

UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY



The Journal of Energy and the Sciences of Gas  
Optimization

Volume 1, Number 1  
January 1978  
Published by the  
University of California  
Library



TESIS 219

8-10-93

Físicas

219

T.D

**UNIVERSITAT DE VALÈNCIA**

DEPARTAMENT D'ÒPTICA



## **El Modelo de Lorenz y los Láseres de Gas Bombeados Ópticamente**

Tesis presentada por  
Eugenio Roldán Serrano  
para optar al grado de  
Doctor en Física

Octubre 1993



UMI Number: U603088

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603088

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Físicas

Nº Registre 6032

DATA 22.XI.93

SIGNATURA

219.T.D

Nº LIBRIS: 119550911

26 cms.

...  
Biblioteca de Ciències

...  
...  
...

...  
...

D. Ramon Vilaseca Alavedra, Catedrático de Física Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya

CERTIFICA que la presente memoria: "**El modelo de Lorenz y los láseres de gas bombeados ópticamente**", resume el trabajo de investigación realizado, bajo su dirección, por D. Eugenio Roldán Serrano y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, firma el presente certificado en Valencia, a veinticuatro de Junio de mil novecientos noventa y tres.



Fdo: **Dr. R. Vilaseca Alavedra**

arbitrarily  
long.

A Carmen y Eugenio, mis padres  
A Maria Milagros

1. 1. 1.

1. 1. 2.

1. 1. 3.

1. 1. 4.

1. 1. 5.

1. 1. 6.

1. 1. 7.

1. 1. 8.

1. 1. 9.

1. 1. 10.

1. 2. 1.

1. 2. 2.

- ... *Pude ver en la cara del inspector que su interés se había despertado vivamente.*
- *"¿Considera usted que eso es importante?", preguntó.*
  - *"Extraordinariamente importante".*
  - *"¿Existe algún otro detalle acerca del cual desearía usted llamar mi atención?"*
  - *"Sobre el curioso incidente del perro durante la noche".*
  - *"El perro no hizo nada por la noche".*
  - *"Eso es lo curioso", hizo notar Sherlock Holmes.*

Sir Arthur Conan Doyle,  
Estrella de Plata (Memorias de Sherlock Holmes).

*La Naturaleza aprecia el ocultarse.*

Heráclito, fragmento 123.



### **Agradecimientos**

Todo aquél que ha llevado a cabo una tarea como la de una Tesis Doctoral sabe que se trata de algo más que un proyecto científico. A lo largo de su realización, y alrededor de ella, crecen proyectos, ilusiones y relaciones personales que la convierten en mucho más que una tarea profesional. En particular son muchas las personas con las que se comparten las inquietudes que se generan y que ponen de su parte apoyo, ideas e incluso trabajo personal. Este es el momento de recordarles con agrado y manifestarles mi agradecimiento. En algún caso sus sugerencias han sido esenciales para que el trabajo adquiriese su estado final pero si existe algún error, la responsabilidad es únicamente mía por no haber sabido plasmarlas.

En primer lugar deseo agradecer la tarea de dirección del Prof. Dr. Ramon Vilaseca quien un día, no se muy bien porqué, depositó en mí su confianza. Trabajar con él ha sido un gran placer.

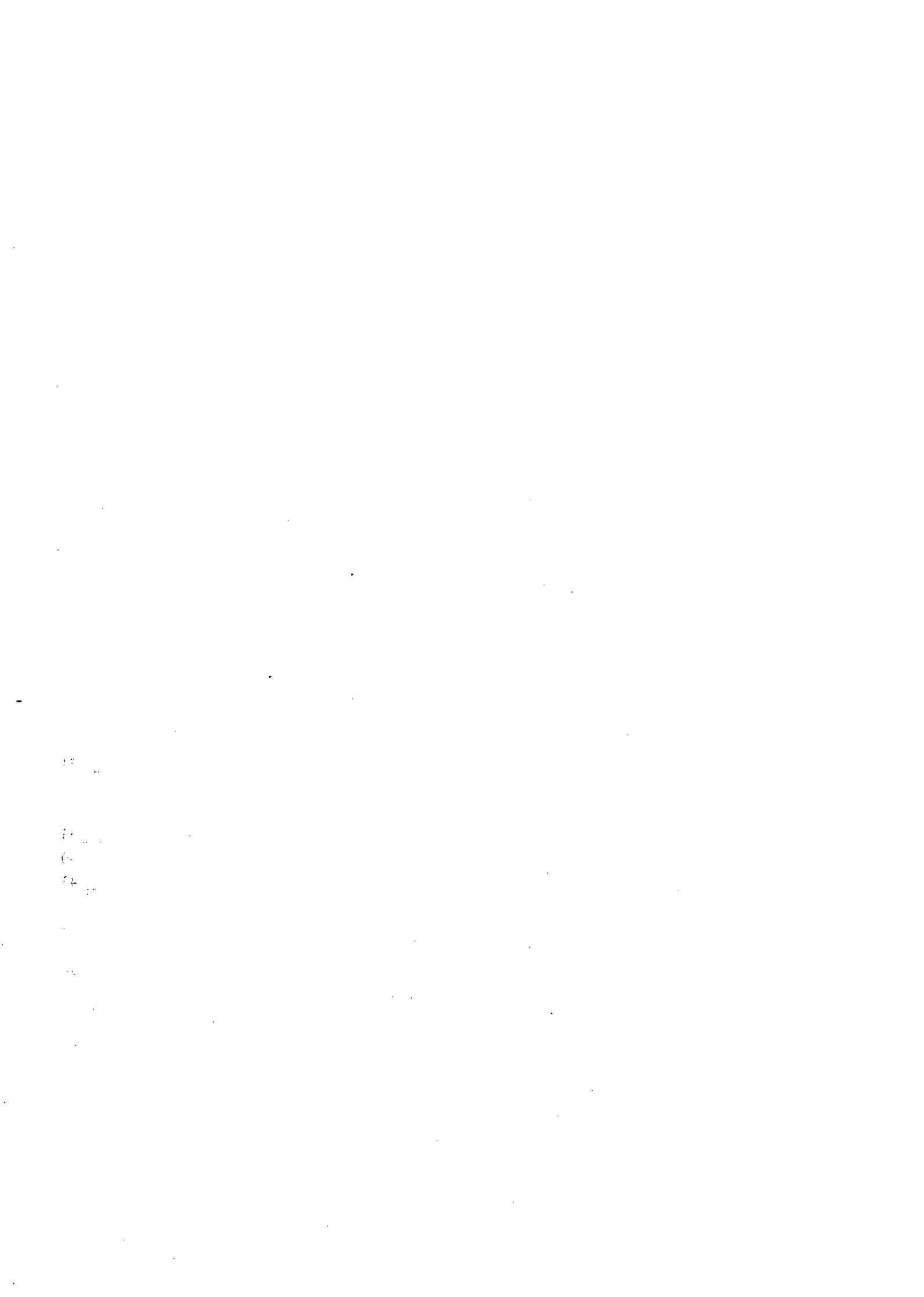
Estas líneas son insuficientes para agradecer como debiera a D. Germán de Valcárcel, con quien comparto una enriquecedora amistad hace años, todo lo que este trabajo le debe. Su implicación en este proyecto ha sido muy grande y sin duda, hubiese sido muy distinto sin su participación.

También estoy en deuda con las sugerencias que los Profs. Dr. Ramón Corbalán de la Universitat Autònoma de Barcelona, Dr. Carl Otto Weiss del Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) de Braunschweig y Dr. Paul Mandel de la Université Libre de Bruxelles me han hecho en más de una ocasión, gracias a las cuales diferentes aspectos de este trabajo han avanzado con mayor seguridad.

A los Profs. Dr. Vicente J. Martínez del Departament de Matemàtica Aplicada de la Universitat de València y Dr. Udo Hübner del PTB debo agradecer los cálculos que de las dimensiones de algunas secuencias caóticas ellos han realizado personalmente.

A D. Fernando Silva le debo haber salido de más de un escollo con los ordenadores y al Centro de Informática del Instituto de Física Corpuscular el uso de sus instalaciones informáticas. A D. Enrique Silvestre deseo agradecer su ayuda mientras estuvo en este centro con algunos problemas de programación.

Finalmente doy las gracias a los miembros del Departament d'Optica de la Universitat de València, donde este trabajo ha sido realizado, por su acogida. Me he sentido muy a gusto trabajando con ellos.



## INDICE

|  |    |
|--|----|
| <b>Presentación</b>  | 5  |
| <b>Introducción: El modelo de Lorenz-Haken y los láseres bombeados ópticamente.</b>  | 7  |
| I.1. El modelo de Lorenz.  | 9  |
| I.2. El modelo de Lorenz y los láseres: el modelo de Lorenz-Haken.   | 11 |
| I.3. Efecto de la desintonía en el modelo de Lorenz-Haken.   | 19 |
| I.4. Descripción general de la dinámica de la fase.  | 22 |
| I.5. El problema de la verificación experimental del modelo de Lorenz-Haken.   | 26 |
| <br><i>Parte I: Contribuciones al estudio del modelo de Lorenz-Haken.</i>  |    |
| <b>Capítulo 1: Marcos frecuenciales de referencia y dinámica de la fase en el modelo de Lorenz-Haken.</b>                      | 31 |
| 1.1. Comportamiento de la fase y el campo complejo en los diferentes referenciales.  | 33 |
| 1.2. Marcos frecuenciales de referencia y espectro del campo complejo.   | 40 |
| 1.3. Frecuencia media de emisión del láser.  | 43 |
| 1.4. Comportamiento de los referenciales frente a la desintonía y el bombeo.   | 45 |
| 1.5. Invariantes al referencial. La fase del campo y la fase geométrica.   | 48 |
| 1.6. Conclusión.   | 52 |
| <b>Capítulo 2: Extensión del modelo de Lorenz-Haken: diferentes relajaciones externas y relajación interna de los niveles.</b> | 55 |
| 2.1. Modelo de láser de dos niveles con relajaciones diferentes para cada nivel y relajación interna.                          | 57 |
| 2.2. Soluciones estacionarias y análisis lineal de estabilidad.  | 62 |
| 2.3. Comportamiento dinámico.  | 70 |



*Parte II: Comportamiento dinámico de los láseres de gas bombeados ópticamente y su relación con el modelo de Lorenz-Haken.*

**Capítulo 3: El problema de la observación experimental de comportamiento tipo Lorenz.** \_\_\_\_\_ 75

- 3.1. El láser de  $\text{NH}_3$ . ¿Por qué el láser de  $\text{NH}_3$ ? \_\_\_\_\_ 77
- 3.2. Primeros resultados experimentales. \_\_\_\_\_ 81
- 3.3. Primeras reacciones. \_\_\_\_\_ 83
- 3.4. Estudios teóricos sobre la influencia del bombeo coherente en el comportamiento dinámico de los láseres. \_\_\_\_\_ 84
- 3.5. Evidencia experimental de comportamiento tipo Lorenz. \_\_\_\_\_ 87
- 3.6. Hacia una interpretación de los resultados experimentales. \_\_\_\_\_ 93

**Capítulo 4: El modelo de láser de gas bombeado ópticamente con ensanchamiento Doppler (LGBO-D)** \_\_\_\_\_ 95

- 4.1. El modelo LGBO-D. \_\_\_\_\_ 97
- 4.2. Valores de los parámetros. Método de resolución de las ecuaciones. \_\_\_\_\_ 102
  - 4.2.a. Línea de  $81.5\mu\text{m}$ . \_\_\_\_\_ 102
  - 4.2.b. Caso simplificado con bombeo resonante. \_\_\_\_\_ 105
  - 4.2.c. Línea de  $374\mu\text{m}$ . \_\_\_\_\_ 106
  - 4.2.d. Resolución numérica de las ecuaciones. \_\_\_\_\_ 108
- 4.3. Comportamiento tipo Lorenz en la línea de  $81.5\mu\text{m}$ . \_\_\_\_\_ 109
  - 4.3.a. Comportamiento dinámico. Diagrama de fases. \_\_\_\_\_ 110
  - 4.3.b. Comportamiento de la fase. Atractores. \_\_\_\_\_ 113
  - 4.3.c. Caracterización del comportamiento caótico. \_\_\_\_\_ 116
  - 4.3.d. Comportamiento de los términos  $R(t)$  y  $S(t)$ . \_\_\_\_\_ 117
  - 4.3.e. Desviaciones del comportamiento tipo Lorenz: otros valores de  $\kappa$ . \_\_\_\_\_ 124
- 4.4. Comportamiento con bombeo resonante. \_\_\_\_\_ 127
- 4.5. Comportamiento en la línea de  $374\mu\text{m}$ . \_\_\_\_\_ 131
- 4.6. Conclusiones. \_\_\_\_\_ 134

**Capítulo 5: Influencia de la polarización de los campos en un LGBO homogéneo. El modelo LGBO-M de cuatro niveles.** \_\_\_\_\_ 137

- 5.1. El modelo LGBO-M. Resultados previos. \_\_\_\_\_ 140
- 5.2. Particularización del modelo al caso de polarizaciones lineales. \_\_\_\_\_ 143

|   |            |
|---|------------|
| 5.2.a. Caso paralelo.   | 145        |
| 5.2.b. Caso ortogonal.  | 147        |
| 5.3. Relación entre el caso paralelo y los LGBO de tres niveles homogéneos.                             | 150        |
| 5.4. Relación entre el caso ortogonal y el modelo de Lorenz.  | 152        |
| 5.4.a. Soluciones estacionarias   | 152        |
| 5.4.b. Análisis lineal de estabilidad.  | 155        |
| 5.4.c. Comportamiento dinámico  | 158        |
| 5.4.d. Origen del comportamiento tipo Lorenz. Modelo simplificado.                                      | 160        |
| 5.5. Interpretación en términos de átomo vestido: atrapamiento de población sensible a la polarización. | 167        |
| 5.6. Conclusiones. Sobre la aplicabilidad del modelo LGBO-M al láser de $\text{NH}_3$ .                 | 172        |
| <b>Capítulo 6: Conclusiones generales.</b>  | <b>175</b> |
| 6.1. Contribuciones al estudio del modelo de Lorenz-Haken.  | 177        |
| 6.2. Contribuciones al estudio de la dinámica de los LGBO.  | 179        |
| 6.3. Perspectivas.  | 183        |
| <b>Apéndices.</b>   | <b>185</b> |
| Apéndice 1. Ecuaciones semiclásicas del láser.  | 187        |
| Apéndice 2. Dimensiones generalizadas.  | 193        |
| Apéndice 3. La fase de Berry y su manifestación en sistemas disipativos dinámicos.                      | 197        |
| <b>Bibliografía.</b>  | <b>201</b> |



## Presentación

La presente Memoria está dedicada, por una parte, al estudio de ciertos aspectos del modelo de Lorenz para los láseres [también llamado modelo de Lorenz-Haken (LH)] y, por otra, a su controvertida aplicabilidad a los láseres de gas bombeados ópticamente. Así pues, el trabajo que aquí exponemos entronca con una ya larga tradición de estudio de las características temporales de la radiación emitida por los láseres, tradición que comienza prácticamente con el advenimiento del láser y que recibe un gran impulso a mediados de los años 70 con el reconocimiento de que el modelo de Lorenz (paradigma del estudio de la dinámica no lineal y el caos en sistemas disipativos) es aplicable a cierto tipo de láseres [Haken, 1975], hecho que recibiría una brillante y discutida confirmación experimental a mediados de la pasada década por el equipo de C.O. Weiss en Braunschweig [Weiss y Brock, 1986]. A la interpretación teórica de estos resultados experimentales se dedicará una buena parte de nuestro trabajo.

La Memoria se halla, consecuentemente, dividida en dos partes. En la primera parte exponemos nuestras contribuciones al estudio del comportamiento dinámico del láser de dos niveles (modelo LH), y en la segunda parte exponemos nuestras contribuciones a la interpretación teórica de los resultados experimentales en los que se ha observado el comportamiento predicho por el modelo LH. Se hace necesaria, por tanto, una Introducción suficiente al modelo de Lorenz así como un resumen adecuado de los resultados ya conocidos del mismo, Introducción que precede a ambas partes.

Nuestras contribuciones originales al estudio del modelo LH se encuentran reunidas en los capítulos 1 y 2. En el Capítulo 1 estudiamos detalladamente la dinámica de la fase en el modelo LH y la influencia que en la misma tiene la elección de una frecuencia de referencia para el campo. Este problema ha sido objeto de bastante atención durante los últimos cinco años y nuestro trabajo permite dar una clara interpretación de los resultados observados. En el Capítulo 2, estudiamos la influencia que en el modelo LH tiene considerar tasas de relajación diferentes para cada uno de los niveles atómicos así como la influencia de procesos de relajación interna entre los mismos, aspectos que no han sido considerados hasta el presente y que pueden tener una influencia cuantitativa en ciertos casos.

En la segunda parte tratamos el problema de la aplicabilidad del modelo LH a los láseres de gas bombeados ópticamente. La primera observación de un comportamiento próximo al predicho por el modelo LH se llevó a cabo en un láser de amoníaco [Weiss y Brock, 1986], láser al que *a priori* no es aplicable el modelo LH porque es bombeado ópticamente. Por esta razón los resultados experimentales fueron objeto de gran polémica durante la pasada década ya que todos los modelos planteados del dispositivo



experimental predecían un comportamiento diferente al del modelo LH. En el Capítulo 3, que abre la segunda parte, damos una detallada (y pensamos que indispensable) revisión bibliográfica crítica tanto de los resultados experimentales como de los trabajos teóricos que versaron sobre ellos, revisión que, hasta donde sabemos, no ha sido realizada hasta el presente y que permite centrar adecuadamente el estado de la cuestión. En los siguientes capítulos estudiamos en profundidad dos modelos que fueron propuestos para interpretar los resultados experimentales pero que fueron estudiados solo preliminarmente. Así, dedicamos el Capítulo 4 al estudio del modelo de láser de gas bombeado ópticamente con ensanchamiento Doppler del medio material (LGBO-D) [Laguarta *et al*, 1988], llevando a cabo una importante extensión del estudio numérico realizado hasta ahora y dando una interpretación de su capacidad para reproducir comportamiento tipo Lorenz. En el Capítulo 5 estudiamos otro modelo, el modelo de láser de gas bombeado ópticamente con degeneración magnética del nivel molecular superior (LGBO-M) [Arjona *et al*, 1990], modelo que permite estudiar la influencia de la polarización de los campos en la dinámica de los láseres bombeados ópticamente. Sobre este modelo llevamos a cabo un intensivo estudio analítico en los casos de polarizaciones lineales, estudio que nos permite interpretar claramente los resultados numéricos que con él se han obtenido. Finalmente, en el Capítulo 6, reunimos las conclusiones generales de esta Memoria y reflexionamos sobre la aplicabilidad de estos dos últimos modelos al dispositivo experimental y sobre su validez general, intentando dar una visión clara del grado de comprensión de la dinámica de los láseres bombeados ópticamente a que estos nos llevan y no perdiendo de vista que el rango de aplicabilidad del estudio va más allá de la interpretación de los resultados experimentales de Weiss y colaboradores. La Memoria finaliza con las referencias bibliográficas utilizadas a lo largo de la Memoria y con tres breves apéndices dedicados a aspectos parciales no desarrollados en el cuerpo principal de la misma.

## **Introducción: El modelo de Lorenz-Haken y los láseres de gas bombeados ópticamente.**

**I.1. El modelo de Lorenz.**

**I.2. El modelo de Lorenz y los láseres: el modelo de Lorenz-Haken.**

**I.3. Efecto de la desintonía en el modelo de Lorenz-Haken.**

**I.4. Descripción general de la dinámica de la fase.**

**I.5. El problema de la verificación experimental del modelo de Lorenz-Haken.**



Desde fecha tan temprana como los primeros años 60 es sabido que los láseres pueden exhibir comportamiento dinámico espontáneamente, esto es, que pueden emitir trenes ininterrumpidos de pulsos aunque sean bombeados de forma continua y no haya elementos desestabilizadores externos conocidos. También podemos encontrar investigaciones sobre la emisión de trenes de pulsos por máseres en los últimos años 50 [para una revisión histórica detallada véase Casperson (1983) y Abraham *et al* (1988a)].

En 1962, Nelson y Boyle comunicaron la observación de oscilaciones no amortiguadas en un láser de rubí y en 1964, Buley y Cummings fueron los primeros en encontrar pulsaciones en un modelo teórico de láser. También en 1964, Grasyuk y Orayevsky obtuvieron comportamientos semejantes y describieron las condiciones que deberían verificar los parámetros del láser para que las pulsaciones fuesen observadas. Estos trabajos pioneros fueron ampliados en 1968 por Risken y Nummedal y por Graham y Haken.

Sin embargo, en palabras de Casperson (1983), las investigaciones sobre las pulsaciones en láseres permanecieron *a un bajo nivel* durante estos años. Además, los resultados teóricos obtenidos eran incapaces de explicar los resultados experimentales ni tan siquiera de forma cualitativa. Así, el trabajo de Buley y Cummings (1964) no fue suficientemente apreciado hasta que Hermann Haken demostró en 1975 que las ecuaciones del modelo más sencillo de láser son isomorfas al modelo de Lorenz (1963). A partir de este momento, quedó claro que las pulsaciones exhibidas por los láseres pertenecían a un conjunto de fenómenos que se extiende por todas las ciencias, la teoría de los sistemas no lineales, cambiando drásticamente la situación y haciéndose intensivas desde los primeros años 80 las investigaciones en este campo.

Nosotros estamos interesados en el modelo de Lorenz-Haken y, consecuentemente, desarrollaremos a lo largo de esta Introducción los principales resultados conocidos hasta nuestro trabajo, dejando la exposición de nuestras contribuciones para los próximos capítulos.

### **I.1. El modelo de Lorenz.**

En el experimento de Bénard, una capa delgada de fluido es calentada desde abajo en el seno de un campo gravitatorio. El fluido caliente de la capa inferior tiende a subir por convección mientras que el de la capa superior tiende a bajar por el efecto de la gravitación al tiempo que la viscosidad del fluido dificulta ambos movimientos. Mientras la diferencia de temperatura existente entre las capas superior e inferior,  $\Delta T$ , es

pequeña, el líquido permanece en reposo (la viscosidad gana) y el calor es transportado uniformemente hacia arriba por difusión. Para un valor crítico de  $\Delta T$ , este estado se vuelve inestable y se llega a un estado de convección estacionario (formación de rollos de convección estables). Si  $\Delta T$  sigue aumentando, se observa una transición brusca al caos para cierto valor crítico de  $\Delta T$ . Esta es la llamada inestabilidad de Rayleigh-Bénard.

Para establecer un modelo matemático sencillo de este experimento, Edward N. Lorenz truncó el complicado conjunto de ecuaciones que describe el sistema [Saltzman, 1961; Lorenz, 1963; Schuster, 1989] y obtuvo las ecuaciones del llamado modelo de Lorenz:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{d\tau} &= rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{I.1.1}$$

donde  $X$  es una componente del desarrollo en serie de Fourier del campo de velocidades,  $Y$  y  $Z$  son componentes del desarrollo del campo de temperaturas,  $\sigma = \nu/\kappa'$  es el número de Prandtl ( $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\kappa'$  la conductividad termométrica),  $r = R/R_c$  ( $R$  es el número de Rayleigh, que es proporcional a  $\Delta T$ , y  $R_c$  el valor del mismo necesario para que se desarrolle la convección),  $b$  es una constante relacionada con las dimensiones de los rollos de convección y  $\tau$  es el tiempo normalizado.

Señalemos que el modelo de Lorenz únicamente describe el comportamiento temporal de uno de los rollos. Para describir el comportamiento espacio-temporal del problema y la formación de patrones espaciales es necesario tener en cuenta más términos del desarrollo en serie de los campos de velocidades y temperaturas.

La importancia del modelo de Lorenz para los estudios de la dinámica de láseres es doble. Por una parte, históricamente, el modelo de Lorenz constituye el primer modelo físico de baja dimensionalidad (tiene sólo tres grados de libertad) que proporciona comportamiento caótico, contradiciendo así la hipótesis de Landau sobre la necesidad de tener un número muy grande de grados de libertad para obtener un comportamiento de este tipo [Bergé *et al.*, 1984]. Esto, que provocó un estudio intensivo del modelo [Sparrow, 1982], mostrando la variedad de comportamientos a que da lugar

(escenarios o rutas al caos, biestabilidad generalizada, etc), hace del modelo de Lorenz un paradigma de la dinámica no lineal. Por otra parte, como ya hemos mencionado y veremos detalladamente en la siguiente sección, el modelo de Lorenz describe también el modelo de láser conceptualmente más sencillo [Haken, 1975] convirtiéndose así en parte central del estudio de las ecuaciones de los láseres. Así pues, desde el punto de vista de la dinámica de láseres, el modelo de Lorenz es *doblemente paradigmático*.

## 1.2. El modelo de Lorenz y los láseres: el modelo de Lorenz-Haken.

Consideremos un láser con cavidad en anillo (en el que el campo puede describirse como una onda viajera) y con un medio amplificador homogéneo que es bombeado incoherentemente de manera uniforme. Describiremos el medio amplificador con dos niveles de energía y supondremos que la cavidad es adecuada para que el láser sea monomodo (Fig.I.1). En el marco de la teoría semiclásica de la interacción radiación-materia y en el límite de onda plana y campo uniforme podemos expresar el campo eléctrico como

$$\vec{E}(z,t) = \frac{1}{2} \vec{e} \mathcal{E}(t) \{ \exp[-i(\Omega t + \phi(t) - kz)] + \text{c.c} \} \quad (\text{I.2.1})$$

donde  $\vec{e}$  es el vector unitario de polarización,  $\mathcal{E}(t)$  es una amplitud real,  $\Omega$  es una frecuencia arbitraria de referencia,  $\phi(t)$  es un factor de fase que puede depender del tiempo,  $k$  es el número de ondas y  $z$  es la dirección axial.

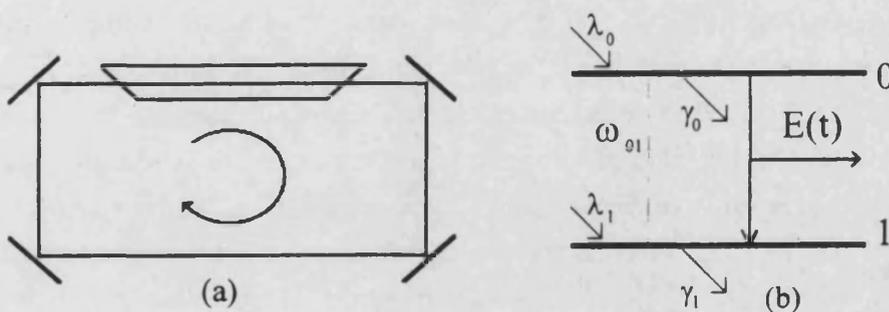


Fig.I.1. (a) Esquema de una cavidad en anillo en la que el campo se describe como una onda viajera. (b) Esquema de niveles de un láser bombeado incoherentemente.  $\omega_{01}$  es la frecuencia de la transición atómica,  $\gamma_i$  es la tasa de relajación de las poblaciones de los niveles atómicos o moleculares y  $\lambda_i$  es la tasa de bombeo incoherente de los mismos.

Entonces, aplicando las aproximaciones de la onda rotante y de la variación lenta de la envolvente, las ecuaciones que describen el sistema son (ver Apéndice 1):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_{00}}{dt} &= -\gamma_0\rho_{00} + \lambda_0 - 2\alpha \operatorname{Im}\rho_{10}, \\
 \frac{d\rho_{11}}{dt} &= -\gamma_1\rho_{11} + \lambda_1 + 2\alpha \operatorname{Im}\rho_{10}, \\
 \frac{d\rho_{10}}{dt} &= -\left[\gamma_{10} + i(\Omega - \omega_{01} + \dot{\phi})\right]\rho_{10} + i\alpha(\rho_{00} - \rho_{11}), \\
 \frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa\alpha + g \operatorname{Im}\rho_{10}, \\
 \dot{\phi} &= (\omega_{01} - \Omega) - g \frac{\operatorname{Re}\rho_{10}}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{I.2.2}$$

donde  $\rho_{ii}$  representa la población del nivel atómico  $i$  ( $i = 0, 1$ ),  $\rho_{10}$  es la amplitud compleja (de variación lenta) de la coherencia asociada a la transición atómica o molecular y  $\alpha \equiv (\vec{\mu}_{01} \cdot \vec{\mathcal{E}}/2\hbar) \mathcal{E}(t)$  es la mitad de la frecuencia de Rabi del campo ( $\vec{\mu}_{01}$  es el momento dipolar eléctrico de la transición atómica, que tomamos real). En cuanto a los parámetros,  $\gamma_i$  es la tasa de relajación del nivel  $i$  (supuesta externa, nótese que no se ha incluido ningún término que describa relajaciones internas entre los niveles),  $\gamma_{10}$  es la tasa de relajación de la coherencia  $\rho_{10}$  que vale

$$\gamma_{10} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_0) + \Gamma_{10}^c,$$

con  $\Gamma_{10}^c$  la relajación de  $\rho_{10}$  debida a las colisiones desfasantes entre átomos (i.e., colisiones no radiativas),  $\kappa$  representa las pérdidas en el campo debidas a las pérdidas en la cavidad,  $g = (\Omega\mu_{01}^2 N/2\epsilon_0\hbar)$  es el parámetro de ganancia o constante de acoplamiento radiación-materia (siendo  $N$  el número de moléculas activas por unidad de volumen) y  $\lambda_i$  es la tasa de bombeo incoherente del nivel  $i$  tal que  $(\lambda_1/\gamma_1 + \lambda_0/\gamma_0) = n_0 + n_1 = 1$  ( $n_i$  es la población del nivel  $i$  en ausencia de campos, o población térmica, y la suma de estas poblaciones vale la unidad porque así se ha normalizado la traza de la matriz densidad). Finalmente,  $\omega_{01}$  es la frecuencia de la transición atómica y  $\omega_c$  es la frecuencia del modo de la cavidad más cercano a aquella. Es muy importante recalcar el carácter arbitrario de la frecuencia  $\Omega$  (siempre y cuando se mantenga la validez de la aproximación de la onda rotante), de manera que la cantidad que ha de permanecer invariante es la *frecuencia instantánea del láser* que es  $(\Omega + \dot{\phi})$  donde el subíndice indica el referencial en que  $\dot{\phi}$  es evaluada. Ello implica que si se cambia de frecuencia de referencia, por ejemplo, se

pasa de una frecuencia de referencia  $\Omega_1$  a otra  $\Omega_2$ , la fase temporal total permanece invariante:

$$\phi_{\Omega_1} + \Omega_1 t = \phi_{\Omega_2} + \Omega_2 t. \quad (I.2.3)$$

Insistiremos en el apartado I.4 y en el capítulo siguiente en la importancia de la frecuencia de referencia.

Supongamos ahora que  $\gamma_1 = \gamma_0 \equiv \gamma_{||}$  (en el Capítulo 2 comprobaremos la importancia de esta suposición, así como la influencia de la relajación interna no considerada aquí, en el comportamiento dinámico de este modelo de láser). En este caso basta con escribir la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones, pudiendo eliminarse las ecuaciones de las poblaciones mismas. Haciendo uso de las definiciones

$$\begin{aligned} E &= \alpha e^{-i\phi} \\ P &= i(g/\sigma)\rho_{01} e^{-i\phi} \\ D &= (g/\sigma)(\rho_{00} - \rho_{11}) \end{aligned} \quad (I.2.4)$$

donde  $\sigma = \kappa/\gamma_{\perp}$ ,  $g = g/\gamma_{\perp}^2$  con  $\gamma_{\perp} \equiv \gamma_{0\perp}$  y la frecuencia de Rabi  $\alpha$  también ha sido normalizada a  $\gamma_{\perp}$ . Derivando ahora respecto al tiempo adimensional  $\tau = \gamma_{\perp} t$ , las Ecs.(I.2.2) se escriben:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= -\sigma [1 + i\delta] E + \sigma P \\ \frac{dP}{d\tau} &= -[1 - i\Delta] P + ED \\ \frac{dD}{d\tau} &= b(r - D) - 2(EP^* + PE^*) \end{aligned} \quad (I.2.5)$$

donde  $r = (\lambda_0 - \lambda_1)g/\sigma$  es el parámetro adimensional de bombeo,  $b = \gamma_{||}/\gamma_{\perp}$ , y la desintonía viene gobernada por  $\delta$  y  $\Delta$ , que son

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(\omega_c - \Omega)}{\sigma} \\ \Delta &= (\Omega - \omega_{01}) \end{aligned} \quad (I.2.6)$$

con las frecuencias de referencia, transición atómica y cavidad también normalizadas a  $\gamma_1$  (no cambiamos el símbolo para no complicar más la notación).

Hermann Haken demostró que las Ecs.(I.2.5), en condiciones de resonancia, son isomorfas al modelo de Lorenz [Haken, 1975]. En efecto, ya mencionamos antes que la frecuencia  $\Omega$  es arbitraria. Tomemos  $\Omega = \omega_c$ , de manera que  $\delta = 0$  y  $\Delta = \Delta_c \equiv (\omega_c - \omega_{01})$  es la desintonía existente entre la frecuencia de la transición atómica y la frecuencia de la cavidad más próxima a ésta. Si ambas frecuencias coinciden, i.e.,  $\Delta_c = 0$  (resonancia o sintonía central),  $P$  y  $E$  pueden tomarse reales (basta con ver que  $\text{Re}\{\rho_{10}\} = 0$  en estas condiciones, lo que lleva a  $\dot{\phi} = 0$ ) y las Ecs.(I.2.5) se escriben ahora

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \sigma(P - E) \\ \frac{dP}{d\tau} &= -P + ED \\ \frac{dD}{d\tau} &= b(r - D) - 4EP \end{aligned} \quad (\text{I.2.7})$$

Si ahora hacemos el cambio de variables  $X = 2E$ ,  $Y = 2P$ ,  $Z = (r - D)$ , obtenemos inmediatamente las Ecs.(I.1) del modelo de Lorenz.

Existe por tanto, una sorprendente analogía entre el modelo más sencillo de láser y los fluidos a través del modelo de Lorenz. En realidad esta analogía no se limita a este caso: las ecuaciones que rigen la inestabilidad baroclínica (el llamado modelo de Lorenz complejo) es también isomorfo a las ecuaciones del láser incluyendo desintonía [Fowler *et al*, 1982; Ning y Haken, 1990a]. Es más, esta analogía puede ser llevada también al dominio espacio-temporal ya que las ecuaciones del láser son reducibles a la ecuación de Ginzburg-Landau [Newell y Moloney, 1992]. Pero esto es alejarnos del tema que nos ocupa. Lo que la biyección entre las ecuaciones del láser y el modelo de Lorenz significa para nosotros es que todo lo que sobre el comportamiento dinámico de éste se sabe, es aplicable a aquellas.

No realizaremos aquí una exposición pormenorizada del comportamiento de las distintas soluciones de las Ecs.(I.2.7). Puede encontrarse un estudio muy detallado en Sparrow (1982) y un resumen adecuado en Weiss y Vilaseca (1991). No obstante, en la segunda parte de esta memoria se hará continua referencia a ciertos resultados del modelo de Lorenz. Por ello vamos a recordar a continuación, de manera sumaria, los resultados más importantes.

Las Ecs.(I.2.7) tienen dos posibles soluciones estacionarias: (i), la solución trivial, que es estable para  $r < 1$  e inestable para  $r > 1$  (i.e, el láser comienza a emitir cuando  $r > 1$ ) y (ii), la solución no trivial que es de la forma

$$\begin{aligned} E_{\pm} = P_{\pm} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ D &= 1 \end{aligned} \quad (I.2.8)$$

En realidad, como puede observarse, debido a la doble posibilidad de signo existen dos soluciones de este tipo que corresponden a una misma intensidad luminosa (proporcional a  $E_{\pm}^2$ ) y difieren en un factor de fase de  $\pi$ .

El análisis lineal de estabilidad (ALE) de la solución (I.2.8) [Haken, 1975] pone de manifiesto que esta solución pierde su estabilidad si: (i) las pérdidas de la cavidad superan la condición de "mala cavidad" (*bad cavity condition*), i.e., si  $\sigma > \sigma_{BC} \equiv (b + 1)$  y (ii), si el valor del parámetro de bombeo  $r$  supera un cierto valor umbral  $r_{2nd}$ , que viene dado por

$$r_{2nd} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)}. \quad (I.2.9)$$

habiendo de darse ambas condiciones simultáneamente. En el valor  $r = r_{2nd}$ , la solución estacionaria (I.2.8) sufre una bifurcación de Hopf que, como demuestra un análisis de estabilidad de las órbitas periódicas que aparecen en la bifurcación, es subcrítica, i.e., el ciclo límite que aparece en la bifurcación no es estable [Mandel y Zeghlache, 1983]. En la Fig.I.2 se representa la posición de  $r_{2nd}$  frente a las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  para diversos valores de  $b$ . A partir de este valor del bombeo el comportamiento que muestra el sistema es dinámico, siendo caótico al principio y observándose para valores crecientes del bombeo una cascada inversa de doblamientos de periodo que acaba en un comportamiento de periodo 1. Es el llamado escenario de Feigenbaum [Feigenbaum, 1983], sólo que inverso. Hay que mencionar también el hecho de que en la zona caótica hay un conjunto de infinitas "ventanas periódicas". El paso de las ventanas periódicas al caos se hace a través de una ruta de intermitencias de tipo 1 y también con rutas de Feigenbaum [Weiss y Vilaseca, 1991]. Una representación de esta secuencia de comportamientos para un caso concreto se encuentra en la Fig.I.3.

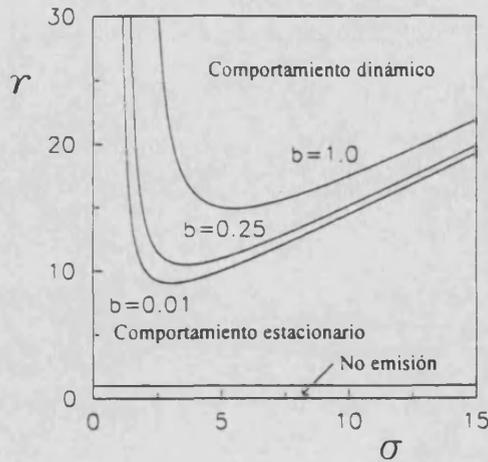


Fig.I.2. Umbral de estabilidad en el plano parámetro de bombeo,  $r$ , pérdidas de la cavidad,  $\sigma$ , para diversos valores de la tasa de relajación de la diferencia de poblaciones,  $b$ . Nótese cómo en el caso más favorable,  $b \rightarrow 0$  el valor mínimo de  $r_{2nd}$  es del orden de 9. La línea horizontal indica la posición del umbral de emisión  $r_{1st}$ .

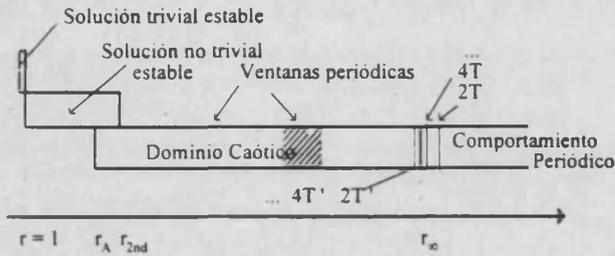


Fig.I.3. Esquema cualitativo del diagrama de bifurcaciones del modelo de Lorenz. Al final del dominio caótico se sigue una ruta inversa de Feigenbaum con comportamientos periódicos "ruidosos" ( $T'$ ) que colapsa en  $r_\infty$  a lo que sigue una nueva ruta inversa de Feigenbaum pero sin ruido. En el dominio caótico hay una infinidad de ventanas periódicas. Entre  $r_A$  y  $r_\infty$  coexisten las soluciones periódica y caótica (biestabilidad generalizada).

Para hacernos una idea más clara de cómo es el comportamiento caótico, representaremos a continuación una evolución temporal de la intensidad  $E^2$  (Fig.I.4). Es característica del comportamiento caótico del modelo de Lorenz la secuencia (de duración caótica) de picos con intensidades máximas crecientes. Este tipo de comportamiento en la intensidad tiene su origen en el arrollamiento de la trayectoria seguida por el sistema en el espacio de las fases, arrollamiento que crece formando una espiral (crecimiento en espiral, *spiralling*) alrededor de un punto fijo [la solución estacionaria ahora inestable ( $E_+, P_+, D$ ), por ejemplo] hasta que salta a formar una nueva espiral alrededor del otro punto fijo ( $E_-, P_-, D$ ). Esto se observa con claridad en la Fig.I.5, en la que se representa una proyección del atractor en el plano  $\langle E, P \rangle$ . Una manera de caracterizar este tipo de comportamiento es haciendo un mapa de intensidades, esto es, representando el valor de cada máximo de intensidad frente al valor del máximo que le precede. En la Fig.I.6 mostramos este mapa para el mismo caso de las Figs.I.4 y I.5. Obsérvese que los máximos de intensidad así representados forman una secuencia ordenada en una especie de cúspide (*cusp map*). La forma de ésta es muy característica del modelo de Lorenz, si bien ha de señalarse que a medida que el bombeo  $r$  aumenta, la

forma del mapa de intensidad varía, aunque para bombeos relativamente bajos (i.e., no muy superiores al valor del segundo umbral) siempre tiene una forma similar a la representada en la figura.

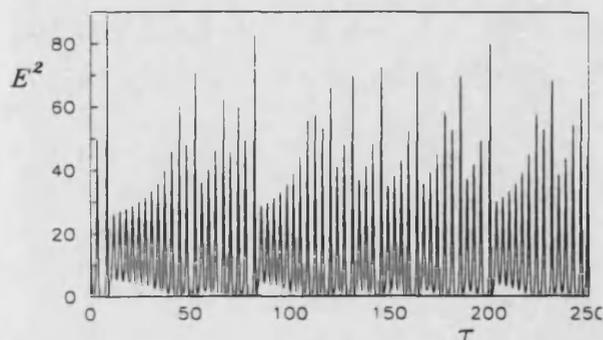


Fig.I.4. Evolución temporal de la intensidad del campo  $E^2$  en régimen caótico para  $\sigma = 2$ ,  $b = 0.25$  y  $r = 15$ . La secuencia temporal muestra el típico crecimiento de los máximos de intensidad en *spiralling*.

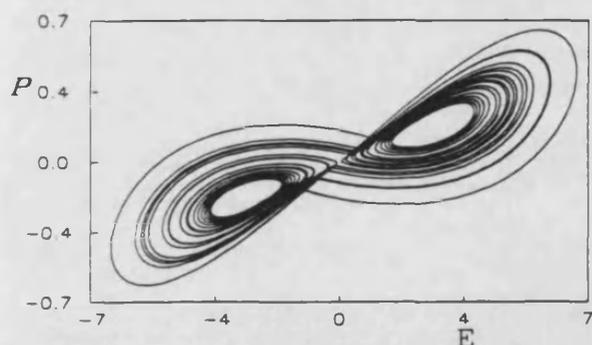


Fig.I.5. Proyección en el plano  $\langle E, P \rangle$  del espacio de las fases del atractor caótico correspondiente a la Fig.4. Nótese como la trayectoria sigue un arrollamiento en espiral alrededor de un punto fijo para luego "saltar" y arrollarse en el otro.

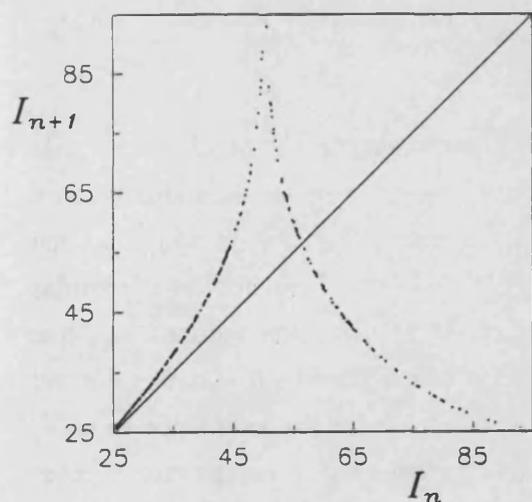


Fig.I.6. Mapa de intensidades (representación de cada máximo de intensidad frente al máximo anterior) correspondiente al caso de las Figs.4 y 5. Se aprecia claramente la típica forma de cuspide característica del modelo de Lorenz (*cusp map*).

No obstante, la manera más habitual de caracterizar el comportamiento caótico es especificando de alguna manera la dimensión fractal del mismo. En el apéndice 2 se da la definición de las dimensiones  $D_q$  así como el valor de algunas de ellas correspondientes al atractor de Lorenz. También en la Fig.3.7 del Capítulo 3 y en la Tabla IV del Capítulo 4 hay información a este respecto.

Así pues, el comportamiento caótico del modelo de Lorenz puede ser caracterizado por: (i), la forma característica de su atractor; (ii), la evolución de la intensidad y su mapa de intensidades y (iii), por el valor de la dimensión fractal del atractor.

Por lo que respecta al comportamiento periódico, este es mucho más fácil de caracterizar. De hecho basta con representar alguna proyección del atractor. La Fig.I.7 muestra dos proyecciones de un atractor periódico de periodo 2.

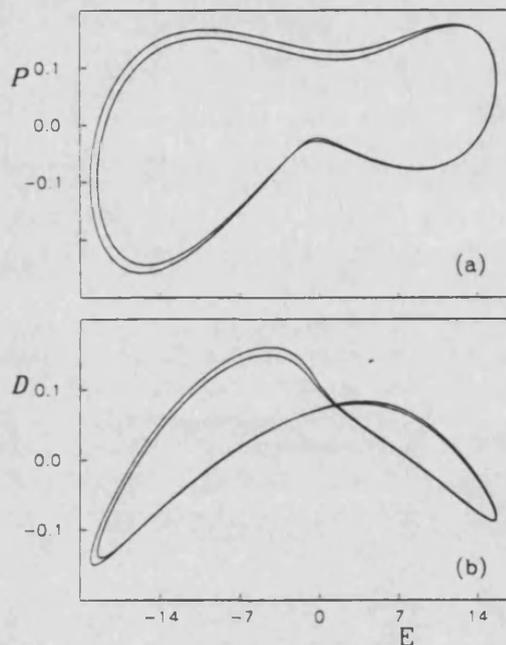


Fig.I.7. Proyecciones en los planos  $\langle P, E \rangle$  y  $\langle D, E \rangle$  de un atractor periódico de periodo 2 correspondiente a  $b = 0.25$ ,  $\sigma = 2$  y  $r = 187$ .

Concluamos este apartado resaltando el significado de las predicciones más importantes del modelo de Lorenz. La primera dice que se ha de verificar la condición de mala cavidad,  $\sigma > \sigma_{BC}$ , para observar comportamiento dinámico. Esto impone una seria restricción sobre los láseres reales ya que les fuerza a trabajar con pérdidas elevadas. La segunda dice que el bombeo ha de superar un cierto valor umbral  $r_{2nd}$ , que toma valores elevadísimos para un láser: en el límite más favorable,  $b \rightarrow 0$ , el valor del segundo umbral es  $(r_{2nd})_{min} = 9$ . Teniendo en cuenta que la condición de emisión es  $r = 1$ , la condición (I.2.9) exige, en el caso más favorable, un bombeo al menos nueve veces mayor que el necesario para emitir (el cual ya es de por sí elevado), y esto con pérdidas elevadas. *A priori*, ningún láser puede alcanzar condiciones tan restrictivas. Este hecho ha marcado la investigación tanto teórica como experimental y volveremos sobre ello más adelante.

### I.3. Efecto de la desintonía en el modelo de Lorenz-Haken.

Hemos visto en el apartado anterior como el modelo de láser de dos niveles se reduce al modelo de Lorenz en el caso particular  $\Delta_c = 0$ . Ahora bien, la perfecta sintonía entre la frecuencia de la cavidad y la de la transición atómica que esta condición implica, es sólo un caso particular. Además, en un dispositivo experimental, la desintonía de la cavidad  $\Delta_c$  es un parámetro modificable, de manera controlada, a través de la variación de la longitud de la cavidad. Parece necesario, por tanto, extender nuestro estudio a los casos en que la desintonía es no nula.

El primer estudio de la dinámica de un láser homogéneo de dos niveles incluyendo desintonía parece deberse a Gerber y Büttiker (1979) pero, desafortunadamente, la parametrización utilizada por estos autores les llevó a considerar soluciones sin significado físico desde el punto de vista del láser. Otro estudio matemático se debe a Fowler *et al* (1982) que consideraron las llamadas ecuaciones complejas de Lorenz, formuladas por Guibbon y McGuinness (1982) para modelizar la inestabilidad baroclínica [Pedlosky, 1981]. Este modelo, que en ciertas condiciones se reduce al modelo de Lorenz, es isomorfo a las ecuaciones del láser desintonizado [Ning y Haken, 1990a]. No obstante, el análisis de Fowler *et al* es indebidamente complejo y además, no considera explícitamente la influencia de la desintonía.

Un análisis más físico del problema del láser desintonizado se debe a Hendow y Sargent (1982). Mediante el uso de espectroscopía de saturación, estos autores identificaron los distintos mecanismos que llevan a la aparición de inestabilidades en resonancia y fuera de ella. Lugiato *et al* (1983), consideraron el efecto de la desintonía en el umbral de inestabilidad  $r_{2nd}$  numéricamente tanto en el caso que nos ocupa (ensanchamiento homogéneo del medio) como en el caso en que hay efecto Doppler.

Ahora bien, son los trabajos de Hazina Zeghlache y Paul Mandel [Mandel y Zeghlache, 1983; Zeghlache y Mandel, 1985; Zeghlache, 1988] y más recientemente Ning y Haken (1990a), los que cuantifican analíticamente la influencia de la desintonía en las ecuaciones del láser desintonizado. Vamos a resumir los resultados de estos estudios.

Desde el punto de vista de la estabilidad de las soluciones estacionarias, la situación puede resumirse en los siguientes puntos: (i) la solución trivial pierde su estabilidad para  $r$  mayor que

$$r_{1st} = 1 + \left( \frac{\Delta_c}{\sigma + 1} \right)^2; \quad (I.3.1)$$

dando paso a través de una bifurcación de horca (*pitchfork bifurcation*) a la solución no trivial, que vale (sólo damos el valor del módulo del campo por brevedad)

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b(r - r_{1st})}, \quad (I.3.2)$$

y (ii) para observar inestabilidades se mantiene la condición de mala cavidad y se requiere un valor del bombeo mayor que  $r_{2nd}$ , cantidad que viene dada por

$$c_2(r_{2nd} - r_{1st})^2 + c_1(r_{2nd} - r_{1st}) + c_0 = 0 \quad (I.3.3)$$

donde

$$c_0 = -2(\sigma + 1) [(\sigma + 1)^2 + \xi] [(\sigma + b + 1)^2 + \xi],$$

$$c_1 = (\sigma + 1) [b(\sigma - b - 1) - 2b^2(2\sigma + 1) + 2(\sigma + 1)^2(\sigma - 2b - 1)] + \\ + [b(\sigma - b - 1) - 2(3\sigma^2 + 4\sigma + 1)] \xi, \quad (I.3.4)$$

$$c_2 = b(3\sigma + 1)(\sigma - b - 1),$$

$$\xi = \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \Delta_c \right)^2$$

valor de  $r_{2nd}$  que representamos en la Fig.I.8.

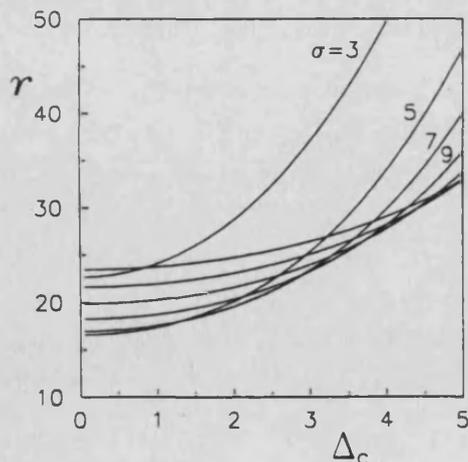


Fig.I.8. Umbrales de estabilidad en el plano parámetro de bombeo,  $r$ , desintonía de la cavidad,  $\Delta_c$ , para diversos valores de las pérdidas de la cavidad,  $\sigma$  (3, 5, ... hasta 15) y  $b = 1$ . Nótese como la desintonía aumenta el valor del bombeo necesario para obtener inestabilidades.

Obsérvese que el papel jugado por la desintonía es el de estabilizar el láser, i.e., el cociente entre los umbrales segundo y primero aumenta con  $\Delta_c$ . Por otra parte, un análisis no lineal de estabilidad (análisis de estabilidad de las soluciones oscilantes periódicas que aparecen en la bifurcación de Hopf) muestra que existe un valor de la desintonía a partir del cual la bifurcación de Hopf es supercrítica (lo que implica la aparición de oscilaciones regulares estables en la vecindad de  $r_{2nd}$ ), siendo subcrítica por debajo de este valor, en particular en resonancia, como ya hemos mencionado.

El resultado del análisis numérico de las Ecs.(I.2.5) para bombeos mayores que los del umbral de inestabilidad queda ejemplificado en la Fig.I.9, en la que se muestran los distintos comportamientos exhibidos por el sistema para distintos valores de  $r$  y  $\Delta_c$  ( $\sigma = 3$  y  $b = 1$ ). Nótese que el comportamiento se hace más sencillo a medida que la desintonía aumenta. Puede resumirse este comportamiento, de manera poco precisa, diciendo que para valores crecientes del bombeo y/o de la desintonía, abandonamos la zona de comportamiento caótico a través de rutas inversas de Feigenbaum (deshablamiento de periodos).

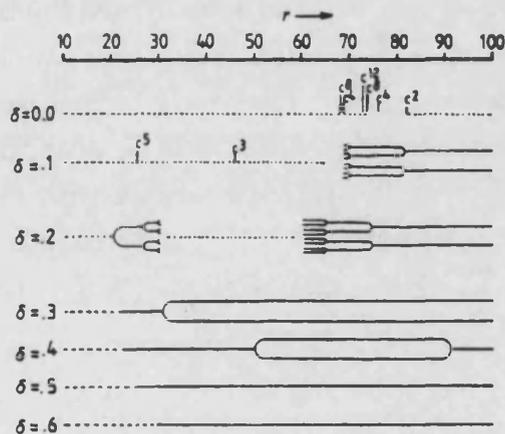


Fig.I.9. Diagrama de bifurcaciones en el plano  $\langle r, \delta \rangle$  del modelo de Lorenz-Haken para  $\sigma = 3$  y  $b = 1$ . Línea a trazos: emisión estacionaria estable; línea punteada, emisión caótica; líneas sólidas, emisión periódica (el periodo lo indica el número de líneas). Las letras indican distintos tipos de atractores en las ventanas periódicas. Nótese como el comportamiento es menos rico cuanto mayor es la desintonía. Tomado de [Zeghlache y Mandel, 1985].

Existe, sin embargo, un elemento en la dinámica del láser con desintonía que no está presente en el caso resonante y que requiere consideración aparte. Ya mencionamos que el efecto inmediato de tomar  $\Delta_c = 0$  es hacer que la polarización y el campo devengan cantidades reales. En este caso, la fase  $\phi$  permanece constante. Sin embargo, cuando  $\Delta_c \neq 0$  ya no se verifica que  $\text{Re}\{\rho_{10}\} = 0$  y, por tanto,  $\dot{\phi} \neq 0$ . Esto hace que la fase sea una nueva variable del sistema, pero una variable que no afecta, en principio, el régimen dinámico de las otras variables ya que no aparece explícitamente en las ecuaciones [en las Ecs.(I.2.5) no aparece y en las Ecs.(I.2.2) puede ser sustituida en la ecuación de evolución de  $\rho_{10}$ ] si bien, como veremos más adelante, juega un papel importante en la interpretación de la dinámica del láser con desintonía.

#### I.4. Descripción general de la dinámica de la fase.

Hasta no hace mucho la dinámica de la fase ha recibido muy poca atención y se ha venido considerando principalmente la dinámica de la intensidad en los estudios de la dinámica de láseres, en parte porque la intensidad es una magnitud más fácilmente medible que la fase. Aparte de los estudios de la fase en los láseres bidireccionales en anillo [Hoffer *et al*, 1988; Christian *et al*, 1988, Abraham y Weiss, 1988; Chyba, 1989], que presentan una problemática muy distinta de la que nos ocupa, algunos artículos mencionaron la dinámica de la fase [Tredicce *et al*, 1985; Tarroja *et al*, 1986] y de la frecuencia [Casperson, 1988] en láseres monomodo, pero no llevaron a cabo un estudio de la misma. A partir de la medición experimental de la fase en un láser de amoníaco [Weiss *et al*, 1988] la situación cambió drásticamente, apareciendo estudios teóricos de la dinámica de la fase en el modelo de Lorenz-Haken [Zeghlache *et al*, 1988] a los cuales hemos contribuido [Vilaseca *et al*, 1990] extendiendo además dichos estudios a los láseres bombeados ópticamente con ensanchamiento homogéneo [de Valcárcel, 1989; de Valcárcel *et al*, 1991a], con ensanchamiento Doppler [Roldán, 1989; Roldán *et al*, 1989]. Se ha estudiado también en los láseres con degeneración magnética [Arjona *et al*, 1991] y en los láseres Raman [Lu y Harrison, 1991]. También se ha analizado la difusión de fase en régimen caótico [D'Alessandro *et al*, 1989] y se ha extendido el concepto de fase al láser por debajo del umbral de emisión [Abraham y Chyba, 1991]. Finalmente, mencionemos que se ha dedicado gran atención a la relación entre la fase del láser operando en régimen dinámico y la fase geométrica o de Berry [Ning y Haken, 1990b, 1991, 1992a y 1992b, Roldán *et al*, 1993].

Pero los primeros en estudiar la dinámica de la fase en el modelo de Lorenz-Haken fueron Zeghlache *et al* (1988) y resumiremos sus resultados a continuación pero antes vamos a poner de manifiesto el importante papel que la fase juega en la dinámica del sistema. Para ello, veamos una importante diferencia entre los casos resonante y no resonante puesta primeramente de manifiesto por Pujol *et al* (1988b) al estudiar la dinámica de los láseres bombeados ópticamente con desintonía de la cavidad no nula.

Si, por ejemplo en un régimen periódico, representamos la amplitud real del campo  $\alpha$ , observamos que, en resonancia, el campo exhibe una alternancia de signo, i.e., pasa de positivo a negativo de forma regular (permaneciendo la fase constante). Sin embargo, al desintonizar, aunque sea infinitesimalmente, la situación cambia drásticamente pues el campo es periódico como antes pero siempre con el mismo signo, i.e., ya no hay cambio de signo (Fig.I.10). de Valcárcel (1989), llegó a la conclusión de que la introducción de la desintonía llevaba a que el cambio de signo del campo  $\alpha$  (al

menos para desintonías pequeñas) pasase a manifestarse exclusivamente en la fase, en forma de saltos bruscos de aproximadamente  $\pi$  radianes. Pero para entender como el signo del campo puede ser gobernado por la fase, veamos primero cómo se comporta ésta cuando la desintonía es no nula.

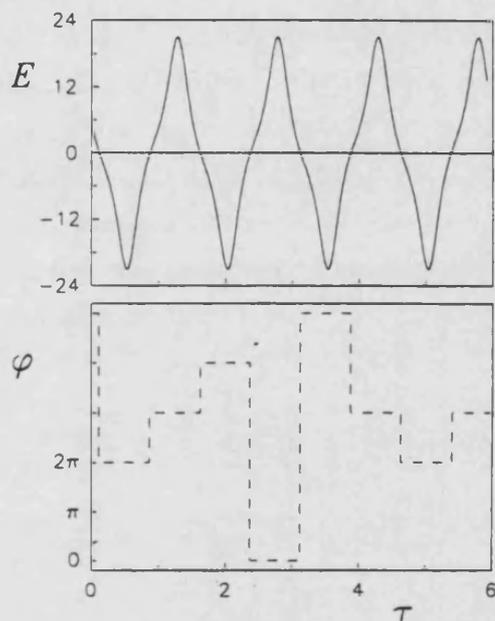


Fig.I.10. Evolución de la amplitud real del campo,  $E$ , y una posible evolución de la fase  $\phi$  en resonancia para el mismo caso de la Fig.I.8 pero con  $r = 300$ . Si la amplitud real del campo evoluciona como en la figura superior, la fase permanecerá constante a lo largo del tiempo. Alternativamente, si la amplitud no cambia de signo (por ejemplo, es positiva todo el tiempo, equivale a tomar el módulo del campo de la figura superior) podemos imaginar que la fase exhibe una evolución constante (mesetas) entre cada dos mínimos de la intensidad  $E^2$  y tiene una discontinuidad de  $\pm n\pi$  rad (con  $n$  entero) cada vez que la amplitud pasa por cero.

Comencemos por la solución estacionaria: cuando el láser está desintonizado, la solución estacionaria de las Ecs.(I.2.2) proporciona

$$\Omega + \dot{\phi} = \omega_c - \frac{\sigma \Delta_c}{\sigma + 1} = \frac{\sigma \omega_c + \omega_{01}}{\sigma + 1} \quad (\text{I.4.1})$$

lo que significa que cuando  $\Delta_c \neq 0$ , la frecuencia de la radiación láser emitida no es ni la de la transición ni la de la cavidad, sino que se encuentra entre ambas (se dice que la frecuencia de la cavidad "tira" de la frecuencia de la radiación, efecto *pulling*) [H.Haken, 1985]. Por tanto, si elegimos como frecuencia de referencia la de la cavidad ( $\Omega = \omega_c$ ), o bien cualquiera otra referencia arbitraria, obtenemos una  $\dot{\phi}$  no nula. Si, por el contrario, elegimos un valor para  $\Omega$  que anule  $\dot{\phi}$ , dicho valor (o referencial) nos dará directamente la frecuencia de emisión del láser. Llamaremos a este referencial  $\omega_{sc}$  (referencial de la solución estacionaria).

Pasemos al régimen dinámico. Ya hemos comentado que en resonancia  $\dot{\phi} = 0$ . Por tanto la fase es constante y la amplitud va cambiando de signo en el tiempo. Pero también podemos considerar de forma alternativa que la fase es constante mientras la amplitud es no nula y que cuando ésta llega a cero, la fase sufre un salto (discontinuo, la

ecuación de  $\dot{\phi}$  tiene una singularidad cuando  $\alpha = 0$ ) de  $(2n+1)\pi$ , con  $n$  un entero arbitrario, inhibiendo el cambio de signo explícito en la amplitud (Fig.I.10).

Al introducir desintonía la fase presenta un tipo de evolución como la ejemplificada en la Fig.I.11. Se observa que mientras la amplitud es no nula, la fase tiene una evolución casi lineal (meseta) *con una pendiente distinta de la de la solución estacionaria inestable*. Estas mesetas se ven interrumpidas por saltos bruscos de menos de  $\pi$  radianes (más próximos a  $\pi$  cuanto más se acerca a cero la amplitud). Nótese que *los saltos se producen siempre en el mismo sentido* (si bien hay otros láseres en que esto no es así [de Valcárcel, 1989; de Valcárcel *et al*, 1991a] como veremos después). Señalemos que la pendiente de las mesetas aumenta con  $\Delta_c$  y que el valor de los saltos de fase disminuye con  $\Delta_c$ . Así mismo, cuanto mayor es  $\Delta_c$  más suave (redondeada) es la transición de una meseta a otra (Fig.I.11).

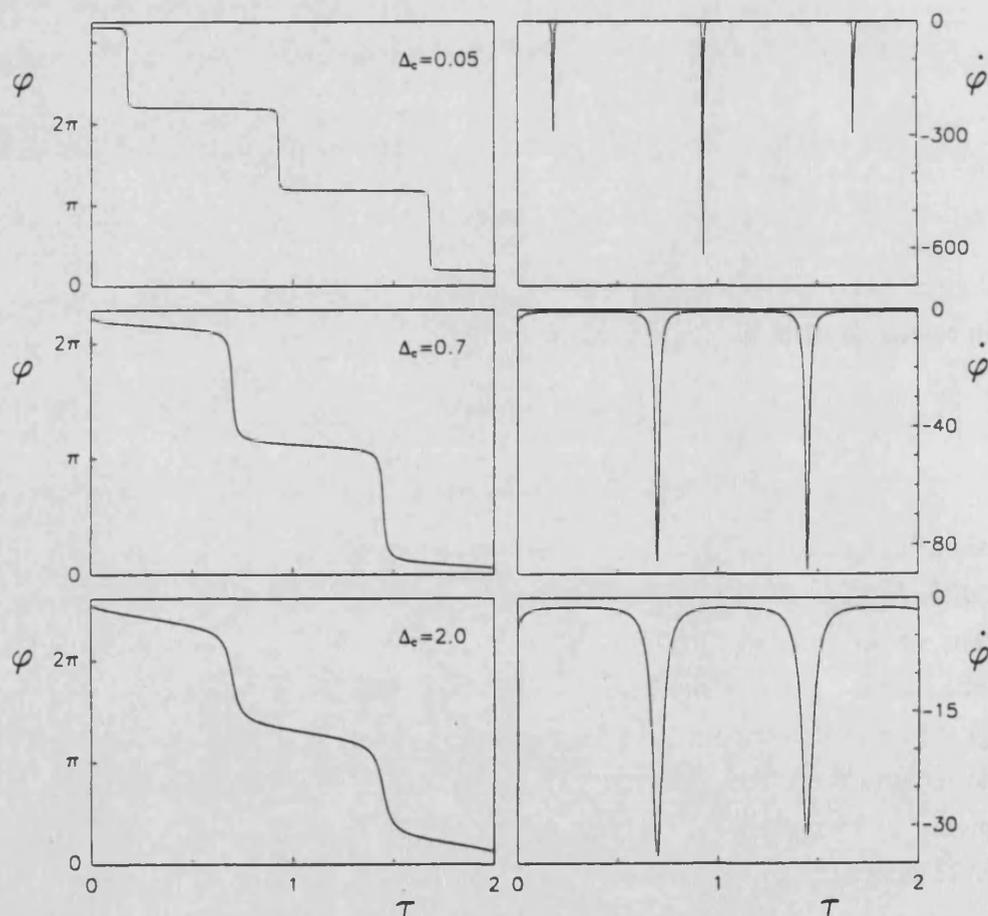


Fig.I.11. Evolución temporal de la fase  $\phi$  y de la frecuencia  $\dot{\phi}$  para diversos valores de la desintonía de la cavidad en un régimen periódico (los parámetros son los mismos de la Fig.I.10). Nótese como los saltos de fase son menos bruscos (y, consecuentemente, los picos de frecuencia menos pronunciados) y de valor decreciente a medida que la desintonía aumenta y como la meseta se inclina progresivamente.

Una característica sorprendente de este tipo de evolución es que a pesar de encontrarnos en un régimen periódico (el régimen caótico se discutirá en el próximo capítulo si bien lo dicho hasta ahora le es aplicable), la fase no es periódica (cuando decimos régimen periódico nos referimos a que la intensidad, la diferencia de poblaciones y cualquier otra variable que no contenga información sobre la fase en su definición se comportan periódicamente). Este hecho llevó a Zeghlache *et al* (1988) a realizar un cambio de referencial en el que la pendiente media de la evolución de la fase era eliminada (en lugar de eliminar la pendiente en la evolución de la fase correspondiente a la solución estacionaria, es decir, que llevaría a elegir el referencial  $\omega_{se}$ ), de manera que la fase pasaba a comportarse también de manera periódica (y así todas las variables que contengan información sobre la fase). Este cambio de referencial consiste en sumar a la frecuencia de referencia  $\Omega$  la frecuencia instantánea media  $\langle \dot{\phi} \rangle = [\phi(t+T) - \phi(t)]/T$  siendo  $T$  el periodo de la solución periódica. Llamaremos  $\omega_1$  a esta nueva frecuencia de referencia. Ellos interpretaron esta frecuencia de referencia  $\omega_1$  en un sentido similar a como se interpreta  $\omega_{se}$ , como una modificación de la frecuencia de emisión del láser debida tanto al efecto *pulling* como a efectos nuevos de carácter dinámico [Zeghlache *et al*, 1988; Abraham *et al*, 1988].

