



TESIS DOCTORAL N° 373
LEIDA - 3-12-1999

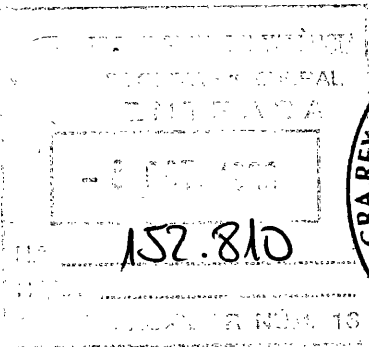
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departamento de Óptica

Físicas

T.D

373



Estudio de la formación de imágenes
tridimensionales. Desarrollo de técnicas
de superresolución para
sistemas confocales de barrido

Memoria presentada por
CARLOS J. ZAPATA RODRÍGUEZ
para optar al grado de
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS
Noviembre 1999

UMI Number: U607754

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607754

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 14.469

DATA 17.5.2000

SIGNATURA T.D.373 (FISICAS)

Nº LIBRO: i 20140010

24 cm.



A mis padres, Carlos y Genoveva,
mis hermanos David y Miguel Ángel
y mi hermana Inmaculada.



D. Pedro ANDRÉS BOU, Catedrático de Óptica de la Universitat de València y
D. Manuel MARTÍNEZ CORRAL, Profesor Titular de Óptica de la Universitat de
València

CERTIFICAN que la presente memoria: "Estudio de la formación de imágenes tridi-
mensionales. Desarrollo de técnicas de superresolución para sistemas
confocales de barrido", resume el trabajo de investigación realizado,
bajo su dirección, por D. Carlos J. ZAPATA RODRÍGUEZ y consti-
tuye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente
certificado en Valencia, a veinticinco de septiembre de mil novecientos noventa y nueve.

Fdo.: Dr. Pedro Andrés Bou

Fdo: Dr. Manuel Martínez Corral

Agradecimientos

Existen tres personas a las que siento la obligación de expresar mi más sincera gratitud, habiendo influido determinadamente en mi trabajo de investigación que queda reflejado en la presente Tesis Doctoral.

En primer lugar se encuentra uno de mis directores de Tesis, Manuel Martínez Corral, a quien he de agradecer todo el esfuerzo que ha realizado y del que sin duda he sido yo el más favorecido.

También quisiera agradecer con denuedo a Pedro Andrés Bou por la inteligencia con la que ha llevado a cabo su labor de dirección y la confianza con la que siempre he contado para desarrollar mis propias ideas.

Sería injusto si no mencionase al Prof. Marek Kowalczyk, de la Universidad de Varsovia, con quien he estado en estrecha colaboración y ha codirigido una buena parte de los trabajos que aquí presento.

Este trabajo ha sido financiado principalmente por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (Proyecto PB93-0354-C02-01). También es de agradecer al Ministerio de Educación y Cultura la beca que he disfrutado desde el año 1996 hasta finales de 1998.



Lista de Publicaciones

Esta Tesis Doctoral está basada en los siguientes artículos:

- I. C.J. Zapata-Rodríguez, P. Andrés y M. Martínez-Corral, "Gaussian imaging transformation for the paraxial Debye formulation of the focal region in a low-Fresnel-number optical system", *Journal of the Optical Society of America A* (enviado).
- II. M. Martínez-Corral, C.J. Zapata-Rodríguez, P. Andrés y M. Kowalczyk, "Analytical formula for calculating the focal shift in apodized systems", *Journal of Modern Optics* **45**, pp. 1671–1679 (1998).
- III. M. Martínez-Corral, C.J. Zapata-Rodríguez, P. Andrés y E. Silvestre, "Effective Fresnel-number concept for evaluating the relative focal shift in focused beams", *Journal of the Optical Society of America A* **15**, pp. 449–455 (1998).
- IV. C.J. Zapata-Rodríguez, M. Martínez-Corral, P. Andrés y A. Pons, "Axial behavior of diffractive lenses under Gaussian illumination: complex-argument spectral analysis", *Journal of the Optical Society of America A* **16**, pp. 2532–2538 (1999).
- V. C.J. Zapata-Rodríguez, M. Martínez-Corral, P. Andrés y A. Pons, "Inverse focal shift: a new effect in truncated cylindrical waves", *Journal of Modern Optics* **46**, pp. 129–144 (1999).
- VI. M. Martínez-Corral, P. Andrés, C.J. Zapata-Rodríguez y M. Kowalczyk, "Three-dimensional superresolution by annular binary filters", *Optics Communications* **165**, pp. 267–278 (1999).
- VII. M. Martínez-Corral, P. Andrés, C.J. Zapata-Rodríguez y C.J.R. Sheppard, "Improvement of three-dimensional resolution in confocal scanning microscopy by combination of two pupil filters", *Optik* **107** (4), pp. 145–148 (1998).
- VIII. M. Kowalczyk, C.J. Zapata-Rodríguez y M. Martínez-Corral, "Asymmetric apodization in confocal scanning systems", *Applied Optics* **37**, pp. 8206–8214 (1998).
- IX. M. Martínez-Corral, M. Kowalczyk, C.J. Zapata-Rodríguez y P. Andrés, "Tunable optical sectioning in confocal microscopy by use of symmetrical defocusing and apodization", *Applied Optics* **37**, pp. 6914–6921 (1998).

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Motivaciones	1
1.2	Esquema general	6
2	Formación de imágenes con objetos planos	11
2.1	Difracción con objetos planos	12
2.2	Formación de imágenes en la representación integral de Debye	13
2.3	Sistemas telecéntricos	15
2.4	Formación de imágenes en sistemas ópticos con número de Fresnel bajo	17
2.5	Desplazamiento de foco en haces esféricos: Teoría general	21
3	Distribución axial de irradiancia en haces focalizados. Desplazamiento de foco	23
3.1	Desplazamiento de foco en haces esféricos	24
3.2	Comportamiento axial de lentes difractivas bajo iluminación gaussiana	30
3.3	Haces cilíndricos. Desplazamiento de foco en sentido inverso	34
4	Formación de imágenes con objetos tridimensionales. Sistemas confocales de barrido.	39
4.1	Difracción con objetos tridimensionales	40
4.2	Sistemas formadores de imágenes lineales e invariantes a desplazamientos tridimensionales	42
4.3	Sistemas confocales de barrido	46
4.4	Arquitecturas con números de Fresnel bajos	49

5	Técnicas de superresolución en sistemas confocales de barrido	53
5.1	Pantallas superresolventes tridimensionalmente	54
5.2	Superresolución tridimensional por combinación de dos filtros pupilares complementarios	58
5.3	Apodización asimétrica en sistemas confocales de barrido	61
5.4	Superresolución axial por desenfoque simétrico. Técnicas combinadas con apodización	66
6	Conclusiones	73
6.1	Conclusiones generales	73
6.2	Perspectivas de futuro	77

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivaciones

Para obtener un conocimiento completo de la estructura de una imagen óptica, es necesario conocer la distribución de luz que se genera no sólo en el plano imagen geométrico, sino también en los planos adyacentes. Por esta razón, la evaluación del campo electromagnético difractado por una abertura circular uniformemente iluminada por un haz esférico coherente, que corresponde a la imagen que de un objeto puntual genera un sistema óptico limitado por la difracción, ha constituido una de las áreas de investigación clásicas dentro del campo de la Óptica a lo largo de estos dos últimos siglos. Este patrón de difracción, denominado respuesta unidad en difracción del sistema formador de imágenes, permite reconstruir la estructura del volumen imagen a través de una integral de superposición, por lo que caracteriza unívocamente el comportamiento en difracción del sistema óptico.

Uno de los primeros estudios teóricos de la formación de imágenes se debe a Airy (Airy 1835), quien determinó la distribución de irradiancia correspondiente a la respuesta unidad en difracción, sobre el plano focal, de un sistema óptico con abertura circular. Más tarde fue Lommel (Lommel 1885) quien extendió la formulación de Airy para obtener el campo difractado no sólo en el plano focal, sino en todos los puntos que forman el volumen imagen, en términos de una serie convergente de funciones de Bessel. Casi al mismo tiempo Struve (Struve 1886) publicó un análisis similar donde, además, se presentaban expresiones aproximadas de la irradiancia generada en la región limítrofe definida por la sombra geométrica, donde el desarrollo en serie converge más lentamente. Una década más tarde se introducen expresiones asintóticas (Schwartzschild 1898) que permiten evaluar el campo difractado en puntos muy alejados del foco geométrico. Todos los estudios anteriormente citados se basan en el

principio de Huygens, lo que implica que el campo generado por difracción se representa en términos de cierta combinación de ondas esféricas. Sin embargo, a principios de siglo Debye (Debye 1909) reexaminó el problema y empleó un desarrollo en función de ondas planas en lugar de ondas esféricas.

La teoría desarrollada por Lommel fue utilizada con posterioridad (Berek 1927; Pitch 1931) para representar gráficamente la distribución tridimensional de irradiancia en la región focal. En la década de los años 50 se realizaron estudios más detallados (Zernike y Nijboer 1949), interesándose en aspectos concretos tales como la distribución tridimensional de la irradiancia (Linfoot y Wolf 1953) y de la fase (Linfoot y Wolf 1956) del campo difractado en la región focal. Complementariamente a los experimentos realizados por Lommel para confirmar su teoría, se ha evaluado experimentalmente la estructura del campo generado por un haz focalizado tanto en el rango del visible (Hufford y Davis 1926; Taylor y Thompson 1958) como en la región de las microondas (Farnell 1957a; Bachynski y Bekefi 1957).

No se tardó en comprender que una modificación de la distribución transversal de la amplitud compleja sobre el plano de la pupila de salida del sistema es capaz de alterar el patrón tridimensional difractado en la región focal. Rayleigh realizó el primer estudio sobre la formación de imágenes en presencia de aberraciones cromáticas. Sin embargo, su contribución más importante fue la formulación de un criterio de tolerancia según el cual se determina la calidad de la imagen en función de la deformación del frente de ondas esférico de iluminación (Rayleigh 1879). Sin embargo, resulta más interesante la idea de modificar a voluntad la respuesta unidad del sistema óptico mediante la inserción de elementos difractantes, denominados filtros pupilares, que alteran la distribución de amplitud del haz emergente del plano pupilar. En este contexto, ya en los años 50 se realizaron estudios concernientes al campo tridimensional generado por difracción de una abertura anular (Linfoot y Wolf 1953), y de aberturas con estructura anular múltiple de fase (Boivin 1952).

De acuerdo con las predicciones de Lommel, el campo generado en la región focal de una onda esférica uniforme difractada por una abertura circular exhibe ciertas simetrías en torno al punto focal (Born y Wolf 1980, sección 8.8), donde la irradiancia alcanza su valor máximo. Estas propiedades de simetría se han encontrado también en haces difractados por otros tipos de aberturas, extendiéndose así su aplicabilidad bajo condiciones más generales (Collet y Wolf 1980). Sin embargo, fue Farnell (Farnell 1957a; Farnell 1958) el primero en apreciar ciertas discrepancias entre la teoría clásica de Lommel y los resultados de la teoría de la difracción de Kirchhoff. Utilizando una fuente emisora de radiación en la región espectral de las microondas, encontró que el punto de máxima irradiancia se desplaza a lo largo del eje óptico en la dirección donde

se encuentra la abertura difractante, de tal modo que la distribución tridimensional de irradiancia no está simétricamente distribuida en torno al punto focal geométrico. Más adelante, con la aparición del láser se observó un fenómeno similar dentro del rango del visible en sistemas con gran longitud focal (Goubau 1963; Nie 1964; Kogelnik 1965). Este fenómeno se ha bautizado con el nombre de desplazamiento de foco.

Este hasta entonces sorprendente descubrimiento se justifica atendiendo al hecho de que la teoría clásica mantiene implícita la premisa de que el número de zonas de Fresnel de la geometría de focalización es mucho mayor que la unidad (Wolf y Li 1981; Li y Wolf 1981), condición que cumplen los sistemas formadores de imágenes tradicionales. Además, se ha establecido teóricamente (Li y Wolf 1981; Stamnes y Spielkavik 1981; Givens 1982), y verificado experimentalmente (Li y Platzner 1983), que la magnitud del desplazamiento sufrido por el máximo de irradiancia axial está gobernado por el número de Fresnel de la geometría de focalización (Li y Wolf 1982; Carter 1982). En el caso particular de los sistemas láser de gran longitud focal (Holmes *et al.* 1972; Arimoto 1976; Gusinow *et al.* 1977), para los cuales la distribución transversal de amplitud sobre el dispositivo focalizador tiene una variación gaussiana, la estructura de la región focal difiere apreciablemente de la predicha por la teoría clásica, y se ha definido un número de Fresnel gaussiano para cuantificar el desplazamiento relativo del máximo de irradiancia en la región focal. Recientemente, se ha encontrado un efecto de desplazamiento similar en sistemas con obturaciones opacas (Mahajan 1983; Ojeda-Castañeda *et al.* 1994) y, en general, con cualquier tipo de abertura difractante (Szapiel 1983; Martínez-Corral *et al.* 1994). Se ha observado que este efecto aparece no sólo a lo largo del eje óptico, sino sobre cualquier línea del volumen focal que pasa por el punto focal geométrico (Andrés *et al.* 1993).

Como objetivo particular de esta Tesis Doctoral se pretende hacer una extensión de este estudio sobre el comportamiento en difracción de las arquitecturas ópticas que se caracterizan por un número de Fresnel cercano a la unidad. De esta manera, estamos interesados en la formación de imágenes bidimensionales bajo geometrías de focalización donde el fenómeno del desplazamiento de foco es notable. También resulta altamente atractivo el análisis de este efecto en otros dispositivos ópticos no convencionales que actúan como elementos focalizadores, tales como las lentes difractivas o los sistemas anamórficos. Por último, se plantea el problema de la cuantificación del desplazamiento de foco en sistemas ópticos con gran longitud focal, haciendo mención especial a aquellos que poseen una extensión transversal ilimitada. Tal y como veremos, el planteamiento de este problema nos va a permitir caracterizar a toda geometría de focalización con un número de Fresnel efectivo.

Volviendo nuestra atención a los sistemas ópticos formadores de imágenes clásicos,

es decir, aquellos que poseen un número de Fresnel alto, está claro que debido a la difracción, la imagen que un sistema óptico produce de un objeto puntual no es un punto sino un patrón que en irradiancia está compuesto por un máximo central, situado sobre el punto imagen geométrico, y unos lóbulos laterales o *pies* a su alrededor. La capacidad para discernir los detalles de una imagen están determinados por la forma de esta distribución tridimensional de campo difractado. Sin embargo, es posible hacer uso del hecho relevante, mencionado con anterioridad, según el cual, mediante la introducción de una pantalla difractante de transmitancia no uniforme que produzca una variación de la distribución transversal de amplitud sobre la pupila de salida del sistema, podemos modificar el patrón difraccional de la región focal. Esta modificación de la amplitud uniforme de la pupila de salida se conoce como *apodización* (Boughon *et al.* 1946). Etimológicamente hablando, el término *apodización* debe ser restringido a aquellos procesos que consisten en eliminar, o al menos reducir, los pies de la respuesta unidad en difracción del sistema (Jacquinot y Roizen-Dossier 1964). No obstante, nosotros utilizaremos este término en un sentido más amplio, para denotar cualquier modificación de la distribución de amplitud sobre la pupila de salida, de tal modo que se provoque, por ejemplo, un estrechamiento de lóbulo central del patrón de difracción, aumentando con ello el poder de resolución del sistema (Lohmann 1958), o una corrección de los efectos de las aberraciones geométricas (Barakat 1961).

En este sentido, merece la pena recordar que uno de los parámetros más frecuentemente utilizados para caracterizar la capacidad de resolución de un sistema formador de imágenes es su habilidad para discernir dos objetos puntuales que emiten la misma cantidad de luz. De acuerdo con el criterio de Rayleigh (Rayleigh 1874), dos objetos puntuales son resolubles si, como caso límite, el máximo central del patrón de difracción producido por uno de ellos coincide con el primer cero del patrón generado por el otro. El límite de resolución de Rayleigh viene dado entonces por la distancia entre el máximo central y el primer cero de la respuesta unidad en difracción del sistema. Este criterio puede generalizarse de tal manera que se incluyan aquellos patrones de difracción que no poseen ceros en la región focal, de tal manera que el límite de resolución se considera como la distancia para la cual el valor de la irradiancia en el punto central del patrón generado por los dos objetos puntuales disminuye en un 81%, correspondiente al límite de Rayleigh que originalmente se estableció para la abertura rectangular (Strutt 1899). Aunque se han presentado muchos otros (Sparrow 1916; Schuster 1924), destacamos también el criterio propuesto por Houston (Houston 1927), según el cual dos objetos puntuales son distinguibles por el sistema si la distancia entre ambos es igual a la anchura a media altura de cualquiera de los patrones de difracción individuales. Hemos de hacer notar que, en su contexto original, estos criterios de resolución asumen tácitamente que la iluminación es incoherente. Fue Abbe (Lummer y Reiche 1910) el



1.1. Motivaciones

primero en examinar la resolución de dos puntos que un sistema óptico ofrece bajo iluminación coherente. Con posterioridad se han generalizado estos criterios para incluir el caso de iluminación parcialmente coherente (Luneburg 1964; McKechnie 1972).

En el segundo tercio del presente siglo ya se propuso el uso de un diafragma en forma de diamante (Couder y Jacquinot 1939), que representa el primer ejemplo, y el más sencillo, de apodización a lo largo de una dirección determinada. La mayor parte de las técnicas de apodización están basadas en el criterio de Rayleigh (Osterberg y Wilkins 1949; Osterberg 1950). Uno de los métodos más populares consiste en desarrollar la función pupila en algún conjunto completo de funciones con coeficientes arbitrarios, de tal modo que se ajustan con el objetivo de obtener un patrón de difracción predeterminado (Wolf 1951). Un procedimiento diferente consiste en el uso del cálculo variacional para determinar la función pupilar óptima (Luneburg 1964; Barakat 1962). En general, la apodización consigue una mejora sólo en ciertos aspectos a expensas de otros. Por ejemplo, Luneburg (Luneburg 1964) encontró que, entre todos los patrones de difracción equienergéticos, que genera un objeto puntual, la pupila con transmitancia uniforme consigue aquel con un lóbulo central más intenso. A su vez, Wilkins (Wilkins 1950) demostró que no existe limitación alguna en la capacidad del sistema apodizado para estrechar la anchura del lóbulo central. Sin embargo, este estrechamiento genera, como regla general, lóbulos secundarios de altura considerable. Además, existen restricciones prácticas asociadas con una baja eficiencia y tolerancias ciertamente estrictas en la fabricación de estos filtros pupilares (Cox *et al.* 1982).

Un posible método para superar estas limitaciones es sacrificar el campo de visión (Lohmann 1956; Lukosz 1966). Esto puede conseguirse por medio del barrido de un foco de luz puntual, el cual ilumina la muestra objeto. De esta manera, la imagen se construye punto a punto, pudiendo ser visualizada sobre un monitor o almacenada en un ordenador para su posterior procesado. El primer ejemplo de este tipo de sistema formador de imágenes fue propuesto en 1951 (Young y Roberts 1951). Sin embargo, no fue hasta finales de los 50 cuando se describe por primera vez un novedoso sistema formador de imágenes, denominado microscopio confocal (Minsky 1961), en el que la señal proveniente de la parte del objeto iluminada por el foco de luz es recogida por un sistema óptico que la conduce hacia un pequeño detector, el cual idealmente se considera puntual. El término confocal se usa para indicar que la fuente emisora de luz, el punto objeto bajo observación y el detector puntual se encuentran en puntos conjugados a través de los sistemas de iluminación y colección. No fue hasta los años 70 cuando se realizó el primer estudio detallado (Sheppard y Choudhury 1977) sobre el comportamiento en difracción del microscopio confocal, el cual mostró que la resolución transversal es 1.4 veces mayor en comparación con la del microscopio convencional. En última instancia este hecho se debe a que la resolución en un microscopio

convencional está determinada principalmente por las propiedades del objetivo (Hopkins 1953), mientras que en el caso de un microscopio confocal la resolución también depende de las propiedades de focalización del sistema de iluminación (Wilson 1990).

Pronto se observó que la microscopía confocal de barrido tiene una gran capacidad para discriminar profundidades (Nomarski 1975): la señal proveniente de puntos que se encuentran fuera del foco se detecta con extremada atenuación en comparación con aquella que procede del foco geométrico, mientras que en un sistema convencional observamos que únicamente aparece un efecto de desenfoque (Sheppard y Wilson 1978). Esta reducción de la profundidad del campo de visión tiene una importancia capital dado que permite formar la imagen de cada sección transversal perteneciente a un objeto con estructura axial, y construir posteriormente una imagen tridimensional. También se ha verificado experimentalmente (Hamilton y Wilson 1982) esta capacidad que poseen los sistemas confocales de barrido para seccionar ópticamente una imagen tridimensional.

Hasta la fecha se han realizado numerosos estudios en el campo de la microscopía confocal de barrido donde se demuestra que el uso de filtros pupilares con una variación no uniforme de su transmitancia en amplitud pueden mejorar sustancialmente la respuesta en difracción de los sistemas confocales de barrido (Sheppard y Wilson 1979; Hamed y Clair 1983). La teoría indica que la anchura del lóbulo central del patrón de difracción que genera un objeto puntual puede reducirse a la mitad con niveles de pérdidas energéticas tolerables (Hegedus y Sarafis 1986). Aunque este proceso de apodización se ha realizado principalmente sobre el plano focal imagen (Hegedus 1985; Wilson y Hewlett 1990), hemos de indicar que resulta más atractivo el uso de esta técnica para reducir las dimensiones del lóbulo central de la respuesta unidad en difracción a lo largo del eje óptico (Sheppard y Gu 1991; Martínez-Corral *et al.* 1995), lo cual permitirá aumentar la capacidad de seccionado óptico, y con ello su habilidad para formar imágenes tridimensionales.

Parte de los resultados que se presentan en esta Tesis Doctoral van dirigidos en la línea de la apodización tridimensional de los sistemas confocales de barrido. En primer lugar, se hace uso del hecho característico de los sistemas confocales por el cual la respuesta unidad en difracción depende tanto del sistema de iluminación y como del de colección, pero de forma completamente independiente. Este mayor grado de libertad a la hora de diseñar una técnica de superresolución apropiada no ha sido explotado del todo hasta la fecha, limitándose a aplicar los métodos ya presentados en microscopía convencional y analizando los resultados numéricos obtenidos en este sistema óptico. En este sentido, nosotros nos centramos en arquitecturas novedosas, que no son directamente trasladables a los sistemas convencionales, pero que demuestran

ser altamente eficaces en microscopía confocal de barrido.

1.2 Esquema general

El eje central de esta Tesis Doctoral está constituido por nueve artículos que se presentan como aportaciones originales en el anexo de esta memoria. De acuerdo con la normativa que establece las condiciones de presentación de una tesis en la modalidad de compendio de artículos, en los capítulos 2-5 se presenta un resumen global de las aportaciones incluidas. Este resumen no pretende ser sólo una exposición abreviada de los artículos sino, también, un texto que permite apreciar la unidad de los mismos a la vez que destaca los resultados obtenidos y sus consecuencias inmediatas. Por ello, se incluye en el resumen una parte dedicada a describir las bases teóricas y algunas herramientas auxiliares utilizadas en el desarrollo de este trabajo. Asimismo, a lo largo del resumen se comentan, aunque brevemente, otros resultados de la tesis no contemplados en las aportaciones del anexo y que se encuentran todavía en fase de redacción.

Comenzamos nuestro estudio asentando las bases teóricas relacionadas con la difracción y la formación de imágenes de los sistemas ópticos convencionales. Es así como, en el capítulo 2, hacemos una breve exposición de la formulación de Fresnel-Kirchhoff que utilizamos para evaluar el campo generado por difracción al propagarse por el espacio libre. También mostramos las ecuaciones que rigen el comportamiento en difracción de los sistemas ópticos formadores de imágenes bajo la representación integral de Debye. Demostramos que los resultados obtenidos clásicamente basados en esta representación son análogos a los proporcionados por la representación de Fresnel-Kirchhoff para el caso de los sistemas telecéntricos, los cuales se caracterizan por tener la pupila de salida situada en el infinito. Sin embargo, en el caso más general en que el valor del número de Fresnel de la geometría de focalización no es idealmente infinito esto no sucede así. En este caso, se demuestra que la estructura del campo difractado sufre una transformación geométrica que podemos modelizar según la acción que ejerce una lente delgada ideal situada sobre el plano focal imagen (Publicación I). Este resultado será determinante para entender el origen del desplazamiento de foco observado en sistemas con número de Fresnel próximo a la unidad.

En el capítulo 3 se estudia el fenómeno del desplazamiento de foco que se produce tanto en sistemas focalizadores clásicos, como en otros que hoy en día toman gran popularidad, como son las placas zonales y las lentes cilíndricas. En primer lugar reconocemos que, según se detalla en la Publicación II, la magnitud del desplazamiento de foco no depende solamente del número de Fresnel de la geometría de focalización, sino

también de la distribución transversal de amplitud en el plano de la pupila. Esta idea es extendida a haces esféricos que, en principio, tienen una extensión transversal ilimitada. Se define entonces un parámetro nuevo, denominado número de Fresnel efectivo en la Publicación III, que permite cuantificar el desplazamiento de foco, relativo a la distancia focal del sistema. A continuación se hace una breve incursión en el fenómeno de desplazamiento de foco que sufren las lentes difractivas, cuando son iluminadas con una fuente láser cuya amplitud transversal sigue una variación gaussiana. Se reconoce que en el caso particular de que la iluminación sea uniforme, no existe tal fenómeno. Sin embargo, cuando la cintura del haz de iluminación cubre un número pequeño de zonas pertenecientes a la lente, se aprecia un efecto de desplazamiento múltiple que es evaluado en primera aproximación (Publicación IV). Por último, se analiza el comportamiento en difracción a lo largo del eje de un haz cilíndrico truncado por una abertura rectangular, el cual se presenta en la Publicación V. Además de encontrar un efecto de desplazamiento de foco, ya observado por otros investigadores, se cuantifica su magnitud y, bajo ciertas condiciones relativamente generales, se encuentra que este desplazamiento se produce en la dirección opuesta a la pantalla difractiva. Este nuevo efecto es denominado desplazamiento de foco en sentido inverso.

En el capítulo 4 hacemos una extensión de los resultados obtenidos en difracción y formación de imágenes para el caso de objetos con estructura tridimensional. Bajo la aproximación de Born a primer orden es inmediato reconocer que los sistemas telecéntricos son los únicos que poseen un comportamiento lineal e invariante a desplazamientos tridimensionales. No será difícil deducir, a partir de los resultados hallados hasta ahora, las expresiones que dictan el comportamiento en difracción de los sistemas confocales de barrido. Estos dispositivos, que demuestran ser altamente eficaces en la formación de imágenes tridimensionales, pueden trabajar tanto en el modo de transmisión como de reflexión, y se caracterizan porque tanto el sistema de iluminación como el de colección que lo forman, juegan papeles totalmente equivalentes e independientes entre sí. Finalmente se evalúa la respuesta en difracción del sistema confocal de barrido, en el modo de reflexión, cuando el número de Fresnel de la geometría de focalización es cercano a la unidad. Tal y como se espera, encontramos un comportamiento asimétrico respecto al punto focal geométrico, donde ya no se localiza el máximo de irradiancia axial, sino que se ha desplazado sobre el eje hacia el sistema óptico.

El capítulo 5 se dedica a la presentación de una serie de técnicas novedosas en microscopía confocal que si, bien no tienen un funcionamiento óptimo o bien son impracticables en los sistemas convencionales, proporcionan resultados realmente sorprendentes en este campo. En la Publicación VI se diseña toda una familia de filtros pupilares binarios de estructura anular que logran un efecto superresolvente tridimensional en sistemas ópticos convencionales, pero que adquieren un comportamiento óptimo en los

sistemas confocales de barrido. En segundo lugar se propone en la Publicación VII el uso de la apodización complementaria, entendida como la elección de dos filtros pupilares distintos, cada uno situado en uno de los subsistemas que componen la arquitectura confocal, de tal modo que individualmente generen un efecto superresolvente a lo largo de una dirección determinada, pero que en el sistema confocal se complementen y resulte un efecto superresolvente tridimensional. En la Publicación VIII enfocamos la idea general de la apodización complementaria desde otro punto de vista, en lo que hemos dado en llamar la apodización asimétrica. A través del uso de filtros de fase generamos en el sistema de iluminación y colección una respuesta unidad en difracción que, individualmente, es asimétrica respecto al punto focal geométrico, pero que en conjunto adquiere una estructura simétrica superresolvente. Tal y como aparece reflejado en la Publicación IX, esta estructura asimétrica puede obtenerse simplemente mediante un ligero desajuste de los dos brazos de la configuración confocal. Con el uso adecuado de filtros de estructura anular es posible conseguir un efecto superresolvente óptimo a lo largo del eje óptico, con el objetivo de mejorar la capacidad de seccionado óptico del sistema confocal. Por último, se ha ideado una técnica de filtrado óptico, denominada de interferencia destructiva, mediante la cual es posible provocar un efecto de superresolución axial con la utilización de apodizadores que proporcionan una distribución de irradiancia que se anula en el foco geométrico. Mientras que esta técnica resulta inadecuada en sistemas formadores de imágenes convencionales, el desajuste simétrico en el microscopio confocal lo transforma en un dispositivo superresolvente en la dirección axial.

Por último, en las conclusiones generales, expuestas en el capítulo 6, se comentan sucintamente los logros alcanzados y se mencionan las perspectivas de futuro que ofrece este trabajo.

Capítulo 2

Formación de imágenes con objetos planos

Ya a finales del siglo XIX se comprendió que los sistemas ópticos formadores de imágenes no son capaces de reproducir fielmente la distribución de luz emitida por una cierta muestra bajo observación debido esencialmente al fenómeno de la difracción. Cada punto luminoso del objeto se proyecta geoméricamente sobre su punto conjugado en el plano imagen generando una mancha de difracción. Se observó que esta distribución de irradiancia, para un sistema libre de aberraciones, era igual en todos los puntos del plano imagen, la cual caracteriza unívocamente el comportamiento en difracción del sistema óptico, y se denomina respuesta unidad del sistema.

Para su evaluación teórica se han empleado principalmente dos formulaciones diferentes (Stamnes 1986). En primer lugar nos encontramos con la desarrollada por Debye, que es la más utilizada para caracterizar los sistemas formadores de imágenes, mientras que la formulada por Kirchhoff se emplea sistemáticamente en problemas de difracción más generales. Aunque se ha demostrado que ambas propuestas proporcionan resultados equivalentes en la determinación de la respuesta unidad de sistemas ópticos formadores de imágenes convencionales, se ha encontrado que cuando la abertura del sistema disminuye, o su longitud focal aumenta drásticamente, existen discrepancias significativas entre ambas teorías.

El objetivo de este apartado es resaltar los postulados básicos en los que se basan las formulaciones de Debye y de Kirchhoff, así como encontrar las condiciones en las que éstas son aplicables. De hecho, demostraremos que existe una transformación geométrica relativamente sencilla que las conecta matemáticamente, basada en conceptos de formación de imágenes proporcionada por la Óptica Geométrica, la cual aporta sin ningún género de dudas una comprensión del problema nunca vista hasta ahora.

2.1 Difracción con objetos planos

Antes de comenzar el estudio de la formación de imágenes de los sistemas ópticos, es conveniente reseñar algunas de las propiedades más importantes del proceso de propagación de la luz monocromática a través del espacio libre. Ello nos permitirá, por un lado, fijar el criterio de notación a seguir en esta Memoria y, por otro lado, establecer las hipótesis de partida sobre las que se basa la teoría que sustenta nuestro estudio.

Comencemos por considerar un haz escalar monocromático, que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje z , al que denominamos eje óptico, y cuya distribución de amplitud en un plano transversal dado, $z = z_c$, está determinada por la función $U_o(\mathbf{r})$, con $\mathbf{r} = (r, \theta)$ en coordenadas circulares. Partiendo de la fórmula de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld (Goodman 1968, capítulo 3), e imponiendo que el haz escalar sea esencialmente paraxial, podemos aplicar la aproximación de Fresnel para obtener la distribución de amplitud en cualquier otro plano transversal a la dirección de propagación, esto es,

$$U(\mathbf{r}, z) = U_o(\mathbf{r}) \otimes_2 h(\mathbf{r}, z - z_c) , \quad (2.1)$$

donde el símbolo \otimes_2 representa la operación de convolución 2D sobre las coordenadas transversales, mientras que la función 3D¹

$$h(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\left(i\frac{k}{2z}r^2\right) , \quad (2.2)$$

es proporcional a aquella que describe la distribución en amplitud de una onda esférica paraxial centrada en el origen de coordenadas, donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de ondas, representa la respuesta unidad en amplitud asociada a la propagación libre.

Es importante resaltar que las diferentes distancias axiales presentes en las ecuaciones de esta Memoria están orientadas. Es por ello que, por ejemplo, la ec. 2.1 no sólo describe el campo real difractado por la distribución $U_o(\mathbf{r})$, sino que también permite determinar la distribución de amplitud correspondiente a sus patrones de difracción virtuales, para los que la cantidad $z - z_c$ es negativa (Knopp y Becker 1978). Una situación diferente, es aquella en la que la luz viaja en el sentido negativo del eje óptico. En este caso, la ec. 2.1 sigue siendo válida, con la salvedad de que la expresión de la respuesta unidad asociada a la propagación libre, dada en la ec. 2.2, ha de sustituirse por la función $h(\mathbf{r}, -z)$. Este hecho nos será de gran utilidad a la hora de establecer el comportamiento en difracción de los microscopios confocales de barrido trabajando en los modos de transmisión y reflexión.

¹Por comodidad, hemos eliminado el factor de fase lineal $\exp(ikz)$, hecho que sucede de forma natural al obtener la solución de la ecuación de ondas paraxial (Siegman 1986, capítulo 16)

2.2 Formación de imágenes en la representación integral de Debye

Consideremos un sistema óptico coherente formador de imágenes lineal e invariante a desplazamientos (LSI²) 2D cuya pupila de salida está apodizada por un filtro de transmitancia en amplitud no uniforme, $t(\mathbf{r})$ (Jacquinot y Roizen-Dossier 1964). Dada la extensión finita del filtro pupilar, siempre se puede encontrar una región circular de radio a centrada sobre el eje óptico de tal manera que fuera de ella la transmitancia en amplitud sea nula. Para determinar el campo electromagnético que forma este sistema óptico limitado por la difracción sobre el plano imagen de un objeto plano, cuya transmitancia en amplitud viene dada por la función $o(\mathbf{r})$, hay que tener en cuenta que la distribución de amplitud sobre el plano de la pupila de salida del sistema, $U_o(\mathbf{r})$, se puede expresar, en la aproximación paraxial, como (Martínez-Corral 1993)

$$U_o(\mathbf{r}) = \frac{1}{-i\lambda s} \exp\left(-i\frac{k}{2s}r^2\right) t(\mathbf{r}) \tilde{o}_g(-\mathbf{r}/\lambda s), \quad (2.3)$$

donde s es la distancia axial entre el plano pupilar y el plano imagen. La función $\tilde{o}_g(-\mathbf{r}/\lambda s)$ representa la transformada de Fourier 2D, debidamente escalada, de la función

$$o_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{M_o} o\left(\frac{\mathbf{r}}{M_o}\right), \quad (2.4)$$

la cual describe la distribución de amplitud correspondiente a la imagen geométrica del objeto, siendo M_o el aumento lateral del sistema.

Esta distribución de amplitud genera, por propagación libre, la imagen geométrica del objeto en el plano conjugado de éste a través del sistema óptico. Este plano es perpendicular al eje óptico y contiene al punto donde focaliza la onda esférica $\exp(-ikr^2/2s)$. En los planos adyacentes se localizan las diferentes imágenes desenfocadas del objeto, las cuales, junto a la imagen en foco, constituyen la denominada imagen tridimensional del objeto. Para determinar la distribución espacial de amplitud en cada uno de estos planos transversales, es usual hacer uso de la representación integral de Debye (Born y Wolf 1980, sección 8.8). Es comúnmente aceptado que esta representación integral, que describe la distribución espacial de amplitud en el volumen imagen como una superposición de ondas planas, cuyos vectores de propagación caen dentro del cono geométrico definido por el punto axial del plano imagen y el borde de la pupila de salida, de radio a , describe con exactitud el campo difractado siempre que

²del inglés *Linear Shift-Invariant*

se satisfaga que $a^2/\lambda s$ es infinito³ (Wolf y Li 1981; Stamnes y Spielkavik 1981). A la cantidad

$$N = \frac{a^2}{\lambda s} , \quad (2.5)$$

que representa el número de zonas semiperiódicas de Fresnel que cubre la pupila de salida, vista desde el punto axial del plano imagen, se le denomina número de Fresnel de la abertura.

Si consideramos, además, que el proceso de formación de imágenes se produce en el marco de la aproximación paraxial, podemos expresar la distribución de amplitud en el volumen imagen como

$$U_D(\mathbf{r}, z) = o_g(\mathbf{r}) \otimes_2 h_D(\mathbf{r}, z) , \quad (2.6)$$

donde (Born y Wolf 1980, sección 8.8, ec. 11)

$$h_D(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(\lambda s)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}_o) \exp\left(-i\frac{k}{2s}zr_o^2\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda s}\mathbf{r}\mathbf{r}_o\right) d^2\mathbf{r}_o . \quad (2.7)$$

La ec. 2.6 indica que, como corresponde a todo sistema formador de imágenes LSI 2D, la distribución de amplitud en un plano transversal cualquiera del volumen imagen viene dada por la convolución 2D entre la imagen geométrica, $o_g(\mathbf{r})$, y la función $h_D(\mathbf{r}, z)$. Reconocemos entonces que esta función $h_D(\mathbf{r}, z)$ es la respuesta unidad en amplitud del sistema óptico apodizado. La ec. 2.7 se puede reescribir de una forma más compacta como

$$h_D(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(\lambda s)^2} \tilde{T}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda s}, \frac{z}{\lambda s^2}\right) , \quad (2.8)$$

donde la función

$$T(\mathbf{r}, z) = t(\mathbf{r}) \exp(-i\pi z r^2) , \quad (2.9)$$

representa la denominada pupila generalizada del sistema óptico, y caracteriza de manera unívoca a las distintas imágenes desenfocadas del objeto.

A partir de las ec. 2.6-2.9, está claro que la estructura del volumen imagen, depende fuertemente, a través del parámetro s , de la posición de la imagen y, por ende, de la posición del objeto. En este sentido es destacable que un cambio en el valor de s

³Esta representación proporciona resultados con gran precisión bajo la premisa de que $a^2/\lambda s \gg 1$, hecho que analizaremos con posterioridad.

no sólo reescalaría el espectro de la pupila generalizada, \tilde{T} , de forma distinta en la dirección axial y en la transversal, sino que reescalaría la función $o_g(\mathbf{r})$ también de forma diferente. Está claro que al llevar a cabo la convolución 2D entre funciones reescaladas de forma distinta se obtiene una imagen 3D cuya estructura ha variado.

Para el caso particular del plano imagen, la distribución de amplitud generada por el sistema óptico toma la expresión

$$U_D(\mathbf{r}, z=0) = o_g(\mathbf{r}) \otimes_2 \frac{1}{(\lambda s)^2} \tilde{t}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda s}\right), \quad (2.10)$$

es decir, la respuesta unidad en foco de un sistema óptico formador de imágenes está caracterizada por la transformada de Fourier 2D de la distribución transversal de amplitud que, salvo aquella que corresponde al espectro del objeto, modula la onda esférica emergente de la pupila de salida del propio sistema y que, para un sistema apodizado, viene dada por la transmitancia en amplitud de la pantalla apodizante.

Por todo lo comentado hasta ahora, parece interesante encontrar la condición suficiente para que un sistema óptico genere la imagen tridimensional del objeto 2D de tal manera que ésta no dependa de la posición del objeto, lo cual parece muy atractivo en el campo de la formación de imágenes de objetos tridimensionales, tal y como veremos en el capítulo 4.

2.3 Sistemas telecéntricos

Consideremos ahora un sistema óptico formador de imágenes LSI 2D que, además, es telecéntrico en el espacio imagen, es decir, cuya pupila de salida se sitúa en el infinito (Gaskill 1978, sección 11.3). Independientemente de cual sea la estructura del sistema telecéntrico, para su análisis podemos modelizarlo con el esquema que se muestra en la fig. 2.1. En este esquema, el diafragma de apertura, de radio r_D , se sitúa en el plano focal objeto de una lente delgada ideal de extensión infinita. Sobre el plano del diafragma se localiza el patrón de Fraunhofer del objeto, iluminado por una onda esférica cuyo foco coincide con el conjugado, a través de la lente, del punto axial del plano imagen. Por tanto, la distribución de amplitud en el plano del diafragma es

$$U_o(\mathbf{r}) = \frac{1}{-i\lambda f} \exp\left(i\frac{k}{2f} \frac{z_c}{f} r^2\right) t(\mathbf{r}) \tilde{o}_g\left(-\frac{\mathbf{r}}{\lambda f}\right), \quad (2.11)$$

donde $t(\mathbf{r})$ representa la transmitancia en amplitud del diafragma de apertura.

Es importante remarcar que en este tipo de sistemas, el número de Fresnel de la

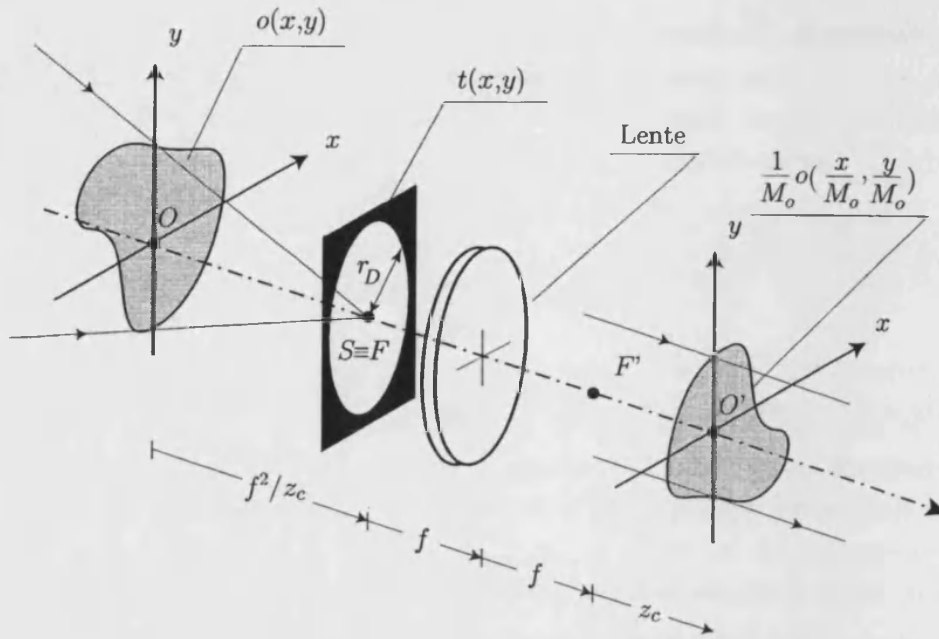


Figura 2.1. Esquema gráfico de la geometría de formación de imágenes en un sistema telecéntrico sobre el espacio imagen.

geometría de focalización en el espacio imagen es infinito. Esto es así porque la cantidad

$$\frac{a^2}{\lambda s} = \frac{r_D a}{f \lambda}, \quad (2.12)$$

es infinita al serlo también el radio de la pupila de salida, a . Está claro entonces que la representación integral de Debye describe con total precisión la distribución de amplitud generada en el espacio imagen, la cual puede expresarse, bajo la aproximación paraxial, como

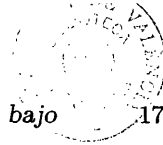
$$U_T(\mathbf{r}, z) = o_g(\mathbf{r}) \otimes_2 h_T(\mathbf{r}, z - z_c), \quad (2.13)$$

donde⁴

$$h_T(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \tilde{T}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda f}, \frac{z}{\lambda f^2}\right). \quad (2.14)$$

Al igual que en el caso general considerado en el apartado anterior, la distribución de amplitud de la imagen tridimensional se obtiene mediante la convolución 2D entre la

⁴Podemos llegar a este resultado de manera directa a partir de la ec. 2.8 y haciendo uso de la igualdad que aparece en la ec. 2.12



2.4. Formación de imágenes en sistemas ópticos con número de Fresnel bajo 17

imagen geométrica, $o_g(\mathbf{r})$, y la respuesta unidad del sistema telecéntrico, $h_T(\mathbf{r}, z - z_c)$ (Streibl 1984). La función $h_T(\mathbf{r}, z)$ se obtiene nuevamente como una versión escalada de la transformada de Fourier 2D de la función pupila generalizada del sistema. Sin embargo, esta escala ya no depende de la disposición sobre el sistema óptico del dúo conjugado objeto-imagen, es decir, de la distancia axial z_c , sino que lo hace únicamente de la longitud de onda de la radiación luminosa λ y de la distancia focal f . Como consecuencia, la respuesta unidad del sistema telecéntrico caracteriza de manera unívoca el proceso de formación de imágenes, independientemente de donde está situado el plano imagen predicho por la Óptica Geométrica.

Por último, resulta conveniente recordar que la respuesta unidad de un sistema óptico está íntimamente relacionada con la capacidad resolutive del mismo. Este concepto, asociado a la capacidad que tienen los sistemas formadores de imágenes para obtener una réplica fiel del objeto (Dekker y Bos 1997), puede ser bien entendido si tenemos en cuenta que el radio del máximo central de la respuesta unidad correspondiente al sistema determina la distancia mínima que han de tener dos puntos cercanos pertenecientes al objeto para poder ser distinguidos. De acuerdo con la ec. 2.14, la respuesta unidad 3D del sistema telecéntrico, y con ello el radio de su lóbulo central, no se verán alterados por una elección arbitraria de la distancia axial z_c , y depende únicamente de la geometría del mismo. Sin embargo, debemos tener en cuenta que $o_g(\mathbf{r})$ es una versión de la transmitancia en amplitud del objeto escalada en una cantidad M_o , que sí depende, en general, de la posición del plano imagen. Es decir, dos puntos del objeto podrán ser discernibles si, sobre la imagen geométrica, están separados una distancia mayor que el radio del lóbulo central de la respuesta unidad del sistema óptico, hecho que depende directamente de la posición del objeto y su imagen. Concluimos entonces que el hecho de poder describir el comportamiento en difracción de un sistema telecéntrico en el espacio imagen con una única función 3D no implica que su capacidad resolutive se mantenga, a su vez, invariable.

