

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
(ESTUDI GENERAL)

DEPARTAMENT D'ÒPTICA



PROCESADO ÓPTICO DE INFORMACIÓN
CON FUENTES INCOHERENTES

TESIS DOCTORAL
GENARO SAAVEDRA TORTOSA
OCTUBRE 1996

UMI Number: U607731

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



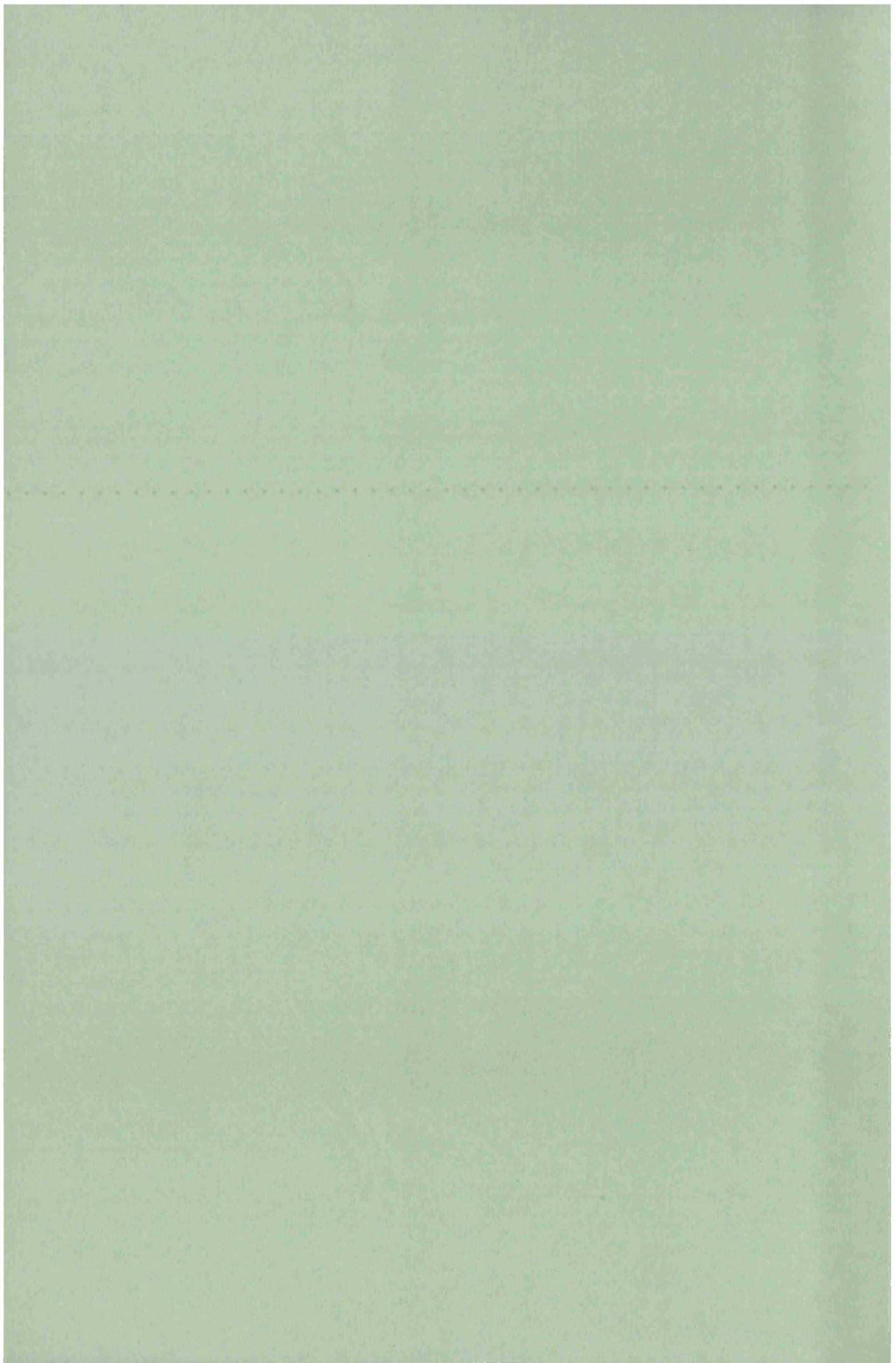
UMI U607731

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Física

Nº Registre 9608

DATA 5-XI-96

SIGNATURA T.D. 281

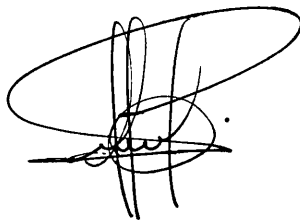
Nº LIBRE:

i 19763748

D. Pedro ANDRÉS BOU, Catedrático de Óptica de la Universitat de València
y D. Jorge OJEDA CASTAÑEDA, Profesor Titular IV de la Universidad de las
Américas en Puebla (México)

CERTIFICAN que la presente memoria: "Procesado óptico de información con fuentes incoherentes", resume el trabajo de investigación realizado, bajo su dirección, por D. Genaro SAAVEDRA TORTOSA y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente certificado en Valencia, a treinta de agosto de mil novecientos noventa y seis.

Handwritten signature of Jorge Ojeda Castañeda, featuring a large 'L' shape on the left and the name 'JORGE OJEDA' written in capital letters.Handwritten signature of Pedro Andrés Bou, consisting of a complex, stylized scribble of lines.

Fdo.: Dr. Jorge Ojeda Castañeda

Fdo: Dr. Pedro Andrés Bou



A la mujer con la que comparto un largo viaje,
uno de cuyos hitos se presenta aquí, y sin cuyo
aliento y apoyo constante hubiese sido imposible
completar este trabajo.

A mis padres y hermanas.

A Simona Salas y a la memoria de Sebastián
Mora, mis abuelos.



*...sap que la soca més s'enfila
com més endins pot arrelar...*

Joan Alcover: La Balanguera.

Agradecimientos

El desarrollo de un trabajo como éste en raras ocasiones es labor exclusiva de una persona. Y el que aquí se presenta se ajusta a la regla general. Es, por lo tanto, obligado un reconocimiento público de la tarea de apoyo, a veces crucial, de algunas personas al desarrollo de esta Memoria.

Aunque obvio, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, a los que debo muchas de las ideas clave de este trabajo, además de un estímulo constante en el desarrollo del mismo. Adicionalmente, estoy en deuda con Pedro Andrés por su apoyo incondicional en los momentos más difíciles y su amistad sincera, y agradezco a Jorge Ojeda su hospitalidad y atención en mis dos estancias en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica de Puebla (México). Puedo asegurar que ambos han sido y serán para mí un referente básico desde el punto de vista científico y humano.

Tres personas han contribuido de modo muy especial al resultado que se presenta a continuación. Una de ellas, Juan Carlos Barreiro, me ha ayudado de modo crucial en la obtención de los resultados experimentales del capítulo 3, además de echarme una mano en las tareas académicas durante diferentes momentos del desarrollo de este trabajo. De él he aprendido mucho más de lo que imagina, incluso en aspectos que se alejan de lo estrictamente profesional. Por otro lado, Walter D. Furlan es el responsable de mi interés por el uso de los formalismos espacio-fase en Óptica, y ha proporcionado un aliento constante a los progresos realizados en esta línea. Su amistad ha sido un apoyo fundamental en los momentos de mayor desánimo. Por último, pero no menos importante, deseo destacar la labor realizada por Enrique Silvestre en los aspectos informáticos, que le ha ocupado la mayor parte del tiempo durante los últimos meses. Él es el responsable, además de su asistencia en la programación de los algoritmos de cálculo numérico, del buen aspecto estético de esta Memoria.

No es necesario señalar que los errores, de contenido o forma, que puedan hallarse presentes en esta Memoria son responsabilidad exclusiva del autor, pero habrían aparecido muchos otros en la versión definitiva si no hubiese sido por la labor impecable de los censores “voluntarios” que me han ayudado en la depuración final. Además de las personas anteriormente citadas, quiero manifestar mi

más cordial reconocimiento por ello a Manuel Martínez por su dedicación y rigor, precisamente en un momento en el que las cargas académicas y administrativas no eran precisamente leves.

Otras personas han contribuido, de modo indirecto, al buen término de este trabajo. Amparo Pons ha supuesto un apoyo constante desde el punto de vista humano y profesional, de un modo realmente generoso a pesar de los agobios que nos envuelven habitualmente. A ella, y a todos los demás miembros del grupo de Óptica de Fourier les agradezco su calidez y su paciencia al aguantar mi entusiasmo, en muchas ocasiones, impertinente.

Algunas instituciones han colaborado económicamente al desarrollo de esta Tesis. En particular, durante la primera etapa la Conselleria de Cultura, Educació i Ciència de la Generalitat Valenciana me concedió una beca de formación de personal investigador a la que renuncié al incorporarme al Departament d'Òptica de la Universitat de València como Profesor Ayudante. Por otro lado, una parte de esta investigación ha sido financiada por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (Proyecto PB93-0354-C02-01) del Ministerio de Educación y Ciencia.

Índice

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 1.1 | Motivaciones y objetivos | 1 |
| 1.2 | Esquema general | 2 |
| 2 | Teoría básica | 5 |
| 2.1 | Introducción | 5 |
| 2.2 | Difracción con iluminación coherente | 6 |
| 2.3 | Difracción con una fuente plana cuasimonocromática espacialmente incoherente | 23 |
| 2.4 | Función de transferencia heurística. Intensidad mutua | 29 |
| 2.5 | Medida de la coherencia espacial | 33 |
| 2.6 | Difracción con una fuente puntual temporalmente incoherente | 45 |
| 2.7 | Medida de la potencia espectral | 49 |
| 3 | Aplicaciones al procesado óptico con iluminación espacialmente incoherente | 61 |
| 3.1 | Introducción | 61 |
| 3.2 | Correlador de proyección geométrica perfecta | 62 |
| 3.3 | Correlador de proyección geométrica perfecta sintonizable a la escala de la señal de entrada | 87 |
| 3.4 | Correlador de proyección geométrica perfecta de contraste invertido | 98 |
| 3.5 | Descodificador de señales θ -moduladas | 116 |
| 4 | Formalismos espacio-fase en Óptica. Aplicaciones novedosas al procesado óptico coherente de información | 125 |
| 4.1 | Introducción | 125 |
| 4.2 | La función de distribución de Wigner | 127 |
| 4.3 | Aplicación de la representación de Wigner al análisis de la respuesta de los sistemas formadores de imágenes a lo largo de diferentes curvas tridimensionales | 141 |

x

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.4 | La función ambigüedad | 159 |
| 4.5 | El espectrograma local | 165 |
| 4.6 | Aplicación del espectrograma local al estudio de las deformaciones locales mediante el análisis de patrones de moteado | 171 |
| 5 | Aplicaciones de los formalismos espacio-fase al análisis de sistemas de procesado óptico temporalmente incoherente | 181 |
| 5.1 | Introducción | 181 |
| 5.2 | Aplicación de la función de distribución de Wigner a la acromati- zación de patrones de difracción | 182 |
| 5.3 | Estudio del comportamiento axial policromático de sistemas ópticos aberrados a partir de la función de distribución de Wigner | 193 |
| 5.4 | Uso de la función ambigüedad en la obtención de las funciones de transferencia óptica policromáticas | 205 |
| 6 | Conclusiones generales | 215 |
| | Apéndice: Realización óptica de algunas representaciones espacio- fase | 219 |

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivaciones y objetivos

El gran interés suscitado por los métodos de procesado óptico de información está basado en su capacidad de manejo en paralelo de señales a alta velocidad, en contraste con el tratamiento en serie intrínseco a los sistemas electrónicos. El uso de radiación coherente procedente de una fuente láser ha sido la base de muchas de las técnicas desarrolladas a partir de la década de los 60. Sin embargo, estos procesadores ópticos coherentes presentan ciertos inconvenientes de tipo práctico. En primer lugar, son sistemas que proporcionan una redundancia nula en el tratamiento de las señales, por lo que son muy vulnerables al ruido que pueda afectar al procesado. Por otro lado, la iluminación requerida es sofisticada y se encuentra muy alejada de la que se presenta en la vida cotidiana. La resolución, al menos en parte, de ambos inconvenientes puede afrontarse con la utilización de radiación parcialmente coherente (Rogers 1977) (Rhodes y Sawchuk 1981) (Bartelt *et al.* 1982) (Yu 1985). Los dispositivos que trabajan con este tipo de iluminación sacrifican parte de su capacidad teórica de procesado en paralelo para adquirir niveles de redundancia que los hace más resistentes a la presencia de ruido (Chavel y Lowenthal 1978). Adicionalmente, estos sistemas se caracterizan por una mayor insensibilidad a la falta de estabilidad mecánica lo que les permite una mejor adaptación al entorno que sus homólogos coherentes. Estas circunstancias los hace mucho más convenientes, por ejemplo, para las condiciones de trabajo habituales en visión artificial. Por todo ello, las tendencias actuales en el campo del tratamiento óptico de la información apuntan hacia una relajación de las condiciones de coherencia espacial y temporal de la radiación luminosa empleada, con ánimo de realizar procesadores ópticos cada vez más flexibles.

En este contexto, esta Memoria presenta una serie de técnicas ópticas que trabajan con fuentes espacialmente incoherentes pero monocromáticas o con emisores

puntuales de luz de ancho de banda espectral finito. Estas aplicaciones abarcan desde métodos novedosos de análisis de la coherencia de la radiación hasta varios dispositivos originales de procesado óptico de información, pasando por diferentes técnicas de caracterización y diseño de sistemas ópticos incoherentes.

El punto de partida desde el que se aborda el estudio de estos sistemas es la descripción escalar del campo electromagnético dentro de la aproximación de Fresnel-Kirchhoff (Gaskill 1978, p. 366). En particular, nuestro interés se centra en describir las propiedades del campo parcialmente coherente a partir de las del caso coherente. Este estudio ha permitido, en primer lugar, proponer un par de técnicas de medida del grado de coherencia de la iluminación, que no requieren el uso de ningún componente óptico.

Por otro lado, los resultados obtenidos en el caso de fuentes monocromáticas espacialmente incoherentes han llevado al desarrollo de una serie de dispositivos de procesado de información, los cuales trabajan por propagación libre, que permiten obtener de forma incoherente la correlación entre dos señales bidimensionales.¹ Nuestra propuesta se basa en la transposición del fenómeno de autoimágenes (Patorski 1989) al caso de un objeto periódico iluminado por una fuente extensa cuasimonocromática. Una reinterpretación de la técnica anterior ha permitido proponer un dispositivo óptico sin lentes de filtrado de frecuencias espaciales en la región de Fresnel.

El estudio de los sistemas ópticos que utilizan radiación temporalmente incoherente se ha llevado a cabo a través de ciertas representaciones mixtas espacio-frecuencia espacial asociadas al campo electromagnético. El análisis en profundidad de este tipo de descripciones ha permitido proponer una serie de técnicas de caracterización y diseño de algunos sistemas ópticos a partir, bien de la función de distribución de Wigner, bien de la función ambigüedad. Adicionalmente, se ha propuesto una técnica híbrida óptico-digital de medida de deformaciones locales en objetos difusores mediante el uso del espectrograma local asociado a un patrón de moteado.

1.2 Esquema general

La estructura general de este trabajo es la siguiente.

En primer lugar, se desarrollan las bases teóricas necesarias para la descripción del campo difractado por estructuras planas, tanto en el caso de que se ilumine coherentemente como bajo iluminación parcialmente coherente generada por una fuente totalmente incoherente (espacial o temporalmente). Este análisis, que se establece a lo largo del capítulo 2, permite también sugerir una serie de técnicas

¹La operación de correlación es muy utilizada en el reconocimiento óptico de patrones ya que permite medir el grado de similitud entre dos funciones.

de medida de la coherencia, tanto espacial como temporal, del campo electromagnético sobre el plano del objeto difractante.

Las propiedades estudiadas anteriormente sirven de base para presentar en los capítulos siguientes una serie de técnicas originales en el área del procesado óptico de información. En una primera parte, recogida en el capítulo 3, se presentan una serie de dispositivos novedosos que trabajan con iluminación parcialmente coherente desde el punto de vista espacial. En particular, en la sección 3.2 se propone un nuevo correlador óptico de señales bidimensionales sin lentes, que hemos denominado de proyección geométrica perfecta. Su funcionamiento se basa en la capacidad que exhiben algunas estructuras difractantes para generar réplicas exactas de sí mismas por propagación libre sin necesidad de componentes ópticos. Con ello se soslayan muchas de las limitaciones que presentan los correladores ópticos de proyección geométrica convencionales. Por otro lado, es inmediato reconocer que la configuración propuesta permite sintonizar el dispositivo a diferentes escalas de la señal de entrada para obtener la correlación requerida sin necesidad de modificar el filtro de referencia. Este resultado se explota en la sección 3.3 para proponer un correlador incoherente adaptable a la escala de la señal de entrada para un amplio rango de factores de escala. La utilización de filtros de referencia diseñados convenientemente con variaciones puras de fase permite, en la sección 3.4, presentar un dispositivo de correlación en el que se obtiene simultáneamente la correlación con la señal de referencia y con su complementaria. Este resultado posibilita, de nuevo de forma incoherente, una detección invariante al contraste de la señal de entrada. Por último, una aplicación directa de las conclusiones obtenidas en §2.4 permite diseñar en la sección 3.5 un descodificador sin lentes de señales moduladas azimutalmente, que como es lógico exhibe todas las propiedades asociadas al procesado con radiación no coherente.

La segunda parte de esta Memoria se encuentra dedicada al estudio de ciertos sistemas que trabajan con iluminación temporalmente incoherente, es decir, que manejan radiación de ancho de banda espectral finito. Nuestra aproximación a este campo se lleva a cabo a través de representaciones mixtas espacio-frecuencia de señales uni o bidimensionales. A modo de revisión, en el capítulo 4 se hace un repaso de algunas de las representaciones espacio-fase más utilizadas para este fin. En particular, presentamos las propiedades más destacadas de la función de distribución de Wigner, la función ambigüedad y el espectrograma local, haciendo especial énfasis en aquéllas que van a tener más relevancia en el desarrollo de las aportaciones originales de este trabajo. Este mismo capítulo se aprovechará también para presentar las contribuciones novedosas que hemos desarrollado con iluminación coherente haciendo uso de estas funciones duales. En particular, en la sección 4.3 se propone un método que utiliza la función de distribución de Wigner para la obtención de la respuesta monocromática en irradiancia proporcionada por

un dispositivo a lo largo de una amplia familia de trayectorias tridimensionales, mientras que la sección 4.6 está dedicada a la presentación de un método de análisis de desplazamientos locales en objetos difusores a partir del espectro local de un moteograma doblemente expuesto.

En el último capítulo de este trabajo se presenta, bajo la perspectiva reseñada anteriormente, una serie de técnicas de análisis de los sistemas formadores de imágenes que trabajan con radiación temporalmente incoherente. Así, en la sección 5.2 se utiliza la función de distribución de Wigner para optimizar el diseño de un sistema que proporciona imágenes parcialmente acromatizadas de los patrones de Fresnel generados por un objeto plano difractante. Este resultado se aplica a la obtención de autoimágenes con luz blanca. En la sección 5.3 se extiende el procedimiento presentado en §4.3 al estudio de la respuesta axial policromática proporcionada por un sistema formador de imágenes afectado por aberración cromática longitudinal y aberración esférica primaria. Finalmente, la sección 5.4 analiza la respuesta de un sistema iluminado con radiación de ancho de banda finito en el dominio de frecuencias espaciales y se sugiere un método eficiente para obtener la función de transferencia óptica policromática a partir de una única representación, a saber, la función ambigüedad asociada a la pupila generalizada del mismo.

Por último, en el capítulo 6 se resumen los logros alcanzados en este trabajo y se indican algunas de las vías de desarrollo futuro del mismo.

Capítulo 2

Teoría básica

2.1 Introducción

A lo largo de este capítulo, vamos a establecer muchas de las bases teóricas que permitirán el desarrollo de los capítulos posteriores. En particular, estudiaremos la estructura de los patrones de difracción generados por estructuras planas iluminadas por algunos tipos de fuentes espacial o temporalmente incoherentes.

Para ello, en la sección 2.2 haremos un breve compendio de algunas propiedades de los patrones de difracción que se obtienen con dichas aperturas al ser iluminadas coherentemente. Haremos hincapié en el caso de los objetos que proporcionan réplicas escaladas de sí mismos sin necesidad de ningún componente óptico, ya que servirán de base para el desarrollo de las aplicaciones que se propondrán en el próximo capítulo. A partir de estos resultados, en la sección 2.3 obtendremos una descripción de la forma de los patrones de difracción que se obtienen al sustituir el emisor coherente por una fuente plana extensa cuasimonocromática. Desde el punto de vista de la teoría de la coherencia, este cambio modifica las propiedades estadísticas del campo electromagnético en el plano del objeto, que quedan determinadas, en este caso, por la función de intensidad mutua en el plano de éste. Es en la sección 2.4 donde se establecen las bases teóricas de un procedimiento, desarrollado en la sección 2.5, que permite medir dicha función de coherencia a partir de la comparación entre los patrones de difracción obtenidos con la fuente cuya radiación pretende analizarse y los generados en el caso coherente. Por lo que respecta a las fuentes temporalmente incoherentes, la estructura del campo difractado en este caso se analiza en la sección 2.6. Los resultados obtenidos en ésta permiten extender, en la última sección, el procedimiento establecido en §2.5 para proponer una nueva técnica espectroscópica por transformada de Fourier.

Por lo que se refiere al ámbito de aplicación de los resultados obtenidos en este capítulo, a menos que se indique lo contrario, nuestro estudio se restringirá a la

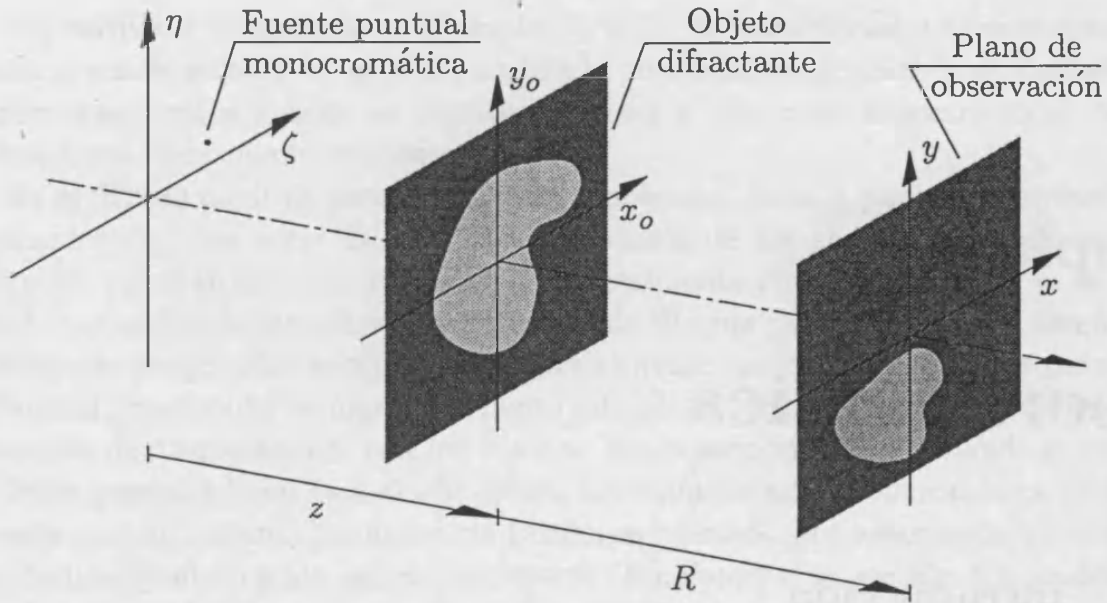


Figura 2.1. Esquema en el que se muestra la disposición geométrica que se propone para estudiar la difracción con una abertura plana difractante iluminada coherentemente. Los sistemas de referencia en los planos de la fuente y de observación se han elegido con sus ejes paralelos a los elegidos sobre el plano objeto, y con sus orígenes sobre el eje óptico.

aproximación paraxial de la teoría escalar de Fresnel del campo electromagnético difractado y nos ocuparemos de aberturas cuya transmitancia en amplitud sea independiente de la longitud de onda de la radiación incidente, es decir, trabajaremos con objetos de los denominados acromáticos, de niveles de gris o “en blanco y negro”.

2.2 Difracción con iluminación coherente

Consideremos un objeto plano sobre el que situamos un sistema cartesiano de referencia OX_0Y_0 , de modo que su transmitancia en amplitud puede describirse por la función $t(\vec{r}_0)$, siendo \vec{r}_0 el vector de posición bidimensional sobre dicho plano. Denominaremos eje óptico a la recta normal al plano del objeto que pasa por el origen de dicho sistema de referencia. En esta sección vamos a preocuparnos por la descripción de las distribuciones de amplitud e irradiancia luminosa que aparecen sobre planos paralelos al objeto cuando éste se ilumina con radiación electromagnética coherente, tanto espacial como temporalmente. El caso más usual es el de la iluminación proporcionada por una fuente puntual monocromática. Denominaremos z a la distancia orientada a la que se sitúa el objeto difractante de dicho emisor, tal y como queda reflejado en la fig. 2.1.

En el marco de la teoría escalar de la difracción, la ecuación que describe la amplitud luminosa sobre un plano situado a una distancia R del objeto a partir de la distribución sobre el plano de éste es la fórmula de Fresnel-Kirchhoff (Gaskill 1978, p. 366), que en su aproximación paraxial viene dada por la siguiente expresión

$$U_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2}}{j\lambda R} \times \int_{-\infty}^{+\infty} U_o(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda) e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}_o|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R}\vec{r}\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o, \quad (2.1)$$

donde $\vec{\rho}$ es el radio vector del emisor puntual en el plano normal al eje óptico que lo contiene, λ la longitud de onda de la radiación emitida por éste y $U_o(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda)$ la distribución de amplitud luminosa que se observa en el plano inmediatamente posterior al del objeto, es decir, justo después de que la radiación lo atraviese. Esta última función viene dada por el producto de la amplitud del campo electromagnético que ilumina la abertura difractante, $U_o^{(-)}(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda)$, y la transmitancia en amplitud de ésta. En términos matemáticos,

$$U_o(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda) = U_o^{(-)}(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda) t(\vec{r}_o). \quad (2.2)$$

En el caso que estamos considerando, la iluminación del objeto corresponderá a una onda esférica con origen en la fuente puntual considerada. Dentro del mismo orden de aproximación, tenemos, por lo tanto, que

$$U_o^{(-)}(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda) = \frac{A e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z}}{z} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}|\vec{r}_o - \vec{\rho}|^2}, \quad (2.3)$$

siendo A la amplitud luminosa de la radiación emitida por la fuente. Con todo, la ec. (2.1) puede expresarse como

$$U_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) = \frac{A_o(z) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}|\vec{\rho}|^2}}{j\lambda R} \times \int_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j\frac{\pi}{\lambda}(\frac{1}{z} + \frac{1}{R})|\vec{r}_o|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R}(\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho})\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o, \quad (2.4)$$

siendo

$$A_o(z) = \frac{A e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z}}{z}. \quad (2.5)$$

Esta constante representa el valor de la perturbación luminosa generada por la fuente en el plano del objeto, exceptuada la variación de fase cuadrática característica de las ondas esféricas. En particular, si se considera el caso en que el

emisor se encuentra sobre el eje óptico, el resultado anterior se reduce a

$$U_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{A_o(z) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2}}{j\lambda R} \times \int_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j\frac{\pi}{\lambda}(\frac{1}{z} + \frac{1}{R})|\vec{r}_o|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R}\vec{r}\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o. \quad (2.6)$$

Combinando las ecs. (2.4) y (2.6), podemos expresar que

$$U_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) = U_R\left(\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho}; \vec{0}; z; \lambda\right) \times e^{-j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho}|^2} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}|\vec{\rho}|^2}. \quad (2.7)$$

Operando en la expresión anterior, finalmente obtenemos

$$U_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) = e^{j\frac{\pi}{\lambda z}(1 - \frac{R}{z})|\vec{\rho}|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}\vec{r}\cdot\vec{\rho}} \times U_R\left(\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho}; \vec{0}; z; \lambda\right). \quad (2.8)$$

Así pues, la distribución de amplitudes que se obtiene sobre un plano de observación dado cuando se ilumina el objeto con un emisor puntual caracterizado por un vector de posición $\vec{\rho}$ es la misma, salvo factores de fase, que la que se obtiene si dicho emisor se sitúa sobre el eje óptico, pero centrada en el punto $-(R/z)\vec{\rho}$. Dicho punto es la proyección geométrica de la fuente sobre el plano de observación a través del punto axial del objeto, tal y como se muestra en la fig. 2.2. Finalmente, la distribución de irradiancia sobre el plano de observación vendrá dada por

$$\begin{aligned} I_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) &= |U_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda)|^2 = \\ &= \left| U_R\left(\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho}; \vec{0}; z; \lambda\right) \right|^2 = \\ &= I_R\left(\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho}; \vec{0}; z; \lambda\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

La expresión anterior nos permite concluir que para estudiar las características del campo difractado por una transparencia plana bastará con que nos centremos en el caso en el que la fuente puntual se sitúa sobre el eje óptico, ya que un desplazamiento de ésta se traduce en una simple traslación de la distribución de irradiancia en el plano de observación escogido.

Centrándonos, pues, en esta situación particular, es inmediato reconocer, a partir de la ec. (2.6), que la estructura de estos patrones viene caracterizada de

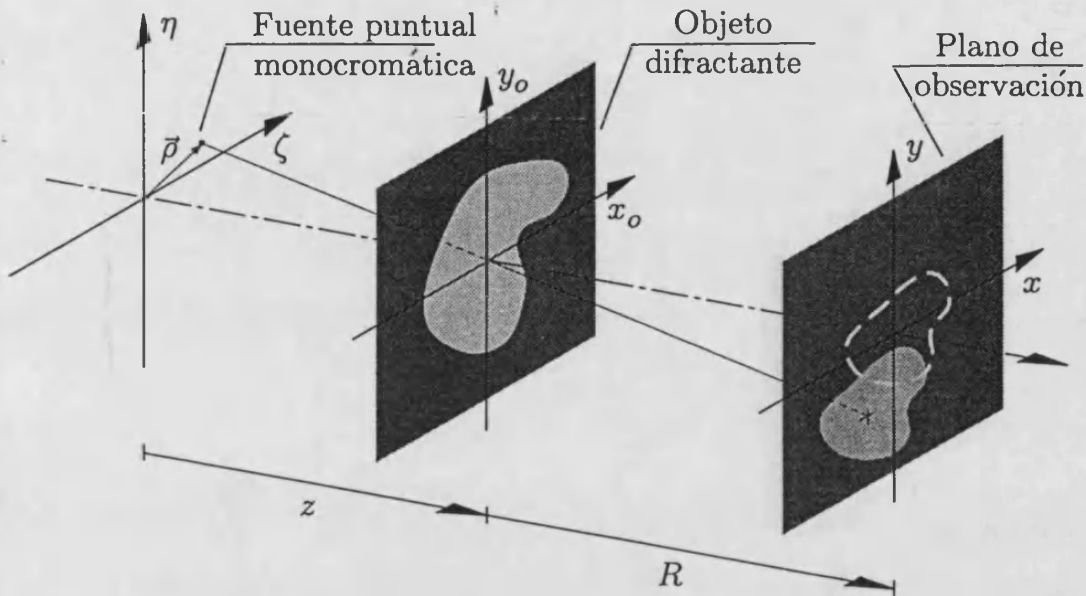


Figura 2.2. Diagrama donde se pone de manifiesto que cualquiera de las fuentes puntuales situadas en un plano normal al eje óptico genera el mismo patrón de difracción en irradiancia sobre el plano de observación, aunque desplazado lateralmente de modo que su centro coincide siempre con la proyección geométrica del punto fuente a través del punto axial del objeto.

modo unívoco, salvo constantes y un factor de escala, por la cantidad

$$K = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{R} \right). \quad (2.10)$$

En efecto, consideremos que se ilumina sucesivamente el objeto con dos fuentes puntuales axiales que emiten radiación de longitudes de onda λ y λ' con la misma amplitud y situadas de modo que el objeto se localiza a distancias z y z' de ellas, respectivamente. Los patrones de difracción caracterizados por el mismo valor de K en ambos casos se situarán en posiciones R y R' que cumplirán, de acuerdo con la ec. (2.10),

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{R'} \right), \quad (2.11)$$

expresión que puede reagruparse como

$$\lambda \frac{zR}{z+R} = \lambda' \frac{z'R'}{z'+R'}. \quad (2.12)$$

Por lo tanto, a partir de la ec. (2.6), podemos expresar

$$U_{R'}(\vec{r}; \vec{0}; z'; \lambda') = \frac{A_o(z')}{A_o(z)} \frac{e^{j2\pi(\frac{R'}{\lambda'} - \frac{R}{\lambda})}}{M(z', \lambda'; z, \lambda)} e^{-j\pi(\frac{1}{\lambda z} - \frac{1}{\lambda' z'})|\vec{r}|^2} \times$$

$$\times U_R \left(\frac{1}{M(z', \lambda'; z, \lambda)} \vec{r}; \vec{0}; z; \lambda \right), \quad (2.13)$$

donde el factor de escala relativo viene dado por

$$M(z', \lambda'; z, \lambda) = \frac{\lambda' R'}{\lambda R} = \frac{z}{z'} \frac{z' + R'}{z + R}. \quad (2.14)$$

Desde el punto de vista de los patrones de irradiancia, por lo tanto, obtenemos que

$$I_{R'}(\vec{r}; \vec{0}; z'; \lambda') = \frac{z^2}{z'^2} \frac{1}{M^2(z', \lambda'; z, \lambda)} \times \\ \times I_R \left(\frac{1}{M(z', \lambda'; z, \lambda)} \vec{r}; \vec{0}; z; \lambda \right). \quad (2.15)$$

Esta relación que existe entre los diferentes patrones de difracción del objeto obtenidos con diferentes iluminaciones esféricas puede extenderse también al límite en el que la fuente se localiza a distancia infinita del objeto difractante. En este caso, la radiación que incide sobre el objeto tendrá la estructura de una onda plana, y no esférica como en el caso anterior, de modo que la ec. (2.3) se transforma en este caso en

$$U_o^{(-)}(\vec{r}_o; \vec{0}; \infty; \lambda_o) = A_o, \quad (2.16)$$

donde A_o es la amplitud de la onda plana sobre el plano del objeto y, por tanto, la distribución de amplitudes que se obtiene a una distancia R_o de éste vendrá dada, de acuerdo con la ec. (2.1), por

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda_o) \triangleq U_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \infty; \lambda_o) = \\ = \frac{A_o e^{j \frac{2\pi}{\lambda_o} R_o} e^{j \frac{\pi}{\lambda_o R_o} |\vec{r}|^2}}{j \lambda_o R_o} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j \frac{\pi}{\lambda_o R_o} |\vec{r}_o|^2} \times \\ \times e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_o R_o} \vec{r} \cdot \vec{r}_o} d^2 \vec{r}_o. \quad (2.17)$$

Es evidente que el perfil de este patrón de difracción viene caracterizado por el valor de la constante

$$K = \frac{1}{\lambda_o R_o}, \quad (2.18)$$

que es el valor que se obtiene de la ec. (2.10) tomando el límite $z \rightarrow \infty$. Además, si se compara esta distribución de amplitudes con la que corresponde al mismo valor de K con iluminación esférica a distancia finita z' de longitud de onda λ' , es decir la que se obtiene de la ec. (2.6) con

$$\frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{R'} \right) = \frac{1}{\lambda_o R_o}, \quad (2.19)$$

podemos expresar que

$$U_R(\vec{r}; \vec{0}; z'; \lambda') = \frac{A_o(z')}{A_o} \frac{e^{j2\pi(\frac{R'}{\lambda'} - \frac{R_o}{\lambda_o})}}{M(z', \lambda'; \infty, \lambda_o)} e^{j\frac{\pi}{\lambda_o} |\vec{r}|^2} \times \quad (2.20)$$

$$\times U'_{R_o} \left(\frac{1}{M(z', \lambda'; \infty, \lambda_o)} \vec{r}; \vec{0}; \lambda_o \right).$$

donde,

$$M(z', \lambda'; \infty, \lambda_o) = \frac{\lambda' R'}{\lambda_o R_o} = \frac{z' + R'}{z'}. \quad (2.21)$$

Este resultado coincide con el proporcionado por las ecs. (2.13) y (2.14) si se toma, de nuevo, $z \rightarrow \infty$. Los patrones de difracción en irradiancia en uno y otro caso cumplirán, por lo tanto, la relación

$$I_R(\vec{r}; \vec{0}; z'; \lambda') = \frac{1}{z'^2 M^2(z', \lambda'; \infty, \lambda_o)} \times \quad (2.22)$$

$$\times I'_{R_o} \left(\frac{1}{M(z', \lambda'; \infty, \lambda_o)} \vec{r}; \vec{0}; \lambda_o \right).$$

Todos estos hechos nos permiten concluir que el conjunto de patrones de difracción generado por un objeto plano al ser iluminado por una fuente puntual monocromática es único, independientemente de la distancia a la que se encuentre dicha fuente del objeto y de la longitud de onda de la radiación emitida por ésta, aunque se distribuyen en posiciones axiales diferentes y con diferentes escalas. Desde este punto de vista, es sencillo asignar un significado físico a la constante K . Basta, para ello, considerar la posición $R_o(\lambda_o)$ del patrón de difracción caracterizado por dicho parámetro cuando se ilumina el objeto con una fuente puntual axial monocromática de longitud de onda λ_o , situada a una distancia infinita de éste. La combinación de las ecs. (2.10) y (2.18) nos permite afirmar que el patrón de difracción que para iluminación plana de longitud de onda λ_o se localiza a distancia $R_o(\lambda_o)$ de la transparencia objeto, con iluminación esférica de longitud de onda λ' a distancia finita z' , se sitúa a una distancia $R'(z', \lambda')$ que cumplirá

$$\frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{R'(z', \lambda')} \right) = \frac{1}{\lambda_o R_o(\lambda_o)}, \quad (2.23)$$

expresión que conduce, operando adecuadamente, a

$$R'(z', \lambda') = \frac{\lambda_o z' R_o(\lambda_o)}{\lambda' z' - \lambda_o R_o(\lambda_o)}. \quad (2.24)$$

Por otro lado, dicho patrón de difracción se encontrará escalado, respecto del obtenido con la iluminación plana citada, en un factor dado por, de acuerdo con

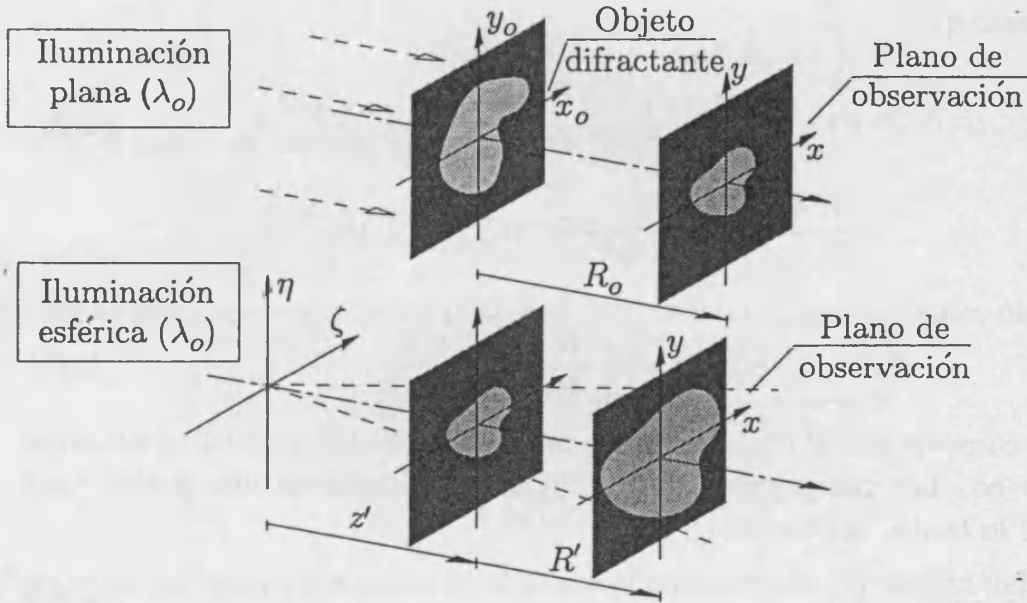


Figura 2.3. Esquema donde se muestra cómo se modifica la estructura de los patrones de difracción cuando se cambia la iluminación de plana a esférica, manteniendo la longitud de onda de la radiación. Las distancias R_0 y R' se encuentran relacionadas por la ec. (2.26).

la ec. (2.21),

$$M(z', \lambda'; \infty, \lambda_0) = \frac{z' + R'(z', \lambda')}{z'} . \quad (2.25)$$

Resultan de especial interés un par de situaciones particulares. La primera de ellas corresponde al caso de que la iluminación plana y esférica correspondan a la misma longitud de onda. En estas circunstancias, independientemente del valor de ésta, obtenemos

$$R'(z', \lambda_0) = R'(z') = \frac{z' R_0(\lambda_0)}{z' - R_0(\lambda_0)} , \quad (2.26)$$

y el factor de escala respecto del resultado obtenido con iluminación plana vendrá dado por

$$M(z', \lambda_0; \infty, \lambda_0) = M(z') = \frac{z' + R'(z')}{z'} . \quad (2.27)$$

Este último resultado admite una interpretación geométrica muy sencilla, tal y como muestra la fig. 2.3. En efecto, podemos concluir que, para cualquier longitud de onda de emisión de la fuente, el patrón de difracción que se observa en un determinado plano usando iluminación esférica coincide, a excepción de ciertos factores globales, con la proyección geométrica desde el punto fuente del mismo

patrón de difracción obtenido con iluminación plana si éste se sitúa sobre el plano del objeto.

El segundo caso particular que presenta interés para razonamientos posteriores es el que corresponde a la comparación de dos iluminaciones planas del objeto de longitudes de onda diferentes. En este caso, obtenemos

$$R'(\infty, \lambda') = R_o(\lambda') = \frac{\lambda_o}{\lambda'} R_o(\lambda_o), \quad (2.28)$$

y

$$M(\infty, \lambda'; \infty, \lambda_o) = 1. \quad (2.29)$$

Estas expresiones nos permiten afirmar que los patrones de difracción con iluminación plana ocupan posiciones axiales diferentes en función de la longitud de onda de la radiación, pero que mantienen la misma escala independientemente de ésta.

Como conclusión del razonamiento seguido hasta aquí, podemos afirmar que la estructura de los patrones de difracción que se obtienen al iluminar un objeto plano con una fuente puntual monocromática es independiente de la posición relativa de ésta respecto del objeto y de la longitud de onda de la radiación. Estos dos parámetros determinan únicamente las posiciones concretas de cada uno de estos patrones y sus escalas, de modo que una variación de ellos proporciona el mismo conjunto de distribuciones de amplitud (salvo constantes globales). Este hecho nos permitirá elegir la configuración geométrica más adecuada en cada caso para estudiar las características de estos patrones y, a través de las ecs. (2.8), (2.13) y (2.14), obtener el resultado final para el caso concreto que se estudie en cada ocasión.

En la mayor parte de las ocasiones elegiremos el estudio con iluminación plana, ya que las expresiones que se obtienen para el campo difractado suelen ser más sencillas que en el caso de iluminación esférica. En este caso, la estructura del patrón de difracción del objeto sobre un plano situado a distancia R_o de éste vendrá descrita por la ec. (2.17). La integral del segundo miembro de dicha ecuación puede expresarse como una transformación de Fourier, debidamente escalada, en la que interviene la transmitancia en amplitud del objeto. Esta expresión nos será útil en razonamientos posteriores. En lo que sigue, denotaremos la transformada de Fourier de una función $g(\vec{r})$ ¹ genérica por alguna de las siguientes representaciones, según resulte más conveniente

$$\mathcal{F}\{g(\vec{r}); \vec{w}\} = \tilde{g}(\vec{w}) = G(\vec{w}) \triangleq \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}) e^{-j2\pi\vec{w}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r}, \quad (2.30)$$

¹A menos que se especifique lo contrario, se considerará que todas las funciones indicadas pertenecen a la clase $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, es decir, son funciones complejas de dos variables reales y de módulo cuadrado integrable.

donde \vec{w} representa el radio vector en el plano de frecuencias espaciales asociado a la transformación de Fourier. De acuerdo con esta definición, la ec. (2.17) puede expresarse como

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{A e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R_o} e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}|^2}}{j \lambda R_o} \mathcal{F} \left\{ t(\vec{r}_o) e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}_o|^2}; \frac{1}{\lambda R_o} \vec{r} \right\}. \quad (2.31)$$

En el caso más general, estos patrones de difracción tienen un perfil diferente al de la transmitancia en amplitud del objeto. Sin embargo, el efecto Talbot (Patorski 1989) da cuenta de la propiedad que exhiben ciertas estructuras planas difractantes —denominadas objetos de Montgomery— por la que, al ser iluminadas coherentemente, son capaces de proporcionar una réplica exacta de sí mismas, en general escalada, en una serie de planos paralelos a ellas, por la simple propagación del campo electromagnético y sin necesidad de ningún componente óptico. A estos patrones de difracción se les denomina autoimágenes. En particular, como mostraremos a continuación, cualquier estructura bidimensional, periódica a lo largo de dos direcciones ortogonales y con el mismo periodo en ambas, pertenece a esta categoría de objetos, independientemente de la morfología de la celda unidad de la misma. Denominaremos a este tipo de estructuras objetos periódicos cuadrados.

Consideremos, pues, un objeto cuya transmitancia en amplitud, $t(\vec{r}_o)$, sea periódica con periodo p en dos direcciones ortogonales que, sin pérdida de generalidad, tomaremos en las direcciones de los ejes cartesianos de referencia. La doble periodicidad del este objeto hace que su transmitancia admita un desarrollo en serie de Fourier bidimensional, de modo que podemos expresarla como

$$t(\vec{r}_o) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{j 2\pi \vec{w}_{nm}(p) \cdot \vec{r}_o}, \quad (2.32)$$

siendo $\vec{w}_{nm}(p)$ el vector de coordenadas cartesianas $(n/p, m/p)$, y donde los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$a_{nm} = \frac{1}{p^2} \iint_{\mathcal{P}} t(\vec{r}_o) e^{-j 2\pi \vec{w}_{nm}(p) \cdot \vec{r}_o} d^2 \vec{r}_o, \quad (2.33)$$

siendo $\mathcal{P} = [0, p] \times [0, p]$. Consideremos ahora que a este objeto se le aplica una iluminación paralela de longitud de onda λ . El patrón de difracción en amplitud que se observa a una distancia R_o del objeto tendrá un perfil, de acuerdo con la ec. (2.31), dado por

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{A e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R_o} e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}|^2}}{j \lambda R_o} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} \mathcal{F} \left\{ e^{j 2\pi \vec{w}_{nm}(p) \cdot \vec{r}_o} e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}_o|^2}; \frac{1}{\lambda R_o} \vec{r} \right\}, \quad (2.34)$$

donde se han tenido en cuenta las propiedades de linealidad de la transformada de Fourier. Si consideramos ahora que para cualquier función² $g(x, y)$ se cumple que

$$\mathcal{F} \left\{ e^{j2\pi\bar{w}_o \cdot \bar{r}} g(\bar{r}); \bar{w} \right\} = \mathcal{F} \left\{ g(\bar{r}); \bar{w} - \bar{w}_o \right\}, \quad (2.35)$$

y que

$$\mathcal{F} \left\{ e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o} |\bar{r}_o|^2}; \bar{w} \right\} = j\lambda R_o e^{-j\pi\lambda R_o |\bar{w}|^2}, \quad (2.36)$$

la expresión (2.34) puede reescribirse, operando adecuadamente, como

$$U'_{R_o}(\bar{r}; \bar{0}; \lambda) = A e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R_o} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{-j\pi\lambda R_o \frac{n^2+m^2}{p^2}} e^{j2\pi\bar{w}_{nm}(p) \cdot \bar{r}}. \quad (2.37)$$

Este resultado indica que la distribución de amplitudes sobre cualquier plano tiene también una estructura periódica cuadrada con el mismo periodo que el objeto. Los coeficientes de la serie de Fourier de esta distribución vendrán dados, a excepción de los factores externos al sumatorio en la expresión anterior, por

$$a'_{nm}(R_o; \lambda) = a_{nm} e^{-j2\pi \frac{R_o}{z_T(\lambda)} (n^2+m^2)}, \quad (2.38)$$

donde

$$z_T(\lambda) = \frac{2p^2}{\lambda} \quad (2.39)$$

es una magnitud característica que se denomina distancia de Talbot de la estructura periódica. Resulta conveniente expresar la distancia R_o en términos de este parámetro, de modo que

$$R_o = (Q' + q) z_T(\lambda), \quad (2.40)$$

siendo Q' un número entero y q un número real positivo menor que la unidad. Es inmediato observar que en aquellos planos caracterizados por un valor de $q = 0$, es decir, tales que

$$R_o = Q' z_T(\lambda), \quad (2.41)$$

los coeficientes de la ec. (2.38) se reducen a los de la transmitancia en amplitud del objeto y, por lo tanto, en dichos planos se obtendrá una réplica de éste. Estaremos, por lo tanto, sobre un plano de autoimagen.

Por otro lado, sustituyendo la expresión (2.40) en la ec. (2.38), obtenemos que

$$a'_{nm}(R_o; \lambda) = a_{nm} e^{-j2\pi q (n^2+m^2)}, \quad (2.42)$$

²Todas las propiedades que utilizaremos referidas a transformadas de Fourier, así como las relativas a las operaciones de convolución y correlación que se definirán más adelante, pueden encontrarse, por ejemplo, en (Gaskill 1978).

independientemente del valor de Q' que caracteriza el plano de observación. Este hecho nos permite afirmar que el campo difractado por este tipo de objetos presenta una periodicidad axial tal que todos los patrones de difracción que se localizan en el intervalo $R_o \in (0, z_T(\lambda))$ se replican a distancias que son múltiplos enteros de la distancia de Talbot, del mismo modo que se repiten las autoimágenes del objeto. De este modo, podemos afirmar que todos los patrones de difracción distintos que genera el objeto pueden estudiarse en este intervalo. En particular, para los patrones caracterizados por un valor de $q = 1/2$, es decir, para distancias que cumplen

$$R_o = \left(Q' + \frac{1}{2} \right) z_T(\lambda) = \frac{2Q' + 1}{2} z_T(\lambda) , \quad (2.43)$$

se obtiene que

$$a'_{nm}(R_o; \lambda) = a_{nm} e^{-j\pi(n^2+m^2)} = a_{nm} (-1)^{nm} = a_{nm} e^{-j2\pi \frac{(np/2+mp/2)}{p}} . \quad (2.44)$$

Estos coeficientes corresponden, como se deduce de modo directo tras su sustitución en la ec. (2.37), a una distribución de amplitudes idéntica a la del objeto, pero desplazada medio periodo en ambas direcciones. A estas réplicas desplazadas se las denomina autoimágenes negativas.

Por lo tanto, si no nos preocupamos de dicho desplazamiento, podemos afirmar que, unificando las condiciones (2.41) y (2.43), a distancias del objeto que cumplan que

$$R_o = Q z_T(\lambda) , \quad (2.45)$$

siendo Q un número semientero, se obtiene una autoimagen del objeto.

Estos planos de autoimagen no son los únicos en los que es posible obtener distribuciones de amplitud similares a las que corresponden al objeto difractante. Si la celda unidad que se replica en la transmitancia en amplitud de éste tiene un soporte lo suficientemente reducido, es posible encontrar una serie de planos de observación en los que se obtiene una distribución de amplitud periódica con la misma celda unidad que el objeto, aunque con un periodo menor. A estos planos se les denomina de multiplicidad y a dichos patrones se les llama imágenes de Fresnel. Para demostrar su existencia y obtener sus posiciones, resulta conveniente expresar la ec. (2.17) de un modo diferente. Reagrupando los factores internos y externos de la integral, dicha ecuación puede reescribirse como

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{A e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R_o}}{j\lambda R_o} \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r} - \vec{r}_o|^2} d^2 \vec{r}_o . \quad (2.46)$$

Teniendo en cuenta la definición de la operación de convolución entre dos funciones

$f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$, dada por³

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) \otimes g(\vec{r}) &\triangleq \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r} - \vec{r}') g(\vec{r}') d^2\vec{r}' = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}'') g(\vec{r} - \vec{r}'') d^2\vec{r}'' , \end{aligned} \quad (2.47)$$

podemos, finalmente, expresar

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{A e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R_o}}{j \lambda R_o} \left[t(\vec{r}) \otimes e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}|^2} \right] . \quad (2.48)$$

En el caso de una estructura periódica cuadrada, la transmitancia en amplitud del objeto puede expresarse como un modo diferente al de la ec. (2.32). Si definimos la celda unidad como

$$c(\vec{r}_o) = \begin{cases} t(\vec{r}_o) & \text{si } \vec{r}_o \in \mathcal{P} = [0, p] \times [0, p] \\ 0 & \text{en el resto del plano} \end{cases} , \quad (2.49)$$

y tenemos en cuenta que para cualquier función $g(\vec{r})$

$$g(\vec{r}) \otimes \delta(\vec{r} - \vec{r}') = g(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (2.50)$$

donde $\delta(\vec{r})$ es la función delta de Dirac, esta transmitancia puede expresarse como la correlación entre la celda unidad y la función que determina las posiciones en las que se replica ésta en el plano del objeto, es decir,

$$t(\vec{r}_o) = c(\vec{r}_o) \otimes \Phi(\vec{r}_o; p) , \quad (2.51)$$

donde la función generadora $\Phi(\vec{r}_o; p)$ vendrá definida por

$$\Phi(\vec{r}_o; p) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r}_o - \vec{l}_{rs}(p)) , \quad (2.52)$$

siendo $\vec{l}_{rs}(p)$ el vector de coordenadas cartesianas $(r p, s p)$. Si sustituimos la expresión (2.51) en la ec. (2.48), y tenemos en cuenta la propiedad asociativa de la operación de convolución, finalmente obtenemos

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = c(\vec{r}) \otimes \left\{ \frac{A e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R_o}}{j \lambda R_o} \left[\Phi(\vec{r}; p) \otimes e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}|^2} \right] \right\} . \quad (2.53)$$

³Ver pie de página en p. 15.

El término entre llaves de la expresión anterior representa, de acuerdo con la ec. (2.48), el patrón de difracción que se obtendría sobre el plano de observación si la transmitancia en amplitud del objeto se redujese a la función $\Phi(\vec{r}_o; p)$, es decir, a una distribución periódica cuadrada de puntos transparentes, sobre un fondo opaco, situados en las posiciones en las que se replica la celda unidad en el plano del objeto. Así pues, la ec. (2.53) nos indica que los patrones de difracción coherentes de un objeto periódico pueden ser obtenidos convolucionando la celda unidad de éste con los patrones de difracción de su función generadora. Resulta interesante, pues, determinar la estructura de estos últimos.

Las distribuciones de amplitud del campo difractado por un filtro caracterizado por una transmitancia en amplitud $\Phi(\vec{r}_o; p)$ cuando se ilumina con radiación coherente paralela han sido estudiadas con detalle en la bibliografía de las últimas décadas (Winthrop y Worthington 1965) (Szwaykowski 1984). Si consideramos que se trata de un objeto periódico cuadrado, su transmitancia en amplitud podrá expresarse en forma de serie de Fourier, es decir,

$$\Phi(\vec{r}_o; p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{nm} e^{j2\pi\bar{w}_{nm}(p)\cdot\vec{r}_o}, \quad (2.54)$$

donde, de acuerdo con la ec. (2.33), los coeficientes vendrán dados por

$$\phi_{nm} = \frac{1}{p^2} \iint_p \Phi(\vec{r}_o) e^{-j2\pi\bar{w}_{nm}(p)\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o = \frac{1}{p^2}, \quad (2.55)$$

de modo que podemos expresar que

$$\Phi(\vec{r}_o; p) = \frac{1}{p^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\bar{w}_{nm}(p)\cdot\vec{r}_o}. \quad (2.56)$$

Tal y como hemos puesto de manifiesto anteriormente, los patrones de difracción de este objeto son también periódicos con el mismo periodo que el objeto, de modo que pueden desarrollarse también en serie de Fourier, de acuerdo con la siguiente expresión

$$\Phi'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = A e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R_o} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi'_{nm}(R_o; \lambda) e^{j2\pi\bar{w}_{nm}(p)\cdot\vec{r}}, \quad (2.57)$$

donde, tal y como se expresa en la ec. (2.38),

$$\phi'_{nm}(R_o; \lambda) = \phi_{nm} e^{-j2\pi q(n^2+m^2)} = \frac{1}{p^2} e^{-j2\pi q(n^2+m^2)}, \quad (2.58)$$

y donde hemos expresado la distancia R_o de acuerdo con la parametrización indicada en la ec. (2.40). Elegiremos, sin pérdida de generalidad, $Q' = 0$, de modo que podemos expresar

$$\Phi'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{A e^{j\frac{2\pi}{\lambda} q z_T(\lambda)}}{p^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi q(n^2+m^2)} e^{j2\pi \bar{w}_{nm}(p) \cdot \vec{r}}. \quad (2.59)$$

Centraremos nuestra atención en los planos caracterizados por valores racionales de q , de modo que puede expresarse

$$q = \frac{C}{D}, \quad (2.60)$$

siendo C y D dos números naturales primos entre sí tales que $C < D$. En este caso, resulta interesante agrupar los sumandos que aparecen en la ec. (2.59) en bloques de D consecutivos, en cada uno de los índices n y m . Para ello, definiremos unos nuevos índices n' , m' , u y v , de modo que

$$\begin{aligned} n &= n' D + u, & n' \in \mathbb{Z}, & u = 0, \dots, D-1, \\ m &= m' D + v, & m' \in \mathbb{Z}, & v = 0, \dots, D-1. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Con estas definiciones, la ec. (2.59) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \Phi'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) &= \frac{A e^{j4\pi q p^2}}{p^2} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{u=0}^{D-1} \sum_{v=0}^{D-1} e^{-j2\pi \frac{C}{D} [(n' D + u)^2 + (m' D + v)^2]} \times \\ &\times e^{j2\pi [\bar{w}_{n'm'}(p/D) + \bar{w}_{uv}(p)] \cdot \vec{r}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Operando y simplificando adecuadamente, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) &= \frac{A e^{j4\pi q p^2}}{p^2} \sum_{u=0}^{D-1} \sum_{v=0}^{D-1} e^{-j2\pi \frac{C}{D} (u^2 + v^2)} e^{j2\pi \bar{w}_{uv}(p) \cdot \vec{r}} \times \\ &\times \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \bar{w}_{n'm'}(p/D) \cdot \vec{r}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

El doble sumatorio en los índices n' y m' de la expresión anterior puede expresarse, de acuerdo con la ec. (2.56), como

$$\begin{aligned} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \bar{w}_{n'm'}(p/D) \cdot \vec{r}} &= \left(\frac{p}{D}\right)^2 \Phi\left(\vec{r}; \frac{p}{D}\right) = \\ &= \left(\frac{p}{D}\right)^2 \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\vec{r} - \vec{l}_{rs}(p/D)\right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Sustituyendo este resultado en la ec. (2.63), y teniendo en cuenta que para cualquier función $g(\vec{r})$ se cumple

$$g(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) = g(\vec{r}_o) \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) , \quad (2.65)$$

finalmente obtenemos

$$\Phi'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = A e^{j4\pi q p^2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(r, s; C, D) \delta(\vec{r} - \vec{l}_{rs}(p/D)) , \quad (2.66)$$

donde

$$\mathcal{C}(r, s; C, D) = \frac{1}{D^2} \sum_{u=0}^{D-1} \sum_{v=0}^{D-1} e^{-j2\pi \frac{C}{D}(u^2+v^2)} e^{j2\pi \frac{ur+vs}{D}} . \quad (2.67)$$

Así pues, el patrón de difracción se reduce a un conjunto de puntos situados sobre una estructura periódica cuadrada de periodo p/D , cada uno de ellos con una amplitud dada por el valor del coeficiente $\mathcal{C}(r, s; C, D)$. Tal y como se demostró anteriormente, esta distribución de amplitudes es periódica con periodo p en ambas direcciones y, por lo tanto, estos coeficientes cumplirán

$$\mathcal{C}(r, s; C, D) = \mathcal{C}(r + aD, s + bD; C, D) , \quad (2.68)$$

para a y b dos enteros cualesquiera. Es suficiente, por lo tanto, estudiar los coeficientes que corresponden a puntos en el interior de una celda unidad de dicha distribución de amplitudes, por ejemplo, los que corresponden a valores $0 \leq r, s \leq D-1$. Puede demostrarse (Winthrop y Worthington 1965) que si D es impar, todos estos coeficientes son diferentes de cero, mientras que si es par sólo lo son los que corresponden a valores alternos de r y s . En ambos casos, los coeficientes no nulos tienen el mismo módulo, dado por

$$|\mathcal{C}(r, s; C, D)| = \frac{1}{E} , \quad (2.69)$$

siendo

$$E = \begin{cases} D & \text{si } D \text{ es impar} \\ D/2 & \text{si } D \text{ es par} \end{cases} . \quad (2.70)$$

Así pues, la estructura del patrón de difracción $\Phi'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda)$ para planos correspondientes a distancias caracterizadas por valores de $R_o = (C/D) z_T(\lambda)$ consiste en una distribución bidimensional de puntos con la misma amplitud (aunque con diferente fase), situados sobre una estructura cuadrada de periodo p/E . Por lo tanto, el parámetro E representa el factor de reducción del periodo del patrón de difracción en irradiancia respecto del que exhibe el objeto.

A partir de la ec. (2.53) es posible obtener en estos mismos planos la estructura del patrón de difracción de un objeto periódico cuadrado cualquiera. Este resultado se obtendrá superponiendo las réplicas que sobre cada uno de los puntos anteriores se obtiene de la celda unidad de dicho objeto, estando cada una de ellas multiplicada por el valor del coeficiente $\mathcal{C}(r, s; C, D)$ correspondiente. Este patrón presenta una estructura complicada salvo en el caso de que dicha celda tenga un soporte lo suficientemente reducido como para que no exista solapamiento entre estas réplicas. En estas circunstancias, el patrón de difracción en irradiancia es una réplica del objeto pero con un periodo menor. Esta capacidad del campo electromagnético se conoce con el nombre de efecto Talbot fraccional.

Todas estas propiedades no sólo se ponen de manifiesto con iluminación paralela de objetos periódicos cuadrados. Tal y como indicamos anteriormente, el efecto de la iluminación esférica sobre el campo difractado puede considerarse como una mera redistribución de los patrones de difracción, junto con un reescalado de los mismos, de acuerdo con las ecs. (2.26) y (2.27). A partir de estas relaciones y de la condición (2.45), es sencillo demostrar que si el objeto se encuentra situado a una distancia z de la fuente puntual que lo ilumina, las autoimágenes se localizan a distancias R del objeto que cumplen

$$\frac{zR}{z+R} = Q z_T(\lambda), \quad (2.71)$$

siendo Q un número semientero, y que dichas réplicas del objeto tienen un aumento respecto de éste dado por

$$M(z) = \frac{z+R}{z}. \quad (2.72)$$

De igual modo, las imágenes de Fresnel se sitúan en planos que cumplen

$$\frac{zR}{z+R} = (Q' + q) z_T(\lambda), \quad (2.73)$$

siendo Q' un número entero y q un número racional positivo menor que la unidad, tal y como expresa la ec. (2.60). La celda unidad de la distribución de irradiancia en estos planos, considerando que se cumplen las condiciones de no solapamiento, presentará un aumento respecto de la del objeto dado por la misma ec. (2.72), y se replica con un periodo

$$p' = \frac{M(z)p}{E}, \quad (2.74)$$

donde E es el factor de reducción definido en la ec. (2.70).

Por otro lado, no sólo este tipo de objetos exhiben autoimágenes y dan lugar al efecto Talbot fraccional. Otras aberturas difractantes que son capaces de generar este tipo de "réplicas" de sí mismas son aquellas que presentan una transmitancia

en amplitud que varía únicamente a lo largo de una dirección —objetos que denominaremos, por simplicidad, unidimensionales—, siendo dicha variación periódica. Estos objetos se denominan habitualmente redes de difracción. Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que las variaciones de dicha función se producen a lo largo del eje cartesiano de abscisas, podremos representarla por un desarrollo de Fourier unidimensional

$$t(x_o) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j2\pi u_n(p)x_o}, \quad (2.75)$$

siendo $u_n(p) = n/P$, donde p es el periodo del objeto, y donde los coeficientes del desarrollo en serie vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{p} \int_0^p t(x_o) e^{-j2\pi u_n(p)x_o} dx_o, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.76)$$

Estas expresiones son formalmente idénticas a las que se obtiene en el caso de un objeto bidimensional periódico cuadrado si denominamos

$$a_{nm} = a_n \delta_{m,0}, \quad (2.77)$$

donde $\delta_{r,s}$ representa la función delta de Krönecker. Esta analogía formal conduce a idénticas conclusiones respecto de la situación y escala de las autoimágenes que proporcionan este tipo de objetos. Resultados similares se obtienen también para el efecto Talbot fraccional (Winthrop y Worthington 1965), excepto en el hecho de que el módulo de los coeficientes no nulos de la expresión “unidimensional” equivalente a la ec. (2.66) viene dado por

$$|C_{1D}(r; C, D)| = \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad (2.78)$$

siendo E el factor de reducción definido en la ec. (2.70).

Para concluir esta sección, es conveniente señalar que, aunque los resultados aquí obtenidos suponen que la radiación emitida por la fuente puntual que ilumina al objeto es perfectamente monocromática, las mismas conclusiones se obtienen si dicho emisor genera un campo electromagnético cuasimonocromático (Saleh y Teich 1991, p. 74), caracterizado por una longitud de onda media λ y un ancho espectral $\Delta\lambda \ll \lambda$. En la práctica, ésta es la mejor aproximación que puede conseguirse de un emisor idealmente monocromático, como puede ser la radiación procedente de una fuente láser o de una lámpara espectral de descarga asociada con un filtro interferencial adecuado. Sin embargo, si se consideran dos emisores cuasimonocromáticos independientes, el campo electromagnético radiado por cada uno de ellos presenta un desfase relativo que varía al azar con el tiempo, a

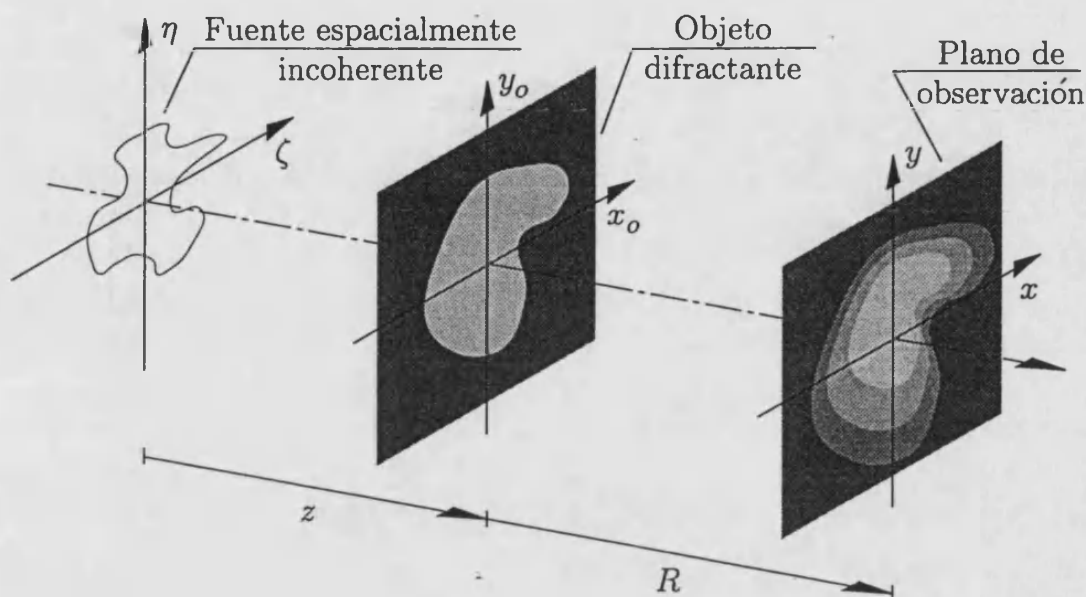


Figura 2.4. Representación esquemática de la disposición geométrica que se propone para estudiar el campo difractado por una abertura plana iluminada por una fuente espacialmente incoherente cuasimonocromática contenida en un plano paralelo al objeto. La elección de los sistemas de referencia en los planos de la fuente y de observación es análoga a la realizada en la sección anterior.

diferencia de lo que ocurre en el caso de emisores estrictamente coherentes. Este hecho confiere propiedades estadísticas al campo electromagnético global emitido por una fuente extensa cuasimonocromática que son diferentes de las que presenta una fuente extensa idealmente monocromática. De hecho, el campo generado por cada uno de los emisores cuasimonocromáticos se superpone incoherentemente con el de los restantes, de modo que se puede hablar de una fuente espacialmente incoherente, aunque coherente (de modo muy aproximado) temporalmente. Algunas de las características del campo difractado por objetos planos iluminados por este tipo de fuentes se estudian en las secciones siguientes.

2.3 Difracción con una fuente plana cuasimonocromática espacialmente incoherente

Consideremos una fuente plana de luz cuasimonocromática, de longitud de onda media λ , que ilumina un objeto difractante plano, paralelo a ésta y situado a una distancia z de dicha fuente, tal y como se muestra en la fig. 2.4. Nuestro interés se va a centrar ahora en obtener cuál es la distribución de irradiancia que se observa sobre un plano paralelo al objeto situado a una distancia R de éste.

Para ello, consideraremos que la fuente extensa está constituida por un conjunto

de emisores elementales. Estas fuentes emitirán radiación mutuamente incoherente, tal y como se indicó en §2.2. Esta característica hace que la distribución final de irradiancia sobre el plano de observación pueda considerarse, de acuerdo con el principio de superposición, como la suma de todas las distribuciones de irradiancia producidas por cada una de estas fuentes elementales. Por tanto, si consideramos que $I_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda)$ es el patrón de difracción en irradiancia que genera sobre el plano de observación la fuente elemental situada en la posición $\vec{\rho}$ del plano de la fuente, por unidad de potencia radiada por dicho emisor, la distribución de irradiancia que se observa en presencia de la fuente real podrá expresarse como

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) dP(\vec{\rho}), \quad (2.79)$$

donde $dP(\vec{\rho})$ es la potencia emitida por cada uno de radiadores elementales considerados. La magnitud radiométrica que caracteriza la emisión (en todas las direcciones) de cada uno de estos elementos es la exitancia radiante de la fuente extensa, que se define como el cociente entre la potencia emitida por dicho emisor y su área elemental. En términos matemáticos

$$I_S(\vec{\rho}) = \frac{dP(\vec{\rho})}{dS}, \quad (2.80)$$

donde dS es el área del emisor elemental considerado. En el caso de una fuente plana como la que nos ocupa $dS = d^2\vec{\rho}$ y, por lo tanto, la ec. (2.79) puede escribirse como

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_R(\vec{r}; \vec{\rho}; z; \lambda) I_S(\vec{\rho}) d^2\vec{\rho}. \quad (2.81)$$

Este resultado nos permite obtener la distribución de irradiancia sobre el plano de observación conocida la respuesta a un emisor elemental genérico de potencia unidad situado en el plano de la fuente. Esta respuesta unidad viene dada por el módulo al cuadrado de la distribución de amplitud luminosa compleja que se obtiene al iluminar el objeto con uno de estos emisores normalizados. Dicha respuesta coherente normalizada se obtiene a partir de la ec. (2.4) considerando $A = 1$. Por tanto, teniendo en cuenta el resultado proporcionado por la ec. (2.9), la ec. (2.81) queda

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_R\left(\vec{r} + \frac{R}{z}\vec{\rho}; \vec{0}; z; \lambda\right) I_S(\vec{\rho}) d^2\vec{\rho}. \quad (2.82)$$

Haciendo el cambio de variable $\vec{\rho}' = (R/z) \vec{\rho}$, resulta

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \frac{1}{(R/z)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} I_R(\vec{r} + \vec{\rho}'; \vec{0}; z; \lambda) I_S\left(\frac{1}{R/z} \vec{\rho}'\right) d^2 \vec{\rho}' . \quad (2.83)$$

Teniendo en cuenta la definición de la operación de correlación⁴ entre dos funciones $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$, dada por

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) * g(\vec{r}) &= f(\vec{r}) \otimes g^*(-\vec{r}) = & (2.84) \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r} + \vec{r}') g^*(\vec{r}') d^2 \vec{r}' = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}'') g^*(\vec{r}'' - \vec{r}) d^2 \vec{r}'' , \end{aligned}$$

y el carácter real de la función I_S , podemos expresar la ec. (2.83) como

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \frac{1}{M_S^2} \left[I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) * I_S\left(\frac{1}{M_S} \vec{r}\right) \right] , \quad (2.85)$$

donde

$$M_S = \frac{R}{z} . \quad (2.86)$$

Así pues, los patrones de difracción que se obtienen cuando se ilumina un objeto difractante plano con una fuente plana cuasimonocromática espacialmente incoherente pueden obtenerse como la correlación entre el patrón de Fresnel en irradiancia obtenido si la fuente se reduce a un emisor puntual normalizado en eje, y una versión escalada de la distribución de exitancia de la fuente extensa.

El razonamiento seguido hasta este momento puede extenderse al caso en que la fuente incoherente se localice a una distancia infinita del objeto. Esta es la situación habitual cuando se requiere la medida de las características del campo difractado por un objeto iluminado por una fuente astronómica, lo que permite determinar diferentes características físicas de dicho emisor. Es también el caso que se presenta con la iluminación de tipo Köhler en microscopía, en la que una fuente plana espacialmente incoherente se sitúa en el plano focal objeto de una lente convergente, a continuación de la cual se sitúa la muestra a observar. Tal y como veremos a continuación, este dispositivo proporciona una iluminación del objeto análoga a la que se obtendría con una fuente incoherente situada a distancia infinita de éste.

⁴Ver pie de página en p. 15.

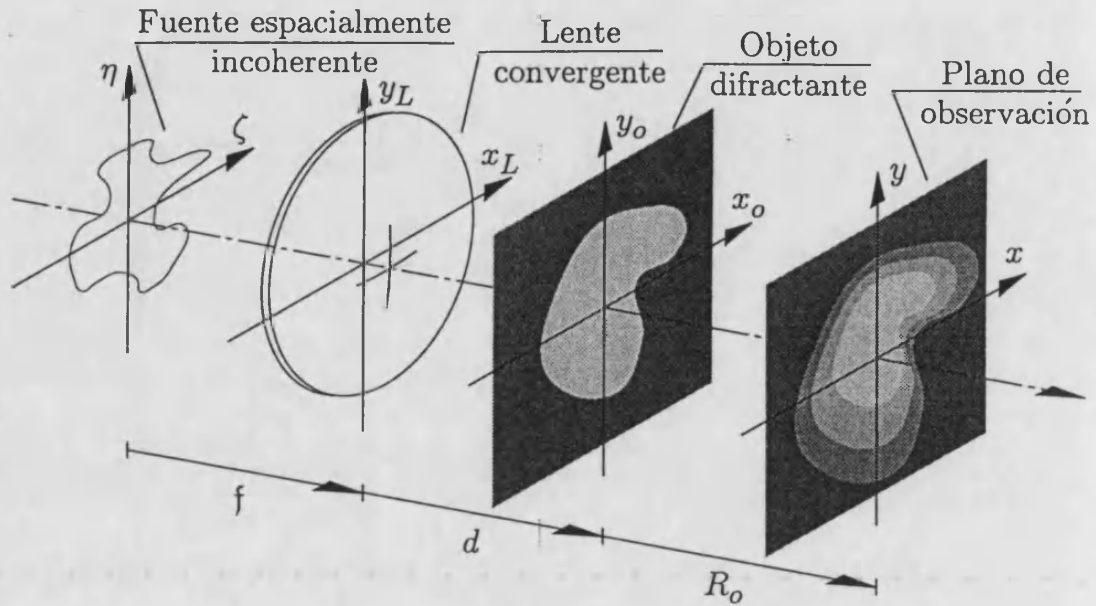


Figura 2.5. Esquema del dispositivo propuesto para el estudio de los patrones de difracción no coherentes que se generan al iluminar un objeto plano con la radiación de una fuente espacialmente incoherente cuasimonocromática, colimada por una lente esférica ideal.

Consideremos, pues, una fuente plana monocromática espacialmente incoherente situada en el plano focal objeto de una lente convergente de distancia focal f . A una cierta distancia d de ésta situamos un objeto difractante plano, y nos interesamos por la distribución de irradiancia que se obtiene sobre un plano a distancia R_o de él. La fig. 2.5 muestra la disposición de los elementos citados. Obtendremos, en primer lugar, la respuesta impulsional en irradiancia sobre el plano de observación; posteriormente, la aplicación de la integral de superposición de la ec. (2.81) nos permitirá calcular el resultado requerido.

La distribución de amplitud luminosa que se obtiene sobre el plano inmediatamente posterior a la lente si se considera un emisor elemental normalizado en el punto $\vec{\rho}$ del plano de la fuente viene dada, siguiendo un razonamiento análogo al utilizado en el planteamiento de las ecs. (2.2) y (2.3), por

$$U_L(\vec{r}_L; \vec{\rho}; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}f}}{f} e^{j\frac{\pi}{\lambda f}|\vec{r}_L - \vec{\rho}|^2} t_L(\vec{r}_L), \quad (2.87)$$

donde $t_L(\vec{r}_L)$ representa la transmitancia en amplitud de la lente. Considerando que se trata de una lente delgada ideal de longitud focal imagen f , en la aproximación que estamos manejando, dicha transmitancia viene dada por

$$t_L(\vec{r}_L) = e^{-j\frac{\pi}{\lambda f}|\vec{r}_L|^2}, \quad (2.88)$$

con lo que la ec. (2.87) queda

$$U_L(\vec{r}_L; \vec{\rho}; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}f}}{f} e^{j\frac{\pi}{\lambda f}|\vec{\rho}|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}\vec{\rho}\cdot\vec{r}_L} . \quad (2.89)$$

La propagación libre de esta repartición de amplitudes genera un patrón de difracción sobre el plano del objeto cuya estructura vendrá dada por la correspondiente ecuación de Fresnel-Kirchhoff. Es sencillo ver que, en este caso, dicha distribución de amplitudes viene dada por

$$U_o^{(-)}(\vec{r}_o; \vec{\rho}; \lambda) = A(\vec{\rho}; \lambda) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}\vec{\rho}\cdot\vec{r}_o} . \quad (2.90)$$

donde

$$A(\vec{\rho}; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(f+d)}}{f} e^{j\frac{\pi}{\lambda f}\left(1-\frac{d}{f}\right)|\vec{\rho}|^2} . \quad (2.91)$$

Así pues, cada uno de los emisores de la fuente proporciona una iluminación sobre el objeto que es el que correspondería a una onda plana que incidiese sobre éste en una dirección que es función de las coordenadas del punto fuente específico y de la longitud focal f . La amplitud de cada una de estas ondas planas vendrá dada por el valor concreto de la función $A(\vec{\rho}; \lambda)$, cuyo módulo es el mismo para todas ellas. La incoherencia espacial de la fuente extensa hace que la superposición de los campos producidos por cada una de estas ondas no sea sensible a estas diferencias de fase y, por lo tanto, la iluminación que se obtiene con este dispositivo es equivalente a la generada por una fuente extensa situada a distancia infinita del objeto, en cuyo caso se obtendría un valor constante no sólo para el módulo sino también para la fase de las amplitudes de dichas ondas.

Sustituyendo en la ec. (2.1) el valor de

$$U_o'(\vec{r}_o; \vec{\rho}; \lambda) = U_o^{(-)}(\vec{r}_o; \vec{\rho}; \lambda) t(\vec{r}_o) , \quad (2.92)$$

donde, de nuevo, $t(\vec{r}_o)$ es la transmitancia en amplitud del objeto, la respuesta impulsional en amplitudes sobre el plano de observación valdrá

$$U_{R_o}'(\vec{r}; \vec{\rho}; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R_o} A(\vec{\rho}; \lambda) e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o}|\vec{r}|^2}}{j\lambda R_o} \times \quad (2.93)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o}|\vec{r}_o|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R_o}\left(\vec{r}+\frac{R_o}{f}\vec{\rho}\right)\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o .$$

Siguiendo el mismo razonamiento de §2.2, en el caso de que el emisor considerado esté sobre el eje óptico, la respuesta impulsional anterior se reduce a

$$U_{R_o}'(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R_o} A(\vec{0}; \lambda) e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o}|\vec{r}|^2}}{j\lambda R_o} \times \quad (2.94)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}_o|^2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda R_o} \vec{r} \cdot \vec{r}_o} d^2 \vec{r}_o, \quad (2.95)$$

La expresión anterior proporciona un resultado idéntico, como era previsible, al que se establece en la ec. (2.17), si se considera un valor de $A = A(\vec{0}; \lambda)$. Con todo, la ec. (2.93) se puede expresar como

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{\rho}; \lambda) = e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}|^2} e^{j \frac{\pi}{\lambda f} \left(1 - \frac{d}{f}\right) |\vec{\rho}|^2} e^{-j \frac{\pi}{\lambda R_o} \left|\vec{r} + \frac{R_o}{f} \vec{\rho}\right|^2} \times \\ \times U'_{R_o}\left(\vec{r} + \frac{R_o}{f} \vec{\rho}; \vec{0}; \lambda\right), \quad (2.96)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\frac{A(\vec{\rho}; \lambda)}{A(\vec{0}; \lambda)} = e^{j \frac{\pi}{\lambda f} \left(1 - \frac{d}{f}\right) |\vec{\rho}|^2}. \quad (2.97)$$

En consecuencia, la respuesta impulsional en irradiancia vendrá dada por

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{\rho}; \lambda) = |U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{\rho}; \lambda)|^2 = \\ = \left| U'_{R_o}\left(\vec{r} + \frac{R_o}{f} \vec{\rho}; \vec{0}; \lambda\right) \right|^2 = \\ = I'_{R_o}\left(\vec{r} + \frac{R_o}{f} \vec{\rho}; \vec{0}; \lambda\right). \quad (2.98)$$

De modo análogo al caso estudiado en la sección anterior, obtenemos que la respuesta impulsional en irradiancia que se obtiene sobre el plano de observación para un emisor situado en una posición caracterizada por un radio vector $\vec{\rho}$ sobre el plano de la fuente es la misma que se obtiene para un emisor axial, aunque centrada en el punto $-(R/f) \vec{\rho}$. Dicho punto corresponde a la proyección geométrica del punto axial del objeto sobre el plano de observación en la dirección definida por el emisor y el centro óptico de la lente, tal y como se muestra en la fig. 2.6.

Sustituyendo esta respuesta impulsional en la ec. (2.81), obtenemos una distribución de irradiancia sobre el plano de observación

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \lambda) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I'_{R_o}\left(\vec{r} + \frac{R_o}{f} \vec{\rho}; \vec{0}; \lambda\right) I_S(\vec{\rho}) d^2 \vec{\rho}. \quad (2.99)$$

La analogía formal entre esta expresión y la ec (2.82) permite concluir que, de modo similar a lo establecido en la ec. (2.85), se cumple

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \lambda) = \frac{1}{M_L^2} \left[I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) * I_S\left(\frac{1}{M_L} \vec{r}\right) \right], \quad (2.100)$$

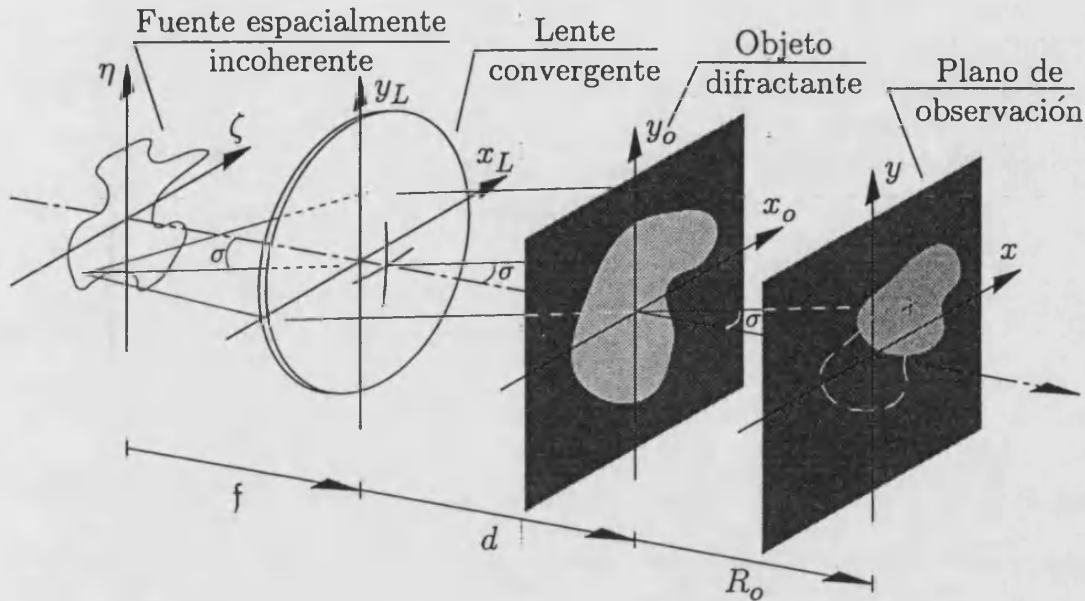


Figura 2.6. Representación que muestra la relación existente entre los patrones de difracción generados por cada uno de los emisores elementales en los que se puede descomponer una fuente plana espacialmente incoherente en presencia de una lente colimadora.

donde

$$M_L = \frac{R_o}{f} . \quad (2.101)$$

Obtenemos, por lo tanto, que la distribución de irradiancia sobre cualquier plano posterior al objeto puede obtenerse por una operación de correlación análoga a la que se obtiene si la fuente se sitúa, sin lente intermedia, a distancia finita del mismo. El patrón coherente que corresponde al emisor puntual axial se reduce en este caso a una iluminación con una onda plana con propagación en la dirección del eje óptico, como se deduce fácilmente de la ec. (2.90) para el caso $\vec{\rho} = 0$.

Así pues, en los dos casos estudiados la propagación libre del campo electromagnético implica una operación de correlación entre dos funciones bien definidas: el patrón de Fresnel en irradiancia obtenido si la fuente se reduce a un emisor puntual normalizado en eje, y una versión escalada de la distribución de exitancia de la fuente extensa. Estos hechos serán explotados convenientemente en las secciones y capítulos posteriores.

2.4 Función de transferencia heurística. Intensidad mutua

La ec. (2.85) puede ser interpretada desde un punto de vista diferente si se considera en el dominio de frecuencias espaciales. Si a ambos lados de la igualdad

realizamos sendas transformaciones de Fourier, y tenemos en cuenta cómo actúa esta transformación sobre la correlación de dos funciones y sus propiedades respecto a los cambios de escala, es decir, que

$$\mathcal{F} \{ f(\vec{r}) * g(\vec{r}); \vec{w} \} = \tilde{f}(\vec{w}) \tilde{g}^*(\vec{w}) , \quad (2.102)$$

y

$$\mathcal{F} \left\{ g \left(\frac{1}{A} \vec{r} \right); \vec{w} \right\} = |A|^2 \tilde{g}(A\vec{w}) , \quad (2.103)$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_R(\vec{w}; z; \lambda) &= \frac{1}{M_S^2} \tilde{I}_R(\vec{w}; \vec{0}; z; \lambda) \mathcal{F} \left\{ I_S \left(\frac{1}{M_S} \vec{r} \right); \vec{w} \right\}^* = \\ &= \tilde{I}_R(\vec{w}; \vec{0}; z; \lambda) \tilde{I}_S^*(M_S \vec{w}) . \end{aligned} \quad (2.104)$$

Teniendo en cuenta el carácter real de la función I_S y, por lo tanto, la hermiticidad de su transformada de Fourier, finalmente resulta

$$\tilde{\mathcal{I}}_R(\vec{w}; z; \lambda) = \tilde{I}_R(\vec{w}; \vec{0}; z; \lambda) \tilde{I}_S(-M_S \vec{w}) . \quad (2.105)$$

Si llamamos

$$H(\vec{w}; z, R) = \tilde{I}_S(-M_S \vec{w}) , \quad (2.106)$$

podemos expresar la ec. (2.105) como

$$\tilde{\mathcal{I}}_R(\vec{w}; z; \lambda) = \tilde{I}_R(\vec{w}; \vec{0}; z; \lambda) H(\vec{w}; z, R) . \quad (2.107)$$

Este resultado nos permite interpretar la distribución de irradiancia que se obtiene en el plano de observación como una versión filtrada de la respuesta coherente en irradiancia sobre dicho plano. La función de transferencia que realiza este filtrado espacial viene dada, de acuerdo con la ec. (2.106), por una versión escalada de la transformada de Fourier de la distribución de exitancia de la fuente incoherente que ilumina el objeto. A esta función, que relaciona los contenidos frecuenciales de los patrones de difracción coherentes y los que se obtienen con una fuente espacialmente incoherente, la denominaremos función de transferencia heurística, ya que nos va a permitir encontrar aplicaciones novedosas de las ideas expresadas anteriormente.