Por el contrario, de Valcárcel (1989) y Vilaseca *et al* (1990) interpretaron la evolución de la fase de manera distinta: admitiendo que los saltos de fase contienen información sobre el cambio del signo del campo (recuérdese la forma alternativa de ver la evolución de la fase en resonancia), la fase ha de mantener una estructura en escalera en su evolución temporal *con saltos de  $\pi$  radianes en promedio a lo largo de cada periodo*. De esta manera, cuando  $\Delta_c$  es distinto de cero, las componentes en cuadratura del campo complejo se comportarán de manera similar a como lo hace el campo real en resonancia: cambiando de signo periódicamente. Además, existe un argumento físico de peso para no considerar el referencial  $\omega_1$  como la frecuencia de emisión del láser y, en consecuencia, buscar un referencial diferente: ya hemos mencionado que cuanto menor es  $\Delta_c$ , más bruscos son los saltos de fase, lo que se traduce en picos de frecuencia arbitrariamente alta, picos a los que no parece razonable atribuir un contenido físico real. En cambio, si atribuimos el origen de estos picos de frecuencia (saltos de fase) a un cambio de signo del campo, los problemas de interpretación del comportamiento de la fase parecen desaparecer. Llamaremos  $\omega_0$  a este nuevo referencial que es distinto al propuesto por Zeghlache *et al* (1988). Esta frecuencia  $\omega_0$ , al igual que la frecuencia  $\omega_1$ , fue también interpretada por sus autores como la frecuencia de emisión del láser en régimen dinámico.



Se disponía, por tanto, de dos referenciales distintos para interpretar la evolución de la fase fuera de resonancia:  $\omega_0$  y  $\omega_1$  y las interpretaciones del significado de los mismos eran claramente contradictorias. En el próximo capítulo vamos a estudiarlos detalladamente y vamos a interpretar su significado físico, interpretación que queda lejos de la que sus autores propusieron originalmente.

### **I.5. El problema de la verificación experimental del modelo de Lorenz-Haken.**

Hasta aquí hemos expuesto las características más relevantes del modelo homogéneo del láser de dos niveles unidireccional. La pregunta inmediata es ¿se ha encontrado este tipo de comportamiento en el laboratorio?. O de forma más general, ¿ha observado alguien caos de tipo Lorenz en algún sistema?.

Durante muchos años se pensó que las condiciones impuestas por el modelo de Lorenz en un láser eran inverificables en un laboratorio. Por otra parte el modelo de Lorenz parece demasiado sencillo para ser aplicable a un fluido. Sin embargo el modelo de Lorenz ha sido encontrado en un láser.

En 1986, Weiss y Brock anunciaron haber obtenido caos de tipo Lorenz en un láser de amoníaco bombeado ópticamente. El problema es que a este tipo de láser no le es aplicable, en principio, el modelo de Lorenz-Haken. Así, durante bastantes años, ha habido gran controversia acerca de este experimento. No vamos a hacer en esta Introducción la revisión bibliográfica de este problema porque excede el objetivo de la misma. Hemos preferido dedicar el Capítulo 3, que abre la segunda parte de esta Tesis, a una revisión bibliográfica crítica de este problema lo que, a nuestro juicio, resulta altamente necesario para afrontar adecuadamente el resto de dicha parte, en la que exponemos nuestras contribuciones a la interpretación de los experimentos de Weiss y colaboradores. Pero vamos, al menos, a adelantar ya las razones por las que diversos autores se opusieron a la interpretación de los resultados de los experimentos de Weiss *et al* como una manifestación experimental del modelo de Lorenz.

Como hemos mencionado, el láser de amoníaco de infrarrojo lejano (FIR  $\text{NH}_3$ ) es bombeado ópticamente. Esto significa que la transferencia de población al nivel superior de la transición láser se lleva a cabo mediante un haz proveniente de otro láser (láser de bombeo) que excita la población de un tercer nivel altamente poblado al nivel superior (Fig.I.12). Así, este mecanismo de bombeo implica al menos tres niveles atómicos o moleculares interaccionando con dos campos. Si escribimos las ecuaciones

de Maxwell-Schrödinger de este sistema (ver Apéndice 1 y los capítulos 4 y 5) obtenemos 9 ecuaciones para la evolución de la matriz densidad, ya que hay tres

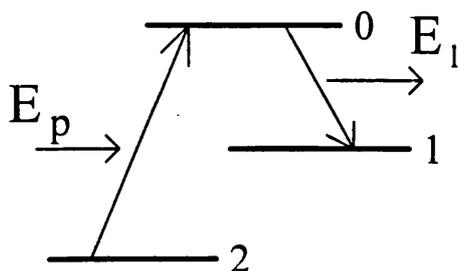


Fig.I.12. Esquema de niveles de un láser bombeado ópticamente. El láser de bombeo  $E_p$  transfiere población del nivel 2 (muy poblado) al nivel superior 0. La transición láser es la  $0 \leftrightarrow 1$ . El campo de bombeo induce también procesos coherentes como las transiciones Raman  $2 \leftrightarrow 1$  y el desdoblamiento del nivel superior común (efecto Stark).

coherencias involucradas, que es un sistema mucho más complejo que las cuatro ecuaciones necesarias para el láser de dos niveles. Estas ecuaciones contienen fenómenos físicos que no aparecen en el sistema de dos niveles (efecto Stark dinámico, procesos Raman, etc) y que hacen que sus soluciones sean muy distintas de las de aquél. De hecho ha habido numerosos estudios sobre la dinámica de los láseres bombeados ópticamente (véase el Capítulo 3 para un estudio detallado de esta literatura) que han mostrado la mayor complejidad de este sistema. Dedicaremos la segunda parte de esta Memoria a intentar arrojar luz sobre el vacío existente entre teoría y experimento.



***PARTE I: Contribuciones al estudio del modelo de  
Lorenz-Haken***



## **Capítulo 1: Marcos frecuenciales de referencia y dinámica de la fase en el modelo de Lorenz-Haken.**

- 1.1. Comportamiento de la fase y el campo complejo en los diferentes referenciales.**
  - 1.2. Marcos frecuenciales de referencia y espectro del campo complejo.**
    - 1.3. Frecuencia media de emisión del láser.**
  - 1.4. Comportamiento de los referenciales frente a la desintonía y el bombeo.**
    - 1.5. La fase del campo y la fase geométrica. Invariantes al referencial.**
    - 1.6. Conclusión.**



En la Introducción hemos descrito, de forma somera, el comportamiento, tanto dinámico como estacionario, de la fase y hemos querido resaltar la existencia de un elemento de arbitrariedad en el estudio de la misma: la elección de la frecuencia de referencia  $\Omega$  (a la que llamaremos, indistintamente, marco frecuencial de referencia, marco referencial o simplemente referencial). Hemos visto en el apartado I.4 varios de estos referenciales: desde unos que podríamos llamar *naturales*, como la frecuencia de la transición  $\omega_{01}$ , la frecuencia de la cavidad láser  $\omega_c$  o la frecuencia de emisión estacionaria del láser  $\omega_{se}$ , hasta referenciales introducidos *ad hoc* para el estudio de la fase en régimen dinámico,  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , y de los que no conocemos con precisión su significado físico.

El objeto de este capítulo es, por una parte, dotar de significado a estos referenciales y, por otra, intentar clarificar el significado del mencionado elemento de arbitrariedad, buscando cantidades invariantes a la elección del mismo.

Conviene recalcar que, si bien el interés de este estudio es principalmente teórico, también tiene un importante reverso experimental, ya que, en los experimentos, la frecuencia se determina a través de una medida heterodina de la salida del láser, medida para la que es necesaria una cierta frecuencia de referencia [Weiss *et al*, 1988; Tang *et al*, 1991b; Tang, 1993] viéndose los resultados experimentales afectados por esta elección. El material contenido en este capítulo ha sido publicado y puede encontrarse en Roldán *et al* (1993).

### 1.1. Comportamiento de la fase y el campo complejo en los diferentes referenciales.

Antes de comenzar señalemos cómo se lleva a cabo un cambio en la frecuencia de referencia al resolver las Ecs.(1.2.2). Volvamos a escribirlas para mayor comodidad

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= -\sigma [1 + i\delta] E + \sigma P, \\ \frac{dP}{d\tau} &= -[1 - i\Delta] P + ED, \\ \frac{dD}{d\tau} &= b(r - D) - 2(EP^* + PE^*). \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

En estas ecuaciones, el referencial del campo no ha sido especificado. La especificación se hace al dar valores a  $\delta$  y  $\Delta$ . Si adoptamos, por ejemplo, el referencial

de la cavidad, i.e., tomamos  $\Omega = \omega_c$ , automáticamente  $\delta = 0$  y  $\Delta = \Delta_c$  [Ecs.(I.2.6)], que es el parámetro físico de desintonía. Si es la frecuencia de la transición  $\omega_{01}$  la que tomamos como frecuencia de referencia, tenemos  $\Delta = 0$  y  $\delta = \Delta_c/\sigma$ . Por esta razón el referencial de la cavidad y el de la transición son los más cómodos de manejar ya que únicamente hemos de especificar uno de los parámetros  $\Delta$  o  $\delta$  que, además, aparece relacionado directamente con el parámetro físico de desintonía que es  $\Delta_c$ . Por otra parte, si adoptamos el referencial de la solución estacionaria, i.e., adoptamos  $\Omega = \omega_{se}$ , hemos de hacer  $\delta = \Delta = \Delta_c/(\sigma + 1)$ , que es otra forma de escribir la ecuación de *pulling* (I.4.1). Para resolver las Ecs.(1.1.1) en cualquier otro referencial, hemos de calcular la diferencia entre la nueva frecuencia de referencia, digamos  $\Omega_2$  y, la anterior frecuencia de referencia  $\Omega_1$ , es decir, hemos de hacer  $\delta_{\Omega_2} = \delta_{\Omega_1} + (\Omega_1 - \Omega_2)/\sigma$  y  $\Delta_{\Omega_2} = \Delta_{\Omega_1} + (\Omega_1 - \Omega_2)$  donde los subíndices denotan el referencial utilizado en cada caso. Ahora bien, existe otra forma de realizar el cambio de referencial que no exige volver a integrar las ecuaciones diferenciales y que, de hecho, es la forma que nosotros hemos utilizado habitualmente. Teniendo en cuenta que la frecuencia instantánea de emisión es invariante a un cambio de referencial, es decir, que se cumple la ecuación (I.2.3), que volvemos a escribir,

$$\phi_{\Omega_1} + \Omega_1 t = \phi_{\Omega_2} + \Omega_2 t \quad (1.1.2)$$

podemos modificar el registro temporal de la fase que hemos obtenido por integración de las Ecs.(1.1.1) en uno de los referenciales haciendo uso de la Ec.(1.1.2), lo que nos permitirá reconstruir los registros de las componentes en cuadratura del campo, y de las diferentes variables dependientes de la fase en el nuevo referencial.

Para estudiar el comportamiento dinámico de las variables que contienen información sobre la fase, lo más sencillo y conveniente es estudiarlas en un régimen de emisión periódico. Consideremos, pues, un conjunto de parámetros para los que la solución numérica de las ecuaciones (1.1.1) resulte ser periódica en la intensidad. En la Fig.1.1 se caracteriza la solución dinámica del modelo para el conjunto de valores  $\sigma = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $r = 16$  y  $\Delta_c = 0.69$ , que es apropiado para un láser. En este caso, si representamos la evolución temporal de la intensidad del campo eléctrico  $I = |E|^2$  [Fig.1.1(a)], se revela un comportamiento de periodo cuatro, es decir, el valor de cada máximo de intensidad se repite al cabo de cuatro máximos. La misma periodicidad exhibe en su evolución temporal la frecuencia  $\dot{\phi}$  [Fig.1.1(b)]. Estos comportamientos no dependen en absoluto del referencial elegido salvo por lo que respecta, lógicamente, al valor absoluto de la frecuencia  $\dot{\phi}$  que se ve trivialmente corrido al utilizar otro

referencial. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las variables que contienen la fase en su definición.

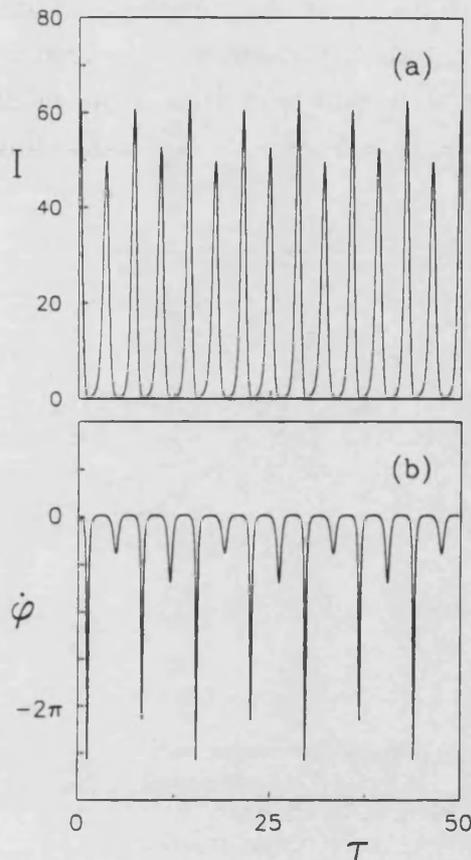


Fig.1.1.1. Evolución temporal de (a) la intensidad del campo eléctrico  $I = |E|^2$  y (b) la frecuencia  $\dot{\phi}$  en un régimen periódico, de periodo 4 en la intensidad, correspondiente a la solución de las Ecs.(1.1.1) para  $\sigma = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $r = 16$  y  $\Delta_c = 0.69$ . La frecuencia muestra un pico cada vez que la intensidad se acerca a cero. Los picos no son pronunciados porque la desintonía de la cavidad es bastante alta.

Concentrémonos ahora en el comportamiento exhibido por la fase  $\phi$  y por el campo complejo [que visualizaremos a través del *phase portrait*: proyección de la órbita en el plano del campo complejo cuyos ejes son las componentes en cuadratura  $E_r = \alpha \cos \phi$  y  $E_i = -\alpha \sin \phi$  de  $E = \alpha \exp(-i\phi)$ ].

Comencemos por el referencial correspondiente a la frecuencia de emisión de la solución estacionaria, i.e.,  $\Omega = \omega_{sc}$ . En la Fig.1.2(a) se muestra la evolución temporal de la fase en este referencial y se observan claramente las características de la misma que ya indicamos al final de la Introducción. En la Fig.1.2(b) se muestra el correspondiente *phase portrait*. Dos características han de ser resaltadas. Por una parte, se observa cómo los saltos exhibidos por la fase son claramente menores que  $\pi$  radianes, lo que denota que la desintonía no es próxima a cero ( $\Delta_c = 0.69$ ). Por otra parte, el campo complejo no evoluciona a lo largo de una curva cerrada, es decir, que el comportamiento de estas variables no es periódico a pesar de serlo el de la amplitud real  $|E| = \alpha$ . Si pudiésemos visualizar el movimiento de  $E_i$  frente a  $E_r$  en función del tiempo, veríamos que la figura va girando con una cierta frecuencia que es inconmensurable con la frecuencia propia

del movimiento periódico (e.g. la de la amplitud real  $\alpha$ ), resultando un comportamiento cuasiperiódico. Este movimiento de giro contrasta con el comportamiento del campo complejo en condiciones de resonancia: cuando  $\Delta_c = 0$ , la proporción entre  $E_i$  y  $E_r$  es una constante, ya que  $\phi$  lo es, lo que implica que el campo complejo se mueve a lo largo de una recta de pendiente  $\tan\phi$  (esto es cierto tanto en este referencial como en el referencial de la cavidad o el de la frecuencia de la transición ya que todos ellos coinciden en  $\Delta_c = 0$ ).

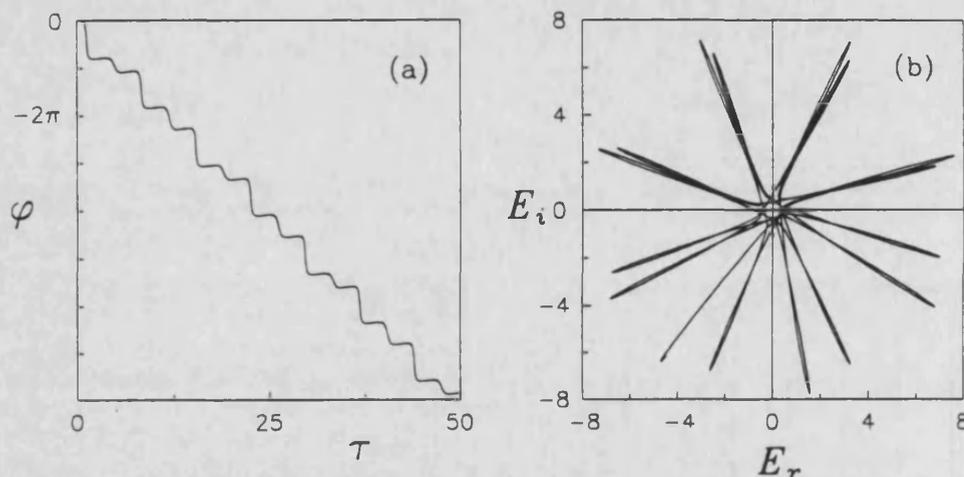


Fig.1.2. (a) Evolución temporal de la fase y (b) *phase portrait* (representación de las componentes del campo complejo una frente a la otra) para el caso periódico de la Fig.1.1 en el marco frecuencial de referencia de la solución estacionaria (inestable)  $\omega_{se}$ . A pesar de tratarse de un régimen periódico, estas representaciones no lo son. En este caso  $\omega_{se} = \omega_c - 0.23$ , obtenido a partir de la Ec.(1.4.1).

Pasemos ahora a analizar el comportamiento de estas variables en el referencial  $\Omega = \omega_1$  propuesto por Zeghlache *et al* (1988) y ya introducido en al apartado I.4. Ya hemos señalado que el referencial  $\omega_1$  es aquél que elimina la acumulación de fase, i.e., el referencial que convierte la fase en una variable periódica. Así pues, calculamos la pendiente media de la fase en su evolución temporal a lo largo de un número  $n$  de periodos  $T$  (bastaría hacerlo con un solo periodo)

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \frac{\phi(t+nT) - \phi(t)}{nT} \quad (1.1.3)$$

y la eliminamos haciendo

$$\omega_1 = \omega_{se} + \langle \dot{\phi} \rangle. \quad (1.1.4)$$

Ahora podemos hacer el cambio de referencial  $\Omega = \omega_1$  haciendo uso de la Ec.(1.1.2) y obtenemos la fase (y todas las variables que la contengan en su definición) en el nuevo referencial despejando de aquella transformación.

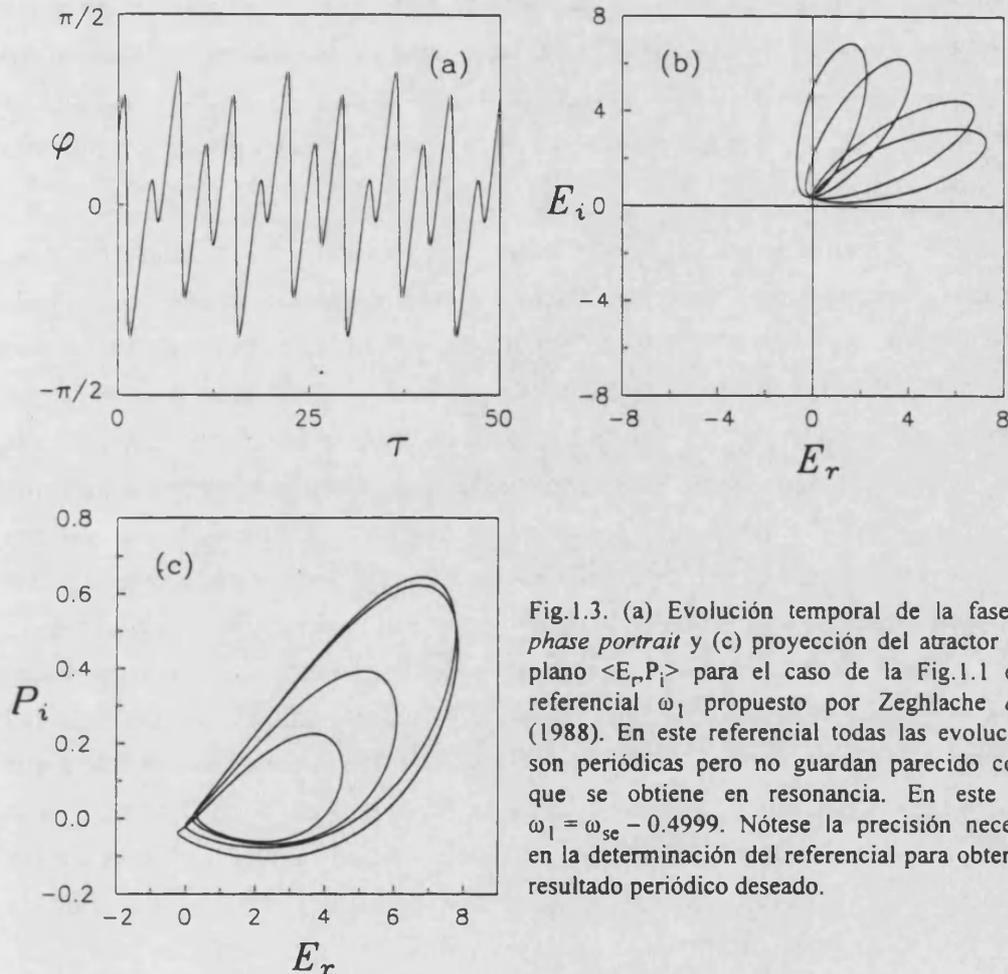


Fig.1.3. (a) Evolución temporal de la fase, (b) *phase portrait* y (c) proyección del atractor en el plano  $\langle E_r, P_i \rangle$  para el caso de la Fig.1.1 en el referencial  $\omega_1$  propuesto por Zeghlache *et al* (1988). En este referencial todas las evoluciones son periódicas pero no guardan parecido con lo que se obtiene en resonancia. En este caso  $\omega_1 = \omega_{sc} - 0.4999$ . Nótese la precisión necesaria en la determinación del referencial para obtener el resultado periódico deseado.

Nótese en la Fig.1.3 cómo el comportamiento de la fase y de las variables que la contienen es ahora notablemente distinto. En efecto, obsérvese que en este referencial  $\omega_1$ , tanto la fase como el campo complejo, exhiben un comportamiento periódico del mismo periodo que la intensidad. Sin embargo, la periodicidad que hemos recuperado para las variables que contienen la fase no recuerda al comportamiento que el sistema tiene en resonancia. En efecto, si observamos la proyección del atractor en el plano  $\langle E_r, P_i \rangle$ , encontramos un atractor que no guarda demasiado parecido con el que se obtiene para un comportamiento del mismo periodo de resonancia (compárese la Fig.1.3(c) con la Fig.1.8). De hecho, tampoco el comportamiento de la proyección en el plano complejo [Fig.1.3(b)] recuerda el comportamiento de resonancia, donde ya hemos dicho que la figura obtenida sería la evolución sobre una recta [ver más adelante la Fig.1.13(a)], observándose por el contrario trayectorias muy curvadas y prácticamente

limitadas a un cuadrante del plano  $\langle E_r, E_i \rangle$ . Esta ruptura en la simetría se debe a la fuerte distorsión introducida en el comportamiento de la fase que, tras el cambio de referencial, muestra diferencias de valores extremos menores que  $\pi/2$  y que carece de saltos bien definidos: resulta intuitivo pensar que una fase así no puede reproducir cambios claros de signo en las componentes del campo (recuérdese la discusión del apartado I.4 sobre el papel del salto de fase en el cambio de signo de las componentes del campo). Además, como veremos más adelante, este referencial presenta problemas de continuidad cuando  $\Delta_c = 0$ .

Pasemos a analizar el comportamiento del sistema en el referencial  $\omega_0$ . Recordemos que este referencial fue definido como aquél que mantiene tanto la periodicidad de las variables con fase como el *adecuado* cambio de signo de las mismas [Vilaseca *et al.*, 1990]. Consecuentemente, para calcular  $\omega_0$  imponemos a la fase la condición de que sufra un incremento medio de  $\pm\pi$  radianes cada vez que, por ejemplo, el campo  $E_r$  haya de cambiar de signo (esto puede apreciarse visualmente en la forma del mínimo de la amplitud real  $\alpha$ , que presenta una forma en pico cuando hay un cambio de signo, siendo más suave cuando no hay tal cambio). Decimos valor promedio de  $\pi$  radianes, y no valor exacto, porque ya hemos visto que al incrementar la desintonía  $\Delta_c$ , los saltos de fase se hacen desiguales [Fig.1.2(a)], resultando entonces imposible hacer que todos los saltos valgan  $\pi$  radianes mediante la simple adición de una cantidad constante a la frecuencia. Podemos resumir esto diciendo que imponemos a la fase  $\phi$  que tenga una acumulación de  $n\pi$  radianes a lo largo de un periodo completo (e.g., en la intensidad) siendo  $n$  el número de veces que el campo ha de cambiar de signo. En los comportamientos periódicos exhibidos por el modelo de Lorenz el valor de  $n$  coincide siempre con el número de mínimos de la intensidad salvo en las ventanas periódicas, que presentan mínimos en los que no hay cambios de signo (véase, por ejemplo, la Fig.2.18 de [Weiss y Vilaseca, 1991]).

Así pues, al integrar las Ecs.(1.1.1) en el nuevo referencial, o realizar el cambio de referencial con arreglo a la Ec.(1.1.2), la fase exhibirá un comportamiento no periódico con saltos que tienen un valor promedio de  $\pi$  radianes [Fig.1.4(a)]. Obsérvese que la fase en el nuevo referencial guarda cierto parecido con la obtenida en el referencial de la solución estacionaria (la distorsión introducida en la evolución de la fase no es muy grande) pero tiene las mesetas más inclinadas. En este referencial, como ocurría en el  $\omega_1$ , las proyecciones del atractor son periódicas [Figs.1.4(b) y (c)] pero, a diferencia de aquél, guardan gran parecido con las obtenidas en resonancia: la proyección  $\langle E_r, P_r \rangle$  tiene la forma típica del atractor de Lorenz (compárese con la Fig.I.8). En cuanto al campo complejo, si bien es claro que no se mueve a lo largo de una recta (que, como ya

hemos comentado, es como se mueve en resonancia) describe un movimiento periódico, pasando de positivo a negativo, y moviéndose aproximadamente a lo largo de una misma dirección.

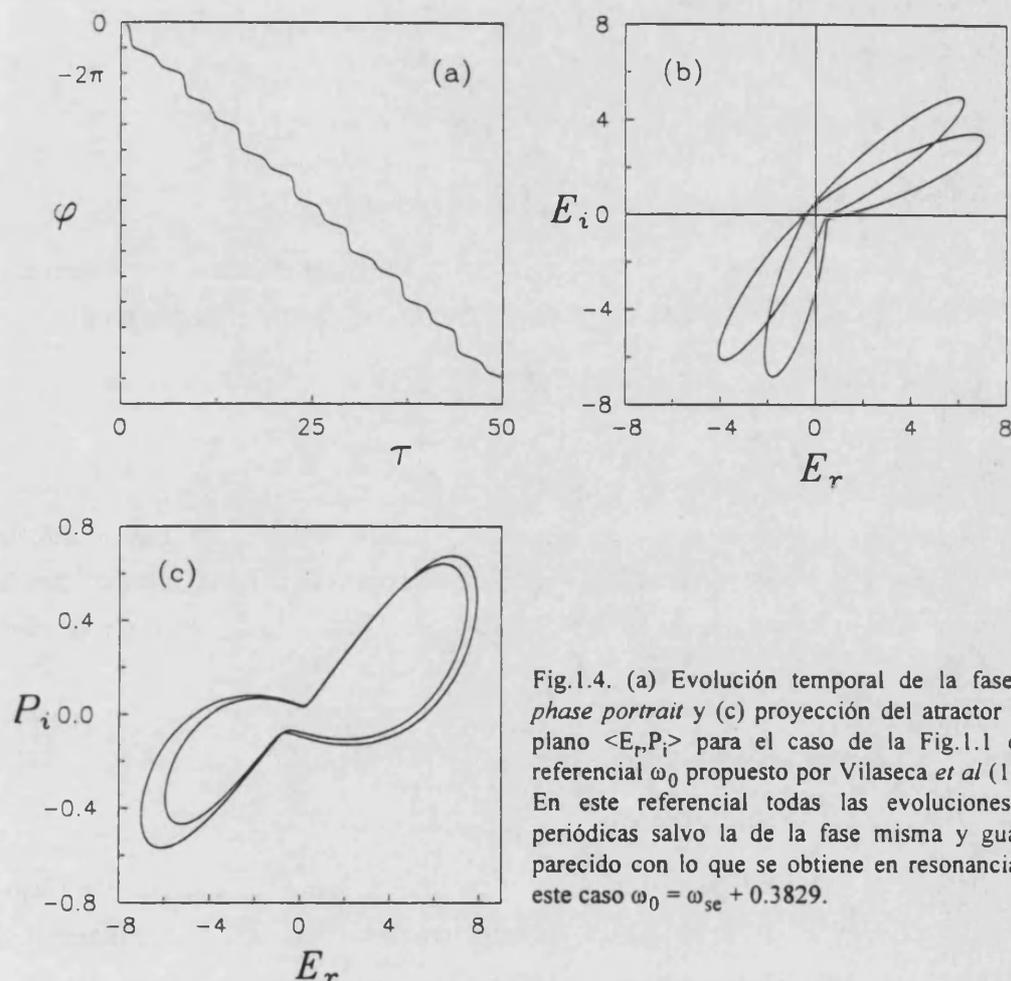


Fig.1.4. (a) Evolución temporal de la fase, (b) *phase portrait* y (c) proyección del atractor en el plano  $\langle E_r, P_i \rangle$  para el caso de la Fig.1.1 en el referencial  $\omega_0$  propuesto por Vilaseca *et al* (1990). En este referencial todas las evoluciones son periódicas salvo la de la fase misma y guardan parecido con lo que se obtiene en resonancia. En este caso  $\omega_0 = \omega_{sc} + 0.3829$ .

Así pues, tanto los referenciales  $\omega_0$  como  $\omega_1$  proporcionan comportamientos periódicos para las variables con fase, si bien el segundo con proyecciones no similares a las obtenidas en resonancia, a diferencia del primero que, por contra, proporciona una fase no periódica.

Una vez descrita la influencia de la elección de referencial en las variables que contienen información sobre la fase, vamos a relacionar dichos referenciales con el espectro del campo.

## 1.2. Marcos frecuenciales de referencia y espectro del campo complejo.

Recordemos que la elección de la frecuencia de referencia influye en la evolución de la fase según la Ec.(1.1.2) y que, por tanto, en la del campo complejo según

$$E_{\Omega_1}(t) = \alpha(t) \exp[-i\phi_{\Omega_1}(t)] = E_{\Omega_2}(t) \exp[-i(\Omega_2 - \Omega_1)t], \quad (1.2.1)$$

donde el subíndice indica el referencial en que el campo es evaluado.

Es claro que una manera de obtener información independiente del referencial sobre la evolución de la fase es tratando directamente con el campo eléctrico total

$$E_T(t) = E_{\Omega}(t) \exp[-i\Omega t] \quad (1.2.2)$$

No obstante, se trata de una magnitud de la que no podemos obtener información directa sobre el significado de los referenciales. Es mucho más conveniente trabajar con la transformada de Fourier del campo total, ya que ésta contiene toda la información sobre las frecuencias relevantes del sistema.

$$E_T(\omega) = F\{E_T^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt E_{\Omega}^*(t) \exp[i(\Omega - \omega)t] \quad (1.2.3)$$

(donde  $F$  denota transformada de Fourier y hemos tomado el campo complejo-conjugado para que  $E_T(\omega)$  contenga a las frecuencias positivas), y definamos el correspondiente espectro de potencia del campo como

$$S(\omega) = \frac{I(\omega)}{\int_0^{\infty} d\omega I(\omega)} \quad (1.2.4)$$

que está normalizado a la unidad y donde  $I(\omega) = |E_T(\omega)|^2$  es proporcional al número de fotones por unidad de frecuencia que hay en el campo.

El aspecto típico de  $S(\omega)$  está representado cualitativamente en la Fig.1.5: una serie de picos de frecuencia situados alrededor de la frecuencia óptica  $\Omega$  (del orden de por ejemplo  $10^{15}$ Hz).

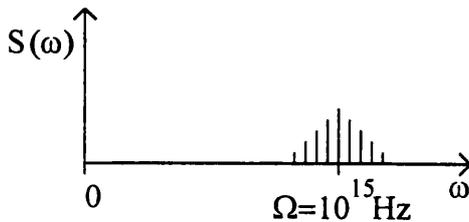


Fig.1.5. Representación esquemática de la clase de espectros que presenta el problema. La frecuencia de emisión del próxima a  $\omega_{01}$ , son del orden de  $10^{15}$ Hz. más próxima a  $\omega_{01}$ , son del orden de  $10^{15}$ Hz.

Es obvio que no podemos calcular  $S(\omega)$  si damos a  $\Omega$  (que es el referencial) el valor de  $10^{15}$ Hz. Por otra parte, es claro también (Fig.1.5) que si bien el valor de  $\Omega$  es esencial para determinar el valor absoluto de las frecuencias del sistema, no lo es para determinar las distancias entre los picos de frecuencia que aparezcan en el espectro. Como es en esto último en lo que estamos interesados, en la distancia de los picos del espectro a  $\Omega$ , podemos dar a la frecuencia de referencia  $\Omega$  un valor arbitrario en la exponencial de la Ec.(1.2.3) a la hora de realizar cálculos numéricos. Podríamos darle, por ejemplo, el valor cero para hacer cálculos, pero no sería una elección conveniente, ya que en  $S(\omega)$  se superpondrían las partes positiva y negativa del espectro, dificultando la identificación de las frecuencias. Por otra parte, si el valor de  $\Omega$  es muy alto, nos veremos obligados a trabajar con series temporales inmanejablemente grandes para determinar las frecuencias con la precisión suficiente. Conviene, pues, encontrar un valor para  $\Omega$  que verifique el compromiso de que en  $S(\omega)$  no aparezcan superpuestas las partes positiva y negativa y que las series temporales sean manejables. En los cálculos efectuados por nosotros hemos tomado el valor  $\Omega = 50$  que juega además el papel de  $\omega_c$ , pues en la determinación de  $E_{\Omega}^*(t)$  en la Ec.(1.2.3) por integración de las Ecs.(1.1.1) hemos empleado el referencial de la cavidad  $\Omega = \omega_c$ . Así, las frecuencias que daremos a continuación están dadas en valores relativos a la frecuencia de la cavidad.

En la Fig.1.6 se representa un ejemplo de un resultado típico de la clase de espectros que se obtienen cuando el campo se comporta de forma periódica. Nótese [Fig.1.6(a)] cómo, a medida que la desintonía aumenta, el espectro cambia, en el sentido de que unos picos van creciendo en detrimento de sus simétricos respecto al centro de espectro. Si la desintonía aumentase en sentido opuesto, serían los picos que aquí decrecen los que crecerían.

La Fig.1.6(b) contiene el principal resultado al que hemos llegado mediante el estudio de  $S(\omega)$ : la identificación inequívoca de los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$  que, hasta ahora, habían sido introducidos de forma operativa. Tras realizar cálculos precisos de  $S(\omega)$  para distintos regímenes de emisión periódica y distintos valores de los parámetros de control (en los que la precisión relativa alcanzada en el valor de las frecuencias alcanza una parte en  $5 \times 10^4$ ), hemos podido concluir de forma inequívoca que, por una

parte, el referencial  $\omega_1$  (consistente, recordemos, en la eliminación de la pendiente media exhibida por la fase en su evolución temporal) se corresponde con la frecuencia del pico más alto del espectro. Por tanto, el significado de esta frecuencia resulta claro ahora: la frecuencia  $\omega_1$  es la frecuencia fundamental del sistema.

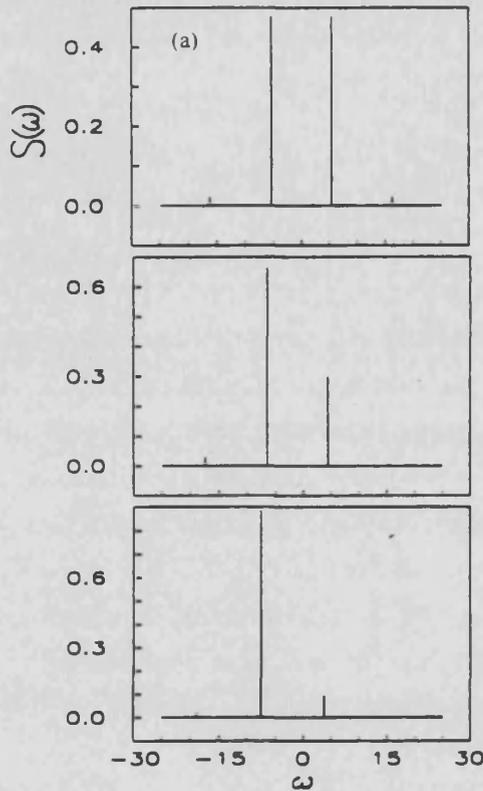
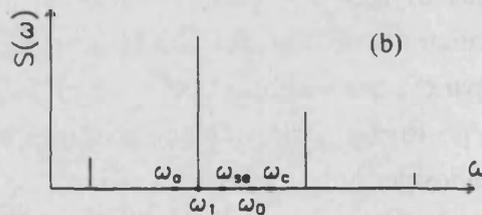


Fig.1.6. (a) Evolución con la desintonía de espectro de un comportamiento periódico PI. La desintonía vale  $\Delta_c = 0$  para la figura superior,  $\Delta_c = 5$  para la intermedia y  $\Delta_c = 10$  para la inferior. Nótese como el espectro va perdiendo la simetría y desplazándose a la izquierda a medida que la desintonía aumenta. Si la desintonía creciese en sentido negativo el resultado sería el mismo sólo que en sentido contrario. (b) Representación esquemática del espectro de un caso periódico donde se ha señalado la posición de las frecuencias relevantes en el problema. Un extenso estudio numérico de diferentes soluciones de las ecuaciones del láser nos ha permitido identificar  $\omega_1$  con la frecuencia del pico más alto del espectro y  $\omega_0$  con el centro geométrico del mismo.



En cuanto al referencial  $\omega_0$  (que se definió como aquella que mantiene un *salto promedio de fase de  $\pi$  radianes*, de forma que el campo cambie su signo análogamente a como lo hace en resonancia) no es otra cosa que el centro del espectro, es decir, *es la frecuencia algebraica media* del espectro (que no debe confundirse con la frecuencia media ponderada que discutiremos más adelante). Nótese que en la posición que en el espectro ocupa  $\omega_0$  habrá un pico de frecuencia de altura no nula cuando el atractor sea no simétrico [Zeghlache y Mandel, 1985]; si es simétrico, como el correspondiente al caso que representamos, tal pico no aparece. En la misma Fig.1.6, aparecen señaladas junto a las frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega_1$  las frecuencias naturales del sistema, i.e., la de la transición atómica, la de la cavidad y la de la solución estacionaria (ahora inestable, ya que  $r > r_{2nd}$ ). En la figura  $\omega_c > \omega_{01}$ , es decir, corresponde a un caso con desintonía de la cavidad positiva. La frecuencia de la solución estacionaria (inestable)  $\omega_{se}$  se determina mediante la Ec.(I.4.1) y está situada entre las frecuencias de la cavidad y de la transición atómica o molecular. Finalmente, la frecuencia  $\omega_0$  siempre es mayor que la de la

solución estacionaria (y menor que la de la cavidad) mientras que la frecuencia  $\omega_1$  es menor que  $\omega_{se}$  y mayor que  $\omega_{01}$ .

Podemos entender ahora por qué en el referencial  $\omega_0$  se obtienen representaciones similares de las proyecciones del atractor a las que se obtienen en resonancia: desde  $\omega_0$  se ve un espectro similar al que, desde el referencial de la cavidad, se ve en resonancia, i.e., el espectro aparece simétrico por lo que respecta a la posición de los picos de frecuencia [que no por la altura de los mismos, que cambian de forma no simétrica con la desintonía, Fig.1.6(a)] cuando es visto desde  $\omega_0$ . Por otra parte, también resulta claro ahora porqué tanto en el referencial  $\omega_0$  como en el referencial  $\omega_1$  se obtienen representaciones periódicas de las variables que contienen a la fase explícitamente: tanto en un referencial como en el otro, hay un pico de frecuencia a la misma distancia tanto para frecuencias mayores como para frecuencias menores, i.e., desde estos referenciales se observa el espectro de una función periódica. Esto no ocurre si la frecuencia de referencia es, por ejemplo, la de la cavidad porque, desde ésta última, el pico de frecuencia más próximo para frecuencias más altas está a una distancia distinta (y, en general, incoñmensurable con) de la del pico más próximo a frecuencias más bajas, siendo aparente un espectro que no corresponde a una variable periódica, de ahí el comportamiento cuasiperiódico que de las variables que contienen fase se obtiene en este último referencial cuando  $\Delta_c \neq 0$ . Lo anterior nos lleva fácilmente a la siguiente conclusión: *se observará comportamiento periódico en la variables que contengan fase en cualquier referencial que coincida con un pico de frecuencia del espectro.*

Hemos identificado, por tanto, el significado físico de los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$  y queda claro que ninguno de ellos puede corresponder a algo parecido a la frecuencia de emisión del láser en régimen dinámico, es decir, no podemos atribuir un origen dispersivo (de índice de refracción) al corrimiento de frecuencia que supone cambiar el referencial de la frecuencia de la cavidad (o de la transición, que es la frecuencia de emisión del láser en resonancia) a las frecuencias  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ , u otra cualquiera. Nos preguntamos entonces ¿puede definirse una frecuencia de emisión del láser cuando la desintonía es no nula y el régimen de funcionamiento dinámico?.

### 1.3. Frecuencia media de emisión del láser.

Ya comentamos anteriormente que la frecuencia instantánea de emisión del láser ( $\Omega + \dot{\phi}_\Omega$ ) tiene poco que ver con la idea intuitiva que de la frecuencia tenemos debido a la presencia de los picos originados por los saltos de fase. Por analogía con lo que

ocurre en el caso estacionario, podríamos atribuir el significado de frecuencia de emisión al referencial que elimine los efectos dispersivos en la evolución de la fase: el problema es determinar qué son efectos dispersivos en el caso dinámico. Al no coincidir ninguno de los referenciales que devuelven la periodicidad a las variables complejas con  $\omega_{se}$ , se pensó que, en el caso dinámico, habría tanto efectos dispersivos como unos *efectos dinámicos*, no bien definidos, en la evolución de la fase [Zeghlache *et al*, 1988; Vilaseca *et al*, 1990]. Así, la diferencia entre el referencial que devuelve la periodicidad y  $\omega_{se}$  mediría estos efectos. Lo cierto es que no hay ningún criterio que pueda discriminar unos de otros ya que hay infinitos referenciales que hacen periódicas las variables complejas.

Una forma de resolver el problema es trabajar con cantidades promediadas en el tiempo: al igual que la frecuencia instantánea no parece poder ser entendida como frecuencia de emisión, ciertamente tampoco parece tener mucho sentido hablar de *efectos dispersivos instantáneos*. El uso de cantidades promediadas permite obviar este problema.

Vamos a calcular, por tanto, la frecuencia media de emisión del láser. La mejor forma de definirla es en términos energéticos, es decir, como la frecuencia media de los fotones del campo. Teniendo en cuenta que  $I(\omega)$  es proporcional al número de fotones por unidad de frecuencia y que, por tanto,  $dN = d\omega I(\omega)$  es el número de fotones de frecuencia  $\omega$ , la energía total puede escribirse como

$$W = \hbar \int_0^{\infty} d\omega I(\omega) \quad (1.3.1)$$

Si definimos la frecuencia media de emisión del láser, como  $W = N\hbar\bar{\omega}$  obtenemos de la igualdad fácilmente que  $\bar{\omega}$  viene definida por

$$\bar{\omega} = \int_0^{\infty} d\omega S(\omega)\omega \quad (1.3.2)$$

con  $S(\omega)$  definida en la Ec.(1.2.4), es decir,  $\bar{\omega}$  es la frecuencia media ponderada del espectro de potencia.

El resultado obtenido al evaluar  $\bar{\omega}$  en régimen dinámico es sorprendente: ésta resulta coincidir con la frecuencia media de emisión en régimen estacionario  $\omega_{se}$ . Este resultado lo hemos comprobado detalladamente, con gran precisión, para multitud de secuencias temporales correspondientes a distintos conjuntos de parámetros. Además,

este resultado resulta ser válido tanto para regímenes periódicos como caóticos, es decir, *la frecuencia media de emisión del láser no se ve alterada por el régimen en que éste emita*. Este resultado es tanto más sorprendente cuanto que, como es bien sabido, *la intensidad media de emisión sí depende del régimen dinámico* [Lawandy *et al*, 1987].

La igualdad entre  $\bar{\omega}$  y  $\omega_{se}$  tiene interesantes consecuencias: indica que existe cierta consistencia interna en la forma de  $S(\omega)$ . Sin embargo, lamentablemente, no hemos conseguido encontrar hasta el momento una prueba analítica de esta propiedad.

#### 1.4. Comportamiento de los referenciales frente a la desintonía y el bombeo.

Una vez aclarado el significado físico de los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , parece interesante estudiar la dependencia de estos con los parámetros del sistema, en particular con la desintonía.

En la Fig.1.7(a) se representa el valor de  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  y  $\bar{\omega}$  frente a la desintonía  $\Delta_c$  para un valor del bombeo  $r = 500$ , valor desmesuradamente alto desde el punto de vista físico pero que utilizamos porque en estas condiciones el comportamiento del sistema es muy sencillo. En efecto, para desintonías grandes (aproximadamente  $\Delta_c \geq 10$ ) el sistema es estable y para valores pequeños ( $\Delta_c < 10$ ) el comportamiento es periódico de periodo unidad. Diversas características han de ser resaltadas y la primera de ellas es el enorme parecido de esta representación con las obtenidas experimentalmente con un láser de He-Xe con ensanchamiento inhomogéneo [Tarroja *et al*, 1986], si bien estos autores no interpretaron su significado. Por una parte, y ya insistimos anteriormente en este importante hecho, la frecuencia media de emisión  $\bar{\omega}$  (línea discontinua) coincide exactamente con la frecuencia de la solución estacionaria y no presenta, por tanto, discontinuidad alguna al pasar de régimen dinámico a estacionario. Por otra parte, la frecuencia algebraica media  $\omega_0$  es continua al pasar de desintonías positivas a negativas, pero es discontinua al llegar al final de la zona de emisión dinámica (es decir, no tiende a  $\omega_{se}$ ). De hecho, no hemos dibujado el comportamiento de esta frecuencia (ni el de  $\omega_1$ ) en la vecindad de la bifurcación de Hopf que da paso a la solución estacionaria. Esto se debe a que la bifurcación de Hopf es subcrítica para estos parámetros y hay, por tanto, un pequeño dominio de biestabilidad alrededor de la bifurcación. En este dominio aparece el fenómeno conocido como *critical slowing down* [Mandel, 1986] y la determinación de  $\omega_0$  y  $\omega_1$  se hace sumamente difícil y no aporta ninguna información relevante.

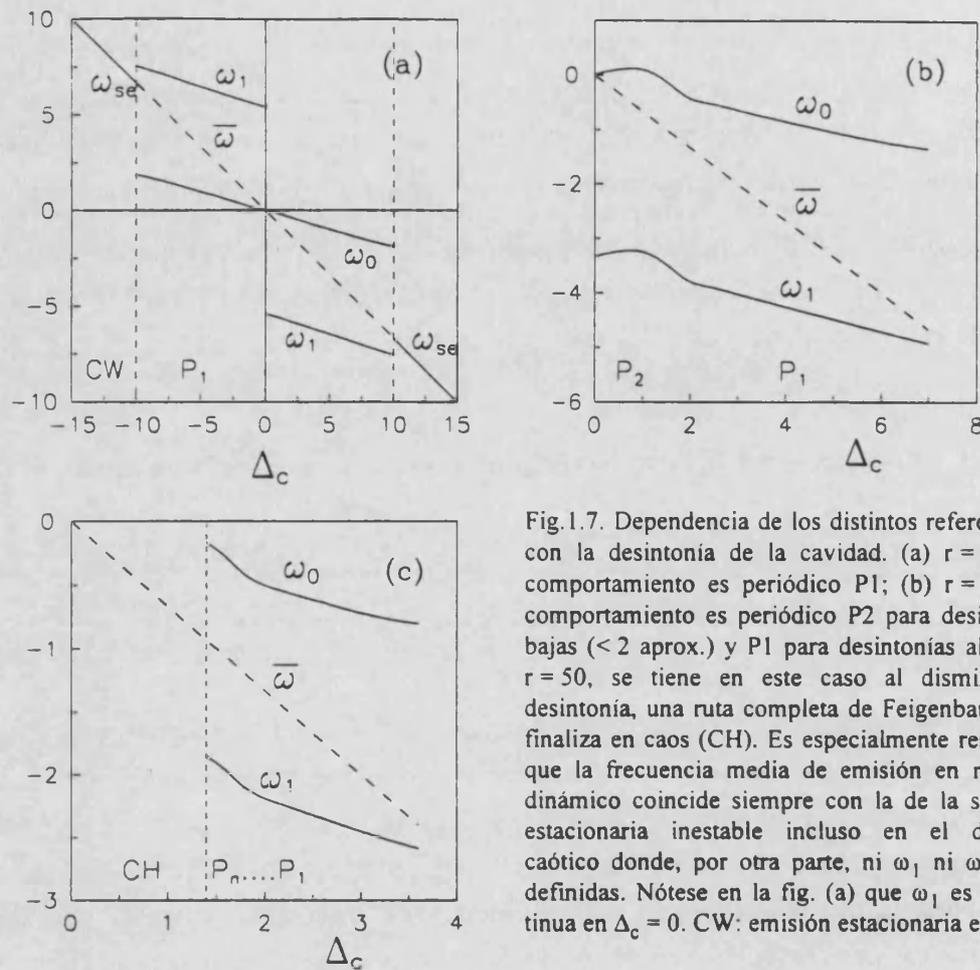


Fig.1.7. Dependencia de los distintos referenciales con la desintonía de la cavidad. (a)  $r = 500$ , el comportamiento es periódico  $P_1$ ; (b)  $r = 180$ , el comportamiento es periódico  $P_2$  para desintonías bajas ( $< 2$  aprox.) y  $P_1$  para desintonías altas, (c)  $r = 50$ , se tiene en este caso al disminuir la desintonía, una ruta completa de Feigenbaum que finaliza en caos (CH). Es especialmente resaltable que la frecuencia media de emisión en régimen dinámico coincide siempre con la de la solución estacionaria inestable incluso en el dominio caótico donde, por otra parte, ni  $\omega_1$  ni  $\omega_0$  están definidas. Nótese en la fig. (a) que  $\omega_1$  es discontinua en  $\Delta_c = 0$ . CW: emisión estacionaria estable.

Por lo que respecta a la frecuencia  $\omega_1$ , ésta muestra una discontinuidad al pasar de desintonías positivas a negativas, aparte de la ya mencionada para  $\omega_0$  en las proximidades de la bifurcación de Hopf. Esta discontinuidad se debe a que para  $\Delta_c = 0$ , la frecuencia  $\omega_1$  no está bien definida al existir dos picos de igual altura en el espectro de potencia [éste es simétrico en resonancia, Fig.1.6(a)]. En otros términos, se debe a que en resonancia, como ya hemos comentado, el sentido de los saltos de fase no está definido porque, estrictamente, son discontinuidades de módulo  $\pm(2n+1)\pi$  (Fig.I.10).

En la Fig.1.7(b) mostramos el mismo tipo de representación, limitándonos a desintonías positivas, para un valor del bombeo  $r = 180$ . Para este valor de  $r$  el comportamiento de periodo unidad se bifurca a un  $P_2$  para una desintonía  $\Delta_c \approx 2$ . Es de resaltar cómo tanto  $\omega_0$  como  $\omega_1$  pierden el comportamiento casi lineal que mostraban en el caso anterior al entrar en la zona de  $P_2$ . Nótese también que, al igual que para  $r = 500$ , la distancia entre  $\omega_0$  y  $\omega_1$  es aproximadamente constante, lo que implica que el periodo principal varía poco con la desintonía.

En la Fig.1.7(c) volvemos a ilustrar la variación de los referenciales con la desintonía para  $r = 50$ . Para este bombeo, ocurre en el sistema una ruta completa de doblamiento de periodos a medida que la desintonía es disminuida, ruta que finaliza en caos. Lo más resaltante en este caso es que  $\omega_0$  y  $\omega_1$  solamente están definidas en la zona de comportamiento periódico, a diferencia de  $\bar{\omega}$  que también está definida en la zona caótica (de hecho,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  también están definidas en las infinitas ventanas periódicas que hay dentro del dominio caótico). La imposibilidad de definir  $\omega_0$  y  $\omega_1$  en régimen caótico está asociada con el hecho de que, en este régimen, los saltos de fase ocurren en instantes y con tamaños aleatorios. Se ha demostrado que este tipo de comportamiento equivale a una difusión de la fase, sólo que de origen completamente determinista [D'Alessandro *et al*, 1989; Li *et al*, 1992] y, consecuentemente, las trayectorias del sistema en el espacio fásico están afectadas por rotaciones de frecuencias aleatorias (Fig.1.8). Desde el punto de vista del espectro  $S(\omega)$ , lo anterior se traduce en que la simetría que éste exhibe en resonancia [Fig.1.9(a)] se pierde, por lo que a la posición de los picos *respecto al centro* se refiere, al introducir cualquier desintonía [Fig.1.9(b)].

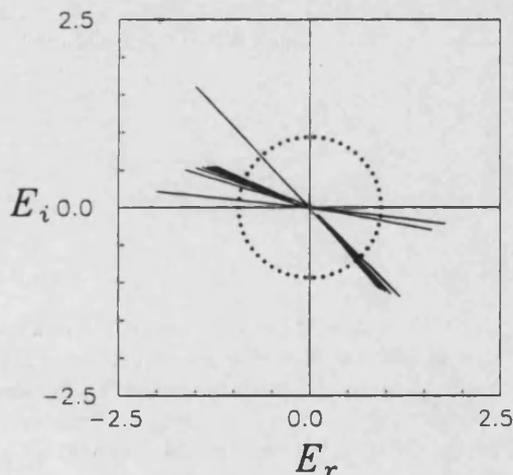


Fig.1.8. *Phase portrait* en un caso caótico. El campo va girando en el plano con una velocidad angular no uniforme. Este comportamiento es equivalente a una difusión de fase.

Finalizaremos esta sección comentando el comportamiento de los referenciales frente al bombeo. Ya vimos en la Introducción [Ec.(I.4.1)] que  $\omega_{se}$  no depende del bombeo  $r$ . Sin embargo no es éste el caso para  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , como puede verse en la Fig.1.10 donde representamos estas tres frecuencias frente a  $r$  para  $\Delta_c = 3.5$ ,  $b = 0.25$  y  $\sigma = 2$ . Nótese que el referencial  $\omega_0$  tiene una cierta dependencia con  $r$  (decrece su valor asintóticamente) que, sin embargo, es mucho menos marcada que la que tiene  $\omega_1$ , que tiende a infinito con  $r^{1/2}$ . Como la diferencia entre estas dos frecuencias,  $(\omega_0 - \omega_1)$ , mide la "frecuencia principal de giro" del atractor, el que la distancia entre  $\omega_0$  y  $\omega_1$  crezca con  $r$  denota que el periodo principal del atractor disminuye al aumentar el bombeo  $r$ , a diferencia de lo que ocurría con la desintonía, con la que la diferencia  $(\omega_0 - \omega_1)$  apenas depende.

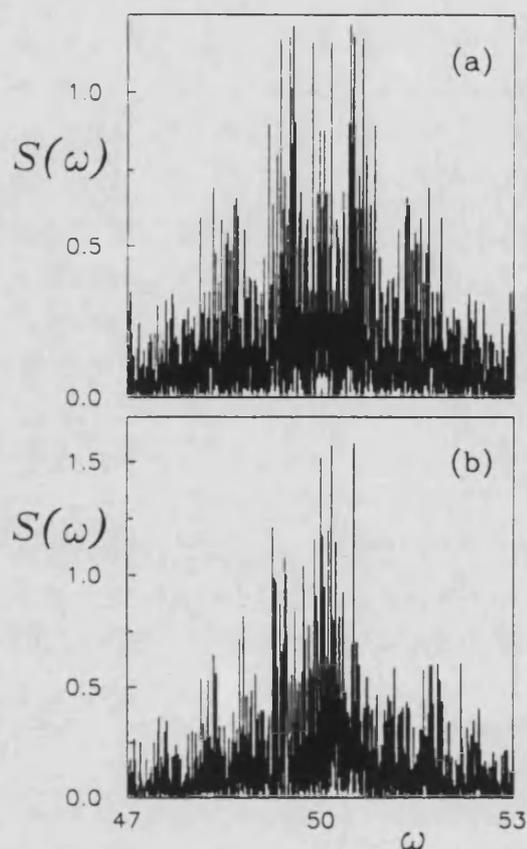


Fig.1.9. Espectro de potencia del campo para un caso de emisión caótica,  $b = 0.25$ ,  $s = 2$ ,  $r = 50$ , (a) en resonancia y (b) con un incremento pequeño de la desintonía ( $\Delta_c = 0.05$ ). Nótese como el espectro que en resonancia es simétrico pierde la simetría fuera de resonancia. Este hecho impide definir los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$ .

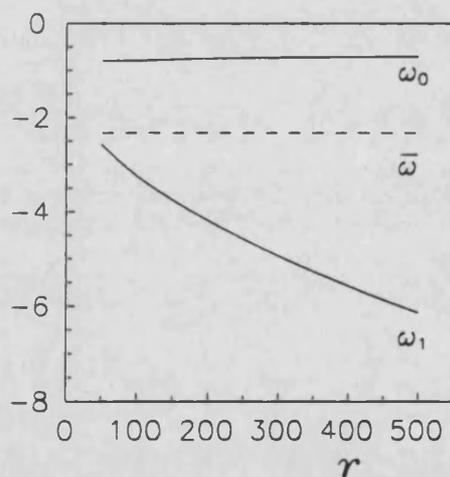


Fig.1.10. Dependencia de los distintos referenciales con el bombeo para el caso  $b = 0.25$ ,  $\sigma = 2$  y  $\Delta_c = 3.5$ . Mientras que el referencial de la solución estacionaria (o lo que es lo mismo, la frecuencia media de emisión) no depende del bombeo,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  sí dependen, (mucho más fuertemente  $\omega_1$ ). La diferencia entre  $\omega_0$  y  $\omega_1$  es la frecuencia principal de giro del atractor y se aprecia claramente como ésta aumenta con el bombeo.

### 1.5. Invariantes al referencial. La fase del campo y la fase geométrica.

En las secciones anteriores hemos intentado poner en claro la relación existente entre los diferentes referenciales y propiedades intrínsecas del campo a través de su espectro de potencia. Hemos visto, en particular, que no parece haber ningún elemento estructural de los atractores que permanezca invariante ante un cambio de referencial si

las variables empleadas en la representación contienen información sobre la fase. ¿Existe entonces algún elemento invariante a la elección de referencial?. La respuesta es afirmativa: la frecuencia media de emisión no depende del referencial. Pero no es éste el único invariante presente en el sistema.

En 1990 aparecieron dos trabajos [Vilaseca *et al*, 1990; Ning y Haken, 1990b] que llamaron la atención sobre el hecho de que la fase, representada en un referencial distinto de  $\omega_1$ , presenta una acumulación a lo largo de cada periodo de la intensidad que recuerda a la celebrada fase geométrica o de Berry [Berry, 1984; 1987; 1988], opiniones que fueron discutidas en [Mandel *et al*, 1991] por lo que al modelo de Lorenz-Haken respecta. Recordemos que la fase de Berry es la acumulación en la fase que algunos sistemas hamiltonianos tienen cuando se realiza una variación cíclica en los parámetros del sistema: al volver los parámetros a su valor original, todas las variables del sistema vuelven también a sus valores originales excepto la fase, que presenta una acumulación o anholonomía (en el Apéndice 3 damos una pequeña introducción a estos conceptos).

En trabajos posteriores, Ning y Haken investigaron sistemáticamente esta posibilidad [Ning y Haken, 1991; 1992a; 1992b] llegando a extender la fase geométrica a sistemas disipativos no-lineales como el láser. En particular, encontraron que la frecuencia  $\dot{\phi}_\Omega(t)$  (donde  $\Omega$  indica el referencial en que es evaluada) puede ser descompuesta como suma de dos contribuciones

$$\dot{\phi}_\Omega(t) = \omega_d(t) + \omega_g(t), \quad (1.5.1)$$

con

$$\omega_d(t) = -\text{Im} \frac{\langle \Psi | \frac{d}{dt} \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Lambda | \Psi \rangle} \quad (1.5.2)$$

la frecuencia dinámica y  $\omega_g(t)$  la frecuencia geométrica. En la ecuación (1.5.2),  $|\Psi\rangle = \text{col}[E, P, D]$ ,  $\langle \Psi | = \text{fil}[E^*, P^*, D]$  y  $\Lambda$  es una matriz diagonal  $\{a_1, a_2, a_3\}$  con  $a_i$  reales que se toman de manera que, en un comportamiento periódico, se verifique

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(t+T) \\ \Psi_2(t+T) \\ \Psi_3(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\delta\phi_{a_1}) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta\phi_{a_2}) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\delta\phi_{a_3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_3(t) \end{bmatrix}, \quad (1.5.3)$$

donde  $\delta\phi = \phi(t+T) - \phi(t)$  es real y representa la acumulación de fase a lo largo de un periodo. Teniendo en cuenta que  $\Psi_3(t) = D(t)$  es una variable real, y que la acumulación de fase en un periodo  $\delta\phi$  es idéntica para  $\Psi_1(t) = E(t)$  y  $\Psi_2(t) = P(t)$ , en este caso hemos de tomar  $a_1 = a_2 = 1$   $a_3 = 0$ . En el Apéndice 3 se proporciona una deducción de la expresión (1.5.2) para la frecuencia dinámica.

Vamos a demostrar, a continuación, que la fase geométrica, definida como la integral de la frecuencia geométrica, es un invariante frente a un cambio de referencial. En efecto, si sustituimos las expresiones de  $\Psi_i$  y sus derivadas, dadas por (1.1.1), en (1.5.2) obtenemos

$$\langle \Psi | \frac{d}{dt} \Psi \rangle = -\sigma[1+i\delta] |E|^2 + \sigma E^* P - [1-i\Delta] |P|^2 + EDP^* + b(r-D)D - 2D(EP^* + PE^*),$$

$$\langle \Psi | \Lambda | \Psi \rangle = |E|^2 + |P|^2 \quad (1.5.4)$$

operando,

$$\text{Im} \langle \Psi | \frac{d}{dt} \Psi \rangle = -\sigma\delta |E|^2 + \Delta |P|^2 + (\sigma-D)\text{Im}(EP^*), \quad (1.5.5)$$

y teniendo en cuenta las expresiones de  $\delta$  y  $\Delta$  dadas en (I.2.6) y que  $\omega_{01} = \omega_c - \Delta_c$ , podemos escribir finalmente

$$\omega_d(t) = (\omega_c - \Omega) - \frac{(\sigma-D)\text{Im}(EP^*) + \Delta_c |P|^2}{|E|^2 + |P|^2} \equiv v_d(t) - \Omega, \quad (1.5.6)$$

donde, evidentemente,  $v_d(t)$  no depende del referencial  $\Omega$  al anularse la dependencia en la fase de E y P cuando se hace  $EP^*$ . Podemos ya calcular la fase geométrica

$$\phi_g(t) = \phi_\Omega(t) - \int_0^t dt' \omega_d(t') = [\phi_\Omega(t) + \Omega t] - \int_0^t dt' v_d(t'). \quad (1.5.7)$$

Es evidente que  $\phi_g$  no depende del referencial porque  $(\phi_\Omega + \Omega t)$  no depende [ecuación (1.1.2)] ni tampoco depende el segundo término quedando demostrada, por tanto, la invariancia de la fase geométrica ante un cambio de referencial.

En la Fig.1.11 representamos las fases total, dinámica y geométrica correspondientes al caso estudiado en las Figs.1.1, 1.2, 1.3, y 1.4.

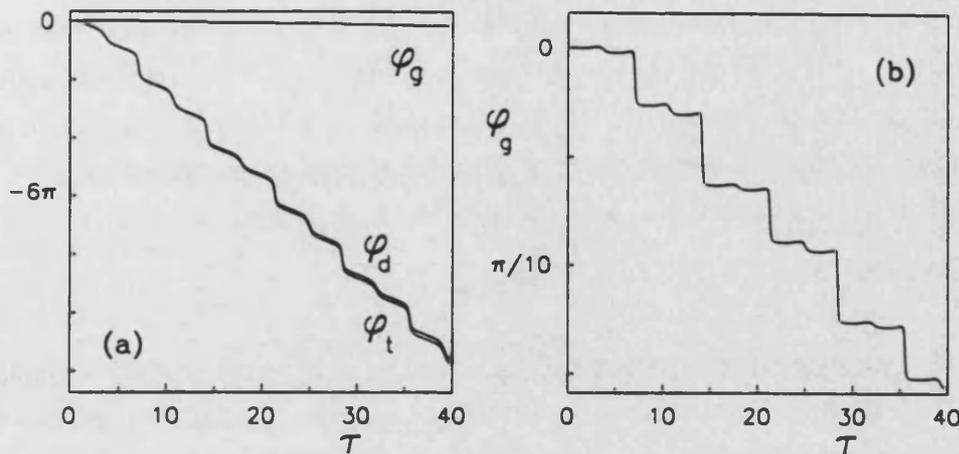


Fig.1.11. (a) Representación de la fase geométrica  $\phi_g$ , la fase dinámica  $\phi_d$  y la fase total  $\phi_t$  para el caso de las Figs.1.1-1.4. (b) Representación de  $\phi_g$ . Nótese las diferencias de escala.

Queda claro, por tanto, que la fase geométrica es una característica intrínseca de las ecuaciones de Lorenz-Haken. Podríamos pensar que la frecuencia geométrica, y la frecuencia de la solución estacionaria inestable  $\omega_{se}$ , constituyen referenciales privilegiados en el sentido de que son invariantes. Desafortunadamente tanto en  $\omega_{se}$  [Fig.1.2(b)] como (y esto lo hemos comprobado) en el referencial de la frecuencia geométrica se obtienen representaciones cuasiperiódicas de los atractores [no hay más que ver los saltos tan pequeños de la fase geométrica en la Fig.1.11(b) para preverlo]. Además, este último referencial, a diferencia de los anteriores, tiene dependencia con el tiempo. No parece, pues, que estos *referenciales intrínsecos* sean demasiado útiles.