2.4 Formación de imágenes en sistemas ópticos con número de Fresnel bajo

Con el propósito de dotar de una mayor generalidad a nuestro estudio, a continuación analizaremos la estructura de la denominada imagen tridimensional de un objeto plano, en el marco de la aproximación paraxial, mediante la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff. En la Publicación I aparece detallado un estudio similar, aunque se encuentra centrado exclusivamente en el caso particular de un objeto puntual situado sobre el eje óptico, por lo que hemos creído conveniente presentar su generalización al

caso de objetos extensos en la redacción de esta Memoria. De este modo, partiendo nuevamente de la distribución de amplitud en el plano de la pupila de salida, $U_o(\mathbf{r})$, representada en la ec. 2.3, y haciendo uso de la fórmula de la difracción dada por la ec. 2.1, se obtiene

$$U(\mathbf{r}, z') = U_o(\mathbf{r}) \otimes_2 h(\mathbf{r}, s + z') = \exp\left(i\frac{k}{2(s+z')}r^2\right) \frac{1}{M(z')} \left[\frac{1}{M(z')} o_g\left(\frac{\mathbf{r}}{M(z')}\right) \otimes_2 \mathfrak{h}(\mathbf{r}, z') \right], \quad (2.15)$$

donde z' es la coordenada axial medida desde el punto axial del plano imagen, y

$$M(z') = \frac{s+z'}{s}. \quad (2.16)$$

Observamos que, salvo un factor de fase cuadrático irrelevante en irradiancia, la distribución de amplitud correspondiente a la imagen tridimensional del objeto viene dada por la convolución 2D de una cierta versión de la imagen geométrica escalada por un factor $M(z')$, y la función $\mathfrak{h}(\mathbf{r}, z')$,⁵ la cual representa la respuesta unidad en amplitud del sistema óptico, que viene dada por

$$\mathfrak{h}(\mathbf{r}, z') = \frac{1}{(\lambda s)^2 M(z')} \tilde{T}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda s M(z')}, \frac{z'}{\lambda s^2 M(z')}\right), \quad (2.17)$$

donde se ha hecho uso de la definición de la función pupila generalizada (véase ec. 2.9).

Comparando las ec. 2.6 y 2.15 se deduce que la distribución 3D de amplitud obtenida a partir de la ecuación de la difracción de Fresnel-Kirchhoff, que es válida para cualquier valor del número de Fresnel del sistema, se puede obtener a partir de la representación integral de Debye, esto es,

$$U(\mathbf{r}, z') = \exp\left(i\frac{k}{2(s+z')}r^2\right) \frac{1}{M(z')} U_D\left(\frac{\mathbf{r}}{M(z')}, \frac{z'}{M(z')}\right), \quad (2.18)$$

donde observamos que se diferencian básicamente en tres términos. Por un lado, aparece un factor de fase cuadrático asociado a la distribución transversal en amplitud de una onda esférica cuyo foco se sitúa en el punto axial del filtro pupilar, mientras que por otro lado surge un factor de escala $M(z')$ que afecta a las variables transversales y radial, así como otro término adicional exterior al resto de la expresión. La presencia de este factor de escala da lugar a una reubicación de los diferentes patrones transversales

⁵Es conveniente hacer notar que la existencia del factor de fase cuadrático implica que el sistema óptico no es estrictamente LSI 2D en amplitud (Sheppard 1986). Sin embargo, es posible establecer un modelo LSI 2D para este sistema cuando eliminamos de manera explícita este factor de la ec. 2.15 y, con ello, caracterizar su comportamiento en difracción con la respuesta unidad 3D en amplitud.

de amplitud que se sitúan a lo largo del eje óptico, en comparación con la ordenación predicha mediante la representación integral de Debye (ver fig. 2.2). Sin embargo, el conjunto de patrones transversales de difracción predicho por las dos aproximaciones es, salvo escalas, el mismo.

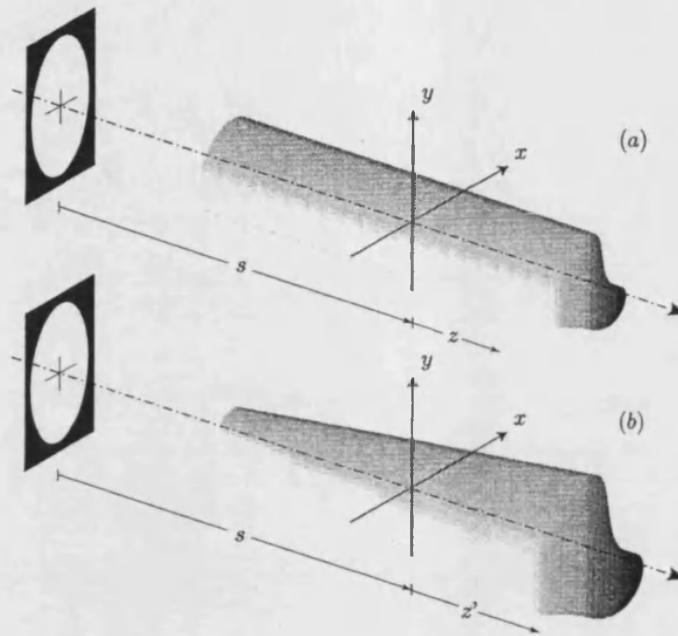


Figura 2.2. Diagrama esquemático de la transformación sufrida por los patrones generados a partir de la representación de Debye (a) que se observa cuando el número de Fresnel de la geometría de focalización es próximo o inferior a la unidad (b).

En lo referente al factor de fase cuadrático, aunque en un primer análisis pueda parecer intrascendente, ya que no afecta a la distribución 3D de irradiancia, constituye la piedra angular que establece la diferencia entre los resultados proporcionados por ambas teorías. Para poner de manifiesto este hecho es conveniente particularizar la ec. 2.15 para el plano imagen, $z' = 0$, resultando

$$U(\mathbf{r}, z' = 0) = \exp\left(i\frac{k}{2s}r^2\right) \left[o_g(\mathbf{r}) \otimes_2 \frac{1}{(\lambda s)^2} \tilde{t}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda s}\right) \right]. \quad (2.19)$$

Si comparamos esta expresión con la ec. 2.10, se comprueba que salvo un factor de fase cuadrático ambas expresiones son iguales (Stamnes y Spielkavik 1981). Es precisamente este factor de fase cuadrático el que permite, por propagación libre, obtener la distribución 3D de amplitudes representada en la ec. 2.15. Sin embargo, nosotros proponemos interpretar este factor como la transmitancia en amplitud de una lente delgada ideal divergente de distancia focal $-s$, y situada en el plano imagen. Basándose

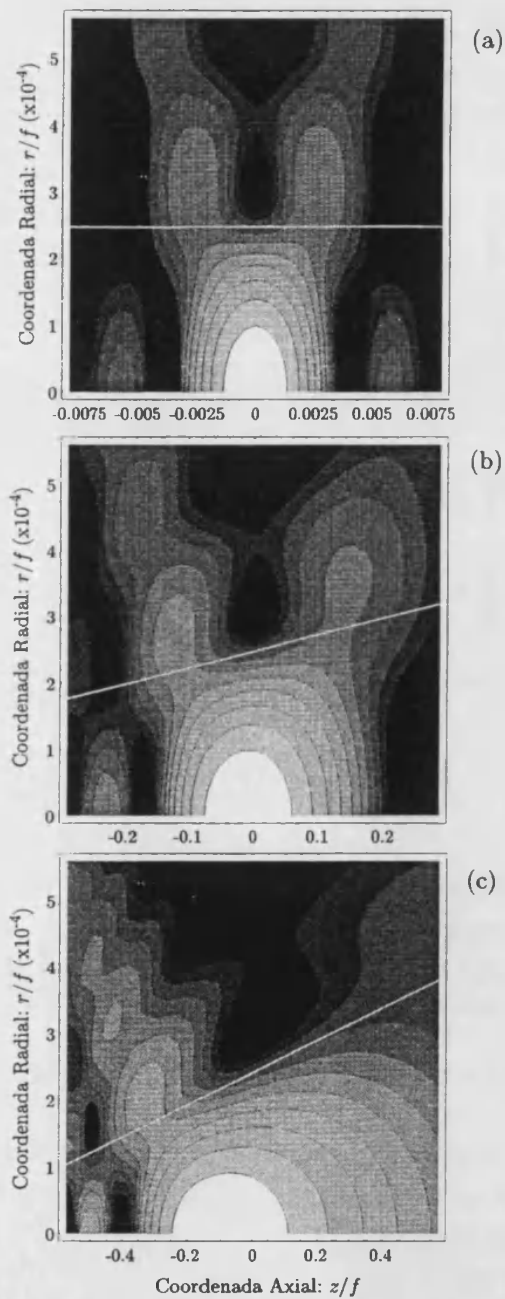


Figura 2.3. Diagrama de isofotas en escala logarítmica correspondiente a la respuesta unidad de un sistema óptico convencional con una pupila circular de radio $a = 1\text{mm}$ para números de Fresnel ($\lambda = 500\text{nm}$): *a*) altos ($N = 500$), *b*) moderados ($N = 10$), y *c*) bajos ($N = 3$). La línea continua blanca que aparece en los gráficos contiene al punto axial del plano de la pupila de salida.

en esta idealización no es difícil comprobar, con la ayuda de la relación de correspondencia de Gauss $z' = zM(z')$, que la distribución de amplitud de la imagen 3D del objeto plano obtenida a partir de la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff, se puede interpretar como la imagen a través de una lente divergente ideal de la imagen tridimensional obtenida mediante la representación integral de Debye, la cual estará afectada además por el aumento lateral que produce la lente delgada (ver la Publicación I).

2.5 Desplazamiento de foco en haces esféricos: Teoría general

Hasta ahora se ha llegado, entre otras, a la conclusión de que para conocer el proceso de formación de imágenes de un sistema óptico es necesario determinar la respuesta unidad tridimensional que lo caracteriza, es decir, la estructura del campo que de un objeto puntual situado sobre el eje proporciona el sistema óptico apodizado. Dentro de este marco, es posible interpretar alternativamente la respuesta unidad 3D de un sistema óptico como el campo generado al iluminar la abertura apodizante con una onda esférica monocromática cuyo foco se localiza en el punto axial del plano imagen (Sheppard 1986). Esta idea se deduce, a partir de la ec. 2.3, del hecho de que un objeto puntual tiene una distribución espectral uniforme. Más aún, el conocimiento de la estructura del campo formado por la difracción de un haz esférico trasciende a otros ámbitos de la Óptica, tales como, por ejemplo, aquellos que hacen uso de la tecnología láser para focalizar la luz sobre un blanco (Mahajan 1983; Corle *et al.* 1986).

A continuación centramos nuestra atención, tal y como aparece en la Publicación I, sobre la expresión de la respuesta unidad obtenida mediante la fórmula de la difracción de Fresnel-Kirchhoff, que ahora podemos entender como la imagen, a través de una lente divergente ideal, de la respuesta unidad obtenida mediante la representación integral de Debye. Está claro ahora que las relaciones de simetría inherentes a la representación de Debye sufren una clara distorsión. En particular, es bien conocido que en el caso de que la pupila de salida sea real y positiva, es decir, que la curvatura esférica del frente de ondas no sufre desviación alguna tal y como ocurre en un sistema libre de aberraciones, se cumple que la función $|h_D(\mathbf{r}, z)|^2$ es simétrica respecto al punto axial del plano imagen, donde alcanza su máximo valor (Collet y Wolf 1980). Estas propiedades se pueden escribir matemáticamente como

$$|h_D(\mathbf{r}, -z')|^2 = |h_D(-\mathbf{r}, z')|^2, \quad (2.20a)$$

$$|h_D(\mathbf{r}, z')|^2 \leq |h_D(\mathbf{0}, 0)|^2. \quad (2.20b)$$

Estas simetrías son observables únicamente cuando el número de Fresnel del sistema es alto —idealmente infinito—. Sin embargo, cuando el número de Fresnel se acerca a la unidad, la respuesta unidad en irradiancia del sistema, que ahora viene dada por la función $|\mathfrak{h}(r, z')|^2$, sufre una deformación, tal y como se observa en la fig. 2.3, debido a su dependencia explícita con el factor $M(z')$. En este sentido, cabe destacar que con respecto al factor $M(z')$ que acompaña a las coordenadas espaciales, el efecto final se traduce en una reordenación de los patrones transversales en irradiancia, perdiendo la simetría respecto al punto focal que indica la ec. 2.20. Sin embargo, dado que en dicho punto $M(0) = 1$, lo que se traduce en que el punto focal conserva su posición inicial, el máximo de irradiancia permanece fijo sobre el foco geométrico. Finalmente, el término $M(z')$ exterior, que surge como consecuencia del principio de conservación de la energía (Papoulis 1968), por un lado, acentúa aún más la asimetría de la estructura en irradiancia del campo focal y, por otro lado, provoca un desplazamiento del máximo de irradiancia, dirigido en la dirección donde se encuentra la pupila de salida, que se localiza, en el caso de asimetrías moderadas, sobre el eje óptico del sistema (Erkkila y Rogers 1981).

Por último, es conveniente señalar las causas principales por las que un sistema óptico caracterizado por un número de Fresnel alto —aunque no infinito— parece no experimentar la asimetría predicha. El hecho de que se cumpla la desigualdad $a^2/\lambda s \gg 1$ implica que, por un lado, al estar el patrón de Fraunhofer de la pupila de salida concentrado mayoritariamente en una región del plano imagen en torno al eje óptico dada por la expresión aproximada (Goodman 1968)

$$r \leq \lambda s/a = \rho,$$

el factor de fase cuadrático que lo acompaña, de acuerdo con la ec. 2.19, toma valores próximos a la unidad en dicha región, por lo que puede ser omitido a la hora de calcular la distribución espacial de amplitud en todo el volumen focal, tal y como se hace en la representación integral de Debye (Li y Wolf 1984). Por otro lado, es bien conocido que, bajo esta representación integral, la distribución de irradiancia del haz focalizado se concentra principalmente en planos adyacentes al plano focal que cumplen la condición

$$|z'| \leq \rho^2/\lambda,$$

donde la cantidad ρ^2/λ se suele denominar rango de Rayleigh del haz (Siegman 1986). Si además se cumple que el número de Fresnel de la pupila de salida es mucho mayor que la unidad, se deduce que el campo se concentra en una región del espacio determinado por la desigualdad $|z'| \ll s$ (Wang *et al.* 1995). El posible demostrar que en esta región el factor de escala que afecta a cada patrón transversal obtenido a partir

de la formulación de Debye es próximo a la unidad, $M(z') \approx 1$, además de que la redistribución axial que sufren los mismos es prácticamente inapreciable ($z' \approx z$).

Capítulo 3

Distribución axial de irradiancia en haces focalizados. Desplazamiento de foco

De acuerdo con los resultados presentados en el capítulo 2, hemos podido concluir que cuando un haz focalizado se caracteriza por un número de Fresnel alto, la distribución espacial de irradiancia en la región focal es simétrica respecto del foco geométrico del haz, donde se sitúa el punto de máxima irradiancia. Sin embargo, este máximo se desplaza hacia la abertura difractante cuando el número de Fresnel se acerca a la unidad, fenómeno que comúnmente se denomina desplazamiento de foco. Este efecto, que fue observado por primera vez en el rango de las microondas (Bachynski y Bekefi 1957; Farnell 1957b), se ha encontrado en sistemas con aberturas circulares (Arimoto 1976; Li y Wolf 1981), en sistemas que poseen pupilas con obturaciones interiores (Mahajan 1983; Ojeda-Castañeda *et al.* 1994) y, en general, en arquitecturas focalizantes con cualquier tipo de pantalla difractante (Szapiel 1983; Martínez-Corral *et al.* 1994).

En este capítulo estamos interesados en el cálculo de la magnitud del desplazamiento que sufre el máximo de irradiancia en el volumen focal de un haz focalizado. Dado que este desplazamiento sucede a lo largo de la dirección axial, vamos a centrar nuestro estudio en la distribución de irradiancia que se genera a lo largo del eje óptico del sistema. De esta manera, se obtiene una expresión que permite evaluar, con un alto grado de aproximación, el desplazamiento de foco relativo a la distancia focal del haz (ver también la Publicación II). Además, definimos un nuevo parámetro, que llamamos número de Fresnel efectivo, en una mera extensión al ya obtenido para el haz gaussiano (Carter 1982), que nos indica, por un lado, la capacidad que tiene un haz esférico para desarrollar el fenómeno del desplazamiento de foco y, por otro lado, la magnitud de

este desplazamiento. De esta manera, se presenta un breve resumen de los resultados desarrollados en la Publicación III.

Con el ánimo de extender el estudio del desplazamiento de foco a otros sistemas focalizantes, hacemos una breve incursión en las propiedades del campo difractado por las lentes difractivas, a lo largo del eje óptico, iluminadas con un haz gaussiano plano. En este caso encontramos un fenómeno de desplazamiento de foco múltiple, entendido como aquel efecto que sufre, en conjunto, cada uno de los máximos axiales de una placa zonal (ver Publicación IV). También proponemos una expresión analítica que evalúa su magnitud, independientemente del tipo de lente difractiva escogida. Por último, analizamos el comportamiento axial de los haces cilíndricos truncados por una abertura rectangular, que está ampliamente desarrollado en la Publicación V. Además de encontrar un fenómeno de desplazamiento de foco similar al analizado en los haces esféricos, se infiere que, dependiendo de la geometría de la abertura difractiva, el máximo de irradiancia axial puede dirigirse en la dirección opuesta a la posición de la abertura, resultando en lo que hemos denominado el efecto de desplazamiento de foco en sentido inverso.

3.1 Desplazamiento de foco en haces esféricos

De todo lo comentado hasta ahora se deduce que la aparición del fenómeno del desplazamiento de foco en un sistema óptico depende del número de Fresnel de la geometría de focalización. Por lo tanto, es lógico pensar que la magnitud de dicho desplazamiento debe depender, a priori, de este parámetro. Sin embargo, la transmitancia en amplitud del diafragma pupilar juega también un importante papel a la hora de determinar la estructura del haz en la región focal, lo que implica que también ésta ha de tenerse en cuenta en la determinación del desplazamiento focal.

Como se ha demostrado con anterioridad, el desplazamiento de foco se produce en la dirección axial del sistema, por lo que resulta conveniente particularizar el estudio de la estructura del volumen focal únicamente a aquellos puntos pertenecientes al eje óptico. De esta manera, la distribución de irradiancia axial de un haz focalizado, normalizada por conveniencia a su valor en el origen, se puede expresar, a partir de la ec. 2.17, como

$$I_N(W_{20}) = \left(1 - \frac{2}{N}W_{20}\right)^2 \frac{\left|\int_{-0.5}^{0.5} q_o(\zeta) \exp(-i2\pi W_{20}\zeta) d\zeta\right|^2}{\left|\int_{-0.5}^{0.5} q_o(\zeta) d\zeta\right|^2}, \quad (3.1)$$

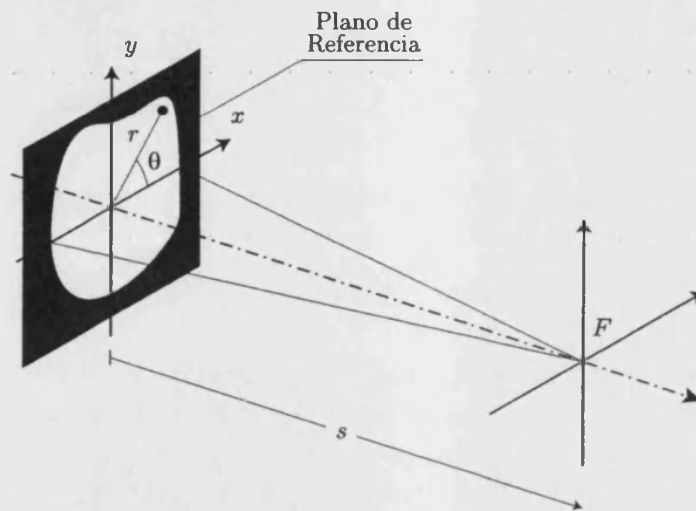


Figura 3.1. Esquema de la geometría de focalización.

donde $q_o(\zeta)$ representa la media azimutal, tras sufrir una transformación geométrica de coordenadas que normaliza su dominio a la región $-0.5 \leq \zeta \leq 0.5$, de la transmitancia en amplitud de la abertura que apodiza la pupila de salida del sistema focalizante. En la ec. 3.1, el parámetro $N = a^2/\lambda s$ representa el número de Fresnel de la abertura (ver ec. 2.5), mientras que la variable adimensional

$$W_{20} = \frac{Nz}{2(s+z)}, \quad (3.2)$$

no es más que el conocido coeficiente de desenfoque (Stockseth 1969).

A partir de la ecuación anterior reconocemos que la distribución axial de irradiancia normalizada del haz focalizado está gobernada por el producto de dos términos que se pueden entender, desde el punto de vista del principio de Huygens-Fresnel, de la siguiente manera. Un primer término, que involucra la transformada de Fourier 1D de la función $q_o(\zeta)$, describe en todo punto axial la interferencia de las distintas ondas esféricas secundarias de Huygens que emergen del plano de la abertura difractante (McCutchen 1964; Martínez-Corral *et al.* 1994). Dado que $q_o(\zeta)$ es una función real y positiva, las ondas de Huygens llegan en fase al foco geométrico y, por lo tanto, el máximo de este término se alcanza en el origen. Sin embargo, conforme las ondas secundarias se propagan, sus amplitudes sufren una atenuación que es inversamente proporcional a la distancia recorrida. Esta atenuación se describe en la ec. 3.1 por el término $(1 - 2W_{20}/N)^2$. Resulta evidente que la competición entre ambos términos produce un desplazamiento del pico de irradiancia axial hacia el plano de la pupila, provocando el efecto de desplazamiento de foco (Givens 1982; Mahajan 1983).

La magnitud de este desplazamiento depende no sólo del valor del número de Fres-

nel de la geometría de focalización, que aparece en el término parabólico exterior, sino también de las dimensiones de la región axial donde la transformada de Fourier 1D de $q_o(\zeta)$ toma valores significativos. Consecuentemente, la función de mérito que determina el desplazamiento de foco ha de depender no sólo del número de Fresnel de la geometría, sino también de un parámetro que evalúe la capacidad del filtro óptico para producir un patrón de irradiancia de variación suave a lo largo del eje, es decir, la habilidad de éste para generar un efecto apodizante axialmente.

Dado que la región de interés del volumen focal se localiza en las proximidades del foco geométrico, podemos hacer un desarrollo en serie de Fourier de la distribución axial de irradiancia normalizada en torno al origen, $W_{20} = 0$, con la ayuda del conocido teorema de los momentos (Papoulis 1968). A partir de esta aproximación parabólica es posible determinar el valor del coeficiente de desenfoque que caracteriza la posición del máximo de irradiancia. Además, gracias a la ec. 3.2 podemos hallar a posteriori la posición del punto de máxima irradiancia axial respecto a la distancia focal, es decir, el desplazamiento de foco relativo, que viene dado por la expresión

$$\frac{z_{max}}{s} = -\frac{1}{\pi^2 (N\sigma)^2}, \quad (3.3)$$

donde σ , que es una magnitud adimensional, representa la desviación estándar de la función $q_o(\zeta)$.

La ecuación anterior nos indica que todo haz focalizado sufre un efecto de desplazamiento de foco que, en primera aproximación, depende únicamente del parámetro $N\sigma$, es decir, del producto entre el número de Fresnel de la abertura y la desviación estándar de $q_o(\zeta)$, la cual puede interpretarse como una medida de la anchura efectiva de la pantalla difractante. Concluimos, entonces, que el producto $N\sigma$ evalúa no sólo el número de zonas de Fresnel de la geometría de focalización, sino también su contribución efectiva en el proceso de generación del patrón axial y, por lo tanto, en la magnitud del desplazamiento de foco.

Concepto de número de Fresnel efectivo

Hasta el momento, hemos analizado el comportamiento en difracción, dentro del volumen focal, de haces esféricos apodizados, es decir, haces con foco en el sentido de la Óptica Geométrica cuya pupila tiene una transmitancia en amplitud de soporte compacto. Sin embargo, se ha observado un efecto de desplazamiento de foco similar en el caso de haces esféricos, cuya extensión transversal puede ser ilimitada. En particular, se encuentra que cuando un haz gaussiano monocromático se focaliza con una lente delgada ideal, el punto de máxima irradiancia no se localiza sobre el foco geométrico

sino que se desplaza hacia la lente (Goubau 1963). Recientemente se ha demostrado que el efecto de desplazamiento de foco está gobernado por el denominado número de Fresnel efectivo (Carter 1982), el cual depende explícitamente de la anchura del haz gaussiano incidente.

En la Publicación III se presenta una formulación analítica que permite evaluar el desplazamiento de foco que sufre cualquier tipo de haz escalar con foco en el sentido de la Óptica Geométrica. Esta formulación, basada en una mera extensión del concepto de número de Fresnel efectivo aplicado a haces gaussianos, nos permite evaluar de una manera sencilla el desplazamiento de foco relativo tanto de haces convergentes como divergentes, apodizados o ilimitados transversalmente.

Con el objetivo de presentar un breve resumen de este trabajo, y siguiendo un razonamiento análogo al anterior, a partir de la ec. 2.17 podemos expresar la distribución normalizada de irradiancia de manera similar a la dada en la ec. 3.1, esta vez en términos de la coordenada axial $u = z/2\lambda s(s+z)$, para después obtener un desarrollo en serie de Taylor. Observamos que esta variable tiene dimensiones de la inversa de área, en oposición a lo que sucede con el coeficiente de desenfoque, hecho que nos va a facilitar el desarrollo matemático a la hora de considerar haces con extensión radial ilimitada. Realizamos entonces una aproximación cuadrática en torno al origen axial, a partir de la cual podemos determinar finalmente el desplazamiento de foco relativo del haz esférico, dado por la expresión

$$\frac{z_{maz}}{s} = -\frac{1}{N_{ef}^2}. \quad (3.4)$$

En la ecuación anterior hemos introducido un nuevo parámetro, denominado número de Fresnel efectivo del haz esférico, definido como

$$N_{ef} = \pi \frac{\sigma}{\lambda s}, \quad (3.5)$$

donde σ representa la desviación estándar de la función $q_o(\xi)$. Hemos de notar que, en esta ocasión, $q_o(\xi)$ está definida en el intervalo $0 \leq \xi < \infty$ y, a diferencia del caso analizado anteriormente, σ tiene dimensiones de área. A consecuencia de ello, aunque la función $q_o(\xi)$ no esté acotada, es posible interpretar σ como la anchura efectiva de esta función. Dicho con otras palabras, σ va a determinar el área efectiva del haz esférico.

Esta importante fórmula, que contempla los resultados obtenidos en la ec. 3.3 para un haz esférico apodizado, indica que todo haz escalar esférico sufre un desplazamiento de foco que, a segundo orden de aproximación, es inversamente proporcional al cuadrado de su número de Fresnel efectivo. Por lo tanto, independientemente del perfil o

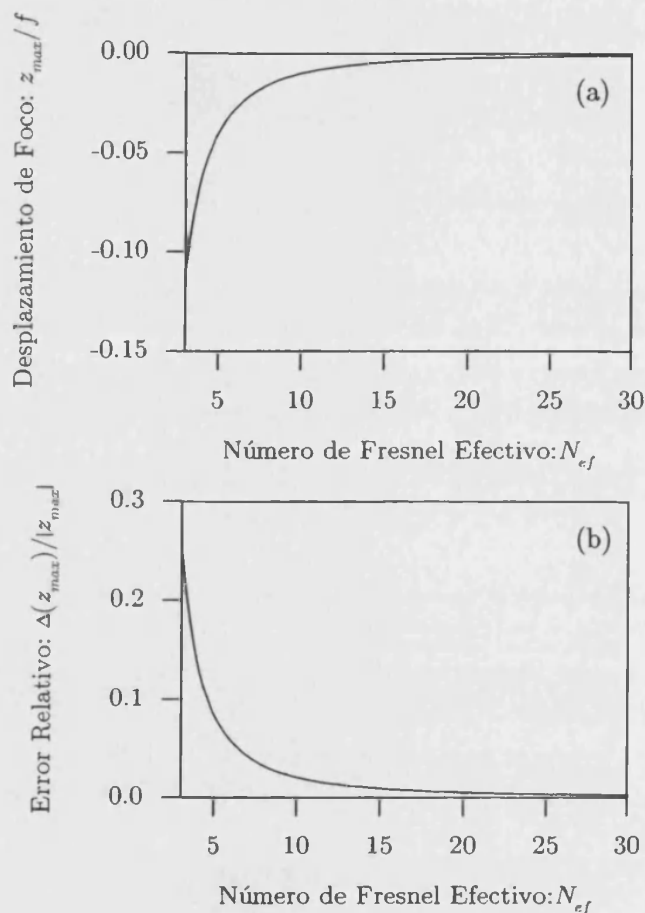


Figura 3.2. (a) Desplazamiento de foco relativo versus el número de Fresnel efectivo y (b) error relativo asociado al desplazamiento de foco determinado por la ec. 3.4 en función del número de Fresnel efectivo del haz esférico.

escala del mismo, y del signo de la distancia focal s , toda pareja de haces que posean el mismo número de Fresnel efectivo exhibirán el mismo desplazamiento de foco.

Como consecuencia del uso de la aproximación parabólica sobre la irradiancia axial se comete un error en la determinación del desplazamiento de foco relativo y de la altura del máximo de irradiancia. Se demuestra que ambos errores dependen exclusivamente del número de Fresnel efectivo del haz esférico. En concreto, para valores moderados de N_{ef} , por ejemplo $N_{ef} \geq 5$, el error cometido en la estimación del desplazamiento de foco relativo es siempre menor del 10%, siendo incluso inferior al 0,1% para valores de $N_{ef} \geq 50$. Sin embargo, cuando $N_{ef} < 5$, el error cometido aumenta vertiginosamente conforme el valor de N_{ef} disminuye.

Con el objetivo de dar un sentido físico al papel que juega este nuevo parámetro en

la construcción del volumen focal, sacamos a colación la interpretación de la formación del patrón axial de irradiancia en términos del principio de superposición de Huygens-Fresnel. Partiendo de este principio, el número de zonas de Fresnel y su contribución relativa son los factores principales que determinan el instante en el que el proceso interferencial de las ondas secundarias de Huygens generan un patrón en torno al foco cuyos valores significativos se hallan en una región donde el término de atenuación no puede ser considerado constante y, como consecuencia, aparece el efecto del desplazamiento de foco. En este sentido, podemos afirmar que, dado que las dimensiones del patrón axial vienen determinadas por la anchura del haz esférico incidente, el número de Fresnel efectivo evalúa en cierta manera el área de la región del haz que interviene de manera significativa en el proceso de formación del patrón axial de irradiancia, y con ello el número efectivo de zonas de Fresnel que contribuyen al mismo.

Ejemplos

Por último, y con el objetivo de ilustrar nuestro formalismo, es posible obtener un resultado analítico para el caso ciertamente interesante de un haz gaussiano esférico que ilumina una abertura circular (Belland y Crenn 1982; Józwicki 1983). Sin embargo, dado el formato escogido para la presente Memoria, resulta conveniente ceñirnos a dos casos particulares de éste que merecen una atención especial. En primer lugar, si asumimos que la anchura del haz incidente ω es mucho mayor que el radio de la pupila circular a , encontramos que el número de Fresnel efectivo, dado por $N_{ef} = \pi a^2 / \sqrt{12} \lambda s \approx 0,9 a^2 / \lambda s$, corresponde al de una abertura circular uniformemente iluminada. Observamos que, salvo un factor constante cercano a la unidad, el número de Fresnel efectivo coincide con el número de zonas semiperiódicas de Fresnel vistas desde el punto focal geométrico, N . En el caso opuesto en el que la abertura circular trunca débilmente el haz gaussiano esférico, puede hallarse el número de Fresnel efectivo que viene dado por

$$N_{ef} = \pi \frac{\omega^2}{\lambda s}. \quad (3.6)$$

Esta expresión coincide con el número de Fresnel que clásicamente se ha atribuido a un haz gaussiano esférico (Carter 1982; Li 1992).

Nuevamente, si sustituimos la ec. 3.6 en 3.4, el desplazamiento de foco relativo de un haz esférico gaussiano viene determinado por $z_{max}/s = -\lambda^2 s^2 / \pi^2 \omega^4$. De hecho, este caso es el único que, bajo nuestro conocimiento, se puede obtener una expresión analítica exacta de la magnitud del desplazamiento de foco relativo —lo cual da idea

de la utilidad de nuestra formulación—, que escribimos como (Carter 1982)

$$\frac{z_{maz}}{s} = -\frac{1}{1 + \pi^2 \omega^4 / \lambda^2 s^2}. \quad (3.7)$$

Esta expresión se diferencia de la ecuación que hemos determinado con nuestra formulación en un sumando constante que aparece en el denominador. Este hecho confirma el resultado anteriormente puesto de manifiesto respecto a que la formulación analítica aquí presente reproduce con gran precisión el desplazamiento del máximo de irradiancia axial para valores moderados de N_{ef} .

3.2 Comportamiento axial de lentes difractivas bajo iluminación gaussiana

En la sección 3.1 se ha realizado un estudio detallado del fenómeno del desplazamiento de foco que sufren los haces esféricos, así como los parámetros de la geometría de focalización que influyen decisivamente en la magnitud del mismo. Aunque el elemento óptico que sistemáticamente se utiliza para conseguir focalizar un haz es la lente refractiva, sin embargo, dada la necesidad continua de miniaturizar los componentes optoelectrónicos, cada vez es mayor el número de aplicaciones ópticas donde estos elementos son sustituidos por las lentes difractivas (Koronkevich y Pal'chikova 1992; Sales y Morris 1997).

Una de las propiedades principales que caracterizan las lentes difractivas es la capacidad que poseen para focalizar la luz incidente sobre diferentes puntos del eje óptico del sistema, denominados focos de la lente (Chmelík 1996). Sin embargo, en el caso particular de una lente difractiva de Fresnel de pocas zonas, bajo iluminación uniforme, se ha observado que los máximos de irradiancia axiales no se sitúan sobre los focos, sino que se hallan desplazados hacia la lente (Jiang *et al.* 1993). Es decir, podemos afirmar que existe un fenómeno de desplazamiento de foco múltiple semejante al observado con haces esféricos. En este contexto, y dado el creciente interés que el estudio de los patrones en irradiancia generados por los haces gaussianos ha suscitado a causa del extenso uso que se hace de la radiación láser (Siegman 1986), nosotros presentamos una formulación analítica, ampliamente desarrollada en la Publicación IV, que permite analizar el patrón axial en irradiancia de lentes difractivas ideales bajo iluminación gaussiana.

Comencemos pues por considerar una lente difractiva circular ideal iluminada por un haz gaussiano plano, el cual posee una cintura dada por ω . En general, es costumbre desarrollar la transmitancia en amplitud de la placa zonal en términos de la coordenada

radial r^2 , sobre la que se exhibe un comportamiento cuasiperiódico de periodo p^2 . Consecuentemente, definimos la función de soporte compacto $a(r^2/p^2)$ que representa la transmitancia en amplitud de la celda unidad normalizada al intervalo $r = [0, 1)$.

Se puede demostrar que el comportamiento axial de una placa zonal circular, bajo iluminación gaussiana, se determina mediante una transformación de Fourier 1D (Lohmann y Paris 1967), de argumento complejo. Haciendo uso de las propiedades de la transformación de Fourier sobre funciones periódicas, la distribución axial de irradiancia así obtenida viene dada por

$$I(N_G) = \left(\frac{N_G}{2\gamma}\right)^2 \left| \tilde{a}\left(\frac{N_G + i}{2\pi\gamma}\right) \right|^2 F(N_G, \gamma), \quad (3.8)$$

donde

$$F(N_G, \gamma) = \frac{\exp(1/\gamma)}{\sin^2(N_G/2\gamma) + \sinh^2(1/2\gamma)}, \quad (3.9)$$

y \tilde{a} es la transformada de Fourier 1D de la función a . Las ecs. 3.8 y 3.9 se expresan en términos de la coordenada axial $N_G = \pi\omega^2/\lambda z$, introducida con anterioridad como parámetro fijo en la ec. 3.6, la cual proporciona el número de Fresnel efectivo asociado a los diferentes patrones de difracción del haz gaussiano (Carter 1982). La distancia z se refiere a la comprendida entre la lente difractiva y el plano donde se observa el patrón de difracción. A su vez hemos introducido un nuevo parámetro adimensional, $\gamma = \omega^2/p^2$, que indica el número de zonas de la lente difractiva que cubre la cintura del haz gaussiano.

A partir de la ec. 3.8, que describe el comportamiento axial de las lentes difractivas bajo iluminación gaussiana para cualquier valor de γ , se deduce que la distribución axial de irradiancia está gobernada por el producto de tres factores. El primero de ellos describe la atenuación de la irradiancia axial inherente a la propagación de las ondas esféricas secundarias emergentes del plano donde se sitúa la lente difractiva. El segundo factor, que podemos denominar término de difracción, tiene en cuenta el efecto de la transmitancia en amplitud de la celda unidad, mientras que el tercero, o término de interferencia, representa las propiedades de focalización de las placas zonales con iluminación gaussiana.

Es interesante notar que este último término tiene una variación análoga a la que presenta, en función de la frecuencia de la onda, la intensidad transmitida por un interferómetro de Fabry-Perot sobre el que incide normalmente una onda plana (Milonni y Eberly 1988, capítulo 11), actuando como un dispositivo pasa-banda. En el caso de la lente difractiva, el término interferencial selecciona una serie de valores de N_G para los que la distribución de irradiancia a lo largo del eje óptico toma valores máximos.

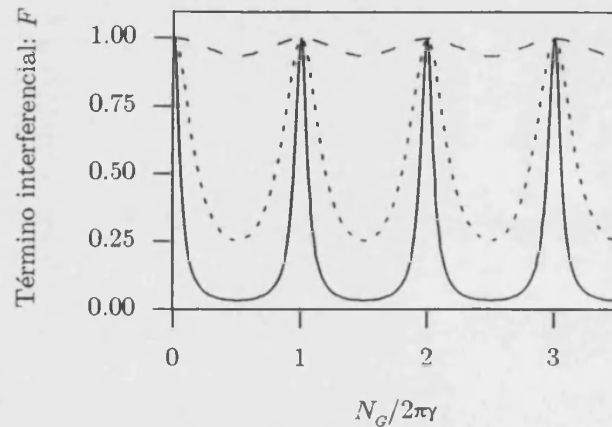


Figura 3.3. Representación gráfica del término interferencial normalizado versus $N_G/2\pi\gamma$ para los siguientes casos: $\gamma = 0.15$ (línea de trazos), $\gamma = 1.5$ (línea de puntos), y $\gamma = 15$ (línea continua).

En la fig. 3.3 representamos el término interferencial, normalizando a la unidad el valor máximo que se alcanza, en términos de una versión escalada del número de Fresnel gaussiano efectivo, $N_G/2\pi\gamma$, para algunos valores del parámetro γ .

A continuación podemos destacar algunas propiedades generales del comportamiento axial de las lentes difractivas en función de γ . En el caso que γ sea mucho mayor que la unidad, lo que implica que la cintura del haz de iluminación cubre un gran número de zonas, la función $\tilde{a}[(N_G + i)/2\pi\gamma]$ se puede aproximar con gran precisión a $\tilde{a}(N_G/2\pi\gamma)$, que tiene una variación suave con N_G para altos valores de γ . Respecto al término interferencial $F(N_G, \gamma)$, observamos que su denominador está dominado por el término $\sin^2(N_G/2\gamma)$ salvo para aquellas posiciones axiales donde éste se anula. Esto sucede cuando el número de Fresnel gaussiano toma los valores $N_n = 2\pi n\gamma$, siendo n un número entero, en cuyo caso la función $F(N_G, \gamma)$ alcanza su máximo valor (ver fig. 3.3). Consecuentemente, $F(N_G, \gamma)$ ofrece una estructura de picos bien definidos localizados a lo largo del eje óptico. La posición de estos máximos se expresa en términos de la variable axial z como $f_n = p^2/2\lambda n$, los cuales coinciden precisamente con las posiciones de los focos de la placa zonal circular.

Sin embargo, la posición de los máximos pertenecientes al término interferencial no coinciden con los máximos locales de la función $I(N_G)$, a causa principalmente del factor exterior $(N_G/2\gamma)^2$. De manera aproximada describimos el comportamiento axial

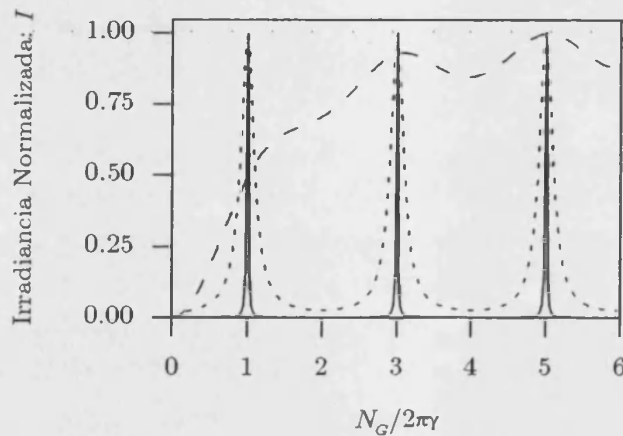


Figura 3.4. Distribución de irradiancia axial normalizada correspondiente a una placa zonal de Fresnel bajo iluminación gaussiana plana. Se han escogido tres valores particulares del parámetro $\gamma = 0.15$ (línea de trazos), 1.5 (línea de puntos), y 15 (línea continua).

de una placa zonal iluminada con un haz gaussiano, en torno al foco de orden n , como

$$I_n(N_G) = |\tilde{a}(n)|^2 \frac{N_G^2}{(N_G - N_n)^2 + 1}, \quad (3.10)$$

donde hemos supuesto que la variación de \tilde{a} es suficientemente suave para considerarla constante en la región focal. A partir de la ec. 3.10 encontramos que las posiciones de los máximos relativos de la distribución axial de irradiancia viene dada por

$$N_{max}(n) = N_n \left[1 + \frac{1}{(2\pi n \gamma)} \right]. \quad (3.11)$$

Cuando el valor de γ es muy alto, es decir, cuando existe un gran número de zonas de Fresnel de la lente difractiva que cubre la cintura del haz gaussiano, los máximos de irradiancia coinciden con los focos de la placa zonal. Sin embargo, cuando γ se aproxima a la unidad, estos máximos sufren un desplazamiento hacia el plano donde se encuentra la placa zonal. Podemos establecer entonces la existencia de un desplazamiento de foco múltiple en las placas zonales iluminadas con haces gaussianos, cuando el valor del parámetro γ es comparable a la unidad. Dicho de otra manera, podemos afirmar que, en relación al estudio realizado en la sección 3.1, el fenómeno del desplazamiento de foco múltiple ocurre cuando el número de Fresnel gaussiano efectivo correspondiente a cada uno de los focos de la lente difractiva tiene un valor bajo próximo a la unidad.

Con el objetivo de ilustrar nuestra formulación, a continuación analizamos brevemente el comportamiento en difracción de las placas zonales de Fresnel bajo iluminación gaussiana. Una placa zonal de Fresnel tiene, por definición, zonas transparentes y opacas de igual área dispuestas alternativamente. En la fig. 3.4 hemos representado la distribución de irradiancia axial normalizada para valores de γ altos ($\gamma = 15$), moderados ($\gamma = 1.5$), y bajos ($\gamma = 0.15$). A partir de estas figuras se evidencia que, tal y como ocurre con el término interferencial $F(N_G; \gamma)$, la anchura de los picos axiales aumenta conforme γ decrece. Es importante hacer notar que el desplazamiento que sufre cada foco de la placa zonal suele ser despreciable en términos de la distancia entre términos adyacentes. En el caso que el valor de γ sea lo suficientemente bajo como para que, según la ec. 3.11 esto suceda así, ocurre un proceso de extinción de los focos de orden más bajo, tal y como observamos en la fig. 3.4 para $\gamma = 0.15$.

3.3 Haces cilíndricos. Desplazamiento de foco en sentido inverso

A lo largo de todo este capítulo se ha llevado a cabo un estudio exhaustivo de los mecanismos que generan el fenómeno del desplazamiento de foco que se encuentra en haces focalizados apodizados y, en general, en cualquier haz esférico no uniforme. También hemos realizado una breve incursión en el fenómeno de focalización con lentes difractivas, para las cuales se reconoce un efecto de desplazamiento de foco múltiple bajo iluminación gaussiana plana.

En esta sección acabamos reconociendo que el efecto del desplazamiento de foco también aparece en sistemas focalizantes con simetría cilíndrica. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, el máximo de irradiancia axial aparece desplazado respecto del foco geométrico en la dirección opuesta donde se sitúa la pantalla difractante. Con el objetivo de analizar este fenómeno, vamos a desarrollar una formulación analítica que describe el comportamiento axial de haces cilíndricos truncados por una abertura rectangular. Este estudio está desarrollado ampliamente en la Publicación V que se acompaña al final de esta Memoria.

Comenzamos considerando un haz plano uniforme y monocromático que ilumina una lente cilíndrica, de distancia focal f_x , la cual produce una curvatura cilíndrica del frente de ondas a lo largo del eje x . No es difícil inferir que para el caso de una lente cilíndrica ideal, es decir, de extensión ilimitada y libre de aberraciones, la distribución axial de irradiancia normalizada a su valor en foco viene dada por $I_N(z) = |f_x/z|$. Por lo tanto, la irradiancia axial se atenúa siguiendo una ley inversa a la distancia

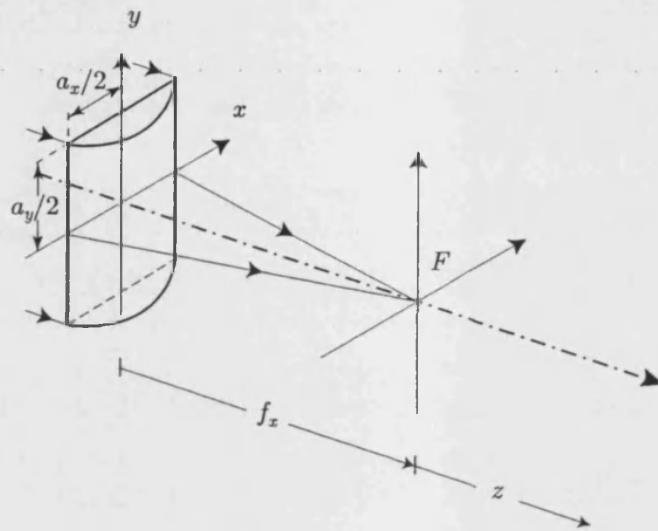


Figura 3.5. Esquema gráfico de la geometría de focalización cilíndrica.

recorrida desde el foco de la lente, $z = 0$. Este hecho lo distingue del caso esférico, cuya distribución axial de irradiancia depende inversamente del cuadrado de la distancia al punto focal, por lo que podemos afirmar que la atenuación que sufren las ondas cilíndricas es menor que la correspondiente a las ondas esféricas (Stamnes 1986, capítulo 5).