Desde el punto de vista de la teoría de la coherencia, la diferencia básica entre las dos situaciones que relaciona la función de transferencia heurística son las propiedades estadísticas del campo electromagnético en los puntos del plano del objeto. En el caso de radiación cuasimonocromática, como el que nos ha ocupado hasta ahora, la coherencia entre dos puntos de dicho plano, con vectores de posición

\vec{r}_1 y \vec{r}_2 , viene caracterizada por la función de intensidad mutua (Born y Wolf 1980, p. 507) definida por

$$J(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle U(\vec{r}_1; t) U^*(\vec{r}_2; t) \rangle, \quad (2.108)$$

donde $U(\vec{r}; t)$ representa la amplitud luminosa en el punto \vec{r} del plano del objeto en el instante t , y los paréntesis angulares representan el promedio estadístico. En la mayor parte de las ocasiones, si consideramos campos estacionarios, es posible sustituir dicho promedio por una media temporal con tiempo de integración suficientemente elevado. Se dice entonces que el campo es ergódico y supondremos, de ahora en adelante, que los campos de los que nos ocupamos lo son.

La intensidad mutua no sólo contiene información sobre la coherencia espacial de la radiación que llega a los dos puntos considerados, sino también sobre la irradiación del campo electromagnético en dichos puntos. En efecto, se cumple que

$$J(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \langle U(\vec{r}_1; t) U^*(\vec{r}_1; t) \rangle = \mathcal{I}_R(\vec{r}_1; \lambda). \quad (2.109)$$

Así pues, el conocimiento de la intensidad mutua en un determinado plano permite conocer la distribución de irradiación sobre dicho plano. A partir de las ecuaciones de propagación de esta función de coherencia, será posible, por lo tanto, obtener los patrones de difracción en irradiación de un objeto iluminado, en el caso más general, con radiación parcialmente coherente. En particular, si iluminamos un objeto difractante con una fuente plana incoherente a una cierta distancia de él, los valores de la intensidad mutua que se obtienen sobre el plano de dicho objeto determinarán los patrones de difracción en irradiación en planos posteriores a éste. El resultado de la ec. (2.107) nos induce a pensar que nuestra función de transferencia heurística debe estar estrechamente relacionada con la intensidad mutua sobre el plano del objeto.

De hecho, el teorema de van Cittert-Zernike, dentro de la aproximación de Fresnel, establece que el módulo de la intensidad mutua que una fuente plana monocromática espacialmente incoherente proporciona sobre un plano situado a una distancia z de ella viene dado por (Born y Wolf 1980, pp. 509-510)

$$\begin{aligned} |J_z(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| &= \left| J_z(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{0}) \right| = \\ &= \frac{1}{z^2} \left| \tilde{I}_S \left(\frac{1}{\lambda z} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Teniendo en cuenta la ec. (2.106), podemos expresar la ecuación anterior como

$$\left| J_z(\Delta\vec{r}, \vec{0}) \right| = \frac{1}{z^2} \left| H \left(-\frac{1}{M_S \lambda z} \Delta\vec{r}; z, R \right) \right|, \quad (2.111)$$

donde $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Sustituyendo M_S por su valor, dado por la ec. (2.86), finalmente obtenemos que

$$\left| J_z(\Delta\vec{r}, \vec{0}) \right| = \frac{1}{z^2} \left| H \left(-\frac{1}{\lambda R} \Delta\vec{r}; z, R \right) \right|. \quad (2.112)$$

Así pues, el módulo de la función de transferencia heurística nos proporciona una medida del módulo de la intensidad mutua sobre el plano del objeto. Por lo tanto, la determinación experimental de la función de transferencia heurística para un objeto cualquiera permite determinar los valores del módulo de la intensidad mutua del campo electromagnético que incide sobre dicho objeto. En las circunstancias en las que la diferencia de fase entre los términos entre barras de la ecuación anterior es despreciable (Goodman 1985, p. 211), la ec. (2.112) se cumplirá para las funciones implicadas y no sólo para sus módulos. En estos casos, la medida de la función de transferencia heurística permite obtener tanto el módulo como la fase de la intensidad mutua sobre el plano del objeto.

La función de transferencia heurística puede obtenerse experimentalmente comparando los espectros de frecuencias espaciales de los patrones de difracción que aparecen sobre un determinado plano en los casos coherente axial y parcialmente coherente, como se deduce de la ec. (2.107), es decir

$$H(\vec{w}; z, R) = \frac{\tilde{I}_R(\vec{w}; z; \lambda)}{\tilde{I}_R(\vec{w}; \vec{0}; z; \lambda)}, \quad \forall \vec{w} / \tilde{I}_R(\vec{w}; \vec{0}; z; \lambda) \neq 0. \quad (2.113)$$

Evidentemente, no será posible obtener el valor de la función de transferencia heurística para aquellas frecuencias que no aparezcan en el patrón de difracción coherente.

El mismo razonamiento seguido a partir de la ec. (2.85) puede seguirse para el caso de que la fuente se sitúe en el plano focal objeto de una lente esférica, a partir de la ec. (2.100). Si realizamos una transformación de Fourier a ambos lados de ésta última, y seguimos un proceso análogo al que nos llevó de la ec. (2.104) a la ec. (2.107), obtenemos

$$\tilde{I}'_{R_o}(\vec{w}; \lambda) = \tilde{I}'_{R_o}(\vec{w}; \vec{0}; \lambda) H_L(\vec{w}; f, R_o), \quad (2.114)$$

donde la función de transferencia heurística en este caso viene dada por

$$H_L(\vec{w}; f, R_o) = \tilde{I}'_S(-M_L \vec{w}). \quad (2.115)$$

De nuevo obtenemos que la influencia que tiene el grado de coherencia de la radiación que incide en el objeto sobre los patrones de irradiancia posteriores a él se puede caracterizar por una función de transferencia en el dominio de las frecuencias espaciales. Dicha función de transferencia heurística puede determinarse,

al igual que en el caso estudiado anteriormente, por comparación de los patrones de difracción coherentes y con iluminación parcialmente coherente de un objeto cualquiera, a partir de una expresión análoga a la ec. (2.113), es decir

$$H_L(\vec{w}; f, R_o) = \frac{\tilde{I}'_{R_o}(\vec{w}; \lambda)}{\tilde{I}'_{R_o}(\vec{w}; \vec{0}; \lambda)}, \quad \forall \vec{w} / \tilde{I}'_{R_o}(\vec{w}; \vec{0}; \lambda) \neq 0. \quad (2.116)$$

Por otro lado, la propagación de la intensidad mutua desde la fuente hasta el objeto, teniendo en cuenta el efecto de la lente, permite obtener que la intensidad mutua sobre el plano de la abertura difractante puede expresarse como

$$\begin{aligned} J_f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= J_f(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{0}) = \\ &= \frac{1}{f^2} \tilde{I}_S \left(\frac{1}{\lambda f} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right), \end{aligned} \quad (2.117)$$

y, por lo tanto, la relación entre ésta y la nueva función de transferencia heurística viene dada por

$$J_f(\Delta\vec{r}, \vec{0}) = \frac{1}{f^2} H_L \left(-\frac{1}{M_L \lambda f} \Delta\vec{r}; f, R_o \right). \quad (2.118)$$

Sustituyendo M_L por su valor, dado por la ec. (2.101), finalmente obtenemos que

$$J_f(\Delta\vec{r}, \vec{0}) = \frac{1}{f^2} H_L \left(-\frac{1}{\lambda R_o} \Delta\vec{r}; f, R_o \right). \quad (2.119)$$

A partir de este último resultado es posible, midiendo la función de transferencia heurística, obtener una medida de la intensidad mutua sobre el plano del objeto. En este caso, a diferencia del caso estudiado al comienzo de esta sección, es posible, en principio, obtener tanto el módulo como la fase de esta función de coherencia. Esta idea se explota en la siguiente sección para proponer un método novedoso para la determinación de ésta.

2.5 Medida de la coherencia espacial

La medida de la coherencia espacial y temporal de la radiación electromagnética procedente de una determinada fuente permite obtener información muy valiosa de los procesos que desencadenan la emisión luminosa, y por lo tanto, sobre la estructura microscópica y condiciones físicas de la materia que la genera. Este hecho es particularmente importante en los casos en los que el propio emisor es inaccesible a otros métodos de inspección directa como ocurre, por ejemplo, en Astrofísica. Además de las técnicas tradicionales, en las que se analiza la función de intensidad mutua a partir del contraste de diferentes patrones interferenciales generados por

la fuente (Françon y Mallick 1967) (Yu *et al.* 1984) (Ladera y Bautista 1992), muchos de los métodos propuestos se basan en el estudio de la estructura de las distribuciones de irradiancia generadas en diferentes planos por la radiación que se pretende analizar, bien por propagación libre, a partir de ciertas generalizaciones del teorema de van Cittert-Zernike (Nugent 1995), o tras atravesar determinadas aperturas difractantes. En este último caso, se ha utilizado el análisis de la estructura de los patrones de moteado generados al iluminar con dicha radiación objetos difusores (Asakura *et al.* 1972) (Michalski *et al.* 1985) o la variación en el contraste de los patrones de difracción de objetos periódicos (Seykora 1990) (Barreiro y Ojeda-Castañeda 1993) (Saavedra *et al.* 1993). Desde un punto de vista más general, la relación que el teorema de Schell (Goodman 1985, p. 222-228) establece entre la intensidad del campo lejano difractado por una abertura y la función de intensidad mutua en el plano de la misma permite realizar un análisis de ésta a partir del estudio experimental de los patrones de difracción de Fraunhofer del objeto difractante. Una reciente generalización de este teorema para distancias moderadas del objeto (Nugent 1990) ha conducido a una serie de trabajos en los que se establece la posibilidad de obtener las propiedades de coherencia espacial del campo electromagnético a partir de la comparación directa de las distribuciones de irradiancia obtenidas en diferentes planos (Nugent 1991).

En esta sección vamos a centrar nuestra atención en la medida de la coherencia espacial de la radiación que proviene de una fuente plana cuasimonocromática espacialmente incoherente situada en el plano focal objeto de una lente convergente. En particular, obtendremos la intensidad mutua sobre un plano posterior a dicha lente. La técnica alternativa que proponemos permite una extensión sencilla, en secciones posteriores, al caso de fuentes puntuales temporalmente incoherentes.

Para conseguir nuestro objetivo, situaremos un objeto difractante sobre el plano de interés según se muestra en la fig. 2.7. Tal y como se puso de manifiesto en la sección anterior, el estudio de los patrones de difracción que proporciona este objeto con la radiación proveniente de la fuente extensa y su comparación con los correspondientes a iluminación coherente nos permitirá obtener el resultado deseado.

El carácter bidimensional de la función de intensidad mutua sobre el plano del objeto, $J_f(\Delta\vec{r}, \vec{0})$, hace necesaria, en principio, la utilización de objetos bidimensionales cuyos patrones de difracción nos proporcionen un muestreo de dicha función en todo su dominio de definición. Ahora bien, como estableceremos más adelante, un proceso secuencial con un objeto que, aunque bidimensional, presente variaciones en su transmitancia sólo dependientes de una de las coordenadas cartesianas, permite realizar un muestreo de la intensidad mutua en diferentes direcciones en el plano $\Delta\vec{r}$. Por otro lado, desde un punto de vista práctico, la necesaria discretización de los puntos de muestreo de las distribuciones de irradiancia hacen que

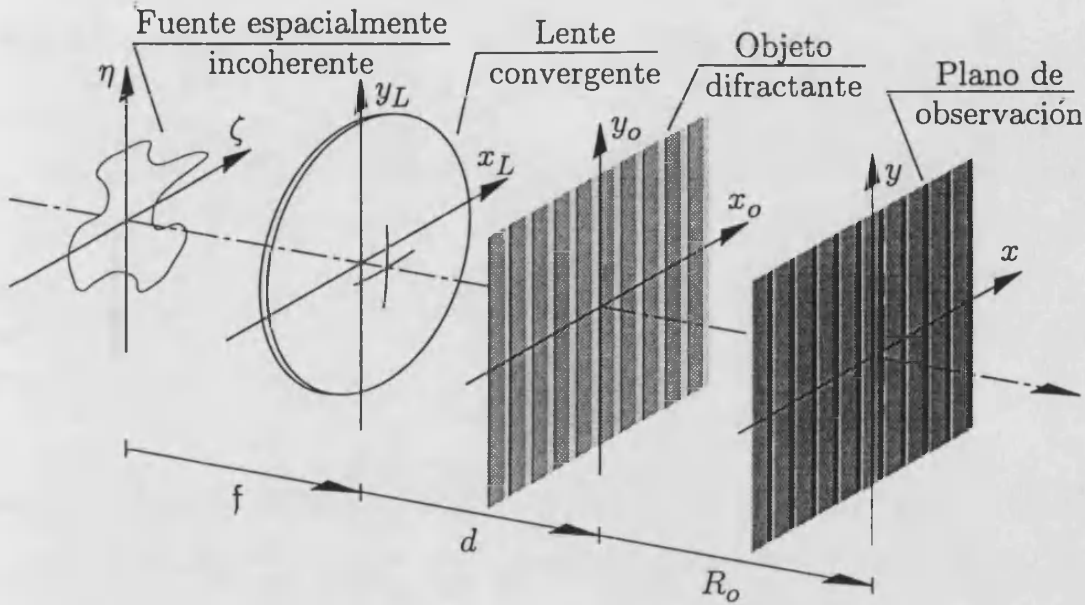


Figura 2.7. Esquema del dispositivo propuesto para la medida de la coherencia espacial del campo electromagnético generado por una fuente cuasimonocromática espacialmente incoherente situada en el plano focal objeto de una lente esférica.

un objeto periódico resulte especialmente adecuado para el tratamiento digital posterior de los datos.

Así pues, estudiaremos el caso en el que el objeto presenta una transmitancia en amplitud unidimensional periódica, de periodo p , y, sin pérdida de generalidad, consideraremos que las variaciones de esta función se producen a lo largo de la dirección definida por el eje cartesiano de abscisas. Podremos, por tanto, representar la función de transmitancia en amplitud del objeto, $t(x_o)$, por un desarrollo en serie de Fourier unidimensional como el indicado en la ec. (2.75). La respuesta impulsional en amplitudes para un emisor axial normalizado sobre un plano situado a una distancia R_o del objeto vendrá dada, según lo establecido en la sección anterior, por la expresión (2.17), considerando un valor para la amplitud incidente $A = A(\vec{0}; \lambda)$. Con todo ello, considerando el mismo razonamiento seguido para obtener la ec. (2.37) y teniendo en cuenta la equivalencia establecida para objetos unidimensionales en la ec. (2.77), obtenemos que esta respuesta impulsional viene dada por

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = A(\vec{0}; \lambda) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R_o} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_n(p)}, \quad (2.120)$$

donde

$$a'_n(R_o; \lambda) = a_n e^{-j\pi\lambda R_o \frac{n^2}{p^2}}, \quad (2.121)$$

Se trata, por tanto, de una distribución periódica de amplitud con el mismo periodo que el objeto, con coeficientes de Fourier dados, excepto por las constantes externas al sumatorio de la ec. (2.120), por la expresión (2.121). La correspondiente distribución de irradiancia en dicho plano vendrá dada por

$$\begin{aligned} I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) &= |A(\vec{0}; \lambda)|^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_n(p)} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{f^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a'_n(R_o; \lambda) a'^*_{n'}(R_o; \lambda) e^{j2\pi x [u_n(p) - u_{n'}(p)]} \end{aligned} \quad (2.122)$$

Si llamamos $r = n - n'$, podemos reagrupar los sumandos de las series y expresar la ecuación anterior como sigue

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{1}{f^2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a'_{n'+r}(R_o; \lambda) a'^*_{n'}(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_r(p)} \quad (2.123)$$

y denominando

$$i'_r(R_o; \lambda) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a'_{n'+r}(R_o; \lambda) a'^*_{n'}(R_o; \lambda) \quad (2.124)$$

podemos concluir, finalmente,

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{1}{f^2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_r(p)} \quad (2.125)$$

expresión que da cuenta del carácter periódico del patrón impulsional de irradiancia sobre cualquier plano posterior al objeto.

El hecho de que la respuesta impulsional sea periódica hace que el patrón de difracción que se obtiene cuando se ilumina el objeto con la fuente extensa también lo sea. Basta tener en cuenta que la correlación de una función periódica con una función cualquiera es siempre una función periódica del mismo periodo y aplicar este hecho a la ec. (2.100) para justificar esta afirmación. Así pues, podremos expresar

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \lambda) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_r(p)} \quad (2.126)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{F} \left\{ e^{j \frac{2\pi \vec{w}' \cdot \vec{r}}{p}}; \vec{w}' \right\} = \delta(\vec{w} - \vec{w}') \quad (2.127)$$

la ec. (2.116) establece para este caso que

$$\frac{i'_r(R_o; \lambda)}{i'_r(R_o; \lambda)} = H_L(\bar{w}_{r0}(p); f, R_o), \quad \forall r \in \mathbb{Z}/i'_r(R_o; \lambda) \neq 0. \quad (2.128)$$

Por lo tanto, los cocientes de los respectivos coeficientes de Fourier de los patrones parcialmente coherente y coherente nos proporcionan los valores de la función de transferencia heurística para un conjunto de frecuencias espaciales discretas, todas ellas situadas en el eje de abscisas del dominio de Fourier, cuyas coordenadas cartesianas vienen dadas por

$$u_r = \frac{r}{p}, \quad v_r = 0, \quad \forall r \in \mathbb{Z}/i'_r(R_o; \lambda) \neq 0. \quad (2.129)$$

Así pues, el objeto periódico escogido nos permite muestrear la función de intensidad mutua $J_f(\Delta\vec{r}, \vec{0})$ en una serie de puntos en el plano $\Delta\vec{r}$ con coordenadas cartesianas

$$\Delta x_r = -\frac{\lambda R_o r}{p}, \quad \Delta y_r = 0, \quad \forall r \in \mathbb{Z}/i'_r(R_o; \lambda) \neq 0. \quad (2.130)$$

Estos puntos de muestreo se sitúan sobre el eje de abscisas de dicho plano, y se encuentran equiespaciados a lo largo de esta dirección una cantidad $\lambda R_o/p$, tal y como se muestra en la fig. 2.8.

Las muestras de la función de coherencia estudiada que se pueden obtener de este modo son claramente insuficientes para describir la función de intensidad mutua, en el caso general de que ésta presente variaciones a lo largo de otras direcciones diferentes de la referida anteriormente. Sólo en los casos en los que dicha función presente simetría de revolución o variaciones sólo en la dirección del eje de abscisas este muestreo sería adecuado. Esta limitación puede superarse, sin tener que considerar un objeto diferente, si éste se rota en torno al eje óptico. Vamos a comprobar a continuación que la línea de muestreo gira en el plano $\Delta\vec{r}$ acompañando en su movimiento al objeto, permitiendo obtener valores de dicha función en otras regiones de interés.

Consideremos, por tanto, que el objeto anterior se gira alrededor del eje óptico un cierto ángulo θ , tal y como se muestra en la fig. 2.9. Si referimos la transmitancia en amplitud del objeto a un sistema de referencia cartesiano $OX'_oY'_o$ que haya girado solidariamente con éste, su expresión será formalmente idéntica a la de la ec. (2.75), es decir

$$t_\theta(x'_o) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j2\pi x'_o u_n(p)}, \quad (2.131)$$

Por lo tanto, si sobre el plano de observación consideramos un sistema de referencia girado el mismo ángulo θ respecto del considerado anteriormente, es evidente que

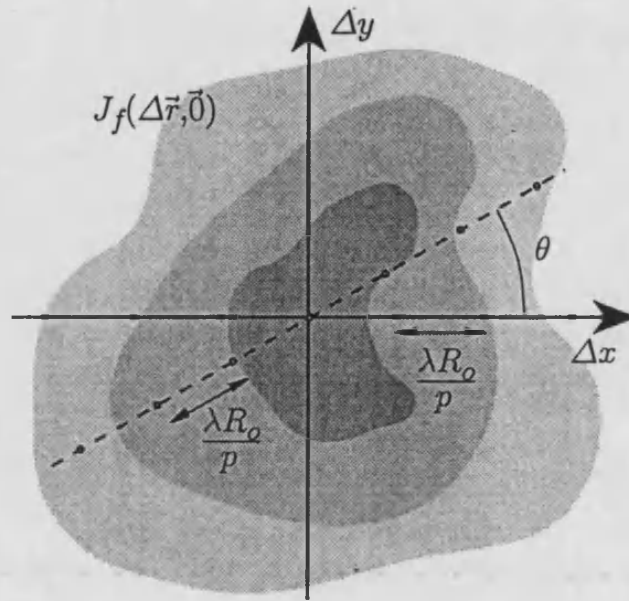


Figura 2.8. Diagrama donde se indica la posición de los puntos de muestreo que se obtienen de la función de intensidad mutua en el plano del objeto (círculos rellenos). Cuando la red difractante se gira respecto del eje óptico un ángulo θ , la línea en la que se localizan las muestras rota de manera solidaria en el plano $(\Delta x, \Delta y)$ (puntos huecos).

la respuesta impulsional referida a estos nuevos ejes vendrá dada por

$$I'_{R_o, \theta}(\vec{r}'; \vec{0}; \lambda) = \frac{1}{f^2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi x' u_r(p)}. \quad (2.132)$$

Por lo que se refiere a la respuesta en presencia de la fuente extensa, el resultado anterior nos conduce a afirmar que, en este nuevo sistema de referencia, será de nuevo una función periódica unidimensional, es decir

$$I'_{R_o, \theta}(\vec{r}'; \lambda) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_{r, \theta}(R_o; \lambda) e^{j2\pi x' u_r(p)}, \quad (2.133)$$

donde $i'_{r, \theta}(R)$ son los coeficientes de la serie de Fourier en el sistema de referencia girado. Las coordenadas cartesianas en el nuevo sistema de referencia y las referidas al sistema original sin girar están relacionadas por la transformación lineal

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}, \quad (2.134)$$

y, por tanto, en el sistema de referencia original las ecs. (2.132) y (2.133) se expre-

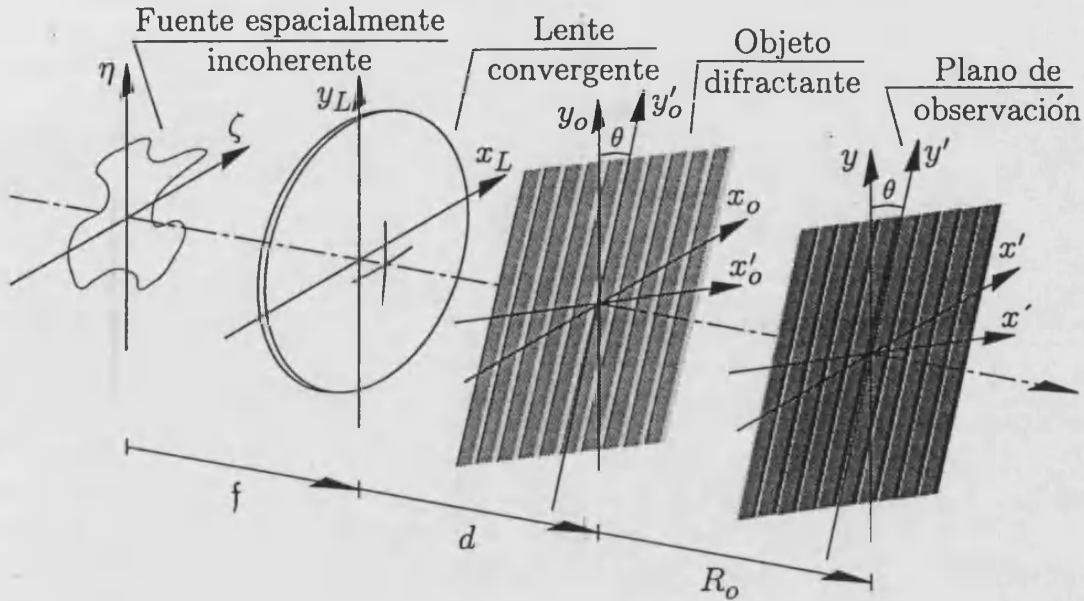


Figura 2.9. Dispositivo análogo al descrito en la fig. 2.7, en el que se ha girado el objeto respecto del eje óptico un ángulo θ . Los sistemas de referencia OX_oY_o y $OX'_oY'_o$ coinciden para $\theta = 0$, y el último de ellos gira de modo solidario con el objeto. Lo mismo se aplica a los sistemas OXY y $OX'Y'$.

sarán

$$I'_{R_o, \theta}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{1}{f^2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)u_r(p)} \quad (2.135)$$

y

$$I'_{R_o, \theta}(\vec{r}; \lambda) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_{r, \theta}(R_o; \lambda) e^{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)u_r(p)} \quad (2.136)$$

respectivamente. La transformación de Fourier de estas dos expresiones y la aplicación de la ec. (2.116), conduce en este caso a

$$\frac{i'_{r, \theta}(R_o; \lambda)}{i'_r(R_o; \lambda)} = H_L(\vec{w}_{r0, \theta}(p); f, R_o) \quad \forall r \in \mathbb{Z} / i'_r(R_o; \lambda) \neq 0 \quad (2.137)$$

donde $\vec{w}_{r0, \theta}(p)$ es el vector de coordenadas cartesianas $((r \cos \theta) / p, (r \sin \theta) / p)$. Es decir, obtenemos en este caso un muestreo de la función de transferencia para frecuencias espaciales dadas por

$$u_r(\theta) = \frac{r \cos \theta}{p} \quad , \quad v_r(\theta) = \frac{r \sin \theta}{p} \quad , \quad \forall r \in \mathbb{Z} / i'_r(R_o; \lambda) \neq 0 \quad (2.138)$$

y, en consecuencia, podremos obtener el valor de la intensidad mutua sobre el plano

del objeto para valores

$$\Delta x_r(\theta) = -\frac{\lambda R_o r \cos \theta}{p}, \quad \Delta y_r(\theta) = -\frac{\lambda R_o r \sin \theta}{p}, \quad \forall r \in \mathbb{Z} / i'_r(R_o; \lambda) \neq 0. \quad (2.139)$$

Estos valores se sitúan, de nuevo, sobre una línea recta que pasa por el origen en el plano $\Delta \vec{r}$, y equidistan una cantidad $\lambda R_o/p$; en cambio, esta línea forma un ángulo θ respecto a la recta de muestreo anterior, tal y como se pone de manifiesto en la fig. 2.8. Así pues, seleccionando valores diferentes de dicho ángulo es posible muestrear secuencialmente la función de intensidad mutua sobre el plano del objeto a lo largo rectas con diferentes orientaciones en el dominio de definición de dicha función.

Tal y como hemos indicado, las muestras anteriores pueden ser obtenidas a partir de la comparación de los coeficientes de Fourier de los patrones coherentes y parcialmente coherentes que genera el objeto. Teniendo en cuenta que los valores de $i'_r(R_o; \lambda)$ pueden ser determinados, a partir de la ec. (2.124), con el mero conocimiento de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del objeto, estas muestras quedan totalmente determinadas con la medida experimental de los coeficientes $i'_{r,\theta}(R_o; \lambda)$.

Esta medida puede abordarse desde dos perspectivas diferentes. La primera de ellas consiste en elegir un plano de observación fijo y obtener las muestras que correspondan a todos los órdenes no nulos de la correspondiente respuesta impulsional coherente. Aunque teóricamente es posible que un número infinito de éstos presenten un valor no nulo, en la práctica sus valores absolutos decaen rápidamente al aumentar el orden considerado, haciendo que sólo unos pocos de ellos sean realmente útiles como puntos de muestreo. El desarrollo de esta técnica nos ha llevado a proponer el dispositivo presentado en las refs. (Barreiro y Ojeda-Castañeda 1993) y (Saavedra *et al.* 1993), aunque en ellas se considera el caso en el que la fuente incoherente se localiza a distancia finita del objeto difractante. Aunque desde el punto de vista formal resulta un poco más complejo de estudiar, la equivalencia establecida entre el conjunto de patrones de difracción que se obtienen con iluminación esférica y paralela conduce a las mismas conclusiones establecidas en el caso aquí estudiado, aunque la equidistancia entre los puntos de muestreo cambia con el plano de observación elegido. Este hecho hace de la propuesta que se hace en dichas referencias un dispositivo sin lentes muy versátil de medida de la intensidad mutua. Este mismo dispositivo, aplicado a fuentes unidimensionales permite realizar un muestreo completo de dicha función considerando un giro progresivo de la red difractante en torno al eje óptico, como puede deducirse de modo sencillo del razonamiento seguido previamente (Lohmann *et al.* 1995).

La segunda técnica consiste en fijarse en un único orden del desarrollo de Fourier para diferentes planos de observación. En este caso, además del cambio producido

al modificar la orientación del objeto, las diferentes muestras se obtienen por la variación que se produce en las posiciones de muestreo al cambiar el valor de R_0 . Los coeficientes de orden más bajo suelen ser los más adecuados porque su valor absoluto mantiene valores suficientemente elevados como para proporcionar valores significativos para las muestras. La comparación de los coeficientes de orden 0 de los patrones coherente y parcialmente coherente en cada uno de los planos de observación sólo proporciona información sobre la potencia total emitida por la fuente. En efecto, el valor muestreado en este caso para cualquier plano de observación, es, teniendo en cuenta la ec. (2.115) y la definición de la transformada de Fourier dada por la ec. (2.30),

$$H_L(\vec{0}; f, R) = \tilde{I}_S(\vec{0}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_S(\vec{\rho}) d^2\vec{\rho} = P_S, \quad (2.140)$$

siendo P_S la potencia total emitida por la fuente.

Los coeficientes de orden más bajo susceptibles de proporcionar diferentes puntos de muestreo en los diferentes planos de observación son los de orden ± 1 . La elección del orden $+1$ o del -1 es irrelevante ya que

$$J_f(-\Delta\vec{r}, \vec{0}) = J_f^*(\Delta\vec{r}, \vec{0}), \quad (2.141)$$

como se deduce directamente de la definición (2.108), y, por lo tanto, las muestras para los órdenes positivos están relacionadas con las de los correspondientes valores negativos por una simple operación de conjugación.

La medida del coeficiente de orden 1 de una distribución periódica de irradiancia puede realizarse a través de diferentes procedimientos experimentales. En particular, proponemos a continuación dos técnicas que permiten su obtención, al margen de los métodos convencionales de obtención de la transformada de Fourier por métodos digitales.

En la primera de ellas utilizaremos una red de difracción unidimensional en la misma orientación que la distribución de irradiancia a medir y con el mismo periodo de ésta, junto con un detector de área muy amplia en relación con dicho periodo. Esta red auxiliar se sitúa sobre el plano a analizar y se desplaza con velocidad uniforme v en dirección transversal. El detector se sitúa inmediatamente después, tal y como se muestra en la fig. 2.10, recogiendo la energía que emerge de la red en una amplia región de ésta. Es obvio que la respuesta de dicho detector a lo largo del tiempo es una función periódica. Esta señal puede ser analizada de modo sencillo mediante el uso de filtros electrónicos digitales, de modo que su espectro temporal sea accesible de manera automatizada. A continuación vamos a demostrar que el coeficiente que corresponde al primer armónico de dicha función temporal es directamente proporcional al coeficiente de orden 1 de la distribución espacial de irradiancia que se pretende analizar.

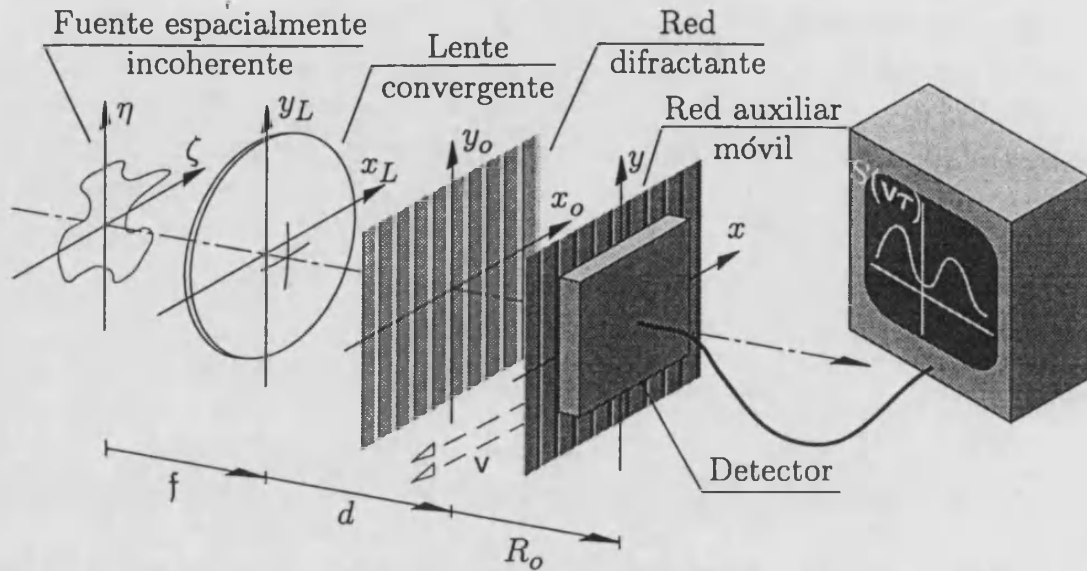


Figura 2.10. Esquema del dispositivo propuesto para la medida del valor del coeficiente de orden 1 del desarrollo de Fourier de una distribución periódica unidimensional de irradiancia. La red auxiliar, que se desplaza con velocidad uniforme v , tiene el mismo periodo que el patrón que se estudia y se orienta de modo que las direcciones de invariancia de ambos coincidan.

Consideremos la respuesta que proporciona el detector en un determinado instante τ . En dicho momento supondremos que la red auxiliar se encuentra desplazada una cantidad $\alpha = v\tau$, de modo que la distribución de irradiancia que se obtiene inmediatamente después de éste vendrá dada por

$$\widehat{\mathcal{I}}_{R_o}(\vec{r}; \alpha; \lambda) = \mathcal{I}'_{R_o}(\vec{r}; \lambda) T(x - \alpha), \quad (2.142)$$

donde $T(x)$ es la transmitancia en irradiancia de la red auxiliar en el instante $\tau = 0$. Al ser esta última una función unidimensional periódica podrá expresarse como una serie de Fourier, es decir,

$$T(x) = \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} T_{r'} e^{j2\pi x u_{r'}(p)} \quad (2.143)$$

donde p representa el periodo de ésta. Considerando esta expresión y la indicada en la ec. (2.126), la ec. (2.142) podrá reescribirse como

$$\widehat{\mathcal{I}}_{R_o}(\vec{r}; \alpha; \lambda) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} T_{r'} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_{r+r'}(p)} e^{-j2\pi \alpha u_{r'}(p)}. \quad (2.144)$$

Estimaremos ahora la respuesta que proporciona el detector. Si consideramos, por simplicidad, que la superficie activa de éste es un cuadrado con sus lados orientados

paralelos a los ejes de coordenadas, tendremos que

$$S(\alpha) = \varepsilon(\lambda) \iint_{\mathcal{L}} \widehat{\mathcal{I}}_{R_o}(\vec{r}; \alpha; \lambda) d^2\vec{r} = \varepsilon(\lambda)L \int_0^L \widehat{\mathcal{I}}_{R_o}(\vec{r}; \alpha; \lambda) dx, \quad (2.145)$$

donde $S(\alpha)$ es la señal eléctrica que proporciona el detector, $\varepsilon(\lambda)$ es un factor de proporcionalidad que da cuenta de la eficiencia del detector, siendo L la longitud de los lados de su superficie sensible y la región de integración $\mathcal{L} = [0, L] \times [0, L]$. Si $L \gg p$, podemos expresar que

$$L = Np + l, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (2.146)$$

con $l \ll Np$. Por lo tanto, la ec. (2.145) podrá expresarse, con muy buena aproximación, como

$$\begin{aligned} S(\alpha) &\cong \varepsilon(\lambda)L \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} T_{r'} i'_r(R_o; \lambda) e^{-j2\pi\alpha u_{r'}(p)} \int_0^{Np} e^{j2\pi x u_{r+r'}(p)} dx = \\ &= \varepsilon(\lambda)LN \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} T_{r'} i'_r(R_o; \lambda) e^{-j2\pi\alpha u_{r'}(p)} \int_0^p e^{j\frac{2\pi x(r+r')}{p}} dx. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Si tenemos en cuenta, por último, que

$$\int_0^p e^{j\frac{2\pi x(r+r')}{p}} dx = p \delta_{r', -r}, \quad (2.148)$$

donde $\delta_{i,j}$ representa la función delta de Kröneckner, tendremos, finalmente, que

$$\begin{aligned} S(\alpha) &\cong \varepsilon(\lambda)LNp \sum_{r=-\infty}^{+\infty} T_{-r} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi\alpha u_r(p)} \cong \\ &\cong \varepsilon(\lambda)\mathcal{A} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} T_{-r} i'_r(R_o; \lambda) e^{j2\pi\alpha u_r(p)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h_r e^{j2\pi\alpha u_r(p)}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

donde hemos denominado \mathcal{A} al área sensible del detector. Si consideramos ahora como evoluciona esta función al variar α uniformemente con el tiempo, obtendremos una señal periódica cuyo primer armónico tendrá una amplitud dada por

$$h_1 = \varepsilon(\lambda)\mathcal{A}T_{-1} i'_1(R_o; \lambda). \quad (2.150)$$

Por lo tanto, conocida el área del detector y el coeficiente de orden -1 de la transmitancia en irradiancia de la red auxiliar, el valor del coeficiente de orden 1 de

la señal temporal proporcionada por el detector nos permite obtener el coeficiente de orden 1 de la distribución de irradiancia que se pretende analizar. Esta técnica puede considerarse una extensión simplificada de la técnica propuesta por Seykora (1986, 1990). En ésta se estudia la variación del coeficiente de orden 1 de la distribución de irradiancia únicamente en los planos de autoimagen mediante un movimiento relativo de las redes más complejo que el aquí presentado. Otro método con el que mantiene cierta analogía es el propuesto por Chitralkha (1990) y Tu (1991), en el que en vez de un desplazamiento de las redes se realiza un giro respecto del eje óptico, que modifica la orientación relativa de las líneas de ambas. En ese caso, sin embargo, el análisis de los resultados es más complicado que en nuestra propuesta.

La segunda técnica que proponemos permite obtener el valor del coeficiente de Fourier de orden 1 de la distribución de irradiancia de forma simultánea para diferentes planos de observación. En el método propuesto anteriormente, la independencia en la coordenada y de dicha distribución proporcionaba, simplemente, un refuerzo de la señal eléctrica de salida del detector, como se pone de manifiesto en la ec. (2.145), ya que la información contenida a lo largo de diferentes líneas paralelas al eje x era la misma. Es posible, sin embargo, realizar un registro bidimensional de irradiancia en el que dicha redundancia desaparezca. La capacidad de funcionamiento en paralelo de los dispositivos ópticos puede ser explotada en un procesado óptico posterior de dicho registro de un modo más eficiente que en el caso anterior. Para ello, proponemos el dispositivo mostrado en la fig. (2.11).

Consideremos un plano que contiene al eje de abscisas del plano del objeto y que forma un cierto ángulo con el eje óptico. Si se realiza un registro lineal (ya sea por procedimientos fotoquímicos o electrónicos) de la distribución de irradiancia que se obtiene sobre dicho plano, el resultado puede considerarse como la yuxtaposición de líneas paralelas a dicho eje de abscisas de modo que en cada una de ellas se codifica el perfil de la distribución de irradiancia unidimensional $\mathcal{I}_{R_o}^l(\vec{r}; \lambda)$ para un plano de observación diferente. Si se transfiere dicho registro a la transmitancia en amplitud de un objeto difractante, puede realizarse una transformación de Fourier de cada una de las líneas simultáneamente mediante el procesador óptico anamórfico coherente que se indica en dicha figura. En el plano de salida de dicho procesador se encuentra directamente accesible el valor de $i_r'(R_o; \lambda)$ para un rango de valores de R_o limitado por la extensión del registro realizado.

Sea cual sea la técnica utilizada, podemos concluir que la utilización del concepto de función de transferencia heurística introducido en §2.4 permite proponer una serie de métodos alternativos de medida de la coherencia espacial de campos cuasimonocromáticos en los que, a excepción de la lente colimadora que es innecesaria en el caso de fuentes situadas a distancia infinita, sólo se requiere el uso de sencillos elementos difractivos como son las redes de difracción. Tal y como

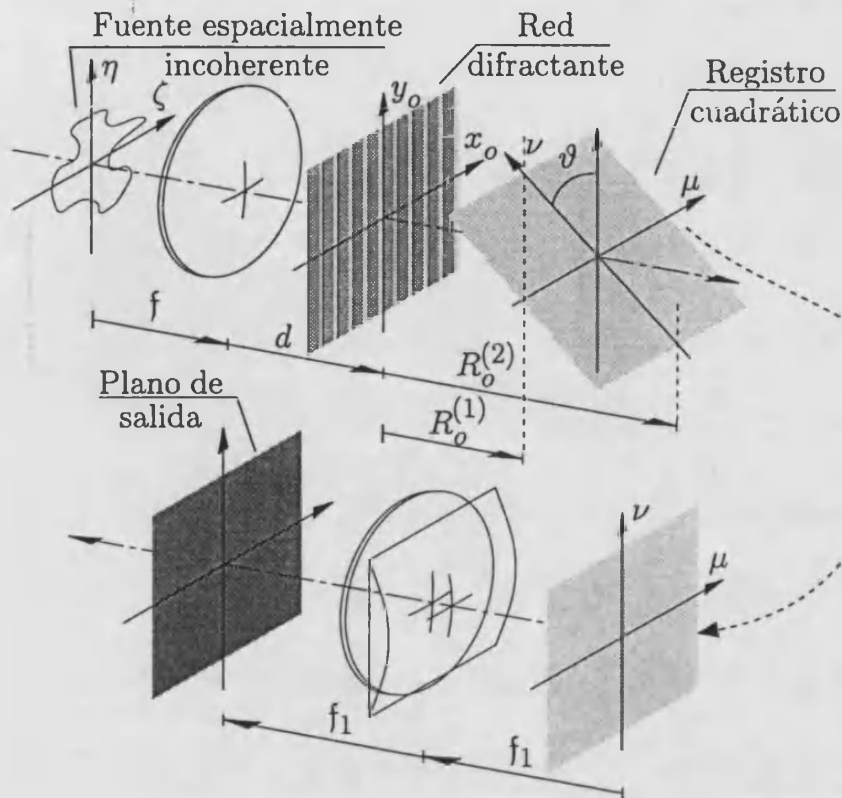


Figura 2.11. Dispositivo propuesto para la medida simultánea del valor del coeficiente de orden 1 del desarrollo de Fourier de los patrones unidimensionales de irradiancia generados por el objeto difractante a distancias de éste en comprendidas entre $R_0^{(1)}$ y $R_0^{(2)}$. El registro obtenido en la primera etapa del procesador se transfiere a una transparencia que se procesa, en un segundo paso, con iluminación paralela coherente. La asociación de la lente cilíndrica y la esférica del sistema propuesto para esta segunda etapa, ambas con la misma distancia focal imagen, f_1 , proporciona la transformada de Fourier de dicha transparencia en la dirección Y , tal y como se mostrará más adelante en esta Memoria.

quedará patente en el siguiente capítulo, es posible explotar esta idea también en el procesado óptico de información con fuentes espacialmente incoherentes cuasimonocromáticas.

2.6 Difracción con una fuente puntual temporalmente incoherente

Hasta ahora hemos realizado una serie de consideraciones relacionadas con los sistemas ópticos que trabajan con fuentes espacialmente incoherentes pero que se

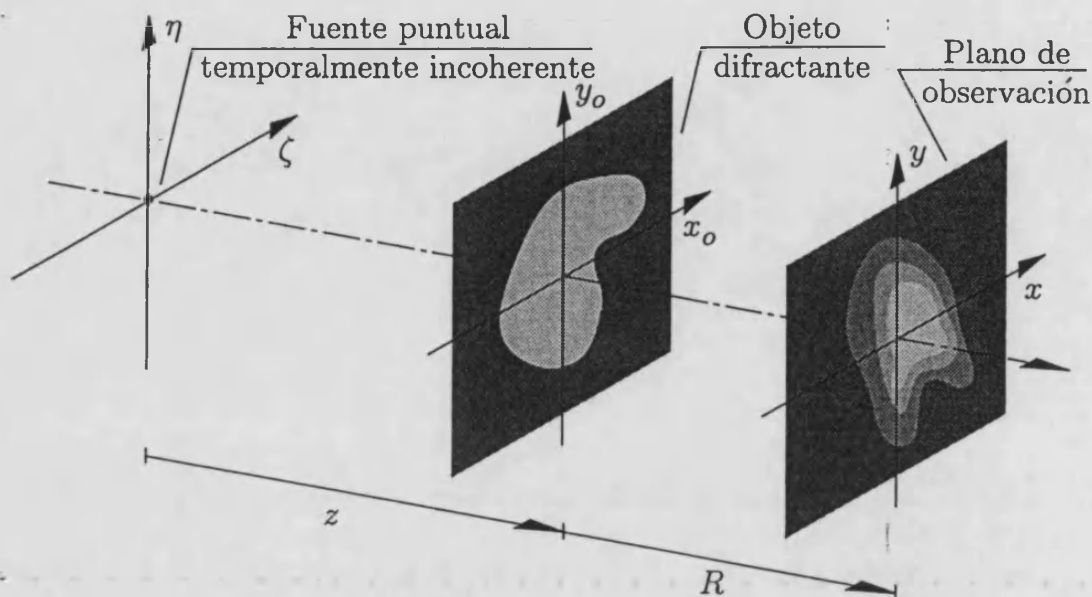


Figura 2.12. Representación esquemática de la disposición geométrica que se propone para estudiar los patrones de difracción generados por una abertura plana difractante iluminada con una fuente puntual temporalmente incoherente. Los sistemas de referencia en los planos de la fuente y de observación se han elegido del mismo modo que se hizo en la fig. 2.1.

comportan de modo coherente desde el punto de vista temporal. En lo que resta del capítulo consideraremos otro caso extremo de iluminación no coherente, como es el caso de los sistemas iluminados por una fuente puntual que emite radiación de ancho de banda finito. Esto se traduce en una perfecta coherencia espacial y en una coherencia temporal parcial.

Centraremos nuestro interés, de nuevo, en el estudio de la distribución de irradiancia que aparece sobre un plano situado a una distancia R de un objeto difractante plano iluminado por una fuente de este tipo, situada a una distancia z de éste, tal y como se muestra en la fig. 2.12. En este caso, el eje óptico quedará definido por la recta normal al plano del objeto que contiene a la fuente.

Siguiendo un razonamiento análogo al seguido en §2.3, podemos descomponer la radiación emitida por la fuente real en una serie de componentes cuasimonocromáticas, incoherentes entre sí para dar cuenta de la incoherencia temporal de la fuente real. Esta descomposición hace que la irradiancia en cualquier punto del espacio pueda calcularse por la adición de la irradiancia proporcionada en dicho punto por cada uno de estos emisores cuasimonocromáticos⁵. Dicha adición

⁵De modo implícito, hemos considerado que los detectores utilizados para observar dicha irradiancia tienen una sensibilidad igual para todas las componentes cuasimonocromáticas, y que esta eficiencia es la unidad. En capítulos posteriores se considerará el efecto de la sensibilidad

conduce a una integral de superposición análoga a la de la ec. (2.79), de modo que la distribución de irradiancia policromática que se observa sobre un plano de observación a distancia R del objeto vendrá dada por

$$I_R(\vec{r}; z) = \int_{\Lambda} I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) dP(\lambda) , \quad (2.151)$$

donde $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda)$ es la distribución de irradiancia que sobre el plano de observación generaría un emisor puntual cuasimonocromático de longitud de onda media λ , situado en la misma posición que la fuente, y de potencia radiada unidad, y $dP(\lambda)$ representa la potencia transportada por la componente cuasimonocromática de la fuente real correspondiente a la misma longitud de onda media. El símbolo Λ representa el rango espectral en el que la fuente emite radiación. La magnitud que caracteriza la potencia radiada (en todas las direcciones) por cada una de estas componentes para una fuente policromática es la potencia espectral radiante, que se define como el cociente entre la potencia emitida por dicho emisor elemental, $dP(\lambda)$, y su anchura espectral, $d\lambda$. En términos matemáticos

$$S(\lambda) = \frac{dP(\lambda)}{d\lambda} . \quad (2.152)$$

Por lo tanto, la ec. (2.151) puede escribirse como

$$I_R(\vec{r}; z) = \int_{\Lambda} I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) S(\lambda) d\lambda , \quad (2.153)$$

expresión que permite conocer la distribución de irradiancia sobre el plano de observación a partir de la respuesta en dicho plano a una componente cuasimonocromática de potencia unidad. Para un valor dado de z y R , el valor del parámetro K , definido en la ec. (2.10), que caracteriza la estructura de estos patrones cuasimonocromáticos, es diferente para cada una de las componentes espectrales de la fuente, y, por lo tanto, cada una de ellas proporciona una respuesta distinta sobre el plano de observación. Esta diferencia no se reduce, en ningún caso, a un mero desplazamiento como ocurría en §2.3, sino que la forma de estas funciones es esencialmente distinta.

Ahora bien, las propiedades estudiadas en §2.2 respecto a la unicidad del conjunto de patrones cuasimonocromáticos respecto del cambio en la posición de la fuente se van a transferir al conjunto formado por los patrones policromáticos generados por una fuente puntual con una potencia espectral radiante dada. Así pues, vamos a demostrar que el cambio de iluminación plana a iluminación a esférica

no proporciona distribuciones de irradiancia policromática esencialmente distintas, sino que, de nuevo, sólo se produce una redistribución y reescalado de las mismas.

Consideremos, en primer lugar, el caso de un objeto difractante plano que se somete a iluminación plana de ancho de banda temporal finito. Vamos a fijarnos en un patrón de irradiancia policromático cualquiera, situado a distancia R_o del objeto difractante. Dicha distribución vendrá dada, de acuerdo con la ec. (2.153), por la superposición ponderada de las respuestas impulsionales proporcionadas por cada una de las componentes espectrales de la radiación incidente. Cada una de estas respuestas exhibirá un perfil diferente caracterizado, para cada longitud de onda λ , por un valor de la constante K dado por

$$K = \frac{1}{\lambda R_o} . \quad (2.154)$$

Si ahora situamos la fuente a distancia finita del objeto, cada uno de los patrones cuasimonocromáticos que antes se encontraban sobre el plano de observación escogido se localizarán en planos cuya distancia al objeto, $R(z, \lambda)$, vendrá dada, de acuerdo con la ec. (2.10), por

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{R(z, \lambda)} \right) = K = \frac{1}{\lambda R_o} . \quad (2.155)$$

Despejando el valor de $R(z, \lambda)$, obtenemos que, independientemente de λ ,

$$R(z, \lambda) = R(z) = \frac{z R_o}{z - R_o} . \quad (2.156)$$

Es decir, que los patrones cuasimonocromáticos que con iluminación plana se sitúan sobre un mismo plano, con iluminación esférica se localizan también a la misma distancia del objeto difractante. Por lo que respecta a la escala de los mismos, el resultado anterior, junto con la interpretación geométrica que se hizo en la fig. 2.3 de la ec. (2.27), nos permite concluir que todos estos patrones cuasimonocromáticos se encontrarán igualmente escalados respecto de las distribuciones obtenidas con iluminación plana. Esto producirá un reescalado global de la respuesta policromática, que mantendrá el mismo aspecto que exhibía con iluminación paralela. Por lo tanto, las distribuciones de irradiancia policromáticas que se obtienen con iluminación esférica son simples versiones escaladas, repositionadas axialmente, de las obtenidas con iluminación paralela. La redistribución axial y el reescalado de cada una de ellas vendrán dados por las ecs. (2.156) y (2.21), respectivamente. Finalmente, es directo concluir también que la misma conclusión se aplica a la comparación de dos situaciones diferentes de iluminación esférica. Basta comparar ambas con el caso de iluminación paralela.

Por otro lado, el hecho de que en la integral indicada en la ec. (2.153) se superpongan distribuciones de irradiancia asociadas a diferentes valores del parámetro K hace que la función $I_R(\vec{r}; z)$ presente un perfil diferente al de cada una de las respuestas cuasimonocromáticas. Desde el punto de vista de la teoría de la coherencia, esta diferencia es debida al valor de la coherencia temporal de la radiación que ilumina el objeto. Ésta puede ser caracterizada, para cada uno de los puntos del plano del objeto, por la función de autocohérence $\Gamma(\tau)$, que mide la correlación existente entre las amplitudes del campo electromagnético sobre dicho punto en instantes de tiempo distintos t y $t + \tau$ (Born y Wolf 1980, p. 540). Matemáticamente,

$$\Gamma(\tau) = \langle U^*(t + \tau) U(t) \rangle , \quad (2.157)$$

donde $U(t)$ representa la amplitud luminosa en el punto considerado y los paréntesis angulares son equivalentes a un promedio temporal, para el tipo de campos electromagnéticos que estamos estudiando. Esta función, en el caso que nos ocupa, permite conocer la distribución de irradiancia en cualquier punto del espacio, de modo análogo a lo que ocurre con la función de intensidad mútua en el caso de iluminación cuasimonocromática espacialmente incoherente.

La función de autocohérence y la potencia espectral están ligadas, básicamente, por una transformación de Fourier, tal y como se deduce del teorema de Wiener-Khintchine (Born y Wolf 1980, p. 504). Este hecho permite obtener la una a partir de la otra de un modo relativamente sencillo. Sin embargo, desde un punto de vista práctico suele resultar mucho más interesante la obtención de la función $S(\lambda)$, ya que puede ligarse de modo mucho más directo con algunas características físicas de los emisores que constituyen la fuente. Por ello, en la siguiente sección, nos centraremos en la medida de la potencia espectral de una fuente puntual, aunque por el procedimiento indicado anteriormente podría obtenerse, así mismo, la función de autocohérence asociada a la radiación emitida por dicha fuente sobre cualquier plano de observación elegido.

2.7 Medida de la potencia espectral

De modo similar al procedimiento desarrollado en §2.5, en esta sección vamos a obtener información sobre la potencia espectral de una fuente puntual de ancho de banda temporal finito, a partir del estudio de los patrones de difracción de Fresnel que se obtienen al iluminar con dicha fuente un objeto plano difractante. Estas distribuciones de irradiancia policromáticas corresponderán a la superposición de las respuestas cuasimonocromáticas, de acuerdo con la ec. (2.153). A diferencia de lo que ocurría en el caso de iluminación espacialmente incoherente, esta ecuación no tiene la forma de una correlación y, por lo tanto, el proceso seguido en las secciones precedentes no es directamente aplicable a esta nueva situación. Por otro lado, tal

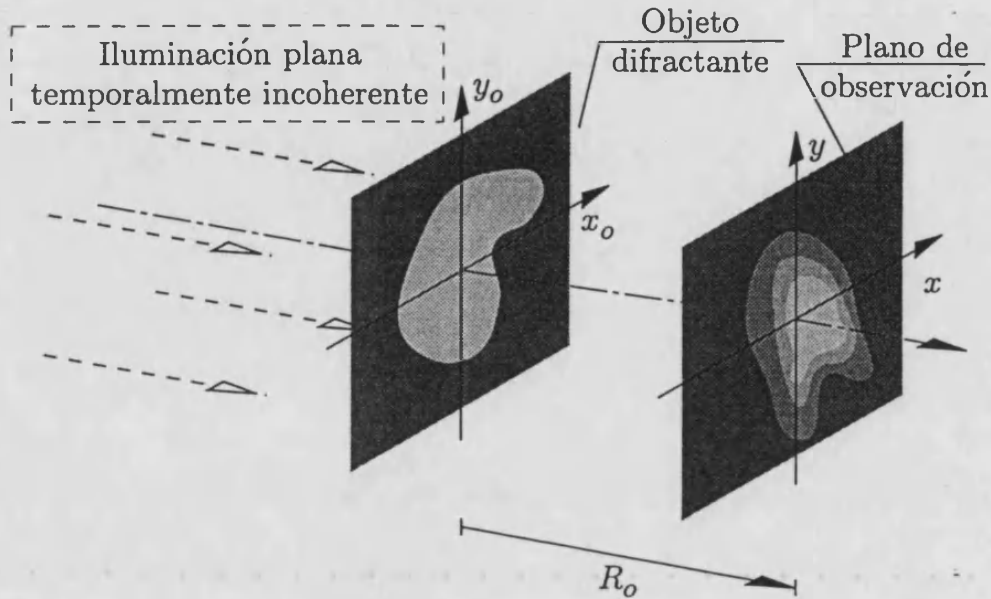


Figura 2.13. Disposición geométrica que se propone para estudiar los patrones de difracción generados por una abertura plana iluminada con una fuente puntual temporalmente incoherente a distancia infinita de ella. Consideraremos, por simplicidad, que la radiación incide perpendicular al plano del objeto, lo que equivale a suponer que la fuente se encuentra sobre el eje óptico.

y como quedó establecido en la sección anterior, el paso de iluminación plana a esférica sólo proporciona una redistribución de la información contenida en los patrones de difracción policromáticos. Por ello, nos vamos a centrar en el estudio del caso de iluminación paralela del objeto, que es el que presenta más ventajas desde un punto de vista práctico y el que resulta más sencillo en su tratamiento teórico. Si la fuente puntual que se pretende estudiar se encuentra situada a una distancia finita del objeto difractante, es posible obtener, en cualquier caso, una iluminación plana del mismo situando dicha fuente sobre el foco objeto de una lente convergente acromática, localizada entre ella y la abertura difractante, tal y como se estableció en secciones anteriores.

Así pues, consideremos el campo difractado por un objeto plano, cuya transmitancia en amplitud denominaremos $t(\vec{r}_o)$, tal y como se muestra en la fig. 2.13. La respuesta cuasimonocromática con iluminación plana sobre cualquier plano de observación, situado a distancia R_o del objeto, podrá ser calculada a través del módulo cuadrado de la respuesta en amplitudes $U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda)$ dada por la ec. (2.17), es decir

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{1}{(\lambda R_o)^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j \frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}_o|^2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda R_o} \vec{r} \cdot \vec{r}_o} d^2 \vec{r}_o \right|^2, \quad (2.158)$$

donde hemos tomado, por simplicidad, $A = 1$. Por tanto, la distribución de irradiancia policromática sobre este plano vendrá dada por

$$I'_{R_o}(\vec{r}) = \frac{1}{R_o^2} \int_{\Lambda} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_o) e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o} |\vec{r}_o|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R_o} \vec{r} \cdot \vec{r}_o} d^2\vec{r}_o \right|^2 \frac{S(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda. \quad (2.159)$$

La obtención de $S(\lambda)$ a través de la expresión anterior a partir de la medida de $I'_{R_o}(\vec{r})$ es, en general, muy complicada y, en muchos casos, inviable. Sin embargo, si se considera un objeto unidimensional periódico como el utilizado en §2.5, este proceso se simplifica drásticamente. En efecto, en este caso, a través de un proceso análogo al seguido en §2.5, se obtiene que

$$I'_{R_o}(\vec{r}) = \int_{\Lambda} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a'_{n'+r}(R_o; \lambda) a_{n'}^*(R_o; \lambda) e^{j2\pi x u_r(p)} S(\lambda) d\lambda, \quad (2.160)$$

donde los coeficientes $a'_n(R_o; \lambda)$ vendrán dados por la ec. (2.38). Sustituyendo éstos por su valor, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$I'_{R_o}(\vec{r}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{\Lambda} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a_{n'+r} a_{n'}^* e^{-j\pi\lambda \frac{R_o}{p^2} [(n'+r)^2 - n'^2]} S(\lambda) d\lambda \right\} e^{j2\pi x u_r(p)}. \quad (2.161)$$

Operando de modo adecuado, obtenemos finalmente

$$I'_r(R_o) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} i'_r(R_o) e^{j2\pi x u_r(p)}, \quad (2.162)$$

donde

$$i'_r(R_o) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a_{n'+r} a_{n'}^* \int_{\Lambda} S(\lambda) e^{-j2\pi\lambda \frac{R_o}{p^2} (n' + \frac{r}{2}) r} d\lambda. \quad (2.163)$$

La función $S(\lambda)$ es de soporte compacto, de modo que es idénticamente nula fuera de Λ . Por otro lado, aunque sólo está definida para valores de $\lambda > 0$, es posible redefinir su dominio para que se extienda a toda la recta real manteniendo el soporte anterior. Con ello, la integral anterior puede extenderse a todo \mathbb{R} , de modo que podemos expresar el resultado anterior como

$$i'_r(R_o) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a_{n'+r} a_{n'}^* \tilde{S} \left(\frac{R_o}{p^2} \left(n' + \frac{r}{2} \right) r \right), \quad (2.164)$$

donde $\tilde{S}(u)$ representa la transformada de Fourier unidimensional de $S(\lambda)$, definida como

$$\tilde{S}(u) = \mathcal{F}_{1D} \{S(\lambda), u\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda) e^{-j2\pi\lambda u} d\lambda . \quad (2.165)$$

El resultado de la ec. (2.162) nos indica, por lo tanto, que el patrón de irradiancia policromática sobre cualquier plano de observación es una distribución periódica con el mismo periodo y orientación que el objeto, cuyos coeficientes de Fourier vienen dados por la expresión de la ec. (2.164). Este resultado no es sorprendente si se tiene en cuenta que, con iluminación paralela, todas las componentes espectrales de la fuente generan patrones de difracción de Fresnel periódicos, con el mismo periodo que el objeto, a cualquier distancia R_o de éste.

La medida de los coeficientes de la serie de Fourier de estos patrones policromáticos abre una vía, a través de la ec. (2.164), para la determinación de la transformada de Fourier de la potencia espectral de la fuente, a partir del conocimiento de los coeficientes a_n de la transmitancia en amplitud del objeto. Este procedimiento se inscribirá, por lo tanto, en el grupo de técnicas espectroscópicas por transformada de Fourier (Vanasse y Sakai 1967) (Ebizuka *et al.* 1995). En particular, a partir de alguno de los métodos establecidos en §2.5 podemos obtener experimentalmente el coeficiente de orden 1 de estas distribuciones de irradiancia para un cierto rango de valores de R_o . El valor de este coeficiente, de la ec. (2.164), vendrá dado por

$$i'_1(R_o) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a_{n'+1} a_{n'}^* \tilde{S} \left(\frac{R_o}{p^2} \left(n' + \frac{1}{2} \right) \right) . \quad (2.166)$$

Si denominamos

$$\rho = \frac{R_o}{p^2} , \quad y \quad e_{n'} = - \left(n' + \frac{1}{2} \right) , \quad (2.167)$$

la expresión anterior queda

$$i'_1(p^2 \rho) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a_{n'+1} a_{n'}^* \tilde{S}(-e_{n'} \rho) . \quad (2.168)$$

Para tratar de obtener el valor de la potencia espectral de la fuente, realizaremos una transformada de Fourier unidimensional de la ecuación anterior, respecto de la variable ρ . El resultado de esta operación será

$$\mathcal{F}_{1D} \{i'_1(p^2 \rho), \lambda\} = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} a_{n'+1} a_{n'}^* \mathcal{F}_{1D} \{ \tilde{S}(-e_{n'} \rho), \lambda \} . \quad (2.169)$$

Si tenemos en cuenta que para cualquier función $g(x)$ se cumple

$$\mathcal{F}_{1D} \{ \mathcal{F}_{1D} \{ g(x), u \}, x \} = g(-x) , \quad (2.170)$$

y

$$\mathcal{F}_{1D} \left\{ g \left(\frac{x - x_0}{\kappa} \right), u \right\} = |\kappa| e^{j2\pi u x_0} \bar{g}(\kappa u) , \quad (2.171)$$

la ec. (2.169) puede reescribirse como

$$\mathcal{F}_{1D} \{ i'_1(p^2 \rho), \lambda \} = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n'} S \left(\frac{\lambda}{e_{n'}} \right) , \quad (2.172)$$

donde

$$\gamma_{n'} = \frac{a_{n'+1} a_{n'}^*}{|e_{n'}|} . \quad (2.173)$$

El segundo miembro de la ec. (2.172) puede interpretarse como la superposición ponderada de un conjunto, en principio infinito, de versiones escaladas de la función $S(\lambda)$. De esta superposición es muy difícil, cuando no imposible, obtener esta función, a no ser que los pesos de esta superposición sean no nulos sólo para un número reducido de términos. Esto es posible de conseguir si los coeficientes del desarrollo de Fourier de la transmitancia en amplitudes del objeto, $a_{n'}$, cumplen determinadas propiedades. En particular, si dichos coeficientes son nulos para valores de n' pares, excepto en el caso de $n' = 0$, la ec. (2.173) quedará

$$\gamma_{n'} = \frac{a_{n'+1} a_{n'}^*}{|e_{n'}|} (\delta_{n',-1} + \delta_{n',0}) , \quad (2.174)$$

y, por lo tanto, la superposición infinita de la ec. (2.172) se reducirá a

$$\mathcal{F}_{1D} \{ i'_1(p^2 \rho), \lambda \} = 2 (a_0 a_{-1}^* S(2\lambda) + a_1 a_0^* S(-2\lambda)) . \quad (2.175)$$

Algunos ejemplos de objetos que cumplen estas propiedades son las redes de difracción sinusoidales y las de Ronchi.

Así pues, eligiendo convenientemente el objeto difractante, es posible obtener la superposición de sólo dos versiones de la potencia espectral de la fuente. Ahora bien, dicha superposición es tal que los sumandos que la componen nunca son no nulos de manera simultánea. Ello es debido a que la función $S(\lambda)$, en su definición extendida, sólo presenta valores distintos de cero para $\lambda > 0$. En dicho rango, por lo tanto, la expresión anterior puede reescribirse como

$$\mathcal{F}_{1D} \left\{ i'_1(p^2 \rho), \frac{\lambda}{2} \right\} = 2 a_0 a_{-1}^* S(\lambda) , \quad \lambda > 0 , \quad (2.176)$$

lo que permite obtener el resultado requerido a partir del conocimiento de los coeficientes a_0 y a_{-1} del objeto difractante y de la medida de los valores de $i'_1(R_o)$.

En la práctica, este último parámetro sólo puede ser medido, obviamente, en un rango limitado de valores de R_o . Desde un punto de vista matemático, el efecto de esta restricción puede estudiarse del siguiente modo. Denominaremos $i_1^{\text{exp}}(R_o)$ a la función de soporte compacto definida por

$$i_1^{\text{exp}}(R_o) = \begin{cases} i'_1(R_o) & \text{si } 0 \leq R_o \leq R_o^{\text{máx}} \\ 0 & \text{si } R_o > R_o^{\text{máx}} \end{cases}, \quad (2.177)$$

siendo $R_o^{\text{máx}}$ el valor máximo del rango de valores de R_o accesible en la práctica. Es evidente que esta función contiene toda la información que podemos obtener de las medidas experimentales en el dispositivo propuesto. Formalmente, la definición anterior puede escribirse como

$$i_1^{\text{exp}}(R_o) = i'_1(R_o) \text{rect} \left(\frac{R_o - \bar{R}_o}{R_o^{\text{máx}}} \right), \quad (2.178)$$

donde $\text{rect}(x)$ es la función rectángulo (Gaskill 1978, p. 43) y $\bar{R}_o = R_o^{\text{máx}}/2$. Si se realiza una transformada de Fourier unidimensional de esta función, tal y como se requiere en la ec. (2.175), y se tiene en cuenta que para dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cualesquiera se cumple

$$\mathcal{F}_{1D} \{f(x)g(x); u\} = \tilde{f}(u) * \tilde{g}(u), \quad (2.179)$$

donde $*$ es la versión unidimensional de la operación de convolución, definida como

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \zeta') g(\zeta') d\zeta' = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta'') g(x - \zeta'') d\zeta'', \end{aligned} \quad (2.180)$$

el resultado podrá expresarse como

$$\mathcal{F}_{1D} \left\{ i_1^{\text{exp}}(p^2 \rho), \frac{\lambda}{2} \right\} = \mathcal{F}_{1D} \left\{ i_1^{\text{exp}}(p^2 \rho), \frac{\lambda}{2} \right\} * \mathcal{F}_{1D} \left\{ \text{rect} \left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\rho^{\text{máx}}} \right), \frac{\lambda}{2} \right\}, \quad (2.181)$$

donde $\rho^{\text{máx}} = R_o^{\text{máx}}/p^2$ y $\bar{\rho} = \rho^{\text{máx}}/2$. Si tenemos en cuenta la propiedad (2.171) y que

$$\mathcal{F}_{1D} \{ \text{rect}(x), u \} = \text{sinc}(u), \quad (2.182)$$

donde $\text{sinc}(u) = \sin(\pi u)/(\pi u)$ es la función seno cociente, la ec. (2.181) quedará, restringiéndonos de nuevo a valores de λ positivos,

$$\mathcal{F}_{1D} \left\{ i_1^{\text{exp}}(p^2 \rho), \frac{\lambda}{2} \right\} = 2 a_0 a_{-1}^* \rho^{\text{máx}} \left\{ S(\lambda) * \left[\text{sinc} \left(\frac{\rho^{\text{máx}}}{2} \lambda \right) e^{-j\pi \lambda \bar{\rho}} \right] \right\}, \quad \lambda > 0. \quad (2.183)$$

Esta inevitable operación de convolución es una limitación de este método, inconveniente que comparte con la mayoría de las técnicas convencionales de espectroscopía por transformada de Fourier. Al igual que en éstas, este efecto limita la resolución espectral que puede alcanzarse en la práctica. Efectivamente, consideremos una fuente monocromática que emite radiación de una longitud de onda λ_1 . La potencia espectral de este emisor puede ser representada matemáticamente por una función delta de Dirac centrada en el valor $\lambda = \lambda_1$. Teniendo en cuenta las propiedades de la convolución con una función delta de Dirac

$$g(x) * \delta(x - x') = g(x - x'), \quad (2.184)$$

la ecuación anterior podrá expresarse en este caso como

$$\mathcal{F}_{1D} \left\{ i_1^{\text{exp}}(p^2 \rho), \frac{\lambda}{2} \right\} = 2 a_0 a_{-1}^* \rho^{\text{máx}} \text{sinc} \left[\frac{\rho^{\text{máx}}}{2} (\lambda - \lambda_1) \right] e^{-j2\pi(\lambda - \lambda_1)\bar{\rho}}, \quad \lambda > 0. \quad (2.185)$$

Así pues, el resultado que nuestra técnica nos proporciona como respuesta a una luz monocromática es una función que, en principio, se extiende a todo el espectro, aunque se encuentra claramente localizada en torno a la longitud de onda de la radiación considerada, tal y como se muestra en la fig. 2.14.

Podemos considerar que la anchura efectiva de dicha función, tal y como se deduce de dicha figura, viene dada por

$$\Delta = \frac{4}{\rho^{\text{máx}}}. \quad (2.186)$$

Cuando la fuente considerada emite radiación que corresponde a dos longitudes de onda λ_1 y $\lambda_1 + \Delta\lambda$, la superposición de las respuestas anteriores producirá una respuesta compleja que permitirá discernir la presencia de ambas componentes espectrales tanto mejor cuanto menor sea el solapamiento de éstas, es decir, cuanto mayor sea $\Delta\lambda$. Suele considerarse que una diferencia de $\Delta\lambda_{\text{mín}} = \Delta/2$ es la mínima que permite la distinción entre ambas componentes espectrales (Françon 1966, p. 255). En nuestro caso, de acuerdo con la ecuación anterior, este valor vendrá dado por

$$\Delta\lambda_{\text{mín}} = \frac{2}{\rho^{\text{máx}}} = \frac{2p^2}{R_o^{\text{máx}}}. \quad (2.187)$$

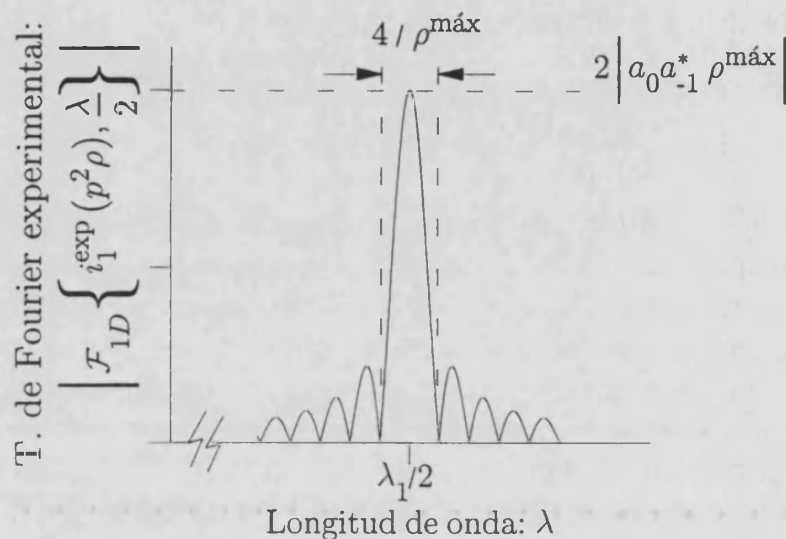


Figura 2.14. Respuesta proporcionada por el espectrómetro que se propone cuando la radiación estudiada corresponde a luz monocromática de longitud de onda λ_1 .

Esta separación mínima está limitada, por lo tanto, por el valor máximo de R_o que puede alcanzarse en la práctica. Este valor, además de tener como cota superior la longitud física del montaje óptico empleado en la realización práctica del espectroscopio, suele estar limitado adicionalmente por otro tipo de condicionantes físicos. Uno de los más importantes en nuestro caso es el tamaño finito del objeto difractante. Este hecho produce una caída del contraste de los patrones de difracción cuasimonocromáticos que crece al ir creciendo la distancia al objeto del plano de observación. Este efecto hace que la visibilidad de estos patrones de difracción se haga prácticamente nula a partir de un cierto valor de R_o . Este valor máximo puede estimarse, de modo aproximado, a partir de la denominada aproximación parageométrica del campo difractado, siempre que el número de periodos que contiene el objeto difractante no sea demasiado pequeño (Lohmann 1978, p. 125). Esta aproximación supone que cuando un objeto plano, cuya transmitancia en amplitud $t(\vec{r}_o)$ tiene una extensión finita, es iluminado por una onda plana (de extensión infinita), la amplitud del campo electromagnético difractado puede obtenerse superponiendo la contribución de una serie de “ondas planas” que se propagan en diferentes direcciones pero que mantienen el tamaño limitado del objeto, tal y como se muestra en la fig. 2.15. Esta característica diferencia esta teoría del tratamiento más riguroso del espectro angular de ondas planas de extensión infinita (Nieto-Vesperinas 1991, §2). La amplitud de cada una de estas

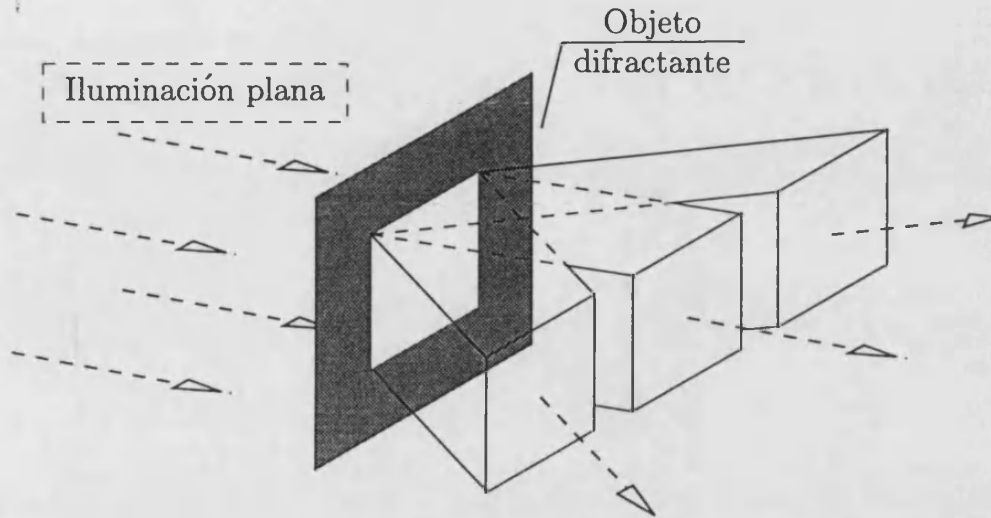


Figura 2.15. Representación esquemática de la descomposición en ondas planas de extensión finita del campo electromagnético difractado por un objeto plano limitado, en la aproximación parageométrica.

“ondas” limitadas viene dada por

$$A(\gamma_x, \gamma_y) = \mathcal{F} \{ t(\vec{r}_o); \vec{w}(\gamma_x, \gamma_y; \lambda) \} , \quad (2.188)$$

donde $\vec{w}(\gamma_x, \gamma_y; \lambda)$ es el vector de coordenadas cartesianas $((\sin \gamma_x) / \lambda, (\sin \gamma_y) / \lambda)$, siendo γ_x y γ_y los ángulos que forma el vector director de la “onda” considerada con los ejes OX_o y OY_o del plano del objeto, respectivamente. En el caso de un objeto unidimensional periódico como el considerado en esta sección, pero de extensión limitada, puede verse de modo sencillo que esta condición se traduce en que sólo se generan “ondas” caracterizadas por ángulos que cumplen

$$\sin \gamma_{x,n} = \frac{n\lambda}{p} , \quad \gamma_y = 0 , \quad n \in \mathbb{Z} / a_n \neq 0 . \quad (2.189)$$

La extensión transversal limitada de estas “ondas” hace que la región en las que son no nulas vaya alejándose progresivamente del eje óptico. Este “efecto de fuga” hace que a cualquier distancia no nula del objeto el número de ellas que se solapan en el plano de observación sea finito. De hecho la distancia máxima a partir de la cual la onda caracterizada por $\gamma_{x,n}$ (y también la definida por $\gamma_{x,-n}$) deja de solaparse con alguna de las restantes viene dada, de acuerdo con la fig. 2.16, por

$$R_o^{\text{máx}}(n) = \frac{L}{\tan \gamma_{x,n}} = \frac{Pp}{\tan \gamma_{x,n}} , \quad (2.190)$$

donde hemos supuesto que la extensión L del objeto contiene un número entero

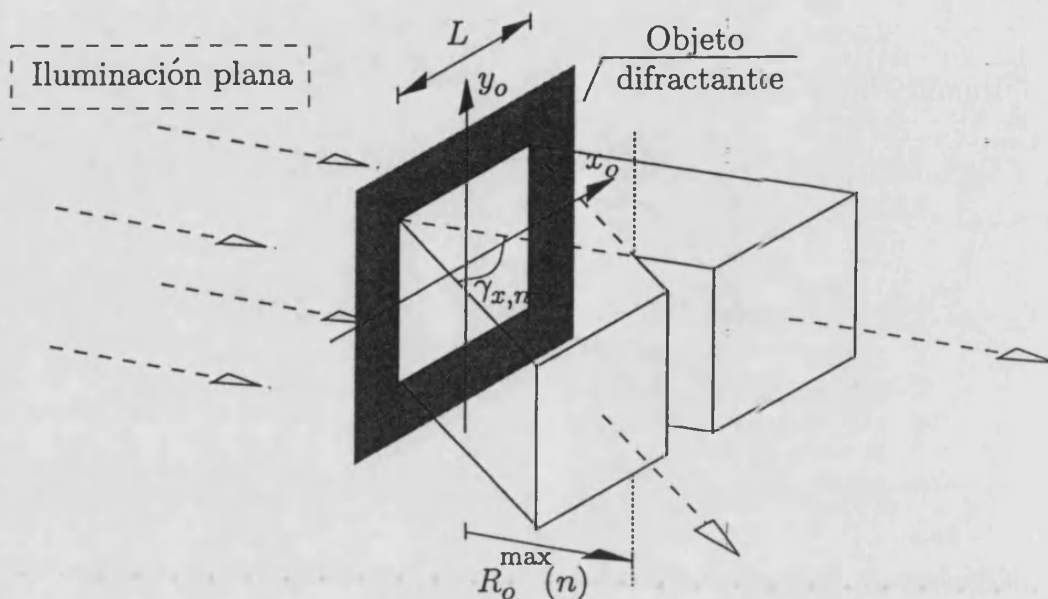


Figura 2.16. Esquema donde se muestra el valor límite de distancia desde el objeto para el cual se produce solapamiento de una de las "ondas" planas limitadas de la aproximación parageométrica con la "onda" axial.

P de periodos completos. Teniendo en cuenta que en la aproximación paraxial $\tan \gamma_{x,n} \cong \sin \gamma_{x,n}$, y considerando la ec. (2.189), obtenemos que

$$R_o^{m\acute{a}x}(n) = \frac{Pp^2}{n\lambda} \quad (2.191)$$

En particular, el campo paraxial presentará un contraste nulo a partir del valor

$$R_o^{m\acute{a}x} = R_o^{m\acute{a}x}(1) = \frac{Pp^2}{\lambda} \quad (2.192)$$

Así pues, si consideramos que este efecto es el que produce la limitación efectiva de los valores posibles de R_o en nuestro dispositivo, tomando el valor que corresponde a λ_1 , la ec. (2.187) quedará

$$\Delta\lambda_{m\acute{i}n} = \frac{\lambda_1}{2P} \quad (2.193)$$

En los dispositivos espectroscópicos suele definirse el poder de resolución como

$$\mathcal{R}(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda_{m\acute{i}n}}, \quad (2.194)$$

que en nuestro caso vendrá dado por $2P$, independientemente de la longitud de onda que se está considerando. Este resultado difiere del que proporcionan las

técnicas clásicas de espectroscopía de Fourier, en el que el poder de resolución es inversamente proporcionall a λ_1 (Françon 1966, p. 256). Este hecho hace que el procedimiento aquí propuesto sea más ventajoso respecto de éstas para valores de longitudes de onda elevados, como es el caso de la región espectral infrarroja y a las microondas. Por otro llado, al no requerir el uso de elementos ópticos refractivos, el rango espectral de aplicabilidad del mismo puede extenderse por encima del espectro visible a radiaciones como el ultravioleta o los rayos X, difícilmente accesibles a través de otros métodos tradicionales.

Capítulo 3

Aplicaciones al procesado óptico con iluminación espacialmente incoherente

3.1 Introducción

En este capítulo vamos a discutir una serie de dispositivos novedosos que trabajan con iluminación parcialmente coherente desde el punto de vista espacial. En particular, en la sección 3.2 presentamos un nuevo correlador óptico de señales bidimensionales sin lentes que hemos denominado de proyección geométrica perfecta. En él aprovechamos la capacidad que exhiben algunas estructuras difractantes para generar, por propagación libre, réplicas exactas de sí mismas sin necesidad de componentes ópticos. Con ello se soslayan muchas de las limitaciones que presentan los correladores de proyección geométrica convencionales. Por otro lado, es directo darse cuenta de que la configuración propuesta permite sintonizar el dispositivo a diferentes escalas de la señal de entrada para obtener la correlación requerida sin necesidad de modificar el filtro de referencia; este resultado se explota en la sección 3.3. La utilización de filtros de referencia con variaciones puras de fase convenientemente diseñados nos permite, en la sección 3.4, presentar un dispositivo de correlación en el que se obtiene simultáneamente la correlación con la señal de referencia y con su complementaria. Esto posibilita la realización de una detección invariante al contraste de la señal de entrada. Por último, en la sección 3.5, una aplicación directa de las conclusiones obtenidas en §2.4 nos permite proponer un decodificador de señales moduladas azimutalmente sin lentes que exhibe todas las propiedades típicas del procesado con radiación espacialmente no coherente.

Una parte de los resultados presentados en este capítulo se recogen en las referencias (Barreiro *et al.* 1992) (Saavedra *et al.* 1993) (Bonet *et al.* 1995).

3.2 Correlador de proyección geométrica perfecta

Una de las técnicas de procesado óptico de mayor interés práctico es el reconocimiento de patrones. La mayoría de los dispositivos propuestos a tal efecto se basan en la consecución por medios ópticos, con iluminación coherente o incoherente, de la correlación entre la señal de entrada y el patrón de referencia, ya que esta operación proporciona información sobre el grado de semejanza de las dos señales.

En la actualidad, los correladores ópticos pueden agruparse en dos categorías: los que trabajan en el espacio de Fourier y los que lo hacen en el espacio objeto (Bartelt 1987). Los primeros se basan en el teorema de la transformada de Fourier relativo a la correlación. A esta categoría pertenecen los dispositivos que se apoyan en la idea clásica del filtro adaptado de Vander Lugt (Vander Lugt 1964). Estos sistemas emplean como filtro la transformada de Fourier del patrón de referencia codificada en un registro holográfico. El producto de este filtro por la transformada de Fourier de la señal de entrada permite, tras otra operación de transformación de Fourier, obtener la correlación deseada sin necesidad de realizar desplazamientos relativos entre ambas señales. La capacidad que poseen las lentes para realizar transformadas de Fourier con iluminación coherente se aprovecha en este caso para resolver el problema. A partir de esta idea clave han surgido nuevas posibilidades que mejoran las características iniciales de este tipo de correladores, como son el uso de filtros parcialmente adaptados a la señal de referencia (filtros de fase (Horner y Gianino 1984) (Kumar y Bahri 1989), filtros binarios de fase (Psaltis *et al.* 1984) (Horner y Leger 1985), filtros basados en armónicos circulares (Yang *et al.* 1982) (Hsu y Arsenault 1984) (Ferreira *et al.* 1989), etc.). La extensión del uso del dispositivo de Vander Lugt al caso de objetos autoluminosos (Lohmann 1968) ha permitido superar algunas de las limitaciones de los dispositivos de este tipo derivadas del uso de radiación coherente (Lohmann y Werlich 1971).

En contraposición, los correladores del espacio objeto se basan en la superposición y posterior desplazamiento relativo, sin más pasos intermedios, de ambas señales, usando a continuación algún método para integrar la energía final de la onda resultante. Estos correladores presentan potencialmente ciertas ventajas prácticas respecto a los anteriores. La primera de ellas es que los filtros empleados son esencialmente las propias señales de referencia y de entrada, con lo que se evita la obtención del filtro adaptado holográfico. De este modo, la producción de los correspondientes filtros es relativamente sencilla, especialmente cuando ambas funciones son reales y positivas. La segunda es la capacidad de este tipo de correladores para poder ser controlados en tiempo real por ordenador. Además, muchos de ellos funcionan con luz incoherente, con lo que, respecto de los procesadores coherentes anteriores, las exigencias de estabilidad mecánica son menores y se mejora la relación señal-ruido del proceso lo que permite reducir drásticamente el número

de “falsas alarmas” en la detección. En estas circunstancias, adicionalmente, el uso de objetos autoluminosos en la codificación de las señales permite incrementar la compacidad y flexibilidad de los sistemas.

La realización práctica de este tipo de procesadores presenta, sin embargo, ciertas dificultades debidas fundamentalmente a los problemas asociados con la consecución del desplazamiento relativo entre las dos señales. Además, los desarrollos teóricos de estos dispositivos obvian, en general, los efectos de difracción, por lo que sólo se resuelve en primera aproximación el problema planteado. Ambos hechos son la causa de que, hasta ahora, los resultados obtenidos no sean tan espectaculares como en los descritos en primer lugar. A pesar de todo, se han conseguido algunas soluciones muy elegantes en este campo. Unas se apoyan en las técnicas de proyección geométrica (Monahan *et al.* 1977)¹, mientras que otras lo hacen en las de multiplexado en función de la longitud de onda (Bartelt 1979).