Un problema relacionado con la fase geométrica aun no resuelto es el de su detección experimental. En un experimento se tiene acceso directo a la medida de las componentes en cuadratura del campo  $E_\Omega(t)$ . A partir de ellas se puede obtener la fase  $\phi$ . Podría modificarse la expresión (1.5.7) para que en ella aparecieran explícitamente estas cantidades, y no las componentes de la polarización ni la diferencia de poblaciones, mediante el uso de las Ecs.(1.1.1) (despejando  $P$  de la ecuación de evolución del campo y dejándola en función de  $E$  y  $dE/dt$ , y procediendo análogamente con  $D$  a partir de la ecuación de evolución de  $P$ ). Pero en esa expresión aún aparecerían parámetros de control como  $\sigma$  y  $\Delta_c$ , cantidades que no pueden conocerse con la precisión suficiente. Además, aun si conociésemos dichas cantidades con absoluta precisión, estamos presuponiendo que el dispositivo experimental vendría regido *exactamente* por el modelo de Lorenz-Haken, cosa que no se puede afirmar de ningún dispositivo conocido.

Lo ideal sería disponer de una expresión de la frecuencia dinámica que dependiese únicamente de las componentes de los campos y sus derivadas, expresión a partir de la

cual podríamos calcular la fase geométrica. Sin embargo, todos nuestros esfuerzos por conseguir una expresión en este sentido han sido en vano y, consecuentemente, opinamos que la fase geométrica de la que tratamos aquí no puede ser medida en un experimento (al menos hasta que no haya nuevos avances teóricos en este sentido).

## 2.6. Conclusión.

A lo largo de este capítulo hemos estudiado la existencia de elementos invariantes a cambios en el referencial y hemos detallado la influencia de dichos cambios de referencial en las propiedades de los atractores. Ha quedado claro que, dependiendo del referencial utilizado, pueden obtenerse representaciones muy diferentes del mismo atractor. Es más, utilizando como frecuencias de referencia la frecuencia geométrica o la frecuencia de la solución estacionaria inestable, que son invariantes del sistema ante un cambio de referencial, se obtienen representaciones cuasiperiódicas del atractor.

Parece existir, por tanto, una total indefinición en las propiedades topológicas de los atractores que contienen información sobre la fase. Esto nos lleva a aclarar un error a este respecto que ha sido bastante habitual en la literatura [Weiss *et al*, 1988; Weiss *et al*, 1989]. Al principio de ser detectada la fase, los saltos de  $\pi$  radianes que ésta podía exhibir eran asociados con cambios de signo en el campo. Si los saltos eran menores que  $\pi$  radianes se pensaba que el campo no cambiaba de signo. Esto es, evidentemente, erróneo: en el referencial  $\omega_0$  la fase siempre presenta saltos de  $\pi$  radianes independientemente de la desintonía y, por el contrario, en el referencial  $\omega_1$  los saltos son siempre menores de  $\pi$ . De hecho el cambio de signo del campo no parece ser algo bien definido cuando la desintonía crece. Lo que si podemos aceptar es que saltos bruscos de  $\pi$  radianes están asociados con cambios de signo del campo *si se mantienen planas las mesetas de la fase*, porque esta es la situación que corresponde a resonancia. Vamos a ilustrar estos aspectos estudiando como va cambiando el atractor con la desintonía en un referencial dado.

En la Fig.1.12 representamos para  $r = 500$  y valores crecientes de la desintonía, la evolución del campo complejo (*phase portrait*) evaluada en el referencial  $\omega_{sc}$ . En estas figuras hemos representado junto al atractor el lugar de los puntos fijos (soluciones estacionarias inestables) mediante un círculo de puntos (en realidad se trata de un círculo continuo porque la solución estacionaria tiene degeneración de fase, basta con que la fase sea una constante si estamos en el referencial  $\omega_{sc}$ ). En este referencial el lugar de los puntos fijos no gira, ya que hemos quitado el corrimiento de frecuencia debido al efecto *pulling*.

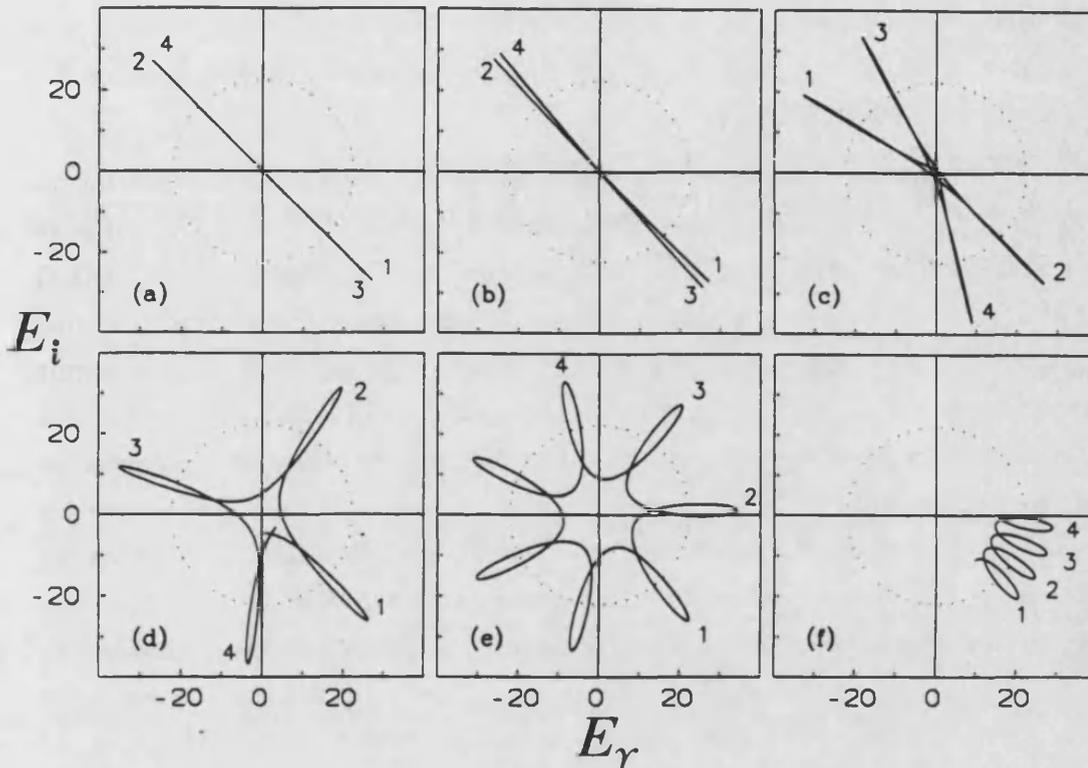


Fig.1.13. *Phase portrait* (representación de  $E_r$  frente a  $E_i$ ) del caso periódico  $b = 0.25$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r = 500$  para diversos valores de la desintonía [ $\Delta_c = 0$  (a), 0.1 (b), 1.0 (c), 5.0 (d), 8.43 (e) y 11.0 (f)] en el referencial de la solución estacionaria  $\omega_{sc}$ . La línea de puntos indica el lugar de la solución estacionaria inestable (es un continuo porque hay degeneración de fase). En resonancia la trayectoria se mueve sobre una recta, i.e., no hay acumulación de fase. A medida que la desintonía aumenta ésta gira con una velocidad angular mayor. Nótese como, fuera de resonancia, la trayectoria no está ligada a dos puntos fijos, sino a todo el lugar de ellos.

En la Fig.1.12(a) se ve que, en resonancia, el campo se mueve a lo largo de una recta, extremo que ya adelantamos en el primer apartado. Se ve, así mismo, que este atractor está ligado solamente a dos puntos fijos: podemos decir que es un atractor de dos hojas. Al incrementar la desintonía se ve cómo el comportamiento que en resonancia era periódico se convierte en cuasiperiódico (solamente se representan los primeros cuatro picos de amplitud para mayor claridad en la figura). Además, el comportamiento de la amplitud se va deformando progresivamente, al tiempo que su valor mínimo se va alejando del origen, a medida que la desintonía aumenta. Al llegar a un cierto valor de la desintonía, Fig.1.12(e), la dos frecuencias presentes en el sistema se hacen conmensurables, dando lugar a un comportamiento periódico (esto ocurre, lógicamente, para un conjunto de infinitos valores de la desintonía si bien con una periodicidad distinta en cada uno de ellos) que en este caso es un  $P_7$ , pero recuérdese que en el módulo de la amplitud, la periodicidad es  $P_1$ . Nótese, sin embargo, que a diferencia de lo que ocurría en resonancia, el campo no está ligado únicamente a dos

puntos fijos, no quedando definido, por tanto, si es de dos hojas. Finalmente, para valores grandes de la desintonía, los mínimos de la amplitud están muy alejados del origen y ésta muy deformada.

Podemos concluir, por tanto, que cuando la desintonía es no nula el atractor no está ligado a dos puntos fijos, sino a todo el lugar de puntos fijos. Esta conclusión es independiente del referencial que hemos utilizado: en los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$  sería el lugar de los puntos fijos el que giraría con una cierta frecuencia y el atractor el que permanecería quieto (sería periódico) pero la conclusión sería la misma. Si extendemos estas conclusiones a un caso caótico, vemos claramente que el carácter heteroclínico u homoclínico del comportamiento caótico no está bien definido fuera de resonancia: se han de matizar, por tanto, las conclusiones de Weiss *et al* (1988 y 1989) ya que los saltos de fase no contienen información suficiente sobre las características topológicas del atractor porque estos no informan del comportamiento del lugar de los puntos fijos. En un sentido más general, no se puede decir de una órbita periódica (cuando hay desintonía en el sistema) si su atractor tiene una hoja o dos (gira alrededor de uno o dos puntos fijos) ya que, como hemos analizado, este aspecto no está bien definido.

## **Capítulo 2: Extensión del modelo de Lorenz-Haken: diferentes relajaciones externas y relajación interna de los niveles.**

- 2.1. Modelo de láser de dos niveles con tasas de relajación diferentes para  
cada nivel y relajación interna.**
- 2.2. Soluciones estacionarias y análisis lineal de estabilidad.**
- 2.3. Comportamiento dinámico.**



A lo largo de la pasada década se ha estudiado la influencia en las propiedades dinámicas del modelo de Lorenz-Haken de la mayor parte de las aproximaciones que conducen a su formulación. En particular, se ha investigado la influencia del ensanchamiento inhomogéneo del medio material (como el ensanchamiento Doppler [Lugiato et al, 1983; Graham y Cho, 1983; Mandel, 1983; Bandy et al, 1985] o el ensanchamiento Lorentz [Mandel, 1985]), la influencia de la polarización del campo electromagnético [Puccioni et al, 1987], el uso de bombeo coherente (véanse los siguientes capítulos de esta Memoria) y, más recientemente, el uso de cavidad Fabry-Perot en lugar de cavidad en anillo [Chenkosol y Casperson, 1993]. Sin embargo, una de las aproximaciones más extendidas y menos cuestionadas en los estudios de la dinámica de los láseres es la consistente en despreciar, por una parte, la relajación interna de la población que pudiera existir entre los niveles interesados (i.e., la parte de población que al relajar de un nivel pueda ir a parar al otro nivel de la transición láser) y, por otra parte, considerar que la tasa de relajación exterior de ambos niveles tiene el mismo valor.

En este capítulo vamos a estudiar la influencia de estos factores, tanto en la estabilidad como en las características de la emisión dinámica, en el modelo de láser de dos niveles homogéneo. Esto nos llevará a extender las ecuaciones del modelo de Lorenz-Haken. Hasta donde sabemos, esta es la primera vez que se lleva a cabo esta extensión de ese modelo (de Lorenz-Haken).

### **2.1. Modelo de láser de dos niveles con relajaciones diferentes para cada nivel y relajación interna.**

En la Introducción de esta Memoria escribíamos las ecuaciones de Maxwell-Schrödinger para el láser de dos niveles [Ecs.(I.2.2)]. Los términos no hamiltonianos de las mismas fueron introducidos heurísticamente suponiendo que toda la relajación de las poblaciones de los niveles atómicos va a parar a niveles atómicos no implicados en la transición láser. Si deseamos incluir en nuestro modelo la posibilidad de que parte de la población de un nivel relaje al otro nivel, habremos de incluir en las ecuaciones de evolución de las poblaciones términos que tengan en cuenta este hecho (ver Apéndice 1). Estos términos deberán depender de la población del nivel que relaja y aparecer como un término de bombeo en la ecuación de la población del nivel al que va a parar. Haciendo esto, aquellas ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{00}}{dt} &= -(\gamma_0 + \gamma_{10})\rho_{00} + \gamma_{01}\rho_{11} + \lambda_0 - 2\alpha\text{Im}\rho_{10}, \\ \frac{d\rho_{11}}{dt} &= -(\gamma_1 + \gamma_{01})\rho_{11} + \gamma_{10}\rho_{00} + \lambda_1 + 2\alpha\text{Im}\rho_{10},\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

donde las constantes  $\gamma_i$  denotan relajación del nivel  $i$  a otro nivel distinto de los niveles 0 y 1 y  $\gamma_{ij}$  denota relajación interna del nivel  $j$  al nivel  $i$ . Ahora bien, podemos suponer que la cantidad de población que, por colisiones radiativas (o transiciones radiativas incoherentes), va a pasar del nivel inferior 1 al nivel superior 0 es despreciable ya que se trata de un suceso muy improbable y tomar por tanto  $\gamma_{01} = 0$ .

Con vistas a usos posteriores nos interesa calcular el valor de las poblaciones en ausencia de campos,  $n_i$ . Anulando las derivadas en las Ecs.(2.1.1) y tomando  $\alpha = 0$ , obtenemos inmediatamente

$$n_0 = \lambda_0/(\gamma_0 + \gamma_{10}), \quad \text{y} \quad n_1 = [\lambda_0\gamma_{10}/(\gamma_0 + \gamma_{10}) + \lambda_1]/\gamma_1. \quad (2.1.2)$$

Para obtener unas ecuaciones comparables a las del modelo de Lorenz-Haken [Ecs.(I.2.5)] hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned}E &= \alpha e^{-i\phi} \\ P &= i \frac{g}{\sigma} \rho_{01} e^{-i\phi} \\ D &= \frac{g}{\sigma} (\rho_{00} - \rho_{11}) \\ S &= \frac{g}{\sigma} (\rho_{00} + \rho_{11})\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

y obtenemos a partir de las Ecs.(2.1.1), completadas con las ecuaciones de evolución de la coherencia  $\rho_{01}$  y de la amplitud y la fase del campo contenidas en las Ecs.(I.2.2), el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\tau} &= -\sigma [1 + i\delta] E + \sigma P, \\ \frac{dP}{d\tau} &= -[1 - i\Delta] P + ED, \\ \frac{dD}{d\tau} &= -(b + c) D + \frac{g}{\sigma} (\lambda_0 - \lambda_1) - 2(EP^* + PE^*) - (a + c) S, \\ \frac{dS}{d\tau} &= -b S + \frac{g}{\sigma} (\lambda_0 + \lambda_1) - a D,\end{aligned}\quad (2.1.4)$$

donde todas las constantes tienen el mismo significado que en la Introducción salvo

$$\begin{aligned} a &= (\gamma_0 - \gamma_1)/2\gamma_L, \\ b &= (\gamma_0 + \gamma_1)/2\gamma_L, \\ c &= \gamma_{10}/\gamma_L. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Así pues, el parámetro  $a$  mide lo diferentes que son las relajaciones externas del sistema, mientras que el parámetro  $c$  mide la cantidad de relajación interna presente en el mismo. Nótese que cuando  $a = -c$  (es decir,  $\gamma_1 = \gamma_0 + 2\gamma_{10}$ ), la población total  $S$  desaparece de la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones, quedando el sistema (2.1.3) reducido a tres ecuaciones. Por otra parte, en el caso  $a = 0$ , (i.e.,  $\gamma_0 = \gamma_1$ ) lo que significa que las relajaciones externas de ambos niveles sean idénticas) la ecuación de evolución de la población total  $S$  se reduce a

$$\frac{dS}{d\tau} = -bS + \frac{g}{\sigma}(\lambda_0 + \lambda_1), \quad (2.1.6)$$

que al integrar da

$$S = \frac{g\sigma}{b}(\lambda_0 + \lambda_1), \quad (2.1.7)$$

es decir, si ambos niveles relajan igual al exterior, la población total del sistema permanece constante. Así, tanto en el caso  $a = -c$  como en el caso  $a = 0$  el sistema de ecuaciones (2.1.4) consta de sólo tres ecuaciones y es, por tanto, reducible al modelo de Lorenz: en el primer caso de forma automática [las ecuaciones son las mismas salvo que tenemos  $b' = (b+c)$  en lugar de  $b$ , compárese con las Ecs.(1.2.5)] y en el segundo, reuniendo los dos términos constantes de la ecuación de  $D$  en un único término de bombeo. Llevaremos esto a cabo con el siguiente cambio de variables. Sin embargo, fuera de estos dos casos límite, ha de ser incluida la cuarta ecuación de evolución de la población total en el sistema de ecuaciones.

En adelante nos vamos a limitar a estudiar las Ecs.(2.1.4) en condiciones de resonancia, i.e., tomaremos  $\delta = \Delta = 0$  y para obtener un conjunto de ecuaciones lo más parecido posible al modelo de Lorenz [Ecs.(1.1)], introducimos las nuevas variables

$$\begin{aligned}
 X &= 2E, \\
 Y &= 2P, \\
 Z &= r - D, \\
 W &= S - p,
 \end{aligned}
 \tag{2.1.8}$$

donde  $r$  y  $p$  son constantes que determinaremos a continuación. Haciendo uso de las Ecs.(2.1.4) obtenemos las siguientes ecuaciones de evolución para  $Z$  y  $W$

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ}{d\tau} &= (a+c)S - (b+c)Z + XY + [(a+c)p + (b+c)r - \frac{g}{\sigma}(\lambda_0 - \lambda_1)], \\
 \frac{dW}{d\tau} &= -bS + aZ + [\frac{g}{\sigma}(\lambda_0 + \lambda_1) - bp - ar],
 \end{aligned}
 \tag{2.1.9}$$

e imponiendo ahora la condición de que los corchetes en las Ecs.(2.1.9) se anulen, obtenemos las expresiones de  $r$  y  $p$

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{g}{\sigma(a+b+c)(b-a)} [b(\lambda_0 - \lambda_1) - (a+c)(\lambda_0 + \lambda_1)], \\
 p &= \frac{g}{\sigma(a+b+c)(b-a)} [(b+c)(\lambda_0 + \lambda_1) - a(\lambda_0 - \lambda_1)].
 \end{aligned}
 \tag{2.1.10}$$

Teniendo en cuenta que, con las definiciones (2.1.5), las poblaciones en ausencia de campos dadas en (2.1.1) se escriben

$$n_0 = \lambda_0 / (a + b + c) \quad \text{y} \quad n_1 = [\lambda_0 c / (a + b + c) + \lambda_1] / (b - a),
 \tag{2.1.11}$$

y que la normalización a la unidad de la traza de la matriz densidad, en régimen estacionario, impone  $n_0 + n_1 = 1$ , es inmediato obtener que

$$r = \frac{g}{\sigma}(n_0 - n_1) \quad \text{y} \quad p = \frac{g}{\sigma}
 \tag{2.1.12}$$

con lo que  $r$  mantiene el mismo significado que tenía en el modelo de Lorenz: la diferencia de poblaciones entre los niveles láser en ausencia de campos multiplicada por una constante, es decir, el parámetro de bombeo. Si ahora escribimos la ecuaciones de evolución de  $X$  e  $Y$  y eliminamos los corchetes de las de  $Z$  y  $W$ , obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{d\tau} &= -Y + (r - X)Z, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -(b + c)Z + XY + (a + c)W, \\ \frac{dW}{d\tau} &= -bW + aZ.\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

Este conjunto de ecuaciones (completado con las restricciones en los valores de los parámetros que veremos más adelante) constituye nuestro modelo de láser de dos niveles resonante con relajaciones externas diferentes para cada nivel y relajación interna del nivel superior al inferior. Constituye una extensión natural del modelo de Lorenz para láseres y se reduce a éste cuando  $a = -c$  y  $a = 0$ , como ya adelantamos antes, y cuando  $b = 0$ .

Así pues, el estudio de la influencia de la relajación interna y de la diferencia de tasas de relajación para cada nivel se reduce al estudio del papel jugado por los parámetros  $a$  y  $c$ . Estos parámetros han sido definidos de manera que contengan informaciones físicas diferentes pero, como todos ellos están normalizados a  $\gamma_{\perp}$ , sus límites de variación no son libres. En efecto, teniendo en cuenta que

$$\gamma_{\perp} = \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_{10}) + \Gamma^{\text{col}},\tag{2.1.14}$$

es fácil comprobar que los valores de  $a$ ,  $b$ , y  $c$  vienen limitados por

$$\begin{aligned}2 &> c \geq 0, \\ 1 - c/2 &\geq b > 0, \\ b &> a \geq -b.\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

Hemos de explicar por qué aparecen algunas desigualdades estrictas. El caso  $c = 2$ , que conlleva  $a = b = 0$  en virtud de las dos últimas desigualdades, es el llamado *límite radiativo* y supone que toda la relajación del sistema es la que va del nivel superior al nivel inferior. Se trata de un límite en que nuestro modelo se reduce al

modelo de Lorenz sin más que identificar  $c$  con  $b$  en las Ecs.(1.1.1). Sin embargo, desde el punto de vista físico no tiene mucho sentido ya que, según las Ecs.(2.1.11), en este caso la población del nivel inferior tiende a infinito. Esto es aplicable siempre que  $a = b$  y, por tanto, ni  $a$  ni  $c$  pueden alcanzar sus valores máximos. Así pues, el modelo de las Ecs.(2.1.13) no tiene sentido en el límite  $a = b$  (en particular en  $b = 0$ ) y no es válido en el límite radiativo. Volveremos más tarde sobre este punto.

Según los límites (2.1.15), en los estudios de estabilidad que haremos a continuación, deberíamos fijar un valor de  $c$  y variar  $a$  y  $b$  entre sus límites máximo y mínimo. Sin embargo, para poder llevar a cabo una comparación clara con el modelo de Lorenz, fijaremos el valor de  $b$  y variaremos  $a$  y  $c$ .

Debemos hacer un comentario sobre la definición que hemos adoptado para los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Es claro a partir de las Ecs.(2.1.13) de nuestro modelo, que la constante con la que relaja la variable  $Z$  no es  $b$ , sino  $b' = (b + c)$ . Podríamos haber trabajado, por tanto, con esta constante  $b'$  pero no lo hemos hecho porque perderíamos el claro significado físico de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Por otra parte, es obvio que podríamos haber dado otras definiciones que también mantuviesen un significado físico intuitivo, a las constantes de relajación (por ejemplo, haber definido  $a$  y  $b$  como diferencia y suma, respectivamente, de las relajaciones totales de los niveles, i.e., incluyendo la relajación interna). Sin embargo, hemos optado por las definiciones (2.1.5) porque parecen ser las que conllevan menos dificultades de interpretación.

## 2.2. Soluciones estacionarias y análisis lineal de estabilidad.

Anulando las derivadas de las Ecs.(2.1.10) podemos obtener las soluciones estacionarias del sistema. Obtenemos así la solución trivial, que viene dada por

$$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = \bar{W} = 0, \quad (2.2.1)$$

y la solución no trivial, que viene dada por

$$\begin{aligned} \bar{X} = \bar{Y} &= \pm \sqrt{\frac{(a+b+c)(b-a)}{b}}(r-1) \\ \bar{Z} = \frac{b}{a}\bar{W} &= (r-1) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

que se reduce a la solución estacionaria del modelo de Lorenz cuando  $a = 0$  y cuando  $a = -c$  sin más que identificar la  $b$  del modelo de Lorenz con la cantidad  $b' = (b + c)$  como ya hemos comentado repetidas veces. En cualquier caso, la influencia de  $a$  y  $c$  en la forma de la solución (2.2.2) no es cualitativamente importante, salvo por lo que respecta al valor no nulo de  $\bar{W}$ , lógicamente. Nótese que la solución (2.2.2) existirá si  $r \geq 1$ . Pasemos a estudiar la estabilidad de estas soluciones.

Para ello realizaremos un análisis lineal de estabilidad. Esto consiste en linealizar las Ecs.(2.1.13) alrededor de la solución estacionaria haciendo  $u_i = \bar{u}_i + \delta u_i$ , con  $u_i$  las componentes del vector  $\mathbf{u}(t) = \text{col}[X(t), Y(t), Z(t), W(t)]$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  el valor estacionario del vector  $\mathbf{u}$  y  $\delta \mathbf{u}$  una pequeña perturbación del mismo. Si escribimos las Ecs.(2.1.13) de esta manera y despreciamos los términos cuadráticos en las perturbaciones (perturbación pequeña), obtenemos las siguientes ecuaciones linealizadas

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{u}(t) = L \delta \mathbf{u}(t), \text{ con}$$

$$L = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ (r - \bar{Z}) & -1 & -\bar{X} & 0 \\ \bar{Y} & \bar{X} & -(b+c) & (a+c) \\ 0 & 0 & a & -b \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

Si escribimos ahora  $\delta \mathbf{u}(t) = \delta \mathbf{v} e^{\mu t}$  y lo sustituimos en la Ec.(2.2.3), obtenemos  $L \delta \mathbf{v} = \mu \delta \mathbf{v}$ . Así pues, la diagonalización de  $L$  proporciona el valor de los exponentes  $\mu$ . Hay tres posibilidades: (i), que  $\mu$  tenga parte real negativa, lo que significa que la perturbación  $\delta \mathbf{u}(t)$  se amortigua, es decir, que la solución estacionaria es estable; (ii), que siendo  $\mu$  real sea además positiva, lo que significa que la solución pierde su estabilidad pero no hay ninguna oscilación en el punto de bifurcación (aquél en que la parte real del autovalor se anula exactamente), es decir, la solución estacionaria se desestabiliza y da lugar a otra solución estacionaria (bifurcación de horca o *pitchfork*, PB); y (iii), que siendo  $\mu$  un número complejo, su parte real sea positiva, lo que significa que la solución estacionaria pierde su estabilidad apareciendo una oscilación en el punto de bifurcación (bifurcación de Hopf, HB).

Así pues, hemos de calcular los autovalores de la matriz  $L$  para determinar la estabilidad de las soluciones estacionarias. Comencemos por la estabilidad de la

solución trivial (2.2.1). Sustituyendo ésta en la expresión de L de la Ec.(2.2.3) el cálculo de autovalores  $|L - \mu I| = 0$  (con I la matriz identidad 4x4) se escribe

$$\begin{vmatrix} -(\sigma + \mu) & \sigma & 0 & 0 \\ r & -(1 + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[(b + c) + \mu] & (a + c) \\ 0 & 0 & a & -(b + \mu) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.4)$$

que proporciona una ecuación característica factorizada en dos términos

$$A \cdot B = 0 \quad (2.2.5)$$

$$A = \mu^2 + (\sigma + 1)\mu + \sigma(1 - r)$$

$$B = \mu^2 + (2b + c)\mu + (a + b + c)(b - a)$$

Nótese que, como era de esperar, (2.2.4) se reduce a un determinante 3x3 en los casos  $a = 0$  y  $a = -c$ , recuperándose entonces el resultado del modelo de Lorenz. Para buscar bifurcaciones de tipo PB hemos de encontrar las condiciones en que existe un autovalor real positivo. Es obvio que este existirá si el término independiente de la ecuación es negativo puesto que el resto de coeficientes son positivos. Como el polinomio B tiene el término independiente positivo ( $b > a$ ), la única posibilidad es que  $r > 1$  en el polinomio A. Así pues, la solución trivial se bifurca a la no trivial en  $r = 1$  a través de una PB. Por otra parte, la solución trivial no puede sufrir una HB ya que la ecuación característica no tiene autovalores complejos con parte real positiva si  $r < 1$ .

Así pues, para que el láser comience a emitir es necesario que  $r > 1$ . Ahora bien, esta condición impone una nueva limitación sobre los valores que los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  pueden alcanzar. En efecto, según la expresión (2.1.12), para que  $r > 1$  es necesario que  $n_0 > n_1$ , lo que, al tener en cuenta las expresiones (2.1.11), implica que

$$\lambda_0(b - a - c) > \lambda_1(a + b + c), \quad (2.2.6)$$

y, por tanto,

$$b > a + c \quad (2.2.7)$$

Pasemos a analizar la estabilidad de la solución no trivial (2.2.2). Llevando a cabo las mismas operaciones que hemos realizado con la solución trivial obtenemos la siguiente ecuación característica

$$\mu^4 + c_1\mu^3 + c_2\mu^2 + c_3\mu + c_4 = 0, \quad (2.2.8)$$

con

$$c_1 = \sigma + 2b + c + 1$$

$$c_2 = (a + b + c)(b - a) + (2b + c)(\sigma + 1) + \bar{X}^2$$

$$c_3 = (a + b + c)(b - a)(\sigma + 1) + (2\sigma + b)\bar{X}^2$$

$$c_4 = 2\sigma b\bar{X}^2$$

Nótese que todos los coeficientes son positivos si  $r > 1$  (que es la condición de existencia de la solución analizada). Se trata de una ecuación de orden cuatro de la que no podemos calcular sus autovalores de forma explícita, pero sí podemos determinar en qué condiciones habrá una HB (no puede haber una PB porque todos los coeficientes son positivos en el dominio de existencia de esta solución). Para ello sustituimos en la Ec.(2.2.4) un *ansatz* de la forma  $\mu = i\Omega$ . El punto en que esto se verifica es el punto de HB ya que en él existe una solución oscilante de amplitud nula [Ioos y Joseph, 1990]. Haciendo la sustitución obtenemos la condición para que el *ansatz* sea compatible con (2.2.8),

$$H = (c_1c_2 - c_3)c_3 - c_1^2c_4 = 0. \quad (2.2.9)$$

Es fácil ver que cuando  $H > 0$ , la parte real del autovalor pasará de ser nula a ser positiva (es decir, crecerá la amplitud de la oscilación) y viceversa. En realidad no hemos hecho otra cosa que aplicar el conocido criterio de Hurwitz para la estabilidad de soluciones [véase, por ejemplo, Narducci y Abraham (1988)].

Sustituyendo en la Ec.(2.2.9) los valores de los coeficientes  $c_i$  obtenemos que ocurrirá una bifurcación de Hopf para un valor del bombeo  $r = r_{HB}$ , con

$$\alpha(r_{HB} - 1)^2 + \beta(r_{HB} - 1) + \gamma = 0, \quad (2.2.10)$$

$$\alpha = M^2(2\sigma + b)(\sigma_{HB} - \sigma),$$

$$\beta = M\{N(\sigma_{HB} - \sigma)(\sigma + 1) + (2b + c)(2\sigma + b) \cdot$$

$$\cdot [N + (\sigma + \sigma_{HB} + b)(\sigma + 1)] - 2\sigma b(\sigma + \sigma_{HB} + b)^2\},$$

$$\gamma = N(2b + c)(\sigma + 1)[N + (\sigma + \sigma_{HB} + b)(\sigma + 1)]$$

siendo las cantidades auxiliares  $M$ ,  $N$  y  $\sigma_{HB}$

$$N = (a + b + c)(b - a)$$

$$M = N/b$$

$$\sigma_{HB} = b + c + 1.$$

Es inmediato comprobar que  $\gamma$  es positivo y resulta fácil, aunque tedioso, comprobar que el coeficiente  $\beta$  también lo es. En consecuencia, para que  $r_{HB}$  exista y sea positiva y mayor que la unidad hemos de exigir que  $\alpha \leq 0$  y en ese caso sólo una de las dos raíces de la Ec.(2.2.10) será positiva. Así pues existirá una HB siempre que se verifique

$$\sigma > \sigma_{HB} \quad (2.2.11)$$

y el punto de bifurcación se encuentra en  $r = r_{HB}$ : si  $r < r_{HB}$ , la solución estacionaria es estable, e inestable si  $r > r_{HB}$ .

La condición (2.2.11) es la condición de mala cavidad para nuestro modelo. Nótese que el valor de  $\sigma_{HB}$  no depende del parámetro  $a$  (que, recordemos, mide la diferencia entre los valores de las relajaciones de los niveles superior e inferior) y que sí depende del parámetro  $c$  (relajación interna) a través de la cantidad  $b' = b + c$ , que es la

tasa de relajación de la variable  $Z$ . Por tanto, la condición de mala cavidad no cambia respecto a la del modelo de Lorenz.

La Ec.(2.2.10) es demasiado complicada como para extraer consecuencias analíticas claras, aparte del valor de  $\sigma_{HB}$ . Vamos a estudiarla, por tanto, numéricamente para determinar el efecto de los parámetros  $a$  y  $c$  en el bombeo necesario para obtener inestabilidades. Para mayor comodidad repetimos aquí las restricciones que hemos encontrado sobre los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$

$$b - a > c$$

$$c \leq 2(1 - b) \quad (2.2.12)$$

$$b > a \geq -b$$

con  $b$  y  $c$  positivos.

En la Fig.2.1 representamos el resultado del análisis lineal de estabilidad [Ec.(2.2.10)] para  $b = 0.25$ , diversos valores posibles de  $a$  y  $c = 0$  [en este caso,  $c = 0$ , la Ec.(2.2.10) es insensible al signo de  $a$ , o dicho en términos más físicos, cuando no hay relajación interna es indiferente cual de los dos niveles relaja más]. Nótese como el papel jugado por el parámetro  $a$  es, claramente, el de estabilizar el láser aumentando el valor del bombeo necesario para alcanzar el segundo umbral.

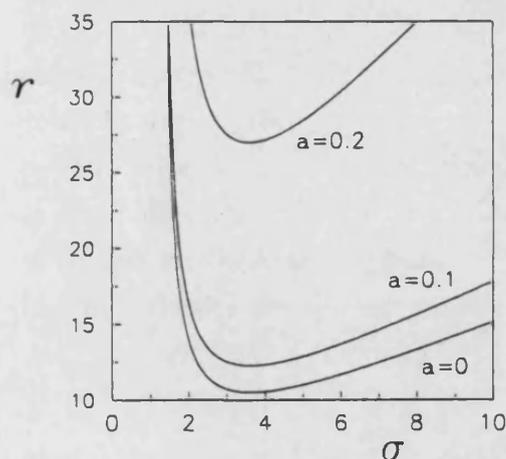


Fig.2.1. Dependencia del umbral de inestabilidades  $r_{HB}$  con las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  para diversos valores del parámetro  $a$ , y  $c = 0$ . Nótese cómo este parámetro estabiliza el sistema al aumentar el valor de  $r_{HB}$ .

En la Fig.2.2 representamos los mismos umbrales pero para un valor no nulo del parámetro de relajación interna  $c$ . En la Fig.2.2(a),  $c = 0.1$  y  $b = 0.25$  y en este caso, el segundo umbral ya no es insensible al signo de  $a$ , aunque los umbrales siguen aumentando a medida que  $a$  se hace diferente de cero. En la Fig.2.2(b) hemos tomado

$b = c = 0.01$ . Nótese cómo ahora existen valores de  $a$  para los que el umbral es rebajado respecto al de  $a = 0$  (que, recordemos, es el del modelo de Lorenz). Así pues, dependiendo del valor que tome el parámetro  $c$ ,  $a$  influirá de una manera o de otra.

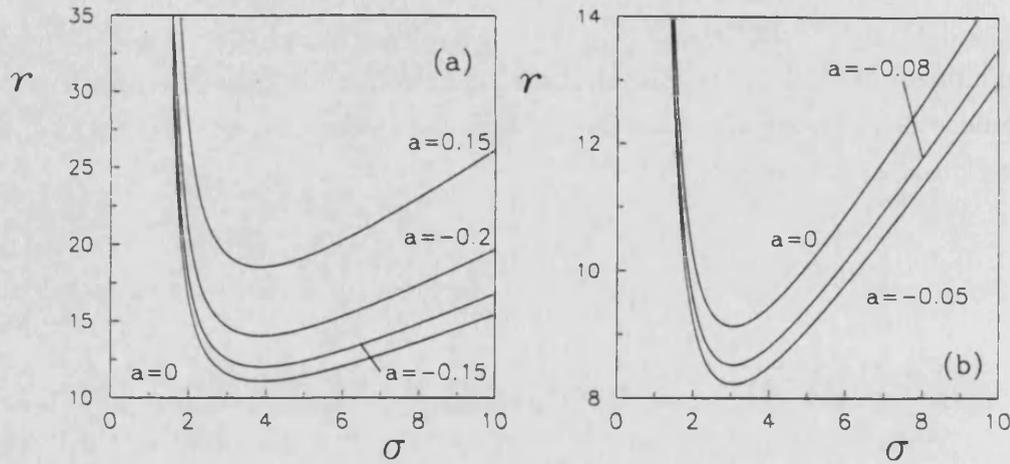


Fig.2.2. Dependencia de los umbrales con  $\sigma$  para  $b = 0.25$  y  $c = 0.1$  (a) y para  $b = c = 0.01$  (b). Al ser  $c \neq 0$ , el signo de  $a$  ya no es irrelevante. En la fig.(a) los umbrales aumentan respecto al de Lorenz ( $a = 0$ ) siempre que  $a$  sea no nula. En la fig.(b) existen valores de  $a$  que disminuyen el umbral de Lorenz.

Para determinar esta influencia más claramente, vamos a representar la dependencia de los umbrales con los parámetros  $a$  y  $c$  para un valor dado de las pérdidas de la cavidad  $\sigma$ .

En la Fig.2.3 representamos, para un valor de  $\sigma = 4$  la dependencia del segundo umbral con  $a$  para diversos valores de la relajación interna  $c$ . En la Fig.2.3(a) hemos tomado  $b = 0.25$  y las diferentes curvas corresponden a valores crecientes de  $c$  según vamos de derecha a izquierda (ver pie de figura). En la Fig.2.3(b) hemos tomado  $b = 0.01$ . Hemos tenido en cuenta la restricción  $a < b - c$ , ya que fuera de estos valores el modelo carece de sentido físico para un láser. Resulta ahora claro que el valor mínimo del umbral, que se va desplazando a valores menores de  $a$  a medida que aumenta  $c$ , siempre son mayores que el correspondiente a  $a = 0$  cuando tenemos valores medios (y ocurre lo mismo para valores altos) de  $b$ . Sin embargo, para valores pequeños de  $b$  el valor mínimo del umbral disminuye a medida que hacemos  $a$  más negativa. Así, podemos rebajar el umbral de Lorenz si tomamos  $a = -b \rightarrow 0$ .

Físicamente todo esto tiene un significado claro. El láser de dos niveles es más estable si el nivel superior tiene una relajación exterior mayor que la del nivel inferior independientemente de que haya o no relajación interna. Si, por el contrario, es el nivel inferior el que mayor tasa de relajación externa tiene, el láser puede hacerse notablemente más inestable (reducir el valor del segundo umbral) si existe relajación interna.

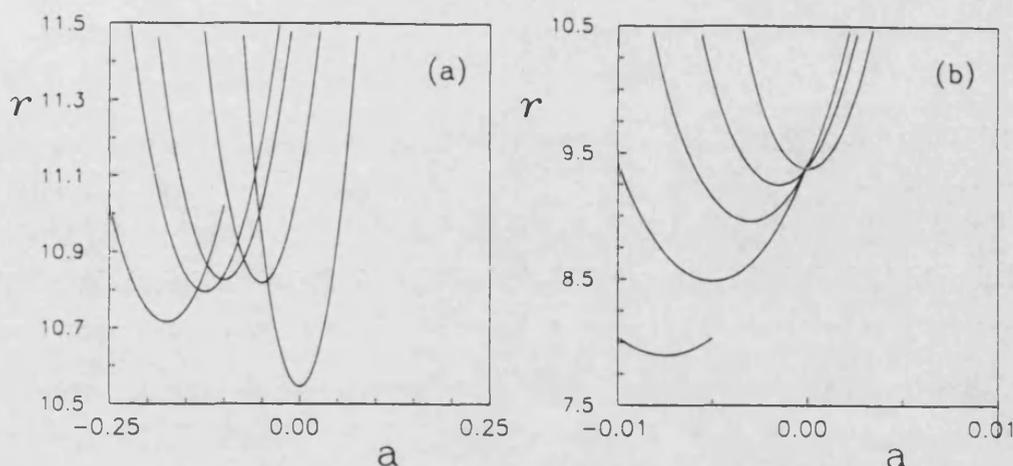


Fig.2.3. Dependencia de los umbrales con  $a$  para  $\sigma = 4$  y  $b = 0.25$  (a) y para  $b = 0.01$  (b). Las diferentes curvas corresponden a valores crecientes de  $c$ . En la fig.(a), de derecha a izquierda,  $c = 0, 0.1, 0.2, 0.25$  y  $0.35$ , y en la fig.(b),  $c = 0, 0.003, 0.006, 0.01$  y  $0.015$ . Recuérdese que el modelo sólo tiene sentido físico si  $a < b - c$ . Se aprecia que el mínimo del umbral disminuye con  $a$  en el caso de  $b$  pequeña, y aumenta en el caso de  $b$  intermedia. Se trata de un resultado general.

Podemos determinar cuál es el valor mínimo del segundo umbral que nuestro modelo puede alcanzar. Los resultados anteriores nos indican que la situación más favorable para obtener umbrales bajos corresponde a  $b = -a$  y  $b \rightarrow 0$ . Sustituyendo este valor en la Ec.(2.2.10), y quedándonos a orden cuadrado en las constantes  $a$  y  $b$ , obtenemos

$$r_{HB} = \frac{(\sigma + 1)}{2(\sigma - 1)} \left[ 1 + \frac{b}{c} \right]. \quad (2.2.13)$$

Es evidente que esta expresión será mínima cuando  $c$  tienda a su valor máximo que, según (2.2.12) es  $2b$ . Derivando ahora respecto a las pérdidas de la cavidad obtenemos que el valor mínimo de  $r_{HB}$  está en  $\sigma = 3$  y vale  $(r_{HB})_{\min} = 7$ .

Así pues, la situación más favorable para obtener un  $r_{HB}$  bajo consiste en que el nivel superior no relaje al exterior ( $b = -a$ ) y que relaje al nivel inferior con una tasa ligeramente superior que la tasa con la que el nivel inferior relaja ( $c \rightarrow 2b$ ), esto unido a que el dipolo tenga una relajación mucho mayor que éstas (ya que  $b$  y  $c$  han de ser muy pequeñas). Nótese, sin embargo, que este valor mínimo es muy sensible al valor relativo entre  $b$  y  $c$ :  $c$  ha de ser algo mayor que  $b$  pero si es mucho mayor, (2.2.13) aumenta rápidamente). Así pues, en las condiciones más favorables, puede rebajarse el segundo umbral de Lorenz de 9 a 7.

### 2.3. Comportamiento dinámico.

Hemos comprobado, en un caso particular, la influencia del parámetro  $a$  sobre el comportamiento dinámico de nuestro modelo estudiando cómo afecta a la ruta de bifurcaciones (hemos elegido este caso porque en el Capítulo 4 resulta de interés). Nuestros resultados se encuentran reunidos en la Figs.2.4 donde hemos tomado  $c = 0$  y hemos representado las diferentes zonas de comportamiento dinámico en el plano  $\langle r, a \rangle$ .

Como ya hemos comentado el papel de  $a$  es aumentar el valor del umbral de inestabilidades, y encontramos que aumenta también el valor necesario del bombeo para alcanzar las regiones de comportamiento periódico (en la figura SP1 denota atractor periódico simétrico de periodo unidad, AP1 denota atractor periódico asimétrico de periodo unidad, IPS denota ruta inversa de doblamiento de periodos, y CH denota zona caótica). Pero aparte de estos cambios (que son pequeños para valores moderados de  $a$ ) en la extensión de los dominios dinámicos no parece que los nuevos parámetros introduzcan ninguna característica nueva en el comportamiento dinámico. Por ejemplo, hemos realizado el mapa de intensidades del comportamiento caótico en numerosos casos y siempre hemos encontrado resultados comparables a los del modelo de Lorenz, lo que denota que la estructura del atractor del sistema permanece básicamente inalterada.

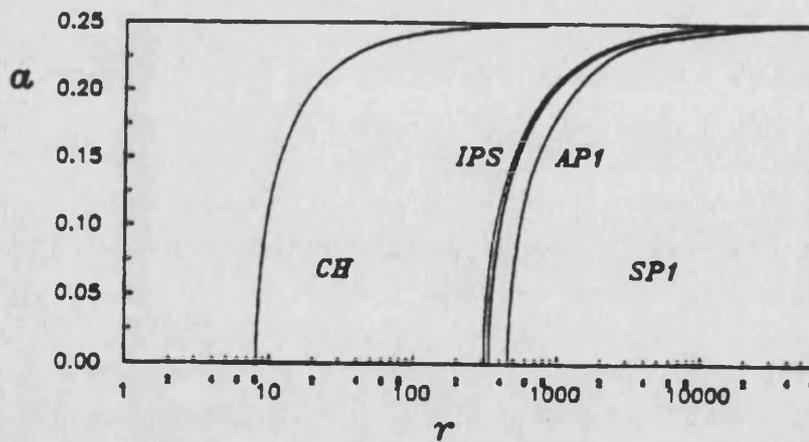


Fig.2.4. Extensión de los dominios caótico (CH), periódico P1 simétrico (SP1), periódico P1 asimétrico (AP1) y de la ruta de Feigenbaum (IPS) en función del parámetro  $a$  para  $b = 0.25$  y  $c = 0$  (a) y para  $b = 0.22$  y  $c = 0.03$  (b).

Para finalizar nuestro estudio del comportamiento dinámico de las Ecs.(2.1.13), en la Fig.2.5 mostramos varias proyecciones del atractor correspondientes a diferentes regímenes de emisión periódicos y caóticos. Nótese cómo las proyecciones en los planos  $\langle X, Y \rangle$  y  $\langle X, Z \rangle$  tienen el mismo aspecto que las correspondientes al modelo de

Lorenz. Parece, pues, que salvo alguna influencia cuantitativa respecto a la extensión de las diferentes regiones dinámicas, el efecto de  $a$  en el régimen dinámico se limita a la introducción de una cuarta variable,  $W$ .

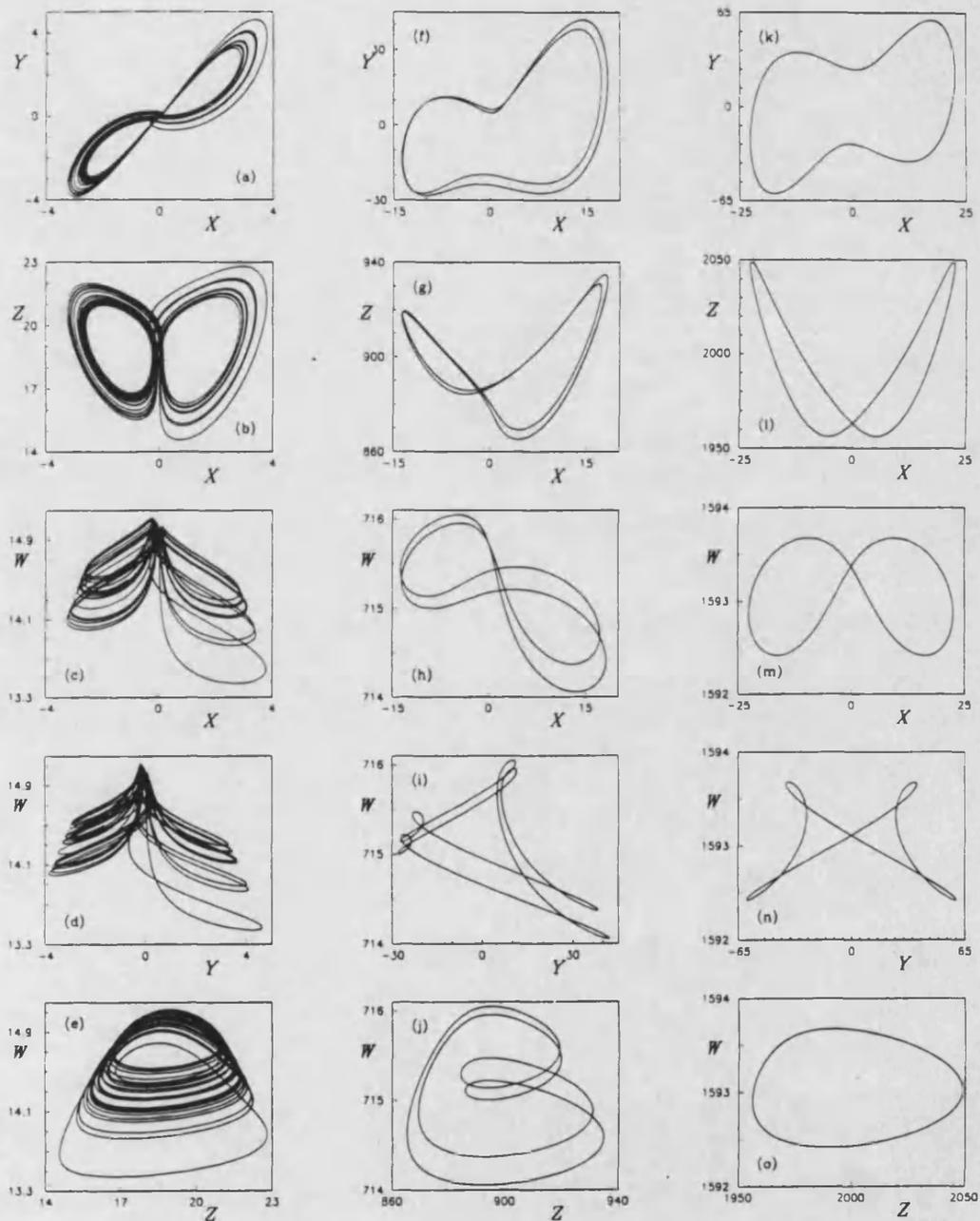


Fig.2.5. Diferentes proyecciones del atractor para el caso  $\sigma = 3$ ,  $b = 0.25$ ,  $a = 0.2$ ,  $c = 0$ , y  $r = 20$  (a)-(e),  $r = 900$  (f)-(j) y  $r = 1000$  (k)-(o). Nótese que las proyecciones en los planos  $\langle X, Y \rangle$  y  $\langle X, Z \rangle$  son como las del modelo de Lorenz.



***PARTE II: Comportamiento dinámico de los láseres de gas bombeados ópticamente y su relación con el modelo de Lorenz-Haken.***



## **Capítulo 3: El problema de la observación experimental de comportamiento tipo Lorenz.**

**3.1. El láser de  $\text{NH}_3$ . ¿Por qué el láser de  $\text{NH}_3$ ?**

**3.2. Primeros resultados experimentales.**

**3.3. Primeras reacciones.**

**3.4. Estudios teóricos sobre la influencia del bombeo coherente en el comportamiento dinámico de los láseres.**

**3.5. Evidencia experimental de comportamiento tipo Lorenz.**

**3.6. Hacia una interpretación de los resultados experimentales.**





Como ya ha sido señalado en la Introducción de esta Memoria, el problema de la observación experimental del modelo de Lorenz en sistemas láser, y su consiguiente interpretación teórica, arranca en 1984. Se trata, por tanto, de un problema con una tradición de casi una década, tiempo a lo largo del cual ha ido apareciendo una gran cantidad de publicaciones dedicadas a él.

El ánimo del presente capítulo es hacer una revisión (cronológica en la medida de lo posible) de toda esta bibliografía con un doble objetivo: revisar críticamente, por una parte, los trabajos publicados hasta la fecha, con el consiguiente resultado de situar claramente dónde se enmarcan nuestras contribuciones originales y por otra parte, exponer ordenadamente los resultados experimentales acumulados a lo largo de estos años, tarea necesaria para apreciar la bondad de los resultados que expondremos en los dos capítulos siguientes.

Así pues, este tercer capítulo no contiene aportaciones originales nuestras aunque sí es, hasta donde sabemos, la primera revisión crítica de la bibliografía generada por este problema.

### 3.1. El láser de $\text{NH}_3$ . ¿Por qué el láser de $\text{NH}_3$ ?

Ya hemos comentado en la Introducción que, históricamente, las inestabilidades temporales asociadas a un láser monomodo unidireccional, o de Lorenz-Haken, son las primeras en ser claramente identificadas desde el punto de vista teórico. Hemos visto también que son necesarias dos condiciones para que estas inestabilidades aparezcan: la condición de mala cavidad y la de alto bombeo o ganancia (ecuación I.2.9). Estas condiciones son tan severas que se llegó a sugerir que la inestabilidad de Lorenz existía en el papel pero no tenía correspondencia experimental [Casperson, 1983]. No obstante, en 1984, C.O.Weiss y W.Klische sugerían que los láseres de amoníaco de infrarrojo lejano (FIR) podrían ser buenos candidatos para presentar la mencionada inestabilidad [Weiss y Klische, 1984b]. Veámoslo detalladamente.

Los láseres FIR bombeados ópticamente son láseres moleculares de gas ( $\text{NH}_3$ ,  $\text{COOH}$ ,  $\text{CH}_2\text{F}_2$ ,  $\text{HF}$ ,  $\text{CH}_3\text{OH}$ ,  $\text{CH}_3\text{F}$ , etc) que son bombeados con el haz proveniente de otro láser de frecuencia adecuada, (típicamente  $\text{CO}_2$  ó  $\text{N}_2\text{O}$ ) a un estado vibracional excitado, produciéndose inversión de población en una transición rotacional y, como consecuencia, emisión estimulada en el rango de longitudes de onda que va de las  $30\mu\text{m}$  a las  $1000\mu\text{m}$ . (De hecho es posible obtener emisión láser sin necesidad de crear inversión de población, gracias a los procesos Raman. Se trata de un tipo de láser

bombeado ópticamente, llamado láser Raman, que presenta un comportamiento peculiar. No lo trataremos aquí pero, para la dinámica de los láseres Raman, puede consultarse [Harrison y Biswas, 1985; Harrison *et al*, 1989; Lu y Harrison, 1990 y 1991], donde se estudia detalladamente). Así pues, los láseres de gas bombeados ópticamente (LGBO en adelante) envuelven un mínimo de tres niveles energéticos del medio material (más niveles, dependiendo del número cuántico  $J$ , si se tiene en cuenta la degeneración magnética de cada uno de ellos, ver más abajo) en los procesos de interacción con la radiación de los haces de bombeo y generado (Fig.3.1.a).

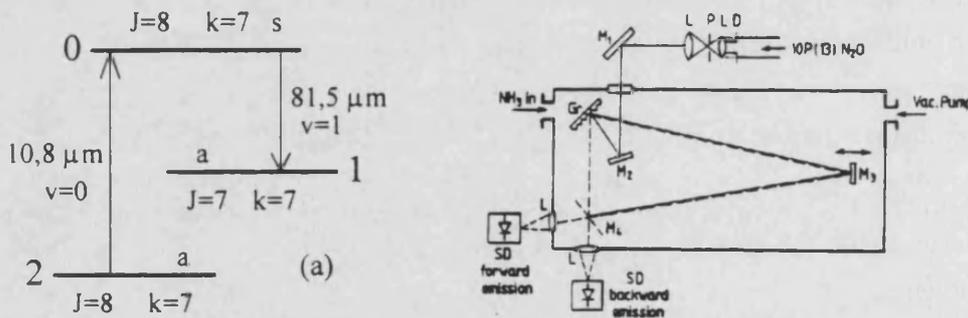


Fig.3.1. (a) Esquema de niveles de la transición rotacional aR(7,7) de la molécula de  $^{14}\text{NH}_3$ . La molécula es bombeada por el haz emitido por la línea 10P(13) de un láser de  $\text{N}_2\text{O}$ . (b) Esquema del dispositivo experimental. Desintonizando el haz de bombeo respecto a la transición 0-2, se consigue emisión unidireccional.

Para que el modelo de Lorenz-Haken pueda ser aplicable a estos láseres deben de verificar, en primer lugar, el emitir una onda viajera monomodo. La emisión monomodo resulta fácil dado lo estrecho de las líneas de ganancia para las largas longitudes de onda propias del FIR. En cuanto a conseguir que funcione con onda viajera, esto puede hacerse con una cavidad en forma de anillo (Fig.3.1.b). Un láser con cavidad en anillo, en régimen estacionario, puede oscilar unidireccionalmente de forma espontánea debido a que la competición entre las ondas co- y contrapropagante puede hacer que sólo una de ellas tenga ganancia suficiente. En el caso de los láseres bombeados ópticamente apreciablemente afectados por efecto Doppler, si el régimen de emisión es dinámico, ambas pueden tener ganancia suficiente cuando la intensidad de la otra es próxima a cero, obteniéndose entonces emisión dinámica bidireccional [Klische y Weiss, 1985; Abraham y Weiss, 1988]. Sin embargo, si el bombeo está suficientemente desintonizado respecto a la transición de bombeo, únicamente uno de los haces (el contrapropagante si la frecuencia del bombeo es mayor que la de la transición y la desintonía de la cavidad es negativa, y viceversa) puede resonar con las moléculas en las que se ha creado inversión (es decir, aquellas moléculas con velocidades adecuadas para ser resonantes con el bombeo) [Heppner y Weiss, 1978], consiguiéndose de esta forma emisión

unidireccional pura. Este mecanismo permite de hecho obtener emisión unidireccional incluso utilizando una cavidad Fabry-Perot [Hogenboom *et al*, 1985].

Otros requisitos del modelo de Lorenz-Haken no son tan fácilmente verificados por los láseres bombeados ópticamente: el ensanchamiento homogéneo del medio material y el bombeo incoherente. Respecto al requisito de ensanchamiento homogéneo, el ensanchamiento Doppler del medio material suele ser mayor que la anchura homogénea (representada por las constantes  $\gamma_{||}$  y  $\gamma_{\perp}$ ). A este hecho los autores oponían la opinión de que el mismo bombeo óptico limita la anchura Doppler, pues las moléculas resonantes tienen poca dispersión en velocidades al ser excesivamente no resonantes la moléculas con velocidades fuera de un cierto intervalo. En cuanto al hecho de que el mecanismo experimental de bombeo no fuera incoherente (hecho en el que se concentra la mayor parte de la polémica suscitada por estos experimentos), Weiss y Klische argüían que los efectos coherentes podían ser limitados por el valor de la presión del gas. Como la naturaleza coherente del bombeo se manifiesta a través del desdoblamiento del nivel común a las transiciones de bombeo y generada debido al efecto AC-Stark (ensanchamiento AC-Stark), un aumento de la presión del gas puede hacer que el ensanchamiento homogéneo sea mayor que el AC-Stark (ya que un aumento en la presión se traduce en un aumento de la anchura homogénea debido al aumento de la tasa de colisiones entre moléculas). Así pues, la presión ha de ser superior a un mínimo por debajo del cuál el ensanchamiento AC-Stark es mayor que la anchura homogénea.

Todos estos hechos eran bien conocidos antes del trabajo de Weiss y Klische y no son los LGBO-FIR los únicos láseres que verifican los requisitos indicados más arriba. Lo que hace a estos láseres candidatos ideales para observar comportamiento tipo Lorenz es que pueden verificar las condiciones de mala cavidad y alta ganancia. En efecto, la mayor fuente de ensanchamiento homogéneo en estos láseres no radica en la emisión espontánea (anchura natural), que es muy pequeña para estas frecuencias, sino que tiene su origen en las colisiones entre moléculas. Así, para valores suficientemente pequeños de la presión del gas, el valor de la anchura homogénea es lo suficientemente pequeña como para que la condición de mala cavidad pueda verificarse sin suponer valores excesivos de las pérdidas en el resonador (en los experimentos, las pérdidas están alrededor del 10%). El rango de presiones adecuado se encuentra alrededor de los 10 Pa. Además, los LGBO-FIR son láseres de ganancia alta, capaces de alcanzar valores de la misma de hasta 20 veces por encima del umbral de emisión según las primeras estimaciones de Weiss y Klische. Así pues, para valores de la presión lo suficientemente altos para que el efecto AC-Stark debido al bombeo óptico no sea mayor que la anchura

homogénea, y lo suficientemente bajos para verificar la condición de mala cavidad con pérdidas tolerables, se pueden dar las condiciones necesarias para observar comportamiento tipo Lorenz.

El gas elegido para los experimentos fue el amoníaco ya que el conocimiento espectroscópico de la molécula  $\text{NH}_3$  es grande (se conoce el valor de las relajaciones aceptablemente bien) y por ser de los LGBO-FIR de mayor ganancia. Conviene señalar ya, adelantándonos al desarrollo de los hechos, que dentro de la molécula de amoníaco han sido tres las transiciones estudiadas en detalle:

(a), la transición rotacional aR(7,7) del  $^{14}\text{NH}_3$ , de  $81.5 \mu\text{m}$ , bombeada vía la transición vibracional  $\nu_2$ -aQ(8,7) por la línea 10P(13) del láser de  $\text{N}_2\text{O}$  [Weiss *et al*, 1985; Weiss y Brock, 1986; Sassi *et al*, 1987; Weiss *et al*, 1989; Hübner *et al*, 1989; Li *et al*, 1990; Tang *et al*, 1991a; Hübner *et al*, 1992; Tang *et al*, 1992];

(b), la transición rotacional aR(4,4) del  $^{14}\text{NH}_3$ , de  $153 \mu\text{m}$ , bombeada vía la transición vibracional  $\nu_2$ -aQ(5,4) por la línea 10R(18) del láser de  $\text{CO}_2$  [Weiss *et al*, 1988; Wu *et al*, 1989; Li *et al*, 1990; Tang *et al*, 1991b];

(c), la transición rotacional aR(2,0) del  $^{14}\text{NH}_3$ , de  $374 \mu\text{m}$ , bombeada vía la transición vibracional  $\nu_2$ -aR(2,0) por la línea 10R(42) del láser de  $\text{CO}_2$  [Weiss, 1985; Klische y Weiss, 1985; Hogenboom *et al*, 1985; Sassi *et al*, 1987].

Entre las dos primeras transiciones, esto es las de  $81.5$  y  $153 \mu\text{m}$ , no hay diferencias relevantes salvo que la segunda de ellas tiene una mayor ganancia y que puede ser más adecuada para llevar a cabo medidas heterodinas por tener mayor longitud de onda [Wu *et al*, 1989]. Ahora bien, mientras estas dos transiciones tienen un valor no nulo del número cuántico rotacional  $K$  (lo que implica que los niveles energéticos implicados son dobletes de inversión), la transición de  $374 \mu\text{m}$  tiene  $K = 0$  (existiendo, por tanto, sólo uno de los niveles del doblete) [Weiss y Vilaseca, 1991]. Este hecho se traduce, en que ambos casos tengan *valores diferentes de las relajaciones* (ver más abajo). Por otra parte, es sabido que *mientras en los dos primeros casos los campos de bombeo y generado tienen polarizaciones lineales y ortogonales entre si, en la transición de  $374 \mu\text{m}$ , las polarizaciones son lineales y paralelas entre si* (no se conoce el origen de esta diferencia). Estos hechos serán tenidos en cuenta explícitamente más adelante pero nótese ya que estos factores no están contenidos en las hipótesis del modelo de Lorenz-Haken.

### 3.2. Primeros resultados experimentales.

Las primeras observaciones de comportamiento autopulsante en LGBO-FIR se llevan a cabo en fecha tan temprana como 1980 [Lawandy y Koepf, 1980], si bien no fue claramente identificado hasta más tarde. El 1984, Lefebvre *et al* anunciaban obtención de inestabilidades en un LGBO-FIR con modulación de bombeo y en este mismo año, Weiss y Klische obtienen comportamiento dinámico con un láser de  $\text{CH}_2\text{F}_2$  en un trabajo previo a su proposición del láser de amoníaco para observar comportamiento tipo Lorenz [Weiss y Klische, 1984a]. En 1985, Lawandy llevaba a cabo un estudio experimental de la influencia del ensanchamiento Doppler en la dinámica de este tipo de láseres utilizando diferentes gases. Este último trabajo es relevante porque hace particular hincapié en la importancia del ensanchamiento AC-Stark debido al bombeo óptico y es uno de los primeros autores en señalar el importante papel que este factor debe jugar en la formulación de modelos matemáticos adecuados para estos sistemas. También en 1985 Weiss estudia por primera vez la dinámica de un láser de  $\text{NH}_3$ . Todos estos trabajos son de un interés principalmente histórico (primeras observaciones de inestabilidades) pero no son excesivamente relevantes desde un punto de vista teórico por dos razones: por una parte los dispositivos experimentales eran excesivamente complicados para ser descritos razonablemente por un modelo matemático (por ejemplo, se utilizaban cavidades Fabry-Perot, con el consiguiente funcionamiento en onda estacionaria) y por otra parte, las medidas llevadas a cabo no eran suficientes (no se hacían registros de la intensidad, por ejemplo) para comprobar adecuadamente las predicciones de esos posibles modelos.

No obstante, antes de pasar a describir los resultados experimentales de Weiss y colaboradores, conviene detenerse un momento en un trabajo particularmente interesante: [Abraham *et al*, 1985]. En este trabajo se lleva a cabo un estudio tanto experimental como teórico de un láser de COOH bombeado bidireccionalmente en el interior de una cavidad Fabry-Perot. Como el bombeo estaba desintonizado y el medio ensanchado inhomogéneamente por el efecto Doppler, pudieron hacer un sencillo modelo en el que se consideraban únicamente dos grupos de moléculas con velocidades distintas de manera que cada uno de ellos era resonante con una de las ondas de bombeo. Lo relevante del caso es que un modelo tan sencillo (no tenía en cuenta los hechos de onda estacionaria, bombeo óptico ni, de hecho, ensanchamiento Doppler) reproducía razonablemente bien los resultados experimentales. Constituye este trabajo, en un sentido limitado, el *primer antecedente de reproducción de resultados*

*experimentales de LGBO-FIR a pesar de no tener en cuenta el bombeo óptico, hecho que se repetirá con los resultados experimentales del amoníaco.*

Los primeros resultados experimentales relevantes desde el punto de vista del programa diseñado en [Weiss y Klische, 1984b] que comentamos en el apartado anterior, son llevados a cabo con la transición de  $81.5\mu\text{m}$  del  $\text{NH}_3$  [Weiss *et al.*, 1985]. En este trabajo se obtienen dos resultados típicos del modelo de Lorenz. Se realizaron observaciones para diversos valores de la presión, no obteniéndose comportamiento dinámico cuando la presión era alta (25 Pa, lo que supone un valor bajo del cociente entre las pérdidas de la cavidad y la anchura homogénea, o sea,  $\kappa$ ) y sí cuando era baja (13 Pa,  $\kappa$  grande). Concluían así los autores la existencia de una condición de mala cavidad. Por otra parte, el tipo de comportamiento dinámico observado era el siguiente: para valores grandes de la desintonía de la cavidad con la transición FIR el comportamiento era periódico y se observaba una secuencia de doblamiento de periodos a medida que la desintonía decrecía, finalizando en caos cuando la desintonía era nula (Fig.3.2). Ya vimos en el primer capítulo que este comportamiento es propio del modelo de Lorenz incluyendo desintonía [Zeghlache y Mandel, 1985]. Desafortunadamente, todas las medidas se llevaron a cabo para un valor fijo del bombeo y además, no se incluye ninguna secuencia temporal de la intensidad del campo, resultando así insuficientes los resultados para hacer una comparación adecuada con las predicciones teóricas. Al final del trabajo los autores anuncian la intención de estudiar la línea de  $374\mu\text{m}$  del  $^{15}\text{NH}_3$  porque su mayor ganancia permitiría una mayor capacidad de variación de bombeo.

Esto es, efectivamente, llevado a cabo en las dos siguientes publicaciones. En la primera de ellas [Klische y Weiss, 1985] se concentraron, principalmente, en las inestabilidades presentadas por el sistema operando en condiciones de emisión bimodo, i.e., con bombeo resonante. No nos detendremos en la descripción de estos resultados que no son relevantes para nuestros propósitos. Al final del trabajo también aportan resultados preliminares del comportamiento unidireccional. Los datos aportados son pocos: el cociente entre los valores de la intensidad del bombeo en los umbrales de comportamiento dinámico y emisión para diversas presiones (es decir, para diversas  $\kappa$ ), con valores compatibles con el modelo de Lorenz, y el dato de que el comportamiento dinámico exhibido más allá del segundo umbral era periódico, no pudiéndose observar caos. En principio, este hecho está en contradicción con el modelo de Lorenz, pero ese mismo año aparecía un trabajo que permitía esta posibilidad [Narducci *et al.*, 1985], trabajo que comentaremos en el siguiente apartado.