Sin embargo, es preciso tener en cuenta el efecto que, sobre el campo difractado a lo largo del eje óptico, tiene la apertura pupilar de la lente focalizadora. En el caso particular de que el truncamiento que sufre el haz a lo largo de la dirección transversal y pueda obviarse, la distribución axial de irradiancia normalizada se puede escribir finalmente como

$$I_N(W_{20}) = \left| 1 - \frac{2W_{20}}{N_x} \right| \left| \int_{-0.5}^{0.5} \exp(-i8\pi W_{20}\zeta^2) d\zeta \right|^2 = \left| 1 - \frac{2W_{20}}{N_x} \right| |\Psi(W_{20})|^2. \quad (3.12)$$

En la ecuación anterior, hemos usado el número de Fresnel de la geometría cilíndrica de focalización, dado por $N_x = (a_x/2)^2 / \lambda f_x$, donde a_x es la anchura de la rendija difractante, el cual tiene en cuenta el número de zonas cilíndricas de Fresnel que cubren la lente vista desde el foco.

A partir de la ec. 3.12 es posible observar que la distribución axial de irradiancia $I_N(W_{20})$ está compuesta, una vez más, por dos factores. El primero de ellos, $|1 - 2W_{20}/N_x|$, describe la atenuación que sufren las ondas cilíndricas secundarias al propagarse desde la pantalla difractante, mientras que el segundo factor tiene en cuenta los efectos de difracción que causa la extensión finita de la pupila a lo largo del eje x , y

que pueden escribirse en función del módulo al cuadrado de la función $\Psi(W_{20})$, que es una función compleja y cuyo módulo es par y máximo en el origen. En el caso que el número de Fresnel N_x sea mucho mayor que la unidad, el término lineal $|1 - 2W_{20}/N_x|$ se mantiene prácticamente constante en la región donde $\Psi(W_{20})$ toma valores significativos, por lo que el máximo en irradiancia se localiza sobre el foco geométrico. Cuando N_x disminuye, la pendiente del término lineal aumenta progresivamente, resultando en un desplazamiento del foco hacia el plano pupilar (Jiang y Stamnes 1997).

A continuación vamos a extender nuestro estudio al caso en el que el haz cilíndrico uniforme considerado está truncado a lo largo de las dos direcciones del plano transversal a la dirección de propagación. Es inmediato obtener la distribución axial de irradiancia normalizada como

$$I_N(W_{20}) = \chi(W_{20}) |\Psi(W_{20})|^2, \quad (3.13)$$

donde

$$\chi(W_{20}) = \frac{1}{|\Psi(N_x T/2)|^2} \left(1 - \frac{2W_{20}}{N_x}\right)^2 \left| \Psi\left(\frac{W_{20} - N_x/2}{1/T}\right) \right|^2. \quad (3.14)$$

Además, hemos introducido la razón de truncamiento de la abertura definida como $T = (a_x/a_y)^2$, donde a_y es la anchura de la abertura rectangular difractante a lo largo de la dirección y . La ec. 3.13 nos indica que el comportamiento axial de las lentes cilíndricas caracterizadas por un valor arbitrario de N_x está gobernado no sólo por el término $|\Psi(W_{20})|^2$, el cual aparece también en la ec. 3.12, sino por la función $\chi(W_{20})$ que describe simultáneamente los efectos de difracción que surgen por la extensión finita de la pupila a lo largo de la dirección y y la atenuación inherente a la propagación ondulatoria.

Con el objetivo de analizar la influencia de la razón de truncamiento de la abertura, T , que aparece explícitamente en el término $\chi(W_{20})$, fijamos un valor del número de Fresnel de la geometría, digamos $N_x = 4$ (ver fig. 3.6). En este caso, cuando T es mucho mayor que la unidad, la función $\chi(W_{20})$ tiende a $|1 - 2W_{20}/N_x|$, por lo que el comportamiento axial dado por la ec. 3.13 queda descrito, de manera precisa, por el patrón axial de irradiancia que proporciona la ec. 3.12, donde no se contemplan los efectos de difracción que surgen del truncamiento del haz incidente a lo largo de la dirección transversal y . Cuando el valor de la razón de truncamiento disminuye, la dependencia lineal de la función $\chi(W_{20})$ aparece modulada por una variación sinusoidal de frecuencia proporcional a T . El patrón axial de irradiancia aparece entonces afectado por esta misma estructura de picos, lo cual hace que la posición del máximo dependa acusadamente del valor de T .

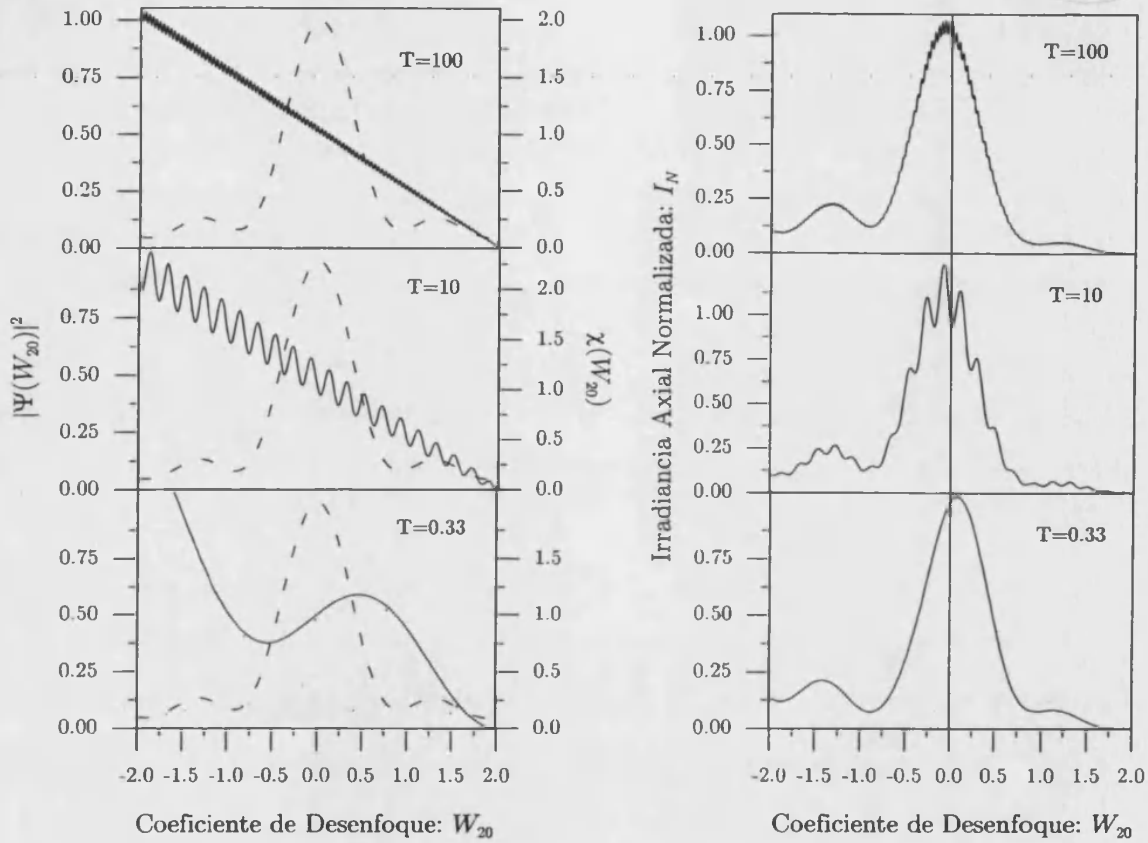


Figura 3.6. Distribución de irradiancia normalizada para un sistema con número de Fresnel bajo, $N_x = 4$. Los valores escogidos para la razón de truncamiento son: $T = 100$, $T = 10$, y $T = 0.33$. A su lado se representan las funciones $\chi(W_{20})$ (línea continua) y $|\Psi(W_{20})|^2$ (línea de trazos) por separado.

En el caso que la razón de truncamiento sea menor que la unidad, por ejemplo, $T = 0,33$, la función $\chi(W_{20})$, que varía de manera suave con la coordenada axial, llega a tener una pendiente positiva en el origen, contrariamente a lo que ocurre con valores altos de T . Cuando esta función se multiplica por el factor $|\Psi(W_{20})|^2$, que es una función par, se obtiene una distribución axial asimétrica cuyo lóbulo central se ha desplazado en dirección opuesta a la lente. Este fenómeno, al que hemos denominado desplazamiento de foco en sentido inverso, parece depender entonces de la escala de $\chi(W_{20})$ y de su pendiente en el origen. En la aparición de este efecto es necesario que, por una parte, la frecuencia de la modulación sinusoidal de $\chi(W_{20})$ sea lo suficientemente baja para que sólo uno de sus lóbulos afecte a la región focal, condición que se cumple cuando T es menor que la unidad, y, por otro lado, la pendiente de $\chi(W_{20})$ sobre el foco, $W_{20} = 0$, sea positiva.

A partir de la ec. 3.14 se observa que, independientemente de los valores de N_x y T , el punto perteneciente a la curva $\chi(W_{20})$ que se sitúa sobre el foco geométrico está determinado por el producto $N_x T$. Por lo tanto, parece posible encontrar un efecto de desplazamiento de foco en sentido inverso para otras geometrías de focalización para las cuales $N_x T$ permanece constante. Hay que tener en cuenta que cuanto menor es N_x , mayor es la pendiente de $\chi(W_{20})$ y, consecuentemente, mayor la magnitud del desplazamiento de foco en sentido inverso. Sin embargo, ante N_x demasiado bajos, T puede crecer tanto que se forma una estructura sinusoidal de alta frecuencia que apantalla dicho efecto.

Por último, el análisis del desplazamiento de foco en sentido inverso llevado a cabo hasta ahora se ha centrado en el caso de que el primer lóbulo de $\chi(W_{20})$ se localice en la región focal. Es evidente que el efecto buscado se logra también cuando otros lóbulos secundarios caen sobre el foco geométrico, de tal manera que se consigue que la pendiente sea positiva. Por lo tanto, mediante una simple variación del producto $N_x T$ es posible controlar el desplazamiento de foco, bien hacia la lente o en sentido inverso.

Capítulo 4

Formación de imágenes con objetos tridimensionales. Sistemas confocales de barrido.

En microscopía convencional, muchos de los objetos que se encuentran bajo observación no pueden considerarse planos, ya que son más gruesos que la profundidad de campo del sistema formador de imágenes. Es posible reconstruir la estructura tridimensional de la imagen mediante un simple barrido axial del plano de observación a través del espacio imagen. Así se obtiene información proveniente de las distintas secciones del objeto que se sitúan secuencialmente sobre el plano conjugado correspondiente.

Sin embargo, el patrón de difracción generado sobre el plano de observación proviene no sólo del plano objeto conjugado, sino también de los adyacentes a éste, lo cual provoca una distorsión de la información así obtenida. Este hecho se encuadra en un conjunto de limitaciones fundamentales que tienen los campos difractados tridimensionales, y que provienen de las restricciones que impone la ecuación de ondas (McCutchen 1964; Lohmann 1978). De esta manera, podemos afirmar que no es posible obtener una imagen 3D perfecta, incluso considerando el caso ideal de un sistema óptico que genera imágenes gaussianas ideales (Frieden 1967; Streibl 1985).

En las últimas décadas se han diseñado diversas arquitecturas que permiten una notable mejora en la capacidad de seccionado óptico de los sistemas formadores de imágenes. En este sentido, destacamos que desde principios de esta década ha tomado gran auge la denominada configuración confocal que, por medio de un sistema de iluminación anisótropo y un barrido electrónico, permite incrementar la discriminación de la información proveniente de los planos situados fuera de foco.

En esta sección vamos a obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento en

difracción de objetos 3D, así como el campo que generan en el espacio imagen de un sistema óptico convencional. En concreto, demostraremos que los denominados sistemas telecéntricos son los únicos LSI 3D, asumiendo como válida la aproximación de Born a primer orden. A continuación construiremos un microscopio confocal como combinación de dos sistemas telecéntricos y un dispositivo de barrido sobre el que colocamos la muestra 3D bajo observación. Su respuesta en difracción, tanto en el modo de transmisión como en el de reflexión, vendrá dada por el producto de dos funciones independientes, asociadas a las respuestas unidad en amplitud de ambos sistemas telecéntricos. En última instancia, analizaremos brevemente el comportamiento en difracción de los dispositivos confocales de barrido, trabajando en el modo de reflexión, formados por sistemas ópticos con un número de Fresnel bajo. En analogía a los sistemas convencionales, observaremos la existencia de un efecto de desplazamiento de foco a lo largo del eje óptico.

4.1 Difracción con objetos tridimensionales

Consideremos un objeto de grosor no despreciable que está iluminado por un haz escalar monocromático de longitud de onda λ . Con el objetivo de simplificar la teoría que describe el comportamiento en difracción de los objetos tridimensionales, vamos a suponer que éstos están formados por puntos cuasi transparentes que actúan como fuentes emisoras secundarias de luz coherente, de tal manera que la luz difractada por cada punto del objeto 3D situado en un plano z_o no interacciona con parte alguna del objeto que se encuentra en el semiespacio $z > z_o$ (Streibl 1984). El hecho de asumir esta aproximación, denominada aproximación de Born a primer orden (Streibl 1985), implica que la radiación que ilumina el objeto 3D se difracta únicamente una vez dentro del objeto y, como consecuencia, en un plano posterior se observa sólo la interferencia de la luz incidente no difractada con la difractada una única vez. Estas hipótesis también se suelen emplear en el análisis de hologramas de volumen (Smith 1969, capítulo 4).

La distribución del campo electromagnético que proviene de la radiación difractada una única vez se obtiene entonces como la superposición de las distintas contribuciones de cada sección elemental del objeto 3D. Bajo estas suposiciones, podemos establecer que la distribución transversal de amplitud compleja que difracta una sección dada del objeto tridimensional, situada en $z = z_o$, de acuerdo con las condiciones de contorno de Kirchhoff (Goodman 1968, capítulo 3), viene dada por

$$U_o(\mathbf{r}_o, z_o) = o(\mathbf{r}_o, z_o) b(\mathbf{r}_o, z_o) , \quad (4.1)$$

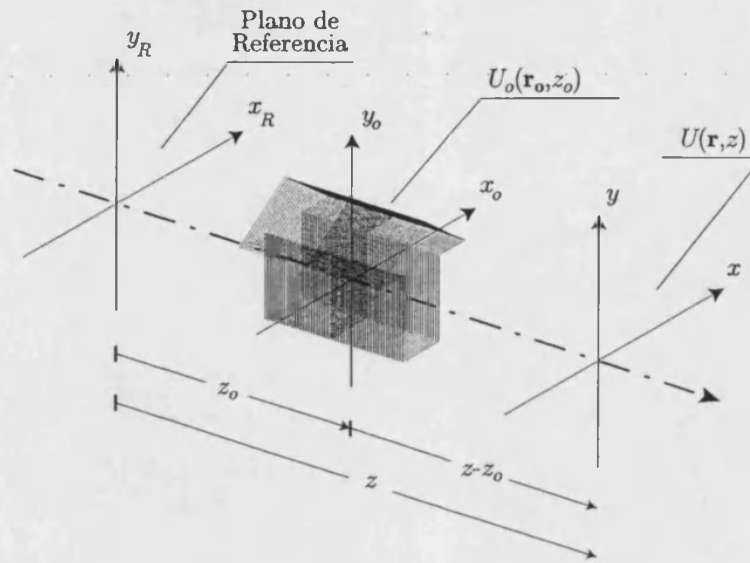


Figura 4.1. Esquema de la formación del patrón de difracción que se genera, por propagación libre, a partir de las diferentes secciones que componen el objeto 3D.

donde el objeto 3D está caracterizado por una distribución de amplitud difractante dada por $o(\mathbf{r}, z)$, y $b(\mathbf{r}_o, z_o)$ es la distribución transversal de amplitud del haz incidente de iluminación sobre el plano considerado.

El patrón de difracción generado por propagación libre en un plano arbitrario situado a una distancia z del plano de referencia que tomamos como origen de coordenadas, ver fig. 4.1, viene dado por la superposición coherente de los patrones de difracción generados en ese plano que provienen de las diferentes secciones transversales que forman la distribución 3D de la componente difractante del objeto dada en la ec. 4.1, y que expresamos como (Zapata-Rodríguez 1997)

$$U(\mathbf{r}, z) = U_o(\mathbf{r}, z) \otimes_3 h(\mathbf{r}, z) , \quad (4.2)$$

donde, recordemos, $h(\mathbf{r}, z)$ es la respuesta unidad 3D asociada a la propagación libre (ec. 2.2). En la ecuación anterior, que puede interpretarse como una generalización al caso 3D de la ec. 2.1, se ha ignorado la contribución proveniente de la radiación incidente que no se difracta, lo cual resulta válido cuando se trabaja en condiciones de campo oscuro donde la radiación directa (no difractada) no contribuye a la formación del patrón de difracción de Fresnel.

Es importante enfatizar que, bajo las hipótesis de la primera aproximación de Born, la difracción de objetos tridimensionales es un proceso lineal e invariante a desplazamientos 3D (LSI 3D), tal y como pone de manifiesto la relación de convolución de la

ec. 4.2. Es por ello que, en este caso, podemos seguir denominando respuesta unidad 3D en amplitud a la función $h(r, z)$.

4.2 Sistemas formadores de imágenes lineales e invariantes a desplazamientos tridimensionales

Es evidente que las limitaciones que hemos de imponer a un sistema óptico diseñado para formar imágenes de objetos tridimensionales deben ser más restrictivas que las de sus homólogos 2D. De hecho, un objeto plano no es más que un caso particular de objeto tridimensional, cuyo grosor es infinitesimal, por lo que podemos afirmar que todo sistema formador de imágenes 3D es capaz de formar la imagen de un objeto 2D. Sin embargo, la afirmación inversa no es cierta, es decir, no podemos afirmar que un sistema formador de imágenes 2D sea capaz de generar imágenes 3D.

La lente delgada ideal es un claro ejemplo de sistema óptico que, en un determinado plano del espacio imagen, genera una distribución transversal de amplitud que, salvo un factor de fase cuadrático, corresponde a una réplica exacta de la componente difractante en amplitud del objeto, su imagen geométrica, escalada en una cantidad M_o constante sobre todo el plano (Gaskill 1978, sección 10.6). Sin embargo, la posición del objeto determina tanto la disposición sobre el eje óptico del plano imagen como el aumento lateral M_o que sufre la imagen 2D. En el caso de que el objeto se considere tridimensional, en el plano de observación vamos a obtener una distribución de amplitud correspondiente a la imagen geométrica de la sección del objeto dispuesto en el plano conjugado, ligeramente distorsionada por la luz difractada que proviene de otras secciones del mismo. En el proceso de reconstrucción de la imagen 3D por medio de un barrido secuencial del plano de observación, a lo largo del eje óptico, se obtiene una distribución espacial de amplitud que, en comparación con la distribución de amplitud compleja difractada por el objeto, ofrece una deformación cónica (ver fig. 4.2). La conclusión final es que un sistema óptico diseñado para obtener imágenes 3D de objetos gruesos, deberá eludir este tipo de deformación y, por tanto, habrá de tener un aumento lateral independiente de la posición de cada sección del objeto.

Adicionalmente al hecho de que ha de exigirse una invariancia en la escala transversal de la imagen geométrica de las diferentes secciones del objeto, hemos de imponer, por las mismas razones aducidas anteriormente, que el aumento axial sea también independiente de la posición axial del plano objeto considerado. Se puede demostrar que estos requerimientos son satisfechos por los sistemas ópticos afocales (Gaskill 1978, sección 11.3). Es por ello que vamos a centrar nuestra atención en el estudio de las

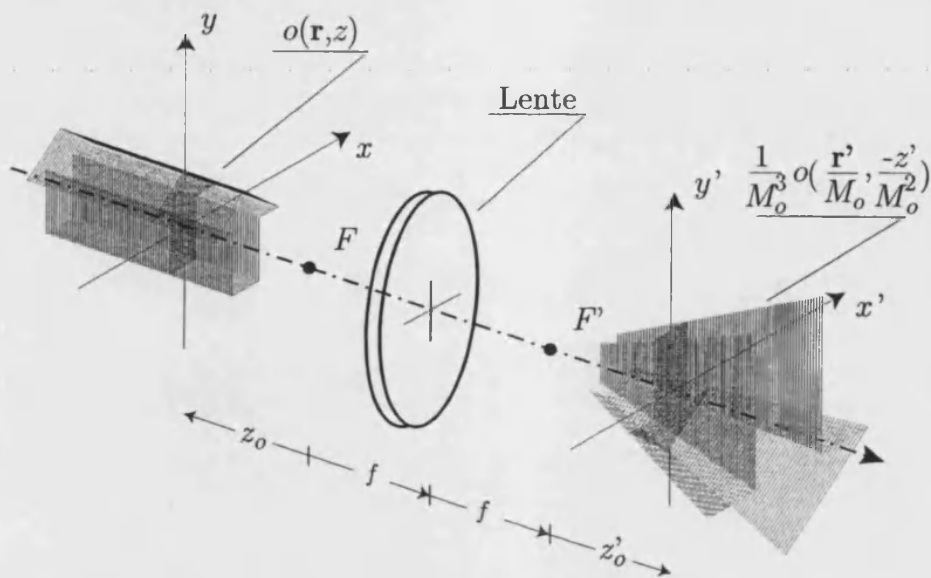


Figura 4.2. Deformación cónica que muestra la imagen 3D reconstruida a partir de un barrido secuencial sobre el espacio imagen.

propiedades de los acoplamientos afocales considerados como sistemas ópticos de formación de imágenes 3D.

Finalmente, hemos de tener en cuenta los efectos de difracción que provoca la presencia de una distribución de amplitud no uniforme en el plano de la pupila de salida. En la sección 2.3 hemos demostrado que los sistemas telecéntricos en el espacio imagen se caracterizan por ser LSI 2D con una respuesta unidad 3D del sistema que es independiente de la posición del plano imagen de observación. En el caso de la formación de imágenes de objetos 3D, cada punto del objeto va a generar, sobre el espacio imagen, un campo electromagnético cuya distribución espacial no va a depender de su posición. Asumiendo la primera aproximación de Born, es posible utilizar el principio de superposición para determinar el campo total generado por difracción en el espacio imagen. Por último, exigimos que el sistema óptico sea afocal para que la imagen geométrica sea una réplica uniformemente escalada del objeto, lo cual implica que el sistema sea telecéntrico también en el espacio objeto. A este tipo de sistemas lo denominaremos de ahora en adelante sistema telecéntrico. Las propiedades de invariancia espacial y linealidad van a permitir caracterizar al sistema telecéntrico como LSI 3D.

Con el objetivo de estudiar con mayor detenimiento el comportamiento en difracción de estos sistemas, consideremos por simplicidad el acoplamiento óptico telecéntrico formado por dos lentes delgadas de distancias focales f y f' (ver fig. 4.3), que incorpora

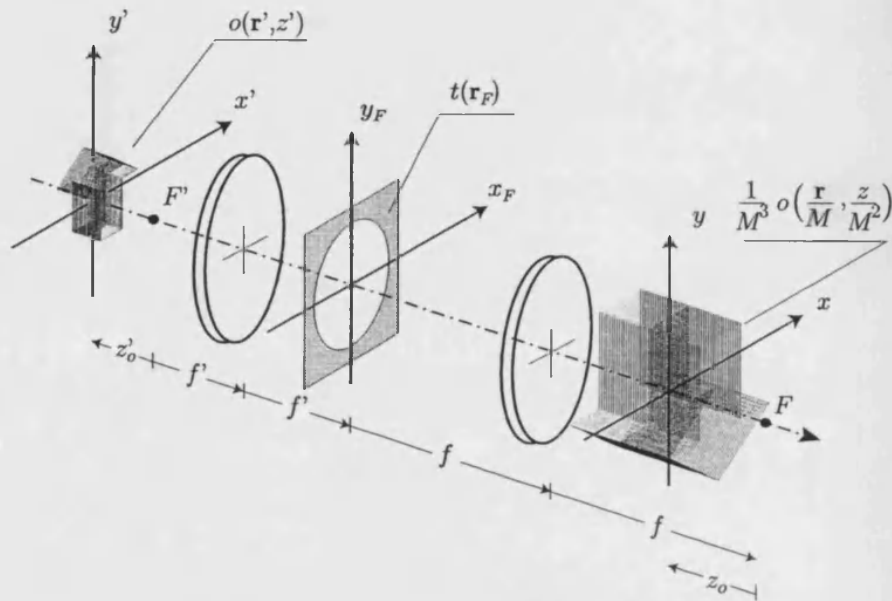


Figura 4.3. Formación de la imagen 3D en un sistema telecéntrico.

un filtro óptico localizado en el espacio intermedio del sistema afocal, justo sobre el plano confocal de las dos lentes. En este caso, las pupilas de entrada y salida se sitúan ambas en el infinito. Para el sistema considerado, tanto el aumento lateral, que viene dado por la expresión $M = -f'/f$, como el aumento axial, M^2 , son magnitudes constantes e independientes de la posición del objeto. Asumiendo iluminación plana, la distribución de amplitud en un plano cualquiera del espacio imagen puede expresarse como (Zapata-Rodríguez 1997, página 18)

$$U(\mathbf{r}, z) = o_g(\mathbf{r}, z) \otimes_3 \mathfrak{h}(\mathbf{r}, z), \quad (4.3)$$

donde $\mathfrak{h}(\mathbf{r}, z)$ es la respuesta unidad 3D en el espacio imagen del sistema telecéntrico, dada en la ec. 2.14, mientras que hemos definido la imagen geométrica 3D como

$$o_g(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{M^3} o\left(\frac{\mathbf{r}}{M}, \frac{z}{M^2}\right), \quad (4.4)$$

que incorpora un factor de normalización $1/M^2$ adicional. Es importante hacer notar que la coordenada axial z tiene su origen en el punto focal imagen de la segunda lente que forma el sistema afocal.

A partir de la ec. 4.3 podemos determinar la distribución tridimensional de amplitud que genera, en el espacio imagen de un sistema telecéntrico, un objeto 3D caracterizado por una distribución de amplitud difractante dada por $o(\mathbf{r}, z)$. Comparando la ec. 4.3 con la ec. 4.2 podemos interpretar la función $U(\mathbf{r}, z)$ como el patrón que generaría

por difracción un objeto 3D caracterizado por una distribución de amplitud difractante $o_g(\mathbf{r}, z)$, iluminado uniformemente, de tal manera que la respuesta unidad 3D en difracción vendría dada esta vez por $h(\mathbf{r}, z)$. Sin embargo, el objeto tridimensional $o_g(\mathbf{r}, z)$, que virtualmente hemos creado, no es más que una versión escalada de $o(\mathbf{r}, z)$, el cual es el único que tiene realidad física. Por consiguiente, resulta conveniente expresar el campo generado por difracción en términos de la distribución espacial de la componente difractante del objeto 3D, $o(\mathbf{r}, z)$. Con este fin, vamos a reescribir el patrón de difracción $U(\mathbf{r}, z)$ como

$$U(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{M} U' \left(\frac{\mathbf{r}}{M}, \frac{z}{M^2} \right), \quad (4.5)$$

donde

$$U'(\mathbf{r}', z') = o(\mathbf{r}', z') \otimes_3 h'(\mathbf{r}', z'). \quad (4.6)$$

Las ecs. 4.5 y 4.6 indican que la distribución espacial de amplitud en el espacio imagen de un sistema telecéntrico no es más que una versión escalada de la función 3D $U'(\mathbf{r}, z)$, siendo dichas escalas constantes, aunque diferentes según se considere la dirección axial o la transversal. Este patrón tridimensional de amplitud se obtiene, una vez más, como la convolución 3D entre la función $o(\mathbf{r}, z)$, entendida como la distribución espacial de luz difractada por el objeto 3D, y la función $h'(\mathbf{r}, z)$, que se define como

$$h'(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(\lambda f')^2} \tilde{T} \left(-\frac{\mathbf{r}}{\lambda f'}, \frac{z}{\lambda f'^2} \right) = M^2 h(M\mathbf{r}, M^2 z). \quad (4.7)$$

No es difícil demostrar que la distribución de amplitud virtual, situada en el espacio objeto y obtenida por propagación libre y acción de las dos lentes del sistema, que generaría $U(\mathbf{r}, z)$ en el espacio imagen corresponde precisamente a la función $U'(\mathbf{r}, z)$. Es por ello que $h'(\mathbf{r}, z)$ constituye la verdadera respuesta unidad 3D en amplitud correspondiente al espacio objeto del sistema telecéntrico.

Consecuentemente, podemos concluir que la distribución tridimensional generada en el espacio imagen de un sistema telecéntrico es una versión anisótropa y uniformemente escalada de la convolución 3D entre la distribución espacial de la componente difractante del objeto grueso y la respuesta unidad 3D del sistema formador de imágenes en el espacio objeto. Atendiendo a las propiedades de la convolución de funciones escaladas (Gaskill 1978), se puede afirmar entonces que los sistemas telecéntricos son LSI 3D bajo las hipótesis de la aproximación de Born a primer orden. De hecho, se puede demostrar que los sistemas telecéntricos son los únicos sistemas formadores de imágenes LSI en tres dimensiones (D.N. Sitter y Rhodes 1990).

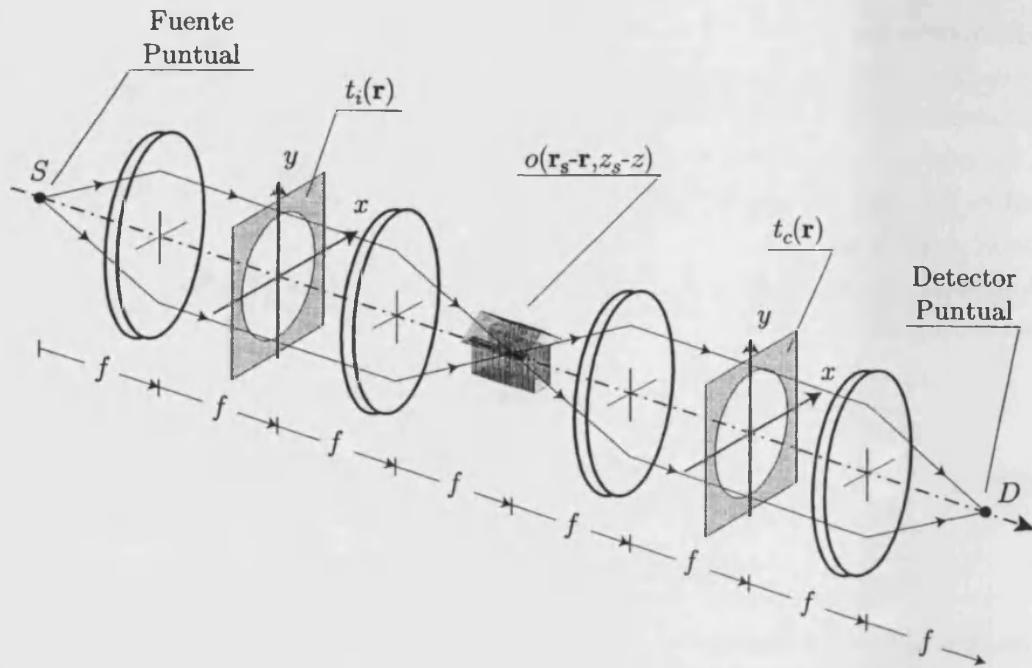


Figura 4.4. Diagrama esquemático de la arquitectura confocal en el modo de transmisión. Por simplicidad, suponemos que todas las lentes que componen el sistema poseen la misma longitud focal.

4.3 Sistemas confocales de barrido

La microscopía confocal de barrido es una tecnología de reciente desarrollo que ha sido ampliamente aplicada en muy diversos campos de la ciencia aprovechando sus ventajas sobre los sistemas de microscopía convencionales (Wilson 1990). Podemos destacar su mayor resolución tridimensional y su fuerte capacidad de seccionado óptico, ya que este sistema óptico es muy selectivo sobre la luz difractada por cada punto del objeto. Esta propiedad para seccionar ópticamente permite una mejora en la formación de imágenes tridimensionales.

En la fig. 4.4 aparece el esquema de un microscopio confocal de barrido en el modo de transmisión. Una fuente puntual emite luz monocromática, de longitud de onda λ , que atraviesa un primer sistema telecéntrico, al que denominaremos sistema de iluminación, que focaliza el haz incidente sobre un punto concreto del objeto tridimensional en observación. La luz emergente transmitida es recogida por otro sistema telecéntrico, denominado sistema de colección, y finalmente es detectada en el punto conjugado con el de la fuente. En el caso de que el detector, situado sobre el eje óptico, sea puntual, el sistema total se hace confocal. De esta manera se logra una notable discriminación

de la luz que procede de los puntos del objeto que están fuera de foco. La información precisa para reconstruir punto a punto la distribución de luz difractada por el objeto 3D se obtiene mediante un barrido secuencial del mismo a través del punto confocal.

Comencemos por deducir las ecuaciones que rigen el comportamiento en difracción de los sistemas confocales de barrido en el modo de transmisión. El objeto que aparece bajo observación se encuentra iluminado por la radiación que procede del sistema telecéntrico de iluminación, el cual se encuentra apodizado por un filtro óptico de transmitancia en amplitud $t_i(\mathbf{r})$. Su distribución espacial de amplitud corresponde a $h_i(\mathbf{r}, z)$, es decir, a la respuesta unidad 3D en amplitud del sistema en su espacio imagen, centrada sobre el punto confocal. La estructura espacial del campo difractado por el objeto tridimensional, una vez desplazado a una posición de coordenadas¹ (\mathbf{r}_s, z_s) , viene dado, de acuerdo con la ec. 4.1, por

$$U_o(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}_s, z_s) = o(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}, z_s - z) h_i(\mathbf{r}, z) . \quad (4.8)$$

Para estimar la influencia que sobre la radiación detectada posee el filtro pupilar, de transmitancia en amplitud $t_c(\mathbf{r})$, que se sitúa en el sistema telecéntrico de colección, resulta más cómodo trasladar conceptualmente dicha influencia al espacio objeto donde, de acuerdo con la ec. 4.6, la distribución 3D virtual de amplitud viene dada por

$$U_t(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}_s, z_s) = [o(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}, z_s - z) h_i(\mathbf{r}, z)] \otimes_3 h'_c(\mathbf{r}, z) . \quad (4.9)$$

El detector puntual situado en el origen de coordenadas del espacio imagen del sistema de colección, es decir, en el foco imagen de la segunda de las lentes que lo componen, detecta una cantidad de irradiancia luminosa que viene determinada por el módulo al cuadrado de la amplitud virtual, generada en el espacio objeto, evaluada en el punto conjugado del detector a través del sistema de colección, $U_t(\mathbf{0}, 0; \mathbf{r}_s, z_s)$. Particularizando la ec. 4.9 para el caso $(\mathbf{r}, z) = (\mathbf{0}, 0)$, finalmente obtenemos una distribución de campo 3D, definiendo la función

$$h_t(\mathbf{r}, z) = h_i(\mathbf{r}, z) h'_c(-\mathbf{r}, -z) , \quad (4.10)$$

como una convolución tridimensional entre la función objeto $o(\mathbf{r}, z)$ y la función $h_t(\mathbf{r}, z)$, es decir

$$U_t(\mathbf{r}_s, z_s) = o(\mathbf{r}_s, z_s) \otimes_3 h_t(\mathbf{r}_s, z_s) . \quad (4.11)$$

La ec. 4.11 nos indica que la distribución tridimensional de amplitud reconstruida por el sistema confocal de barrido no es más que la convolución 3D de la señal de entrada, que en este caso viene dada por la componente difractante del objeto tridimensional,

¹Hemos asumido una inversión en los ejes coordenados que, por una parte, no afecta al resultado final y, sin embargo, facilita su manipulación matemática

$o(\mathbf{r}, z)$, y la función $h_t(\mathbf{r}, z)$. Reconocemos que el sistema confocal de barrido en el modo de transmisión es lineal e invariante a desplazamientos 3D (Sheppard y Cogswell 1990). La propiedad de linealidad se le atribuye a la aproximación de Born a primer orden, mientras que la invariancia a desplazamientos 3D es inherente a los sistemas de barrido (Sheppard y Choudhury 1977). Es por ello que a la función $h_t(\mathbf{r}, z)$ se le denomina respuesta unidad 3D en amplitud del sistema óptico confocal en el modo de transmisión.

Resulta interesante dar una interpretación heurística de la composición de la función $h_t(\mathbf{r}, z)$. De acuerdo con la ec. 4.10, ésta se obtiene como producto de dos funciones 3D independientes, una de ellas correspondiente a la respuesta unidad 3D en amplitud del sistema de iluminación en su espacio imagen, $h_i(\mathbf{r}, z)$, mientras que la otra está asociada a la respuesta unidad del sistema de colección en su espacio objeto, $h'_c(-\mathbf{r}, -z)$. Sin embargo, según la ec. 4.7, y particularizando para este caso donde $M = -1$, esta última función también se puede escribir como $h_c(\mathbf{r}, -z)$, que tiene un significado físico bien claro: esta función corresponde a la respuesta unidad 3D del sistema telecéntrico en el espacio imagen, cuando la luz se propaga en el sentido negativo del eje óptico. Dicho de otro modo, una onda esférica emergente del punto donde situamos el detector puntual, propagándose en la dirección $-z$ a través del sistema colector, proporciona una distribución espacial de amplitud sobre el espacio intermedio del dispositivo confocal, es decir, donde se sitúa el objeto 3D, que viene dado por la función $h_c(\mathbf{r}, -z)$.

Nótese que la interpretación heurística que acabamos de dar de la respuesta unidad 3D del sistema confocal en el modo de transmisión implica, avalado por la ec. 4.10, que tanto el sistema de iluminación como el de colección juegan papeles equivalentes en el proceso de formación de la imagen 3D. Además, la contribución de cada uno de ellos es completamente independiente de la del otro, por lo que existe un grado de libertad mucho mayor para alterar la respuesta en difracción de este sistema formador de imágenes que el correspondiente a los sistemas convencionales.

Cuando el sistema confocal trabaja en el modo de reflexión, la luz que incide sobre el objeto tridimensional se refleja y es conducida por un sistema de colección hacia un detector puntual situado en un punto conjugado al de la fuente a través del sistema total. Aunque no vamos a detallar el proceso de formación de imágenes y su comportamiento en difracción, podemos razonar en términos de la interpretación heurística dada anteriormente para el modo de transmisión con el objetivo de obtener la respuesta unidad 3D del sistema confocal en el modo de reflexión, donde hemos asumido que existe linealidad e invariancia a traslaciones. De esta manera, la respuesta unidad 3D en amplitud va a formarse como el producto de dos funciones independientes: una de ellas correspondiente a la distribución de luz generada por el sistema de iluminación,

en el espacio intermedio, que focaliza la luz proveniente de la fuente puntual sobre el objeto, $h_i(\mathbf{r}, z)$, y la otra perteneciente a la distribución espacial de luz que formaría el sistema de colección sobre el espacio intermedio si desde el punto donde se localiza el detector puntual emergiese una onda esférica, que en este caso está claro que corresponde a la función $h_c(\mathbf{r}, z)$, puesto que la luz reflejada viaja a través del sistema de colección en sentido inverso a como lo hace en el modo de transmisión. Finalmente, la distribución de amplitud que en el proceso de barrido genera el sistema confocal puede describirse, de forma análoga a la ec. 4.11, a través de la operación de convolución

$$U_r(\mathbf{r}, z) = o(\mathbf{r}, z) \otimes_3 h_r(\mathbf{r}, z) , \quad (4.12)$$

donde

$$h_r(\mathbf{r}, z) = h_i(\mathbf{r}, z) h_c(\mathbf{r}, z) , \quad (4.13)$$

es la denominada respuesta unidad 3D en amplitud del sistema confocal en el modo de reflexión.

4.4 Arquitecturas con números de Fresnel bajos

Hasta ahora hemos obtenido el importante resultado siguiente: el sistema confocal de barrido formado por dos sistemas telecéntricos, uno de iluminación y otro de colección, es LSI 3D bajo la aproximación de Born a primer orden. En este sentido, hemos de insistir que el sistema es invariante a desplazamientos 3D por el mero hecho de formar la imagen 3D a partir de un proceso de barrido electrónico. Sin embargo, en el caso de sistemas convencionales, debíamos exigir que el sistema fuese telecéntrico para poder considerarlo LSI 3D. Concluimos entonces que no es necesario imponer, en microscopía confocal de barrido, que los sistemas de iluminación y colección sean telecéntricos, es decir, afocales. De hecho, el capítulo 2 hemos demostrado que las funciones $h_i(\mathbf{r}, z)$ y $h_c(\mathbf{r}, z)$, asociadas a las respuestas unidad 3D de los sistemas de iluminación y colección, pueden seguir siendo descritas mediante la representación integral de Debye exigiendo únicamente que el número de Fresnel de las geometrías de focalización sea mucho mayor que la unidad.

En la actualidad se encuentran aplicaciones en microscopía confocal de barrido, trabajando en el modo de reflexión, donde en número de Fresnel de la geometría de focalización es cercano a la unidad (Corle *et al.* 1986; Tiziani *et al.* 1996; Hessler y Kunz 1997). Por lo tanto creemos necesario un estudio complementario de estas nuevas configuraciones, el cual será tratado a continuación de forma heurística.

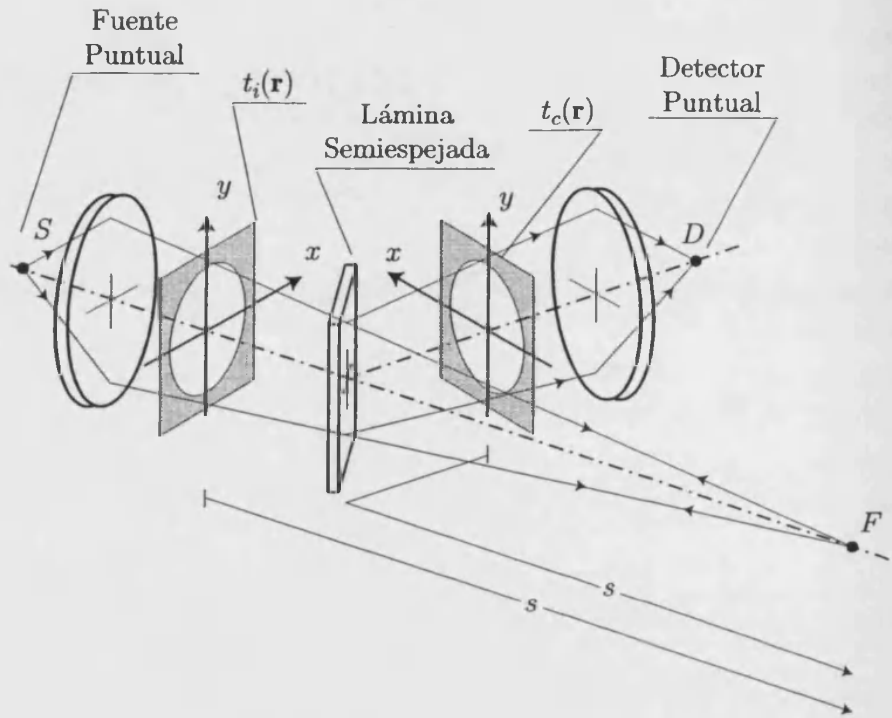


Figura 4.5. Sistema confocal de barrido en el modo de reflexión trabajando con geometrías de focalización caracterizadas por números de Fresnel bajos.

Supongamos que el sistema de iluminación del microscopio confocal de barrido está proporciona un haz esférico uniforme que se encuentra apodizado por un filtro pupilar de transmitancia en amplitud $t_i(\mathbf{r})$. Asumimos que el foco geométrico de dicho haz esférico se sitúa en un punto que, localizado a una distancia s del filtro pupilar que lo apodiza, es conjugado de aquel donde se sitúa el detector a través del sistema de colección (ver fig. 4.5). Además, en un primer paso supondremos que el sistema de colección es telecéntrico, lo cual demostraremos que no restará generalidad al resultado obtenido.

La distribución espacial del campo electromagnético generado por el sistema de iluminación, de acuerdo con las ecs. 2.8 y 2.18, puede escribirse como

$$U_i(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{M(z)} \exp\left(i \frac{k}{2(s+z)} r^2\right) \frac{1}{(\lambda s)^2} \tilde{T}_i\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda s M(z)}, \frac{z}{\lambda s^2 M(z)}\right), \quad (4.14)$$

donde $M(z)$ viene dado por la ec. 2.16. Entonces, la estructura del campo difractado por el objeto tridimensional en reflexión se expresa como

$$U_o(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}_s, z_s) = o(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}, z_s - z) U_i(\mathbf{r}, z), \quad (4.15)$$

donde se ha supuesto que el objeto se ha desplazado a una posición de coordenadas (\mathbf{r}_s, z_s) . Comparando la ec. 4.15 con la ec. 4.8 observamos que la única diferencia existente entre ambas expresiones es que la distribución de luz, U_o , difractada por el objeto ya no aparece modulada por la respuesta unidad 3D de un sistema telecéntrico, que tiene unas propiedades de simetría muy características (ver ecs. 2.20) sino que ahora es la función $U_i(\mathbf{r}, z)$, la cual determina la estructura de la luz reflejada. Siguiendo un proceso análogo al de la obtención del comportamiento en difracción del sistema confocal total, no es difícil llegar a la conclusión de que la distribución tridimensional de amplitud reconstruida por el microscopio confocal de barrido es la convolución 3D de la función objeto $o(\mathbf{r}, z)$ y la función

$$h_r(\mathbf{r}, z) = U_i(\mathbf{r}, z) h_c(\mathbf{r}, z) , \quad (4.16)$$

a la que seguimos denominando respuesta unidad 3D del sistema confocal en el modo de reflexión. Esta función está formada por el producto de las distribuciones espaciales de amplitud generadas en el espacio intermedio, donde se sitúa el objeto 3D, de los sistemas de iluminación y colección, entendiéndose para éste último que idealmente se propaga una onda esférica, cuyo foco se sitúa en la posición del detector puntual, a través del sistema de colección.