Dentro de los correladores que trabajan en el espacio de Fourier se incluyen también los correladores conjuntos². En estos correladores coherentes, el patrón a reconocer y la señal objeto se sitúan contiguos y simultáneamente en el plano de entrada del dispositivo. En una primera fase, se registra la distribución de intensidades correspondiente al espectro de Fourier conjunto. Tras esta detección cuadrática, una nueva transformación de Fourier permite obtener fuera de eje la correlación buscada. Desde su introducción por Rau (Rau 1966) e, independientemente, por Weaver y Goodman (Weaver y Goodman 1966), los correladores conjuntos han sido una herramienta muy interesante ya que, en síntesis, estos dispositivos intentan combinar los métodos de los correladores del espacio de Fourier con algunas de las ventajas de los del espacio objeto: la correlación buscada se obtiene sin necesidad de ningún filtro adaptado, aunque mediante un proceso coherente en dos pasos. A partir de este esquema base se han propuesto distintas arquitecturas para su utilización en tiempo real (Yu y Lu 1984)(Yu *et al.* 1987)(Fielding y Horner 1990), para mejorar la calidad de la señal de detección generada (Cheng *et al.* 1993) (Tang y Javidi 1993) (Lu *et al.* 1995), para realizar reconocimientos invariantes a rotaciones (Jutamulia y Asakura 1994) e, incluso, para relajar las exigencias de coherencia de de la radiación empleada en una o en ambas etapas (Rosen *et al.* 1992) (Nomura *et al.* 1995).

En esta sección avanzaremos un paso más y propondremos un nuevo correlador incoherente de señales bidimensionales, que trabaja en el espacio objeto y que puede incluirse entre los correladores de proyección geométrica. Como se demostrará más adelante, a diferencia de los dispositivos de este tipo propuestos hasta la fecha, la simple propagación libre del campo electromagnético nos permitirá obtener en un solo paso, aprovechando el fenómeno de autoimágenes y dentro de

¹Nos referimos a los denominados *shadow casting correlators* en la literatura en inglés.

²En la literatura en inglés se los denomina *joint transform correlators*.

la aproximación de Fresnel, la correlación exacta entre las señales de entrada y referencia.

Los correladores de proyección geométrica se apoyan en las propiedades de la radiación difractada por una transparencia que se ilumina con una fuente plana cuasimonocromática espacialmente incoherente. Esta fuente es, en muchos casos, una fuente secundaria construida proyectando la imagen de una fuente plana espacialmente incoherente de exitancia uniforme sobre un objeto difractante, que tiene una transmitancia en irradiancia $T_1(\vec{r})$. Este tipo de iluminación, que en microscopía recibe el nombre de iluminación crítica, proporciona a la salida de dicho objeto un campo electromagnético espacialmente incoherente, con una distribución de irradiancia proporcional a $T_1(\vec{r})$, siempre que los efectos de difracción introducidos por el sistema formador de imágenes que realiza esta proyección sean despreciables (Born y Wolf 1980, p. 520–522). A todos los efectos, esta distribución de irradiancia puede considerarse como la exitancia de la fuente de radiación del correlador. Esta codificación de la exitancia de la fuente puede conseguirse también usando objetos autoluminosos, tales como matrices de diodos láser, que pueden ser modulados espacialmente en tiempo real.

Consideremos, por lo tanto, que una fuente con estas características ilumina un objeto difractante plano situado a una distancia z de ella. De acuerdo con la ec. (2.85), la distribución de irradiancia que se obtiene sobre un plano de observación situado a una distancia R de dicho objeto vendrá dada por

$$I_R(\vec{r}; z; \lambda) = \frac{1}{M_S^2} \left[I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) * T_1 \left(\frac{1}{M_S} \vec{r} \right) \right], \quad (3.1)$$

donde M_S viene dado por la ec. (2.86) e $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda)$ es el patrón de difracción en irradiancia que se obtiene en dicho plano si la fuente se reduce a un emisor puntual en eje. El parámetro λ representa, como hasta ahora, la longitud de onda media de la radiación cuasimonocromática emitida por la fuente. Si se desprecia el efecto de la difracción en la propagación del campo electromagnético desde el objeto hasta el plano de observación, la distribución de irradiancia $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda)$ se reduce a la proyección o "sombra" geométrica del objeto proporcionada por la fuente puntual que lo genera sobre el plano de observación. Con esta aproximación, se puede expresar, por tanto, que

$$I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{1}{M^2} T_2 \left(\frac{1}{M} \vec{r} \right), \quad (3.2)$$

donde $T_2(\vec{r})$ es la transmitancia en irradiancia del objeto difractante y el factor de escala de la proyección geométrica mencionada viene dado, tal y como se deduce de la fig. 3.1, por

$$M = \frac{z + R}{z}. \quad (3.3)$$

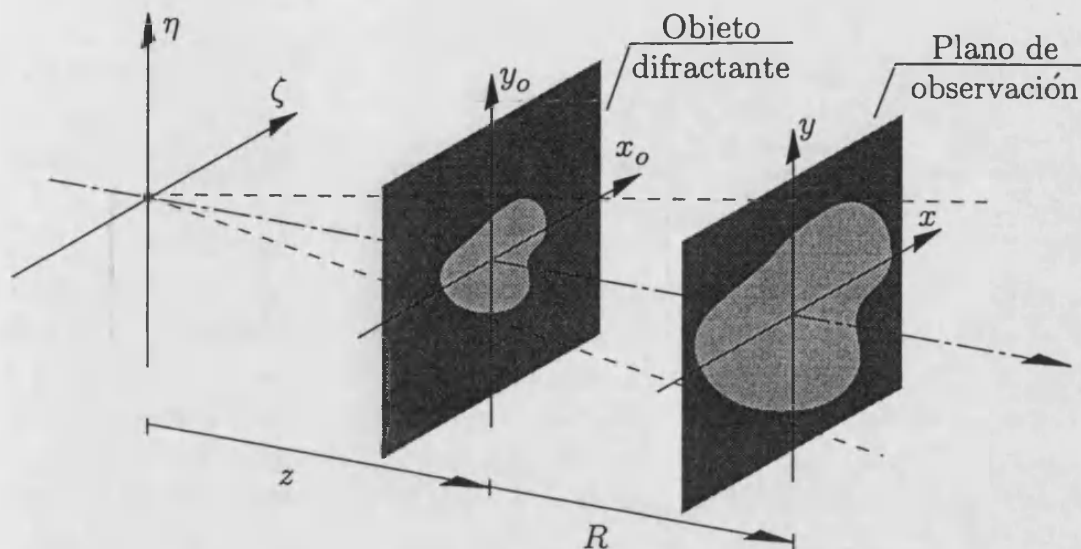


Figura 3.1. Esquema en el que se muestra la proyección geométrica del objeto difractante sobre el plano de observación. Es directo ver que esta proyección proporciona un aumento dado por $M = (z + R)/R$.

Por lo tanto, el patrón de irradiancia que se obtiene en el plano de observación al iluminar el objeto con la fuente extensa podrá expresarse como

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \frac{1}{(MM_S)^2} \left[T_2 \left(\frac{1}{M} \vec{r} \right) * T_1 \left(\frac{1}{M_S} \vec{r} \right) \right]. \quad (3.4)$$

Así pues, una codificación adecuada de las señales a correlacionar sobre la existencia de la fuente y la transmitancia en irradiancia del objeto nos proporciona, de acuerdo con la ecuación anterior, la correlación deseada. Esta es la idea en la que se basan los correladores de proyección geométrica convencionales (Rhodes y Sawchuk 1981, §3.5). A partir de esta configuración básica se han sugerido algunas variantes, incorporando lentes en su diseño (Goodman 1968, §7.3) (Athale *et al.* 1995) o moduladores espaciales de luz para su uso en tiempo real (Jutamulia *et al.* 1987), y se han desarrollado diferentes aplicaciones en procesado de imágenes y reconocimiento de caracteres (McLachlan 1962) (Leifer *et al.* 1969) (Datta y Seth 1994).

Ahora bien, desde un punto de vista estricto, el patrón de Fresnel no es una simple copia escalada de la transparencia objeto, sino, a lo sumo, una especie de versión desenfocada de ésta. Es por ello que en la práctica el resultado obtenido puede dar una medida de la similitud entre la señal de referencia y la de entrada, pero lejos de la correlación pedida. De hecho, la aproximación indicada en la ec. (3.2) ha sido estudiada por varios autores desde diferentes puntos de vista (Tanida y Ichioka 1983) (Gedziowski *et al.* 1994), conduciendo con carácter general a una serie de limitaciones en las señales a correlacionar que son especialmente

severas en el rango visible e infrarrojo del espectro electromagnético (Glaser 1987).

La técnica que proponemos a continuación supera este inconveniente haciendo uso del efecto Talbot. Si en el dispositivo de la fig. 3.1 la transparencia objeto fuese capaz de proporcionar una autoimagen de la señal de referencia, en dicho plano podría obtenerse la correlación buscada de modo exacto. Para conseguir este efecto, el filtro objeto debe ser una estructura de Montgomery que contenga dicha señal. En particular, tal y como demostramos en §2.2, si la transparencia objeto presenta una estructura periódica cuadrada, la propagación libre del campo electromagnético genera réplicas de ésta en una serie de planos paralelos a ella. Así pues, para este tipo de objetos es posible obtener, en un conjunto discreto de planos caracterizados por la condición (2.71), una “proyección geométrica” como la indicada en la ec. (3.2), teniendo en cuenta, precisamente, los efectos de la difracción despreciados en aquel caso. Por tanto, un objeto de estas características en cuya celda unidad se codifique la señal de referencia nos permitirá obtener la correlación exacta con la señal codificada sobre el filtro fuente.

A partir de esta idea, el dispositivo que proponemos se presenta en la fig. 3.2. Las señales a correlacionar se codifican sobre la exitancia de la fuente incoherente del dispositivo y sobre el filtro objeto iluminado por ella. Consideraremos, como es habitual en los procesadores incoherentes tradicionales, que dichas señales son reales. En caso de que se estuviese interesado en procesar señales complejas, un proceso secuencial con las diferentes combinaciones de sus partes reales e imaginarias nos permitiría sintetizar la correlación compleja final. De igual modo, pueden aplicarse a este dispositivo otras técnicas que se han empleado con éxito para soslayar esta dificultad del procesado incoherente (Lohmann y Mendlovic 1992) (Piestun *et al.* 1994). Exigiremos, además, que ambas señales sean positivas. Esta restricción no tiene un carácter tan básico como la anterior, ya que la adecuada superposición de un fondo a toda la señal permite procesar funciones que presenten valores negativos. El efecto de esta adición sobre la correlación final es, sin embargo, una pérdida de contraste en la señal de salida (Rogers 1977, p. 29). Por último, hemos supuesto implícitamente que las señales a correlacionar son de soporte compacto, condición que es común a todos los correladores ópticos. Sean, pues, $a_1(\vec{r})$ y $a_2(\vec{r})$ las dos señales de las que queremos obtener la correlación y κ_1 y κ_2 sus respectivos valores máximos. Los filtros del dispositivo se codificarán con versiones reescaladas de éstas, para ajustar el tamaño de los objetos a las dimensiones más adecuadas para su uso en el procesador óptico. Permitiremos, por razones que quedarán claras posteriormente, que este reescalado no sea el mismo en ambos casos. Así pues, el filtro fuente se diseñará de modo que su transmitancia en irradiancia venga dada por

$$T_1(\vec{\rho}) = \frac{1}{\kappa_1} a_1 \left(\frac{1}{M_1} \vec{\rho} \right), \quad (3.5)$$

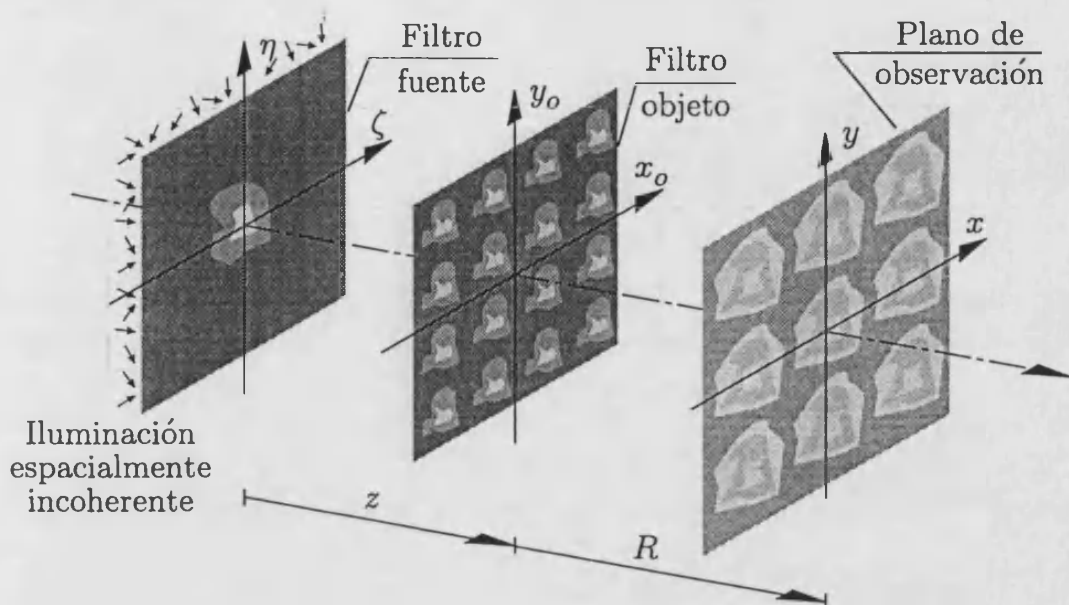


Figura 3.2. Representación esquemática del correlador de proyección geométrica perfecta que se propone. Las señales a correlacionar se codifican en los filtros fuente y objeto.

mientras que la segunda señal a correlacionar se replicará sobre un filtro periódico bidimensional cuadrado, con periodo p , de modo que la celda unidad de su transmitancia en amplitud, $t_2(\vec{r}_o)$, vendrá descrita por

$$c(\vec{r}_o) = +\sqrt{\frac{1}{\kappa_2} a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right)}, \quad (3.6)$$

donde M_1 y M_2 representan los factores de reescalado citados previamente. El periodo p se elige de modo que no exista solapamiento entre las diferentes réplicas de $c(\vec{r}_o)$, de modo que esta función admite una definición análoga a la de la ec. (2.49).

Sabemos que la respuesta coherente $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda)$ de este filtro sobre aquellos planos situados a distancias R de él que cumplen la ec. (2.71) con Q un valor semientero viene dada, como corresponde a una autoimagen, por

$$I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{1}{z^2 M^2} T_2 \left(\frac{1}{M} \vec{r} \right), \quad (3.7)$$

donde $T_2(\vec{r}_o) = |t_2(\vec{r}_o)|^2$ es la transmitancia en irradiancia del filtro objeto, y donde hemos obviado el posible desplazamiento de medio periodo que se manifiesta en las autoimágenes negativas. La función $T_2(\vec{r}_o)$, por construcción, tendrá una estructura periódica cuadrada con una celda unidad dada por

$$C(\vec{r}_o) = \frac{1}{\kappa_2} a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right). \quad (3.8)$$

De modo análogo a como se hizo en §2.2, esta transmitancia en irradiancia puede representarse por la expresión

$$T_2(\vec{r}_o) = \frac{1}{\kappa_2} a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right) \otimes \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r}_o - \vec{l}_{rs}(p)) . \quad (3.9)$$

Por lo tanto, considerando que dadas dos funciones cualesquiera $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$ se cumple

$$h(\vec{r}) = f(\vec{r}) \otimes g(\vec{r}) \longrightarrow h\left(\frac{1}{A}\vec{r}\right) = \frac{1}{A^2} \left[f\left(\frac{1}{A}\vec{r}\right) \otimes g\left(\frac{1}{A}\vec{r}\right) \right] , \quad (3.10)$$

para cualquier valor real no nulo de A , la ec. (3.7) podrá expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) &= \frac{1}{\kappa_2 z^2 M^4} \left[a_2 \left(\frac{1}{MM_2} \vec{r} \right) \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{1}{M} [\vec{r} - \vec{l}_{rs}(Mp)]\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de escalado de la función delta de Dirac

$$\delta\left(\frac{1}{A}\vec{r}\right) = A^2 \delta(\vec{r}) , \quad \forall A \in \mathbb{R}^* , \quad (3.12)$$

obtenemos, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) &= \frac{1}{\kappa_2 z^2 M^2} \left[a_2 \left(\frac{1}{MM_2} \vec{r} \right) \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{l}_{rs}(Mp)) \right] . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si ahora este objeto se ilumina con la radiación que emerge del filtro fuente, la distribución de irradiancia en dicho plano vendrá dada por la ec. (3.1), que en este caso, teniendo en cuenta que

$$[f(\vec{r}) \otimes g(\vec{r})] * h(\vec{r}) = [f(\vec{r}) * h(\vec{r})] \otimes g(\vec{r}) , \quad (3.14)$$

se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) &= \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2 R^2 M^2} \left\{ \left[a_2 \left(\frac{1}{MM_2} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M_S M_1} \vec{r} \right) \right] \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{l}_{rs}(Mp)) \right\} , \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde se ha tenido en cuenta la ec. (3.5) y la definición de M_S dada por la ec. (2.86). El término entre corchetes de la expresión anterior

$$\mathfrak{C}(\vec{r}) = a_2 \left(\frac{1}{MM_2} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M_S M_1} \vec{r} \right), \quad (3.16)$$

es una función de soporte compacto, por ser la correlación de dos funciones que lo son. Por lo tanto, el segundo miembro de la ec. (3.15) describe una estructura bidimensional periódica cuadrada, de periodo

$$p' = Mp, \quad (3.17)$$

cuya celda unidad vendrá representada por la ec. (3.16), siempre que el soporte de ésta se pueda confinar en un cuadrado de lado p' . Si no fuese así, dicha ecuación no describiría correctamente la distribución de irradiancia de la celda unidad que se repite en el plano de observación, debido al solapamiento que se produciría entre las diferentes réplicas. Esta situación puede conseguirse eligiendo el periodo del filtro objeto adecuadamente. Las restricciones en el diseño de los filtros que impone esta condición serán analizadas posteriormente y, por el momento, consideraremos que se satisfacen.

A pesar de ello, $\mathfrak{C}(\vec{r})$ no nos proporciona, en general, el resultado deseado, ya que su estructura viene determinada por la correlación entre dos versiones con escalas diferentes de las señales originales. Ahora bien, si imponemos la condición adicional

$$MM_2 = M_S M_1 = M', \quad (3.18)$$

la celda unidad de la distribución de irradiancia en el plano de observación describirá la correlación entre dos versiones con la misma escala de las señales originales. Si tenemos en cuenta que

$$h(\vec{r}) = f(\vec{r}) * g(\vec{r}) \longrightarrow h \left(\frac{1}{A} \vec{r} \right) = \frac{1}{A^2} \left[f \left(\frac{1}{A} \vec{r} \right) * g \left(\frac{1}{A} \vec{r} \right) \right], \quad (3.19)$$

y denominamos

$$\Upsilon(\vec{r}) = a_2(\vec{r}) * a_1(\vec{r}), \quad (3.20)$$

en este caso la ec. (3.16) se reduce a

$$\mathfrak{C}(\vec{r}) = M'^2 \Upsilon \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right). \quad (3.21)$$

Asimismo, la ec. (3.15) se transforma en

$$\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) = \frac{M'^2}{\kappa_1 \kappa_2 R^2 M^2} \left\{ \Upsilon \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) \otimes \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta \left(\vec{r} - \vec{l}_{rs}(Mp) \right) \right\}, \quad (3.22)$$

de modo que la celda unidad de la distribución de irradiancia que se obtiene en el plano de observación corresponde a una simple versión escalada en M' del resultado requerido.

La condición expresada por la ec. (3.18), junto con la ec. (2.71), fija los valores de las distancias entre los filtros, z , y del filtro objeto al plano de observación, R . En efecto, la combinación de ambas ecuaciones, junto con la definición de los parámetros M y M_S , conduce a

$$z = \frac{Q}{\beta} z_T(\lambda), \quad (3.23a)$$

$$R = \frac{Q}{1-\beta} z_T(\lambda), \quad (3.23b)$$

donde

$$\beta = \frac{M_2}{M_1}, \quad (3.24)$$

representa el factor de reescalado adicional que existe entre la señal replicada sobre el filtro objeto respecto de la codificada sobre el filtro fuente. Para estos valores, el aumento M' con el que se obtiene el resultado final sobre el plano de observación, vendrá dado por

$$M' = \frac{M_2}{1-\beta}, \quad (3.25)$$

y el periodo de la distribución de irradiancia en dicho plano, de acuerdo con la ec. (3.17), podrá expresarse como

$$p' = \frac{p}{1-\beta}. \quad (3.26)$$

Así pues, una vez elegido el valor de Q y diseñados los filtros con los parámetros β y p (o, de modo equivalente, β y $z_T(\lambda)$, ya que este último se relaciona con p a través de la ec. (2.39)) la disposición geométrica definida por las ecs. (3.23) hace que la propagación libre de la radiación emitida por la fuente nos proporcione la correlación requerida de modo exacto sobre el plano de salida. De este modo, este dispositivo se comporta como un correlador de proyección geométrica en el que ésta es perfecta. Esta correlación se obtiene, como resultado adicional, de manera múltiple en el plano de detección. Las primeras ideas en esta dirección nos llevaron a publicar alguna otra configuración original, pero más complicada y menos versátil que la presentada aquí (Andrés *et al.* 1990) (Barreiro *et al.* 1991).

Una vez presentada la idea básica de funcionamiento del dispositivo que proponemos, pasaremos a analizar algunos detalles de interés destacado en la realización práctica del mismo.

En primer lugar, debemos considerar que las distancias z y R presentan una restricción experimental adicional. En efecto, en el dispositivo propuesto la distancia desde el filtro fuente al filtro objeto debe ser positiva y, usualmente, se requiere un plano final de observación que no sea virtual, es decir, que se encuentre por delante del objeto. De este modo ambas distancias deben ser positivas y, por lo tanto, los parámetros Q y β deben cumplir

$$Q > 0, \quad (3.27)$$

$$0 < \beta < 1, \quad (3.28)$$

tal y como se desprende de las ecs. (3.23a) y (3.23b) y del hecho de que la distancia $z_T(\lambda)$ sea definida positiva. La segunda de estas condiciones nos lleva a concluir que, necesariamente, la celda unidad que se replica sobre el filtro objeto debe ser una versión de la señal $a_2(\vec{r})$ con una escala menor que la que corresponde a la codificada en el filtro fuente. Por último, también de esta condición se deduce que M_1 y M_2 han de tener el mismo signo; si se impone que el resultado final corresponda a la correlación requerida sin inversión especular respecto de los ejes coordenados en el plano de salida, es decir, que el valor de M' sea positivo, ambos factores de escala han de ser positivos.

Otro efecto que debemos analizar con cierto detalle, por su implicación en el diseño de los filtros empleados en el dispositivo, es el problema que representa el posible solapamiento entre las correlaciones que aparecen replicadas en todo el plano de observación final. Dicha superposición se producirá cuando el soporte de esta "celdilla" tenga unas dimensiones mayores que la distancia a la que se reproducen las réplicas. Para evitarla, será necesario imponer un valor mínimo a este periodo diseñando adecuadamente el filtro objeto.

Para estimar esta cota, consideraremos los rectángulos, con lados paralelos a los ejes coordenados, que circunscriben exactamente la región del dominio de cada una de las señales a correlacionar en las que son no nulas, tal y como se muestra en la fig. 3.3. Denominaremos a las longitudes de estos rectángulos L_{1x} , L_{1y} y L_{2x} , L_{2y} , respectivamente. Nótese que sobre los filtros que se utilizan en el dispositivo las dimensiones de estos rectángulos se verán afectados por los factores M_1 y M_2 . A pesar de esta diferencia de escalado sobre los filtros, la condición (3.18) nos garantiza que ambas funciones se correlacionan con la misma escala M' en el plano de detección. De la propia definición de la operación de correlación, puede verse que la extensión de ésta puede confinarse en un rectángulo de dimensiones

$$L_{cx} = M'(L_{1x} + L_{2x}), \quad L_{cy} = M'(L_{1y} + L_{2y}). \quad (3.29)$$

La condición para que no exista solapamiento vendrá dada por

$$p' \geq \max\{L_{cx}, L_{cy}\} = M' \max\{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\}, \quad (3.30)$$

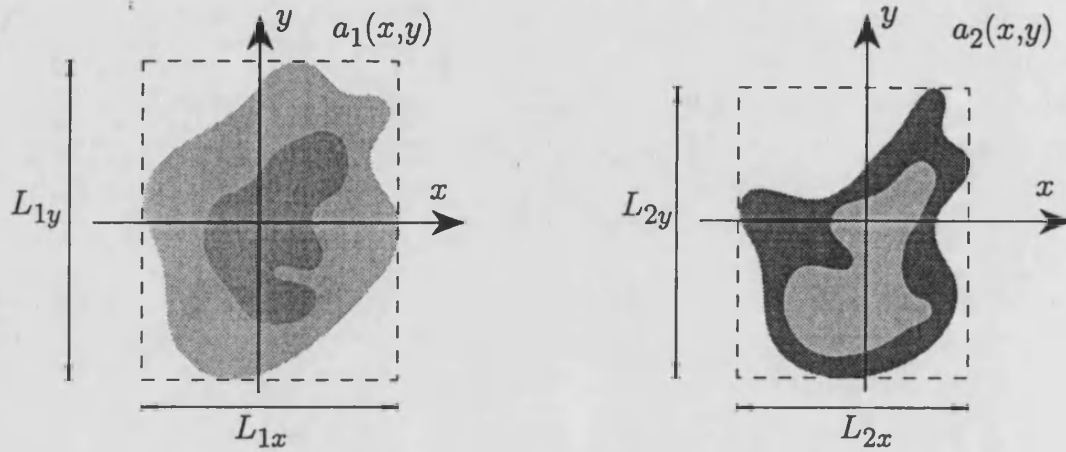


Figura 3.3. Esquema en el que se señalan las dimensiones L_{1x} , L_{1y} , L_{2x} y L_{2y} de los rectángulos que circunscriben el soporte de las señales a correlacionar.

donde p' es el periodo espacial con el que, en ambas direcciones, se replica esta "celdilla" en el plano de observación. A partir de las expresiones dadas por las ecs. (3.25) y (3.26), el valor mínimo admisible para el periodo del filtro objeto será

$$p_{\min} = M_2 \text{ máx} \{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\} , \quad (3.31)$$

tal y como se indica en la fig. 3.4. De modo equivalente, si definimos la modulación del filtro objeto en cada una de las direcciones como la fracción del periodo ocupado por la señal codificada en él, es decir,

$$s_x = \frac{M_2 L_{2x}}{p} , \quad s_y = \frac{M_2 L_{2y}}{p} , \quad (3.32)$$

se debe imponer una cota superior a estas funciones para evitar el solapamiento entre las "celdillas" en el plano de salida, dada por

$$s_x^{\text{máx}} = \frac{L_{2x}}{L_{1x} + L_{2x}} , \quad s_y^{\text{máx}} = \frac{L_{2y}}{L_{1y} + L_{2y}} . \quad (3.33)$$

Aunque no es el caso que nos ocupa, este solapamiento puede aprovecharse para sintetizar imágenes como superposición incoherente de subestructuras elementales. Para ello, basta disponer adecuadamente en el filtro fuente dichos elementos y elegir un filtro objeto con una transmitancia dada por la función $\Phi(\vec{r}_o; p)$ definida en la ec. (2.52). En estas circunstancias, teniendo en cuenta la propiedad (2.50), la "celda unidad" de la distribución de irradiancia que se obtiene sobre cualquiera de los planos de autoimagen de éste último es simplemente una versión escalada de la transmitancia en irradiancia del filtro fuente. Puede elegirse el periodo p para forzar el solapamiento de estas celdillas de modo que sobre el plano de observación

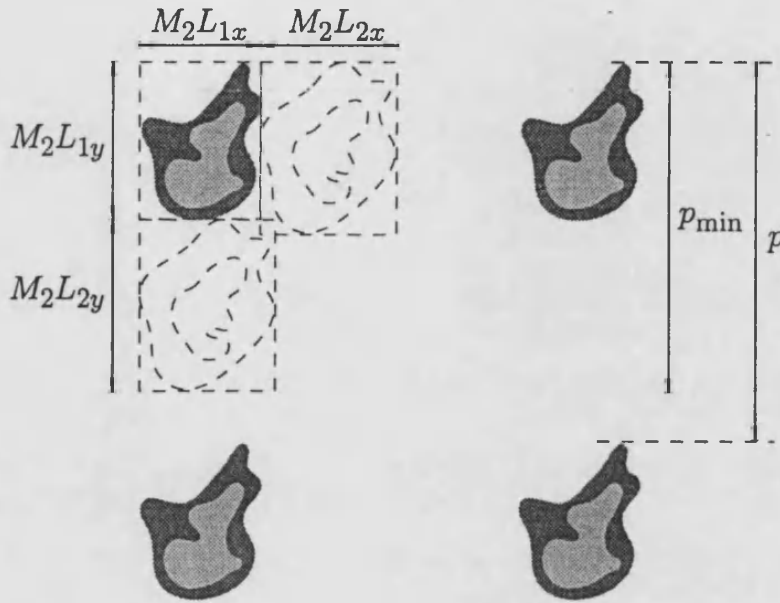


Figura 3.4. Representación de un fragmento del filtro objeto donde se muestra el valor del periodo mínimo requerido para evitar solapamientos entre celdillas contiguas en el plano de observación, para las señales indicadas en la fig. 3.3.

se generen nuevas imágenes formadas por la superposición de las subestructuras originales (Barreiro *et al.* 1992) (Saavedra *et al.* 1993). Este procedimiento es más simple que una propuesta previa en la que se proponía el uso de dos filtros periódicos (Bonet *et al.* 1991).

Hasta el momento hemos considerado que el filtro objeto tiene una estructura periódica con extensión infinita. Sin embargo, la realización práctica de este filtro vendrá dada, a lo sumo, por un objeto de tamaño limitado que contendrá un número elevado, pero finito, de réplicas de la señal $a_2 ((1/M_2) \vec{r}_o)$. El efecto de esta limitación sobre el patrón coherente $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda)$ puede estimarse, de modo similar a como se hizo en §2.7, haciendo uso de la aproximación parageométrica. Como en el caso estudiado en dicha sección consideraremos, en primer lugar, que el objeto periódico bidimensional cuadrado se ilumina con una onda plana. Supondremos, por simplicidad, que el número de réplicas de la celda unidad en las direcciones vertical y horizontal es el mismo, e igual a P . De acuerdo con la aproximación mencionada, el campo difractado por el objeto puede obtenerse como el resultado de la superposición de un conjunto infinito de “ondas” planas limitadas por la extensión de éste, con amplitudes dadas por la ec. (2.188). Teniendo en cuenta que en este caso

$$\mathcal{F} \{t(\vec{r}_o); \vec{w}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} \delta(\vec{w} - \vec{w}_{nm}(p)) , \quad (3.34)$$

dicha condición impone una discretización de las direcciones en las que dichas ondas tienen amplitud no nula, de modo que sólo aparecerán “ondas” caracterizadas por valores de γ_x y γ_y dados por

$$\sin \gamma_{x,n} = \frac{n\lambda}{p}, \quad \sin \gamma_{y,n} = \frac{m\lambda}{p}, \quad n, m \in \mathbb{Z}/a_{nm} \neq 0. \quad (3.35)$$

Si este “espectro angular”, debido al carácter limitado de las “ondas” que lo componen, no vuelve a recomponerse sobre ningún plano posterior al objeto debido al efecto de fuga, nunca se obtendrán autoimágenes en sentido estricto. Esto ocurrirá cuando el número de coeficientes a_{nm} no nulos sea infinito. Sin embargo, si este número es limitado, la superposición de las todas las “ondas” difractadas se producirá en algunos planos posteriores al objeto, aunque en un rango limitado de distancias a éste. Si denominamos

$$\mu = \min \{l \in \mathbb{Z}/a_{nm} = 0 \quad \forall n, m > l\}, \quad (3.36)$$

dicha superposición se producirá desde el plano del objeto hasta una distancia de él dada por

$$R_o^{\text{máx}}(\mu) = \frac{Pp^2}{\lambda\mu}, \quad (3.37)$$

como se deduce de la ec. (2.191). Dentro del mismo orden de aproximación, podemos considerar que los patrones de difracción que genera este objeto de extensión limitada para distancias

$$0 \leq R_o \leq R_o^{\text{máx}}(\mu), \quad (3.38)$$

tienen la misma estructura que los que proporcionaría si tuviese un tamaño infinito. En particular, generará una serie de autoimágenes situadas en planos caracterizados por valores de R_o dados por la condición (2.45). De acuerdo con la limitación (3.37) el valor máximo del parámetro Q que proporcionará una autoimagen del objeto de extensión limitada con iluminación paralela vendrá dado por

$$Q^{\text{máx}}(\mu) = \frac{1}{2}E \left[\frac{R_o^{\text{máx}}(\mu)}{z_T/2} \right] = \frac{1}{2}E \left[\frac{P}{\mu} \right], \quad (3.39)$$

donde la función $E[x]$ representa la parte entera de x .

Consideremos ahora el caso en el que la fuente se sitúa a distancia finita del objeto. Tal y como vimos en §2.6, este cambio de iluminación sólo produce una redistribución y un reescalado de los patrones de difracción, pero no modifica el perfil de éstos, por lo que podemos aceptar que la limitación de la ec. (3.39) se aplica también a esta situación. Así pues, el tamaño finito del filtro objeto impone una limitación en los valores de Q que proporcionan un plano de observación en el que se obtiene, con iluminación coherente, una “autoimagen” de dicho filtro, y

por lo tanto, sobre los que se puede obtener la correlación exacta de las señales consideradas.

Por otro lado, los coeficientes a_{nm} y el contenido de frecuencias espaciales de la celda unidad del filtro objeto están estrechamente relacionados. En efecto de sus respectivas definiciones dadas por las ecs. (2.33) y (2.49) se deduce que

$$a_{nm} = \frac{1}{p^2} \tilde{c}(\vec{w}_{nm}(p)) . \quad (3.40)$$

Esta relación plantea un inconsistencia lógica en el razonamiento seguido en los párrafos anteriores. En efecto, el hecho de que la celda unidad tenga un soporte compacto hace que no pueda tener banda limitada y, por lo tanto, su transformada de Fourier se extendería a todo el dominio frecuencial. Puede demostrarse que este hecho es incompatible con la existencia de un valor μ finito que haga que estos coeficientes cumplan la condición (3.36), es decir, con la limitación del espectro de "ondas" de extensión finita en el campo difractado por el objeto. Sin embargo, el volumen finito de la señal codificada en esta celda unidad hace que el módulo de su transformada de Fourier decaiga necesariamente hacia cero en el exterior de una región finita en el dominio de frecuencias espaciales. Por ello, siempre es posible confinar el soporte de la función $\tilde{c}(\vec{w})$ a una circunferencia de radio μ suficientemente grande de modo que la ec. (3.36) se cumpla con muy buena aproximación. De este modo, puede considerarse que la celda unida es de soporte compacto y de banda aproximadamente limitada.

Esta misma relación hace posible interpretar de modo sencillo el efecto que se produce cuando se consideran planos de observación caracterizados por valores de $Q > Q^{\text{máx}}$. En este caso, la pérdida por el efecto de fuga de algunas "ondas" limitadas se traduce en que parte del contenido frecuencial de la celda unidad no aparece en la celda unidad de la "autoimagen" elegida. Esta última puede considerarse, por lo tanto, una versión filtrada de aquella y, en consecuencia, la correlación obtenida en el plano de salida del dispositivo no es la requerida. Por contra, en estas circunstancias, una experiencia de reconocimiento de patrones proporciona resultados que deberían enmarcarse en la línea de los obtenidos con las técnicas de adaptación parcial a la señal de referencia.

En esta misma línea, si se quiere garantizar al menos que exista un plano de observación en el que se obtenga el resultado requerido, es decir, que al menos el primer plano de autoimagen negativa contenga una "réplica" del filtro objeto, deberemos exigir que

$$E \left[\frac{P}{\mu} \right] \geq 1 . \quad (3.41)$$

De acuerdo con las ideas expuestas en párrafos anteriores, para un número de periodos P del filtro objeto dado, la condición anterior expresa implícitamente una

limitación del ancho de banda efectivo de las señales que pueden codificarse sobre él y proporcionar resultados satisfactorios. Desde un punto de vista matemático, podemos definir el ancho de banda de una función $g(\vec{r})$, en ambas direcciones cartesianas, como

$$B[g(\vec{r})] = \min \{ \varrho \in \mathbb{R}^+ / \bar{g}(\vec{w}) = 0 \text{ si } |u|, |v| > \varrho \} , \quad (3.42)$$

siendo (u, v) las coordenadas cartesianas del vector \vec{w} en el plano de Fourier. A partir de la condición (3.41), y de acuerdo con las ecs. (3.40) y (3.36), el ancho de banda máximo aceptable para la celda unidad de la transmitancia en amplitud del filtro objeto viene dado por

$$B^{\text{máx}} [c(\vec{r}_o)] = \frac{P}{p} . \quad (3.43)$$

Por otro lado, considerando que

$$\mathcal{F} \{ f(\vec{r})g(\vec{r}); \vec{w} \} = \bar{f}(\vec{w}) \otimes \bar{g}(\vec{w}) , \quad (3.44)$$

a partir de la ec. (3.6) puede deducirse que los espectros de frecuencias espaciales de esta función y de la señal que se codifica en el filtro están relacionados por la expresión

$$\bar{c}(\vec{w}) \otimes \bar{c}(\vec{w}) = \frac{1}{\kappa_2} \mathcal{F} \left\{ a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right); \vec{w} \right\} . \quad (3.45)$$

Teniendo en cuenta que la convolución de funciones de soporte compacto tiene una extensión que es la suma de las de las funciones que se correlacionan, este resultado nos permite afirmar que el ancho de banda máximo admisible para la función $a_2((1/M_2)\vec{r}_o)$ viene dado por

$$B^{\text{máx}} \left[a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right) \right] = \frac{2P}{p} . \quad (3.46)$$

Finalmente, teniendo en cuenta la propiedad (2.103), podemos concluir que la señal que se codifica sobre el filtro objeto debe tener una banda limitada de extensión máxima

$$B^{\text{máx}} [a_2(\vec{r}_o)] = \frac{2M_2 P}{p} . \quad (3.47)$$

Nótese que el resultado dado por la ec. (3.46) se ha obtenido usando explícitamente la hipótesis de que la banda espectral de la función $c(\vec{r}_o)$ es limitada. De hecho, si se usa el mismo criterio en la limitación efectiva del contenido de frecuencias espaciales de funciones que no son estrictamente de banda limitada, el factor 2 que aparece en dicha ecuación puede verse modificado sensiblemente, disminuyendo

hasta la unidad en el caso extremo de funciones binarias, en las que $c^2(\vec{r}_o) = c(\vec{r}_o)$, y por lo tanto, $\tilde{c}(\vec{w}) \otimes \tilde{c}(\vec{w}) = \tilde{c}(\vec{w})$.

Un parámetro que caracteriza la cantidad de información que contiene una determinada señal de soporte compacto y de banda aproximadamente limitada es su producto extensión-ancho de banda. Este parámetro nos proporciona, de modo aproximado, el número de muestras que es necesario considerar de dicha señal para obtener una reconstrucción exacta de la misma. Esta reconstrucción es posible según muestra el conocido teorema de Whittaker-Shanon (Goodman 1968, §2.3). Si denominamos $2X$ e $2Y$, y $2U$ y $2V$ a las extensiones en las direcciones cartesianas de la función $g(\vec{r})$ considerada y de su transformada de Fourier, respectivamente, el producto extensión-ancho de banda de esta señal se define como

$$PEAB [g(\vec{r})] = 16XYUV . \quad (3.48)$$

En el caso de la función $a_2(\vec{r}_o)$, es evidente que las extensiones U y V tendrán como cota superior el valor indicado en la ec. (3.47). Por otro lado, para que esta función pueda codificarse como la celda unidad del filtro objeto, su extensión en ambas direcciones no debe sobrepasar el valor p/M_2 . Con todo, el producto extensión-ancho de banda máximo permitido para la función $a_2(\vec{r}_o)$ de modo que permita obtener al menos una "autoimagen" de dicho filtro vendrá dada por

$$PEAB_o^{\text{máx}} [a_2(\vec{r}_o)] = 16 \left(\frac{p}{2M_2} \right)^2 \left(\frac{2PM_2}{p} \right)^2 = 16P^2 . \quad (3.49)$$

Así pues, el producto extensión-ancho de banda de la señal codificada sobre el filtro objeto debe estar limitado por un valor que aumenta con el número de periodos que contiene dicho filtro, P^2 . Esta limitación garantiza que al menos exista una "autoimagen" de dicho filtro, pero en la práctica la función anterior debe tener una extensión menor que la del periodo en ambas direcciones para evitar el solapamiento de los resultados en el plano de correlación final, de modo que el factor que acompaña a P^2 en la expresión anterior puede reducirse sensiblemente. De hecho, considerando las extensiones de las funciones a correlacionar y el valor mínimo del periodo que garantiza la ausencia de superposición de los resultados en el plano final de observación, dado por la ec. (3.31), el producto extensión-ancho de banda máximo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} PEAB_o^{\text{máx}} [a_2(\vec{r}_o)] &= 16 \frac{L_{2x}}{2} \frac{L_{2y}}{2} \left(\frac{2PM_2}{p_{\text{min}}} \right)^2 = \\ &= 16 \frac{L_{2x} L_{2y} P^2}{(\text{máx} \{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\})^2} . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Teniendo en cuenta que

$$(\text{máx} \{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\})^2 \geq (L_{1x} + L_{2x})(L_{1y} + L_{2y}) , \quad (3.51)$$

podemos acotar superiormente la magnitud anterior de acuerdo con la expresión

$$PEAB^{\text{m}\acute{a}\text{x}} [a_2(\vec{r}_o)] \leq 16 s_x^{\text{m}\acute{a}\text{x}} s_y^{\text{m}\acute{a}\text{x}} P^2 . \quad (3.52)$$

donde $s_x^{\text{m}\acute{a}\text{x}}$ y $s_y^{\text{m}\acute{a}\text{x}}$ son las modulaciones máximas dadas por la ec. (3.33). Estos dos factores son tanto menores cuanto mayores sean las dimensiones de $a_1(\vec{r})$ frente a las de $a_2(\vec{r})$, de modo que cuanto mayor es la extensión de la primera de las señales frente a la segunda menor es el producto extensión-ancho de banda que queda disponible para esta última. Este efecto puede llegar a ser muy importante en el caso de que la señal de entrada sea compuesta, es decir, cuando esté constituida por varias señales diferentes yuxtapuestas.

Una vez establecidas algunas de las características y limitaciones del dispositivo propuesto, vamos a estudiar un par de parámetros que pueden caracterizar su funcionamiento y que pueden servir de base tanto para su comparación con otros dispositivos ópticos de correlación como para plantear configuraciones óptimas de éste tomándolos como funciones de mérito. En primer lugar, estudiaremos una magnitud de interés práctico en todos estos dispositivos, como es la longitud axial del mismo. En nuestro caso, exceptuando la parte correspondiente al sistema de iluminación para la señal de entrada (que en el caso de usar elementos autoluminosos no es necesaria), la longitud total del dispositivo, \mathcal{L} , vendrá dada por la distancia desde el filtro fuente y el plano de observación, que, teniendo en cuenta las ecs. (3.23a) y (3.23b), podremos expresar como

$$\mathcal{L} = z + R = \frac{Qz_T(\lambda)}{\beta(1-\beta)} . \quad (3.53)$$

Si se pretende minimizar este parámetro es evidente que, para cualquier valor de β , el sistema más compacto corresponde al menor valor de Q posible, es decir $Q = 1/2$. Por otro lado, el denominador de la ecuación anterior se maximiza para el valor de $\beta = 1/2$. Con esta elección, el valor mínimo de la longitud del sistema vendrá dado por

$$\mathcal{L}_{\text{m}\acute{i}\text{n}} = 2z_T(\lambda) = \frac{4p^2}{\lambda} . \quad (3.54)$$

Así pues, el dispositivo más compacto que proporciona la correlación exacta entre las dos señales se obtiene eligiendo el primer plano de autoimagen negativa del filtro objeto ($Q = 1/2$) como plano de observación y diseñando dicho filtro de modo que su celda unidad se encuentre reescalada en un factor $\beta = 1/2$ respecto de lo que se reescala la función que se codifica sobre el filtro fuente. Destaquemos, por último, que el diseño del filtro con el periodo mínimo que garantice el no solapamiento de las celdillas en el plano de salida, proporcionará el dispositivo de menor longitud axial.

El segundo parámetro que estudiaremos es la eficiencia luminosa del dispositivo. Esta magnitud es una medida de la fracción de la potencia que entra en el sistema que contribuye al resultado final que se observa en el plano de detección. En el caso de los correladores que se utilizan en el reconocimiento de señales esta definición admite, al menos, dos interpretaciones diferentes. La primera de ellas consiste en considerar el punto central de la correlación (o un entorno de éste) como señal útil de salida, ya que es dicho valor el que se usa para discriminar los reconocimientos en la clasificación final de las señales de entrada. A la fracción de la potencia que penetra en el dispositivo que finalmente contribuye a este pico de correlación se la conoce como eficiencia de Horner (Caulfield 1982) (Horner 1992a). Por otro lado, una medida aplicable a situaciones mucho más generales es la denominada eficiencia de difracción del correlador, definida simplemente como el cociente entre la potencia que entra en el correlador y la que finalmente llega a la señal de correlación final (Horner 1982). Puede demostrarse que la eficiencia de Horner tiene en cuenta, además de la eficiencia de difracción, el grado de concentración de la señal de salida en torno a su valor central (la denominada fracción energética pico-correlación), por lo que no puede considerarse estrictamente como una medida de la eficiencia luminosa (Vijaya Kumar y Hassebrook 1990) (Horner 1992b). Nuestro estudio, por ello, se centrará únicamente en la eficiencia de difracción del correlador propuesto. Para ello, denominaremos

$$S_1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} a_1(\vec{r}) d^2\vec{r}, \quad y \quad (3.55)$$

$$S_2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} a_2(\vec{r}) d^2\vec{r}, \quad (3.56)$$

a los volúmenes respectivos de las señales a correlacionar. De acuerdo con el diseño de los filtros que se propone en nuestro correlador, y suponiendo, por simplicidad, que el primero de ellos se ilumina con una irradiancia uniforme de valor unidad, la potencia total que sale de la fuente del sistema vendrá dada por

$$\begin{aligned} P_E &= \iint_{-\infty}^{+\infty} I_S(\vec{\rho}) d^2\vec{\rho} = \iint_{-\infty}^{+\infty} T_1(\vec{\rho}) d^2\vec{\rho} = \\ &= \frac{1}{\kappa_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} a_1\left(\frac{1}{M_1}\vec{\rho}\right) d^2\vec{\rho} = \frac{M_1^2 S_1}{\kappa_1}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Por otro lado, la potencia total en el plano de salida vendrá dada por

$$P_S = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda) d^2\vec{r}. \quad (3.58)$$

Si consideramos que se cumplen las condiciones de no solapamiento y supuesto un valor de $Q < Q^{\text{máx}}$, dado este último por la ec. (3.39), podemos sustituir $\mathcal{I}_R(\vec{r}; z; \lambda)$ por la expresión (3.22), que junto con la condición (3.18) permite expresar esta potencia como

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{M'^2 P^2}{\kappa_1 \kappa_2 R^2 M^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon\left(\frac{1}{M'} \vec{r}\right) d^2\vec{r} = \\ &= \frac{M'^4 P^2}{\kappa_1 \kappa_2 R^2 M^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(\vec{r}') d^2\vec{r}', \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde hemos considerado que en el plano de salida se obtiene una distribución de irradiancia limitada a P periodos en cada una de las direcciones cartesianas. Considerando que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(\vec{r}') d^2\vec{r}' = S_1 S_2, \quad (3.60)$$

la expresión (3.59) puede reducirse a

$$P_S = \frac{M_2^2 M'^2 P^2}{\kappa_1 \kappa_2 R^2} S_1 S_2, \quad (3.61)$$

donde se ha tenido en cuenta la condición de consonancia de escalas (3.18). Con todo, la eficiencia luminosa global del dispositivo vendrá dada por

$$\eta_D^{\text{global}} = \frac{P_S}{P_E} = \frac{P^2 S_2}{\kappa_2} \left(\frac{M'}{R} \frac{M_2}{M_1}\right)^2. \quad (3.62)$$

A partir de las ecs. (3.24), (3.25) y (3.23b), es posible expresar la ecuación anterior en función de la escala relativa β de las señales codificadas en los filtros, del siguiente modo

$$\eta_D^{\text{global}} = \left(\frac{M_2^2 S_2}{\kappa_2}\right) \frac{P^2 \beta^2}{Q^2 z_T^2(\lambda)}. \quad (3.63)$$

Es directo obtener que el término entre paréntesis en la expresión anterior no es más que el volumen de la celda unidad de la transmitancia en irradiancia del filtro objeto, $C(\vec{r}_o)$, que denotaremos por S_C . Así pues, podremos expresar, finalmente

$$\eta_D^{\text{global}} = S_C \frac{P^2 \lambda^2 \beta^2}{4Q^2 p^4} . \quad (3.64)$$

donde se ha tenido en cuenta el valor $z_T(\lambda)$ indicado en la ec. (2.39). Si queremos referirnos a la fracción de potencia que llega a cada una de las correlaciones que aparecen en el plano de salida, es inmediato obtener para esta magnitud el valor

$$\eta_D = \frac{\eta_D^{\text{global}}}{P^2} = S_C \frac{\lambda^2 \beta^2}{4Q^2 p^4} . \quad (3.65)$$

Este parámetro suele ser de mayor interés que el anterior y es el que consideraremos como eficiencia luminosa del dispositivo. Al igual que ocurre con la longitud del dispositivo, para unos parámetros de diseño del filtro objeto dados, la optimización de la eficiencia luminosa del dispositivo se obtiene para $Q = 1/2$. Por otro lado, esta función alcanza un valor tanto más alto cuanto más se acerca β a la unidad, que es su cota superior de acuerdo con la ec. (3.28). Sin embargo, cuanto más alto es este valor mayor es la longitud del dispositivo, haciéndose infinita en el caso límite de $\beta = 1$. Es necesaria, por lo tanto, una relación de compromiso entre ambos parámetros en el diseño óptimo del dispositivo. Por último, señalemos que también el periodo mínimo indicado en la ec. (3.31) proporciona la elección óptima respecto a la eficiencia del dispositivo. En la fig. 3.5 se recoge una representación gráfica de ambos parámetros en función del factor de reescalado entre las señales codificadas en ambos filtros.

Cuando un correlador como el que proponemos se usa en experiencias de reconocimiento de patrones, es muy común que la señal de entrada sea una función compuesta por la yuxtaposición de diferentes patrones elementales, uno de los cuales constituye la señal de referencia a reconocer. En nuestro caso, en el plano de detección final se obtiene, en cada una de las celdas que se repiten en él, la correlación del patrón de referencia con la función de entrada compuesta, que no es más que la yuxtaposición de la correlación del patrón de referencia con cada uno de los patrones que componen la escena de entrada. Un par de consideraciones merecen un poco de atención en este caso. En primer lugar, destaquemos el hecho de que en la celda unidad del plano de observación las correlaciones de la señal de referencia y cada una de las señales elementales no se disponen del mismo modo que se distribuyen éstas últimas en la escena de entrada. Esto es debido a que en la celda unidad del plano de salida del dispositivo se obtiene la correlación entre la señal de referencia y la de entrada y no al revés como ocurre en la mayor parte de los correladores ópticos. Para poner en evidencia este hecho, consideremos que

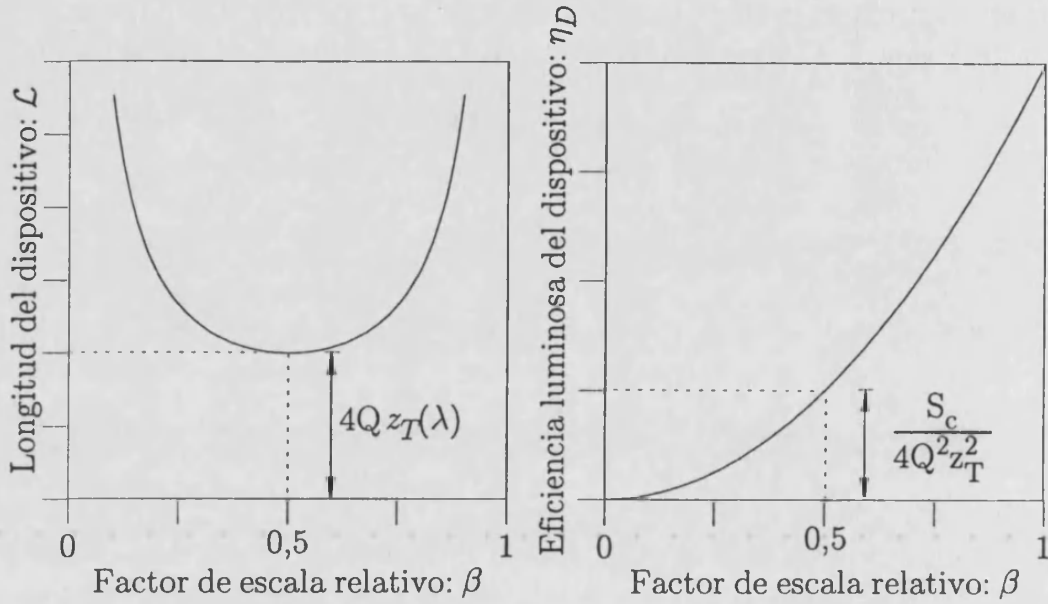


Figura 3.5. Representaciones gráficas de la longitud axial y de la eficiencia del dispositivo de correlación propuesto en función del reescalado β con el que se diseñan los filtro.

cada una de las N_S funciones elementales presentes en la escena de entrada, $a^{(i)}(\vec{r})$, se encuentran situadas en torno a posiciones \vec{r}_i en el plano de dicha señal. La señal de entrada, por lo tanto, podrá expresarse como

$$a_1(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_S} a_1^{(i)}(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3.66)$$

y, por lo tanto, su correlación con la señal de referencia en el plano de salida conduce a

$$a_2(\vec{r}) * a_1(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_S} a_2(\vec{r}) * a_1^{(i)}(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.67)$$

Si tenemos en cuenta, finalmente, que para dos funciones cualesquiera $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$ se cumple

$$f(\vec{r}) * g(\vec{r}) = h(\vec{r}) \rightarrow f(\vec{r}) * g(\vec{r} - \vec{r}_o) = h(\vec{r} + \vec{r}_o), \quad (3.68)$$

es evidente que la ec. (3.67) reproduce la yuxtaposición de las correlaciones del patrón de referencia con cada una de las señales elementales de la escena de entrada, centradas cada una de ellas en puntos $\vec{r} = -\vec{r}_i$, es decir, en la posición simétrica a la que corresponde a dichas señales en la escena de entrada. Este resultado es análogo al proporcionado por el dispositivo clásico de Vander Lugt.

Por otro lado, si la separación entre las señales elementales de la escena de entrada no es lo suficientemente grande, pueden producirse solapamientos entre las correspondientes correlaciones elementales en el interior de cada una de las celdillas, distorsionando el perfil de éstas y pudiendo provocar falsas alarmas o pérdida de señales de reconocimiento. Este efecto es independiente del hecho de que se garantice la ausencia de solapamiento entre las diferentes réplicas que aparecen en el plano de salida del dispositivo. Ya que la celda unidad de la distribución de irradiancia que se obtiene en el plano de salida del dispositivo no es más que una versión escalada de la correlación de la señal de referencia con la señal de entrada compuesta, para estimar la separación mínima necesaria entre cada uno de los patrones que la componen basta estudiar la estructura de esta operación múltiple en el propio dominio de definición de ambas señales. Consideraremos que los soportes de cada una de las funciones elementales que aparecen en la señal de entrada pueden circunscribirse en rectángulos de lados $L_{1x}^{(i)}$ y $L_{1y}^{(i)}$, donde el superíndice $i = 1, \dots, N_S$ identifica cada una de estas funciones. Cada una de las correlaciones elementales con la señal de referencia podrá confinarse en el interior de un rectángulo, centrado con el que circunscribe a la señal considerada, con dimensiones, en cada una de las direcciones de los ejes coordenados, dadas por

$$\bar{L}_{cx}^{(i)} = L_{1x}^{(i)} + L_{2x}, \quad \bar{L}_{cy}^{(i)} = L_{1y}^{(i)} + L_{2y}, \quad (3.69)$$

tal y como se indica en la fig. 3.6. Es directo, por lo tanto, concluir que para garantizar que éstas no se solapen basta exigir que la separación entre los patrones elementales adyacentes sea al menos igual a

$$\Delta_x^{\text{mín}} = L_{2x}, \quad \Delta_y^{\text{mín}} = L_{2y}, \quad (3.70)$$

en cada una de las dos direcciones cartesianas. Por lo tanto, tras el correspondiente reescalado, sobre el filtro fuente esta distancia mínima debe ser de $M_1 L_{2x}$ y $M_1 L_{2y}$ en la dirección del eje de abscisas y de ordenadas, respectivamente.

Para comprobar en la práctica las capacidades descritas teóricamente, realizamos una verificación experimental de los resultados proporcionados por nuestro dispositivo en una experiencia real de reconocimiento de patrones. En dicho experimento se pretendía detectar la presencia y posición de un determinado carácter alfabético binario en una señal de entrada compuesta. Esta señal estaba constituida por una disposición regular de 6 caracteres alfabéticos del mismo juego tipográfico, distribuidos regularmente en 2 filas y 3 columnas, tal y como se muestra en la fig. 3.7. Como señal de referencia se eligió el carácter S, presente en dos ocasiones en la escena de entrada, y la distribución de caracteres en dicha escena se realizó de modo que las distancias Δ_x e Δ_y entre caracteres vecinos cumpliesen la condición (3.70), como se deduce de las indicaciones en trazos discontinuos que aparecen en dicha figura. Este carácter de referencia se replicó periódicamente

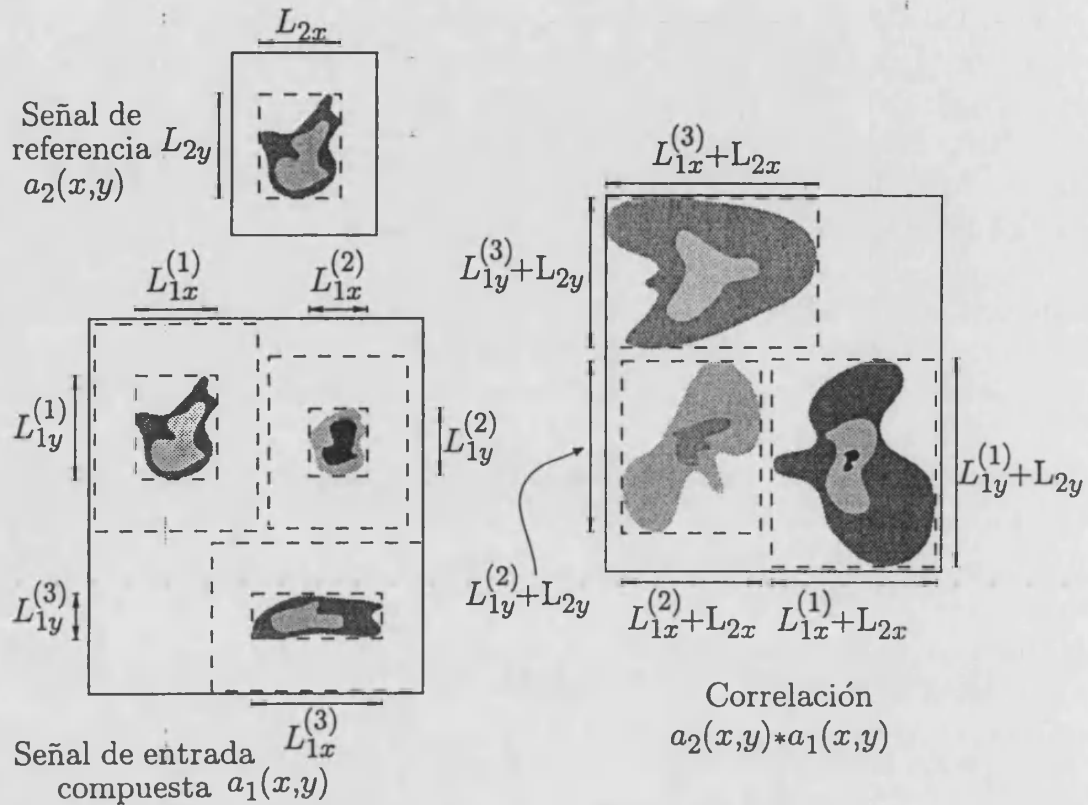


Figura 3.6. Esquema en el que se muestra el tamaño y localización de cada una de las correlaciones elementales que se obtienen cuando la señal de entrada está compuesta de varias funciones elementales. Nótese la inversión que se produce en la posición de las correlaciones resultantes respecto de la localización de cada patrón elemental en la señal de entrada, de acuerdo con el resultado indicado en la ec. (3.68).

sobre el filtro objeto. En este caso particular, la modulación máxima de este filtro que garantiza la ausencia de solapamiento entre celdas adyacentes en el plano de detección, de acuerdo con la ec. (3.33), viene dada por

$$s_x^{\text{máx}} = s_y^{\text{máx}} = \frac{L_{2x}}{L_{1x} + L_{2x}} = \frac{1}{6} \quad (3.71)$$

Esta modulación máxima, que corresponde al periodo mínimo dado por la ec. (3.31), proporciona la menor longitud del dispositivo, y por ello se eligió como modulación del filtro objeto. Para completar la optimización de este parámetro se reescalaron las señales a correlacionar de modo que cada uno de los patrones presentes en el filtro de entrada tuviese un tamaño doble que los presentes en el de referencia, es decir, se eligió un parámetro $\beta = 1/2$. Con el mismo fin, se eligió como plano de observación el correspondiente a la primera autoimagen negativa del filtro objeto, es decir, se escogió un valor de $Q = 1/2$. Ambas señales se codificaron en soporte fotográfico en forma de transparencias.

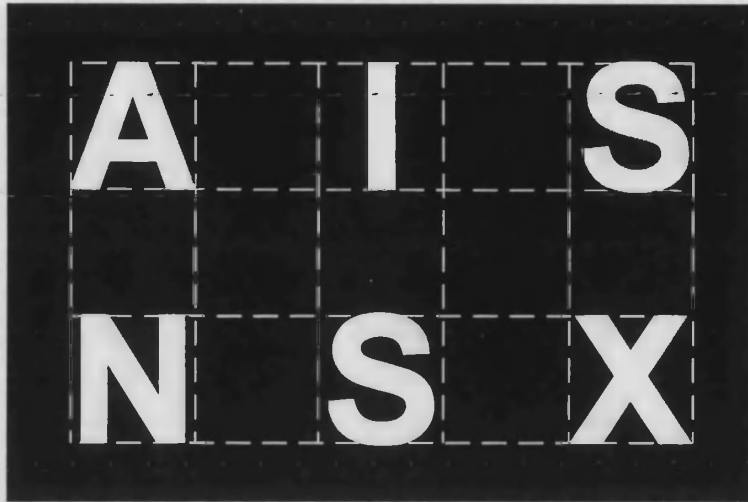


Figura 3.7. Versión escalada de la señal de entrada compuesta utilizada en la experiencia de reconocimiento de caracteres, a la que se ha añadido una trama de trazos discontinuos para mostrar que la separación entre los elementos que la componen garantiza el no solapamiento entre las correlaciones en el interior de cada celdilla en el plano final de observación.

El carácter que aparecía replicado en el filtro de referencia podía recubrirse con un cuadrado de lados $M_2 L_{2x} = M_2 L_{2y} \simeq 0,05$ mm y el periodo de dicho filtro era de $p \simeq 0,308$ mm. La iluminación del filtro fuente se consiguió haciendo pasar el haz luminoso proveniente de un láser de Argón ionizado ($\lambda = 514$ nm) a través de un vidrio deslustrado que giraba con ayuda de un motor auxiliar, que rompía la coherencia espacial de la radiación. Con la ayuda de una lente esférica se formó la imagen de la región iluminada de este difusor sobre la transparencia fotográfica que contenía una réplica de la señal de entrada. Tal y como indicamos previamente, la iluminación que se consigue de este modo sobre dicho filtro hace que se comporte como una fuente secundaria cuasimonocromática espacialmente incoherente.

En estas circunstancias, las ecs. (3.23) conducen a unos valores para las distancias entre los filtros y entre la transparencia objeto y el plano de observación $z = R = 36,91$ cm. En la fig. 3.8 se muestra una porción de la distribución de irradiancia que se obtiene en dicho plano de observación, donde puede apreciarse la periodicidad de ésta.

La celda unidad de este patrón se muestra ampliada en la fig. 3.9. En ella aparecen las señales asociadas a la correlación del carácter de referencia con cada uno de los que componen la señal de entrada. Como se ha puesto de manifiesto en la discusión previa, la disposición espacial relativa de estas correlaciones se encuentra invertida respecto de la de los caracteres que componen el filtro de en-

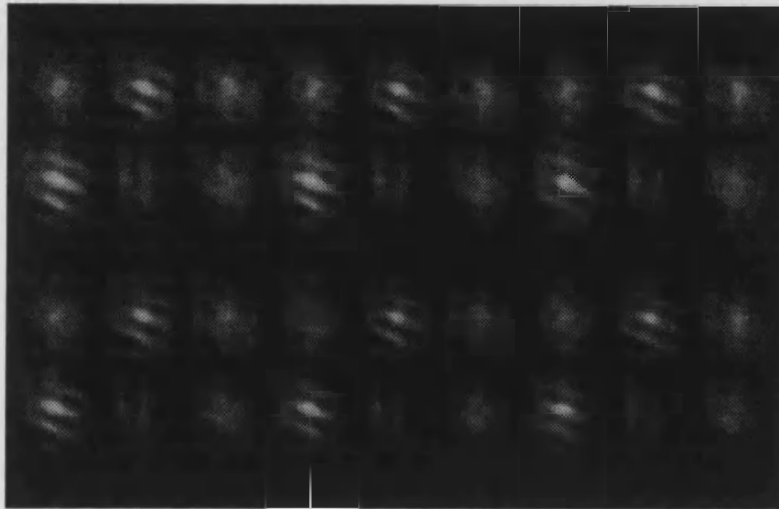


Figura 3.8. Porción escalada de la distribución de irradiancia periódica que se obtiene en el plano de observación del correlador.

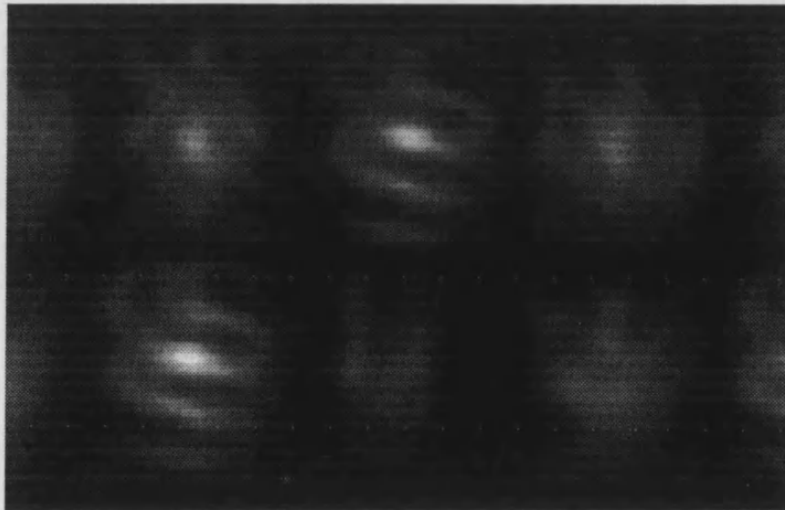


Figura 3.9. Ampliación de una de las celdillas que se replican en la fig. 3.8 .

trada. Nótese que en esta celda se aprecian claramente los picos de irradiancia máxima que detectan la presencia y localización del patrón de referencia. Como comprobación adicional, se calculó numéricamente el resultado de la correlación de las señales empleadas. La representación en niveles de gris correspondiente a este cálculo se muestra en la fig. 3.10. Como se observa comparando dicha figura con la 3.9, la similitud entre el resultado numérico y el experimental es altamente satisfactoria, quedando claramente comprobado que la operación obtenida por medios ópticos corresponde exactamente a la correlación buscada y, por ende, justificada la denominación de correlador de proyección geométrica perfecta.



Figura 3.10. Representación en niveles de gris del cálculo numérico de la correlación entre las señales de entrada y referencia utilizadas en la experiencia de reconocimiento de caracteres. Nótese la gran similitud con el resultado obtenido ópticamente con el dispositivo propuesto, presentado en la fig. 3.9.

3.3 Correlador de proyección geométrica perfecta sintonizable a la escala de la señal de entrada

Una propiedad deseable en muchos reconocedores de patrones es que su respuesta sea relativamente insensible a algunas distorsiones en la imagen de entrada. Vamos a reconocer a continuación que la arquitectura óptica que hemos propuesto tiene la capacidad de poderse adaptar a variaciones de la escala de la señal de entrada, dentro de un amplio rango de ésta, sin necesidad de modificar el filtro de referencia.

Este objetivo puede alcanzarse de modo simple variando de modo adecuado la separación entre los filtros y la posición del plano de observación. En efecto, si expresamos las ecs. (3.23a) y (3.23b) en función de las escalas M_1 y M_2 con las que se reproducen las señales a correlacionar sobre los filtros fuente y objeto, obtenemos

$$z = \frac{QM_1}{M_2} z_T(\lambda), \quad (3.72a)$$

$$R = \frac{QM_1}{M_1 - M_2} z_T(\lambda). \quad (3.72b)$$

Es evidente, por tanto, que sin cambiar los parámetros de diseño del filtro objeto, M_2 y p (o, equivalentemente, $z_T(\lambda)$), siempre es posible encontrar un plano en el que se obtiene la correlación de las señales con la misma escala, independientemente

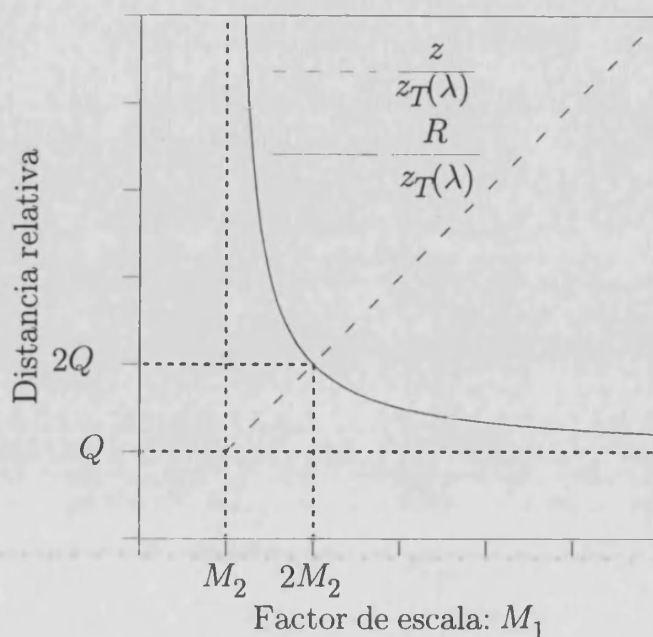


Figura 3.11. Representación gráfica de los valores requeridos para las distancias entre los filtros fuente y objeto, z , y entre éste último y el plano de observación, R , tomando como unidad la distancia de Talbot, $z_T(\lambda)$, en función del factor de escala, M_1 , con el que se reproduce la señal de entrada en el filtro fuente.

del valor del aumento de la señal de entrada en el correspondiente filtro fuente, M_1 . La restricción (3.28) impone, sin embargo, un límite inferior para los valores de este factor de escala que son admisibles en el dispositivo propuesto, ya que como se deduce de ella siempre debe cumplirse que $M_1 > M_2$. En la fig. (3.11) se muestra una representación gráfica de las distancias entre los filtros y entre el filtro de referencia y el plano de observación proporcionados por las ecs. (3.72a) y (3.72b) para el rango de valores de factores de escala en el filtro de entrada admisibles.

También es posible, por otro lado, obtener la consonancia de escalas en el plano de correlación manteniendo constante la separación entre los filtros, es decir, fijando z . Para ello vamos a aprovechar el hecho de que el plano de observación puede ser cualquiera que corresponda a una autoimagen del filtro objeto. Para un valor de z fijo, todos los planos de autoimagen, caracterizados por valores de R que cumplan la condición (2.71), son planos en los que se obtiene la correlación de la señal de referencia, con una escala $M_2 M$, y la señal de entrada con una escala $M_1 M$. Podemos preguntarnos cuál ha de ser el valor de M_1 que hace que se cumpla la condición de igualdad de escalas (3.18) una vez fijado el valor de Q . Contemplado desde otro punto de vista, podemos estudiar cual es la escala M_1 de la señal de entrada a la que queda "adaptado" el correlador en cada plano de

autoimagen del filtro objeto. La posición del plano de observación y esta escala M_1 vendrán dadas por las ecs. (3.72a) y (3.72b). Operando a partir de ellas se obtiene

$$M_1(Q; z, M_2) = \frac{M_2 z}{Q z_T}, \quad (3.73a)$$

$$R(Q; z) = \frac{Q z_T z}{z - Q z_T} = \frac{Q \frac{z}{z_T}}{\frac{z}{z_T} - Q} z_T. \quad (3.73b)$$

Como indican estas ecuaciones, al variar el valor del parámetro Q , el correlador se sintoniza, en los sucesivos planos de autoimagen del filtro objeto, para una escala diferente de la señal de entrada. A diferencia del caso anterior, la contrapartida por no variar la distancia z es que la sintonía sólo se consigue para un conjunto discreto de valores del factor de escala M_1 , ya que Q sólo puede tomar valores semienteros. Además, si exigimos ahora que el plano de observación sea un plano real, es decir, que R sea positivo, esto nos lleva a que, en este caso

$$0 < Q < \frac{z}{z_T}, \quad (3.74)$$

expresión que, teniendo en cuenta el carácter semientero de este parámetro, conduce a

$$0 < Q \leq \frac{1}{2} E \left[\frac{2z}{z_T} \right], \quad (3.75)$$

donde, de nuevo, $E[x]$ representa la parte entera de x . En particular, si el valor de z elegido es menor que $z_T/2$, no existe ninguna autoimagen real del filtro objeto, y, por tanto, dicha elección hace inviable el dispositivo de correlación. Todos estos inconvenientes hacen este método poco flexible y fuertemente limitado, por lo que centraremos nuestro estudio en la técnica indicada en primer lugar. En ese caso, la configuración propuesta permite conseguir un correlador de proyección geométrica perfecta sintonizable en un amplio rango continuo de valores de la escala de la señal de entrada, sin necesidad de construir un nuevo filtro de referencia.

Todos los razonamientos seguidos en el estudio del dispositivo presentado en la sección anterior son directamente aplicables a cada una de las situaciones concretas a las que puede ajustarse este correlador. Sin embargo, la optimización de los valores de diseño del filtro objeto respecto de la longitud del dispositivo y la eficiencia luminosa obtenida entonces no serán aplicables más que a un valor del factor de escala de la señal de entrada, de modo que para otros valores de M_1 el comportamiento puede alejarse sensiblemente del óptimo. Sin embargo, en las experiencias reales de reconocimiento de patrones es habitual que el rango de escalas con las que se puede presentar la señal a reconocer en la escena de entrada se encuentre limitado. Atendiendo a este hecho, resulta interesante plantearse un diseño óptimo del filtro objeto para el rango de escalas de la experiencia en cuestión.

Consideremos, en primer lugar, como parámetro a optimizar la longitud del dispositivo, es decir, buscaremos la máxima compacidad del dispositivo en una experiencia en la que los posibles factores de escala de la señal de entrada se encuentran limitados a un rango determinado. Trataremos de determinar el valor del factor de escala con el que se ha de reproducir la señal de referencia en el filtro objeto, M_2 , para que la longitud máxima del correlador que se obtiene cuando las señales a reconocer se presentan con escalas en dicho rango sea lo más pequeña posible. Nótese que la solución obtenida anteriormente para la longitud mínima proporcionaría un valor diferente para cada uno de los posibles casos en la señal de entrada, mientras que el resultado que aquí se busca ha de ser único para todos ellos.

Supondremos que el factor de escala de la señal de entrada varía en la práctica entre unas cotas mínima y máxima M_1^{\min} y M_1^{\max} , respectivamente. Para un valor de M_2 dado, el valor de la escala relativa β , definida en la ec. (3.24), variará entre los límites

$$\beta^{\min}(M_2) = \frac{M_2}{M_1^{\max}} \leq \beta \leq \beta^{\max}(M_2) = \frac{M_2}{M_1^{\min}} . \quad (3.76)$$

Estos valores extremos varían, por lo tanto, de manera lineal con el valor de M_2 elegido. En cualquier caso, de acuerdo con la condición (3.28), siempre se debe escoger éste de modo que $\beta^{\max}(M_2)$ sea menor que la unidad, es decir, de modo que

$$M_2 < M_1^{\min} . \quad (3.77)$$

Por otro lado, la longitud del dispositivo, \mathcal{L} , para cualquier valor M_1 de la señal de entrada vendrá dada por la ec. (3.53). En la fig. 3.12 se muestra una representación gráfica de este parámetro en función de β , para el caso de $Q = 1/2$, que es la elección que, en cualquier caso, proporciona el dispositivo de menor longitud. Como se deduce de esta representación, se trata de una función simétrica respecto del valor $\beta = 1/2$, en el que alcanza, como ya sabemos, su valor mínimo. De la forma de esta función es sencillo darse cuenta que el valor más grande de la longitud, \mathcal{L}^{\max} , se obtiene, sea cual sea el rango de valores de β considerado, o bien para $\beta^{\min}(M_2)$ o para $\beta^{\max}(M_2)$, es decir,

$$\mathcal{L}^{\max}(M_2) = \max \{ \mathcal{L}_1(M_2), \mathcal{L}_2(M_2) \} , \quad (3.78)$$

donde

$$\mathcal{L}_1(M_2) = \mathcal{L}(\beta^{\min}(M_2)) = \frac{z_T}{2} \frac{(M_1^{\max})^2}{M_2 (M_1^{\max} - M_2)} , \quad (3.79a)$$

$$\mathcal{L}_2(M_2) = \mathcal{L}(\beta^{\max}(M_2)) = \frac{z_T}{2} \frac{(M_1^{\min})^2}{M_2 (M_1^{\min} - M_2)} . \quad (3.79b)$$

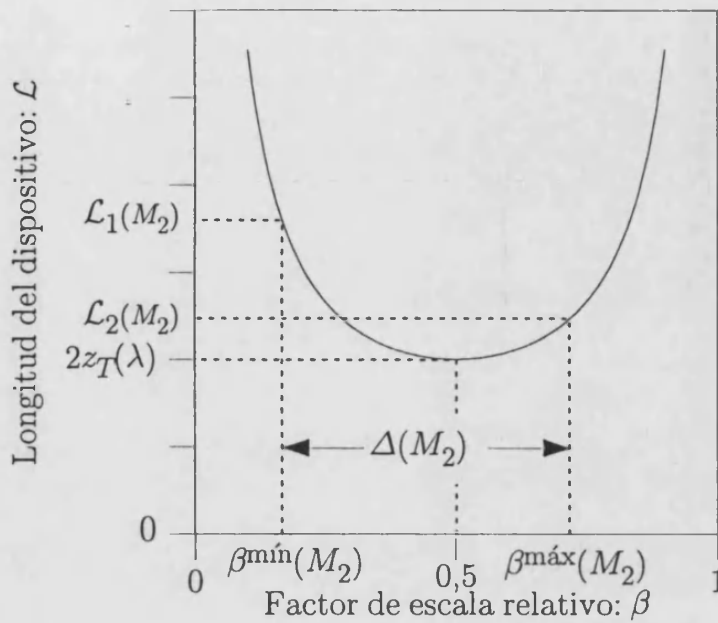


Figura 3.12. Representación gráfica de la longitud axial del dispositivo de correlación en función del factor de escala relativo con el que se diseñan los filtros.

En la fig. 3.13 se muestra una representación gráfica, en función de M_2 , de los valores de estos extremos, junto con los valores correspondientes a $\mathcal{L}^{\text{máx}}$. De esta representación se desprende que este valor alcanza un valor mínimo en el punto en el que ambas curvas se intersectan, es decir, para el valor M_2^{opt} que cumple

$$\mathcal{L}_1(M_2^{\text{opt}}) = \mathcal{L}_2(M_2^{\text{opt}}) . \quad (3.80)$$

De acuerdo con las ecs. (3.79), esta condición se traduce en

$$\frac{(M_1^{\text{máx}})^2}{(M_1^{\text{máx}} - M_2^{\text{opt}})} = \frac{(M_1^{\text{mín}})^2}{(M_1^{\text{mín}} - M_2^{\text{opt}})} , \quad (3.81)$$

expresión que, operando adecuadamente, conduce a

$$\frac{1}{M_2^{\text{opt}}} = \frac{1}{M_1^{\text{mín}}} + \frac{1}{M_1^{\text{máx}}} = \frac{2}{\mathcal{H}\{M_1^{\text{mín}}, M_1^{\text{máx}}\}} , \quad (3.82)$$

donde $\mathcal{H}\{x_i, i = 1, \dots, N\}$ representa la media armónica del conjunto $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$. Así pues, el diseño óptimo para la longitud del dispositivo en cada experiencia dada se obtiene eligiendo la escala con la que se reproduce la señal de referencia en el filtro periódico como la mitad de la media armónica de los valores

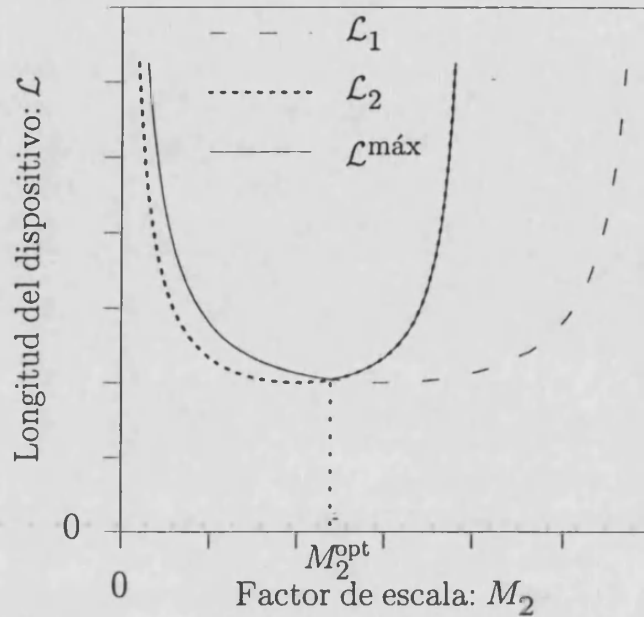


Figura 3.13. Valores de la longitud del dispositivo que se obtienen en los extremos del intervalo de factores de escala de la señal de entrada, junto con el valor máximo de ésta en todo el intervalo.

extremos de los factores de escala con los que puede aparecer dicha señal en la escena de entrada. Nótese que en la deducción de este resultado no se ha tenido en cuenta la restricción impuesta por la ec. (3.77); sin embargo, es directo comprobar a partir de la ec. (3.82) que M_2^{opt} siempre es menor que $M_1^{\text{mín}}$ independientemente del valor de $M_1^{\text{máx}}$. La longitud máxima que se obtiene con este valor para el filtro objeto viene dada, de acuerdo con cualquiera de las ecs. (3.79), por

$$\mathcal{L}^{\text{máx}}(M_2^{\text{opt}}) = \frac{z_T (M_1^{\text{máx}} + M_1^{\text{mín}})^2}{2 M_1^{\text{máx}} M_1^{\text{mín}}} \quad (3.83)$$

y este valor se obtendrá en cualquiera de las situaciones extremas $M_1 = M_1^{\text{mín}}$ y $M_1 = M_1^{\text{máx}}$. Para valores de los factores de escala intermedios, la longitud del dispositivo será menor. De hecho, para esta elección óptima del filtro de referencia los valores extremos de la escala relativa β vendrán dados por

$$\beta^{\text{mín}}(M_2^{\text{opt}}) = \frac{M_1^{\text{mín}}}{M_1^{\text{máx}} + M_1^{\text{mín}}}, \quad \beta^{\text{máx}}(M_2^{\text{opt}}) = \frac{M_1^{\text{máx}}}{M_1^{\text{máx}} + M_1^{\text{mín}}}, \quad (3.84)$$

lo que permite expresar la condición (3.82) como

$$1 = \beta^{\text{mín}}(M_2^{\text{opt}}) + \beta^{\text{máx}}(M_2^{\text{opt}}) \quad (3.85)$$

A partir de estas expresiones es muy sencillo demostrar que

$$\beta^{\min} (M_2^{\text{opt}}) < \frac{1}{2}, \quad \beta^{\max} (M_2^{\text{opt}}) > \frac{1}{2}, \quad (3.86)$$

con lo que es evidente que el valor $\beta = 1/2$, que proporciona el menor valor posible para la longitud del dispositivo de acuerdo con la ec. (3.54), se alcanzará para algún valor de las escalas de la señal de entrada que pueden presentarse en la experiencia considerada. Este valor que proporciona la longitud mínima vendrá dado, pues, por $M_1 = 2M_2^{\text{opt}} = \mathcal{H} \{M_1^{\min}, M_1^{\max}\}$.

Una vez optimizado el valor de M_2 para obtener el dispositivo más compacto posible, podemos estimar cuál ha de ser el valor más conveniente del periodo p con el que se debe replicar la señal de referencia sobre el filtro objeto. Es directo observar que tanto el valor mínimo como el máximo de la longitud del sistema son proporcionales a la distancia de Talbot $z_T(\lambda)$, y por lo tanto, de acuerdo con la ec. (2.39), proporcionales al cuadrado de p . Resulta conveniente, por lo tanto, elegir el valor más pequeño posible para este parámetro. De acuerdo con la discusión de la sección anterior, la elección de este parámetro deberá realizarse siempre de manera que se garantice la ausencia de solapamiento entre las múltiples correlaciones que se obtienen en el plano final de observación. La independencia del valor límite p_{\min} dado por la ec. (3.31) con la escala de la señal de entrada hace que dicha condición sea válida aún en el caso de que M_1 tome diferentes valores como ocurre en la situación que estamos estudiando. Por lo tanto, considerando en esta ecuación el valor de diseño óptimo $M_2 = M_2^{\text{opt}}$ obtendremos que el periodo más indicado para conseguir un dispositivo lo más compacto posible viene dado por

$$p^{\text{opt}} = M_2^{\text{opt}} \max \{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\}, \quad (3.87)$$

donde L_{1x} , L_{2x} , L_{1y} y L_{2y} son las magnitudes definidas en la fig. 3.3.

Consideremos ahora la posibilidad de optimizar el dispositivo respecto a la eficiencia luminosa con la que trabajará en toda la experiencia de reconocimiento de patrones con escalas variables. En este caso, a partir de la ec. (3.65) podemos concluir, de nuevo, que el comportamiento de este parámetro es monótono respecto de los valores de β (estrictamente creciente) y p (estrictamente decreciente). Así pues, por un lado, cuanto más se aproxime β al valor unidad —que es su cota superior— en todo el intervalo de factores de escala de la escena de entrada mejor será la eficiencia máxima que se alcanzará. El valor óptimo en este sentido corresponderá a $\beta^{\max} = 1$, lo que implica elegir como nuevo valor óptimo para el filtro de referencia $\bar{M}_2^{\text{opt}} = M_1^{\min}$. Sin embargo, esta elección conduce a un valor infinito para la longitud del dispositivo cuando el factor de escala de la señal de entrada alcanza justo este valor extremo. Por lo tanto, de nuevo es evidente que si se quieren optimizar ambos parámetros simultáneamente se debe establecer alguna

relación de compromiso que se plasme en una función de mérito que los pondere adecuadamente. Por último, destaquemos que, sea cual sea el valor final de esta optimización, \bar{M}_2^{opt} , el valor de $p_{\text{mín}}$ dado por la ec. (3.31), tomando para M_2 el valor hallado \bar{M}_2^{opt} , será en cualquier caso el valor más adecuado para la longitud del dispositivo.

