Fourier formulados por nosotros es capaz de proporcionar un único, pero arbitrario, patrón de difracción de Fresnel acromático de cualquier transparencia objeto. Algunos resultados preliminares en esta dirección ya han sido enviados para su publicación [VI-45 y VI-46].

Los estudios relativos a sistemas acromáticos son de gran importancia, ya que abren un amplio conjunto de nuevas posibilidades en el campo del procesado óptico de información. Las mismas técnicas desarrolladas hasta la actualidad con luz monocromática pueden ahora transplantarse fácilmente al caso policromático, permitiendo el procesado de señales de entrada cromáticas.

Las ideas que venimos desarrollando sobre dispositivos acromáticos deben llevarnos, primero, a la descripción de un efecto Lau acromático, para posteriormente permitirnos conseguir un correlador compacto, espacial y temporalmente incoherente. Esta posibilidad unida a la reseñada en primer lugar, referente al uso de pantallas de cristal líquido, nos conducirá a un correlador óptico acromático para el reconocimiento en tiempo real de objetos en color. No hace falta resaltar el interés práctico que en robótica y visión de máquinas tiene un dispositivo con estas propiedades.

## VI.2 Referencias

- [VI-1] C. Warde and A.D. Fisher, "Spatial Light Modulators: Applications and Functional Capabilities", en *Optical Signal Processing*, ed. J.L. Horner (Academic, 1987).
- [VI-2] F.T.S. Yu and I.C. Khoo, *Principles of Optical Engineering* (Wiley, 1990), cap. 4.6.
- [VI-3] H.K. Liu and T.H. Chao, "Liquid crystal television spatial light modulators", *Appl. Opt.* **28**, 4772-4780 (1989).
- [VI-4] T.H. Barnes, T. Eiju, K. Matusda, and N. Ooyama, "Phase-only modulation using a twisted nematic liquid crystal television", *Appl. Opt.* **28**, 4845-4852 (1989).

- [VI-5] K. Lu and B.E.A. Saleh, "Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator", *Opt. Eng.* **29**, 240-246 (1990).
- [VI-6] A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals* (Wiley, 1984), cap. 5.
- [VI-7] M. Young, "Low-cost LCD video display for optical processing", *Appl. Opt.* **25**, 1024-1026 (1986).
- [VI-8] H.K. Liu, J.A. Davis, and R.A. Lilly, "Optical-data-processing properties of a liquid-crystal television spatial light modulator", *Opt. Lett.* **10**, 635-637 (1985).
- [VI-9] D.A. Gregory, "Real-time pattern recognition using a modified liquid crystal television in a coherent optical correlator", *Appl. Opt.* **25**, 467-469 (1986).
- [VI-10] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, and T.W. Lin, "Real-time polychromatic signal detection using a color liquid crystal television", *Opt. Eng.* **26**, 453-460 (1987).
- [VI-11] S. Jutamulia, T.W. Lin, and F.T.S. Yu, "Real-time noncoherent correlator using liquid crystal television", *Opt. Commun.* **64**, 115-119 (1987).
- [VI-12] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, and X.L. Huang, "Experimental application of low-cost liquid crystal TV to white-light optical signal processing", *Appl. Opt.* **25**, 3324-3326 (1986).
- [VI-13] T.H. Chao and H.K. Liu, "Optical pseudocolor image enhancement with real-time large screen display", *Opt. Eng.* **27**, 393-398 (1988).
- [VI-14] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, and E. Tam, "Gray level pseudocolor encoding using a liquid crystal television", *J. Opt. (Paris)* **19**, 129-134 (1988).
- [VI-15] B. Bates, P.C. Miller, and W. Luchuan, "Liquid-crystal television optical gates applied to real-time speckle metrology", *J. Mod. Opt.* **36**, 317-322 (1989).
- [VI-16] B. Bates, P.C. Miller, and W. Luchuan, "Liquid crystal TVs in speckle metrology: optimum conditions for bipolar phase modulation", *Appl. Opt.* **28**, 1969-1971 (1989).
- [VI-17] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, and D.A. Gregory, "Optical parallel logic gates using inexpensive liquid-crystal televisions", *Opt. Lett.* **12**, 1050-1052 (1987).
- [VI-18] Y. Lin and F.T.S. Yu, "Optical binary adder using liquid crystal television", *Opt. Commun.* **65**, 11-16 (1988).