En el caso que el sistema esté caracterizado también por un número de Fresnel bajo, no es difícil demostrar que la respuesta unidad 3D del sistema confocal se puede escribir ahora como

$$h_r(\mathbf{r}, z) = U_i(\mathbf{r}, z) U_c(\mathbf{r}, z) , \quad (4.17)$$

donde, suponiendo que la distancia entre la pupila de entrada del sistema de colección y el punto confocal en el espacio intermedio es s , $U_c(\mathbf{r}, z)$ sigue una expresión análoga a la ec. 4.14.

Siguiendo el razonamiento expuesto en la sección 2.4 podemos analizar el efecto final que se produce sobre la respuesta unidad 3D del sistema confocal de barrido cuando el número de Fresnel de la geometría de focalización es bajo. Por una parte, observamos que en la función $h_r(\mathbf{r}, z)$ de la ec. 4.17 aparece un factor de fase cuadrático. Más interesante parece la influencia del factor $M(z)$ que acompaña a las coordenadas transversales y axial. En este caso los patrones en irradiancia generados se redistribuyen a lo largo del eje óptico y se ven reescalados lateralmente. Sin embargo, cuando los filtros pupilares de los sistemas de iluminación y colección son absorbentes (no existe modificación de la fase), el plano que contiene el punto de máxima irradiancia, que en sistemas telecéntricos se sitúa sobre el plano confocal, continúa localizándose en la misma posición. Por último, aparece un factor asimétrico adicional, $1/M^2(z)$, que

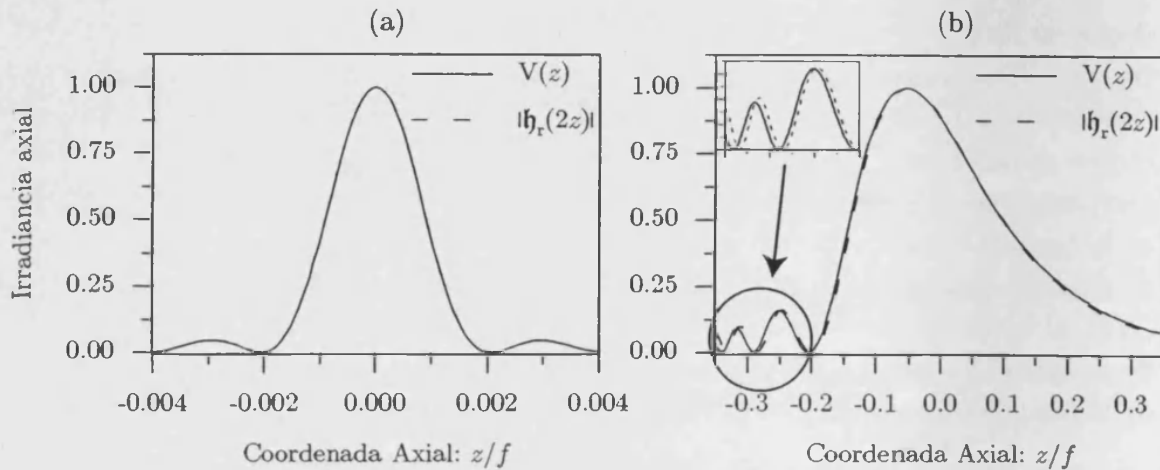


Figura 4.6. Comparación gráfica de la respuesta en irradiancia a un objeto reflector perfecto, $V(z)$, y el valor absoluto de la respuesta unidad en amplitud, debidamente escalada, de un sistema confocal de barrido, con dos aberturas circulares de radio $a = 1\text{mm}$, caracterizado por *a*) un número de Fresnel alto ($N = 500$) y *b*) uno bajo ($N = 3$). Hemos elegido una longitud de onda $\lambda = 500\text{nm}$.

provoca, en última instancia, un desplazamiento del máximo de irradiancia axial a lo largo de la dirección negativa del eje óptico. En este caso también se puede hablar de un efecto de desplazamiento de foco (Zapata-Rodríguez *et al.* 1999).

Por último, hemos representado gráficamente la distribución axial de irradiancia que se obtiene cuando reconstruimos la imagen generada por un objeto plano reflectante uniforme, $o(\mathbf{r}, z) = \delta(z)$. En el caso de que el número de Fresnel asociado a los sistemas de iluminación y colección sea mucho mayor que la unidad, este patrón coincide, suponiendo que las funciones pupila sean binarias, con el valor absoluto, escalado en una cantidad $1/2$, de la respuesta unidad axial en amplitud del sistema confocal en el modo de reflexión (Wilson 1990). Tal y como acabamos de demostrar, cuando el número de Fresnel se acerca a la unidad, este patrón sufre una transformación geométrica que se observa en la ec. 4.17, provocando un fenómeno de desplazamiento de foco. En el caso de la respuesta en irradiancia a un reflector plano, se observa un desplazamiento similar del máximo a lo largo del eje óptico (ver fig. 4.6). Sin embargo, la deformación sufrida en la región focal no sigue exactamente la transformación geométrica de la respuesta unidad axial.

Capítulo 5

Técnicas de superresolución en sistemas confocales de barrido

En el proceso de formación de las imágenes por difracción, el soporte compacto de la pupila de salida, junto con la longitud de onda utilizada, imponen ciertos límites en el tamaño de los detalles discernibles de la imagen (Born y Wolf 1980, sec. 8.6). Sin embargo, hemos reconocido que se puede alterar la transmitancia en amplitud de la pupila de salida, a través del uso de filtros pupilares, con el objetivo de modificar a voluntad la distribución tridimensional en amplitud de la respuesta unidad del dispositivo óptico, logrando con ello aumentar la capacidad de resolución óptica del sistema formador de imágenes (Jacquinot y Roizen-Dossier 1964). A medida que la respuesta unidad se estrecha, tanto transversal como axialmente, existe una mayor semejanza entre el objeto y su imagen. Sin embargo, esta técnica se encuentra con limitaciones que se deben fundamentalmente a las restricciones que la ecuación de ondas impone sobre el campo difractado (Streibl 1984).

A lo largo de estos últimos años se han realizado toda una serie de estudios cuyo objetivo es una mejora significativa de la resolución óptica en los sistemas confocales de barrido. Sheppard y Wilson realizaron estudios preliminares sobre la influencia de las pupilas circulares y anulares en la resolución del sistema confocal sobre el plano transversal imagen (Sheppard y Wilson 1979). Con posterioridad se ha ido proponiendo el uso de pantallas difractantes cuya transmitancia en amplitud posee, en general, una variación radial continua (Hamed y Clair 1983) o, alternativamente, que consisten en un conjunto de anillos binarios concéntricos cuya distribución se aproxima a la variación continua de la transmitancia diseñada a priori (Hegedus 1985; Hegedus y Sarafis 1986). Sin embargo, se ha prestado una mayor atención al aumento de la resolución a lo largo del eje óptico, lo cual tiene una importancia crucial en la formación de imágenes

tridimensionales (Wilson y Hewlett 1990; Sheppard y Gu 1991). En este sentido, se han diseñado filtros pupilares tanto de transmitancia binaria (Gu *et al.* 1993; Martínez-Corral *et al.* 1995) como de variación continua (Magiera 1992), que permiten un estrechamiento de la respuesta axial del sistema confocal.

Con este mismo espíritu, nosotros proponemos un conjunto de estrategias de superresolución tridimensionales que están especialmente diseñadas para los sistemas confocales de barrido. En primer lugar, presentamos toda una familia de filtros binarios anulares (Publicación VI) que, usados bien en el sistema de iluminación o en el de colección, logran un estrechamiento del lóbulo central de la respuesta unidad tanto a lo largo del eje óptico como sobre el plano transversal imagen. Un efecto superresolvente 3D se puede obtener también, ver Publicación VII, mediante el uso de una combinación adecuada de filtros pupilares complementarios, uno de ellos superresolvente sobre el plano transversal imagen y el otro a lo largo del eje del sistema, los cuales generan una respuesta unidad más estrecha en las tres direcciones del espacio y cancelan mutuamente los lóbulos laterales que, de forma individual, se generan como efecto secundario.

En el siguiente apartado hacemos uso de un método novedoso para conseguir superresolución, ampliamente analizado en la Publicación VIII, que está basado en la utilización de filtros de fase, los cuales ofrecen una alta eficiencia en difracción, con una distribución transversal de la amplitud compleja que es hermitica. Este hecho provoca una asimetría en la respuesta unidad en difracción (Siu *et al.* 1994) de cada uno de los sistemas ópticos que forman el microscopio confocal de barrido, lo cual es aprovechado adecuadamente para provocar un estrechamiento de la respuesta unidad del sistema. Por último, proponemos una técnica que consiste en provocar un ligero desenfoque con la intención de conseguir un efecto superresolvente sobre el eje óptico. Tal y como se detalla en la Publicación IX, es posible combinar convenientemente filtros que producen una respuesta nula sobre el foco geométrico, hecho que constituye una novedad en el campo de la formación de imágenes, junto con el desenfoque anunciado para mejorar la respuesta unidad superresolvente del sistema confocal.

5.1 Pantallas superresolventes tridimensionalmente

Comenzamos nuestro estudio considerando un sistema convencional, que en el caso que aquí nos preocupa podría tratarse tanto del sistema de iluminación como el de colección que constituyen un microscopio confocal de barrido, el cual se encuentra apodizado mediante un filtro pupilar que, por simplicidad, consideramos de simetría circular, cuya transmitancia en amplitud viene dada por $t(r)$. De acuerdo con la ec. 2.7,

y considerando la simetría radial de la geometría de focalización, podemos expresar la respuesta unidad 3D en amplitud del sistema óptico apodizado, en la aproximación paraxial de Debye, como

$$\mathfrak{h}(v, W_{20}) = \int_0^1 t'(r_o) \exp(-i2\pi W_{20} r_o^2) J_0(2\pi v r_o) 2\pi r_o dr_o, \quad (5.1)$$

donde hemos eliminado algunos factores irrelevantes. En la ec. 5.1, la transmitancia del filtro pupilar está normalizada a su máxima extensión radial, a , de tal manera que $t(r) \equiv t'(r/a)$, mientras que la coordenada adimensional v está relacionada con la distancia radial r mediante la relación $v = ar/\lambda f$, donde f es la distancia axial que existe entre el plano de la pupila de salida y el plano imagen. Además, el coeficiente de desenfoque dado en la ec. 3.2 se puede aproximar, dentro del contexto de la teoría de Debye, a la expresión $W_{20} = Nz/2f$.

Particularizamos primero la ec. 5.1 para obtener la distribución de amplitud que se forma sobre el plano focal del sistema óptico, $W_{20} = 0$, resultando

$$\mathfrak{h}(v, 0) = \int_0^1 t'(r_o) J_0(2\pi v r_o) 2\pi r_o dr_o. \quad (5.2)$$

La distribución de amplitud correspondiente a la respuesta unidad 3D de un sistema óptico convencional sobre el plano focal viene dada por la transformada de Hankel de la transmitancia en amplitud del filtro pupilar, $t'(r)$. De esta manera, si queremos producir un efecto superresolvente, necesitamos introducir una pantalla difractante que resalte las altas frecuencias transversales frente a las bajas (Jacquinot y Roizen-Dossier 1964), esto es, un filtro absorbente cuya transmitancia sea mayor en la región cercana a $r = 1$ que en aquella cercana a $r = 0$.

Por otro lado, si seleccionamos los puntos del eje óptico $v = 0$ en la ec. 5.1 para determinar la variación axial de la respuesta unidad 3D del sistema, obtenemos

$$\mathfrak{h}(0, W_{20}) = \int_0^1 t'(r_o) \exp(-i2\pi W_{20} r_o^2) 2\pi r_o dr_o. \quad (5.3)$$

Siguiendo un proceso similar al utilizado en el apartado 3.1 podemos expresar la función $\mathfrak{h}(0, W_{20})$ a través de una transformación de Fourier 1D, es decir

$$\mathfrak{h}(0, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q(\zeta) \exp(-i2\pi W_{20} \zeta) d\zeta, \quad (5.4)$$

donde hemos omitido un factor trivial. La distribución de amplitud axial se determina entonces mediante la transformada de Fourier 1D de la función $q(\zeta)$, que se ha obtenido, tras la transformación geométrica $\zeta = r^2 - 0.5$, como $q(\zeta) \equiv t'(r)$. Con el objetivo de poner de manifiesto las características que un filtro pupilar ha de tener para producir superresolución axial, es conveniente destacar las similitudes existentes entre esta situación y la correspondiente al análisis de sistemas formadores de imágenes 1D. Para este último caso, la transmitancia de un filtro pupilar unidimensional y su correspondiente respuesta unidad en amplitud están conectadas a través de una transformación de Fourier 1D. De la analogía anterior podemos deducir (Ojeda-Castañeda *et al.* 1994) que para obtener superresolución axial es necesario que el filtro, en su versión $q(\zeta)$, realce las altas frecuencias frente a las bajas. En otras palabras, es conveniente que la transmitancia en amplitud del filtro absorbente, $t'(r)$, sea mayor en regiones cercanas a $r = 0$ y $r = 1$, frente a aquellas cercanas a $r = \sqrt{2}/2$.

Como nuestro principal objetivo es el diseño de filtros pupilares que produzcan superresolución 3D, debemos imponer que se cumplan simultáneamente las dos condiciones mencionadas con anterioridad. Además, debido a las limitaciones impuestas por la actual tecnología, las pantallas pupilares se han de diseñar atendiendo a una estructura sencilla, bajo coste de producción y alta tolerancia. De acuerdo con estas restricciones proponemos el conjunto de filtros binarios anulares caracterizados por la función

$$q(\zeta) = \text{rect}(\zeta) - \text{rect}(\zeta/\mu + \varepsilon - 0.5) , \quad (5.5)$$

con $0.5 < \varepsilon \leq 1$ y $0 < \varepsilon\mu \leq 0.5$, donde las magnitudes μ y ε se denominan parámetros de obturación y de asimetría, respectivamente. De esta manera, cualquier miembro de esta familia de filtros está formado por una abertura circular con una obturación anular, ver fig. 5.1, de tal manera que el área del anillo transparente exterior tiene un área mayor que el del orificio circular central.

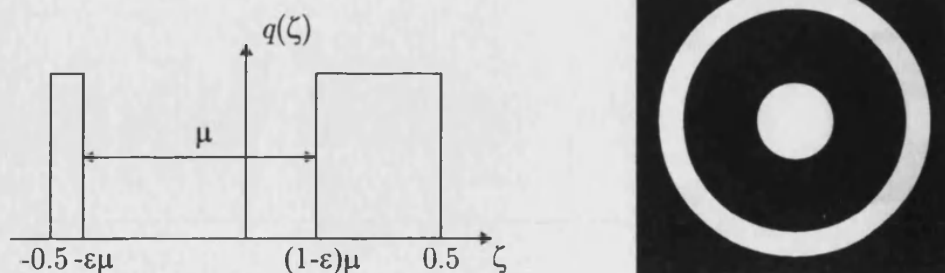


Figura 5.1. Filtro pupilar superresolvente tridimensionalmente.

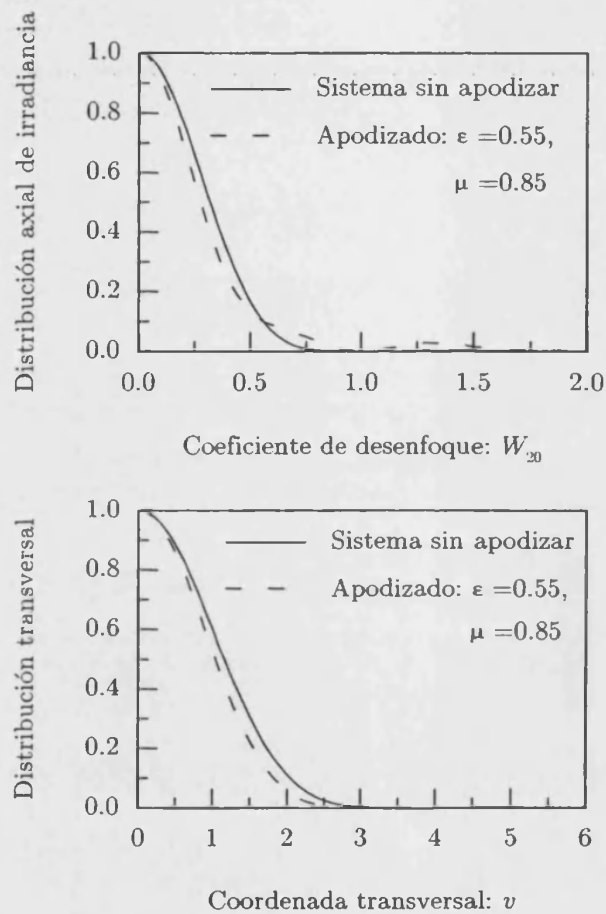


Figura 5.2. Distribución de irradiancia normalizada a lo largo de la dirección axial y transversal de un microscopio confocal a cuyo sistema de iluminación se le ha incorporado un filtro anular.

Cuando insertamos uno de estos filtros anulares binarios en, por ejemplo, el sistema de iluminación de un sistema confocal de barrido es posible mejorar su poder de resolución 3D. Partiendo de las ecs. 4.10 y 4.13 es posible observar que, gracias al carácter multiplicativo de la respuesta unidad 3D del sistema confocal, reducimos drásticamente el efecto perjudicial de los lóbulos laterales, los cuales aparecen comúnmente asociados al uso de filtros superresolventes en sistemas ópticos convencionales.

Como ilustración elegimos el filtro anular de la familia dada en la ec. 5.5 cuyos parámetros son $\epsilon = 0.55$ y $\mu = 0.85$, el cual alcanza una ganancia en la resolución 3D de más del 30%, definida como la reducción del volumen que experimenta el lóbulo central de la respuesta unidad en irradiancia. Como consecuencia, este filtro proporciona una importante mejora en el poder de resolución 3D del sistema confocal. En la fig. 5.2 se muestra la distribución de irradiancia transversal y axial correspondiente a la respuesta

unidad de un sistema confocal de barrido cuyo sistema de iluminación ha sido apodizado por el filtro propuesto. La línea continua corresponde al sistema sin apodizar.

Es importante resaltar que, aunque hemos centrado nuestro estudio en sistemas confocales apodizados con un único filtro pupilar, podemos extender estos resultados al caso más general en el que ambos sistemas de iluminación y colección están apodizados. Bajo esta configuración, la anchura del lóbulo central de la respuesta unidad es más estrecha, aumentando consiguientemente la resolución del sistema confocal, aunque los lóbulos laterales pueden llegar a ser mayores que en el caso analizado. Sin embargo, con el objetivo de optimizar la eficiencia luminosa del sistema frente a su resolución espacial es conveniente el uso de un único filtro pupilar. Además, para aplicaciones tales como microscopía por fluorescencia, la poca eficiencia luminosa de las muestras obliga a colocar el filtro sobre el sistema de iluminación, tal y como se ha propuesto en un principio. Por otro lado, en la Publicación VI se reconoce que el uso de los filtros pupilares propuestos puede ofrecer resultados igualmente satisfactorios tanto en sistemas formadores de imágenes convencionales como, por ejemplo, en dispositivos ópticos de almacenamiento de datos.

5.2 Superresolución tridimensional por combinación de dos filtros pupilares complementarios

A continuación presentamos otra técnica que permite mejorar la capacidad resolutoria de los sistemas confocales de barrido tanto a lo largo de la dirección transversal como de la axial (ver Publicación VII). Ésta se basa en la combinación adecuada de dos filtros ópticos, dispuestos sobre los sistemas de iluminación y colección, uno de ellos diseñado para incrementar la resolución en el plano imagen y el otro para conseguir superresolución axial. Con esta combinación es posible reducir globalmente el tamaño del lóbulo central de la respuesta unidad 3D en irradiancia del sistema confocal.

Esta conclusión es consecuencia del hecho ya establecido en las ecs. 4.10 y 4.13 según el cual la respuesta unidad 3D de un sistema confocal de barrido viene dada por el producto de dos funciones independientes, asociadas a la respuesta unidad 3D de los sistemas de iluminación y colección. La independencia de estos dos factores nos permite seleccionar una pareja de filtros que tengan la habilidad de producir los efectos complementarios deseados. Cuando el producto de las dos respuestas unidad independientes se hace efectivo, obtenemos una distribución en irradiancia donde la anchura del lóbulo central en la dirección transversal está gobernada por la respuesta unidad del filtro superresolvente transversalmente, mientras que la anchura en la

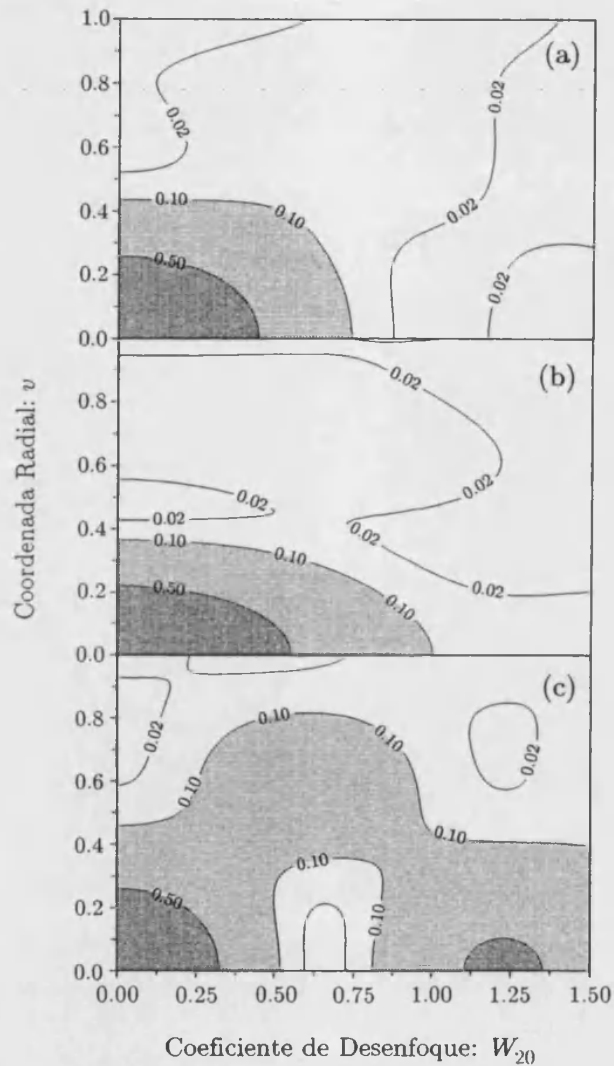


Figura 5.3. Diagramas de isofotas correspondientes a las respuestas unidad 3D en irradiancia de: a) una pupila circular; b) un filtro parabólico superresolvente sobre el plano transversal imagen, $t'_i(r) = r^2$, y c) un filtro parabólico superresolvente a lo largo del eje óptico, $q_c(\zeta) = 4\zeta^2$.

dirección axial viene determinada por la transformada de Fourier 1D del filtro superresolvente axialmente. De esta manera, el sistema confocal de barrido se caracteriza por una respuesta unidad tridimensional cuyo lóbulo central tiene una anchura que se ha reducido globalmente en comparación con el sistema confocal sin apodizar.

Para ilustrar este resultado seleccionamos, dada su sencillez, una pareja de filtros pupilares que poseen una transmitancia en amplitud de variación parabólica. Siguien-

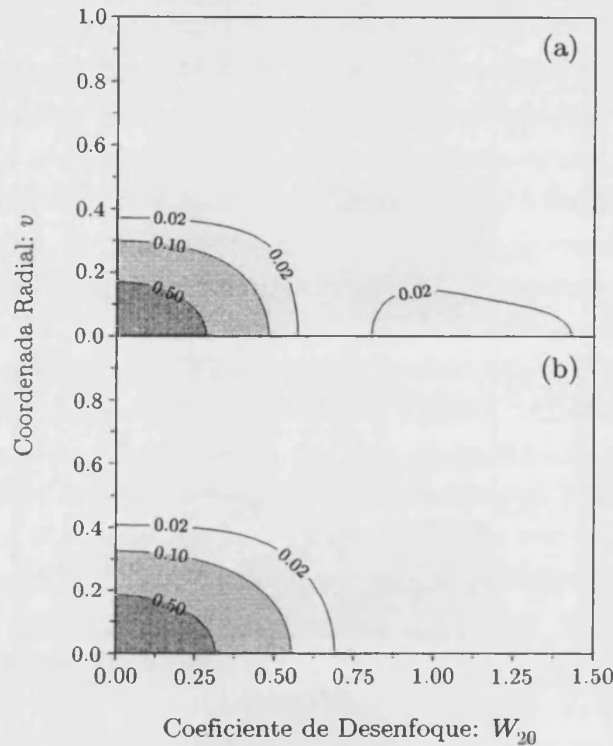


Figura 5.4. Diagramas de isofotas correspondientes a las respuestas unidad 3D en irradiancia de un sistema confocal de barrido: *a*) apodizado con los filtros pupilares complementarios que aparecen en la fig. 5.3, y *b*) sin apodizar.

do el esquema argumentado en el apartado anterior, colocamos en el sistema de iluminación un filtro pupilar caracterizado por la función $t'_i(r) = r^2$, el cual provoca un efecto superresolvente sobre el plano imagen del sistema, mientras que para el sistema de colección elegimos $q_c(\zeta) = 4\zeta^2$, que es superresolvente a lo largo del eje óptico, y tiene una representación radial dada por $t'_c(r) = 4r^2(r^2 - 1) + 1$. En la fig. 5.3, se muestran diagramas de isofotas de la respuesta unidad tridimensional que generan los filtros seleccionados, además de la correspondiente a la abertura circular. Podemos observar que un estrechamiento del lóbulo central en una dirección dada viene acompañado por un aumento de los lóbulos exteriores y un ensanchamiento en la dirección opuesta (Sheppard y Hegedus 1988).

A continuación, en la fig. 5.4 (a) representamos la distribución espacial de irradiancia normalizada correspondiente a la respuesta unidad 3D de un microscopio confocal de barrido donde la pupila del sistema de iluminación se apodiza con la pantalla propuesta de superresolución transversal, mientras que el sistema de colección lo hace con el filtro axialmente superresolvente. Comparando esta figura con las figs. 5.3 (b) y 5.3



(c) observamos que la anchura del lóbulo central a lo largo de la dirección transversal viene impuesta por el filtro superresolvente transversalmente, y la anchura en la dirección axial viene gobernada por el filtro superresolvente axialmente. Además, la altura de los lóbulos laterales en cualquier dirección que pasa por el foco disminuye drásticamente en comparación con la respuesta unidad 3D de cada uno por separado. Si ahora comparamos esta distribución de irradiancia con la correspondiente al sistema confocal sin apodizar, vemos que existe una importante reducción de la anchura del lóbulo central en cualquier dirección. En particular, la anchura del lóbulo central exhibe una reducción del 21% en la dirección transversal y del 34% sobre el eje óptico. Sin embargo, estos resultados se pueden mejorar sustancialmente si se optimiza la elección de los filtros pupilares.

Por último, concluimos que gracias a las simetrías que ofrecen los campos apodizados con filtros absorbentes, ver ec. 2.20, este método puede aplicarse indistintamente en el modo de transmisión y de reflexión. Además, la equivalencia que demuestran los sistemas de iluminación y colección a la hora de formar la imagen 3D en un sistema confocal de barrido permite que el intercambio de los filtros pupilares en dichos sistemas no altere el resultado final. Sin embargo, en el caso particular de que la eficiencia luminosa en el sistema de colección sea un parámetro crítico, es preferible el uso de $t'_i(r)$ en dicho sistema, el cual proporciona una razón de Strehl de $1/4$, mientras que el filtro superresolvente axialmente que hemos seleccionado se emplearía en el sistema de iluminación por tener una razón de Strehl inferior, dígase $1/9$.

5.3 Apodización asimétrica en sistemas confocales de barrido

Hasta el momento hemos centrado nuestro estudio en geometrías de focalización de haces que tienen foco en el sentido de la Óptica Geométrica. A este respecto, cuando apodizamos un sistema óptico con un filtro pupilar, exigimos que éste sea absorbente, es decir, que su transmitancia en amplitud sea real y positiva. Esta restricción nos asegura que el frente de ondas del haz esférico no está afectado de aberración, lo cual implica que el máximo de irradiancia se sitúa en el foco geométrico donde todas las ondas secundarias de Huygens procedentes de la pupila de salida se suman en fase. Sin embargo, el hecho de que la fase del dispositivo apodizante sea diferente de cero puede provocar incluso la existencia de puntos del volumen focal donde la irradiancia sea mayor que la correspondiente al foco geométrico (Cox *et al.* 1982).

En busca de una mayor resolución óptica, se han ideado toda una serie de filtros

pupilares, en general parcialmente absorbentes y de fase no nula, los cuales pueden controlar con relativa facilidad el poder resolutivo del sistema formador de imágenes (Francia 1952; Thompson 1965). Bajo ciertas condiciones, se observa un comportamiento asimétrico, que lo diferencia de los filtros absorbentes (ver ec. 2.20), el cual se puede aprovechar para conseguir un efecto apodizante (Cheng y Siu 1991). En la Publicación VIII se presenta una nueva configuración confocal basada en la apodización asimétrica, con la que se puede lograr un efecto superresolvente notable. Con anterioridad se han publicado unos resultados preliminares donde se esboza la idea de usar filtros de fase complementarios en los sistemas confocales de barrido (Kowalczyk *et al.* 1998). La asimetría de la respuesta unidad de cada uno de los sistemas que componen el microscopio confocal es compensada, de tal manera que se obtiene una variación simétrica en la región focal del microscopio confocal.

Comencemos por considerar nuevamente un microscopio confocal de barrido compuesto por un sistema de iluminación y otro de colección que están apodizados por dos filtros ópticos, los cuales pueden tener una fase distinta de cero, caracterizados por las funciones pupila normalizadas $t'_i(r)$ y $t'_c(r)$ que, al igual que en el apartado anterior, se consideran de simetría circular. Una elección adecuada de la pareja de filtros apodizados va a permitir que, por ejemplo, la anchura del lóbulo central en la dirección del eje óptico disminuya notablemente, incrementando con ello la capacidad de seccionado óptico del sistema confocal. A partir de las ecs. 4.10 y 5.4 es posible determinar la distribución axial de irradiancia correspondiente a la respuesta unidad 3D de un microscopio de barrido en el modo de transmisión. Si elegimos dos funciones pupilares iguales, es decir $t'_i(r) = t'_c(r)$, encontramos que

$$I_t(W_{20}) = |\mathfrak{h}(0, W_{20}) \mathfrak{h}(0, -W_{20})|^2, \quad (5.6)$$

donde $q(\zeta) \equiv t'_\alpha(r)$ con $\alpha = \{i, c\}$ tras la transformación geométrica $\zeta = r^2 - 0.5$.

La ec. 5.6 nos indica que, independientemente de la asimetría que la respuesta unidad exhibe a lo largo del eje óptico correspondiente a los sistemas de iluminación y colección, la distribución axial de irradiancia del sistema confocal es, de acuerdo a la elección de los filtros pupilares que se ha adoptado, simétrica. Para el modo de reflexión es posible encontrar un comportamiento simétrico a lo largo del eje óptico del sistema confocal mediante el uso de filtros pupilares complejo-conjugados, es decir, aquellos que cumplen la relación $t'_i(r) = [t'_c(r)]^*$ (ver ec. 4.13). Como consecuencia del mayor grado de libertad que se alcanza en el diseño de filtros pupilares para sistemas confocales, vamos a poder aprovechar las ventajas que ofrece la apodización asimétrica con el uso de funciones pupilares hermíticas. De esta manera, exigimos que la función compleja $q(\zeta)$ sea hermítica, es decir, que su parte real sea par y su parte imaginaria, impar. La respuesta unidad de cada uno de los sistemas que componen el microscopio

confocal, a lo largo del eje, es necesariamente asimétrica, pero no así la correspondiente al sistema global.

Con el objetivo de seleccionar adecuadamente una pareja de filtros ópticos que consigan un efecto superresolvente apreciable, hemos de tener en cuenta que si $q_{re}(\zeta)$ y $q_{im}(\zeta)$ corresponden a la parte real e imaginaria de la función $q(\zeta)$, es decir, $q(\zeta) = q_{re}(\zeta) + iq_{im}(\zeta)$, el valor de $h_\alpha(0, W_{20})$ en el origen y su primera derivada son proporcionales al momento de orden 0 de $q_{re}(\zeta)$ y al momento de orden 1 de $q_{im}(\zeta)$, respectivamente. Además, el hecho de que los filtros ópticos sean elementos pasivos que absorben parcial o totalmente la luz incidente implica que se ha de cumplir la siguiente desigualdad

$$q_{re}^2(\zeta) + q_{im}^2(\zeta) \leq 1. \quad (5.7)$$

Teniendo en mente que nuestro objetivo final es la consecución de un estrechamiento del lóbulo central sobre el eje, a partir de la ec. 5.6 deducimos que se obtiene un efecto superresolvente importante para valores altos de la primera derivada de $h_\alpha(0, W_{20})$ en el origen. Es deseable entonces que el momento de primer orden de $q_{im}(\zeta)$ sea el más elevado posible, en valor absoluto, por lo que se han de resaltar las altas frecuencias de $q_{im}(\zeta)$ frente a las bajas. Por otro lado, la eficiencia luminosa, determinada como la irradiancia sobre el punto focal geométrico, depende directamente del valor medio de $q_{re}(\zeta)$. La máxima eficiencia luminosa se obtiene cuando $q_{re}(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$ que, según la ec. 5.7, obliga a que $q_{im}(\zeta) = 0$, es decir, se genera una respuesta axial de pendiente nula en el origen. Por contra, la máxima pendiente se obtiene para $q_{im}(\zeta) = \text{sign}(\pm\zeta) \text{rect}(\zeta)$, de lo cual se deduce que el proceso de conseguir un buen comportamiento superresolvente se hace en detrimento de la eficiencia luminosa. Concluimos que si tanto la resolución como la eficiencia de nuestro dispositivo son parámetros que debemos tener en cuenta, se ha de escoger una solución de compromiso.

De acuerdo con las consideraciones anteriores proponemos, atendiendo a su fácil implementación práctica, el uso de un filtro óptico formado por tres niveles de fase distintos, y que viene dado por

$$q(\zeta) = \begin{cases} i, & -0.50 \leq \zeta < -0.25; \\ 1, & -0.25 \leq \zeta < +0.25; \\ -i, & +0.25 \leq \zeta < +0.50; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases} \quad (5.8)$$

En la fig. 5.5 se representa la distribución axial de amplitud normalizada de un sistema confocal apodizado con el filtro óptico descrito en la ec. 5.8. Hemos aplicado la propiedad de que el comportamiento asimétrico que exhibe el sistema convencional es

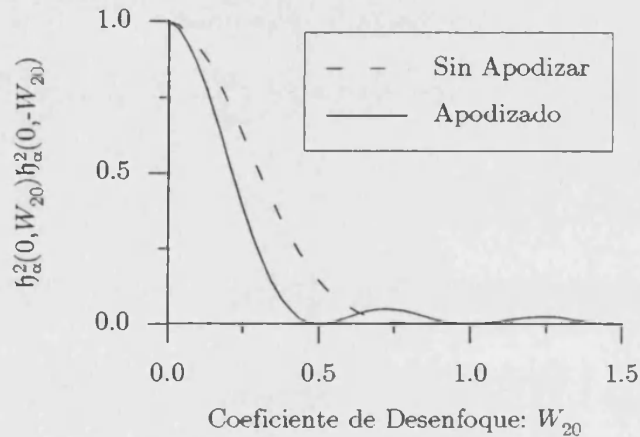


Figura 5.5. Representación gráfica del comportamiento en difracción a lo largo del eje óptico de un sistema confocal de barrido apodizado con dos filtros pupilares $q(\zeta)$ en el modo de transmisión, en comparación con la respuesta unidad axial de un sistema confocal sin apodizar.

corregido por el microscopio confocal. Además, es notable la reducción de la anchura del lóbulo central a lo largo del eje en comparación con el sistema confocal sin apodizar, que en términos de la anchura a media altura (FWHM¹) se concreta en una ganancia en resolución axial del 30%. Como efecto colateral aparecen lóbulos secundarios que limitan la capacidad resolutoria del sistema. Es previsible entonces que el poder de resolución alcanzado con la pupila dada en la ec. 5.8 se encuentra muy próximo al valor óptimo que se puede lograr con este método.

La estrategia llevada a cabo para alterar el comportamiento en difracción del sistema óptico confocal a lo largo del eje, mediante el uso de filtros pupilares de transmitancia hermítica, puede ser también adecuado en el caso concreto de que se busque un efecto superresolvente sobre el plano transversal imagen. En este caso, exigimos que la transmitancia en amplitud de los filtros pupilares, correspondientes a los sistemas de iluminación y colección, esté determinada por funciones hermíticas y complejo-conjugadas entre sí, es decir, que $t'_i(\mathbf{r}) = [t'_c(\mathbf{r})]^*$. Este hecho obliga, por una parte, a que la respuesta unidad de cada uno de los sistemas del microscopio confocal, $h_\alpha(\mathbf{r}, 0)$, tenga un comportamiento asimétrico, mientras que, por otro lado, provoque que la respuesta en irradiancia sobre el plano imagen del sistema confocal tenga simetría rectangular respecto a los ejes coordenados.

Siguiendo un proceso análogo al caso de superresolución axial anteriormente estudiado, consideramos una pareja de filtros pupilares cuya transmitancia hermítica esté

¹del inglés *Full Width at Half Maximum*

compuesta por tres niveles de fase distintos, que representamos como

$$t'_\alpha(\mathbf{r}) = \exp[\pm i\phi \text{sign}(x)] [\text{circ}(r) - \text{circ}(r/\varepsilon)] + \text{circ}(r/\varepsilon) . \quad (5.9)$$

En la ecuación anterior, ϕ y ε son constantes que están comprendidas entre $-\pi \leq \phi < \pi$ y $0 \leq \varepsilon < 1$. El filtro pupilar descrito en la ec. 5.9 está formado por un disco central transparente el cual lleva adosados dos semianillos exteriores de fases complejo-conjugadas, según se muestra en la Publicación VIII. El signo positivo que acompaña a la constante ϕ corresponde al filtro pupilar del sistema de iluminación $\alpha = i$, mientras que para el sistema de colección $\alpha = c$ se emplea el signo negativo.

Como ilustración se ha tomado el valor $\phi = \pi/3$ para el cual se observa un efecto superresolvente notable. Además, para cada valor de la constante ε hemos normalizado

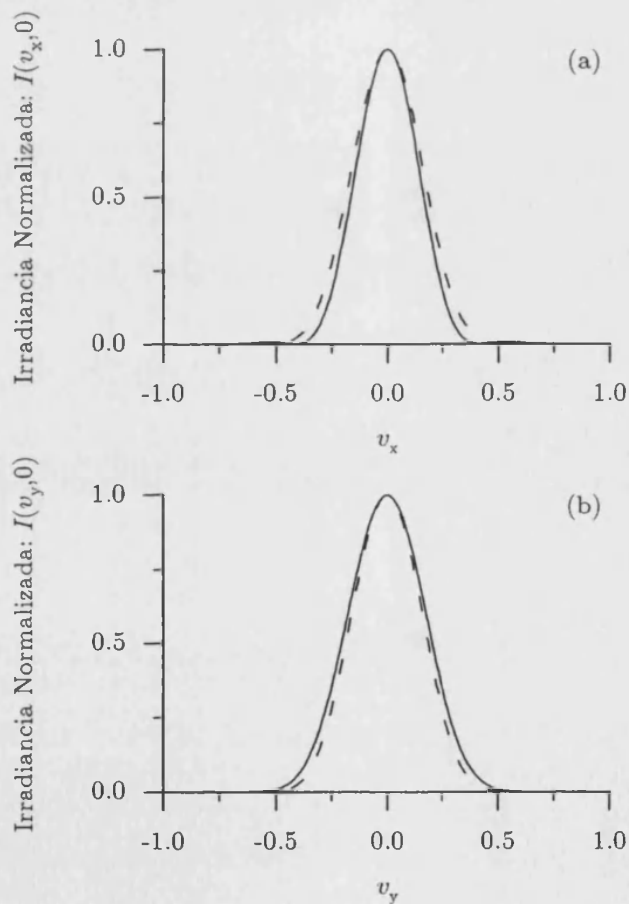


Figura 5.6. Distribución transversal de irradiancia normalizada a lo largo de: a) la dirección superresolvente y, b) la dirección apodizante, para $\phi = \pi/3$ y $\varepsilon = 0.7$. La línea a trazos corresponde a un sistema confocal sin apodizar.

la respuesta unidad de tal manera que el punto de máxima irradiancia alcanza un valor unidad. Hemos empleado la coordenada transversal normalizada $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \mathbf{ar}/\lambda f$ que ya apareció en su versión radial en los apartados anteriores. A partir de esta figura observamos que la anchura del lóbulo central del sistema confocal se estrecha apreciablemente, situación en la cual la altura de los lóbulos secundarios se considera aceptable. En términos del criterio de Rayleigh, entendido como que la resolución de un sistema óptico puede caracterizarse por la distancia entre dos puntos necesaria para que la irradiancia en la región intermedia de la imagen disminuya al menos un 20%, el sistema confocal apodizado con los filtros hermíticos propuestos consigue una ganancia de hasta el 39% respecto de un sistema convencional sin apodizar.

Para el caso concreto de los filtros superresolventes transversalmente que proponemos, en la fig. 5.6 se observa que a lo largo de uno de los ejes de simetría del sistema, la respuesta unidad tiene un comportamiento superresolvente, mientras que sucede un efecto contrario en la dirección perpendicular. Como consecuencia, el sistema confocal queda caracterizado por una dirección superresolvente y una dirección apodizante. Resulta pues conveniente su uso en la formación de imágenes de patrones con una componente direccional predominante como, por ejemplo, redes de difracción y tejidos musculares.

5.4 Superresolución axial por desenfoque simétrico. Técnicas combinadas con apodización

En este último apartado presentamos un nuevo método que permite incrementar la capacidad de seccionado óptico de los sistemas confocales de barrido. Mediante un desajuste simétrico de los sistemas de iluminación y colección, los cuales son previamente apodizados de forma adecuada, es posible sintonizar a voluntad la anchura, a lo largo del eje óptico, del lóbulo central correspondiente a la respuesta unidad del sistema confocal (Martínez-Corral *et al.* 1998). En la Publicación IX se profundiza en este concepto y se extiende para desarrollar una técnica de apodización, que hemos denominado de interferencia destructiva, la cual está especialmente adecuada a los sistemas confocales, ya que se basa en el uso de filtros ópticos que provocan una respuesta axial cuya irradiancia en el punto focal es nula. Sin embargo, aprovechando que los lóbulos secundarios son estrechos, mediante un desajuste simétrico controlado es posible encontrar una respuesta en difracción del sistema confocal global que consigue aumentar notablemente la capacidad de seccionado óptico.

Comencemos considerando el caso de un sistema confocal de barrido cuyos sistemas

de iluminación y colección no se encuentran apodizados. Haciendo uso de las funciones pupila $q_\alpha(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$, la distribución axial de irradiancia se obtiene a partir de las ecs. 4.10 y 5.4, dando una variación del tipo $I(0, W_{20}) = \text{sinc}^4(W_{20})$, resultado que es válido tanto para los modos de reflexión y de transmisión. Con el fin de incrementar la resolución axial de los microscopios confocales de barrido, proponemos una técnica muy simple que consiste en introducir un leve desajuste simétrico respecto al plano confocal, efectuado sobre el eje óptico de los sistemas de iluminación y colección. Desde un punto de vista práctico, el desajuste simétrico se puede introducir bien desplazando axialmente el sistema de colección respecto al de iluminación, o bien con un desajuste axial de la fuente y el detector puntual, en ambos casos generando un sistema cuasi-confocal. Este desajuste implica que el punto donde focaliza el haz de iluminación no coincide con aquel cuya imagen a través del sistema de colección se localiza sobre el detector. Aunque el efecto que al desajuste tanto axial como lateral se le atribuye está asociado a una degradación de la imagen (Kimura y Wilson 1993; Wilson 1993), demostraremos que se puede obtener una mejora de la resolución de los sistemas confocales en un modo cuasi-confocal.

Desde un punto de vista matemático, el desajuste simétrico se describe con una pareja de funciones pupila dadas por

$$Q_\alpha(\zeta, W_{20}^D) = q_\alpha(\zeta) \exp(-i2\pi\zeta W_{20}^D/2) \quad \alpha = \{i, c\}, \quad (5.10)$$

El parámetro de desajuste W_{20}^D representa el desplazamiento axial que se provoca entre los sistemas de iluminación y colección que componen el microscopio confocal, pudiendo ser una cantidad tanto positiva como negativa. En el caso de trabajar en el modo de reflexión, se ha de introducir un parámetro de desajuste en los sistemas de iluminación y colección de igual magnitud y signo contrario.

La respuesta unidad en irradiancia a lo largo del eje, $I(0, W_{20})$, viene dada por el producto de dos funciones independientes, asociadas a las respuestas unidad axiales de los sistemas de iluminación y colección, esta vez desplazadas entre sí una distancia W_{20}^D . Para el caso particular de que los dos filtros pupilares sean circulares, la distribución axial de irradiancia de la respuesta unidad vendrá dada por el producto de dos funciones seno cociente al cuadrado, separadas una distancia W_{20}^D , es decir,

$$I(0, W_{20}) = \text{sinc}^2(W_{20} + W_{20}^D/2) \text{sinc}^2(W_{20} - W_{20}^D/2). \quad (5.11)$$

Cuando realizamos el producto se obtiene una respuesta unidad global cuyo lóbulo central tiene una anchura, a lo largo del eje óptico, determinada por el primer cero "a la derecha" de la respuesta unidad que se ha desplazado hacia la izquierda, y el primer cero "a la izquierda" de la otra respuesta unidad. La magnitud del estrechamiento

provocado, en comparación con la anchura del lóbulo central en el caso que no haya desajuste, es precisamente igual a W_{20}^D . Para ilustrar este efecto, en la fig. 5.7 hemos dibujado la respuesta unidad axial en irradiancia para algunos valores del parámetro de desajuste W_{20}^D . A partir de esta figura se puede apreciar que a medida que el parámetro de desajuste W_{20}^D aumenta, la anchura del lóbulo central de la respuesta unidad axial disminuye gradualmente. Debemos señalar que junto a este estrechamiento del lóbulo central aparece como efecto colateral un aumento considerable de los lóbulos secundarios. Este hecho limita en la práctica el valor máximo admisible de W_{20}^D . A partir de la fig. 5.7 se deduce que para valores de W_{20}^D inferiores a 1 la altura relativa de los lóbulos laterales es todavía admisible, mientras que para $W_{20}^D > 1$ estos lóbulos crecen rápidamente.