Hasta ahora hemos considerado el caso en el que las diferentes versiones escaladas de la señal de entrada se presentan en el dispositivo de manera sucesiva. Sin embargo, tal y como se indicó en §3.2, en la práctica es habitual que la escena de entrada sea una señal compuesta por la presencia simultánea de diferentes versiones escaladas de un determinado patrón a reconocer. Siguiendo los razonamientos indicados a lo largo de dicha sección, es posible sintonizar la distancia entre los filtros de entrada y referencia para obtener, de manera secuencial, la correlación con cada una de las versiones de la señal de entrada. En cada uno de los correspondientes planos de observación sólo se obtendrá la correlación requerida para aquellos patrones de la escena de entrada caracterizados por un determinado factor de escala, mientras que para el resto de ellos se obtendrá la correlación con una versión con diferente escala de la señal de referencia. La presencia de estos términos cruzados hace necesaria una nueva determinación del periodo mínimo que garantice la ausencia de solapamiento entre las celdillas que se replican en el plano de salida del correlador. Denominaremos L'_{1x} y L'_{1y} a los lados del rectángulo, con lados paralelos a los ejes cartesianos, que circunscribe exactamente el soporte de la transmitancia del filtro de entrada en el que se codifica la señal de entrada compuesta. Supongamos que en dicho filtro se presentan versiones escaladas de una misma función con escalas $M_1^{(i)}$ donde $i = 1, \dots, N_E$, siendo N_E el número de factores de escala diferentes presentes en la escena de entrada. Cuando se ajusta el correlador para un factor de escala concreto $M_1^{(i)}$, la correlación de toda la escena de entrada con la señal de referencia, que constituye la celda unidad que se replica en el plano de observación del dispositivo, podrá circunscribirse en un rectángulo de lados

$$L_{cx} \left(M_1^{(i)} \right) = M_S^{(i)} L'_{1x} + M'^{(i)} L_{2x}, \quad L_{cy} \left(M_1^{(i)} \right) = M_S^{(i)} L'_{1y} + M'^{(i)} L_{2y}, \quad (3.88)$$

donde, de acuerdo con la ec. (3.18),

$$M'^{(i)} = M_1^{(i)} M_S^{(i)} = M_2 M^{(i)}. \quad (3.89)$$

A partir de esta última relación, podemos expresar la ec. (3.88) como

$$L_{cx} \left(M_1^{(i)} \right) = M_S^{(i)} \left(L'_{1x} + M_1^{(i)} L_{2x} \right), \quad L_{cy} \left(M_1^{(i)} \right) = M_S^{(i)} \left(L'_{1y} + M_1^{(i)} L_{2y} \right). \quad (3.90)$$

Por otro lado, el periodo con el que se replica esta correlación en el plano de salida viene dado, de acuerdo con la ec. (3.17), por

$$p^{(i)} = M^{(i)} p = \frac{M_1^{(i)}}{M_2} M_S^{(i)} p, \quad (3.91)$$

siendo p el periodo del filtro de referencia. La condición de no solapamiento entre las diferentes celdillas vendrá dada, por lo tanto, por la condición

$$\begin{aligned} p^{(i)} &\geq \max \left\{ L_{cx} \left(M_1^{(i)} \right), L_{cy} \left(M_1^{(i)} \right) \right\} = \\ &= M_S^{(i)} \max \left\{ L'_{1x} + M_1^{(i)} L_{2x}, L'_{1y} + M_1^{(i)} L_{2y} \right\}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

expresión que impone una restricción sobre el periodo p , de acuerdo con la relación (3.91), dada por

$$\begin{aligned} p &\geq \frac{M_2}{M_1^{(i)}} \max \left\{ L'_{1x} + M_1^{(i)} L_{2x}, L'_{1y} + M_1^{(i)} L_{2y} \right\} = \\ &= M_2 \max \left\{ \frac{L'_{1x}}{M_1^{(i)}} + L_{2x}, \frac{L'_{1y}}{M_1^{(i)}} + L_{2y} \right\}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Esta condición debe cumplirse para todos los valores de $M_1^{(i)}$ para los que se establezca la consonancia de escalas en los sucesivos planos de observación. El segundo miembro de la inequación anterior alcanza su valor máximo para el valor mínimo de $M_1^{(i)}$, M_1^{\min} , y, por lo tanto, el valor mínimo de p que garantiza la condición exigida vendrá dado por

$$p_{\min} = M_2 \max \left\{ \frac{L'_{1x}}{M_1^{\min}} + L_{2x}, \frac{L'_{1y}}{M_1^{\min}} + L_{2y} \right\}. \quad (3.94)$$

Si se sustituye en esta expresión el valor de M_2 por el valor óptimo M_2^{opt} dado por la ec. (3.82), obtendremos en este caso el valor p^{opt} que optimiza la longitud del dispositivo, garantizando, a su vez, la ausencia de solapamiento entre las celdas que se replican en el plano de observación.

Por último, mediante un proceso análogo al seguido en §3.2, estimaremos la separación mínima que debe existir entre cada una de las señales elementales que componen la escena de entrada para garantizar que en ninguno de los sucesivos planos de observación se produzca solapamiento de las correlaciones elementales que se yuxtaponen para configurar la celda unidad que se replica en éstos. Denominaremos, como en la fig. 3.3, L_{1x} y L_{1y} a las dimensiones del rectángulo, con lados paralelos a los ejes cartesianos, que circunscribe exactamente el soporte de

la señal de cuyas réplicas escaladas se compone la escena de entrada. Cuando se ajusta el dispositivo para obtener la sintonía de escalas con uno de los factores de escala $M_1^{(i)}$ presentes en dicha escena, cada una de las correlaciones elementales que se obtienen en la celda unidad del plano de salida tendrá una extensión que podrá circunscribirse en un rectángulo cuyos lados vendrán dados por

$$L_{cx}^{(i,j)} = M_S^{(i)} M_1^{(j)} L_{1x} + M'^{(i)} L_{2x}, \quad L_{cy}^{(i,j)} = M_S^{(i)} M_1^{(j)} L_{1y} + M'^{(i)} L_{2y}, \quad (3.95)$$

expresiones que pueden reescribirse, teniendo en cuenta que en la disposición geométrica elegida se cumple la condición (3.89), como

$$L_{cx}^{(i,j)} = M'^{(i)} \left(\frac{M_1^{(j)}}{M_1^{(i)}} L_{1x} + L_{2x} \right), \quad L_{cy}^{(i,j)} = M'^{(i)} \left(\frac{M_1^{(j)}}{M_1^{(i)}} L_{1y} + L_{2y} \right). \quad (3.96)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que condujo a la ec. (3.70), podemos afirmar que para que en este plano no aparezca solapamiento entre las correlaciones elementales que componen la celda unidad es suficiente con que la separación que presenten los patrones en el filtro de entrada en cada una de las dos direcciones cartesianas sea como mínimo

$$\begin{aligned} \Delta'_x(i) &= \frac{1}{M'^{(i)}} \max \{ L_{cx}^{(i,j)}; j = 1, \dots, N_S \} = \frac{M_1^{\max}}{M_1^{(i)}} L_{1x} + L_{2x}, \\ \Delta'_y(i) &= \frac{1}{M'} \max \{ L_{cy}^{(i,j)}; j = 1, \dots, N_S \} = \frac{M_1^{\max}}{M_1^{(i)}} L_{1y} + L_{2y}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Esta condición garantiza únicamente que no aparecerá solapamiento en este plano de observación en concreto, pero cuando se ajuste el dispositivo para un valor diferente de la escala de las señales de entrada puede producirse este efecto indeseado, a menos que podamos asegurar que la condición se mantendrá para todas las sintonías posibles con estos patrones elementales. Este hecho queda garantizado si se exige que las distancias entre señales elementales en el filtro fuente sean al menos de

$$\begin{aligned} \Delta_x^{\min} &= \max \{ \Delta'_x(i); i = 1, \dots, N_S \} = \frac{M_1^{\max}}{M_1^{\min}} L_{1x} + L_{2x}, \\ \Delta_y^{\min} &= \max \{ \Delta'_y(i); i = 1, \dots, N_S \} = \frac{M_1^{\max}}{M_1^{\min}} L_{1y} + L_{2y}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

en cada una de las direcciones de los ejes coordenados.

A fin de obtener una comprobación experimental de las ideas presentadas en esta sección, llevamos a cabo una experiencia de reconocimiento de caracteres

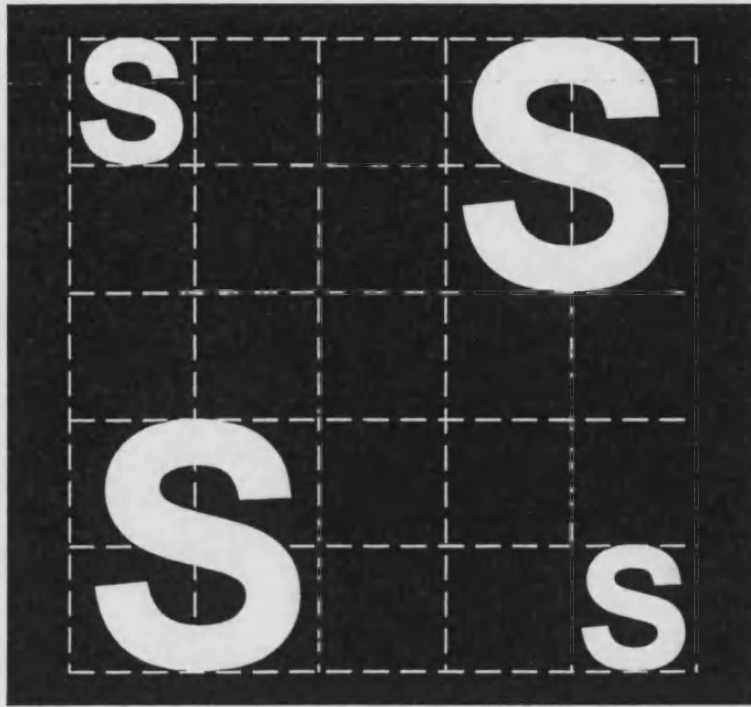


Figura 3.14. Versión escalada de la señal de entrada compuesta utilizada en la experiencia de reconocimiento de caracteres con escala sintonizable. La trama de trazos discontinuos se ha añadido para evidenciar la separación entre las señales que la componen.

análoga a la presentada en §3.2. En este caso, sin embargo, la escena de entrada estaba constituida por dos pares de réplicas de la señal de referencia, con escalas diferentes, cuya disposición se muestra en la fig. 3.14. El tamaño de estos caracteres correspondía a $\beta^{\text{mín}} = 1/1,5$ y $\beta^{\text{máx}} = 1/3$ veces el del replicado sobre el filtro de referencia, lo que reproduce una situación de adaptación óptima de dicho filtro, de acuerdo con la ec. (3.85). Esta transparencia objeto era la misma utilizada en §3.2, con lo que el periodo de ésta correspondía a $p = 0,308$ mm y su modulación a $s_x = s_y = 1/6$. Con ello se obtiene, de acuerdo con la figura anterior y la ec. (3.94), un dispositivo lo más compacto posible que garantiza el no solapamiento de las celdillas en el plano de observación para las dos configuraciones geométricas que ajustan las escalas en uno y otro caso. El sistema de iluminación del filtro fuente era idéntico al empleado entonces, con lo que la longitud de onda de la radiación empleada fue de $\lambda = 514$ nm. Con todo, la distancia de Talbot en este caso venía dada por el valor $z_T(\lambda) = 36,91$ cm.

La elección del plano de observación correspondió a la primera autoimagen negativa del filtro de referencia, es decir, se tomó un valor de $Q = 1/2$. Las distancias correspondientes a las dos configuraciones geométricas utilizadas para ajustar el dispositivo a la escala de cada una de las señales presentes en el filtro de

entrada, de acuerdo con las ecs. (3.23), fueron, para la separación entre filtros

$$\begin{aligned} z(\beta^{\min}) &= \frac{3}{2}z_T(\lambda) = 55,37 \text{ cm} , \\ z(\beta^{\max}) &= \frac{3}{4}z_T(\lambda) = 27,68 \text{ cm} , \end{aligned}$$

y para la separación entre el filtro de referencia y el plano de observación

$$\begin{aligned} R(\beta^{\min}) &= z(\beta^{\max}) = 27,68 \text{ cm} , \\ R(\beta^{\max}) &= z(\beta^{\min}) = 55,37 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Los resultados experimentales obtenidos se presentan en las figs. 3.15 y 3.16. Comparando estas distribuciones de irradiancia con el término correspondiente a la autocorrelación del carácter S en la fig. 3.10, es evidente en ambos casos la presencia del término de autocorrelación buscado. Nótese que, aunque las características geométricas del filtro de referencia garantizan el no solapamiento entre las celdillas en el plano de observación, de la fig. 3.14 puede deducirse que no se cumple en rigor la ec. 3.98 y, por lo tanto, es previsible un cierto grado de solapamiento de las señales de correlación en el interior de cada una de ellas. En particular, este aparecerá cuando se ajusta el dispositivo a la escala de los caracteres de mayor tamaño. Sin embargo, esta superposición es inapreciable debida a la estructura de estas correlaciones, tal y como puede observarse en la fig. 3.16. Esto nos lleva a pensar que, desde un punto de vista práctico, la restricción 3.98 puede relajarse para obtener una densidad ligeramente mayor de señales en la escena de entrada.

3.4 Correlador de proyección geométrica perfecta de contraste invertido

El dispositivo de correlación estudiado en las secciones anteriores se basa en dos hechos fundamentales. Por un lado, la ec. (2.85) indica que la propagación libre del campo electromagnético proporciona distribuciones de irradiancia en planos posteriores al objeto que son el resultado de la correlación entre la respuesta unidad coherente en dicho plano y una versión escalada de la distribución de exitancia de la fuente espacialmente incoherente que ilumina dicho objeto. El segundo punto clave es utilizar un objeto periódico cuadrado, en cuya celda unidad se codifica una de las señales a correlacionar, y elegir uno de los planos de autoimagen de dicho filtro objeto como plano de salida del dispositivo. De este modo, codificando la exitancia de la fuente con la segunda señal a correlacionar, se obtiene directamente la operación requerida. Ahora bien, tal y como se puso de manifiesto en §2.2, si la celda unidad de este filtro periódico tiene un soporte lo suficientemente compacto, es posible encontrar planos en los que la respuesta coherente corresponde a una

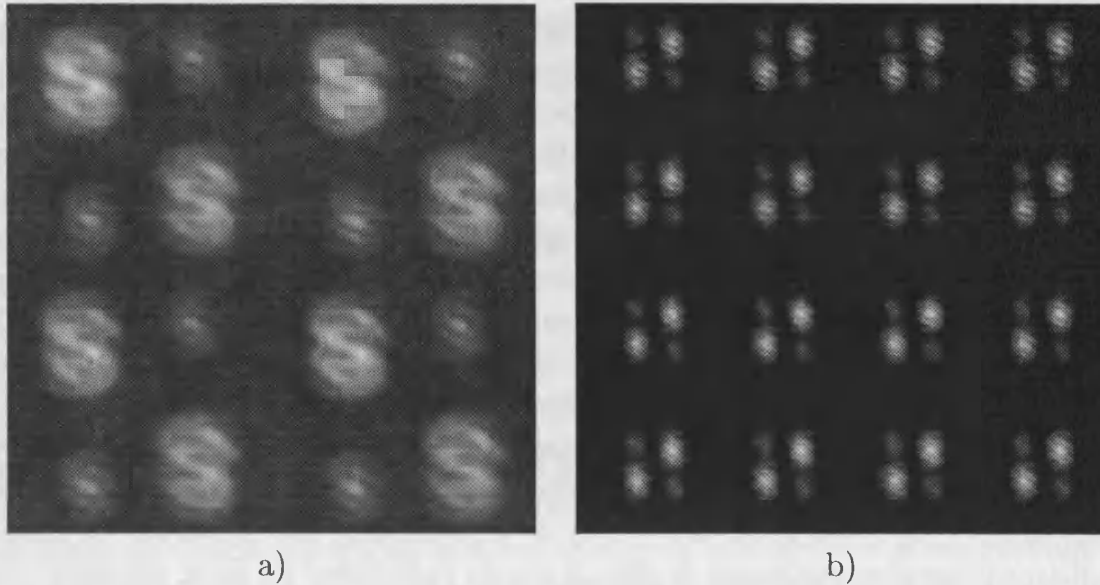


Figura 3.15. Porción escalada de la distribución de irradiancia que se obtiene en el plano de observación del correlador, cuando se sintoniza éste a la escala del carácter: a) de menor tamaño; b) de dimensiones mayores. Nótese que, de acuerdo con la ec. (3.25) y los valores de β dados en el texto, el aumento M' en un caso es el doble que en el otro.

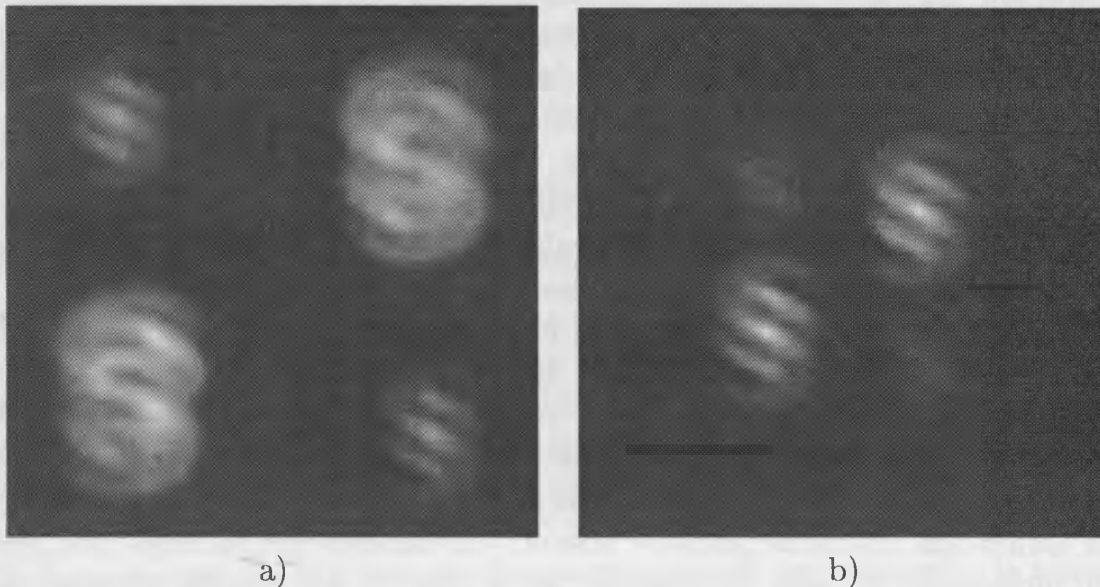


Figura 3.16. Detalle de la celda unidad de las distribuciones mostradas en las figs. 3.15a) y b).

distribución de irradiancia periódica cuya celda unidad es una réplica escalada de la del objeto, aunque con una modulación (relación entre el soporte de la celda unidad y el periodo de la distribución considerada) diferente de la que exhibe éste.

Estos planos de multiplicidad pueden elegirse también, en principio, como planos de salida del dispositivo propuesto anteriormente, sin más que aumentar las exigencias respecto a la modulación máxima aceptable del filtro objeto que garantiza la ausencia de solapamiento entre las múltiples correlaciones que se replican en el plano final de observación. La única ganancia potencial de su uso frente a los planos de autoimagen es una mejora en la compacidad del dispositivo, ya que podrían elegirse planos de observación más cercanos al objeto. Sin embargo, vamos a estudiar en esta sección cómo la elección de estos planos de multiplicidad como salida del dispositivo de correlación nos va a permitir utilizar filtros periódicos en los que se codifique una de las señales a correlacionar en forma de variaciones de fase de su transmitancia en amplitud. Estos filtros puros de fase no resultan operativos en la configuración descrita en las secciones anteriores, ya que sus autoimágenes corresponden a distribuciones uniformes de irradiancia. Sin embargo, algunos de estos filtros presentan patrones de difracción de visibilidad no nula, situados sobre ciertos planos de multiplicidad, en los que, como veremos, se obtienen réplicas de la señal codificada en ellos y que, por tanto, pueden ser utilizados en el dispositivo de correlación propuesto anteriormente. El diseño adecuado del filtro objeto permite obtener en dichos planos distribuciones de irradiancia en las que se alternan, sobre un fondo uniforme, réplicas de la señal codificada en el filtro de fase con contraste directo e invertido. La correlación de esta respuesta coherente con la señal codificada sobre la fuente incoherente del dispositivo permitirá obtener simultáneamente la operación requerida de modo directo y “en negativo” en el mismo plano de salida. Si el dispositivo se utiliza entonces en una experiencia de reconocimiento de patrones se obtendrán, además de los máximos que se presentan en los correladores convencionales, señales de correlación en las que los “picos” de autocorrelación aparecen como un mínimo (idealmente nulo) de irradiancia. Estas señales de contraste invertido presentan una serie de ventajas frente a las tradicionales, tal y como pondremos de manifiesto más adelante. En particular, la presencia simultánea de ambos tipos de señales permitirá implementar un reconocimiento invariante al contraste en la señal de entrada, propiedad que hará posible compensar el efecto que las posibles fluctuaciones en la emisión de la fuente luminosa pueden provocar en los picos de correlación.

La utilización de filtros puros de fase en correladores que trabajan con iluminación incoherente ha sido ya estudiada en el caso de dispositivos que operan en el espacio de Fourier (van der Gracht y Mait 1992) (Gorodeisky y Friesem 1993). La ventaja fundamental de su uso es el incremento en la eficiencia luminosa que presentan frente a los filtros de amplitud no uniforme. Desde un punto de vista práctico resultan especialmente interesantes los filtros binarios de fase, ya que son fácilmente realizables sobre moduladores espaciales de luz electrónicos, como las pantallas de cristal líquido, que permiten el procesado en tiempo real de las

Estos planos de multiplicidad pueden elegirse también, en principio, como planos de salida del dispositivo propuesto anteriormente, sin más que aumentar las exigencias respecto a la modulación máxima aceptable del filtro objeto que garantiza la ausencia de solapamiento entre las múltiples correlaciones que se replican en el plano final de observación. La única ganancia potencial de su uso frente a los planos de autoimagen es una mejora en la compacidad del dispositivo, ya que podrían elegirse planos de observación más cercanos al objeto. Sin embargo, vamos a estudiar en esta sección cómo la elección de estos planos de multiplicidad como salida del dispositivo de correlación nos va a permitir utilizar filtros periódicos en los que se codifique una de las señales a correlacionar en forma de variaciones de fase de su transmitancia en amplitud. Estos filtros puros de fase no resultan operativos en la configuración descrita en las secciones anteriores, ya que sus autoimágenes corresponden a distribuciones uniformes de irradiancia. Sin embargo, algunos de estos filtros presentan patrones de difracción de visibilidad no nula, situados sobre ciertos planos de multiplicidad, en los que, como veremos, se obtienen réplicas de la señal codificada en ellos y que, por tanto, pueden ser utilizados en el dispositivo de correlación propuesto anteriormente. El diseño adecuado del filtro objeto permite obtener en dichos planos distribuciones de irradiancia en las que se alternan, sobre un fondo uniforme, réplicas de la señal codificada en el filtro de fase con contraste directo e invertido. La correlación de esta respuesta coherente con la señal codificada sobre la fuente incoherente del dispositivo permitirá obtener simultáneamente la operación requerida de modo directo y “en negativo” en el mismo plano de salida. Si el dispositivo se utiliza entonces en una experiencia de reconocimiento de patrones se obtendrán, además de los máximos que se presentan en los correladores convencionales, señales de correlación en las que los “picos” de autocorrelación aparecen como un mínimo (idealmente nulo) de irradiancia. Estas señales de contraste invertido presentan una serie de ventajas frente a las tradicionales, tal y como pondremos de manifiesto más adelante. En particular, la presencia simultánea de ambos tipos de señales permitirá implementar un reconocimiento invariante al contraste en la señal de entrada, propiedad que hará posible compensar el efecto que las posibles fluctuaciones en la emisión de la fuente luminosa pueden provocar en los picos de correlación.

La utilización de filtros puros de fase en correladores que trabajan con iluminación incoherente ha sido ya estudiada en el caso de dispositivos que operan en el espacio de Fourier (van der Gracht y Mait 1992) (Gorodeisky y Friesem 1993). La ventaja fundamental de su uso es el incremento en la eficiencia luminosa que presentan frente a los filtros de amplitud no uniforme. Desde un punto de vista práctico resultan especialmente interesantes los filtros binarios de fase, ya que son fácilmente realizables sobre moduladores espaciales de luz electrónicos, como las pantallas de cristal líquido, que permiten el procesado en tiempo real de las

Por lo tanto, la respuesta coherente en irradiancia para el filtro de fase cumplirá la relación

$$\begin{aligned}
 I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) &= \left| U_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) \right|^2 = \\
 &= 1 - 2 \sin \varphi \operatorname{Im} \left\{ \bar{U}_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) \right\} + \\
 &\quad + 2(1 - \cos \varphi) \left[\left| \bar{U}_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) \right|^2 - \operatorname{Re} \left\{ \bar{U}_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) \right\} \right], \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

expresión que se obtiene operando adecuadamente a partir de la ec. (3.103), y donde $\operatorname{Re} \{z\}$ y $\operatorname{Im} \{z\}$ representan las partes real e imaginaria del número complejo z , respectivamente. En un plano de autoimagen del filtro de fase, que también lo será de su versión en amplitud, se obtendrá un valor $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = 1$ en todo el plano, como se deduce de la ecuación anterior si se considera que $|\bar{t}(\vec{r}_o)|^2 = \bar{t}(\vec{r}_o)$ debido a su carácter binario. Existen, en cambio, muchos otros patrones de difracción de visibilidad no nula que permiten obtener una réplica visible de la celda unidad de la función $\bar{t}(\vec{r}_o)$. Si consideramos que ésta se encuentra relacionada con una de las señales a correlacionar, que en este caso deberá ser una función binaria, a través de la ec. (3.6), es decir,

$$\bar{c}(\vec{r}_o) = + \sqrt{\frac{1}{\kappa_2} a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right)} = \frac{1}{\kappa_2} a_2 \left(\frac{1}{M_2} \vec{r}_o \right), \quad (3.105)$$

sobre dichos planos puede obtenerse la correlación entre ésta y el patrón codificado en la fuente incoherente del sistema. En particular, vamos a centrarnos en el estudio de los planos de multiplicidad del filtro objeto que estamos considerando.

El valor concreto del parámetro q que define el plano de observación elegido a través de la ec. (2.73) caracteriza, asimismo, el perfil de la distribución de irradiancia para un valor de diseño del salto de fase del objeto, φ . La selección de estos dos parámetros nos van a permitir elegir, en cierto modo, la distribución de irradiancia que se obtendrá en el plano de salida. Dado que nuestro objetivo final es que el plano elegido constituya el plano de salida del dispositivo de correlación, es conveniente no considerar planos en los que el factor de reducción E , definido en la ec. (2.70), sea elevado, ya que esto puede conducir a un solapamiento de las celdas contiguas que se obtienen en el resultado proporcionado por el sistema, o bien, si esto se compensa adecuadamente en el diseño del periodo del filtro objeto, a una reducción drástica del producto extensión-ancho de banda disponible para las señales a correlacionar. El valor mínimo de E es la unidad, pero esta circunstancia conduce necesariamente a un plano de autoimagen del filtro considerado, que como ya hemos indicado, resulta totalmente inadecuado en este caso. El valor más pequeño que conduce a un verdadero plano de multiplicidad es, por lo tanto,

$E = 2$. Este valor corresponde a planos cuya distancia al objeto viene dada por la ec. (2.73), con un valor de $q = 1/4$ o $q = 3/4$. Para mantener la longitud del dispositivo lo más pequeña posible tomaremos el primero de estos valores, ya que proporciona valores de R menores que el segundo. Por la misma razón elegiremos el patrón que corresponde a $Q' = 0$.

La ec. (3.104) nos permite obtener la respuesta coherente que proporciona el filtro binario de fase que estamos estudiando en función del patrón de difracción que genera sobre el mismo plano la versión en amplitud de dicho filtro. Para obtener las características de este patrón de difracción estudiaremos, sin pérdida de generalidad, tal y como hemos hecho en ocasiones anteriores, la versión que se obtiene de él en el caso de iluminación paralela. Supondremos, además, que el soporte de la función $\bar{c}(\vec{r}_o)$ es tal que no aparece solapamiento en las réplicas de ella que se generan en el plano de multiplicidad estudiado. Este último tendrá una estructura periódica cuadrada con el mismo periodo que el objeto y su celda unidad estará constituida por la superposición de réplicas de la función $\bar{c}(\vec{r}_o)$ que se sitúan en posiciones regulares en el interior de ésta. Cada una de estas copias presentan la misma amplitud aunque diferente fase, tal y como se indicó en §2.2. De acuerdo con lo allí expuesto, para el caso de $q = 1/4$ se verifica que

$$\bar{U}_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \bar{c}(\vec{r}) * \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C(r, s; 1, 4) \delta\left(\vec{r} - \vec{l}_{rs}\left(\frac{p}{4}\right)\right), \quad (3.106)$$

donde se ha obviado un factor puro de fase y se ha considerado que la amplitud de la onda de iluminación es la unidad, siendo, de acuerdo con la ec. 2.67,

$$\begin{aligned} C(r, s; 1, 4) &= \frac{1}{16} \sum_{u=0}^3 \sum_{v=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)} e^{j\frac{\pi}{2}(ur+vs)} = \\ &= \frac{1}{16} [1 + (-1)^r][1 + (-1)^s][1 - j^{r+1}][1 - j^{s+1}]. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Al ser el periodo de esta distribución de amplitudes igual a p , su celda unidad vendrá dada por

$$\bar{c}_T(\vec{r}) = \bar{c}(\vec{r}) * \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^3 C(r, s; 1, 4) \delta\left(\vec{r} - \vec{l}_{rs}\left(\frac{p}{4}\right)\right). \quad (3.108)$$

Teniendo en cuenta que, de acuerdo con la ec. (3.107), los valores pares de cualquiera de los índices r o s proporcionan valores $C(r, s; 1, 4) = 0$, esta celda unidad se reduce a cuatro réplicas de la función $\bar{c}(\vec{r})$ situadas en posiciones caracterizadas por coordenadas cartesianas $(0, 0)$, $(0, p/2)$, $(p/2, 0)$ y $(p/2, p/2)$, cada una de ellas

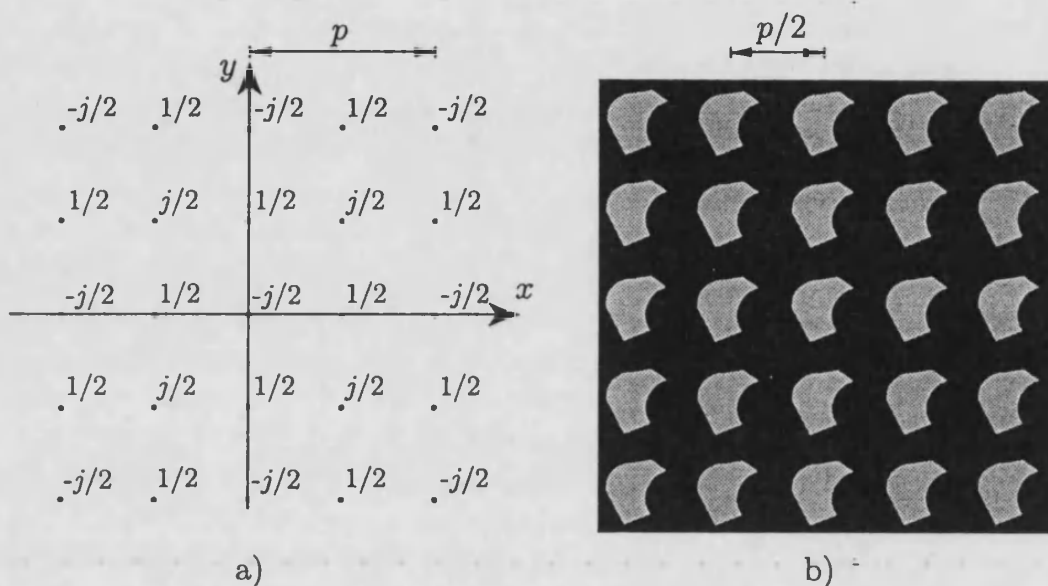


Figura 3.17. a) Representación gráfica de las posiciones donde se reproduce, en el plano de observación elegido, la celda unidad de la versión en amplitud del filtro objeto binario cuando se usa ésta como objeto difractante; se indica también la amplitud global con la que se genera cada una de estas réplicas; b) esquema donde se muestra la estructura de la distribución de irradiancia de dicho patrón de difracción.

multiplicada respectivamente por factores $-j/2$, $1/2$, $1/2$ y $j/2$, tal y como se muestra en la fig. 3.17. Con la condición de no solapamiento exigida, la distribución de irradiancia tendrá una estructura periódica cuadrada de periodo $p/2$ cuya celda unidad corresponderá a la de la transmitancia en irradiancia del objeto.

Sin embargo, la diferencia de fase que aparece en cada una de las subunidades de la función $\bar{c}_T(\vec{r})$ hace que la distribución que se observa en este plano cuando se utiliza la versión binaria de fase del filtro corresponda, de acuerdo con la ec. (3.104), a una distribución de irradiancia de visibilidad no nula. Es directo obtener que la celda unidad de este patrón presenta, sobre un fondo uniforme de irradiancia unidad, las variaciones locales siguientes:

- Centrados en los puntos $(p/2, 0)$ y $(0, p/2)$, se obtiene una réplica de $\bar{c}^2(\vec{r}) = \bar{c}(\vec{r})$ con una irradiancia disminuida respecto a la del fondo en una cantidad $(1 - \cos \varphi)/2$.
- Sobre el punto $(0, 0)$, se replica la función $\bar{c}(\vec{r})$ como un aumento en la irradiancia de valor $(1 - \cos \varphi)/2 + \sin \varphi$.
- Por último, sobre el punto $(p/2, p/2)$ se reproduce dicha función también por encima del fondo en una magnitud $(1 - \cos \varphi)/2 - \sin \varphi$.

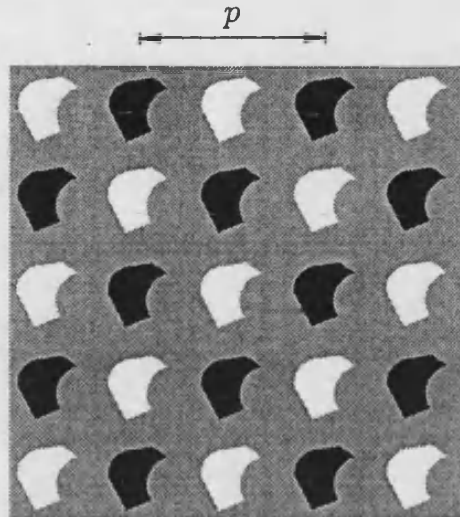


Figura 3.18. Esquema donde se muestra la estructura del patrón de difracción coherente en irradiancia generado sobre el plano de observación por el filtro objeto binario de fase, para el caso particular de $\varphi = \pi$. Nótese que coexisten versiones de contraste directo y de contraste invertido de la señal codificada en dicha transparencia.

Obtenemos, pues, réplicas visibles de la función $\bar{c}(\vec{r})$ con contraste directo en los casos b) y c), mientras que en el caso a) la copia presenta un contraste negativo respecto del fondo, tal y como se indica en la fig. 3.18. El contraste de todas estas réplicas se maximiza si se elige para la codificación del filtro objeto un valor de $\varphi = \pi$. Este filtro bipolar proporciona copias de irradiancia nula de la función $\bar{c}(\vec{r})$ sobre los puntos de coordenadas cartesianas $(0, p/2)$ y $(p/2, 0)$ de la celda unidad del patrón de irradiancia, y proporciona réplicas de ésta con irradiancia 2 centradas en $(0, 0)$ y $(p/2, p/2)$. Es decir, en torno a los puntos indicados en el apartado a) se obtiene una distribución de irradiancia proporcional a $1 - \bar{c}(\vec{r})$, y en los citados en los apartados b) y c) proporcional a $1 + \bar{c}(\vec{r})$. Nótese que el solapamiento entre las réplicas de la celda unidad del objeto de fase provoca que el patrón en irradiancia presente un período p , y no $p/2$ como ocurre con su versión en amplitud.

Así pues, eligiendo $q = 1/4$ y $\varphi = \pi$ obtenemos un plano de observación en el que, con iluminación coherente, se distribuyen regularmente copias de la celda unidad $\bar{c}(\vec{r})$ con contraste máximo, positivo y negativo, sobre un fondo de irradiancia uniforme. Formalmente, por lo tanto, el patrón de difracción coherente en irradiancia sobre este plano podrá expresarse como

$$I'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = C_T(\vec{r}) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{l}_{nm}(p)), \quad (3.109)$$

donde la celda unidad que se replica vendrá dada por

$$C_T(\vec{r}) = 1 - \bar{c}(\vec{r}) \otimes \left[\delta\left(x + \frac{p}{2}, y\right) + \delta\left(x, y + \frac{p}{2}\right) \right] + \bar{c}(\vec{r}) \otimes \left[\delta(x, y) + \delta\left(x + \frac{p}{2}, y + \frac{p}{2}\right) \right]. \quad (3.110)$$

y donde se han explicitado, para mayor claridad, los argumentos de las funciones delta de Dirac en coordenadas cartesianas. Este resultado, obtenido para iluminación paralela, es extensible, a partir de los resultados presentados en §2.2, al caso de que dicho filtro se ilumine con una fuente a distancia z finita. De acuerdo con la ec. (2.22) y a través de un razonamiento análogo al seguido en §3.2, puede obtenerse fácilmente que el patrón de Fresnel en irradiancia que en estas circunstancias aparece en el plano caracterizado por $q = 1/4$ viene dado por

$$I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{1}{z^2 M^2} C_T\left(\frac{1}{M}\vec{r}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\vec{r} - \vec{l}_{nm}(Mp)\right), \quad (3.111)$$

siendo M el factor de escala definido en la ec. (3.3). De nuevo, podemos concluir que se trata de una distribución periódica cuadrada con periodo

$$p' = Mp. \quad (3.112)$$

La celda unidad de este patrón, exceptuando el factor $1/(zM)^2$, vendrá dada, de acuerdo con la ec. (3.110) y teniendo en cuenta de nuevo la ec. (3.10), por

$$C_T\left(\frac{1}{M}\vec{r}\right) = 1 - \bar{c}\left(\frac{1}{M}\vec{r}\right) \otimes \left[\delta\left(x + \frac{p'}{2}, y\right) + \delta\left(x, y + \frac{p'}{2}\right) \right] + \bar{c}\left(\frac{1}{M}\vec{r}\right) \otimes \left[\delta(x, y) + \delta\left(x + \frac{p'}{2}, y + \frac{p'}{2}\right) \right]. \quad (3.113)$$

Sustituyendo la función $\bar{c}(x, y)$ por la expresión (3.105), tendremos, finalmente

$$C_T\left(\frac{1}{M}\vec{r}\right) = 1 - \frac{1}{\kappa_2} a_2\left(\frac{1}{MM_2}\vec{r}\right) \otimes \left[\delta\left(x + \frac{p'}{2}, y\right) + \delta\left(x, y + \frac{p'}{2}\right) \right] + \frac{1}{\kappa_2} a_2\left(\frac{1}{MM_2}\vec{r}\right) \otimes \left[\delta(x, y) + \delta\left(x + \frac{p'}{2}, y + \frac{p'}{2}\right) \right]. \quad (3.114)$$

Si ahora se sustituye la fuente puntual por una fuente extensa plana espacialmente incoherente sobre cuya exitancia se codifique la segunda señal a correlacionar, $a_1(\vec{r})$, tal y como se hizo en las secciones precedentes, sobre este mismo plano de observación se obtendrá una distribución de irradiancia dada por

$$I_R(\vec{r}; z; \lambda) = \frac{1}{\kappa_1 R^2 M^2} \left\{ \left[C_T\left(\frac{1}{M}\vec{r}\right) * a_1\left(\frac{1}{M_S M_1}\vec{r}\right) \right] \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\vec{r} - \vec{l}_{nm}(p')\right) \right\}, \quad (3.115)$$

expresión que es análoga a la presentada en la ec. (3.15). Si se exige la condición (3.18) de consonancia de escalas y se usa de nuevo la propiedad (3.14), el término entre corchetes de la ecuación anterior podrá expresarse, teniendo en cuenta la ec. (3.114), como

$$\begin{aligned} & \left[C_T \left(\frac{1}{M} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) \right] = \\ & = M'^2 S_1 + \frac{1}{\kappa_2} \left[a_2 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) \right] \otimes \\ & \otimes \left[\delta \left(x, y \right) + \delta \left(x + \frac{p'}{2}, y + \frac{p'}{2} \right) - \delta \left(x + \frac{p'}{2}, y \right) - \delta \left(x, y + \frac{p'}{2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.116)$$

donde se ha utilizado el hecho de que

$$1 * a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r}' \right) d^2 \vec{r}' = M'^2 S_1 , \quad (3.117)$$

siendo S_1 el volumen de la función real $a_1(\vec{r})$, dado por la expresión (3.55). Si se exige que el periodo p' y los soportes de las señales $a_1(\vec{r})$ y $a_2(\vec{r})$ sean tales que no exista solapamiento entre las cuatro réplicas que se indican en la expresión anterior (condición que se estudiará con detalle más adelante), es directo observar que se obtienen sobre el plano de salida, de modo alternado, dos tipos de correlaciones. Por un lado, a partir de las copias de contraste positivo de la celda unidad se obtendrán réplicas de la función

$$i_p(\vec{r}) = M'^2 S_1 + \frac{1}{\kappa_2} \left[a_2 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) \right] . \quad (3.118)$$

Así pues, sobre un fondo de irradiancia constante se obtiene la correlación de ambas señales.

Por otro lado, centrados en las posiciones que corresponden a las réplicas de contraste negativo, aparecerán copias de la distribución

$$i_n(\vec{r}) = M'^2 S_1 - \frac{1}{\kappa_2} \left[a_2 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) \right] , \quad (3.119)$$

de modo que se reproduce el resultado anterior pero con un contraste invertido respecto del fondo de irradiancia constante. En el caso de que se trate de una situación de autocorrelación, es decir, $a_1(\vec{r}) = a_2(\vec{r})$, el valor en el origen de esta función vendrá dado por

$$i_n^{\text{auto}}(\vec{0}) = M'^2 S_1 - \frac{1}{\kappa_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} a_1^2 \left(\frac{1}{M'} \vec{r}' \right) d^2 \vec{r}' . \quad (3.120)$$

Teniendo en cuenta el carácter binario de la función $a_1(\vec{r})$, es directo demostrar que

$$\frac{1}{\kappa_I} a_1^2 \left(\frac{1}{M'} \vec{r}' \right) = a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r}' \right) , \quad (3.121)$$

con lo que resulta inmediato que

$$i_n^{\text{auto}}(\vec{0}) = 0 . \quad (3.122)$$

Así pues, los picos de autocorrelación se transforman en estas regiones en valores nulos de irradiancia.

El uso de mínimos de irradiancia en el reconocimiento óptico de caracteres ha sido propuesto recientemente tanto en dispositivos coherentes tradicionales (Davis *et al.* 1995) como en correladores de transformada conjunta (Chen *et al.* 1994). En ambos casos se han destacado las ventajas de este tipo de detección frente a la detección mediante los máximos de correlación convencionales, entre las que destacan su mejor relación señal-ruido y la insensibilidad de estas señales a fluctuaciones en la iluminación de la señal de entrada. Esta última característica es particularmente interesante y no es compartida por la mayoría de los correladores convencionales. De hecho, el uso del punto central de la correlación entre dos señales como medida de la similitud entre ellas sólo es adecuado si los dos patrones tienen el mismo volumen. Sólo en este caso, hay garantías de que la autocorrelación presenta un valor en el origen mayor que cualquier correlación cruzada. Así pues, fluctuaciones en la iluminación de la señal de entrada pueden provocar, en los correladores ópticos tradicionales, variaciones en las señales de salida que den lugar a falsas alarmas o a pérdidas de reconocimientos. Del mismo modo, señales de entrada con contrastes diferentes proporcionan respuestas diferentes. Estos efectos se suelen eliminar usando algún algoritmo de normalización de la señal de entrada; sin embargo, este proceso requiere la determinación previa de la energía de dicha señal. El tiempo requerido en todo este preprocesado hace que sea inviable una detección plenamente fiable en tiempo real cuando las señales de entrada presentan una extensión relativamente elevada o presentan cierto grado de complejidad.

La señal de contraste invertido que se obtiene en el plano de observación de nuestro dispositivo presenta un mínimo nulo aún en caso de que $a_1(\vec{r})$ sea una copia de contraste diferente de la función $a_2(\vec{r})$. En efecto, si

$$a_1(\vec{r}) = K a_2(\vec{r}) , \quad K \in \mathbb{R}_+^* , \quad (3.123)$$

es directo encontrar que el valor central de la correlación de contraste invertido dada por la ec. (3.119) presenta también un valor nulo. Sin embargo, cualquier función binaria cuyo soporte esté incluido en el de $a_2(\vec{r})$ proporcionará el mismo resultado, como se deduce de la fig. 3.19. Del mismo, toda función binaria con el

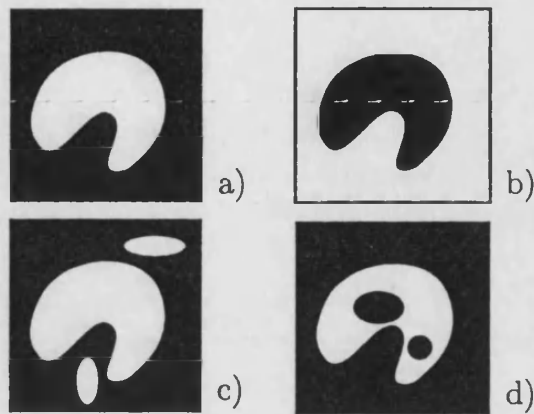


Figura 3.19. a) y b) Representación de una cierta señal de referencia y su complementaria, respectivamente; c) señal cuya correlación con la de referencia presenta el mismo valor, en el origen, que la autocorrelación de ésta; d) señal cuya correlación con la señal b) presenta, en el origen, el mismo valor que la correlación de ésta última y la señal de referencia.

mismo contraste que $a_2(\vec{r})$ cuyo soporte incluya al de esta función, proporciona el mismo valor para el pico de la correlación “directa”. Una posible solución a esta ambigüedad es contruir un parámetro de decisión que tenga en cuenta los dos picos de correlación que corresponden a la señal de referencia y su versión de contraste invertido. De este modo puede realizarse un reconocimiento invariante al contraste de la señal de referencia sin necesidad del laborioso proceso de normalización de la señal de entrada. La presencia simultánea de ambos resultados en el plano final de nuestro dispositivo se adapta perfectamente a esta solución.

Por otro lado, para el sistema visual humano la discriminación entre dos valores distintos, L y $L + \Delta L$, de luminancia —equivalente fotométrico de la irradiancia y que es proporcional a ésta para estímulos monocromáticos— depende de que su diferencia sea mayor que el umbral diferencial correspondiente. Este valor crítico que proporciona una diferencia mínima detectable en la sensación visual es una función decreciente de la luminancia base, L , como se deduce tanto de las aproximaciones clásicas de Weber y Fechner como de modelos más ajustados a las experiencias psicofísicas llevadas a cabo más recientemente (Schiffman 1990, p. 23–29) (Wong y Norwich 1995). Por otro lado, se ha comprobado que el umbral absoluto de luminancia corresponde al umbral diferencial del valor particular $L = 0$ (Blackwell 1972, p. 86). Con todo, se puede concluir que cualquier variación en la luminancia es más fácilmente detectable (presenta un umbral diferencial menor) cuanto menor es el valor de ésta. De este modo, en torno al valor cero (o al valor umbral absoluto), el sistema visual humano y, por tanto, todos los sistemas de visión artificial diseñados para emular sus características, presentan la mejor discriminación entre señales con diferente luminancia. Si en una experiencia como la que nos ocupa

se usa como detector final el sistema visual humano o algún dispositivo que lo imite³ se alcanzará, en consecuencia, la máxima sensibilidad en la discriminación de señales de correlación, y, por tanto, se optimizará el proceso de decisión, si éstas se sitúan en torno a valores nulos de luminancia. Para esta situación resulta, en conclusión, especialmente adecuada la detección en torno a valores nulos de irradiancia.

Las correlaciones indicadas previamente se obtendrán eligiendo adecuadamente las distancias entre los filtros y el plano de observación, a partir de un razonamiento similar al seguido en §3.2. Sin embargo, en este caso la condición de autoimagen para el plano de observación debe ser reemplazada por la que corresponde a un plano de multiplicidad con $Q' + q = 1/4$. La similitud formal entre ambas condiciones, dadas por las ecs. (2.71) y (2.73) respectivamente, hace que baste sustituir el valor de Q por el de $Q' + q$ en las ecs. (3.23a) y (3.23b) para obtener las distancias entre los filtros fuente y objeto y entre éste último y el plano de observación adecuadas para el caso que estamos estudiando. Con la elección realizada de $Q' + q = 1/4$, esta sustitución conduce a

$$z = \frac{1}{4\beta} z_T(\lambda), \quad (3.124a)$$

$$R = \frac{1}{4(1-\beta)} z_T(\lambda), \quad (3.124b)$$

donde el factor de escala relativa β viene dado por la ec. (3.24). El aumento con el que se obtienen en el plano de salida las correlaciones (tanto las de contraste directo como invertido) vendrá dado, igualmente, por la ec. (3.18), que determinará de nuevo la consonancia de escalas de las señales que se correlacionan en el plano final de observación. Análogamente, el periodo de la distribución de irradiancia en dicho plano, p' , corresponderá al indicado en la ec. (3.26). Sin embargo, resulta importante recordar que la celda unidad de este patrón incoherente contiene una yuxtaposición regular de 2×2 subunidades constituida cada una de ellas por la correlación de la señal de entrada y, o bien la propia señal de referencia o bien una copia de la misma de contraste invertido. Así pues, para garantizar la ausencia de solapamiento entre estas subunidades en el interior de cada celdilla deberá exigirse que cada una de estas correlaciones elementales —todas presentan la misma extensión— quede confinada en un cuadrado de lado, como máximo, $p'/2$. En este caso, esta condición garantiza también el no solapamiento entre celdillas contiguas en el plano final de observación. Esto conduce, siguiendo un razonamiento análogo al realizado en §3.2, a que el período mínimo aceptable para

³Se ha puesto recientemente de manifiesto que este tipo de respuesta resulta óptima en el reconocimiento de patrones en presencia de ciertos tipos de ruido muy comunes en el procesado óptico de señales (Makris 1995), lo que convierte este comportamiento en un modelo de cierto interés en visión artificial.

el filtro objeto venga dado ahora por

$$p_{\min} = 2M_2 \max \{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\}, \quad (3.125)$$

o, equivalentemente, a que las modulaciones en cada dirección cartesiana deben ser menores que

$$s_x^{\max} = \frac{L_{2x}}{2(L_{1x} + L_{2x})}, \quad s_y^{\max} = \frac{L_{2y}}{2(L_{1y} + L_{2y})}. \quad (3.126)$$

Estas restricciones son más severas que las obtenidas en dicha sección debida a la mayor "densidad" del patrón de difracción coherente elegido causada por la presencia simultánea de las réplicas de contraste directo e invertido de la señal $a_2(\vec{r})$.

Este hecho debe tenerse en cuenta también en la estimación del producto extensión-ancho de banda máximo admisible para esta función. Para obtener este valor límite basta con aplicar el razonamiento seguido en §3.2 al filtro bipolar utilizado en este caso. Sin embargo, la sustitución del parámetro Q allí considerado por el valor $Q' + q = 1/4$ conduce a una expresión diferente para la restricción (3.41), que queda en esta ocasión

$$E \left[\frac{P}{\mu} \right] \geq \frac{1}{2}, \quad (3.127)$$

donde P será, de nuevo, el número de periodos que el filtro objeto presenta en cada una de las direcciones cartesianas, y el valor de μ vendrá definido por la condición (3.36) para los coeficientes de Fourier de la transmitancia en amplitud del objeto. Con esta condición, el ancho de banda de la celda unidad de dicho filtro presentará un valor límite dado por

$$B^{\max} [c(\vec{r}_o)] = \frac{2P}{p}. \quad (3.128)$$

Si tenemos en cuenta las relaciones (3.100) y (3.105), mediante un razonamiento similar al seguido entonces, puede obtenerse que el ancho de banda máximo admisible para la función $a_2(\vec{r}_o)$ en este caso vendrá dado por

$$B^{\max} [a_2(\vec{r}_o)] = \frac{4M_2 P}{p}. \quad (3.129)$$

y, por lo tanto, el producto extensión-ancho de banda máximo aceptable para esta función, valdrá

$$PEAB^{\max} [a_2(\vec{r}_o)] = 4L_{2x} L_{2y} \left(\frac{4M_2 P}{p_{\min}} \right)^2, \quad (3.130)$$

expresión que, considerando el valor de p_{\min} dado por la ec. (3.125), se reduce a

$$PEAB^{\max} [a_2(\vec{r}_o)] = 16L_{2x} L_{2y} \left(\frac{P}{\max \{L_{1x} + L_{2x}, L_{1y} + L_{2y}\}} \right)^2. \quad (3.131)$$

Esta ecuación proporciona el mismo resultado que la ec.(3.50). En el caso que nos ocupa, la necesidad de un periodo mínimo mayor que en aquellas circunstancias se compensa con una mayor proximidad al objeto del plano de observación, obteniéndose un mismo producto extensión-ancho de banda disponible para la función $a_2(\vec{r}_o)$.

Por lo que respecta a la longitud del dispositivo y a su eficiencia luminosa, pueden ser determinados también de un modo análogo al seguido en §3.2. Para el primero de estos parámetros se obtiene en este caso la expresión

$$\mathcal{L} = \frac{z_T(\lambda)}{4\beta(1-\beta)}. \quad (3.132)$$

Este parámetro se optimizará, de nuevo, eligiendo un factor de escala relativo entre el filtro objeto y el filtro fuente de $\beta = 1/2$, obteniéndose en este caso

$$\mathcal{L}_{\min} = z_T(\lambda) = \frac{2p^2}{\lambda}, \quad (3.133)$$

valor que, como era previsible, resulta ser la mitad de la longitud mínima proporcionado por la ec. (3.54) para un mismo periodo del filtro objeto en ambos casos. Sin embargo, el diseño de los filtros con el periodo mínimo aceptable en cada uno de los casos proporciona una longitud óptima dos veces mayor para el caso del filtro bipolar frente al filtro con variaciones de amplitud, como se deduce de las ecs. (3.125) y (3.31).

Por otro lado, la determinación de la eficiencia luminosa del dispositivo que nos ocupa requerirá la determinación de las potencias totales de entrada, P_E , y salida, P_S , indicadas por las ecs. (3.57) y (3.58), respectivamente. Es previsible que, al utilizar en este caso un filtro que no presenta absorción, la eficiencia luminosa sea sensiblemente mayor que en los casos estudiados previamente. En efecto, a partir de la ec. (3.115), suponiendo ausencia de solapamiento, un producto extensión-ancho de banda adecuado para $a_2(\vec{r})$ y una extensión limitada a P periodos en ambas direcciones cartesianas para el filtro, la potencia de salida del dispositivo vendrá dada por

$$P_S = \frac{P^2}{\kappa_1 R^2 M^2} \iint_{\mathcal{P}'} \left[C_T \left(\frac{1}{M} \vec{r} \right) * a_1 \left(\frac{1}{M'} \vec{r} \right) \right] d^2 \vec{r}, \quad (3.134)$$

donde $\mathcal{P}' = [0, p'] \times [0, p']$. Esta expresión, de acuerdo con la ec. (3.116), conduce directamente a

$$P_S = \frac{P^2}{\kappa_1 R^2 M^2} \iint_{\mathcal{P}'} M'^2 S_1 d^2 \vec{r} = \frac{M'^2 P^2 p'^2}{\kappa_1 R^2 M^2} S_1 . \quad (3.135)$$

Teniendo en cuenta las ecs. (3.112) y (3.18), esta ecuación se reduce a

$$P_S = \frac{M_1^2 M_S^2 P^2 p^2}{\kappa_1 R^2} S_1 . \quad (3.136)$$

Finalmente, a partir (2.86) podemos concluir que

$$P_S = \frac{M_1^2 P^2 p^2}{\kappa_1 z^2} S_1 . \quad (3.137)$$

Con todo, la eficiencia luminosa global del dispositivo vendrá dada por

$$\eta_D^{\text{global}} = \frac{P^2 p^2}{z^2} , \quad (3.138)$$

donde se ha tenido en cuenta el resultado indicado en la ec. (3.57). Sustituyendo el valor de z dado por la expresión (3.124a), podemos expresar

$$\eta_D^{\text{global}} = \frac{4\lambda^2 P^2}{p^2} \beta^2 . \quad (3.139)$$

De nuevo, si nos referimos a la fracción de potencia que llega a cada una de las celdillas que se replican en el plano de salida, obtenemos

$$\eta_D = \frac{4\lambda^2}{p^2} \beta^2 . \quad (3.140)$$

Destaquemos que la eficiencia luminosa del dispositivo propuesto en esta ocasión es independiente de las señales que se correlacionan, tanto de la codificada en el filtro fuente como de la codificada en el filtro objeto. Esta función alcanza un valor tanto más alto cuanto más se acerca β a la unidad, que es su cota superior de acuerdo con la ec. (3.28). Sin embargo, cuanto más alto es este valor mayor es la longitud del dispositivo, haciéndose infinita en el caso límite de $\beta = 1$; es necesaria, por lo tanto, una relación de compromiso entre ambos parámetros en el diseño óptimo del dispositivo. Por último, señalemos que de nuevo la eficiencia óptima se obtendrá eligiendo el valor mínimo para el periodo del filtro indicado en la ec. (3.125).

El caso en que la escena de entrada se componga de señales yuxtapuestas pueden ser abordado de modo totalmente análogo al procedimiento seguido en

§3.2, conduciendo a las mismas restricciones para la separación mínima entre los patrones elementales presentes en dicha escena. También parte de los resultados obtenidos en §3.3 pueden aplicarse a este dispositivo, en particular los que hacen referencia a la sintonización de las escalas de las señales de entrada y referencia variando la distancia entre los filtros del sistema. De este modo, este correlador de contraste invertido y alta eficiencia luminosa presenta la propiedad adicional de poderse adaptar a un amplio rango de escalas de la señal de entrada sin necesidad de modificar el filtro de referencia.

Para comprobar la viabilidad del dispositivo propuesto realizamos una experiencia en la que pretendíamos obtener simultáneamente la autocorrelación de un determinado carácter alfanumérico binario tanto con contraste directo como invertido. Para ello construimos un filtro objeto bipolar cuya transmitancia en amplitud presenta valores 1 y -1 y cuya celda unidad era una réplica en fase de dicho carácter. Este filtro bipolar de fase se construyó copiando por contacto, sobre un soporte de fotorresina negativa, el utilizado en la experiencia presentada en §3.2. La exposición y el procesado de esta emulsión se controlaron para obtener un filtro binario de salto de fase π para la longitud de onda media de la radiación utilizada en el experimento. La iluminación incoherente del filtro fuente se realizó por el mismo mecanismo descrito en dicha sección, con lo que trabajamos con un valor de $\lambda = 514$ nm. Este filtro fuente se construyó mediante una copia fotográfica de una versión escalada de la propia señal de referencia —el carácter S mostrado en la fig. 3.7—; el factor de reducción de este proceso se eligió de modo que proporcionara una escala relativa de $\beta = 1/2$ entre los patrones presentes en ambos filtros, lo que permitió trabajar con un dispositivo de longitud mínima. Por otro lado, la modulación del filtro de fase era igual a la del filtro del que es copia, es decir, $s_x = s_y = 1/6$. Este valor se sitúa por debajo del máximo admisible, dado, de acuerdo con la ec. (3.126) y teniendo en cuenta que en este caso $L_{1x} = L_{2x} = L_{2y} = L_{1y}$, por

$$s_x^{\text{máx}} = s_y^{\text{máx}} = \frac{1}{4}. \quad (3.141)$$

Este hecho garantiza sobradamente la ausencia de solapamiento de las correlaciones que se repiten en el plano final de observación.

Dicho plano se situó, de acuerdo con la ec. (3.124b), a una distancia del filtro objeto $R = z_T/2 = 18,46$ cm; esta misma distancia separaba ambos filtros, como corresponde al valor que proporciona la ec. (3.124a) en este caso. Sustituyendo la transparencia fuente por un pequeño orificio era posible obtener sobre el plano de observación el patrón de difracción coherente del filtro de referencia caracterizado por $Q' + q = 1/4$. En la fig. (3.20) se muestra una porción de dicha distribución de irradiancia en la que pueden observarse las réplicas con contraste directo e invertido de la señal binaria codificada sobre esta transparencia bipolar. En la fig. 3.21 se

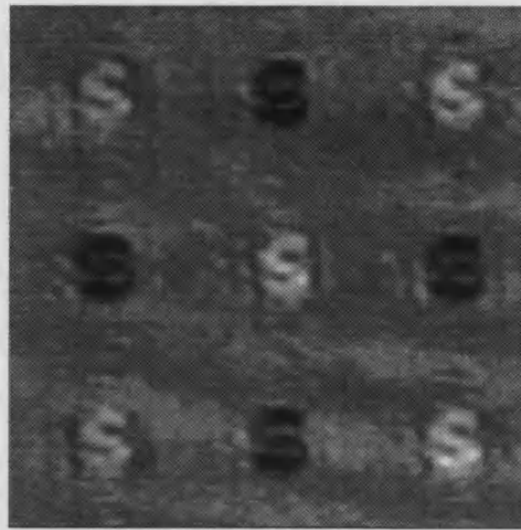


Figura 3.20. Región del patrón de difracción coherente que se genera en el plano de observación del dispositivo, en el que aparecen tanto las copias con contraste directo como inverso de la señal de referencia.

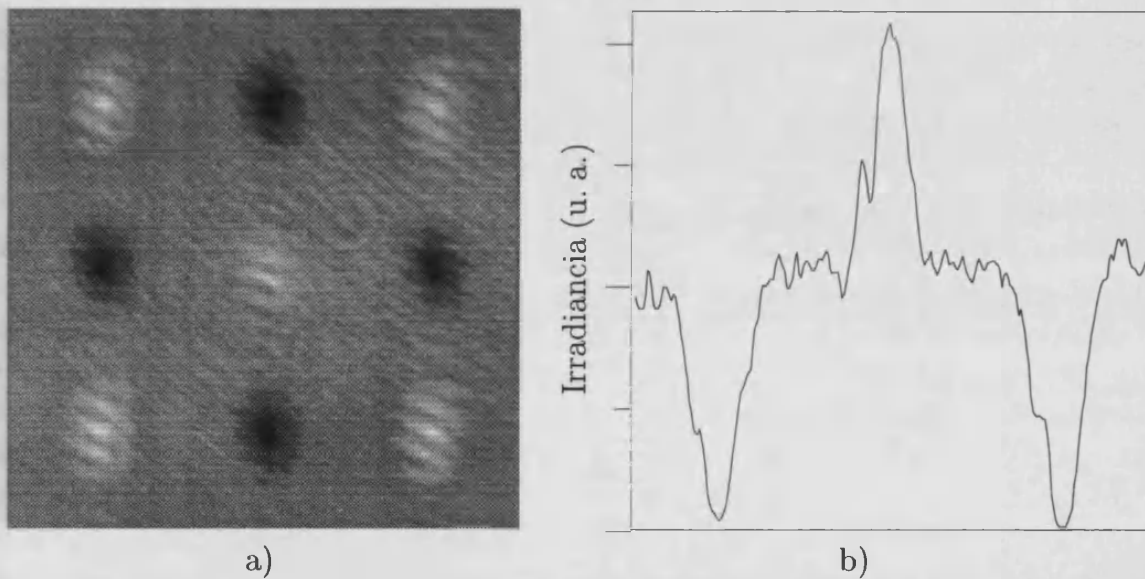


Figura 3.21. Resultados proporcionados por el dispositivo propuesto: a) Porción seleccionada del plano de salida en la que se observa claramente la presencia simultánea de las señales de autocorrelación directas y de contraste invertido; b) perfil de la irradiancia obtenida para la línea horizontal central de la distribución mostrada en a).

Se puede ver la distribución en irradiancia que proporciona nuestro correlador. La coexistencia de las señales de autocorrelación de contraste invertido y directo queda patente en este resultado.

Con esta experiencia queda demostrada la capacidad de nuestro correlador de proyección geométrica perfecta para obtener correlaciones de contraste invertido entre dos señales, cuando se usa una codificación adecuada de una de ellas sobre un filtro objeto de fase. Hemos propuesto, por tanto, un correlador de proyección geométrica perfecta de contraste invertido.

3.5 Descodificador de señales θ -moduladas

En las secciones precedentes hemos explotado el resultado de la ec. (2.85) para obtener, a partir de la propagación libre del campo electromagnético difractado por un objeto iluminado por una fuente espacialmente incoherente, la operación de correlación entre dos señales. Desde el punto de vista del contenido de frecuencias espaciales, este mismo resultado puede interpretarse como una operación de filtrado en el dominio de Fourier del patrón coherente que el objeto proporciona en el plano de observación elegido, tal y como se indicó en §2.4. La función de transferencia que realiza dicha operación está directamente relacionada con la transformada de Fourier de la distribución de exitancia de la fuente incoherente que ilumina la transparencia difractante. En esta sección vamos a aprovechar esta interpretación para llevar a la práctica operaciones de filtrado espacial mediante el diseño y la manipulación adecuada de la fuente del dispositivo.

La modificación de la estructura del campo difractado por un objeto plano mediante la manipulación de la fuente de radiación que lo ilumina ha sido estudiada con cierta profusión en diversos campos del procesado óptico de información. El control del grado de coherencia espacial o de la exitancia de la fuente se ha usado, por ejemplo, para mejorar los parámetros de calidad en sistemas formadores de imágenes (Guo y Zhuang 1992), para realizar procesado “coherente” de información en el campo lejano del objeto preservando cierto grado de redundancia en el campo difractado (Boopathi y Vasu 1992), y para obtener hologramas con fuentes espacialmente incoherentes (Sun 1993). Una línea especialmente fructífera se ha basado en el uso de fuentes periódicas unidimensionales espacialmente incoherentes. La reintroducción por Jahns y Lohmann (1979) del efecto Lau (Lau 1948) —una versión con iluminación no coherente del efecto Talbot— ha servido para proponer, entre otras aplicaciones, diferentes interferómetros que funcionan con fuentes espacialmente incoherentes (Bartelt y Jahns 1979) (Ojeda-Castañeda *et al.* 1988) (Andrés *et al.* 1989) (Tepichín y Ibarra 1995), dispositivos de filtrado espacial incoherente (Ojeda-Castañeda *et al.* 1989) (Colautti *et al.* 1986) (Ojeda-Castañeda *et al.* 1989), y sintetizadores incoherentes de imágenes (Bonet *et al.* 1991). El fin último de todos estos trabajos ha sido la extensión del uso de fuentes espacialmente incoherentes a una serie de técnicas de tratamiento de información tradicionalmente llevadas a la práctica por procesadores ópticos cohe-

rentes. En esta misma dirección, vamos a proponer en esta sección un método de descodificación de señales moduladas azimutalmente por redes de difracción unidimensionales, es decir, lo que se conoce con el nombre de objetos θ -modulados.

La técnica de codificación azimutal o modulación θ pretende extender al campo de las señales ópticas bidimensionales el concepto de modulación usado habitualmente en las transmisiones electrónicas. En ese caso, la variación temporal asociada a una cierta señal modifica alguna de las características (amplitud, frecuencia o fase) de una onda portadora, generalmente una onda sinusoidal. La señal así modulada viaja por un medio de transmisión y debe ser descodificada posteriormente. Además de ciertas ventajas tecnológicas, el proceso de modulación permite transmitir diferentes señales de modo simultáneo a lo largo de un mismo medio empleando ondas portadoras de frecuencia diferente –multiplexado temporal–. La extensión de este procedimiento al caso de señales espaciales bidimensionales pasa por modular los distintos patrones, presentes simultáneamente en una escena dada, con diferentes “ondas portadoras”. El análogo en este caso de las portadoras periódicas usadas en la transmisión de señales temporales son las redes de difracción, es decir, los objetos periódicos unidimensionales. Al igual que ocurre con las portadoras temporales, es posible modular una red de difracción tanto en amplitud como en frecuencia o en fase, de acuerdo con las variaciones de cada una de las señales presentes en la escena a codificar. Sin embargo, la naturaleza bidimensional del procesado óptico permite usar en dicha codificación un nuevo parámetro, sin equivalente en el caso temporal, como es la orientación de la red que se modula de acuerdo con cada uno de estos patrones. Éste es el procedimiento seguido en la modulación θ , en la que la codificación de las diferentes señales se realiza a partir de una misma red de difracción, pero dispuesta con diferente orientación para cada una de ellas (Lohmann y Morgenstern 1963).

Al igual que en el caso temporal, la descodificación de cada una de estas señales requiere un filtrado en el correspondiente dominio espectral. En el caso de una escena θ -modulada, la codificación empleada produce una separación, a lo largo de una serie de direcciones en el plano de Fourier, del contenido de frecuencias espaciales de cada una de las señales, de modo que es posible procesarlas por separado de modo sencillo. En efecto, consideremos una de las señales, $s(\vec{r})$, presentes en la escena de entrada, que asumiremos de banda limitada. Supongamos que se modula este patrón con una red de difracción, de periodo p , con sus líneas formando un ángulo θ con el eje de ordenadas del sistema de referencia elegido. La señal codificada podrá caracterizarse, por lo tanto, por la función

$$s_{\theta}(\vec{r}) = s(\vec{r}) t_{\theta}(\vec{r}) , \quad (3.142)$$

donde la función moduladora vendrá dada, como puede deducirse de las ecs. (2.131)

y (2.134), por

$$t_{\theta}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)u_n(p)}, \quad (3.143)$$

donde a_n representan los coeficientes de Fourier de la red de difracción considerada. El contenido de frecuencias espaciales del patrón modulado vendrá dado, considerando la propiedad (3.44), por

$$\tilde{s}_{\theta}(\vec{w}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n [\tilde{s}(\vec{w}) \otimes \delta(\vec{w} - \vec{w}_{n0,\theta}(p))], \quad (3.144)$$

donde $\vec{w}_{n0,\theta}(p)$ es el vector de coordenadas cartesianas $((n \cos \theta)/p, (n \sin \theta)/p)$ utilizado en la ec. (2.137), y donde se ha tenido en cuenta que

$$\tilde{t}_{\theta}(\vec{w}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(\vec{w} - \vec{w}_{n0,\theta}(p)). \quad (3.145)$$

La expresión (3.144) pone de manifiesto que el contenido frecuencial de la señal modulada consiste en una serie de réplicas ponderadas de la transformada de Fourier del patrón que se codifica, centradas en posiciones caracterizadas por coordenadas cartesianas dadas por

$$u_n(\theta) = \frac{n \cos \theta}{p}, \quad v_n(\theta) = \frac{n \sin \theta}{p}. \quad (3.146)$$

Estos puntos se sitúan, en el plano de frecuencias espaciales, equiespaciados a lo largo de una recta que pasa por el origen y forma un ángulo θ con el eje de abscisas. El contenido frecuencial de la señal modulada estará, por tanto, concentrado básicamente a lo largo de dicha recta. Si se modulan dos señales presentes en la misma escena con valores de θ lo suficientemente diferentes como para evitar solapamientos en el plano de Fourier, los contenidos espectrales de ambas aparecerán en porciones disjuntas de dicho plano, a excepción de un entorno del origen de coordenadas⁴. Es posible, por lo tanto, realizar un filtrado selectivo de frecuencias espaciales que permita una descodificación de la escena.

La modulación de la escena original puede realizarse de acuerdo con diferentes criterios, como el nivel de gris de cada una de las regiones que la componen o, en el caso de señales en color, el cromatismo de sus diferentes zonas. También es posible codificar diferentes señales en una misma escena modulada, ya sea de manera yuxtapuesta o superpuesta. De este modo, diferentes procesos de desmodulación

⁴Esta región común a todas las señales codificadas se elimina, usualmente, en el descodificado de la escena modulada.

no lineal, como el filtrado de supresión, han permitido el multiplexado espacial de imágenes bidimensionales o la generación de líneas de igual densidad, cuando se codifican los diferentes niveles de gris de la escena de entrada (Armitage y Lohmann 1965). En este último caso, el uso de filtros grises con variación angular en la desmodulación ha hecho posible llevar a la práctica transformaciones de tonos de carácter muy general en la imagen original (Lohmann y Morgenstern 1963) y la utilización de luz blanca en el procesado óptico de las señales ha abierto la posibilidad de realizar correcciones del color o pseudocoloración de la escena inicial (Armitage y Lohmann 1965) (Andrés *et al.* 1983). Aunque en las anteriores referencias se usaron procedimientos clásicos de filtrado coherente, se han realizado ya algunos esfuerzos hacia el uso de radiación no coherente en la desmodulación de las señales, basándose fundamentalmente en las propiedades de filtrado espacial que se pueden asociar al efecto Lau (Ojeda-Castañeda y Sicre 1986) (Andrés *et al.* 1986) (Ojeda-Castañeda *et al.* 1988).

En esta misma línea, en esta sección nos proponemos presentar un descodificador de objetos θ -modulados sin lentes basado en el uso de una fuente espacialmente incoherente con una distribución de exitancia adecuada. El diseño de esta fuente permitirá, de acuerdo con la propiedad de filtrado espacial indicada en la ec. (2.107), modificar el contenido frecuencial de todos los patrones de difracción de dicho objeto, permitiendo la supresión selectiva de las frecuencias espaciales que corresponden a las diferentes regiones que se han modulado. Para ello, en primer lugar, mostraremos que el confinamiento del espectro espacial de cada una de las zonas codificadas se mantiene en los diferentes patrones de difracción coherentes del objeto. Consideraremos, por simplicidad, que se ilumina la transparencia θ -modulada con un haz paralelo de radiación coherente de longitud de onda λ de amplitud unidad. El objeto considerado estará constituido por un conjunto de zonas yuxtapuestas que se codifican con diferentes orientaciones de una misma red de difracción. Por tanto, su transmitancia en amplitud podrá expresarse como

$$t(\vec{r}_o) = \sum_{i=1}^{N_S} s_{\theta_i}(\vec{r}_o), \quad (3.147)$$

donde N_S es el número de señales moduladas y $s_{\theta_i}(\vec{r}_o)$ corresponde a la transmitancia en amplitud de la versión modulada de cada una de ellas. Estas funciones tendrán expresiones similares a la dada en la ec. (3.142). De acuerdo con la ec. (2.48), la distribución de amplitudes generada por el objeto a una distancia R_o vendrá dada por

$$U'_{R_o}(\vec{r}; \vec{0}; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R_o}}{j\lambda R_o} \sum_{i=1}^{N_S} \left[s_{\theta_i}(\vec{r}) \otimes e^{j\frac{\pi}{\lambda R_o}|\vec{r}|^2} \right]. \quad (3.148)$$

El contenido frecuencial de este patrón de difracción vendrá dado, teniendo en cuenta la propiedad

$$\mathcal{F}\{f(\vec{r}) \otimes g(\vec{r}); \vec{w}\} = \tilde{f}(\vec{w}) \tilde{g}(\vec{w}), \quad (3.149)$$

y el resultado (2.36), por

$$\tilde{U}'_{R_0}(\vec{w}; \vec{0}; \lambda) = \sum_{i=1}^{N_S} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R_0} e^{-j\pi\lambda R_0 |\vec{w}|^2} \tilde{s}_{\theta_i}(\vec{w}). \quad (3.150)$$

Los factores que multiplican al contenido frecuencial de cada una de las señales moduladas, $\tilde{s}_{\theta_i}(\vec{w})$, en la expresión anterior no modifican la estructura altamente localizada de estas funciones. Es evidente, por lo tanto, que se reproduce la misma disposición del contenido frecuencial, en torno a diferentes rectas en el plano de Fourier, que aparece en el caso del objeto. Por supuesto, esta estructura se transferirá al contenido frecuencial de los patrones de difracción en irradiancia sobre cualquier plano de observación elegido. Esta conclusión es igualmente válida en el caso de iluminación coherente con fuente a distancia finita, de acuerdo con los resultados obtenidos en §2.2 y aplicados reiteradamente en secciones precedentes.

El resultado anterior permite afirmar, por lo tanto, que la descodificación de cada una de las señales que componen el objeto puede realizarse mediante un filtrado de supresión del contenido frecuencial de cualquiera de los patrones de difracción del objeto. Esta selección espectral puede realizarse mediante el uso de una función de transferencia altamente concentrada en la dirección particular de descodificación elegida. Si la transparencia θ -modulada se ilumina con una fuente plana espacialmente incoherente, la operación inherente de filtrado, indicada en §2.4, que aparece sobre cualquier plano de observación puede servir para obtener dicho resultado. De acuerdo con la ec. (2.106), la función de transferencia que filtra el espectro de los patrones de difracción coherentes viene dada por una versión escalada de la distribución espacial de exitancia de la fuente utilizada. Es una propiedad general muy conocida de la transformación de Fourier que cuanto más localizada en una determinada dirección se encuentra una función, más se extiende su transformada en la misma dirección en el plano espectral, y viceversa (ver, p.e., (Gaskill 1978, p. 194–195)). Por lo tanto, para producir el efecto deseado es necesario utilizar una fuente con una exitancia altamente confinada en la dirección de descodificación elegida. Para fijar ideas consideraremos la función más simple que cumple esta condición, como es una distribución rectangular con una de sus dimensiones mucho mayor que la otra; sin embargo, la mayor parte de los resultados que vamos a obtener no dependen más que del grado de concentración de su transformada de Fourier en una dirección determinada y no de la forma explícita de ésta. La longitud menor de dicha función rectangular se orientará en la dirección en que se quiere preservar el contenido frecuencial en el plano de Fourier. Esta

orientación, por otro lado, corresponderá a una disposición de la rendija fuente paralela a las líneas de la red de difracción que modula la señal que se pretende descodificar. Consideremos, por simplicidad, que dichas líneas se presentan paralelas a la dirección del eje de ordenadas del sistema de referencia elegido en el plano del objeto. Estamos, por lo tanto, considerando que la señal de interés se ha codificado con un ángulo azimutal $\theta = 0$. En este caso, la exitancia de la fuente vendrá dada por

$$I_S(\vec{\rho}) = I_{S_0} \operatorname{rect}\left(\frac{\zeta}{W_1}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{W_2}\right), \quad (3.151)$$

siendo W_1 y W_2 las anchuras del rectángulo en las direcciones cartesianas ζ y η , respectivamente, e I_{S_0} el valor constante de la exitancia en el interior de éste. En concordancia con la discusión anterior, exigiremos que

$$W_1 \ll W_2. \quad (3.152)$$

De acuerdo con la ec. (2.106) y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x)\operatorname{rect}(y); \vec{w}\} = \operatorname{sinc}(u)\operatorname{sinc}(v),$$

siendo (u, v) las coordenadas cartesianas del vector \vec{w} en el dominio de Fourier, la función de transferencia que actuará en este caso sobre el patrón de difracción en irradiancia coherente correspondiente al plano de observación vendrá dada por

$$\begin{aligned} H(\vec{w}; z, R) &= \tilde{I}_S(-M_S \vec{w}) = \\ &= I_{S_0} W_1 W_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{u}{(M_S W_1)^{-1}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{v}{(M_S W_2)^{-1}}\right), \end{aligned} \quad (3.153)$$

donde z y R son las distancias existentes entre la fuente y el objeto y entre éste y el plano de observación elegido, respectivamente, y el factor de escala M_S viene dado por la ec. (2.86). De acuerdo con la condición (3.152), esta función está altamente concentrada en torno al eje u , siendo prácticamente nula a poco que nos separemos de dicho eje. Por lo tanto, todo contenido frecuencial del patrón coherente se eliminará salvo aquellas frecuencias espaciales cercanas a este eje. De este modo, si dicho patrón presentaba una visibilidad no nula, sólo mantendrá esta característica en aquellas regiones codificadas con un ángulo $\theta = 0$, mientras que en el resto se obtiene, básicamente, un fondo de irradiancia uniforme. Por otro lado, si se gira la fuente alrededor del eje óptico, la función de transferencia girará en el plano de Fourier solidariamente con ella. De este modo puede seleccionarse la dirección privilegiada de filtrado de frecuencias espaciales, lo que permite realizar una selección de las diferentes orientaciones de codificación del objeto θ -modulado.

Nótese que la conclusión anterior exige que el plano de observación elegido corresponda a un patrón coherente de visibilidad no nula de la transparencia modulada. Despreciando el tamaño finito de las regiones codificadas, el contraste

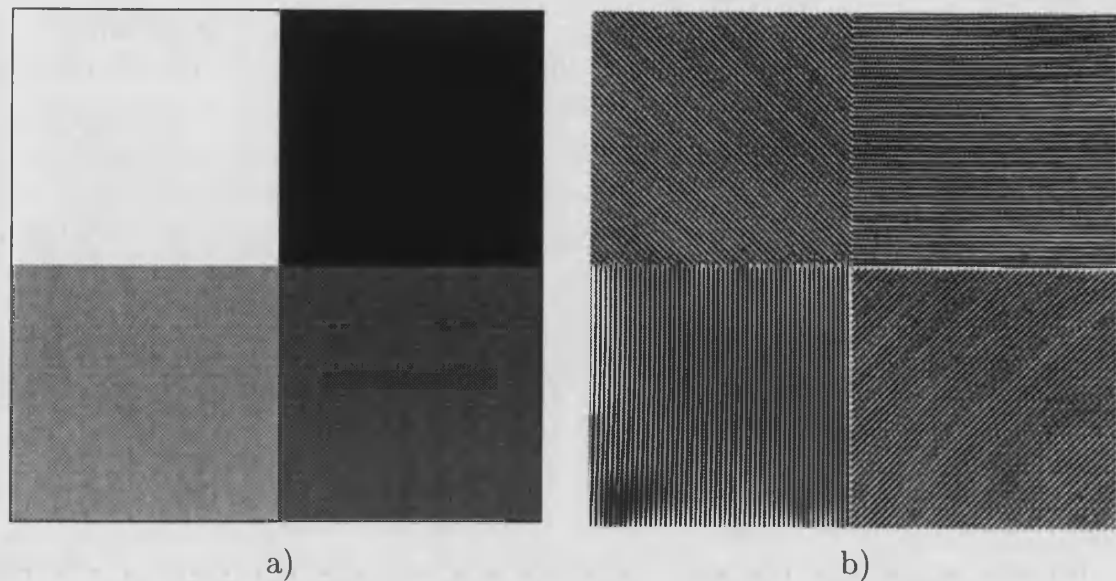


Figura 3.22. a) Objeto original cuyos niveles de gris se codificaron como modulación θ . b) Filtro θ -modulado en amplitud en el que se codifican los niveles de gris del objeto mostrado en a). Nótese la presencia de pequeños defectos en las redes moduladoras que serán eliminados en la descodificación.

de estos patrones viene fijado básicamente por el de la distribución coherente de irradiancia generada en el plano elegido por la red de difracción portadora. Si se usa una red que genera variaciones de amplitud en el campo electromagnético que incide sobre ella, tanto los planos de autoimagen como los de multiplicidad serán, en principio, elecciones adecuadas para el plano de observación, ya que reproducirán (en ausencia de solapamiento) la visibilidad de la red original. Por supuesto, también es posible utilizar una red con variaciones sólo de fase en su transmitancia en amplitud como red codificadora. Para ello se debe elegir como plano final del descodificador uno sobre el que se obtenga un patrón coherente de visibilidad no nula. Aunque los planos de autoimagen no son adecuados en este caso, sobre algunos planos de multiplicidad pueden obtenerse patrones de alto contraste, tal y como puede demostrarse siguiendo un razonamiento análogo al realizado en §3.4. Este tipo de codificación permite un procesado más eficiente desde el punto de vista luminoso, como ya ha sido puesto de manifiesto en trabajos previos (Ojeda-Castañeda *et al.* 1988).

Para verificar la viabilidad de nuestra propuesta, realizamos una experiencia de desmodulación de una escena θ -codificada compuesta por cuatro regiones yuxtapuestas, tal y como se muestra en la fig. 3.22a).

Para poner de manifiesto la versatilidad del dispositivo que presentamos, consideramos el caso en el que la codificación se realiza con una red binaria con variaciones de fase. Para ello, primero se codificó la escena con una red de am-

plitud binaria y después se replicó, por contacto, el objeto así generado sobre un soporte de fotorresina negativa. El filtro de amplitud utilizado en la fabricación del de fase se muestra en la fig. 3.22b). Las condiciones de exposición y revelado de esta emulsión se controlaron para obtener un filtro binario de salto de fase $\pi/2$ para la longitud de onda media de la radiación utilizada en la experiencia. Ésta procedía de una lámpara espectral de mercurio asociada a un filtro interferencial cuya banda de transmisión estaba centrada en torno a $\lambda = 546,1$ nm. El periodo de la red codificadora se eligió de $p = 0,165$ mm y el plano de observación se situó sobre el plano de multiplicidad 2 que correspondía a un parámetro $Q' + q = 1/4$. En dicho plano el filtro objeto de fase, presenta un patrón binario de alto contraste. La fuente del dispositivo se generó formando una imagen de la región de descarga de la lámpara espectral sobre una rendija giratoria. El dispositivo completo se muestra en la fig. 3.23.

En la fig. 3.24 se muestran los resultados experimentales obtenidos en la descodificación, al orientar de modo sucesivo la rendija fuente en la dirección de codificación de cada una de las regiones del objeto. Estos resultados presentan la característica ausencia de ruido coherente y de moteado propia de los dispositivos que trabajan con radiación incoherente. Además, la redundancia de este tipo de procesado proporciona la atenuación en las imágenes descodificadas de los pequeños defectos que aparecen en las redes moduladoras de la escena original.

Así pues, podemos concluir que el dispositivo propuesto constituye un desmodulador incoherente de señales θ -codificadas que, al no requerir del uso de lentes u otros elementos refractivos, posibilita el empleo de radiación de frecuencia tanto

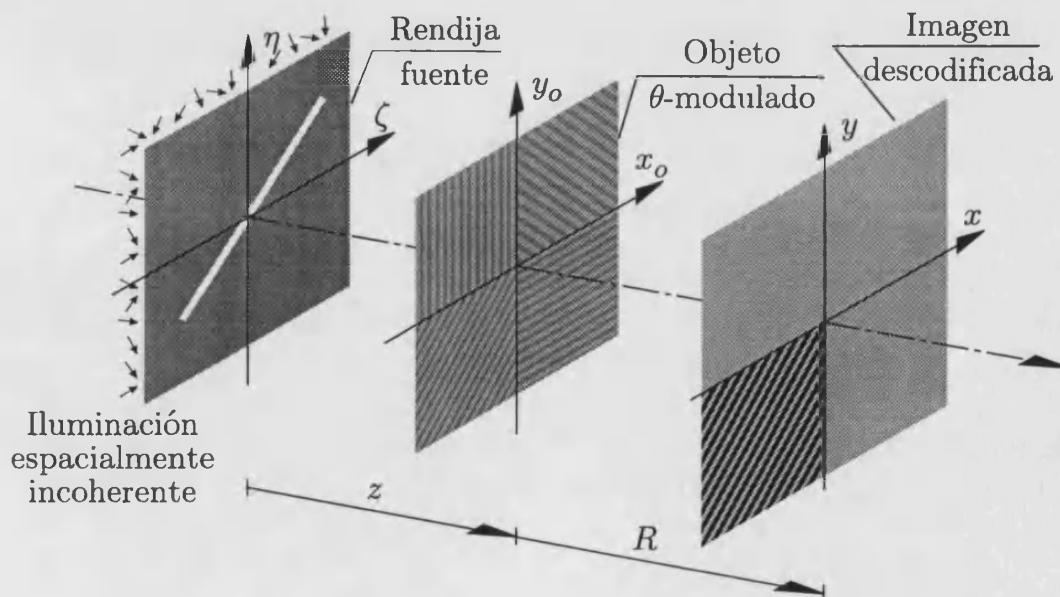


Figura 3.23. Esquema del dispositivo empleado en la descodificación incoherente de la escena θ -modulada.