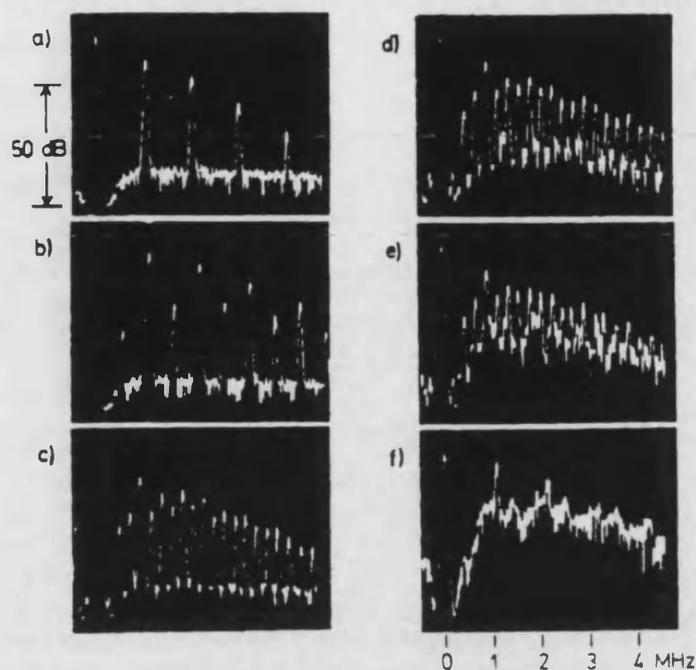


Fig.3.2. Secuencia de bifurcaciones con aparición de subarmónicos que finaliza en caos (ruta de Feigenbaum) observada en la línea de  $81.5\mu\text{m}$  del láser de amoníaco a medida que el resonador es progresivamente sintonizado. [Tomado de Weiss *et al*, (1985)].

Un estudio más detallado del caso monomodo, llevado a cabo para un amplio rango de presiones es el llevado a cabo en el siguiente trabajo, aparecido poco después del anterior [Hogenboom *et al*, 1985]. Aunque utilizaron una cavidad lineal, la emisión era unidireccional en virtud de lo desintonizado del bombeo. En esta ocasión encontraron un comportamiento dinámico más rico: una ruta de Feigenbaum que finalizaba en caos para bombeos crecientes. Arguyeron que se trataba de comportamiento tipo Lorenz amparándose en los resultados de Narducci *et al* a que nos hemos referido. Así mismo, volvieron a aportar datos relativos al valor entre el cociente de umbrales que parecían estar de acuerdo con las predicciones teóricas.

### 3.3. Primeras reacciones.

Por lo visto hasta ahora, a finales de 1985 parecía claro que el comportamiento predicho por el modelo de Lorenz había sido finalmente encontrado, al menos desde el punto de vista de los experimentadores. La opinión de estos se apoyaba en un artículo aparecido ese mismo año [Narducci *et al*, 1985], en el que se estudiaba teóricamente el modelo de Lorenz para valores pequeños de  $b$  (recordemos que  $b$  es el cociente entre la tasa de decaimiento de las poblaciones y la anchura homogénea). El principal resultado de este trabajo se muestra en la Fig.3.3, en la que se aprecia que para valores de  $b < 1/6$  el modelo de Lorenz exhibe comportamiento periódico para valores del bombeo inferiores al segundo umbral. Esto significa que para acceder a ese comportamiento, el

sistema no ha de ver incrementado su bombeo paulatinamente (en ese caso el sistema es, por definición, estable hasta el segundo umbral) sino bruscamente (*hard mode excitation*), de manera que acceda a la cuenca de atracción de las soluciones periódicas que existen por debajo del segundo umbral. Narducci y colaboradores ya señalaban en el trabajo la posibilidad de que estos hechos explicasen los recientes resultados experimentales de Weiss y colaboradores con la línea de  $374\mu\text{m}$ . Así pues, la tendencia inicial era intentar explicar los experimentos en base al modelo de Lorenz-Haken, y no considerando el efecto del bombeo coherente, siendo generalmente admitido el argumento de los experimentadores sobre la ausencia de estos efectos.

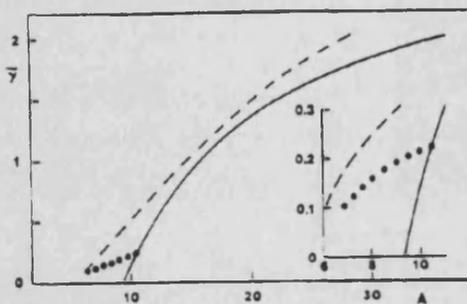


Fig.3.3. Diagrama en el plano relajación de la diferencia de poblaciones ( $\bar{\gamma}$ )— parámetro de bombeo ( $A$ ) mostrando tanto el umbral de inestabilidades obtenido del análisis lineal de estabilidad (línea continua) como el umbral obtenido por *hard mode excitation* (bombeo brusco). La línea de puntos muestra la frontera del dominio en que puede obtenerse comportamiento periódico. [Tomado de Narducci *et al* (1985)].

No obstante, las opiniones sobre si realmente se había observado el modelo de Lorenz iban desde el escepticismo [Lugiato *et al*, 1985] hasta el optimismo [Abraham *et al*, 1987]. Pronto aparecerían opiniones en contra de la aplicabilidad del modelo de Lorenz al dispositivo experimental. Así, Lawandy y Plant (1986), en un detallado trabajo, mostraron que el valor del parámetro  $b$  que debe asignarse al amoníaco es  $b = 0.28$  para la transición de  $81.5\mu\text{m}$  y  $b = 1$  para la de  $374\mu\text{m}$ . El estudio se basa en las propiedades de simetría de la molécula de amoníaco para distintas transiciones y la influencia que sobre ellas tienen las colisiones tanto desfasantes como radiativas. Este trabajo cerraba la posibilidad de interpretar los resultados experimentales con modelos de dos niveles.

### 3.4. Estudios sobre la influencia del bombeo coherente en el comportamiento dinámico de los láseres.

Por las mismas fechas, comienza a aparecer una serie de trabajos que estudian la influencia del bombeo coherente en la dinámica de estos sistemas y que pasamos a comentar a continuación.

El primero de estos trabajos [Dupertuis *et al*, 1986] es un trabajo analítico en el que se aborda la siguiente cuestión: ¿qué condiciones debe un láser bombeado ópticamente verificar para comportarse como el modelo de Lorenz?. Su respuesta, basada en las condiciones bajo las que los efectos coherentes son despreciables en un modelo de LGBO homogéneo, se resume en los siguientes requisitos: (i), que los campos sean resonantes; (ii), que las tasas de relajación de las poblaciones sean iguales; (iii), que las poblaciones en equilibrio de los niveles implicados en la transición FIR sean iguales; (iv), que el bombeo sea débil; (v), que la coherencia de la transición de bombeo y la coherencia Raman puedan ser eliminadas adiabáticamente (esto es, que relajen mucho más rápidamente que la coherencia de la transición láser); y (vi), que el valor de las tasas de relajación de las coherencias Raman y de la transición de bombeo sea mayor que la intensidad del campo generado (que el cuadrado de su frecuencia de Rabi). De hecho, las dos primeras condiciones son necesarias para establecer el isomorfismo entre las ecuaciones del láser de dos niveles y el modelo de Lorenz, como ya vimos en la Introducción [Haken, 1975], siendo relajable la primera (condición de resonancia) si lo que se pretende observar es el modelo de Lorenz-Haken incluyendo desintonía [Zeghlache y Mandel, 1985]. La condición (iv) ya fue establecida por Weiss y Klische (1984b). Así pues, Dupertuis *et al* añadían a las condiciones conocidas tres condiciones adicionales. Ellos mismos señalaban que la tercera condición se verifica fácilmente en los láseres FIR debido a que la pequeña separación de los niveles hace de la función de distribución de Boltzmann, que rige la población de los niveles, una función suave de los números cuánticos rotacionales. Sin embargo *las dos últimas condiciones*, referidas ambas a valores elevados de las tasas de relajación de las coherencias del sistema no implicadas en los niveles láser, *no se verifican en la molécula de amoníaco*. Sugerían entonces la posibilidad de destruir la coherencia del láser de bombeo por algún método, por ejemplo mediante el uso de un haz de bombeo que ya fuera caótico, arguyendo que así la coherencia de la transición de bombeo se vería incrementada por la *anchura* del haz de bombeo.

Unos meses más tarde, aparecieron dos artículos de Mehendale y Harrison (1986a y 1986b) que son los primeros en estudiar las condiciones en que un LGBO presenta emisión dinámica y las características de ésta. Los objetivos de esta investigación no son averiguar si un LGBO puede presentar comportamiento tipo Lorenz, sino estudiarlos *per se*, y constituyen los primeros trabajos de una larga serie realizada por Harrison, Moloney y colaboradores [Uppal *et al*, 1987a y 1987b, Moloney *et al*, 1987, Forsyiaak *et al*, 1988, Forsyiaak *et al*, 1989, Moloney *et al*, 1989, Uppal *et al*, 1990, Forsyiaak *et al*, 1991]. Un sorprendente resultado obtenido por Mehendale y Harrison

(1986b) es que cuando todas las tasas de relajación moleculares son iguales entre si, el único comportamiento dinámico exhibido por un LGBO homogéneo es un comportamiento periódico. Sin embargo, en trabajos posteriores comprobaron que se trataba de un caso límite y, relajando esta condición, encontraron comportamientos dinámicos más complejos, incluyendo caos. Adelantándonos a los hechos, apuntemos ya que el principal resultado obtenido por estos autores es que el efecto responsable de la aparición de inestabilidades en un LGBO es el efecto AC-Stark causado por el haz de bombeo. Sin embargo, no hemos de hacer necesariamente extensible este resultado al dispositivo experimental de Weiss y colaboradores. La razón es simple: estos autores han estudiado los LGBO con valores de los parámetros que no están en correspondencia con los del experimento, en particular, consideran valores pequeños de la ganancia. Este hecho es relevante: si la ganancia es pequeña, el principal responsable del desdoblamiento AC-Stark es el campo de bombeo, como ellos han considerado, pero si la ganancia es grande, como es el caso en el dispositivo experimental, el campo generado es mayor en el interior de la cavidad que el campo de bombeo, siendo aquél entonces el responsable del citado fenómeno.

Pero prosigamos con el desarrollo de los hechos. Tras el trabajo de Dupertuis *et al*, Lawandy y Ryan estudiaron las soluciones tanto estacionarias como dinámicas, de un modelo de tres niveles de LGBO. En el primer trabajo [Lawandy y Ryan, 1987] mostraron que en condiciones estacionarias la excitación de este sistema no es lineal con el bombeo, incluso para valores bajos del mismo y en las condiciones de eliminación adiabática de las coherencias de bombeo y Raman comentadas en el artículo de Dupertuis *et al* (si bien Lawandy y Ryan no citan aquí este trabajo). Como los cálculos estaban hechos con parámetros aplicables a la línea de  $81.5\mu\text{m}$  del amoníaco (salvo la eliminación adiabática que ya hemos comentado que no se verifica) y habían sido integrados teniendo en cuenta el efecto Doppler y efectos espaciales, y como sus resultados no eran compatibles con el modelo de Lorenz, concluyeron que un láser LGBO no era de ningún modo adecuado para observar el comportamiento predicho por este modelo. Reforzaron esta afirmación en un trabajo posterior [Ryan y Lawandy, 1987] en el que estudiaban las soluciones dinámicas del sistema, pero con un modelo que a diferencia del anterior trabajo, no tenía en cuenta el efecto Doppler. En particular muestran que el cociente de umbrales es menor para el LGBO que para el modelo de Lorenz y que se observa una ruta de Feigenbaum para valores crecientes del bombeo. Todo esto es incompatible con el modelo de Lorenz y, consecuentemente, niegan que se haya observado.

Así, Lawandy y Ryan se colocan, claramente, en contra de lo admitido hasta entonces. Pero sus trabajos son bastante confusos y además, resulta sorprendente que tras su inicial preocupación por elegir los valores precisos de las relajaciones del amoníaco [Lawandy, 1986], eliminen adiabáticamente las coherencias Raman y de bombeo que, en el experimento, son del mismo orden que la coherencia de la transición láser. Probablemente hicieron esto suponiendo que era la forma de ponerse en las condiciones más favorables para observar comportamiento Lorenz. Pero esta actitud les impedía pretender reproducir adecuadamente los resultados experimentales. No obstante esto último no parecía importarles excesivamente ya que no comentan los resultados de Weiss y Brock (en los que se conseguía la reproducción, por primera vez, del crecimiento en espiral de la intensidad propio del modelo de Lorenz y que comentaremos en el próximo apartado), a pesar de citarlos. Por el contrario, parecían más preocupados en defender una postura apriorística, la de que un láser LGBO no puede comportarse como el modelo de Lorenz por los procesos a dos fotones.

### 3.5. Evidencia experimental de comportamiento tipo Lorenz.

A Finales de 1986, C.O.Weiss y J.Brock publican un importante trabajo en el que afirman tener evidencia experimental de comportamiento tipo Lorenz en la línea de  $81.5\mu\text{m}$  del  $^{14}\text{NH}_3$  con la que, recordemos, ya habían obtenido algunos resultados [Weiss *et al*, 1985] pero que habían abandonado durante algún tiempo. La evidencia de comportamiento tipo Lorenz se sustenta en los siguientes hechos: (i) la secuencia de comportamientos que se encuentra al sintonizar la cavidad es una ruta de Feigenbaum, mostrando también ventanas de comportamiento periódico en la zona caótica; (ii), el valor del cociente de umbrales es compatible con el modelo de Lorenz; (iii), en condiciones de resonancia, la transición de comportamiento estable a caótico ocurre bruscamente cuando se alcanza un valor umbral del bombeo y, sobre todo; (iv), el comportamiento de la intensidad en régimen caótico muestra los característicos *spirallings* (crecimiento de la intensidad que recuerda a la evolución en espiral correspondiente en el atractor) (Fig.3.4). Todas estas características están en acuerdo con las predicciones del modelo de Lorenz y, hasta entonces, no habían sido predichas por ningún otro modelo.

Así pues, tras este trabajo, la pregunta era clara: ¿por qué el láser de amoníaco, que es un láser bombeado ópticamente, muestra un comportamiento tan semejante al modelo de Lorenz?. Ya hemos comentado en el apartado anterior que las respuestas de

los teóricos estaban, en gran medida, mediatizadas por los resultados experimentales anteriores a este trabajo (experimentos en los que no se había conseguido evidencia de comportamiento tipo Lorenz), así como por prejuicios teóricos derivados del exceso de confianza de los teóricos en los modelos matemáticos hasta entonces formulados, los que ciertamente no predecían comportamiento tipo Lorenz. A lo largo del año siguiente se publicaron los trabajos de Lawandy y colaboradores y los de Harrison, Moloney y colaboradores ya comentados, y aparecieron resultados preliminares de un nuevo estudio del modelo de tres niveles homogéneo de Dupertuis *et al* [Pujol, *et al*, 1987]. Ante la falta de argumentos teóricos suficientes para entender la situación se llegó a sugerir que quizá el láser de amoníaco verificase las condiciones de Dupertuis *et al* [Weiss, 1988; Abraham *et al*, 1988].

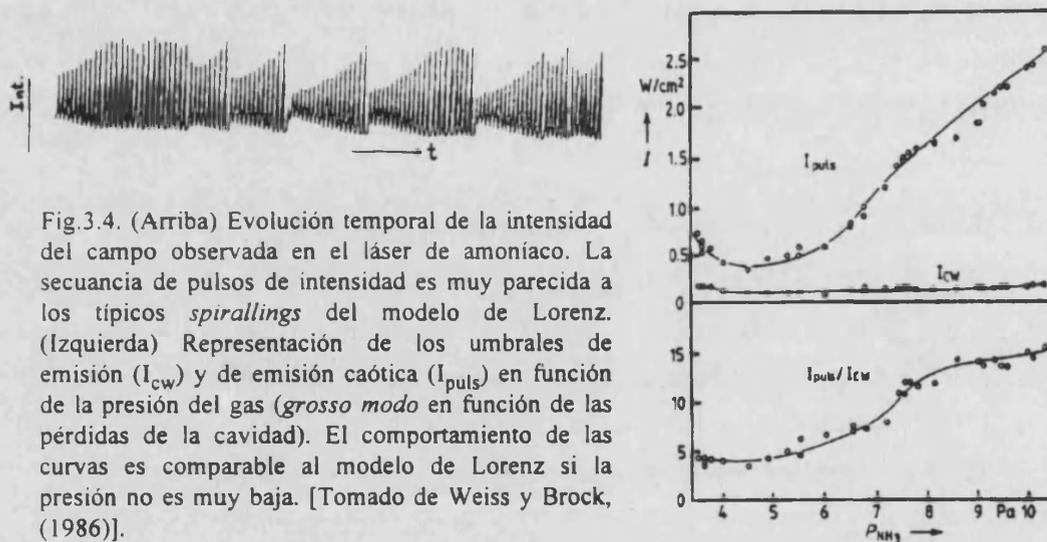


Fig.3.4. (Arriba) Evolución temporal de la intensidad del campo observada en el láser de amoníaco. La secuencia de pulsos de intensidad es muy parecida a los típicos *spirallings* del modelo de Lorenz. (Izquierda) Representación de los umbrales de emisión ( $I_{CW}$ ) y de emisión caótica ( $I_{puls}$ ) en función de la presión del gas (*grosso modo* en función de las pérdidas de la cavidad). El comportamiento de las curvas es comparable al modelo de Lorenz si la presión no es muy baja. [Tomado de Weiss y Brock, (1986)].

En cualquier caso ahora se disponía de datos experimentales bastante precisos y, por tanto, el camino a seguir era reproducir esos resultados con modelos de láser con bombeo óptico. En este sentido aparecieron varios artículos a lo largo de 1988.

Por una parte, Khandokhin *et al* (1988) llevaron a cabo un estudio numérico muy detallado de la dinámica del modelo de láser bombeado ópticamente de tres niveles para diversos valores de las relajaciones [de la relajación de las poblaciones en la transición láser,  $b$ , y de la relajación de la coherencia Raman]. Encontraron que únicamente podía reproducirse la secuencia de bifurcaciones de los experimentos de la línea de  $374\mu m$  si se admitía para  $b$  un valor de alrededor de 0.4, en clara contradicción tanto con los argumentos de Weiss y col. y los de Narducci *et al* (1985), como con los argumentos de Lawandy y Plant (1986). Por otra parte se alinean con la opinión de Lawandy y Ryan en cuanto al carácter no Lorenz del láser de amoníaco. Lamentablemente, Khandokhin *et al*

no parecen tener en cuenta el trabajo de Weiss y Brock aunque lo citen, pues en ningún momento intentan reproducir los resultados experimentales comentados más arriba, pretendiendo, además, que un modelo tan sencillo como el por ellos estudiado (sencillo en el sentido de que no contempla ensanchamiento Doppler, degeneración magnética, efectos espaciales, etc. que son factores presentes en el experimento) pueda aportar información suficiente sobre algunos valores espectroscópicos como son las relajaciones [Khanin, 1990].

También en 1988 aparece una serie de trabajos de R.Vilaseca, R.Corbalán y colaboradores [Pujol *et al*, 1988a y 1988b; Laguarda *et al*, 1988] que constituyen el primer intento serio de reproducción de los resultados experimentales mediante el uso de modelos de tres niveles. Los dos primeros trabajos continúan la línea de los estudios llevados a cabo con el modelo homogéneo de LGBO. Lo que les diferencia de los anteriores es: la utilización de valores de los parámetros cuidadosamente estimados para ser compatibles con los experimentos [Pujol *et al*, 1988a] y el estudio de la influencia de la desintonía de la cavidad [Pujol *et al* 1988b]. La conclusión obtenida redunda en lo mostrado hasta entonces: un LGBO homogéneo no presenta comportamiento tipo Lorenz y, por tanto, no reproduce los resultados experimentales. Esta conclusión les conduce no a negar la evidencia del comportamiento tipo Lorenz observado en los experimentos, como a la mayor parte de los autores, sino a modificar el modelo matemático de LGBO para que incluya factores experimentales no tenidos en cuenta por este modelo.

En Laguarda *et al* (1988) se estudia el modelo LGBO con dos importantes modificaciones: (i), inclusión de la desintonía del bombeo  $y$ ; (ii), la inclusión del ensanchamiento Doppler del medio material. El resultado fue espectacular ya que se obtuvieron un diagrama de bifurcaciones, un cociente de umbrales y un comportamiento de la intensidad emitida claramente compatibles con los resultados experimentales, si bien los *spirallings* en la intensidad exhibidos por este modelo no eran tan marcados como los experimentales.

Así pues, el camino hacia la reproducción de los resultados experimentales quedaba abierto gracias a una vía distinta de las dos utilizadas anteriormente (el modelo de Lorenz-Haken y el modelo LGBO homogéneo), i.e, el LGBO-Doppler. Varias preguntas se abrían entonces: ¿hasta que punto el LGBO-Doppler era adecuado para la reproducción de los resultados experimentales?, ¿se comporta igual el LGBO-Doppler que el modelo de Lorenz-Haken?, y si esto fuera así, ¿por qué?.

Una de las predicciones de Laguarda *et al* (1988) era que el atractor caótico tenía una sola hoja y que las variables (amplitud del campo, etc) nunca cambiaban de signo (Fig.3.5). Este comportamiento es claramente distinto del exhibido por el modelo de Lorenz, en el que el atractor es de dos hojas. Esta predicción motivó el siguiente trabajo experimental de Weiss y colaboradores, en el que midieron la fase del campo mediante el uso de técnicas de detección heterodina con la intención de determinar si el campo cambiaba de signo en el experimento, como en el modelo de Lorenz, o no, como parecía predecir el LGBO-Doppler [Weiss *et al*, 1988]. Ya hemos comentado en la Introducción que, en aquel mismo año, Zeghlache *et al* habían estudiado el comportamiento de la fase en el modelo de Lorenz. Los resultados experimentales resultaron estar en acuerdo con el modelo de Lorenz-Haken ya que la fase del campo exhibía saltos del orden de  $\pi$  radianes (Fig.3.6), lo que fue interpretado como indicativo del cambio de signo en el campo y, por tanto, del carácter heteroclínico del atractor [Weiss *et al*, 1988].

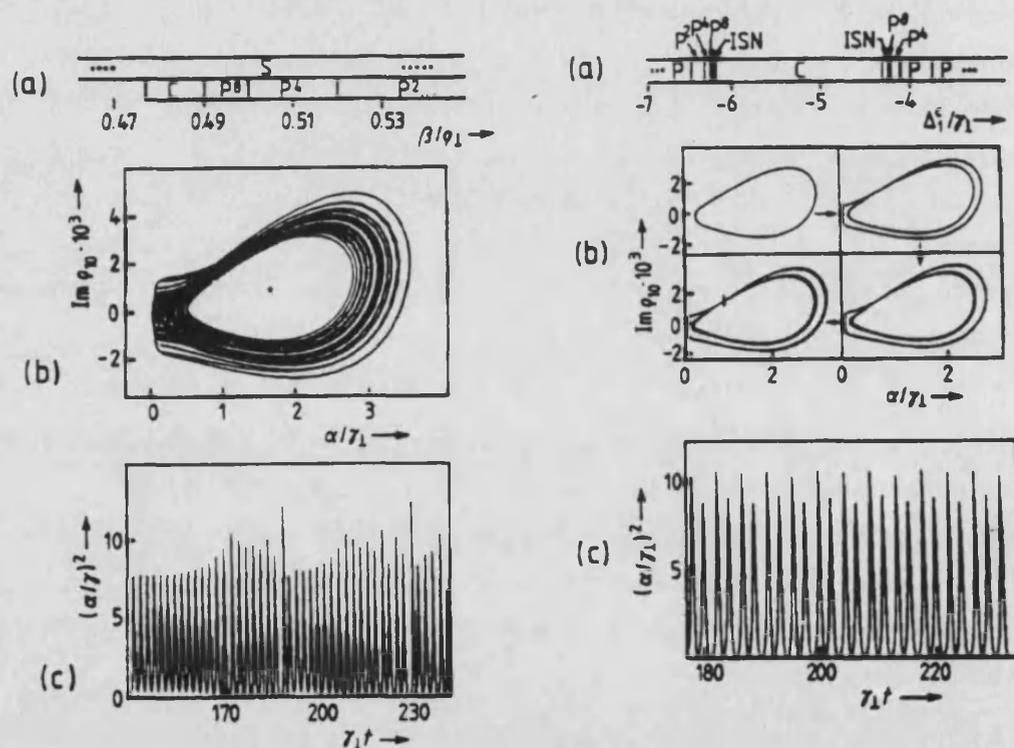


Fig.3.5. Resultados obtenidos por Corbalán *et al* (1989) con el modelo LGBO con ensanchamiento Doppler. A la izquierda (a) ruta de bifurcaciones para bombeos crecientes ( $\Delta_c = -5$ ), (b) proyección del atractor en el plano polarización - amplitud del campo (nótese que es de una sola hoja, el campo siempre es positivo) y (c) evolución de la intensidad mostrando un *spiralling*. A la derecha, (a) ruta de bifurcaciones al variar la desintonía de la cavidad  $\Delta_c$  ( $\beta = 0.478$ ), (b) secuencia seguida por el atractor periódico y (c) comportamiento de la intensidad en régimen periódico. Estos resultados se acercan al comportamiento experimental.

Parecía haber, por tanto, un aspecto del experimento no reproducido por el LGBO-Doppler [Laguarda *et al*, 1989, Corbalán *et al*, 1989]: el carácter heteroclínico del atractor. En realidad no era así como se demostró al estudiar el comportamiento de la fase en el LGBO-Doppler algún tiempo después [Roldán, 1989; Roldán *et al*, 1989]. Lo que había ocurrido era que, fruto del general desconocimiento de la dinámica de la fase que había en aquellas fechas, no se había tenido en cuenta que la amplitud real del campo no cambia de signo cuando el láser está desintonizado (como es el caso, ya que debido al efecto Doppler siempre hay moléculas desintonizadas) y es la fase (es decir, el campo complejo) la que lleva a cambio de signo si es el caso (véase el Capítulo 1). Así pues, con esta aclaración y la obtención de registros teóricos de la intensidad en mayor acuerdo con los experimentales (aumentando el valor previamente estimado para las pérdidas de la cavidad láser) [Roldán *et al*, 1989], pareció de nuevo que el LGBO-Doppler era un modelo adecuado para entender el origen del comportamiento tipo Lorenz observado.

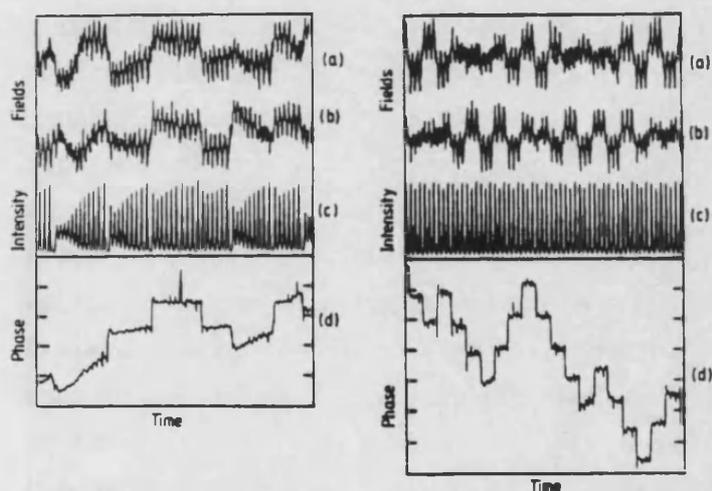


Fig.3.6. (Izquierda) (a) y (b) Evolución de las componentes en cuadratura del campo y (c) de la intensidad para un régimen de emisión caótica. (d) Evolución de la fase reconstruida a partir de las componentes del campo. (Derecha) Lo mismo que en la anterior sólo que para emisión periódica. Nótese que la fase presenta saltos tanto positivos como negativos. [Tomado de Weiss *et al*, (1988)].

A partir de entonces, el interés de los experimentadores se centró en obtener resultados precisos y en llevar a cabo una comparación sistemática con las predicciones del modelo de Lorenz-Haken. Estas comparaciones comienzan en Weiss *et al* (1989). En Wu *et al* (1989) se obtienen medidas precisas de la transición brusca al caos desde la solución estacionaria y se muestra una proyección bidimensional del atractor, obtenida mediante manipulación de las medidas de intensidad, comparable a la del modelo de Lorenz. En Hübner *et al* (1989) se obtienen medidas de la dimensión fractal de los datos experimentales, completadas más tarde en Hübner *et al* (1992) de nuevo en gran acuerdo con el modelo de Lorenz [Fig.3.7].

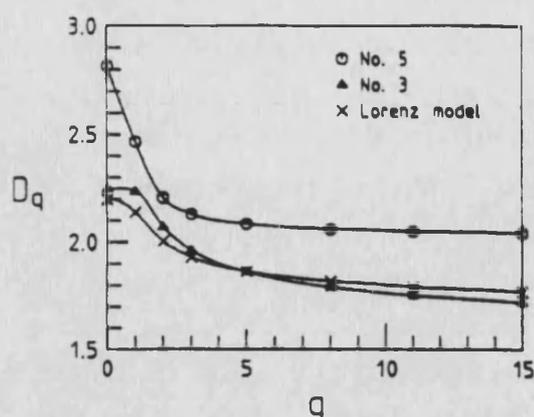


Fig.3.7. Valores de las dimensiones generalizadas  $D_q$  obtenidos a partir de registros experimentales [el círculo corresponde al registro temporal de la Fig.3.8(a) y el triángulo al de la Fig.3.8(b)] y de un registro del modelo de Lorenz (marcado con cruces). Nótese como el registro experimental marcado con triángulos tiene unos valores de las dimensiones muy parecidos a los del modelo de Lorenz. [Tomado de Hübner *et al.*, (1992)].

También se hacen medidas precisas del comportamiento de la fase [Tang *et al.*, 1991b] y se demuestra la difusión de la misma comentada en el Capítulo 1 a través del tratamiento estadístico de la intensidad [Li *et al.*, 1992].

Particular interés reviste, para nuestros propósitos, el estudio estadístico del comportamiento de la intensidad del campo [Li *et al.*, 1990; Tang *et al.*, 1992]. En el primero de estos trabajos se comprobó, gracias al uso de mapas de intensidad y estadística de la duración de *spirallings*, que no todos los registros obtenidos experimentalmente correspondían a comportamiento tipo Lorenz. Había, básicamente, dos tipos de registros: los que mostraban un mapa de intensidad con doble cúspide y que recuerdan al modelo de Lorenz y los que presentan un mapa de intensidades difuminado. De hecho, en Hübner *et al.* (1992), se comprobó que si bien la dimensión fractal de los primeros es compatible con el modelo de Lorenz, no ocurría así con los segundos. En Tang *et al.* (1992) se encontró el origen de estas discrepancias: cuando el mapa de intensidades aparece difuminado ocurre que falta el último pico de cada *spiralling* [Fig.3.8]. Esto se debía a que la desintonía de bombeo no era lo suficientemente alta y, en algunos instantes, se amplificaba la onda copropagante con el bombeo impidiendo que la contrapropagante tuviera el pulso que le correspondería si aquella no se hubiese amplificado. Véase también a este respecto [Pujol, 1991]. De hecho, las diferencias con el modelo de Lorenz presentadas por este tipo de registros se aprecia también claramente en el cálculo de las dimensiones (Fig.3.7).

Adelantemos ya que los otros casos, los más parecidos al modelo de Lorenz pero que muestran una especie de doble *cusp map*, deben esta diferencia con el modelo de Lorenz a que el primer pico de cada *spiralling* es excesivamente alto [Tang *et al.*, 1992; Tang, 1993; Tin Win, 1993]. Dedicaremos a esto la debida atención más adelante ya que la interpretación de este hecho forma parte de nuestras contribuciones originales.

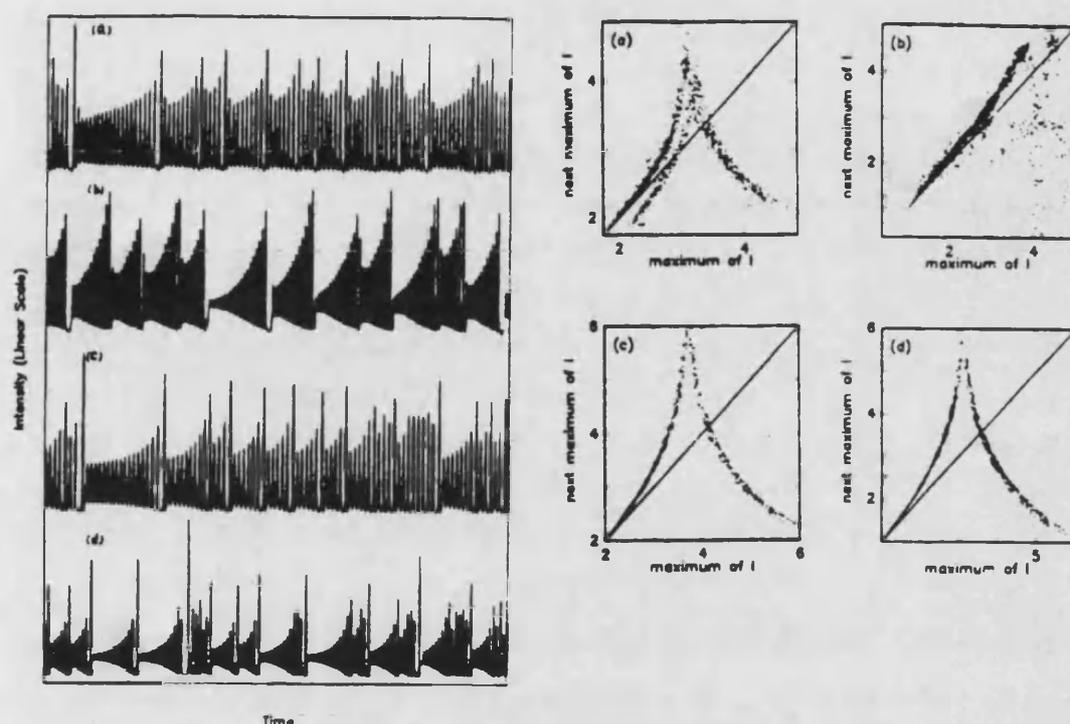


Fig.3.8. (Izquierda) (a) y (b) registros experimentales de la intensidad mostrando *spirallings* tipo Lorenz. (c) y (d) registros teóricos de la intensidad obtenidos con el modelo de Lorenz. (Derecha) mapas de intensidad correspondientes a los registros de la figura de la izquierda. Nótese el enorme parecido entre los registros teóricos y los experimentales. Sin embargo el mapa de intensidades muestra diferencias: el mapa del registro (a) muestra una doble estructura y el del registro (b) aparece muy distorsionado. La razón de esta distorsión radica en la amplificación de la onda co-propagante cada vez que la contra-propagante alcanza un mínimo, lo que hace que "falte" un pico de intensidad al final de cada spiralling. El origen de la doble estructura del registro (a) se estudia en el capítulo siguiente.

### 3.6. Hacia una interpretación de los resultados experimentales.

Puede afirmarse, por tanto, que el comportamiento experimental observado en la líneas de  $81.5\mu\text{m}$  de  $^{14}\text{NH}_3$  y  $153\mu\text{m}$  del  $^{15}\text{NH}_3$  es compatible con el modelo de Lorenz-Haken.

El modelo LGBO-Doppler se había mostrado como buen candidato para la interpretación de los resultados experimentales. No obstante, hay un factor experimental que este modelo no incorpora: la polarización lineal de los campos o, si se prefiere, la degeneración magnética de los niveles moleculares. Ya comentamos al principio de este capítulo que existen diferencias en las polarizaciones relativas de los campos según la transición del amoníaco de que se trate. Este hecho fue incorporado al modelo LGBO

homogéneo en Arjona *et al* (1990a). El resultado por ellos obtenido puede resumirse diciendo que cuando los campos de bombeo y generado tienen polarizaciones lineales y ortogonales entre si, el modelo LGBO-M (de degeneración magnética) presenta comportamiento tipo Lorenz, cosa que no ocurre cuando la polarización relativa entre los haces de bombeo y generado es paralela. Estos resultados están en acuerdo cualitativo con la observaciones experimentales: en la línea de 374mm del  $^{15}\text{NH}_3$  (en la que las polarizaciones relativas son paralelas) no se encuentra comportamiento tipo Lorenz, cosa que si ocurre en las líneas de 81.5 $\mu\text{m}$  de  $^{14}\text{NH}_3$  y 153 $\mu\text{m}$  del  $^{15}\text{NH}_3$  (en las que las polarizaciones relativas son ortogonales). El estudio numérico de este modelo fue ampliado en varios trabajos [Arjona *et al*, 1990b; Corbalán *et al*, 1991; Arjona *et al*, 1991] en los que el estudio inicial se extendió para incluir desintonía de la cavidad y dinámica de la fase. Así pues se dispone, en principio, de dos modelos distintos para intentar reproducir los resultados experimentales.

El problema es, por tanto, reproducir e interpretar estos hechos y determinar qué modelo es el más adecuado y qué factor experimental es el más relevante. Para ello partimos de los resultados obtenidos hasta 1989 por el grupo de Vilaseca y Corbalán con el modelo LGBO-Doppler. Hemos visto que estos resultados apuntan a la reproducción de los datos experimentales pero los casos hasta esa fecha estudiados (valores de los parámetros) son escasos, la comparación con los resultados experimentales es insuficiente y la razón de por qué el comportamiento Lorenz aparece en este modelo no es conocida. Por tanto, el punto de partida del estudio que presentamos en el capítulo siguiente del LGBO-Doppler, es mi propia Tesis de Licenciatura [Roldán, 1989] y la Tesis Doctoral de Jaume Pujol (1991). En el Capítulo 5 estudiaremos, preferentemente de forma analítica, el modelo LGBO-M partiendo de la Tesis de Licenciatura de Montserrat Arjona (1990) y de los resultados numéricos acumulados hasta la fecha. Nuestro interés, al estudiar este segundo modelo, se concentrará en encontrar el origen del diferente comportamiento exhibido por el mismo en los casos de polarizaciones ortogonales y paralelas, así como en el origen del comportamiento tipo Lorenz en el primero de ellos.

Es claro, pues, que el trabajo que presentamos en los próximos capítulos, parte de estudios previos más o menos avanzados y, en cualquier caso, debe a esos estudios la formulación matemática original de los modelos. Nosotros nos concentraremos en la extensión y reelaboración de los mismos y, en la medida de lo posible, en la interpretación física de sus propiedades.

## **Capítulo 4: El modelo de láser bombeado ópticamente con ensanchamiento Doppler (LGBO-D)**

### **4.1. El modelo LGBO-D**

### **4.2. Valores de los parámetros. Método de resolución de las ecuaciones.**

### **4.3. Comportamiento tipo Lorenz en la línea de $81.5\mu\text{m}$ del láser de $\text{NH}_3$ .**

### **4.4. Comportamiento con bombeo resonante.**

### **4.5. Comportamiento en la línea de $374\mu\text{m}$ .**

### **4.6. Conclusiones**



A lo largo del capítulo anterior hemos descrito el vacío teórico existente entre el comportamiento experimental de los láseres de  $\text{NH}_3$  y los resultados obtenidos con los modelos más sencillos (homogéneos y de tres niveles) de los LGBO. Hemos visto, también, que el modelo de láser de gas bombeado ópticamente que incorpora el fenómeno del ensanchamiento Doppler del medio activo (LGBO-D) aparece como un buen candidato para la reproducción de los resultados experimentales y consecuentemente, para la interpretación de los mismos.

Los estudios anteriores de este modelo [Laguarta *et al*, 1988; Corbalán *et al*, 1989; Roldán *et al*, 1989], reunidos en la Tesis Doctoral de J.Pujol (1989), incluyen la formulación del modelo y el estudio numérico de las ecuaciones para un conjunto restringido de parámetros. Los resultados de estos estudios, que hemos resumido en el capítulo anterior, abren la puerta a la comprensión de los resultados experimentales pero, no obstante, son insuficientes para determinar: (i), hasta qué punto reproduce el modelo LGBO-D el comportamiento experimental; (ii), hasta qué punto podemos hablar de comportamiento de tipo Lorenz y, sobre todo, (iii), por qué la inclusión del efecto Doppler en el modelo LGBO produce comportamiento de tipo Lorenz si los modelos homogéneos no presentan este comportamiento. A través de una exploración numérica de las ecuaciones del LGBO-D para diversas condiciones de emisión (valores de los parámetros) y de un estudio sistemático de las ecuaciones del sistema, trataremos de dar respuesta a estas preguntas en el presente capítulo. Parte del material que aquí presentamos puede encontrarse en [Vilaseca *et al*, 1991; de Valcárcel *et al*, 1991; Tang *et al*, 1992; Weiss *et al*, 1993].

#### 4.1. El modelo LGBO-D.

El esquema más sencillo de LGBO es aquél que considera un medio material constituido por moléculas descritas mediante tres niveles energéticos interaccionando con los campos de bombeo y generado (Fig.4.1). En el infrarrojo lejano se tiene, habitualmente, una configuración Stokes ( $\omega_{20} > \omega_{01}$ ) lo que hace que el campo de bombeo  $\vec{E}_2(z,t)$  interaccione únicamente con la transición molecular 2-0 y que el campo generado  $\vec{E}_1(z,t)$  lo haga únicamente con la transición láser 0-1. Consideraremos además que  $\vec{\mu}_{21} = 0$ , es decir, que no puede haber transiciones a un fotón entre los niveles 2 y 1 en aproximación dipolar eléctrica. Además tanto el campo generado como el de bombeo pueden ser descritos como ondas viajeras unidireccionales ya que en estas condiciones se llevaron a cabo los experimentos (cf. Capítulo 3). Escribimos, por tanto, el campo total como

$$\vec{\mathcal{E}}_T = \vec{\mathcal{E}}_1(z,t) + \vec{\mathcal{E}}_2(z,t) \quad (4.1.1)$$

con

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_1(z,t) &= \frac{1}{2} \vec{\epsilon}_1 \mathcal{E}_1(t) \{ \exp[-i(\Omega_1 t + \phi_1(t) - k_1 z)] + \text{c.c.} \} \\ \vec{\mathcal{E}}_2(z,t) &= \frac{1}{2} \vec{\epsilon}_2 \mathcal{E}_2 \{ \exp[-i(\Omega_2 t + \phi_2 - k_2 z)] + \text{c.c.} \} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

donde  $\Omega_i$  representa la frecuencia de referencia del campo  $i$  ( $i = 1,2$ ),  $k_i$  su número de ondas,  $\vec{\epsilon}_i$  su vector polarización,  $\mathcal{E}_i$  su amplitud real,  $\phi_i$  su fase y  $z$  la dirección axial de la cavidad. Tomaremos como constantes la amplitud y la fase del campo de bombeo, con lo que  $\Omega_2$  representa la frecuencia de este campo.

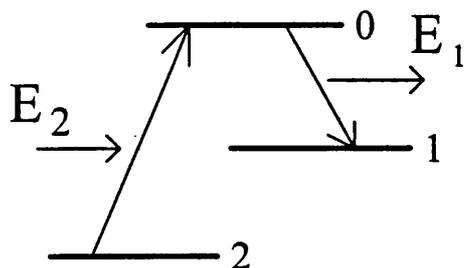


Fig.4.1. Esquema de niveles del LGBO. El campo de bombeo  $E_2$  actúa sobre la transición 2-0 y el campo láser  $E_1$  se genera en la transición 0-1. La interacción dipolar eléctrica entre los niveles 2 y 1 está prohibida ( $\vec{\mu}_{21}=0$ ).

La inclusión del ensanchamiento Doppler del medio material exige deducir la ecuación de evolución para las moléculas que se mueven con velocidad axial  $v$  respecto al sistema laboratorio, e integrar luego las contribuciones de todas las velocidades posibles para calcular la polarización macroscópica, que es el término fuente del campo eléctrico, ver Apéndice 1. Teniendo en cuenta el ensanchamiento Doppler y aplicando las aproximaciones de la onda rotante y de la variación lenta de amplitudes, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de Maxwell-Schrödinger para el modelo LGBO-D

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{00}}{dt} &= -\gamma_0 \rho_{00} + \lambda_0 - 2\alpha \text{Im}\rho_{10} - 2\beta \text{Im}\rho_{20}, \\ \frac{d\rho_{11}}{dt} &= -\gamma_1 \rho_{11} + \lambda_1 + 2\alpha \text{Im}\rho_{10}, \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= -\gamma_2 \rho_{22} + \lambda_2 + 2\beta \text{Im}\rho_{20}, \\ \frac{d\rho_{10}}{dt} &= -[\gamma_{10} + i(\Delta_1(t) + k_1 v)]\rho_{10} + i\alpha(\rho_{00} - \rho_{11}) - i\beta\rho_{12}, \\ \frac{d\rho_{20}}{dt} &= -[\gamma_{20} + i(\Delta_2 - k_2 v)]\rho_{20} - i\alpha\rho_{21} + i\beta(\rho_{00} - \rho_{22}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= -[\gamma_{12} + i(\Delta_1(t) - \Delta_2 + (k_1 - k_2)v)]\rho_{12} + i\alpha\rho_{02} - i\beta\rho_{10}, \\
\frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa\alpha + g \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \text{Im}\rho_{10}, \\
\dot{\phi} &= (\omega_c - \Omega_1) - g \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \frac{\text{Re}\rho_{10}}{\alpha},
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

donde las diferentes constantes y variables conservan el mismo significado que en las Ecs.(I.2.2) de la Introducción y hemos omitido el subíndice de la fase del campo generado para simplificar la notación. Resaltemos que  $\Delta_2 = (\Omega_2 - \omega_{20})$  es la desintonía del campo de bombeo respecto a la transición 2-0, que

$$\Delta_1(t) = \Delta + \dot{\phi}(t), \tag{4.1.4}$$

es la desintonía del campo generado respecto a la transición láser 0-1 [con  $\Delta = (\Omega_1 - \omega_{01})$  que al tomar el referencial de la cavidad  $\Omega_1 = \omega_c$  -cosa que haremos en la mayor parte de los cálculos- se convierte en la desintonía de la cavidad], y que

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (\vec{\mu}_{01} \cdot \vec{e}_1 / 2\hbar) \mathcal{E}_1(t), \\
\beta &= (\vec{\mu}_{20} \cdot \vec{e}_2 / 2\hbar) \mathcal{E}_2,
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

son la mitad de las frecuencias de Rabi de los campos generado y de bombeo, respectivamente. Recuérdese, además, que  $\rho_{ij}$  es el elemento de la matriz densidad (promedio de conjunto) asociado a la transición  $i \leftrightarrow j$  (si  $i = j$ , representa la población del nivel  $j$ ) y que  $g = (\Omega_1 \mu_{01}^2 N / 2\epsilon_0 \hbar)$  es el parámetro de ganancia. Nótese que, a diferencia del modelo de Lorenz-Haken, los elementos de matriz dependen de la velocidad [que aparece explícitamente en los términos de desintonía  $k_1 v$  en las Ecs.(4.1.3)] y que la polarización total (términos fuente en las ecuaciones de  $\alpha$  y  $\dot{\phi}$ ) es el resultado de la integración, ponderada mediante la función de distribución de velocidades de Boltzmann  $W(v) = (1/u\sqrt{\pi})\exp[-(v/u)^2]$  (con  $u$  la velocidad más probable), extendida a todas las velocidades. Hasta aquí hemos expuesto el modelo LGBO-D tal y como puede encontrarse en [Pujol, 1989].

No obstante, dado que, como veremos más adelante, este modelo proporciona (en ciertas condiciones) comportamiento de tipo Lorenz, es conveniente que reescribamos parte de las ecuaciones anteriores en forma más parecida a las del modelo de Lorenz-Haken para apreciar mejor las diferencias entre ambos. Definiendo

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \alpha(t) e^{-i\phi(t)}, \\
 P(t) &= i \frac{g}{\sigma} e^{-i\phi(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \rho_{01}(v, t), \\
 D(t) &= \frac{g}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) [\rho_{00}(v, t) - \rho_{11}(v, t)], \quad (4.1.6)
 \end{aligned}$$

(donde  $g = g/\gamma_{\perp}^2$ ,  $\sigma = \kappa/\gamma_{\perp}$  y  $\alpha$  también ha sido normalizada a  $\gamma_{\perp} = \gamma_{01}$ ) tomando  $\gamma_{\perp} = \gamma_0 \equiv \gamma_{11}$  (en acuerdo con los parámetros experimentales, ver apartado siguiente) y derivando respecto al tiempo adimensional  $\tau = \gamma_{\perp} t$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{d\tau} &= -\sigma [1 + i\delta] E + \sigma P \\
 \frac{dP}{d\tau} &= -[1 - i\Delta] P + ED - R \quad (4.1.7) \\
 \frac{dD}{d\tau} &= b (r - D) - 2 (EP^* + PE^*) - S
 \end{aligned}$$

donde  $r = (\lambda_0 - \lambda_1)g/\sigma$  es el parámetro adimensional de bombeo incoherente (que no es el parámetro de bombeo para un LGBO y es, además, una cantidad negativa),  $b = \gamma_{11}/\gamma_{\perp}$  y la desintonía viene gobernada por  $\delta$  y  $\Delta$ , que son

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{(\omega_c - \Omega_1)}{\sigma} \quad (4.1.8) \\
 \Delta &= (\Omega_1 - \omega_{01})
 \end{aligned}$$

(todas las frecuencias han sido normalizadas a  $\gamma_{\perp}$  pero no cambiaremos los símbolos para no complicar más la notación).

Las Ecs.(4.1.7) han de ser completadas con las ecuaciones de evolución de las variables  $R(t)$  y  $S(t)$  que vienen definidas por

$$\begin{aligned}
 R(t) &\equiv R_D(t) + R_R(t) \equiv k_1 e^{-i\phi(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) v \rho_{01}(v, t) + i\beta P_{12}(t), \\
 S(t) &\equiv 2\beta \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \text{Im} \rho_{20}(v, t), \quad (4.1.9)
 \end{aligned}$$

siendo

$$P_{12}(t) = -i \frac{g}{\sigma} e^{-i\phi(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \rho_{21}(v, t). \quad (4.1.10)$$

la coherencia total a dos fotones (Raman) entre los niveles 1 y 2.

La comparación de las Ecs.(4.1.7) con las Ecs.(I.2.6) revela claramente qué diferencias hay entre el LGBO-D y el modelo de Lorenz-Haken: los términos  $R(t)$  y  $S(t)$ . El término  $R(t)$  aparece como un nuevo término fuente (además del término ED) en la ecuación de la polarización y contiene dos contribuciones. La primera contribución  $R_D(t)$ , contiene la integración ponderada de  $v\rho_{01}(v, t)$  y tiene su origen, por tanto, en el efecto Doppler [es debido al corrimiento  $k_1 v$  que hemos de añadir para cada velocidad a la desintonía  $\Delta_1(t)$ ]. Nótese que este término se anula cuando  $u \rightarrow 0$ , es decir, cuando el ensanchamiento deviene homogéneo. Este es el término que diferencia el LGBO-D del LGBO homogéneo. La segunda contribución  $R_R(t)$  es de naturaleza física distinta ya que contiene la coherencia Raman  $\rho_{21}(t)$ . Tiene su origen, por tanto, en el bombeo óptico, y describe los efectos coherentes causados por éste (AC-Stark, procesos Raman). Se trata, por tanto, de una diferencia, respecto al modelo de Lorenz-Haken, específica de los LGBO. Lo mismo ocurre con el término  $S(t)$ , que aparece como un término de bombeo exterior en la ecuación de la diferencia de poblaciones y representa la tasa a la que las moléculas son excitadas por el campo de bombeo desde el nivel 2 al nivel 0. Así pues, hay dos factores que hacen diferente el LGBO-D del modelo de Lorenz-Haken, y son el bombeo óptico y el ensanchamiento Doppler.

Las Ecs.(4.1.7) nos permiten apreciar claramente las diferencias entre ambos modelos pero, desde el punto de vista de su integración numérica, no son manejables. En efecto, como ya analizaron Graham y Cho (1983) en el modelo de láser de dos niveles con ensanchamiento Doppler y bombeo incoherente (modelo de Lorenz *más Doppler*), al escribir las ecuaciones de evolución de los términos adicionales  $R(t)$  [en su caso  $R_D(t)$ ] y  $S(t)$ , aparecerán nuevas variables, digamos  $R'$  y  $S'$ , que contendrán la integral Doppler de  $v^2\rho_{ij}$ , lo que, a su vez, nos obligará a escribir sus ecuaciones de evolución que, a su vez, contendrán la integral Doppler de  $v^3\rho_{ij}$  y así, *ad infinitum*. Nos vemos envueltos, por tanto, con una jerarquía infinita de variables que contienen momentos crecientes de la función  $W(v)\rho_{ij}(v)$ . Graham y Cho sugirieron truncar esta jerarquía, de forma autoconsistente, en un determinado momento, para obtener así modelos de pocas dimensiones para el problema del láser con ensanchamiento Doppler. No obstante esta aproximación es completamente inútil en nuestro caso ya que, incluso en el límite homogéneo, el modelo LGBO con desintonía es tan complicado (10 ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas) que no puede ni tan siquiera obtenerse

su solución estacionaria no trivial de forma explícita: aunque fueran pocos los órdenes que añadamos de esa jerarquía de variables es obvio que no conseguiríamos con ello un tratamiento analítico del problema. Además, Bandy *et al* (1985) demostraron que la bondad de este tipo de aproximaciones parece limitarse al resultado obtenido del análisis de estabilidad, ya que el comportamiento dinámico obtenido con el modelo simplificado puede ser muy distinto del obtenido con el conjunto original de ecuaciones. No obstante, las Ecs.(4.1.7) nos serán muy útiles más adelante al analizar los resultados que obtendremos mediante integración numérica del conjunto original de Ecs.(4.1.3).

#### 4.2. Valores de los parámetros y método de resolución.

Las Ecs.(4.1.3) contienen un número de 14 parámetros cuya influencia, evidentemente, no puede ser investigada en todos los casos. Habremos de fijar, por tanto, la mayor parte de ellos y lo haremos sustituyendo los valores experimentales cuando estos sean conocidos. Dos de los parámetros serán, en lo que sigue, los principales parámetros de control: el parámetro de bombeo óptico  $\beta$  y la desintonía de la cavidad  $\Delta_c$ . Pero fijar el resto no es tarea sencilla. Además todo dependerá de qué caso queramos estudiar.

Básicamente existen tres posibilidades. Por una parte, podemos estudiar el comportamiento de las Ecs.(4.1.3) para valores de los parámetros que simplifiquen el modelo substancialmente aún manteniendo cierto parecido con los valores experimentales. Por otra parte podemos intentar dar a los parámetros valores lo más próximos posible a las condiciones experimentales, lo que a su vez nos fuerza a elegir entre los experimentos llevados a cabo con una línea o con otra de la molécula de amoníaco. Lo que haremos en este capítulo será estudiar a fondo las Ecs.(4.1.3) para condiciones lo más próximas posible a las condiciones experimentales de los experimentos llevados a cabo con la línea de  $81.5\mu\text{m}$ , que es la mejor estudiada experimentalmente (apartado 4.3). Más tarde realizaremos una incursión en un caso con parámetros simplificados (apartado 4.4) y extenderemos el estudio a la línea de  $374\mu\text{m}$  (apartado 4.5).

##### 4.2.a. Línea de $81.5\mu\text{m}$ .

Comencemos por ver qué valores son bien conocidos para la línea de  $81.5\mu\text{m}$ . En [Pujol, 1989], y en los trabajos previos que allí se recogen, se estudió el comportamiento

dinámico del LGBO-D para valores de los parámetros correspondientes a esta transición del  $^{14}\text{NH}_3$  a una presión aproximada de 10Pa. En esta molécula los valores de las relajaciones son bastante bien conocidos y se tomaron los siguientes:

$$\gamma_{\perp} = 6.8 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$$

$$\gamma_{20} = \gamma_{12} = \gamma_2 = 0.95\gamma_{\perp}$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_{11} = 0.28\gamma_{\perp}$$

Nosotros adoptaremos estos mismos valores (y de ahora en adelante daremos los valores de los parámetros normalizados a  $\gamma_{\perp}$ ) pero hemos de tener en mente que no son independientes de la presión del gas, si bien parece que sí son independientes de este factor los valores relativos entre relajaciones moleculares. También puede calcularse con facilidad el valor de las tasas de bombeo incoherente  $\lambda_i = \gamma_i \rho_{ii}^0$  ( $\rho_{ii}^0$  es la población térmica del nivel  $i$  en ausencia de campos), conocidas las frecuencias de las transiciones moleculares, mediante la ley de distribución de Boltzmann. En los trabajos mencionados se adoptó

$$\lambda_0 = 0.003192; \lambda_1 = 0.005124; \lambda_2 = 0.921795$$

Otro parámetro que permanece más o menos constante en el experimento es el valor de la desintonía del campo de bombeo  $\Delta_2$ . Se trata de un parámetro clave desde el punto de vista experimental por dos razones. Por una parte, como ya comentamos detalladamente en el capítulo anterior, ha de ser lo suficientemente grande como para que sólo la onda contrapropagante (o la copropagante, eso no es relevante ahora) sea amplificada. Desde el punto de vista del modelo significa que éste no es válido para reproducir resultados experimentales si los valores de  $\Delta_2$  son pequeños (lo que no implica que carezca de interés saber cuál es el comportamiento del modelo para valores pequeños de  $\Delta_2$ ) ya que, lógicamente, no puede predecir el valor mínimo de la desintonía de bombeo necesario para que sólo una onda sea generada porque no describe la posibilidad de que se generen ambas componentes. Hemos de asignarle, por tanto, el valor experimental. Pero, por otra parte,  $\Delta_2$  parece ser muy importante desde el punto de vista experimental en cuanto al tipo de comportamiento observado ya que para valores por encima de uno determinado se obtiene un comportamiento diferente del predicho

por el modelo de Lorenz [Tang *et al*, 1991a; Pujol, 1989]. Sería interesante, por tanto, estudiar la influencia que este parámetro tiene en el modelo LGBO-D pero aquí lo mantendremos como un parámetro fijo con valor  $\Delta_2 = 30$  (si bien más adelante estudiaremos un caso con un valor diferente) que es el valor utilizado hasta ahora en los estudios de la dinámica de la línea de  $81.5\mu\text{m}$ .

Un parámetro muy bien determinado experimentalmente es el cociente  $k_2/k_1$  ya que son conocidas las frecuencias de bombeo y emisión. De hecho sólo el valor del cociente es relevante ya que la integración de velocidades puede llevarse a cabo sobre  $k_1 v$  en lugar de sobre  $v$  y así únicamente necesitamos dar el valor de  $k_2$  como  $k_2 = (k_2/k_1)k_1$ . Su valor para el experimento de las  $81.5\mu\text{m}$  es  $k_2/k_1 = -7.5$ , donde el signo menos se debe a que ambos campos son contrapropagantes.

También es fácil de determinar el valor experimental de la anchura Doppler ya que queda fijada con el valor de la velocidad más probable  $u$ , que viene dado por  $u = (2k_B T/m)^{1/2}$  siendo  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura y  $m$  la masa de la molécula. En trabajos anteriores se tomó para  $k_1 u$  un valor de  $k_1 u = 6.8$ , valor que mantendremos para el estudio de la línea de  $81.5\mu\text{m}$ .

Nos faltan únicamente dos parámetros a los que asignar valor:  $\sigma$  y  $g$ . Para las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  se tomó en un principio el valor 1.15 que corresponde aproximadamente a unas pérdidas de un 5% en el resonador, siguiendo la estimación de Weiss y Brock (1986). Sin embargo se trata de un valor excesivamente bajo (ni siquiera llega al *bad cavity limit* que, en este caso, vale  $\sigma_{BC} = 1 + b = 1.28$ ) que no se corresponde con las verdaderas condiciones experimentales. Por otra parte, las pérdidas han sido variadas en diferentes experimentos, comprobándose además que el comportamiento observado dependía sensiblemente de ellas. Lo que nosotros haremos será estudiar su influencia en la dinámica como un parámetro de control más, concentrándonos especialmente en tres casos particulares:  $\sigma = 1.15, 1.85$  y  $5$ . Más difícil es asignar un valor al parámetro de ganancia  $g$ . En principio puede ser calculado directamente si conocemos el número de moléculas activas por unidad de volumen  $N$  y el valor del momento dipolar de la transición láser  $\mu_{01}$ . Esto es lo que se hizo en trabajos anteriores asignando al momento dipolar un valor promediado de todas las transiciones  $0 \leftrightarrow 1$  posibles en la línea de  $81.5\mu\text{m}$  (recuérdese que, en realidad, los niveles moleculares que aquí consideramos son toda una variedad de niveles magnéticos degenerados). Así, tomando  $\mu_{01} = 0.21$  Debyes, se asignó al parámetro de ganancia un valor inicial de  $g = 4250$ . Ahora bien, sabemos que en los experimentos no todas las moléculas de medio activo son bombeadas por igual ya que el haz de bombeo es absorbido por el medio a aproximadamente la mitad de la longitud total de la cavidad.

Lo que se hizo entonces fue tomar un valor de  $g = 2125$  (la mitad del valor obtenido inicialmente) que, en cierta medida, tiene en cuenta el fenómeno de la absorción del bombeo. Pero es evidente que hay un alto grado de arbitrariedad en este valor. No obstante no existe ninguna evidencia que nos permita preferir un valor u otro. Nosotros tomaremos un valor aún menor para la ganancia ya que, probablemente, ni siquiera un tercio de las moléculas son bombeadas eficientemente. Tomaremos, por tanto,  $g = 1400$ .

Así pues, los valores que nosotros asignaremos a los parámetros de control para acercarnos a las condiciones experimentales de la línea de  $81.5\mu\text{m}$  son

Tabla I

|  |                        |  |
|--|------------------------|--|
| $\gamma_{\perp} = 6.8 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$       | $\lambda_0 = 0.003192$ | $\Delta_2 = 30$  |
| $\gamma_{20} = 0.95\gamma_{\perp}$                       | $\lambda_1 = 0.005124$ | $g = 1400$   |
| $\gamma_{12} = 0.95\gamma_{\perp}$                       | $\lambda_2 = 0.921795$ | $\sigma = 1.85$ (y otros)                                    |
| $\gamma_2 = 0.95\gamma_{\perp}$                          | $k_2/k_1 = -7.5$       | $\beta$ y $\Delta_c$ , parámetros<br>principales de control. |
| $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_{11} = 0.28\gamma_{\perp}$ | $k_1 u = 6.8$          |  |

#### 4.2.b. Caso simplificado con bombeo resonante.

Como veremos más adelante el modelo LGBO-D con los parámetros de la Tabla I presenta comportamiento tipo Lorenz así como algunas interesantes desviaciones respecto al mismo. Será interesante saber entonces cuál es la influencia en el modelo LGBO-D de los parámetros que han quedado fijados en el apartado anterior. En particular será interesante saber si la desintonía de bombeo  $\Delta_2$  tiene alguna influencia en este sentido. Por esta razón (aunque *strictu sensu* el modelo no tiene validez para reproducir resultados experimentales en este límite) estudiaremos el caso  $\Delta_2 = 0$  límite en el que, además, el modelo se simplifica notablemente desde el punto de vista matemático. Para simplificar aún más tomaremos valores iguales para las relajaciones de todas las poblaciones ( $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{11}$ ) y para todas las coherencias ( $\gamma_{01} = \gamma_{20} = \gamma_{12} = \gamma_{\perp}$ ) y consideraremos también que toda la población se encuentra en el nivel 2 en ausencia de campos ( $\lambda_2 = b$ ,  $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$ ). Así pues, los parámetros que utilizaremos para estudiar el caso simplificado son los reunidos en la Tabla 2. En el apartado 4.3 justificaremos brevemente la influencia que la variación de alguno de ellos tiene en los resultados.

Tabla II

|  |                    |                                   |
|--|--------------------|-----------------------------------|
| $\gamma_{\perp} = 6.8 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$                   | $\lambda_0 = 0.$   | $\Delta_2 = 0$                    |
| $\gamma_{20} = \gamma_{12} = \gamma_{12} = \gamma_{\perp}$           | $\lambda_1 = 0.$   | $g = 1400$                        |
| $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{11} = 0.28 \gamma_{\perp}$ | $\lambda_2 = 0.28$ | $\sigma = 1.85$ (y otros)         |
|  | $k_2/k_1 = -7.5$   | $\beta$ y $\Delta_c$ , parámetros |
|  | $k_{1u} = 6.8$     | principales de control.           |

4.2.c. Línea de 374 $\mu\text{m}$ .

Vamos a calcular en este subapartado los valores de los parámetros correspondientes a la línea de 374 $\mu\text{m}$  del láser de amoníaco. Weiss y Klische (1985) proporcionan los siguientes datos

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| Anchura homogénea (HWHM),       | 100 KHz Pa <sup>-1</sup>                              |
| Anchura Doppler (HWHM),         | 1,2 MHz   |
| Momento dipolar transición FIR, | 2,1·10 <sup>-29</sup> [1 - (M/3) <sup>2</sup> ] C m   |
| Población del nivel 2,          | 1,3·10 <sup>18</sup> Pa <sup>-1</sup> m <sup>-3</sup> |

donde M es la tercera componente del momento angular del nivel molecular y HWHM es la semianchura a media altura de la curva de ensanchamiento. También sabemos que la presión del gas varía entre P = 2Pa y P = 8Pa según el experimento, que la desintonía de bombeo es  $\Delta_2 = -22\text{MHz}$  y que la longitud de onda de la transición láser es de 374 $\mu\text{m}$ . Nosotros vamos a estimar los valores de los parámetros suponiendo una presión de P = 2Pa.

Así,  $\gamma_{\perp}$  puede calcularse directamente a partir de la anchura homogénea (ah)

$$\gamma_{\perp} = 2\pi \cdot \text{ah} \cdot P = 1,26 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$$

Para el resto de relajaciones moleculares no tenemos datos salvo que  $b = \gamma_{11}/\gamma_{\perp} = 1$  [Lawandy y Ryan, 1986]. A partir de este dato y de lo que ocurre en la línea de 81.5 $\mu\text{m}$ , donde todas las coherencias tienen prácticamente la misma tasa de relajación, tomaremos  $\gamma_{20} = \gamma_{21} = \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\perp}$ .