El método propuesto, que es capaz de proporcionar una mejora de la capacidad resolutive en un sistema confocal de barrido, posee el inconveniente de que la resolución axial está limitada en gran parte por el aumento en la altura relativa de los lóbulos laterales que acompañan al máximo central. Basándonos en este hecho proponemos combinar un desajuste simétrico con la utilización de una pareja de filtros de amplitud que rectifique convenientemente este comportamiento no deseado de la respuesta unidad del sistema a lo largo del eje óptico. Dado que la implementación práctica de los filtros pupilares de variación continua no es una labor sencilla, elegimos uno perteneciente a la familia de filtros superresolventes compuestos por un anillo exterior y un círculo concéntrico de igual área (Martínez-Corral *et al.* 1995), cuya transmitancia

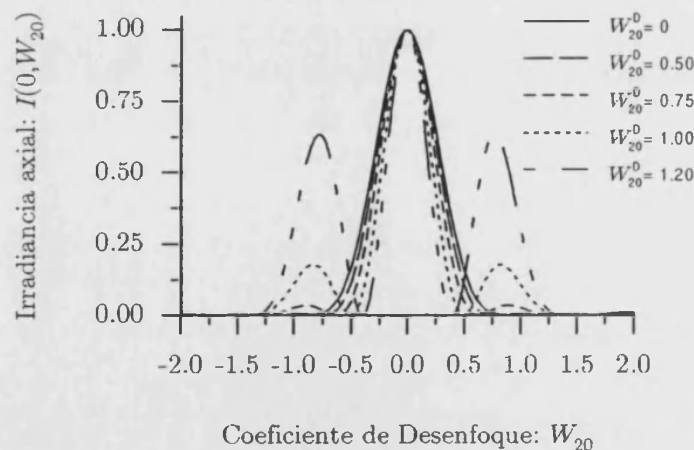


Figura 5.7. Distribución axial de irradiancia correspondiente a la respuesta unidad de un sistema confocal de barrido al que se le ha provocado un desenfoque simétrico.

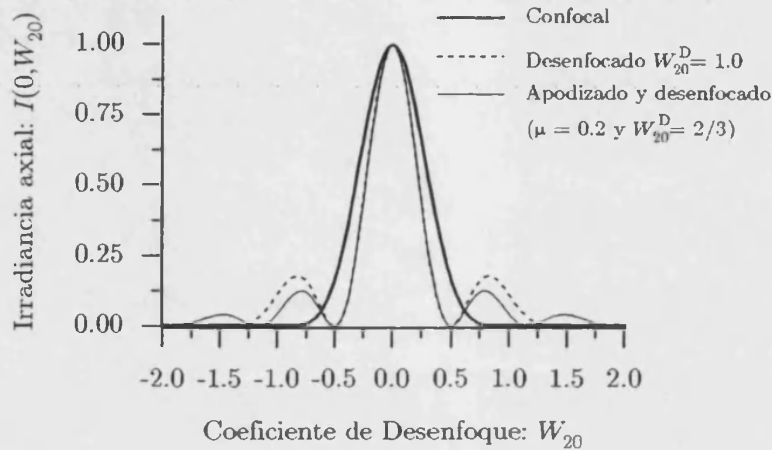


Figura 5.8. Distribución de irradiancia normalizada correspondiente a un sistema confocal apodizado al que hemos practicado un desajuste simétrico.

en amplitud se puede expresar como

$$q_{\alpha}(\zeta) = \text{rect}(\zeta) - \text{rect}(\zeta/\mu) , \quad (5.12)$$

donde el parámetro μ , el cual se restringe a valores comprendidos entre 0 y 1, representa el área de la obturación anular que los caracteriza.

A continuación observamos que es posible reducir la altura relativa de los lóbulos laterales de la respuesta unidad correspondiente a un sistema confocal con desajuste mediante una elección adecuada de dos filtros pupilares pertenecientes a la familia de filtros superresolventes de la ec. 5.12. Con el objetivo de ejemplificar este efecto, en la fig. 5.8 representamos la respuesta unidad axial en irradiancia de una arquitectura confocal desenfocada según el parámetro $W_{20}^D = 2/3$ y utilizando una pareja de filtros de obturación $\mu = 0.2$. Observamos que la introducción de las pupilas superresolventes permiten reducir en un 30% la altura del lóbulo lateral más cercano al foco geométrico. Por lo tanto podemos establecer que mientras el desenfoco simétrico de los sistemas de iluminación y colección permiten sintonizar a voluntad la anchura del lóbulo central de la respuesta unidad a lo largo del eje óptico, la apodización que se ha propuesto, además, es capaz de reducir la altura relativa de los lóbulos secundarios.

Hasta ahora hemos observado que la combinación adecuada de apodización y desenfoco en microscopía confocal es una técnica de superresolución extremadamente potente. Sin embargo es posible adecuar el sistema a situaciones nuevas que son inimaginables en sistemas formadores de imágenes convencionales. La técnica que proponemos se basa en el hecho de que el desenfoco simétrico en un sistema confocal permite seleccionar la parte de cada respuesta unidad individual que contribuye al

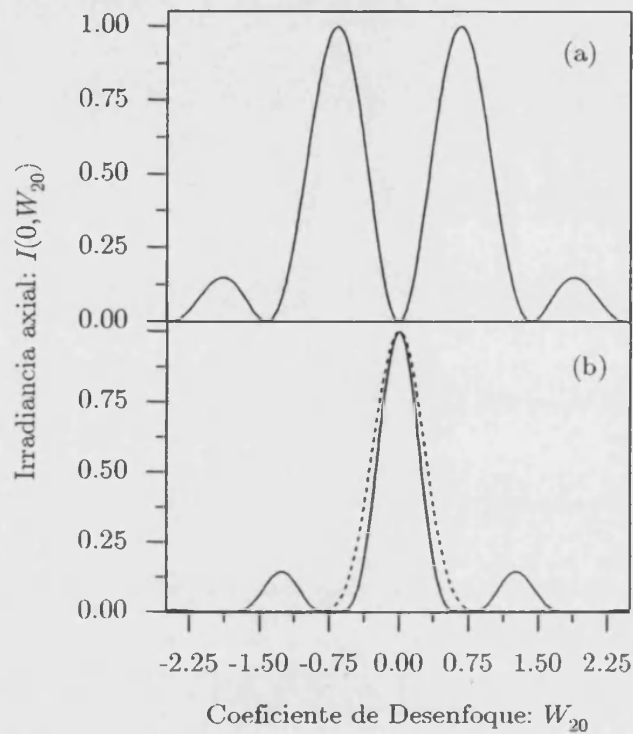


Figura 5.9. Distribución axial de irradiancia correspondiente a: a) la respuesta unidad de un sistema convencional apodizado con el filtro óptico $q(\zeta) = 2\zeta$, que ofrece un cero de irradiancia en el punto focal, y b) la respuesta unidad en difracción del sistema confocal de barrido que ha sido apodizado con estos filtros pupilares y, además, se le ha provocado un desajuste simétrico.

lóbulo central de la respuesta unidad global. Siguiendo este razonamiento, es necesario encontrar un filtro óptico que en un sistema convencional proporcione lóbulos secundarios muy altos y estrechos, de tal manera que, combinado con un desenfoque sobre un sistema confocal, se obtenga un efecto superresolvente notable. Además, hemos de escoger un filtro pupilar cuyo pico central sea pequeño, ya que éste genera un lóbulo exterior en la respuesta unidad de todo el sistema confocal. Como consecuencia, proponemos el uso de apodizadores de interferencia destructiva, caracterizados por una respuesta en difracción que en el punto focal poseen irradiancia nula.

Entre los elementos que componen la familia de filtros que proporcionan irradiancia nula en el punto focal, seleccionamos aquel que posee la pendiente mayor en el origen (Martínez-Corral *et al.* 1994), cuya transmitancia en amplitud viene dada por

$$q_{\alpha}(\zeta) = 2\zeta. \quad (5.13)$$

La respuesta unidad axial en irradiancia de este filtro, que corresponde al más simple de

los denominados filtros de Legendre (Ojeda-Castañeda *et al.* 1990), puede expresarse en términos de las funciones esféricas de Bessel de primer orden, la cual representamos en la fig. 5.9 (a). Podemos observar en el patrón axial una pareja de lóbulos exteriores muy altos y estrechos, dispuestos alrededor del punto focal de irradiancia cero. Si ahora hacemos uso de un par de estos apodizadores en un sistema confocal, que previamente ha sido desenfocado de forma adecuada, obtendremos, tal y como aparece en la fig. 5.9 (b), una respuesta unidad axial con un pico central muy estrecho. Se ha seleccionado el valor $W_{20}^D = 4/3$, de tal manera que el máximo de la izquierda que aparece en la respuesta unidad de uno de los subsistemas que componen el microscopio confocal coincide con el lóbulo de la derecha del otro subsistema. Es evidente que la técnica propuesta genera un pico central en irradiancia estrecho y con unos lóbulos laterales débiles y relativamente lejanos, hecho que tiene especial relevancia en la resolución axial de dos puntos imagen próximos.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones generales

Para tener un conocimiento completo de la estructura tridimensional del campo generado en el volumen imagen de un sistema óptico, es necesario determinar la respuesta unidad tridimensional que lo caracteriza. Aunque hasta ahora se ha logrado evaluar con éxito, a partir de la representación integral de Debye, el campo difractado por la abertura pupilar en la región focal de un sistema formador de imágenes, se han observado discrepancias notables en el caso de que el número de Fresnel de la geometría de focalización sea próximo a la unidad. Nosotros hemos reinterpretado la asimetría que sufre el volumen focal como la consecuencia de una transformación geométrica fruto de la acción de una lente delgada ideal. Su origen se encuentra en la aparición, sobre el plano focal imagen, de un factor de fase cuadrático que la representación de Debye no contempla. De esta manera, cada uno de los patrones transversales evaluados con la integral de Debye aparecen desplazados y reescalados transversalmente, en una magnitud que puede ser evaluada a través de la ecuación de correspondencia de Newton aplicado a las lentes. Consecuentemente, el máximo de irradiancia no se encuentra en el punto focal geométrico sino que sufre un desplazamiento en la dirección del eje óptico hacia la abertura difractante.

La magnitud del desplazamiento que experimenta el máximo de irradiancia axial depende directamente del número de zonas de Fresnel que la abertura cubre, vista desde el foco geométrico (Li y Wolf 1981). Sin embargo, no es éste el único parámetro que ha de tenerse en cuenta, sino que es necesario atender al patrón de difracción axial generado en las proximidades del foco geométrico. Consecuentemente, la función de mérito que determina el desplazamiento de foco ha de depender no sólo del número de Fresnel de la geometría, sino también de un parámetro que evalúe la habilidad de

la pupila para producir un efecto bien apodizante bien superresolvente a lo largo del eje óptico. De esta manera, hemos encontrado que el producto entre el número de Fresnel y la desviación estándar de cierta versión de la transmitancia en amplitud de la pupila del sistema, que se puede interpretar como una medida de la anchura efectiva de la pantalla, determina unívocamente el desplazamiento de foco sufrido por el haz focalizado.

El fenómeno del desplazamiento de foco que se ha observado en sistemas ópticos con un número de Fresnel próximo a la unidad también puede aparecer en haces esféricos, tales como el gaussiano, que tienen extensión transversal ilimitada. Como consecuencia de la imposibilidad de aplicar el formalismo anteriormente descrito a estos casos, hemos seguido la estrategia utilizada ya para el haz gaussiano (Carter 1982), en la que se puede definir un número de Fresnel gaussiano efectivo que, por un lado, revela cuando el haz es susceptible de sufrir el fenómeno del desplazamiento de foco y, por otro lado, determina su magnitud. Nosotros hemos podido hacer una extensión a cualquier haz esférico con foco en el sentido de la Óptica Geométrica, de la formulación que se propuso para la evaluación del desplazamiento del máximo axial en sistemas ópticos apodizados. Se ha definido un número de Fresnel efectivo que, de alguna manera, evalúa el número de zonas semiperiódicas de Fresnel que significativamente intervienen en el proceso de formación del patrón axial del haz esférico.

Resulta interesante extender toda la fenomenología del desplazamiento de foco encontrada en los haces esféricos. Por ejemplo, ya se ha constatado que existe un fenómeno de desplazamiento de foco múltiple en la placa zonal de Fresnel, bajo iluminación esférica uniforme (Jiang *et al.* 1993), con la restricción rigurosa de que el número de zonas de Fresnel sea cercano a la unidad. Nosotros hemos encontrado un efecto de desplazamiento de foco múltiple en lentes difractivas ideales, es decir, con un número idealmente infinito de zonas, bajo iluminación gaussiana. Para poder analizar este fenómeno, se ha desarrollado una formulación analítica que permite determinar el patrón axial en irradiancia de las placas zonales iluminadas con una fuente láser. Se observa que cuando la cintura abarca un gran número de zonas de la lente difractiva, la irradiancia a lo largo del eje ofrece una estructura de picos bien definidos, cuyas posiciones coinciden con los focos de la placa zonal circular. Sin embargo, cuando la cintura del haz gaussiano de iluminación disminuye hasta cubrir unas pocas zonas, se observa que la posición de los máximos axiales no coinciden con las posiciones de los focos de la lente difractiva, apareciendo un fenómeno de desplazamiento de foco múltiple. En este caso, es posible encontrar una expresión analítica sencilla, válida para cualquier lente difractiva, que permite evaluar la magnitud del desplazamiento que sufre cada máximo axial relativo a la posición del foco al que está asociado.

En la misma línea, hemos considerado el efecto producido por el truncamiento de un haz cilíndrico sobre la distribución axial de irradiancia en la región focal. Reconocemos que, en el caso que el truncamiento del haz se produzca únicamente en la dirección en la que se curva el frente de ondas, el máximo de irradiancia a lo largo del eje se desplaza en la dirección de la abertura difractante. De hecho, se ha podido dar una expresión analítica que permite evaluar el desplazamiento sufrido en términos del número de zonas cilíndricas de Fresnel que cubre la abertura. Sin embargo, cuando el truncamiento del haz en ambas direcciones del plano transversal a la dirección de propagación no es despreciable, puede llegar a ocurrir que el lóbulo central de la región focal se desplace en la dirección contraria. En esta situación reconocemos la existencia de un fenómeno de desplazamiento de foco en sentido inverso. Se puede demostrar que la aparición de este efecto depende exclusivamente del producto entre el número de Fresnel de la geometría cilíndrica de focalización y la relación entre las dimensiones transversales de la abertura rectangular difractante.

De todo lo comentado hasta el momento se deduce que un sistema formador de imágenes genera un patrón de difracción en el volumen imagen que puede ser evaluado a través de la representación integral de Debye únicamente cuando la pupila de salida está situada en el infinito, es decir, si el sistema es telecéntrico en el espacio imagen. En el caso que se desee obtener la imagen de un objeto que tiene estructura tridimensional, mediante una reconstrucción plano a plano de cada una de las secciones que lo componen, además hemos de exigir que el aumento axial sea independiente de la posición de cada una de las secciones del objeto, es decir, que sea un sistema afocal. Sin embargo, dado que la luz proveniente de los planos imagen adyacentes limita su capacidad para discriminar la información de una sección determinada del objeto tridimensional, se han de utilizar sistemas ópticos, tales como los confocales de barrido, que poseen una alta capacidad de seccionado óptico. En este caso concreto, es posible demostrar que, debido a que la reconstrucción de la imagen tridimensional se realiza punto a punto a través de un barrido secuencial del objeto, es posible emplear geometrías de focalización caracterizadas por números de Fresnel bajos (Sheppard 1986). Este caso se encuentra en algunas arquitecturas que emplean el modo de reflexión (Corle *et al.* 1986; Tiziani *et al.* 1996), de tal manera que, al igual que en sistemas convencionales, el máximo de irradiancia en el volumen imagen de un objeto puntual no coincide con el punto imagen geométrico, sino que sufre un desplazamiento en la dirección del eje óptico.

El efecto superresolvente tridimensional que proporciona un sistema confocal de barrido frente a un sistema convencional puede verse incrementado por medio de la apodización. Debido al carácter tridimensional de las muestras que se encuentran bajo observación en los microscopios confocales de barrido, resulta interesante diseñar filtros pupilares que generen una respuesta en difracción superresolvente a lo largo de las tres

direcciones del espacio. Para ello hemos presentado toda una familia de pantallas anulares binarias que, en promedio, resaltan simultáneamente las altas frecuencias espaciales tanto transversales como axiales. De hecho, estos dispositivos se pueden emplear tanto en sistemas ópticos convencionales como en aquellos que se utilizan para el almacenamiento de datos, pero alcanzan un grado óptimo de funcionamiento en los sistemas confocales de barrido para los que han sido diseñados.

Sin embargo, también hemos concebido otras técnicas de apodización que están diseñadas específicamente para arquitecturas confocales. El uso de filtros pupilares altera la respuesta unidad del microscopio confocal, determinada por el producto de dos funciones independientes, una asociada a la respuesta en difracción del sistema de iluminación y la otra asociada a la respuesta unidad 3D del sistema de colección. La estrategia que hemos seguido consiste en utilizar una pareja de filtros pupilares, uno que genera un efecto superresolvente transversalmente y el otro que produce superresolución axial. De esta manera, la anchura del lóbulo central en la dirección transversal está gobernada por la respuesta unidad del filtro superresolvente transversalmente, mientras que la anchura a lo largo del eje óptico viene determinada principalmente por el filtro superresolvente axial. La anchura del lóbulo central de la respuesta unidad en irradiancia disminuye, consecuentemente, en la dirección transversal y axial simultáneamente.

La habilidad que poseen los microscopios confocales de barrido para generar una respuesta en difracción superresolvente se debe básicamente a la contribución totalmente simétrica del sistema de iluminación y el de colección en el proceso de formación de la imagen 3D. Este hecho hace posible la utilización de una nueva configuración basada en la apodización asimétrica (Cheng y Siu 1991). De esta manera, provocamos una respuesta asimétrica de cada uno de los sistemas que componen el microscopio confocal a través de la utilización de filtros pupilares hermíticos, resultando en conjunto una estructura simétrica en la región focal del sistema confocal de barrido. Se ha demostrado que, en el caso del eje óptico, el proceso para conseguir un buen comportamiento superresolvente se hace en detrimento de la eficiencia luminosa, razón por la cual se elige una solución de compromiso consistente en el uso de filtros de fase de tres niveles que, a pesar de la sencillez de su diseño, permiten obtener una ganancia en la resolución del 30%. Esta estrategia puede ser también adecuada en el caso concreto que se desee obtener un efecto superresolvente sobre el plano transversal imagen. En este caso, se observa que a lo largo de uno de los ejes de simetría del sistema, la respuesta unidad tiene un comportamiento superresolvente, mientras que sucede un efecto opuesto en la dirección perpendicular, cosa que los hace muy interesantes en patrones altamente direccionales.

Finalmente, se ha propuesto una técnica muy simple de superresolución axial que

consiste en introducir un leve desajuste simétrico respecto al plano confocal, efectuado sobre el eje óptico de los sistemas de iluminación y colección, resultando en una geometría cuasi-confocal. De esta manera, es posible sintonizar a voluntad la anchura del lóbulo central, a lo largo del eje óptico, correspondiente a la respuesta unidad del sistema confocal. Como consecuencia de la elevada altura relativa que los máximos laterales alcanzan, hemos propuesto el uso de filtros anulares superresolventes axialmente que, por una parte, mantienen el poder resolutivo del sistema y, por la otra, reducen considerablemente el efecto negativo de los lóbulos secundarios. Además, esta técnica permite un nuevo concepto de apodización, que denominamos de interferencia destructiva, que se basa en la utilización de filtros pupilares que generan un cero axial en el plano imagen. Dado que los lóbulos secundarios son estrechos, podemos provocar un desajuste simétrico controlado para desplazar uno de ellos sobre el eje hacia el plano imagen de tal manera que, en esta nueva configuración, éste actúa como el lóbulo central de la respuesta unidad.

6.2 Perspectivas de futuro

El estudio de la distribución tridimensional de luz generada en la región focal de los sistemas ópticos, tanto convencionales como confocales, continuará siendo al centro de nuestra atención en los próximos años. El objetivo más inmediato será el control, a través de agentes externos tales como filtros pupilares, y el diseño de distintas geometrías de focalización que permitan, por ejemplo, la obtención de una mayor información proveniente de los objetos sobre los que se desea obtener su imagen. Esta estrategia se centra en tres procesos físicos básicos: la apodización del haz que ilumina la muestra, la interacción de la radiación con el objeto, y la discriminación de la luz emitida por la muestra y conducida hacia el sistema detector.

En este sentido, se pretende hacer un estudio exhaustivo de los mecanismos de focalización de las lentes difractivas, bajo cualquier tipo de iluminación no uniforme, haciendo especial hincapié en el régimen de grandes distancias focales, en el cual la representación clásica de Debye no es adecuada. Se tiene la fuerte convicción de que el campo axial generado en torno a los focos de la placa zonal se puede describir, de forma genérica, en función de un término interferencial, que únicamente depende de la iluminación empleada, y un término de difracción, sobre el que se manifiestan las características de la celda unidad. También es nuestra intención aplicar estos conceptos a sistemas ópticos que utilizan redes de microlentes para conseguir un acceso en paralelo a todo el volumen objeto 3D (Tiziani y Uhde 1994; Yoon *et al.* 1996).

La experiencia acumulada en el campo de la formación de imágenes y del estudio del

volumen focal en sistemas ópticos convencionales hará posible un mayor acercamiento a los dispositivos ópticos de simetría cilíndrica. Esta disciplina, que actualmente recobra gran auge por su aplicabilidad en, por ejemplo, sistemas ópticos integrados, será abordada con la intención de adquirir en concreto un conocimiento más detallado de los mecanismos que determinan la aparición del fenómeno de desplazamiento de foco en geometrías con iluminación no uniforme, o aquellas en las que se utilizan pantallas difractantes, tanto unidimensionales como bidimensionales, para generar una cierta distribución espacial de luz en la región focal. De hecho, este interés por el estudio de la región focal en sistemas no estándares, como las lentes difractivas, que se caracterizan por formar estructuras focales discretas a lo largo del eje óptico, o bien las cilíndricas, que generan rectas focales transversales, se pretende extender a situaciones nuevas donde se puede hablar de líneas focales, tales como anillos contenidos sobre un plano transversal a la dirección de propagación (Bouchal *et al.* 1995; Zapata-Rodríguez *et al.* 1999), o estructuras aún más complicadas. En última instancia, nuestro objetivo es la determinación de una constante, que en el caso de haces con foco corresponde al número de Fresnel efectivo, el cual permita de forma generalizada identificar los límites del régimen de Debye.

Dentro del marco de la difracción de objetos tridimensionales, encontramos un gran atractivo en el análisis y posterior caracterización del campo a través de la función de transferencia 3D, la cual tiene sentido en sistemas LSI 3D. En esta misma línea, se tiene la fuerte convicción de poder controlar a voluntad, siempre bajo los límites que impone la ecuación de ondas, cualquier distribución espacial de luz generada por propagación. Se intuye que existe un gran potencial en el campo del procesado de, por ejemplo, imágenes 3D (Lohmann *et al.* 1997), patrones transversales de Fresnel, etc. Además, se está avanzando en la aplicabilidad, en conexión con la difracción débil 3D, de la aproximación de Born a primer orden a otros sistemas físicos, tales como los medios no lineales, y poder así adaptar apropiadamente ciertas técnicas para su ulterior caracterización (Ferrando *et al.* 1999).

Sin embargo, el mayor esfuerzo que se está llevando a cabo se gesta en el ámbito de la microscopía confocal de barrido. Por un lado, se desea encontrar las combinaciones de filtros pupilares que optimicen las arquitecturas confocales propuestas en esta Memoria (Kowalczyk *et al.* 1999). La obtención de resultados altamente satisfactorios y su implementación práctica será, pues, el *alma mater* de nuestro trabajo en el futuro. Es por ello que se está haciendo un gran esfuerzo por adecuar nuestras propuestas a situaciones prácticas concretas en campos tan diversos como la oftalmología (Massig *et al.* 1994) o la microbiología (Wilson 1990).

Por último, se están iniciando toda un serie de pasos que conducen a la propuesta

de alternativas de superresolución complementarias a la apodización. Entre ellas se encuentra el uso de procesos de absorción y emisión luminosa altamente no lineales (Gu 1996; Kowalczyk *et al.* 1998) que permiten discriminar sobremanera la información que de un objeto se puede obtener a través de la luz que emite y forma su imagen. Por otro lado, se pretende tener acceso a información proveniente del objeto que, debido a la difracción, un sistema de microscopía no puede recoger, mediante la utilización de sistemas de iluminación no focalizantes, los cuales permiten una mayor velocidad en la reconstrucción del objeto 3D mediante un dispositivo de adquisición de datos no puntual (Zapata-Rodríguez *et al.* 1999). Finalmente, se pretende hacer una incursión en los sistemas confocales que utilizan redes de microlentes, donde se produce un barrido de varios puntos del objeto en paralelo.



Bibliografía

- AIRY, G.B. (1835). "On the diffraction of an object-glass with circular aperture". *Trans. Camb. Phil. Soc.* **5**, 283–291.
- ANDRÉS, P., M. MARTÍNEZ-CORRAL y J. OJEDA-CASTAÑEDA (1993). "Off-axis focal shift for rotationally nonsymmetric screens". *Opt. Lett.* **18**, 1290–1293.
- ARIMOTO, A. (1976). "Intensity distribution of aberration-free diffraction patterns due to circular apertures in large F-number optical systems". *Optica Acta* **23**, 245–250.
- BACHYNSKI, M.P. y G. BEKEFI (1957). "Study of optical diffraction images at microwave frequencies". *J. Opt. Soc. Am.* **47**, 428–438.
- BARAKAT, R. (1961). *The intensity distribution and total illumination of aberration-free diffraction images*, en *Progress in Optics*, volumen 1, pp. 67–108. North-Holland Publ. Co.
- BARAKAT, R. (1962). "Application of apodization to increase two-point resolution by the Sparrow criterion. I. Coherent illumination". *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 276–283.
- BELLAND, P. y J.P. CRENN (1982). "Changes in the characteristics of a Gaussian beam weakly diffracted by a circular aperture". *Appl. Opt.* **21**, 522–527.
- BEREK, M. (1927). "Über kohärenz und konsonanz des lichtes". *Z. Phys.* **40**, 420–450.
- BOIVIN, A. (1952). "On the theory of diffraction by concentric arrays of ring-shaped apertures". *J. Opt. Soc. Am.* **42**, 60–64.
- BORN, M. y E. WOLF (1980). *Principles of Optics*. Pergamon.
- BOUCHAL, Z., J. WAGNER y M. OLIVÍK (1995). "Bessel beams in the focal region". *Opt. Eng.* **34**, 1680–1687.
- BOUGHON, P., B. DOSSIER y P. JACQUINOT (1946). *C.R. Acad. Sci. Paris* **223**, 661.

- CARTER, W.H. (1982). "Focal shift and concept of effective Fresnel number for a Gaussian laser beam". *Appl. Opt.* **21**, 1989–1994.
- CHENG, L. y G.G. SIU (1991). "Asymmetric apodization". *Maes. Sci. Technol.* **2**, 198–202.
- CHMELÍK, R. (1996). "Analytic description of wave fields in focal regions of diffractive lenses". *J. Mod. Opt.* **43**, 1463–1471.
- COLLET, E. y E. WOLF (1980). "Symmetry properties of focused fields". *Opt. Lett.* **5**, 264–266.
- CORLE, T.R., C.-H. CHOU y G.S. KINO (1986). "Depth response of confocal optical microscopes". *Opt. Lett.* **11**, 770–772.
- COUDER, A. y P. JACQUINOT (1939). *C.R. Acad. Sci. Paris* **208**, 1639.
- COX, I.J., C.J.R. SHEPPARD y T. WILSON (1982). "Reappraisal of arrays of concentric annuli as superresolving filters". *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 1287–1291.
- DEBYE, P. (1909). "Das verhalten von lichtwellen inder nähe eines brennpunktes oder einer brennlinie". *Ann. Phys. Lpz.* **30**, 755–776.
- DEKKER, A.J. Den y Van Den BOS (1997). "Resolution: a survey". *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 547–557.
- D.N. SITTER, Jr. y W.T. RHODES (1990). "Three-dimensional imaging: a space invariant model for space variant systems". *Appl. Opt.* **29**, 3789–3794.
- ERKKILA, J.H. y M.E. ROGERS (1981). "Diffracted fields in the focal volume of a converging wave". *J. Opt. Soc. Am.* **71**, 904–905.
- FARNELL, G.W. (1957a). "Calculated intensity and phase distribution in the image space of a microwave lens". *Can. J. Phys.* **35**, 777–783.
- FARNELL, G.W. (1957b). "Calculated phase distribution in the image space of a microwave lens". *Can. J. Phys.* **35**, 777–784.
- FARNELL, G.W. (1958). "On the axial phase anomaly for microwave lenses". *J. Opt. Soc. Am.* **48**, 643–647.
- FERRANDO, A., M. ZACARÉS y P. Fernández DE CÓRDOBA (1999). "Solitones en sistemas con dispersión fuertemente compensada". En *XXVII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física*, Valencia.
- FRANCIA, G. Toraldo Di (1952). "Super-gain antennas and optical resolving power". *Nuovo Cimento Suppl.* **9**, 426–435.
- FRIEDEN, B.R. (1967). "Optical transfer of the three-dimensional object". *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 56–66.

- GASKILL, J.D. (1978). *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*. John Wiley & Sons.
- GIVENS, M.P. (1982). "Focal shifts in diffracted converging spherical waves". *Opt. Commun.* **41**, 145–148.
- GOODMAN, J.W. (1968). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill.
- GOUBAU, G. (1963). *Electromagnetic theory and antennas*, capítulo Optical relations for coherent wave beams, pp. 907–918. Macmillan.
- GU, M. (1996). "Resolution in three-photon fluorescence scanning microscopy". *Opt. Lett.* **21**, 988–990.
- GU, M., C.J.R. SHEPPARD y H. ZHOU (1993). "Optimization of axial resolution in confocal imaging using annular pupils". *Optik* **93**, 87–90.
- GUSINOW, M.A., M.E. RILEY y M.A. PALMER (1977). "Focusing in a large F-number optical system". *Opt. Quantum Electron.* **9**, 465–471.
- HAMED, A.M. y J.J. CLAIR (1983). "Studies on optical properties of confocal scanning optical microscope using pupils with radially transmission distribution". *Optik* **65**, 209–218.
- HAMILTON, D.K. y T. WILSON (1982). *Appl. Phys. B* **27**, 211.
- HEGEDUS, Z.S. (1985). "Annular pupil arrays. Application to confocal scanning". *Opt. Acta* **32**, 815–826.
- HEGEDUS, Z.S. y V. SARAFIS (1986). "Superresolving filters in confocally scanned imaging systems". *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1892–1896.
- HESSLER, T. y R.E. KUNZ (1997). "Relaxed fabrication tolerances for low-Fresnel-number lenses". *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 1599–1606.
- HOLMES, D.A., J.E. KORCA y P.V. AVIZONIS (1972). "Parametric study of apertured focused Gaussian beams". *Appl. Opt.* **11**, 565–574.
- HOPKINS, H.H. (1953). "On the diffraction theory of optical images". *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A217**, 408–432.
- HOUSTON, W.V. (1927). "A compound interferometer for fine structure work". *Phys. Rev.* **29**, 478–484.
- HUFFORD, M.E. y H.T. DAVIS (1926). *Phys. Rev.* **33**, 589.
- JACQUINOT, P. y B. ROIZEN-DOSSIER (1964). *Progress in Optics*, volumen 3, capítulo Apodisation, pp. 29–186. North-Holland.

- JIANG, D.Y. y J. STAMNES (1997). "Focusing at low Fresnel numbers in the presence of cylindrical or spherical aberration". *Pure Appl. Opt.* **6**, 85–96.
- JIANG, X., S. WANG, E. BERNABEU y J. ALDA (1993). "ABCD matrix and focal shift for Fresnel zone plates". *Optik* **95**, 16–18.
- JÓZWICKI, R. (1983). "Parametric analysis of truncated gaussian beams". *Optica Acta* **30**, 1011–1028.
- KIMURA, S. y T. WILSON (1993). "Effect of axial pinhole displacement in confocal microscopes". *Appl. Opt.* **32**, 2257–2261.
- KNOPP, J. y M.J. BECKER (1978). "Virtual Fourier transform as an analytical tool in Fourier optics". *Appl. Opt.* **17**, 1669–1670.
- KOGELNIK, H. (1965). "Imaging of optical modes-resonators with internal lenses". *Bell Syst. Technol. J.* **44**, 455–494.
- KORONKEVICH, V.P. y I.G. PAL'CHIKOVA (1992). "Modern zone plates". *Optoelectr., Instrum. & Data Process.* **1**, 86–100.
- KOWALCZYK, M., M. MARTÍNEZ-CORRAL y C. ZAPATA-RODRÍGUEZ (1999). "Superresolution in confocal imaging systems by means of Doubly Hermitian phase-only pupil filters". (en redacción).
- KOWALCZYK, M., M. MARTÍNEZ-CORRAL, C. ZAPATA-RODRÍGUEZ y P. ANDRÉS (1998). "Phase pupil filters for improvement of the axial resolution in confocal scanning microscopy". *Opt. Appl.* **23**, 127–137.
- KOWALCZYK, M., C. ZAPATA-RODRÍGUEZ y M. MARTÍNEZ-CORRAL (1998, Julio). "Two-photon excited fluorescence via inter- and intramolecular energy transfer with application to confocal scanning fluorescence microscopy". En *The Jablonski Centennial Conference on Luminiscence and Photophysics*, Torun (Polonia).
- LI, Y. (1992). "Focal shift formula for focused, apertured Gaussian beams". *J. Mod. Opt.* **39**, 1761–1764.
- LI, Y. y H. PLATZER (1983). "An experimental investigation of diffraction patterns in low-Fresnel-number focusing systems". *Optica Acta* **30**, 1621–1643.
- LI, Y. y E. WOLF (1981). "Focal shifts in diffracted converging spherical waves". *Opt. Commun.* **39**, 211–215.
- LI, Y. y E. WOLF (1982). "Focal shift in focused truncated Gaussian beams". *Opt. Commun.* **42**, 151–156.
- LI, Y. y E. WOLF (1984). "Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different Fresnel numbers". *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 801–808.

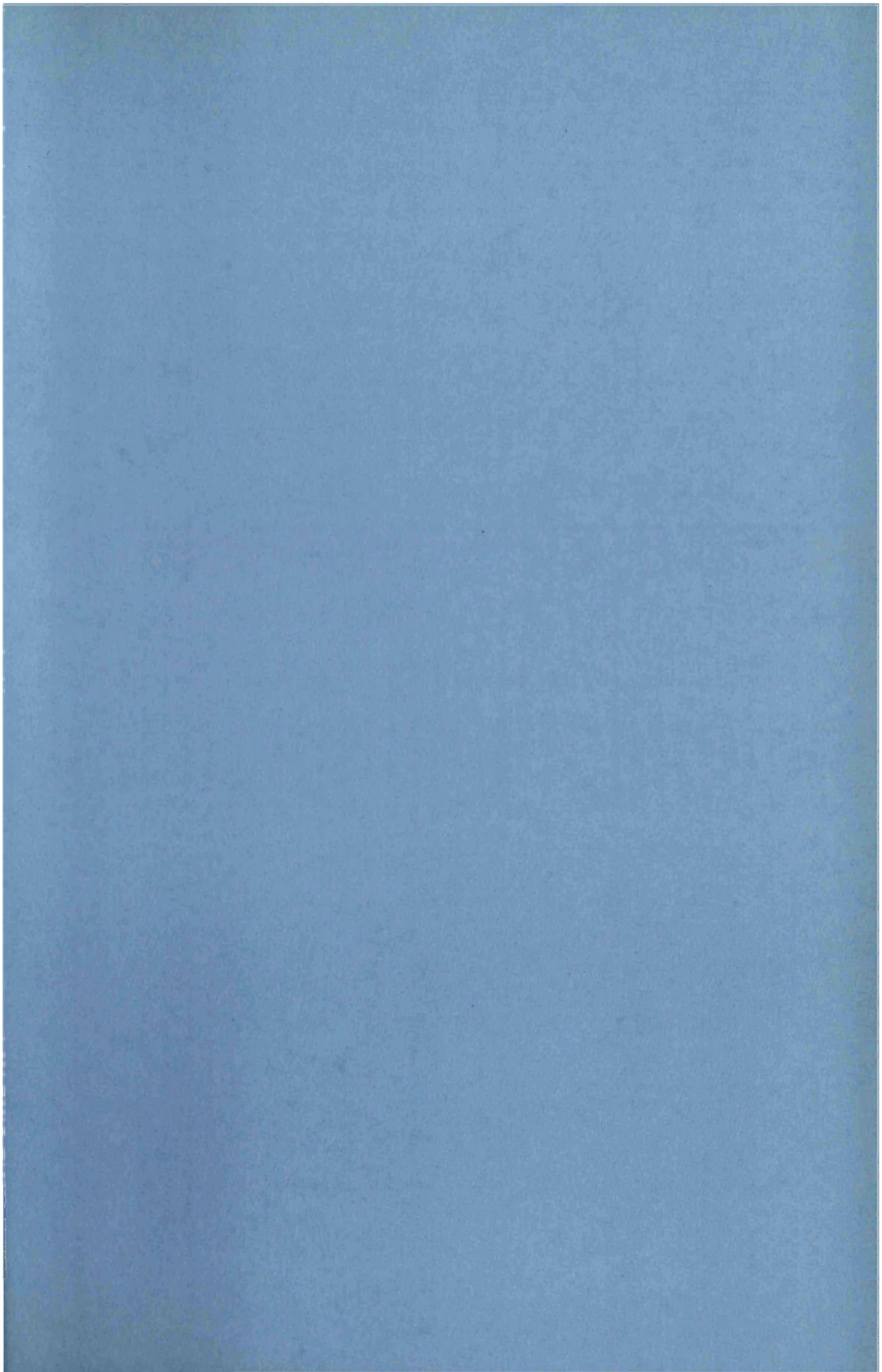
- LINFOOT, E.H. y E. WOLF (1953). "Diffraction images in systems with an annular aperture". *Proc. Phys. Soc. B* **66**, 145-149.
- LINFOOT, E.H. y E. WOLF (1956). "Phase distribution near focus in an aberration-free diffraction image". *Proc. Phys. Soc. B* **69**, 823-832.
- LOHMANN, A. (1956). "Optische einseitenbandübertragung angewandt auf das Gabor-mikroskop". *Opt. Acta* **3**, 97-99.
- LOHMANN, A. (1958). *Opt. Acta* **5**, 3.
- LOHMANN, A.W. (1978). "Three-dimensional properties of wave-fields". *Optik* **51**, 105-117.
- LOHMANN, A.W., D. MENDLOVIC, Z. ZALEVSKY y G. SHABTAY (1997). "The use of Ewald's surfaces in triple correlation optics". *Opt. Commun.* **144**, 170-172.
- LOHMANN, A.W. y D.P. PARIS (1967). "Variable Fresnel zone patterns". *Appl. Opt.* **6**, 1567-1570.
- LOMMELE, E. (1885). "Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden oeffnung". *Abh. Bayer Akad. Math. Naturwiss.* **15**, 229-328.
- LUKOSZ, W. (1966). "Optical systems with resolving powers exceeding the classical limit". *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1463-1472.
- LUMMER, O. y F. REICHE (1910). *Die lehre von der bildentstehung im mikroskop von Ernst Abbe*. Vieweg.
- LUNEBURG, R.K. (1964). *Mathematical theory of Optics*. University of California Press, Berkeley.
- MAGIERA, A. (1992). "The axial response of the intensity in confocal microscopes with apodization". *Optik* **91**, 1-4.
- MAHAJAN, V.N. (1983). "Axial irradiance and optimum focusing of laser beams". *Appl. Opt.* **22**, 3042-3053.
- MARTÍNEZ-CORRAL, M. (1993). *Comportamiento axial del campo difractado por pupilas sin simetría de revolución. Aplicación al diseño de apodizadores*. Tesis Doctoral, Universidad de Valencia.
- MARTÍNEZ-CORRAL, M., P. ANDRÉS y J. OJEDA-CASTAÑEDA (1994). "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils". *Appl. Opt.* **33**, 2223-2229.
- MARTÍNEZ-CORRAL, M., P. ANDRÉS, J. OJEDA-CASTAÑEDA y G. SAAVEDRA (1995). "Tunable axial superresolution by annular binary filters. Application to confocal microscopy". *Opt. Commun.* **119**, 491-498.

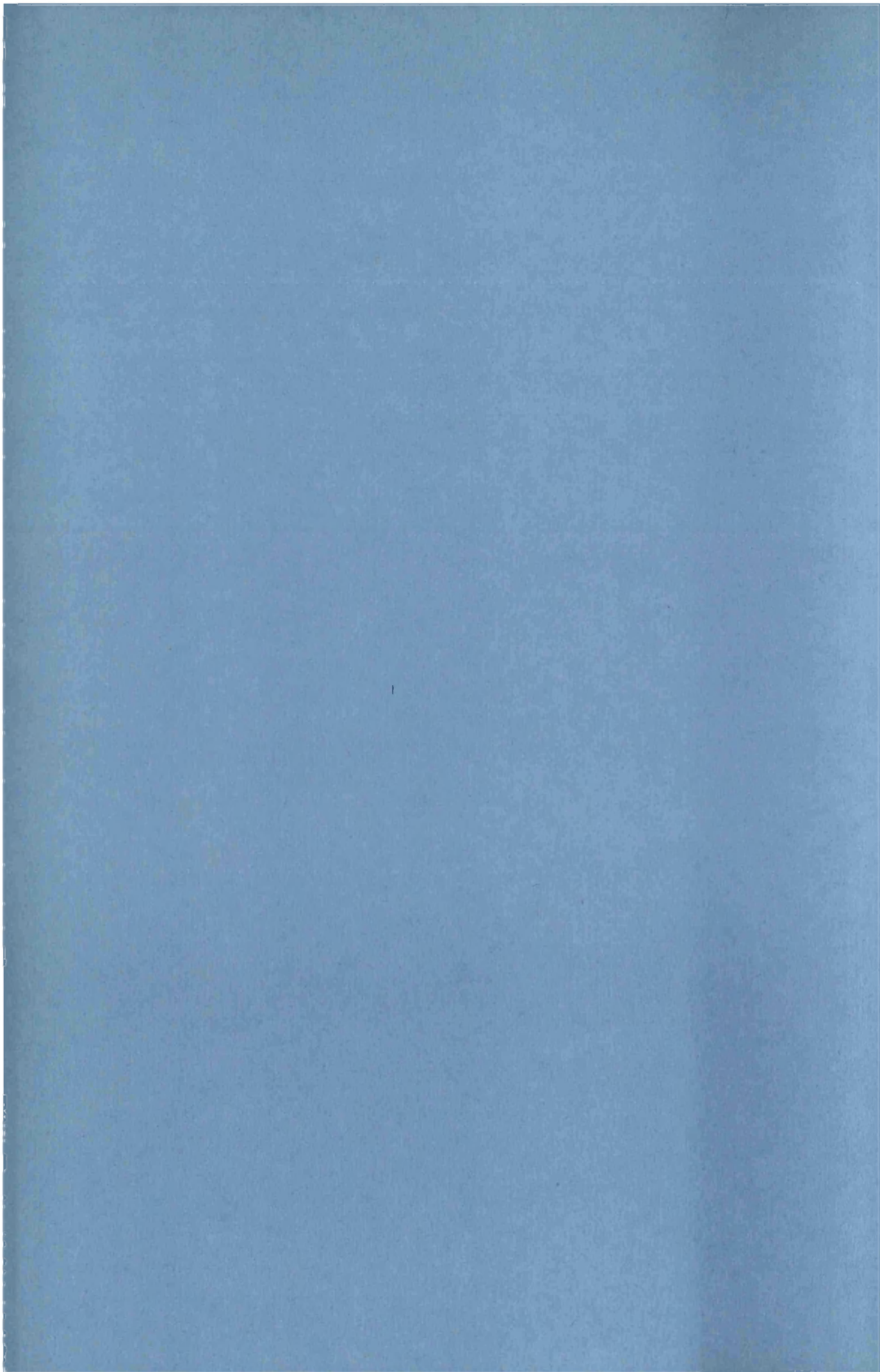
- MARTÍNEZ-CORRAL, M., M. KOWALCZYK, C. ZAPATA-RODRÍGUEZ y P. ANDRÉS (1998). "Tunable axial resolution in confocal scanning microscopy by controlled symmetrical defocusing". *Opt. Appl.* **23**, 213–225.
- MASSIG, J.H., M. PREISLER, A.R. WEGENER y G. GAIDA (1994). "Real-time confocal laser microscope for examination and diagnosis of the eye in vivo". *Appl. Opt.* **33**, 690–694.
- MCCUTCHEM, C.W. (1964). "Generalized aperture and the three-dimensional diffraction image". *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 240–244.
- McKECHNIE, T.S. (1972). "The effect of condenser obstruction on the two-point resolution of a microscope". *Opt. Acta* **19**, 729–737.
- MILONNI, P.W. y J.H. EBERLY (1988). *Lasers*. John Wiley & Sons.
- MINSKY, M. (1961). "Microscopy Apparatus". United States Patent no. 3.013.467 (presentado en Nov. de 1957).
- NIE, A.G. Van (1964). "Rigorous calculation of the electromagnetic field for wave beams". *Philips Res. Rep.* **19**, 378–394.
- NOMARSKI, G. (1975). *J. Opt. Soc. Am.* **21**, 1166.
- OJEDA-CASTAÑEDA, J., P. ANDRÉS y M. MARTÍNEZ-CORRAL (1990). "Zone plates with cells apodized by Legendre profiles". *Appl. Opt.* **29**, 1299–1303.
- OJEDA-CASTAÑEDA, J., M. MARTÍNEZ-CORRAL, P. ANDRÉS y A. PONS (1994). "Strehl ratio versus defocus for noncentrally obscured pupils". *Appl. Opt.* **33**, 7611–7616.
- OSTERBERG, H. (1950). "Microscope imagery and interpretations". *J. Opt. Soc. Am.* **40**, 295.
- OSTERBERG, H. y J. WILKINS (1949). "The resolving power of a coated objective". *J. Opt. Soc. Am.* **39**, 553–557.
- PAPOULIS, A. (1968). *Systems and transforms with applications in Optics*. McGraw-Hill.
- PITCH, J. (1931). *Optische Abbildung*. Vieweg.
- RAYLEIGH, Lord (1874). "On the manufacture and theory of diffraction-gratings". *Philos. Mag.* **47**, 81–93.
- RAYLEIGH, Lord (1879). "Investigations in optics, with special reference to the spectroscopy". *Philos. Mag.* **8**, 403–411.
- SALES, T.R.M. y G.M. MORRIS (1997). "Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses". *Appl. Opt.* **36**, 253–257.