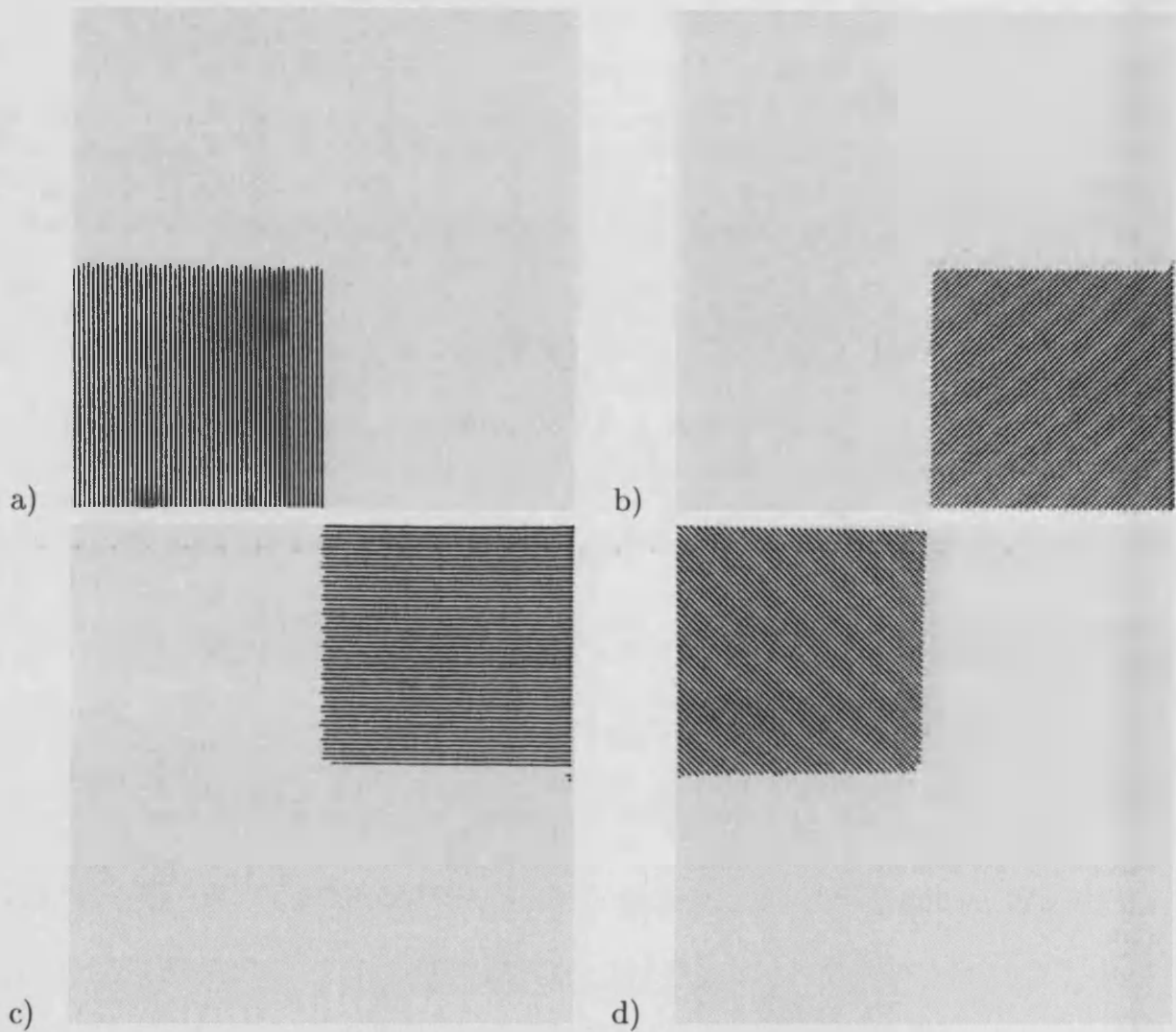


Figura 3.24. Patrones descodificados incoherentemente usando el dispositivo de la fig. 3.23 a partir del filtro θ -modulado.

dentro como fuera del espectro visible. Además, la codificación en fase permite una desmodulación con una alta eficiencia luminosa. El procedimiento seguido en esta sección puede servir también de base para el desarrollo de otras técnicas de filtrado de frecuencias espaciales, tales como correcciones de contraste, filtrado pasa banda, etc., sin lentes y con radiación incoherente. Para ello, el punto clave es el diseño adecuado de la fuente incoherente del dispositivo.

Capítulo 4

Formalismos espacio-fase en Óptica. Aplicaciones novedosas al procesado óptico coherente de información

4.1 Introducción

Hasta ahora, y siguiendo una tendencia todavía muy extendida en los estudios sobre procesado óptico de información, en este trabajo las señales han sido descritas de un modo completo, o bien por la distribución espacial de amplitud o irradiancia que las caracteriza, o bien por el contenido de frecuencias espaciales de toda la señal. Sin embargo, en determinadas circunstancias resulta interesante realizar un estudio local de este espectro espacial, es decir, estudiar como se distribuye el contenido espectral en diferentes regiones de la señal. Para ello son necesarias representaciones mixtas de ésta, que contengan información conjunta de las coordenadas y de las frecuencias espaciales. Dos ejemplos clásicos de este tipo de distribuciones lo constituyen la escritura musical y las representaciones espacio-fase en Mecánica Cuántica (de Bruijn 1965). En el primero de los casos, se propone una representación de una señal temporal en la que se intenta indicar en cada instante la frecuencia que se encuentra presente en la señal; en el segundo, se representa la distribución de probabilidad conjunta de dos variables conjugadas de un estado cuántico (por ejemplo, posición y momento de una partícula).¹

El uso de estas representaciones espectrales locales en Óptica, también cono-

¹En ambos casos —aunque en el primero de ellos no se tenga en cuenta de modo consciente— no es posible una precisión infinita en la determinación de una de las dos variables conjugadas, como se desprende de las conocidas relaciones de incertidumbre (de Bruijn 1965) .

cidas como representaciones espacio-fase por analogía con la Mecánica, ha atraído la atención de los investigadores en las últimas décadas ya que proporcionan una representación de las señales que es intermedia entre la puramente espacial y la de frecuencias espaciales. Todo ello ha desembocado en un amplio abanico de aplicaciones teóricas y prácticas de este formalismo (Cristóbal *et al.* 1991) (Cohen 1989).

Todas las representaciones espacio-fase que vamos a estudiar son casos particulares de una clase general de distribuciones bilineales conocida como clase de Cohen o representación espacio-frecuencial generalizada (Cohen 1966) (Eichmann y Dong 1982). La expresión genérica de los elementos de esta clase viene dada por

$$C_f(\vec{r}, \vec{w}; \Psi) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} r_{ff}(\vec{r}', \vec{r}_o) \Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) \times \\ \times e^{-j2\pi(\vec{w}\vec{r}_o + \vec{w}_o\vec{r} - \vec{w}_o\vec{r}')} d^2\vec{r}' d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o, \quad (4.1)$$

donde

$$r_{ff}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f\left(\vec{r}_1 + \frac{\vec{r}_2}{2}\right) f^*\left(\vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2}{2}\right), \quad (4.2)$$

siendo $\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w})$ el núcleo que define cada transformación particular. La imposición de diferentes restricciones sobre éste último permite obtener subclases con propiedades concretas, lo que hace de esta representación unificada un instrumento de interés teórico considerable.

Nuestro propósito se va a centrar en algunas de estas transformaciones que presentan un uso extendido en el campo del procesado óptico de información, como son la función de distribución de Wigner, la función ambigüedad de Woodward y el espectrograma local. El ámbito limitado de este trabajo justifica que algunas otras representaciones duales que han despertado un elevado interés en la comunidad científica en los últimos años no hayan sido consideradas con detalle. En particular, ya que no presentamos ninguna aportación original de su uso, no estudiaremos la transformada ondular² ni la transformada de Radón-Wigner —directamente relacionada con la transformada fraccional de Fourier—, cuyas aplicaciones se han extendido a muy diversos campos del procesado de información (véase, por ejemplo, (Szu 1994) (Mendlovic 1995)). Destaquemos también que el objetivo de las secciones siguientes no es realizar un estudio exhaustivo de la utilización de las distribuciones consideradas, sino más bien presentar sus propiedades más destacadas y profundizar en aquellas que van a ser utilizadas en el desarrollo de las posteriores contribuciones originales de este trabajo.

²Usamos este término como derivado de "óndula" (del latín *undŭla*, diminutivo de *unda*, ola, onda) para referirnos a lo que se conoce en los textos en inglés como *wavelet [transform]*.

Con todo, el esquema de presentación de este capítulo es el siguiente. En la sección 4.2 se estudia la distribución de Wigner introduciendo sus características más destacadas y presentando algunos métodos ópticos para su obtención. Se hace especial hincapié en aquellas propiedades de interés posterior en el desarrollo de algunas aplicaciones novedosas de esta representación. En particular, en la sección 4.3 se presenta una descripción del comportamiento coherente de un sistema óptico formador de imágenes a lo largo de un serie de curvas tridimensionales, basada en una representación de Wigner bidimensional de su pupila de salida. Este estudio se extenderá, en el próximo capítulo, al caso de campos policromáticos. Por otro lado, las ecuaciones que describen su propagación en sistemas ópticos lineales nos permitirán sentar las bases del estudio de la optimización de un transformador de Fresnel acromático, que se presentará en dicho capítulo.

En la sección 4.4, se realiza una presentación análoga de la función ambigüedad, destacando sus relaciones con la distribución de Wigner. Su aplicación en el estudio de sistemas ópticos formadores de imágenes incoherentes nos permitirá desarrollar en el próximo capítulo una descripción original de la función de transferencia óptica policromática en sistemas con pupilas unidimensionales.

En la siguiente sección se introduce el estudio del espectrograma complejo de una señal y el uso de su módulo cuadrado —el espectrograma local— en el procesamiento de información. La presentación de un método original, basado en esta representación espacio-fase de las señales, para el análisis de deformaciones locales de objetos difusores es el objetivo de la última sección de este capítulo.

4.2 La función de distribución de Wigner

La distribución de la que vamos a ocuparnos en esta sección fue propuesta por primera vez por E. Wigner (1932) como una representación espacio-fase en Mecánica Cuántica y fue posteriormente desarrollada desde el punto de vista teórico por De Bruijn (1973), encontrando desde entonces un amplio campo de aplicación en este área (Hillery *et al.* 1984)(Lee 1995). Fue introducida por primera vez en Óptica por Walther (1968) en su estudio teórico sobre la radiometría en campos parcialmente coherentes. Tras su reintroducción por Bastiaans (1978), en particular en el campo de la Óptica de Fourier, se ha desarrollado una amplia gama de aplicaciones tanto teóricas como prácticas de esta función en materias tan diversas como el procesamiento de imágenes (Cristóbal *et al.* 1991), la representación y el análisis de señales con variación temporal tanto acústicas como luminosas (Szu 1982) (Athale *et al.* 1983) (Yen 1987) (Marcenac y Carroll 1993) (Hirlimann y Morhange 1992), la teoría de comunicaciones (Vijaya Kumar y Carroll 1984), la descripción de campos parcialmente coherentes (Bastiaans 1981), la representación hamiltoniana de los sistemas ópticos (Bastiaans 1979a), el estudio de la eficiencia

de acoplamiento en fibras de comunicaciones (Dragoman 1995), el análisis local de deformaciones (Widjaja *et al.* 1990), el tratamiento digital de imágenes (Cristóbal *et al.* 1989), etc.

La distribución de Wigner de una función $f(\vec{r})$ no aleatoria se define eligiendo $\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) = 1$ en la ec. (4.1), es decir,

$$\begin{aligned} W_f(\vec{r}, \vec{w}) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} r_{ff}(\vec{r}, \vec{r}_o) e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f\left(\vec{r} + \frac{\vec{r}_o}{2}\right) f^*\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_o}{2}\right) e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde la integración en las variables \vec{r}' y \vec{w}_o se ha realizado teniendo en cuenta que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\vec{w}_o(\vec{r}-\vec{r}')} d^2\vec{w}_o = \delta(\vec{r}-\vec{r}'). \quad (4.4)$$

La definición anterior puede interpretarse, por lo tanto, como la transformada de Fourier de la función $r_{ff}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ respecto de la variable \vec{r}_2 .

Si se considera la fórmula de inversión para la transformada de Fourier de $f(\vec{r})$ (Gaskill 1978, p. 306)

$$f(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{w}) e^{j2\pi\vec{w}\vec{r}} d^2\vec{w}, \quad (4.5)$$

y se sustituye en la definición (4.3), se obtiene una expresión equivalente a ésta, tras operar adecuadamente, dada por

$$W_f(\vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F\left(\vec{w} + \frac{\vec{w}_o}{2}\right) F^*\left(\vec{w} - \frac{\vec{w}_o}{2}\right) e^{j2\pi\vec{w}_o\vec{r}} d^2\vec{w}_o. \quad (4.6)$$

Esta función constituye una representación completa de la señal y, por lo tanto, permite recuperar toda la información que ésta contiene tanto en el dominio espacial como en el frecuencial. En efecto, una nueva transformación de Fourier de la ec. (4.3) permite obtener

$$r_{ff}(\vec{r}_1, \vec{r}_o) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_1, \vec{w}_o) e^{j2\pi\vec{w}_o\vec{r}_o} d^2\vec{w}_o, \quad (4.7)$$

Si se efectúa el cambio de variables

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{\vec{r}_o}{2}, \quad \vec{r}' = \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_o}{2}, \quad (4.8)$$

la ec. (4.7) conduce a

$$f(\vec{r}) f^*(\vec{r}') = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_f \left(\frac{1}{2} (\vec{r} + \vec{r}'), \vec{w}_o \right) e^{j2\pi\vec{w}_o(\vec{r}-\vec{r}')} d^2\vec{w}_o. \quad (4.9)$$

En particular, si elegimos un valor de \vec{r}' tal que $f(\vec{r}') \neq 0$, será posible obtener el valor de f en cualquier punto del plano a partir de la expresión

$$f(\vec{r}) = \frac{e^{j\phi(\vec{r}')}}{\sqrt{|f(\vec{r}')|^2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} W_f \left(\frac{1}{2} (\vec{r} + \vec{r}'), \vec{w}_o \right) e^{j2\pi\vec{w}_o(\vec{r}-\vec{r}')} d^2\vec{w}_o, \quad (4.10)$$

siendo $\phi(\vec{r}')$ el argumento del número complejo $f(\vec{r}')$. Si se considera en la ec. (4.9) el caso $\vec{r} = \vec{r}'$, se tiene que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}', \vec{w}_o) d^2\vec{w}_o = |f(\vec{r}')|^2, \quad (4.11)$$

con lo que es evidente que, a partir de la ec. (4.10), la función $f(\vec{r})$ queda totalmente determinada con el conocimiento de su distribución de Wigner, salvo por un factor de fase global. El mismo razonamiento aplicado a la función $F(\vec{w})$ conduce a una expresión análoga, dada por

$$F(\vec{w}) = \frac{e^{j\bar{\phi}(\vec{w}')}}{\sqrt{|F(\vec{w}')|^2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} W_f \left(\vec{r}_o, \frac{1}{2} (\vec{w} + \vec{w}') \right) e^{-j2\pi\vec{r}_o(\vec{w}-\vec{w}')} d^2\vec{r}_o, \quad (4.12)$$

donde $\bar{\phi}(\vec{w}')$ representa el argumento de $F(\vec{w}') \neq 0$, y donde se cumple

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}') d^2\vec{r}_o = |F(\vec{w}')|^2. \quad (4.13)$$

La expresión (4.9) no sólo constituye una fórmula de inversión de transformación de Wigner, sino que formula una condición necesaria para que una función espacio-fase sea la distribución de Wigner de una cierta señal $f(\vec{r})$. De hecho, una

función de las variables \vec{r} y \vec{w} será una función de Wigner si y sólo si la correspondiente integral indicada en el lado derecho de dicha igualdad puede factorizarse del modo señalado en el primer miembro de la misma.

Como todas las funciones espacio-fase, esta distribución representa la señal considerada en un dominio mixto de coordenadas espaciales y frecuenciales, por lo que forma una representación intermedia entre la descripción espacial pura, $f(\vec{r})$, y la exclusivamente frecuencial, $F(\vec{w})$. En cierto modo, esta distribución proporciona una especie de representación local del contenido frecuencial de la señal en un entorno de cada punto \vec{r} considerado. A continuación presentaremos algunos ejemplos de distribuciones de Wigner asociadas a funciones particulares que refuerzan esta interpretación.

En primer lugar, consideraremos una señal de tipo impulsional en el dominio espacial, es decir,

$$f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{a}) . \quad (4.14)$$

La representación espectral de esta señal viene dada por la función

$$F(\vec{w}) = e^{-j2\pi\vec{w}\vec{a}} , \quad (4.15)$$

y, por lo tanto, la potencia espectral $|F(\vec{w})|^2$ se halla uniformemente distribuida en todo el plano frecuencial. En este caso, es directo obtener que

$$W_f(\vec{r}, \vec{w}) = \delta(\vec{r} - \vec{a}) . \quad (4.16)$$

Podemos interpretar este resultado diciendo que sólo en el punto $\vec{r} = \vec{a}$ se encuentran presentes todas las frecuencias del dominio de Fourier, mientras que en el resto de las posiciones del dominio espacial el contenido frecuencial es nulo.

Consideraremos, en segundo lugar, una función cuyo comportamiento sea análogo a la anterior pero en el dominio frecuencial, es decir, tal que

$$F(\vec{w}) = \delta(\vec{w} - \vec{b}) . \quad (4.17)$$

La expresión de esta señal en el dominio espacial vendrá dada por

$$f(\vec{r}) = e^{-j2\pi\vec{r}\vec{b}} , \quad (4.18)$$

con lo que su potencia $|f(\vec{r})|^2$ es constante en todos los puntos del plano. Para esta señal, la representación de Wigner tiene una expresión dada por

$$W_f(\vec{r}, \vec{w}) = \delta(\vec{w} - \vec{b}) , \quad (4.19)$$

ecuación que permite ser interpretada, análogamente al ejemplo anterior, afirmando que en todos los puntos del plano se encuentra presente una única frecuencia espacial, que corresponde a $\vec{w} = \vec{b}$.

Otro ejemplo de señal con potencia constante es una función cuadrática de fase, es decir,

$$f(\vec{r}) = e^{j2\pi\gamma|\vec{r}|^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

cuyo contenido frecuencial viene dado por

$$F(\vec{w}) = \frac{j}{2\gamma} e^{j\frac{\pi}{2\gamma}|\vec{w}|^2}. \quad (4.21)$$

La distribución de Wigner asociada a esta señal es

$$W_f(\vec{r}, \vec{w}) = \delta(\vec{w} - 2\gamma\vec{r}), \quad (4.22)$$

que de nuevo puede ser interpretada como que en torno a cada punto \vec{r} del dominio espacial se localiza una única frecuencia espacial $\vec{w}(\vec{r}) = 2\gamma\vec{r}$.

Por último, consideraremos un caso no tan extremo de confinamiento en uno de los dos dominios duales. Estudiaremos la representación de Wigner de una señal cuya potencia se encuentra "confinada" en torno a una cierta posición $\vec{r} = \vec{a}$ y cuyo contenido frecuencial está concentrado alrededor de un valor $\vec{w} = \vec{b}$ en el plano de Fourier. Un ejemplo de este tipo es una señal gaussiana cuya expresión en el dominio espacial viene dada por

$$f(\vec{r}) = \frac{e^{-j\pi\vec{a}\vec{b}}}{\sigma_r} e^{-\pi\frac{|\vec{r}-\vec{a}|^2}{\sigma_r^2}} e^{-j2\pi\vec{r}\vec{b}}, \quad (4.23)$$

siendo σ_r una cantidad positiva que mide el esparcimiento de la función en torno al punto $\vec{r} = \vec{a}$, y cuya transformada de Fourier puede escribirse como

$$F(\vec{w}) = \frac{e^{-j\pi\vec{a}\vec{b}}}{\sigma_w} e^{-\pi\frac{|\vec{w}-\vec{b}|^2}{\sigma_w^2}} e^{-j2\pi\vec{w}\vec{a}}, \quad (4.24)$$

siendo $\sigma_w = 1/\sigma_r$. La representación de Wigner que se obtiene en este caso viene dada, tras operar adecuadamente, por

$$W_f(\vec{r}, \vec{w}) = 2e^{-2\pi\frac{|\vec{r}-\vec{a}|^2}{\sigma_r^2}} e^{-2\pi\frac{|\vec{w}-\vec{b}|^2}{\sigma_w^2}}, \quad (4.25)$$

expresión que corresponde a una distribución doblemente gaussiana concentrada en torno al punto $(\vec{r} = \vec{a}, \vec{w} = \vec{b})$ del espacio-fase, con un nivel de confinamiento en cada uno de los dominios espacial y frecuencial igual al de la potencia y la potencia espectral, respectivamente³.

³De hecho, puede demostrarse que este confinamiento es el mínimo que puede obtenerse para cualquier señal (de Bruijn 1965).

Todos estos ejemplos apoyan la interpretación de la representación de Wigner como una densidad espectral local de la señal considerada. Esta idea se refuerza con una serie de propiedades que exhibe esta función. En particular, es sencillo demostrar que se trata de una función real. Basta para ello considerar que la función $r_{ff}(\vec{r}, \vec{r}_o)$ es hermítica respecto de \vec{r}_o , es decir,

$$r_{ff}(\vec{r}, -\vec{r}_o) = r_{ff}^*(\vec{r}, \vec{r}_o), \quad (4.26)$$

con lo que podemos concluir que su transformada de Fourier es real (Gaskill 1978, p. 193).

Por otro lado, se sigue de la propia definición (4.3) que si la señal considerada se encuentra limitada a una zona del plano, el soporte espacial de su distribución de Wigner se restringe a la misma región. Del mismo modo, si el contenido frecuencial de la función considerada se encuentra confinado en el plano de Fourier, la ec. (4.6) nos permite deducir que dicha distribución queda limitada del mismo modo en este dominio.

Adicionalmente, es sencillo demostrar que un desplazamiento de la señal en el dominio espacial o frecuencial se traduce en un desplazamiento igual de su representación de Wigner en el dominio correspondiente. Formalmente, esta propiedad puede enunciarse como

$$g(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{a}) \rightarrow W_g(\vec{r}, \vec{w}) = W_f(\vec{r} - \vec{a}, \vec{w}), \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.27)$$

$$G(\vec{w}) = F(\vec{w} - \vec{b}) \rightarrow W_g(\vec{r}, \vec{w}) = W_f(\vec{r}, \vec{w} - \vec{b}), \quad \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.28)$$

Además, si se mantiene la interpretación anterior, la proyección de la distribución de Wigner sobre el dominio espacial o el frecuencial debería corresponder a la distribución marginal de potencia de la señal en cada una de estas representaciones. La confirmación de este comportamiento viene dada por las ecs. (4.11) y (4.13). De estas relaciones es también directo ver que el volumen de la función de Wigner corresponde a la energía total de la señal, es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\vec{r}_o)|^2 d^2\vec{r}_o = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\vec{w}_o)|^2 d^2\vec{w}_o. \quad (4.29)$$

Asimismo, las ecs. (4.11) y (4.13) permiten obtener los momentos de cualquier orden y respecto de cualquier centro de la potencia de la señal, $|f(\vec{r}_o)|^2$, a partir de los momentos de la representación de Wigner de la misma. En particular, los de orden 1 pueden calcularse como

$$\langle \vec{r} - \vec{a} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{r}_o - \vec{a}) |f(\vec{r}_o)|^2 d^2\vec{r}_o}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\vec{r}_o)|^2 d^2\vec{r}_o} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{r}_o - \vec{a}) W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.30)$$

siendo directa la generalización para órdenes superiores. El mismo razonamiento se puede aplicar a la potencia espectral, $|F(\vec{w}_o)|^2$, de modo que, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \langle \vec{w} - \vec{b} \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{w}_o - \vec{b}) |F(\vec{w}_o)|^2 d^2\vec{w}_o}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\vec{w}_o)|^2 d^2\vec{w}_o} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{w}_o - \vec{b}) W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o}, \quad \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.31) \end{aligned}$$

y la misma conclusión puede extraerse para los restantes momentos.

Ahora bien, la equiparación de la distribución de Wigner con una densidad espectral local no es del todo satisfactoria por dos razones básicas. En primer lugar, en general, no existe garantía de que esta función sea definida positiva. En segundo lugar, esta representación tiene un comportamiento no lineal en caso de considerar que la señal f se descompone en superposición de otras señales elementales. En particular, si se considera la señal $f(\vec{r}) = g(\vec{r}) + h(\vec{r})$, es directo obtener que

$$\begin{aligned} W_f(\vec{r}, \vec{w}) &= W_g(\vec{r}, \vec{w}) + W_h(\vec{r}, \vec{w}) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\vec{r} + \frac{\vec{r}_o}{2}\right) h^*\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_o}{2}\right) e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La presencia de términos cruzados como el último sumando de la expresión anterior, junto con los eventuales valores negativos que presenta la representación de Wigner, han propiciado que se estudie la elección de otras funciones $\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w})$ en la transformación general de Cohen para mejorar el comportamiento de las representaciones espacio-fase obtenidas, conservando la mayor parte de las propiedades óptimas de la distribución de Wigner (Choi y Williams 1989). De hecho, es posible demostrar que cualquier elemento de la clase de Cohen puede relacionarse con dicha representación a través de la expresión

$$C_f(\vec{r}, \vec{w}; \Psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) \psi(\vec{r} - \vec{r}_o, \vec{w} - \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o, \quad (4.33)$$

donde

$$\psi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}; \vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}', \vec{w}'; \vec{r}, \vec{w}) e^{-j2\pi(\vec{r}'\vec{\alpha} + \vec{w}'\vec{\beta})} d^2\vec{r}' d^2\vec{w}' . \quad (4.34)$$

La integral (4.33) puede considerarse como una versión promediada localmente en el espacio-fase de la representación de Wigner, con una función de peso dada por $\psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w})$. De este modo, las diferentes elecciones del núcleo $\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w})$ pueden interpretarse como distintos promedios locales de la función de Wigner. Si consideramos, por último, que dadas dos funciones $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$ se cumple

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) W_g(\vec{r}_o, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o = \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}_o) g^*(\vec{r}_o) d^2\vec{r}_o \right|^2 , \quad (4.35)$$

es evidente que basta elegir una $\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w})$ cuya función asociada $\psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w})$ sea una función de Wigner para asegurar una representación espacio fase real con valores siempre positivos.

Por último, mencionaremos una serie de propiedades que resultarán de interés en razonamientos posteriores. En primer lugar, de la propia definición (4.3) se sigue que

$$g(\vec{r}) = f(-\vec{r}) \rightarrow W_g(\vec{r}, \vec{w}) = W_f(-\vec{r}, -\vec{w}) , \quad (4.36)$$

$$g(\vec{r}) = f^*(\vec{r}) \rightarrow W_g(\vec{r}, \vec{w}) = W_f(\vec{r}, -\vec{w}) . \quad (4.37)$$

En segundo lugar, si la transformación de Wigner se aplica al producto de dos funciones, el resultado puede expresarse como

$$W_{(f \cdot g)}(\vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}, \vec{w} - \vec{w}_o) W_g(\vec{r}, \vec{w}_o) d^2\vec{w}_o . \quad (4.38)$$

Asimismo, la distribución de Wigner asociada a la correlación de dos funciones viene dada por

$$W_{(f * g)}(\vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o - \vec{r}, \vec{w}) W_g(\vec{r}_o, \vec{w}) d^2\vec{r}_o . \quad (4.39)$$

Resulta muy interesante estudiar como se modifica la distribución de Wigner de una función cuando ésta se somete a una transformación conocida. En particular, muchos de los sistemas físicos estudiados en Óptica presentan un comportamiento

lineal en el sentido de que cumplen el principio de superposición en su respuesta a la adición de varias señales de entrada. De este modo, la respuesta a una señal compuesta es la suma de las respuestas a cada una de las señales elementales. Ya que toda señal $f(\vec{r})$ admite una descomposición impulsional del tipo

$$f(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^2\vec{r}' , \quad (4.40)$$

es directo demostrar que la respuesta de estos sistemas a una cierta señal de entrada $f_E(\vec{r})$ puede expresarse como

$$f_S(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vec{r}, \vec{r}') f_E(\vec{r}') d^2\vec{r}' , \quad (4.41)$$

donde $h(\vec{r}, \vec{r}')$ es la respuesta del sistema a una función de entrada impulsional, $f_E(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ similar a la considerada en la ec. (4.14). Por otro lado, si se realiza una transformación de Fourier a ambos lados de la igualdad en la ec. (4.41), y se expresa $f_E(\vec{r}')$ en función de su transformada de Fourier, de acuerdo con la fórmula de inversión (4.5), se obtiene que los contenidos frecuenciales a la entrada y a la salida del sistema se encuentran relacionados por la expresión

$$F_S(\vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} H(\vec{w}, \vec{w}') F_E(\vec{w}') d^2\vec{w}' , \quad (4.42)$$

donde

$$H(\vec{w}, \vec{w}') = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(\vec{r}, \vec{r}') e^{-j2\pi(\vec{w}\vec{r} - \vec{w}'\vec{r}')} d^2\vec{r} d^2\vec{r}' . \quad (4.43)$$

De nuevo, esta función puede interpretarse como la respuesta frecuencial del sistema a una señal cuya transformada de Fourier sea igual a $\delta(\vec{w} - \vec{w}')$, análoga a la que se representa en la ec. (4.17).

Las dos funciones, conocidas como función extensión de punto y de onda, respectivamente, describen totalmente el comportamiento del sistema lineal estudiado. Existen otras dos funciones extensión híbridas, que relacionan los contenidos espaciales y frecuenciales de la señal de entrada y de salida, respectivamente, y viceversa. La fase de estas cuatro funciones proporcionan las funciones características de Hamilton que sirven para describir el sistema desde el punto de vista de la Óptica Geométrica (Bastiaans 1979a).

La descripción de las señales de entrada y salida puede hacerse igualmente en un dominio mixto espacio-frecuencia como es el caso de la representación de Wigner.

La descripción de la respuesta del sistema considerado en el espacio-fase puede determinarse si se combinan adecuadamente las ecs. (4.41) y (4.3). En efecto, de ambas ecuaciones se deduce

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) \triangleq W_{f_S}(\vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} h\left(\vec{r} + \frac{\vec{r}_o}{2}, \vec{r}'\right) h^*\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_o}{2}, \vec{r}''\right) \times \\ \times f_E(\vec{r}') f_E^*(\vec{r}'') e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}_o} d^2\vec{r}' d^2\vec{r}'' d^2\vec{r}_o. \quad (4.44)$$

Teniendo en cuenta la relación de inversión (4.9) y considerando el cambio de variables

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}' + \vec{r}''}{2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}' - \vec{r}'' , \quad (4.45)$$

se obtiene finalmente

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) W_E(\vec{r}_1, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{w}_o, \quad (4.46)$$

siendo

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} h\left(\vec{r} + \frac{\vec{r}_o}{2}, \vec{r}_1 + \frac{\vec{r}_2}{2}\right) h^*\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_o}{2}, \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2}{2}\right) \times \\ \times e^{-j2\pi(\vec{w}\vec{r}_o - \vec{w}_o\vec{r}_2)} d^2\vec{r}_o d^2\vec{r}_2. \quad (4.47)$$

Esta función puede considerarse como una doble distribución de Wigner de la función $h(\vec{r}, \vec{r}')$ y, por lo tanto, será una función real. De nuevo, la ec. (4.46) permite interpretar la función $K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o)$ como la respuesta del sistema en el dominio espacio-frecuencial a la señal $W_E(\vec{r}, \vec{w}) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}) \delta(\vec{w}_o - \vec{w})$. Estrictamente, no es posible encontrar ninguna señal que proporcione una distribución de Wigner como ésta, ya que violaría las relaciones de incertidumbre que ligan el dominio espacial y el frecuencial (de Bruijn 1965). Sin embargo, puede considerarse como el caso límite de una señal con una alta concentración en torno al punto (\vec{r}, \vec{w}) en el espacio-fase. Siguiendo un proceso análogo a partir de la ec. (4.42), se obtiene que

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} H\left(\vec{w} + \frac{\vec{w}_1}{2}, \vec{w}_o + \frac{\vec{w}_2}{2}\right) H^*\left(\vec{w} - \frac{\vec{w}_1}{2}, \vec{w}_o - \frac{\vec{w}_2}{2}\right) \times \\ \times e^{j2\pi(\vec{w}_1\vec{r} - \vec{w}_2\vec{r}_1)} d^2\vec{w}_1 d^2\vec{w}_2. \quad (4.48)$$

Estudiaremos, por su interés posterior, algunos casos particulares de sistemas ópticos lineales. El primero que consideraremos es un sistema transformador de Fourier. En este caso, es directo obtener que

$$h(\vec{r}, \vec{r}') = e^{-j2\pi\vec{r}\cdot\vec{r}'} , \quad (4.49)$$

y, por tanto, la expresión (4.47) quedará, después de usar la relación (4.4), como

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) = \delta(\vec{r}_1 + \vec{w}) \delta(\vec{w}_o - \vec{r}) . \quad (4.50)$$

Por lo tanto, las distribuciones de Wigner a la entrada y a la salida del sistema están relacionadas por la expresión

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = W_E(-\vec{w}, \vec{r}) . \quad (4.51)$$

Es decir, una transformación de Fourier de la señal provoca un giro de 90° en su representación de Wigner.

Consideremos ahora el caso de un sistema que proporciona réplicas escaladas de la señal de entrada con un cierto factor M . En este caso, la respuesta impulsional espacial viene dada por

$$h(\vec{r}, \vec{r}') = \delta\left(\vec{r}' - \frac{1}{M}\vec{r}\right) , \quad (4.52)$$

con lo que es sencillo obtener que la función característica $K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o)$ puede expresarse como

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) = M^2 \delta\left(\vec{r}_1 - \frac{1}{M}\vec{r}\right) \delta(\vec{w}_o - M\vec{w}) , \quad (4.53)$$

lo que permite obtener que

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = M^2 W_E\left(\frac{1}{M}\vec{r}, M\vec{w}\right) . \quad (4.54)$$

Así pues un reescalado de la señal entrada provoca un cambio igual en el dominio espacial de la función de Wigner, e inverso en el dominio frecuencial.

Resulta interesante también considerar la transformación que supone multiplicar la señal de entrada por una cierta función establecida. Esta modulación es la relación que existe, por ejemplo, entre la distribución de amplitudes del campo electromagnético coherente que incide sobre un objeto plano difractante y la que emerge en un plano justo posterior a éste. En general, estamos considerando un sistema cuya actuación en el dominio espacial viene dada por

$$f_S(\vec{r}) = m(\vec{r}) f_E(\vec{r}) , \quad (4.55)$$

En este caso, es directo ver que la respuesta impulsional en este dominio viene dada por

$$h(\vec{r}, \vec{r}') = m(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) , \quad (4.56)$$

cuya doble transformación de Wigner conduce a

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) = W_m(\vec{r}_1, \vec{w} - \vec{w}_o) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}) . \quad (4.57)$$

Esta expresión proporciona una relación entre las representaciones de Wigner a la entrada y a la salida del sistema dada por

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_E(\vec{r}, \vec{w}_o) W_m(\vec{r}, \vec{w} - \vec{w}_o) d^2 \vec{w}_o . \quad (4.58)$$

Resulta interesante considerar el caso en el que la función moduladora $m(\vec{r})$ corresponde a una señal cuadrática de fase análoga a la indicada en la ec. (4.20), ya que, de acuerdo con la ec. (2.88), es la forma que presenta la transmitancia en amplitud de una lente delgada. En este caso, a partir del resultado (4.22), obtenemos

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = W_E(\vec{r}, \vec{w} - 2\gamma\vec{r}) . \quad (4.59)$$

En el caso de la transmitancia de una lente delgada basta sustituir $2\gamma = -1/(\lambda f)$, siendo f la focal imagen de la lente y λ la longitud de onda de la iluminación, como se desprende de la comparación de las ecs. (2.88) y (4.20), con lo que obtiene

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = W_E\left(\vec{r}, \vec{w} + \frac{1}{\lambda f} \vec{r}\right) . \quad (4.60)$$

En último lugar, nos interesamos por la respuesta en el espacio-fase de un sistema invariante a desplazamientos, es decir, tal que

$$h(\vec{r}, \vec{r}') = h(\vec{r}' - \vec{r}, \vec{0}) = h_o(\vec{r}' - \vec{r}) . \quad (4.61)$$

Es directo obtener que, en este caso, la integral (4.41) puede representarse como una convolución de modo que

$$f_S(\vec{r}) = f_E(\vec{r}) \otimes h_o(\vec{r}) , \quad (4.62)$$

y, adicionalmente, se obtiene que

$$H(\vec{w}, \vec{w}') = H_o(\vec{w}') \delta(\vec{w} - \vec{w}') , \quad (4.63)$$

donde $H_o(\vec{w}') = \mathcal{F}\{h_o(\vec{r}); \vec{w}'\}$, con lo que la expresión (4.42) toma el aspecto conocido de un filtrado de frecuencias espaciales, es decir,

$$F_S(\vec{w}) = H_o(\vec{w}) F_E(\vec{w}) , \quad (4.64)$$

En este caso se puede obtener que

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_o) = W_{h_o}(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{w}) \delta(\vec{w}_o - \vec{w}) . \quad (4.65)$$

con lo que la distribución de Wigner de la señal de salida vendrá dada por

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_E(\vec{r}_1, \vec{w}) W_{h_o}(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{w}) d^2\vec{r}_1 . \quad (4.66)$$

resultado que puede deducirse directamente de las relaciones (4.64), (4.51) y (4.38).

Un caso particular de este tipo de sistemas espacialmente invariantes, de interés en el desarrollo posterior de este trabajo, es la transformación de Fresnel asociada a la propagación del campo electromagnético coherente difractado por un objeto plano. La distribución de amplitudes presente sobre éste será considerada como la señal de entrada, mientras que la respuesta del sistema se asociará al patrón de difracción en amplitud situado a una distancia R del objeto. A partir de la expresión (2.1), y siguiendo un proceso similar al que condujo a la expresión (2.48), esta respuesta podrá expresarse como

$$f_S(\vec{r}) = \frac{Ae^{j\frac{2\pi}{\lambda}R}}{j\lambda R} \left[f_E(\vec{r}) \otimes e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2} \right] . \quad (4.67)$$

En este caso, por tanto, podemos identificar la respuesta impulsional en el dominio espacial con la función

$$h_o(\vec{r}') = \frac{Ae^{j\frac{2\pi}{\lambda}R}}{j\lambda R} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}'|^2} . \quad (4.68)$$

Puede obtenerse que su distribución de Wigner viene dada, de acuerdo con el resultado indicado en la ec. (4.22), por

$$W_{h_o}(\vec{r}, \vec{w}) = \frac{|A|^2}{\lambda^2 R^2} \delta\left(\vec{w} - \frac{1}{\lambda R}\vec{r}\right) . \quad (4.69)$$

Por lo tanto, de la ec. (4.66) se sigue que

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = |A|^2 W_E(\vec{r} - \lambda R\vec{w}, \vec{w}) . \quad (4.70)$$

Para concluir este resumen de las propiedades más destacadas de la representación de Wigner, indicaremos un par de generalizaciones de los resultados aquí presentados. En primer lugar, los ejemplos de sistemas lineales presentados son casos particulares de sistemas ópticos de primer orden, caracterizados desde el punto de vista de la Óptica Geométrica por matrices del tipo

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} , \quad (4.71)$$

que se aplican a vectores columna que caracterizan la posición y dirección de incidencia de los rayos en cada plano normal al eje óptico considerado, siendo A , B , C y D matrices 2×2 reales. Puede demostrarse que estos sistemas se pueden caracterizar desde el punto de vista de la difracción en la representación de Wigner por una respuesta impulsional (Bastiaans 1979d) (Bastiaans 1991) (Dragoman 1994)

$$K(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_1, \vec{w}_0) = \chi \delta(\vec{r}_1 - A\vec{r} - B\vec{w}) \delta(\vec{w}_0 - C\vec{r} - D\vec{w}) , \quad (4.72)$$

donde χ es una constante real y positiva que da cuenta de las posibles pérdidas energéticas introducidas por el sistema. Con todo, estos sistemas modifican la representación de Wigner de la señal de acuerdo con la relación

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = \chi W_E(A\vec{r} + B\vec{w}, C\vec{r} + D\vec{w}) . \quad (4.73)$$

En sistemas con simetría de revolución, las submatrices A , B , C y D son proporcionales a la matriz identidad I , de modo que $A = aI$, $B = bI$, $C = cI$ y $D = dI$, de modo que la transformación en el espacio de Wigner puede representarse como

$$W_S(\vec{r}, \vec{w}) = \chi W_E(\vec{r}', \vec{w}') , \quad (4.74)$$

donde las coordenadas transformadas vienen dadas por la relación lineal

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' \\ \vec{w}' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{w} \end{pmatrix} , \quad (4.75)$$

siendo

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \quad (4.76)$$

Los valores particulares que toma esta matriz en los casos que hemos estudiado vienen dados por:

a) Transformador de Fourier:

$$\mathbf{M}_F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.77)$$

b) Reescalado de la señal en un factor M :

$$\mathbf{M}_E(M) = \begin{pmatrix} 1/M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} . \quad (4.78)$$

c) Propagación de la señal de acuerdo con la difracción de Fresnel hasta una cierta distancia R :

$$\mathbf{M}_F(R; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.79)$$

d) Transmisión a través de una lente delgada de longitud focal imagen f :

$$M_L(f; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(\lambda f) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Por último, destaquemos que es posible estudiar como se modifica la función de Wigner de una señal cuando ésta atraviesa un sistema mucho más general, obteniéndose unas ecuaciones diferenciales de transporte que incluyen como caso particular las transformaciones aquí estudiadas (Bastiaans 1979b) (Bastiaans 1979c) (Bremmer 1979). Estas consideraciones sin embargo, superan el ámbito de este trabajo y no serán revisadas aquí. La misma objeción aplica a la extensión del uso de esta representación espacio-fase para señales estocásticas, que permite una descripción de campos electromagnéticos parcialmente coherentes (Bastiaans 1981) (Brenner y Ojeda-Castañeda 1984) (Bastiaans 1986). Baste decir que, en el caso de campos cuasimonocromáticos, debe sustituirse en la definición de distribución de Wigner la función $r_{ff}(\vec{r}_1, \vec{r}_0)$ por la intensidad mutua definida en la ec. (2.108).

Como todas las funciones espacio-fase, la función de distribución de Wigner duplica el número de variables de la función que representa. Por ello, la naturaleza bidimensional de los sistemas ópticos se muestra muy apropiada para llevar a cabo esta transformación en el caso de funciones de una sola variable. Además, la capacidad de los sistemas ópticos para proporcionar transformadas de Fourier en tiempo real permite una realización que desde el punto de vista digital resulta larga y costosa. Por todo ello, la mayoría de los sistemas de generación de la representación de Wigner son dispositivos ópticos u opto-electrónicos. En el Apéndice se presenta una breve descripción de las realizaciones ópticas más destacadas que se han propuesto para esta y otras distribuciones duales.

4.3 Aplicación de la representación de Wigner al análisis de la respuesta de los sistemas formadores de imágenes a lo largo de diferentes curvas tridimensionales

En esta sección vamos a presentar una descripción del campo electromagnético generado por un sistema formador de imágenes como respuesta a un objeto puntual monocromático, a través de la representación espacio-fase de Wigner de una cierta versión de la pupila del sistema. Este resultado nos va a permitir describir de modo sencillo la irradiancia de dicho campo a lo largo de ciertas curvas en el espacio imagen.

Los sistemas ópticos formadores de imágenes son dispositivos diseñados con el fin de generar réplicas de objetos bidimensionales. La linealidad de estos sistemas

hace que su comportamiento pueda ser descrito totalmente por la respuesta que proporcionan a objetos puntuales, tal y como se indicó en la sección anterior. Para que la imagen que proporcionan de un objeto extenso mantenga la mayor similitud posible con el original es necesario que estas respuestas impulsionales sean lo más parecidas a distribuciones puntuales. Desde el punto de vista de la difracción, esta situación ideal es equivalente a considerar que la onda esférica (ilimitada) generada por el objeto puntual quede transformada, a través del sistema, en una onda esférica (ilimitada) que converja al correspondiente punto imagen. Este comportamiento nunca se obtiene en la práctica, ya que el paso del frente de ondas esférico original a través del sistema genera una limitación efectiva de su extensión y una deformación del mismo. Esta deformación, que se conoce con el nombre de aberración de onda, resulta fundamental en el estudio de la calidad de las imágenes proporcionadas por el sistema.

En la aproximación de Fresnel, este efecto puede tenerse en cuenta considerando que en el plano en el que la Óptica Geométrica sitúa la pupila de salida del sistema se obtiene una distribución de amplitudes que puede factorizarse de acuerdo con la expresión

$$U_o(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda) = \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z}}{z} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}|\vec{r}_o - \vec{\rho}|^2} \right) \mathbb{P}(\vec{r}_o; \vec{\rho}; z; \lambda), \quad (4.81)$$

donde $\vec{\rho}$ representa el vector de posición del punto imagen en el plano al cual convergería la onda esférica ilimitada generada en el caso ideal, z es la distancia que hay desde dicho punto al plano de la pupila, y \vec{r}_o es el radio vector en dicho plano, tal y como se muestra en la fig. 4.1. Como hasta ahora, λ representa la longitud de onda de la radiación luminosa empleada en el proceso de formación de imágenes. Hemos considerado, por simplicidad, que la amplitud de la onda esférica sobre el punto imagen ideal vale $A = 1$.

Esta expresión es análoga a la (2.2) de modo que el primer factor de la ecuación anterior representa, en la aproximación indicada, la distribución de amplitudes que aparecería en el plano de la pupila de salida generado por la onda esférica que se obtendría en el caso ideal. El segundo, denominado función pupila generalizada del sistema, da cuenta de las variaciones que presenta dicha distribución respecto de este comportamiento "perfecto".

Consideraremos, por simplicidad, el caso en el que el punto imagen se sitúa sobre el eje óptico. Esta elección no resta generalidad a los resultados que obtendremos ya que basta redefinir el eje óptico, trasladando solidariamente el sistema de referencia cartesiano del plano de la pupila, para reducir la situación general a la aquí estudiada. En este caso, la distribución de amplitudes de la ec. (4.81) se

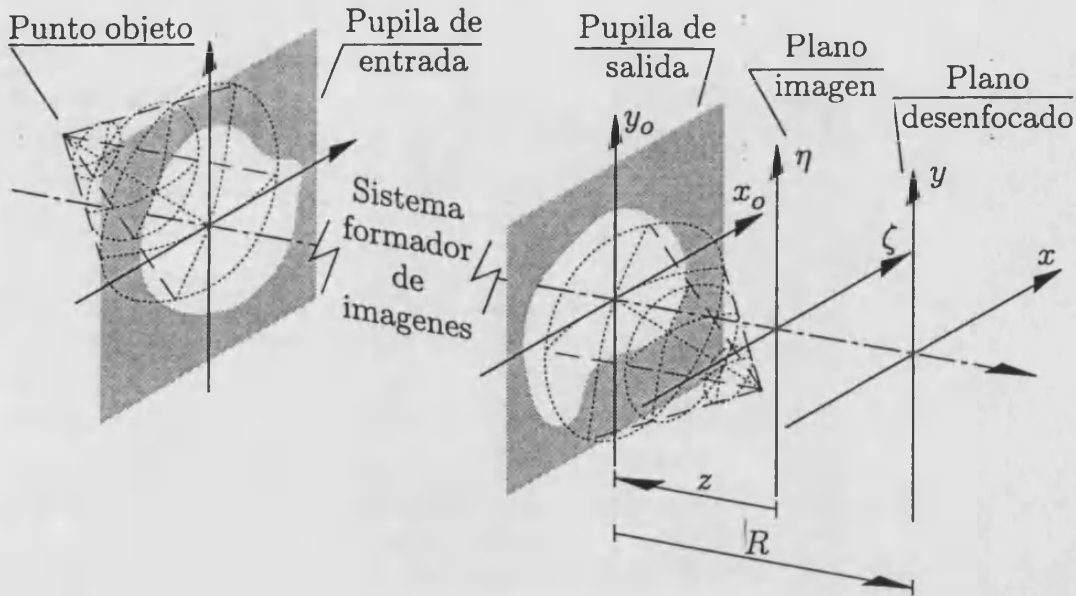


Figura 4.1. Representación esquemática del sistema formador de imágenes estudiado.

reduce a

$$U_o(\vec{r}_o; \vec{0}; z; \lambda) = \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z}}{z} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}|\vec{r}_o|^2} \right) \mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda), \quad (4.82)$$

donde hemos denominado

$$\mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda) = \mathbb{P}(\vec{r}_o; \vec{0}; z; \lambda). \quad (4.83)$$

De acuerdo con la ec. (2.1), la distribución de amplitudes que se generará en cualquier plano situado a una distancia R de la pupila de salida vendrá dada por

$$U_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(R+z)} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2}}{j\lambda z R} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda) e^{j\frac{\pi}{\lambda} \frac{z+R}{zR} |\vec{r}_o|^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R} \vec{r} \cdot \vec{r}_o} d^2\vec{r}_o. \quad (4.84)$$

Si utilizamos coordenadas polares (r_o, θ_o) y (r, θ) en el plano de la pupila y en el plano de observación elegido, respectivamente, la expresión anterior se reduce a

$$U_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \bar{U}_R(r, \theta; z; \lambda) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(R+z)} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}r^2}}{j\lambda z R} \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{\mathbb{P}}_o(r_o, \theta_o; z; \lambda) e^{j\frac{\pi}{\lambda} \frac{z+R}{zR} r_o^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda R} r r_o \cos(\theta_o - \theta)} r_o dr_o d\theta_o. \quad (4.85)$$

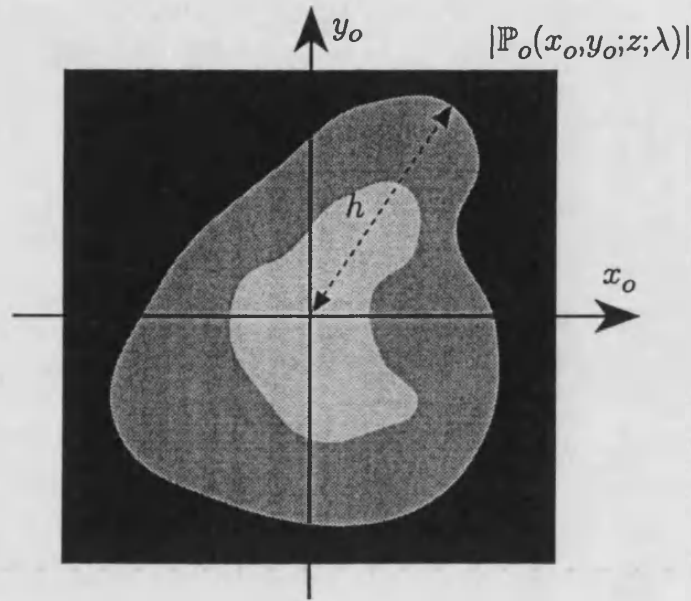


Figura 4.2. Representación en niveles de gris del módulo de la función pupila generalizada, sobre la que se indica la extensión radial máxima de la misma, h .

donde $\bar{\mathbb{P}}_o(r_o, \theta_o; z; \lambda) = \mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda)$. El tamaño necesariamente limitado de los elementos que conforman el sistema óptico considerado impone un soporte compacto a esta función pupila, de modo que el dominio de integración en la variable r_o queda limitado implícitamente hasta un valor $r_o = h$ que cumple

$$h = \min\{r_o > 0 / \bar{\mathbb{P}}_o(r_o, \theta_o; z; \lambda) = 0 \quad \forall \theta_o \in [0, 2\pi]\} . \quad (4.86)$$

Es decir, h es el valor de r_o a partir del cual la pupila es idénticamente nula, tal y como se indica en la fig. 4.2. Resulta interesante expresar la ec. (4.85) en términos de las variables normalizadas

$$r'_o = \frac{r_o}{h} , \quad r' = \frac{r}{h} . \quad (4.87)$$

Esta normalización es, en realidad, un caso particular trivial de la transformación canónica de Hopkins (1970), de uso muy extendido en el estudio de los sistemas formadores de imágenes. De acuerdo con esta sustitución, la distribución de amplitudes sobre el plano de observación elegido puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^2 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(R+z)} e^{j\frac{\pi h^2}{\lambda R} r'^2}}{j\lambda z R} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathcal{P}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) e^{j\frac{\pi}{\lambda} \frac{z+R}{zR} h^2 r_o'^2} e^{-j\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r' r'_o \cos(\theta_o - \theta)} r'_o dr'_o d\theta_o , \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde la función $\mathcal{P}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ es la versión en coordenadas normalizadas de la pupila $\bar{\mathbb{P}}_o(r_o, \theta_o; z; \lambda)$. Tal y como indicamos, esta función da cuenta de las variaciones tanto de amplitud como de fase presentes en la pupila respecto del comportamiento ideal. Es posible factorizar estos dos efectos expresando dicha función como

$$\mathcal{P}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) = |\mathcal{P}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)| e^{j \frac{2\pi}{\lambda} W(r'_o, \theta_o; z; \lambda)}, \quad (4.89)$$

donde la función $W(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ se conoce como aberración de onda en coordenadas polares normalizadas. Es habitual expresar ésta como una doble serie de potencias de sus dos argumentos, cuyos términos pueden agruparse para llegar a la expresión

$$W(r'_o, \theta_o; z; \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(z; \lambda) (r'_o)^n \cos^m \theta_o, \quad (4.90)$$

donde los factores $W_{nm}(z; \lambda)$ se conocen como coeficientes de aberración. Si el sistema óptico considerado pretende utilizarse en un proceso de formación de imágenes, las deformaciones en el frente de onda ideal introducidas por esta función no deben ser muy severas, ya que en caso contrario la respuesta impulsional quedaría muy degradada. De acuerdo con esto, la convergencia de la serie se alcanza usualmente con un número no muy elevado de términos; esta serie truncada se conoce como polinomio de aberraciones. En particular, el término que corresponde a $n = 2$ y $m = 0$ puede asociarse, en combinación con el factor cuadrático de fase presente en la ec. (4.82), a un desplazamiento axial del punto al que converge el frente de onda esférico que se toma como referencia. En efecto, en ausencia de las demás aberraciones, un valor de $W_{20}(z; \lambda) \neq 0$ indica que a la salida del sistema se obtiene una onda esférica "ideal", pero que no converge al punto que estamos considerando como la imagen del objeto puntual, sino a otro punto axial situado a una cierta distancia de éste. Puede interpretarse, por lo tanto, como una elección errónea del plano imagen del sistema. Por ello se conoce al término citado como aberración de desenfoque, o simplemente desenfoque. Una restitución al plano adecuado permite eliminar esta aberración. Sin embargo, en el caso de iluminación policromática este reposicionamiento no es posible, en general, para todas las componentes monocromáticas de modo simultáneo, ya que es muy habitual que se presente una dispersión cromática axial de las imágenes proporcionadas por el dispositivo. Ya que éste es el caso que se estudiará en §5.3, mantendremos este coeficiente en el desarrollo anterior. De hecho, en la mayoría de sistemas que trabajan con iluminación de ancho de banda espectral finito, este término, junto con el que corresponde de a $n = 4$ y $m = 0$ —denominado aberración esférica primaria—, son los responsables principales del deterioro de la imagen final.

Por ello, resulta conveniente considerar estos términos por separado, por lo que consideremos la factorización

$$\mathcal{P}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) = \mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} [W_{20}(z; \lambda) r_o'^2 + W_{40}(z; \lambda) r_o'^4]}, \quad (4.91)$$

de modo que $Q(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ contenga las variaciones de amplitud que aparecen sobre la pupila de salida junto con las aberraciones del frente de onda a excepción del desenfoque y de la aberración esférica primaria. Sustituyendo esta expresión en la ec. (4.88), obtenemos

$$\begin{aligned} U_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^2 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(R+z)} e^{j\frac{\pi h^2}{\lambda R} r'^2}}{j\lambda z R} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Q(r'_o, \theta_o; z; \lambda) \\ &\times e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{z+R}{2zR} h^2 + W_{20}(z; \lambda) \right] r_o'^2} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} W_{40}(z; \lambda) r_o'^4} \times \\ &\times e^{-j\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r' r'_o \cos(\theta - \theta_o)} r'_o dr'_o d\theta_o, \end{aligned} \quad (4.92)$$

expresión que, reagrupando convenientemente sus términos, puede reescribirse como

$$\begin{aligned} U_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^2 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(R+z)} e^{j\frac{\pi h^2}{\lambda R} r'^2}}{j\lambda z R} \int_0^1 F_R(r'_o; r', \theta; z; \lambda) \times \\ &\times e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{z+R}{2zR} h^2 + W_{20}(z; \lambda) \right] r_o'^2} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} W_{40}(z; \lambda) r_o'^4} r'_o dr'_o, \end{aligned} \quad (4.93)$$

donde

$$F_R(r'_o; r', \theta; z; \lambda) = \int_0^{2\pi} Q(r'_o, \theta_o; z; \lambda) e^{-j\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r' r'_o \cos(\theta_o - \theta)} d\theta_o. \quad (4.94)$$

Esta última es una función de r'_o cuya forma, en general, cambia al ir considerando diferentes puntos (r', θ, R) en el espacio imagen. Si consideramos la distribución de irradiancia que se observa en cada uno de estos puntos, podemos expresar

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^4}{(\lambda z R)^2} \left| \int_0^{+\infty} F_R(r'_o; r', \theta; z; \lambda) \times \right. \\ &\times \left. e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{z+R}{2zR} h^2 + W_{20}(z; \lambda) \right] r_o'^2} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} W_{40}(z; \lambda) r_o'^4} r'_o dr'_o \right|^2. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Por comodidad, en la expresión anterior se ha extendido de nuevo el dominio de integración, aunque éste queda reducido implícitamente al intervalo $[0, 1]$ debido al soporte compacto del integrando. Desarrollando de modo explícito el módulo cuadrado de esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^4}{(\lambda z R)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} F_R(r'_o; r', \theta; z; \lambda) F_R^*(r''_o; r', \theta; z; \lambda) \times \\ &\times e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{z+R}{2zR} h^2 + W_{20}(z; \lambda) \right] (r_o'^2 - r_o''^2)} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} W_{40}(z; \lambda) (r_o'^4 - r_o''^4)} \times \\ &\times r'_o dr'_o r''_o dr''_o. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Si denominamos

$$W'_{20}(R; z; \lambda) = \delta W_{20}(R; z) + W_{20}(z; \lambda) , \quad (4.97)$$

siendo

$$\delta W_{20}(R; z) = \frac{z + R}{2zR} h^2 , \quad (4.98)$$

y consideramos el cambio de variables

$$\mu' = r_o'^2 , \quad \mu'' = r_o''^2 , \quad (4.99)$$

la ec. (4.96) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{F}_R(\mu'; r', \theta; z; \lambda) \bar{F}_R^*(\mu''; r', \theta; z; \lambda) \times \\ &\times e^{j \frac{2\pi}{\lambda} W'_{20}(R; z; \lambda)(\mu' - \mu'')} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} W_{40}(z; \lambda)(\mu'^2 - \mu''^2)} d\mu' d\mu'' . \end{aligned} \quad (4.100)$$

donde

$$\bar{F}_R(\mu'; r', \theta; z; \lambda) = F_R(r_o'; r', \theta; z; \lambda) \quad (4.101)$$

es la versión en la variable $\mu' = r_o'^2$ de la función indicada en la ec. (4.94). Por último, el nuevo cambio de variables

$$\xi = \frac{\mu' + \mu''}{2} , \quad \xi' = \mu' - \mu'' , \quad (4.102)$$

conduce, operando adecuadamente, a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_R(r', \theta; z; \lambda) &= \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_R \left(\xi + \frac{\xi'}{2}; r', \theta; z; \lambda \right) \bar{F}_R^* \left(\xi - \frac{\xi'}{2}; r', \theta; z; \lambda \right) \times \\ &\times e^{j \frac{2\pi}{\lambda} [W'_{20}(R; z; \lambda) + 2W_{40}(z; \lambda)] \xi'} d\xi d\xi' . \end{aligned} \quad (4.103)$$

La integración en la variable ξ' puede identificarse, de acuerdo con la definición (4.3), con la representación de Wigner de la función unidimensional $\bar{F}_R(\mu'; r', \theta; z; \lambda)$, de modo que la ecuación anterior puede expresarse como

$$\mathcal{J}_R(r', \theta; z; \lambda) = \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\bar{F}_R}(\xi, u(\xi)) d\xi , \quad (4.104)$$

donde

$$u(\xi) = -\frac{2W_{40}(z; \lambda)}{\lambda} \xi - \frac{W'_{20}(R; z; \lambda)}{\lambda} . \quad (4.105)$$

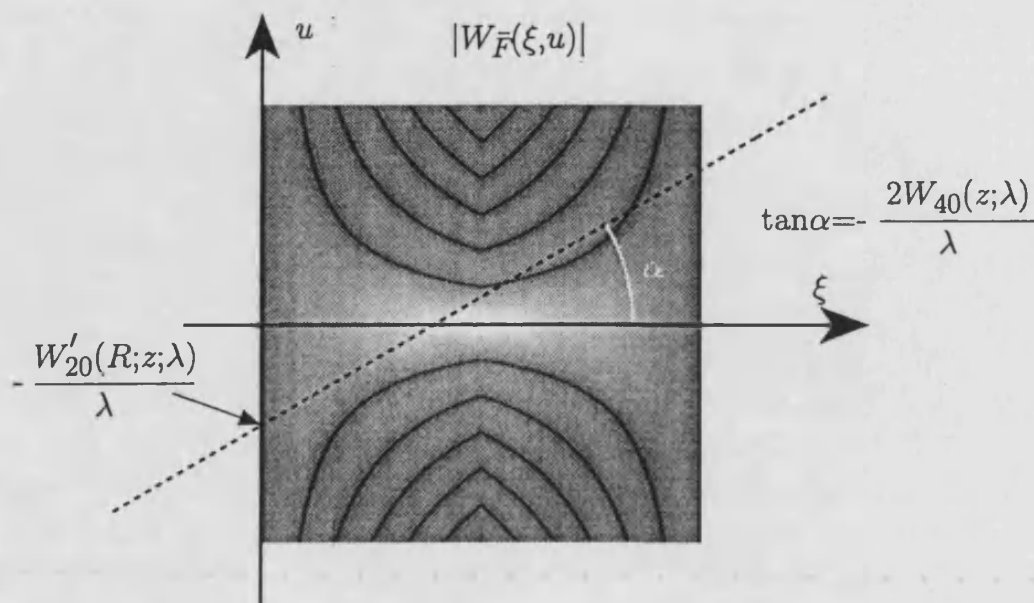


Figura 4.3. Diagrama donde se muestran los parámetros de la recta a lo largo de la cual debe realizarse la integración en el espacio-fase para obtener la irradiancia en un punto dado del espacio imagen.

Esta última expresión describe, para diferentes valores de ξ , la ecuación de una recta en el espacio-fase con pendiente y ordenada en el origen dadas, respectivamente, por

$$m(z; \lambda) = -\frac{2W_{40}(z; \lambda)}{\lambda}, \quad n(R; z; \lambda) = -\frac{W'_{20}(R; z; \lambda)}{\lambda}. \quad (4.106)$$

Así pues, la irradiancia que se obtiene en cualquier punto (r', θ, R) del espacio imagen puede ser obtenida a partir de la integración de la representación de Wigner de la función $\bar{F}_R(\mu'; r', \theta; z; \lambda)$ a lo de rectas en el espacio-fase caracterizadas por los parámetros indicados en la ec. (4.106), tal y como se muestra en la fig. (4.3). Estas rectas mantienen siempre la misma pendiente independientemente del punto considerado, siendo su ordenada en el origen la que varía en función del plano de observación elegido. En general, sin embargo, la función de Wigner que debe considerarse para cada posición de campo imagen es diferente, ya que el perfil de la función que representa, $\bar{F}_R(\mu'; r', \theta; z; \lambda)$, varía punto a punto. Sin embargo, es posible encontrar curvas para las que dicha función es independiente del punto que se considere sobre ellas. A lo largo de estas líneas, por lo tanto, una única representación bidimensional espacio-fase de esta función pupila modificada permitirá obtener la distribución de irradiancia generada en el espacio imagen.

Restringiremos nuestro estudio al caso en que las curvas consideradas puedan

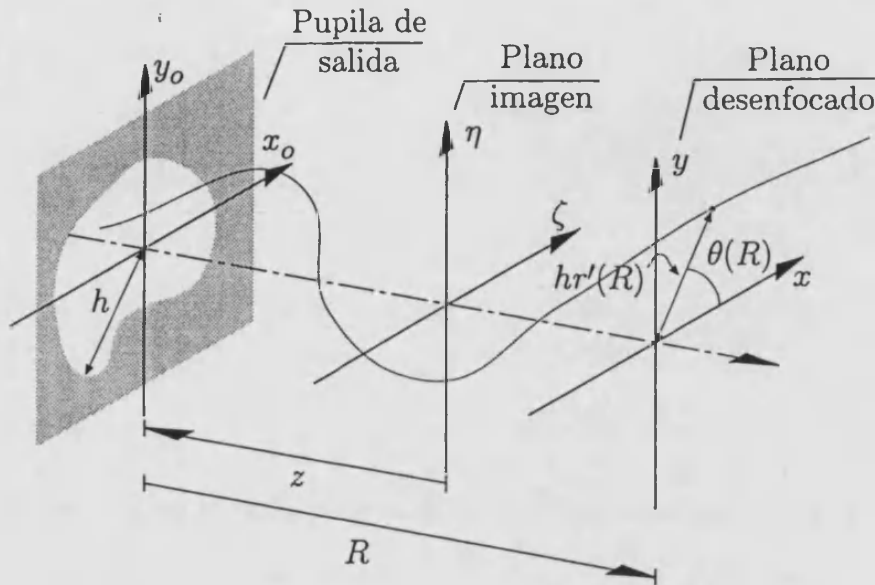


Figura 4.4. Esquema en el que se muestra el tipo de curvas consideradas en el estudio de la irradiancia en el espacio imagen de un sistema formador de imágenes.

ser parametrizadas por funciones inyectivas y continuas del tipo

$$C \equiv \begin{cases} r' = r'(R) \\ \theta_o = \theta_o(R) \end{cases}, \quad (4.107)$$

como la que se muestra en la fig. 4.4. Esta restricción implica que las curvas sólo cortan a cada plano normal al eje óptico en un único punto. El caso más general de funciones con "puntos de retorno" puede ser estudiado separando estas trayectorias en tramos como los que aquí se consideran.

A lo largo de estas líneas, toda dependencia en las variables r' y θ_o de la función \bar{F}_R se establece a través de la distancia axial R que caracteriza al punto de la curva considerado. Lo mismo aplicará para su versión en $r'_o = \sqrt{\mu'}$, que de acuerdo con la expresión (4.94) podrá expresarse como

$$\begin{aligned} F_R(r'_o; r'(R), \theta(R); z; \lambda) &= F^C(r'_o; R; z; \lambda) = \\ &= \int_0^{2\pi} Q(r'_o, \theta_o; z; \lambda) e^{-j\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r'(R) r'_o \cos(\theta_o - \theta(R))} d\theta_o. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Haciendo uso de la identidad de Jacobi

$$e^{ja \cos b} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} j^s J_s(a) e^{-jsb}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (4.109)$$

siendo $J_s(x)$ la función de Bessel de primera especie y orden s , podemos reescribir la ec. (4.108) como

$$F^C(r'_o; R; z; \lambda) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} j^s J_s \left(-\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r'(R) r'_o \right) e^{js\theta(R)} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) e^{-js\theta_o} d\theta_o. \quad (4.110)$$

Por otro lado, la periodicidad que cualquier función de las coordenadas polares $g(r'_o, \theta_o)$ presenta respecto de la variable angular, con periodo $p = 2\pi$, hace que, para cada valor del radio, pueda realizarse un desarrollo en serie de Fourier unidimensional del tipo

$$g(r'_o, \theta_o) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s(r'_o) e^{j\frac{2\pi s\theta_o}{2\pi}} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s(r'_o) e^{js\theta_o}, \quad (4.111)$$

donde los coeficientes de la serie vienen dados, de acuerdo con la expresión (2.76), por

$$g_s(r'_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r'_o, \theta_o) e^{-js\theta_o} d\theta_o. \quad (4.112)$$

Cada uno de estos coeficientes reciben el nombre de armónico circular de orden s de la función $g(r'_o, \theta_o)$. Es directo identificar los armónicos circulares de la función $\mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ en la ec. (4.110), de modo que es sencillo obtener que

$$F^C(r'_o; R; z; \lambda) = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-j)^s J_s \left(\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r'(R) r'_o \right) \mathcal{Q}_s(r'_o; z; \lambda) e^{js\theta(R)}, \quad (4.113)$$

donde se ha tenido en cuenta la propiedad

$$J_s(-x) = (-1)^s J_s(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.114)$$

A partir de la ec. (4.113), es sencillo encontrar algunas condiciones suficientes para que la función $F^C(r'_o; R; z; \lambda)$ no dependa de la distancia R . En particular, en el caso en el que la función pupila $\mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ presente simetría de revolución, se cumplirá

$$\mathcal{Q}_s(r'_o; z; \lambda) = \mathcal{Q}(r'_o, 0; z; \lambda) \delta_{s,0}, \quad (4.115)$$

de modo que la expresión (4.113) queda

$$F^C(r'_o; R; z; \lambda) = 2\pi J_0 \left(\frac{2\pi h^2}{\lambda R} r'(R) r'_o \right) \mathcal{Q}(r'_o, 0; z; \lambda). \quad (4.116)$$

La única dependencia con R se establece, en este caso, a través del argumento de la función $J_0(x)$, independientemente del valor $\theta(R)$.⁴ El único modo de eliminar esta dependencia es considerar curvas caracterizadas por funciones $r'(R)$ lineales, de modo que

$$r'(R) = B R , \quad (4.117)$$

siendo B una constante.

En general, la pupila $\mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ no presentará simetría de revolución, o bien porque el polinomio de aberraciones contenga términos con dependencia en $\cos \theta_o$ o bien porque su amplitud presente variaciones angulares. En ese caso, la dependencia con la distancia R de F^C se establece tanto a través de la función $r'(R)$ como de $\theta_o(R)$. La condición necesaria para que, en este caso general, esta dependencia desaparezca vuelve a ser que la forma funcional de $r'(R)$ sea como la indicada en la ec. (4.117), mientras que para $\theta_o(R)$ debe exigirse una estricta constancia, es decir,

$$\theta(R) = \bar{\theta} , \quad \forall R \in \mathbb{R} , \quad (4.118)$$

Esta solución corresponde, tal como se indica en la fig. (4.5), a rectas que pasan por el centro de la pupila de salida y que forman un ángulo σ con el eje óptico que cumple

$$\tan \sigma = B h , \quad (4.119)$$

en cuyo caso se obtiene

$$F^C(r'_o; R; z; \lambda) = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-j)^s J_s \left(\frac{2\pi h \tan \sigma}{\lambda} r'_o \right) \mathcal{Q}_s(r'_o; z; \lambda) e^{js\bar{\theta}} . \quad (4.120)$$

El resultado anterior incluye como caso particular al eje óptico, sin más que considerar un valor de $\sigma = 0$. Para éste, teniendo en cuenta que

$$J_s(0) = \delta_{s,0} , \quad \forall s \in \mathbb{Z} , \quad (4.121)$$

el anterior desarrollo se reduce a

$$F^C(r'_o; R; z; \lambda) = 2\pi \mathcal{Q}_0(r'_o; z; \lambda) . \quad (4.122)$$

Este resultado concuerda plenamente con las predicciones del teorema de McCutchen (1964), que en este caso establece que la distribución axial de irradiancia proporcionada por cualquier sistema óptico depende únicamente del promedio angular de la función $\mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)$ (Martínez-Corral *et al.* 1994). Dicho promedio

⁴Este hecho no es sorprendente considerando que el campo imagen en este caso presenta simetría de revolución en torno al eje óptico.

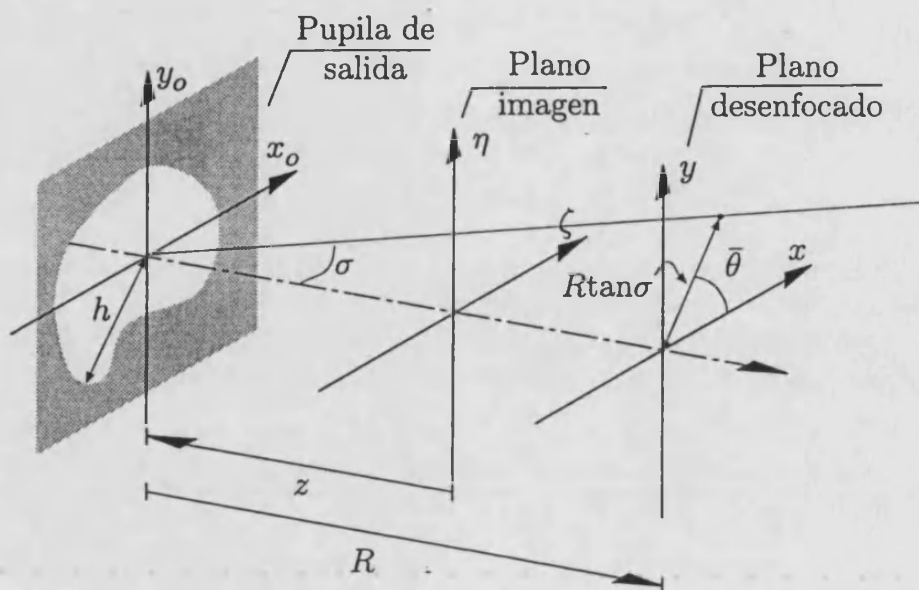


Figura 4.5. Esquema en el que se describen las características geométricas de las rectas definidas por las ecs. (4.117) y (4.118).

es justamente el valor indicado en la expresión (4.122), como puede deducirse de la expresión (4.112).

Es posible, también, estudiar casos en los que la constancia de la función F^C se establezca de modo sólo aproximado. Por ejemplo, consideremos el caso de rectas paralelas al eje óptico del tipo

$$C \equiv \begin{cases} r' = \bar{r}' \\ \theta_o = \bar{\theta} \end{cases} \quad (4.123)$$

Para ellas, la única dependencia que mantiene dicha función con la distancia R se debe al denominador del argumento de las funciones de Bessel del desarrollo (4.113). Si se considera un entorno suficientemente reducido de valores de R alrededor de un cierto $R^{(0)}$ como para considerar que

$$J_s \left(\frac{2\pi h^2 \bar{r}'}{\lambda R} r'_o \right) \simeq J_s \left(\frac{2\pi h^2 \bar{r}'}{\lambda R^{(0)}} r'_o \right), \quad (4.124)$$

para todos los sumandos presentes en dicho desarrollo y para todos los valores de $r'_o \leq h$, podremos expresar, de modo aproximado, que

$$F_R(r'_o; r'(R), \theta(R); z; \lambda) \simeq 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-j)^s J_s \left(\frac{2\pi h^2 \bar{r}'}{\lambda R^{(0)}} r'_o \right) Q_s(r'_o; z; \lambda) e^{js\bar{\theta}}. \quad (4.125)$$

El grado de aproximación en este caso será tanto mayor cuanto más cercano se encuentre R de $R^{(0)}$ y, por tanto, cuanto más próxima a la igualdad se encuentre la ec. (4.124) para todos los sumandos presentes en la serie (4.113).

La irradiancia luminosa generada por el sistema en todos los puntos de una cualquiera de las trayectorias indicadas puede obtenerse, por lo tanto, a partir de una única representación de Wigner bidimensional asociada a la pupila generalizada del mismo a través de diferentes integraciones a lo largo de rectas en el espacio-fase, tal y como se indica en las ecs. (4.104) y (4.106). Adicionalmente, esta distribución no se modifica si se consideran diferentes estados de corrección del sistema óptico respecto del desenfoque $W_{20}(z; \lambda)$ o la aberración esférica $W_{40}(z; \lambda)$. Lo único que se debe cambiar en este caso son los parámetros de las rectas a lo largo de las cuales se efectúa la integración. Esta característica hace que la técnica propuesta, una vez obtenida la función espacio-fase bidimensional indicada, presente ventajas sustanciales respecto de otros métodos de cálculo de estas distribuciones de irradiancia en los que la integral (4.84) se reduce a una suma de contribuciones debidas a diferentes elementos de la pupila, que se calculan con diferentes grados de aproximación (Hopkins y Yzuel 1970) (Yzuel y Calvo 1983) (Stamnes *et al.* 1983) (Kraus 1993) (D'Arcio *et al.* 1994). En estas técnicas, para cada punto considerado es necesario repetir todo el proceso de integración numérica, y una modificación en las aberraciones citadas supone un replanteamiento de todos los cálculos desde el comienzo. La técnica que aquí proponemos resulta especialmente ventajosa en el caso de que sea necesario un cálculo sucesivo de muchas de estas integrales, como es el caso del estudio de la respuesta policromática en el caso de radiación de ancho de banda finito, tal y como se pondrá de manifiesto en §5.3.

Para demostrar las capacidades del método que proponemos, hemos utilizado éste para obtener las distribuciones de irradiancia generadas a lo largo de diferentes rectas en el espacio imagen de dos sistemas formadores de imágenes. Por simplicidad, hemos considerado que, en ambos casos, todos los coeficientes de aberración son nulos a excepción del de aberración esférica primaria. En estas circunstancias, es directo obtener, de la expresión (4.91), que

$$|\mathcal{P}(r'_o, \theta_o; z; \lambda)| = \mathcal{Q}(r'_o, \theta_o; z; \lambda), \quad (4.126)$$

de modo que esta última función contiene las variaciones de amplitud que se presentan en la pupila de salida. En el primero de los sistemas considerados la función pupila presenta un soporte circular de modo que

$$\mathcal{Q}^{(I)}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) = \text{rect}(r'_o), \quad (4.127)$$

mientras que en el segundo se presenta un caso más general, en el que se añade una obturación circular descentrada a la pupila anterior. Hemos considerado que el radio de dicha obturación contiene un valor que corresponde a la tercera parte del radio del soporte de la pupila y que es tangente al centro de ésta, tal y como se muestra en la fig. 4.6b. No es difícil demostrar que, con la elección de ejes de

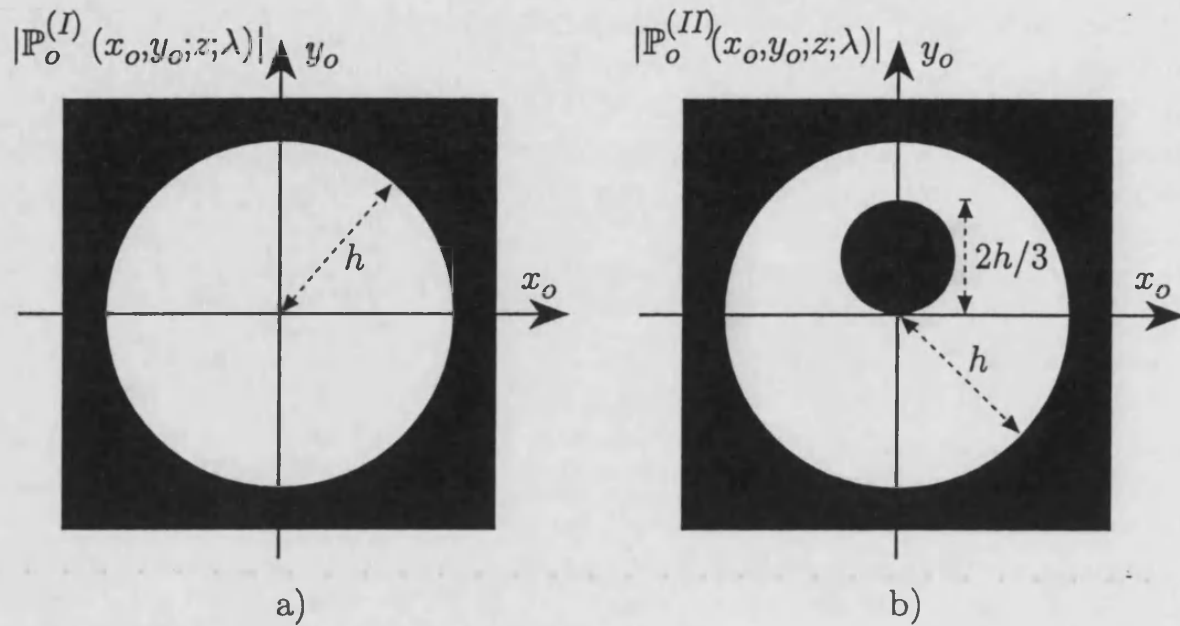


Figura 4.6. Representación en niveles de gris del soporte de las pupilas de salida de los dos sistemas estudiados.

referencia indicada en dicha figura, para este segundo sistema tenemos

$$Q^{(II)}(r'_o, \theta_o; z; \lambda) = \text{rect}(r'_o) - \text{rect}(9r'^2_o - 6r'_o \sin \theta_o + 1) . \quad (4.128)$$

Las trayectorias a lo largo de las cuales se ha obtenido la distribución de irradiancia corresponden a los dos tipos de rectas propuestas anteriormente, a saber, líneas que pasan por el centro de la pupila de salida y rectas paralelas al eje óptico. En particular, se han estudiado tres casos de las primeras que corresponden a trayectorias que cortan el plano imagen a distancias del eje óptico $2h/3$, $h/3$ y 0 . Esta última corresponde, evidentemente, al propio eje óptico. Como ejemplo representativo de rectas paralelas a éste se ha considerado aquella que se aparta $h/30$ del mismo, estudiando un entorno de su intersección con el plano imagen, es decir, consideraremos un valor de $R^{(0)} = -z$. Todas las trayectorias consideradas se eligieron de modo que estuviesen contenidas por el plano definido por el eje óptico y el centro de la obturación del segundo sistema.⁵

Con el fin de restringir nuestro estudio a las condiciones en las que es válida la aproximación paraxial que nos ha servido de punto de partida, escogimos en ambos casos un valor de $z = 15,8$ m y un radio límite de $h = 10$ mm, siendo la longitud de onda utilizada de $\lambda = 638,2$ nm. Con ello, las rectas que pasan por el centro de la pupila de salida presentan inclinaciones respecto del eje óptico de

⁵En el caso del primer sistema esta apreciación es irrelevante, debido a la simetría de revolución del campo imagen generado.

$\sigma = 0,024^\circ$, $0,012^\circ$ y 0° , respectivamente, mientras que la recta paralela al eje óptico corta al plano imagen en un punto que dista 0,33 mm de éste.

Los resultados obtenidos para la irradiancia a lo largo de las líneas indicadas se han obtenido para diferentes valores del parámetro $\delta W_{20}(R; z)$ definido en la ec. (4.98). En función de éste, es sencillo demostrar que la ec. (4.104) puede expresarse como

$$\mathcal{J}_R(r', \theta; z; \lambda) = \frac{(2z\delta W_{20}(R; z) - h^2)^2}{4\lambda^2 z^4} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\bar{F}_R}(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad (4.129)$$

con $u(\xi)$ dado por la ec. (4.105).

La representación de Wigner $W_{\bar{F}_R}(\xi, u)$ se ha calculado en todos los casos a partir de un proceso secuencial de transformadas rápidas de Fourier, siguiendo el conocido algoritmo de Cooley y Tukey (1965). Los valores muestreados de esta función se sitúan sobre una red cuadrada de 4096×4096 puntos en el espacio fase. Para contrastar los resultados obtenidos con nuestro método se repitieron los cálculos para cada uno de los casos estudiados usando el método clásico de Yzuel y Calvo (1983). En todos ellos se ha realizado una partición de la pupila de salida, uniforme en las coordenadas $\mu' = r'_o$ y θ_o , de 1024×1024 elementos.

En la fig. 4.7 se muestran los resultados correspondientes al primer sistema considerado para las rectas que pasan por el centro de la pupila para los casos en los que $W_{40}(z; \lambda) = 0$ y $W_{40}(z; \lambda) = \lambda/2$. En la fig. 4.9 se presenta el resultado correspondiente a la recta paralela al eje óptico, también para estos dos valores de aberración esférica. Los resultados análogos obtenidos para el sistema con obturación descentrada se presentan en las figs. 4.8 y 4.10. Sobre todas las figuras se representan también los valores proporcionados por la técnica convencional citada.

El análisis de estas gráficas muestra que nuestros resultados se ajustan muy bien a los obtenidos según la técnica de Yzuel y Calvo, presentándose desviaciones menores de un 0,03 % para las rectas que pasan por el centro de la pupila. Las mayores diferencias se aprecian en las figs. 4.9 y 4.10, lo que nos indica que la aproximación (4.124) sólo es válida, en los casos estudiados, para puntos muy cercanos al plano imagen.

A modo de conclusión, podemos destacar que la técnica propuesta permite obtener los valores de la irradiancia a lo largo de determinadas trayectorias en el espacio imagen a partir de la representación de Wigner de una adecuada versión unidimensional de la pupila generalizada del sistema. Ha quedado patente que el grado de precisión alcanzado en los ejemplos estudiados es comparable al proporcionado por otras técnicas consolidadas, presentando ventajas en cuanto al tiempo de cómputo necesario especialmente cuando se requiere la obtención secuencial de muchas respuestas del mismo sistema para diferentes estados de corrección de las

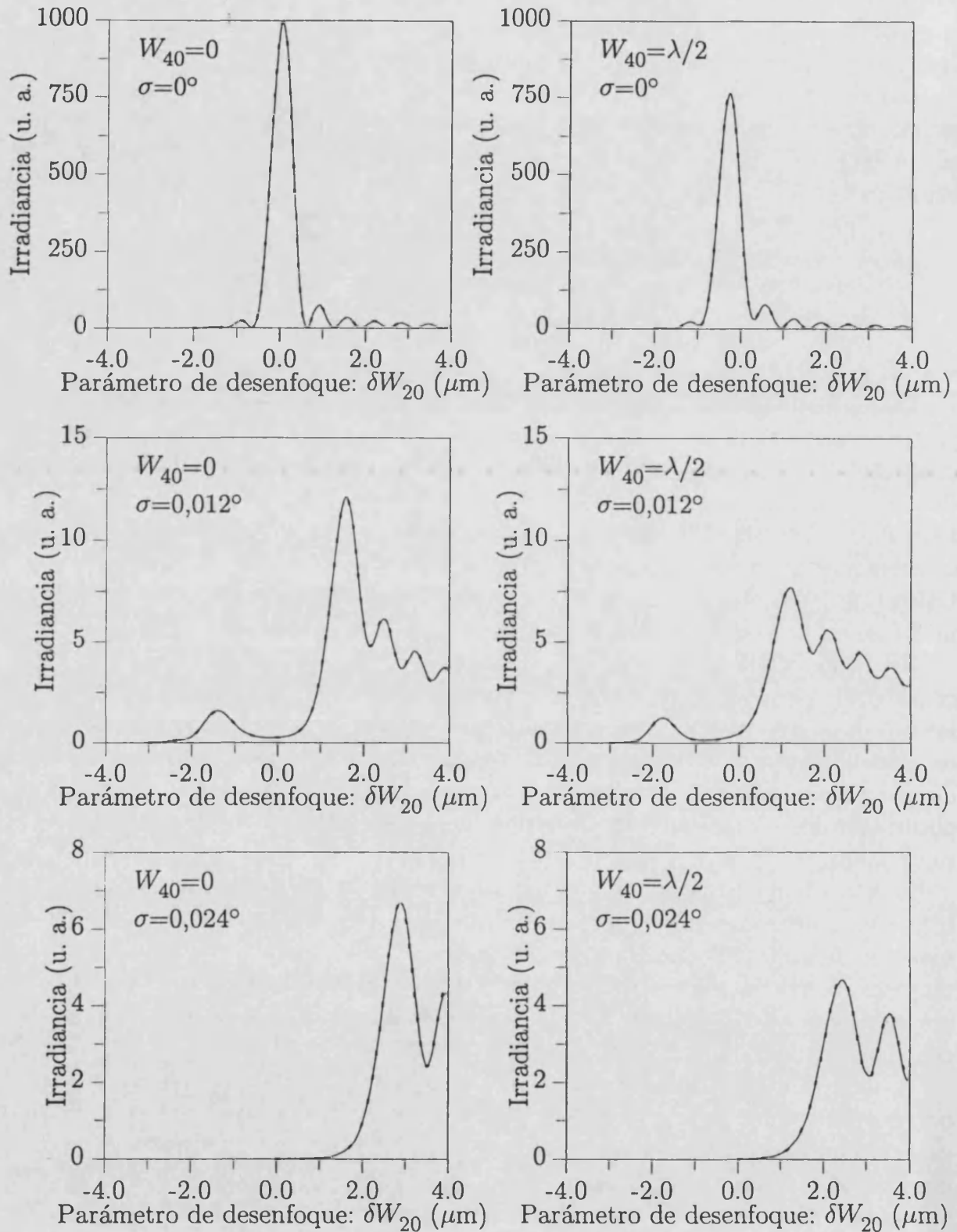


Figura 4.7. Resultados correspondientes al sistema caracterizado por la pupila mostrada en la fig. 4.6a, para rectas que pasan por el punto axial de ésta con las inclinaciones σ indicadas en el texto (trazo continuo). Los resultados proporcionados por el método de Yzuel *et al.* se muestran superpuestos a los anteriores en trazo discontinuo.