Para determinar los valores de las tasas de bombeo incoherente de cada nivel,  $\lambda_i$ , hemos de conocer las frecuencias de las transiciones láser y de bombeo. La frecuencia de la transición láser la tomaremos como la correspondiente a  $\lambda = 374\mu\text{m}$ , es decir,  $\omega_{01} \approx \Omega_1 = 2\pi c/\lambda \approx 5,04 \cdot 10^{12} \text{s}^{-1}$ . En cuanto a la frecuencia de la transición de bombeo no la conocemos pero sabemos que el haz de bombeo es el correspondiente a la línea 10R(42) de  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}_2$  de frecuencia  $\Omega_2 = 29638880,19 \text{MHz} \approx 1,86 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$  [Witteman, 1987]. Como la desintonía de bombeo es de sólo  $-22 \text{MHz}$  ( $\Delta_2 = -111$  una vez normalizado a  $\gamma_1$ ), tomamos  $\omega_{02} \approx \Omega_2$ . Sabiendo la población de nivel 2 en ausencia de campos,  $n_2$  podemos determinar  $\lambda_1$  mediante la ley de distribución de Boltzmann para las poblaciones térmicas de los niveles

$$n_0 = n_2 \exp(-\hbar \omega_{02}/k_B T) \quad (4.2.1)$$

$$n_1 = n_0 \exp(\hbar \omega_{01}/k_B T) \quad (4.2.2)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y la temperatura  $T \approx 300 \text{K}$ , y la condición de que la suma de poblaciones en ausencia de campos valga la unidad

$$n_0 + n_1 + n_2 = 1 \quad (4.2.3)$$

Operando se obtiene

$$\lambda_0 = 0.0076; \lambda_1 = 0.0086; \lambda_2 = 0.9838$$

A partir de las frecuencias de los haces láser y de bombeo  $\Omega_2$  y  $\Omega_1$ , también obtenemos  $k_2/k_1 = 36.9$  que es positivo porque en este caso ambos campos son copropagantes. La anchura Doppler  $k_1 u$  (tomando  $u = 541 \text{m/s}$  como en [Pujol, 1989]) vale  $k_1 u = 7,2$ .

Nos resta asignar un valor a  $g$  y  $\sigma$ . Respecto a  $\sigma$ , al tratarse de una cavidad Fabry-Perot, vale  $\sigma = \omega_{01} L/2ct$  con  $L$  la longitud de la cavidad (que en el experimento es  $L = 1 \text{m}$ ) y  $t$  la transmitividad de los espejos. Como según Weiss y Klische (1985) las pérdidas oscilan entre el 2% y el 5% tenemos que  $2.5 \leq \sigma \leq 6$ . Respecto a la ganancia, ésta vale  $g = (\Omega_1 \mu_{01}^2 N/2\epsilon_0 \hbar)$ . Como los niveles de la transición 0-1 tienen un momento angular  $J = 2$ , la tercera componente puede valer  $M = 0, 1, 2$ . Haciendo un promedio de  $\mu_{01}$  para los diferentes valores de  $M$  con la expresión dada más arriba, obtenemos  $\mu_{01} = 5.51 \text{Debyes}$  (unas 16 veces mayor que en la línea de  $81.5\mu\text{m}$ ). Tomando para  $N$  el valor aproximado  $n_2 = 0.65 \cdot 10^{18} \text{m}^{-3}$  y dividiendo por 3 como hicimos anteriormente para

tener en cuenta que no todas las moléculas son bombeadas, obtenemos para  $g$  un valor  $g = 10^5$ , que es una ganancia enorme si se compara con  $g = 1400$  de la línea de  $81.5\mu\text{m}$ .

En la Tabla III recogemos los valores de los parámetros correspondientes a la línea de  $374\mu\text{m}$ .

Tabla III

|   |                      |                               |
|---|----------------------|-------------------------------|
| $\gamma_{\perp} = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$                 | $\lambda_0 = 0.0076$ | $\Delta_2 = -111$             |
| $\gamma_{20} = \gamma_{12} = \gamma_{\perp}$                        | $\lambda_1 = 0.0086$ | $g = 10^5$                    |
| $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{11} = 0.28\gamma_{\perp}$ | $\lambda_2 = 0.9837$ | $\sigma = 2.5$                |
| $k_2/k_1 = 36.9$  | $k_1 u = 7.2$        | $\beta$ parámetro de control. |

#### 2.d. Resolución numérica de las ecuaciones.

Comentemos brevemente cuál es el método de resolución numérica de las ecuaciones. Las Ecs.(4.1.3) son un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales que exigen la resolución numérica de las ecuaciones materiales para cada una de las velocidades posibles (de hecho se toma un conjunto discreto de velocidades), la posterior integración para el cálculo de la amplitud del campo  $\alpha$  y el valor de la fase  $\phi$ . Para realizar la integración de las ecuaciones diferenciales utilizamos una rutina de Runge-Kutta de 7°-8° orden que proporciona una precisión más que suficiente. Ahora bien, ¿que precisión hemos de exigir en el cálculo de las integrales sobre velocidades?. Para realizar esta integración lo que se hace es considerar un conjunto discreto de grupos de velocidades que cubren un cierto intervalo de integración sobre la distribución de las mismas. Es evidente que cuanto mayores sean tanto el intervalo de integración como el número de grupos de velocidades, mayor será el número de ecuaciones diferenciales a resolver: el número total de esas ecuaciones es el número de grupos multiplicado por el número de ecuaciones materiales, 9, más las correspondientes a campo generado, fase y tiempo. En parte de los resultados que se exponen a continuación se han tomado 24 grupos de velocidad con una anchura de  $0.25k_1 v$  cada uno (un total de 219 ecuaciones diferenciales), que es el criterio adoptado en los estudios anteriores [Pujol, 1989] y que garantiza un grado suficiente, en general, de precisión. Sin embargo, adoptaremos integraciones más precisas (51 grupos de  $0.08k_1 v$  de anchura, lo que supone un total de 462 ecuaciones diferenciales, o incluso  $0.05k_1 v$  de anchura y 81 grupos de velocidades, que lleva a 762 ecuaciones) para cierto tipo de cálculos en los que se hace preciso. Sin embargo se ha de buscar un compromiso entre

la precisión del cálculo y la rapidez con que puede llevarse a cabo y, por eso, se utilizará la primera aproximación en general.

### 4.3. Comportamiento de Tipo Lorenz en la línea de $81.5\mu\text{m}$ .

En este apartado vamos a estudiar el comportamiento LGBO-D con los valores de los parámetros de la Tabla I. Antes de estudiar las soluciones dependientes del tiempo de las Ecs.(4.1.3) resulta conveniente analizar algunos aspectos de la solución estacionaria no trivial. En la Fig.4.2 representamos el valor de la intensidad de salida  $I \equiv \alpha^2$  frente a la de bombeo  $\beta^2$  que hemos obtenido por integración numérica para un conjunto dado de parámetros (ver pie de figura). Dos características han de ser resaltadas. Por una parte, es evidente que no existe, a diferencia del modelo de Lorenz-Haken, una relación lineal entre el parámetro de bombeo y la intensidad de salida. Este hecho, bien conocido, ha sido utilizado como argumento en contra del posible comportamiento tipo Lorenz de este modelo [Lawandy y Ryan, 1987] pero, en realidad, significa que si el LGBO-D fuese equivalente a un modelo de Lorenz digamos efectivo, el parámetro de bombeo de este último no sería  $\beta^2$  sino una función de  $\beta^2$  que sí resultaría lineal con la intensidad  $I$ . Por ejemplo, la curva de la Fig.4.2 se ajusta muy bien a una ecuación del tipo  $\beta = (aI^2 + bI + c)$  en el rango de  $\beta$  que se considera en la figura, con lo que la intensidad  $I$  es lineal con respecto al "parámetro de bombeo"  $[b - 4a(c - \beta)]^{1/2}$ . Este hecho nos previene ya de considerar cantidades como el cociente de umbrales (*ratio* de bombeos del segundo al primer umbral) del LGBO-D como un parámetro cuantitativamente comparable con las predicciones del modelo de Lorenz-Haken. Esto ha venido siendo hecho, erróneamente, de forma sistemática desde los primeros trabajos de Weiss y ha de ser corregido. Por otra parte la Fig.4.2 muestra una tendencia a la saturación, lo que significa que no podrá excederse una  $I$  máxima.

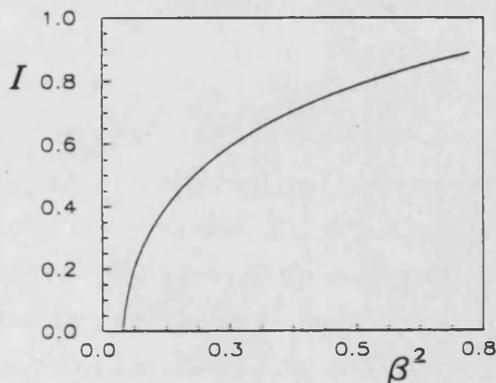


Fig.4.2. Dependencia de la intensidad láser estacionaria con la intensidad de bombeo  $\beta^2$  para  $\sigma = 5$ ,  $\Delta_c = -4$ . Nótese la dependencia no lineal de la salida.

#### 4.3.a. Comportamiento dinámico. Diagrama de fases.

La Fig.4.3 muestra, de forma simplificada, los diferentes tipos de comportamiento dinámico exhibidos por las Ecs.(4.1.3) para  $\sigma = 1.85$  (que corresponde a unas pérdidas de aproximadamente el 8% en el resonador óptico) en el plano de los parámetros de control  $\langle \beta, \Delta_c \rangle$  utilizando como forma de bombeo el llamado *hard mode excitation*, esto es, resolviendo las ecuaciones para un bombeo dado con condiciones iniciales de láser apagado (por contraposición al *soft mode excitation* que consiste en un incremento adiabático del bombeo, es decir, que las condiciones iniciales son las correspondientes al láser estabilizado en un bombeo ligeramente distinto al utilizado). Los distintos símbolos denotan las zonas de emisión estacionaria estable (ST) emisión caótica (CH) y de emisión periódica  $P_n$  ( $n$  indica el número de máximos de intensidad en un periodo). Dentro de la zona caótica hay una región (alrededor de la marca SP) donde se observa el típico comportamiento en *spiralling* de la intensidad del modelo de Lorenz-Haken (cf. Introducción y ver ejemplos en figuras posteriores). La línea rayada indica el valor de la desintonía correspondiente a sintonía central, esto es, el valor de la desintonía de la cavidad para el que resuena en ésta la radiación emitida por las moléculas resonantemente bombeadas, y que corresponde a una intensidad  $I$

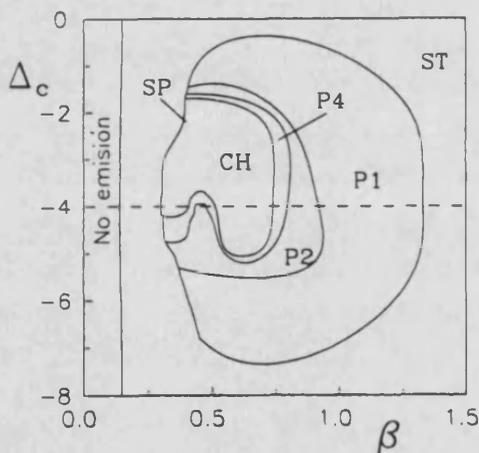


Fig.4.3. Diagrama de fase que muestra en el plano  $\langle \Delta_c, \beta \rangle$  las diferentes zonas de comportamiento dinámico para  $\sigma = 1.85$  (mantendremos este valor de  $\sigma$  mientras no digamos lo contrario, el resto de parámetro en la tabla I). CH: caos,  $P_n$ : comportamiento periódico de periodo  $n$ , SP: *spiralling*, ST: emisión estacionaria estable. La línea a trazos indica la posición de la sintonía central.

estacionaria máxima. Como el haz de bombeo se encuentra desintonizado respecto a la transición 2-0, el valor de sintonía central no es cero, sino que viene dado por  $\Delta_c = (k_1/k_2)\Delta_2 = -4\gamma_2$ . Esto es fácil de ver. Las moléculas que se mueven con velocidad axial  $v$  ven la frecuencia  $\Omega_2$  del haz de bombeo desplazada a  $\nu_2 = [\Omega_2 + (k_2/k_1)k_1 v]$  y por tanto, las moléculas resonantemente bombeadas ( $\nu_2 = \omega_{02}$ ) son aquellas que verifican  $k_1 v = -(k_1/k_2)\Delta_2$ . Por otra parte, esas mismas moléculas ven la frecuencia del haz láser desplazada a  $\nu_1 = (\omega_c + k_1 v)$  [recuérdese que hemos tomado como frecuencia de referencia para el campo generado la de la cavidad, i.e.,  $\Omega_1 = \omega_c$ ] y serán resonantes con

la cavidad ( $v_1 = \omega_{01}$ ) para una desintonía  $\Delta_c = -k_1 v$ . Igualando ambas expresiones, obtenemos el valor anterior de la sintonía central.

Este diagrama de fases nos permite ya realizar una primera comparación tanto con los resultados experimentales como con el modelo de Lorenz-Haken. El primer hecho relevante es que, alrededor de sintonía central, existe una zona en la que la solución estacionaria da lugar a una transición brusca a comportamiento caótico al aumentar la amplitud de bombeo  $\beta$ . A partir de la zona de comportamiento caótico, pasamos a zonas de comportamiento periódico para valores crecientes del bombeo y/o valores de la desintonía de la cavidad que se alejan de sintonía central, siguiéndose una ruta inversa de doblamiento de periodos (de Feigenbaum) cuanto más se incrementan estos parámetros en el sentido descrito.

Todas éstas son características comunes con el modelo de Lorenz-Haken y que no aparecen en los LGBO homogéneos (en particular la zona de *spiralling*). Pero existen diferencias cuantitativas aparte de que el diagrama de fases no esté centrado en  $\Delta_c = 0$  (lo que ha quedado explicado más arriba). La más notable es que para un cierto valor del bombeo el láser vuelve a estabilizarse, mientras que el modelo de Lorenz exhibe comportamiento periódico indefinidamente. Ese hecho es debido a que para un cierto valor de  $\beta$ , el desdoblamiento AC-Stark causado por el haz de bombeo se convierte en un efecto muy importante, introduciendo esta desviación con respecto al láser de dos niveles (que es común con el comportamiento de los LGBO homogéneos). Por tanto, el comportamiento de tipo Lorenz es más notable para bombeos bajos e intermedios. La otra diferencia reseñable es la falta de simetría que este diagrama de fases tiene respecto a sintonía central. Esto es debido tanto a la desintonía de bombeo como al valor relativamente pequeño de la anchura Doppler, que rompe la simetría respecto a sintonía central al permitir mayores ganancias para valores más pequeños de  $|\Delta_c|$  (hay un mayor número de moléculas que resuenan cuanto menor es  $|\Delta_c|$  ya que la distribución de velocidades está centrada alrededor de  $k_1 v = 0$ ). Esta falta de simetría es particularmente notable por lo que respecta a la situación de la zona de *spiralling*, que se encuentra centrada alrededor de  $\Delta_c = -2.2$  en lugar de alrededor de  $\Delta_c = -4$  (sintonía central).

La Fig.4.4(a) muestra la ruta de bifurcaciones (realizada ahora con incremento adiabático del bombeo) correspondiente a  $\Delta_c = -2.2$ , que es el valor de la desintonía para el que se observa *spiralling* más claramente. Nótese como existe un cierto dominio de biestabilidad entre la solución estacionaria y el atractor caótico. Es de resaltar que en este caso se han podido localizar claramente ventanas periódicas (P10 en la figura) de lo cual se muestra un ejemplo en la Figs.4.4(b) y (c). Señalemos también que el cociente

de umbrales tiene, en este caso, un valor de aproximadamente 12 que es perfectamente compatible con los valores obtenidos en los experimentos (del orden de 14). En cualquier caso hemos comprobado que el valor del cociente de umbrales es algo que puede ser mejorado o empeorado sin más que modificar ligeramente el valor de  $\sigma$  y el de  $g$  y, por tanto, no es un dato numérico al que debemos prestar excesiva atención puesto que, como ya hemos comentado, los valores de estos parámetros no se conocen con precisión.

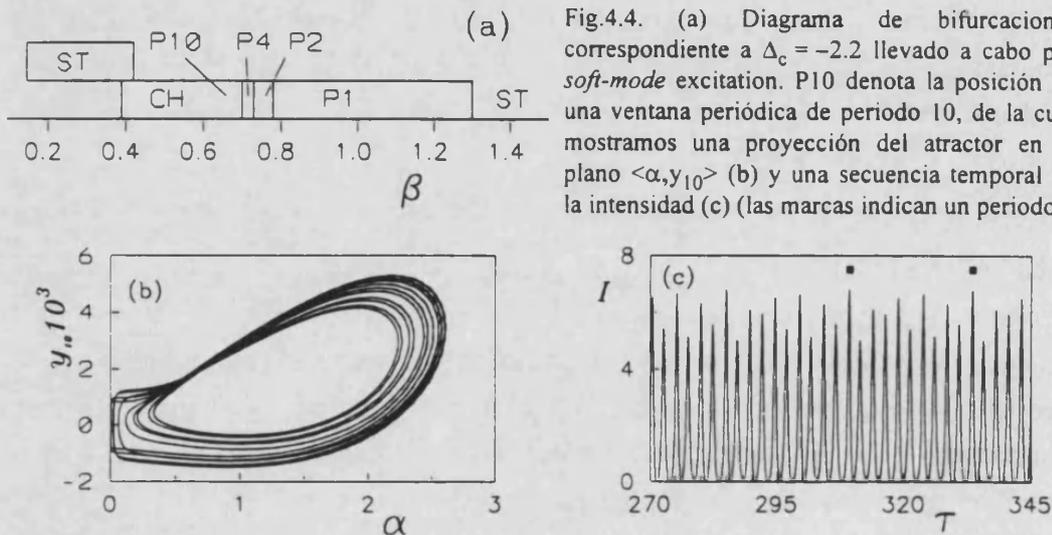


Fig.4.4. (a) Diagrama de bifurcaciones correspondiente a  $\Delta_c = -2.2$  llevado a cabo por *soft-mode* excitation. P10 denota la posición de una ventana periódica de periodo 10, de la cual mostramos una proyección del atractor en el plano  $\langle \alpha, y_{10} \rangle$  (b) y una secuencia temporal de la intensidad (c) (las marcas indican un periodo).

¿Hasta qué punto reproduce lo anterior los resultados experimentales?. Hasta donde los experimentos llegan, bastante bien. El bombeo máximo alcanzado en los experimentos no ha permitido acceder a la zona de comportamiento periódico que sigue al comportamiento caótico, aunque sí se han visto las rutas inversas de Feigenbaum variando desintonías. La mayor discrepancia radica en la desintonía en la que se encuentra el *spiralling*. Según Weiss éste se encuentra en sintonía central. En este sentido hemos investigado la influencia que el valor de  $\sigma$  pudiera tener en cuanto al valor de la desintonía en el que se encuentra el *spiralling*. La Fig.4.5 muestra el resultado obtenido: es posible conseguir este comportamiento de la intensidad más cerca de (pero nunca exactamente en) resonancia para valores menores de  $\sigma$ , si bien existe un conjunto de valores de este parámetro para el que parece no haber *spiralling*. No obstante este resultado numérico es únicamente indicativo ya que depende de la precisión empleada en la integración Doppler. Efectivamente, incrementando la precisión en el caso que nos ocupa, hemos observado que el *spiralling* pasa de estar situado en  $\Delta_c = -2.2$  a estarlo en  $\Delta_c = -3.3$ , mucho más cerca por tanto de sintonía central, pero nunca en  $\Delta_c = -4$ . Esto es también un indicativo de que parte de la distorsión del diagrama de fases puede deberse a la precisión de la integración. No

obstante hemos comprobado explícitamente que una mejora de la precisión no introduce elementos cualitativos nuevos en el comportamiento dinámico. En cualquier caso, no parece que los aparatos de medida permitan localizar la sintonía central con precisión mayor que  $0.5\gamma_{\perp}$  y estamos, por tanto, dentro de ese margen (por la misma razón no podemos saber el grado de distorsión respecto al modelo de Lorenz del diagrama de fases experimental). Pasemos a estudiar ahora el comportamiento dinámico de las diferentes variables.

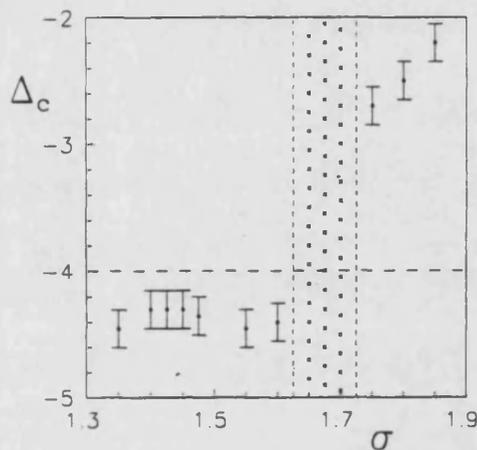


Fig.4.5. Representación de la posición aproximada de las zonas de *spiralling* en el plano  $\langle \sigma, \Delta_c \rangle$  (para cada caso el bombeo ha sido convenientemente variado). En la región marcada con cruces no se ha encontrado este comportamiento. Nótese que nunca se encuentra el *spiralling* exactamente en resonancia (marcada por la línea horizontal a trazos).

#### 4.3.b. Comportamiento de la fase. Atractores.

El comportamiento dinámico de la fase del LGBO-D ha sido estudiado anteriormente en Roldán (1989) y en Roldán *et al* (1989). En estos trabajos se puso de manifiesto que el comportamiento dinámico de esta variable es comparable a la del láser de dos niveles homogéneo (que hemos tratado ya en el Capítulo 1). Ejemplos del comportamiento de la fase los tenemos en las Figs.4.6 y 4.7 para regímenes de emisión periódico y caótico. Es claramente apreciable el salto brusco de fase que se produce cada vez que la amplitud alcanza su valor mínimo, salto que es responsable del cambio de signo de las componentes del campo complejo (con las matizaciones hechas al respecto en el Capítulo 1).

Ahora bien, existen también diferencias con el comportamiento de un láser de dos niveles que no han sido suficientemente comentadas. Estas diferencias son de dos tipos si bien tienen el mismo origen. La más notable de ellas es que en régimen caótico la fase exhibe saltos tanto positivos como negativos, Fig.4.7, hecho nunca observado en el modelo de Lorenz-Haken. Sin embargo, esta característica sí ha sido observada en los experimentos, lo que da aún mayor soporte al LGBO-D, si bien existe una diferencia: los saltos positivos y negativos de la fase sólo los exhibe el LGBO-D en régimen

caótico, mientras que en los experimentos aparecen tanto en régimen periódico como en caótico.

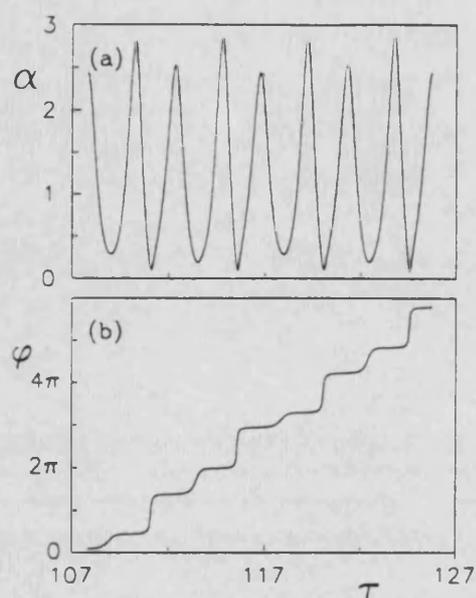


Fig.4.6. Evolución de la amplitud (a) y la fase (b) en un caso de emisión periódica  $P_4$  correspondiente a  $\beta = 0.76$  y  $\Delta_c = -4$  (sintonía central). Nótese que la fase tiene el mismo comportamiento que en el modelo de Lorenz-Haken. En este caso (sintonía central) los mesetas de fase son planas pero los saltos de fase no son de  $\pi$  radianes.

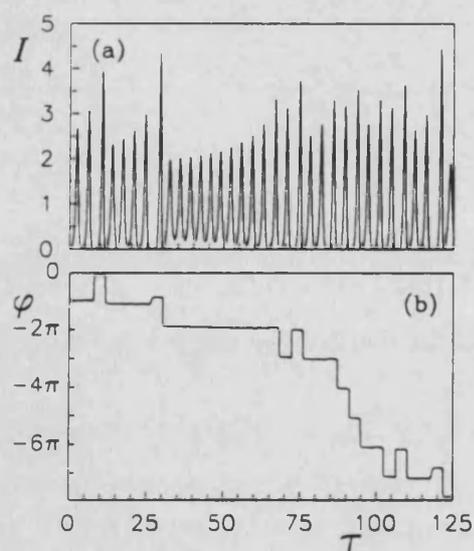


Fig.4.7. Evolución de la intensidad (a) y de la fase (b) en el caso caótico  $\beta = 0.415$  y  $\Delta_c = -3.4$  (cálculo realizado con grupos de anchura  $0.1k_1v$ ). Nótese como los saltos de fase no son siempre positivos o negativos, sino que alternan el signo tal y como sucede en los experimentos. Para obtener estas representaciones se ha hecho un cambio de referencial adecuado para que las mesetas de la fase se vean planas.

La segunda diferencia a la que hacíamos mención tiene que ver con la sintonía central. En el modelo de Lorenz-Haken la sintonía central conlleva tres características para el comportamiento de la fase (si estamos en el referencial de la cavidad, la frecuencia de la transición o la solución estacionaria, que todos coinciden en este caso): (i), las mesetas de la fase son planas; (ii), para desintonías mayores (positivas) la fase exhibe saltos negativos y viceversa; y (iii), los saltos son de  $\pi$  radianes en sintonía central y menores fuera de ella (medidos en un referencial en que la meseta tenga pendiente cero). Sin embargo, en el LGBO-D estas tres características no coinciden en

un mismo valor de la desintonía: para  $\beta = 0.41$  las mesetas son planas en  $\Delta_c = -4$ , y el sentido de los saltos de fase cambia (y los saltos son de  $\pi$  radianes) en la desintonía para la que se encuentra spiralling (en este caso alrededor de  $\Delta_c = -2.2$ ). No obstante es fácil pensar que el origen de estas diferencias radica en la ya referida asimetría introducida por la desintonía de bombeo  $\Delta_2$  y por el valor del cociente  $k_2/k_1$ . En el apartado siguiente veremos que estas discrepancias desaparecen cuando hacemos  $\Delta_2 = 0$ . Lamentablemente, estas últimas diferencias entre el LGBO-D y el modelo de Lorenz-Haken no han sido comprobadas experimentalmente. Por lo demás, todo lo estudiado en el Capítulo 2 para la fase del láser de dos niveles es aplicable al LGBO-D. Podemos pasar entonces a hacer correcciones en el referencial del campo de manera que podamos obtener proyecciones de los atractores que nos permitan apreciar el parecido de los mismos con los del modelo de Lorenz [compárese la Fig.4.8(a) con la Fig.1.4(c)]. En la Fig.4.8 mostramos diferentes ejemplos de atractores periódicos en los que la fase ha sido corregida con el referencial  $\omega_0$  introducido por nosotros (ver Capítulo 1). Nótese el extraordinario parecido existente entre estos atractores y los del modelo de Lorenz. La figura permite también apreciar como el paso de  $P_2$  a  $P_1$  en intensidad no es una verdadera bifurcación sino una simetrización del atractor, cosa que también ocurre en el modelo de Lorenz.

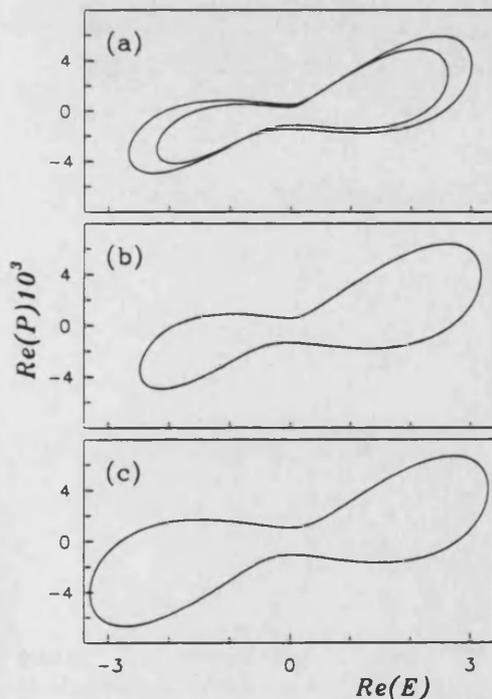


Fig.4.8. Representación en el plano  $\langle \text{Re}(E), \text{Re}(P) \rangle$  de la proyección de los atractores periódicos correspondientes a  $\Delta_c = -4$  y (a)  $\beta = 0.76$ , (b)  $\beta = 0.85$  y (c)  $\beta = 1.00$ . A medida que aumenta el bombeo el comportamiento se hace más sencillo siguiendo una ruta inversa de Feigenbaum. Nótese que el paso de  $P_2$  a  $P_1$  no es una verdadera bifurcación sino una simetrización del atractor. Para hacer estas representaciones se ha utilizado el referencial  $\omega_0$  (cf. Cap.1) de manera que  $\omega_0 - \omega_c = -0.4033$  (a),  $-0.4193$  (b) y  $-0.62$  (c).

### 4.3.c. Caracterización del comportamiento caótico.

Hasta ahora hemos estudiado el diagrama de fases y el comportamiento de la fase con el resultado de un buen acuerdo general tanto con el experimento como con el modelo de Lorenz-Haken. Ahora bien, el comportamiento de la fase que hemos descrito es bastante común en los láseres monomodo (de ahí la generalidad de lo expuesto en el Capítulo 1) y el diagrama de fases no es una característica suficiente para hablar de comportamiento tipo Lorenz. Para poder afirmar esto con seguridad hemos de comprobar que el LGBO-D exhibe caos de tipo Lorenz.

La Fig.4.9 muestra un largo registro de la intensidad obtenido con alta precisión de integración. Nótese el extraordinario parecido tanto con los *spirallings* experimentales como con los del modelo de Lorenz. Podemos cuantificar este parecido de dos formas más precisas: mediante el mapa de intensidades y calculando la dimensión fractal del registro.

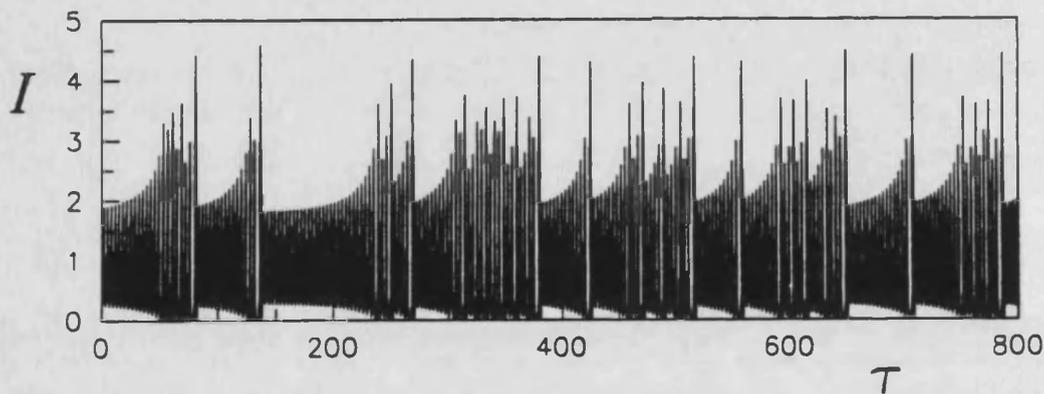


Fig.4.9. Evolución de la intensidad en régimen caótico en la que se aprecia claramente la secuencia de *spirallings* propia del modelo de Lorenz y de los experimentos (compárese con las Fig.1.4 y 3.8). Los parámetros son los mismos que los de la Fig.4.7(a).

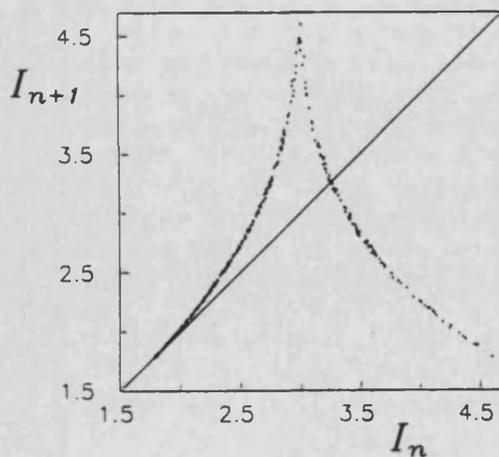


Fig.4.10. Mapa de intensidades del registro temporal de la Fig.4.9 que muestra la existencia de una cuspide perfectamente definida tal y como sucede en el modelo de Lorenz.

La Fig.4.10 muestra el mapa de intensidades correspondiente a este registro de intensidad. Está perfectamente definida la cúspide (*cusp map*) típica del caos de Lorenz, de la cuál ya mostramos un ejemplo en la Fig.I.6 (en el apartado siguiente veremos que este tipo de mapas no es obtenido siempre en el LGBO-D).

En cuanto a las dimensiones generalizadas del registro temporal de la intensidad (uno de los tests fundamentales a realizar) en la Tabla IV recogemos el resultado de los cálculos llevados a cabo por los Drs. V.J. Martínez de la Universitat de València y U. Hübner del PTB de Braunschweig. Mostramos únicamente los valores de las dimensiones de Hausdorff, información y correlación ( $D_0$ ,  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente) tanto del registro anterior (caso 1) como del modelo de Lorenz (LM), de un registro experimental (EX) y de otros casos que comentaremos más adelante (casos 2 y 3). De momento sólo nos interesa comentar el caso 1 (que es el de la Fig.4.9). Nótese que los valores de las tres dimensiones son muy parecidos a los del modelo de Lorenz, especialmente el valor de la dimensión de Hausdorff  $D_0$ , al tiempo que se aprecia que las dimensiones extraídas de los datos experimentales son un poco mayores. En cualquier caso es evidente que todas son del mismo orden y que podemos hablar, sin lugar a dudas, de caos de tipo Lorenz.

|         | $D_0$ | $D_1$ | $D_2$ |
|---------|-------|-------|-------|
| LM*     | 2.148 | 2.057 | 2.052 |
| LM**    | 2.20  | 2.14  | 2.00  |
| EX**    | 2.245 | 2.240 | 2.08  |
| Caso 1& | 2.151 | 2.002 | 1.923 |
| Caso 1# | 2.180 | 2.085 | 2.024 |
| Caso 2# | 2.299 | 2.128 | 2.023 |
| Caso 3# | 2.470 | 2.281 | 2.197 |

Tabla IV. (\*) tomado de Domínguez-Tenreiro *et al* (1992), (\*\*) tomado de la Fig.5 de Hübner *et al* (1992), (#) cálculos realizados por el Dr. U.Hübner (PTB, Braunschweig), (&) cálculos realizados por el Dr. V.J.Martínez (Dpt. de Matemática Aplicada i Astronomia, Universitat de València). Los cálculos del modelo de Lorenz corresponden a los parámetros (\*)  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  y  $\sigma = 10$  y (\*\*)  $r = 15$ ,  $b = 0.25$  y  $\sigma = 2$ .

#### 4.3.d. Comportamiento de los términos $R(t)$ y $S(t)$ .

A raíz de lo visto hasta ahora podemos afirmar que el modelo LGBO-D exhibe comportamiento tipo Lorenz para el conjunto de parámetros que hemos utilizado. Ahora bien, ya indicamos en el primer apartado de este capítulo que las ecuaciones de ambos

modelos (el LGBO-D y el de Lorenz-Haken) tienen diferencias importantes que podíamos visualizar a través de los términos  $R(t)$  y  $S(t)$ . La pregunta es inmediata: ¿por qué no introducen diferencias importantes estos términos en el comportamiento de las ecuaciones?. Esta pregunta es tanto más pertinente cuanto que sabemos que el modelo LGBO homogéneo se comporta de manera distinta al modelo de Lorenz (recuérdese que el modelo homogéneo también tiene los términos extra  $R(t)$  y  $S(t)$  sólo que en  $R(t)$  el término Doppler,  $R_D(t)$ , es nulo).

A la vista de las Ecs.(4.1.7) caben únicamente dos formas de reducción de las mismas al modelo de Lorenz-Haken para explicar así que exhiban un comportamiento tipo Lorenz: (i) que el término  $R(t)$  sean nulo o despreciable y que el término  $S(t)$  sea constante (no puede ser nulo ya que constituye el bombeo del láser) de manera que pueda ser incorporado en el término  $b$  definiendo una tasa total de bombeo y (ii) que no se verifique la condición (i) pero ambos términos se comporten como versiones reescaladas y/o desplazadas de los otros términos de sus correspondientes ecuaciones, de manera que puedan ser incorporados a los mismos mediante la definición de unos parámetros efectivos en las ecuaciones. Recalquemos que la primera posibilidad implicaría la desaparición de los efectos de bombeo óptico y de efecto Doppler (no de cada uno de ellos, sino de su suma). La segunda posibilidad implica algo mucho más sutil: la suma de los efectos coherentes y de efecto Doppler se comportaría de forma "esclavizada" respecto a los "términos Lorenz" de las ecuaciones (algo cualitativamente equivalente a una eliminación adiabática de todas las coherencias que no sean las de la transición láser) y que daría como resultado una modificación efectiva de los parámetros.

Los cálculos que hemos realizado nos demuestran que  $R(t)$  no es despreciable y  $S(t)$  no puede ser constante ya que todas las ecuaciones del sistema están acopladas. Como muestra de ello, en la Fig.4.11 mostramos la evolución del término  $S(t)$  junto con la de la intensidad  $I(t)$  y la de la diferencia de poblaciones  $D(t)$  para un caso periódico. Nótese como el término  $S(t)$  no es constante (si bien su modulación es sólo de alrededor del 15%) ni tampoco despreciable. Lo mismo hemos comprobado para el término  $R(t)$ . Así pues, la respuesta matemática a la pregunta de por qué las Ecs.(4.1.7) del modelo LGBO-D muestran comportamiento tipo Lorenz han de ser buscadas en la segunda de las opciones.

Existen diversas formas de abordar el punto de vista de la segunda opción, el más sencillo de los cuales consiste en tratar separadamente los términos  $R(t)$  y  $S(t)$ . Comencemos por la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones, que volvemos a escribir para mayor comodidad

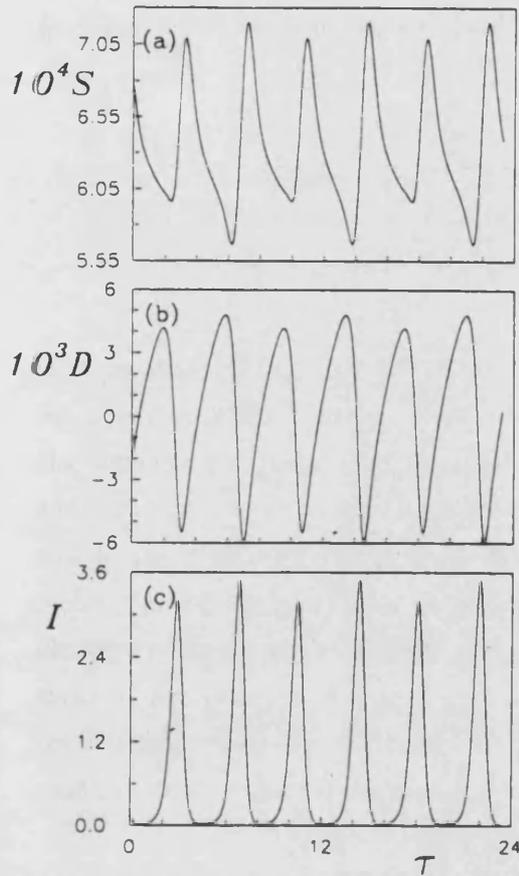


Fig.4.11. Evolución (a) del término  $S(t)$ , (b) de la diferencia de poblaciones  $D(t)$  y (c) de la amplitud del campo generado  $I(t)$  para  $\beta = 0.45$  y  $\Delta_c = -1.5$ . Es evidente que el término  $S(t)$  no es en absoluto despreciable ni constante.

$$\frac{dD}{d\tau} = b(r - D) - 2(EP^* + PE^*) - S \quad (4.3.1)$$

Si el término  $S(t)$  se comportase como una versión escalada y/o desplazada de  $D(t)$  podríamos hacer la siguiente aproximación

$$\frac{dD}{d\tau} = b^{\text{eff}}(r^{\text{eff}} - D) - 2(EP^* + PE^*) \quad (4.3.2)$$

donde los parámetros efectivos  $b^{\text{eff}}$  y  $r^{\text{eff}}$  pueden ser obtenidos mediante una minimización de las diferencias promediadas temporalmente entre los miembros de la derecha de las Ecs.(4.3.1) y (4.3.2). En la Fig.4.12(a) mostramos la evolución de la  $\dot{D}$  dada por la Ec.(4.3.1) frente a la  $\dot{D}$  dada por la Ec.(4.3.2) cuando los parámetros no han sido aún modificados (llamémosla  $\dot{z}$ ) [es decir, simplemente hemos restado a  $\dot{D}$  el término  $S(t)$ ]. Nótese como ambos términos son muy parecidos (serían iguales si obtuviésemos una recta con los mismos valores extremos en ambos ejes). Sin embargo existe una manera más adecuada de realizar este ajuste. Escribamos por separado las

ecuaciones de evolución de cada una de las poblaciones de la transición láser (realizada ya la integración Doppler)

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{00}}{dt} &= -\gamma_0\rho_{00} + \lambda_0 - 2\alpha\text{Im}\rho_{10} - S(t), \\ \frac{d\rho_{11}}{dt} &= -\gamma_1\rho_{11} + \lambda_1 + 2\alpha\text{Im}\rho_{10},\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

Es evidente que el término de bombeo óptico  $S(t)$  afecta únicamente a la población del nivel 0. Parece más razonable, por tanto, llevar a cabo el ajuste del término  $S(t)$  [que aparece escrito de forma explícita en la Ec.(4.3.3)] con respecto a la población del nivel 0 y no con respecto a la diferencia de poblaciones. Evidentemente esto significa que no vamos a obtener un modelo de Lorenz equivalente por lo que respecta a la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones, sino un modelo equivalente de láser de dos niveles con relajaciones diferentes para cada nivel. Sin embargo este hecho no es relevante pues ya vimos en el Capítulo 2 que el que las tasas de relajación de ambos niveles no sean iguales no introduce diferencias cualitativas importantes respecto al comportamiento del modelo de Lorenz, particularmente cuando, como veremos más adelante, no son muy diferentes.

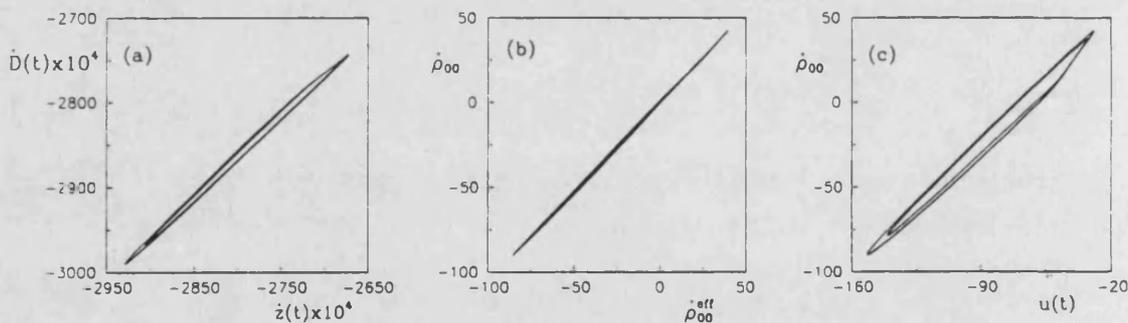


Fig.4.12. (a) Evolución de la parte derecha de la Ec(4.3.1) frente a si misma pero quitando el término  $S(t)$ . El comportamiento es casi el de una recta de pendiente 1 lo que indica que  $S(t)$  ha de tener una evolución temporal semejante a la del resto de términos de la Ec.(4.3.1). (b) Resultado de sustituir  $S(t)$  en la ecuación de evolución de  $\rho_{00}$  por una función lineal de  $\rho_{00}$ . Ajustando todos los puntos a una recta se obtiene  $\dot{\rho}_{00} = m\rho_{00}^{\text{eff}} + n$  con  $m = 1.055$ ,  $n = -0.04$  y un coeficiente de regresión  $\varepsilon = 0.9997$ . (c) Lo mismo que en (b) pero sin llegar a realizar el ajuste. Ver texto para más detalles. Los parámetros son los mismos de la Fig.4.11.

Así pues, vamos a suponer que  $-2\beta\text{Im}(\rho_{20}) \approx a\rho_{00} + b$ , o lo que es equivalente, que

$$-\gamma_0^{\text{eff}}\rho_{00} + \lambda_0^{\text{eff}} = -\gamma_0\rho_{00} + \lambda_0 - 2\beta\text{Im}\rho_{20}. \quad (4.3.4)$$

Si llamamos  $u(t) = -\gamma_0 \rho_{00} + \lambda_0 - 2\beta \text{Im}(\rho_{20})$ , lo que hemos de exigir es que

$$\Theta = \sum_t [-\gamma_0^{\text{eff}} \rho_{00} + \lambda_0^{\text{eff}} - u(t)] \equiv \min, \quad (4.3.5)$$

es decir, que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma_0^{\text{eff}}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_0^{\text{eff}}} = 0. \quad (4.3.6)$$

De estas dos ecuaciones obtenemos dos expresiones para los parámetros efectivos (que no damos por mor de brevedad). En la fig.4.12(b) mostramos el resultado del ajuste representando  $\dot{\rho}_{00}$  frente a  $\dot{\rho}_{00}^{\text{eff}}$  y que puede ser comparada con la Fig.4.12(c) donde mostramos lo mismo pero sin modificar los parámetros. Nótese como el ajuste es bastante bueno en el sentido de que prácticamente obtenemos la evolución a lo largo de una recta de pendiente unidad pasando por el origen (ver pie de figura). En este caso, el valor de los parámetros efectivos es  $\gamma_0^{\text{eff}} = 0.5\gamma_{\perp}$  y  $\lambda_0^{\text{eff}} = 0.015\gamma_{\perp}$ . Así pues, no parece que el término de bombeo óptico produzca distorsión alguna respecto al comportamiento de tipo Lorenz.

Pasemos a analizar la ecuación de evolución de la polarización. Recordemos que

$$\frac{dP}{d\tau} = -[1 - i\Delta] P + ED - R \quad (4.3.7)$$

Podemos hacer la suposición  $R(t) = aP(t) + b$ , y realizar un ajuste de forma semejante a como hicimos con el término  $S(t)$ , determinando la calidad del ajuste la bondad de esta suposición. La dificultad con que nos encontramos ahora es que  $P$  es una variable compleja y, en consecuencia, hemos de ajustar tanto su parte real como su parte imaginaria. Lo más cómodo es trabajar con las partes real e imaginaria de  $\rho_{10}(t)$  (a las que denotaremos por  $x_{10}$  e  $y_{10}$ ), cuyas ecuaciones de evolución obtenemos a partir de la de la coherencia  $\rho_{10}(v,t)$  en las Ecs.(4.1.3) integrando sobre todas las velocidades, y que son

$$\frac{dx_{10}}{dt} = -\gamma_{\perp} x_{10} + (\Delta_c - g \frac{x_{10}}{\alpha}) y_{10} + \beta y_{12} + \int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) v y_{10}, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{dy_{10}}{dt} = -\gamma_{\perp} y_{10} - (\Delta_c - g \frac{x_{10}}{\alpha}) x_{10} + \alpha(\rho_{00} - \rho_{11}) - \beta x_{12} - \int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) v x_{10},$$

donde los dos últimos términos del miembro de la derecha de ambas ecuaciones son las partes imaginaria y real de  $R(t)$  escritas de forma explícita y sin normalizar y los dos primeros términos en la ecuación de  $x_{10}$  y los tres primeros en la de  $y_{10}$  son los "términos Lorenz".

Vamos a llevar a cabo el siguiente ajuste. Llamando  $v(t)$  a los términos Lorenz de la ecuación de  $x_{10}$  con parámetros efectivos  $\gamma_1^{\text{eff}}$  y  $\Delta_c^{\text{eff}}$ , es decir

$$v(t) = -\gamma_1^{\text{eff}}x_{10} + (\Delta_c^{\text{eff}} - g\frac{x_{10}}{\alpha})y_{10}, \quad (4.3.9)$$

y  $w(t)$  a los términos Lorenz de la ecuación de  $y_{10}$  con los mismos parámetros efectivos,

$$w(t) = -\gamma_1^{\text{eff}}y_{10} - (\Delta_c^{\text{eff}} - g\frac{x_{10}}{\alpha})x_{10} + \alpha(\rho_{00} - \rho_{11}), \quad (4.3.10)$$

vamos a imponer que

$$\Theta = \sum_I \left[ (v(t) - \dot{x}_{10})^2 + (w(t) - \dot{y}_{10})^2 \right] \equiv \min, \quad (4.3.11)$$

es decir, realizamos un ajuste global del vector  $(\dot{x}_{10}, \dot{y}_{10})$  respecto al vector equivalente del modelo de Lorenz con parámetros efectivos  $\gamma_1^{\text{eff}}$  y  $\Delta_c^{\text{eff}}$ ,  $(u, w)$ . Evidentemente no es esta la única forma posible de llevar a cabo el ajuste pero sí es la más sencilla.

La Fig.4.13 muestra el resultado del ajuste. En la Figs.4.13(a) y (b) representamos la ecuación de evolución de  $x_{10}$  e  $y_{10}$  frente a  $v(t)$  y  $w(t)$  sin parámetros efectivos (es decir, las ecuaciones de evolución de  $x_{10}$  e  $y_{10}$  sin los términos de  $R$ ). Nótese como el parecido entre ambas funciones es muy pequeño, particularmente en el caso de  $x_{10}$  donde es prácticamente nulo. El que los términos  $R(t)$  y  $S(t)$  afecten tanto a la evolución de  $x_{10}$  es algo que podíamos esperar ya que  $x_{10}$  está relacionado con  $\phi$  [cf. Ecs.(4.1.3)] y ya hemos visto que la dinámica de la fase del LGBO-D presenta significativas diferencias respecto a la del modelo de Lorenz-Haken debido a la *distorsión* introducida en las ecuaciones por los parámetros  $\Delta_2$  y  $k_2/k_1$ . En las Figs.4.13(c) y (d) mostramos el resultado del ajuste, con parámetros efectivos  $\gamma_1^{\text{eff}} = 1.26\gamma_1$  y  $\Delta_c^{\text{eff}} = 2.58\gamma_1$ . Nótese ahora como el parecido es muchísimo mayor, particularmente en el caso de  $y_{10}$ . Así pues, la hipótesis del ajuste era bastante acertada. El valor  $\Delta_c^{\text{eff}} = 2.58$  es fácil de entender: básicamente corresponde a la diferencia entre el valor de la desintonía del caso considerado,  $-1.5$ , y el valor de la sintonía central,  $-4$ . Así, el valor del parámetro  $\Delta_c^{\text{eff}}$

tiene su origen, principalmente, en el hecho de que la desintonía de bombeo sea no nula (origen de que la sintonía central no se encuentre en  $\Delta_c = 0$ ). El valor de  $\gamma_{\perp}^{\text{eff}}$  no tiene una interpretación intuitiva.

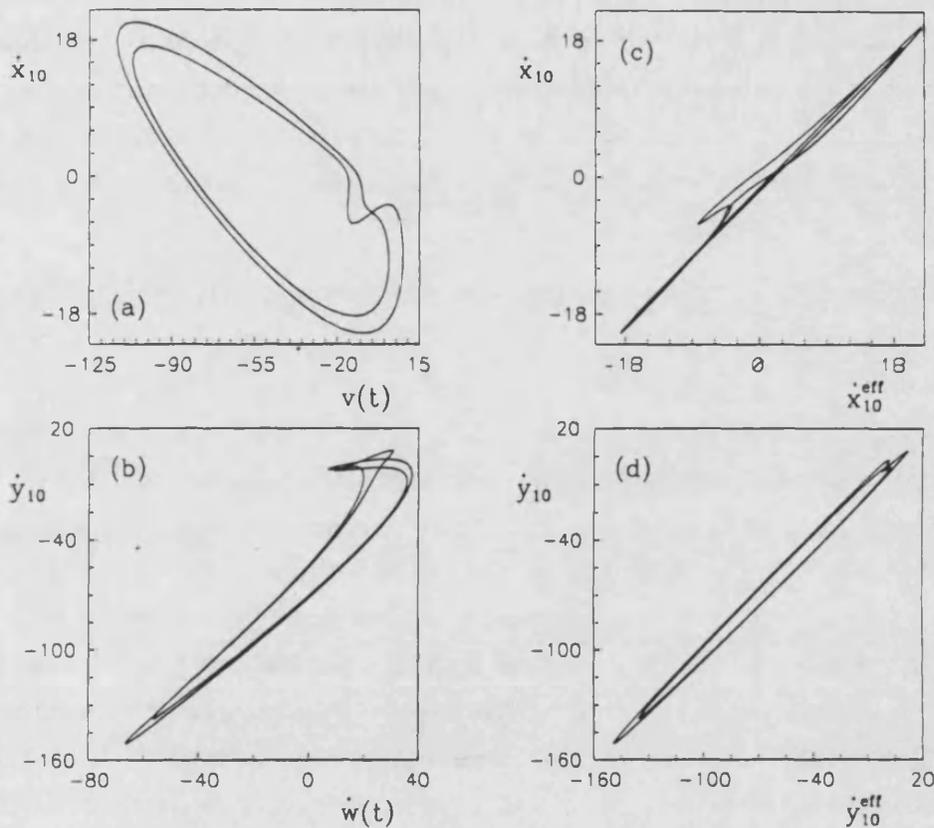


Fig.4.13. (a) y (b) muestran la evolución de  $\dot{x}_{10}$  y  $\dot{y}_{10}$  frente a las ecuaciones truncadas  $v(t)$  y  $w(t)$ . (c) y (d) muestran lo mismo pero cuando en  $v(t)$  y  $w(t)$  ya se han sustituido los parámetros efectivos. El resultado de ajustar a una recta es  $m = 0.972$ ,  $n = -1.08$  y  $\varepsilon = 0.9891$  para la fig.(c) y  $m = 1.005$ ,  $n = -1.483$  y  $\varepsilon = 0.996$  para la fig.(d).

Una vez estimados los valores de los parámetros efectivos, si los renormalizamos a  $\gamma_{\perp}^{\text{eff}}$ , obtenemos que el modelo de Lorenz efectivo (con relajaciones diferentes) correspondiente al caso analizado tiene unos valores aproximados de los parámetros  $\sigma = 1.5$ ,  $\Delta_c = 2.1$ ,  $a = 0.09$ ,  $b = 0.31$  y  $r = 26$ , que son valores para los que el modelo de Lorenz muestra comportamiento dinámico.

Pueden llevarse a cabo ajustes mucho más cuidadosos que incluyan, por ejemplo, tanto un factor de escala como un desplazamiento en todas las variables del láser así como la introducción de una  $g^{\text{eff}}$ . Hemos hecho numerosos intentos en este sentido pero a costa de una creciente complejidad en el tratamiento de datos, no se obtenía una clara mejora de los resultados, creciendo además la posible arbitrariedad ya inherente a este método a medida que aumentaba el número de parámetros. Además, por todo lo dicho

más arriba, es claro que el efecto de la desintonía de bombeo introduce elementos distorsionadores del comportamiento de tipo Lorenz, elementos que la técnica de ajustes aquí descrita tiende a incorporar en los parámetros efectivos con lo que el valor de estos no es muy fiable.

Hemos mostrado el resultado de los ajustes para un caso periódico particular y podemos afirmar que en todos los otros casos en los que hemos realizado este tipo de operaciones siempre hemos obtenido parámetros efectivos del mismo orden:  $\gamma_1^{\text{eff}}$  es del orden de un 30% mayor que  $\gamma_1$ ,  $\Delta_c^{\text{eff}}$  es aproximadamente la desintonía respecto a sintonía central y  $\gamma_0^{\text{eff}}$  del orden del doble de  $\gamma_0$ .

Sin embargo, no hemos hecho una estadística cuidadosa en este sentido. La razón es sencilla: el objetivo de estos ajustes es demostrar que el parecido entre el modelo LGBO-D y el modelo de Lorenz-Haken se debe al comportamiento que hemos venido describiendo más arriba de los términos  $R(t)$  y  $S(t)$ , y la calidad de los ajustes dan buena prueba de ello. Sin embargo existe un grado de arbitrariedad en la forma de llevar a cabo los ajustes y, consecuentemente, en el valor que se obtiene para los parámetros efectivos. Además, la técnica de los ajustes ilustra el comportamiento de  $R(t)$  y  $S(t)$  *pero no da una explicación de este comportamiento*. Es, estrictamente, una forma más de mostrar que el LGBO-D muestra comportamiento tipo Lorenz. No vale la pena, por tanto, insistir en la obtención de resultados numéricos en este sentido. Sin embargo sí hay una conclusión importante que podemos extraer de lo anterior: *los efectos coherentes de bombeo están presentes y tienen importancia en la dinámica del LGBO-D, es decir, el comportamiento tipo Lorenz no se debe a una desaparición de estos efectos*.

#### 4.3.e. Desviaciones del comportamiento de tipo Lorenz: otros valores de $\sigma$

Hasta ahora hemos estudiado las soluciones dinámicas para un único valor de las pérdidas de la cavidad:  $\sigma = 1.85$ . Sin embargo, según las estimaciones más recientes respecto a las pérdidas en la cavidad láser del dispositivo experimental, se ha cubierto una gama de valores de  $\sigma$  que llega hasta  $\sigma = 5$ , al menos [Tin Win, 1992; Tang *et al*, 1992]. En los cálculos que hemos realizado para este último valor de  $\sigma$  hemos encontrado un importante resultado.

La mayor parte de lo explicado hasta ahora sigue siendo válido en este caso, particularmente lo referido al diagrama de bifurcaciones. Sin embargo, hemos encontrado dos diferencias. La primera es que para valores tan elevados de las pérdidas, los *spirallings* de la intensidad se encuentran en sintonía central (en acuerdo con los

experimentos), cosa que, recordemos, no ocurría para pérdidas bajas o moderadas. La segunda y más importante diferencia, es que los *spirallings* observados en este caso presentan una pequeña, pero significativa, desviación respecto al comportamiento tipo Lorenz.

La Fig.4.14 muestra dos ejemplos del tipo de comportamiento caótico exhibido por la intensidad en la zona de *spirallings* (señalemos ya que en este caso que nos ocupa,  $\sigma = 5$ , hemos comprobado que los resultados no son muy sensibles a la precisión utilizada en la integración Doppler y hemos utilizado, por tanto, únicamente 24 grupos de velocidades). Nótese que, en general, el *spiralling* es tipo Lorenz pero el primer pico de cada secuencia de crecimiento (que ocurre después de un pico alto) es más alto que el segundo, hecho que no ocurre en el modelo de Lorenz.

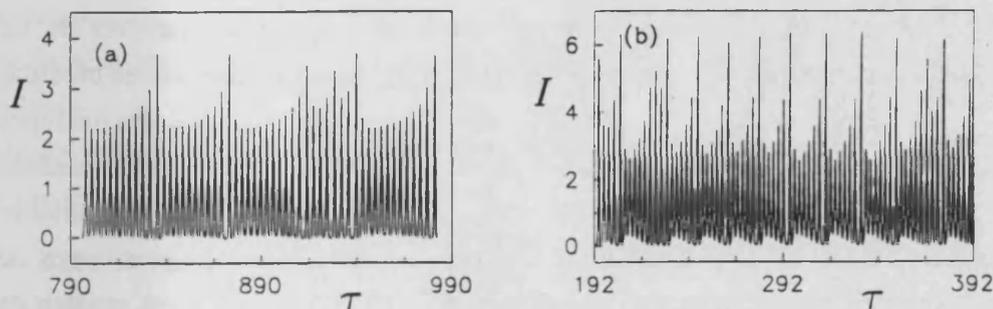


Fig.4.14. Evolución de la intensidad en dos registros caóticos correspondientes a sintonía central ( $\Delta_c = -4$ ) con  $\sigma = 5$  y (a)  $\beta = 0.8$  y (b)  $\beta = 1.2$ . Nótese que al principio de cada *spiralling*, el primer pico es más alto que los que siguen inmediatamente.

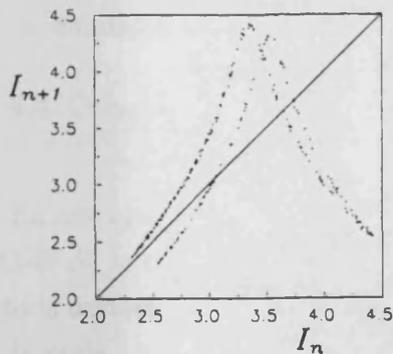


Fig.4.15. Mapa de intensidades correspondiente al caso de la Fig.4.14(a). Se observa una doble estructura (doble cúspide) bien definida que no corresponde al comportamiento de tipo Lorenz. Este tipo de desviaciones también se obtienen experimentalmente cuando las pérdidas de la cavidad son altas.

Esta diferencia puede apreciarse mucho mejor en el mapa de intensidades, correspondiente a una de las trazas de intensidad, que mostramos en la Fig.4.15. Nótese que, a diferencia del modelo de Lorenz, el mapa de intensidades muestra una doble estructura (doble cúspide) a diferencia de la única que presenta aquél. Evidentemente

esta doble estructura está relacionada con la presencia del "pico extra" que aparece al principio de cada *spiralling*.

Lo verdaderamente relevante del caso es que este tipo de desviaciones respecto al comportamiento tipo Lorenz es habitualmente observado en los experimentos: en los llevados a cabo con la línea de  $153\mu\text{m}$  del  $\text{NH}_3$  la doble cúspide siempre está presente y en los llevados a cabo con la línea de  $81.5\mu\text{m}$  siempre lo ha estado hasta experimentos recientes en los que se ha conseguido observar un *spiralling* sin doble cúspide aumentando la presión del gas [Tang *et al*, 1992]. La explicación de este comportamiento experimental aparece clara ahora a la luz de lo predicho por el modelo LGBO-D: para obtener comportamiento tipo Lorenz sin desviaciones se necesitan valores pequeños de las pérdidas de la cavidad pero esto implica utilizar mayores potencias de bombeo. En los montajes experimentales estos valores de la potencia no son siempre alcanzables y, en consecuencia, se trabaja con valores mayores de las pérdidas (de hecho con menores presiones pues nos referimos a valores de las pérdidas relativos a  $\gamma_{\perp}$ , que disminuye con la presión) obteniéndose las pequeñas desviaciones que estamos comentando. Sin embargo, una mejora del dispositivo experimental permitió en Tang *et al* (1992) trabajar con mayores presiones y obtener comportamiento tipo Lorenz sin desviaciones. En la Tabla IV se dan los valores de las dimensiones de este caso (Caso 2). Nótese como son algo superiores a las del Caso 1 y del modelo de Lorenz y más próximas que aquellas a los valores experimentales. Este hecho parece sugerir que estas desviaciones, como provenientes de los efectos coherentes de bombeo, hacen que la dimensionalidad del atractor sea mayor, es decir, que cuando los efectos de bombeo coherente se hacen patentes, conllevan un aumento de la dimensión. Por otra parte, los valores de las dimensiones de este Caso 2 son más próximas a las experimentales porque en estas el "pico extra" también está presente.

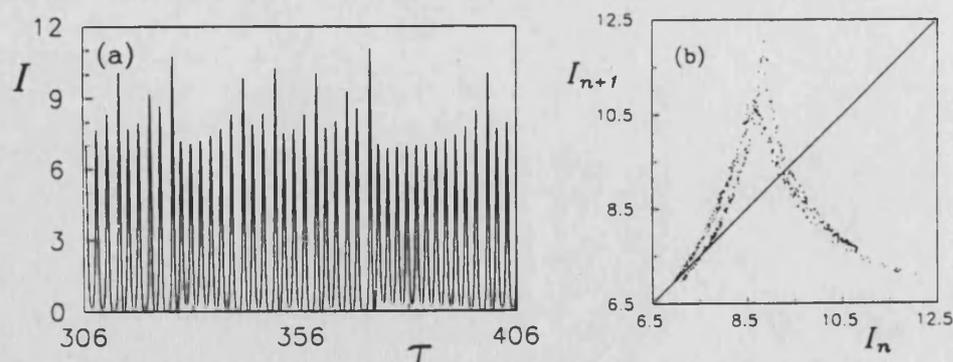


Fig.4.16. Evolución de la intensidad (a) y mapa de intensidades (b) para el caso  $g = 4250$ ,  $\sigma = 1.15$ ,  $\Delta_c = -5.9$  y  $\beta = 0.46$ . El cálculo se ha realizado con grupos de velocidades de anchura  $0.1k_1v$ . En este caso también hay una doble cúspide si bien ligeramente diferente de la de la Fig.4.15.

También hemos comprobado cuál es el tipo de comportamiento de la intensidad para bajas pérdidas. En particular, hemos vuelto al caso  $\sigma = 1.15$  que fue estudiado en Laguarda *et al* (1988) y Corbalán *et al* (1989) [hemos mantenido el valor original de  $g = 4250$ ]. Para ello hemos incrementado la precisión del cálculo significativamente (hemos pasado de una anchura de los grupos de velocidades de 0.25 a 0.1) y hemos comprobado que la precisión más baja es insuficiente. Al trabajar con mayor precisión hemos obtenido los spirallings en  $\Delta_c = -5.9$  en lugar de en  $\Delta_c = -5$  que es donde se obtenían (es decir, se obtienen más lejos de sintonía central) y hemos encontrado, además, diferencias cualitativas al cambiar de precisión: con baja precisión el mapa de intensidades no muestra una estructura clara al contrario de lo que ocurre con la precisión alta. La Fig.4.16(a) muestra la evolución temporal de la intensidad que hemos obtenido y la Fig.4.16(b) el correspondiente mapa de intensidades. De nuevo observamos una doble cúspide si bien ligeramente diferente a la obtenida con pérdidas altas [nótese que en la Fig.4.15 las dos ramas del mapa de intensidades no se juntan a la izquierda y sí lo hacen en la Fig.4.16(b)]. Señalemos que en los experimentos se obtienen ambos tipos de desviaciones. En la Tabla IV también se encuentra el valor de las dimensiones de este caso (Caso 3) que son claramente mayores que en ningún otro.

Así pues, podemos concluir que el LGBO-D presenta comportamiento tipo Lorenz en la línea de  $81.5\mu\text{m}$  para valores intermedios de  $\sigma$ , comportamiento que se distorsiona para valores altos y bajos de  $\sigma$ . Además, las desviaciones predichas por el modelo están en perfecto acuerdo con las observadas en los experimentos, llegando el acuerdo entre teoría y experimento incluso a los valores, aproximados, de las pérdidas de la cavidad en que son observadas estas desviaciones.

#### 4.4. Comportamiento con bombeo resonante.

En este apartado vamos a estudiar la influencia en el comportamiento dinámico de LGBO-D de la desintonía de bombeo  $\Delta_2$ . Ya hemos comentado con anterioridad que cuando la desintonía de bombeo es nula (o pequeña) en los experimentos, se amplifican tanto la onda copropagante con la onda de bombeo, como la contrapropagante y este hecho no lo tiene en cuenta nuestro modelo. Sin embargo, lo que queremos aclarar con los cálculos que presentamos a continuación no es el comportamiento experimental con bombeo resonante, sino la influencia que este parámetro tiene en el LGBO-D. En particular, estamos interesados en saber si este parámetro juega algún papel en la

aparición de comportamiento de tipo Lorenz o en las pequeñas desviaciones del comportamiento tipo Lorenz que acabamos de describir en el último apartado.