- SCHUSTER, A. (1924). *Theory of Optics*. Arnold.
- SCHWARTZSCHILD, K. (1898). *Sitzb. München Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.* **28**, 271.
- SHEPPARD, C.J.R. (1986). "Imaging in optical systems of finite Fresnel number". *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1428–1432.
- SHEPPARD, C.J.R. y A. CHOUDHURY (1977). "Image formation in the scanning microscope". *Opt. Acta* **24**, 1051–1073.
- SHEPPARD, C.J.R. y C.J. COGSWELL (1990). "Three-dimensional image formation in confocal microscopy". *J. Microsc.* **159**, 179–194.
- SHEPPARD, C.J.R. y M. GU (1991). "Improvement of axial resolution in confocal microscopy using an annular pupil". *Opt. Commun.* **84**, 7–13.
- SHEPPARD, C.J.R. y Z.S. HEGEDUS (1988). "Axial behavior of pupil-plane filters". *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 643–647.
- SHEPPARD, C.J.R. y T. WILSON (1978). "Depth of field in the scanning microscope". *Opt. Lett.* **3**, 115–117.
- SHEPPARD, C.J.R. y T. WILSON (1979). *Appl. Opt.* **18**, 3764.
- SIEGMAN, A.E. (1986). *Lasers*. University Science Books, Mill Valley.
- SIU, G.G., L. CHENG, D.S. CHIU y K.S. CHAU (1994). "Improved side-lobe suppression in asymmetric apodization". *J. Phys. D: Appl. Phys.* **27**, 459–463.
- SMITH, H.M. (1969). *Principles of holography*. John Wiley & Sons.
- SPARROW, C.M. (1916). "On spectroscopic resolving power". *Astrophys. J.* **44**, 76–86.
- STAMNES, J.J. (1986). *Waves in focal regions*. Adam Hilger.
- STAMNES, J.J. y B. SPIELKAVIK (1981). "Focusing at small angular apertures in the Debye and Kirchhoff approximations". *Opt. Commun.* **40**, 81–85.
- STOCKSETH, P.A. (1969). "Properties of a defocused optical system". *J. Opt. Soc. Am.* **59**, 1314–1321.
- STREIBL, N. (1984). "Fundamental restrictions for 3-D light distributions". *Optik* **66**, 341–354.
- STREIBL, N. (1985). "Three-dimensional imaging by a microscope". *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, 121–127.
- STRUTT, J.W. (1899). *Scientific papers*, volumen 1, capítulo Investigations in Optics, with special reference to the spectroscope, pp. 416–459. Cambridge U. Press.

- STRUVE, H. (1886). *Mém. Acad. St. Petersbourg* **34**, 1.
- SZAPIEL, S. (1983). "Maréchal intensity formula for small-Fresnel-number systems". *Opt. Lett.* **8**, 327–329.
- TAYLOR, C.A. y B.J. THOMPSON (1958). "Attempt to investigate experimentally the intensity distribution near the focus in the error-free diffraction patterns of circular and annular apertures". *J. Opt. Soc. Am.* **48**, 844–850.
- THOMPSON, B.J. (1965). "Diffraction by semitransparent and phase annuli". *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 145–149.
- TIZIANI, H.J., R. ACHI, R.N. KRÄMER y L. WIEGERS (1996). "Theoretical analysis of confocal microscopy with microlenses". *Appl. Opt.* **35**, 120–125.
- TIZIANI, H.J. y H.-M. UHDE (1994). "Three-dimensional analysis by a microlens-array confocal arrangement". *Appl. Opt.* **33**, 567–572.
- WANG, W., A.T. FRIBERG y E. WOLF (1995). "Structure of focused fields in systems with large Fresnel numbers". *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1947–1953.
- WILKINS, J.E. (1950). "The resolving power of a coated objective". *J. Opt. Soc. Am.* **40**, 222–224.
- WILSON, T. (1990). *Confocal Microscopy*. Academic Press Limited.
- WILSON, T. (1993). "Confocal microscopy with detector offset". *J. Mod. Opt.* **40**, 401–412.
- WILSON, T. y S.J. HEWLETT (1990). "The use of annular pupil plane filters to tune the imaging properties in confocal microscopy". *J. Mod. Opt.* **37**, 2025–2046.
- WOLF, E. (1951). "The diffraction theory of aberrations". *Rep. Prog. Phys.* **14**, 95–120.
- WOLF, E. y Y. LI (1981). "Conditions for the validity of the Debye integral representation of focused fields". *Opt. Commun.* **39**, 205–210.
- YOON, G.Y., T. JITSUNO, M. NAKATSUKA y S. NAKAI (1996). "Shack Hartmann wave-front measurement with a large F-number plastic microlens array". *Appl. Opt.* **35**, 188–192.
- YOUNG, J.Z. y F. ROBERTS (1951). *Nature* **167**, 231.
- ZAPATA-RODRÍGUEZ, C.J. (1997). "Superresolución en sistemas confocales de barrido". Tesina, Universidad de Valencia.
- ZAPATA-RODRÍGUEZ, C.J., M. MARTÍNEZ-CORRAL y P. ANDRÉS (1999). *Low-Fresnel-number behavior in reflection-mode confocal scanning microscopy*. (en redacción).

- ZAPATA-RODRÍGUEZ, C.J., M. MARTÍNEZ-CORRAL, P. ANDRÉS y L. MUÑOZ (1999). "Axial superresolution by oblique two-dimensional nondiffracting cos beam illumination". En *Focus on Microscopy*, EMBL. Heidelberg (Alemania).
- ZAPATA-RODRÍGUEZ, C.J., G. SAAVEDRA, M. MARTÍNEZ-CORRAL y W.D. FURLAN (1999). "Focal shift in electromagnetic waves with off-axial focus". (en redacción).
- ZERNIKE, F. y B.R.A. NIJBOER (1949). *Théorie des Images Optiques*. Editions de la Revue d'Optique.





Anexo

Publicaciones

Publicación I

**Gaussian imaging transformation for
the paraxial Debye formulation of
the focal region in a
low-Fresnel-number optical system**

Journal of the Optical Society of America A (enviado)

Gaussian imaging transformation for the paraxial Debye formulation of the focal region in a low-Fresnel-number optical system

Carlos J. Zapata Rodríguez, Pedro Andrés, and Manuel Martínez-Corral
Department of Optics. University of Valencia.
E-46100. Burjassot (Spain).

September 23, 1999

Abstract

The Debye formulation of focused fields has been systematically used to evaluate, for example, the point spread function of an optical imaging system. According to this approximation, the focal wavefield exhibits some symmetries about the geometrical focus. However, certain discrepancies arise when the Fresnel number as viewed from focus is close to unity. In this case, we should use the Kirchhoff formulation to evaluate accurately the three-dimensional amplitude distribution of the field in the focal region. In this paper we give some important remarks on both diffraction theories. In the end, we demonstrate that, in the paraxial regime, given a defocused transverse pattern in the Debye approximation, it is possible to find a similar pattern but magnified and situated at another plane within the Kirchhoff theory. Moreover, we may evaluate this correspondance as the action of a virtual thin lens located at the focal plane, and whose focus is situated at the axial point of the aperture plane. As a result, we give a geometrical interpretation of the focal shift effect and present a brief comment on the problem of the best focus location.

1 Introduction

The knowledge of the three-dimensional light distribution in the vicinities of the focus is of particular importance, for example, in estimating the transverse resolution power [1] and the tolerance in the setting of the receiving plane in an optical imaging system [2]. The properties of the out-of-focus monochromatic images of a point source given by a diffraction-limited optical system with a circular exit pupil were treated by Debye [3], who established that the field is a superposition of plane waves whose propagation vectors fall inside the geometrical cone formed by drawing straight lines from the focal point through the edge of the aperture [4]. Also, he derived certain

general features of the diffracted field both near and far away from the focus. For example, he found that the amplitude and hence also the intensity possess inversion symmetry about the focus, where the point of maximum intensity in the focal region is located [5]. This result was later extended to the more general class of monochromatic scalar wave fields that have a focus in the sense of geometrical optics [6].

In a number of publications that appeared in recent years it was demonstrated that the classic Debye theory regarding the amplitude distribution in the focal region does not predict correct results under all circumstances. Based on the Kirchhoff approximation, which assumes that the field inside the aperture is set equal to the field that would exist there in the absence of the aperture and vanishes outside the aperture, Arimoto [7] and later Stamnes and Spjelkavik [8] and Li and Wolf [9] found that the intensity distribution about the geometrical focal plane no longer exhibits the well-known symmetry properties. Moreover, the point of maximum intensity of the diffracted wave may not be at the geometrical focus of the incident wave, but may be located closer to the aperture. Experimental evidence of this phenomenon has been published elsewhere [10, 11].

This situation may be understood if we bear in mind that the Debye approximation results when we in addition to the Kirchhoff approximation make the assumption that the aperture is infinitely distant from the focal region [4]. Wolf and Li [12] derived a simple condition under which the Debye integral representation may be expected to give a good approximation of the structure of a focused field. For low-aperture systems this condition may be replaced by the requirement that the number of Fresnel zones in the aperture, when viewed from the geometrical focus, be large compared with unity. Simultaneously, they showed [9] that the relative focal shift, that is, the ratio of the shift of the point of maximum intensity to the distance between the geometrical focus and the plane of the aperture only depends on the Fresnel number. Recently, it was formulated the concept of the effective Fresnel number which may be applied to any rotationally nonsymmetric scalar field that has a paraxial focus [13].

In the case of a circular clear aperture, the expression for the field in the focal region based on the Fresnel-Kirchhoff approximation may be expressed, as with the paraxial Debye approximation, in terms of the Lommel functions, but with arguments that are scaled by a certain factor [8, 14]. In the present paper we demonstrate that, from the basis that both formulations are mathematically identical, even with aberrated or apodized focused beams, given a defocused diffraction pattern in the Debye approximation, we find a similar transverse pattern in the Kirchhoff approximation but magnified and located at another position. In section 4 we interpret this three-dimensional mapping as the action of a negative thin lens with a focal length given by the radius of curvature of the incident wavefield, and situated at the focal plane. Finally, in section 5 we treat the focal shift effect

from a geometrical point of view, and we discuss the concept of the plane of best focus in image-forming optical systems.

2 Description of the field in the focal volume

Let us start by considering a scalar monochromatic spherical wave, emerging from an opaque screen of radius a . Let F be the geometrical focus of the wave, see Fig. 1, assumed to be located on the normal of the aperture, through its center O , at a distance f from it.

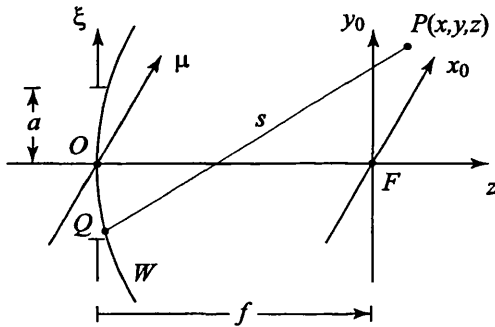


Figure 1: Schematic diagram of the focusing setup.

According to the Huygens-Fresnel principle [3], the wave field at any point P that is not too close to the plane of the aperture is given by

$$U(P) = \frac{\exp(-ikf)}{i\lambda f} \iint_W A(S) \frac{\exp(iks)}{s} dS, \quad (1)$$

where $k = 2\pi/\lambda$ is the wave number, s is the distance between the point of observation, P , and a typical point Q on the spherical wavefront passing through the center of the aperture and the integration extends over the wavefront. The function $A(S)$ stands for the amplitude distribution of the exiting wavefield that make it possible the study of general types of focused fields, e.g., diffracted spherical waves in the presence of aberrations [15] and those arising from focusing of Gaussian laser beams [16].

First we will determine the diffracted field at the focal plane of the spherical beam. For that purpose, it is usual to make use of the paraxial approximation, which gives suitable results assuming that

$$a \gg \lambda, \quad \left(\frac{a}{f}\right)^2 \ll 1. \quad (2)$$

The approximation is based on the binomial expansion of the distance s in the exponent of Eq. (1), giving

$$s \simeq f - \frac{\eta x_0 + \xi y_0}{f} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f} . \quad (3)$$

However, for the s appearing in the denominator, the error introduced by dropping all terms but f is generally acceptably small. The resultant expression for the field at the focal plane therefore becomes

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda f^2} \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_0^2 + y_0^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} A(\eta, \xi) \exp\left[-i\frac{k}{f}(\eta x_0 + \xi y_0)\right] d\eta d\xi . \quad (4)$$

As it is well known, on the focal plane we observe the Fraunhofer diffraction pattern of the field emerging from the plane of the aperture. Also, it appears a quadratic phase factor, which is not accessible to direct observation of the intensity distribution of the focal field.

More interesting seems to obtain the amplitude distribution of the wavefield in adjacent planes of the focal volume. In the Fresnel regime, it may be performed by means of the two-dimensional convolution of the wavefield at the focal plane and the unit impulse response associated with the free-space propagation [17], that is,

$$U(P) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \frac{1}{i\lambda z} \exp\left\{i\frac{k}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0 , \quad (5)$$

where z is the distance between the point of observation P and the focal plane. We should mention that it has been removed an inessential linear phase factor $\exp(ikz)$, which cannot be observed in the intensity distribution of the wavefield. When we substitute Eq. (4) into Eq. (5), we can express the wavefield at the point P of the focal region in terms of the amplitude distribution at the illuminated opaque screen. For that purpose, we make use of the expression [18]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(iax^2 + i\zeta x) dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(i\frac{\zeta^2}{4a}\right) . \quad (6)$$

After a somewhat long but straightforward calculation, we finally obtain the Fresnel-Kirchhoff diffraction equation for the amplitude distribution in the



focal region

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda f(f+z)} \exp \left[i \frac{k}{2(f+z)} (x^2 + y^2) \right] \quad (7)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} A(\eta, \xi) \exp \left[-i \frac{k}{2f} \frac{z}{f+z} (\eta^2 + \xi^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{f+z} (x\eta + y\xi) \right] d\eta d\xi$$

Finally, the above expression reduces to that given in Eq. (4) by simply replacing the axial coordinate z to its value at the focal plane, that is, $z = 0$.

3 The Debye approximation

It is usual to evaluate the diffracted field of a truncated spherical wave within the Debye approximation, according to which the field in the focal region is a superposition of plane waves whose propagation vectors fall inside the geometrical cone formed by drawing straight lines from the focal point through the edge of the aperture. Under the paraxial regime, the field at the focal plane given in Eq. (4) generates the diffraction formula predicted by the Debye theory when removing the quadratic phase factor outer to the integral, resulting

$$U_0^D(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda f^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(\eta, \xi) \exp \left[-i \frac{k}{f} (\eta x_0 + \xi y_0) \right] d\eta d\xi \quad , \quad (8)$$

that is, the Debye approximation agrees with the Kirchhoff formulation when the quadratic phase factor in Eq. (4) may be neglected.

When evaluating the amplitude distribution at planes adjacent to the focal plane in the focal region, it may be used directly on Eq. (1) the Debye assumptions given above concerning the focusing properties of three-dimensional waves. However, the resultant amplitude distribution may be obtained instead by free-space propagating the wavefield at the focal plane to the observation plane situated at a distance z , with the aid of the two-dimensional convolution given in Eq. (5). Thus, we substitute the approximated expression in Eq. (8) into Eq. (5) giving

$$U^D(P) = \frac{1}{i\lambda f^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(\eta, \xi) \exp \left[-i \frac{k}{2f} \frac{z}{f} (\eta^2 + \xi^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{f} (x\eta + y\xi) \right] d\eta d\xi \quad . \quad (9)$$

It has been shown [5] that the Debye integral given in Eq. (9) presents some important symmetry properties. For instance, when $A(\eta, \xi)$ is a real

function, the amplitude and hence the intensity possess inversion symmetry about the focus. Also the phase has inversion antisymmetry, apart from an additive term of half a period [6]. Additionally, when the function $A(\eta, \xi)$ is positive, the point of maximum intensity in the focal region is located on the focal point.

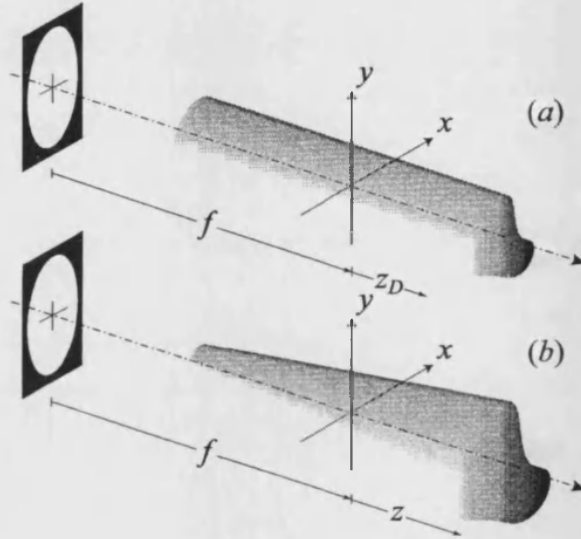


Figure 2: 3-D imaging model for the transformation suffered in the focal volume provided by (a) the paraxial Debye formulation, thus giving (b) the Fresnel-Kirchhoff representation of the focal wavefield.

Now we will find the restrictions we must impose to assure that the Debye approximation gives a reasonably good prediction of the diffracted field. This fact is satisfied when the quadratic phase factor in Eq. (4) may be neglected. For that purpose, we note that a diffraction-limited optical system, as that represented schematically in Fig. 2, concentrates most of the light energy at the focal plane in an area about the focus given by $x_0^2 + y_0^2 \leq \lambda^2 (f/a)^2$. For example, in the case of a circular clear pupil, the energy encircled within this area represents the 90,64% of the emerging radiation energy passing through the aperture. Additionally, the maximum value of the phase corresponding to the quadratic term in Eq. (4) and evaluated in points satisfying the above inequality is given by $\exp(i\pi/N)$, where

$$N = \frac{a^2}{\lambda f} \quad , \quad (10)$$

stands for the Fresnel number of the focusing geometry, that is, the number of halfwaves covered by the diffracting aperture as viewed from the geometrical focus. When the Fresnel number is much higher than unity, it is clear

that the quadratic phase factor does not introduce a noticeable variation in the phase of the focal plane, what implies that this term may be ignored. Hence it is concluded that the Debye integral representation of spherical waves should be applied only when the Fresnel number of the focusing geometry is large compared with unity.

Another interesting point is the fact that the Debye approximation results when we in addition to the Kirchhoff approximation make the assumption that the aperture is infinitely distant from the focal region. A telecentric optical system fulfills this severe restriction, what implies that Eqs. (8) and (9) hold for this case [19]. However, we will observe the previously mentioned symmetries about the geometrical focus when the wavefield is focused onto a region whose axial magnitude is much lower than the focal length. In relation to this point, we can estimate the focal depth of an imaging optical setup in terms of the wavelength and the numerical aperture of the system, $N.A. = \sin \alpha$, as the quantity

$$\Delta z = \frac{\lambda}{4 \sin^2(\alpha/2)} \simeq \lambda \left(\frac{f}{a} \right)^2, \quad (11)$$

where we have introduced the paraxial approximation. Then we should impose the inequality $\Delta z \ll f$ in order to guarantee that the Debye approximation is valid. Taking into account that we can express the Fresnel number in terms of the focal depth and the focal length, i.e.,

$$N = \frac{f}{\Delta z}, \quad (12)$$

we finally obtain that, as deduced previously with an alternative reasoning, the Fresnel number should be constrained to values much higher than unity.

4 Three-Dimensional mapping for the Debye representation of the focal field

We have shown that in order to find the focal wavefield of a truncated spherical beam it is possible to employ either the Kirchhoff formulation or the Debye approximation. The later gives suitable results when the wavefield is well-focused onto the vicinities of the geometrical focus, meanwhile there exists noticeable inaccuracies when the incident spherical wave is weakly focused. Most of investigators have stressed the fact that both theories show such departures [8, 12, 14].

However, we will demonstrate that both theories provide the same collection of irradiance transverse patterns that constitute the focal region, but with a different scale and position. By comparing Eqs. (7) and (9) we observe that both diffraction formulae give an amplitude transverse pattern by

performing a two-dimensional Fourier transform of the product of the function $A(\eta, \xi)$ and a quadratic phase factor. This product is usually called the defocused pupil function for the optical system [20]. Thus, when evaluating a given intensity transverse pattern, located at a distance z from the focal plane, provided by the Kirchhoff formula in Eq. (9), we may obtain the same transverse distribution within the Debye theory, in a unique plane placed at a distance

$$z_D = \frac{f}{f+z} z \quad , \quad (13)$$

but applying a lateral magnification given by

$$M(z) = \frac{f+z}{f} \quad . \quad (14)$$

Such coordinate transformations are successfully utilized in space-variant imaging systems to be modeled as an afocal telecentric space-invariant system [21]. The replicated transverse irradiance distributions are obtained when both defocused pupil functions in Eqs. (7) and (9) coincide, meanwhile the lateral magnification arises from the ratio of the two scales in both Fourier transform kernels. Consequently, the focal volume given by the Debye theory is then deformed in such a way that it conserves the same transverse structure, but altering both the lateral magnification and axial distribution of the wavefield.

In order to interpret adequately the transformation that the field suffers in the focal region within the Debye approximation, we focus our attention to the amplitude transverse distribution at the focal plane of the focusing setup given by both theories. According to Eqs. (4) and (8), both expressions differ in a quadratic phase term that multiplies the spectrum of the pupil function $A(\eta, \xi)$. In agreement with the Kirchhoff boundary conditions, a convergent thin lens with a focal length given by f located at the back focal plane of the optical system would compensate the phase modulation of the quadratic factor and produce a collection of amplitude transverse patterns as given by the Debye approximation. We may think that in order to obtain the amplitude distribution in the focal plane given by the Fresnel-Kirchhoff theory we may employ the paraxial Debye approximation and the action of a divergent thin lens of focal length $-f$, that is, with the focal point located on the axial point of the diffracting opaque screen. Also, when evaluating the transverse pattern of adjacent planes in the focal region, it may be obtained analytically in terms of the Debye formula, and later virtually introduce the action of a divergent thin lens. The Gaussian imaging transformation suffered by the diffraction amplitude distribution given by the Debye formula may be mathematically represented as follows

$$U(x, y, z) = \exp \left[i \frac{k}{2(f+z)} (x^2 + y^2) \right] \frac{1}{M} U^D \left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}, \frac{z}{M} \right) \quad . \quad (15)$$

We should mention that in the previous 3-D mapping there exists a factor $1/M$ and a quadratic phase factor accompanying the amplitude distribution given by the Debye approximation. The first term is associated with the energy conservation law and the second one is somewhat irrelevant since is not observable when detecting intensity.

The point spread function of a low-aperture diffraction-limited optical imaging system is usually described in terms of the paraxial Debye integral [22] given in Eq. (9). It may be demonstrated that, in general, the light is concentrated in planes neighboring the focal plane, hence the deformation suffered in the focal volume is unnoticeable. It may be demonstrated that in this region the lateral magnification is closer to unity, $M(z) \simeq 1$, and the axial translation of the irradiance transverse patterns is negligible, $z_D \simeq z$. However, we should remark that this kind of transformation in the diffracted wavefield around the focal plane always occurs.

In Fig. 3 we show the symmetries that the focal waves exhibit when the Fresnel number is much higher than unity, and hence when the Debye approximation holds. However, when N decreases, the intensity in the focal region begins a process of deformation as deduced from Eq. (15), which is as much noticeable as the aperture plane comes closer to the focal region. As a result, we observe that the point of maximum intensity of the diffracted wave may not be at the geometrical focus of the incident wave but closer to the aperture. This is the so-called focal shift effect.

5 Geometrical interpretation of the focal shift effect

Much attention has been addressed to the problem concerning the evaluation of the relative focal shift, that is, the ratio of such a shift Δf of the point of maximum axial intensity to the distance f between the geometrical focus and the plane of the aperture [13, 23]. This interest is well justified in the fact that it is of great importance the determination of the plane that an imaging system comes to the best focus. On the other hand, similar considerations should be taken into account when discussing how to optimally focus a laser beam to illuminate a distant target. In this context, Li and Wolf [9] recognized that the magnitude of the relative focal shift depends solely on the Fresnel number of the focusing geometry. Moreover, they presented a formula for the rapid evaluation of the relative focal shift, having

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{1 + (\pi^2/12) N^2} \quad (16)$$

This formula gives the focal shift accurately to within 1% when $N \geq 12$. However, for lower values of the Fresnel number Eq. (16) gives a rough estimation of the relative focal shift.

In agreement with the mapping of Eq. (15) we should apply on the paraxial Debye formulation when the Fresnel number of the focusing setup is comparable to unity, it is possible to obtain the location of the plane given in the focal region in the Debye approximation whose conjugate plane corresponding to the transverse pattern in the Kirchhoff approximation includes the point of maximum intensity along the optic axis given in Eq. (16). By substituting this expression into Eq. (13), we may determine that this plane is then situated at a distance from the focal plane of the spherical beam given by

$$z_D = -\frac{12 \Delta z}{\pi^2 N} . \quad (17)$$

From Eq. (17) we infer that the plane belonging to the Debye representation that images to the plane in the Kirchhoff formulation of the field that contains the point of maximum intensity on the optical axis is located inside the focal depth. This is true in the range of validity of Eq. (16), that is, for moderate and high values of the Fresnel number. This fact assures that the plane of best focus, that is, the plane where the focused beam radius reach its minimum transverse extension, suffers a defocus aberration that may be neglected. However, this statement does not hold when the Fresnel number decreases to values lower than the unity. In this case, the distance z_D of the plane containing the beam waist is located outside the focal region given in the Debye regime. Following Parker Givens [24], we may conclude that when we deal with an image-forming optical system, we are not allowed to ensure that the focus of the optical system is effectively shifted to the point of maximum intensity along the axis.

6 Discussion and conclusions

We have proved that both the Debye and Kirchhoff formulations used for the evaluation of focal waves give the same collection of intensity transverse patterns, except for its location and magnification. Deviations from both theories in the focal region arise when the Fresnel number of the focusing geometry is close to unity. However, we claim that the great majority of research performed in the Debye regime are still valuable, even when N is comparable to unity. A simple example represents the great variety of strategies for increasing the power resolution of an imaging system [25], or the three-dimensional intensity distribution of the point spread function that characterizes the diffraction behavior of an apodized setup [1] may be applied when the Fresnel number when viewed from focus is close to unity.

However, the similarity of the Debye and Kirchhoff representations of the wavefield has allowed us to point out that there may exist a great discrepancy between the concept of plane of best focus and that containing the point of

maximum intensity along the axis for Fresnel numbers lower than unity. From our point of view, if the optical system is being used for imaging purposes, we should stress that both planes do not coincide. In order to determine the plane of best focus, it is desirable to select a plane belonging to the focal region in the Debye formulation that, when the 3-D mapping of Eq. (15) is performed, has the narrower transverse spot light. However, it is possible to demonstrate, as we will detail in a future paper, that the adjacent planes in the focal volume offer practically the same imaging abilities, but affected with a higher magnification given by Eq. (14).

Acknowledgements

This work was supported by the Dirección General de Investigación Científica y Enseñanza Superior (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain.

References

- [1] P. Jacquinot and B. Roizen-Dossier, Apodization, in: Progress in Optics, Vol. III, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1964).
- [2] M. Martínez-Corral, P. Andrés, and J. Ojeda-Castañeda, "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils," Appl. Opt. **33**, 2223-2229 (1994).
- [3] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 4th Ed. (Pergamon, New York, 1979), sec 8.8.
- [4] J.J. Stamnes, "Focusing of two-dimensional waves," J. Opt. Soc. Am. **71**, 16 (1981).
- [5] J.J. Stamnes, Waves in Focal Regions: Propagation, Diffraction and Focusing of light, sound and water waves (Adam Hilger, Bristol, England, 1986), part IV.
- [6] E. Collet and E. Wolf, "Symmetry properties of focused fields," Opt. Lett. **5**, 264-266 (1980).
- [7] A. Arimoto, "Intensity distribution of aberration-free diffraction patterns due to circular apertures in large F -number optical systems," Optica Acta **23**, 245-250 (1976).
- [8] J.J. Stamnes and B. Spjelkavik, "Focusing at small angular apertures in the Debye and Kirchhoff approximations," Opt. Commun. **40**, 81-85 (1981).

- [9] Y. Li and E. Wolf, "Focal shifts in diffracted converging spherical waves," *Opt. Commun.* **39**, 211-215 (1981).
- [10] Y. Li and H. Platzler, "An experimental investigation of diffraction patterns in low-Fresnel-number focusing systems," *Optica Acta* **30**, 1621-1643 (1983).
- [11] G.P. Karman, A. van Kuijl, M.W. Beijersbergen, and J.P. Woerdman, "Measurement of the three-dimensional intensity distribution in the neighborhood of a paraxial focus," *Appl. Opt.* **36**, 8091-8095 (1997).
- [12] E. Wolf and Y. Li, "Conditions for the validity of the Debye integral representation of focused fields," *Opt. Commun.* **39**, 205-210 (1981).
- [13] M. Martínez-Corral, C.J. Zapata-Rodríguez, P. Andrés, and E. Silvestre, "Effective Fresnel-number concept for evaluating the relative focal shift in focused beams," *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 449-455 (1998).
- [14] Y. Li and E. Wolf, "Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different Fresnel numbers," *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 801-808 (1984).
- [15] W.D. Furlan, G. Saavedra, E. Silvestre and M. Martínez-Corral, "On-axis irradiance for spherical aberrated optical systems with obscured rectangular apertures: a study using the Wigner distribution function," *J. Mod. Opt.* **45**, 69-77 (1998).
- [16] V.N. Mahajan, "Axial irradiance and optimum focusing of laser beams," *Appl. Opt.* **22**, 3042-3053 (1983).
- [17] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1996), chap. 4.
- [18] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, Inc., London, 1980).
- [19] N. Streibl, "Three-dimensional imaging by a microscope," *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, 121-127 (1985).
- [20] M. Gu, *Principles of Three-Dimensional Imaging in Confocal Microscopes* (World Scientific, Singapore, 1996), chap. 2.
- [21] D.N. Sitter, Jr., and W.T. Rhodes, "Three-dimensional imaging: a space invariant model for space variant systems," *Appl. Opt.* **29**, 3789-3794 (1990).
- [22] For an extensive discussion on spatial invariance and the correct use of the point spread function in optical systems of finite Fresnel number see

C.J.R. Sheppard, "Imaging in optical systems of finite Fresnel number,"
J. Opt. Soc. Am. A **3**, 1428-1432 (1986).

- [23] Y. Li, "A high-accuracy formula for fast evaluation of the effect of focal shift," J. Mod. Opt. **38**, 1815-1819 (1991).
- [24] M. Parker Givens, "Focal shifts in diffracted converging spherical waves," Opt. Commun. **41**, 145-148 (1982).
- [25] C.J.R. Sheppard and Z.S. Hegedus, "Axial behavior of pupil-plane filters," J. Opt. Soc. Am. A **5**, 643-647 (1988).

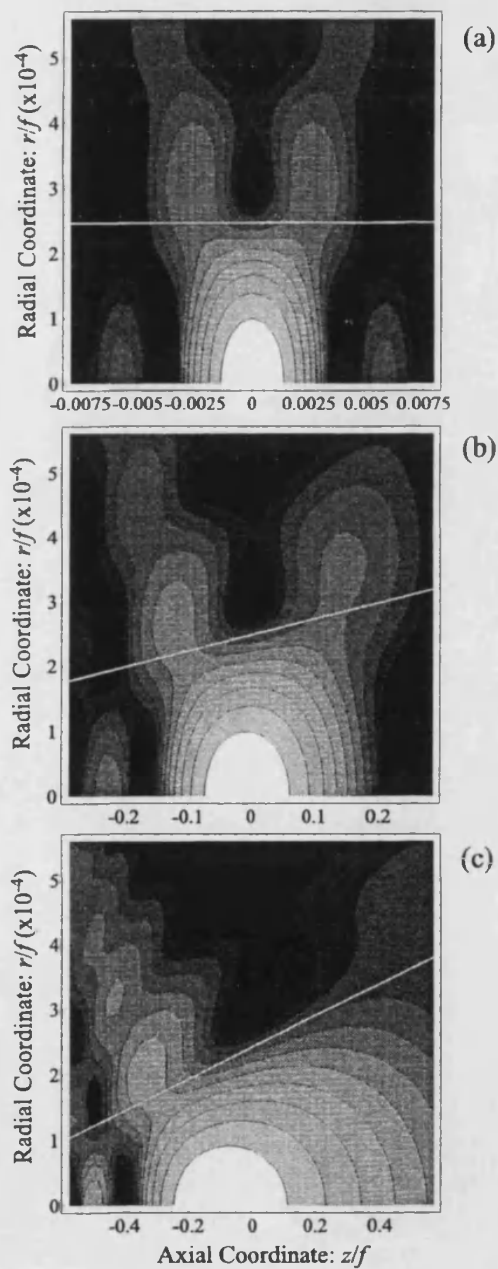


Figure 3: Diagram of isophotes in logarithm scale corresponding to the impulse response in an optical imaging system with circular clear pupil of radius $a = 1mm$ when the Fresnel number is ($\lambda = 500nm$): *a*) high ($N = 500$), *b*) moderate ($N = 10$), and *c*) low ($N = 3$). The continuous white line pass through the axial point of pupil plane, which gives a rough idea of the distance between the focal plane and the aperture plane.

Publicación II

Analytical formula for calculating the focal shift in apodized systems

Journal of Modern Optics, **45**, pp. 1671–1679 (1998)

Analytical formula for calculating the focal shift in apodized systems

M. MARTÍNEZ-CORRAL, C. J. ZAPATA-RODRÍGUEZ,
P. ANDRÉS

Departamento de Óptica, Universidad de Valencia,
C/Dr. Moliner 50, E-46100 Burjassot, Spain

and M. KOWALCZYK

Institute of Geophysics, Warsaw University, Pasteura 7,
02-093 Warsaw, Poland

(Received 10 June 1997; revision received 12 November 1997)

Abstract. We report a quite simple analytical formula for the evaluation of the focal shift in apodized systems, with or without rotational invariance. Specifically it is shown that the magnitude of the focal shift is determined by the product of the Fresnel number of the focusing geometry and the standard deviation of a mapped version of the azimuthal average of the pupil transmittance. To illustrate our approach, several examples are examined.

1. Introduction

It is well known that, when a monochromatic uniform converging spherical wave is diffracted by a circular aperture, the point of maximum irradiance in the focal region is not at the geometrical focus but is displaced towards the aperture, resulting in the so-called focal-shift effect [1-3]. This effect has been found to appear also in other geometries, for example in uniformly illuminated systems with obscured pupils [4, 5], in focused Gaussian beams [6, 7], or, in general, in any type of diffracting screen [8-10].

Although in general it has been recognized that the magnitude of the focal shift is closely related to the Fresnel number of the focusing geometry, only for the particular case of the circular aperture under uniform [1] or Gaussian [7] spherical illumination has an approximate analytical formula been reported for its evaluation. In connection with this last focusing geometry it is of relevance that the formula, which was reported by Li [11] and is based on the focal-shift formulae for the cases of the circular aperture and the non-truncated Gaussian beam, gives the focal shift with quite good accuracy.

The aim of this paper is to present an analytical formulation for the evaluation of the focal shift for the general case of spherically illuminated, rotationally asymmetric diffracting screens, that is, for diffracting screens whose amplitude-transmittance function $t(r, \theta)$ does not exhibit, in general, rotational invariance. The approach, which is based on the moment expansion of a mapped version of the azimuthal average on the screen amplitude transmittance, permits us not only to calculate in quite a simple way the focal shift but also to define a new merit

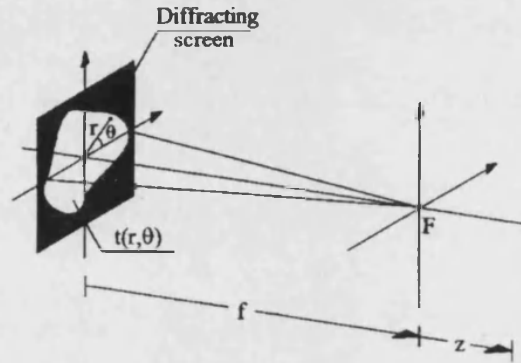


Figure 1. Geometry of the focusing set-up.

function for estimating the tendency of a diffracting screen to suffer the focal-shift effect.

In section 2 we formulate the basic theory for evaluating the axial-irradiance distribution produced by an arbitrary, radially asymmetric diffracting screen, at any Fresnel number. In section 3 we obtain an analytical formula that explicitly depends on the product of the Fresnel number of the focusing geometry and the standard deviation of the pupil, for evaluating in quite a simple way the relative focal shift. Finally, in section 4 we illustrate our approach by calculating the focal shift in some focusing geometries.

2. Basic theory

Let us start by considering a purely absorbing, rotationally asymmetric diffracting screen, with amplitude transmittance $t(r, \theta)$, which is illuminated by a uniform monochromatic spherical wave of focal length f , as shown in figure 1. Then, the amplitude distribution along the optical axis in the vicinity of the focal point, within the paraxial approximation, is [9]

$$U(z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda f(f+z)} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} t(r, \theta) \exp\left(-i2\pi \frac{z}{2\lambda f(f+z)} r^2\right) r dr d\theta, \quad (1)$$

where r_0 is the maximum radial extent of the diffracting screen and z is the axial coordinate as measured from the paraxial focal point F.

The integration of equation (1) over θ gives

$$U(z) = \exp(ikz) \frac{2\pi}{i\lambda f(f+z)} \int_0^{r_0} t_0(r) \exp\left(-i2\pi \frac{z}{2\lambda f(f+z)} r^2\right) r dr, \quad (2)$$

where

$$t_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(r, \theta) d\theta, \quad (3)$$

is a radially symmetric function that represents the azimuthal average of the screen amplitude transmittance $t(r, \theta)$ for each value of r . From equation (2), one infers that the axial behaviour of a radially asymmetric focusing set-up is governed by the one-dimensional (1D) Fourier transform of a radially symmetric version of the

amplitude transmittance of the diffracting screen. In order to make the Fourier-mapping relation clear, it is convenient to employ the next geometrical mapping

$$\xi = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 0.5, \quad q_0(\xi) = t_0(r), \quad (4)$$

which translates the radial interval $[0, r_0]$ into the 1D interval $[-0.5, 0.5]$. Now, by substituting equation (4) into equation (2) we find that, aside from an irrelevant pre-multiplying phase factor, the axial amplitude distribution is

$$U(z) = Q(W_{20}) = \frac{\pi(N - 2W_{20})}{f} \int_{-0.5}^{0.5} q_0(\xi) \exp(-i2\pi W_{20}\xi) d\xi, \quad (5)$$

where

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda f} \quad (6)$$

represents the Fresnel number of the focusing set-up, that is, the number of Fresnel zones that are covered by the diffracting screen as viewed from the geometrical focus, whereas the axial coordinate is expressed in terms of

$$W_{20} = \frac{Nz}{2(f+z)}, \quad (7)$$

which is the well-known defocus coefficient measured in units of wavelength.

As the aim of this work is the calculation of the position of the maximum of the axial-irradiance distribution, next we express the axial behaviour of the focusing set-up in terms of the normalized axial irradiance $I_N(W_{20}) = I(W_{20})/I(0)$, namely

$$\begin{aligned} I_N(W_{20}) &= \left(1 - \frac{2}{N}W_{20}\right)^2 \left| \int_{-0.5}^{0.5} q_0(\xi) \exp(-i2\pi W_{20}\xi) d\xi \right|^2 \left/ \left| \int_{-0.5}^{0.5} q_0(\xi) d\xi \right|^2 \right. \\ &= \left(1 - \frac{2}{N}W_{20}\right)^2 \bar{I}_N(W_{20}). \end{aligned} \quad (8)$$

From this equation it follows that the axial-irradiance pattern is determined from the product of two terms. The first term $\bar{I}_N(W_{20})$ involves the 1D Fourier transform of the mapped transmittance $q_0(\xi)$ of the screen. Since $t(r, \theta)$ and consequently $q_0(\xi)$ are real and positive functions, this term is symmetrical about the geometrical focus, $W_{20} = 0$, where its maximum value is achieved. The second term $(1 - 2W_{20}/N)^2$, which has W_{20} as the functional variable, is responsible for the loss of symmetry in the axial-irradiance distribution and, therefore, for the displacement of the irradiance maximum towards the screen plane, as we discuss below.

From equation (8), it is clear that for a given profile of the diffracting screen, that is, for a fixed $q_0(\xi)$, the influence of the parabolic term $(1 - 2W_{20}/N)^2$ and, therefore, the magnitude of the focal shift depends exclusively on the Fresnel number of the focusing geometry. Consequently, for $N \gg \bar{W}_{20}$, where \bar{W}_{20} represents the maximum axial coordinate where the term $\bar{I}_N(W_{20})$ takes significant values, the parabolic factor is nearly constant over the region of interest, and then the effect of the focal shift is absent. However, when the value of N is low, the parabolic term rapidly increases for negative values of W_{20} within the focal region

and then produces a relevant displacement of the axial-irradiance maximum towards the screen plane.

From the above reasoning, it follows that the magnitude of the focal shift effect is governed by the value of the Fresnel number of the focusing set-up, but it also depends on the dimensions of the axial region where the Fourier transform of $q_0(\xi)$ takes significant values. Therefore, it is apparent that the smoother the slope of the Fourier transform of $q_0(\xi)$, the greater is the influence of the factor $(1 - 2W_{20}/N)^2$ in the axial-irradiance distribution, and thus the greater is the magnitude of the resulting focal shift. In this context, we hypothesize that a function of merit for evaluating the focal shift in focusing set-ups should depend not only on the Fresnel number of the geometry but also on a parameter that evaluates the capacity of the screen to produce a slowly varying axial-irradiance pattern, as we discuss in mathematical terms in the next section.

3. The focal shift function of merit

Since, as stated in the previous section, the axial region of interest is located in the vicinities of the geometrical focus of the focusing set-up, it is then allowed to follow a reasoning equivalent to that of [12, 13], by expanding the normalized axial-irradiance distribution into a Taylor series, up to second-order approximation, that is

$$I_N(W_{20}) \approx I_N(0) + I'_N(0)W_{20} + \frac{I''_N(0)}{2}W_{20}^2. \quad (9)$$

Now, after a straightforward calculation, we obtain by using the moment theorem the following parabolic expression for the normalized axial-irradiance distribution:

$$I_N(W_{20}) = 1 - \frac{4}{N}W_{20} + \frac{4}{N^2}(1 - \pi^2\sigma^2N^2)W_{20}^2, \quad (10)$$

where

$$\sigma = \left[\frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (11)$$

is the standard deviation of the mapped transmittance $q_0(\xi)$, m_n being the n th moment of $q_0(\xi)$.

Now, by derivation of equation (10), we find that the position and height of the maximum of the quadratic axial-irradiance distribution are given by

$$W_{20}^{\max} = \frac{N/2}{1 - \pi^2(N\sigma)^2} \quad (12)$$

and

$$I_N(W_{20}^{\max}) = \frac{\pi^2(N\sigma)^2}{\pi^2(N\sigma)^2 - 1}, \quad (13)$$

respectively. Finally, by combining equations (12) and (7) we find that the relative axial position of the irradiance maximum, that is the relative focal shift, is given by

$$\frac{z_{\max}}{f} = -\frac{1}{\pi^2(N\sigma)^2}. \quad (14)$$

This relevant formula, which is a generalization of the analytical result obtained for the circular aperture [1], indicates that the axial-irradiance distribution provided by any diffracting screen, with or without radial symmetry, exhibits a focal shift whose magnitude depends exclusively on the function $N\sigma$. So, it is apparent that, independently of both the profile and the scale of the function $t(\tau, \theta)$, any pair of focusing set-ups having the same value for the product $N\sigma$ exhibits the same relative focal shift.

From the above result, it is then clear that the magnitude of the relative focal shift is determined not only by geometrical parameters of the focusing set-up, that is, by its Fresnel number, but also by the standard deviation of $q_0(\xi)$, which can be interpreted as a measure of the effective width of the diffracting screen. In other words, the function of merit $N\sigma$ evaluates not only the number of Fresnel zones of the focusing geometry but also their effective contribution to the axial-irradiance profile, and therefore to the magnitude of the relative focal shift.

Finally, we would like to remark that the function of merit $N\sigma$ is also useful for estimating when a focusing set-up tends to suffer the focusing effect known as focal switch [10].

4. Examples

To illustrate our approach we shall analyse the focal shift for three different kinds of diffracting screen, illuminated by a uniform monochromatic spherical wave: the circular aperture, a diffracting screen which produces axial apodization, and an axially superresolving screen.

For the case of the circular aperture the mapped transmittance is $q_0(\xi) = \text{rect}(\xi)$, whose standard deviation is $\sigma_c = 1/12^{1/2}$. Then, according to equation (14), the value of the relative focal shift, expressed in terms of the Fresnel number, is

$$\frac{z_{\max}}{f} = -\frac{12}{\pi^2 N^2}, \quad (15)$$

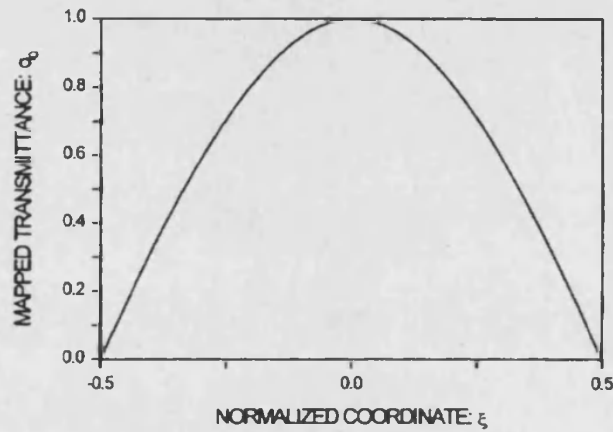
which, within quite a good approximation, is equivalent to the result reported by Li and Wolf [1].