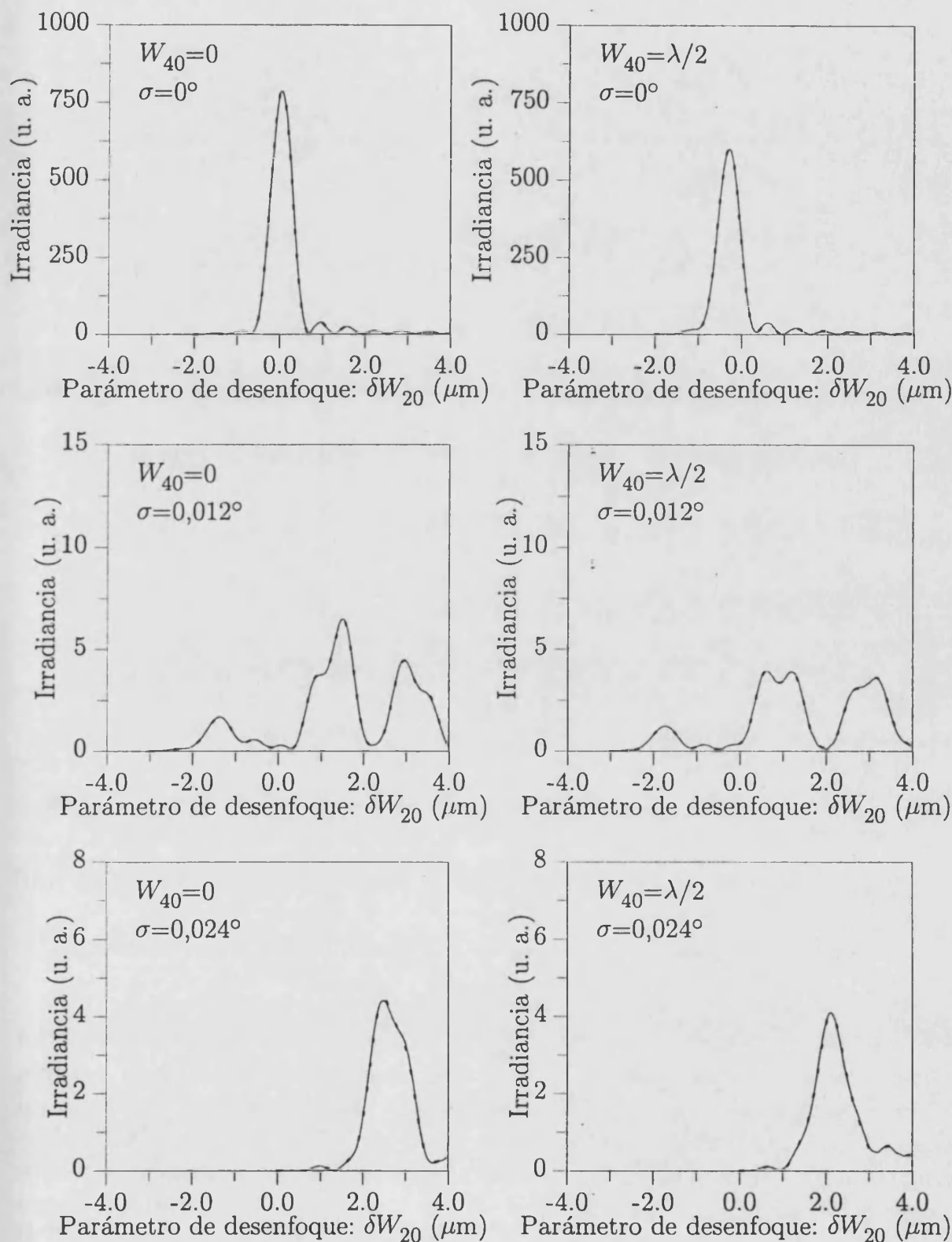


Figura 4.8. Resultados análogos a los presentados en la fig. 4.7, para al sistema caracterizado por la pupila mostrada en la fig. 4.6b.

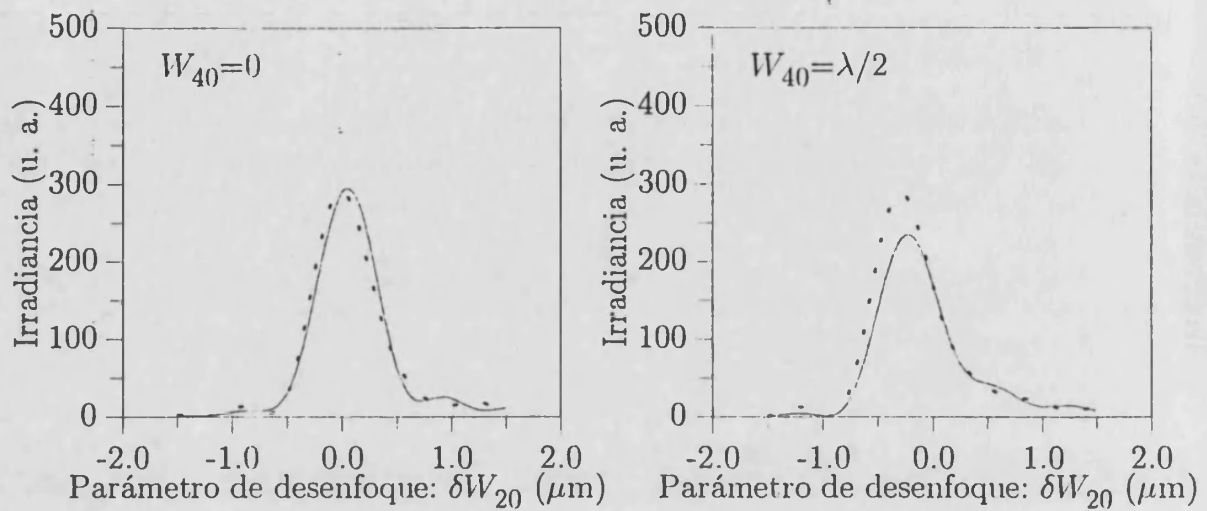


Figura 4.9. Resultados análogos a los presentados en la fig. 4.7, para la recta paralela al eje óptico indicada en el texto.

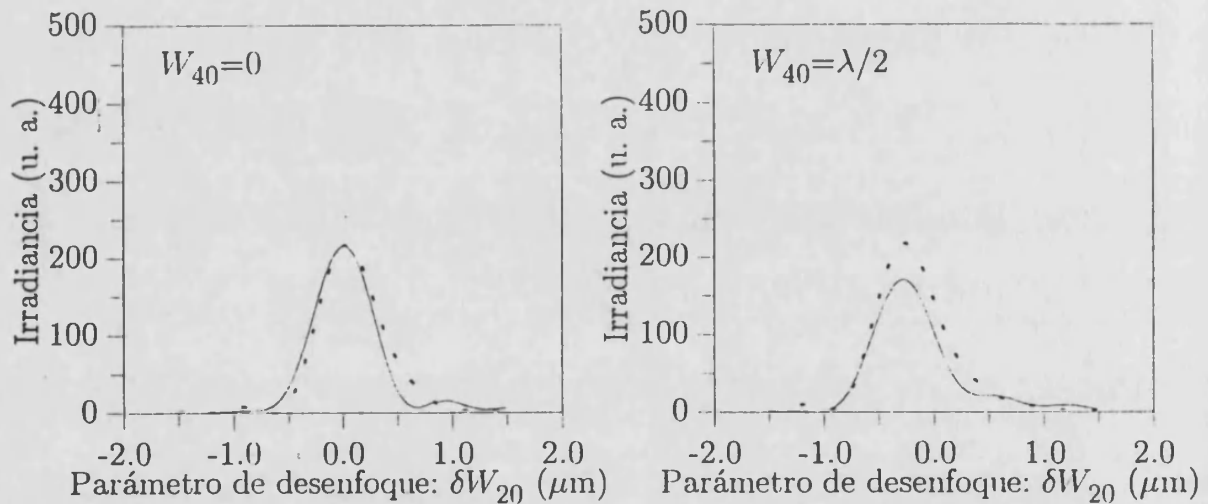


Figura 4.10. Resultados análogos a los presentados en la fig. 4.8, para la recta paralela al eje óptico indicada en el texto.

aberraciones. El caso estudiado en la §5.3, en el que se analiza la respuesta axial policromática de un sistema óptico formador de imágenes, es un buen ejemplo de este tipo de situaciones. Todas estas características hacen que el método aquí propuesto sea más versátil y eficiente que algunas propuestas previas de naturaleza similar (Bourimborde *et al.* 1991) (Zalbidea *et al.* 1995). Por último, destaquemos que el tipo de trayectorias que pueden ser estudiadas con esta técnica no se reduce a las aquí presentadas, ya que aproximaciones análogas a la realizada en la ec. (4.124) pueden establecerse para otras trayectorias como rectas oblicuas, parábolas, etc., que resulten de interés en situaciones concretas (véase, por ejemplo (Andrés *et al.* 1993)).

4.4 La función ambigüedad

La función ambigüedad asociada a una cierta señal es una representación espacio-fase que fue utilizada por primera vez por Woodward (1953) como una distribución que permitía un análisis sencillo de las señales proporcionadas por el radar. Papoulis (1974) la introdujo en Óptica, haciendo uso de la misma para realizar una descripción alternativa de la teoría de la difracción escalar coherente en la aproximación de Fresnel y de la Óptica de Fourier. Posteriormente, Guigay (1978) extendió su uso al caso de campos parcialmente coherentes.

Su definición, desde el punto de vista de la clase de Cohen, para una señal no estocástica $f(\vec{r})$ se define eligiendo como núcleo la función

$$\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) = \delta(\vec{r}_o - \vec{r}) \delta(\vec{w}_o + \vec{w}) , \quad (4.130)$$

lo que conduce, de acuerdo con la ec. (4.1), a una expresión dada por

$$\begin{aligned} A_f(\vec{r}, \vec{w}) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} r_{ff}(\vec{r}_o, \vec{r}) e^{-j2\pi\vec{w}\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f\left(\vec{r}_o + \frac{\vec{r}}{2}\right) f^*\left(\vec{r}_o - \frac{\vec{r}}{2}\right) e^{-j2\pi\vec{w}\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o . \end{aligned} \quad (4.131)$$

Esta definición puede interpretarse, por lo tanto, como una transformada de Fourier de la función producto $r_{ff}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ respecto de la variable \vec{r}_1 . A partir de un razonamiento similar al utilizado para la función de Wigner, es posible definir esta distribución a partir del contenido frecuencial de la señal, de modo que podemos expresar que

$$A_f(\vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F\left(\vec{w}_o + \frac{\vec{w}}{2}\right) F^*\left(\vec{w}_o - \frac{\vec{w}}{2}\right) e^{j2\pi\vec{w}_o\cdot\vec{r}} d^2\vec{w}_o . \quad (4.132)$$

La función ambigüedad es también una representación completa de la señal. Siguiendo un procedimiento totalmente análogo al de §4.2, es directo obtener la correspondiente fórmula de inversión

$$f(\vec{r}) f^*(\vec{r}') = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{r} - \vec{r}', \vec{w}_o) e^{j2\pi\vec{w}_o\cdot(\vec{r}+\vec{r}')/2} d^2\vec{w}_o . \quad (4.133)$$

De nuevo, considerando un valor de \vec{r}' para el que $f(\vec{r}') \neq 0$, podremos reagrupar

la expresión anterior como

$$f(\vec{r}) = \frac{e^{j\phi(\vec{r}')}}{\sqrt{|f(\vec{r}')|^2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{r} - \vec{r}', \vec{w}_o) e^{j2\pi\vec{w}_o \cdot (\vec{r} + \vec{r}')/2} d^2\vec{w}_o, \quad (4.134)$$

donde $\phi(\vec{r}')$ es el argumento del valor complejo de $f(\vec{r}')$. Tomando $\vec{r} = \vec{r}'$, la ecuación anterior se puede reducir a

$$|f(\vec{r}')|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{0}, \vec{w}_o) e^{j2\pi\vec{w}_o \cdot \vec{r}'} d^2\vec{w}_o, \quad (4.135)$$

y, por lo tanto, es evidente concluir que del conocimiento de la función ambigüedad de una cierta función determinista $f(\vec{r})$ es posible, a partir de la ec. (4.134), reconstruir ésta totalmente, a excepción de un factor de fase global. La misma conclusión se aplica a su transformada de Fourier, ya que siguiendo un razonamiento similar a partir de la ec. (4.132) se obtiene

$$F(\vec{w}) = \frac{e^{j\bar{\phi}(\vec{w}')}}{\sqrt{|F(\vec{w}')|^2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{r}_o, \vec{w} - \vec{w}') e^{-j2\pi\vec{r}_o \cdot (\vec{w} + \vec{w}')/2} d^2\vec{r}_o, \quad (4.136)$$

donde $\bar{\phi}(\vec{w}')$ es el argumento de $F(\vec{w}') \neq 0$, y donde se cumple

$$|F(\vec{w}')|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{r}_o, \vec{0}) e^{-j2\pi\vec{r}_o \cdot \vec{w}'} d^2\vec{r}_o. \quad (4.137)$$

Estas expresiones constituyen además, tal y como se indicó en §4.2, condiciones necesarias y suficientes para poder considerar una función cualquiera en el espacio-fase como la función ambigüedad de una cierta señal.

La definición (4.131) puede ser entendida, desde otro punto de vista, como una autocorrelación generalizada de la señal $f(\vec{r})$.⁶ De hecho, dicha ecuación puede reescribirse como

$$A_f(\vec{r}, \vec{w}) = \left[f(\vec{r}) * f(\vec{r}) e^{j\pi\vec{w} \cdot \vec{r}} \right] e^{-j\pi\vec{w} \cdot \vec{r}}. \quad (4.138)$$

De las conocidas propiedades de la operación de correlación, tendremos que

$$|A_f(\vec{r}, \vec{w})| \leq A_f(\vec{0}, \vec{0}),$$

⁶De igual modo, la función de distribución de Wigner puede considerarse como una autoconvolución generalizada.

es decir, podemos concluir que el módulo de la función ambigüedad es siempre máximo en el origen.

Al igual que ocurre con la representación de Wigner, es posible encontrar una expresión que permite obtener cualquier elemento de la clase de Cohen a partir de la función ambigüedad. Esta relación se establece a partir de la ecuación

$$C_f(\vec{r}, \vec{w}; \Psi) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) \Psi(\vec{r}_o, -\vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) e^{-j2\pi(\vec{w}\cdot\vec{r}_o - \vec{r}\cdot\vec{w}_o)} d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o, \quad (4.139)$$

que presenta la contrapartida en el espacio dual del espacio-fase (en el sentido de la transformación de Fourier tetradimensional en éste) de la relación (4.33) para la distribución de Wigner. De hecho, particularizando el resultado general anterior para esta última, se obtiene que

$$W_f(\vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) e^{-j2\pi(\vec{w}\cdot\vec{r}_o - \vec{r}\cdot\vec{w}_o)} d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o, \quad (4.140)$$

relación que puede invertirse, conduciendo a

$$A_f(\vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) e^{-j2\pi(\vec{w}\cdot\vec{r}_o - \vec{r}\cdot\vec{w}_o)} d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o. \quad (4.141)$$

El segundo miembro de las ecuaciones anteriores puede interpretarse como una transformación de Fourier bidimensional en la variable \vec{r}_o junto con una transformada inversa en \vec{w}_o . Estas relaciones, que se resumen esquemáticamente en la fig. 4.11, permiten trasladar las propiedades de una representación a la otra de un modo muy simple. Por ejemplo, es directo obtener que para los ejemplos indicados en §4.2, la función ambigüedad vendrá dada por

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{a}) &\rightarrow A_f(\vec{r}, \vec{w}) = e^{-j2\pi\vec{a}\cdot\vec{w}} \delta(\vec{r}), \\ f(\vec{r}) = e^{-j2\pi\vec{r}\cdot\vec{b}} &\rightarrow A_f(\vec{r}, \vec{w}) = e^{j2\pi\vec{b}\cdot\vec{r}} \delta(\vec{w}), \\ f(\vec{r}) = e^{j2\pi\gamma|\vec{r}|^2} &\rightarrow A_f(\vec{r}, \vec{w}) = \delta(\vec{w} - 2\gamma\vec{r}), \\ f(\vec{r}) = \frac{e^{-j\pi\vec{a}\cdot\vec{b}}}{\sigma_r} e^{-\pi\frac{|\vec{r}-\vec{a}|^2}{\sigma_r^2}} e^{-j2\pi\vec{r}\cdot\vec{b}} &\rightarrow A_f(\vec{r}, \vec{w}) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(\vec{r}\cdot\vec{b} - \vec{w}\cdot\vec{a})} e^{-\frac{\pi}{2\sigma_r^2}|\vec{r}|^2} e^{-\frac{\pi\sigma_r^2}{2}|\vec{w}|}. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Es también directo concluir que, en general, la función ambigüedad no es una función real, aunque es hermítica, es decir

$$A_f(-\vec{r}, -\vec{w}) = A_f^*(\vec{r}, \vec{w}), \quad (4.143)$$

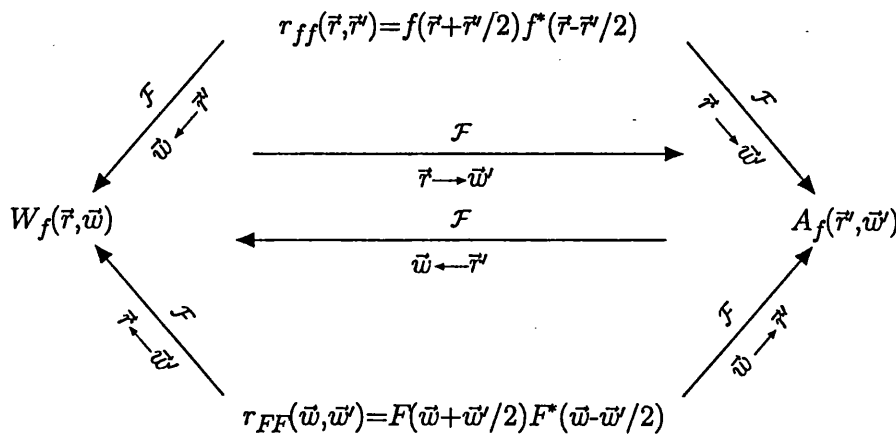


Figura 4.11. Diagrama donde se muestran las relaciones existentes entre las funciones producto en el dominio espacial y frecuencial y las funciones ambigüedad y de Wigner. Los recorridos en el sentido indicado por las flechas implican una transformación de Fourier bidimensional en la variable indicada mientras que en sentido contrario corresponden a transformaciones inversas.

como se deduce del hecho de que puede expresarse como transformada de Fourier tretadimensional de la distribución de Wigner, que es una función real.

Todas estas propiedades no permiten una interpretación equivalente a la realizada en §4.2 para la representación de Wigner. Sin embargo, el razonamiento seguido entonces y la relación que la liga con esta última permiten considerar la distribución espacio-fase que estamos estudiando como la función característica asociada a la “densidad” espectral local definida en aquella sección. Esta descripción alternativa es igualmente completa en lo que se refiere a los momentos de la señal estudiada y es preferible en algunos casos, a la que proporciona la propia función densidad (Cohen 1989). En particular, la energía total de la señal, que corresponde al momento de orden cero de la potencia de la misma, puede obtenerse de la expresión

$$\begin{aligned}
 \iint |f(\vec{r}_o)|^2 d^2\vec{r}_o &= \iint |F(\vec{w}_o)|^2 d^2\vec{w}_o = \\
 &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} A_f(\vec{0}, \vec{w}_o) e^{j2\pi\vec{w}_o \cdot \vec{r}_o} d^2\vec{w}_o d^2\vec{r}_o = \\
 &= A_f(\vec{0}, \vec{0}) .
 \end{aligned} \tag{4.144}$$

Por lo que se refiere a la energía contenida en la función ambigüedad, puede obte-

nerse que

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |A_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o)|^2 d^2\vec{w}_o d^2\vec{r}_o = |A_f(\vec{0}, \vec{0})|^2, \quad (4.145)$$

expresión conocida como teorema de Woodward (Szu y Blodgett 1981), y donde el último miembro, de acuerdo con la ec. (4.144), corresponde al cuadrado de la energía total de la señal. Esta expresión no es más que un caso particular de una propiedad mucho más general que establece que

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |A_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o)|^2 e^{j2\pi(\vec{w}\cdot\vec{r}_o - \vec{w}_o\cdot\vec{r})} d^2\vec{w}_o d^2\vec{r}_o = |A_f(\vec{r}, \vec{w})|^2, \quad (4.146)$$

es decir, que la función $|A_f(\vec{r}, \vec{w})|^2$ es, básicamente, su propia transformada de Fourier tetradimensional. Esta relación se conoce con el nombre de propiedad autorecíproca.

Por lo que se refiere al soporte en los dominios espacial y frecuencial de la función ambigüedad, de las definiciones (4.131) y (4.132) es sencillo obtener que vienen dadas por regiones del doble de extensión de las de los correspondientes soportes de la señal. Además, estos soportes son siempre regiones con simetría respecto del origen de coordenadas en el espacio-fase, como se deduce de la propiedad (4.143). De hecho, es sencillo obtener que un desplazamiento de la señal en cualquiera de los dominios espacial o frecuencial no produce un desplazamiento de la función ambigüedad, sino una modulación de ésta de acuerdo con las expresiones

$$g(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{a}) \rightarrow A_g(\vec{r}, \vec{w}) = e^{-j2\pi\vec{a}\cdot\vec{w}} A_f(\vec{r}, \vec{w}), \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.147)$$

$$G(\vec{w}) = F(\vec{w} - \vec{b}) \rightarrow A_g(\vec{r}, \vec{w}) = e^{j2\pi\vec{b}\cdot\vec{r}} A_f(\vec{r}, \vec{w}), \quad \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.148)$$

Por último, vamos a detenernos en el estudio de las transformaciones que se generan sobre la función ambigüedad de una cierta señal, cuando ésta es modificada por un sistema lineal. Siguiendo un razonamiento equivalente al realizado en §4.2, obtenemos que entre estas representaciones a la entrada, $A_E(\vec{r}, \vec{w})$, y a la salida, $A_S(\vec{r}, \vec{w})$, del sistema se cumple la relación.

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} L(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_2, \vec{w}_o) A_E(\vec{r}_2, \vec{w}_o) d^2\vec{r}_2 d^2\vec{w}_o, \quad (4.149)$$

siendo

$$L(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_2, \vec{w}_o) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h\left(\vec{r}_o + \frac{\vec{r}}{2}, \vec{r}_1 + \frac{\vec{r}_2}{2}\right) h^*\left(\vec{r}_o - \frac{\vec{r}}{2}, \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2}{2}\right) \times \\ \times e^{-j2\pi(\vec{w}\vec{r}_o - \vec{w}_o\vec{r}_1)} d^2\vec{r}_o d^2\vec{r}_1. \quad (4.150)$$

representa una doble función ambigüedad de la respuesta impulsional $h(\vec{r}, \vec{r}')$.

Resultan de interés ciertos casos particulares. En primer lugar, estudiaremos un sistema transformador de Fourier, cuya respuesta impulsional se indica en la ec. (4.49). A partir de la expresión (4.150), se obtiene para este caso que

$$L(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_2, \vec{w}_o) = \delta(\vec{r}_2 + \vec{w}) \delta(\vec{w}_o - \vec{r}), \quad (4.151)$$

de modo que se obtiene

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = A_E(-\vec{w}, \vec{r}). \quad (4.152)$$

Si se considera un sistema que replica, con una cierta escala M, la función de entrada, de acuerdo con la ec. (4.52) obtendremos

$$L(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_2, \vec{w}_o) = M^2 \delta\left(\vec{r}_2 - \frac{1}{M}\vec{r}\right) \delta(\vec{w}_o - M\vec{w}), \quad (4.153)$$

y, por tanto en este caso

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = M^2 A_E\left(\frac{1}{M}\vec{r}, M\vec{w}\right). \quad (4.154)$$

En el caso de sistemas cuya actuación sobre la señal de entrada puede caracterizarse por una función moduladora $m(\vec{r})$ como la indicada en la ec. (4.55), es sencillo obtener que

$$L(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_2, \vec{w}_o) = A_m(\vec{r}_2, \vec{w} - \vec{w}_o) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}), \quad (4.155)$$

expresión que conduce a una relación entre la función ambigüedad de las señales a la entrada y a la salida del sistema dada por

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_E(\vec{r}, \vec{w}_o) A_m(\vec{r}, \vec{w} - \vec{w}_o) d^2\vec{w}_o. \quad (4.156)$$

De modo análogo a lo que ocurre con la función de distribución de Wigner, en el caso particular de considerar una lente esférica delgada de longitud focal f , la expresión anterior se reduce a

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = A_E\left(\vec{r}, \vec{w} + \frac{1}{\lambda f}\vec{r}\right). \quad (4.157)$$

Por lo que respecta a los sistemas invariantes a desplazamientos, se obtiene en este caso un resultado similar al dado en la ec. (4.65), cuya expresión explícita viene dada por

$$L(\vec{r}, \vec{w}, \vec{r}_2, \vec{w}_o) = A_{h_o}(\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{w}) \delta(\vec{w}_o - \vec{w}), \quad (4.158)$$

siendo $h_o(\vec{r})$ la respuesta impulsional definida en la ec. (4.61). Este último resultado conduce directamente a una conexión entrada-salida cuya formulación se concreta en la ecuación

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_E(\vec{r}_2, \vec{w}) A_{h_o}(\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{w}) d^2\vec{r}_2 . \quad (4.159)$$

En concreto, en el caso de la propagación de Fresnel, a una cierta distancia R , cuya respuesta impulsional se indica en la ec. (4.68), la relación anterior se reduce a

$$A_S(\vec{r}, \vec{w}) = |A|^2 A_E(\vec{r} - \lambda R \vec{w}, \vec{w}) . \quad (4.160)$$

Este resultado puede también obtenerse a través de un razonamiento mucho más general que consiste en resolver la ecuación diferencial que cumple la función ambigüedad de una señal cuando ésta se transforma a través de la ecuación de Helmholtz paraxial, que es el equivalente diferencial de la ecuación de Fresnel-Kirchhoff indicada en la ec. (2.1) (Papoulis 1974). Este estudio permite obtener relaciones del tipo de las aquí presentadas para sistemas mucho más generales. Razonamientos similares han permitido generalizar la descripción de estas transformaciones el caso de que las señales estudiadas sean funciones aleatorias, como ocurre con los campos electromagnéticos parcialmente coherentes, a través de una definición de la función ambigüedad a partir de la función de intensidad mútua (Guigay 1978) (Brenner y Ojeda-Castañeda 1984). Para estas señales, esta función sustituye al producto $r_{ff}(\vec{r}, \vec{r}')$ en el diagrama de relaciones presentado en la fig. 4.11 (Navarro y Pérez-Rendón 1990)

Los resultados obtenidos en los últimos párrafos son totalmente análogos a los obtenidos para la distribución de Wigner en §4.2, lo que refuerza la idea de que ambas permiten descripciones totalmente equivalentes de las transformaciones a que puede someterse una señal. La extensión al caso de cualquier sistema óptico de primer orden es también directa siguiendo el mismo razonamiento usado en dicha sección.

4.5 El espectrograma local

Las ideas planteadas en §4.2 sugieren la interpretación de la representación de Wigner de una señal como una función densidad de potencia espectral local de ésta. A partir de una función densidad como ésta es posible definir una potencia espectral local realizando una integración en una región reducida del espacio-fase en los alrededores del punto (\vec{r}, \vec{w}) que se pretende estudiar, de modo análogo a como se actúa con las densidades de probabilidad asociadas a variables estocásticas continuas.

En este caso el espacio de integración es un espacio híbrido que combina variables que son conjugadas en el sentido de la transformada de Fourier. Por ello, si queremos mantener la idea de potencia local deberán utilizarse regiones de integración cuyas extensiones en ambos dominios duales cumplan las correspondientes relaciones de incertidumbre (de Bruijn 1965). Un modo de garantizar esta condición es considerar en la integración anterior una función de peso que corresponda a la representación de Wigner de una cierta función $v(\vec{r})$. En este caso, por lo tanto, definiremos la potencia espectral local o el espectrograma local de una señal $f(\vec{r})$ como

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) \triangleq \iiint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) W_v(\vec{r}_o - \vec{r}, \vec{w}_o - \vec{w}) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o. \quad (4.161)$$

Si se define una función auxiliar tal que

$$g_{\vec{r}}(\vec{r}_o) = v^*(\vec{r}_o - \vec{r}), \quad (4.162)$$

a partir de las propiedades (4.37) y (4.27), la expresión anterior podrá reescribirse como

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} W_f(\vec{r}_o, \vec{w}_o) W_{g_{\vec{r}}}(\vec{r}_o, \vec{w} - \vec{w}_o) d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o. \quad (4.163)$$

De acuerdo con la propiedad (4.38), la integración en la variable \vec{w}_o permite expresar la ecuación anterior como

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{(f \cdot g_{\vec{r}})}(\vec{r}_o, \vec{w}) d^2\vec{r}_o. \quad (4.164)$$

La integral de la ecuación anterior indica una proyección de la representación de Wigner sobre el dominio frecuencial, operación que, a partir de la ec. (4.13), conduce a

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = |F\{f(\vec{r}_o)g_{\vec{r}}(\vec{r}_o); \vec{w}\}|^2. \quad (4.165)$$

Sustituyendo $g_{\vec{r}}(\vec{r}_o)$ de acuerdo con la ec. (4.162), finalmente obtenemos

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}_o) v^*(\vec{r}_o - \vec{r}) e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o \right|^2. \quad (4.166)$$

La expresión anterior puede interpretarse como la potencia espectral de la función $f(\vec{r}_o)$ cuando ésta se muestrea con una función ventana $v^*(\vec{r}_o)$ centrada sucesivamente en puntos $\vec{r}_o = \vec{r}$. Esta función ventana controla el peso relativo con el que

contribuyen cada una de la partes de la señal a estas muestras. Si se elige una ventana que valore preferentemente los puntos próximos al punto central del intervalo muestreado en cada ocasión (es decir, el punto $\vec{r}_o = \vec{r}$), este espectrograma proporciona la información espectral local que se requiere. A pesar de que hemos introducido la definición del espectrograma a partir de la distribución de Wigner de la señal $f(\vec{r}_o)$ considerada, es posible obtener el mismo resultado indicado en la ec. (4.166) siguiendo un razonamiento análogo a partir de otras representaciones espacio-fase de la señal considerada (Cohen 1989).

Al igual que las otras distribuciones estudiadas, también es posible encontrar una definición del espectrograma local en el dominio frecuencial. Basta para ello considerar que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}_o) v^*(\vec{r}_o - \vec{r}) e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o = e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{w}_o) V^*(\vec{w}_o - \vec{w}) e^{j2\pi\vec{w}_o\vec{r}} d^2\vec{w}_o, \quad (4.167)$$

para obtener de modo directo que

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{w}_o) V^*(\vec{w}_o - \vec{w}) e^{j2\pi\vec{w}_o\vec{r}} d^2\vec{w}_o \right|^2, \quad (4.168)$$

expresión que admite una interpretación similar a la realizada en el dominio espacial, pero donde el muestreo frecuencial se realiza a través de la transformada de Fourier de la ventana que actuaba en este caso.

Estas interpretaciones tan directas del espectrograma de una señal han permitido desarrollar, desde su introducción por Mark (1970) en el análisis de vibraciones, una amplia variedad de aplicaciones de éste al estudio de señales no estacionarias, deterministas y estocásticas, de diferente naturaleza. Entre otros, se ha aplicado al análisis de ondas sísmicas (Dziewonski *et al.* 1969) (Kodera *et al.* 1976), en la descripción de señales acústicas (Mark 1970) (Altes 1980) (Bartelt *et al.* 1980), en el procesado digital de información (Oppenheim y Schaffer 1975) (Rabiner y Gold 1975), en la clasificación de texturas (Bajcsy y Liebermann 1976) (Grosz *et al.* 1987) y en la detección de deformaciones locales (Furlan *et al.* 1995) por medios ópticos, etc.

De la definición (4.166) se sigue que cuanto más compacta se elija la ventana en el dominio espacial, mejor resolución espacial se obtendrá, es decir, el valor del espectrograma en un punto $\vec{r}_o = \vec{r}$ tendrá en cuenta las variaciones de la función en un entorno muy reducido de éste. De modo análogo, si la ventana es muy estrecha en el dominio frecuencial, se obtiene una elevada resolución frecuencial. Debido a las relaciones de incertidumbre que se establecen en el proceso de transformación de Fourier, la función ventana no puede hacerse arbitrariamente estrecha en ambos

dominios de modo que deben adoptarse soluciones de compromiso para la elección de las ventanas de muestreo que tengan en cuenta esta ligadura.

Desde el punto de vista de la distribución generalizada de Cohen, esta representación espacio-fase de la señal $f(\vec{r})$ puede obtenerse eligiendo una función núcleo dada por

$$\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} v^*\left(\vec{r}' + \frac{\vec{r}_o}{2}\right) v^*\left(\vec{r}' - \frac{\vec{r}_o}{2}\right) e^{-j2\pi\vec{w}_o\vec{r}'} d^2\vec{r}', \quad (4.169)$$

expresión que corresponde a la función ambigüedad de la función $v^*(\vec{r})$. Este hecho justifica que muchas de las propiedades de esta representación espacio-fase dependan explícitamente de la forma funcional de la ventana elegida. De hecho, las distribuciones marginales asociadas a esta distribución tanto en el dominio espacial como en el frecuencial contienen información tanto de la señal como de la ventana considerada. En efecto, es sencillo obtener que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} L_{f,v}(\vec{r}', \vec{w}_o) d^2\vec{w}_o = \iint_{-\infty}^{+\infty} |f(\vec{r}_o)|^2 |v(\vec{r}_o - \vec{r})|^2 d^2\vec{r}_o, \quad (4.170a)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} L_{f,v}(\vec{r}_o, \vec{w}') d^2\vec{r}_o = \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(\vec{w}_o)|^2 |V(\vec{w}_o - \vec{w})|^2 d^2\vec{w}_o, \quad (4.171a)$$

Esta mezcla de la información contenida en dicha representación se transfiere también a todos los momentos de las diferentes variables en el espacio-fase (Cohen 1989). Un ejemplo lo constituye la energía total del espectrograma complejo, que, como se puede deducir de las expresiones anteriores, viene dada por

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} L_{f,v}(\vec{r}', \vec{w}_o) d^2\vec{w}_o = \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} |f(\vec{r}_o)|^2 d^2\vec{r}_o \right) \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} |v(\vec{r}_o)|^2 d^2\vec{r}_o \right). \quad (4.172a)$$

Adicionalmente, esta distribución no es, a diferencia de las anteriores, una representación completa de la señal para una función ventana arbitraria, es decir, del conocimiento del espectrograma de una función no es posible, en general, recuperar toda la información de amplitud y fase de ésta.

Por esta razón, en ocasiones resulta más interesante utilizar la representación denominada espectrograma complejo,⁷ definida como

$$E_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) \triangleq \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}_o) v^*(\vec{r}_o - \vec{r}) e^{-j2\pi\vec{w}\cdot\vec{r}_o} d^2\vec{r}_o. \quad (4.173)$$

⁷En el contexto de las funciones de variación temporal, se suele denominar transformada de Fourier de breve duración (*short-time Fourier transform*, en los textos en inglés).

de modo que

$$L_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = |E_{f,v}(\vec{r}, \vec{w})|^2 . \quad (4.174)$$

Es sencillo obtener que ésta sí es una representación espacio-fase completa de la señal $f(\vec{r})$. En efecto, tras una transformada de Fourier inversa en la variable \vec{w} en ambos miembros de la definición (4.173), obtenemos

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} E_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) e^{j2\pi\vec{w}\cdot\vec{r}'} d^2\vec{w} = f(\vec{r}') v^*(\vec{r}' - \vec{r}) . \quad (4.175)$$

Multiplicando a ambos lados por $v(\vec{r}' - \vec{r})$ e integrando respecto de \vec{r} , finalmente obtenemos

$$f(\vec{r}') = \frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} E_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) v(\vec{r}' - \vec{r}) e^{j2\pi\vec{w}\cdot\vec{r}'} d^2\vec{r} d^2\vec{w}}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |v(\vec{r})|^2 d^2\vec{r}} , \quad (4.176)$$

Al igual que las restantes representaciones espacio-fase, puede definirse igualmente en el dominio frecuencial, en función de las transformadas de Fourier de la señal y de la ventana. A partir de la ec. (4.167), podemos reescribir la definición (4.173) como

$$E_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{w}_o) V^*(\vec{w}_o - \vec{w}) e^{j2\pi\vec{w}_o\vec{r}} d^2\vec{w}_o . \quad (4.177)$$

El núcleo de la transformación general de Cohen que genera esta representación de la señal viene dada por

$$\Psi(\vec{r}_o, \vec{w}_o; \vec{r}, \vec{w}) = \frac{f(\vec{r}_o) V^*(-\vec{w}_o)}{A_f(\vec{r}_o, -\vec{w}_o)} e^{j2\pi\vec{w}_o\vec{r}_o} , \quad (4.178)$$

expresión que justifica, tal y como ocurría con el espectrograma local, la fuerte dependencia que presenta el espectrograma complejo con la forma funcional de la ventana. De hecho, de la definición (4.173) se deduce de modo directo la relación

$$E_{v,f}(\vec{r}, \vec{w}) = E_{f,v}^*(-\vec{r}, -\vec{w}) . \quad (4.179)$$

Ello permite afirmar que a la información contenida en esta representación contribuyen por igual ambas funciones.

En consecuencia, al igual que ocurría con el espectrograma local, no existe un único espectrograma complejo de la función sino diferentes representaciones

posibles de ésta, con propiedades que dependen de la forma de la ventana de muestreo. Aunque formalmente este hecho suponga ciertos inconvenientes, desde el punto de vista de su uso práctico, sin embargo, esta versatilidad añade un nuevo grado de libertad que permite establecer el tipo de ventana más adecuado para la estimación óptima de las propiedades de la señal que resulten de interés en cada situación particular. Un ejemplo de esta flexibilidad, de la que carecen las restantes representaciones, se explota en la sección siguiente.

Resulta interesante, por último, considerar la relación existente entre esta distribución y la representación de Wigner y la función ambigüedad de la señal considerada. En primer lugar, vamos a mostrar que una elección adecuada de la función ventana reduce el espectrograma complejo a una u otra de estas representaciones. Para ello resulta conveniente expresar la ec. (4.173) de un modo más simétrico. Si en dicha expresión se considera el cambio de variables

$$\vec{r}' = \vec{r}_o - \frac{\vec{r}}{2}, \quad (4.180)$$

se obtiene que

$$E_{f,v}(\vec{r}, \vec{w}) = e^{-j\pi\vec{w}\vec{r}} \iint_{-\infty}^{+\infty} r_{fv}(\vec{r}, \vec{r}') e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}'} d^2\vec{r}', \quad (4.181)$$

siendo

$$r_{fv}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f\left(\vec{r}_1 + \frac{\vec{r}_2}{2}\right) v^*\left(\vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2}{2}\right), \quad (4.182)$$

una generalización de la función producto $r_{ff}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ definida en la ec. (4.2). Es directo, comparando esta ecuación con la definición de la función ambigüedad (4.131), darse cuenta de que si se elige como ventana la propia función $f(\vec{r})$ resulta

$$E_{ff}(\vec{r}, \vec{w}) = A_f(\vec{r}, \vec{w}) e^{-j\pi\vec{w}\vec{r}}. \quad (4.183)$$

Por otro lado, si se toma $v(\vec{r}) = f(-\vec{r}) \triangleq f^-(\vec{r})$, se obtiene que

$$E_{f,f^-}(\vec{r}, \vec{w}) = e^{-j\pi\vec{w}\vec{r}} \iint_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\vec{r}}{2} + \vec{r}'\right) f^*\left(\frac{\vec{r}}{2} - \vec{r}'\right) e^{-j2\pi\vec{w}\vec{r}'} d^2\vec{r}', \quad (4.184)$$

expresión que tras el cambio de variable $\vec{r}_1 = 2\vec{r}'$ puede reescribirse como

$$E_{f,f^-}(\vec{r}, \vec{w}) = \frac{e^{-j\pi\vec{w}\vec{r}}}{2} W_f\left(\frac{\vec{r}}{2}, \frac{\vec{w}}{2}\right). \quad (4.185)$$

En el caso general de una función ventana independiente de la señal considerada, a partir de las ecs. (4.33) y (4.178), es posible obtener la relación existente

entre la función ambigüedad y la distribución de Wigner, y el espectrograma complejo, que puede expresarse como

$$E_{f,f-}(\vec{r}, \vec{w}) = e^{-j\pi\vec{w}\vec{r}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_f(\vec{r}', \vec{w}')}{A_f(\vec{r}_o, -\vec{w}_o)} f(\vec{r}_o) V^*(-\vec{w}_o) \times \\ \times e^{-j2\pi[(\vec{w}-\vec{w}')\vec{r}_o + (\vec{r}-\vec{r}')\vec{w}_o - \vec{r}_o\vec{w}_o]} d^2\vec{r}' d^2\vec{w}' d^2\vec{r}_o d^2\vec{w}_o \quad (4.186)$$

Para concluir, destaquemos que la obtención por medios ópticos del espectrograma complejo (o de su módulo cuadrado, el espectrograma local) se ha llevado a cabo por dispositivos que suelen ser variantes de los diseñados para obtener la distribución de Wigner o la función ambigüedad de la señal estudiada, haciendo uso de la similitud formal de la ec. (4.181) y las ecs. (4.3) y (4.131). Algunas de estas propuestas se recogen en el Apéndice.

4.6 Aplicación del espectrograma local al estudio de las deformaciones locales mediante el análisis de patrones de moteado

En esta sección vamos a presentar una nueva aplicación de los formalismos espacio-fase al procesado coherente de información por medios ópticos. En concreto, presentamos una técnica híbrida óptica-digital de análisis de deformaciones en objetos difusores a través del espectrograma local obtenido de un diagrama interferencial de moteado, cuyos detalles se analizan a continuación.

Es conocido que la alta coherencia que puede obtenerse en la emisión láser ha permitido desarrollar una gran variedad de técnicas interferenciales con múltiples aplicaciones en metrología. En particular, ha sido posible observar y analizar fenómenos interferenciales incluso en la radiación difundida por superficies rugosas, lo que ha conducido al desarrollo de técnicas de alta precisión no invasivas en la medida de deformaciones, desplazamientos y vibraciones. Entre éstas, una de las más utilizadas en la práctica, por su sencillez y menor exigencia de estabilidad mecánica que otros métodos interferenciales, es la fotografía de moteado (Yamaguchi 1985), que está basada en el estudio de los patrones de difracción de aspecto granular que se generan cuando se ilumina una superficie difusora con radiación altamente coherente. La estructura de estas distribuciones puede considerarse como el resultado de la interferencia producida entre las diferentes partes del frente de onda que es dispersado por la estructura rugosa de la superficie que se irradia. Las motas así formadas se encuentran, por lo tanto, asociadas a la estructura microscópica de dicha superficie y se desplazan con ella de modo solidario

cuando se producen deformaciones macroscópicas en la misma. Este comportamiento las convierte en auténticos marcadores ópticos situados sobre el objeto. Los desplazamientos o deformaciones locales generados en la superficie estudiada pueden analizarse, por lo tanto, comparando la estructura de los patrones de moteado obtenidos antes y después de someter la muestra a los agentes deformantes. Dicho análisis suele realizarse a través del procesado de una transparencia generada a partir de una emulsión fotográfica que ha sido expuesta, de modo sucesivo, con la distribución de irradiancia de ambos patrones. El objeto así generado se conoce con el nombre de moteograma.

Un medio clásico para recuperar la información sobre el desplazamiento o deformación del espécimen estudiado consiste en la transformación de Fourier del moteograma, siguiendo un razonamiento similar al que se presenta a continuación de modo simplificado. La transmitancia en amplitud de éste vendrá dada, supuestas las condiciones de linealidad en el registro y procesado de la emulsión fotográfica, por

$$t_m(\vec{r}_o) = I_m(\vec{r}_o) + I'_m(\vec{r}_o) , \quad (4.187)$$

donde I_m e I'_m son los patrones de moteado en irradiancia obtenidos antes y después de la deformación, y donde hemos obviado un término aditivo irrelevante para el razonamiento que sigue. Si se ilumina este objeto doblemente expuesto con una onda plana monocromática y se observa el campo difractado tras atravesar una lente convergente en el plano focal imagen de la misma, la distribución de irradiancia obtenida será una cierta versión de la función

$$F_m(\vec{w}) = |\mathcal{F}\{t_m(\vec{r}_o), \vec{w}\}|^2 = |\tilde{I}_m(\vec{w})|^2 + |\tilde{I}'_m(\vec{w})|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \tilde{I}_m^*(\vec{w}) \tilde{I}'_m(\vec{w}) \right\} . \quad (4.188)$$

Si consideramos, por simplicidad, que se ha producido un desplazamiento rígido del espécimen, de magnitud \vec{a} , entre las dos exposiciones del moteograma, podremos expresar que $I'_m(\vec{r}) = I_m(\vec{r} - \vec{a})$, y haciendo uso de la propiedad de la transformación de Fourier

$$\mathcal{F} \left\{ g \left(\frac{1}{\chi} (\vec{r} - \vec{a}) \right), \vec{w} \right\} = |\chi|^2 e^{j2\pi\vec{w}\vec{a}} \tilde{g}(\chi\vec{w}) , \quad (4.189)$$

podremos expresar

$$F_m(\vec{w}) = 2 \left| \tilde{I}_m(\vec{w}) \right|^2 [1 + \cos(2\pi\vec{w} \cdot \vec{a})] . \quad (4.190)$$

El término que contiene la información de interés corresponde al segundo de los factores anteriores que presenta la estructura de un patrón interferencial cosenoidal unidimensional, de modo que la orientación de las franjas corresponde a la

dirección perpendicular al desplazamiento y el periodo de las mismas es inversamente proporcional a la magnitud del mismo. El otro factor genera, como puede establecerse a través de las propiedades estadísticas de los patrones de moteado, una variación suave que modula al anterior en la mayoría de los casos de interés práctico (Burch y Tokarski 1968), constituyendo lo que se denomina el halo.

Aunque en el razonamiento aquí seguido hemos considerado una transformación global del moteograma, es evidente que un tratamiento similar puede seguirse considerando pequeñas regiones del mismo de modo sucesivo a través de un procesado local secuencial, permitiendo un análisis más realista de situaciones más generales en las que se provocan deformaciones no uniformes (Archbold *et al.* 1970). Ambas opciones presentan algunas desventajas. A través de la primera, los desplazamientos locales quedan ocultos por el carácter global de la transformación, obteniéndose únicamente información sobre el promedio de la deformación sobre todo el objeto. Por otro lado, el procesado local requiere mucho tiempo y dificulta el procesado en tiempo real de las muestras. En ambos casos, la determinación de los máximos o los mínimos de las franjas generadas se hallan afectados por un error, a veces considerable, por la variación de irradiancia debida al halo (Kaufmann 1980) (Vikram y Vedam 1981). Para superar estos inconvenientes se han sugerido diferentes métodos (Joenathan y Sirohi 1986) (Georgieva 1989) (Vikram 1990) (Vikram y Ganesan 1992) (Huntley *et al.* 1993), entre los que se incluye el uso de representaciones espacio-fase del patrón de doblemente expuesto (Widjaja *et al.* 1990) (Widjaja *et al.* 1992). En esta sección vamos a avanzar en esta línea proponiendo un método híbrido óptico-digital para la medida de deformaciones locales de objetos difusores a través del espectrograma local generado a partir de los dos patrones de moteado originales. Esta técnica mejora algunas de las características de las propuestas previas y aprovecha la versatilidad de esta representación de un modo sencillo y eficiente.

Tal y como se ha puesto de manifiesto en la sección anterior, el espectrograma local puede interpretarse como un analizador espectral multicanal, que describe el contenido de frecuencias espaciales de una señal en función de la posición, que es muestreada por una determinada función ventana. Esta idea es la que reside básicamente en el procedimiento de análisis secuencial tradicional de los moteogramas. Sin embargo, es posible aprovechar las propiedades de los sistemas ópticos para generar una representación simultánea de todo el espectrograma local asociado a una determinada función, obviando el proceso secuencial de muestreado. Aunque, como se indica en el Apéndice, es posible generar ópticamente diferentes secciones planas de las representaciones espacio-fase tetradimensionales asociadas a funciones bidimensionales, los dispositivos propuestos para la generación de distribuciones asociadas a señales unidimensionales son considerablemente más simples y manejables. Por ello, siguiendo el método propuesto por Widjaja *et al.* (1992),

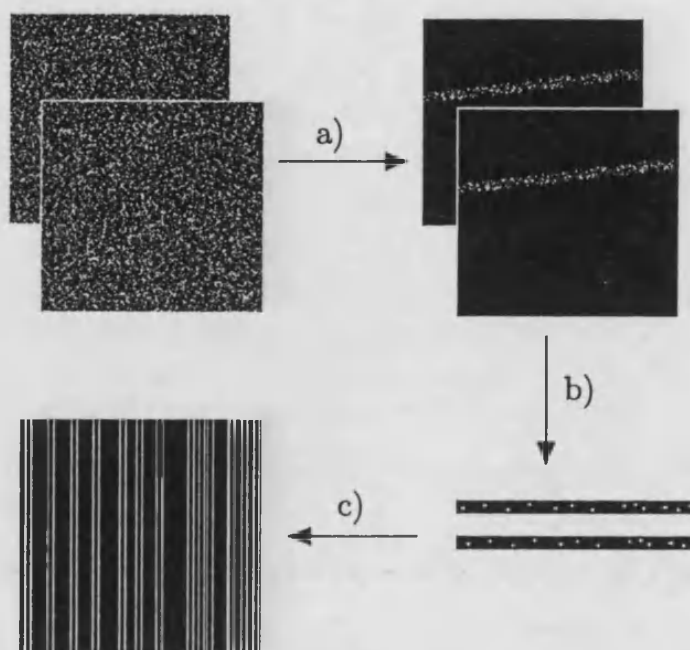


Figura 4.12. Diagrama en el que se muestra el preprocesado que se efectúa sobre los dos patrones de moteado obtenidos del objeto antes y después de la deformación: a) selección de una banda estrecha en ambos; b) binarización de éstas; y c) superposición y estiramiento para generar el moteograma unidimensional equivalente.

generaremos un moteograma equivalente unidimensional a partir de los patrones de moteado bidimensionales obtenidos antes y después de la deformación, que servirá de entrada al dispositivo que generará el correspondiente espectrograma local en el plano de salida. Este moteograma equivalente contendrá información sobre la deformación producida en una determinada dirección del plano del espécimen y se generará de acuerdo con el proceso indicado en la fig. 4.12. La primera etapa consiste en la selección de una estrecha franja de la misma región de ambos patrones, cuya orientación determina la dirección en la que se analizará la deformación del objeto. En segundo lugar, se realiza una binarización de las zonas seleccionadas de modo que la transmitancia de éstas en cada punto se reemplaza por el valor 1 ó 0 dependiendo de que ésta supere o no un determinado valor umbral. La selección de este valor crítico permite elegir la densidad de motas binarias que se utilizarán en la generación del moteograma unidimensional y, por lo tanto, la distancia media entre éstas. La tercera etapa consiste en una superposición de estas distribuciones binarias mediante una operación lógica *OR*, junto con una extensión espacial del resultado en la dirección perpendicular a la franja de muestreo. Un moteograma unidimensional típico generado de este modo presenta el aspecto que se muestra en la fig. 4.13. En nuestro caso, todas estas etapas se realizaron digitalmente, recogiendo el resultado final sobre una transparencia fotográfica. Sin embargo, algunas

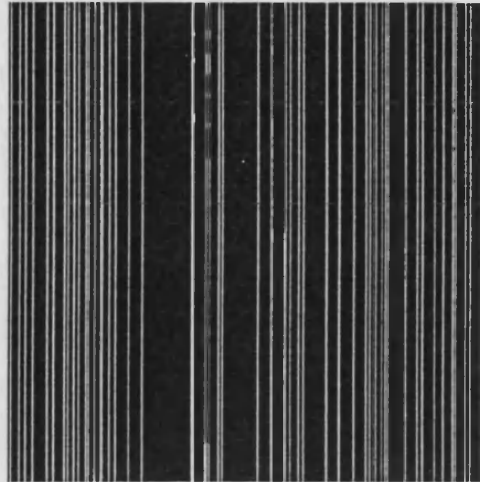


Figura 4.13. Aspecto de un moteograma equivalente unidimensional típico.

de esta etapas pueden realizarse también con procesadores ópticos (Widjaja *et al.* 1990).

La magnitud de las deformaciones locales producidas sobre el espécimen estudiado en la dirección seleccionada puede obtenerse directamente del espectrograma local de esta transparencia unidimensional como mostraremos a continuación. En términos matemáticos un moteograma binario unidimensional puede representarse, si obviamos el posible efecto de fusión de las motas procedentes de los dos patrones preprocesados, por la función

$$f_m(x_o) = \sum_{n=1}^{N_m} \delta(x_o - x_n) + \sum_{n=1}^{N_m} \delta(x_o - x'_n) , \quad (4.191)$$

donde x_n y x'_n representan las posiciones del n -ésimo punto de moteado en la primera y en la segunda exposición, respectivamente, y donde hemos supuesto que el moteograma se orienta con sus líneas paralelas al eje de ordenadas del sistema de referencia elegido sobre el mismo. Para simplificar el análisis, consideremos el caso de solo dos motas doblemente expuestas y un desplazamiento a uniforme entre exposiciones. En este caso $f_m(x_o)$ se reduce a

$$f_m(x_o) = \delta(x_o - x_1) + \delta(x_o - x_1 + a) + \delta(x_o - x_2) + \delta(x_o - x_2 + a) , \quad (4.192)$$

cuya representación gráfica se muestra en la fig. 4.14

Como ventana utilizaremos una simple función rectángulo de anchura b , de modo que el espectrograma local considerado vendrá dado por

$$L_{f_m, v}(x, u) = \left| \int_{x-b/2}^{x+b/2} f_m(x_o) e^{-j2\pi u x_o} dx_o \right|^2 . \quad (4.193)$$

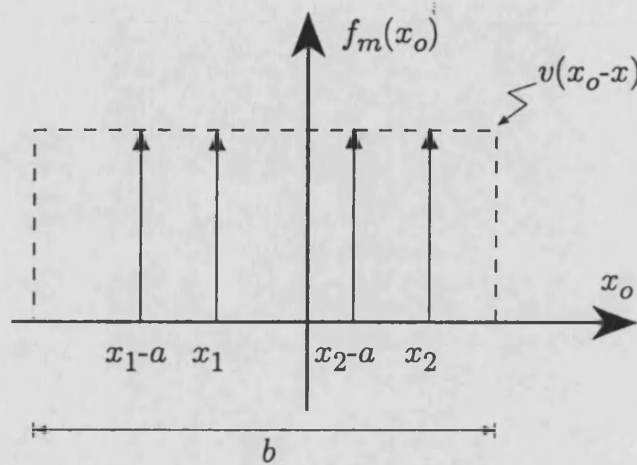


Figura 4.14. Representación gráfica de la variación de la transmitancia en amplitud de un moteograma unidimensional generado a partir de sólo dos motas con un desplazamiento uniforme, de magnitud a , entre exposiciones. Se muestra también la ventana rectangular utilizada para analizar dicho objeto.

Si elegimos la anchura de dicha ventana de modo que cumpla $b > |x_2 - x_1| + a$, existe un rango de posiciones de muestreo para las que todos los valores no nulos de la función $f_m(x_o)$ contribuyen a la integral anterior. En dicho intervalo es sencillo obtener que

$$L_{f_m, v}(x, u) \propto \cos^2(\pi u a) \cos^2[\pi(x_1 - x_2)] . \quad (4.194)$$

El resultado indicado en esta ecuación muestra un patrón de tipo interferencial que consta de dos factores. En el primero la distancia entre los máximos de las franjas proporciona información sobre la magnitud de la deformación local. En el segundo, representa un término de ruido debido a la interferencia cruzada que aparece entre las motas no correspondientes en la ventana de muestreo. Si la condición $|x_2 - x_1| \gg a$ se cumple, este factor se convierte en un término de alta frecuencia que es modulado por el que contiene la información de interés. Al ir disminuyendo la anchura de la función ventana, manteniéndose siempre mayor que el desplazamiento a , la localización espacial de la deformación va siendo cada vez más precisa, y la influencia del ruido se reduce progresivamente. El término de ruido desaparece si se satisface la condición $a \leq b \leq |x_2 - x_1|$.

Cuando el análisis anterior se aplica a un caso más general en el que más motas, a distancias aleatorias, se encuentran presentes en el interior de la ventana, se puede extender el resultado anterior pero teniendo en cuenta que aparecen nuevas contribuciones de alta frecuencia debidas a la interferencia cruzada entre las motas situadas en posiciones x_3, x_4, \dots , etc. Como en el caso anterior, si la distancia media entre las motas se controla para que sea mayor que la magnitud de la deformación local, el término de interés se convierte en la envolvente de baja frecuencia de los

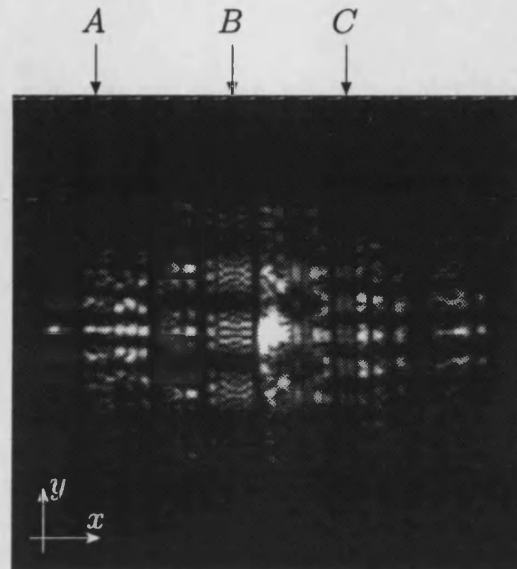


Figura 4.15. Espectrograma local experimental obtenido a partir de un moteograma compuesto de tres regiones con diferentes deformaciones constantes entre las dos exposiciones fotográficas.

términos de ruido. Así pues, de dicha envolvente es posible obtener el valor de la deformación local producida en el objeto para cada posición de la ventana de muestreo.

El método propuesto se puso a prueba con un cierto patrón de moteado que fue preprocesado digitalmente para simular dos tipos de deformación. En el primer caso, el patrón original fue subdividido en tres regiones sobre las que se aplicó un desplazamiento lateral uniforme de diferente magnitud. Las deformaciones inducidas presentaban magnitudes que seguían la proporción 5:2:4. Para el segundo ejemplo se generó un desplazamiento linealmente creciente para simular un estiramiento del objeto original. En ambos casos la región seleccionada sobre éste se orientó paralelamente a la deformación inducida.

Para obtener el espectrograma local del moteograma unidimensional utilizamos el dispositivo óptico que se indica en la fig. A.11 del Apéndice. De acuerdo con lo allí indicado, en el plano de salida se obtiene una distribución de irradiancia que es una versión escalada de la función $L_{f_m,v}(x,y)$, siendo x e y las coordenadas cartesianas en dicho plano. Una simple rendija rectangular se utilizó como función ventana, rotada 45° respecto del eje de ordenadas con el fin de cubrir dicha transparencia completamente. La anchura de esta rendija era del orden de 20 veces mayor que la magnitud del desplazamiento más pequeño simulado.

El espectrograma local para la primera función se muestra en la fig. 4.15. En la fig. 4.16 se muestra la distribución de irradiancia obtenida a lo largo de las rectas paralelas al eje OY para los valores de x indicados por A , B y C en la fig. 4.15.

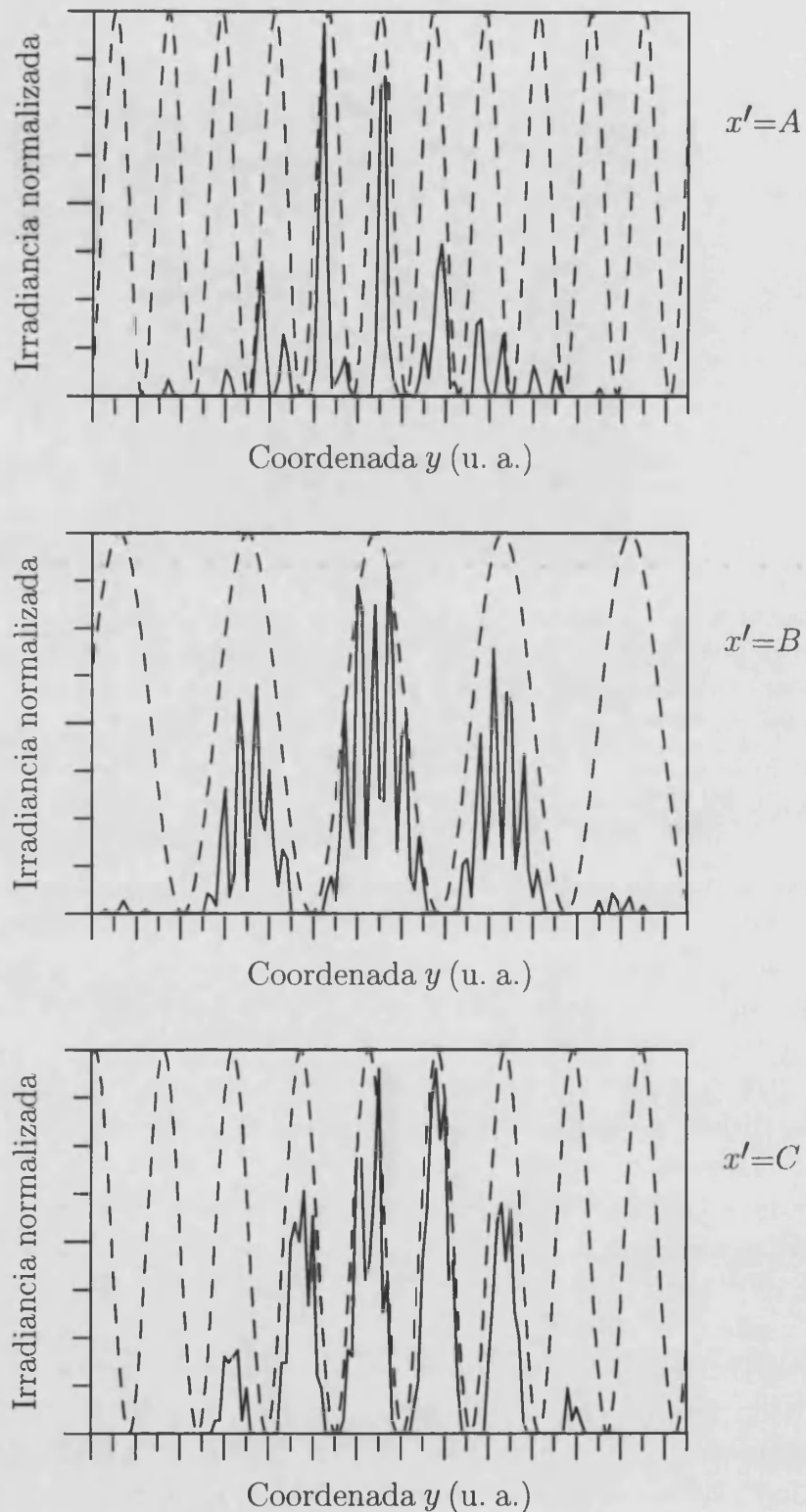


Figura 4.16. Perfiles de irradiancia a lo largo de las rectas $x = A$, $x = B$ y $x = C$ del resultado mostrado en la fig. 4.15 (trazo continuo). Las curvas presentadas con líneas discontinuas corresponden a las envolventes cosenoidales estimadas en cada caso. La distancia entre los máximos de éstas es inversamente proporcional al desplazamiento local.

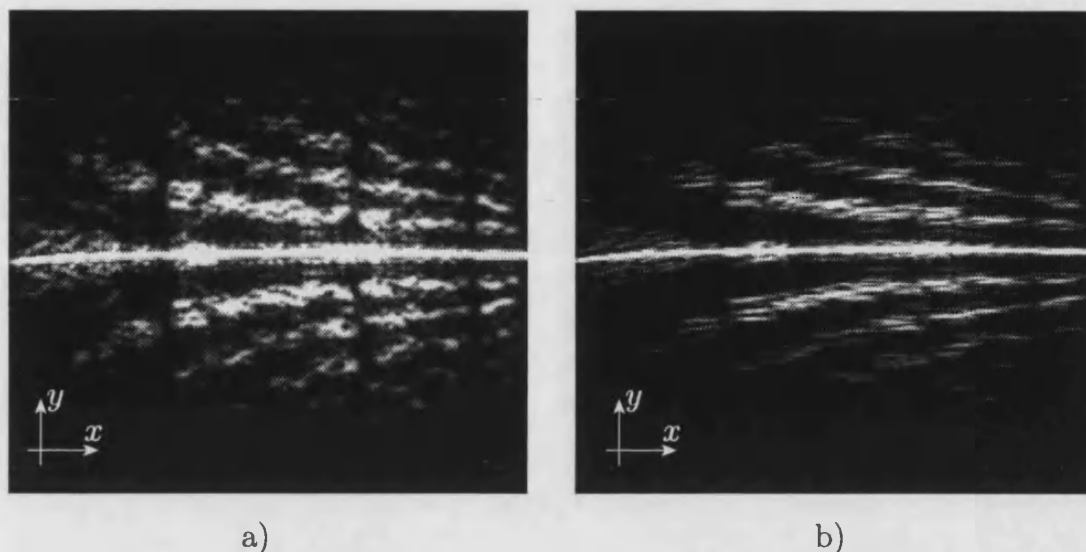


Figura 4.17. Espectrograma local experimental obtenido a partir de un moteograma generado con una deformación que varía linealmente con la posición entre las dos exposiciones fotográficas, a partir de dos anchuras diferentes de la función ventana. Para la más estrecha, que corresponde al resultado mostrado en a), dicha anchura es la mitad de la utilizada para obtener el resultado mostrado en b).

Sobre ella se muestra también, en trazo discontinuo, un ajuste de la envolvente cosenoidal en los tres casos. A partir de las frecuencias espaciales de dichas envolventes se deduce que los desplazamientos locales estimados siguen precisamente la relación 5:2:4. La fig. 4.17 presenta el espectrograma local obtenido para la segunda función. Dos ventanas de ancho diferente se utilizaron en este caso, tal y como se indica en dicha figura. Tal y como resultaba previsible, cuanto más ancha es la función ventana mejor precisión en la determinación de la magnitud de la deformación local se obtiene, en detrimento de la exactitud de su localización espacial, y viceversa.

El sistema de procesado híbrido que proponemos combina la versatilidad de los sistemas digitales en el preprocesado de las muestras y la simplicidad y rapidez de los sistemas ópticos en la obtención del espectrograma local. Por ejemplo, un desplazamiento artificial entre los patrones umbralizados en el algoritmo numérico puede resultar de utilidad bien para la medida de deformaciones que se encuentran fuera del rango de aquellas que se pueden medirse directamente con el sistema o bien para establecer el signo de la deformación. La técnica resulta especialmente interesante en la detección de desplazamientos no uniformes tales como el estiramiento o la compresión. La elección de la forma y la anchura de la ventana de muestreo es una de las más importantes ventajas de este método. Esta selección versátil, que no puede obtenerse con ninguna otra función espacio-fase, resulta

muy útil para seleccionar, dentro de los límites establecidos por las relaciones de incertidumbre, la precisión en la localización de las variables conjugadas espacio-fase. Además el uso del espectrograma local reduce el número de términos de ruido por interferencia cruzada respecto de los que aparecen cuando se utiliza la función de distribución de Wigner (Widjaja *et al.* 1992), mejorando de este modo la relación señal-ruido. El uso de pantallas de cristal líquido puede permitir que nuestro método sea aplicado en sistemas totalmente automatizados, lo que permite una realización en tiempo real de la técnica aquí propuesta.

Los resultados presentados en esta sección han sido recogidos en una serie de trabajos que se indican en la Bibliografía (Furlan y Saavedra 1993) (Furlan *et al.* 1995).

Capítulo 5

Aplicaciones de los formalismos espacio-fase al análisis de sistemas de procesamiento óptico temporalmente incoherente

5.1 Introducción

En este capítulo abordaremos el estudio de ciertos sistemas ópticos que utilizan luz temporalmente incoherente. La descripción de su comportamiento a través de algunas de las representaciones duales espacio-frecuencia espacial presentadas en §4 ha permitido desarrollar un conjunto de técnicas de análisis y diseño que presentan una mayor flexibilidad que las técnicas convencionales.

En concreto, proponemos, en primer lugar, una descripción de la imagen proporcionada por un sistema óptico que nos permite realizar un diseño óptimo del mismo para obtener una mínima aberración cromática. Este análisis se lleva a cabo en la sección 5.2 a partir de la distribución de Wigner y se aplica, en particular, a la obtención de autoimágenes acromáticas.

En segundo lugar, en la sección 5.3 se introduce una extensión de la técnica propuesta en §4.3 para el estudio de la irradiancia axial policromática en presencia de aberración esférica y aberración cromática longitudinal. Así pues, a partir de una única distribución de Wigner asociada a una versión de la pupila del sistema se obtienen todas las componentes monocromáticas necesarias para el cálculo de funciones de mérito tales como la razón de Strehl policromática en función del desenfoque.

Por último, en la sección 5.4 se aborda el análisis en el dominio de Fourier del comportamiento de los sistemas ópticos formadores de imágenes que presentan

aberración cromática longitudinal. La descripción de la función de transferencia óptica policromática a través de la función ambigüedad de la pupila del sistema permite una reducción sustancial del tiempo de cómputo requerido para su evaluación.

5.2 Aplicación de la función de distribución de Wigner a la acromatización de patrones de difracción

En esta sección vamos a presentar un método de análisis y diseño de sistemas ópticos formadores de imágenes que trabajan con iluminación de ancho de banda espectral finito, a partir de una descripción de cada una de las componentes monocromáticas del campo electromagnético por medio de la función de distribución de Wigner. En particular, estudiaremos el problema de la compensación óptima de la dispersión cromática que presenta el campo difractado por un objeto plano, cuyos efectos sobre los patrones de difracción policromáticos fueron puestos de manifiesto en §2.6. Aunque el procedimiento seguido puede aplicarse a una gran variedad de sistemas, centraremos nuestra atención en un dispositivo propuesto recientemente (Andrés *et al.* 1993) (Andrés *et al.* 1994), que permite obtener la imagen de cualquier patrón de Fresnel del objeto considerado con una aberración cromática residual muy baja. El sistema, cuyo esquema se muestra en la fig. 5.1, trabaja con iluminación plana temporalmente incoherente y consta únicamente de una lente acromática, de longitud focal imagen f , y una placa zonal en eje. Nuestro objetivo será derivar las condiciones que debe satisfacer dicho dispositivo para obtener una imagen de salida de un cierto patrón de Fresnel del objeto con la mínima aberración cromática. Como caso particular, estudiaremos la posibilidad de obtener autoimágenes acromáticas.

El interés de este estudio viene justificado por el amplio conjunto de técnicas desarrolladas en el procesado óptico de información basadas en el efecto Talbot (Ojeda-Castañeda y Sicre 1983) (Lohmann *et al.* 1984) (Kaijun *et al.* 1983) (Leger y Snyder 1984) (Liu *et al.* 1990) (Bonet *et al.* 1994), que se ven afectadas frecuentemente por la falta de redundancia asociada a los sistemas coherentes. Este hecho, que es el responsable de la baja relación señal-ruido que proporcionan estos dispositivos, puede ser superado parcialmente relajando las condiciones de coherencia de la radiación empleada. La utilización de iluminación policromática tropieza, sin embargo, con el inconveniente del emborronamiento cromático generado por la dispersión inherente al fenómeno de la difracción, lo que ha hecho que se propongan una serie de dispositivos para paliar esta dificultad (Sicre *et al.* 1985) (Packross *et al.* 1984) (Indebetouw 1988), entre los que se encuentra el sistema que estudiaremos a continuación.

Consideraremos, pues, un cierto patrón de difracción que, para una longitud de

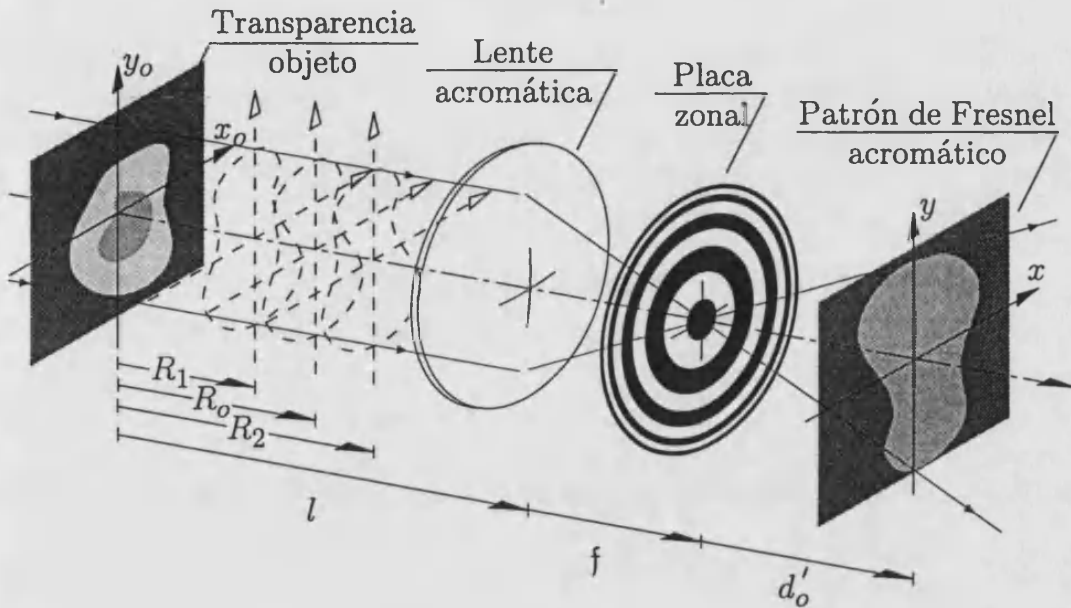


Figura 5.1. Esquema del dispositivo estudiado como acromatizador de patrones de Fresnel. La placa zonal indicada es de tipo "blazé" en eje y se sitúa en el plano focal imagen de la lente acromática.

onda λ_0 de referencia en el rango espectral de la radiación que ilumina el objeto, se sitúa a una distancia R_0 del mismo. Para otra longitud de onda λ diferente de la anterior, este mismo patrón de difracción se obtiene, con la misma escala, en una localización axial diferente, tal y como se deduce de las ecs. (2.28) y (2.29). Si consideramos que las longitudes de onda extremas de la radiación incidente son λ_1 y λ_2 , con $\lambda_2 < \lambda_1$, dicho patrón se replicará a lo largo del eje óptico entre los planos caracterizados por distancias $R_0(\lambda)$ en el rango

$$R_1 = R_0(\lambda_1) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \leq R_0(\lambda) \leq R_2 = R_0(\lambda_2) = \frac{\lambda_0}{\lambda_2}. \quad (5.1)$$

Este volumen de difracción policromático se transformará, a través del sistema óptico, en un volumen imagen en el que cada componente espectral del patrón de Fresnel se sitúa a una distancia $d'(\lambda) = d'_0 + \Delta d'(\lambda)$ de la placa zonal, siendo $d'_0 = d'(\lambda_0)$. A continuación, derivaremos las condiciones geométricas que proporcionan un valor mínimo para la dispersión axial $\Delta d'(\lambda)$.

Por simplicidad, consideraremos un objeto unidimensional, aunque el razonamiento seguido es directamente extensible al caso bidimensional. Elegiremos, sin pérdida de generalidad, el sistema de referencia en el plano de éste de modo que su transmitancia en amplitud presente variaciones únicamente en la dirección del eje de abscisas. Esta dependencia exclusiva se mantendrá en todos los patrones de difracción en irradiancia, como se deduce de lo indicado en §2.2. La descripción de éstos puede realizarse a través de la correspondiente representación de Wigner, que

en este caso será una función bidimensional. De hecho, la distribución asociada al patrón de difracción en amplitud considerado podrá expresarse, de acuerdo con la ec. (4.70), como

$$W_E(x, u; R_o; \lambda) = W_{U'_{R_o}(x; 0; \lambda)}(x, u) = W_t(x - \lambda R_o u, u), \quad (5.2)$$

siendo $t(x)$ la transmitancia en amplitud del objeto. La ec. (4.11) nos permitirá obtener la distribución de irradiancia monocromática sobre el plano de observación, de modo que podemos expresar

$$\begin{aligned} I'_{R_o}(x; 0; \lambda) &= |U'_{R_o}(x; 0; \lambda)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} W_E(x, u; R_o; \lambda) du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x - \lambda R_o u, u) du. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Así pues, tal y como se indica en la fig. 5.2, para cada punto del patrón de difracción considerado, debe integrarse la distribución de Wigner original a lo largo de rectas en el espacio-fase que pasan por el punto de coordenadas cartesianas $(x, 0)$ y que forman un ángulo $\theta_o(\lambda)$ con el eje frecuencial que cumple

$$\tan \theta_o(\lambda) = -\lambda R_o. \quad (5.4)$$

La aberración cromática inherente a la propagación del campo electromagnético es la responsable de que la pendiente de estas rectas sea función de la longitud de onda. La distribución policromática de irradiancia en el plano considerado, dada a través de la ec. (2.153), involucra, por tanto, una integración en el espacio-fase en el interior de un sector angular de extensión

$$\Delta\theta_o = |\theta_o(\lambda_1) - \theta_o(\lambda_2)| = |\arctan(\lambda_2 R_o) - \arctan(\lambda_1 R_o)|. \quad (5.5)$$

Para obtener una versión acromatizada de este patrón policromático, esta amplitud angular debe transformarse a través del sistema óptico de modo que sobre el plano de salida —imagen de dicho patrón para $\lambda = \lambda_o$ — la región de integración implicada en el espacio-fase se concentre en el interior de un sector angular de extensión $\Delta\theta < \Delta\theta_o$, idealmente con $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Para analizar la estructura de esta imagen, utilizaremos, de nuevo, la representación de Wigner de la distribución de amplitudes del campo electromagnético. El dispositivo considerado es un ejemplo sencillo de un sistema óptico de primer orden, con lo que podremos aplicar las propiedades de transformación para la distribución de Wigner establecidas en la parte final de §4.2. De acuerdo con lo allí expuesto,

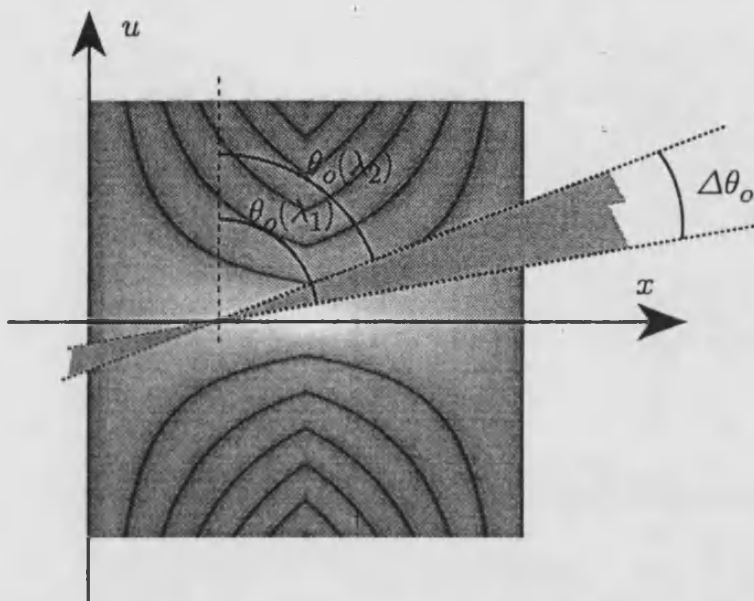


Figura 5.2. Representación gráfica esquemática de los dominios de integración involucrados en la obtención del valor de la irradiancia para cada punto del plano de entrada considerado.

la representación correspondiente al patrón de difracción obtenido en el plano de salida seleccionado podrá expresarse, para cada componente monocromática, como

$$W_S(x, u; d'_o; \lambda) = W_t(x'(\lambda), u'(\lambda)) \quad (5.6)$$

donde

$$\begin{pmatrix} x'(\lambda) \\ u'(\lambda) \end{pmatrix} = M(\lambda) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

siendo $M(\lambda)$ la matriz que caracteriza la transferencia desde el plano del objeto hasta el plano de salida. Esta transformación puede obtenerse como una asociación en cascada de una serie de procesos elementales, a saber, (ver fig. 5.1)

- a) Propagación de Fresnel a una distancia l , hasta el plano anterior a la lente acromática. Este tránsito vendrá caracterizado por una matriz del tipo señalado en la ec. (4.79), que en este caso queda

$$M_1(\lambda) = M_F(l; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

- b) Paso a través de la lente. La transformación de coordenadas en este caso vendrá dada, de acuerdo con la ec. (4.80), por

$$M_2(\lambda) = M_L(f; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(\lambda f) & 1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

- c) Una segunda propagación libre hasta el plano focal de dicha lente. En este caso, la matriz característica vendrá dada por

$$\mathbf{M}_3(\lambda) = \mathbf{M}_F(f; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

- d) Transmisión a través de la placa zonal en eje. Este tipo de elementos son objetos que funcionan por difracción y cuya transmitancia en amplitud es periódica en la coordenada radial al cuadrado. Esta función podrá expresarse, por tanto, en forma de serie de Fourier como sigue

$$t_Z(\vec{r}; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(\lambda) e^{j2\pi u_n(p_Z)|\vec{r}|^2}, \quad (5.11)$$

siendo p_Z el periodo citado, que es independiente de la longitud de onda λ de la radiación incidente. En particular, en el dispositivo estudiado se utilizan una placa zonal de tipo "blazé" o "kinoform", que cumple que para una cierta longitud de onda de diseño todos los coeficientes de la serie anterior se anulan excepto el que corresponde a $n = -1$. Este término tiene una estructura funcional análoga a la de la transmitancia en amplitud de una lente esférica, dada por la ec. (2.88). La identidad se establece considerando una distancia focal para la placa zonal dada por

$$Z(\lambda) = Z_o \frac{\lambda_o}{\lambda}, \quad (5.12)$$

siendo

$$Z_o = \frac{p_Z}{2\lambda_o}, \quad (5.13)$$

la longitud focal para la longitud de onda λ_o . Por lo tanto, el paso a través de este elemento podrá caracterizarse¹ por una matriz

$$\mathbf{M}_4(\lambda) = \mathbf{M}_L(Z(\lambda); \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(\lambda Z(\lambda)) & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

- e) Una última propagación hasta el plano de salida. Éste se elige de modo que coincida con el plano imagen, para $\lambda = \lambda_o$, del patrón de difracción que se pretende acromatizar. Esta transformación podrá caracterizarse por la matriz

$$\mathbf{M}_5(\lambda) = \mathbf{M}_F(d'_o; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda d'_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

¹Aunque, por razones de construcción, para longitudes de onda diferentes de la de diseño sea necesario considerar la contribución de otros términos de la serie (5.11), consideraremos que la aportación de éstos es despreciable en el rango espectral estudiado.

5.2. Acromatización de autoimágenes a través de la distribución de Wigner 187

De este modo, la matriz global de transferencia podrá obtenerse a través del producto

$$\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{M}_1(\lambda) \mathbf{M}_2(\lambda) \mathbf{M}_3(\lambda) \mathbf{M}_4(\lambda) \mathbf{M}_5(\lambda), \quad (5.16)$$

que, tras operar adecuadamente, conduce a la expresión

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{f} - \frac{f}{Z(\lambda)} & -\lambda \left(f + d'_o - \frac{ld'_o}{f} - \frac{fd'_o}{Z(\lambda)} \right) \\ \frac{1}{\lambda f} & -\frac{d'_o}{f} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Con todo, la distribución de Wigner asociada a la distribución de amplitudes monocromática en el plano de observación final podrá expresarse, de acuerdo con las relaciones (5.6) y (5.7), como

$$\begin{aligned} W_S(x, u; d'_o; \lambda) &= \\ &= W_t \left(\left(1 - \frac{l}{f} - \frac{f}{Z(\lambda)} \right) x - \left(f + d'_o - \frac{ld'_o}{f} - \frac{fd'_o}{Z(\lambda)} \right) \lambda u, \frac{x}{\lambda f} - \frac{d'_o}{f} u \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

La distribución de irradiancia monocromática en el plano de salida podrá obtenerse, por tanto, de la expresión

$$\begin{aligned} I'_S(x; \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_S(x, u; d'_o; \lambda) du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_t \left(\left(1 - \frac{l}{f} - \frac{f}{Z(\lambda)} \right) x - \left(f + d'_o - \frac{ld'_o}{f} - \frac{fd'_o}{Z(\lambda)} \right) \lambda u, \frac{x}{\lambda f} - \frac{d'_o}{f} u \right) du. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Si se considera el cambio de variable

$$\mu = \frac{x}{\lambda f} - \frac{d'_o}{f} u, \quad (5.20)$$

y se opera convenientemente en la ec. (5.19), puede obtenerse que

$$I'_S(x; \lambda) = \frac{-1}{m_o} \int_{-\infty}^{+\infty} W_t \left(\frac{x}{m_o} + b(\lambda)\mu, \mu \right) d\mu, \quad (5.21)$$

siendo

$$m_o = -\frac{d'_o}{f}, \quad (5.22a)$$

$$b(\lambda) = \left(f - l + \frac{f^2}{d'_o} - \frac{f^2}{Z(\lambda)} \right) \lambda. \quad (5.22b)$$

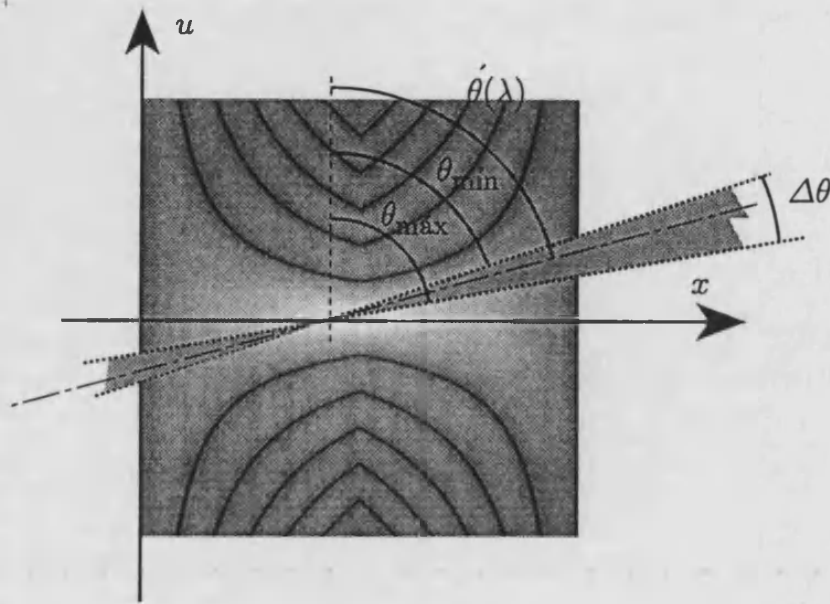


Figura 5.3. Esquema de los dominios de integración en el espacio-fase involucrados en la obtención del valor de la irradiancia para cada punto del plano de salida.

Así pues, de modo análogo al caso del patrón de entrada, para cada punto del plano de salida debe realizarse una integración en el espacio-fase a lo largo de rectas que pasan por el punto de coordenadas $(x/m_o, 0)$ y cuya pendiente respecto del eje frecuencial viene dada por la expresión

$$\tan \theta(\lambda) = b(\lambda) , \quad (5.23)$$

tal y como se indica en la fig. 5.3. Por lo tanto, en la obtención del patrón de difracción policromático a la salida del sistema deberá considerarse una integración en el dominio espacio-frecuencia espacial en el interior de un sector angular de amplitud $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \theta_{\text{máx}} - \theta_{\text{mín}} , \quad (5.24)$$

donde

$$\theta_{\text{máx}} = \text{máx} \{ \theta(\lambda) , \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1 \} , \quad (5.25)$$

$$\theta_{\text{mín}} = \text{mín} \{ \theta(\lambda) , \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1 \} . \quad (5.26)$$

En este caso, en general, estos valores extremos no tienen porqué corresponder a los valores límite del espectro temporal de la iluminación. Sólo será así en el caso de que la función $b(\lambda)$, y por tanto también $\theta(\lambda)$, sea monótona en el rango espectral considerado. De hecho, la forma funcional de $b(\lambda)$ resulta determinante en el valor final de $\Delta\theta$ que caracteriza el emborronamiento cromático en el plano de salida. Resulta fundamental, por tanto, analizar la estructura de dicha función.