Si en las Ecs.(4.1.3) tomamos  $\Delta_2 = \Delta_c = 0$ , es casi inmediato comprobar las siguientes propiedades de simetría con respecto a la velocidad axial  $v$  en los elementos de la matriz densidad

$$\begin{aligned} \rho_{ii}(v) &= -\rho_{ii}^*(-v) \quad (i = 0,1,2), \\ \rho_{10}(v) &= -\rho_{10}^*(-v), \\ \rho_{02}(v) &= -\rho_{02}^*(-v), \\ \rho_{12}(v) &= \rho_{12}^*(-v). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Estas propiedades nos permiten simplificar notablemente la integración Doppler. Como el bombeo es resonante, habremos de realizar la integración desde  $-v_{lim}$  a  $+v_{lim}$  pero haciendo uso de las Ecs.(4.4.1) es claro que sólo necesitamos integrar entre 0 y  $+v_{lim}$  y multiplicar por dos el resultado de las funciones pares de  $v$ . De este modo, el número de ecuaciones diferenciales a considerar se ve reducido a la mitad. Por otra parte como la función de distribución de velocidades  $W(v)$  es una función par, obtenemos inmediatamente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) x_{10}(v) = 0 \quad (4.4.2)$$

con lo que  $\dot{\phi} = 0$ . Así pues, cuando el bombeo es resonante el problema de la integración numérica de las ecuaciones es bastante menos costoso. Evidentemente, cuando queramos investigar que ocurre con  $\Delta_c \neq 0$  esta simplificación ya no es válida.

Pero aún podemos simplificar un poco más el modelo. Recordemos que en el apartado anterior habíamos considerado que la relajación de la población del nivel 2 era distinta de la de los niveles 0 y 1 (0.95 y 0.28 respectivamente, ver Tabla I). También habíamos considerado que no todas las coherencias tenían la misma tasa de relajación. En este apartado tomaremos la relajación de todas la coherencias iguales a la unidad (ver Tabla 2) y, lo que es más significativo, todas las relajaciones de las poblaciones iguales entre sí. Esto último permite eliminar la ecuación de evolución de una de las poblaciones ya que únicamente son relevantes las ecuaciones de las diferencias de

poblaciones (esto no puede realizarse si las tasas de relajación no son las mismas pues, de lo contrario, es necesaria la ecuación de evolución de la suma de poblaciones, cf. Capítulo 2). Así pues, en condiciones de resonancia y con iguales relajaciones para todas las poblaciones, la integración numérica del modelo LGBO-D es mucho menos costosa. Avancemos ya que hemos comprobado cuidadosamente que los resultados obtenidos no se ven afectados por la aproximación de tomar todas las relajaciones iguales para las poblaciones.

El resultado más notable que hemos obtenido es que, con los parámetros de la Tabla II, el modelo continúa manifestando comportamiento de tipo Lorenz, es decir, *el parámetro desintonía de bombeo no juega un papel importante en cuanto a que el LGBO-D muestre comportamiento de tipo Lorenz*. En efecto, el diagrama de bifurcaciones obtenido con los parámetros de la Tabla II y  $\sigma = 1.85$  para valores crecientes del bombeo  $\beta$  y  $\Delta_c = 0$  [Fig.4.17(a)] y para valores crecientes de la desintonía de la cavidad y  $\beta = 0.4$  [Fig.4.17(b)]. Es claro que la ruta seguida por el sistema es cualitativamente igual a la del modelo de Lorenz y también a la que ya obtuvimos en el caso de  $81.5\mu\text{m}$ , sólo que ahora: (i) el diagrama de bifurcaciones es simétrico respecto a sintonía central ( $\Delta_c = 0$ ) y (ii), el comportamiento caótico con *spirallings* ya no se obtiene en una pequeña región próxima al umbral de inestabilidades sino que se observa claramente a lo largo de la mayor parte del dominio caótico (como ocurre en el modelo de Lorenz). Es decir, el comportamiento del LGBO-D con  $\Delta_2 = 0$  es aún más parecido al del modelo de Lorenz-Haken que en el caso de  $81.5\mu\text{m}$ . Únicamente aparecen discrepancias cuando el bombeo utilizado es muy alto, sin duda debido a fenómenos coherentes. Sin embargo no entraremos a analizar estas discrepancias y nos centraremos en bombeos bajos.

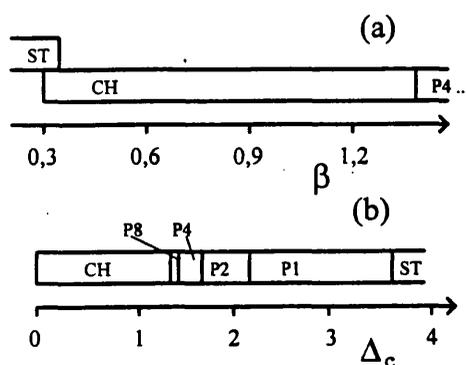


Fig.4.17. Diagrama de bifurcaciones para  $\sigma = 1.85$  (a) en resonancia ( $\Delta_c = 0$ ) y para valores crecientes de  $\beta$  y (b) para  $\beta = 0.4$  y valores crecientes de la desintonía de la cavidad (el diagrama es simétrico respecto a sintonía central. En resonancia, el cociente de umbrales  $(\beta_{2nd}/\beta_{1st})^2 = 16$ .

Un ejemplo de la evolución temporal de la intensidad (con el correspondiente mapa de intensidades) y una proyección del atractor se muestra en la Fig.4.18. Es

evidente la limpieza del comportamiento tipo Lorenz en la secuencia de *spirallings* y en la presencia de una única cúspide en el mapa de intensidades.

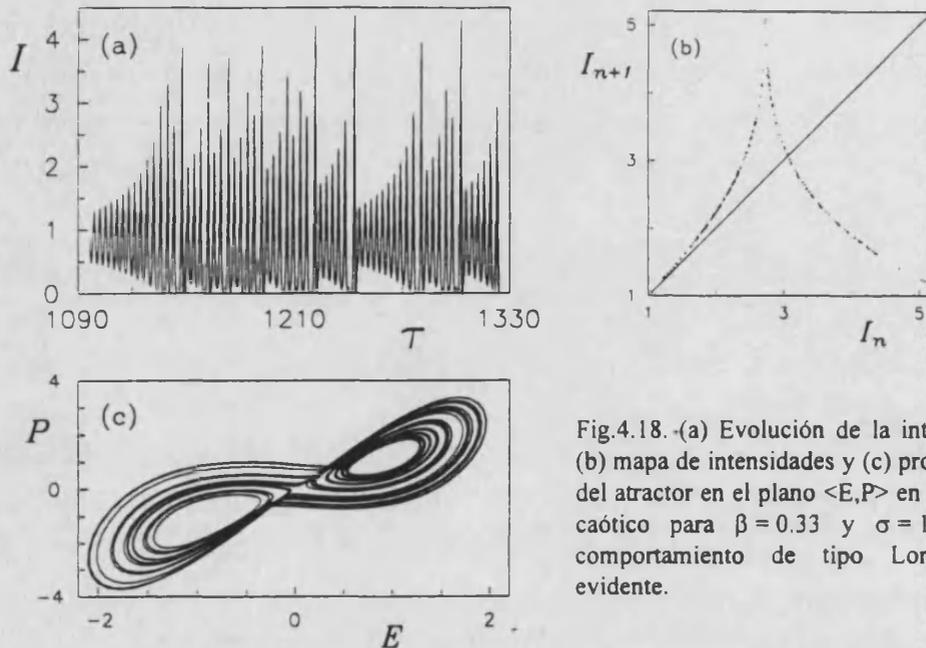


Fig.4.18.-(a) Evolución de la intensidad, (b) mapa de intensidades y (c) proyección del atractor en el plano  $\langle E, P \rangle$  en régimen caótico para  $\beta = 0.33$  y  $\sigma = 1.85$ . El comportamiento de tipo Lorenz es evidente.

Por otra parte, el comportamiento de la fase en este caso no presenta las discrepancias que con el modelo de Lorenz aparecían con  $\Delta_2 \neq 0$ : al verificarse que  $\dot{\phi} = 0$  en  $\Delta_c = 0$ , la sintonía central está perfectamente definida, y hemos comprobado que cuando la desintonía se hace positiva, la fase sufre saltos positivos de tamaño decreciente a medida que aumenta, y que cuando la desintonía es negativa, los saltos son negativos. Es decir, el comportamiento es idéntico al del modelo de Lorenz-Haken, habiendo desaparecido todas las pequeñas distorsiones que habíamos encontrado en el caso de  $81.5\mu\text{m}$ .

Hemos comprobado que todo lo anterior es válido para  $b = 1$ . Podemos concluir, por tanto, que el valor de  $b$  no juega tampoco un papel esencial en cuanto al comportamiento observado.

Queda por comprobar si el modelo sigue reproduciendo las pequeñas desviaciones que con respecto al modelo de Lorenz obteníamos cuando las pérdidas eran tanto altas como bajas. En este sentido hemos encontrado un interesante resultado.

La Fig.4.19 muestra de nuevo la evolución de la intensidad y el correspondiente mapa de intensidades obtenido para  $\sigma = 1.5$  y  $\beta = 0.5$ . Observamos ahora la doble cúspide que ya obtuvimos para el mismo valor de  $\sigma$  en el apartado anterior con  $\Delta_2 = 30$ . Incluso se observan más de dos estructuras aunque no muy bien definidas (en los experimentos con la línea de  $153\mu\text{m}$  también se obtienen multiplicidad de estructuras

[Tin Win, 1992]). En particular observamos que, al igual que en aquel caso, las dos ramas del mapa de intensidades se cierran a la izquierda. Así pues, tampoco en esto parece tener importancia el valor de  $\Delta_2$ . Sin embargo, cuando realizamos cálculos con  $\sigma = 5$ , ya no observamos una doble cúspide, sino un comportamiento tipo Lorenz similar al de la Fig.4.18. Este hecho es interesante porque parece establecer que las desviaciones respecto al modelo de Lorenz que hemos comentado en el apartado anterior son de dos tipos: una es la observada para valores pequeños de  $\sigma$  y que no parece ser afectada por  $\Delta_2$ , y otra es la observada para  $\sigma$  alta (Fig.4.15, en la que las dos ramas del mapa no conectan entre sí) y que tiene su origen precisamente en  $\Delta_2$ .

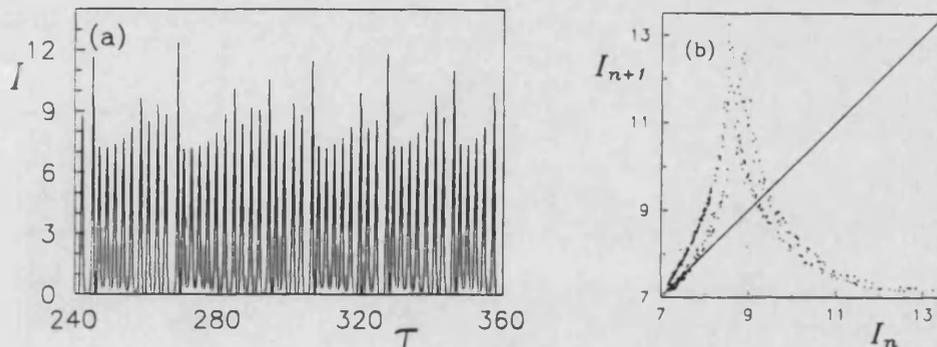


Fig.4.19. (a) Evolución de la intensidad y (b) mapa de intensidades para  $\beta = 0.5$  y  $\sigma = 1.15$ . Se observa claramente la doble cúspide.

#### 4.5. Comportamiento en la línea de $374\mu\text{m}$ .

En los dos apartados anteriores hemos comprobado que el modelo LGBO-D presenta comportamiento tipo Lorenz y reproduce los resultados experimentales semicuantitativamente, reproduciendo incluso cuestiones de detalle como la doble cúspide en el mapa de intensidades. Sin embargo ya comentamos en el capítulo anterior que el comportamiento de tipo Lorenz no se ha observado siempre en los experimentos: mientras que las líneas de  $81.5\mu\text{m}$  y la de  $153\mu\text{m}$  lo exhibían, no ocurría lo mismo con la línea de  $374\mu\text{m}$ . En este apartado vamos a mostrar los resultados obtenidos con nuestro modelo cuando utilizamos los parámetros de la Tabla III que son adecuados para estudiar la línea de  $374\mu\text{m}$ .

La Fig.4.20(a) muestra el diagrama de bifurcaciones que hemos obtenido para  $\sigma = 1.5$  y  $\Delta_c = -3$  que es la sintonía central en este caso (para obtener su valor basta con hacer un razonamiento análogo al realizado para la línea de  $81.5\mu\text{m}$  en la pág.110). Observamos ya que no se obtiene comportamiento tipo Lorenz. Existe un dominio de biesabilidad entre la solución estacionaria y las soluciones dinámicas de manera que, si

el bombeo es incrementado adiabáticamente, cuando la solución estacionaria pierde su estabilidad el sistema cae a un atractor periódico. Si el bombeo es incrementado obtenemos siempre comportamiento periódico salvo en ciertos dominios en los que es cuasiperiódico [Fig.4.20]. Esta cuasiperiodicidad parece deberse a la presencia de dos atractores periódicos muy próximos de manera que el atractor permanece para un cierto rango de parámetros en uno y para un cierto rango de parámetros en el otro. Cuando se produce la transición entre uno y otro es cuando se observa el mencionado comportamiento cuasiperiódico y se aprecia que la amplitud oscila entre el valor que le corresponde en un atractor y el que le corresponde en el otro. Se trata, pues, de una alternancia entre las dos órbitas periódicas. Sin embargo, este comportamiento nunca lleva a caos.

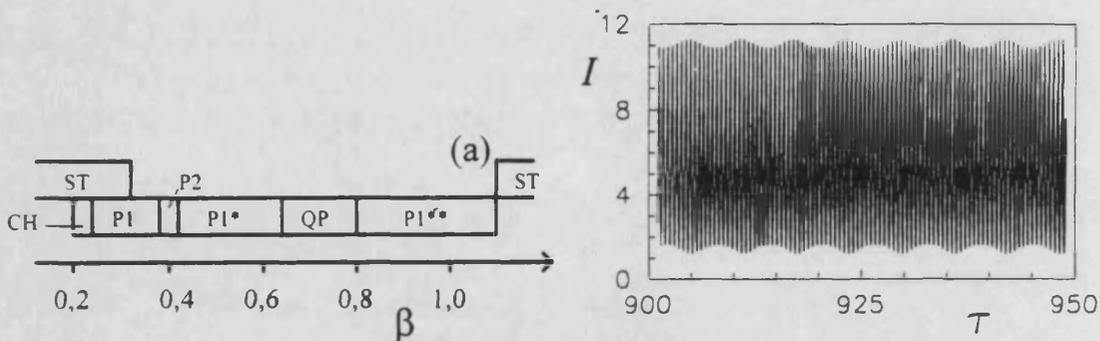


Fig.4.20. (a) Diagrama de bifurcaciones correspondiente a los parámetros de la Tabla III con  $\sigma = 2.5$  y  $\Delta_c = -3$ . (sintonía central). (ST) solución estacionaria estable, (Ch) caos, (QP) comportamiento cuasiperiódico debido a la alternancia entre dos atractores periódicos, (P1) diferentes atractores periódicos, (P2) es una simetrización del atractor P1. El diagrama es cualitativo en el sentido de que parece haber muchos más saltos entre atractores periódicos que los aquí indicados. El paso de comportamiento periódico a caótico se lleva a cabo a través de una ruta de intermitencias (probablemente de tipo III). (b) Ejemplo de QP.

Si disminuimos el bombeo por debajo del valor del segundo umbral podemos acceder a una pequeña región de comportamiento caótico (también podemos acceder a ella por *hard mode excitation*), comportamiento que en absoluto es de tipo Lorenz. Para comprobarlo, la Fig.4.21 muestra la evolución de la intensidad y el correspondiente mapa de intensidades. Lo más sorprendente es que la transición de comportamiento periódico al caótico no se lleva a cabo a través de un doblamiento de periodos, sino a través de una ruta de intermitencias. La Fig.4.22 muestra una secuencia temporal en la que puede observarse la alternancia de fases de comportamiento regular (fases laminares) con fase de comportamiento caótico. A juzgar por el aspecto de la intensidad, parece que se trata de intermitencias de tipo III ya que se observa un crecimiento de los

máximos del ciclo fundamental a la par que un decrecimiento de los correspondientes al subarmónico [Schuster, 1989].

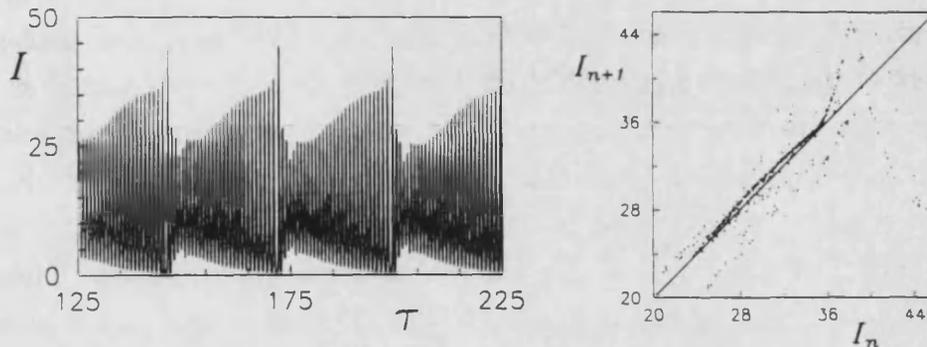


Fig.4.21. (a) Evolución de la intensidad y (b) mapa de intensidades para  $\beta = 0.22$  y el resto de parámetros como en la Fig.4.?. El comportamiento caótico es claramente diferente del correspondiente al modelo de Lorenz.

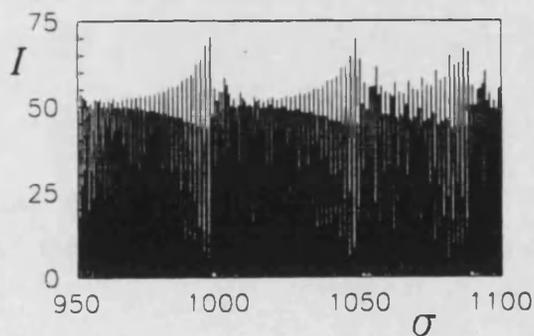


Fig.4.22 Ejemplo del comportamiento intermitente que se observa en la transición de comportamiento periódico a caótico. Estas intermitencias parecen de tipo III.  $\beta = 0.233$ .

El estudio con desintonía no ha revelado un comportamiento diferente del descrito hasta ahora: se siguen observando una multiplicidad de atractores periódicos y comportamiento cuasiperiódicos cuando se pasa de unos a otros. Por otra parte, un aumento del valor de las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  tampoco altera lo descrito salvo porque la región de dominio caótico se hace un poco mayor. Finalmente, hemos considerado otros valores diferentes de la ganancia (desde  $10^4$  hasta  $3 \cdot 10^6$ ) y el tipo de comportamiento ha sido siempre el mismo.

Así pues, el comportamiento exhibido por el LGBO-D con parámetros correspondientes a la línea de  $374\mu\text{m}$  es muy diferente del comportamiento de tipo Lorenz. Dado que hemos considerado un rango amplio de valores de  $\beta$ ,  $\Delta_c$  y  $g$ , los responsables del cambio de comportamiento deben de ser el cociente  $k_2/k_1$  y el valor de la desintonía de bombeo  $\Delta_2$  ya que, por lo visto en el apartado anterior para el caso resonante es improbable que el valor de las relajaciones de las poblaciones puede afectar

tanto al comportamiento. Ahora bien, ¿se acercan estos resultados a los resultados experimentales?.

Sabemos que los experimentos realizados en la línea de  $374\mu\text{m}$  muestran un comportamiento diferente del modelo de Lorenz pero hasta aquí llega el acuerdo con el experimento. Los resultados teóricos son muy diferentes de los experimentales: en los experimentos, al aumentar el bombeo, se obtienen rutas de Feigenbaum que finalizan en caos que, a su vez, sigue una ruta inversa de Feigenbaum para, finalmente, volver a estabilizarse el láser. Además este comportamiento parece ser muy robusto ya que se ha observado para diferentes valores de la presión [Sassi *et al*, 1987]. Nosotros no hemos obtenido nada parecido. Las causas pueden ser diversas y, entre ellas, que el modelo LGBO-D no sea aplicable, por alguna razón que desconocemos, a la línea en cuestión. También podría ser que la estimación de parámetros que hemos realizados en el apartado 4.2. sea incorrecta en algún parámetro importante. En cualquier caso, estos son los resultados que hemos obtenido.

#### 4.6. Conclusiones.

A lo largo de este capítulo hemos analizado las soluciones dinámicas del modelo LGBO-D para diferentes conjuntos de parámetros. En particular, hemos comprobado que:

- \* Cuando utilizamos parámetros adecuados para la línea de  $81.5\mu\text{m}$  del láser de amoníaco, obtenemos:
  - Comportamiento de tipo Lorenz para valores intermedios de las pérdidas de la cavidad (extremo que hemos comprobado mediante el uso de diferentes herramientas, los ajustes de los términos R y S entre ellas). También hemos visto pequeñas diferencias respecto a este comportamiento, particularmente en la dinámica de la fase y en la asimetría del diagrama de bifurcaciones.
  - Pequeñas desviaciones de este comportamiento (que hemos detectado mediante el mapa de intensidades) cuando las pérdidas son altas,  $\sigma = 5$ , y cuando son bajas,  $\sigma = 2.3$ . Parece además que estas pequeñas desviaciones respecto al comportamiento de tipo Lorenz no son iguales en ambas situaciones ya que, aunque el mapa de intensidades muestra una estructura doble en ambos casos, estas estructuras no son exactamente iguales.
  - Es resaltable que todo lo anterior está en acuerdo semicuantitativo con lo observado en los experimentos.

- Hemos visto que el comportamiento de tipo Lorenz aparece a pesar de que los términos R y S (de bombeo coherente y ensanchamiento Doppler) tengan un peso cuantitativo importante. Lo que ocurre es que "acompanan" su evolución dinámica a la de los "términos Lorenz" de las ecuaciones en que aparecen.

\* Cuando hemos utilizado parámetros que simplifican el modelo (básicamente anulando la desintonía de bombeo) hemos observado que:

- El comportamiento de tipo Lorenz es aún más notable en estas condiciones, en particular, desaparecen las pequeñas diferencias que existen en el caso anterior en cuanto a la dinámica de la fase y la disimetría del diagrama de bifurcaciones. Así, esas pequeñas diferencias eran debidas, únicamente, al valor no nulo de la desintonía de bombeo que no es una característica esencial del modelo sino, simplemente, algo que se introduce para salvar una dificultad técnica (que sólo se amplifique una onda).
- Continúa apareciendo la doble estructura del mapa de intensidades para valores bajos de  $\sigma$  pero ha desaparecido para valores altos de  $\sigma$ . Así, el que los mapas de intensidades no fueran exactamente iguales para pérdidas altas y bajas puede estar relacionado con un origen diferente en cada caso.

\* Cuando hemos utilizado parámetros adecuados a los experimentos llevados a cabo con la línea de  $374\mu\text{m}$  del amoníaco hemos visto que:

- El comportamiento es claramente distinto del tipo Lorenz (ruta de intermitencias y diferente tipo de caos).
- El comportamiento no reproduce el observado experimentalmente.

Podemos concluir diciendo que el modelo LGBO-D parece ser muy adecuado para modelizar el láser de amoníaco cuando emite en las líneas de  $81.5\mu\text{m}$  y  $153\mu\text{m}$  y que no parece tan adecuado para la línea de  $374\mu\text{m}$ , aunque pudiera ser que la selección de parámetros no haya sido adecuada en este caso o que hubiera algún elemento en el dispositivo experimental que no hayamos tenido en cuenta (formación de ondas estacionarias en la cavidad, ya que se utilizó una cavidad Fabry-Perot, o amplificación parcial de la onda contraprogante, por ejemplo).



## **Capítulo 5: Influencia de la polarización de los campos en un LGBO homogéneo. El modelo LGBO-M de cuatro niveles.**

**5.1. El modelo LGBO-M. Resultados previos.**

**5.2. Particularización al caso de polarizaciones lineales.**

**5.3. Relación entre el caso paralelo y los LGBO de tres niveles homogéneos.**

**5.4. Relación entre el caso ortogonal y el modelo de Lorenz.**

**5.5. Interpretación en términos de átomo vestido: atrapamiento de población sensible a la polarización.**

**5.6. Conclusiones. Sobre la aplicabilidad del modelo LGBO-M al láser de  $\text{HH}_3$ .**



A lo largo del capítulo anterior hemos estudiado detalladamente las predicciones del modelo LGBO-D, poniendo de manifiesto dos hechos importantes: (i) el LGBO-D es el primer modelo capaz de reproducir los resultados experimentales del láser de amoníaco (cosa que hace sorprendentemente bien en la mayor parte de los casos), y (ii) el LGBO-D muestra un comportamiento que podemos llamar de tipo Lorenz para un cierto conjunto (amplio) de parámetros.

Ahora bien, este éxito no nos permite afirmar que es el efecto Doppler el único factor responsable del comportamiento observado en el experimento y la razón es obvia: en el dispositivo experimental hay presentes *otros factores físicos conocidos* no incluidos en el modelo LGBO-D que pueden jugar un papel importante en su comportamiento dinámico. Estos efectos son, principalmente, la degeneración magnética de los niveles (con la consiguiente influencia de la polarización de los campos), la atenuación del campo de bombeo a lo largo de la cavidad (efectos espaciales longitudinales) y los efectos debidos a la sección finita del haz (efectos espaciales transversos). Así pues, habríamos de intentar cuantificar la influencia de esos factores para poder llegar a un *modelo realista y riguroso* de los experimentos en cuestión. Ahora bien, a nadie se le escapa que esta es una tarea muy ambiciosa. Se ha de comenzar, por tanto, por estudiar cada efecto por separado y con modelos lo más sencillos posible que, como el LGBO-D, nos permitan ganar información relevante a cambio de un esfuerzo asumible.

Este tipo de consideraciones están en el origen de la formulación del modelo LGBO-M [Arjona *et al*, 1990]. En este modelo se estudia la influencia en la dinámica de los LGBO de un factor concreto no considerado hasta ahora: la polarización de los campos láser y de bombeo. El modelo, como veremos más adelante, es el más sencillo posible y considera un medio material descrito mediante cuatro niveles energéticos y ensanchamiento homogéneo del medio material. Adelantemos ya que el carácter homogéneo del modelo hace que, en puridad, no deba ser utilizado para predecir el comportamiento experimental *ya que, en los experimentos, hay ensanchamiento Doppler*. Sin embargo, la relativa sencillez matemática del modelo nos permitirá extraer conclusiones analíticas bastante generales e incluso podremos prever la influencia cualitativa que el efecto Doppler pudiera tener en este modelo en ciertos casos límite de interés. Por otra parte, extraeremos conclusiones cuya importancia y aplicabilidad va más allá de los experimentos del láser de  $\text{NH}_3$ , predicciones que sería muy interesante poder comprobar experimentalmente. Parte de los resultados contenidos en este capítulo pueden encontrarse en Corbalán *et al* (1993) y en Roldán *et al* (1993b).

### 5.1. El modelo LGBO-M. Resultados previos.

Antes de exponer el resultado de nuestro trabajo sobre el LGBO-M, hemos de exponer el modelo matemático y los resultados previos obtenidos por sus autores que sean relevantes para lo que sigue, dejando para los siguientes apartados nuestras contribuciones originales.

Para tener en cuenta el carácter vectorial de los campos en un problema de interacción radiación-materia es necesario tener en cuenta, a su vez, el número cuántico del momento angular  $J$  de los estados atómicos o moleculares interesados en la interacción. En el caso de la molécula de  $\text{NH}_3$ ,  $J$  vale 7 u 8, dependiendo del nivel, en la línea de  $81.5\mu\text{m}$  (ver Fig.3.1), y 2 en la de  $374\mu\text{m}$ . Como el número de subniveles magnéticos (es decir, con distinto valor de la tercera componente de  $J$ , el número cuántico *magnético*  $m_j$ , de ahí el nombre de LGBO-M) es de  $N \approx 3(2J+1)$ , resulta evidente que es inviable hacer un modelo realista de la influencia de la degeneración de niveles magnéticos (y con ello de la polarización de la luz) para esta molécula (por ejemplo, en el caso de la transición de  $374\mu\text{m}$ , que es la que tiene un menor valor de  $J$ , nos veríamos involucrados con ¡15 niveles energéticos!).

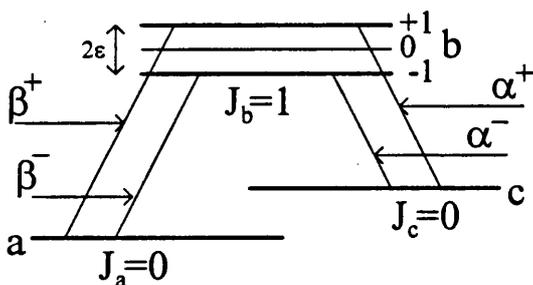


Fig.5.1. Esquema de niveles del modelo LGBO-M. El nivel molecular superior consta de tres subniveles magnéticos (el número que hay junto al nivel indica el valor de la tercera componente del momento angular). El campo de bombeo,  $\beta$ , y el generado,  $\alpha$ , lo descomponemos en sus componentes dextrógira (+) y levógira (-).

En lugar de esto nos planteamos cuál es el esquema más simple de niveles que permite considerar polarizaciones arbitrarias en los campos láser y de bombeo y poder estudiar así la influencia de la polarización en la dinámica de los LGBO. Este esquema es el mostrado en la Fig.5.1 que considera los niveles a, b y c con números cuánticos  $J_a=0$ ,  $J_b=1$  y  $J_c=0$ . El nivel superior consta de tres subniveles magnéticos con  $m_j=+1$ , 0 y  $-1$ . Si tomamos el eje de cuantización a lo largo de la dirección  $z$  de propagación de los campos, el nivel  $J_b=1$ ,  $m_j=0$  queda desacoplado de los niveles a y c en virtud de la regla de selección  $\Delta m_j = \pm 1$  y, por tanto, tenemos un modelo de cuatro niveles dos de los cuales corresponden a subniveles del nivel superior común. Llamaremos a estos dos subniveles magnéticos del nivel  $J_b=1$ ,  $b+$  (o simplemente  $+$ ) al subnivel con  $m_j=+1$  y  $b-$  (o simplemente  $-$ ) al subnivel con  $m_j=-1$ . Así, toda la interacción entre los niveles

$a \leftrightarrow b \leftrightarrow c$  se produce mediante el intercambio de radiación dextrógira [ganancia (pérdida) de un cuanto de momento angular en la absorción (emisión)] y toda la interacción entre los niveles  $a \leftrightarrow b \leftrightarrow c$ , mediante el intercambio de radiación levógira (viceversa). Resulta conveniente, por tanto, escribir los campos como superposición de sus componentes dextro y levo, superposición que permite, mediante el ajuste de sus amplitudes y fases, describir un estado arbitrario de polarización. Así pues, escribimos

$$\bar{\mathcal{E}}_j(z, t) = \sum_{\mu=\pm} \bar{\mathcal{E}}_j^\mu(z, t) + c.c \quad (5.1.1)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^\mu(z, t) &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_1^\mu(t) \exp[-i(\Omega_1^\mu t + \phi_1^\mu(t) - k_1 z)] \\ \mathcal{E}_2^\mu(z, t) &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_2^\mu \exp[-i(\Omega_2^\mu t + \phi_2^\mu - k_2 z)] \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

donde  $\mathcal{E}_1(z, t)$  es el campo láser generado y  $\mathcal{E}_2(z, t)$  el de bombeo,  $\mu = +, -$  con  $+$  la componente dextro y  $-$  la componente levo, los vectores  $\bar{\mathcal{E}}^\pm = \mp(\bar{\mathcal{E}}_x \pm i\bar{\mathcal{E}}_y)/\sqrt{2}$  son los vectores unitarios de polarización circular y el resto de símbolos tienen el significado habitual. Nótese que, como en el LGBO-D, hemos considerado constantes tanto la fase como la amplitud del campo de bombeo.

Aplicando las usuales aproximaciones de la onda rotante, límite de campo medio, envolvente lenta de amplitud (Apéndice 1) y considerando que los campos de bombeo (generado) interaccionan sólo con las transiciones  $a \leftrightarrow b$  ( $b \leftrightarrow c$ ), obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones de Maxwell-Schrödinger para el modelo LGBO-M [Arjona, 1990]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{aa}}{dt} &= -\gamma_a \rho_{aa} + \lambda_a - \sum_{\mu=\pm} 2\beta^\mu \text{Im} \rho_{a\mu} \\ \frac{d\rho_{cc}}{dt} &= -\gamma_c \rho_{cc} + \lambda_c - \sum_{\mu=\pm} 2\alpha^\mu \text{Im} \rho_{c\mu} \\ \frac{d\rho_{\mu\mu}}{dt} &= -\gamma_\mu \rho_{\mu\mu} + \lambda_\mu + 2\alpha^\mu \text{Im} \rho_{c\mu} + 2\beta^\mu \text{Im} \rho_{a\mu} \\ \frac{d\rho_{a\mu}}{dt} &= -[\gamma_{a\mu} + i(\Delta_2^\mu - \mu\varepsilon)] \rho_{a\mu} - i\beta^\mu N_{\mu a} - i\beta^{-\mu} \rho_{-\mu\mu} + i\alpha^\mu \rho_{ac} \exp(-i\theta\delta_{\mu-}) \\ \frac{d\rho_{ac}}{dt} &= -[\gamma_{ac} - i(\Delta_1^+ - \Delta_2^+)] \rho_{ac} - i\beta^+ \rho_{+c} + i\alpha^+ \rho_{a+} - i(\beta^- \rho_{-c} - \alpha^- \rho_{a-}) \exp(i\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_{\mu-\mu}}{dt} &= -[\gamma_{\mu-\mu} - i(\Omega_2^\mu - \Omega_2^{-\mu} - 2\mu\varepsilon)]\rho_{\mu-\mu} - i\beta^\mu \rho_{a-\mu} + i\beta^{-\mu} \rho_{\mu a} - i(\alpha^\mu \rho_{c-\mu} - \alpha^{-\mu} \rho_{\mu c}) \exp(-i\mu\theta) \\
 \frac{d\rho_{c\mu}}{dt} &= -[\gamma_{c\mu} + i(\Delta_1^\mu - \mu\varepsilon)]\rho_{c\mu} - i\alpha_\mu N_{\mu c} + i\beta^\mu \rho_{ca} \exp(-i\theta\delta_{\mu-1}) - i\alpha^{-\mu} \rho_{-\mu\mu} \exp(-i\mu\theta) \\
 \frac{d\alpha^\mu}{dt} &= -\kappa^\mu \alpha^\mu + g \operatorname{Im} \rho_{\mu c} \\
 \dot{\phi}_1^\mu &= (\omega_c - \Omega_1^\mu) + g \operatorname{Re} \rho_{\mu c} / \alpha^\mu
 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

donde todos los símbolos tienen el significado habitual y  $\delta_{ij}$  ( $i,j=a,+,-,c$ ) es la delta de Krönecker,  $N_{ij}=(\rho_{ii}-\rho_{jj})$  es la diferencia de poblaciones entre los niveles  $i$  y  $j$ ,  $2\varepsilon$  es el desdoblamiento Zeeman entre los subniveles  $b+$  y  $b-$ ,  $\omega_c$  es la frecuencia de la cavidad y finalmente, el ángulo relativo de variación lenta y las desintonías de los campos generado y de bombeo han sido definidos como

$$\begin{aligned}
 \theta &= [(\Omega_1^+ - \Omega_1^-)t - (\Omega_2^+ - \Omega_2^-)t + (\phi_1^+ - \phi_1^-) - (\phi_2^+ - \phi_2^-)] \\
 \Delta_2^\mu &= \Omega_2^\mu - \omega_{ba} \\
 \Delta_1^\mu(t) &= \Delta^\mu + \dot{\phi}_1^\mu(t)
 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

con  $\Delta^\mu = (\Omega_1^\mu - \omega_{bc})$  que deviene la desintonía de la cavidad en el referencial de la cavidad ( $\omega_b$  es la frecuencia del nivel  $b$  con  $m_j = 0$ ). Si  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega_0 = \omega_+ = \omega_- = \omega_b$ .

Nótese que este modelo contiene al modelo LGBO homogéneo de tres niveles sin más que considerar polarizaciones circulares, paralelas entre si, para ambos campos. En efecto, si anulamos una de las componentes dextro o levo de ambos campos, por ejemplo,  $\alpha^+ = \beta^+ = 0$ ,  $\alpha^- \equiv \alpha$  y  $\beta^- \equiv \beta$  (y lo mismo para las frecuencias) obtenemos unas ecuaciones isomorfas a las ecuaciones del modelo LGBO homogéneo (la única diferencia formal es un factor  $\sqrt{2}$  en las frecuencias de Rabi y  $-\sqrt{2}$  en las coherencias  $ab$  y  $cb$ ).

Por otra parte, es inmediato comprobar mediante sustitución en las Ecs.(5.1.2) que para considerar polarización lineal en el campo generado basta con tomar  $\alpha^+ = \alpha^- \equiv \alpha$  y  $\phi_1^+ = \phi_1^- \equiv \phi$ , lo que equivale a considerar el campo generado polarizado linealmente en la dirección  $\hat{y}$ , y tomar  $\beta^+ = \beta^- \equiv \beta$  y  $\phi_2^+ = \phi_2^- \equiv \phi_2$  para considerar el campo de bombeo con polarización lineal paralela a la del campo generado o  $\beta^+ = -\beta^- \equiv \beta$  para considerar

el campo generado con polarización lineal perpendicular a la del campo de bombeo. En lo que sigue nos referiremos a estas dos posibilidades (que son las únicas que consideraremos ya que son las que se encuentran en los experimentos, cf. Capítulo 3) como casos paralelo y ortogonal, respectivamente. En el siguiente apartado escribiremos explícitamente las ecuaciones de Maxwell-Schrödinger para estos casos.

El comportamiento dinámico de las Ecs.(5.1.3) fue estudiado numéricamente por sus autores en el caso particular de polarizaciones lineales de los campos, degeneración de los niveles superiores (i.e.,  $\varepsilon = 0$ ), iguales pérdidas para las componentes dextro y levo (i.e.,  $\kappa^+ = \kappa^- \equiv \kappa$ ) y desintonía nula del campo de bombeo (i.e.,  $\Delta_2^\mu = 0$ ), caso al que también nosotros nos restringiremos en lo que sigue. Podemos resumir sus principales resultados en pocas palabras. Tomando como valores de los parámetros de control los mismos que ya habían considerado cuando estudiaron el LGBO homogéneo [Pujol *et al.*, 1988a] obtuvieron que: (i) en el caso de polarizaciones ortogonales (que se da en los experimentos en las líneas de  $81.5\mu\text{m}$  y  $153\mu\text{m}$ ) se obtiene un claro comportamiento tipo Lorenz especialmente cuando la relajación  $\gamma_{+-}$  de la coherencia  $\rho_{+-}$  entre los dos subniveles superiores es próxima a  $\gamma_{11}$  y (ii) en el caso paralelo (que se da en los experimentos de la línea de  $374\mu\text{m}$ ) se obtiene un comportamiento muy distinto del comportamiento tipo Lorenz [Arjona, 1990; Arjona *et al.*, 1990a y 1990b]. El estudio fue extendido a desintonía de la cavidad no nula [Corbalán *et al.*, 1991] y al estudio de la dinámica de la fase [Arjona *et al.*, 1991]. Así pues, estos estudios numéricos arrojan unos resultados que, en principio, están de acuerdo con los resultados experimentales.

Ahora bien, aparte de la propia formulación matemática del modelo, no se ha llevado a cabo estudio analítico alguno del mismo. Esta es la tarea que vamos a realizar a continuación.

## 5.2. Particularización al caso de polarizaciones lineales.

Como ya hemos señalado vamos a estudiar analíticamente las Ecs.(5.1.3) en el caso particular de polarizaciones lineales en ambos campos. Las Ecs.(5.1.3) constituyen un conjunto de 18 ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas y no lineales. Este número puede ser reducido al fijar la polarización de los campos, lo que nos dará unas relaciones fijas entre  $\rho_{c+}(t)$  y  $\rho_{c-}(t)$  y entre  $\rho_{a+}(t)$  y  $\rho_{a-}(t)$ . Vamos a llevar a cabo esta simplificación. Para las frecuencias de referencia de los campos generados tomaremos la frecuencia de la cavidad, i.e.,  $\Omega_1^+ = \Omega_1^- \equiv \omega_c$ . Como en los estudios anteriores consideraremos el campo generado polarizado linealmente en la dirección  $\hat{y}$ , i.e.

$$\alpha^+(t) = \alpha^-(t) \equiv \alpha(t),$$

$$\phi_1^+(t) = \phi_1^-(t) \equiv \phi(t) \quad (5.2.1)$$

[esto, junto con  $\phi_2^+ = \phi_2^- \equiv \phi_2$  y  $\Omega_2^+ = \Omega_2^- \equiv \Omega_2$  hace que  $\theta = 0$ , Ec.(5.1.4)]. Suponiendo iguales pérdidas para las componentes levógira y dextrógira del campo generado ( $\kappa^+ = \kappa^- \equiv \kappa$ ) es obvio demostrar, haciendo uso en las Ecs.(5.1.3) de las ecuaciones de  $\dot{\alpha}^\mu(t)$  y  $\dot{\phi}^\mu(t)$ , la sencilla relación

$$\rho_{c+}(t) = \rho_{c-}(t) \equiv \rho_{cb}(t), \quad (5.2.2)$$

y teniendo esto en cuenta en la ecuación de evolución de  $\rho_{c\mu}$  se obtiene a su vez fácilmente que

$$\alpha(N_{+-} - 2i\text{Imp}_{+-}) = (\beta^+ - \beta^-)\rho_{ca}, \quad (5.2.3)$$

donde  $y_{+-} = \text{Imp}_{+-}$  (a partir de ahora utilizaremos la notación  $x_{ij} = \text{Re}p_{ij}$  y  $y_{ij} = \text{Im}p_{ij}$ ).

Haciendo ahora uso de las Ecs.(5.2.1), (5.2.2) y (5.2.3), del referencial para el campo generado, teniendo en cuenta que  $\theta = 0$  y definiendo  $\rho_{cb} = (\rho_{c+} + \rho_{c-})/2$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para el LGBO-M con polarizaciones lineales para los campos de bombeo y generado

$$\frac{d\rho_{aa}}{dt} = -\gamma_a \rho_{aa} + \lambda_a + 2\beta^+ y_{+a} + 2\beta^- y_{-a}$$

$$\frac{d\rho_{cc}}{dt} = -\gamma_c \rho_{cc} + \lambda_c - 4\alpha y_{cb}$$

$$\frac{d\rho_{\mu\mu}}{dt} = -\gamma_\mu \rho_{\mu\mu} + \lambda_\mu + 2\alpha y_{cb} - 2\beta^\mu y_{\mu a}$$

$$\frac{d\rho_{\mu a}}{dt} = -\gamma_{ab} \rho_{\mu a} + i(\beta^\mu N_{\mu a} + \beta^{-\mu} \rho_{-\mu\mu}^*) - i\alpha \rho_{ca}$$

$$\frac{d\rho_{+-}}{dt} = -\Gamma \rho_{+-} - i(\beta^+ \rho_{-a}^* - \beta^- \rho_{+a}) + 2\alpha y_{cb}$$

$$\frac{d\rho_{cb}}{dt} = -[\gamma_\perp + i(\Delta_c + \dot{\phi})]\rho_{cb} - i\alpha[(\rho_{++} + \rho_{--})/2 - \rho_{cc}] - i\alpha x_{+-} + i(\beta^+ + \beta^-)\rho_{ca}/2$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa\alpha - g\gamma_{cb} \\ \dot{\phi} &= g\alpha_{hc} / \alpha \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

que son 15 ecuaciones diferenciales a las que hemos de añadir la condición

$$\beta^+ = \beta^- \equiv \beta \quad (5.2.5)$$

para el caso paralelo y la condición

$$\beta^+ = -\beta^- \equiv \beta \quad (5.2.6)$$

para el caso ortogonal, y donde  $\Delta_c = (\omega_c - \omega_{bc})$  es la desintonía de la cavidad (recuérdese que al considerar  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega_{+c} = \omega_{-c}$  que llamaremos  $\omega_{bc}$ ) y hemos tomado  $\gamma_{c+} = \gamma_{c-} \equiv \gamma_l$ ,  $\gamma_+ = \gamma_- \equiv \gamma_{||}$ ,  $\gamma_{a+} = \gamma_{a-} \equiv \gamma_{ab}$ ,  $\lambda_+ = \lambda_- \equiv \lambda_b$  y hemos hecho uso del cambio de notación  $\gamma_{+-} \equiv \Gamma$ . Nótese que, una vez especificado esto último, todos los parámetros coinciden con los ya explicados para el LGBO-D, con la excepción de  $\Gamma$  (la relajación de la coherencia entre los subniveles magnéticos degenerados) para el que, además, no existe estimación alguna sobre su valor. Volveremos repetidamente sobre este punto. Vamos a elaborar a continuación los casos paralelo y ortogonal por separado.

### 5.2.a. Caso paralelo.

Al igual que la condición (5.2.1) de polarización lineal para el campo de bombeo nos proporcionó una relación simple entre  $\rho_{c+}(t)$  y  $\rho_{c-}(t)$  [Ec.(5.2.2)], vamos a tratar de obtener, con la ayuda de la condición (5.2.5), una relación sencilla entre  $\rho_{a+}(t)$  y  $\rho_{a-}(t)$ . Así, sustituyendo (5.2.5) en la Ec.(5.2.3) se obtiene  $N_{+-} = 0$ , o lo que es lo mismo,

$$\rho_{++}(t) = \rho_{--}(t) \equiv \rho_{bb}(t) \quad (5.2.7)$$

con la parte real y

$$y_{+-}(t) = 0 \quad (5.2.8)$$

con la parte imaginaria. Por otra parte, a partir de las ecuaciones de evolución de las poblaciones  $\rho_{++}$  y  $\rho_{--}$  en las Ecs.(5.2.4) obtenemos la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones entre los dos subniveles b,  $N_{+-}$ , que es

$$\frac{dN_{+-}}{dt} = -\gamma_{+-}N_{+-} + \lambda_{+-} - 2\beta(y_{+a} - y_{-a}). \quad (5.2.9)$$

Teniendo ahora en cuenta la ecuación de evolución de  $y_{+-}$

$$\frac{dy_{+-}}{dt} = -\Gamma y_{+-} - \beta(x_{-a} - x_{+a}) \quad (5.2.10)$$

es evidente por las relaciones (5.2.7) y (5.2.8) que se verifica

$$\rho_{a+}(t) = \rho_{a-}(t) \equiv \rho_{ab}(t) \quad (5.2.11)$$

que es la relación buscada. Finalmente, la sustitución de las Ecs.(5.2.7), (5.2.8) y (5.2.11) en las Ecs.(5.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{aa}}{dt} &= -\gamma_a \rho_{aa} + \lambda_a + 4\beta y_{ba} \\ \frac{d\rho_{bb}}{dt} &= -\gamma_{11} \rho_{bb} + \lambda_b + 2\alpha y_{cb} - 2\beta y_{ba} \\ \frac{dN_{bc}}{dt} &= -\gamma_{11} N_{bc} + \lambda_{bc} + 6\alpha y_{cb} - 2\beta y_{ba} \\ \frac{d\rho_{ba}}{dt} &= -\gamma_{ab} \rho_{ba} + i\beta(N_{ba} + x_{+-}) - i\alpha \rho_{ca} \\ \frac{d\rho_{ca}}{dt} &= -[\gamma_{ac} + i(\Delta_c + \dot{\phi})] \rho_{ca} + 2i\beta \rho_{cb} - 2i\alpha \rho_{ba} \\ \frac{dx_{+-}}{dt} &= -\Gamma x_{+-} - 2\beta y_{ba} + 2\alpha y_{cb} \\ \frac{d\rho_{cb}}{dt} &= -[\gamma_{\perp} + i(\Delta_c + \dot{\phi})] \rho_{cb} - i\alpha(N_{bc} + x_{+-}) + i\beta \rho_{ca} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa\alpha - g y_{cb} \\ \dot{\phi} &= g x_{cb} / \alpha \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

que son las 11 ecuaciones diferenciales que describen el LGBO-M con polarizaciones lineales paralelas de los campos.

### 5.2.b. Caso ortogonal.

Para obtener las ecuaciones del caso ortogonal habremos de hacer uso de la relación (5.2.6) y buscar una nueva relación sencilla entre  $\rho_{a+}(t)$  y  $\rho_{a-}(t)$ . Supongamos que al igual que en el caso paralelo, se verifica

$$\rho_{a+}(t) = \rho_{a-}(t) \equiv \rho_{bb}(t) \quad (5.2.13)$$

La relación (5.2.13) es una hipótesis física razonable ya que ambos subniveles  $b+$  y  $b-$  relajan con la misma tasa  $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma_{||}$  y tienen la misma población térmica  $n_{b+} = n_{b-} = n_b \equiv \lambda_b/\gamma_{||}$  así como están sometidos a las mismas intensidades de bombeo y campo láser. Sustituyendo las relaciones (5.2.6) y (5.2.13) en las Ecs.(5.2.4) obtenemos

$$x_{ac}(t) = 0, \quad (5.2.14)$$

de la parte real y

$$y_{ac}(t) = \alpha(t)y_{a-}(t)/\beta, \quad (5.2.15)$$

de la parte imaginaria. Por otra parte, haciendo uso de la relación (5.2.6) en las ecuaciones de evolución de  $\rho_{a+}$  y  $\rho_{a-}$  en las Ecs.(5.2.4) obtenemos

$$x_{a+}(t) = x_{a-}(t) \equiv x_{ab}(t), \quad (5.2.16)$$

a partir de las partes reales y

$$\begin{aligned} \frac{dy_{a+}}{dt} &= -\gamma_{ab}y_{a+} + \beta(x_{a-} - D_{+a}) + \alpha x_{ac}, \\ \frac{dy_{a-}}{dt} &= -\gamma_{ab}y_{a-} + \beta(x_{a+} - D_{-a}) + \alpha x_{ac}, \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

a partir de las partes imaginarias. Si sumamos las Ecs.(5.2.17) y hacemos uso de (5.2.13) y (5.2.14), obtenemos

$$y_{a+}(t) = -y_{a-}(t) \equiv y_{ab}(t), \quad (5.2.18)$$

que junto a la relación (5.2.16) da el resultado

$$\rho_{+a}(t) = -\rho_{-a}^*(t) \equiv \rho_{ab}(t), \quad (5.2.19)$$

que es la relación que buscábamos. Pero aún podemos extraer más relaciones interesantes. La sustitución de (5.2.13), (5.2.14) y (5.2.19) en la ecuación de evolución de  $\rho_{ca}$  en las Ecs.(5.2.4) da lugar a

$$y_{ac}(t) = 0, \quad (5.2.20)$$

que junto a (5.2.14) supone,

$$\rho_{ac}(t) = 0, \quad (5.2.21)$$

$$x_{ab}(t) = 0, \quad (5.2.22)$$

y la sustitución de (5.2.20) en (5.2.15) da lugar a

$$y_{+-}(t) = 0. \quad (5.2.23)$$

Por tanto, a partir de la conjetura (5.2.13) hemos obtenido las importantes relaciones

$$\rho_{+a}(t) = -\rho_{-a}^*(t) \equiv \rho_{ab}(t),$$

$$\rho_{ac}(t) = 0,$$

$$x_{ab}(t) = 0$$

$$y_{+-}(t) = 0. \quad (5.2.24)$$

Recalquemos que la conjetura (5.2.13) es consistente con las Ecs.(5.2.4) si bien no hemos sido capaces de demostrar su necesidad y unicidad. No obstante, todas las simulaciones numéricas bajo condiciones tanto dinámicas como estacionarias verifican (5.2.13) y, en consecuencia, el resto de resultados obtenidos a partir de dicha relación.

Ahora ya podemos obtener las ecuaciones del caso ortogonal. Haciendo uso de las relaciones (5.2.24) y sustituyéndolas en las Ecs.(5.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{aa}}{dt} &= -\gamma_a \rho_{aa} + \lambda_a + 4\beta y_{ba} \\
\frac{d\rho_{bb}}{dt} &= -\gamma_{||} \rho_{bb} + \lambda_b + 2\alpha y_{cb} - 2\beta y_{ba} \\
\frac{dN_{bc}}{dt} &= -\gamma_{||} N_{bc} + \lambda_{bc} + 6\alpha y_{cb} - 2\beta y_{ba} \\
\frac{dy_{ba}}{dt} &= -\gamma_{ab} y_{ba} + \beta(N_{ba} - x_{+-}) \\
\frac{dx_{+-}}{dt} &= -\Gamma x_{+-} + 2\beta y_{ba} + 2\alpha y_{cb} \\
\frac{d\rho_{cb}}{dt} &= -[\gamma_{\perp} + i(\Delta_c + \dot{\phi})]\rho_{cb} - i\alpha(N_{bc} + x_{+-}) \\
\frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa\alpha - g y_{cb} \\
\dot{\phi} &= g x_{cb} / \alpha
\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

que son las 8 ecuaciones diferenciales que describen el LGBO-M con polarizaciones ortogonales. Nótese que la población del nivel efectivo b en ausencia de campos,  $n_b = \lambda_b/\gamma_b$  es la mitad que la que corresponde al conjunto de los dos subniveles degenerados ya que hemos aplicado la definición (5.2.13).

Vale la pena resaltar ya las principales características que diferencian al caso ortogonal del caso paralelo. Estas diferencias se encuentran reunidas en las condiciones (5.2.24). El resultado  $\rho_{ac}(t) = 0$  es de especial relevancia ya que indica que *en la configuración ortogonal no hay acoplamiento coherente entre los campos de bombeo y generado*, acoplamiento que ocurre en general *vía* la coherencia de dos fotones  $\rho_{ac}(t)$  (recordemos que en el caso paralelo esta coherencia no se anula). Por tanto, no existen procesos Raman en la configuración ortogonal y, consecuentemente, no habrá desdoblamiento Rabi de la ganancia láser. Así pues, únicamente queda un acoplamiento incoherente entre los campos de bombeo y generado a través de las poblaciones de los niveles + y - [o población del *nivel superior efectivo* b, ya que ambas son iguales,

Ec.(5.2.13)] y a través de la coherencia  $x_{+-}$  entre ellos. Volveremos sobre este importante resultado en el último apartado de este capítulo para interpretarlo en términos de interferencias cuánticas destructivas entre los canales  $a \leftrightarrow + \leftrightarrow c$  y  $a \leftrightarrow - \leftrightarrow c$ .

Por otra parte, el resultado  $x_{ba}(t) = 0$  implica que el índice de refracción a la frecuencia de bombeo no se ve afectado por la desintonía de la cavidad, a diferencia de lo que ocurre en los LGBO de tres niveles homogéneos.

### 5.3. Relación entre el caso paralelo y los LGBO de tres niveles homogéneos.

Ya hemos comentado que el comportamiento dinámico exhibido por el LGBO-M paralelo es muy diferente del correspondiente al modelo de Lorenz-Haken. Es más, el comportamiento es parecido al exhibido por los LGBO homogéneos de tres niveles, parecido que se acentúa cuanto más cercanos son los valores de  $\Gamma$  y  $\gamma_{||}$  [Arjona *et al*, 1990a] Esto puede entenderse fácilmente ahora estudiando un poco más de cerca las Ecs.(5.2.12) correspondientes a esta configuración paralela.

Recordemos que  $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma_{||}$  y que

$$\Gamma = \frac{1}{2}(\gamma_+ + \gamma_-) + \Gamma_{+-}^{col} = \gamma_{||} + \Gamma_{+-}^{col} . \quad (5.3.1)$$

Así pues, el mínimo valor que puede tomar  $\Gamma$ , y que corresponde a ausencia de colisiones desfasantes no radiativas que afecten a la coherencia  $\rho_{+-}$ , es  $\gamma_{||}$ . Consideremos este límite ya que en él el parecido con el LGBO es mayor.

El hecho de que tanto  $\rho_{bb}(t)$  como  $x_{+-}(t)$  relajen con la misma tasa permite eliminar la variable  $x_{+-}(t)$  de las ecuaciones mediante la definición de una población efectiva del nivel superior ya que en las Ecs.(5.2.12),  $x_{+-}(t)$  siempre aparece sumada a  $\rho_{bb}(t)$ . Definimos, por tanto

$$\sigma_{bb}(t) = \rho_{bb}(t) + x_{+-}(t) . \quad (5.3.2)$$

Definiendo ahora  $D_{bc}(t) = [\sigma_{bb}(t) - \rho_{cc}(t)]$  es inmediato obtener las nuevas ecuaciones de evolución, que resultan ser

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{aa}}{dt} &= -\gamma_a \rho_{aa} + \lambda_a + 4\beta y_{ba} \\
\frac{d\sigma_{bb}}{dt} &= -\gamma_{||} \sigma_{bb} + \lambda_b + 4\alpha y_{cb} - 4\beta y_{ba} \\
\frac{dD_{bc}}{dt} &= -\gamma_{||} D_{bc} + \lambda_{bc} + 8\alpha y_{cb} - 4\beta y_{ba} \\
\frac{d\rho_{ba}}{dt} &= -\gamma_{ab} \rho_{ba} + i\beta(\sigma_{bb} - \rho_{aa}) - i\alpha \rho_{ca} \\
\frac{d\rho_{ca}}{dt} &= -[\gamma_{ac} + i(\Delta_c + \phi)] \rho_{ca} + 2i\beta \rho_{cb} - 2i\alpha \rho_{ba} \\
\frac{dx_{+-}}{dt} &= -\Gamma x_{+-} - 2\beta y_{ba} + 2\alpha y_{cb} \\
\frac{d\rho_{cb}}{dt} &= -[\gamma_{\perp} + i(\Delta_c + \phi)] \rho_{cb} - i\alpha D_{bc} + i\beta \rho_{ca} \\
\frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa\alpha - g y_{cb} \\
\dot{\phi} &= g x_{cb} / \alpha
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Ahora bien, este conjunto de ecuaciones es isomorfo al modelo LGBO homogéneo de tres niveles, modelo cuyas ecuaciones son las mismas que las del LGBO-D [Ecs.(4.1.3)] tomando en ellas  $v=0$ , bastando realizar los cambios:  $\alpha = \sqrt{2} \alpha_p$ ,  $\beta = \sqrt{2} \beta_p$  (el subíndice significa modelo paralelo)  $\rho_{10} = -\sqrt{2} \rho_{cb}$  y  $\rho_{20} = -\sqrt{2} \rho_{ab}$ , e identificar  $\sigma_{bb}$  con la población del nivel superior,  $\rho_{00}$  (si bien, por lo comentado antes sobre el valor de la población del nivel efectivo b en ausencia de campos,  $\lambda_b = \lambda_0/2$ ).

Así, todo lo estudiado del modelo LGBO es aplicable al caso de polarizaciones paralelas en el límite  $\Gamma = \gamma_{||}$ . Evidentemente, a medida que nos alejemos de este caso particular, irán apareciendo diferencias entre ambos modelos, como las descritas por Arjona *et al* (1990), ya que en este caso no podremos eliminar la variable  $x_{+-}(t)$  mediante la definición de  $\sigma_{bb}(t)$ . Estas diferencias aparecerán de manera progresiva y consecuentemente, los resultados conocidos para el LGBO homogéneo serán aplicables en cierta medida al caso paralelo siempre que el valor de  $\Gamma$  no sea muy diferente de su valor mínimo. En cualquier caso queda justificado claramente el origen del tipo de comportamiento exhibido por el LGBO-M paralelo siendo claro, en particular, que este modelo no puede presentar comportamiento de tipo Lorenz por lo expuesto en el Capítulo 3. Así pues no vamos a estudiar más este caso paralelo y vamos, en su lugar, a concentrarnos en el caso ortogonal que es mucho más interesante.

#### 5.4. Relación entre el caso ortogonal y el modelo de Lorenz.

Vamos a estudiar detalladamente las ecuaciones del LGBO-M ortogonal con el fin de justificar el origen del comportamiento tipo Lorenz encontrado, mediante integración numérica de las Ecs.(5.1.3), en esta configuración. Comenzaremos por estudiar las soluciones estacionarias para analizar su estabilidad, continuaremos brevemente con el comportamiento dinámico para finalizar con la formulación de un modelo simplificado que justifica el comportamiento tipo Lorenz.

##### 5.4.a. Soluciones estacionarias.

Las Ecs.(5.2.25) tienen dos conjuntos de soluciones estacionarias: la solución trivial, que corresponde a la ausencia de emisión y la no trivial. Anulando las derivadas temporales en las Ecs.(5.2.25) e imponiendo  $\alpha = 0$ , se obtiene para la solución trivial

$$\alpha = x_{cb} = y_{cb} = 0 ,$$

$$\rho_{aa} = n_a + 4\beta y_{ba}/\gamma_a ,$$

$$\rho_{bb} = n_b - 2\beta y_{ba}/b ,$$

$$N_{bc} = n_{bc} - 2\beta y_{ba}/b ,$$

$$x_{+-} = 2\beta y_{ba}/\Gamma ,$$

$$y_{ba} = -\frac{n_{ab}b\gamma_a\Gamma\beta}{2(2\Gamma b + \gamma_a\Gamma + \gamma_ab)\beta^2 + \gamma_a\gamma_{ab}\Gamma b} , \quad (5.4.1)$$

donde las poblaciones térmicas (i.e., en ausencia de campos) de los niveles son  $n_a = \lambda_a/\gamma_a$ ,  $n_b = \lambda_b/b$  (con  $b = \gamma_{11}/\gamma_{12}$ ) y  $n_{ij} = (n_i - n_j)$ . De ahora en adelante todas las frecuencias aparecen normalizadas a  $\gamma_1$  sin cambiar los símbolos para no complicar la notación, salvo para los ya utilizados en otros capítulos, i.e.,  $\sigma = \kappa/\gamma_1$  y  $g = g/\gamma_1^2$ .

En cuanto a la solución estacionaria no trivial, con un poco de álgebra se obtiene el siguiente resultado (únicamente damos aquí el valor de la intensidad por mor de brevedad, y daremos el valor estacionario de  $x_{+-}$  más adelante)

$$\alpha^2 = \frac{b}{2\sigma} \frac{A\beta^2 - B}{C\beta^2 + H}, \quad (5.4.2)$$

con

$$A = 2g\gamma_a n_{ab}(\Gamma - b) - 2\xi(2b\Gamma + b\gamma_a + \gamma_a\Gamma),$$

$$B = b\gamma_a\gamma_{ab}\Gamma\xi,$$

$$C = 4b(b + 3\Gamma) + 4\gamma_a(3b + \Gamma),$$

$$H = b\gamma_a\gamma_{ab}(b + 3\Gamma),$$

$$\xi = -gn_{bc} + \sigma \left[ 1 + \left( \frac{\Delta_c}{\sigma + 1} \right)^2 \right]. \quad (5.4.3)$$

Al ser positivo el denominador de la Ec.(5.4.2) (C y H son coeficientes positivos), la condición de existencia de esta solución es  $A\beta^2 - B \geq 0$ , condición que se reduce a la condición  $A \geq 0$  si  $\beta^2$  es lo suficientemente grande toda vez que B es positivo ( $\xi$  es positivo porque  $n_{bc} < 0$  al no haber bombeo incoherente). Ahora bien, para que  $A \geq 0$  han de verificarse las siguientes condiciones

$$g \geq g_{thr} = \sigma n_{ac} (2b\Gamma + b\gamma_a + \gamma_a\Gamma) \left[ 1 + \left( \frac{\Delta_c}{\sigma + 1} \right)^2 \right] \frac{\gamma_a - \gamma_a^{thr}}{\Gamma - \Gamma_{thr}}$$

$$\Gamma \geq \Gamma_{thr} \equiv \frac{1 - 3n_b}{n_{ac}} \frac{\gamma_a b}{\gamma_a - \gamma_a^{thr}}$$

$$\gamma_a \geq \gamma_a^{thr} \equiv 2b \frac{n_{cb}}{n_{ac}} \quad (5.4.4)$$

En nuestro caso adoptaremos para las relajaciones los mismos valores que ya adoptamos en el LGBO-D, y por tanto  $\gamma_a^{thr} = 0.004$  y  $\Gamma_{thr} = 0.285$ . Verificamos perfectamente, por tanto, las dos primeras condiciones (trabajamos con valores grandes de g). El problema puede venir del parámetro  $\Gamma$  (recordemos que es la relajación de la coherencia existente entre los niveles  $b+$  y  $b-$ ). En cualquier caso resulta sorprendente la existencia de un valor umbral en  $\Gamma$ . Volveremos sobre este punto en el siguiente apartado.

En la Fig.5.2 representamos el valor del bombeo necesario para que se produzca la emisión, i.e.,

$$\beta_{1st}^2 = \frac{B}{A}, \quad (5.4.5)$$

en función de la relajación  $\Gamma$  y para diversos valores de la desintonía de la cavidad  $\Delta_c$ .

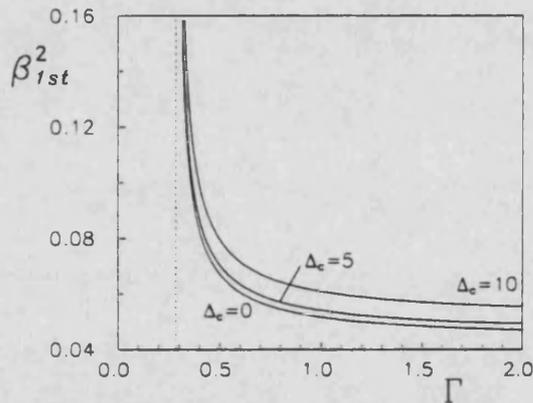


Fig.5.2. Dependencia del umbral de emisión  $\beta_{1st}^2$  con la relajación de la coherencia entre los subniveles magnéticos degenerados,  $\Gamma$ , para diversos valores de la desintonía de la cavidad  $\Delta_c$ ,  $g = 2800$  y  $\sigma = 5$ . Se aprecia claramente la existencia de un valor umbral en la relajación  $\Gamma$ .

Nótese el rápido incremento que sufre este primer umbral a medida que  $\Gamma \rightarrow \Gamma_{thr}$ . En la Fig.5.3 representamos el comportamiento de la intensidad de salida  $\alpha^2$  frente al bombeo  $\beta^2$  para diversos valores de  $\Gamma$  y desintonía nula (a) y para  $\Gamma = 0.5$  y diversos valores de la desintonía (b). Nótese el marcado carácter no lineal de la salida.

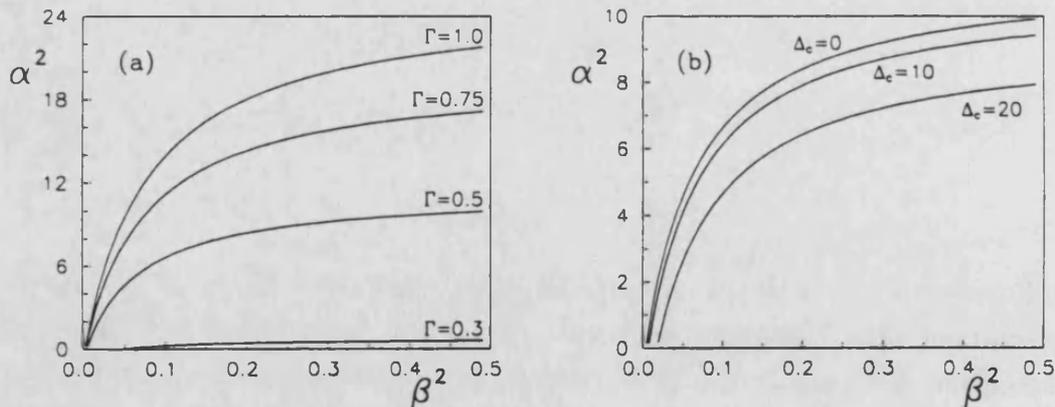


Fig.5.3. Dependencia de la intensidad emitida  $\alpha^2$  con la intensidad del campo de bombeo  $\beta^2$  para (a)  $\Delta_c = 0$  y varios valores de  $\Gamma$  y (b)  $\Gamma = 0.5$  y varios valores de  $\Delta_c$ . Otros parámetros:  $g = 2800$ ,  $\sigma = 1.85$  y el resto de parámetros como en el Capítulo 4 (línea de  $81.5 \mu\text{m}$ ) salvo la población del nivel superior que vale ahora la mitad [ver comentario a las Ecs.(5.2.25)]. Nótese como el bombeo es mucho menos eficiente cuanto menor es  $\Gamma$  (a).