As an axially apodizing diffracting screen, we select the annular filter of the mapped transmittance $q_0(\xi) = \cos(\pi\xi) \text{rect}(\pi\xi)$ (figure 2), which provides an optimum focal depth in the sense that it generates an axial-irradiance distribution with minimum second moment for pre-specified light throughput [14]. In this case, the value of the standard deviation is $\sigma_a = (\frac{1}{4} - 2/\pi^2)^{1/2} \approx 0.2176$. Then the relative focal shift formula for this screen is given by

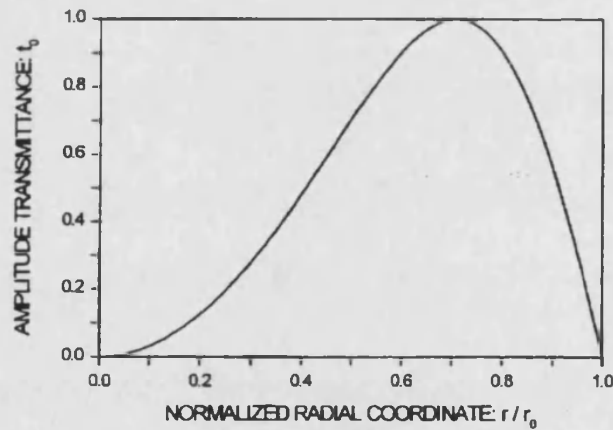
$$\frac{z_{\max}}{f} = -\frac{21.12}{\pi^2 N^2}. \quad (16)$$

Note that, owing to the inverse square relation between the relative focal shift and the standard deviation of the mapped transmittance, the tendency of the axially apodizing diffracting screen to the focal shift effect is greater than that of the circular aperture.

Finally, as axially superresolving screens we chose the set of annular binary filters reported by Martínez-Corral *et al.* [13], which have the attribute of producing tunable axial superresolution. The mapped transmittance for the family



(a)



(b)

Figure 2. Amplitude transmittance of the axially apodizing diffracting screen, $q_0(\xi) = \cos(\pi\xi) \text{rect}(\xi)$: (a) ξ -space representation: (b) radial coordinate representation.

of filters is

$$q_0(\xi) = \text{rect}(\xi) - \text{rect}\left(\frac{\xi}{\mu}\right), \quad \text{with } 0 < \mu < 1. \quad (17)$$

The profile of these screens in the ξ coordinate and in its actual two-dimensional (2D) representation are shown, for two values of the obscuration ratio parameter μ , in figure 3.

The value of the standard deviation for these filters is $\sigma_s = [(\mu^2 + \mu + 1)/12]^{1/2}$. Thus the corresponding relative focal shift is

$$\frac{z_{\max}}{f} = -\frac{12}{\pi^2 N^2 (\mu^2 + \mu + 1)}, \quad (18)$$

whose magnitude, depending on the selected value of μ , is clearly lower than that corresponding to the circular aperture.

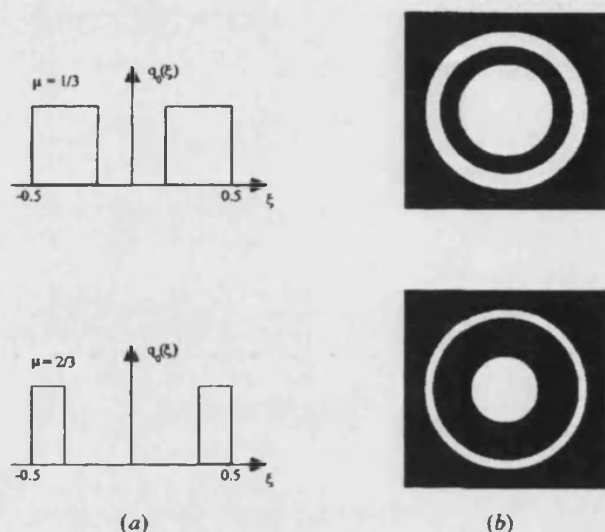


Figure 3. Two members of the family of axially superresolving diffracting screens of equation (17): (a) mapped function $q_0(\xi)$ for $\mu = \frac{1}{3}$ and $\mu = \frac{2}{3}$; (b) actual 2D representation.

To illustrate the influence of the parameter σ on the capacity for producing a slowly varying axial-irradiance pattern, and therefore on the magnitude of the relative focal shift, in figures 4(a) and (b) we have plotted the function $\bar{I}_N(W_{20})$ and the relative focal shift respectively against N , for the above-described diffracting screen. As a representative of the set of axially superresolving filters, we have chosen that corresponding to $\mu = \frac{1}{3}$, which provides a significant narrowing of the central lobe of the axial-irradiance distribution but no drastic increase in the height of the secondary side lobes. From these figures it is clear that the tendency of a diffraction screen to suffer focal shift is closely related to its capacity to produce an axially apodizing effect. In other words, to obtain the same amount of focal shift the Fresnel number in the axially superresolving case should be lower than that corresponding to the case of the circular aperture and even lower than that of the axially apodizing case.

Finally, we would like to point out that comparison between the results provided by our formula and rigorous calculations already reported in the literature can only be done for the case of the spherically illuminated circular aperture [1] and the truncated Gaussian beam [11]. For the case of the circular aperture, experimental measurements of the magnitude of the focal shift are also available [15].

5. Conclusions

We have presented an analytical approach for evaluating in quite a simple way the relative focal shift in apodized systems. Specifically it has been stated that the magnitude of the relative focal shift exclusively depends on the product of the Fresnel number of the focusing geometry and the standard deviation of the mapped transmittance of the diffracting screen. Moreover, we have shown that

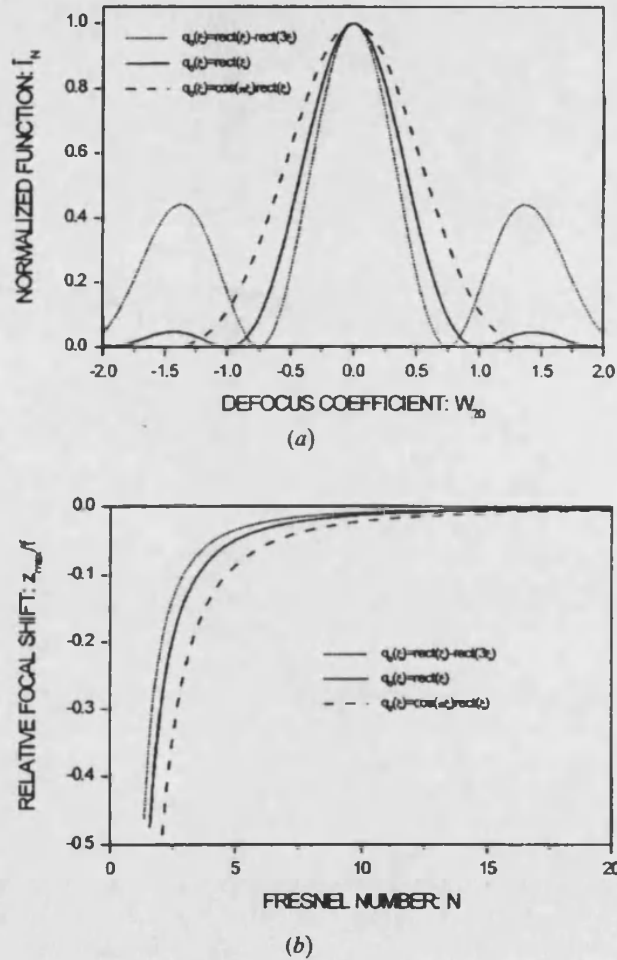


Figure 4. (a) Normalized function $\bar{I}_N(W_{20})$ corresponding to the proposed diffracting screens; (b) relative focal shift against the Fresnel number of the focusing geometry for the same screens as in (a).

this product constitutes a function of merit for evaluation of the tendency of a diffracting screen to suffer the focal-shift effect. Finally, we have illustrated our approach by examining the focal shift produced by several diffracting screens.

Acknowledgments

This work was supported by the Dirección General de Investigación Científica y Enseñanza Superior (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. C. J. Zapata-Rodríguez gratefully acknowledges financial support from this institution. M. Kowalczyk gratefully acknowledges financial support by Komitet Badan Naukowych, Poland (project 8T11F 020 12).

References

- [1] LI, Y., and WOLF, E., 1981, *Optics Commun.*, **39**, 211.
- [2] STAMNES, J. J., and SPJELKAVIK, B., 1981, *Optics Commun.*, **40**, 81.
- [3] GIVENS, M. P., 1982, *Optics Commun.*, **41**, 145.
- [4] MAHAJAN, V. N., 1983, *Appl. Optics*, **22**, 3042.
- [5] OJEDA-CASTAÑEDA, J., MARTÍNEZ-CORRAL, M., ANDRÉS, P., and PONS, A., 1994, *Appl. Optics*, **33**, 7611.
- [6] CARTER, W. H., 1982, *Appl. Optics*, **21**, 1989.
- [7] LI, Y., and WOLF, E., 1982, *Optics Commun.*, **42**, 151.
- [8] SZAPIEL, S., 1983, *Optics Lett.*, **8**, 327.
- [9] MARTÍNEZ-CORRAL, M., ANDRÉS, P., and OJEDA-CASTAÑEDA, J., 1994, *Appl. Optics*, **33**, 2223.
- [10] MARTÍNEZ-CORRAL, M., and CLIMENT, V., 1996, *Appl. Optics*, **35**, 24.
- [11] LI, Y., 1992, *J. mod. Optics*, **39**, 1761.
- [12] SHEPPARD, C. J. R., and HEGEDUS, Z. S., 1988, *J. opt. Soc. Am. A*, **5**, 643.
- [13] MARTÍNEZ-CORRAL, M., ANDRÉS, P., OJEDA-CASTAÑEDA, J., and SAAVEDRA, G., 1995, *Optics Commun.*, **119**, 491.
- [14] OJEDA-CASTAÑEDA, J., and GÓMEZ-SARABIA, C. M., 1989, *Appl. Optics*, **28**, 4263.
- [15] LI, Y., and PLATZER, H., 1983, *Optica Acta*, **30**, 1621.

Publicación III

Effective Fresnel-number concept for evaluating the relative focal shift in focused beams

Journal of the Optical Society of America A, **15**, pp. 449–455 (1998)

Effective Fresnel-number concept for evaluating the relative focal shift in focused beams

Manuel Martínez-Corral, Carlos J. Zapata-Rodríguez, Pedro Andrés, and Enrique Silvestre

Departamento de Óptica, Universidad de Valencia, 46100 Burjassot, Spain

Received April 25, 1997; revised manuscript received August 7, 1997; accepted August 11, 1997

We report on an analytical formulation, based on the concept of effective Fresnel number, to evaluate in a simple way the relative focal shift of rotationally nonsymmetric scalar fields that have geometrical focus and moderate Fresnel number. To illustrate our approach, certain previously known results and also some new focusing setups are analytically examined. © 1998 Optical Society of America [S0740-3232(98)00902-8]
OCIS codes: 050.1940, 220.2560.

1. INTRODUCTION

The evaluation of the electromagnetic field diffracted by a coherently illuminated circular aperture has constituted the aim of several research efforts over the last few decades. Classical studies,^{1,2} which are based on the Debye integral representation of focused fields, reveal that when a monochromatic, uniform, converging spherical wave is diffracted by a circular aperture, the irradiance distribution in the focal region is symmetric about the geometrical focus, and the point of maximum irradiance is located at the focal point. However, since the description in the focal region by this representation is valid only when the Fresnel number of the focusing geometry is much higher than unity,³ these studies could not explain the shift toward the aperture of the irradiance maximum, which, under certain circumstances, was found to appear by some researchers during the 1970's.⁴⁻⁶

It was in the early 1980's when, on the basis of the Fresnel diffraction integral, it was analytically established,⁷⁻⁹ and experimentally verified,¹⁰ that the magnitude of the shift suffered by the axial irradiance peak, i.e., the magnitude of the so-called focal-shift effect, is governed by the Fresnel number of the focusing geometry. More recently, it has been recognized that the focal-shift effect is also present in systems with an obscured pupil,^{11,12} in axially superresolving setups,¹³ and, in general, in any type of diffracting screen.^{14,15} It has also been shown that this effect appears not only along the optical axis but also on any line directed toward the geometrical focus of the incident spherical wave front.¹⁶ Specifically, in Ref. 16 it is shown that the irradiance distribution along a line is determined by the projection of the pupil function onto the line. So both the irradiance profile and the magnitude of the focal shift depend on the selected line.

On the other hand, it is also well established that the focal-shift effect appears not only for uniformly illuminated diffracting screens but also when some nonuniform focused beams illuminate a circular aperture. In this sense it was found that when a monochromatic Gaussian beam is focused by a thin lens, the point of maximum irradiance is not located at the geometrical focus but is dis-

placed toward the lens.¹⁷⁻¹⁹ More recent studies have shown that this focal-shift effect is governed by both the so-called Gaussian Fresnel number,²⁰ which is associated with the width of the incident beam, and the truncation parameter,^{21,22} which evaluates the ratio between the radius of the lens and the beam width.

The goal of this paper is to report on an analytical formulation to evaluate the relative focal shift for the general class of rotationally nonsymmetric scalar fields that have focus in the sense of geometrical optics. The formulation, which is based on an extension of the concept of effective Fresnel number applied to any focused beam, permits us to evaluate in a quite simple way the focal shift that appears in both converging and diverging beams and for truncated and nontruncated focusing geometries.

For describing our approach, in Section 2 we formulate the basic theory for evaluating the axial irradiance distribution corresponding to a focused beam. In Section 3 we define the effective Fresnel number over the exit plane associated with any focused beam, and we obtain a simple analytical formula, which explicitly depends on this parameter, for evaluating the relative focal shift. In Section 4 we analyze the role of the effective Fresnel number of a focused beam, which is shown to be related to the effective width of the beam. Finally, in Section 5 we illustrate our approach by examining the focal shift in some highly exemplifying focusing geometries.

2. AXIAL IRRADIANCE DISTRIBUTION IN FOCUSED BEAMS

Let us start by considering a focused beam, i.e., a monochromatic scalar wave field that has focus in the sense of geometrical optics. Therefore its amplitude distribution $U(r, \theta)$ in a given plane transversal to the propagation direction, referred to as the reference plane for the remainder of the present paper, can be expressed as the product of a spherical wave of focal length f and a real nonnegative two-dimensional function $t(r, \theta)$. In mathematical terms,

$$U(r, \theta) = \frac{\exp(-ikf)}{f} \exp\left(-i \frac{k}{2f} r^2\right) t(r, \theta), \quad (1)$$

where $k = 2\pi/\lambda$ represents the wave number of the light.

Note that this rather general formalism corresponds to the beams that provide an irradiance peak in the focus of a spherical wave and describes, among others, two quite typical focusing geometries in optics: (1) the case of a purely absorbing diffracting screen, with or without radial symmetry, illuminated by a monochromatic spherical wave and (2) the situation corresponding to a truncated or nontruncated spherical Gaussian beam. Two examples of these situations are illustrated in Fig. 1.

To evaluate the axial amplitude distribution of the focused beam, we particularize the Fresnel-Kirchhoff diffraction formula for the axial points,^{7,9} i.e.,

$$h(z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda f(f+z)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty t(r, \theta) \times \exp\left[-i2\pi \frac{z}{2\lambda f(f+z)} r^2\right] r dr d\theta, \quad (2)$$

where z denotes the axial coordinate as measured from the paraxial focal point F .

At this point it is convenient to point out that the axial distances involved in Eq. (2) are directed. Their direction is determined by the point of the arrow (see Fig. 1). Note that both f and z are positive distances in Fig. 1. This fact allows us to deal with diverging focusing beams ($f < 0$) and to describe the virtual diffraction region ($f + z < 0$).

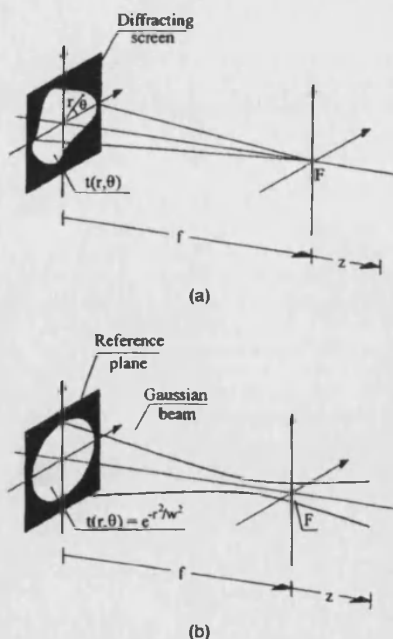


Fig. 1. Two typical examples of scalar fields that have geometrical focus: (a) radially nonsymmetric diffracting screen illuminated by a monochromatic spherical wave with focal length f , (b) truncated spherical Gaussian beam.

It is convenient to perform two mathematical manipulations of Eq. (2). First, we carry out the angular integration to obtain

$$h(z) = 2\pi \frac{\exp(ikz)}{i\lambda f(f+z)} \int_0^\infty t_0(r) \times \exp\left[-i2\pi \frac{z}{2\lambda f(f+z)} r^2\right] r dr, \quad (3)$$

where

$$t_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(r, \theta) d\theta \quad (4)$$

is a radially symmetric function that stands for the azimuthal average of $t(r, \theta)$. Of course, any pair of focused beams that yield the same azimuthally averaged function $t_0(r)$ generate an identical axial irradiance distribution.^{23,24}

The second manipulation consists in the geometrical mapping

$$\zeta = r^2, \quad t_0(r) = q_0(\zeta), \quad (5)$$

which explicitly converts the integral in Eq. (3) into a one-dimensional (1-D) Fourier transform, namely,

$$h(z) = \frac{\pi}{\lambda f(f+z)} \int_{-\infty}^{\infty} q_0(\zeta) \exp\left[-i2\pi \frac{z}{2\lambda f(f+z)} \zeta\right] d\zeta, \quad (6)$$

where some irrelevant premultiplying constant phase factors have been omitted. Note that the lower limit in the integral has been extended to $-\infty$, since the function $q_0(\zeta)$ is identically zero for $\zeta < 0$.

Next, we recognize that the scale factor of the 1-D Fourier transform is related to the axial variable z through the relation

$$u = \frac{z}{2\lambda f(z+f)}, \quad (7)$$

which is closely related to the axial coordinate defined by Lommel.² Thus the axial amplitude distribution of the focused beam can be expressed as

$$h(z) = Q(u) = \frac{\pi}{\lambda f^2} (1 - 2\lambda f u) \int_{-\infty}^{\infty} q_0(\zeta) \exp(-i2\pi u \zeta) d\zeta. \quad (8)$$

Finally, since our aim in this work is to calculate the position of the axial point of maximum irradiance, we express the axial behavior of the focused beam in terms of the normalized axial irradiance distribution, which is obtained by simply dividing the squared modulus of Eq. (8) by the irradiance at the paraxial focal point $u = 0$. Mathematically,

$$\mathcal{F}_N(u) = (1 - 2\lambda f u)^2 \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} q_0(\zeta) \exp(-i2\pi u \zeta) d\zeta \right|^2}{\left| \int_{-\infty}^{\infty} q_0(\zeta) d\zeta \right|^2}. \quad (9)$$

III.2

From Eq. (9) it follows that the axial irradiance distribution of the focused beam is governed by the product of two terms that can be understood, from the point of view of the Huygens-Fresnel principle,^{9,13} in the following way. The first term, which involves the 1-D Fourier transform of $q_0(\zeta)$, describes at any axial point the interference by the different Huygens spherical wavelets proceeding from all points of the reference plane. Since $t(r, \theta)$, and consequently $q_0(\zeta)$, are real and positive functions, the Huygens wavelets arrive in phase at the geometrical focus, and then the maximum of this term is achieved at the origin. However, as the secondary wavelets propagate, their amplitude suffers an attenuation that is proportional to the inverse covered distance. This attenuation is described in Eq. (9) by the term $(1 - 2\lambda fu)^2$.

It is then apparent that the competition between these two terms produces a displacement of the axial irradiance peak toward the reference plane, resulting in the well-known focal-shift effect, whose magnitude we evaluate in Section 3.

3. RELATIVE FOCAL-SHIFT FORMULA

To obtain the relative position of the greatest value of the axial irradiance distribution, one should obtain the roots of the equation

$$d\mathcal{I}_N/du = 0 \quad (10)$$

and select from among them the absolute maximum. However, in many cases of interest an exact analytical result cannot be obtained by this method. To avoid this drawback, we propose to expand the normalized irradiance distribution into a Taylor series. Taking into account that the region of interest is located in the vicinities of the geometrical focus ($u = 0$), we may neglect the third- and higher-order terms and restrict the series to a quadratic approximation, i.e.,

$$I_N(u) = \mathcal{I}_N(0) + \mathcal{I}'_N(0)u + \frac{\mathcal{I}''_N(0)}{2}u^2. \quad (11)$$

Now, by straightforward (albeit cumbersome) calculation, we obtain by making use of the moment theorem²⁵ the following approximated parabolic expression for the normalized axial irradiance distribution:

$$I_N(u) = 1 - 4\lambda fu + 4(\lambda^2 f^2 - \pi^2 \sigma^2)u^2, \quad (12)$$

where

$$\sigma = \left[\frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

stands for the standard deviation of the mapped function $q_0(\zeta)$ and

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} q_0(\zeta) \zeta^n d\zeta, \quad (14)$$

denotes the n th moment of $q_0(\zeta)$.

By virtue of Eq. (12), we find that the position and the height of the maximum of the quadratic axial irradiance distribution are given, respectively, by

$$u_{\max} = \frac{1}{2\lambda f} \frac{1}{1 - \pi^2 N_{\text{eff}}^2}, \quad (15)$$

$$I_N(u_{\max}) = \frac{\pi^2 N_{\text{eff}}^2}{\pi^2 N_{\text{eff}}^2 - 1}, \quad (16)$$

where we have introduced a new parameter, named here the effective Fresnel number of the focused beam, defined as

$$N_{\text{eff}} = \sigma/\lambda f. \quad (17)$$

This parameter characterizes any focused beam at the reference plane and is proportional to the standard deviation of $q_0(\zeta)$, which can be interpreted as a measure of the effective width of the beam.

Now, by combining Eqs. (7) and (15), we find that the value of the relative focal shift is given by

$$\frac{z_{\max}}{f} = -\frac{1}{\pi^2 N_{\text{eff}}^2}. \quad (18)$$

This relevant formula, which is a generalization of the results obtained for both the circular aperture^{7,9} and the Gaussian beam,^{20,21} indicates that any scalar field belonging to the general class of focused beams suffers a relative focal shift that, within the second-order approximation, is proportional to the inverse square of the effective Fresnel number of the beam. So it is apparent that, independently of both the profile and the scale of the function $t(r, \theta)$ and the sign of the focal length f , any pair of focused beams having the same value for N_{eff} , and consequently the same effective width, exhibit the same relative focal shift.

The minus sign in Eq. (18) indicates that the distances z_{\max} and f have opposite sign. Therefore, either in a converging ($f > 0$) or in a diverging ($f < 0$) focusing geometry, the displacement of the axial irradiance peak is always toward the reference plane. Note that in the diverging case the virtual focal shift can be viewed by focusing a microscope with low magnifying power behind the reference plane, assuming that the optical instrument has a numerical aperture large enough not to introduce significant diffraction effects on its own account. It is important to remark that, to the best of our knowledge, the virtual focal shift has been referred to only by Nye²⁶ when he studied the light diffracted by small unstopped lenses.

For illustrating the variation of the focal-shift effect with the value of the effective Fresnel number of the focused beam, in Fig. 2 we have plotted the relative focal shift against N_{eff} . From this figure we infer that the modulus of the relative focal shift greatly increases as N_{eff} decreases, being, for example, of the order of 0.1% when $N_{\text{eff}} = 10$ and 2.5% when $N_{\text{eff}} = 2$.

Concerning the accuracy of Eqs. (16) and (18), it can be easily shown (see Appendix A) that the relative error in the evaluation of the relative focal shift, resulting from the parabolic approximation, is given by

$$\frac{\Delta(z_{\max})}{|z_{\max}|} = \frac{2}{\pi^2 N_{\text{eff}}^2 - 1}, \quad (19)$$

whereas the error in the estimation of the height of the irradiance peak is

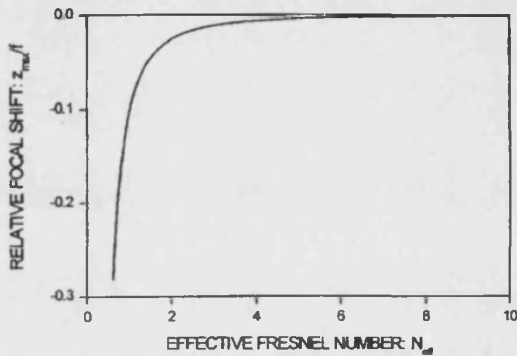


Fig. 2. Relative focal shift as a function of the effective Fresnel number of the focused beam.

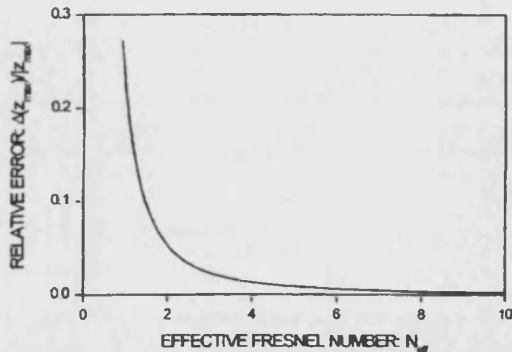


Fig. 3. Relative error associated with the focal shift determined by Eq. (18) versus the effective Fresnel number of the focused beam.

$$\Delta I_{\max} = \frac{2\pi^2 N_{\text{eff}}^2}{(\pi^2 N_{\text{eff}}^2 - 1)^3}. \quad (20)$$

We conclude from Eqs. (19) and (20) that both errors depend solely on the effective Fresnel number of the focused beam. In particular, the variation of the ratio $\Delta(z_{\max})/|z_{\max}|$ with N_{eff} is as indicated in Fig. 3. The examination of the curve in Fig. 3 reveals that the error is low for moderate values of N_{eff} (for example, when $N_{\text{eff}} \geq 2.0$, the error is less than 5%; and it is even less than 1% if $N_{\text{eff}} \geq 4.5$). On the contrary, for $N < 1$, $\Delta(z_{\max})/|z_{\max}|$ increases dramatically as N decreases.

4. EFFECTIVE FRESNEL-NUMBER ANALYSIS

In Section 3 we established that the position and the height of the axial irradiance peak for a general focused beam are determined by a single parameter, the effective Fresnel number of the focusing geometry. Hence it seems to be convenient to investigate more the role of the effective Fresnel-number parameter. To this end we now recall the interpretation of the axial irradiance distribution in terms of the Huygens-Fresnel superposition principle, as was done in Section 2. Note that, arising from

this principle, when we deal with a large pupil function $t(r, \theta)$ that involves a huge number of Fresnel zones in the process of Huygens wavelet interference, the 1-D Fourier transform in Eq. (9) provides a very sharp function centered at the geometrical focus $u = 0$. So its value is negligible unless u is very small. In this way the factor $(1 - 2\lambda fu)^2$ is approximately unity in the region where the 1-D Fourier transform is nonzero, and consequently it can be ignored. In this case the axial irradiance distribution is fixed only by the interference term and is symmetric around the geometrical focus, since the Fourier transform of a real function is Hermitian. However, when $t(r, \theta)$, and consequently $q_0(\zeta)$, are narrow, which implies that a small number of Fresnel zones are involved in the interference process, the Fourier transform gives rise to a function that decreases smoothly in the neighborhood of the paraxial focal point. Now the attenuation term $(1 - 2\lambda fu)^2$ is not unity in the whole region in which the Fourier transform is clearly different from zero. The presence of this term, whose value increases with negative values of the product fu , shifts the irradiance peak toward the reference plane, resulting in the focal-shift effect.

It is then clear that the axial irradiance distribution of the focused beam, and thus the relative focal shift, are determined by both the number of Fresnel zones involved in the interference process and their relative contribution. In other words, the axial pattern is governed by the effective width of the beam at the reference plane. In this context we conclude that the effective Fresnel number, which is proportional to the standard deviation of the function $q_0(\zeta)$, evaluates in a certain way the effective number of Fresnel zones in the focusing geometry involved in the above process, and therefore it also takes into account the importance of the relative contribution of each individual zone in the final result.

5. APPLICATION TO SEVERAL FOCUSING GEOMETRIES

We start by considering the case of an annular aperture of inner and outer radii ϵa ($0 \leq \epsilon < 1$) and a , respectively, illuminated by a monochromatic spherical wave of focal length f . According to Eq. (17), the effective Fresnel number for this focusing geometry is

$$N_{\text{eff}} = \frac{(1 - \epsilon^2) a^2}{\sqrt{12} \lambda f}. \quad (21)$$

Note that the above effective Fresnel number is indeed, apart from a proportionality factor $1/\sqrt{12}$, equal to the classical Fresnel number for annular focusing setups,^{11,15} which is given by

$$N = \frac{(1 - \epsilon^2) a^2}{\lambda f}, \quad (22)$$

which implies that, because of the close connection between these concepts, our formalism will allow us to reproduce the classical results, as we show next.

By substituting the value of N_{eff} into Eqs. (16) and (18), we find that the relative position and the height of the axial irradiance peak are

$$\frac{z_{\max}}{f} = -\frac{12}{\pi^2 N^2}, \quad (23a)$$

$$I_N(z_{\max}) = \frac{\pi^2 N^2}{\pi^2 N^2 - 12}, \quad (23b)$$

which are expressed in terms of the classical Fresnel number.

We emphasize that, if we simply set $\epsilon = 0$, the above equations are valid, in particular, for describing the focal shift for the quite typical case of the circular aperture. However, although equivalent equations have been derived elsewhere^{7,9} for converging illumination, it was not recognized that they are also valid for describing the virtual focal-shift effect when the circular aperture is illuminated by a diverging monochromatic spherical wave.

As a second example we consider the case of a spherical Gaussian beam that illuminates a circular aperture of radius a , f being the radius of curvature of the beam at the aperture plane. To carry out this study, it is convenient to introduce the truncation parameter of the focusing geometry, defined by

$$\alpha = (a/\omega)^2, \quad (24)$$

where ω stands for the width of the Gaussian beam at the reference plane. The expression for N_{eff} in this case is

$$N_{\text{eff}} = \frac{\omega^2}{\lambda f} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 \exp(\alpha)}{[1 - \exp(\alpha)]^2} \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

Now, by substituting Eq. (25) into Eq. (18), we find that the relative focal shift corresponding to a truncated spherical Gaussian beam is given, in terms of the truncation parameter, by

$$\frac{z_{\max}}{f} = \frac{\lambda f}{\pi^2 \omega^2 \{1 - \alpha^2 \exp(\alpha)/[1 - \exp(\alpha)]^2\}}. \quad (26)$$

As in the previous example, next we analyze some particular case. First, for strong truncation, the width of the incident beam is much higher than the radius of the circular aperture. In this case the value of the truncation parameter α is almost zero. By performing the limit when α tends to zero in Eqs. (25) and (26), we achieve the effective Fresnel number and the relative focal shift corresponding to the uniformly illuminated circular aperture.

In the other extreme case, corresponding to an unapertured Gaussian beam (weak truncation), the coefficient α tends to infinity. Here the limit value for the effective Fresnel number is

$$N_{\text{eff}} = \omega^2/\lambda f. \quad (27)$$

This expression is just the same as that of the classical Fresnel number defined for focused Gaussian beams.²⁰⁻²² By substitution of this value into Eq. (18), the relative focal shift for unapertured Gaussian beams is

$$\frac{z_{\max}}{f} = \frac{\lambda^2 f^2}{\pi^2 \omega^4}, \quad (28)$$

which reproduces in a quite good approximation the previously known result.²⁷

Up to now we have illustrated our approach by reexamining, with our approach, the general case of the annular aperture or the truncated Gaussian beam, which have indeed been studied in the literature. Now we go one step further and investigate the axial behavior for two diffracting screens, reported in the optical literature for certain applications, when they are illuminated with a monochromatic spherical wave front of focal length f .

The first screen under study is that of mapped transmittance

$$q_0^*(\zeta) = \begin{cases} 4[(\zeta/a^2) - 0.5]^2 & \text{if } 0 \leq \zeta \leq a^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (29)$$

which produces a superresolving axial irradiance pattern.²⁸ The mapped transmittance for the second selected diffracting screen is

$$q_0^0(\zeta) = \begin{cases} 1 - q_0^*(\zeta) & \text{if } 0 \leq \zeta \leq a^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (30)$$

which produces an axial apodization effect.²⁹ The profiles of both screens in the ζ coordinate and in the radial coordinate are shown in Fig. 4. It is straightforward to obtain analytically the standard deviation, and conse-

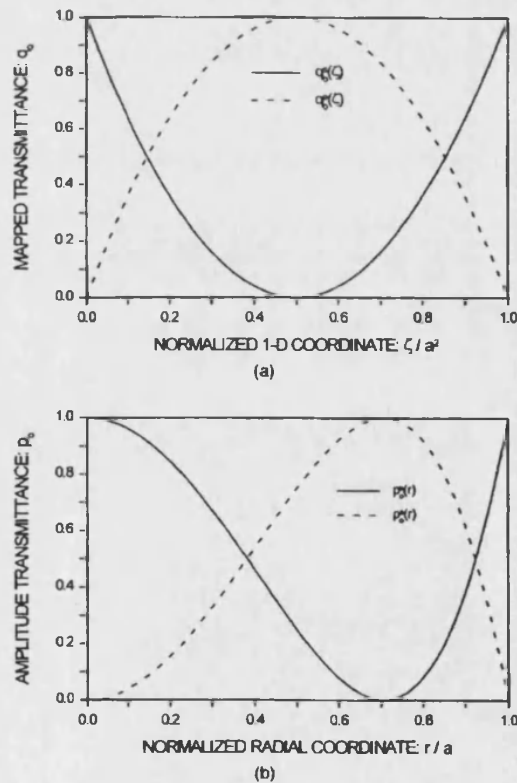


Fig. 4. Amplitude transmittance of the axially superresolving diffracting screen (solid curves) and the axially apodizing parabolic filter (dashed curves): (a) ζ -space representation, (b) radial coordinate representation.

quently the corresponding effective Fresnel number, for these quadratic functions. We have

$$N_{\text{eff}}^s = \sqrt{\frac{3}{20}} \frac{a^2}{\lambda f}, \quad (31a)$$

$$N_{\text{eff}}^a = \frac{1}{\sqrt{20}} \frac{a^2}{\lambda f}. \quad (31b)$$

When we take into account Eq. (18), the relative position of the axial irradiance peak is given, respectively, by

$$\frac{z_{\text{max}}^s}{f} = \frac{-20}{3\pi^2} \left(\frac{\lambda f}{a^2} \right)^2, \quad (32a)$$

$$\frac{z_{\text{max}}^a}{f} = \frac{-20}{\pi^2} \left(\frac{\lambda f}{a^2} \right)^2. \quad (32b)$$

Note that if all geometric parameters in both optical setups are equal, it is apparent that $z_{\text{max}}^s = 3z_{\text{max}}^a$. Therefore the axially apodizing diffracting screen is three times more sensitive to the focal-shift effect than that which produces axial superresolution. This is what one would expect, since, as we mentioned in Section 4, the wider the central lobe of the axial-distribution irradiance, the greater the amount of the focal shift. In this work we recognize that this general statement can be quantified by means of the effective Fresnel-number parameter.

6. CONCLUSIONS

We have presented a quite simple analytical formulation for evaluating, in a second-order approximation, the relative focal shift for any focused beam with or without radial symmetry. The proposed formula depends solely on a beam parameter named the effective Fresnel number of the focused beam. This important result means that any pair of focused beams with the same effective Fresnel number show the same relative focal shift, independently of their geometric parameters and their transverse profile. Moreover, our formalism also permits us to quantify the virtual focal-shift effect for any diverging focused beam. Finally, we have illustrated our approach by discussing the focal-shift effect shown by different focusing geometries.

APPENDIX A

The error involved in the approximation carried out in Eq. (11), i.e., the modulus of the difference between the exact axial irradiance and the value provided by the quadratic approximation, is given by the absolute value of the so-called Lagrange remainder, namely,

$$R(\mathcal{F}_N; 0, u) = \frac{\mathcal{F}_N''(u_0)}{6} u^3, \quad (A1)$$

where u_0 is an axial-coordinate value between 0 and u .

If we assume that the normalized irradiance distribution is a slowly varying function and that the axial coordinate u under investigation is close to the paraxial focus, the approximation

$$\mathcal{F}_N''(u_0) \approx \mathcal{F}_N''(0) = 96\pi^2\sigma^2\lambda f, \quad (A2)$$

may be applied. If we particularize under this assumption the value of the Lagrange remainder for $u = u_{\text{max}}$, we obtain that the error in the estimation of the height of the irradiance peak, which is derived by inserting Eq. (15) and relation (A2) into Eq. (A1), is

$$\Delta I_{\text{max}} = \Delta[I_N(u_{\text{max}})] = \frac{2\pi^2 N_{\text{eff}}^2}{(\pi^2 N_{\text{eff}}^2 - 1)^3}. \quad (A3)$$

For obtaining the error in the evaluation of the relative focal shift, first we express this parameter in terms of $I_N(u_{\text{max}})$ by combining Eqs. (16) and (18). In this way Eq. (18) can be written as

$$\frac{z_{\text{max}}}{f} = \frac{1}{I_N(u_{\text{max}})} - 1. \quad (A4)$$

Now, by merely applying standard error propagation techniques, we obtain

$$\Delta\left(\frac{z_{\text{max}}}{f}\right) = \frac{2}{\pi^2 N_{\text{eff}}^2} \frac{1}{\pi^2 N_{\text{eff}}^2 - 1}. \quad (A5)$$

Finally, the relative error in the determination of the relative focal shift is achieved by simply dividing Eq. (A5) by the absolute value of Eq. (18). Thus

$$\frac{\Delta(z_{\text{max}})}{|z_{\text{max}}|} = \frac{2}{\pi^2 N_{\text{eff}}^2 - 1}. \quad (A6)$$

ACKNOWLEDGMENTS

Part of this work was presented at the 80th Optical Society of America Annual Meeting, held in Rochester, N.Y., in October 1996. This work was supported by the Dirección General de Investigación Científica y Enseñanza Superior (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. C. J. Zapata-Rodríguez gratefully acknowledges financial support from this institution.

REFERENCES AND NOTES

1. E. Collet and E. Wolf, "Symmetry properties of focused fields," *Opt. Lett.* **5**, 264-266 (1980).
2. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon, Oxford, 1980), Sec. 8.8.1.
3. E. Wolf and Y. Li, "Conditions for the validity of Debye integral representation of focused fields," *Opt. Commun.* **39**, 205-209 (1981).
4. D. A. Holmes, J. E. Korka, and P. V. Avizonis, "Parametric study of apertured focused Gaussian beams," *Appl. Opt.* **11**, 565-574 (1972).
5. A. Arimoto, "Intensity distribution of aberration-free diffraction patterns due to a circular aperture in large F -number optical systems," *Opt. Acta* **23**, 245-250 (1976).
6. M. A. Gusinow, M. E. Riley, and M. A. Palmer, "Focusing in a large F -number optical system," *Opt. Quantum Electron.* **9**, 465-471 (1977).
7. Y. Li and E. Wolf, "Focal shifts in diffracted converging spherical waves," *Opt. Commun.* **39**, 211-215 (1981).
8. J. J. Stannnes and B. Spjelkavik, "Focusing at small angular apertures in the Debye and Kirchhoff approximations," *Opt. Commun.* **40**, 81-85 (1981).
9. M. P. Givens, "Focal shifts in diffracted converging spherical waves," *Opt. Commun.* **41**, 145-148 (1982).
10. Y. Li and H. Platzler, "An experimental investigation of dif-

- fraction patterns in low-Fresnel-number focusing systems," *Opt. Acta* **30**, 1621-1643 (1983).
11. V. N. Mahajan, "Axial irradiance and optimum focusing of laser beams," *Appl. Opt.* **22**, 3042-3053 (1983).
 12. J. Ojeda-Castañeda, M. Martínez-Corral, P. Andrés, and A. Pons, "Strehl ratio versus defocus for noncentrally obscured pupils," *Appl. Opt.* **33**, 7611-7616 (1994).
 13. M. Martínez-Corral and V. Climent, "Focal switch: a new effect in low-Fresnel-number systems," *Appl. Opt.* **35**, 24-27 (1996).
 14. S. Szapiel, "Maréchal intensity formula for small-Fresnel-number systems," *Opt. Lett.* **8**, 327-329 (1983).
 15. M. Martínez-Corral, P. Andrés, and J. Ojeda-Castañeda, "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils," *Appl. Opt.* **33**, 2223-2229 (1994).
 16. P. Andrés, M. Martínez-Corral, and J. Ojeda-Castañeda, "Off-axis focal shift for rotationally nonsymmetric screens," *Opt. Lett.* **18**, 1290-1292 (1993).
 17. G. Goubau, "Optical relations for coherent wave beams," in *Electromagnetic Theory and Antennas*, E. C. Jordan, ed. (Macmillan, New York, 1963), Part 2, pp. 907-918.
 18. A. G. van Nie, "Rigorous calculation of the electromagnetic field for wave beams," *Philips Res. Rep.* **19**, 378-394 (1964).
 19. H. Kogelnik, "Imaging of optical modes-resonators with internal lenses," *Bell Syst. Tech. J.* **44**, 455-594 (1965).
 20. W. H. Carter, "Focal shift and concept of effective Fresnel number for a Gaussian laser beam," *Appl. Opt.* **21**, 1989-1994 (1982).
 21. Y. Li and E. Wolf, "Focal shift in focused truncated Gaussian beams," *Opt. Commun.* **42**, 151-156 (1982).
 22. Y. Li, "Focal shift formula for focused, apertured Gaussian beams," *J. Mod. Opt.* **39**, 1761-1764 (1992).
 23. C. W. McCutchen, "Generalized aperture and three-dimensional diffraction image," *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 240-244 (1964).
 24. J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés, and M. Martínez-Corral, "Zero axial irradiance by annular screens with angular variation," *Appl. Opt.* **31**, 4600-4602 (1992).
 25. J. D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* (Wiley, New York, 1978), pp. 212-214.
 26. J. F. Nye, "Diffraction by a small unstopped lens," *J. Mod. Opt.* **38**, 743-754 (1991).
 27. Specifically, it is shown in Refs. 17-22 that the point of maximum axial irradiance is located at a normalized distance $z_{\max}/f = -1/(1 + \pi^2 \omega^4/\lambda^2 f^2)$ from the geometrical focus. We would like to remark that this equation is equivalent to Eq. (28) in the text, except for an additive constant in the denominator. It is easy to show that the difference between the two results is very low for moderate values of N_{eff} .
 28. C. J. R. Sheppard and Z. S. Hegedus, "Axial behavior of pupil-plane filters," *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 643-647 (1988).
 29. M. J. Yzuel, J. C. Escalera, and J. Campos, "Polychromatic axial behavior of axial apodizing and hyperresolving filters," *Appl. Opt.* **29**, 1631-1641 (1990).

Publicación IV

**Axial behavior of diffractive lenses
under Gaussian illumination:
complex-argument spectral analysis**

Journal of the Optical Society of America A, 16, pp. 2532–2538 (1999)

Axial behavior of diffractive lenses under Gaussian illumination: complex-argument spectral analysis

Carlos J. Zapata-Rodríguez, Manuel Martínez-Corral, Pedro Andrés, and Amparo Pons

Department of Optics, University of Valencia, Dr. Moliner 50, E-46100 Burjassot, Spain

Received January 4, 1999; accepted April 5, 1999; revised manuscript received May 11, 1999

We present a general procedure to analyze the axial-irradiance distribution generated by an unlimited diffractive lens under coherent, Gaussian illumination. The resulting on-axis diffraction pattern, which is evaluated in terms of the power complex spectrum of the Fresnel-zone transmittance, explicitly depends on the truncation parameter that we define, which evaluates the effective number of zones illuminated by the Gaussian beam. Depending on the value of this parameter, different kinds of axial behavior are observed. In particular, for moderate values, a multiple-focal-shift phenomenon appears, and a simple formula for its evaluation is presented. Additionally, for low values of the truncation parameter, a focal-merge effect is observed in multifocal zone plates. © 1999 Optical Society of America (S0740-3232(99)03209-3)

OCIS codes: 220.2560.

1. INTRODUCTION

Zone plates have been widely used in optical systems¹ such as optical disk readout setups,² confocal scanning microscopes,^{3,4} beam-shaping elements,⁵ and miniature optical switching devices.⁶ Advanced phototechnologies and computer synthesis of diffractive elements allow considerable facilitation of their fabrication and printing.⁷ In contrast to designs using refractive elements, diffractive lenses provide important features uniquely suitable for such optical applications: (1) a zone plate is similar to a multifocal lens and has an infinity of foci, whose distances to the plate are a fraction of the principal focal length,⁸ and (2) the dispersion resulting from a diffraction phenomenon is, in general, stronger than that from refraction, providing a more sensitive wavelength-to-focal-length dependence.^{2,3} Most of the systems using diffractive lenses are laser technological setups, where the versatility and the small size of a fiber-based device make it an attractive candidate for a micromechanical optical arrangement.⁹

Several analytical descriptions have been proposed for the wave field in the focal regions of diffractive lenses under plane-wave illumination. Boivin¹⁰ published an analytical study of the diffraction phenomenon produced by the Fresnel zone plate by summing up the contributions of each transparent zone. By using Fourier analysis, Novotny¹¹ interpreted the transmission function of diffractive lenses as a superposition of the transmission functions of ideal lenses. The three-dimensional wave-field structure in the focal region does not deviate from that of an ideal lens for a high number of periods.¹²

Diffractive lenses are featured by a limited numerical aperture that is constrained by the minimum size possible with current microfabrication technology. Eventually, this may lead to an optical device with a low number of periods. Interesting features are observed in the caustics of zone plates when the number of Fresnel zones is

not large (<100). In the far field, an interference pattern of contrast nonlocalized fringes⁵ has been observed that is due to the relevance of secondary diffraction orders. Koronkevich and Pal'chikova¹³ have found that the field is asymmetric with respect to the nominal focal plane and that the maximum of intensity on the optic axis is shifted from the geometrical focus for zone plates with a stepwise kinoform phase profile. Jiang *et al.*¹⁴ have found that the so-called focal-shift effect¹⁵⁻¹⁷ also appears for a Fresnel zone plate under spherical uniform illumination, providing an approximated formula for the evaluation of the relative focal shift.