- [VI-19] F.T.S. Yu, Y. Jin, and C. Zhang, "Symbolic logic processor using cascaded liquid crystal televisions", *Micro. Opt. Technol. Lett.* **2**, 309-313 (1989).
- [VI-20] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, T.W. Lin, and D.A. Gregory, "Adaptive real-time pattern recognition using a liquid crystal TV based joint transform correlator", *Appl. Opt.* **1370-1372** (1987).
- [VI-21] K.H. Fielding and J.L. Horner, "1-f binary joint transform correlator", *Opt. Eng.* **29**, 1081-1087 (1990).
- [VI-22] D.A. Gregory, J.A. Loudin, J. C. Kirsch, E. C. Tam, and F.T.S. Yu, "Using the hybrid modulating properties of liquid crystal television", *Appl. Opt.* **30**, 1374-1378 (1991).
- [VI-23] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, R.V. Yelamarty, and D.A. Gregory, "Adaptive joint transform correlator for real-time colour pattern recognition", *Opt. Laser Technol.* **21**, 189-192 (1989).
- [VI-24] J. Amako and T. Sonehara, "Kinoform using an electrically controlled birefringent liquid-crystal spatial light modulator", *Appl. Opt.* **30**, 4622-4628 (1991).
- [VI-25] E.C. Tam, S. Zhou, and M.R. Feldman, "A spatial light modulator based electro-optical imaging system", *Appl. Opt.* (aceptado).
- [VI-26] F.T.S. Yu, T. Lu, X. Yang, and D.A. Gregory, "Optical neural network with pocket-sized liquid-crystal televisions", *Opt. Lett.* **15**, 863-865 (1990).
- [VI-27] F.T.S. Yu, T. Lu, and X. Yang, "Optical implementation of heteroassociation neural network with interpattern association model", *Int. J. Opt. Comp.* **1**, 129-140 (1990).
- [VI-28] X. Yang, T. Lu, and F.T.S. Yu, "Compact optical neural network using cascaded liquid crystal television", *Appl. Opt.* **29**, 5223-5225 (1990).
- [VI-29] F.T.S. Yu, X. Yang, S. Yin, and D.A. Gregory, "Mirror-array optical interconnected neural network", *Opt. Lett.* **16**, 1602-1604 (1991).
- [VI-30] F.T.S. Yu, X. Yang, W. Reeser, K. Matsushita, and D.A. Gregory, "Polychromatic neural network", Proc. OSA Annual Meeting (S. José, 1991), pág. 63.
- [VI-31] G.M. Morris and D.A. Zweig, "White-Light Fourier Transformations", en *Optical Signal Processing*, ed. J.L. Horner (Academic, 1987).

- [VI-32] C. Brophy, "Design of an all-glass achromatic Fourier transform lens", *Opt. Commun.* **47**, 364-368 (1983).
- [VI-33] R.H. Katyl, "Compensating optical systems. Part 3: achromatic Fourier transformation", *Appl. Opt.* **11**, 1255-1260 (1972).
- [VI-34] G.M. Morris, "An ideal achromatic Fourier processor", *Opt. Commun.* **39**, 143-147 (1981).
- [VI-35] G.M. Morris, "Diffraction theory for an achromatic Fourier transformation", *Appl. Opt.* **20**, 2017-2025 (1981).
- [VI-36] R. Ferrière and J.P. Goedgebuer, "A spatially coherent achromatic Fourier transformer", *Opt. Commun.* **42**, 223-225 (1982).
- [VI-37] R. Ferrière and J.P. Goedgebuer, "Achromatic system for far-field diffraction with broadband illumination", *Appl. Opt.* **22**, 1540-1545 (1983).
- [VI-38] S. Leon and E.N. Leith, "Optical processing and holography with polychromatic point source illumination", *Appl. Opt.* **24**, 3638-3642 (1985).
- [VI-39] P. Andrés, J. Lancis, and W.D. Furlan, "A new white-light Fourier transformer with very low chromatic aberration", *Appl. Opt.* (aceptado).
- [VI-40] J. Lancis, P. Andrés, and W.D. Furlan, "Achromatic Fourier transformation with adjustable scale using only two DOEs", Proc. DOE-91 (Szklarska Poreba, 1991), pág. 29.
- [VI-41] R.H. Katyl, "Compensating optical systems. Part 2: generation of holograms with broadband light", *Appl. Opt.* **11**, 1248-1254 (1972).
- [VI-42] B. Packcross, R. Eschbach, and O. Bryngdahl, "Achromatization of the self-imaging (Talbot) effect", *Opt. Commun.* 205-209 (1984).
- [VI-43] E.E. Sicre, N. Bolognini, and M. Garavaglia, "Partial achromatization of the self-imaging phenomenon", *Appl. Opt.* **24**, 929-930 (1985).
- [VI-44] G. Indebetouw, "Polychromatic self-imaging", *J. Mod. Opt.* **35**, 243-252 (1988).
- [VI-45] P. Andrés, J. Lancis, and E.E. Sicre, "Achromatic Fresnel diffraction patterns", *Opt. Commun.* (enviado).
- [VI-46] E.E. Sicre, J. Lancis, and P. Andrés, "Achromatic self-imaging: a quasi-ray picture", *Opt. Commun.* (enviado).



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÈNCIES FISIQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,  
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral  
d'En/ Na/ ~~N~~ Juan Carlos Balleiro Hervás  
la qualificació d' Apto " Cum Laude "

València a 13 d' Marzo de 19 92

El Secretari,

El President,



Imyano Pous Martí