5.4.b. Análisis lineal de estabilidad.

Linealizando las Ecs.(5.2.25) tal y como se describió en el Capítulo 2 obtenemos para la perturbación  $\delta \mathbf{u} = \text{col}[\delta \rho_{aa}, \delta \rho_{bb}, \delta D_{bc}, \delta y_{ba}, \delta x_{+-}, \delta x_{cb}, \delta y_{cb}, \delta \alpha]$  las siguientes ecuaciones

$$\frac{d}{d\tau} \delta \mathbf{u}(t) = L \delta \mathbf{u}(t) \quad (5.4.6)$$

$$L = \begin{bmatrix} -\gamma_a & 0 & 0 & 4\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & -2\beta & 0 & 0 & 2\alpha & 2y_{cb} \\ 0 & 0 & -b & -2\beta & 0 & 0 & 6\alpha & 6y_{cb} \\ -\beta & \beta & 0 & -\gamma_{ab} & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta & -\Gamma & 0 & 2\alpha & 2y_{cb} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-1 + g \frac{y_{cb}}{\alpha}\right) & \left(\Delta_c + g \frac{x_{cb}}{\alpha}\right) & -g \frac{x_{cb} y_{cb}}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & -\left(\Delta_c + 2g \frac{x_{cb}}{\alpha}\right) & -1 & \left[g \left(\frac{x_{cb}}{\alpha}\right)^2 - (N_{bc} + x_{+-})\right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & -\sigma \end{bmatrix}$$

Analicemos primero la solución trivial (5.4.1). Para sustituirla en  $|L - \mu I| = 0$ , con  $I$  la matriz identidad  $8 \times 8$ , habremos de tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{y_{cb}}{\alpha} &= -\frac{\sigma}{g} \\ \frac{x_{bc}}{\alpha} &= -\frac{1}{g} \frac{\sigma}{\sigma+1} \Delta_c \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

relaciones que se obtienen fácilmente al anular las derivadas temporales en (5.2.25). Sustituyendo ahora la solución trivial se tiene una ecuación característica factorizada en dos polinomios, uno de orden 5 que no contiene información relevante (sólo contiene las constantes de relajación de la materia) y otro de orden tres. Esta última se escribe

$$\mu^3 + c_1 \mu^2 + c_2 \mu + c_3 = 0 \quad (5.4.8)$$

$$c_1 = 2(\sigma + 1)$$

$$c_2 = (\sigma + 1)^2 + \sigma[1 - (N_{bc} + x_{+-})] + (\sigma^2 - \sigma + 1)\xi$$

$$c_3 = \sigma(\sigma + 1)[1 + \xi(\sigma + 1) - (N_{bc} + x_{+-})]$$

$$\xi = [\delta/(\sigma + 1)]^2$$

y  $(N_{bc} + x_{+-})$  dado por (5.4.1). Puede comprobarse que esta ecuación característica no permite ninguna bifurcación de Hopf si  $n_{bc} < 0$ . Únicamente permite una bifurcación *pitchfork* (PB) para unas condiciones que coinciden exactamente con las (5.4.3) de existencia de la solución no trivial. Por tanto, la solución trivial se bifurca a través de una PB a la solución no trivial (5.3.2).

Para la solución no trivial se obtiene una ecuación característica de orden 8. Dada la imposibilidad de obtener resultados analíticos de una ecuación de orden tan alto, llevaremos a cabo el análisis de estabilidad numéricamente. Además, nos vamos a limitar a estudiar la estabilidad del sistema en condiciones de perfecta resonancia de la cavidad, i.e.  $\Delta_c = 0$ .

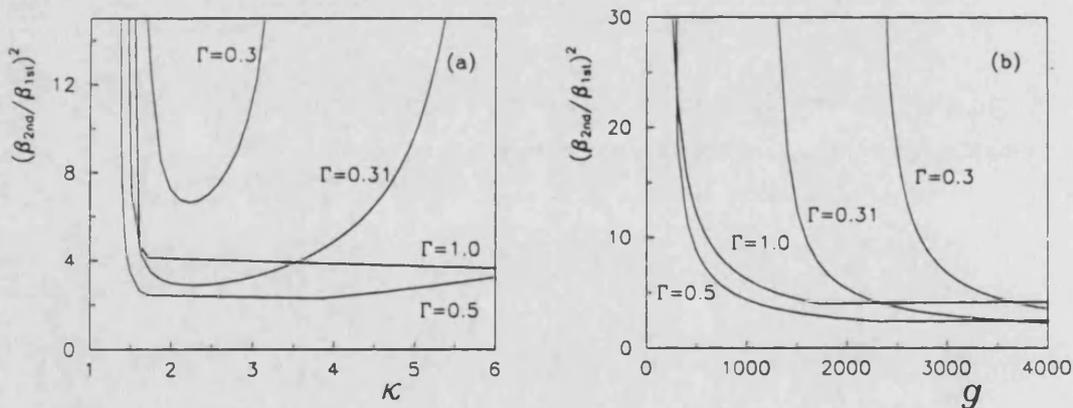


Fig.5.4. Representación del cociente de umbrales  $(\beta_{2nd}/\beta_{1st})^2$  en función de (a) las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  (para  $g = 2800$ ) y (b) de la ganancia (para  $\sigma = 1.85$ ) ambas para diversos valores de  $\Gamma$ . El resto de los parámetros de los parámetros del sistema toma los mismos valores que en el Capítulo 4.

Los resultados numéricos obtenidos quedan reunidos en la Fig.5.4, donde hemos representado el cociente entre el umbral de inestabilidades  $\beta_{2nd}^2$  obtenido numéricamente y el umbral de emisión  $\beta_{1st}^2$  dado por la Ec.(5.4.5) frente a las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  [Fig.5.4(a)] y frente a la ganancia  $g$  [Fig.5.4.(b)] para diversos valores de la relajación de la coherencia entre los subniveles superiores,  $\Gamma$ . Por encima de las

curvas la solución estacionaria (5.4.2) es inestable. Obsérvese la existencia de una condición de mala cavidad para  $\sigma$  por debajo de la cual no se obtienen inestabilidades así como la existencia de un valor mínimo para el cociente de umbrales del orden de 2, incompatible con el modelo de Lorenz si queremos identificar este cociente de  $\beta^2$  con el cociente de  $r$  de aquél. Nótese también como la relajación  $\Gamma$  tiene una notable influencia, sobre todo con respecto a cuál es la condición de mala cavidad (para  $\Gamma = 0.5$  es menor que para los otros dos valores de  $\Gamma$ ) y para valores grandes de  $\sigma$  donde, para  $\Gamma$  lo suficientemente pequeña aparece un nuevo valor límite. De hecho, parece que la disminución de  $\Gamma$  implica una reducción del dominio de inestabilidades. Así, el comportamiento es parecido al del modelo de Lorenz si tomamos valores de  $\Gamma$  entre 0.5 y 1, al menos por lo que respecta a la existencia de una condición de mala cavidad y al aspecto general de la curva, y distinto fuera de este rango. Ahora bien, como veremos más adelante, estas conclusiones son prematuras porque los cocientes de umbrales de ambos modelos no son comparables tal y como están definidos.

La Fig.5.5 muestra el cociente de umbrales frente a  $\Gamma$  para dos valores de las pérdidas de la cavidad. Resaltamos la existencia de un valor mínimo de  $\Gamma$  por debajo del cual no hay inestabilidades, y que, tras alcanzarse un mínimo para  $\Gamma < 0.5$ , un aumento de  $\Gamma$  hace aumentar notablemente el cociente de umbrales, apareciendo incluso una nueva asíntota para valores altos de  $\Gamma$ , como puede apreciarse claramente en la figura en el caso de  $\sigma = 1.85$ . Así, esta curva sugiere, junto a las figuras anteriores, que un aumento de  $\Gamma$  conlleva un aumento de la condición de mala cavidad. Todo esto abunda en lo comentado anteriormente.

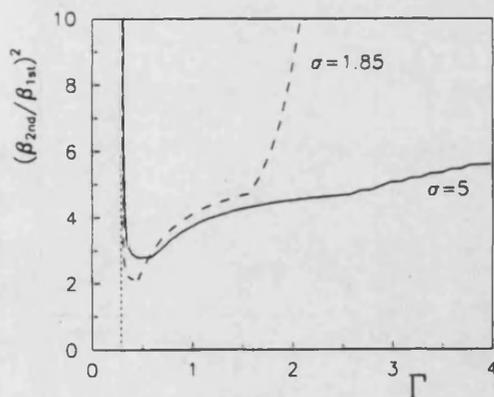


Fig.5.5. Dependencia del cociente de umbrales con la relajación  $\Gamma$  para dos valores de las pérdidas de la cavidad. Nótese la existencia de una asíntota vertical en el valor  $\Gamma_{thr}$  y como un aumento de  $\Gamma$  conlleva un aumento rápido del cociente de umbrales una vez sobrepasado el mínimo. Esto implica un aumento del valor de las pérdidas necesario para obtener inestabilidades a medida que  $\Gamma$  aumenta, extremo que se aprecia claramente en la curva de  $\sigma = 1.85$  donde incluso aparece una nueva asíntota para valores altos de  $\Gamma$ .

Hemos de resaltar lo sensibles que son los resultados expuestos en este subapartado respecto al valor de la diferencia de poblaciones térmica  $n_{bc}$ . Esto es particularmente claro en el valor del primer umbral  $\beta_{1st}^2$  [Ec.(5.4.5)] que es directamente proporcional a  $-gn_{bc}$  siendo  $g$  un número alto.

### 5.4.c. Comportamiento dinámico.

El comportamiento dinámico de este modelo ha sido extensivamente estudiado por sus autores [Arjona *et al*, 1990a; 1990b; 1991; Corbalán *et al*, 1991] y nosotros no pretendemos extender este estudio. Ellos han mostrado mediante el diagrama de bifurcaciones, representaciones de la intensidad y de los atractores y mediante el estudio de la dinámica de la fase que: (i) el modelo muestra comportamiento tipo Lorenz y (ii) que este comportamiento es tanto más notable cuanto menor es el valor de  $\Gamma$ . Nosotros únicamente vamos a insistir en este último aspecto a través del mapa de intensidades para algunos casos de comportamiento caótico utilizando los mismos parámetros que ya utilizamos en el estudio del LGBO-D para la línea de  $81.5\mu\text{m}$ .

La Fig.5.6. muestra dos casos típicos de comportamiento caótico de la intensidad para  $g = 2800$ ,  $\Gamma = 2$  y  $\sigma = 1.85$  [Fig.5.6(a)] y  $\sigma = 5$  [Fig.5.6(b)] (el resto de parámetros

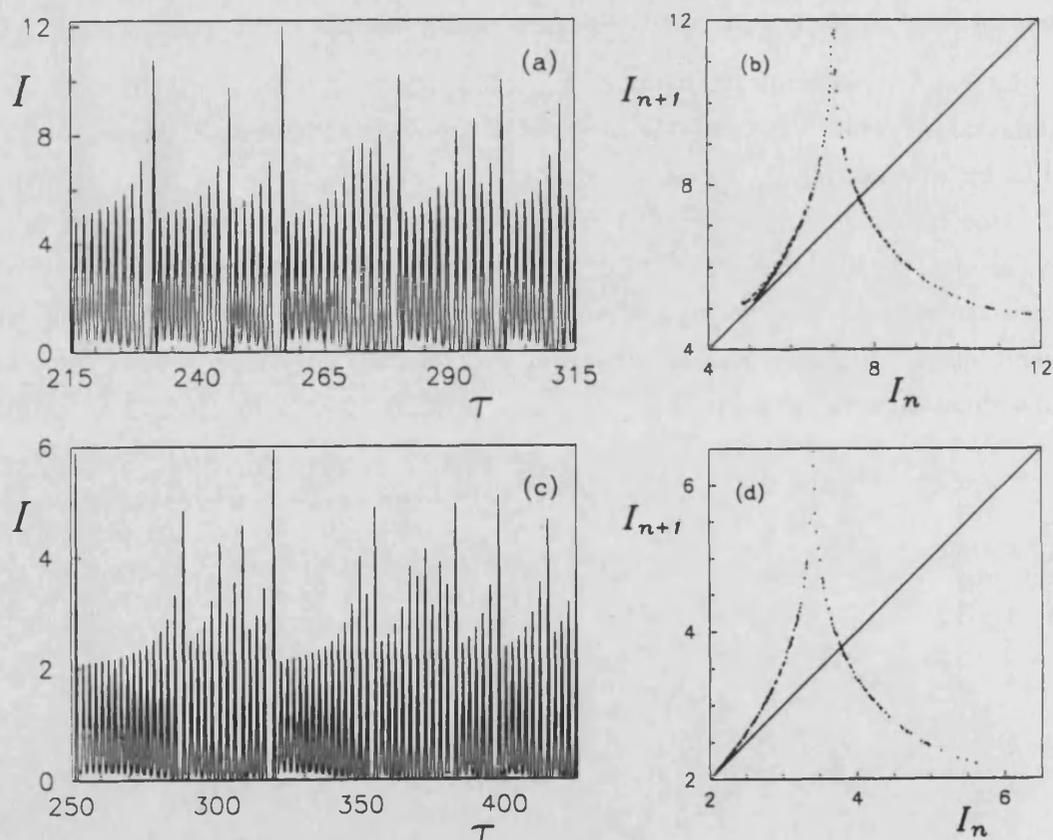


Fig.5.6. Evolución de la intensidad en el caso  $\Gamma = 2$  para  $\beta^2 = 0.089$  y  $\sigma = 1.85$  (a y b) y para  $\beta^2 = 0.09$  y  $\sigma = 5$  (c y d). Nótese el marcado carácter tipo Lorenz en ambos casos. Estos cálculos han sido realizados con *hard mode excitation* (condiciones iniciales de láser apagado) y los bombeos son menores que los correspondientes al umbral de inestabilidades obtenido del análisis lineal de estabilidad, que vale  $\beta^2 = 0.131$  para el primer caso y  $\beta^2 = 0.1$  para el segundo.

como en el Capítulo 4). Estos registros han sido obtenidos mediante *hard mode excitation* (condiciones iniciales de láser apagado) y es patente el comportamiento tipo Lorenz con los característicos *spirallings*. En particular, nótese que los mapas de intensidad muestran una sola cúspide, como corresponde al modelo de Lorenz, salvo para el caso de la Fig.5.6(a) que tiene una segunda estructura, casi imperceptible, en la parte de la izquierda. Esta segunda estructura se debe a la presencia de un primer pico de altura excesivamente pequeña al principio de cada *spiralling* y se hace algo más evidente si se utilizan valores mayores de  $\Gamma$ . La Fig.5.7 muestra otro ejemplo correspondiente a un valor menor de  $\Gamma$  ( $\Gamma = 0.3$ ) y  $\sigma = 1.85$ . No hemos podido obtener un registro para  $\sigma = 5$  porque en este valor de las pérdidas, no hay inestabilidades [Fig.(5.3.a)]. De nuevo en este caso el comportamiento es tipo Lorenz y ahora ya no hay ninguna discrepancia.

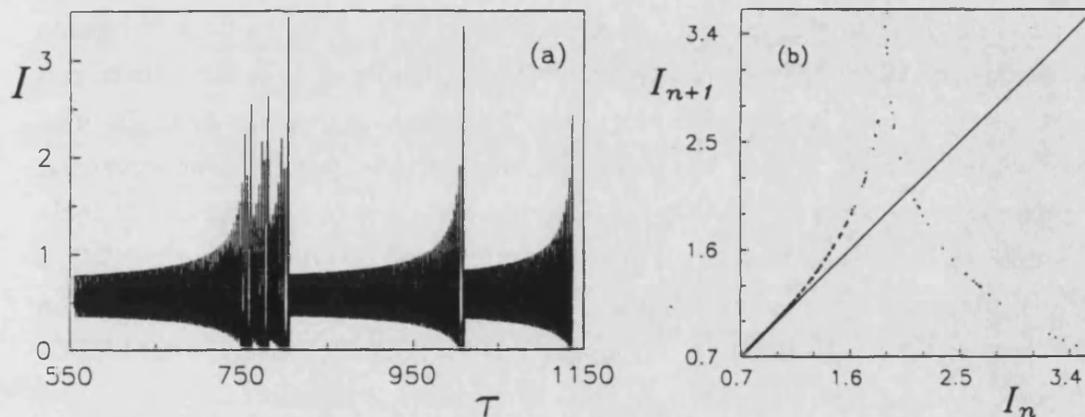


Fig.5.7. Igual que la Fig.5.6 solo que ahora  $\Gamma = 0.3$  y  $\beta = 0.63$ . En este caso el segundo umbral se encuentra en  $\beta = 0.66$ .

También hemos realizado cálculos para valores mayores de  $\Gamma$ . En particular, cuando  $\Gamma = 3$  sucede algo cualitativamente nuevo: el único comportamiento dinámico exhibido por el modelo por encima del segundo umbral es un comportamiento periódico si bien con *hard mode excitation* se pueden obtener comportamientos caóticos. Este hecho está en claro desacuerdo con el modelo de Lorenz. Así pues, el comportamiento del LGBO-M es tanto más parecido al modelo de Lorenz cuanto menor es el valor de  $\Gamma$ .

En [Corbalán *et al*, 1993], donde los cálculos se realizaron por integración de las Ecs.(5.1.3) para valores algo distintos de algunos parámetros, se obtenía un comportamiento diferente en el sentido de que siempre aparecía una doble estructura como la de la Fig.5.6(a) pero más marcada. Esa doble estructura tendía a desaparecer a medida que  $\Gamma$  se aproximaba a  $\Gamma_{thr}$  si bien nunca desaparecía totalmente. Entonces se

pensó que esta era una diferencia con el modelo de Lorenz. Sin embargo, la diferencia con el modelo de Lorenz radicaba, más bien, en el hecho de que nunca se obtuviesen mapas de intensidad sin doble estructura ya que, según hemos comprobado, este tipo de doble estructura en el mapa de intensidades también aparece en el modelo de Lorenz para valores suficientemente altos del bombeo.

Los cálculos que aquí presentamos no muestran estas diferencias con el modelo de Lorenz y la razón radica, probablemente, en haber tomado valores de los parámetros diferentes a los tomados en [Corbalán *et al*, 1993], en particular, un valor menor de la ganancia  $g$  (casi la mitad). En cualquier caso estas sutiles diferencias no afectan al núcleo del asunto: el modelo con polarizaciones ortogonales presenta un claro comportamiento tipo Lorenz particularmente para valores pequeños de  $\Gamma$ .

Para finalizar señalemos que con el LGBO-M no hemos sido capaces de encontrar trazas de intensidad con el primer pico excesivamente alto (es decir, no hemos obtenido mapas de intensidad del tipo de los obtenidos experimentalmente y, para  $\sigma$  grande, con el LGBO-D) a pesar de haber realizado cálculos para diferentes valores de  $\sigma$ . En otras palabras, no hemos sido capaces de reproducir las desviaciones que del comportamiento tipo Lorenz se observan en el experimento. Esto parece sugerir que el origen de la doble cúspide radique en lo que no es común a los modelos LGBO-M ortogonal y LGBO-D, a saber, los efectos coherentes de bombeo o, si se prefiere, la coherencia Raman. En cualquier caso, este resultado nos previene respecto a su posible aplicación del LGBO-M ortogonal al dispositivo experimental. Volveremos sobre este punto.

#### 5.4.d. Origen del comportamiento tipo Lorenz. Modelo simplificado.

A lo largo de este apartado hemos ido viendo las características principales del LGBO-M ortogonal. En particular hemos visto que: (i) la solución estacionaria no muestra un comportamiento lineal con el bombeo (lo que podría ser una diferencia con el modelo de Lorenz), (ii) el análisis lineal de estabilidad muestra un comportamiento del umbral de inestabilidades semejante al del modelo de Lorenz, para un cierto rango de valores de  $\Gamma$ , en cuanto a la necesidad de un valor mínimo de las pérdidas, la necesidad de un bombeo mínimo y en cuanto a la estructura general de la curva pero sin llegar a un acuerdo cuantitativo, y (iii) el comportamiento caótico es claramente de tipo Lorenz, especialmente cuando  $\Gamma$  tiende a  $\Gamma_{thr}$ , apareciendo comportamientos no comparables a los del modelo de Lorenz para valores altos de  $\Gamma$ . Nuestro propósito es interpretar el origen de este comportamiento.

Para llevar a cabo una comparación más cómoda con el modelo de Lorenz-Haken definimos las variables

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{2} \alpha(t) e^{-i\phi(t)}, \\ P(t) &= -i\sqrt{2} \frac{g}{\sigma} \rho_{bc}(t) e^{-i\phi(t)}, \\ D(t) &= \frac{g}{\sigma} [N_{bc}(t) + x_{+-}(t)] \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

y utilizando las Ecs.(5.2.25), obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= -\sigma E + \sigma P, \\ \frac{dP}{d\tau} &= -[1 - i\Delta_c] P + ED, \\ \frac{dD}{d\tau} &= b(r - D) + 2(EP^* + PE^*) - (\Gamma - b) \frac{g}{\sigma} x, \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

que han de ser completadas con

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\Gamma x + 2\beta y + \frac{\sigma}{2g}(EP^* + PE^*), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\gamma_{ab} y + \beta(\rho_{bb} - \rho_{aa} - x), \\ \frac{d\rho_{aa}}{d\tau} &= -\gamma_a \rho_{aa} + \lambda_a + 4\beta y, \\ \frac{d\rho_{bb}}{d\tau} &= -\gamma_b \rho_{bb} + \lambda_b - 2\beta y + \frac{\sigma}{2g}(EP^* + PE^*), \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

donde  $r = n_{bc}g/\sigma$  y donde hemos simplificado la notación quitando los subíndices +- en las variables  $x$  e  $y$ .

Las Ecs.(5.4.10) más las (5.4.11) son completamente equivalentes a las originales (5.2.25) pero nos permiten apreciar mucho más claramente los parecidos y diferencias

con el modelo de Lorenz. En particular, es claro que la única diferencia entre las Ecs.(5.4.10) y el modelo de Lorenz-Haken de las Ecs.(I.2.5) radica en el término extra  $g(\Gamma - b)x(t)/\sigma$  que aparece en la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones (aparte de la diferencia formal trivial de haber fijado el referencial a la frecuencia de la cavidad).

¿Por qué aparece sólo esta diferencia?. La razón es obvia: ya vimos en el apartado anterior que en la configuración ortogonal no hay procesos Raman. Así pues, la única influencia del bombeo óptico tiene que ser un acoplamiento a través de la población del nivel común, que es justamente el acoplamiento que tenemos. Por otra parte, la simple inspección visual de las Ecs.(5.4.13) da una explicación intuitiva de por qué el parecido entre el LGBO-M ortogonal aumenta a medida que  $\Gamma$  disminuye ya que, cuanto menor es  $\Gamma$ , menor será la influencia dinámica del bombeo óptico.

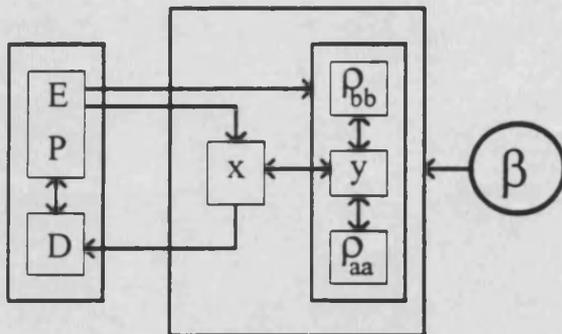


Fig.5.8. Diagrama de flujos mostrando los acoplamientos existentes entre las diferentes variables del modelo LGBO-M ortogonal. Nótese como la variable  $x$  actúa como un mediador entre el bombeo óptico  $\beta$  y las variables láser. Ninguna otra variable de la transición de bombeo tiene acoplamiento directo con las variables láser.

Para entender más claramente como influyen unas variables en otras en este modelo, hemos representado en la Fig.5.8 un diagrama de flujos que muestra los diferentes acoplamientos entre las Ecs.(5.4.10) y (5.4.11) de forma esquemática. Nótese como el único acoplamiento indirecto del bombeo coherente con las *variables Lorenz* ocurre a través de  $x$ , mientras que aquellas influyen en  $x$  y  $\rho_{bb}$  directamente.

Un límite particularmente interesante es el límite  $\Gamma = b$ . En este caso el término extra de la ecuación de evolución de la diferencia de poblaciones se anula y tenemos un conjunto de ecuaciones isomorfo al modelo de Lorenz-Haken. Pero, curiosamente, en este caso el láser no funciona sea cuál sea el valor de la intensidad de bombeo  $\beta^2$  porque no hay acoplamiento del bombeo coherente con las *variables Lorenz* y  $r < 0$  por serlo  $n_{bc}$  (no hay bombeo incoherente en el LGBO-M). De hecho, tal y como vimos en la Ec.(5.4.4), es necesario que  $\Gamma > \Gamma_{thr}$  para que el láser emita. Lo más sorprendente del caso es que si, con  $\Gamma = b$  representamos la diferencia de poblaciones entre los niveles láser  $N_{bc}$  frente al bombeo  $\beta^2$  (Fig.5.9) obtenemos que el valor de  $N_{bc}$  es positivo, es

decir, tenemos una clara situación de inversión de población sin emisión láser (*inversion without lasing*). Volveremos sobre esto en el apartado siguiente.

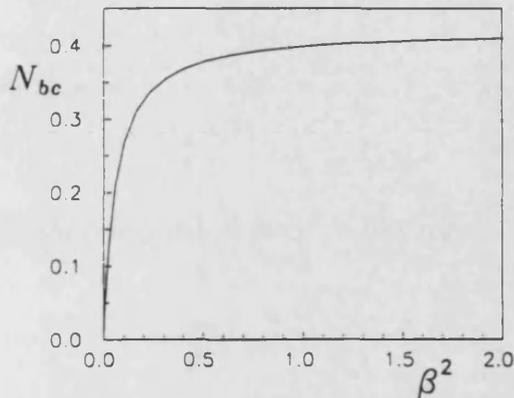


Fig.5.9. Dependencia de la diferencia de poblaciones entre los niveles láser con la intensidad del campo de bombeo para  $\Gamma = b$ . A pesar de hacerse positiva para un cierto valor (muy pequeño) de  $\beta^2$ , el láser no emite. Se trata de una situación de *inversion without lasing*.

Pero volvamos a los casos  $\Gamma > \Gamma_{thr}$  en los que sí hay emisión. La Fig.5.10 muestra una evolución temporal típica de la variable  $x(t)$  (en este caso para un régimen caótico). Se trata de una oscilación alrededor de un valor medio no nulo que resulta en una modulación pequeña. Este tipo de evolución nos sugiere una aproximación que simplifique el modelo de las Ecs.(5.4.10) y (5.4.11). Podemos aproximar  $x(t)$  por su valor estacionario (que se haya próximo a su valor medio) en las Ecs.(5.4.10) despreciando la modulación de esta variable por ser pequeña, con lo cual obtendremos un modelo efectivo de Lorenz. Veamos como.

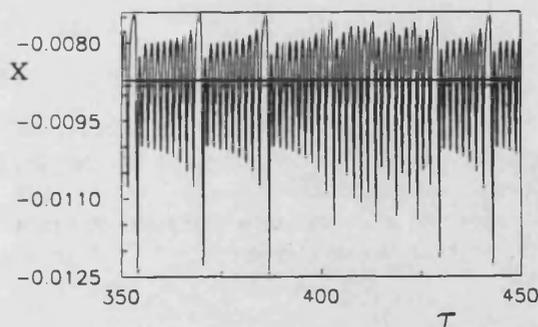


Fig.5.10. Evolución de la variable  $x(t)$  en función del tiempo para  $\Gamma = 0.3$ ,  $\sigma = 1.85$  y  $\beta = 0.5$ . La variable tiene una pequeña modulación alrededor de su valor medio. La línea horizontal continua marca el valor medio de  $x$  y la línea a trazos marca su valor estacionario. Nótese que ambos están muy próximos.

El valor estacionario de  $x$  es

$$\bar{x} = -\frac{1}{\Gamma - b} \left\{ -bn_{cb} + \frac{\sigma b}{g} \left[ 1 + \left( \frac{\Delta_c}{1 + \sigma} \right)^2 \right] + \frac{4b}{g} \frac{A\beta^2 - B}{C\beta^2 + H} \right\}. \quad (5.4.15)$$

Podemos entonces reescribir el modelo de las Ecs.(5.4.10) y (5.4.11) como

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= -\sigma E + \sigma P, \\ \frac{dP}{d\tau} &= -[1 - i\Delta_c] P + ED, \\ \frac{dD}{d\tau} &= b(r^{\text{eff}} - D) + 2(EP^* + PE^*), \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

es decir, tenemos un modelo de Lorenz con un parámetro de bombeo definido como

$$r^{\text{eff}} \equiv 1 + \left( \frac{\Delta_c}{1 + \sigma} \right)^2 + \frac{4}{\sigma} \frac{A\beta^2 - B}{C\beta^2 + H}, \quad (5.4.14)$$

con A, B, C y H dados por las Ecs.(5.4.3). La Fig.5.13 muestra el comportamiento del bombeo efectivo  $r^{\text{eff}}$  frente al la intensidad de bombeo  $\beta^2$  para diversos valores de  $\Gamma$ . Nótese como existe un valor de saturación, es decir, aunque aumente la intensidad del bombeo óptico, no aumentará el bombeo Lorenz efectivo. Además, este valor de saturación es alcanzado relativamente pronto (para  $\beta < 1$ ). Por otra parte es claro que cuanto menor es  $\Gamma$ , menos efectivo es el parámetro  $r^{\text{eff}}$ , no llegándose a alcanzar el umbral de emisión ( $r_{\text{lst}} = 1 + [\Delta_c/(\sigma + 1)]^2$ ) para ningún valor de  $\beta$  si  $\Gamma \leq \Gamma_{\text{thr}}$ .

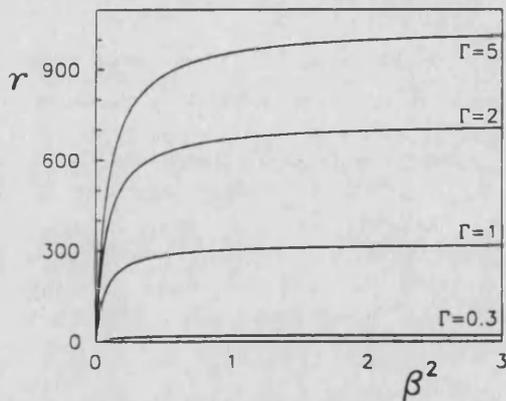


Fig.5.11. Dependencia del parámetro efectivo de bombeo  $r^{\text{eff}}$  con el parámetro real de bombeo,  $\beta^2$ . Nótese lo altamente no lineal que es esta dependencia, alcanzándose la saturación de  $r$  para valores relativamente bajos de  $\beta^2$ .

Este es un resultado interesante. El modelo de las Ecs.(5.4.13) es, evidentemente, el modelo de Lorenz-Haken pero, por construcción, su solución estacionaria es la misma que la del modelo LGBO-M ortogonal. En particular, se verifica que  $E^2$  no es lineal con  $\beta^2$  sino con  $r^{\text{eff}}$ . Por esta razón podemos afirmar que la no linealidad de  $E^2$  con  $\beta^2$  no constituye a priori una diferencia con el modelo de Lorenz (comentario que ya adelantamos a propósito de la solución estacionaria del LGBO-D) y que el valor del

cociente  $(\beta_{2nd}/\beta_{1st})^2$  no es una cantidad directamente comparable con la  $r_{2nd}$  del modelo de Lorenz.

Para comprobar la bondad de este modelo simplificado podemos llevar a cabo su análisis lineal de estabilidad y compararlo con el resultado que obtuvimos numéricamente con el modelo completo en un subapartado anterior. Para ello (nos limitamos al caso de resonancia) habremos de hacer uso de la Ec.(I.2.9) que proporciona el valor del segundo umbral en el modelo de Lorenz en resonancia pero utilizando  $r^{eff}$  en lugar de  $r$ . Haciendo esto obtenemos para el segundo umbral la expresión

$$\beta_{2nd}^2 = \frac{B + HK}{A - CK} \quad (5.4.15)$$

$$K = \frac{\sigma(\sigma + b + 1)(\sigma + 1)}{4(\sigma - b - 1)}$$

y A, B, C y H los definidos anteriormente [Ecs.(5.4.3)]. La extensión al estudio de desintonía no nula supone, simplemente, el uso de la Ec.(I.3.3). No lo haremos para no complicar más el problema. El resultado se muestra en las Figs.5.14 y 5.15. En la primera de ellas representamos  $(\beta_{2nd}/\beta_{1st})^2$  frente a  $\sigma$  y  $g$  respectivamente para varios valores de  $\Gamma$ . Esta figura han de ser comparada con la Fig.5.4. Es claro que el acuerdo es cualitativamente bueno y es tanto mayor cuanto menor es el valor de  $\Gamma$ , aumentando rápidamente las discrepancias a medida que este parámetro aumenta. Esto se ve más claramente en la Fig.5.15 donde representamos la dependencia de  $(\beta_{2nd}/\beta_{1st})^2$  con  $\Gamma$  para dos valores de  $\sigma$  [Fig.5.15(a)] y el cociente entre el valor obtenido del análisis de estabilidad numérico de la Fig.5.5 y el del modelo aproximado [Fig.5.15(b) y (c)]. Aquí se ve claramente que el modelo simplificado reproduce bien los resultados cuando  $\Gamma$  se halla dentro de un pequeño intervalo alrededor del valor 0.4. Esto encaja bien con el comportamiento dinámico descrito más arriba y hemos de concluir que los efectos despreciados al hacer la aproximación  $x(t) = x_{DC}$  no tienen mucha importancia cuando  $\Gamma$  es próximo, pero no demasiado, a  $\Gamma_{thr}$ , de ahí el buen comportamiento del modelo simplificado, y van cobrando importancia rápidamente a medida que  $\Gamma$  aumenta, lo que explica que los *spirallings* sean cada vez menos claros. La discrepancia que aparece para valores altos de  $\Gamma$  nos permite, por otra parte, entender porqué cuando  $\Gamma$  es grande el único comportamiento dinámico exhibido por encima del segundo umbral es periódico. Que el umbral real ( $\beta^{num}$ ) sea mucho mayor que el del modelo aproximado ( $\beta^{aprox}$ ) implica que el valor de  $r^{eff}$  correspondiente al segundo umbral real del sistema

será muy grande y recordemos que para valores altos de  $r$  el comportamiento del modelo de Lorenz es periódico.

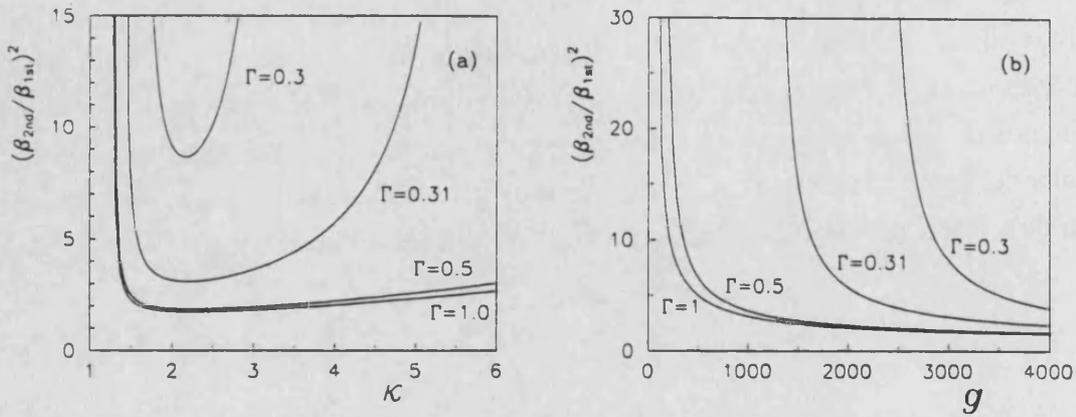


Fig.5.14. Resultado del análisis lineal del modelo simplificado de las Ecs.(5.4.13). En general el comportamiento del cociente de umbrales es parecido al obtenido del análisis de estabilidad numérico de las Ecs.(5.3.25), particularmente para valores de  $\Gamma$  entre 0.5 y 1. Los parámetros toman los mismos valores que en la Fig.5.4.

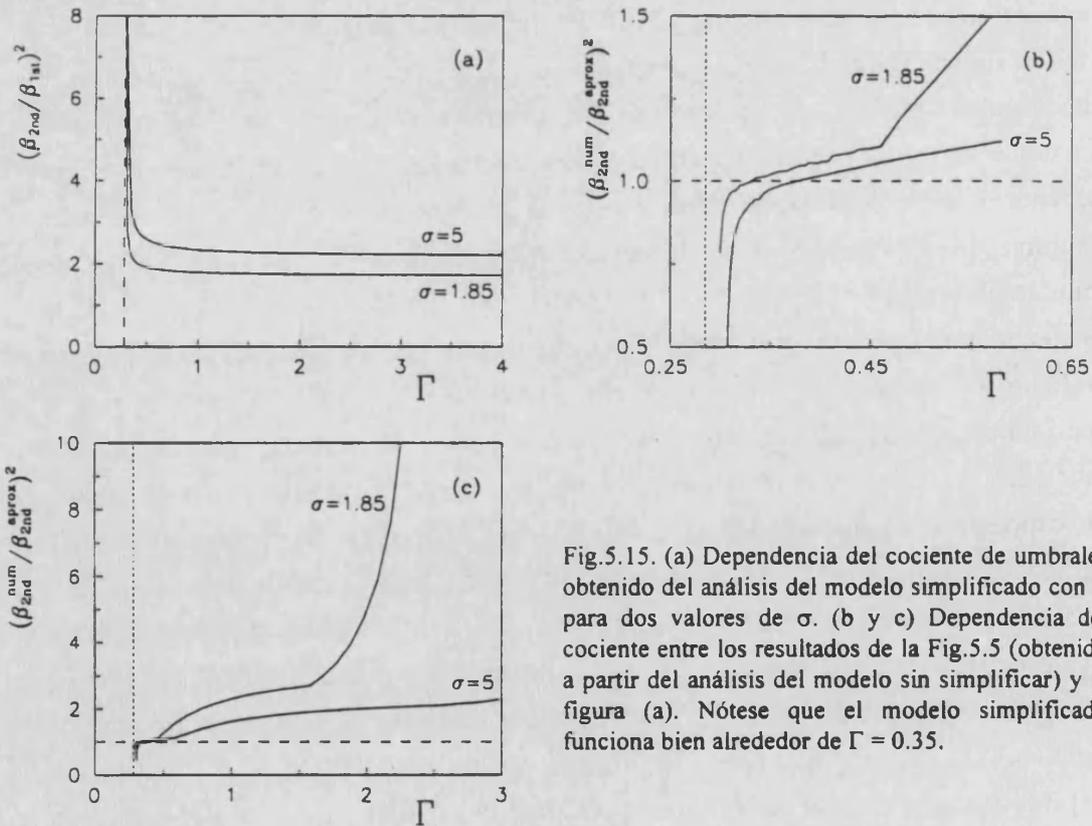


Fig.5.15. (a) Dependencia del cociente de umbrales obtenido del análisis del modelo simplificado con  $\Gamma$  para dos valores de  $\sigma$ . (b y c) Dependencia del cociente entre los resultados de la Fig.5.5 (obtenido a partir del análisis del modelo sin simplificar) y la figura (a). Nótese que el modelo simplificado funciona bien alrededor de  $\Gamma = 0.35$ .

Así pues, el modelo simplificado nos ha permitido entender claramente el origen del comportamiento tipo Lorenz del LGBO ortogonal y cuantificar las discrepancias que aparecen para valores altos de  $\Gamma$ . Sin embargo, quedan algunos aspectos por explicar: ¿cuál es el origen físico de las diferencias existentes entre los casos paralelo y ortogonal?, ¿por qué hay procesos Raman en un caso y no en el otro?, ¿qué significado tiene la existencia de una  $\Gamma_{thr}$ ?

### 5.5. Interpretación en términos del átomo vestido: atrapamiento de población sensible a la polarización.

Ya hemos comentado que cuando  $\Gamma = b$  el láser no emite sea cuál sea el valor de la intensidad de bombeo  $\beta^2$ , hecho tanto más sorprendente cuanto que existe una diferencia de poblaciones positiva entre los niveles láser (Fig.5.11), es decir, tenemos una situación de *inversion without lasing* (inversión de población sin emisión láser) [Mandel y Kocharovskaya, 1991]. Para poder entender este comportamiento, vamos a analizar el modelo desde el punto de vista del átomo vestido [Cohen-Tannoudji y Reynaud, 1977], tratamiento que consiste en obtener los estados propios del hamiltoniano de interacción del sistema.

Para ello escribimos el hamiltoniano del sistema de la forma

$$H = H_0 + H_1, \quad (5.5.1)$$

con  $H_0$  el hamiltoniano atómico y  $H_1$  el hamiltoniano de interacción, dados por

$$H_0 = -\hbar[\langle a | \omega_a | a \rangle + |c\rangle \omega_c \langle c|], \quad (5.5.2)$$

$$H_1 = -[\bar{\mu}_{a+} \cdot \bar{e}_2^+ |a\rangle \langle +| + \bar{\mu}_{a-} \cdot \bar{e}_2^- |a\rangle \langle -| + \bar{\mu}_{b+} \cdot \bar{e}_1^+ |+\rangle \langle c| + \bar{\mu}_{b-} \cdot \bar{e}_1^- |-\rangle \langle c|] + C.H.$$

donde hemos tenido en cuenta la regla de selección  $\Delta m_j = \pm 1$  y hemos tomado como origen de energías la energía de los niveles degenerados  $+$  y  $-$ . Nótese que  $\omega_c$  en la Ec.(5.5.2) no denota ahora la frecuencia de la cavidad sino la energía del nivel  $c$ . El resto de símbolos mantiene su significado habitual: el índice  $+$ ( $-$ ) denota la componente dextro (levo) en los campos y también denota el subnivel  $b$  con  $m_j = +1$  ( $m_j = -1$ ), y  $\bar{\mu}_{ij}$  denota el elemento de matriz  $ij$  del operador momento dipolar. La ecuación de evolución

de la matriz densidad viene dada por la ecuación de Schrödinger-von Neumann, que se escribe

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \Gamma\rho, \quad (5.5.3)$$

donde el operador de Liouville  $\Gamma$  describe los procesos de relajación y bombeo incoherente. De la Ec.(5.5.3) es de donde se obtienen las ecuaciones de evolución del sistema que dimos más arriba [Ecs.(6.1.3) con  $\epsilon = 0$ ].

Para obtener los estados vestidos del sistema es necesario trabajar en una imagen de interacción. Definimos el operador unitario

$$U(t) = \exp[iH_2 t / \hbar], \quad (5.5.4)$$

con

$$H_2 = -\hbar[|a\rangle\Omega_2\langle a| + |c\rangle\Omega_1\langle c|], \quad (5.5.5)$$

donde  $\Omega_i$  es la frecuencia del campo  $i = 1$ (generado),  $2$ (bombeo). La ecuación de Schrödinger-von Neumann en la nueva imagen se escribe

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\bar{H}_3, \bar{\rho}] + \bar{\Gamma}\bar{\rho}, \quad (5.5.6)$$

donde  $\bar{O}(t) = U^*(t)O(t)U(t)$  siendo  $O(t)$  un operador cualquiera y

$$\bar{H}_3 = \hbar \begin{bmatrix} \Delta_2 & -2\beta^+ \exp(-i\phi_2^+) & -2\beta^- \exp(-i\phi_2^-) & 0 \\ -2\beta^+ \exp(i\phi_2^+) & 0 & 0 & -2\alpha^+ \exp(i\phi_1^+) \\ -2\beta^- \exp(i\phi_2^-) & 0 & 0 & -2\alpha^- \exp(i\phi_1^-) \\ 0 & -2\alpha^+ \exp(-i\phi_1^+) & -2\alpha^- \exp(-i\phi_1^-) & \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (5.5.7)$$

Nótese que  $\bar{H}_3$  es independiente del tiempo siempre que las amplitudes de los campos lo sean. Hasta ahora hemos fijado la polarización del campo generado en la dirección  $\hat{y}$  y hemos considerado variable la polarización del campo de bombeo (casos

paralelo y ortogonal). Sin embargo ahora resulta más conveniente, por razones de claridad en los resultados, considerar fijada la polarización del campo de bombeo y variable la del generado (evidentemente esto no afecta a los resultados). Así pues, consideremos que el campo de bombeo tiene polarización lineal en la dirección  $\hat{x}$ . Para ello hemos de tomar  $\beta^+ = \beta^-$  y  $\phi_2^- = \phi_2^+ + \pi$  (es trivial comprobar sustituyendo en las expresiones de los campos (5.1.2) que así se obtiene polarización lineal en la dirección  $\hat{x}$ ).

Nosotros estamos interesados en las condiciones necesarias para la amplificación del campo generado. Lo más sencillo entonces es considerar que el único campo que actúa sobre el sistema es el de bombeo, i.e., tomar  $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ . Podemos calcular así cuales son los niveles del átomo vestido por el campo de bombeo, es decir, los estados propios del hamiltoniano de interacción cuando aún no se ha amplificado el campo generado. Así pues, diagonalizamos el hamiltoniano  $\bar{H}_3$ , y los autovalores obtenidos son

$$\begin{aligned}\bar{H}_3|\bar{b}\rangle &= 0|\bar{b}\rangle \\ \bar{H}_3|r_{\pm}\rangle &= \frac{1}{2}\hbar(\Delta_2 \pm \sqrt{\Delta_2^2 + 16\beta^2})|r_{\pm}\rangle \\ \bar{H}_3|c\rangle &= \hbar\Delta_1|c\rangle\end{aligned}\quad (5.5.8)$$

siendo

$$\begin{aligned}|\bar{b}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \\ |r_{\pm}\rangle &= N_{\pm} \left[ |a\rangle + \frac{4\beta}{\Delta_2 \pm \sqrt{\Delta_2^2 + 16\beta^2}} (|-\rangle - |+\rangle) \right]\end{aligned}\quad (5.5.9)$$

los estados propios, es decir, los estados vestidos de las moléculas bombeadas ( $N_{\pm}$  es el factor de normalización).

Ahora podemos calcular la probabilidad de transición desde los estados vestidos al nivel inferior láser  $|c\rangle$ . Para ello suponemos la presencia de una pequeña señal del campo generado  $\bar{e}_1$ . Esta probabilidad viene dada, en la aproximación de Born, por

$$W(r_{\pm} \rightarrow c) \propto |\langle r_{\pm} | \bar{H}_3 | c \rangle|^2 = \frac{32\beta^2}{16\beta^2 + \Delta_2^2 \pm \sqrt{\Delta_2^2 + 32\beta^2}} |\alpha^+ \exp(i\phi^+) - \alpha^- \exp(i\phi^-)|^2$$

$$W(\tilde{b} \rightarrow c) \propto |\langle \tilde{b} | \bar{H}_3 | c \rangle|^2 \propto |\alpha^+ \exp(i\phi^+) + \alpha^- \exp(i\phi^-)|^2 \quad (5.5.10)$$

Nótese que, en general, estas probabilidades no son nulas pero en el caso de un campo generado linealmente polarizado (lo que supone que  $\alpha^+$  y  $\alpha^-$  sean iguales), algunas de estas probabilidades pueden anularse, dependiendo del valor de la fase relativa entre las componentes levo y dextro,  $(\phi^+ - \phi^-)$ .

En el caso paralelo, i.e., que el campo generado esté polarizado en la dirección  $\hat{x}$ , lo que supone tomar  $\alpha^+ = \alpha^-$  y  $\phi_1^+ = \phi_1^- + \pi$ , se observa que  $W(\tilde{b} \rightarrow c) = 0$  y  $W(r_{\pm} \rightarrow c) \neq 0$ . Por tanto, en el caso paralelo los estados  $|r_{\pm}\rangle$  están conectados con el estado  $|c\rangle$  vía  $\tilde{e}_1$ , revelando la existencia de procesos Raman ya que los estados  $|r_{\pm}\rangle$  tienen proyección no nula en el estado  $|a\rangle$ . Por tanto no hay nada extraño en el caso paralelo ya que tenemos tanto procesos paso a paso como procesos Raman.

Por el contrario, en el caso ortogonal los procesos Raman están prohibidos. En efecto, tomando el campo generado polarizado linealmente en la dirección  $\hat{y}$ , i.e.,  $\alpha^+ = \alpha^-$  y  $\phi_1^+ = \phi_1^-$ , obtenemos que  $W(\tilde{b} \rightarrow c) \neq 0$  y  $W(r_{\pm} \rightarrow c) = 0$ , es decir, los estados que en el caso paralelo no estaban conectados lo están ahora y viceversa, y como el estado  $|\tilde{b}\rangle$  no tiene proyección en el estado  $|a\rangle$ , no hay procesos Raman. Así pues, la ausencia de procesos Raman en el caso ortogonal tiene su origen en un fenómeno de interferencias cuánticas entre los canales  $a \rightarrow b^+ \rightarrow c$  y  $a \rightarrow b^- \rightarrow c$

Podemos visualizar entonces el cambio de polarización en el campo de bombeo como un cambio de las conexiones entre los estados del átomo vestido por el campo de bombeo y el estado  $|c\rangle$  (Fig.5.16), cambio de conexiones que provoca las enormes diferencias existentes entre los casos paralelo y ortogonal. Nótese que todas estas conclusiones son independientes del esquema de relajaciones elegido.

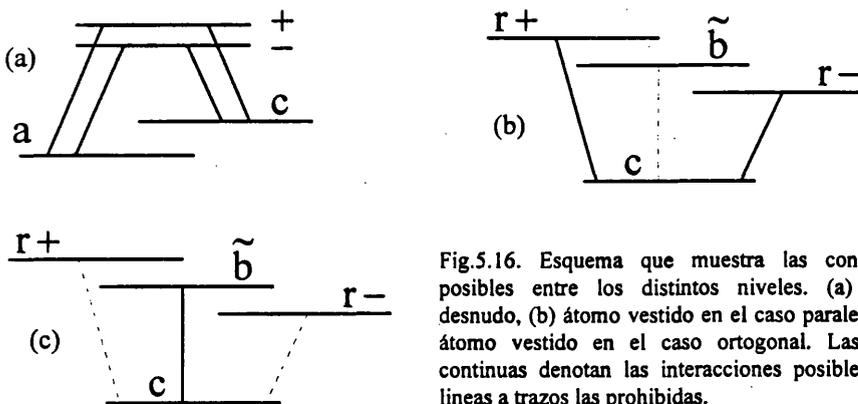


Fig.5.16. Esquema que muestra las conexiones posibles entre los distintos niveles. (a) átomo desnudo, (b) átomo vestido en el caso paralelo y (c) átomo vestido en el caso ortogonal. Las líneas continuas denotan las interacciones posibles y las líneas a trazos las prohibidas.

Podemos calcular ahora la condición de emisión en el caso ortogonal imponiendo que exista inversión de población entre el estado vestido  $|\bar{b}\rangle$  y el estado  $|c\rangle$ . Para ello habremos de calcular la población del estado  $|\bar{b}\rangle$ , que viene dada por

$$\rho_{\bar{b}\bar{b}} = \langle \bar{b} | \rho | \bar{b} \rangle = (\langle + | + \langle - | ) \rho ( | + \rangle + | - \rangle ) = \rho_{++} + \rho_{--} + \rho_{+-} + \rho_{-+} = 2(\rho_{bb} + x_{+-})$$

y tomando para  $\rho_{bb}$  el valor de la solución estacionaria del caso ortogonal resulta

$$\rho_{\bar{b}\bar{b}} = n_b + \frac{4\gamma_a(\Gamma - b)n_{ab}\beta^2}{4[b\gamma_a + (\gamma_a + b)\Gamma]\beta^2 + 2\gamma_a\gamma_{ab}\Gamma b + \frac{b\Gamma^2\Delta_2^2}{2\beta^2 + \Gamma\gamma_{ab}}} \quad (5.5.11)$$

Es evidente que el valor mayor de población en el nivel  $|\bar{b}\rangle$  se alcanzará cuando  $\beta^2 \rightarrow \infty$ . En este límite, la inversión de población entre los dos únicos niveles acoplados vale

$$D_{bc}^{\infty} = \frac{n_{ac}(\gamma_a - \gamma_a^{\text{thr}})(\Gamma - \Gamma_{\text{thr}})}{\gamma_a b + (\gamma_a + 2b)\Gamma} \quad (5.5.12)$$

con  $\Gamma_{\text{thr}}$  y  $\gamma_a^{\text{thr}}$  las mismas que fueron definidas en las Ecs.(5.4.4)

Obtenemos así el resultado de la existencia de un valor límite en  $\Gamma$  por debajo del cuál el láser no emite y además su significado está claro ahora: para que el láser emita es necesario que haya inversión de población entre los dos únicos estados acoplados en el caso ortogonal, pero como el estado superior no es el estado  $|+\rangle$  ni el  $|-\rangle$  sino una combinación lineal de ambos que depende de la coherencia entre esos dos estados, la condición de inversión conlleva una condición sobre el tiempo de relajación de esta coherencia.

Por otra parte, la Ec.(5.5.12) también contiene la existencia de un valor umbral en el valor de la relajación del nivel a,  $\gamma_a^{\text{thr}}$ , ya que el numerador ha de ser positivo.

Recalquemos para concluir que la existencia de inversión sin emisión láser en este esquema es sensible a la polarización relativa de los campos: pasando de polarizaciones paralelas a polarizaciones ortogonales debería poder observarse este fenómeno si  $\Gamma < \Gamma_{\text{thr}}$ . Sería, por tanto, muy interesante encontrar un medio material para el que el modelo LGBO-M fuera aplicable y llevar a cabo experimentos con él.

## 5.6. Conclusiones. Sobre la aplicabilidad del modelo LGBO-M al láser de $\text{NH}_3$ .

A lo largo de este capítulo hemos estudiado detalladamente el modelo LGBO-M en los casos de polarizaciones lineales de los campos de bombeo y generado. En particular hemos conseguido justificar que:

- En el caso en que las polarizaciones de ambos campos son paralelas el LGBO-M ha de mostrar un comportamiento muy diferente al del modelo de Lorenz-Haken y muy similar en de los LGBO homogéneos de tres niveles ya que, en el límite  $\Gamma = b$  ambos modelos son isomorfos.
- En el caso ortogonal el comportamiento ha de ser muy parecido al del modelo de Lorenz si  $\Gamma$  supera un cierto valor umbral ya que: (i) no hay procesos a dos fotones y (ii) la única diferencia que aparece en el modelo con respecto al modelo de Lorenz-Haken, el mecanismo coherente de bombeo, puede ser entendido como un bombeo no lineal efectivo en el límite de  $(\Gamma - b)$  pequeño. En este sentido hemos formulado un modelo simplificado que nos ha permitido comprender diversos aspectos de la dinámica del sistema. Podrían construirse modelos simplificados más realistas (por ejemplo, manteniendo la ecuación de evolución de la coherencia entre los subniveles magnéticos degenerados,  $x_{+,-}$ , y haciendo constante su único acoplamiento con la transición de bombeo, la variable  $y_{ab}$ , de manera que permitiríamos una cierta modulación en el bombeo). Sin embargo, no obtendríamos más información sobre el origen del comportamiento de tipo Lorenz y el sistema sería más complejo.
- El origen de la ausencia de procesos Raman en el caso ortogonal (y de la situación de inversión sin láser que hemos descrito) radica en un fenómeno de interferencias cuánticas que conlleva el atrapamiento de población en alguno de los niveles vestidos por el campo de bombeo. En el caso paralelo, el atrapamiento de población (que se produce en el nivel  $\tilde{b}$ ) no tiene ninguna consecuencia práctica pero, en el caso ortogonal (en el que el atrapamiento se produce en los niveles vestidos  $r_+$  y  $r_-$ ), tiene como consecuencia los fenómenos descritos.

Pero queda un hecho importante por discutir. Hemos comentado que estos resultados están en acuerdo cualitativo con los resultados experimentales (en el caso paralelo no hay comportamiento tipo Lorenz y en el ortogonal sí, cf. Capítulo 3) pero, ¿es aplicable el modelo LGBO-M al láser de  $\text{NH}_3$ ?

Al principio del capítulo ya avanzamos que al no incorporar este modelo el ensanchamiento Doppler del medio material no podía ser aplicable al experimento. Sin embargo, algo podemos presumir sobre cuál sería el resultado de la incorporación del efecto Doppler. En el caso paralelo obtendríamos el LGBO-D si  $\Gamma = b$  (ya que, en este límite, el modelo LGBO-M paralelo es isomorfo al LGBO de tres niveles) y, por tanto, obtendríamos comportamiento de tipo Lorenz. Si nos alejamos de ese límite aparecería alguna diferencia pero sería, presumiblemente, pequeña. En el caso ortogonal sólo podemos elucubrar sobre el efecto de la incorporación del efecto Doppler: en el mejor de los casos continuaríamos obteniendo comportamiento de tipo Lorenz pero, seguramente, no conseguiríamos reproducir las desviaciones experimentales (doble cúspide en el mapa de intensidades) porque estas parecen deberse a los procesos Raman. En el peor de los casos perderíamos el comportamiento de tipo Lorenz.

Resumiendo: la incorporación del efecto Doppler produciría la reproducción de los resultados experimentales con la configuración de polarizaciones errónea: el caso paralelo reproduciría los resultados experimentales de la configuración ortogonal (comportamiento de tipo Lorenz) y la configuración ortogonal no lo haría (aunque hubiese comportamiento de tipo Lorenz no reproduciría la "doble cúspide").

No obstante, existe un elemento previo mucho más importante para ser cauto respecto a la aplicabilidad del modelo LGBO-M a los experimentos del láser de  $\text{NH}_3$ . Este elemento es el valor del momento angular  $J$  escogido. En este modelo hemos considerado el esquema más sencillo posible para tener en cuenta la polarización de los campos ( $J_a = 0$ ,  $J_b = 1$ ,  $J_c = 0$ ), pero en las transiciones de la molécula de amoníaco en que estamos interesados los valores de  $J$  son mucho más elevados. ¿Se mantendrían las conclusiones que a las que hemos llegado si considerásemos valores mayores de  $J$ ? La respuesta creemos que es negativa.

Sea, por ejemplo, un esquema como el de la Fig.5.17(a) que considera un medio material con  $J_a = 1$ ,  $J_b = 0$ ,  $J_c = 1$ . No es necesario hacer los cálculos para darse cuenta de que, cuando el campo de bombeo vista la transición  $a \leftrightarrow b$ , todos los estados vestidos tendrán proyección en alguno de los estados  $a+$  o  $a-$ . En consecuencia, independientemente de cual sea la polarización del campo generado, los procesos Raman estarán siempre permitidos, a diferencia de lo que hemos visto a lo largo del capítulo. Si consideramos un esquema  $J_a = 1$ ,  $J_b = 1$ ,  $J_c = 1$ , es claro que tenemos tanto el esquema  $J_a = 0$ ,  $J_b = 1$ ,  $J_c = 0$ , como el esquema  $J_a = 1$ ,  $J_b = 0$ ,  $J_c = 1$  [Fig.5.17(b)]. Es posible demostrar que el acoplamiento entre estos dos subesquemas es proporcional a  $(\Gamma - b)$ . Así, en el límite  $\Gamma = b$  su comportamiento será una combinación de los correspondientes a cada subesquema y aunque habrá una cierta sensibilidad a la

polarización de los campos (porque uno de los subesquemas es sensible a ello), no habrá tanta diferencia entre los casos paralelo y ortogonal como la que hemos encontrado en este capítulo.

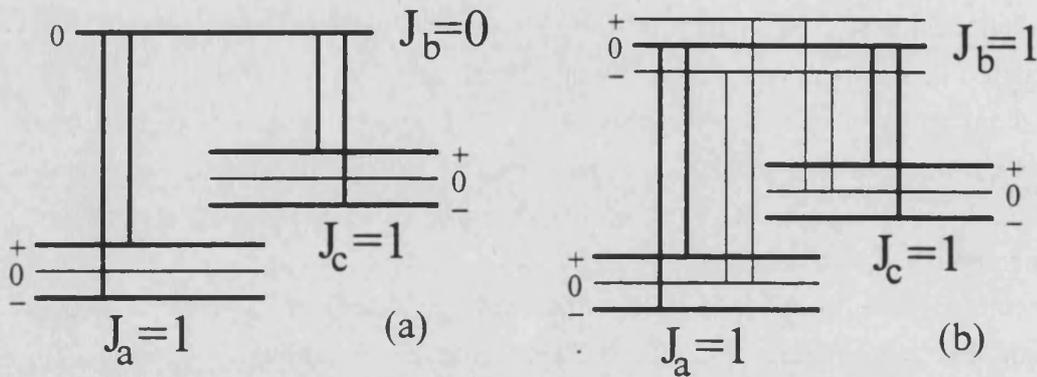


Fig.5.17. (a) Esquema de una molécula con transiciones  $J_a=1$ ,  $J_b=0$  y  $J_c=1$ . En este caso habrá procesos Raman independientemente de cuales sean las polarizaciones de los campos. (b) Esquema de una molécula con transiciones  $J_a=1$ ,  $J_b=1$  y  $J_c=1$ . La dinámica de un láser con un medio material como este será un combinación del que se obtendría con el de la figura (a) (trazo grueso) y con el estudiado a lo largo de este capítulo (trazo delgado).

Así, si admitimos la validez de este razonamiento, parece que cuanto mayor sea el valor de  $J$ , menor será la influencia de la polarización de los campos. Evidentemente, todo lo dicho requiere que se realicen los cálculos cuidadosamente pero *nosotros somos de la opinión de que la polarización de los campos no juega un papel significativo en los experimentos llevados a cabo con el láser de amoníaco.*

Así pues, creemos que los resultados obtenidos no son directamente aplicables a los experimentos y que, probablemente, sea el LGBO-D un modelo más adecuado para este fin. Sin embargo, el modelo LGBO-M nos proporciona, por una parte, un claro ejemplo de un mecanismo físico que hace que un LGBO se comporte como el modelo de Lorenz (a través de la supresión de los procesos Raman) y, por otra parte, el que los fenómenos físicos que presenta sean singulares y propios del esquema considerado los hace aún más interesantes y dignos de atención experimental.

## **Capítulo 6: Conclusiones generales**

**6.1. Contribuciones al estudio del modelo de Lorenz-Haken.**

**6.2. Contribuciones al estudio de la dinámica de los LGBO.**

**6.3. Perspectivas.**





A lo largo de esta Tesis hemos estudiado diferentes aspectos de la dinámica del modelo de Lorenz-Haken, en su primera parte, y la relación que este modelo tiene con los láseres de gas bombeados ópticamente (LGBO), en su segunda parte. El propósito de este último capítulo es resaltar cuáles han sido nuestras principales contribuciones originales al tiempo que dar una visión unitaria de todo el trabajo. El último apartado lo dedicaremos a dar una visión general de por dónde creemos que deberían continuarse las investigaciones en este campo y tendrá, por tanto, un carácter más especulativo.

### 6.1. Contribuciones al estudio del modelo de Lorenz-Haken.

Nuestra contribución al estudio del modelo de Lorenz-Haken se ha concentrado en dos aspectos: el estudio de la dinámica de la fase (Capítulo 1) y el estudio de la influencia de la relajación interna y la no igualdad de las relajaciones externas de las poblaciones (Capítulo 2).

En el estudio de la dinámica de la fase hemos considerado la influencia de la elección del marco frecuencial de referencia. Recordemos que la frecuencia del campo se escribe

$$\omega(t) = \Omega + \dot{\phi}(t)$$

que es una división arbitraria entre una *frecuencia dependiente del tiempo*  $\dot{\phi}(t)$ , y la *frecuencia de referencia*  $\Omega$ .

Tras resaltar el carácter arbitrario de la elección de la frecuencia de referencia  $\Omega$  (arbitrario ya que no existe ninguna restricción matemática ni física que fije su valor), hemos estudiado cuál es la influencia que su elección tiene en las representaciones gráficas de las variables que contienen información sobre la fase del campo. En particular, hemos puesto de manifiesto mediante representaciones de diversas proyecciones de los atractores (el *field portrait* entre ellas), que los atractores pueden aparecer como cuasiperiódicos (caso de los referenciales de la cavidad, la frecuencia de la transición y la frecuencia de la solución estacionaria) o periódicos con diferentes aspectos (caso de los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , que fueron definidos *ad hoc* para preservar ciertas propiedades en la evolución de la fase) no habiendo ningún criterio que permita preferir uno u otro. También hemos estudiado la dependencia del valor de estos

referenciales con los parámetros del sistema (desintonía y bombeo) poniendo de manifiesto las discontinuidades que presentan.

Una vez identificadas las propiedades sobre las representaciones de estos referenciales hemos identificado su significado físico mediante el uso del espectro de potencia del campo eléctrico. Mediante cálculo numérico (y de forma inequívoca), los referenciales  $\omega_0$  y  $\omega_1$  han sido identificados como la frecuencia correspondiente al centro algebraico del espectro del campo y la frecuencia fundamental del sistema, respectivamente. Esta identificación nos ha permitido entender las características de las representaciones que se obtienen en estos referenciales.

La identificación del significado de estos referenciales anula la posibilidad de que alguno de ellos pueda corresponder a algo así como la frecuencia de emisión del láser en régimen dinámico, significado que en algún momento se les asignó [Zeghlache *et al*, 1988; Vilaseca *et al*, 1990]. Nos hemos preguntado entonces si puede definirse una frecuencia de emisión del láser en régimen dinámico. En este sentido hemos calculado cuidadosamente cuál es la frecuencia media de emisión del láser que ha sido inequívocamente definida. El resultado de su evaluación numérica ha resultado sorprendente: *la frecuencia media de emisión es independiente del régimen de emisión del láser y coincide con la frecuencia de la solución estacionaria inestable*. El resultado es sorprendente porque la intensidad media sí depende del régimen de emisión.

También hemos investigado la fase geométrica introducida recientemente por Ning y Haken recientemente para sistemas disipativos en régimen dinámico [Ning y Haken, 1992a]. En particular hemos demostrado analíticamente que la fase geométrica es invariante al referencial elegido.

Finalmente, nuestro estudio nos ha permitido poner de manifiesto que la identificación habitual de saltos de  $\pi$  radianes en la fase del campo con cambios de signo en el mismo (incluso la identificación de caos homoclínico y heteroclínico mediante estos saltos) puede ser errónea, ya que es fuertemente dependiente del referencial utilizado. Únicamente cuando los saltos de  $\pi$  radianes coinciden con mesetas planas en la fase parece poder hacerse esta identificación. Resaltemos que la aplicabilidad de nuestro estudio no se restringe al modelo de Lorenz-Haken y que es aplicable a todos los láseres monomodo.

En el Capítulo 2 hemos relajado la aproximación usual de considerar que las tasas de relajación de los dos niveles láser sean iguales ( $\gamma_1 = \gamma_0 \equiv \gamma_{11}$ ) y que no haya relajación interna. Para ello hemos extendido el modelo de Lorenz, de una forma sencilla, para que contemple relajaciones diferentes para cada nivel [hemos introducido el parámetro

$a = (\gamma_0 - \gamma_1)/2\gamma_1$ ] y para que contemple la relajación interna del nivel superior al inferior (parámetro  $c = \gamma_{10}/\gamma_1$ ). Tras la formulación del modelo y su reelaboración para que fuera reducible a las ecuaciones de Lorenz en el caso  $a = c = 0$ , hemos pasado a estudiar sus soluciones estacionarias y su estabilidad.