5.2. Acromatización de autoimágenes a través de la distribución de Wigner 189

Esta estructura depende de los valores concretos de los parámetros que caracterizan el sistema, a saber, f , Z_o , d'_o y l . Trataremos de encontrar la elección de éstos que proporciona una aberración cromática menor en el patrón de salida. Ésta estará determinada por el correspondiente rango de valores extremos de $b(\lambda)$. En primer lugar, destaquemos que no todas estas magnitudes son independientes, ya que existe una ligadura entre ellas impuesta por la relación de conjugación establecida por el sistema entre el plano del patrón monocromático de entrada para $\lambda = \lambda_o$ y el plano de observación final. Puede obtenerse que, a partir de las correspondientes ecuaciones de la Óptica Geométrica, se cumple la relación

$$l = R_o + f + \frac{f^2}{d'_o} - \frac{f^2}{Z_o}. \quad (5.27)$$

De hecho, este mismo proceso conduce a que el valor de m_o indicado en la ec. (5.22a) corresponde precisamente al aumento lateral con el que se genera la imagen final.

Haciendo uso de esta expresión, la ec. (5.22b) puede reescribirse como

$$b(\lambda) = \left(\frac{f^2}{Z_o} - R_o - \frac{f^2}{Z(\lambda)} \right) \lambda, \quad (5.28)$$

ecuación que, haciendo uso de la expresión explícita de la distancia focal $Z(\lambda)$ dada por la ec. (5.12), puede reagruparse como

$$b(\lambda) = \left[\omega \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_o} \right) - R_o \right] \lambda, \quad (5.29)$$

siendo

$$\omega = \frac{f^2}{Z_o}, \quad (5.30)$$

un parámetro que recoge toda la dependencia de la función estudiada con las magnitudes características del sistema óptico. La situación de acromatismo perfecto se alcanzaría en el caso de que $b(\lambda) = b(\lambda_o)$ para todo el rango espectral de la iluminación, pero esta corrección perfecta no es posible como puede deducirse de la ec. (5.29). Es posible establecer, sin embargo, una aproximación de primer orden a este estado ideal imponiendo que la función estudiada alcance un extremo en $\lambda = \lambda_o$. De este modo aseguraremos una variación localmente suave de la función $b(\lambda)$ en torno al valor $b(\lambda_o)$. En términos matemáticos, exigiremos que

$$\left. \frac{db(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} = 0, \quad (5.31)$$

lo que conduce a un valor

$$\omega = -R_o, \quad (5.32)$$

es decir, a una relación entre los parámetros del dispositivo dada por

$$R_o = -\frac{f^2}{Z_o} . \quad (5.33)$$

Con esta condición, la expresión (5.27) se transforma en

$$l = 2R_o + f + \frac{f^2}{d'_o} . \quad (5.34)$$

Así pues, una elección del conjunto de parámetros l , f , Z_o y d'_o sometidos a la restricción anterior y que cumplan la condición (5.33) proporciona un sistema que obtiene una corrección cromática de primer orden, en el sentido indicado previamente, del patrón de difracción situado, para $\lambda = \lambda_o$, a distancia R_o del objeto.

En particular, si consideramos un objeto periódico, podemos obtener cual debe ser el diseño del sistema considerado para obtener la corrección cromática (a primer orden) de un patrón de autoimagen. Concretamente, la réplica del objeto de orden Q se obtendrá, para la longitud de onda de referencia, a una distancia de éste dada por

$$R_o = Qz_T(\lambda_o) = Q\frac{2p^2}{\lambda_o} , \quad (5.35)$$

de acuerdo con la ec. (2.45), siendo p el periodo de la transmitancia en amplitud del mismo. Por lo tanto, el diseño óptimo en este caso se conseguirá eligiendo las magnitudes del sistema de acuerdo con las relaciones

$$\frac{f^2}{Z_o} = -Q\frac{2p^2}{\lambda_o} , \quad (5.36)$$

$$l = Q\frac{4p^2}{\lambda_o} + f + \frac{f^2}{d'_o} . \quad (5.37)$$

Para ilustrar la técnica aquí desarrollada y comprobar sus predicciones, llevamos a cabo una verificación experimental utilizando un objeto bidimensional periódico cuadrado, de periodo $p = 0,179$ mm. Se seleccionó como patrón de Fresnel a acromatizar la primera autoimagen positiva del mismo, es decir, aquella que correspondía a un valor $Q = 1$. Inicialmente, el objeto fue iluminado con un haz paralelo monocromático correspondiente a la longitud de onda de referencia $\lambda_o = 546,1$ nm, procedente de una lámpara espectral de mercurio asociada a un filtro interferencial. El patrón coherente elegido, por tanto, se encontraba a una distancia $R_o = 2Qp^2/\lambda_o = 11,73$ cm del objeto. La fig. 5.4 muestra una imagen en tonos de gris de la distribución de irradiancia obtenida. En la fig. 5.5 se presenta la distribución de irradiancia policromática generada sobre el mismo plano cuando un haz de luz blanca colimado, generado a partir de una lámpara de descarga de

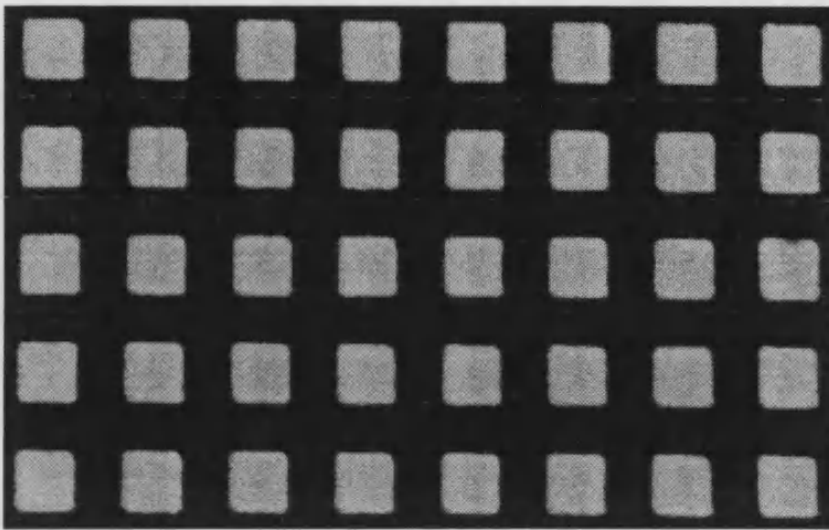


Figura 5.4. Representación en tonos de gris de la distribución de irradiancia monocromática que pretende acromatizarse en la experiencia propuesta.

mercurio de alta presión, incide sobre el objeto. El emborronamiento cromático introducido por el ancho de banda espectral de la radiación es claramente apreciable.

Para acromatizar este patrón de difracción, se construyó el sistema presentado en la fig. 5.1 de acuerdo con las prescripciones de la ec. (5.36). Se disponía de

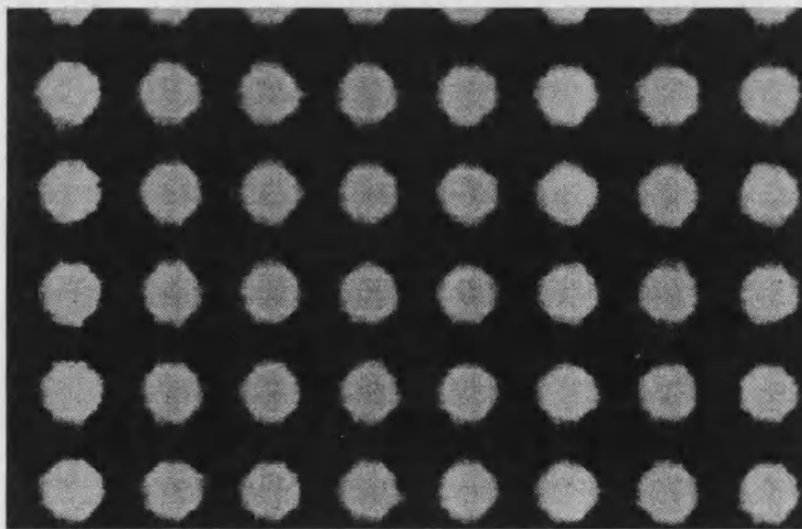


Figura 5.5. Imagen en blanco y negro de la distribución de irradiancia policromática que se obtiene en el plano donde se obtuvo el resultado mostrado en la fig. 5.4 cuando el objeto se ilumina con un haz de luz blanca.

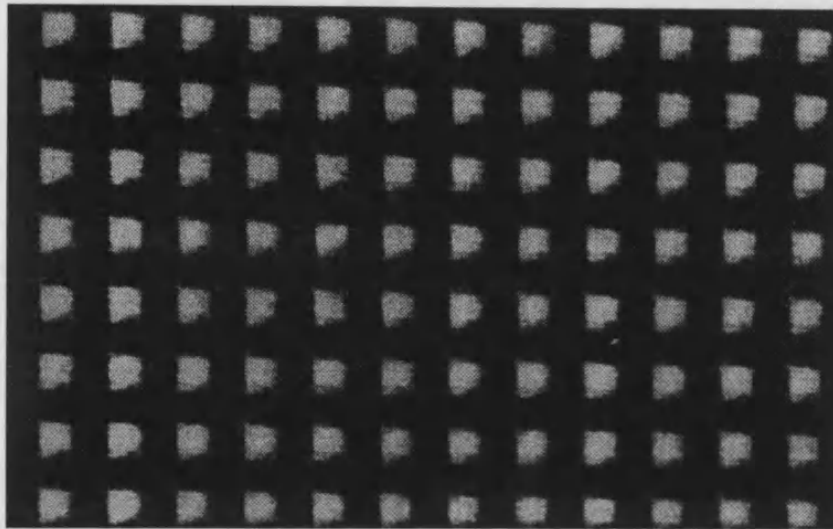


Figura 5.6. Imagen en tonos de gris del resultado proporcionado por el sistema optimizado estudiado.

una placa zonal “blazé” divergente con una distancia focal imagen $Z_o = -12,00$ cm y elegimos un valor $d'_o = 10,00$ cm. Por lo tanto, se escogió una focal imagen para la lente acromática de $f = \sqrt{-Z_o R_o} = 11,86$ cm y se situó el objeto a una distancia $l = 2R_o + f + f^2/d'_o = 49,39$ cm de ella. La fig. 5.6 muestra una representación en blanco y negro de la autoimagen acromatizada. La comparación con el resultado presentado en la fig. 5.5 hace evidente la compensación cromática conseguida. Nótese que, de acuerdo con las magnitudes escogidas, se obtiene un aumento $m_o = -d'_o/f = -0,84$ respecto de la distribución mostrada en la fig. 5.4.

En resumen, hemos analizado las propiedades de formación de imágenes de un sistema óptico que trabaja con iluminación policromática a través de la función de distribución de Wigner. En particular, hemos establecido las relaciones que deben existir entre los diferentes parámetros geométricos del sistema para obtener la imagen de un patrón de Fresnel de un objeto plano difractante con una compensación óptima (en primera aproximación) del emborronamiento cromático del mismo. Esta técnica nos ha servido para acromatizar el fenómeno de autoimágenes con luz temporalmente incoherente.

Los resultados establecidos en esta sección se recogen en la referencia (Lancis *et al.* 1995).

5.3 Estudio del comportamiento axial policromático de sistemas ópticos aberrados a partir de la función de distribución de Wigner

En esta sección vamos a proponer la aplicación de la técnica presentada en §4.3 al estudio de sistemas ópticos formadores de imágenes que trabajan con iluminación temporalmente incoherente. Nuestro propósito será, por tanto, describir el campo policromático imagen a través de una representación de Wigner de la pupila del sistema.

La relación lineal que los sistemas formadores de imágenes establecen entre las distribuciones de irradiancia monocromática en los planos de entrada y salida permite describir el comportamiento de los mismos a partir de su respuesta a señales de entrada puntuales, de acuerdo con la relación indicada en la ec. (4.41). Esta descripción podrá extender al caso policromático teniendo en cuenta ya que los patrones de irradiancia generados en este caso no son más que el resultado de la superposición aditiva de los generados por cada una de las componentes espectrales de la iluminación considerada. Es directo obtener que, en estas circunstancias, la respuesta unidad policromática no es más que la suma de las correspondientes funciones monocromáticas. Esta respuesta caracterizará el comportamiento del sistema y, por tanto, bastará estudiar ésta para obtener una descripción completa del mismo.

Hasta el momento, hemos obviado la etapa final de detección de la respuesta proporcionada por los sistemas ópticos, considerando un comportamiento ideal de los detectores utilizados y, en particular, una eficiencia espectral constante para el rango de la radiación considerada. Sin embargo, cuando la respuesta policromática anterior se considera como una función de mérito del dispositivo estudiado, es necesario tener en cuenta de modo explícito la sensibilidad espectral del dispositivo de detección final empleado. De este modo, en la integral de superposición policromática (2.153) deberá modificarse el peso de la contribución de cada componente monocromática para considerar este efecto.

Supongamos, con todo ello, la misma situación estudiada en §4.3 pero considerando una potencia espectral $S(\lambda)$ para el punto objeto emisor. La distribución de irradiancia monocromática, por unidad de potencia emitida, generada en el plano situado a distancia R de la pupila de salida del sistema, vendrá dada por el módulo al cuadrado de la expresión indicada en la ec. (4.84), es decir

$$I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{1}{(\lambda z R)^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda) e^{j \frac{\pi}{\lambda} \frac{z+R}{zR} |\vec{r}_o|^2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda R} \vec{r} \cdot \vec{r}_o} d^2 \vec{r}_o \right|^2, \quad (5.38)$$

donde hemos considerado que la imagen del punto considerado se sitúa sobre el eje

óptico, del mismo modo que en la sección citada. La función $\mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda)$ representa, como entonces, la función pupila generalizada. La respuesta policromática que sobre el plano de observación escogido proporcionará el detector utilizado, vendrá dada por

$$\hat{I}_R(\vec{r}; z) = \int_{\Lambda} I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) S(\lambda) V(\lambda) d\lambda, \quad (5.39)$$

siendo $S(\lambda)$ la potencia espectral de la radiación emitida por el objeto, Λ el rango espectral de la misma y $V(\lambda)$ la sensibilidad del detector para cada componente monocromática. Es evidente, por tanto, que curvas de eficiencia espectral $V(\lambda)$ distintas proporcionan respuestas diferentes.

Muchos de los dispositivos ópticos formadores de imágenes se diseñan para visión directa por el ser humano, de modo que el detector final de la distribución de irradiancia policromática es el sistema visual de éste. En este caso, la respuesta —sensación cromática— es una función compleja diferente de la proporcionada por un simple detector de irradiancia. Es conocido que esta sensación viene determinada por tres parámetros que la caracterizan de modo unívoco, que se obtienen a partir de la irradiancia del estímulo cromático considerado, $N(\lambda)$, a través de las integrales de superposición

$$X = \int_{\Lambda} N(\lambda) S(\lambda) \bar{x}_{\lambda} d\lambda, \quad (5.40a)$$

$$Y = \int_{\Lambda} N(\lambda) S(\lambda) \bar{y}_{\lambda} d\lambda, \quad (5.40b)$$

$$Z = \int_{\Lambda} N(\lambda) S(\lambda) \bar{z}_{\lambda} d\lambda, \quad (5.40c)$$

donde \bar{x}_{λ} , \bar{y}_{λ} y \bar{z}_{λ} pueden considerarse como tres funciones de sensibilidad espectral asociadas a la sensación cromática (Wyszecki y Stiles 1982). Estrictamente, las magnitudes definidas en las ecs. (5.40), conocidas como valores triestímulo, representan la irradiancia respectiva que es necesario considerar en una superposición aditiva de tres estímulos cromáticos de referencia —denominados primarios— para producir una sensación igual a la provocada por el objeto considerado. En este sentido, las eficiencias \bar{x}_{λ} , \bar{y}_{λ} y \bar{z}_{λ} , conocidas como coeficientes de distribución espectral, corresponden a los valores triestímulo asociados a señales espectrales puras. En ocasiones, resulta más útil describir un estímulo cromático a partir de una función de sus valores triestímulo que a través de éstos directamente. Una

elección convencional de estos parámetros derivados son las magnitudes

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad (5.41a)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad (5.41b)$$

que denominaremos coordenadas cromáticas, que junto con el valor triestímulo Y , conocido también con el nombre de iluminancia, describen también de modo completo el estímulo considerado. Una elección adecuada de los primarios permite asociar, básicamente, la sensación de brillo a la iluminancia, mientras que las sensaciones de tono y saturación vienen caracterizadas, de modo conjunto, por las coordenadas cromáticas.

Con todo, es evidente que la respuesta del sistema formador de imágenes considerado, cuando es utilizado para visión humana directa, podrá especificarse por los valores

$$X_R(\vec{r}; z) = \int_{\Lambda} I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) S(\lambda) \bar{x}_\lambda d\lambda, \quad (5.42a)$$

$$Y_R(\vec{r}; z) = \int_{\Lambda} I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) S(\lambda) \bar{y}_\lambda d\lambda, \quad (5.42b)$$

$$Z_R(\vec{r}; z) = \int_{\Lambda} I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) S(\lambda) \bar{z}_\lambda d\lambda, \quad (5.42c)$$

para cada punto de observación considerado, o por las correspondientes iluminancia y coordenadas cromáticas.

De cualquier modo, la estimación de estas magnitudes pasa por una descripción del campo monocromático asociado a cada componente espectral. La dependencia de la irradiancia monocromática $I_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda)$ con la longitud de onda se establece, en general, de un modo muy complejo a través de la ec. (5.38). Sin embargo, algunas funciones de mérito que evalúan el efecto de las aberraciones en la calidad de la imagen consideran únicamente los valores de esta función a lo largo del eje óptico (Geary y Peterson 1986) (Friedman 1992) (Martínez-Corral *et al.* 1994) (Gong y Hsu 1994) (ten Brummelaar y Bagnuolo 1995), como es el caso de la denominada razón de Strehl en la función del desenfoque (Born y Wolf 1980) (Ojeda-Castañeda *et al.* 1988) (Ojeda-Castañeda *et al.* 1988) (Bobroff y Rosenbluth 1992) (Ojeda-Castañeda *et al.* 1994). En general, la razón de Strehl monocromática asociada a un sistema óptico formador de imágenes como el que estamos estudiando se define como el cociente entre la irradiancia monocromática axial que genera éste sobre el plano imagen, caracterizado por un valor $R = -z$, y la que se obtendría si el sistema

presentase una aberración de onda nula (Born y Wolf 1980). Matemáticamente, esta magnitud puede expresarse como

$$S(W; \lambda) = \frac{I_{-z}(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)}{I_{-z}^{(0)}(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)}, \quad (5.43)$$

donde $I_{-z}^{(0)}(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)$ representa la respuesta en irradiancia del sistema considerado libre de aberraciones, siendo W la función de aberración del sistema indicada en la ec. (4.90). Tal y como señalamos en §4.3, considerar una aberración de desenfoque adicional $\delta W_{20}(R; z)$ en esta función es equivalente a obtener la respuesta monocromática correspondiente a una distancia R del plano de observación que cumple la relación (4.98) y, por lo tanto, se puede estudiar como varía la razón de Strehl de un sistema óptico en función del desenfoque a partir de los valores axiales de dicha distribución de irradiancia. De este modo, podemos expresar

$$S_{20}(\delta W_{20}; W; \lambda) \triangleq S(W + \delta W_{20}; \lambda) = \frac{I_R(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)}{I_{-z}^{(0)}(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)}. \quad (5.44)$$

La extensión de este criterio de calidad al caso de iluminación temporalmente incoherente es directa, sin más que considerar la comparación de las correspondientes respuestas policromáticas (Yzuel y Santamaría 1975) (Yzuel *et al.* 1990). En el caso de sistemas diseñados para visión directa, esta "razón de Strehl policromática" quedará determinada por sus componentes triestímulo

$$S_{20}(\delta W_{20}; W)_x = \frac{X_R(\vec{0}; z)}{X_{-z}^{(0)}(\vec{0}; z)}, \quad (5.45a)$$

$$S_{20}(\delta W_{20}; W)_y = \frac{Y_R(\vec{0}; z)}{Y_{-z}^{(0)}(\vec{0}; z)}, \quad (5.45b)$$

$$S_{20}(\delta W_{20}; W)_z = \frac{Z_R(\vec{0}; z)}{Z_{-z}^{(0)}(\vec{0}; z)}, \quad (5.45c)$$

o por alguna otra elección de funciones que establezca la proporción entre las respuestas policromáticas axiales proporcionadas por el sistema aberrado y libre de aberraciones. Desde el punto de vista de la descripción separada de la iluminación y la cromaticidad, esta comparación puede establecerse a través de la función

$$Y_N(\delta W_{20}; W) = S_{20}(\delta W_{20}; W)_y, \quad (5.46)$$

conocida como iluminancia axial normalizada, y de las diferencias observadas entre las coordenadas cromáticas obtenidas con el sistema aberrado,

$$x(\delta W_{20}; W) = \frac{X_R(\vec{0}; z)}{X_R(\vec{0}; z) + Y_R(\vec{0}; z) + Z_R(\vec{0}; z)}, \quad (5.47a)$$

$$y(\delta W_{20}; W) = \frac{Y_R(\vec{0}; z)}{X_R(\vec{0}; z) + Y_R(\vec{0}; z) + Z_R(\vec{0}; z)}, \quad (5.47b)$$

y libre de aberraciones

$$x^{(0)}(\delta W_{20}; W) = \frac{X_R^{(0)}(\vec{0}; z)}{X_R^{(0)}(\vec{0}; z) + Y_R^{(0)}(\vec{0}; z) + Z_R^{(0)}(\vec{0}; z)}, \quad (5.48a)$$

$$y^{(0)}(\delta W_{20}; W) = \frac{Y_R^{(0)}(\vec{0}; z)}{X_R^{(0)}(\vec{0}; z) + Y_R^{(0)}(\vec{0}; z) + Z_R^{(0)}(\vec{0}; z)}. \quad (5.48b)$$

De un modo u otro, la estimación de estas magnitudes requiere un cálculo previo de las respuestas monocromáticas axiales $I_R(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)$ e $I_{-z}^{(0)}(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)$, y una posterior integración en el rango espectral de la radiación emitida por el objeto puntual considerado. Ya que sólo es posible obtener un resultado analítico para estas funciones en algunos casos muy simples, en la práctica se recurre a un cálculo numérico de ellas, apoyándose de los métodos referenciados en §4.3. En estas técnicas, tal y como se puso de manifiesto en dicha sección, se realiza una partición de la función pupila en la integral (5.38) y se estima el valor de ésta por superposición de estas contribuciones elementales. Este proceso debe repetirse sucesivamente para cada punto axial considerado y cada componente monocromática. Este procedimiento es siempre largo y poco versátil, ya que una modificación en la aberración de onda del sistema supone que el proceso deba repetirse desde el comienzo para todas las componentes espectrales y las posiciones consideradas sobre el eje óptico.

Este inconveniente se mantiene aún en el caso bastante común de sistemas corregidos parcialmente en los que la aberración esférica y la aberración cromática longitudinal predominan sobre las restantes aberraciones. Esta última viene caracterizada por el término $W_{20}(z; \lambda)$ en la serie (4.90) que, como ya indicamos, pone de manifiesto la dispersión axial de las imágenes monocromáticas proporcionadas por el sistema. Puede considerarse, por lo tanto, como una aberración de desenfoque dependiente de la longitud de onda. Este efecto es uno de los máximos responsables del emborronamiento cromático y la consiguiente degradación de la imagen policromática proporcionada por los sistemas.

El método propuesto en §4.3 representa una solución muy eficiente para el cálculo de las respuestas policromáticas axiales precisamente en este caso. Recordemos que a lo largo de ciertas trayectorias en el espacio imagen, entre las que se incluye el eje óptico, la técnica indicada permite obtener todos los valores de la irradiancia monocromática a partir de integraciones a lo largo de rectas en el espacio-fase de la representación de Wigner bidimensional de una cierta versión de la función pupila del sistema, de acuerdo con lo que se establece en la ec. (4.104). Dicha función característica, en el caso axial, viene dada por la versión en la variable $\mu' = r_o'^2$ de la función (ver ec. (4.122))

$$F^C(r_o'; R; z; \lambda) = 2\pi Q_0(r_o'; z; \lambda), \quad (5.49)$$

siendo $Q_0(r_o'; z; \lambda)$ el armónico circular de orden cero de la función $Q_0(r_o', \theta_o; z; \lambda)$ definida en la ec. (4.91). De acuerdo con lo allí indicado, esta función incluye todas las aberraciones distintas del desenfoque (aberración cromática longitudinal, en este caso) y la aberración esférica primaria, además de las variaciones de amplitud que pueden presentarse en la pupila de salida del sistema. Si consideramos despreciables las dependencias cromáticas de ambas contribuciones, la función $F^C(r_o'; R; z; \lambda)$ será independiente, no sólo del punto axial considerado, sino también de la longitud de onda de la componente espectral considerada. Con todo, podremos expresar

$$F^C(r_o'; R; z; \lambda) = F_o(r_o'; z), \quad (5.50)$$

y, por tanto, la irradiancia axial para cada longitud de onda λ podrá expresarse, de acuerdo con la ec. (4.104), como

$$I_R(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda) = \mathcal{J}_R(0, 0; z; \lambda) = \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\bar{F}_o}(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad (5.51)$$

siendo \bar{F}_o la versión en la variable $\mu' = r_o'^2$ de la función F_o . Tal y como indicamos en §4.3, la trayectoria de integración $(\xi, u(\xi))$ en el espacio-fase corresponde a una recta caracterizada por los parámetros indicados en las ecs. (4.105) y (4.106). La representación $W_{\bar{F}_o}(\xi, u)$ es una función, en este caso, independientemente del punto axial considerado, de la longitud de onda y de los valores concretos de las aberraciones cromática y esférica considerados, que permite, por lo tanto, obtener las respuestas monocromáticas para cualquier valor de estos parámetros, tanto para el sistema aberrado como el caso libre de aberraciones.

Por lo tanto, la respuesta axial policromática podrá obtenerse a partir de las expresiones

$$X_R(\vec{0}; z) = \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \int_{\Lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\bar{F}_o}(\xi, m(z; \lambda)\xi + n(R; z; \lambda)) S(\lambda) \bar{x}_\lambda d\lambda d\xi, \quad (5.52a)$$

$$Y_R(\vec{0}; z) = \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \int_{\Lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\bar{F}_o}(\xi, m(z; \lambda)\xi + n(R; z; \lambda)) S(\lambda) \bar{y}_\lambda d\lambda d\xi, \quad (5.52b)$$

$$Z_R(\vec{0}; z) = \frac{h^4}{4(\lambda z R)^2} \int_{\Lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\bar{F}_o}(\xi, m(z; \lambda)\xi + n(R; z; \lambda)) S(\lambda) \bar{z}_\lambda d\lambda d\xi, \quad (5.52c)$$

donde los valores de $m(z; \lambda)$ y $n(R; z; \lambda)$ vienen dados por las ecs. (4.105). El cálculo de estos parámetros implica, por lo tanto, una integración en una cierta región del espacio-fase de una única representación de Wigner de la pupila del sistema. Este proceso es mucho más eficiente y flexible que las técnicas clásicas indicadas anteriormente, una vez se ha obtenido dicha función de distribución. La consecución de ésta, tal y como se indica en el Apéndice, puede realizarse además de por cálculo digital, por medios ópticos.

La función $F_o(r'_o; z)$ contiene, en este caso, las variaciones de amplitud presentes en la pupila de salida del sistema. Se trata, además, de una versión de la pupila generalizada del sistema, en coordenadas normalizadas, lo que implica que versiones con diferentes escalas de una misma función pupila tienen asociada una misma representación característica $F_o(r'_o; z)$. Si estas pupilas no presentan variaciones de amplitud, este cambio de escala corresponde a diferentes aperturas numéricas del mismo sistema que, de acuerdo con lo anterior, podrá ser estudiadas, también, a partir de la misma función espacio-fase $W_{\bar{F}_o}(\xi, u)$. Nótese que los valores concretos de las magnitudes de $W_{40}(z; \lambda)$ y $W_{20}(R; z; \lambda)$ pueden variar con estos cambios de escala, pero ello sólo afecta a las trayectorias de integración que deben considerarse en cada caso sobre esta representación común.

Con todo, queda claro que, en sistemas afectados únicamente por aberración cromática longitudinal y aberración esférica, es posible obtener todos los valores axiales de irradiancia para todas las longitudes de onda, para todos los valores posibles de dichas aberraciones, y para cualquier escala de la función pupila del sistema, a partir de una única representación espacio-fase bidimensional asociada a dicha función pupila, mediante simples integraciones a lo largo de líneas rectas.

Como ejemplo de aplicación de la técnica propuesta, hemos realizado una evaluación de la respuesta axial de un sistema óptico con una pupila de salida circular como la presentada en fig. 4.6a) y con unos coeficientes de aberración esférica y cromática que se muestran en la fig. 5.7. El estudio se hizo para 36 puntos axiales, caracterizados por valores equiespaciados del coeficiente δW_{20} definido por la ec. (4.98). La irradiancia axial monocromática en función de este parámetro de desenfoque viene dada por una expresión similar a la representada en la ec. (4.129). La representación de Wigner $W_{\bar{F}_o}(\xi, u)$ se obtuvo digitalmente del mismo modo indicado en §4.3.

En este caso concreto, puede obtenerse un resultado analítico para la respuesta

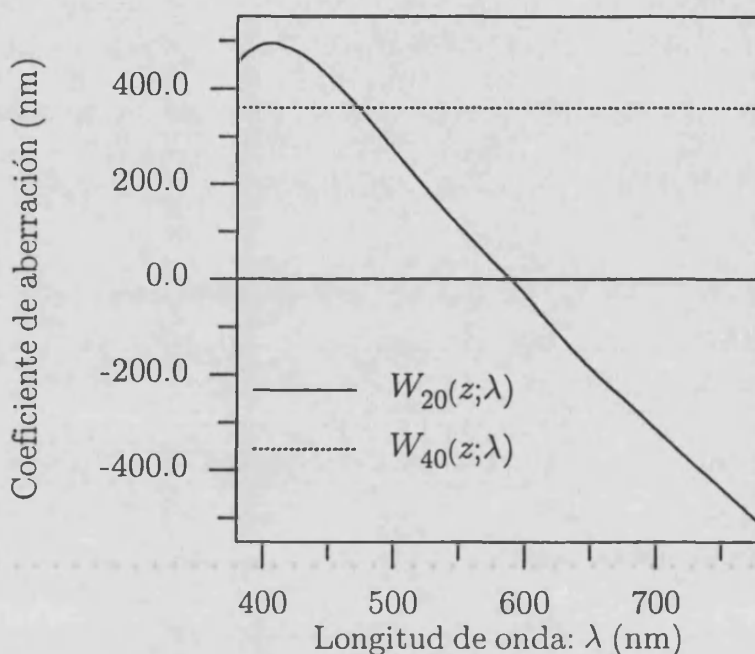


Figura 5.7. Representación gráfica de los coeficientes de aberración cromática longitudinal y esférica del sistema estudiado.

axial monocromática que nos va a permitir establecer una comprobación de los resultados proporcionales por nuestra técnica.² El caso más sencillo se presenta cuando la aberración esférica del sistema es nula, es decir, $W_{40}(z; \lambda) = 0$. En estas circunstancias, es sencillo obtener que

$$I_R(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{\pi^2 h^4}{(\lambda z R)^2} \text{sinc}^2\left(\frac{W'_{20}(R; z; \lambda)}{\lambda}\right). \quad (5.53)$$

La predicción teórica corresponde, por lo tanto, a una función seno cociente al cuadrado centrada en el punto axial caracterizado por

$$W'_{20}(R; z; \lambda) = 0 \rightarrow \delta W_{20}(R; z) = -W_{20}(z; \lambda), \quad (5.54)$$

y con un valor máximo inversamente proporcional a λ^2 . Para obtener los resultados correspondientes a esta situación con la técnica que proponemos, realizamos la integral indicada en la ec. (4.104) a lo largo de rectas en el espacio-fase con parámetros dados por la ec. (4.105). En ausencia de aberración esférica, estas líneas son paralelas al eje ξ y, para cada valor de δW_{20} cortan al eje frecuencial en el punto caracterizado por

$$u = -\frac{W'_{20}(R; z; \lambda)}{\lambda} = -\frac{\delta W_{20}(R; z) + W_{20}(z; \lambda)}{\lambda}. \quad (5.55)$$

²Esta respuesta axial fue obtenida también por el método de Yzuel y Calvo (1983) en §4.3 para algunos valores concretos de $W_{40}(z; \lambda)$ y λ .

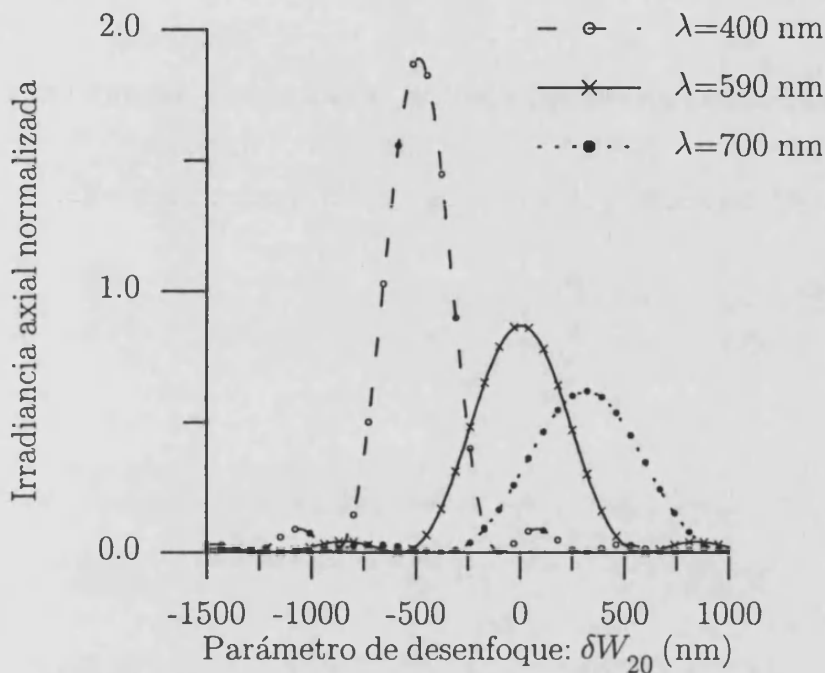


Figura 5.8. Valores de la irradiancia axial $I_R(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda)$ obtenidas para el sistema estudiado, con un valor de $W_{40}(z; \lambda) = 0$, para tres longitudes de onda, en función del parámetro de desenfoque $\delta W_{20}(R; z)$. Los trazos corresponden a la predicción teórica, mientras que los símbolos superpuestos corresponden a los resultados obtenidos con nuestro método. Estos valores se han normalizado a la irradiancia máxima de la curva correspondiente a $\lambda = 550$ nm.

Estas integrales se calcularon para los valores del coeficiente de aberración cromática longitudinal $W_{20}(z; \lambda)$ mostrados en la fig. 5.7 correspondientes a tres longitudes de onda distribuidas a lo largo del espectro visible. El resultado de este proceso se presenta, junto con la predicción analítica de la ec. (5.53), en la fig. 5.8. En esta representación se puede observar el excelente acuerdo que existe entre ambos.

La situación más general corresponde a $W_{40}(z; \lambda) \neq 0$, en cuyo caso la expresión analítica (5.53) se transforma en (Hopkins y Yzuel 1970)

$$I_R(\vec{0}; \vec{0}; z; \lambda) = \frac{\pi^2 h^4}{4(\lambda z R)^2} \frac{1}{W_{40}(z; \lambda)} \times \left| F \left[\frac{W'_{20}(R; z; \lambda) + 2W_{40}(z; \lambda)}{\sqrt{\lambda W_{40}(z; \lambda)}} \right] - F \left[\frac{W'_{20}(R; z; \lambda)}{\sqrt{\lambda W_{40}(z; \lambda)}} \right] \right|^2, \quad (5.56)$$

siendo

$$F[Z] = \int_0^Z e^{j \frac{\pi t^2}{2}} dt, \quad (5.57)$$

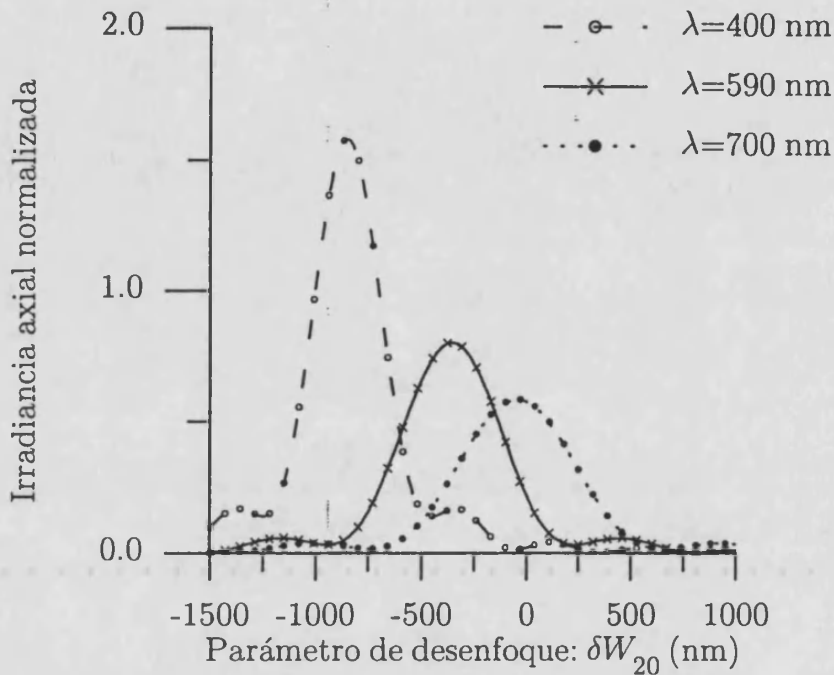


Figura 5.9. Resultados análogos a los presentados en la fig. 5.8, pero para los valores de $W_{40}(z; \lambda)$ indicados en la fig. 5.7. De nuevo, los trazos corresponden a la predicción teórica, mientras que los símbolos superpuestos corresponden a los resultados obtenidos con nuestro método.

la forma compleja de la integral de Fresnel.

Por lo que se refiere a nuestro método, ya que la función característica \bar{F}_0 no ha cambiado respecto del caso anterior estudiado, la misma función de Wigner sirve para obtener los resultados requeridos. En este caso, la integración deberá hacerse a lo largo de líneas rectas con pendientes y ordenadas en el origen dadas en la ec. (4.105) para cada una de las longitudes de onda consideradas.

En la fig. 5.9 se muestran ambos resultados para los coeficientes de aberración de la fig. 5.7 y la mismas longitudes de onda consideradas previamente. De nuevo es de destacar la alta correspondencia que aparece entre las dos predicciones.

Por último, realizamos el cálculo de la iluminancia y las coordenadas cromáticas axiales proporcionadas por el sistema estudiado, tanto en presencia como en ausencia de aberración esférica. Las funciones de sensibilidad espectral utilizadas en la evaluación de los valores triestímulo axiales fueron las correspondientes al observador patrón CIE 1931 (Wyszecki y Stiles 1982). Las integrales (5.52) se evaluaron numéricamente a lo largo del intervalo espectral de longitudes de onda $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 750 \text{ nm}$, que es el rango en el que dichos coeficiente de distribución espectral presentan valores significativos, como se observa en la fig. 5.10. Se escogió una distribución de potencia espectral $S(\lambda)$ para la radiación igual a la del

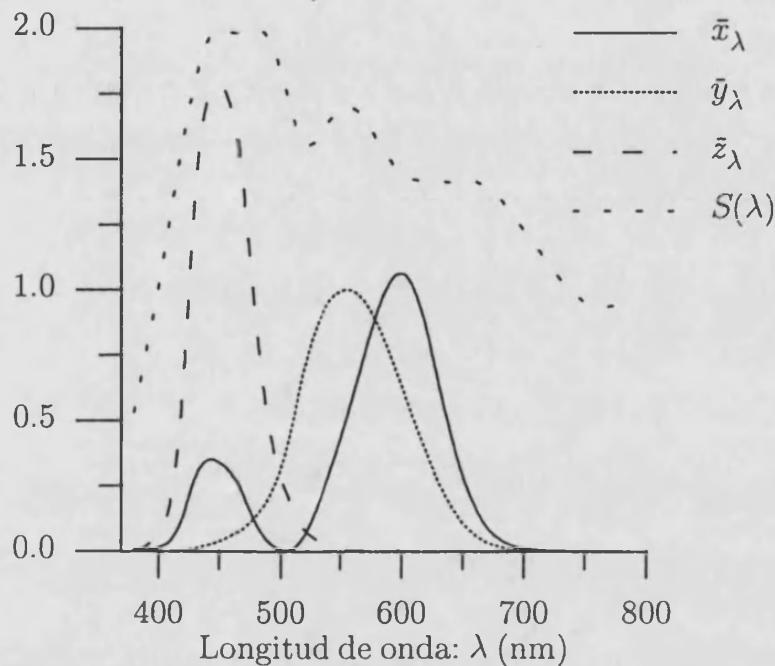


Figura 5.10. Representación gráfica de los valores de las curvas de sensibilidad espectral utilizadas para evaluar la respuesta policromática visual del sistema. Se muestra también una representación de la potencia espectral relativa de la radiación considerada.

iluminante estándar C (Wysecki y Stiles 1982), cuya representación se muestra también en la figura citada. Los resultados obtenidos se comparan, en la fig. 5.11, con los que se presentan en el trabajo (Arlegui de Pablos 1973), que fueron conseguidos a partir del método clásico usado como referencia en §4.3. De nuevo puede observarse una buena correspondencia entre las predicciones de ambos métodos.

En resumen, hemos mostrado como el método presentado en §4.3 puede explotarse en su máxima eficiencia en el caso de sistemas ópticos que trabajan con iluminación policromática, ya que a través de una única representación de Wigner de la pupila del sistema es posible obtener todas las componentes monocromáticas de ciertas funciones de mérito policromáticas con la razón de Strehl, para cualquier estado de corrección de la aberración esférica y la aberración cromática longitudinal. En el caso de sistemas cuya pupila no presente variaciones de amplitud, esta ventaja se extiende también a las diferentes aperturas numéricas con las que puedan trabajar los mismos. Estas características lo hacen especialmente ventajoso respecto a otras técnicas convencionales.

Las ideas presentadas en esta sección se recogen en las referencias (Furlan *et al.* 1994) (Furlan *et al.* 1996).

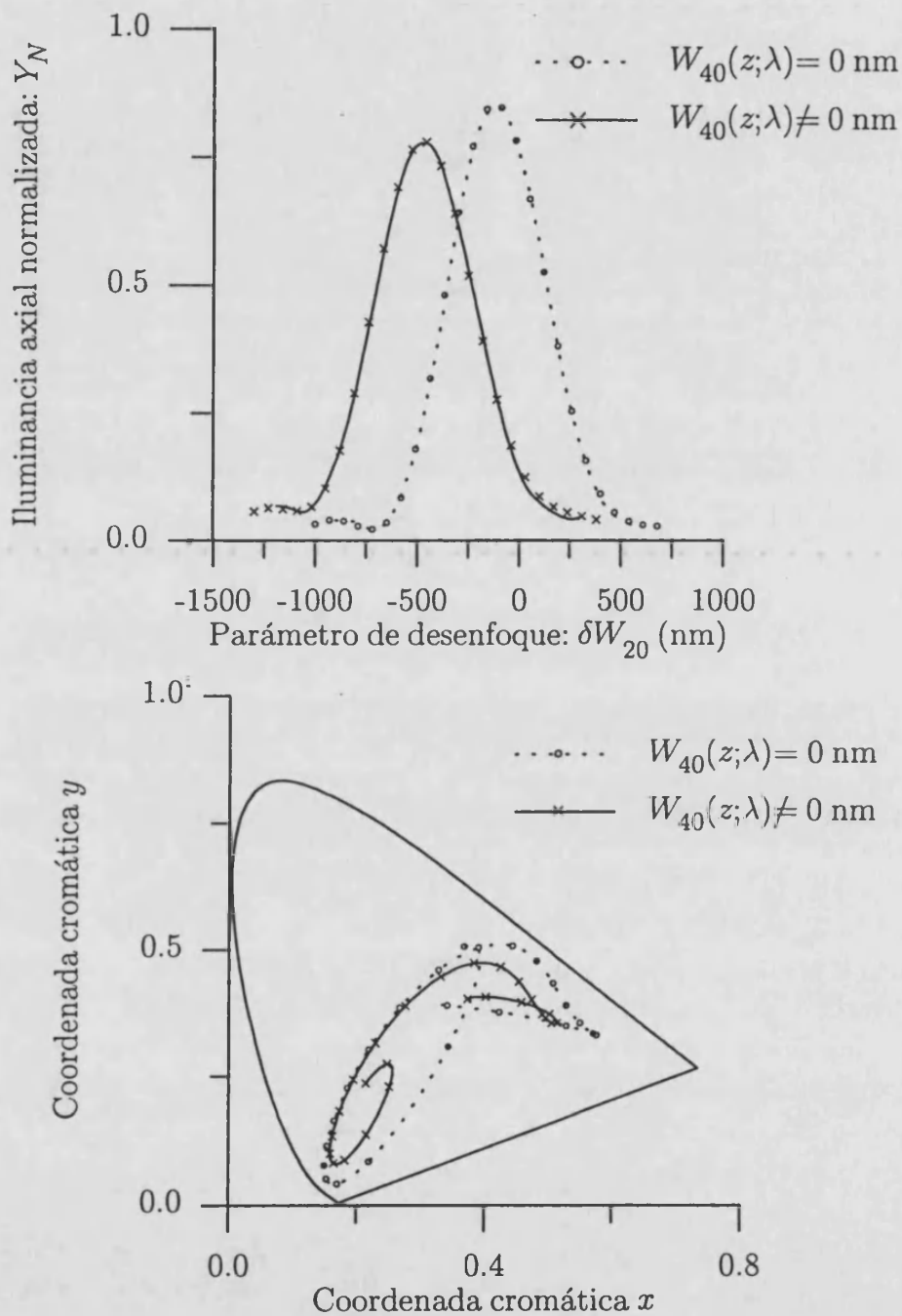


Figura 5.11. Valores axiales de la iluminancia normalizada, $Y_N(\delta W_{20}; W)$, y de las coordenadas cromáticas, $x(\delta W_{20}; W)$ e $y(\delta W_{20}; W)$, obtenidas para el sistema estudiado para los valores de $W_{40}(z; \lambda)$ indicados en la fig. 5.7 y considerando, además, el caso $W_{40}(z; \lambda) = 0$. Como en figuras anteriores, los trazos corresponden a la predicción teórica, mientras que los símbolos superpuestos corresponden a los resultados obtenidos con nuestro método.

5.4 Uso de la función ambigüedad en la obtención de las funciones de transferencia óptica policromáticas

El análisis realizado en las secciones precedentes de la respuesta proporcionada por los sistemas formadores de imágenes se ha basado en una descripción en el dominio espacial de las mismas. Sin embargo, en ocasiones resulta más conveniente caracterizar el comportamiento de dichos dispositivos desde el punto de vista de la transformación que provocan en el contenido frecuencial de las señales de entrada. En particular, una función de mérito muy utilizada en el diseño de sistemas que trabajan con iluminación monocromática espacialmente incoherente es la función de transferencia óptica, que caracteriza las propiedades de formación de imágenes de los dispositivos de un modo que resulta, en ciertos casos, de mayor utilidad que las propias distribuciones de irradiancia proporcionadas por éstos (Hopkins 1955) (Mino y Okano 1971). La extensión adecuada de esta descripción al caso de iluminación de ancho de banda finito permite definir criterios de calidad para los sistemas que generan señales en color (Bescós y Santamaría 1977) (Bescós *et al.* 1988). El propósito de esta sección es la aplicación de una técnica, basada en una representación espacio-fase de la pupila del sistema, para la obtención de la función de transferencia óptica policromática de un modo eficiente y flexible. La función ambigüedad será la distribución que permitirá esta descripción.

La relación existente entre las distribuciones de amplitud de la señal de entrada, $U_E(\vec{r})$, y la de salida, $U_S(\vec{r})$, en los sistemas ópticos lineales iluminados coherentemente se establece a través de la relación indicada en la ec. (4.41), es decir

$$U_S(\vec{r}; \lambda) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vec{r}, \vec{r}'; \lambda) U_E(\vec{r}'; \lambda) d^2\vec{r}' , \quad (5.58)$$

siendo $h(\vec{r}, \vec{r}'; \lambda)$ la respuesta en amplitud proporciona por el sistema a una señal impulsional $U_E(\vec{r}'; \lambda) = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$. Tal y como se estableció en §4.2, si el sistema estudiado es, además, invariante a desplazamientos, esta relación se transforma en una convolución de modo que

$$U_S(\vec{r}; \lambda) = U_E(\vec{r}; \lambda) \otimes h_o(\vec{r}; \lambda) , \quad (5.59)$$

siendo $h_o(\vec{r}; \lambda)$ la respuesta a la señal $U_E(\vec{r}'; \lambda) = \delta(\vec{r}')$. Tal y como indicamos en dicha sección, esta relación se traduce en un producto en el dominio frecuencial, de modo que podemos expresar

$$\tilde{U}_S(\vec{w}; \lambda) = \tilde{U}_E(\vec{w}; \lambda) H_o(\vec{w}; \lambda) , \quad (5.60)$$

siendo

$$H_o(\vec{w}; \lambda) = \mathcal{F} \{ h_o(\vec{r}; \lambda); \vec{w} \} . \quad (5.61)$$

Si la señal de entrada se ilumina ahora con radiación espacialmente incoherente, el principio de superposición indicado en la ec. (2.153) conduce directamente a establecer una relación lineal espacialmente invariante entre las distribuciones de irradiancia sobre la señal de entrada y la de salida, es decir,

$$I_S(\vec{r}; \lambda) = I_E(\vec{r}; \lambda) \otimes \bar{h}_o(\vec{r}; \lambda) , \quad (5.62)$$

siendo la respuesta impulsional $\bar{h}_o(\vec{r})$ el módulo cuadrado de la respuesta coherente $h_o(\vec{r})$, es decir

$$\bar{h}_o(\vec{r}; \lambda) = |h_o(\vec{r}; \lambda)|^2 . \quad (5.63)$$

En el dominio frecuencial, por lo tanto, se obtiene una relación del tipo

$$\tilde{I}_S(\vec{w}; \lambda) = \tilde{I}_E(\vec{w}; \lambda) \tilde{H}_o(\vec{w}; \lambda) , \quad (5.64)$$

siendo

$$\tilde{H}_o(\vec{w}; \lambda) = \mathcal{F} \{ \bar{h}_o(\vec{r}; \lambda); \vec{w} \} . \quad (5.65)$$

Teniendo en cuenta la relación (5.63) y la propiedad

$$\mathcal{F}_{1D} \{ f(\vec{r})g(\vec{r}); \vec{w} \} = \tilde{f}(\vec{w}) \otimes \tilde{g}(\vec{w}) , \quad (5.66)$$

que es válida para dos funciones $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$ cualesquiera, es directo obtener que la función de transferencia que relaciona los contenidos frecuenciales de las distribuciones de irradiancia de entrada y salida vendrá dada por

$$\tilde{H}_o(\vec{w}; \lambda) = H_o(\vec{w}; \lambda) * H_o(\vec{w}; \lambda) . \quad (5.67)$$

Así pues, la autocorrelación de la función de transferencia coherente proporciona la función de transferencia con iluminación incoherente.

Consideremos, en concreto, un sistema formador de imágenes con estas características cuya respuesta pueda caracterizarse por la expresión (4.84), a través de la función pupila $\mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda)$. Dicha expresión puede reagruparse para proporcionar la ecuación

$$\begin{aligned} h_o(\vec{r}; R; z; \lambda) &\triangleq U_R(\vec{r}; \vec{0}; z; \lambda) = \\ &= \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(R+z)} e^{j\frac{\pi}{\lambda R}|\vec{r}|^2}}{j\lambda z R} \mathcal{F} \left\{ \hat{\mathbb{P}}_o(\vec{r}_o; z; R; \lambda); \frac{1}{\lambda R} \vec{r} \right\} , \end{aligned} \quad (5.68)$$

donde a la función

$$\hat{\mathbb{P}}_o(\vec{r}_o; z; R; \lambda) = \mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta W_{20}(z; R; \lambda)}{k^2} |\vec{r}_o|^2} , \quad (5.69)$$

la denominaremos función pupila extendida. En realidad es directo observar que esta función corresponde a la función pupila $\mathbb{P}_o(\vec{r}_o; z; \lambda)$ si se considera una aberración de desenfoque adicional dada por $\delta W_{20}(z; R; \lambda)$.

Con todo, es sencillo obtener que la función de transferencia incoherente viene dada por

$$\bar{H}_o(\vec{w}; R; z; \lambda) = \frac{1}{(\lambda z R)^2} \left[\hat{\mathbb{P}}_o(-\lambda R \vec{w}; z; R; \lambda) * \hat{\mathbb{P}}_o(-\lambda R \vec{w}; z; R; \lambda) \right]. \quad (5.70)$$

Usualmente, se utiliza una versión normalizada de este parámetro para describir la respuesta frecuencial del sistema, denominada función de transferencia óptica y definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{w}; R; z; \lambda) &= \frac{\bar{H}_o(\vec{w}; R; z; \lambda)}{\bar{H}_o(\vec{0}; R; z; \lambda)} = \\ &= \frac{1}{S_{\mathbb{P}_o}} \left[\hat{\mathbb{P}}_o(-\lambda R \vec{w}; z; R; \lambda) * \hat{\mathbb{P}}_o(-\lambda R \vec{w}; z; R; \lambda) \right], \end{aligned} \quad (5.71)$$

donde $S_{\mathbb{P}_o}$ es el volumen de la función pupila generalizada.

Resulta muy conveniente factorizar la función extendida considerando explícitamente el parámetro de desenfoque $\delta W_{20}(z; R; \lambda)$ y el coeficiente $W_{20}(z; \lambda)$ del polinomio de aberraciones. De este modo, podemos expresar

$$\hat{\mathbb{P}}_o(\vec{r}_o; z; R; \lambda) = \Omega(\vec{r}_o; z; \lambda) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{W'_{20}(z; R; \lambda)}{h^2} |\vec{r}_o|^2}, \quad (5.72)$$

donde la función $\Omega(\vec{r}_o; z; \lambda)$ incluye las variaciones de amplitud de la pupila del sistema, junto con todas las aberraciones a excepción del desenfoque $W_{20}(z; \lambda)$. Sustituyendo en la ec. (5.71) esta expresión, puede obtenerse que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{w}; R; z; \lambda) &= \frac{1}{S_{\mathbb{P}_o}} \frac{1}{(\lambda R)^2} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \Omega\left(\vec{\mu} - \frac{\lambda R \vec{w}}{2}; z; \lambda\right) \Omega^*\left(\vec{\mu} - \frac{\lambda R \vec{w}}{2}; z; \lambda\right) e^{-j 4\pi \frac{W'_{20}(z; R; \lambda) R}{h^2} \vec{w} \cdot \vec{\mu}} d^2 \vec{\mu}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

que, de acuerdo con la ec. (4.131), puede expresarse como

$$\mathcal{H}(\vec{w}; R; z; \lambda) = \frac{1}{S_{\mathbb{P}_o}} \frac{1}{(\lambda R)^2} A_{\Omega} \left(-\lambda R \vec{w}, \frac{2W'_{20}(z; R; \lambda) R}{h^2} \vec{w} \right). \quad (5.74)$$

Así pues, la función ambigüedad de la función $\Omega(\vec{r}_o; z; \lambda)$ definida en la ec. (5.72), $A_{\Omega}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, contiene todos los valores de la función de transferencia óptica del sistema, salvo un factor global, a lo largo de secciones caracterizadas por la ecuación

$$\vec{\beta} = -\frac{2W'_{20}(z; R; \lambda)}{\lambda h^2} \vec{\alpha}. \quad (5.75)$$

Nótese que en el caso unidimensional estos perfiles en el espacio-fase se obtienen a lo largo de rectas que pasan por el origen de coordenadas y tienen una pendiente, medida respecto del eje espacial, dada por

$$\begin{aligned} m(R; z; \lambda) &= -\frac{2W'_{20}(z; R; \lambda)}{\lambda h^2} = \\ &= -\frac{2W_{20}(z; \lambda)}{\lambda h^2} - \frac{2\delta W_{20}(z; R; \lambda)}{\lambda h^2}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Así pues, con iluminación monocromática, los valores de la función de transferencia óptica del sistema pueden obtenerse, para cualquier plano de observación caracterizado por un valor concreto del parámetro $\delta W_{20}(z; R; \lambda)$, a partir de una única representación espacio-fase de la pupila del sistema (Brenner *et al.* 1983).

La extensión de esta técnica al caso de iluminación temporalmente incoherente supone realizar una generalización del concepto de función de transferencia óptica presentado previamente. La comparación de las distribuciones de irradiancia policromática a la entrada y a la salida del sistema no permite, en general, establecer una relación análoga a la obtenida en el caso monocromático. Puede demostrarse que sólo en el caso de que la señal de entrada presente una distribución espectral uniforme desde el punto de vista espacial puede derivarse una correspondencia como la citada entre los contenidos frecuenciales de ambas. Adicionalmente, las aberraciones de aumento del sistema deben ser prácticamente nulas en todo el rango espectral de la radiación utilizada (Barnden 1974) (Barnden 1976). Si estas condiciones se cumplen, es posible generalizar el tratamiento previo de modo que los patrones policromáticos de irradiancia de entrada y salida, $I_E(\vec{r})$ e $I_S(\vec{r})$ respectivamente, se relacionen a través de la expresión

$$\tilde{I}_S(\vec{w}) = \tilde{I}_E(\vec{w}) \mathfrak{H}(\vec{w}), \quad (5.77)$$

donde

$$\mathfrak{H}(\vec{w}) = \int_{\Lambda} \mathcal{H}(\vec{w}; \lambda) S(\lambda) d\lambda, \quad (5.78)$$

siendo Λ el rango espectral de la iluminación y $S(\lambda)$ la potencia espectral de la misma. De nuevo, por tanto, la caracterización del sistema óptico en el caso policromático se realiza a través de la superposición de las respuestas monocromáticas asociadas.

Tal y como indicamos en la sección anterior, es fundamental en estos casos considerar la respuesta espectral $V(\lambda)$ del detector utilizado a la salida del dispositivo considerado. Este hecho modifica el peso con el que interviene cada una de las componentes espectrales en la integración indicada en la ec. (5.78), de modo que la respuesta efectiva en el dominio de frecuencias espaciales vendrá caracterizada

por la función

$$\widehat{\mathfrak{H}}(\vec{w}) = \int_{\Lambda} \mathcal{H}(\vec{w}; \lambda) S(\lambda) V(\lambda) d\lambda . \quad (5.79)$$

De acuerdo con lo establecido en la sección anterior, en el caso de los sistemas de visión directa, la información de relevancia en la imagen final incluye no sólo las variaciones de iluminancia sino también las de cromaticidad. En este caso, una descripción a través de una única función de transferencia óptica resulta insuficiente (Takeda 1981). Ya que las distribuciones de irradiancia de entrada y salida pueden caracterizarse a partir de los valores triestímulo asociados a las mismas, resulta mucho más adecuado definir tres funciones de transferencia óptica relacionadas con la transformación de dichos parámetros (Bescós y Santamaría 1977) (Bescós *et al.* 1988). Puede deducirse que estas tres funciones policromáticas vienen dadas por

$$\mathfrak{H}_X(\vec{w}) = \frac{\int_{\Lambda} \mathcal{H}(\vec{w}; \lambda) S(\lambda) \bar{x}_{\lambda} d\lambda}{\int_{\Lambda} S(\lambda) \bar{x}_{\lambda} d\lambda} , \quad (5.80a)$$

$$\mathfrak{H}_Y(\vec{w}) = \frac{\int_{\Lambda} \mathcal{H}(\vec{w}; \lambda) S(\lambda) \bar{y}_{\lambda} d\lambda}{\int_{\Lambda} S(\lambda) \bar{y}_{\lambda} d\lambda} , \quad (5.80b)$$

$$\mathfrak{H}_Z(\vec{w}) = \frac{\int_{\Lambda} \mathcal{H}(\vec{w}; \lambda) S(\lambda) \bar{z}_{\lambda} d\lambda}{\int_{\Lambda} S(\lambda) \bar{z}_{\lambda} d\lambda} . \quad (5.80c)$$

La misma elección de los estímulos cromáticos primarios que permite asociar la sensación de brillo al valor triestímulo Y y las de cromaticidad a las coordenadas cromáticas definidas en las ecs. (5.41) establece una correspondencia entre el módulo de la función $\mathfrak{H}_Y(\vec{w})$ y el contraste visual de las imágenes proporcionadas por el sistema, mientras que la cromaticidad asociada a cada frecuencia espacial queda determinada a través de las diferencias relativas en las tres funciones indicadas en las ecs. (5.80).

De modo similar a lo que ocurría en el caso estudiado en la sección anterior, sólo en unos pocos casos las componentes espectrales asociadas a estas funciones de transferencia policromáticas admiten un resultado analítico. Es mucho más común, en cambio, que se requiera un cálculo numérico de un número convenientemente elevado de ellas para estimar las integrales de superposición indicadas en (5.80) con una precisión adecuada. Este proceso secuencial puede resultar muy largo sobre todo si el rango espectral de la radiación utilizada se extiende a todo el espectro visible (Bescós *et al.* 1988). La evaluación de estas funciones policromáticas puede

abordarse en algunos casos a través de la representación de la función pupila del sistema a partir de la función ambigüedad indicada en la ec. (5.74). De hecho, de acuerdo con lo establecido en dicha ecuación, podemos expresar las funciones de transferencia óptica para los valores triestímulo asociadas a un sistema formador de imágenes como

$$\mathfrak{H}_X(\bar{w}; R; z) = \frac{\int_{\Lambda} A_{\Omega} \left(-\lambda R \bar{w}, \frac{2W'_{20}(z; R; \lambda) R}{h^2} \bar{w} \right) S(\lambda) \bar{x}_{\lambda} d\lambda}{\int_{\Lambda} S(\lambda) \bar{x}_{\lambda} d\lambda}, \quad (5.81a)$$

$$\mathfrak{H}_Y(\bar{w}; R; z) = \frac{\int_{\Lambda} A_{\Omega} \left(-\lambda R \bar{w}, \frac{2W'_{20}(z; R; \lambda) R}{h^2} \bar{w} \right) S(\lambda) \bar{y}_{\lambda} d\lambda}{\int_{\Lambda} S(\lambda) \bar{y}_{\lambda} d\lambda}, \quad (5.81b)$$

$$\mathfrak{H}_Z(\bar{w}; R; z) = \frac{\int_{\Lambda} A_{\Omega} \left(-\lambda R \bar{w}, \frac{2W'_{20}(z; R; \lambda) R}{h^2} \bar{w} \right) S(\lambda) \bar{z}_{\lambda} d\lambda}{\int_{\Lambda} S(\lambda) \bar{z}_{\lambda} d\lambda}. \quad (5.81c)$$

Es claro que si la función $\Omega(\vec{r}_0; z; \lambda)$ presenta una variación despreciable con la longitud de onda, su función ambigüedad permite describir todas las componentes espectrales necesarias para caracterizar el sistema, de modo que las integrales anteriores pueden interpretarse como una integración en una cierta región del espacio-fase de dicha representación. Esta independencia cromática se cumplirá cuando las aberraciones diferentes de la correspondiente al término $W_{20}(z; \lambda)$ en el polinomio de aberraciones —aberración cromática longitudinal— presentan una variación despreciable con la longitud de onda. En estas circunstancias, una única función permite establecer todos los valores de las funciones de transferencia óptica policromáticas para cualquier plano de observación considerado —caracterizado por el valor del parámetro $\delta W_{20}(z; R)$ implícito en las ecuaciones anteriores— y cualquier valor de la aberración cromática. Adicionalmente, cualquier versión escalada de $\Omega(\vec{r}_0; z; \lambda)$ puede ser utilizada en la evaluación de estas funciones, gracias a la propiedad de la función ambigüedad (4.154). En el caso unidimensional, esta propiedad se traduce en el hecho de que si se usa una representación espacio-fase asociada a una función cuya escala respecto de $\Omega(\vec{r}_0; z; \lambda)$ es M , los valores de las pendientes de las rectas indicadas en (5.76) deben sustituirse por

$$m_M(R; z; \lambda) = M^2 m(R; z; \lambda). \quad (5.82)$$

Así pues, la función ambigüedad de cualquier versión escalada de la función $\Omega(\vec{r}_0; z; \lambda)$ asociada al sistema contiene todos los valores necesarios para obtener la respuesta policromática en frecuencias espaciales del mismo. Este hecho es muy interesante ya que permite que la consecución de esta representación dual de la pupila del

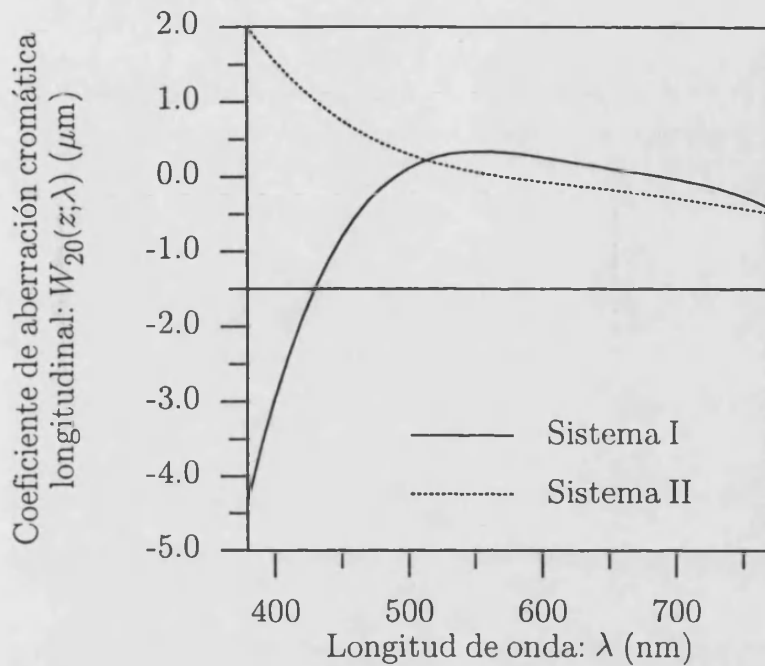


Figura 5.12. Coeficientes de aberración cromática longitudinal, $W_{20}(z; \lambda)$, asociados a los dos sistemas estudiados. El sistema I corresponde a un doblete acromático con una típica corrección F-C, mientras que el sistema II corresponde a un dispositivo con una mejor compensación cromática (Santamaría 1973).

dispositivo pueda llevarse a cabo, a partir de una réplica de la misma, por los métodos ópticos indicados en el Apéndice, provocando un ahorro de tiempo de cálculo adicional.

Para ilustrar esta técnica, hemos realizado el cómputo de las funciones de transferencia óptica policromáticas asociadas a dos sistemas ópticos que presentan una aberración cromática longitudinal caracterizada por los coeficientes representados en la fig. 5.12. Hemos supuesto que los restantes términos en el polinomio de aberraciones son nulos. Por simplicidad, se ha considerado un caso unidimensional, lo que permite estudiar las funciones de interés a partir de una representación bidimensional más manejable que la tetradimensional del caso general. Este hecho, sin embargo no resta generalidad al método. La función pupila considerada fue una simple función rectángulo, es decir, consideramos el caso en el que

$$\Omega(x_o; z; \lambda) = \text{rect} \left(\frac{x}{h} \right) . \quad (5.83)$$

La función ambigüedad asociada a esta pupila se obtuvo digitalmente del mismo modo en que se actuó en las secciones precedentes. En este caso en el que la pupila es par, puede demostrarse de un modo muy sencillo que esta representación espacio-fase es una función real y, por lo tanto, también lo serán todas las funciones de

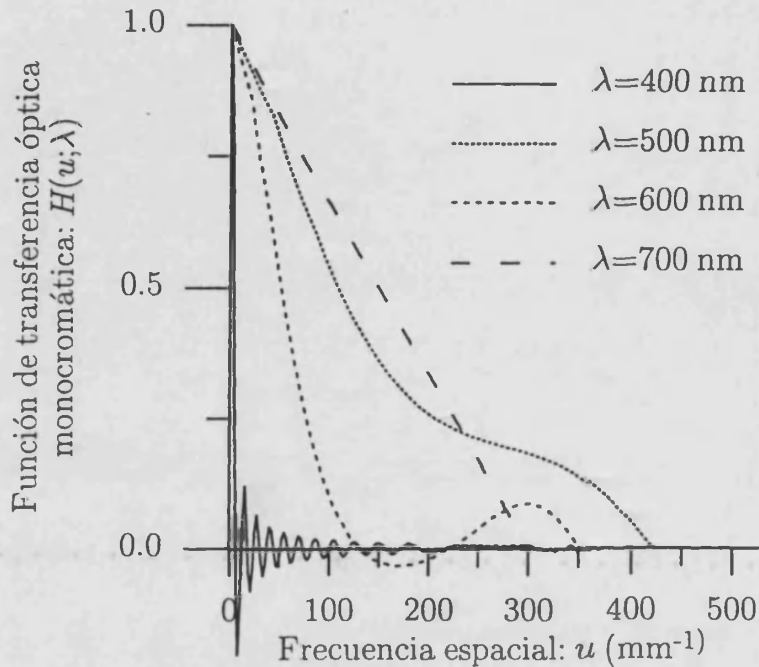


Figura 5.13. Representación gráfica de los valores proporcionados por la técnica que proponemos de las funciones de transferencia óptica monocromáticas correspondientes al sistema I de la fig. 5.12 para cuatro longitudes de onda diferentes.

transferencia ópticas derivadas de ella. Algunas secciones de ésta se muestran en la fig. 5.13. Dichos perfiles corresponden a las pendientes asociadas a 4 longitudes de onda que barren todo el espectro visible, en el caso del primero de los sistemas estudiados eligiendo una relación entre los parámetros z y h característicos del sistema de modo que la apertura numérica del mismo fuese $1/5$ y para un valor nulo del parámetro de desenfoque $\delta W_{20}(z; R)$. En dicha figura se pone de manifiesto el conocido cambio en la extensión de la función de transferencia óptica para las diferentes longitudes de onda. La dependencia cromática de las variables de la función ambigüedad que proporciona las funciones de transferencia, que puede observarse en la ec. (5.74), garantiza implícitamente este efecto, proporcionando frecuencias de corte diferentes en cada caso. Además, la forma de dichas funciones se ajusta muy bien a las predicciones clásicas para los diferentes estados de "desenfoque" que presenta el sistema para las componentes espectrales consideradas (Goodman 1968, §6).

Los valores las funciones de transferencia ópticas policromáticas para ambos sistemas se calcularon a partir de la superposición ponderada de las respuestas monocromáticas en la banda espectral $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ para un conjunto de 36 longitudes de onda equiespaciadas. La potencia espectral relativa de la radiación así como los valores triestímulo espectrales considerados corresponden

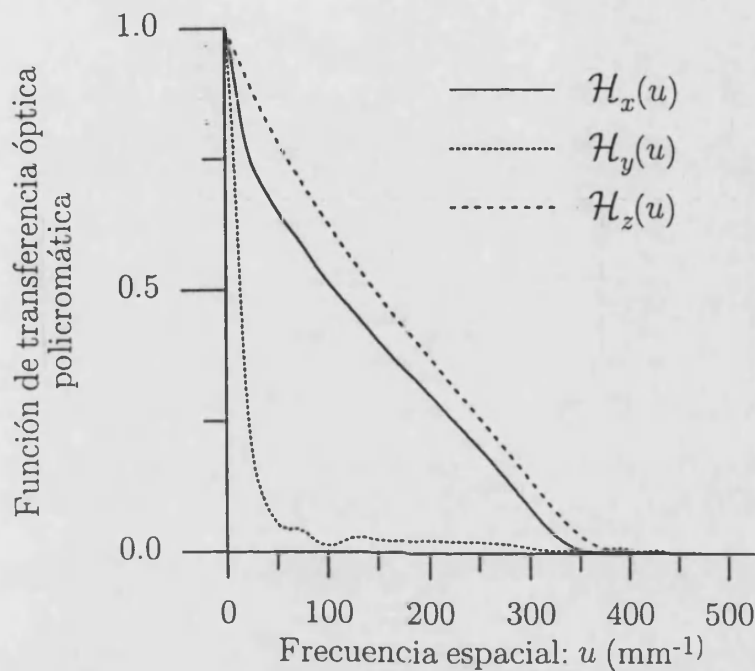


Figura 5.14. Representación gráfica de los valores proporcionados por la técnica que proponemos de las funciones de transferencia óptica policromáticas correspondientes al sistema I de la fig. 5.12 para un plano de salida caracterizado por un parámetro de desenfoque $\delta W_{20}(R; z) = -0,28 \mu\text{m}$.

a los presentados en la fig. 5.10. Los resultados obtenidos para el sistema I de la fig. 5.12 se muestran en la fig. 5.14. En ellos se ha supuesto un parámetro de desenfoque adicional no nulo para mostrar la capacidad del método para, sin modificar la representación que le sirve de base, poder estudiar las funciones de transferencia referidas a cualquier plano desenfocado. El resultado presentado en la fig. 5.15 corresponde al cálculo de las funciones de transferencia óptica obtenidas para el sistema II para el plano de imagen. En ambos casos se aprecia un valor muy bajo para la función correspondiente al valor triestímulo Z. Este hecho se explica por la alta concentración de la función de sensibilidad asociada a éste en torno a las longitudes de onda cortas, que corresponden a la región de mayor aberración cromática en ambos sistemas.

A modo de conclusión, hemos propuesto un método de cálculo de las funciones de transferencia óptica policromáticas de un sistema óptico formador de imágenes afectado de aberración cromática longitudinal, que permite reducir el tiempo de cómputo respecto de otras técnicas convencionales. Este procedimiento se basa en el hecho de que la función ambigüedad asociada a cualquier versión escalada de la pupila del sistema contiene todas las componentes monocromáticas necesarias para dicho cálculo, para cualquier valor de la aberración del sistema y cualquier

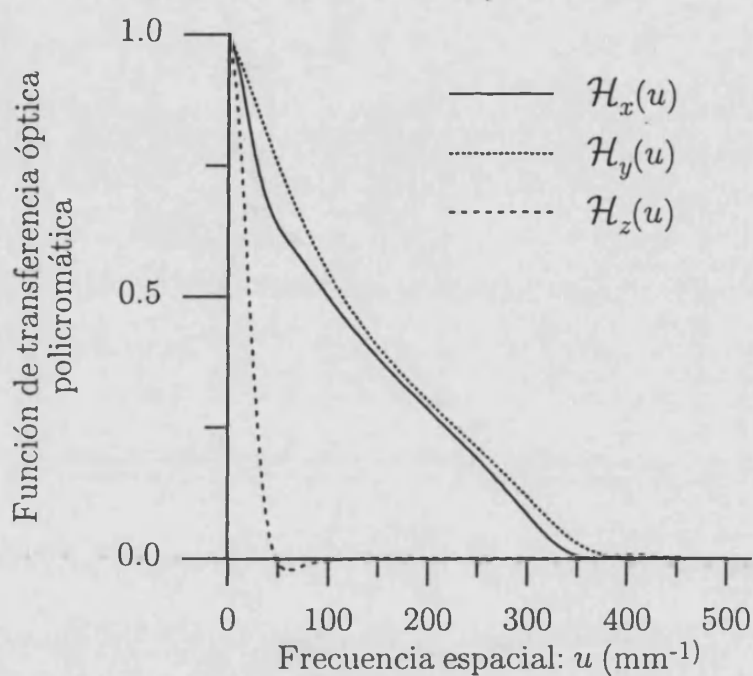


Figura 5.15. Representación gráfica de los valores proporcionados por la técnica que proponemos de las funciones de transferencia óptica policromáticas correspondientes al sistema II de la fig. 5.12 para el plano imagen ($\delta W_{20}(R; z) = 0$).

plano desenfocado considerado. Esta representación espacio-fase puede obtenerse no sólo por métodos digitales sino también por procedimientos ópticos, lo que permite disminuir todavía más el periodo de cálculo. La técnica se ha ilustrado con un par de ejemplos unidimensionales que permiten apreciar algunas de sus características.

Los resultados presentados en esta sección se han recogido en las referencias (Furlan *et al.* 1993) (Furlan *et al.* 1993) (Furlan *et al.* 1994).

Capítulo 6

Conclusiones generales

La utilización de radiación no coherente en el procesado de información es cada vez más frecuente en Óptica, debido a las ventajas que proporciona respecto al tratamiento coherente.

En esta Memoria hemos obtenido una serie de resultados relativos a sistemas ópticos que trabajan con iluminación procedente de fuentes espacial o temporalmente incoherentes. La base común de las propuestas presentadas está constituida por una comprensión detallada de las características del campo electromagnético que se propaga a través de estos sistemas. Para establecer los fundamentos teóricos de esta descripción ha resultado fundamental estudiar en profundidad la estructura de los patrones de difracción generados por una abertura difractante iluminada por una fuente incoherente. De hecho, existe una relación básica entre dicha estructura y la que se obtiene con iluminación perfectamente coherente. Esta correspondencia se establece a través de magnitudes que caracterizan la fuente en cuestión, tal y como se ha puesto de manifiesto en el capítulo 2.

En el caso de que se consideren fuentes cuasimonocromáticas espacialmente incoherentes, la propagación libre del campo difractado por un objeto plano está asociada a una operación intrínseca de correlación entre los correspondientes patrones de difracción coherentes y la distribución de exitancia del emisor considerado. Esta propiedad se ha explotado para presentar un correlador de proyección geométrica perfecta que proporciona la operación de correlación entre dos señales bidimensionales sin necesidad de ningún componente óptico. Se ha reconocido la versatilidad de este dispositivo, estableciendo su capacidad de sintonía con la escala relativa de las señales a procesar, así como la posibilidad de usar filtros puros de fase para reducir las pérdidas energéticas. En este último caso, se ha demostrado la posibilidad de obtener de modo simultáneo la correlación entre la señal de entrada y tanto la señal de referencia como su complementaria. Una reinterpretación de esta propiedad en el dominio de frecuencias espaciales ha permitido, apoyándose en el

teorema de Van Cittert-Zernike, desarrollar una técnica de medida de la coherencia espacial de la radiación, además de conducir a la propuesta de un dispositivo sin lentes que realiza operaciones de filtraje frecuencial con iluminación no coherente.

Por lo que se refiere al caso de fuentes temporalmente incoherentes, se ha abordado el estudio de una serie de métodos aplicables al análisis o al diseño de sistemas ópticos policromáticos. De acuerdo con el principio de superposición, la respuesta de estos dispositivos es la suma ponderada de las contribuciones de las correspondientes componentes espectrales. Estas funciones monocromáticas han sido descritas por otros autores a través de representaciones mixtas espacio-fase de los sistemas, presentando dicho estudio ciertas ventajas respecto a los métodos convencionales. El análisis de las propiedades de algunas de estas representaciones nos ha llevado, en el capítulo 4, a desarrollar dos aplicaciones directas en el caso de iluminación totalmente coherente, a saber, una técnica para el cálculo de la irradiancia a lo largo de curvas tridimensionales mediante la función de Wigner de la pupila de salida del sistema y un método de medida de deformaciones locales en objetos difusores utilizando el espectrograma local asociado al patrón de moteado del objeto antes y después de la distorsión. La extensión del uso de estos formalismos al caso de iluminación de ancho de banda finito ha permitido proponer nuevos procedimientos de estudio de los sistemas ópticos formadores de imágenes, que resultan más eficientes que algunas técnicas convencionales.

Querriamos, antes de finalizar, indicar algunas proyecciones de este trabajo no presentadas en esta Memoria, que constituyen las líneas de expansión futura de nuestro trabajo de investigación.

En primer lugar, es fácil darse cuenta que el dispositivo de correlación propuesto puede adaptarse de modo simple al procesado en tiempo real incorporado en su diseño moduladores espaciales como, por ejemplo, pantallas de cristal líquido. Por otro lado, la utilización de filtros parcialmente adaptados a la señal de referencia puede permitir realizar una detección invariante a determinadas deformaciones de la señal de entrada. Por ejemplo, algunos métodos sugeridos para reconocimiento insensible a rotaciones en el caso de los correladores de transformada conjunta puede aplicarse, con pequeñas variaciones, a este caso (Jutamulia y Asakura 1994). Finalmente, la apodización del filtro de referencia con envolventes de tipo supergaussiano (Ojeda-Castañeda *et al.* 1993) (López-Olazagasti *et al.* 1993) permitirá corregir algunos efectos indeseados asociados al tamaño finito del filtro de referencia.

El estudio de las representaciones duales espacio-frecuencia espacial ha resultado especialmente fructífero, como se deduce en los resultados presentados en los capítulos 4 y 5. Por lo que se refiere al espectrograma local, es posible utilizarlo también para describir algunas de las propiedades de los interferómetros que se basan en el efecto Talbot, en particular, aquéllas que se refieren a su capacidad

de visualización de objetos de fase (Lohmann *et al.* 1994) (Saavedra *et al.* 1996). Otras distribuciones espacio-fase han llamado nuestra atención en las últimas etapas del desarrollo de este trabajo. En particular, la transformada de Radon-Wigner y su función asociada, la transformada de Fourier fraccional, destacan por el gran interés reciente que han suscitado en el campo del procesado óptico de información. Su estudio en profundidad nos ha permitido descubrir una estrecha conexión entre la transformada fraccional de Fourier y los patrones de difracción coherentes de una señal, lo que ha llevado a proponer un procesador fraccional muy versátil que incorpora, a lo sumo, una sola lente en su diseño (Andrés *et al.* 1996). Esta misma conexión permite utilizar el dispositivo acromático analizado en la sección 5.2 para obtener esta transformación fraccional por métodos ópticos con luz blanca (Andrés *et al.* 1996). Un análisis similar del campo coherente difractado por un objeto unidimensional nos ha permitido sugerir un sistema, que usa también una única lente varifocal, para proporcionar una representación simultánea de los diferentes órdenes de la transformada de Fourier fraccional de la transmitancia en amplitud del objeto (Granieri *et al.* 1996).

Así pues, no es necesario destacar que el estudio realizado en esta Memoria abre una vía de desarrollo futuro que se muestra interesante y fructífera.

Apéndice A

Realización óptica de algunas representaciones espacio-fase

En esta parte de la Memoria vamos a presentar un breve compendio de los dispositivos que se han propuesto para la obtención óptica de las distribuciones espacio-fase presentadas en este capítulo, algunos de los cuales ha sido utilizado en el desarrollo experimental de alguna de las aportaciones novedosas que han sido expuestas.

Por lo que respecta a las tres primeras, a saber, la representación de Wigner, la función ambigüedad y el espectrograma complejo —o su módulo cuadrado, el espectrograma local—, los dispositivos sugeridos presentan dos etapas claramente diferenciadas. La primera de ellas consiste en la obtención de las funciones $r_{ff}(\vec{r}, \vec{r}')$ o $r_{fv}(\vec{r}, \vec{r}')$ a partir de elementos que codifiquen, generalmente a través de su transmitancia en amplitud, las variaciones de la señal $f(\vec{r})$ estudiada y, en su caso, las de la función ventana $v(\vec{r})$ escogida. La segunda parte se ocupa de obtener una transformación de Fourier, en las variables \vec{r} o \vec{r}' según corresponda, del resultado de la etapa anterior, para obtener los resultados indicados en las ecs. (4.3), (4.131) o (4.181). Centraremos nuestra atención, a continuación, en la distribución de Wigner y la función ambigüedad, ya que presentan características comunes que hacen muy sencilla la adaptación de los dispositivos que generan una de ellas para que proporcionen como resultado la otra.

Si consideramos los sistemas propuestos para la generación de estas representaciones en el caso de señales que dependen de una sola variable, aparte de las primeras propuestas en las que se sugerían procesadores coherentes multicanal para obtener estas funciones para valores discretos de la coordenada espacial (Preston 1972) o en las que se generaban cortes unidimensionales de ellas de modo sucesivo (Casasent y Casasayas 1975), el primer dispositivo que consiguió generar una representación bidimensional simultánea de todos los valores de estas distribuciones

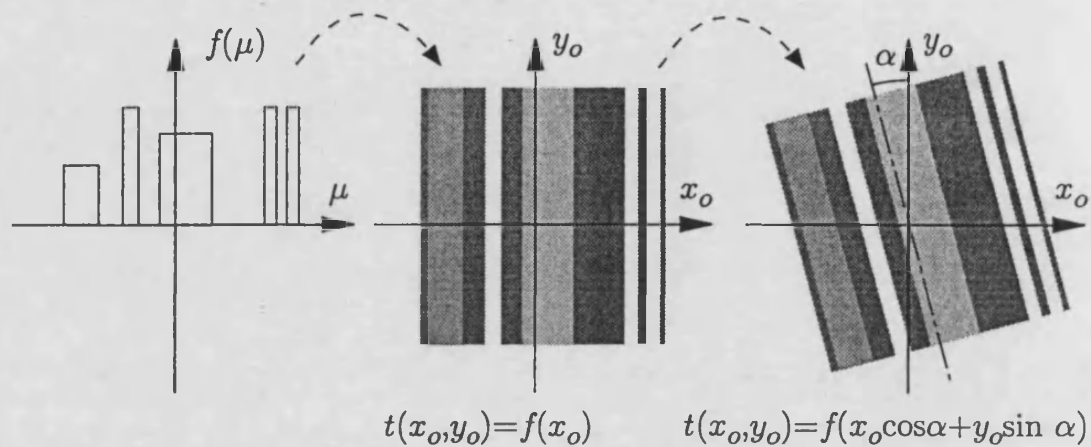


Figura A.1. Diagrama donde se esquematiza el proceso seguido para generar cada una de las transparencias utilizadas en la obtención de la función de Wigner y la función ambigüedad de la función real $f(\mu)$ en el dispositivo propuesto por Marks II *et al.* (1977).

para una señal real se debe a Marks II *et al.* (1977). Este procesador requiere dos transparencias idénticas con transmitancias en amplitud unidimensionales que codifiquen las variaciones de la función $f(\mu)$ cuya representación espacio-fase se pretende obtener, tal y como se muestra en la fig. A.1. El dispositivo propuesto se presenta en la fig. A.2, donde tanto la lente esférica como la cilíndrica se eligen con la misma distancia focal imagen, f . El objeto de entrada está compuesto por la superposición de estas dos transparencias giradas respecto del eje óptico un ángulo α y $-\alpha$, respectivamente. Este objeto presentará una transmitancia en amplitud dada por

$$t(x_o, y_o) = f(x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) f(x_o \cos \alpha - y_o \sin \alpha) . \quad (\text{A.1})$$

Resulta conveniente definir la función auxiliar

$$g(\mu) = f\left(\frac{\mu}{1/\cos \alpha}\right) , \quad (\text{A.2})$$

de modo que podamos expresar la ec. (A.1) como

$$t(x_o, y_o) = g(x_o + y_o \tan \alpha) g(x_o - y_o \tan \alpha) . \quad (\text{A.3})$$

Esta transmitancia codifica directamente la función producto $r_{gg}(x, x')$ en el caso de señales reales como la que nos ocupa, ya que podemos expresar

$$t(x_o, y_o) = r_{gg}(x_o, 2y_o \tan \alpha) . \quad (\text{A.4})$$

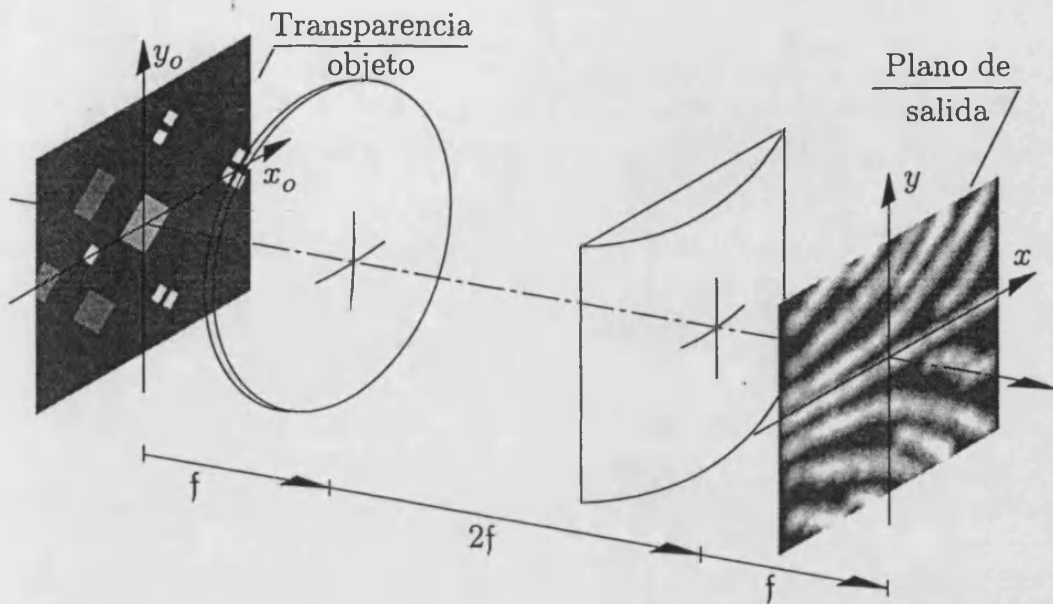


Figura A.2. Esquema del dispositivo propuesto por Marks II *et al.* (1977) para la obtención de la distribución de Wigner de una señal unidimensional real. Para obtener la función ambigüedad basta girar 90° la lente cilíndrica respecto del eje óptico. Ambas lentes tienen la misma longitud focal imagen f .