La estabilidad del sistema no se ve afectada cualitativamente por los nuevos parámetros, i.e., sigue existiendo una única bifurcación de Hopf que requiere un valor mínimo de las pérdidas de la cavidad  $\sigma$  y un valor mínimo del bombeo  $r$ , pero sí se ve afectada cuantitativamente. Si la relajación interna es nula ( $c = 0$ ) el láser es más estable (el bombeo necesario para alcanzar el umbral de inestabilidades es más alto) cuanto más diferentes son las relajaciones de ambos niveles (i.e., cuanto mayor es el valor de  $a$ ). Si la relajación interna es no nula lo anterior sigue siendo válido si es el nivel superior el que más relaja ( $a > 0$ ) pero deja de ser cierta en el caso contrario. De hecho es posible rebajar el valor mínimo del segundo umbral hasta  $r = 7$  en el límite  $a = -b \rightarrow 0$ .

Finalmente, hemos estudiado la influencia de  $a$  en el diagrama de bifurcación del modelo en el caso particular  $c = 0$  obteniendo como resultado una modificación cuantitativa de la extensión de los diferentes dominios caótico y periódico pero no una modificación cualitativa. También hemos mostrado diversas proyecciones de los atractores para diferentes regímenes dinámicos.

## 6.2. Contribuciones al estudio de la dinámica de los LGBO.

La segunda parte de esta Tesis la hemos comenzado con una revisión crítica de la bibliografía dedicada al problema de la verificación experimental del modelo de Lorenz-Haken en un láser de  $\text{NH}_3$  por el grupo de C.O. Weiss en Braunschweig [Weiss y Brock, 1986]. Tras resaltar los problemas teóricos derivados de la no aplicabilidad de este modelo al dispositivo experimental (en el que se utiliza bombeo óptico) y de que las predicciones de los modelos de tres niveles de láseres de gas bombeados ópticamente (LGBO) son contradictorias con las observaciones obtenidas, hemos pasado a estudiar en los Capítulos 4 y 5 los modelos LGBO con ensanchamiento Doppler del medio material (LGBO-D) y LGBO con degeneración magnética del nivel superior (LGBO-M) que predicen comportamiento tipo Lorenz en ciertas condiciones.

En el Capítulo 4 hemos estudiado el modelo LGBO-D [Laguarta *et al*, 1988; Corbalán *et al*, 1989]. Tras la exposición del modelo y una reelaboración del mismo que permite identificar claramente sus diferencias con el modelo de Lorenz-Haken, hemos procedido a su estudio numérico sistemático. Este estudio ha sido llevado a cabo con

tres conjuntos de parámetros diferentes que modelizan los experimentos llevados a cabo con la línea de  $81.5\mu\text{m}$  (Caso 1), el mismo experimento pero no considerando la desintonía del campo de bombeo (Caso 2) y el llevado a cabo con la línea de  $374\mu\text{m}$  (Caso 3).

En el Caso 1, tras el estudio extenso y detallado de su diagrama de bifurcaciones en el plano definido por el bombeo y la desintonía de la cavidad, el comportamiento de la intensidad y el estudio de la dinámica de la fase del campo hemos podido concluir: (i) que el comportamiento exhibido por este modelo es tipo Lorenz (con algunas pequeñas diferencias en la dinámica de la fase y en la simetría del diagrama de bifurcaciones) y (ii) que reproduce los resultados experimentales. Hemos extendido este estudio numérico a otros valores de las pérdidas de la cavidad obteniendo como resultado pequeñas desviaciones del comportamiento tipo Lorenz (concretadas en la aparición de una doble estructura en el mapa de intensidades) que, de nuevo, están de acuerdo con los resultados experimentales.

Para comprender la razón por la que el LGBO-D reproduce el comportamiento tipo Lorenz, hemos llevado a cabo un estudio de los términos que diferencian ambos modelos. Este estudio nos ha permitido concluir que, aunque los términos no comunes a ambos modelos (relacionados con el bombeo óptico y con el efecto Doppler) no son en absoluto despreciables, se comportan, aproximadamente, como versiones reescaladas de los otros términos que aparecen en las ecuaciones de evolución de la polarización P y de la inversión de población D. Este hecho hace que pueda definirse un modelo efectivo en que esos términos han desaparecido, a cambio de introducir una modificación en el valor de los parámetros del sistema. Estos hechos están en el origen matemático del comportamiento tipo Lorenz.

El estudio del Caso 2 (en el que la desintonía de bombeo  $\Delta_2=0$ ) nos ha permitido concluir que  $\Delta_2$  no es el parámetro responsable de la aparición del comportamiento tipo Lorenz, lo que permite simplificar el modelo. Es más, muchas de las pequeñas discrepancias que aparecían en el caso anterior, no aparecen ahora, lo que permite identificar a  $\Delta_2$  como el responsable de ellas.

Así pues, podemos afirmar que el modelo LGBO-D muestra comportamiento tipo Lorenz y que es adecuado para reproducir los resultados experimentales de la línea de  $81.5\mu\text{m}$  (y por extensión de la línea de  $153\mu\text{m}$  que tienen parámetros muy parecidos), acabando así con la larga polémica que negaba la posibilidad de obtener comportamiento Lorenz en láser bombeados ópticamente.

El estudio del Caso 3 (línea de  $374\mu\text{m}$ ) revela un comportamiento muy diferente del tipo Lorenz (ruta de intermitencias, un tipo diferente de caos) y que no está en acuerdo con los resultados experimentales. Este desacuerdo podría deberse a tres razones: el modelo es inadecuado por algún fenómeno físico fundamental que no incluye (estructura de niveles, polarización de los campos); es inadecuado porque en el experimento se amplifiquen tanto la onda copropagante como la contrapropagante (se trabaja con cavidad Fabry-Perot); o porque los parámetros no han sido bien elegidos. Por ahora desconocemos la razón de estos resultados.

En el Capítulo 5 hemos estudiado analíticamente el modelo LGBO-M [Arjona *et al.*, 1990] que tiene en cuenta la influencia de la polarización de los campos en la dinámica de un LGBO homogéneo. El modelo considera cuatro niveles energéticos interaccionando con los campos de bombeo y generado que aparecen descompuestos en sus componentes dextrógira y levógira.

En primer lugar hemos particularizado el modelo a los casos de interés de polarizaciones lineales paralelas u ortogonales entre los campos de bombeo y generado. Esta particularización nos ha permitido reconocer que el LGBO-M paralelo es isomorfo, en ciertas circunstancias, al LGBO de tres niveles homogéneo, lo que explica que muestre un comportamiento dinámico muy diferente del exhibido por el modelo de Lorenz-Haken.

Nos hemos concentrado en el caso, más interesante, de polarizaciones ortogonales. Mediante el estudio detallado de sus ecuaciones hemos obtenido el importante resultado de que no existen procesos Raman en este caso.

Hemos llevado a cabo la obtención de las soluciones estacionarias del caso ortogonal así como su análisis de estabilidad. La solución estacionaria no trivial requiere una curiosa condición necesaria para su existencia: es necesario un valor mínimo de  $\Gamma$  (relajación de la coherencia existente entre los dos niveles superiores degenerados). También hemos realizado un pequeño estudio numérico de la influencia del parámetro  $\Gamma$  en el grado de parecido del comportamiento caótico con el de tipo Lorenz. Hemos visto que el parecido es mayor cuanto menor es  $\Gamma$ .

Mediante una reelaboración de las ecuaciones hemos podido reconocer que la única diferencia de este modelo con el de Lorenz-Haken radica en la aparición de un término de bombeo óptico en la ecuación de la diferencia de poblaciones. Además, esta influencia es menor cuanto menor es  $\Gamma$ , lo que explica que el parecido con el modelo de Lorenz-Haken se acentúe en esas circunstancias. El estudio de este término nos ha sugerido la formulación de un modelo simplificado del LGBO-M ortogonal en el que el

término de bombeo óptico (único término "no Lorenz") es sustituido por su valor estacionario.

Hemos llevado a cabo un estudio analítico del modelo simplificado que nos ha permitido justificar que la no linealidad de la intensidad estacionaria de salida con la de bombeo no sea una diferencia con el modelo de Lorenz. El análisis de estabilidad de este modelo simplificado muestra un buen acuerdo con el de el modelo no truncado cuando  $\Gamma$  es pequeña, abundando así en la justificación del comportamiento tipo Lorenz en este límite.

Para justificar físicamente las diferencias entre los casos paralelo y ortogonal hemos realizado un estudio del modelo a través de los estados vestidos de la materia. Este estudio nos ha permitido identificar el origen de la restricción para la existencia de emisión sobre el valor de  $\Gamma$  con la condición de inversión entre estados vestidos. En particular, hemos comprobado que las diferencias entre polarizaciones paralela y ortogonal se deben a las diferentes conexiones entre estados que aparecen en cada caso, conexiones que permiten la existencia de procesos Raman en el caso paralelo y no en el ortogonal (debido a un proceso de interferencias cuánticas) y que pueden llevar a una situación de inversión de población sin emisión láser en el caso ortogonal.

Finalmente, hemos reflexionado sobre la aplicabilidad del modelo LGBO-M a los experimentos realizados con el láser de  $\text{NH}_3$  y hemos concluido que no es directamente aplicable. La razón no radica en la no inclusión del efecto Doppler [las consecuencias de cuya incorporación puede ser previstas y que serían, en "el mejor de los casos", una reproducción de los resultados experimentales para la configuración de polarizaciones errónea (el caso paralelo reproduciría los resultados de la configuración ortogonal y el caso ortogonal tendría un comportamiento diferente)] sino en el bajo valor del número cuántico  $J$ . Un aumento en el valor de  $J$  conduciría a una desaparición de los fenómenos físicos que hemos encontrado en el LGBO-M (ausencia de procesos Raman en el caso ortogonal, etc) ya que estos parecen ser específicos del esquema de niveles elegido (véase el último apartado del Capítulo 5).

Por tanto, somos de la opinión de que el modelo LGBO-D es, por ahora, el más adecuado para reproducir los resultados experimentales de Weiss y colaboradores y que la polarización de los campos no juega un papel relevante en los mismos. Creemos que una mejora de los valores de los parámetros y un mejor conocimiento de los resultados experimentales permitirán que este modelo reproduzca también las observaciones de la línea de  $374\mu\text{m}$ .

### 6.3 Perspectivas.

Existen distintas perspectivas de futuro para el trabajo presentado en esta Memoria. Por lo que respecta al estudio de la fase del campo, una vez que nuestro trabajo ha clarificado la dinámica de la misma podría iniciarse el estudio de la fase en láseres multimodo, en los que la problemática será, sin duda, diferente. Convendría comenzar por estudiar la dinámica de la fase en láseres con un número bajo de modos longitudinales (dos modos sería lo más sencillo) y el conocimiento alcanzado en los láseres monomodo sería, sin duda, de gran utilidad.

Respecto a la influencia de las relajaciones de las poblaciones en el modelo de Lorenz (cuando son diferentes y hay relajación interna) sería interesante estudiar el comportamiento del sistema en el límite  $a = -b \rightarrow 0$  en el que el segundo umbral es reducido. Sería interesante también saber si la aparición de una cuarta variable dinámica (la suma de poblaciones  $W$ ) conduce a un aumento de la dimensión fractal del atractor.

Finalmente, el estudio de los LGBO ha de ser completado y extendido en diferentes direcciones. Por lo que a lo aquí estudiado atañe, dos son las principales líneas de investigación posibles. Por una parte establecer modelos matemáticos del tipo del LGBO-M pero con valores mayores del momento angular  $J$  de los niveles para intentar determinar claramente cual es la influencia de la polarización de los campos. Por otra parte, el modelo LGBO-D ha de ser estudiado aún más para intentar reproducir los resultados experimentales de la línea de  $374\mu\text{m}$ . En este sentido el haber obtenido ruta de intermitencias hace pensar que este modelo también podrá reproducir los resultados obtenidos en la línea de  $81.5\mu\text{m}$  (para presiones diferentes de las que aquí hemos considerado) en las que se ha observado intermitencias de tipo I y de tipo III [Tang *et al*, 1991a y 1992]. También debe estudiarse el encendido y apagado del modelo para intentar reproducir los interesantes resultados experimentales sobre transitorios, transitorios de apagado y caos metaestable obtenidos recientemente [Tin Win, 1992] y que no son reproducibles con modelos de dos niveles.

---

Conclusiones generales

## **Apéndices**

**Apéndice 1: Ecuaciones semiclásicas del láser.**

**Apéndice 2: Dimensiones generalizadas.**

**Apéndice 3: La fase de Berry y su manifestación en sistemas disipativos dinámicos.**



### Apéndice 1: Ecuaciones semiclásicas del láser.

La teoría semiclásica del láser se basa en una descripción híbrida del problema de la interacción entre la radiación y la materia en el interior del resonador. Por una parte, el campo electromagnético se describe mediante las ecuaciones clásicas de Maxwell y, por otra parte, el medio amplificador interaccionando con el campo clásico se describe cuánticamente con la ecuación de Schrödinger-von Neumann para la evolución de la matriz densidad. La autoconsistencia del proceso se consigue identificando la polarización macroscópica que aparece como término fuente en la ecuación de ondas con el valor esperado del operador momento dipolar de la materia [Sargent *et al*, 1974; H. Haken, 1985].

Consideremos por simplicidad un láser monomodo. Describimos el campo eléctrico como una onda viajera unidireccional (supongamos que de alguna manera se evita que una de las dos ondas contrapropagantes que pueden generarse no se amplifica) de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{e} \mathcal{E}(\vec{r}, t) \{ \exp[-i(\Omega t + \phi(t) - kz)] + \text{c.c.} \}, \quad (\text{A1.1})$$

donde  $\vec{e}$  es el vector unitario de polarización,  $\mathcal{E}(\vec{r}, t)$  es una amplitud real,  $(\Omega + \dot{\phi})$  es la frecuencia del campo ( $\Omega$  es una frecuencia óptica y es el marco frecuencial de referencia y  $\dot{\phi}$  es una pequeña oscilación alrededor de  $\Omega$ ),  $k$  es el número de ondas y  $z$  la dirección de propagación del campo.

La evolución del campo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  viene dada por la ecuación de ondas

$$\left[ -\nabla^2 + \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{p}(\vec{r}, t), \quad (\text{A1.2})$$

donde  $\vec{p}(\vec{r}, t)$  es la polarización macroscópica del medio material,  $\sigma$  la conductividad del medio (que se introduce para considerar de forma sencilla y obviando problemas de condiciones de contorno, la existencia de pérdidas debidas a la difracción y a la reflectividad no perfecta de los espejos),  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

Si el campo eléctrico es cuasimonocromático, la polarización inducida también lo es si bien tendrá, en general, una fase distinta a la del campo. En consecuencia, escribimos

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \rho(\vec{r}, t) \{ \exp[-i(\Omega t + \phi(t) - kz)] + \text{c.c.} \}, \quad (\text{A1.3})$$

con  $\rho(\vec{r}, t)$  en general compleja.

En el contexto en que nos desenvolvemos haremos la aproximación de la onda plana, por una parte, y la de campo uniforme o campo medio, por otra. Es decir, consideraremos que la amplitud de variación lenta del campo es constante tanto en la dirección transversal (onda plana) como a lo largo de la dirección de propagación (campo medio). Así pues, haremos  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(t)$  (lo mismo se aplica, lógicamente, a la polarización).

Teniendo en cuenta estas dos aproximaciones y asumiendo que las amplitudes reales del campo y la polarización varían lentamente comparado con la frecuencia óptica  $\Omega$ , a partir de la ecuación de ondas se obtiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathcal{E} - \frac{\Omega}{2\varepsilon_0} \text{Im}(\rho), \quad (\text{A1.4})$$

$$\Omega + \dot{\phi} = \omega_c - \frac{\Omega}{2\varepsilon_0} \frac{\text{Re}(\rho)}{\mathcal{E}}, \quad (\text{A1.5})$$

que son las ecuaciones de evolución de la amplitud y frecuencia (de variación lenta) del campo eléctrico (la frecuencia de la cavidad láser  $\omega_c$  aparece al aproximar  $\Omega$  a  $\omega_c$  en algún paso intermedio).

Pasemos a la descripción del medio material. Para ello utilizamos la ecuación de Schrödinger-von Neumann de evolución de la matriz densidad de los estados

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \Gamma \rho, \quad (\text{A1.6})$$

donde el hamiltoniano  $H$  viene dado, en la aproximación dipolar eléctrica, por

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (\text{A1.7.a})$$

$$H_0 = \hbar \sum_{i=1} |i\rangle \omega_i \langle i|, \quad (\text{A1.7.b})$$

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \quad (\text{A1.7.c})$$

donde  $|i\rangle$  denota el nivel atómico  $i$  (con  $i = 1, \dots, n$ ),  $\hbar\omega_i$  es la energía del nivel  $i$  y  $\bar{\mu}$  es el operador momento dipolar del medio material. Si hay más de un campo electromagnético interaccionando con el medio, el campo  $\vec{E}$  será la suma de todos ellos y las reglas de selección determinarán qué campo interacciona con qué transición atómica. El operador  $\Gamma$  es un (super)operador lineal del espacio de Liouville de los observables atómicos de modo que  $\Gamma\rho$  es una matriz atómica que representa la velocidad de  $\rho$  debida sólo a los procesos de relajación y bombeo. Puede demostrarse que los elementos de la matriz  $\Gamma\rho$  vienen dados por

$$\langle i|\Gamma\rho|i\rangle = -\gamma_i\rho_{ii} + \sum_k \gamma_{ik}\rho_{kk} + \lambda_i, \quad (\text{A1.8.a})$$

$$\langle i|\Gamma\rho|j\rangle = -\Gamma_{ij}\rho_{ij}, \quad i \neq j, \quad (\text{A1.8.b})$$

siendo

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j) + \Gamma_{ij}^{col}, \quad (\text{A1.8.c})$$

$$\gamma_i = \sum_k \gamma_{ki}, \quad i \neq j \neq k, i \neq k, \quad (\text{A1.8.d})$$

donde  $\gamma_{ki}$  representa la relajación del nivel  $i$  al nivel  $k$  ( $k$  puede ser un nivel distinto de aquellos que interaccionan con los campos),  $\lambda_i$  representa la tasa de bombeo incoherente del nivel  $i$  y  $\Gamma_{ij}^{col}$  representa la parte de relajación de la coherencia  $\rho_{ij}$  debida a colisiones elásticas. En la Ec.(A1.6),  $\rho(z,v,t)$  no es la matriz densidad de los estados del sistema sino un promedio de conjunto (*ensemble average*) sobre matrices densidad que describen átomos individuales, promedio que nos permite describir estadísticamente los procesos de bombeo y de colisiones entre átomos.

Concentrémonos ahora, para mayor sencillez, en el láser de dos niveles. En este caso tenemos un único campo interaccionando con un sistema atómico (o molecular) de dos niveles. El hamiltoniano (A.1.7) se escribe

$$H_0 = \hbar[|0\rangle\omega_0\langle 0| + |1\rangle\omega_1\langle 1|], \quad (\text{A1.9.a})$$

$$H_1 = -\bar{\mu}_{01} \cdot \vec{E}(t)|0\rangle\langle 1| + c.h., \quad (\text{A1.9.b})$$

donde hemos supuesto que  $\bar{\mu}_{ii} = \vec{0}$ . Si resolvemos la Ec.(A1.6) de evolución de la matriz densidad obtenemos

$$\dot{\rho}_{00} = -(\gamma_0 + \gamma_{10})\rho_{00} + \gamma_{01}\rho_{11} + \lambda_0 - \frac{i}{\hbar} \bar{\mu}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}(\rho_{01} - \rho_{10}), \quad (\text{A1.10.a})$$

$$\dot{\rho}_{11} = -(\gamma_1 + \gamma_{01})\rho_{11} + \gamma_{10}\rho_{00} + \lambda_1 + \frac{i}{\hbar} \bar{\mu}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}(\rho_{01} - \rho_{10}), \quad (\text{A1.10.b})$$

$$\dot{\rho}_{10} = -(\Gamma_{01} - i\omega_{01})\rho_{10} + \frac{i}{\hbar} \bar{\mu}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}(\rho_{00} - \rho_{11}), \quad (\text{A1.10.c})$$

y  $\rho_{01} = \rho_{10}^*$ . Si definimos ahora la frecuencia da Rabi del campo como

$$\alpha(t) = \frac{\bar{\mu}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}}{2\hbar} \mathcal{E}(t), \quad (\text{A1.11})$$

sustituimos el *ansatz*

$$\rho_{01}(z, v, t) = \rho_{01}(v, t) e^{i(\Omega t + \phi - kvz)}, \quad (\text{A1.12})$$

para eliminar las oscilaciones rápidas y llevamos a cabo la aproximación de la onda rotante (eliminación de los términos con exponenciales de frecuencias ópticas), obtenemos

$$\dot{\rho}_{00} = -(\gamma_0 + \gamma_{10})\rho_{00} + \gamma_{01}\rho_{11} + \lambda_0 - 2\alpha \text{Im} \rho_{10}, \quad (\text{A1.13.a})$$

$$\dot{\rho}_{11} = -(\gamma_1 + \gamma_{01})\rho_{11} + \gamma_{10}\rho_{00} + \lambda_1 + 2\alpha \text{Im} \rho_{10}, \quad (\text{A1.13.b})$$

$$\dot{\rho}_{10} = -[\Gamma_{01} + i(\Omega + \omega_{01} + \dot{\phi} + kv)]\rho_{10} + i\alpha(\rho_{00} - \rho_{11}), \quad (\text{A1.13.c})$$

donde hemos tenido en cuenta el posible ensanchamiento Doppler del medio material al hacer

$$\frac{d}{dt} \rho_{10} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{10} + v \frac{\partial}{\partial z} \rho_{10}. \quad (\text{A1.14})$$

Si en estas ecuaciones eliminamos el efecto Doppler haciendo  $v = 0$  y no consideramos los términos de relajación interna, obtenemos las ecuaciones de evolución de la matriz densidad de las Ecs.(I.2.2).

Una vez obtenida la ecuación de evolución de la matriz densidad, habremos de imponer la autoconsistencia del proceso. Para ello identificamos

$$\rho(z, t) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \text{Tr}[(\vec{e} \cdot \vec{\mu}_{01}) \rho] \quad (\text{A1.15})$$

donde N es el número de átomos activos por unidad de volumen y W(v) es la función de distribución de Maxwell-Boltzman. Sustituyendo entonces en las Ecs.(A1.4) y (A1.5) obtenemos

$$\dot{\alpha} = -\kappa\alpha + g \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \text{Im} \rho_{10} \quad (\text{A1.16.a})$$

$$\Omega + \dot{\phi} = \omega_c - g \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} dv W(v) \text{Re} \rho_{10} \quad (\text{A1.16.b})$$

donde la constante de acoplamiento radiación-materia o parámetro de ganancia, g, vale

$$g = \frac{\Omega(\vec{\mu}_{01} \cdot \vec{e})^2 N}{\epsilon_0 \hbar} \quad (\text{A1.17})$$

y las pérdidas del campo debidas a pérdidas en la cavidad valen  $\kappa = \sigma/2\epsilon_0$ .

Las Ecs.(A1.16) junto con las Ecs.(A1.13) constituyen las ecuaciones de Maxwell-Schrödinger de un láser de dos niveles, monomodo, unidireccional, con bombeo incoherente y con ensanchamiento Doppler. El modelo homogéneo se obtiene sin más que considerar que todas las moléculas tienen la misma velocidad  $v = 0$ .

Para obtener las ecuaciones del modelo LGBO hemos de considerar que son dos los campos que interactúan con un sistema de tres niveles. Para ello el hamiltoniano de interacción se escribe ahora

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot (\vec{E}_p + \vec{E}_l), \quad (\text{A1.18})$$

e imponemos que  $\vec{\mu}_{00} = \vec{\mu}_{22} = \vec{\mu}_{11} = \vec{\mu}_{12} = 0$  y que el campo de bombeo interactúe únicamente con la transición de bombeo 2-0 y que el campo generado sólo interactúe con la transición láser 0-1 (ver Fig.I.12) (lo que implica que los términos  $\vec{\mu}_{10} \cdot \vec{E}_p$  y  $\vec{\mu}_{02} \cdot \vec{E}_l$  serán eliminados al llevar a cabo la aproximación de la onda rotante). Así, operando análogamente a como hemos hecho con el láser de dos niveles obtenemos las Ecs.(4.1.3) del láser de tres niveles bombeado ópticamente. En cuanto al modelo de láser de cuatro niveles bombeado ópticamente (modelo LGBO-M), la Ec.(5.5.2) es la expresión del hamiltoniano en este sistema.



**Apéndice 2: Dimensiones generalizadas.**

Intuitivamente, la dimensión de un espacio es el número mínimo de coordenadas necesario para especificar la localización de un punto. Esta es la dimensión topológica y los objetos geométricos de cero, una, dos y tres dimensiones son nociones familiares. Sin embargo, la caracterización de los atractores requiere el uso de dimensiones fractales, i.e. no necesariamente enteras. A continuación damos la definición de las dimensiones generalizadas deteniéndonos un poco en la de capacidad, la de información y la de correlación. No entraremos en detalle ya que el cálculo de dimensiones no ha sido cubierto en esta Tesis doctoral. Un buen tratamiento del problema puede encontrarse, por ejemplo, en [Schuster, 1989] y en [Hao, 1989].

La dimensión de capacidad  $D_0$ .

Consideremos una línea recta [Fig.A2.1(a)] de longitud unidad. Si utilizamos un segmento de longitud  $l$  para cubrirla, el número de segmentos necesarios crece a medida que  $l$  disminuye como  $N(l) \propto l^{-D}$  siendo  $D$  la dimensión geométrica que, en el caso de la recta, vale 1. Así, podemos definir la dimensión de un objeto geométrico como

$$D = - \frac{\log N(l)}{\log l} \tag{A2.1}$$

Si utilizamos la Ec.(A2.1) para calcular la dimensión del conjunto de Cantor (que se obtiene dividiendo un segmento en subsegmentos de longitud un tercio y repitiendo la operación *ad infinitum* con cada subsegmento restante [Fig.A2.1(b)]) obtenemos  $D = \log 2 / \log 3 = 0.6309$  que es una dimensión fractal.

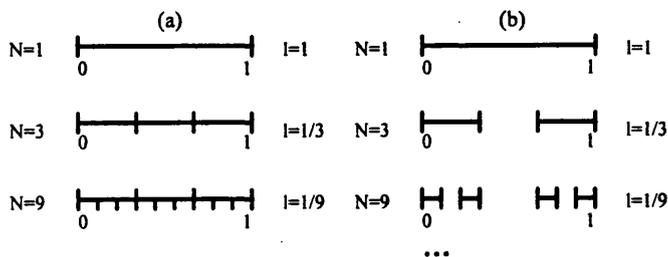


Fig.A2.1. Dimensión de capacidad de una línea (a) y del conjunto de Cantor (b). Ver texto.

Para medir la dimensión de un atractor extraño  $S$ , dividimos el espacio en que  $S$  se encuentra en celdas de dimensión lineal  $\epsilon$  y contamos el número de celdas que contienen al menos un punto del atractor. Entonces la dimensión de capacidad del atractor vale

$$D_0 = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon} . \quad (\text{A2.2})$$

Es evidente que la dimensión de capacidad  $D_0$  (llamada también dimensión fractal cuando coincide con la dimensión de Hausdorff) no refleja la inhomogeneidad del atractor  $S$  ya que celdas con pocos puntos son contadas igual que las que contienen muchos. Por ello necesitamos definir cantidades adicionales a  $D_0$ .

#### La dimensión de información $D_1$ .

Sea  $N_i(\epsilon)$  el número de puntos del atractor que contiene la celda  $i$ -ésima o, si se prefiere, el número de veces que esa celda es visitada por la trayectoria del atractor. Así, la probabilidad de que la caja  $i$ -ésima contenga un punto del atractor será  $P_i(\epsilon) = N_i(\epsilon)/N(\epsilon)$ . Si hacemos uso de la medida logarítmica de la información

$$I(\epsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i(\epsilon) \log P_i(\epsilon) \quad (\text{A2.3})$$

podemos definir la dimensión de información  $D_1$  como

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (\text{A2.4})$$

Es trivial ver que si  $P_i(\epsilon)$  es igual para todas las celdas  $i$ , entonces  $D_1 = D_0$ .

#### La dimensión de correlación $D_2$ .

La dimensión de correlación  $D_2$  fue introducida para obtener información de la dimensión del atractor a partir de una serie temporal.

Supongamos que tenemos una secuencia de datos de una sola variable  $x_1, x_2, \dots, x_N$  siendo  $N$  un número grande y estando los datos separados por un intervalo de tiempo  $\Delta\tau$  constante. Como no conocemos normalmente ni la dimensión del espacio físico ni la del atractor, construimos un espacio de dimensión grande  $m$  (*embedding space*) en el que "quepa" el atractor. La manera de construir el *embedding space* es como sigue: elegimos un tiempo de retardo  $\tau = p\Delta\tau$  con  $p$  entero y construimos un conjunto de vectores unidimensionales con componentes extraídas de la secuencia temporal

$$\bar{y}_i = (x_i, x_{i+p}, \dots, x_{i+(m-1)p}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{A2.5})$$

Así obtenemos M vectores con  $M < N$  pero del mismo orden si N es lo suficientemente grande. Nótese que hay dos parámetros que han de ser introducidos, m y p, y cuya elección no es trivial [Hao, 1989].

Una vez construidos los vectores  $\bar{y}_i$ , medimos la separación existente entre ellos  $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$ . Si la distancia es menor que un cierto valor  $\epsilon$  decimos que ambos vectores están correlacionados. Contamos entonces el número de vectores correlacionados del conjunto de M vectores y definimos la "integral de correlación"

$$C(\epsilon) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \theta(\epsilon - |\bar{y}_i - \bar{y}_j|) \quad (\text{A2.5})$$

con  $\theta$  la función de Heaviside. La dimensión de correlación se define como

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (\text{A2.6})$$

**Dimensiones de información de orden superior.**

Las dimensiones  $D_0$ ,  $D_1$  y  $D_2$  introducidas hasta ahora son casos particulares de  $D_q$  con q entero que se definen como

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q)}{\log \epsilon} \quad (\text{A2.7})$$

Así, la estructura estática del atractor quedará bien definida cuando se conozcan los valores de todas las  $D_q$ . En el caso del modelo de Lorenz un estudio sistemático puede encontrarse, por ejemplo, en [Domínguez-Tenreiro *et al* (1992)]. Algunos valores significativos son

|                        |         |          |         |          |          |          |         |         |
|------------------------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|---------|---------|
| <b>q</b>               | -10     | -5       | -1      | 0        | 1        | 2        | 5       | 10      |
| <b>D<sub>(q)</sub></b> | 3.71(2) | 3.675(5) | 2.86(6) | 2.148(2) | 2.057(2) | 2.052(8) | 2.06(3) | 2.04(6) |

Valor de algunas de las dimensiones generalizadas del atractor de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $r = 28$ . Tomado de [Domínguez-Tenreiro *et al* (1992)]. La cifra entre paréntesis indica la cota de error en la última cifra decimal.



### Apéndice 3: La fase de Berry y su manifestación en sistemas disipativos dinámicos.

En este Apéndice daremos una breve introducción a la fase geométrica de Berry así como los principales pasos que llevan a su definición para sistemas disipativos en régimen dinámico. Para ello seguiremos de cerca el trabajo de Ning y Haken (1992b).

Un concepto central en la idea de fase geométrica es el de transporte paralelo. Consideremos dos líneas en el plano complejo definidas por

$$\Psi_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1) = \text{cte} , \quad (\text{A3.1.a})$$

$$\Psi_2 = (c_2 - c_1) + i(d_2 - d_1) = \text{cte} . \quad (\text{A3.1.b})$$

Estas líneas son paralelas si sus coeficientes verifican la igualdad  $(b_2 - b_1)(c_2 - c_1) = (a_2 - a_1)(d_2 - d_1)$  o, lo que es lo mismo, si se verifica

$$\text{Im}\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = 0 , \quad (\text{A3.2})$$

donde  $|\Psi_2\rangle = \text{col}[(c_2 - c_1), (d_2 - d_1)]$  y  $\langle \Psi_1 | = \text{fil}[(a_2 - a_1), (b_2 - b_1)]$  y  $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$  denota el producto escalar de ambos vectores.

Consideremos ahora que la segunda línea  $\Psi_2$  (o el vector  $|\Psi_2\rangle$ ) es obtenida como resultado del movimiento de la línea  $\Psi_1$  durante un intervalo infinitesimal de tiempo. Tenemos

$$c_i(t) = a_i(t) + \dot{a}_i(t)dt , \quad (\text{A3.3.a})$$

$$d_i(t) = b_i(t) + \dot{b}_i(t)dt , \quad (\text{A3.3.b})$$

donde el punto denota derivación respecto al tiempo. Es fácil ver que la condición de paralelismo (A3.2) se escribe ahora

$$\text{Im}\langle \Psi_1 | \dot{\Psi}_1 \rangle = 0 , \quad (\text{A3.4})$$

La Ec.(A3.4) se verificará, por tanto, siempre que el vector  $|\Psi\rangle$  haya sido transportado paralelamente. De hecho, esta ecuación es la ley de transporte paralelo (para sistemas disipativos, ya que para sistemas conservativos, en los que la norma del vector se conserva, se escribe  $\langle\Psi|\dot{\Psi}\rangle = 0$ ). Esta ley es aplicable tanto a espacios planos como a espacios curvos. Ahora bien, en estos últimos aparece un fenómeno denominado anholonomía que está en el origen de la fase geométrica. La anholonomía consiste en que tras transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada en el espacio, ciertas propiedades del vector no vuelven a sus valores originales al final del recorrido. Por ejemplo, si transportamos paralelamente un vector tangente a lo largo de un meridiano, sobre una esfera, desde un polo hasta el ecuador, luego avanzamos por el ecuador para volver a subir al mismo polo a lo largo de un segundo meridiano, cuando volvemos a la posición inicial sobre el polo el vector no apunta en la misma dirección que al principio. Recalcemos que esta anholonomía es de origen puramente geométrico.

Consideremos ahora que la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (\text{A3.5})$$

posee una solución cíclica de periodo T y que satisface

$$|\Psi(T)\rangle = e^{i\delta\phi} |\Psi(0)\rangle, \quad (\text{A3.6})$$

siendo  $\delta\phi$  una cantidad real. Podemos elegir entonces una solución periódica  $|\tilde{\Psi}(T)\rangle = |\tilde{\Psi}(0)\rangle$  tal que se verifique la siguiente relación

$$\delta\phi = \delta\phi_g + \delta\phi_d. \quad (\text{A3.7})$$

Por ejemplo, podemos elegir

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{-if(t)} |\Psi(t)\rangle \quad (\text{A3.8})$$

e imponer que  $f(T) - f(0) = \delta\phi$ . Podemos obtener la relación (A3.7) derivando  $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$  respecto al tiempo, proyectando el resultado sobre  $|\tilde{\Psi}(T)\rangle$  mismo e integrando sobre un periodo T. Operando de esta forma obtenemos para  $\delta\phi_g$  y  $\delta\phi_d$  las siguientes expresiones

$$\delta\phi_g = \int_0^T dt \langle \tilde{\Psi}(t) | \dot{\tilde{\Psi}}(t) \rangle \quad (\text{A3.9})$$

$$\delta\phi_g = \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \tilde{\Psi}(t) | H | \tilde{\Psi}(t) \rangle \equiv \int_0^T dt \omega_d(t) \quad (\text{A3.10})$$

$\delta\phi_d$  es la llamada fase dinámica porque viene directamente determinada por la dinámica (el hamiltoniano) del sistema y  $\omega_d$  es llamada, consecuentemente, la frecuencia dinámica. Por otra parte,  $\delta\phi_g$  es la fase geométrica. Para ver que su origen es puramente geométrico y que se trata de una anholonomía, basta con definir un nuevo vector estado

$$|\Phi(t)\rangle = e^{i\delta\phi_g} |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (\text{A3.11})$$

y, por sustitución directa, se obtiene inmediatamente

$$\text{Im}\langle \Phi | \dot{\Phi} \rangle = 0, \quad (\text{A3.12})$$

es decir, que tras eliminar la fase dinámica de la evolución del vector [Ec.(A3.11)] la evolución del sistema define una ley de transporte paralelo [Ec.(A3.12)] y, consecuentemente, lo que queda al eliminar de la fase total del sistema  $\delta\phi$  la fase dinámica  $\delta\phi_d$ , es la fase geométrica.

Volvamos ahora a las ecuaciones del modelo de Lorenz-Haken [Ecs.(1.1.1)]. podemos reescribirlas como

$$|\dot{\Psi}\rangle = |F(|\Psi\rangle)\rangle \quad (\text{A3.13})$$

donde  $|\Psi\rangle = \text{col}[E, P, D]$  y  $|F(|\Psi\rangle)\rangle$  es el vector no lineal que tiene por componentes la parte derecha de las ecuaciones de evolución de E, P y D respectivamente.

La existencia de un atractor cíclico implica que, al cabo de un periodo T, las variables del láser verifican

$$E(t+T) = e^{-i\delta\phi} E(t) \quad (\text{A3.14.a})$$

$$P(t+T) = e^{-i\delta\phi} P(t) \quad (\text{A3.14.b})$$

$$D(t+T) = D(t) \quad (\text{A3.14.c})$$

con  $\delta\phi$  la acumulación de fase a lo largo de un periodo (la variable  $D$  no sufre acumulación de fase por ser real) o, escrito en forma más compacta

$$|\Psi(t+T)\rangle = S(-\delta\phi)|\Psi(t)\rangle \quad (\text{A3.15})$$

donde  $S(-\delta\phi) = \exp(i\Lambda\delta\phi)$  con  $\Lambda$  una matriz diagonal de elementos  $(1,1,0)$ .

Definimos el nuevo vector periódico

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = S(-f(t))|\Psi(t)\rangle \quad (\text{A3.16})$$

requiriendo que

$$f(T) - f(0) = \delta\phi \quad (\text{A3.17})$$

de manera que el nuevo vector estado sea periódico. Derivando  $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$  respecto al tiempo, proyectando el resultado sobre  $|\tilde{\Psi}(T)\rangle$  mismo e integrando sobre un periodo  $T$  obtenemos

$$\delta\phi = \delta\phi_g + \delta\phi_d \quad (\text{A3.18})$$

con

$$\delta\phi_d = - \int_0^{T} d\tau \text{Im} \frac{\langle \Psi | F(|\Psi\rangle) \rangle}{\langle \Psi | \Lambda | \Psi \rangle} \equiv \int_0^{T} d\tau \omega_d(\tau) \quad (\text{A3.19})$$

$$\delta\phi_g = \int_0^{T} d\tau \text{Im} \frac{\langle \tilde{\Psi} | \dot{\tilde{\Psi}} \rangle}{\langle \tilde{\Psi} | \Lambda | \tilde{\Psi} \rangle} \quad (\text{A3.20})$$

La expresión (A3.20) es la fase geométrica del sistema y puede comprobarse, operando análogamente a como hicimos anteriormente, que define una ley de transporte paralelo.

## **Bibliografia**



- Abraham, N.B. y C.O. Weiss (1988) *Dynamical frequency shifts and intensity pulsations in a FIR bidirectional ring laser*. Opt. Commun. **68**, 437-441.
- Abraham, N.B. y D.E. Chyba (1991) *The frequency of the emission from a laser when it is below threshold*. Opt. Commun. **85**, 83-94.
- Abraham, N.B., D. Dangoisse, P. Glorieux, y P. Mandel (1985) *Observation of undamped pulsations in a low-pressure, far-infrared laser and comparison with a simple theoretical model*. J. Opt. Soc. Am. B **2**, 23-34.
- Abraham, N.B., E. Arimondo, y R.W. Boyd (1987) *Instabilities and chaos in nonlinear optical systems.*, en *Instabilities and Chaos in Quantum Optics II*, N.B. Abraham y F.T. Arecchi editores (NATO ASI Series, Plenum Press, New York), pp.375-391.
- Abraham, N.B., P. Mandel, y L.M. Narducci (1988a) *Dynamical instabilities and pulsations in lasers*, en *Progress in Optics Vol.XXV*, E. Wolf editor (North Holland, Amsterdam), pp.1-190.
- Abraham, N.B., M.F.H. Tarroja, L.M. Hoffer, G.L. Lippi., P. Mandel, y H. Zeglache (1988b) *Dynamics involving the optical phase of lasers* (no publicado).
- Arjona, M. (1990) *Inestabilidades en láseres bombeados ópticamente con campos linealmente polarizados*. Tesis de Licenciatura (Universitat Autònoma de Barcelona, no publicada).
- Arjona, M., R. Corbalán, F. Laguarda, J. Pujol, y R. Vilaseca (1990a) *Progress in modelling coherently pumped far-infrared laser dynamics*, en *Coherence and Quantum Optics VI*, J.H. Eberly, L. Mandel, y E. Wolf editores (Plenum Press, New York), pp.61-65.
- Arjona, M., R. Corbalán, F. Laguarda, J. Pujol, y R. Vilaseca (1990b) *Influence of light polarization on the dynamics of optically pumped lasers*. Phys. Rev. A **41**, 6559-6562.
- Arjona, M., R. Corbalán, F. Laguarda, J. Pujol, y R. Vilaseca (1991) *Amplitude and Phase Dynamics in a Four-level Model of a Coherently Pumped Laser*, en *Nonlinear Dynamics and Quantum Phenomena in Optical Systems*, R. Vilaseca y R. Corbalán editores (Springer Verlag, Berlín), pp.171-178.
- Bandy, D.K., L.M. Narducci, L.A. Lugiato, y N.B. Abraham (1985) *Time-dependent behavior of a unidirectional ring laser with inhomogeneous broadening*. J. Opt. Soc. Am. B **2**, 56-61.

- Bergé, P., Y. Pomeau, y Ch. Vidal (1984) *Order within chaos. Towards a deterministic approach to turbulence*. (Hermann and John Wiley and Sons, Inc, New York).
- Berry, M.V. (1984) *Quantal phase factors accompanying adiabatical changes*. Proc. Roy. Soc. A **392**, 45-57.
- Berry, M.V. (1987) *Interpreting the anholonomy of coiled light*. Nature **326**, 277-278.
- Berry, M.V. (1988) *The geometric phase*. Sci. American **259**, 26-32. Existe versión castellana: *La fase geométrica*. Inv. y Ciencia, num.149, 14-21 (1989).
- Biswas, D.J., R.G. Harrison, C.O. Weiss, W. Klische, D. Dangoisse, P. Glorieux, y N.M. Lawandy (1986) *Experimental observations of single mode laser instabilities in optically pumped molecular lasers*, en *Instabilities and Chaos in Quantum Optics*, F.T. Arecchi y R.G. Harrison editores (Springer Verlag, Berlín), pp-109-121.
- Buley, E.R. y F.W. Cummings (1964) *Dynamics of a system of N atoms interacting with a radiation field*. Phys. Rev. **134**, A1454-A1460.
- Casperson, L.W. (1983) *Spontaneous pulsations in lasers.*, en *Laser Physics*, J.D. Harvey y D.F. Walls editores (Springer-Verlag, Heidelberg), pp.88-106.
- Casperson, L.W. (1988) *Spontaneous coherent pulsations in standing-wave laser oscillators: frequency characteristics*. J. Opt. Soc. Am. B **5**, 970-978.
- Chenkosol, P. y L.W. Casperson (1993) *Spontaneous coherent pulsations in standing wave laser oscillators: stability criteria for homogeneous broadening*. J. Opt. Soc. Am. B **10**, 817-826.
- Christian, W.R., T.H. Chyba, E.C. Gage, y L. Mandel (1988) *Observation of random  $\pi$  phase jumps in a ring laser with backscattering*. Opt. Commun. **66**, 238-244.
- Chyba, T.H. (1989) *Phase-jump instability in the bidirectional ring laser with backscattering*. Phys. Rev. A **40**, 6327-6338.
- Cohen-Tannoudji, C. y S. Reynaud (1977) *Simultaneous saturation of two atomic transitions sharing a common level*. J. Phys. B **10**, 2311-2331.
- Corbalán, R., F. Laguarda, J. Pujol, y R. Vilaseca (1989) *Lorenz-like dynamics in Doppler broadened coherently pumped lasers*. Opt. Commun. **71**, 290-294.
- Corbalán, R., M. Arjona, F. Laguarda, J. Pujol, y R. Vilaseca (1991) *Dynamic instabilities in Optically Pumped Lasers with Linear Polarized Pump and Generated Laser Beams*, en *Nonlinear Dynamics in Optical Systems*, N.B. Abraham, E.M.

- Garmire, y P. Mandel editores (Optical Society of America, Washington D.C.), pp.305-309.
- Corbalán, R., R. Vilaseca, M. Arjona, J. Pujol, E. Roldán, y G.J. de Valcárcel (1993) *Dynamics of coherently pumped lasers with linearly polarized pump and generated fields*. Phys. Rev. A. (Agosto).
- D'Alessandro, G., A. Politi, y F.T. Arecchi(1989) *Phase diffusion in chaotic laser dynamics*. Phys. Rev. A **40**, 5464-5467.
- de Valcárcel, G.J. (1989) *Comportamiento de los láseres bombeados ópticamente fuera de resonancia. Estudio de la fase*. Tesis de Licenciatura, (Universitat de València, no publicada).
- de Valcárcel, G.J., E. Roldán, y R. Vilaseca (1991a) *Dispersive and dynamical effects in laser phase evolution.*, en *Nonlinear Dynamics in Optical Systems*, N.B. Abraham, E. Garmire, y P. Mandel editores (Optical Society of America, Washington D.C.), pp.401-404.
- de Valcárcel, G.J., E. Roldán, y R. Vilaseca (1991b) *Lorenz character of the Doppler broadened far-infrared laser*. J. Opt. Soc. Am. B **8**, 2420-2428.
- Domínguez-Tenreiro, R., L.J. Roy, y V.J. Martínez (1992) *On the multifractal character of the Lorenz attractor*. Prog. Theor. Phys. **87**, 1107-1118.
- Dupertuis, M.A., R.R.E. Salomaa, y M.R. Siegrist (1986) *The conditions for Lorenz chaos in an optically-pumped far-infrared laser*. Opt. Commun. **57**, 410-414.
- Feigenbaum, M.J. (1983) *Universal behavior in nonlinear systems*. Physica D **7**, 16-39.
- Forysiak, W., R.G. Harrison, J.V. Moloney, y J.S. Uppal (1988) *Parametrisation of spontaneous pulsations in optically pumped molecular lasers*. J. Phys. (Paris) Colloque C2, **49**, C2-355-C2-358.
- Forysiak, W., R.G. Harrison, y J.V. Moloney (1989) *Local bifurcation of a three-level optically pumped laser*. Phys. Rev. A **39**, 421-423.
- Forysiak, W., J.V. Moloney, y R.G. Harrison (1991) *Bifurcations of an optically pumped three-level laser model*. Physica D **53**, 162-186.
- Fowler, A.C., J.D. Guibbon, y M.J. McGuinness (1982) *The complex Lorenz equations*. Physica D **4**, 139-163.
- Gerber, P.R., y M. Büttiker (1979) *Stability domain in coherent laser waves*. Z. Physik B **33**, 219-222.

- Graham, R. y Y. Cho (1983) *Self-pulsing and Chaos in Inhomogeneously Broadened Single Mode Lasers*. Opt. Commun. **47**, 52-56.
- Graham, R. y H. Haken (1968) Z. Phys. **213**, 420
- Grasyuk, A.Z. y A.N. Orayevsky (1964) en *Quantum electronics and coherent light*, P.A. Miles editor (Academic Press), pp.192
- Guibbon, J.D., y M.J. McGuinness (1982) *The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers*. Physica D **5**, 108-122.
- Haken, H. (1975) *Analogy between higher instabilities in fluids and lasers*. Phys. Lett. A **53**, 77-78.
- Haken, H. (1985) *Light. Vol. 2: Laser light dynamics*. (North-Holland, Amsterdam).
- Hao, B-L. (1989) *Elementary symbolic dynamics*. (World Scientific, Singapur).
- Harrison, R.G. y D.J. Biswas (1985) *Demonstration of self-pulsing instability and transitions to chaos in single-mode and multimode homogeneously broadened Raman laser*. Phys. Rev. Lett. **55**, 63-66.
- Harrison, R.G., W. Lu, y P.K. Gupta (1989) *Origin of periodic, chaotic, and bistable emission from Raman lasers*. Phys. Rev. Lett. **63**, 1372-1375.
- Hendow, S.T., y M. Sargent III (1982) *Effects of detuning on single-mode laser instabilities*. Opt. Commun. **43**, 59-63.
- Heppner, J. y C.O. Weiss (1978) *Far infrared ring lasers*. Appl. Phys. Lett. **33**, 590-593.
- Hoffer, L.M., G.L. Lippi, N.B. Abraham, y P. Mandel (1988) *Phase and frequency jumps in a bidirectional ring laser*. Opt. Commun. **66**, 219-224.
- Hogenboom, E.H.M., W. Klische, C.O. Weiss, y A. Godone (1985) *Instabilities of a homogeneously broadened laser*. Phys. Rev. Lett. **55**, 2571-2574.
- Hübner, U., N.B. Abraham, y C.O. Weiss (1989) *Dimensions and entropies of chaotic intensity pulsations in a single-mode far-infrared NH<sub>3</sub> laser*. Phys. Rev. A **40**, 6354-6365.
- Hübner, U., W. Wlische, y C.O. Weiss (1992) *Generalized dimensions of laser attractors*. Phys. Rev. A **45**, 2128-2130.
- Ioos, G. y D.D. Joseph (1990) *Elementary stability and bifurcation theory*. (Springer Verlag, Berlín, 2ª edición).

- Khandokhin, P.A., Ya.I. Khanin, y I.V. Koryukin (1988) *Bifurcations and chaos in the three-level model of a laser with coherent optical pumping*. Opt. Commun. **65**, 367-372.
- Khanin, Ya.I. (1990) *Bifurcations and chaos in lasers*. Acta Phys. Pol. A **78**, 407-417.
- Klische, W. y C.O. Weiss (1985) *Instabilities and routes to chaos in homogeneously broadened one- and two-mode ring laser*. Phys. Rev. A **31**, 4049-4051.
- Laguarta, F., J. Pujol, R. Vilaseca, y R. Corbalán (1988) *Instabilities in a Doppler broadened optically pumped far-infrared lasers*. J. Phys. (Paris) Colloque C2, **49**, C2.409-C2.412.
- Laguarta, F., J. Pujol, R. Vilaseca, y R. Corbalán (1989) *Modelling of coherently pumped laser instabilities*, en *Dynamics of Non-linear Optical Systems*, L. Pesquera, y F.J. Bermejo editores (World Scientific, Singapore), pp.187-201.
- Lawandy, N.M. (1985) *Instabilities in laser-pumped gas lasers: experimental oscillation line shapes*. J. Opt. Soc. Am. **2**, 108-111.
- Lawandy, N.M. y G.A. Koepf (1980) IEEE J. Quant. Electron QE-16, 701
- Lawandy, N.M. y D.V. Plant (1986) *On the experimental accessibility of the self-pulsing regime of the Lorenz model for single mode homogeneously broadened lasers*. Opt. Commun. **59**, 55-58.
- Lawandy, N.M. y J.C. Ryan (1987) *Limitations on coherently pumped molecular systems for studying two-level laser instabilities*. Opt. Commun. **63**, 53-56.
- Lawandy, N.M., M.D. Selker, y K. Lee (1987) *A signature for the Lorenz instability in Quantum Optics*. Opt Commun. **61**, 134-136.
- Lefebvre, M., D. Dangoisse, y P. Glorieux (1984) *Transients in far-infrared lasers*. Phys. Rev. A **29**, 758-767.
- Li, M.Y., Tin Win, C.O. Weiss, y N.R. Heckenberg (1990) *Attractor properties of laser dynamics: a comparison of NH<sub>3</sub>-laser emission with the Lorenz model*. Opt. Commun. **80**, 119-126.
- Li, M.Y., C.O. Weiss, y N.R. Heckenberg (1992) *Deterministic diffusion of a laser variable*. Opt. Commun. **87**, 254-258.
- Lorenz, E.N. (1963) *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. **20**, 130-141.

- Lu, W. y R.G. Harrison (1990) *Physical mechanism of asymmetric bistable and dynamically unstable emission with low second threshold in Raman lasers*. Phys. Rev. A **41**, 6563-6566.
- Lu, W. y R.G. Harrison (1991) *Nonlinear dynamics of Raman lasers*. Phys. Rev. A **43**, 6358-6367.
- Lugiato, L.A., L.M. Narducci, D.K. Bandy, y N.B. Abraham (1983) *Instabilities in inhomogeneously broadened single-mode lasers*. Opt. Commun. **46**, 115-120.
- Lugiato, L.A., L.M. Narducci, J.R. Tredicce, y D.K. Bandy (1987) 25 years of laser instabilities., en *Instabilities and Chaos in Quantum Optics II*, N.B. Abraham y F.T. Arecchi editores (NATO ASI Series, Plenum Press, New York), pp.1-25.
- Mandel, P. (1983) *Influence of Doppler broadening on the stability of monomode ring lasers*. Opt. Commun. **44**, 400-404.
- Mandel, P. (1985) *Properties of a Lorentz broadened single-mode unidirectional ring laser*. J. Opt. Soc. Am. B **2**, 112-119.
- Mandel, P. (1986) *Dynamic versus static stability*, en *Frontiers in Quantum Optics*, E.R. Pike y S. Sarkar editores (Adam Hilger, Boston), pp.430-452.
- Mandel, P. y H. Zeghlache (1983) *Stability of a detuned single mode homogeneously broadened ring laser*. Opt. Commun **47**, 146-150.
- Mandel, P. y O. Kocharovskaya (1991) *Amplification, lasing and inversion*, en *Nonlinear Dynamics and Quantum Phenomena in Optical Systems*, R. Vilaseca y R. Corbalán editores (Springer Verlag, Berlín), pp.109-119.
- Mandel, P., P. Galatola, L.A. Lugiato, y W. Kaige (1991) *Berry phase analogies in nonlinear optics*. Opt. Commun. **80**, 262-266.
- Mehendale, S.C. y R.G. Harrison (1986a) *Spontaneous mode splitting in optically pumped molecular lasers due to ac Stark effect*. Phys. Rev. A **34**, 1613-1616.
- Mehendale, S.C. y R.G. Harrison (1986b) *Theoretical analysis of instabilities in optically pumped molecular lasers*. Opt. Commun. **60**, 257-260.
- Moloney, J.V., J.S. Uppal, y R.G. Harrison (1987) *Origin of Caotic Relaxation Oscillations in an Optically Pumped Molecular Laser*. Phys. Rev. Lett. **59**, 2868-2871.
- Moloney, J.V., W. Forsyiaik, J.S. Uppal, y R.G. Harrison (1989) *Regular and chaotic dynamics of optically pumped molecular lasers*. Phys. Rev. A **39**, 1277-1285.

- Narducci, L.M. y N.B. Abraham (1988) *Laser Physics and Laser Instabilities*. (Scientific World, Singapur)
- Narducci, L.M., H. Sadiky, L.A. Lugiato, y N.B. Abraham (1985) *Experimentally accessible periodic pulsations of a single-mode homogeneously broadened laser (the Lorenz model)*. Opt. Commun. **55**, 370-376.
- Nelson, D.F. y W.S. Boyle (1962) Appl. Optics. **1**, 181
- Newell, A.C. y J.V. Moloney (1992) *Nonlinear optics*. (Addison Wesley, Redwood City).
- Ning, C.-Z. y H. Haken (1990a) *Detuned lasers and the complex Lorenz equations: subcritical and supercritical Hopf bifurcations*. Phys. Rev. A **41**, 3826-3837.
- Ning, C.-Z. y H. Haken (1990b) *Quasiperiodicity involving twin oscillations in the complex Lorenz equations describing a detuned laser*. Z. Phys. B **81**, 457-461.
- Ning, C.-Z. y H. Haken (1991) *Phase anholonomy in dissipative optical systems with periodic oscillations*. Phys. Rev. A **43**, 6410-6413.
- Ning, C.-Z. y H. Haken (1992a) *Geometrical phase and amplitude accumulations in dissipative systems with cyclic attractors*. Phys. Rev. Lett. **68**, 2109-2112.
- Ning, C.-Z. y H. Haken (1992b) *The geometric phase in nonlinear dissipative systems*. Mod. Phys. Lett. **6**, 1541-1568.
- Orriols, G. (1979) *Nonabsorption resonances by nonlinear coherent effects in a three-level system*. Nuovo Cimento B **53**, 1-24.
- Pedlosky, J. (1981) J. Atmos. Sci. **38**, 717
- Puccioni, G.P., M.V. Tratnik, E.P. Sipe, y G.L. Oppo (1987) *Low instability threshold in a laser operating in both states of polarization*. Opt. Lett. **12**, 242-244.
- Pujol, J. (1990) *Dinàmica no-lineal en làsers amb bombeig coherent*. Tesis Doctoral (Universitat Autònoma de Barcelona, no publicada).
- Pujol, J., R. Vilaseca, R. Corbalán, y F. Laguarda (1987) *Instabilities in optically pumped infrared lasers*. Int. Journ. Inf. Milim. Waves **8**, 299-305.
- Pujol, J., F. Laguarda, R. Vilaseca, y R. Corbalán (1988a) *Influence of pump coherence on the dynamics behavior of a laser*. J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1004-1010.
- Pujol, J., F. Laguarda, R. Corbalán, y R. Vilaseca (1988b) *Dynamics of a detuned, optically-pumped far-infrared laser*. J. Phys. D **21**, S180-S183.

- Risken, H. y K. Nummedal (1968) *Instability of off resonance modes in lasers*. Phys. Lett. A **26**, 275-276.
- Roldán, E. (1989) *Inestabilidades de tipo Lorenz en láseres de infrarrojo lejano*. Tesis de Licenciatura, (Universitat de València, no publicada).
- Roldán, E., G.J. de Valcárcel, R. Vilaseca, F. Silva, J. Pujol, R. Corbalán y F. Laguarda (1989) *Phase dynamics in a Doppler broadened optically-pumped laser*. Opt. Commun. **73**, 506-510.
- Roldán, E., G.J. de Valcárcel, R. Vilaseca, y P. Mandel (1993a) *Single mode laser phase dynamics*. Phys. Rev. A **48**, 591-598.
- Roldán, E., G.J. de Valcárcel, R. Vilaseca, y R. Corbalán (1993b) *Polarization sensitive population trapping in an optically pumped laser*. Phys. Rev. A (enviado).
- Ryan, J.C. y N.M. Lawandy (1987) *Instabilities in a three-level coherently pumped laser*. Opt. Commun. **64**, 54-58.
- Saltzman, B. (1961) *Finite amplitude free-convection as an initial value problem*. J. Atmos. Sci. **19**, 329-341.
- Sargent III, M., M.O. Scully, y W.E. Lamb (1974) *Laser Physics*. (Addison Wesley, Reading).
- Sassi, M.P., N. Barbeau, y C.O. Weiss (1987) *Self pulsing properties of optically pumped FIR NH<sub>3</sub> lasers*. Appl. Phys. B **43**, 179-182.
- Schuster, H.G. (1989) *Deterministic chaos. An introduction*. (VCH, Weinheim).
- Sparow, C. (1982) *The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors*. (Springer Verlag, Berlin).
- Tang, D.Y. (1993) *Chaotische Amplituden- und Phasendynamik des optisch angeregten NH<sub>3</sub> Einmodenringlasers und Vergleich mit den reellen und komplexen Lorenz-Gleichungen*. Tesis Doctoral (Universidad de Hanover, no publicada).
- Tang, D.Y., J. Pujol, y C.O. Weiss (1991a) *Type-III intermittency of a laser*. Phys. Rev. A **44**, R35--R38.
- Tang, D.Y., M.Y. Li, y C.O. Weiss (1991b) *Field dynamics of a single-mode laser*. Phys. Rev. A **44**, 7597-7604.
- Tang, D.Y., M.Y. Li, y C.O. Weiss (1992a) *Laser dynamics of Tipe-I intermittency*. Phys. Rev. A **46**, 676-678.

- Tang, D.Y., C.O. Weiss, E. Roldán, y G.J. de Valcárcel (1992b) *Deviation from Lorenz-type dynamics of an NH<sub>3</sub> ring laser*. Opt. Commun. **89**, 47-53.
- Tarroja, M.H.F., N.B. Abraham, D.K. Bandy, y L.M. Narducci (1986) *Periodic and chaotic output pulsations in a single-mode inhomogeneously broadened laser*. Phys. Rev. A **34**, 3148-3158.
- Tin, Win (1993) *Non-linear dynamics of a laser system: 153μm <sup>15</sup>NH<sub>3</sub> far-infrared laser*. Tesis Doctoral (Universidad de Queensland, no publicada).
- Tredicce, J.R., F.T. Arecchi, G.L. Lippi, y G.P. Puccioni (1985) *Instabilities in lasers with an injected signal*. J. Opt. Soc. Am B **2**, 173-183.
- Uppal, J.S., R.G. Harrison, y J.V. Moloney (1987a) *Validity of mode splitting analysis in optically pumped molecular lasers having Rabi splitting*. Opt. Commun. **64**, 357-361.
- Uppal, J.S., R.G. Harrison, y J.V. Moloney (1987b) *Gain, dispersion, and emission characteristics of three-level molecular laser amplifier and oscillator systems*. Phys. Rev. A **36**, 4823-4535.
- Uppal, J.S., R.G. Harrison, y W. Lu (1990) *Analysis of steady state and bistable emission from a three-level laser*. J. Mod. Opt. **37**, 605-611.
- Vilaseca, R., G.J. de Valcárcel, y E. Roldán (1990) *Physical interpretation of laser phase dynamics*. Phys. Rev. A **41**, 5269-5272.
- Vilaseca, R., E. Roldán, G.J. de Valcárcel, y R. Corbalán (1991) *Comparison between two-level and inhomogeneously broadened FIR three-level laser dynamics, en Nonlinear Dynamics in Optical Systems*, N.B. Abraham, E.M. Garnire, y P. Mandel editores (Optical Society of America, Washington D.C.), pp.405-409.
- Weiss, C.O. (1985) *Observation of instabilities and chaos in optically pumped far-infrared lasers*. J. Opt. Soc. Am. B **2**, 137-140.
- Weiss, C.O. (1988) *Chaotic laser dynamics*. Opt. and Quant. Electron. **20**, 1-22.
- Weiss, C.O. y W. Klische (1984a) *Self-pulsing instability of a CH<sub>2</sub>F<sub>2</sub>-laser*. Opt. Commun. **50**, 413-416.
- Weiss, C.O. y W. Klische (1984b) *On observability of Lorenz instabilities in lasers*. Opt. Commun. **51**, 47-48.
- Weiss, C.O. y J. Brock (1986) *Evidence for Lorenz-Type chaos in a laser*. Phys. Rev. Lett. **57**, 2804-2806.

- Weiss, C.O. y R. Vilaseca (1991) *Dynamics of Lasers*. (VCH, Weinheim).
- Weiss, C.O., W. Klische, P.S. Ering, y M. Cooper (1985) *Instabilities and chaos of a single mode NH<sub>3</sub> laser*. Opt. Commun **52**, 405-408.
- Weiss, C.O., N.B. Abraham, y U. Hübner (1988) *Homoclinic and heteroclinic chaos in a single-mode laser*. Phys. Rev. Lett. **61**, 1587-1590.
- Weiss, C.O., W. Klische, N.B. Abraham, y U. Hübner (1989) *Comparison of NH<sub>3</sub> laser dynamics with the extended Lorenz model*. Appl. Phys. B **49**, 211-215.
- Witteman, W.J. (1987) *The CO<sub>2</sub> laser*. (Springer Verlag, Berlín).
- Wu, T.Q., V. Schröder, F.I. Saad, W. Klische, y C.O. Weiss (1989) *Lorenz-type chaotic pulsing of a <sup>13</sup>NH<sub>3</sub>-laser*. Infrared Phys **29**, 325-330.
- Zeghlache, H. (1988) *Analyses de stabilité en théorie du laser*. Tesis doctoral (Université Libre de Bruxelles), no publicada.
- Zeghlache, H. y P. Mandel (1985) *Influence of detuning on the properties of laser equations*. Journ. Opt. Soc. Am. B **2**, 18-22.
- Zeghlache, H., P. Mandel, N.B. Abraham, y C.O. Weiss (1988) *Phase and amplitude dynamics in the laser Lorenz model*. Phys. Rev. A **38**, 3128-3131.

W. J. G. M. (1987) *Journal of Applied Microbiology* 62, 1-10.

W. J. G. M. (1988) *Journal of Applied Microbiology* 64, 1-10.

W. J. G. M. (1989) *Journal of Applied Microbiology* 66, 1-10.

W. J. G. M. (1990) *Journal of Applied Microbiology* 68, 1-10.

W. J. G. M. (1991) *Journal of Applied Microbiology* 70, 1-10.

W. J. G. M. (1992) *Journal of Applied Microbiology* 72, 1-10.

W. J. G. M. (1993) *Journal of Applied Microbiology* 74, 1-10.

W. J. G. M. (1994) *Journal of Applied Microbiology* 76, 1-10.

W. J. G. M. (1995) *Journal of Applied Microbiology* 78, 1-10.

W. J. G. M. (1996) *Journal of Applied Microbiology* 80, 1-10.

W. J. G. M. (1997) *Journal of Applied Microbiology* 82, 1-10.

W. J. G. M. (1998) *Journal of Applied Microbiology* 84, 1-10.

W. J. G. M. (1999) *Journal of Applied Microbiology* 86, 1-10.

W. J. G. M. (2000) *Journal of Applied Microbiology* 88, 1-10.

W. J. G. M. (2001) *Journal of Applied Microbiology* 90, 1-10.

W. J. G. M. (2002) *Journal of Applied Microbiology* 92, 1-10.

W. J. G. M. (2003) *Journal of Applied Microbiology* 94, 1-10.

W. J. G. M. (2004) *Journal of Applied Microbiology* 96, 1-10.

W. J. G. M. (2005) *Journal of Applied Microbiology* 98, 1-10.

W. J. G. M. (2006) *Journal of Applied Microbiology* 100, 1-10.

W. J. G. M. (2007) *Journal of Applied Microbiology* 102, 1-10.

W. J. G. M. (2008) *Journal of Applied Microbiology* 104, 1-10.

W. J. G. M. (2009) *Journal of Applied Microbiology* 106, 1-10.

W. J. G. M. (2010) *Journal of Applied Microbiology* 108, 1-10.

W. J. G. M. (2011) *Journal of Applied Microbiology* 110, 1-10.

W. J. G. M. (2012) *Journal of Applied Microbiology* 112, 1-10.

W. J. G. M. (2013) *Journal of Applied Microbiology* 114, 1-10.

W. J. G. M. (2014) *Journal of Applied Microbiology* 116, 1-10.

W. J. G. M. (2015) *Journal of Applied Microbiology* 118, 1-10.

W. J. G. M. (2016) *Journal of Applied Microbiology* 120, 1-10.

W. J. G. M. (2017) *Journal of Applied Microbiology* 122, 1-10.

W. J. G. M. (2018) *Journal of Applied Microbiology* 124, 1-10.

W. J. G. M. (2019) *Journal of Applied Microbiology* 126, 1-10.

W. J. G. M. (2020) *Journal of Applied Microbiology* 128, 1-10.