Por lo tanto, una transformación de Fourier en la coordenada y_0 proporcionará una versión escalada de la distribución de Wigner de la función $g(\mu)$, mientras que si se realiza esta operación en la dirección x_0 se obtendrá un resultado análogo para la función ambigüedad de ésta. Cuando este objeto se ilumina con un haz coherente paralelo al eje óptico puede obtenerse que el acoplamiento de la lente esférica y la cilíndrica proporciona, despreciando el tamaño finito de estos elementos, una distribución de amplitudes sobre el plano de observación proporcional a

$$U(x, y) \propto e^{j\pi \frac{x^2}{\lambda f}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(-x, y_0) e^{-j2\pi \frac{yy_0}{\lambda f}} dy_0, \quad (\text{A.5})$$

de modo que el sistema proporciona una transformada de Fourier unidimensional en la dirección del eje de ordenadas, salvo un factor cuadrático de fase, mientras que proporciona una imagen con aumento -1 en la dirección perpendicular. Es directo obtener que esta distribución de amplitudes puede expresarse como

$$U(x, y) \propto \frac{e^{j\pi \frac{x^2}{\lambda f}}}{2 \tan \alpha} W_g \left(-x, \frac{y}{2\lambda f \tan \alpha} \right). \quad (\text{A.6})$$

De acuerdo con el resultado (4.54), esta expresión puede reescribirse como

$$U(x, y) \propto \frac{e^{j\pi \frac{x^2}{\lambda f}}}{2 \sin \alpha} W_f \left(-x \cos \alpha, \frac{y}{2\lambda f \sin \alpha} \right) \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto, la distribución de irradiancia en el plano de observación proporciona una representación bidimensional simultánea de la transformada de Wigner de la función $f(\mu)$. Estrictamente, en dicha experiencia se obtuvo la función ambigüedad de esta función, aunque la modificación que se debe introducir en el montaje utilizado para obtener la distribución de Wigner es tan simple como girar 90° el eje activo de la lente cilíndrica respecto del eje óptico (Eichmann y Dong 1982). En ese caso, la distribución de amplitudes en el plano focal imagen de la lente cilíndrica vendrá dada por

$$U(x, y) \propto e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda f}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x_o, -y) e^{-j2\pi \frac{x x_o}{\lambda f}} dx_o, \quad (\text{A.8})$$

con lo que es directo obtener que

$$U(x, y) \propto e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda f}} A_g \left(-2y \tan \alpha, \frac{x}{\lambda f} \right), \quad (\text{A.9})$$

expresión que, aplicando la propiedad (4.154), puede reescribirse como

$$U(x, y) \propto \frac{e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda f}}}{\cos \alpha} A_f \left(-2y \sin \alpha, \frac{x}{\lambda f \cos \alpha} \right). \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado, la extensión al caso de señales complejas es directa sin más que codificar una de las transparencias a usar con $f^*(\mu)$ en vez de $f(\mu)$.

El mayor inconveniente del dispositivo anterior es la necesidad del uso de dos transparencias que deben ser situadas y centradas con mucha precisión. Esta dificultad puede obviarse, en el caso de que las señales sean reales, usando el dispositivo que se presenta en la fig. A.3, propuesto originalmente para la obtención de la función ambigüedad por Marks II *et al.* (1979) y modificando para la consecución de la distribución de Wigner por Bastiaans (1980). Una de las transparencias anteriores es iluminada por la radiación coherente paralela que se proyecta sobre ella a través de un divisor de haz. Tras atravesar todo el sistema de tres lentes cilíndricas, no es difícil obtener que sobre el plano del espejo plano aparece una distribución en amplitudes proporcional a la transformada de Fourier de la transparencia objeto en la dirección del eje de ordenadas, y una imagen de la misma en la dirección ortogonal (compensando en este caso, incluso el factor cuadrático de

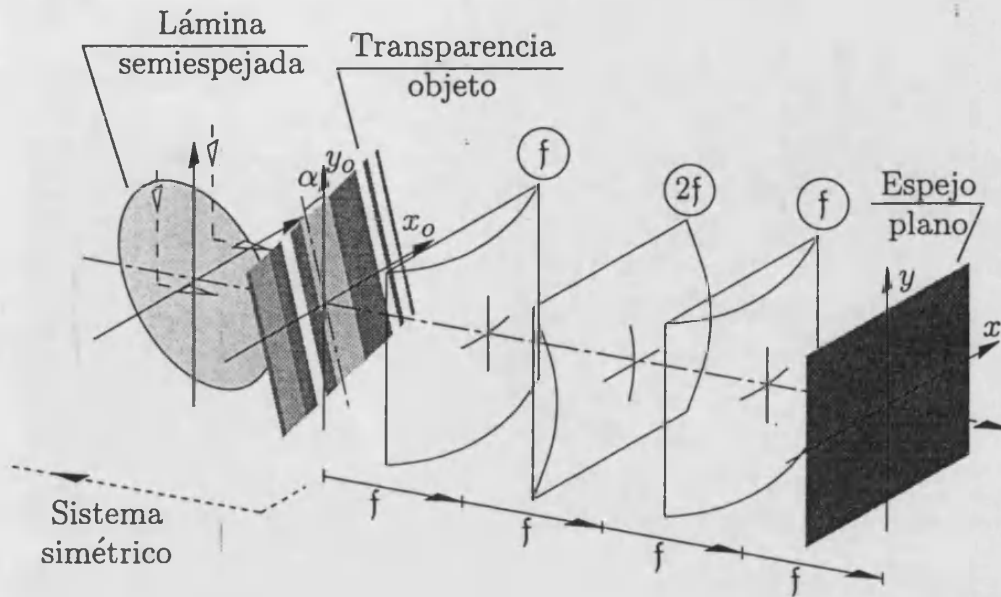


Figura A.3. Esquema del dispositivo propuesto por Marks II *et al.* (1979) para la obtención de la función de distribución de Wigner de una señal unidimensional real. La etapa que se muestra explícitamente permite obtener la función producto $r_{ff}(x, x')$ a partir de una única transparencia que codifica la señal. Si la sección situada a la izquierda de la lámina separadora se gira 90° alrededor del eje óptico se obtiene la función ambigüedad. La longitud focal de cada lente se indica en la parte superior de éstas.

fase que aparecía en el dispositivo anterior). Esta distribución sirve de entrada al mismo dispositivo tras ser reflejada en el citado espejo. Como es sabido (Gaskill 1978, p. 196), un doble proceso de transformación de Fourier restituye la señal original, introduciendo una inversión en la coordenada que se transforma. Por lo tanto, sobre la transparencia se obtendrá una réplica de ésta reflejada en la dirección OY_0 . Así pues, tras atravesarla, se obtendrá una distribución de amplitudes igual a la dada en la ec. (A.1), señal que es procesada, de acuerdo con lo indicado en la fig. A.3, por un sistema igual al anterior. El resultado sobre el plano simétrico, respecto de la lámina separadora, al del espejo plano será similar al obtenido con el dispositivo previo, exceptuando el factor de fase que no aparece en este caso, es decir, se obtiene una versión escalada de la distribución de Wigner de la función $f(\mu)$. De modo análogo a como se indicó en el dispositivo mostrado en la fig. A.2, si la segunda etapa del sistema se gira 90° respecto del eje óptico, se obtiene una versión de la función ambigüedad.

La incorporación de un prisma de techo, que proporciona una inversión espacial respecto de una sólo de las direcciones cartesianas ha permitido presentar propuestas sensiblemente más simples que la anterior, como las recogidas en el

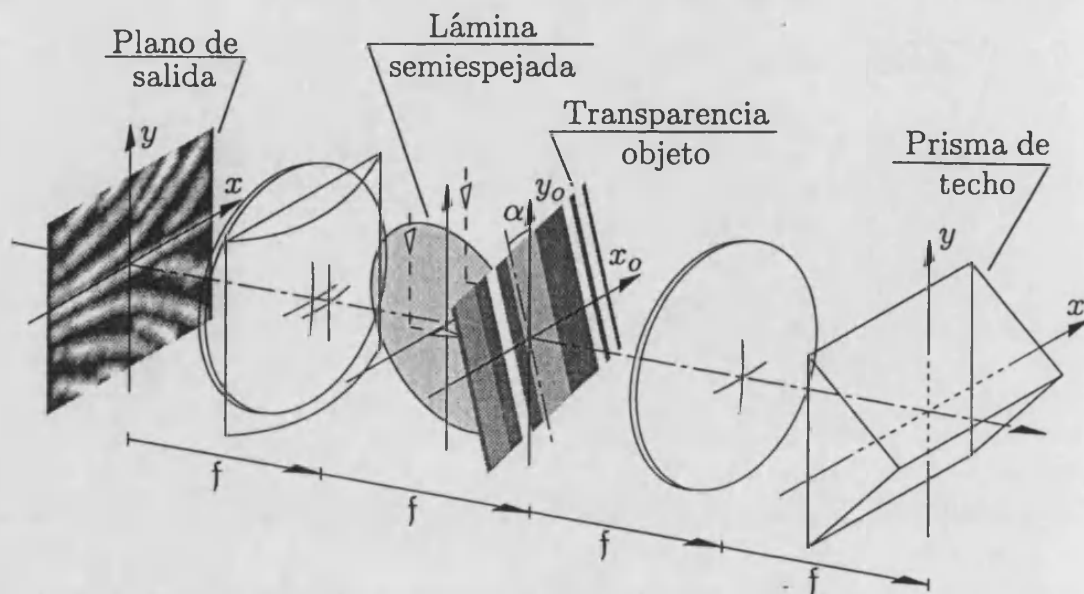


Figura A.4. Esquema del dispositivo propuesto por Brenner *et al.* (1982) para la obtención de la función de distribución de Wigner de una señal unidimensional real a partir de una única transparencia que codifica la señal. Si la sección situada a la izquierda de la lámina separadora se gira 90° respecto del eje óptico se obtiene la función ambigüedad. La longitud focal imagen de todas las lentes es f .

trabajo clásico de Brenner *et al.* (1982). En esta publicación se recogen tres dispositivos mejorados para la obtención de la representación de Wigner de una señal de una sola variable, que con las variantes indicadas en los dos dispositivos anteriores permiten obtener, también, la función ambigüedad de ésta. El primero de ellos se aplica, como el anterior, a señales reales, y su esquema básico se presenta en la fig. A.4. La transparencia objeto es similar a la usada en el sistema previo. Sin embargo, la necesaria imagen de ésta convenientemente invertida se obtiene a través de una lente esférica y un prisma de techo. Tal y como se pueden deducir de la fig. A.4, esta lente proporciona una transformada de Fourier bidimensional exacta del objeto sobre el prisma, que provoca una inversión en la coordenada y , y devuelve hacia la lente la distribución de amplitudes resultante. El resultado final sobre el objeto, después de que la radiación atravesase de nuevo la lente en sentido contrario, es una réplica del mismo con un cambio de signo en la coordenada y_0 . Tras atravesar la transparencia se obtiene, de nuevo, una distribución de amplitudes proporcional a la función $t(x_0, y_0)$ indicada en la ec. (A.1). Esta amplitud sirve de entrada al procesador anamórfico indicado a la derecha de la fig. A.4. El doblete pegado que se presenta en dicha figura, constituido por el acoplamiento de una lente esférica y una cilíndrica de la misma distancia focal, f , equivale a una lente de focal f en la dirección del eje de ordenadas, y $f/2$ en la orientación orto-

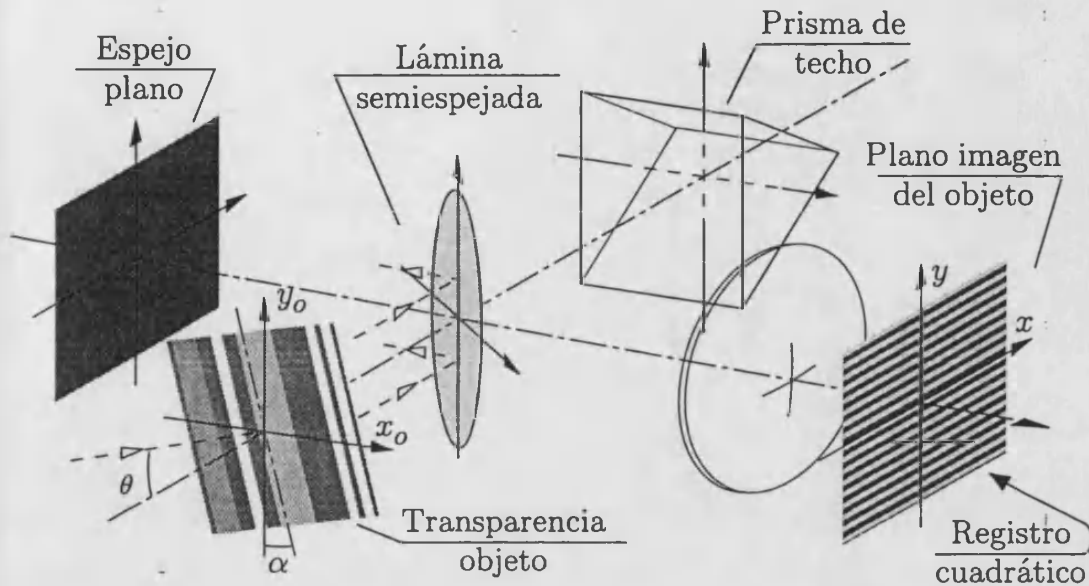


Figura A.5. Esquema del dispositivo propuesto por Brenner *et al.* (1982) para la obtención de un holograma donde se codifica la función producto $r_{ff}(x, x')$ para una señal unidimensional compleja a partir de una única transparencia cuya transmitancia en amplitud sigue sus variaciones.

gonal. Por ello, este sistema, más compacto que el anterior, proporciona también en el plano de salida la transformada de Fourier unidimensional requerida.

En el caso de señales complejas unidimensionales, la generación de la distribución de Wigner o la función ambigüedad no es tan sencilla como en el caso de funciones reales, ya que es necesario obtener el complejo conjugado de la transmitancia del filtro utilizado. En la última referencia citada, se proponen dos métodos que superan esta dificultad. El primero de ellos considera el caso de que el filtro complejo se encuentre codificado en forma de holograma. En este caso, cuando se ilumina de modo coherente, dicha transparencia genera dos frentes de onda, el uno conteniendo información del objeto y el otro de su complejo conjugado. La utilización del dispositivo anterior con este filtro holográfico, junto con el uso de máscaras selectivas que permiten seleccionar los órdenes difractados adecuados, permite conseguir el resultado requerido.

En segundo lugar, se considera el caso en el que la transmitancia del filtro codifique directamente la función compleja $f(\mu)$. El sistema propuesto en este caso se muestra en la fig. A.5. El dispositivo es análogo a un interferómetro. El frente de ondas de referencia se construye haciendo pasar una onda plana a través de la transparencia objeto, convenientemente rotada. Esta onda plana incide sobre ésta normal al eje de abscisas y formando un cierto ángulo $\gamma = 90^\circ - \theta$ con la dirección OY_0 , de modo que la distribución de amplitud que se obtiene en este plano será

proporcional a

$$U_o(x_o, y_o) \propto e^{j2\pi y_o \frac{\sin \theta}{\lambda}} f(x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) . \quad (\text{A.11})$$

Este haz se divide en dos partes, una de las cuales se invierte respecto del eje de ordenadas con un prisma de techo, y la otra se refleja sin cambio alguno. Los dos brazos del interferómetro se equilibran, de modo que la imagen del objeto que proporciona una lente a partir del haz recombinado presenta una distribución de amplitudes que será una versión escalada de la función

$$U(x, y) \propto e^{j2\pi y \frac{\sin \theta}{\lambda}} f(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + e^{-j2\pi y \frac{\sin \theta}{\lambda}} f(x \cos \alpha - y \sin \alpha) . \quad (\text{A.12})$$

Un registro fotográfico adecuado de la irradiancia en este plano generará una transmitancia en amplitud dada por

$$\begin{aligned} t'(x'_o, y'_o) \propto & |U(x'_o, y'_o)|^2 = |f(x'_o \cos \alpha + y'_o \sin \alpha)|^2 + \\ & + |f^*(x'_o \cos \alpha - y'_o \sin \alpha)|^2 + \\ & + f(x'_o \cos \alpha + y'_o \sin \alpha) f^*(x'_o \cos \alpha - y'_o \sin \alpha) + \\ & + e^{j2\pi y_o \frac{\sin \theta}{\lambda}} f(x'_o \cos \alpha + y'_o \sin \alpha) f^*(x'_o \cos \alpha - y'_o \sin \alpha) + \\ & + e^{-j2\pi y_o \frac{\sin \theta}{\lambda}} f^*(x'_o \cos \alpha + y'_o \sin \alpha) f(x'_o \cos \alpha - y'_o \sin \alpha) . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Si se ilumina esta transparencia con un haz plano normal a ella y se realiza una transformada de Fourier unidimensional en la dirección y_o con alguno de los procedimientos anamórficos indicados anteriormente, el tercero y cuarto término de la ecuación anterior proporcionan versiones escaladas de las distribuciones de Wigner $W_f(x, u)$ y $W_f(x, -u)$ centradas en diferentes puntos del plano de salida. Si la transformación se realiza en la dirección OX_o , el resultado que se obtiene corresponde a la función ambigüedad.

Se han propuesto algunas otras variantes de estos dispositivos, que proponen diferentes técnicas para la consecución óptica de la función producto $r_{ff}(x, x')$ en el caso de funciones complejas o para la obtención de la transformada de Fourier unidimensional posterior. En el primero de los casos se encuentra el dispositivo propuesto por Mateeva *et al.* (1986), en el que la generación del complejo conjugado invertido de la transmitancia en amplitud del objeto se ha obtenido, para objetos con pequeñas variaciones de fase, mediante el filtrado del contenido de frecuencias espaciales de ésta, usando máscaras bipolares, a través de un procedimiento análogo al método de Zernike de microscopía de contraste de fase (Born y Wolf 1980, p. 426). Por lo que se refiere a las variantes en la obtención de la transformada de Fourier unidimensional, son de destacar aquellas que usan elementos ópticos difractivos anamórficos (Grosz *et al.* 1989) o que proponen su realización

por propagación libre del campo electromagnético (Furlan *et al.* 1988). Recientemente, hemos propuesto una configuración, basada en un procesador acromático anamórfico, que es capaz de generar esta transformación utilizando radiación temporalmente incoherente, lo que mejora sensiblemente la relación señal-ruido de las representaciones así obtenidas respecto de las citadas anteriormente (Lancis *et al.* 1994) (Lancis *et al.* 1995).

La obtención óptica de las representaciones espacio-fase de señales dependientes de dos variables tropieza con el problema de que éstas son función de cuatro coordenadas, mientras que los sistemas ópticos procesan distribuciones bidimensionales de información. Aunque algunos de los dispositivos anteriores pueden generalizarse para obtener estas distribuciones para funciones bidimensionales separables o con simetría de revolución, la realización por medios ópticos de la representación de Wigner o de la función ambigüedad de señales esencialmente bidimensionales pasa necesariamente por la obtención de diferentes secciones planas de estas representaciones tetradimensionales, ya sea en paralelo o secuencialmente. Los dispositivos que se han propuesto para ello proporcionan, en el plano de salida del sistema, la transformada de Fourier bidimensional de una distribución de amplitudes que codifica una serie de muestras discretas del producto r_{ff} . Cada una de estas secciones bidimensionales puede obtenerse, en el caso de señales reales, a través de la superposición de dos réplicas de la función $f(\vec{r})$, tal y como se indica en las figs. A.6.

Las diferentes técnicas publicadas se diferencian básicamente en el modo en el que se obtienen estas muestras. El primer dispositivo que se propuso para obtener la distribución de Wigner de una señal bidimensional (Bamler y Glünder 1983), que es directamente extensible al caso de la función ambigüedad, utilizaba la superposición directa de dos copias en transparencia de ésta, con un desplazamiento mecánico secuencial controlado. La transformada de Fourier bidimensional se obtiene en el plano focal de una lente esférica tras iluminar coherentemente con un haz paralelo el objeto así generado, tal y como se indica en la fig. A.7. Posteriormente, se han propuesto una serie de dispositivos (Conner y Li 1985) basados en esta idea, pero en los que la superposición anterior se realiza o bien formando la imagen de una de las transparencias sobre la otra o bien usando proyección geométrica sin lentes. Estas modificaciones aumentan la versatilidad del sistema anterior y facilitan la generación del desplazamiento relativo entre las réplicas de la señal. Por otro lado, si sobre cada una de las transparencias utilizadas se codifica una serie de copias de la función a procesar distribuidas regularmente, con un periodo diferentes para cada una de ellas, su adecuada superposición proporciona una disposición regular de secciones de la función producto r_{ff} muestreadas para valores regularmente espaciados, tal y como se muestra en la fig. A.8. Cada una de estas secciones puede ser procesada coherentemente por separado en paralelo utilizando

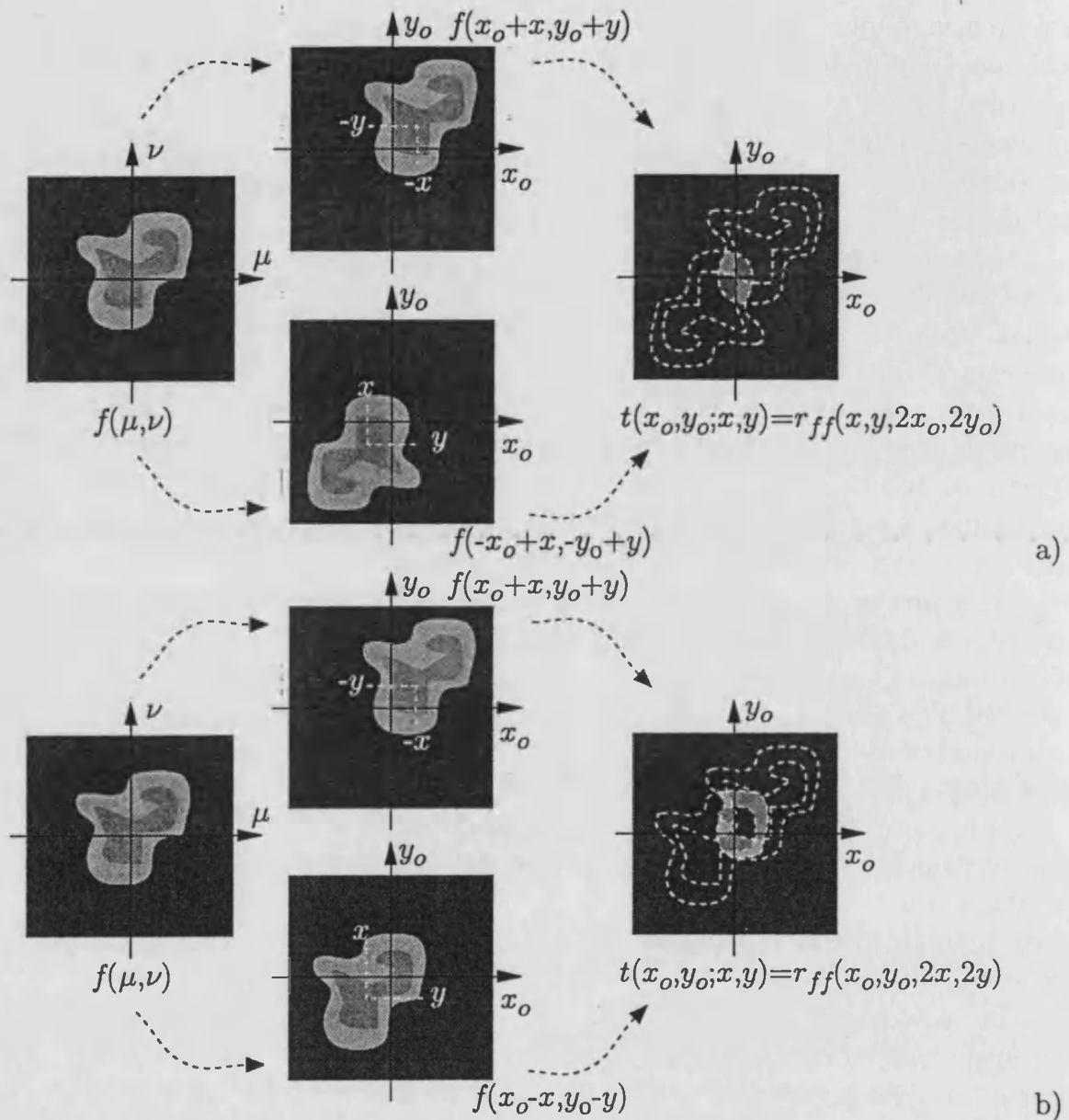


Figura A.6. Diagrama en el que se indica el modo de obtener diferentes secciones bidimensionales de la función producto r_{ff} . En la parte a) se indica el modo de obtener transmitancias $t(x_0, y_0; x, y)$ cuya transformación de Fourier genera las muestras, para diferentes valores de (x, y) , de la función de Wigner asociada a la señal, mientras que las transmitancias generadas en b) permiten obtener diferentes secciones de la función ambigüedad de la misma.

una matriz de lentes de periodo adecuado, situada inmediatamente después de las transparencias (Bamler y Glünder 1983).

Los problemas derivados del preciso posicionamiento y alineación de las dos

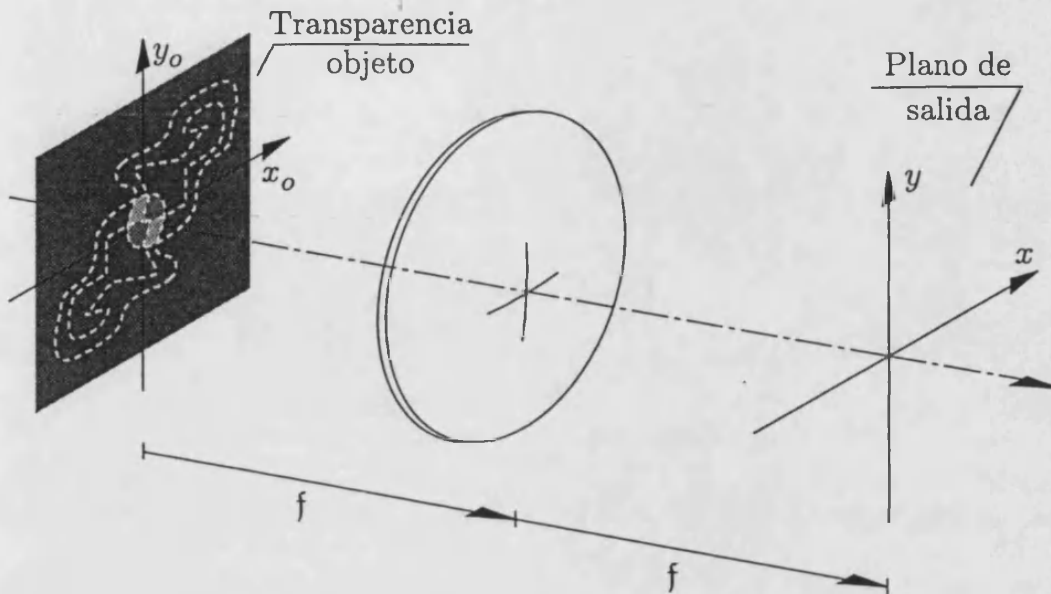


Figura A.7. Esquema del dispositivo propuesto por Bamler *et al.* (1983) para la obtención de diferentes secciones de la función de Wigner (o la función ambigüedad) de una señal real bidimensional. La transparencia objeto está construida a partir de la superposición, tal y como se indica en la fig. A.6a (b, en el caso de la función ambigüedad), de dos transparencias sobre las que se replican versiones de la función a procesar. La longitud focal de la lente esférica es f .

transparencias han llevado a proponer alternativas que utilizan sólo una de ellas, generándose la otra réplica por medios ópticos. Por ejemplo, para la función de Wigner, el dispositivo presentado en la fig. A.9 (Bamler y Glünder 1983) —análogo al sistema esquematizado en la fig. A.3— usa una lente esférica que acopla un espejo plano con su plano focal, donde se localiza la transformada de Fourier bidimensional de la transparencia cuya transmitancia en amplitud sigue las variaciones de la función $f(\vec{r})$. Tras la reflexión en dicho espejo, la propagación en sentido contrario de nuevo a través de la lente proporciona sobre el plano del objeto una distribución de amplitud luminosa igual a la doble transformada de Fourier de su transmitancia, generando de este modo la inversión espacial en la señal. El desplazamiento sucesivo de la transparencia objeto proporciona la secuencia de muestras de la función producto que se procesan, como en el caso del dispositivo anterior, usando una lente esférica.

Se han propuesto algunas variantes de este montaje que superan algunos de los inconvenientes prácticos que presenta. En primer lugar, el dispositivo presenta una baja eficiencia luminosa, ya que al menos tres cuartas partes del flujo luminoso del haz incidente se pierden en los sucesivos pasos por la lámina semiespejada. Este efecto puede ser compensado usando luz linealmente polarizada y sustituyendo esta

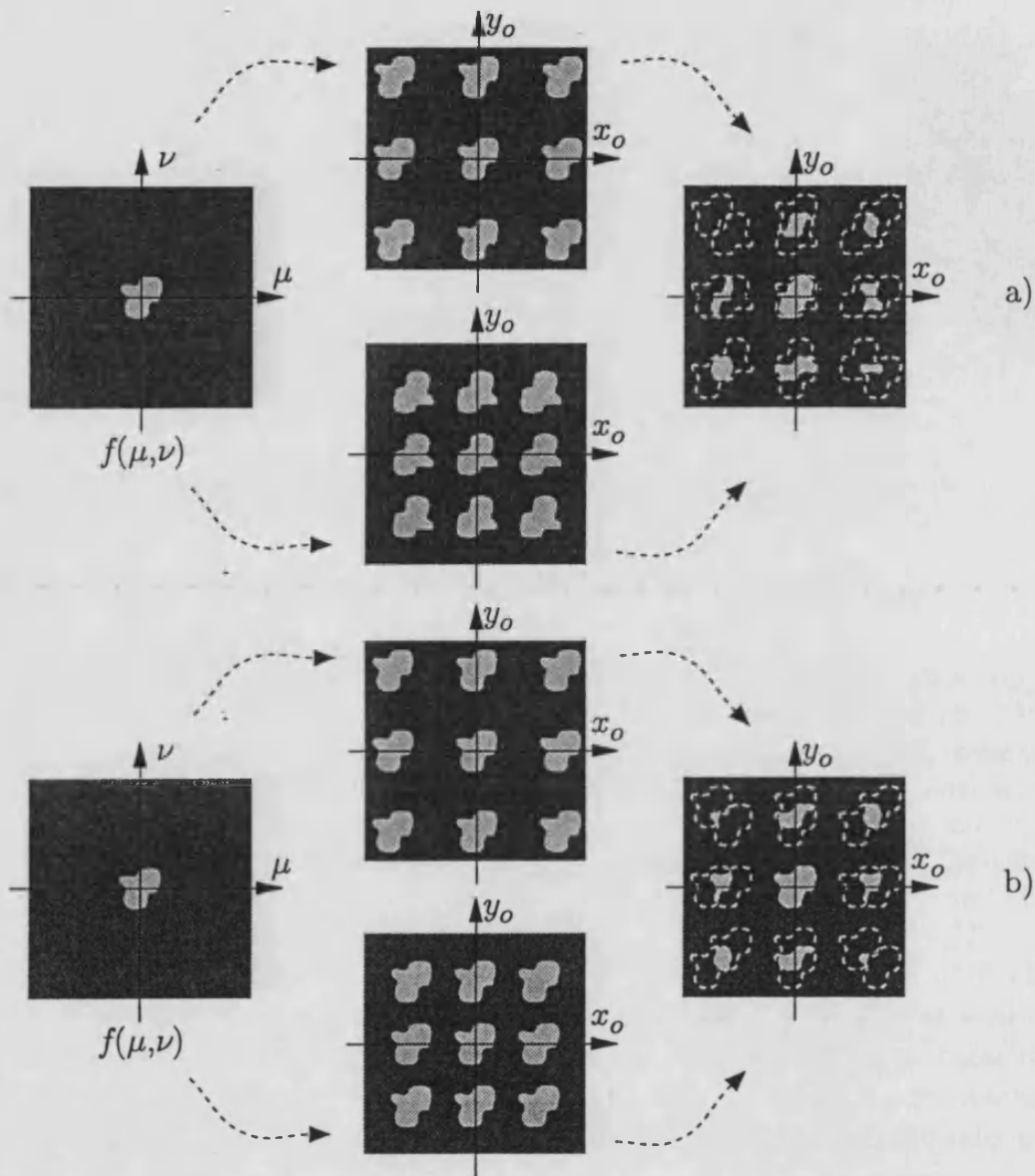


Figura A.8. Diagrama en el que se indica el modo de obtener diferentes secciones bidimensionales de la función producto r_{ff} de modo simultáneo a partir de dos conjuntos de réplicas de la señal a procesar. Las muestras generadas según las técnicas a) y b) son análogas a las obtenidas en la fig. A.6a) y b), respectivamente.

última por un cubo polarizador actuado como divisor de haz (Gupta y Asakura 1986). Por otro lado, el proceso secuencial de desplazamientos de la transparencia objeto lo inhabilita para el procesado en tiempo real. Para superar esta limitación, se han sugerido diferentes arquitecturas para el tratamiento en paralelo de las diferentes muestras. Subotic *et al.* (1984) desarrollaron un dispositivo en el que la inversión de la señal se obtiene con un sistema formador de imágenes de aumento

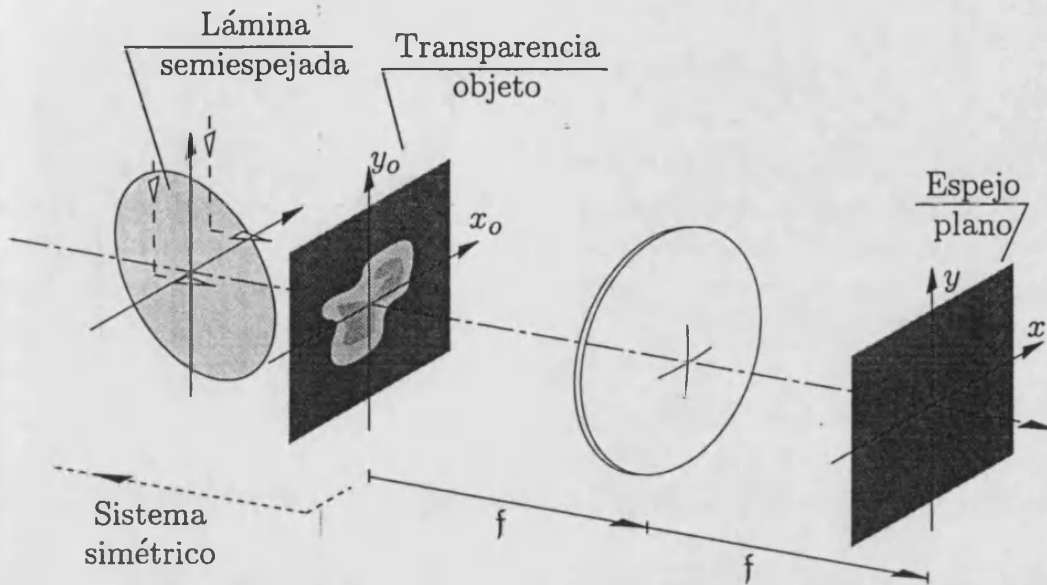


Figura A.9. Esquema del dispositivo propuesto por Bamler *et al.* (1983) para la obtención de la función de distribución de Wigner de una señal bidimensional real a partir de una única réplica en transparencia de la misma. La lente que se muestra y la que se usa en el lado izquierdo de la lámina separadora tienen una longitud focal igual a f .

—1 constituido por una sola lente esférica. Entre ésta y el plano imagen se sitúa una red de difracción que genera sobre éste una serie de réplicas de la función a procesar en una distribución regular. La separación entre estas copias puede ser variada desplazando la red de difracción a lo largo del eje óptico. Con un sistema de espejos, esta imagen se envía de nuevo sobre la transparencia original generándose de modo simultáneo, tras atravesar de nuevo la transparencia objeto, un conjunto de muestras de la función r_{ff} . Cada una de ellas aparece modulada, adicionalmente, por una onda plana cuya dirección de propagación es diferente a las de las restantes, lo que permite obtener con una única lente esférica, de modo simultáneo y sin solapamientos, las correspondientes secciones de la función de Wigner. Si el sistema formador de imágenes se elige para que proporcione un aumento lateral de valor $+1$, el sistema genera diferentes secciones de la función ambigüedad. Basándose en el mismo principio para generar las muestras de la función producto, Iwai *et al.* (1986) propusieron una técnica que incorpora al dispositivo de la fig. A.9 una red de difracción situada entre la transparencia objeto y la lente esférica. Este nuevo elemento provoca que en el plano focal de ésta se genere una distribución regular de réplicas de la transformada de Fourier de la señal, cuyo espaciado puede elegirse, desplazando longitudinalmente la red de difracción, para evitar el solapamiento entre copias contiguas. Esto permite seleccionar sólo una de éstas mediante una máscara que elimine las restantes, de modo que, tras la

reflexión en el espejo, el sistema se comporta como el propuesto por Subotic *et al.*

Por último, destaquemos que la obtención óptica de la representación de Wigner y la función ambigüedad de señales complejas bidimensionales ha sido sugerida en algunos de los trabajos citados como simple generalización de los métodos propuestos usando hologramas que codifican dichas señales. Un procedimiento específico para la generación de la función producto r_{ff} en este caso es el presentado por Li *et al.* (1988), que se basa en la técnica de mezcla no lineal de cuatro ondas generada por conjugación óptica de fase. Algunos de estos dispositivos han sido utilizados también en realizaciones híbridas óptico-digitales de ambas representaciones (Cristóbal *et al.* 1991).

Por lo que respecta al espectrograma complejo, es directo darse cuenta que todos los mecanismos indicados anteriormente para generar las transformadas de Fourier uni y bidimensionales, de modo secuencial o en paralelo, de la función r_{ff} pueden aplicarse sobre la función mixta r_{fv} que sirve para definir esta representación, de acuerdo con la ec. (4.181). Por lo que se refiere a la generación de dicha función, los métodos de superposición directa, tanto para funciones unidimensionales como dependientes de dos variables, pueden aplicarse de modo directo codificando ahora una de las transparencias con la señal y la otra con la función ventana. Por ejemplo, es directa la generalización de la técnica presentada en la fig. A.8b) si se sustituye una de las series de réplicas de la señal por copias de la función ventana bidimensional.

Un ejemplo de estas extensiones se recoge en el trabajo de Bartelt *et al.* (1980) y constituye uno de los métodos ópticos más utilizados en la obtención del espectrograma complejo asociado a funciones unidimensionales. La generación de la función producto $r_{fv}(x, x')$ se realiza en este caso mediante una superposición directa de transparencias que codifican en su transmitancia en amplitud las variaciones de la señal $f(\mu)$ y la versión escalada de la ventana, $v^*(\mu)$, respectivamente. Ésta última se gira un ángulo α respecto de la anterior, tal y como se indica en la fig. A.10. El objeto así generado presentará una transmitancia en amplitud dada por

$$t(x_o, y_o) = f(x_o) v^*(x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) . \quad (\text{A.14})$$

Si usamos la función auxiliar

$$v_\alpha(\mu) = v \left(\frac{\mu}{1/\cos \alpha} \right) , \quad (\text{A.15})$$

podemos expresar la ec. (A.14) como

$$t(x_o, y_o) = f(x_o) v_\alpha^*(x_o + y_o \tan \alpha) . \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, una transformación de Fourier en la coordenada x_o proporcionará el espectrograma complejo de la función $f(\mu)$ generado a partir de una versión escalada de la función ventana $v(\mu)$. En la fig. A.11 se presenta el dispositivo usado

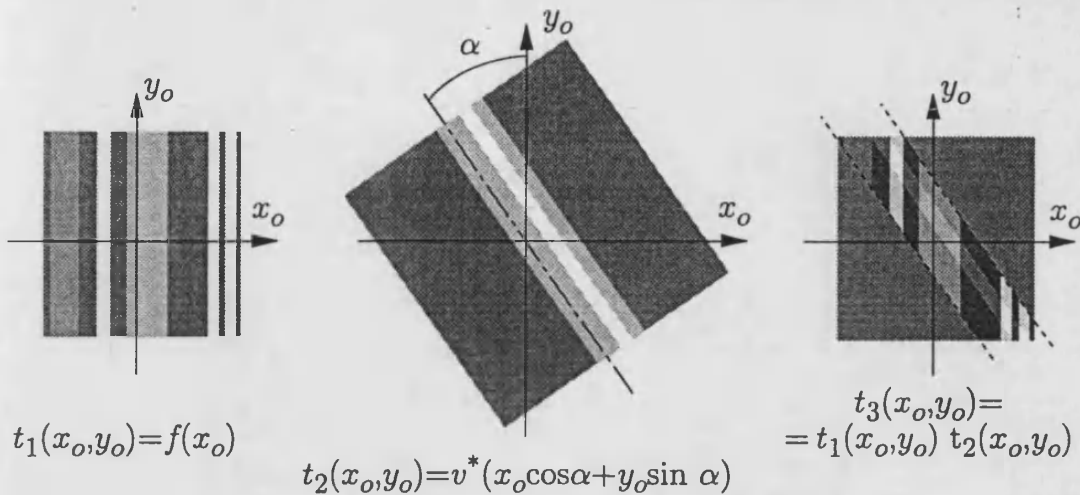


Figura A.10. Diagrama donde se esquematiza el proceso seguido para generar la transparencia objeto utilizada en la obtención espectrograma local de la función $f(\mu)$ en el dispositivo propuesto por Bartelt *et al.* (1980), usando la función $v(\mu)$ como ventana.

para la obtención de esta transformación, que no es más que una versión ligeramente modificada de la segunda etapa del sistema presentado en la fig. A.4. La distribución de amplitudes sobre el plano de observación será similar a la indicada en la ec. (A.8), que en este caso conduce a

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &\propto e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda f}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) v_{\alpha}^*(x_0 - y \tan \alpha) e^{-j2\pi \frac{x x_0}{\lambda f}} dx_0 = \\
 &= e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda f}} E_{f, v_{\alpha}} \left(y \tan \alpha, \frac{x}{\lambda f} \right), \quad (\text{A.17})
 \end{aligned}$$

de modo que el sistema proporciona una versión escalada del espectrograma complejo requerido. El ángulo α que forma la transparencia sobre la que se codifica la función ventana con la que corresponde a la señal permite controlar el ancho efectivo de la función que muestrea ésta última en el resultado final. Esta selección, sin embargo, debe tener en cuenta que el tamaño finito de estas transparencias limita la extensión de la función producto indicado en la ec. (A.14), siendo este efecto tanto mayor cuanto menor es dicho ángulo. Señalemos, por último, que se ha propuesto también una variante de este dispositivo que utiliza iluminación parcialmente coherente de la transparencia objeto, lo que provoca una disminución considerable del ruido coherente que aparece en el plano final del dispositivo anterior (Bartelt y Brenner 1981).

Por último, destaquemos que se han sugerido también algunos dispositivos para la generación del espectrograma local que usan radiación policromática, que apro-

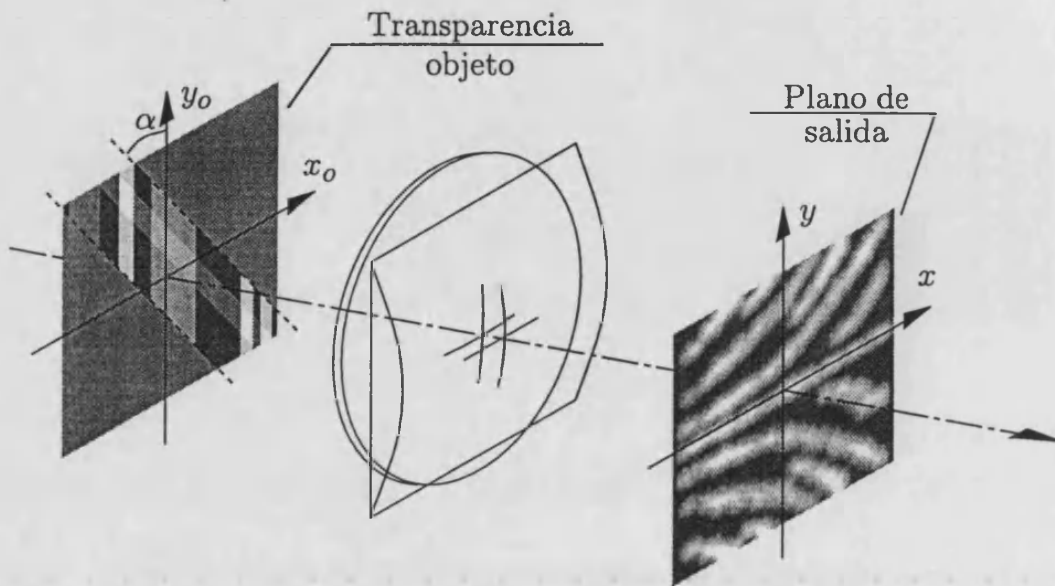


Figura A.11. Esquema del dispositivo propuesto por Bartelt *et al.* (1980) para la obtención del espectrograma complejo de una función unidimensional. El doblete esféricocilíndrico y el objeto se sitúan de modo que en el plano de salida se genera la transformada de Fourier unidimensional de la transmitancia del mismo en la coordenada x_0 y su imagen, con aumento -1, en la dirección ortogonal.

vechan la dispersión cromática de los sistemas ópticos para soslayar el proceso de muestreado secuencial (Bartelt y Brenner 1981) (Grosz *et al.* 1987). El resultado obtenido en estos casos es una distribución de irradiancia policromática en la que parte de la información contenida en el espectrograma local aparece codificada en forma de variaciones de color.

Bibliografía

- ALTES, R. (1980). "Detection, estimation and classification with spectrograms". *Journal of the Acoustical Society of America* **67**, 1232–1246.
- ANDRÉS, Pedro, Juan Carlos BARREIRO, Genaro SAAVEDRA y Jesús LANCIS (1990). "Incoherent optical correlator". *Proceedings SPIE* **1319**, 430.
- ANDRÉS, Pedro, Carlos FERREIRA, Amparo PONS y Consuelo HERNÁNDEZ (1983). "Colour mixtures through theta-modulation technique". *Optics Communications* **48**(2), 103–106.
- ANDRÉS, Pedro, Walter D. FURLAN, Adolf W. LOHMANN y Genaro SAAVEDRA (1996). "Variable fractional Fourier processor: a simple implementation". *Journal of the Optical Society of America A*. (Aceptado).
- ANDRÉS, Pedro, Walter D. FURLAN, Genaro SAAVEDRA y Enrique TAJAHUERCE (1996). "Achromatic fractional Fourier transform". *Applied Optics*. (En redacción).
- ANDRÉS, Pedro, Jesús LANCIS, Enrique E. SICRE y Elvira BONET (1993). "Achromatic Fresnel diffraction patterns". *Optics Communications* **104**(1,2,3), 39–45.
- ANDRÉS, Pedro, Jesús LANCIS, Enrique TAJAHUERCE, Vicent CLIMENT y Genaro SAAVEDRA (1994). "White-light optical information processing with achromatic processors". *1994 OSA Technical Digest Series* **11**, 220–223.
- ANDRÉS, Pedro, Manuel MARTÍNEZ-CORRAL y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1993). "Off-axis focal shift for rotationally nonsymmetric screens". *Optics Letters* **18**(16), 1290–1292.
- ANDRÉS, Pedro, Jorge OJEDA-CASTAÑEDA y Jorge IBARRA (1986). "Lensless theta decoder". *Optics Communications* **60**(4), 206–210.
- ANDRÉS, Pedro, Eduardo TEPICHÍN y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1989). "Lau rings: in-register incoherent superposition of radial self-images". *Optics Communications* **72**(1,2), 47–53.

- ARCHBOLD, E., J. M. BURCH y A. E. ENNOS (1970). "Recording of in-plane surface displacement by double-exposure speckle photography". *Optica Acta* 17(12), 883-898.
- ARLEGUI DE PABLOS, Javier (1973, Noviembre). *Estructura difraccional de la imagen policromática en sistemas ópticos: Influencia de las aberraciones axiales*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- ARMITAGE, J. D. y Adolf W. LOHMANN (1965). "Theta Modulation in Optics". *Applied Optics* 4(4), 399-403.
- ASAKURA, Toshimitsu, Hitoshi FUJII y Kazumi MURATA (1972). "Measurement of spatial coherence using speckle patterns". *Optica Acta* 19(4), 273-290.
- ATHALE, Ravindra, Joseph VAN DER GRACHT, Dennis W. PRATHER y Joseph N. MAIT (1995). "Incoherent optical image processing with acousto-optical pupil-plane filtering". *Applied Optics* 34(2), 276-280.
- ATHALE, Ravindra A., John N. LEE, E. Larry ROBINSON y Harold H. SZU (1983). "Acousto-optic processors for real-time generation of time-frequency representation". *Optics Letters* 8(3), 166-168.
- BAJCSY, R. y L. LIEBERMANN (1976). "Texture gradient as a depth cue". *Computer Graphics and Image Processing* 5, 52-67.
- BAMLER, Richard y Helmut GLÜNDER (1983). "The Wigner distribution function of two-dimensional signals. Coherent-optical generation and display". *Optica Acta* 30(12), 1789-1803.
- BARNDEN, R. (1974). "Calculation of axial polychromatic optical transfer function". *Optica Acta* 21(12), 981-1003.
- BARNDEN, R. (1976). "Extra-axial polychromatic optical transfer function". *Optica Acta* 23(1), 1-24.
- BARREIRO, Juan Carlos, Pedro ANDRÉS, Jorge OJEDA-CASTAÑEDA y Jesús LANCIS (1991). "Multiple incoherent 2D optical correlator". *Optics Communications* 84(5,6), 237-241.
- BARREIRO, Juan Carlos, Pedro ANDRÉS, Jorge OJEDA-CASTAÑEDA, Amparo PONS, Elvira BONET y Genaro SAAVEDRA (1992). "Procesado óptico de información con luz espacialmente incoherente". En *Actas de la III Reunión Nacional de Óptica y I Reunión Iberoamericana de Óptica*, pp. 253-254.
- BARREIRO, Juan Carlos y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1993). "Degree of coherence: a lensless measuring technique". *Optics Letters* 18(4), 302-304.
- BARTELT, H. O. (1979). "Image correlation in white-light by wavelength multiplexing". *Optics Communications* 29(1), 37-40.

- BARTELT, H. O. (1987). "Unconventional Correlators". En Joseph L. Horner (ed.), *Optical Signal Processing*, capítulo 2.2, pp. 97–127. Academic (Nueva York).
- BARTELT, H. O. y K.-H. BRENNER (1981). "The Wigner distribution function—experiments and applications". En M.A. Machado y L. M. Narducci (eds.), *Optics in Four Dimensions-1980*, pp. 332–340.
- BARTELT, H. O., K.-H. BRENNER y Adolf W. LOHMANN (1980). "The Wigner distribution function and its optical production". *Optics Communications* 32(1), 32–38.
- BARTELT, H. O., S. K. CASE y R. HAUCK (1982). "Incoherent Optical Processing". En Henry Stark (ed.), *Applications of Optical Fourier Transforms*, capítulo 12, pp. 499–536. Academic (Nueva York).
- BARTELT, H. O. y J. JAHNS (1979). "Interferometry based on the Lau effect". *Optics Communications* 30(3), 268–274.
- BASTIAANS, Martin J. (1978). "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems". *Optics Communications* 25(1), 26–30.
- BASTIAANS, Martin J. (1979a). "The Wigner distribution function and Hamilton's characteristics of a geometric-optical system". *Optics Communications* 30(3), 321–326.
- BASTIAANS, Martin J. (1979b). "Transport equations for the Wigner distribution function". *Optica Acta* 26(10), 1265–1272.
- BASTIAANS, Martin J. (1979c). "Transport equations for the Wigner distribution function in an inhomogeneous and dispersive medium". *Optica Acta* 26(11), 1333–1344.
- BASTIAANS, Martin J. (1979d). "Wigner distribution function and its application to first-order optics". *Journal of the Optical Society of America* 69(12), 1710–1716.
- BASTIAANS, Martin J. (1980). "Wigner distribution function display: a supplement to ambiguity function display using a single 1-D input". *Applied Optics* 19(2), 192.
- BASTIAANS, Martin J. (1981). "The Wigner distribution function of partially coherent light". *Optica Acta* 28(9), 1215–1224.
- BASTIAANS, Martin J. (1986). "Applications of the Wigner distribution function to partially coherent light". *Journal of the Optical Society of America A* 3(8), 1227–1238.
- BASTIAANS, Martin J. (1991). "Second-order moments of the Wigner distribution function in first-order optical systems". *Optik* 88(4), 163–168.

- BESCÓS, Julián, Jorge H. ALTAMIRANO, Antonio SANTISTEBAN y Javier SANTAMARÍA (1988). "Digital restoration models for color imaging". *Applied Optics* 27(2), 419-424.
- BESCÓS, Julián y Javier SANTAMARÍA (1977). "Formation of Color Images. Optical Transfer Functions for the Tristimulus Values". *Photographic Science and Engineering* 21(6), 355-362.
- BLACKWELL, H. Richard (1972). "Luminance Difference Thresholds". En H. Autrum *et al.* (eds.), *Handbook of Sensory Physiology*, volumen VII/4 Visual Psychophysics, capítulo 4. Springer-Verlag (Berlín).
- BOBROFF, Norman y Alan E. ROSENBLUTH (1992). "Evaluation of highly corrected optics by measurement of the Strehl ratio". *Applied Optics* 31(10), 1523-1536.
- BONET, Elvira, Pedro ANDRÉS, Juan Carlos BARREIRO y Amparo PONS (1994). "Self-imaging properties of a periodic microlens array: versatile array illuminator realization". *Optics Communications* 106(1,2,3), 39-44.
- BONET, Elvira, Juan Carlos BARREIRO, Genaro SAAVEDRA, Enrique SILVESTRE, Manuel MARTÍNEZ-CORRAL y Pedro ANDRÉS (1995). "Autoimágenes y procesado óptico". En *Actes de les Trobades Científiques de la Mediterrània*, pp. 51-54.
- BONET, Elvira, Jorge OJEDA-CASTAÑEDA y Amparo PONS (1991). "Image synthesis using the Lau effect". *Optics Communications* 81(5), 285-290.
- BOOPATHI, V. y R. M. VASU (1992). "Coherent optical processing using noncoherent light after source masking". *Applied Optics* 31(2), 186-191.
- BORN, Max y Emil WOLF (1980). *Principles of Optics* (6^a ed.). Pergamon (Oxford).
- BOURIMBORDE, Lea, Walter D. FURLAN y Enrique E. SICRE (1991). "Off-axis analysis of the Strehl ratio using the Wigner distribution function". *Journal of Modern Optics* 38(9), 1685-1689.
- BREMMER, H. (1979). "The Wigner distribution function and transport equations in radiation problems". *J. Appl. Sci. Eng. A* 3, 251-260.
- BRENNER, K.-H. y Adolf W. LOHMANN (1982). "Wigner distribution function display of complex 1D signals". *Optics Communications* 42(5), 310-314.
- BRENNER, K.-H., Adolf W. LOHMANN y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1983). "The ambiguity function as a polar display of the OTF". *Optics Communications* 44, 323.

- BRENNER, K.-H. y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1984). "Ambiguity function and Wigner distribution function applied to partially coherent imagery". *Optica Acta* 31(2), 213-223.
- BURCH, J. M. y J. M. J. TOKARSKI (1968). "Production of multiple beam fringes from photographic scatterers". *Optica Acta* 15(2), 101-111.
- CASASENT, David y F. CASASAYAS (1975). "Optical processing of pulsed Doppler and FM stepped radar signals". *Applied Optics* 14, 1364-1372.
- CAULFIELD, H. J. (1982). "Role of the Horner efficiency in the optimization of spatial filters for optical pattern recognition". *Applied Optics* 21(24), 4391-4392.
- CHAVEL, Pierre y Serge LOWENTHAL (1978). "Noise and coherence in optical image processing. II. Noise fluctuations". *Journal of the Optical Society of America* 68(6), 721-732.
- CHEN, Zikuan, Yanxin ZHANG y Guoguang MU (1994). "Complementary-reference joint transform correlator". *Applied Optics* 33(32), 7622-7626.
- CHENG, Feng, Pedro ANDRÉS, Francis T. S. YU y Don GREGORY (1993). "Intensity compensation filter for joint transform correlation peak enhancement". *Applied Optics* 32(23), 4357-4364.
- CHITRALEKHA, Sundergopal, Kodikullam V. AVUDAINAYAGAM y Sastry V. PAPPU (1990). "Sensitivity of Lau fringes to grating rotation: theoretical analysis". *Applied Optics* 29(1), 125-128.
- CHOI, Hyung-Ill y William J. WILLIAMS (1989). "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 37(6), 862-871.
- COHEN, Leon (1966). "Generalized phase-space distribution functions". *Journal of Mathematical Physics* 7, 781-786.
- COHEN, Leon (1989). "Time-Frequency Distributions— A Review". *Proceedings of the IEEE* 77(7), 941-981.
- COLAUTTI, Cecilia, Enrique E. SICRE y Mario GARAVAGLIA (1986). "Incoherent optical spatial filtering based on the Lau effect". *Optics Communications* 57, 16-20.
- CONNER, Michael y Yao LI (1985). "Optical generation of the Wigner distribution of 2-D real signals". *Applied Optics* 24(22), 3825-3829.
- COOLEY, J. W. y J. W. TUKEY (1965). "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series". *Math. Comp.* 19(90), 297-301.

- CRISTÓBAL, Gabriel, Julián BESCÓS y Javier SANTAMARÍA (1989). "Image analysis through the Wigner distribution function". *Applied Optics* 28, 262–271.
- CRISTÓBAL, Gabriel, Consuelo GONZALO y Julián BESCÓS (1991). "Image Filtering and Analysis through the Wigner Distribution". *Advances in Electronics and Electron Physics* 80, 309–397.
- D'ARCIO, Luigi A., Joseph J. M. BRAAT y Hans J. FRANKENA (1994). "Numerical evaluation of diffraction integrals for apertures of complicated shape". *Journal of the Optical Society of America A* 11(10), 2664–2674.
- DATTA, Asit K. y Mausumi SETH (1994). "Multi-input optical parallel logic processing with the shadow-casting technique". *Applied Optics* 33(35), 8146–8152.
- DAVIS, Jeffrey A., Lisa L. HAAVIG, Don M. COTTRELL, Xu-Ming WANG y Guo-Guang MU (1995). "Differentiating optical correlator". *Optics Letters* 20(24), 2511–2513.
- DE BRUIJN, N. G. (1965). "Uncertainty Principles in Fourier Analysis". En Oved Shisha (ed.), *Inequalities*, Nueva York, pp. 57–71. Academic.
- DE BRUIJN, N. G. (1973). "A theory of generalized functions, with applications to Wigner distribution and Weyl correspondence". *Nieuw Archief voor Wiskunde* 21(3), 205–280.
- DRAGOMAN, Daniela (1994). "Higher-order moments of the Wigner distribution function in first-order optical systems". *Journal of the Optical Society of America A* 11(10), 2643–2646.
- DRAGOMAN, Daniela (1995). "Wigner-distribution-function representation of the coupling coefficient". *Applied Optics* 34(29), 6758–6763.
- DZIEWONSKI, A., S. BLOCH y M. LANDISMAN (1969). "A technique for the analysis of transient signals". *Bull. Seism. Soc. Am.* 59, 427–444.
- EBIZUKA, Noboru, Moriaki WAKAKI, Yukiyasu KOBAYASHI y Syuji SATO (1995). "Development of a multichannel Fourier transform spectrometer". *Applied Optics* 34(34), 7899.
- EICHMANN, G. y B. Z. DONG (1982). "Two-dimensional optical filtering of 1-D signals". *Applied Optics* 21(17), 3152–3156.
- FERREIRA, Carlos, Javier GARCÍA y Enrique TAJAHUERCE (1989). "Real and positive filter based on harmonic expansion". *Proceedings SPIE* 1134, 173.
- FIELDING, Kenneth H. y Joseph L. HORNER (1990). "1-f binary joint transform correlator". *Optical Engineering* 29(9), 1081–1087.

- FRANÇON, Maurice (1966). *Optical Interferometry* (2^a ed.). Academic (Nueva York).
- FRANÇON, Maurice y S. MALLICK (1967). "Measurement of the second order degree of coherence". *Progress in Optics* VI, 71-104.
- FRIEDMAN, E. (1992). "On-axis irradiance for obscured rectangular apertures". *Applied Optics* 31(1), 14-18.
- FURLAN, Walter D., Susana I. GROSZ y Lía M. ZERBINO (1988). "Lensless display of phase-space functions for 1-D signals". *Optics Communications* 65(2), 110-114.
- FURLAN, Walter D. y Genaro SAAVEDRA (1993). "Local displacement analysis of a diffuse object: a Local Spectrum approach". En *Proceedings of the 1st European Optical Society Annual Meeting*, pp. 141-142.
- FURLAN, Walter D., Genaro SAAVEDRA y Pedro ANDRÉS (1993). "Polychromatic optical transfer functions: ambiguity function approach". En Paolo Mazzoldi (ed.), *International Conference From Galileo's "Occhialino" to Optoelectronics*, pp. 525-529.
- FURLAN, Walter D., Genaro SAAVEDRA y Jesús LANCIS (1993). "Phase-space representations as a tool for the evaluation of the polychromatic OTF". *Optics Communications* 96(4,5,6), 208-213.
- FURLAN, Walter D., Genaro SAAVEDRA y Enrique TAJAHUERCE (1995). "Hybrid optical-digital method for local-displacement analysis by use of a phase-space representation". *Applied Optics* 34(22), 4713-4716.
- FURLAN, Walter D., Genaro SAAVEDRA, María Josefa YZUEL y Pedro ANDRÉS (1994). "Aplicación de los formalismos espacio-fase para la evaluación de funciones de mérito en la imagen óptica policromática". En *Actas de la IV Reunión Nacional de Óptica*, pp. 65-66.
- FURLAN, Walter D., Genaro Saavedra Enrique SILVESTRE, María Josefa YZUEL y Pedro ANDRÉS (1996). "Polychromatic merit functions in terms of the Wigner distribution function". *Proceedings SPIE* 2730, 252-255.
- GASKILL, Jack D. (1978). *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*. John Wiley & Sons (Nueva York).
- GEARY, J. M. y P. PETERSON (1986). "Spherical aberration: a possible new measurement technique". *Optical Engineering* 25(2), 286-291.
- GEDZIOROWSKI, Marcin, Tomasz SZOPLIK y Carlos FERREIRA (1994). "Resolution of a lensless shadow casting correlator with partially coherent illumination". *Optics Communications* 106(4,5,6), 167-172.

- GEORGIEVA, J. (1989). "Removing the diffraction halo effect in speckle photography". *Applied Optics* **28**, 21–24.
- GLASER, I. (1987). "Information processing with spatially incoherent light". *Progress in Optics XXIV*, 389–509.
- GONG, Qian y Smiley S. HSU (1994). "Aberration measurement using axial intensity". *Optical Engineering* **33**(4), 1176–1186.
- GOODMAN, Joseph W. (1968). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill (Nueva York).
- GOODMAN, Joseph W. (1985). *Statistical Optics*. John Wiley & Sons (Nueva York).
- GORODEISKY, S. y A. A. FRIESEM (1993). "Phase filters for correlators with incoherent light". *Optics Communications* **100**(5,6), 421–425.
- GRANIERI, Sergio, Walter D. FURLAN, Genaro SAAVEDRA y Pedro ANDRÉS (1996). "Radon-Wigner display: A compact optical implementation using a single varifocal lens". *Applied Optics*. (Enviado).
- GROSZ, Susana I., Walter D. FURLAN, Cecilia COLAUTTI y Mario GARAVAGLIA (1989). "Display of phase-space functions by elliptical zone plates". *Optics Communications* **73**(1), 7–11.
- GROSZ, Susana I., Walter D. FURLAN, Enrique E. SICRE y Mario GARAVAGLIA (1987). "Display of the Local Spectrum: A pseudocoloring approach". *Applied Optics* **26**, 971.
- GUIGAY, Jean-Pierre (1978). "The ambiguity function in diffraction and isoplanatic imaging with partially coherent beams". *Optics Communications* **26**(2), 136–138.
- GUO, B. J. y S. L. ZHUANG (1992). "Extension of focal depth by using an encoded source". *Applied Optics* **31**(10), 1450–1454.
- GUPTA, Arun K. y Toshimitsu ASAKURA (1986). "New optical system for the efficient display of Wigner distribution functions using a single object transparency". *Optics Communications* **60**(5), 265–268.
- HILLERY, M., R. F. O'CONNELL, M. O. SCULLY y E. P. WIGNER (1984). "Distribution functions in Physics: Fundamentals". *Physics Reports* **106**(3), 121–167.
- HIRLIMANN, C. y J.-F. MORHANGE (1992). "Wavelet analysis of short light pulses". *Applied Optics* **31**(17), 3263–3266.
- HOPKINS, H. H. (1955). "The frequency response of a defocused optical system". *Proc. Roy. Soc. (London) A* **231**, 91–103.

- HOPKINS, H. H. y María Josefa YZUEL (1970). "The computation of diffraction patterns in the presence of aberrations". *Optica Acta* 17(3), 157-182.
- HORNER, Joseph L. (1982). "Light utilization in optical correlators". *Applied Optics* 21(24), 4511-4514.
- HORNER, Joseph L. (1992a). "Clarification of Horner efficiency". *Applied Optics* 31(20), 4629.
- HORNER, Joseph L. (1992b). "Metrics for assessing pattern-recognition performance". *Applied Optics* 31(2), 165-166.
- HORNER, Joseph L. y Peter D. GIANINO (1984). "Phase-only matched filtering". *Applied Optics* 23(6), 812-816.
- HORNER, Joseph L. y James R. LEGER (1985). "Pattern recognition with binary phase-only filters". *Applied Optics* 24(5), 609-611.
- HSU, Yuan-Neng y Henri H. ARSENAULT (1984). "Pattern discrimination by multiple circular harmonic components". *Applied Optics* 23, 841-844.
- HUNTLEY, M., H. M. GOLDREIN y L. R. BENCKERT (1993). "Parallel processing system for rapid analysis of speckle-photography and particle-image-velocimetry data". *Applied Optics* 32, 3152-3155.
- INDEBETOUW, G. (1988). "Polychromatic self-imaging". *Journal of Modern Optics* 35(2), 243-252.
- IWAI, Toshiaki, Arun K. GUPTA y Toshimitsu ASAKURA (1986). "Simultaneous optical production of the sectional Wigner distribution function for a two-dimensional object". *Optics Communications* 58(1), 15-19.
- JAHNS, J. y Adolf W. LOHMANN (1979). "The Lau effect (a diffraction experiment with incoherent illumination)". *Optics Communications* 28(3), 263-267.
- JOENATHAN, C. y Rajpal S. SIROHI (1986). "Elimination of error in speckle photography". *Applied Optics* 25(11), 1791-1794.
- JUTAMULIA, Suganda y Toshimitsu ASAKURA (1994). "Rotation-invariant joint transform correlator". *Applied Optics* 33(23), 5440-5442.
- JUTAMULIA, Suganda, Tsongneng W. LIN y Francis T. S. YU (1987). "Real-time noncoherent correlator using liquid crystal television". *Optics Communications* 64(2), 115-119.
- KAIJUN, He, J. JAHNS y Adolf W. LOHMANN (1983). "Talbot interferometry with a vibrating phase object". *Optics Communications* 45(5), 295-300.
- KAUFMANN, G. H. (1980). "On the numerical processing of speckle photography fringes". *Opt. Laser Technol.* 12, 207-209.

- KODERA, K., C. DE VILLEDARY y R. GENDRIN (1976). "A new method for numerical analysis of non-stationary signals". *Phys. Earth and Planetary Interiors* **12**, 142-150.
- KRAUS, Hal G. (1993). "Finite element area and line integral transforms for generalization of aperture function and geometry in Kirchoff scalar diffraction theory". *Optical Engineering* **32**(2), 368-383.
- KUMAR, B. V. K. Vijaya y Z. BAHRI (1989). "Phase-only filters with improved signal to noise ratio". *Applied Optics* **28**, 250-257.
- LADERA, Celso L. y Manuel A. BAUTISTA (1992). "Measuring the spatial coherence from an extended quasi-monochromatic source by double-exposure speckle interferometry". *Optics Letters* **17**(11), 825-827.
- LANCIS, Jesús, Enrique E. SICRE, Amparo PONS y Genaro SAAVEDRA (1995). "Achromatic white-light self-imaging phenomenon: an approach using the Wigner distribution function". *Journal of Modern Optics* **42**(2), 425-434.
- LANCIS, Jesús, Enrique E. SICRE, Enrique TAJAHUERCE y Pedro ANDRÉS (1995). "White-light implementation of the Wigner-distribution function with an achromatic processor". *Applied Optics* **34**(35), 8209-8212.
- LANCIS, Jesús, Enrique E. SICRE, Enrique TAJAHUERCE y Genaro SAAVEDRA (1994). "Obtención de la función de distribución de Wigner con luz blanca mediante un sistema acromático". En *Actas de la IV Reunión Nacional de Óptica*, pp. 67-68.
- LAU, Ernst (1948). "Beugungerscheinungen und Doppelrastern". *Ann. Phys. (Leipzig)* **6**, 417-423.
- LEE, H.-W. (1995). "Theory and application of the quantum phase-space distribution functions". *Physics Reports* **259**(3), 147-211.
- LEGER, James R. y Michael A. SNYDER (1984). "Real-time depth measurement and display using Fresnel diffraction and white-light processing". *Applied Optics* **23**(10), 1655-1670.
- LEIFER, I., G. L. ROGERS y N. W. F. STEPHENS (1969). "Incoherent Fourier transformation: a new approach to character recognition". *Optica Acta* **16**(5), 535-553.
- LI, Yao, George EICHMANN y Michael CONNER (1988). "Optical Wigner distribution function and ambiguity function for complex signals and images". *Optics Communications* **67**(3), 177-179.
- LIU, Liren, Xiaoben LIU y Liangang YE (1990). "Join Talbot effect and logic-operated moiré patterns". *Journal of the Optical Society of America A* **7**(6), 970-976.

- LOHMANN, Adolf W. (1968). "Matched Filtering with Self-Luminous Objects". *Applied Optics* 7(3), 561-563.
- LOHMANN, Adolf W. (1978). "Optical Information Processing". Erlangen.
- LOHMANN, Adolf W. y David MENDLOVIC (1992). "Circular harmonic filters for a rotation-invariant incoherent correlator". *Applied Optics* 31(29), 6187-6189.
- LOHMANN, Adolf W. y B. MORGENSTERN (1963). "Azimutalmodulation in der Optik". *Optik* 20, 450-455.
- LOHMANN, Adolf W., Jorge OJEDA-CASTAÑEDA y Jorge IBARRA (1995). "Simple coherence measurement with a modified Lau interferometer". *Optics Letters* 20(3), 321-323.
- LOHMANN, Adolf W., Jorge OJEDA-CASTAÑEDA y Genaro SAAVEDRA (1994). "Talbot interferometry with new gratings". En *Proceedings of the Canadian Association of Physics, the American Physical Society and the Mexican Society of Physics Meeting '94*, pp. 170.
- LOHMANN, Adolf W., Jorge OJEDA-CASTAÑEDA y Enrique E. SÍCRE (1984). "Multiple interaction bandstop filters based on the Talbot effect". *Optics Communications* 49(6), 388-392.
- LOHMANN, Adolf W. y H. W. WERLICH (1971). "Incoherent Matched Filtering with Fourier Holograms". *Applied Optics* 10(3), 670-672.
- LÓPEZ-OLAZAGASTI, Estela, Alfonso SERRANO-HEREDIA, Genaro SAAVEDRA y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1993). "Supergaussian beams of continuous order: wave propagation". *Proceedings SPIE* 1983, 636-637.
- LU, Guowen, Zheng ZHANG y Francis T. S. YU (1995). "Phase encoded input joint transform correlator with improved pattern discriminability". *Optics Letters* 20(11), 1307-1309.
- MAKRIS, Nicholas C. (1995). "A foundation for logarithmic measures of fluctuating intensity in pattern recognition". *Optics Letters* 20(19), 2012-2014.
- MARCENAC, D. D. y J. E. CARROLL (1993). "Wigner distribution and spectral dynamics of laser diodes". *Optics Letters* 18(17), 1435-1437.
- MARK, W. D. (1970). "Spectral analysis of the convolution and filtering of non-stationary stochastic processes". *J. Sound Vib.* 11, 19-63.
- MARKS II, R. J. y M. W. HALL (1979). "Ambiguity function display using a single 1-D input". *Applied Optics* 18, 2539-2540.
- MARKS II, R. J., J. F. WALKUP y T. F. KRILE (1977). "Ambiguity function display: An improved coherent processor". *Applied Optics* 16, 746-750.

- MARTÍNEZ-CORRAL, Manuel, Pedro ANDRÉS y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1994). "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils". *Applied Optics* 33(11), 2223-2229.
- MATEEVA, Ts. y P. SHARLANDJIEV (1986). "The generation of a Wigner distribution function of complex signals by spatial filtering". *Optics Communications* 57(3), 153-155.
- MCCUTCHEN, C. W. (1964). "Generalized aperture and the three-dimensional diffraction image". *Journal of the Optical Society of America* 54, 240-244.
- MCLACHLAN, Jr., Dan (1962). "The role of Optics in applying correlation functions to pattern recognition". *Journal of the Optical Society of America* 52(4), 454-459.
- MENDLOVIC, David (ed.) (1995). "Status report on: the fractional Fourier transform". Tel-Aviv University.
- MICHALSKI, M., Enrique E. SICRE y Héctor J. RABAL (1985). "Display of the complex degree of coherence due to quasi-monochromatic spatially incoherent sources". *Optics Letters* 10(12), 585-587.
- MINO, M. y Y. OKANO (1971). "Improvement in the Optical Transfer Function of a defocused optical system through the use of shaded apertures". *Applied Optics* 10, 2219.
- MONAHAN, M. A., K. BROMLEY y P. R. BOCKER (1977). "Incoherent optical correlators". *Proceedings IEEE* 65(1), 121-129.
- NAVARRO, Rafael y Antonio F. PÉREZ-RENDÓN (1990). "Formulation of stellar speckle interferometry in terms of joint spatial/spatial-frequency representations". *Optics Letters* 15(23), 1331-1333.
- NIETO-VESPERINAS, Manuel (1991). *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. John Wiley & Sons (Nueva York).
- NOMURA, Takanori, Yukio YOSHIMURA, Kazuyoshi ITOH y Yoshiki ICHIOKA (1995). "Incoherent-only joint-transform correlator". *Applied Optics* 34(8), 1420-1425.
- NUGENT, K. A. (1990). "A generalization of Schell's theorem". *Optics Communications* 79(5), 267-269.
- NUGENT, K. A. (1991). "Partially coherent diffraction patterns and coherence measurement". *Journal of the Optical Society of America A* 8(10), 1574-1579.

- NUGENT, K. A. (1995). "Quasi-homogeneous fields: a van Cittert-Zernike theorem and the recovery of correlations from intensity". *Optics Communications* **118**, 9–13.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Pedro ANDRÉS y Juan Carlos BARREIRO (1989). "Abbe-Porter experiment and logic operations". *Optics Communications* **71**(3,4), 145–150.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Pedro ANDRÉS y A. DÍAZ (1988). "Strehl ratio with low sensitivity to spherical aberration". *Journal of the Optical Society of America A* **5**, 1233–1236.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Pedro ANDRÉS y Jorge IBARRA (1988). "Lensless theta decoder with high light throughput". *Optics Communications* **67**(4), 256–260.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Juan Carlos BARREIRO y Jorge IBARRA (1988). "Schardin-Lau interferometer". *Optics Communications* **67**, 325–330.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Jorge IBARRA y Juan Carlos BARREIRO (1989). "Noncoherent Talbot effect: coherence theory and applications". *Optics Communications* **71**, 151–155.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Manuel MARTÍNEZ-CORRAL, Pedro ANDRÉS y Amparo PONS (1994). "Strehl ratio versus defocus for noncentrally obscured pupils". *Applied Optics* **33**(32), 7611–7616.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Genaro SAAVEDRA y Estela LÓPEZ-OLAZAGASTI (1993). "Supergaussian beams of continuous order as GRIN modes". *Optics Communications* **102**, 21–24.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge y E. E. SICRE (1983). "Tunable bandstop filter for binary objects: a self-imaging technique". *Optics Communications* **47**(3), 183–186.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge y Enrique E. SICRE (1986). "Theta-modulation decoder based on the Lau effect". *Optics Communications* **59**(2), 87–91.
- OJEDA-CASTAÑEDA, Jorge, Eduardo TEPICHÍN y Amparo PONS (1988). "Apodization of annular apertures: Strehl ratio". *Applied Optics* **27**, 5140–5145.
- OPPENHEIM, A. V. y R. W. SCHAFFER (1975). *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall (Englewood Cliffs).
- PACKROSS, Bernd, Reiner ESCHBACH y Olof BRYNGDAHL (1984). "Achromatization of the self-imaging (Talbot) effect". *Optics Communications* **50**(4), 205–209.
- PAPOULIS, Athanasios (1974). "Ambiguity function in Fourier optics". *Journal of the Optical Society of America* **64**(6), 779–788.

- PATORSKI, Krzysztof (1989). "The self-imaging phenomenon and its applications". *Progress in Optics XXVII*, 3-108.
- PIESTUN, Rafael, Joseph ROSEN y Joseph SHAMIR (1994). "Generation of continuous complex-valued functions for a joint transform correlator". *Applied Optics* **33**(20), 4398-4405.
- PRESTON, K. (1972). *Coherent Optical Computers*. McGraw-Hill (Nueva York).
- PSALTIS, Demetri, Eung Gi PAEK y Santosh S. VENKATESH (1984). "Optical image correlation with a binary spatial light modulator". *Optical Engineering* **23**, 698-704.
- RABINER, L. R. y B. GOLD (1975). *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice-Hall (Englewood Cliffs).
- RAU, James E. (1966). "Detection of differences in real distributions". *Journal of the Optical Society of America* **56**(11), 1490-1494.
- RHODES, William T. y A. A. SAWCHUK (1981). "Incoherent Optical Processing". En Sing H. Lee (ed.), *Optical Information Processing*, número 48 en Topics in Applied Physics, capítulo 3, pp. 69-110. Springer-Verlag (Berlín).
- ROGERS, G. L. (1977). *Noncoherent Optical Processing*. John Wiley & Sons (Nueva York).
- ROSEN, Joseph, Mordechai SEGEV, Joseph SHAMIR y Amnon YARIV (1992). "Interferometric electro-optical signal processors with partially coherent illumination". *Journal of the Optical Society of America A* **9**(9), 1498-1507.
- SAAVEDRA, Genaro, Pedro ANDRÉS, Juan Carlos BARREIRO y Jorge Ojeda CASTAÑEDA (1993). "Perfect shadow-casting correlator: applications". *Proceedings SPIE* **1983**, 401-402.
- SAAVEDRA, Genaro, Pedro ANDRÉS, Juan Carlos BARREIRO, Jorge IBARRA y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1993). "Nonconventional imaging with partially coherent light". *Proceedings SPIE* **1983**, 205-206.
- SAAVEDRA, Genaro, Jorge IBARRA y Jorge OJEDA-CASTAÑEDA (1996). "Talbot interferometry with linear gratings". *Proceedings SPIE* **2730**, 645.
- SALEH, Bahaa E. A. y Malvin Carl TEICH (1991). *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. John Wiley & Sons (Nueva York).
- SANTAMARÍA, Javier (1973). *Estudio difraccional de la imagen óptica policromática. Sistema perfecto e influencia de la aberración cromática longitudinal*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- SCHIFFMAN, Harvey Richard (1990). *Sensation and Perception. An integrated approach* (3ª ed.). John Wiley & Sons (Nueva York).

- SEYKORA, E. J. (1986). "A spatial coherence interferometer utilizing a grating and its possible use for solar limb investigations". *Bulletin of the American Astronomical Society* 18(2), 703.
- SEYKORA, E. J. (1990). "Solar interferometry utilizing the visibility of diffraction-free images". *Applied Optics* 29(34), 5039-5041.
- SICRE, Enrique E., Néstor BOLOGNINI y Mario GARAVAGLIA (1985). "Partial achromatization of the self-imaging phenomenon". *Applied Optics* 24(7), 929-930.
- STAMNES, Jakob J., B. SPJELKAVIK y H. M. PEDERSEN (1983). "Evaluation of diffraction integrals using local phase and amplitude approximations". *Optica Acta* 30(2), 207-222.
- SUBOTIC, Nikola y Bahaa E. A. SALEH (1984). "Generation of the Wigner distribution function of two-dimensional signals by a parallel optical processor". *Optics Letters* 9(10), 471-473.
- SUN, Pang-Chen (1993). "Mutual-intensity lensless imaging system". *Optics Letters* 18(5), 394-396.
- SZU, Harold H. (1982). "Two-dimensional optical processing of one-dimensional acoustic data". *Optical Engineering* 21, 804-813.
- SZU, Harold H. (ed.) (1994). *Wavelet Applications*, Proceedings SPIE 2242.
- SZU, H. Harold y J. A. BLODGETT (1981). "Wigner distribution function and ambiguity function". En M. A. Machado y L. M. Narducci (eds.), *Optics in Four Dimensions-1980*, pp. 355-381.
- SZWAYKOWSKI, Piotr (1984). "The lateral shift of Fresnel images of periodic objects under coherent plane wave illumination". *Optica Acta* 31(5), 563-566.
- TAKEDA, Mitsuo (1981). "Chromatic aberration matching of the polychromatic optical transfer function". *Applied Optics* 20(4), 684-687.
- TANG, Qing y Bahram JAVIDI (1993). "Multiple-object detection with a chirp-encoded joint transform correlator". *Applied Optics* 32(26), 5079-5088.
- TANIDA, J. y Yoshiki ICHIOKA (1983). "Optical logic array processor using shadowgrams". *Journal of the Optical Society of America* 73(6), 800-809.
- TEN BRUMMELAAR, T. A. y W. G. BAGNUOLO, Jr. (1995). "Strehl ratio and visibility in long-baseline stellar interferometry". *Optics Letters* 20(6), 521-523.
- TEPICHÍN, Eduardo y Jorge IBARRA (1995). "Polarization sensitive lensless Lau interferometer". *Optics Communications* 119(5,6), 471-478.

- TU, Jinhong y Li ZHAN (1991). "Two-dimensional theory of the Lau-Talbot-Moiré effect under partially coherent illumination". *Optics Communications* 82(3,4), 229-235.
- VAN DER GRACHT, Joseph y Joseph N. MAIT (1992). "Incoherent pattern recognition with phase-only filters". *Optics Letters* 17(23), 1703-1705.
- VANASSE, George A. y Hajime SAKAI (1967). "Fourier spectroscopy". *Progress in Optics* VI, 259-330.
- VANDER LUGT, Anthony (1964). "Signal detection by complex spatial filtering". *IEEE Transactions on Information Theory* IT-10, 139-145.
- VIJAYA KUMAR, B. V. K. y Christopher W. CARROLL (1984). "Effects of sampling on signal detection using the cross-Wigner distribution function". *Applied Optics* 23(22), 4090-4094.
- VIJAYA KUMAR, B. V. K. y L. HASSEBROOK (1990). "Performance measures for correlation filters". *Applied Optics* 29(20), 2997-3006.
- VIKRAM, Chandra S. (1990). "Removing the diffraction halo effect in speckle photography of sinusoidal vibration". *Applied Optics* 29(25), 3572-3573.
- VIKRAM, C. S. y A. R. GANESAN (1992). "Removal of the diffraction halo effect in speckle photography by using a negative mask". *Optics Letters* 17(15), 1046-1048.
- VIKRAM, Chandra S. y K. VEDAM (1981). "Speckle photography of lateral sinusoidal vibrations: error due to varying halo intensity". *Applied Optics* 20, 3388-3391.
- WALTHER, A. (1968). "Radiometry and Coherence". *Journal of the Optical Society of America* 58(9), 1256-1259.
- WEAVER, C. S. y Joseph W. GOODMAN (1966). "A technique for optically convolving two functions". *Applied Optics* 5(7), 1248-1249.
- WIDJAJA, J., J. UOZUMI y Toshimitsu ASAKURA (1990). "Method for evaluating the displacement of objects using the Wigner distribution function". *Journal of Optics (Paris)* 21(6), 253-259.
- WIDJAJA, J., J. UOZUMI y Toshimitsu ASAKURA (1992). "Real-time evaluation of local displacement of objects by means of the Wigner distribution function". *Journal of Optics (Paris)* 23(1), 13-18.
- WIGNER, E. (1932). "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium". *Physical Review* 40, 749-759.
- WINTHROP, John T. y C. R. WORTHINGTON (1965). "Theory of Fresnel images. I. Plane periodic objects in monochromatic light". *Journal of the Optical Society of America* 55(4), 373-381.

- WONG, Willy y Kenneth H. NORWICH (1995). "Obtaining equal loudness contours from Weber fractions". *Journal of the Acoustical Society of America* 97(6), 3761-3767.
- WOODWARD, P. M. (1953). *Probability and Information Theory with Application to Radar*. Pergamon (Nueva York).
- WYSZECKI, Günter y W. S. STILES (1982). *Color Science* (2^a ed.). John Wiley & Sons (Nueva York).
- YAMAGUCHI, Ichirou (1985). "Fringe formations in deformation and vibration measurements using laser light". *Progress in Optics* XXII, 271-340.
- YANG, Y., Yuan-Neng HSU y Henri H. ARSENAULT (1982). "Optimum circular symmetrical filters and their uses in optical pattern recognition". *Optica Acta* 29, 627-644.
- YEN, N. (1987). "Time and frequency representation of acoustic signals by means of the Wigner distribution function: Implementation and interpretation". *Journal of the Acoustical Society of America* 81(6), 1841-1850.
- YU, Francis T. S. (1985). *White-Light Optical Signal Processing*. John Wiley & Sons (Nueva York).
- YU, Francis T. S., F. K. HSU y T. H. CHAO (1984). "Coherence measurement of a grating-based white-light optical signal processor". *Applied Optics* 23(2), 333-340.
- YU, Francis T. S., Suganda JUTAMULIA, Tsongneng W. LIN y Don A. GREGORY (1987). "Adaptive real-time pattern recognition using a liquid crystal TV based joint transform correlator". *Applied Optics* 26(8), 1370-1372.
- YU, Francis T. S. y X. J. LU (1984). "A real-time programmable joint transform correlator". *Optics Communications* 52(1), 10-16.
- YZUEL, María Josefa y Fernando CALVO (1983). "Point-spread function calculation for optical systems with residual aberrations and non-uniform transmission pupil". *Optica Acta* 30(2), 233-242.
- YZUEL, María Josefa, Juan Carlos ESCALERA y Juan CAMPOS (1990). "Polychromatic axial behavior of axial apodizing and hiperresolving filters". *Applied Optics* 29(11), 1631-1641.
- YZUEL, María Josefa y Javier SANTAMARÍA (1975). "Polychromatic optical image. Diffraction limited system and influence of the longitudinal chromatic aberration". *Optica Acta* 22(8), 673-690.
- ZALBIDEA, Dobryna, Mario LEHMAN, Sergio GRANIERI y Enrique E. SICRE (1995). "Analysis of the Strehl ratio using the Wigner distribution function". *Optics Communications* 118, 207-214.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE CIÈNCIES FÍSQUES

Fuente el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,
acorde d'orgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral
d'En/ Genaro Saavedra Tortosa
la qualificació d' ' Apte "cum Laude" '.

València a 15 d' octubre de 1996.

El Secretari,

El President,



[Handwritten signatures in blue ink, including a large signature that appears to be 'Saavedra' and another signature overlapping the stamp.]