Boivin analysis¹⁰ seems to be appropriate for diffractive lenses containing a low number of Fresnel zones. Otherwise, when the contribution of a large number of zones is significant, the Novotny¹¹ procedure yields results that are more efficient. However, for nonuniform illumination, it is possible to find a diffractive optical setup where a great number of Fresnel zones must be taken into account, though only a few of them contribute strongly to the overall irradiance distribution in the different focal regions.

The aim of this study is to present a novel formulation, which is highly efficient within a wide range of illumination considerations, for describing the axial behavior of diffractive lenses under Gaussian beam illumination. It is then straightforward to show that, under certain circumstances, it is possible to observe a focal-shift effect in zone plates of high number of periods, provided that the illumination has a nonuniform Gaussian profile. In fact, this assumption holds in laser technological setups where the light is emitted from a single-mode optical fiber. For this purpose, in Section 2 we develop an expression for the evaluation of the axial-irradiance distribution generated by an unlimited diffractive lens under Gaussian plane illumination. The resulting on-axis diffraction pattern explicitly depends on the truncation parameter de-

fined here, which evaluates the effective number of Fresnel zones illuminated by the Gaussian beam. Section 3 shows that, depending on the value of this parameter, different kinds of axial behavior are observed. In particular, a multiple-focal-shift phenomenon appears for moderate values, and a simple formula for its evaluation is reported. To illustrate our formulation, Section 4 is devoted to investigating the axial behavior of several kinds of diffractive lenses. Specifically, the multiple-focal-shift effect for the cases of a Fresnel zone plate and a stepwise relief kinoform lens is theoretically discussed. In addition, interesting phenomena are found for under-unity truncation parameters, such as a merge of axial neighbor foci.

2. IRRADIANCE DISTRIBUTION ALONG THE OPTIC AXIS

Let us consider a circular diffractive lens that is fully illuminated by a plane Gaussian beam. For simplicity, we assume that the propagating wave impinges normally upon the diffractive lens in such a way that the center of the Gaussian pattern coincides with that of the zone plate (see Fig. 1). The amplitude transmission of such a diffractive plane element may be described by a periodic function with the square radial coordinate ρ^2 as

$$t(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a \left(\frac{\rho^2}{T^2} - n \right) = a \left(\frac{\rho^2}{T^2} \right) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\rho^2 - nT^2), \quad (1)$$

where \otimes represents the convolution operation and $a(\cdot)$ stands for the transverse transmittance, usually denoted as a normalized unit cell, which is replicated with a period given by T^2 . The wave-field distribution in the transverse plane just behind the zone plate, denoted from here on as the reference plane, can be expressed, according to the Kirchhoff boundary conditions,¹⁸ as

$$U_0(\rho) = A \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2}\right) t(\rho), \quad (2)$$

where we have introduced a Gaussian attenuation along the radial coordinate that is due to the nonuniform distri-

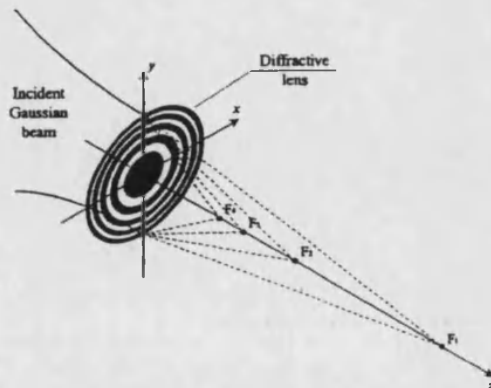


Fig. 1. Schematic diagram of the optical arrangement.

bution of the illuminating radiation. In Eq. (2) A indicates the incident-wave amplitude on the optic axis, and ω is the waist spot size. The diffracted field can be evaluated on a transverse plane with respect to the propagation direction, located a distance z from the reference plane, by means of the Fresnel-Kirchhoff diffraction formula (see Ref. 18, Sec. 4.2), that is,

$$U(r, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(i\frac{k}{2z}r^2\right) \int_0^{\infty} U_0(\rho) \times \exp\left(i\frac{k}{2z}\rho^2\right) J_0\left(2\pi\frac{r\rho}{\lambda z}\right) 2\pi\rho d\rho. \quad (3)$$

The paraxial approximation that is assumed here will provide a suitable evaluation of the diffracted field when the inequality $z \gg T \gg \lambda$ holds, provided that the outermost Fresnel zones of the diffractive lens do not contribute significantly to the overall diffracted field.

By inserting Eq. (2) into Eq. (3), we can obtain the amplitude distribution along the optic axis by restricting the diffraction formula to the axial points $r = 0$. Moreover, it has been shown^{19,20} that the resulting integral can be conveniently transformed with the use of a geometrical mapping given by $\zeta = \rho^2$. Therefore the axial-amplitude distribution may be expressed as

$$U(z) = A \frac{\pi}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} q(\zeta) \exp\left[i2\pi\left(\frac{1}{2\lambda z} + i\frac{1}{2\pi\omega^2}\right)\zeta\right] d\zeta, \quad (4)$$

where we have neglected an unessential phase factor. We have introduced the function $q(\zeta) = t(\rho)$, which arises from the geometrical mapping performed in the diffraction integral, that is,

$$q(\zeta) = a\left(\frac{\zeta}{T^2}\right) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\zeta - nT^2). \quad (5)$$

Note that we have extended the lower limit of the integral in Eq. (4) to $-\infty$, since the function $q(\zeta)$ vanishes for $\zeta < 0$.

From Eq. (4) it is apparent that the axial behavior of a circular zone plate under Gaussian illumination is determined by the one-dimensional (1-D) Fourier transform, with complex scale factor, of the causal quasi-periodical function $q(\zeta)$. Then, profiting from the 1-D convolution nature of the function $q(\zeta)$, as shown in Eq. (5), we can rewrite the complex-argument Fourier transform of $q(\zeta)$ as a product of two terms. The first is simply the 1-D Fourier transform of the normalized unit cell, denoted as \bar{a} , whereas the second is given by

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\zeta - nT^2) \exp\left[i2\pi\left(\frac{1}{2\lambda z} + i\frac{1}{2\pi\omega^2}\right)\zeta\right] d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[i2\pi n\left(\frac{T^2}{2\lambda z} + i\frac{T^2}{2\pi\omega^2}\right)\right]. \quad (6)$$

Equation (6) represents a geometrical series of infinite terms. Fortunately, we can sum up all the terms by means of the well-known relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad (7)$$

giving

$$F(N, \alpha) = \frac{1}{1 - \exp\left[i2\pi\left(\frac{N+i}{2\pi\alpha}\right)\right]}, \quad (8)$$

where the axial coordinate has been expressed in terms of

$$N = \pi \frac{\omega^2}{\lambda z}, \quad (9)$$

which stands for the Gaussian Fresnel number associated with the different diffraction patterns of the Gaussian beam,²¹ and where we have introduced a new parameter, denoted as the truncation parameter, which we have defined as

$$\alpha = \frac{\omega^2}{T^2}. \quad (10)$$

This parameter indicates the number of Fresnel zones from the diffractive lens that are covered by the Gaussian waist spot. Therefore it gives a rough estimation of the number of Fresnel zones that effectively contribute to the diffraction pattern.

Finally, the axial-irradiance distribution can properly be written, apart from a constant factor A^2 , as

$$I(N) = \left(\frac{N}{\alpha}\right)^2 \left|\bar{a}\left(\frac{N+i}{2\pi\alpha}\right)\right|^2 |F(N, \alpha)|^2, \quad (11a)$$

where the term $|F(N, \alpha)|^2$ can be expressed as²²

$$|F(N, \alpha)|^2 = \frac{1}{4} \frac{\exp(1/\alpha)}{\sin^2(N/2\alpha) + \sinh^2(1/2\alpha)}. \quad (11b)$$

This relevant formula, which fully describes the axial behavior of diffractive lenses for any value of the truncation parameter, indicates that the axial-irradiance distribution is governed by the product of three different factors. The first, $(N/\alpha)^2$, describes the irradiance attenuation inherent in spherical wave propagation. The second term, defined here as the diffraction term, takes into account the diffraction effect produced by the amplitude transmittance of the unit cell. Finally, the third term, or interference term, considers the focusing properties of a zone plate under Gaussian illumination.

3. FOCI GENERATION AND THE MULTIPLE-FOCAL-SHIFT EFFECT

To investigate the focusing properties associated with a diffractive lens, in Fig. 2 we represent graphically the interference term $|F|^2$ versus a normalized Gaussian Fresnel number $N/2\pi\alpha$ for some typical values of the truncation parameter α . From this figure it is apparent that the interference term is composed of an infinite number of uniformly distributed peaks, whose maxima are located accordingly for Gaussian Fresnel numbers, taking the values

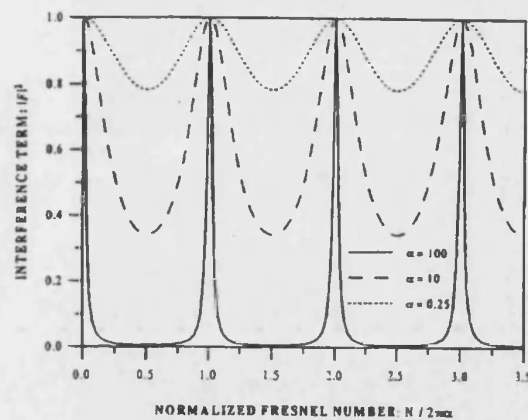


Fig. 2. Normalized interference term versus reduced axial coordinate $N/2\pi\alpha$ for different values of the truncation parameter α . The peak structures of this term quickly disappear for decreasing values of the truncation parameter close to unity.

$$N_n = 2\pi n \alpha \quad \text{with } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

The axial positions of the local maxima expressed in terms of the axial coordinate z are $f_n = T^2/2\lambda n$, which precisely coincide with the well-known foci positions of a circular zone plate.⁹ For $n = 0$ we find the singularity $f_0 \rightarrow \infty$, whose interpretation should be that the curvature of the zero-order diffracted beam is flat. We observe that the width of the interference-term peaks depends only on the truncation parameter α .

In analogy to the resonance-properties analysis of a Fabry-Perot interferometer,²³ we can evaluate the ratio of the gap hold between two adjacent peaks to the peak width, giving the so-called finesse that is,

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sinh(1/2\alpha)}. \quad (13)$$

The analogy is fully justified in the sense that a multiple-wave interference process occurs, one concerning an infinite number of plane waves generated in a resonant cavity and the other involving Fresnel wavelets proceeding from the multiple zones of the diffracting plate.

Standard use of diffractive lenses requires a high number of Fresnel zones to be well illuminated, which is established mathematically as α becomes much higher than unity. This results in an approximately linear dependence of \mathcal{F} on the truncation parameter, i.e., $\mathcal{F} = \pi\alpha$. In this case the interference term contains a set of well-defined peaks with a low focal depth (see Fig. 2). In these small regions, the propagation factor and the diffracting term, contributing to the axial-irradiance pattern [see Eq. (11a)], do not vary appreciably, taking the approximate values $(2\pi n)^2$ and $|\bar{a}(n)|^2$, respectively. This agrees with the commonly used assumption²⁴ that the height of the n th-order focus of a diffractive lens is directly proportional to the product $n^2|\bar{a}(n)|^2$.

Nevertheless, the above analysis no longer holds for low values of the truncation parameter. Most of the practical uses of diffractive lenses in current micro-optical setups satisfy such a constraint.¹ According to Eq. (13),

in this case the parameter \mathcal{F} comes closer to unity, that is, the width of every peak increases with respect to the separation with the neighboring peaks, starting an overlapping process. Simultaneously, both the propagation factor and the diffraction term may notably change in the focal regions. For the sake of simplicity, we will assume that the major deviation is caused by the propagation factor, which holds for moderate values of α , and the most typical unit-cell profiles a . Then we can expand the denominator in Eq. (8) into a Taylor series, up to a first-order approximation, about the n th-order peak, giving

$$F_n(N, \alpha) = \frac{i}{2\pi[(N - N_n) + i]/(2\pi\alpha)}. \quad (14)$$

If we approximate the interference term to the constant value $|\bar{a}(n)|^2$, the axial behavior in the vicinities of the n th zone-plate focus may be written in accordance with Eq. (11a) as

$$I_n(N) = |\bar{a}(n)|^2 \frac{N^2}{(N - N_n)^2 + 1}. \quad (15)$$

According to Eq. (15), we find that the loci of the local maxima in the axial-irradiance distribution are given by

$$N_{\max}(n) = N_n \left(1 + \frac{1}{N_n^2} \right) = N_n \left[1 + \frac{1}{(2\pi n \alpha)^2} \right]. \quad (16)$$

From this equation we confirm that when the truncation parameter α , and then N_n , tend to infinity, the maxima along the axial-irradiance distribution coincide with the foci of the zone plate. However, for decreasing values of α , the local maxima suffer a slight displacement given by higher values of the Gaussian Fresnel number, that is, toward the diffractive lens. This interesting result allows us to recognize the existence of a multiple-focal-shift effect in zone plates under Gaussian illumination for moderate values of the truncation parameter.

Note that Eq. (15) is similar to that describing the axial behavior of a spherical Gaussian beam.²⁵ Interestingly, this occurs when a kinoform lens is illuminated by a plane Gaussian beam. In this case the unit-cell profile can be expressed as

$$a(\xi) = \exp(-i2\pi m \xi), \quad (17)$$

where m is an integer. Specifically, $m = 1$ corresponds to a converging diffractive lens, $m = -1$ represents a diverging kinoform zone plate, and the harmonic diffractive lenses²⁶ hold for $m = \pm 2, \pm 3, \dots$. The diffracting term can be analytically evaluated in terms of the sinc function, i.e.,

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad (18)$$

so, finally, we have

$$\begin{aligned} \left| a \left(\frac{N+i}{2\pi\alpha} \right) \right|^2 &= \left| \text{sinc} \left(\frac{N+i}{2\pi\alpha} - m \right) \right|^2 \\ &= \frac{(2\alpha)^2 \sin^2(N/2\alpha) + \sinh^2(1/2\alpha)}{\exp(1/\alpha) (N - N_n)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (19)$$

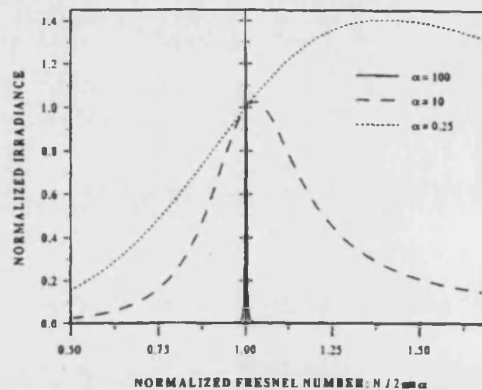


Fig. 3. Axial-irradiance distribution, normalized to the in-focus value, corresponding to a converging kinoform zone plate ($m = 1$) illuminated by a Gaussian beam. We observe a focal-shift effect when the truncation parameter decreases to values close to unity. In this case the point of maximum irradiance along the axis has a Gaussian Fresnel number higher than that corresponding to the principal focus, meaning that the focus shifts toward the kinoform lens.

By inserting Eq. (19) into Eq. (11a), we find that the irradiance distribution along the optic axis is given by

$$I(N) = \frac{N^2}{(N - N_n)^2 + 1}. \quad (20)$$

We can observe that Eqs. (15) and (20) follow the same behavior when the m th order is evaluated, that is, $n = m$. Figure 3 shows the axial-irradiance distribution of such a phase plate in terms of the reduced coordinate $N/N_m = N/2\pi m \alpha$ for different values of the truncation parameter. We clearly observe a focal-shift effect for values of α close to and lower than unity.

4. PARTICULAR EXAMPLES: FOCI-MERGE EFFECT

Next, we apply our formalism to the well-known Fresnel zone plate. This binary diffractive element consists of a set of concentric transparent and obscured annuli, all having the same area and distributed alternately along the transverse direction.²⁴ The unit cell is then given by

$$a(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi < 1/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

The Fourier transform can be easily expressed in terms of the sinc function, giving

$$\bar{a}(u) = \frac{1}{2} \exp\left(i \frac{\pi}{2} u\right) \text{sinc}\left(\frac{u}{2}\right). \quad (22)$$

Now we can determine the axial behavior by using Eqs. (11), so the irradiance distribution along the axis is given by

$$I(N) = \exp(1/2\alpha) \frac{N^2 \sin^2(N/4\alpha) + \sinh^2(1/4\alpha)}{1 + N^2 \sin^2(N/2\alpha) + \sinh^2(1/2\alpha)} \quad (23)$$

In Fig. 4 we observe the predicted multiple-focal-shift effect. For high values of the truncation parameter, the height of the maxima along the axis equalizes, as predicted for uniform plane illumination by standard procedures.²⁴ For decreasing values of the truncation parameter α close to unity, the width of the peaks constituting the multifocal structure increases. This effect, which appears by virtue of the interference term as discussed in Section 3, is accompanied by a stronger influence of the asymmetry characterizing the propagation term. Although both combined effects yield a multiple focal shift, this effect is almost negligible except for the principal focus. Finally, the diffraction term selects the height of the axial peaks, which explains why even orders vanish.

In Fig. 5 we check the accuracy of Eq. (16) for evaluating the amount of focal shift suffered by the first three foci. It is shown that Eq. (16) gives suitable values for the focal shift for $\alpha \geq 1$. In this case the displacements of the maxima are always lower than the distance between adjacent peaks. Otherwise, the approximated formula given in Eq. (16) overestimates the multiple focal shift. In this case the diffractive term must be taken into account, since the assumption of a slow dependence on the Gaussian Fresnel number within the focal region holds only for values of the truncation parameter not lower than unity. Interestingly, we observe that for $\alpha = 0.17$ ($1/\alpha = 5.8$ in the plot abscissa) the principal focus suffers a rapid merge process with the third-order maximum. For lower values of α , we find several successive points where higher-order foci merge, giving rise to a

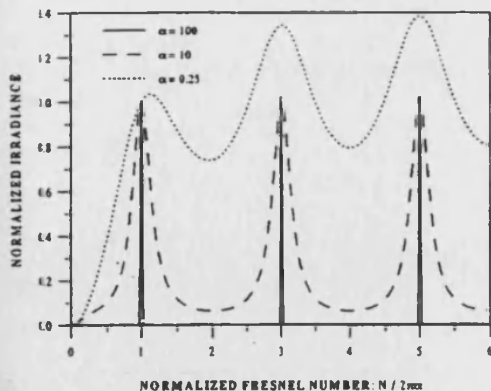


Fig. 4. Normalized axial-irradiance distribution versus reduced Gaussian Fresnel number. We observe a deviation from the multifocal behavior for truncation parameters close to unity. The height of the peaks does not equalize, since the propagation factor causes an asymmetry along the optic axis. Also, this term leads to the displacement of the axial maxima toward the Fresnel zone plate, giving rise to a multiple focal shift.

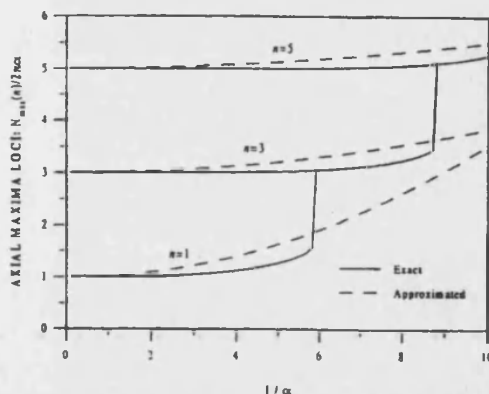


Fig. 5. Graphical representation of the axial maxima positions for the first three diffracting orders in terms of the truncation parameter. We represent the approximated expression given in Eq. (16) by dashed curves.

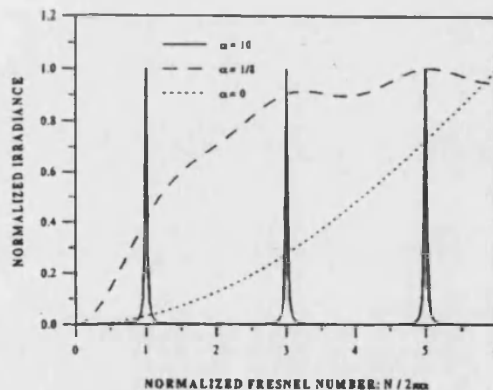


Fig. 6. Axial-irradiance distribution versus normalized Fresnel number of a Fresnel zone plate illuminated with a plane Gaussian beam for values of $\alpha = 10$, where we clearly observe focal-peak generation, $\alpha = 1/8$, where the first- and third-order maxima merge, and $\alpha = 0$, corresponding to an ideally nontruncated Gaussian beam. For convenience, the normalization of the axial-irradiance distribution is different for the cases presented here.

monotonic behavior of the axial-irradiance distribution. For the sake of clarity, in Fig. 6 we illustrate graphically the influence of the focal-merge effect on the axial-irradiance distribution for low values of the truncation parameter α .

To end up, we analyze the axial response of phase diffractive lenses with a stepwise profile, i.e., diffractive elements that approach a kinoform lens by the introduction of a phase-step relief.¹² Recent technological procedures¹ allow the use of steps with a small phase shift and reduced lateral dimensions, implying that the phase-plate efficiency can be extremely high. Then we describe the unit cell of such a structure as

$$a(\xi) = \exp[-i2\pi\phi(\xi)], \quad (24)$$

where

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi < 1/M \\ 1/M & 1/M \leq \xi < 2/M \\ 2/M & 2/M \leq \xi < 3/M \\ \vdots & \vdots \\ (M-1)/M & (M-1)/M \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (25)$$

In Eq. (25) M stands for the number of steps used in the kinoform phase-profile approach. The spectrum of the unit cell given in Eq. (24) can be written as

$$\begin{aligned} \bar{a}(u) &= \int_0^1 a(\zeta) \exp(i2\pi u \zeta) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \exp\left(-i2\pi \frac{n}{M}\right) \int_{n/M}^{(n+1)/M} \exp(i2\pi u \zeta_n) d\zeta_n. \end{aligned} \quad (26)$$

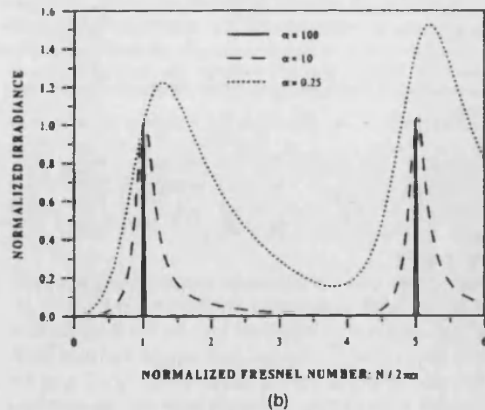
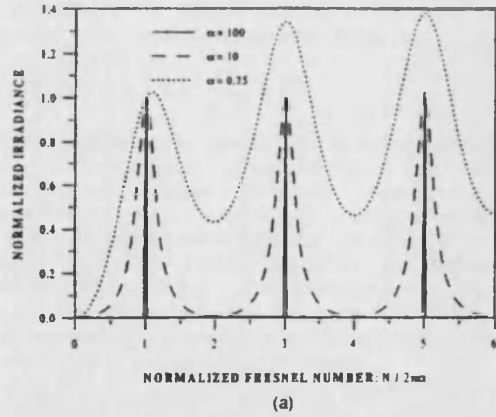


Fig. 7. Normalized axial-irradiance distribution for a kinoform zone plate with a stepwise profile. We have selected (a) $M = 2$ and (b) $M = 4$ phase steps as examples. We observe that for increasing number of steps, successive diffracting orders vanish. Thus, for the limiting case of an infinite number of steps, we generate a single-focus diffractive lens.

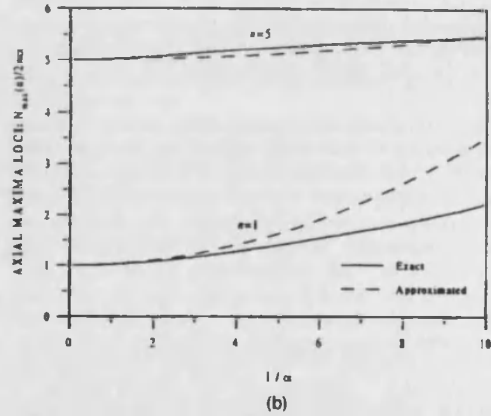
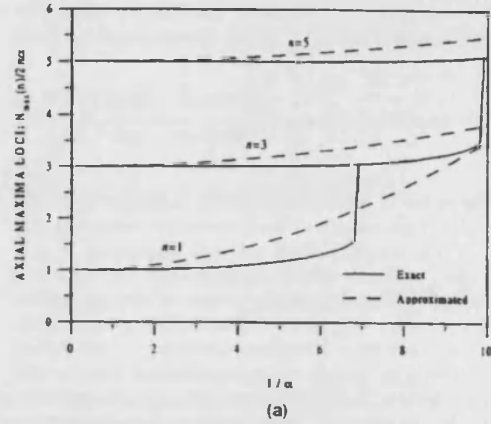


Fig. 8. Position of the maxima corresponding to the axial-irradiance distribution in terms of the truncation parameter. The geometrical parameters of the stepwise phase-relief diffractive lens coincide with those of Fig. 7.

By an appropriate change of variable within each integration in Eq. (26), i.e., $\zeta'_n = \zeta_n - n/M$, we evaluate the 1-D Fourier transform of the unit cell as

$$\begin{aligned} \bar{a}(u) &= \left[\sum_{n=0}^{M-1} \exp\left(-i2\pi \frac{n}{M}\right) \exp\left(i2\pi \frac{n}{M} u\right) \right] \\ &\quad \times \int_0^{1/M} \exp(i2\pi u \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (27)$$

The integral can be expressed in terms of the sinc function [see Eq. (18)], whereas the finite sum is analytically described by using Eq. (7), so that we finally obtain

$$\begin{aligned} \bar{a}(u) &= \exp\left(i\frac{\pi}{M}\right) \exp[i\pi(u-1)] \\ &\quad \times \frac{\text{sinc}(u-1)}{\text{sinc}[(u-1)/M]} \text{sinc}(u/M). \end{aligned} \quad (28)$$

Finally, Eqs. (11) provide the axial-irradiance distribution of a stepwise phase diffractive lens, giving

$$I(N) = \frac{N^2}{1 + N^2} \frac{\sin^2(N/2M\alpha) + \sinh^2(1/2M\alpha)}{\sin^2(N/2M\alpha - \pi/M) + \sinh^2(1/2M\alpha)} \quad (29)$$

Figure 7 shows graphically the axial behavior expressed in Eq. (29) for a zone plate with (a) a two-step ($M = 2$) and (b) a four-step ($M = 4$) phase relief. We observe that the number of foci decreases with the number of phase steps M . The distance between adjacent foci is then enlarged following a $2\pi M\alpha$ rule, given in terms of the Gaussian Fresnel number.¹³ Consequently, the influence of adjacent foci diminishes, and for a low truncation parameter α the interference term in Eq. (11b) still becomes significant in the multifocal structure. Moreover, the axial behavior shows a higher resistance to the focal-merge effect, and Eq. (16) reflects a more realistic distribution of the foci locations, as shown in Fig. 8.

5. SUMMARY AND CONCLUSION

We have analyzed the axial-irradiance distribution of ideal diffractive lenses illuminated by a plane nonuniform Gaussian beam. The axial behavior can be evaluated by means of a simple formalism based on a complex-argument spectral procedure. We have proved that the resulting distribution is composed of three different terms: one is associated with the diffraction effects of the unit cell, another concerns the interference process caused by the multiple zone structure of a diffractive lens, and the last considers the attenuation inherent in wave propagation.

Within this closed-form formalism, we can interpret the multiple-foci generation associated with a zone plate, as well as a multiple-focal-shift phenomenon observed when the effective number of illuminated zones, defined here as the truncation parameter, is close to unity. Finally, with the aid of some particular examples, a focal-merge effect is shown as a transition to an axial monotonic behavior for very low values of the truncation parameter. It is worthy to mention that, in dual-focus systems, the propagation factor can not only shift the focal loci but also produce a focal switch toward the diffracting element.^{27,28}

ACKNOWLEDGMENTS

Carlos J. Zapata-Rodríguez gratefully acknowledges financial support from the Dirección de Investigación Científica y Enseñanza Superior, Ministerio de Educación y Ciencia, Spain.

Address correspondence to Manuel Martínez-Corral at the location on the title page or by e-mail, manuel.martinez@uv.es.

REFERENCES AND NOTES

1. Feature issue on diffractive optics applications, *Appl. Opt.* **34**, 2399–2559 (1995).
2. Y. Ono and N. Nishida, "Holographic laser scanners using generalized zone plates," *Appl. Opt.* **21**, 4542–4548 (1982).
3. S. L. Dobson, P.-C. Sun, and Y. Fainman, "Diffractive lenses for chromatic confocal imaging," *Appl. Opt.* **36**, 4744–4748 (1997).
4. P. C. Lin, P.-C. Sun, L. Zhu, and Y. Fainman, "Single-shot depth-section imaging through chromatic slit-scan confocal microscopy," *Appl. Opt.* **37**, 6764–6770 (1998).
5. M. Rossi and T. Hesser, "Interference effects in diffractive beam shaping elements," in *Diffractive Optics and Micro-Optics*, Vol. 10 of 1998 OSA Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington, D.C., 1998), paper DMD3-1.
6. D. G. Greywall, "A micromechanical optical switch with a zone-plate reflector," *J. Phys. D* **30**, 2191–2208 (1997).
7. V. P. Koronkevich, V. P. Kiriyakov, F. I. Kokoulin, I. G. Palchikova, A. G. Poleshchuk, A. G. Sedukhin, E. G. Churin, A. M. Shcherbachenko, and Y. I. Yurlov, "Fabrication of kinoform optical elements," *Optik (Stuttgart)* **67**, 257–266 (1984).
8. V. Moreno, J. F. Román, and J. R. Salgueiro, "High efficiency diffractive lenses: deduction of kinoform profile," *Am. J. Phys.* **65**, 556–562 (1997).
9. D. L. Dichenhearts and G. S. Kino, "Micromachined scanning confocal microscope," *Opt. Lett.* **21**, 764–766 (1996).
10. A. Boivin, "On the theory of diffraction by concentric arrays of ring-shaped apertures," *J. Opt. Soc. Am.* **42**, 60–64 (1952).
11. M. Novotný, "A new series representation of the Fresnel diffraction field of axially symmetrical filters," *Opt. Acta* **24**, 551–565 (1977).
12. R. Chmelik, "Analytic description of wave fields in focal regions of diffractive lenses," *J. Mod. Opt.* **43**, 1463–1471 (1996).
13. V. P. Koronkevich and I. G. Palchikova, "Modern zone plates," *Optoelectron. Instrum. Data Process.* **1**, 86–100 (1992).
14. X. Jiang, S. Wang, E. Bernabeu, and J. Alda, "ABCD matrix and focal shift for Fresnel zone plates," *Optik (Stuttgart)* **96**, 16–18 (1993).
15. Y. Li and E. Wolf, "Focal shifts in diffracted converging spherical waves," *Opt. Commun.* **39**, 211–215 (1981).
16. M. Martínez-Corral, C. J. Zapata-Rodríguez, P. Andrés, and E. Silvestre, "Effective Fresnel-number concept for evaluating the relative focal shift in focused beams," *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 449–455 (1998).
17. S. De Nicola, D. Anderson, and M. Lisak, "Focal shift effects in diffracted focused beams," *Pure Appl. Opt.* **7**, 1249–1259 (1998).
18. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, San Francisco, 1996), Sec. 3.4.2.
19. C. W. McCutchen, "Generalized aperture and three-dimensional diffraction image," *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 240–244 (1964).
20. M. Martínez-Corral, P. Andrés, and J. Ojeda-Castañeda, "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils," *Appl. Opt.* **33**, 2223–2229 (1994).
21. S. Wang, E. Bernabeu, and J. Alda, "Unified and generalized Fresnel numbers," *Opt. Quantum Electron.* **24**, 1351–1358 (1992).
22. Hint: $|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$.
23. P. W. Milonni and J. H. Eberly, *Lasers* (Wiley, New York, 1988), Chap. 11.
24. A. R. Shulman, *Optical Data Processing* (Wiley, New York, 1970), Chap. 9.
25. W. H. Carter, "Focal shift and concept of effective Fresnel number for a Gaussian laser beam," *Appl. Opt.* **21**, 1989–1994 (1982).
26. D. W. Sweeney and G. E. Sommargren, "Harmonic diffractive lenses," *Appl. Opt.* **34**, 2469–2475 (1995).
27. Y. Li, "Focal shift and focal switch in dual-focus systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 1297–1304 (1997).
28. M. Martínez-Corral and V. Climent, "Focal switch: a new effect in low-Fresnel-number systems," *Appl. Opt.* **35**, 24–27 (1996).

Publicación V

**Inverse focal shift: a new effect in
truncated cylindrical waves**

Journal of Modern Optics **46**, pp. 129–144 (1999)

Inverse focal shift: a new effect in truncated cylindrical waves

CARLOS J. ZAPATA-RODRÍGUEZ, MANUEL MARTÍNEZ-CORRAL, PEDRO ANDRÉS and AMPARO PONS

Department of Optics, University of Valencia, E-46100 Burjassot, Spain

(Received 2 April 1998; final revision received 16 July 1998)

Abstract. We report on a general analytical procedure to analyse the axial focusing properties of uniform cylindrical waves truncated by a rectangular window. The resulting on-axis diffraction pattern explicitly depends on the square of the window height-to-width ratio. Depending on the value of this parameter, different kinds of axial behaviour are observed. In particular, it is found that for low values of this parameter and low Fresnel number, instead of the expected focal-shift effect, an inverse focal-shift phenomenon can appear, i.e. the maximum of the axial-irradiance distribution is displaced further away from the window.

1. Introduction

The study of the focusing properties of spherical waves has been a subject of increasing interest over the last few decades [1-3]. Specifically, in the early 1980s it was analytically established [4-6], and experimentally verified [7] that when a monochromatic, uniform, converging spherical wave is diffracted by a circular aperture, in a low-Fresnel-number geometry, the maximum of the axial irradiance distribution is shifted toward the aperture. More recently it has been recognized that the focal-shift effect also appears in apodized systems [8-11] and an analytical formula has been reported for its evaluation [12].

This interesting effect has been found to appear also in other geometries, for example in truncated or nontruncated focused beams [13-17], in spherically aberrated focusing set-ups [18-20] and even in uniformly illuminated diffractive optical elements [21, 22].

In spite of this extensive analysis of the focal-shift phenomenon, not too much attention has been paid to the case of truncated cylindrical waves [19], which are of interest in, for example, optical signal processing [23, 24], line-focusing optics to produce a plasma sheet [25, 26], phase singularities generation in optical beams [27] and astigmatic laser mode inverters [28, 29], where anamorphic elements are extensively used.

In this paper, we develop an analytical formulation that fully describes the axial behaviour of cylindrical waves truncated by a rectangular window. Depending on the value of the here defined truncation ratio of the window, and considering a low-Fresnel-number focusing geometry, three different types of axial behaviour will be found. Specifically it will be shown that when the truncation in one Cartesian direction is neglected, a focal-shift effect appears, and an approximated

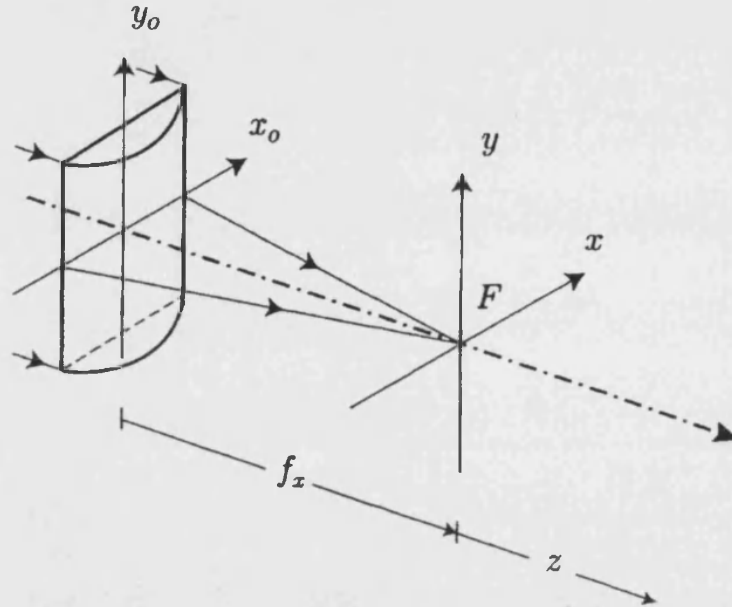


Figure 1. Schematic layout of the cylindrical focusing arrangement. The origin of the axial coordinate is taken at the focus F of the cylindrical lens.

formula for its evaluation is presented. On the contrary, when the truncation ratio is low, a new effect, the inverse focal shift, can appear. For intermediate values of the truncation ratio the axial-irradiance distribution has a steep-peaks structure in which the position of the maximum strongly depends on this parameter.

In Section 2 we formulate the basic theory for evaluating the axial-irradiance distribution for cylindrical waves. In Section 3 we generalize this analysis to the case of a two-dimensional (2D) rectangular truncation by giving an analytical formula that fully describes the corresponding axial behaviour. This formula will allow us to find that, under certain circumstances, an inverse focal-shift effect can appear. In Section 4 we carry out a thorough study of this new phenomenon, and some numerically evaluated examples are shown.

2. Axial-irradiance distribution

We start by considering a uniform, monochromatic plane wave of wavelength λ illuminating a cylindrical lens with a focal length denoted by f_x , as depicted in figure 1. Since the cylindrical lens produces over the emerging field a wave-front curvature along the x -axis, its amplitude transmittance can be expressed as

$$t(x, y) = p(x, y) \exp\left(-j \frac{k}{2f_x} x^2\right), \quad (1)$$

where $k = 2\pi/\lambda$ is the wave number, whereas the pupil function, $p(x, y)$, gives the window transmittance of the focusing element.

According to the Fresnel diffraction formula [30], the three-dimensional (3D) amplitude distribution in the focal region is given by

$$u(x, y, z) = A \frac{\exp[jk(z + f_x)]}{j\lambda(z + f_x)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \times \exp\left\{j \frac{k}{2(z + f_x)} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0, \quad (2)$$

where A is a positive constant corresponding to the amplitude of the uniform illuminating field and z is the axial coordinate as measured from the geometrical focus, F , of the cylindrical lens.

To obtain the amplitude distribution along the optical axis, we substitute equation (1) into equation (2), then we set $x = y = 0$, giving

$$U(z) = A \frac{\exp[jk(z + f_x)]}{j\lambda(z + f_x)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_0, y_0) \times \exp\left[-j \frac{k}{2f_x} \frac{z}{z + f_x} x_0^2\right] \exp\left[j \frac{k}{2(z + f_x)} y_0^2\right] dx_0 dy_0. \quad (3)$$

In the ideal case of an unapertured cylindrical lens, $p(x, y) = 1$, it is easy to find, by using the analytical relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \frac{k}{2s} t^2\right) dt = (j\lambda s)^{1/2}, \quad (4)$$

that the axial-irradiance distribution is given by

$$I(z) = |U(z)|^2 = A^2 |f/z|. \quad (5)$$

Then, the maximum irradiance is located at the focus of the lens, $z = 0$, where a singularity caused by the unlimited extent of the 2D pupil function appears. Also, the dependence on the axial coordinate is inversely linear, which differs from the well-known inverse square law associated to uniform spherical waves. Therefore, the attenuation suffered by a cylindrical wave is weaker than that corresponding to a spherical field.

In a more realistic case, the finite extent of the cylindrical lens must be taken into account. Then we start by considering the case of a pupil aperture which is much higher along the y -axis, so that the truncation suffered by the field in this direction may be neglected. In this case we are allowed to carry out the substitution $p(x, y) = \text{rect}(x/a_x)$, where a_x denotes the extent of the slit-like pupil window. Therefore, according to equation (3) and by using again the relationship in equation (4), the axial-irradiance distribution can be written by

$$I(z) = A^2 \frac{1}{\lambda|z + f_x|} \left| \int_{-a_x/2}^{a_x/2} \exp\left[-j \frac{k}{2f_x} \frac{z}{z + f_x} x_0^2\right] dx_0 \right|^2. \quad (6)$$

As in conventional image formation formalism, it is convenient to express the out-of-focus behaviour of the focusing architecture in terms of the so-called defocus coefficient [31]. This coefficient is a small angle approximation ($a_x^2 \ll f_x^2$) for the distance between the wavefront created by the cylinder lens and a similar cylindrical wavefront with a curvature centred at the observation point P , taken at a point on the edge of the lens aperture along an axis normal to

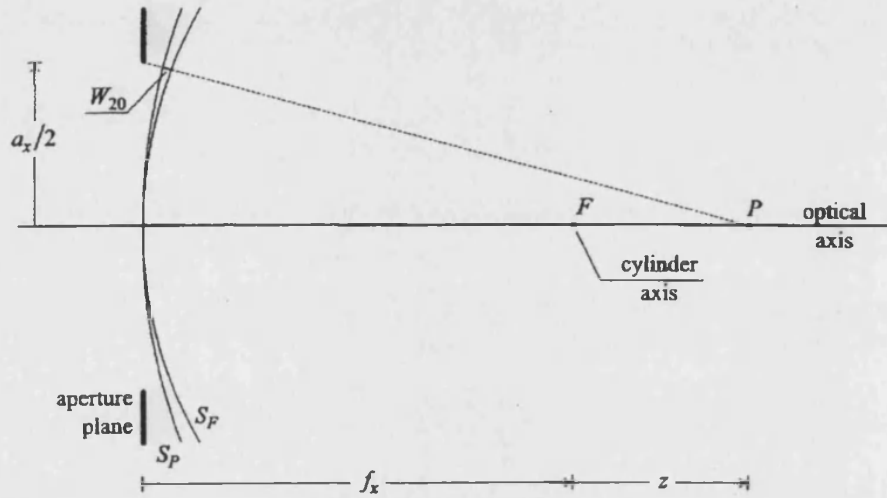


Figure 2. Schematic evaluation of the defocus coefficient W_{20} as the optical distance, attained at the edge of the lens window and expressed in units of the wavelength, between the cylindrical wavefront produced by the lens, S_F , and that whose focus is located at the axial point P .

the cylinder axis, and along the direction normal to the latter wavefront (see figure 2). In mathematical terms [32]

$$W_{20} = \frac{N_x}{2} \frac{z}{z + f_x}, \quad (7)$$

where

$$N_x = \frac{(a_x/2)^2}{\lambda f_x}, \quad (8)$$

stands for the so-called Fresnel number for the truncated, cylindrical focusing geometry, N_x . This parameter accounts for the number of cylindrical halfwave zones covered by the lens as viewed from its focus.

Then, by performing now an appropriate change of variables,

$$\xi = 2x_0/a_x, \quad (9)$$

and by normalizing to the value at the focus, the axial-irradiance distribution is determined by

$$\begin{aligned} I_N(W_{20}) &= \frac{I(W_{20})}{I(0)} = \left| 1 - \frac{2W_{20}}{N_x} \right| \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(-j2\pi W_{20} \zeta^2) d\zeta \right|^2 \\ &\equiv \left| 1 - \frac{2W_{20}}{N_x} \right| |\psi(W_{20})|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

In other words, the defocus coefficient W_{20} is $N_x/2$ times the ratio of the distance from the origin to the field point over the distance from the lens to the field point. Of course, it does not vary linearly as the field point moves away from the lens along the optical axis.

From equation (10) it is inferred that $I_N(W_{20})$ comprises the product of two terms. The first term describes the attenuation suffered by cylindrical waves as they propagate. This term is given by the function $|1 - 2W_{20}/N_x|$, which is centred at the axial coordinate $W_{20} = N_x/2$, which corresponds, of course, to the axial position $z = \infty$. The second term describes the diffraction effects due to the finite extent of the window in the x -direction, and is given by the squared modulus of the function $\psi(W_{20})$. This function may be analytically expressed by [33]

$$\psi(W_{20}) = \frac{1 - j \operatorname{erf} [(1 + j)(\pi W_{20})^{1/2}]}{4 \sqrt{W_{20}}}, \quad (11)$$

where $\operatorname{erf}[\bullet]$ is the error function, defined as

$$\operatorname{erf}[s] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-t^2) dt. \quad (12)$$

Although $|\psi(W_{20})|^2$ is an even function, the axial-irradiance distribution given by equation (10) is asymmetric in terms of z about the focal plane, $z = 0$, for two reasons. First, the defocus coefficient of equation (7) is asymmetric about the focal point, i.e. $|W_{20}(z)| \neq |W_{20}(-z)|$. Despite the asymmetric transformation suffered by this term, the maximum value of $|\psi(W_{20})|^2$ remains located at the origin. Second, the linear dependence on $|1 - 2W_{20}/N_x|$ increases the irradiance for $W_{20} < 0$, and so $z < 0$, within the focal region, and decreases it for $W_{20} > 0$. Therefore, the axial maximum appears shifted towards the pupil plane, resulting in the so-called focal shift effect for cylindrical waves, as described in reference [19].

However, W_{20} is antisymmetric about $z = 0$, i.e. $W_{20}(-z) = -W_{20}(z)$, for very small z where it is approximately given by $W_{20} \approx N_x z / 2f_x$. Now, for very large N_x the depth of focus given by the second term in equation (10) is small so that for the small range of z within the focal spot, W_{20} is antisymmetrical. In this case, the term $|1 - 2W_{20}/N_x|$ tends to unity, so that the irradiance pattern is symmetric about the geometrical focus, and the maximum irradiance is located at the origin. As soon as the Fresnel number decreases the depth of focus is very large so that the asymmetry in W_{20} yields the axial-irradiance distribution asymmetric, and the asymmetry in the linear term shifts the peak of the focal spot towards the lens.

To illustrate this effect, we have depicted in figure 3 the normalized axial-irradiance distribution for difference values of N_x . It is apparent from this figure that the lower is the value of N_x , the greater is the attained focal shift.

As in the case of a spherically illuminated circular aperture [4], now we can find a simple formula that accurately evaluates the amount of focal shift for moderate values of N_x . For that purpose we expand the axial-irradiance distribution into a Taylor series up to a second order approximation, that is

$$I_N(W_{20}) \approx I_N(0) + I'_N(0)W_{20} + \frac{1}{2}I''_N(0)W_{20}^2 = 1 - \frac{2}{N_x}W_{20} - \frac{16\pi^2}{45}W_{20}^2, \quad (13)$$

where $I'_N(\bullet)$ and $I''_N(\bullet)$ denote the first- and second-order derivative of the function $I_N(W_{20})$, respectively. By taking the derivative of equation (13), and by setting it equal to zero, we find that the irradiance distribution is not symmetrical with respect to the focal point, $W_{20} = 0$, but to the shifted point of axial coordinate

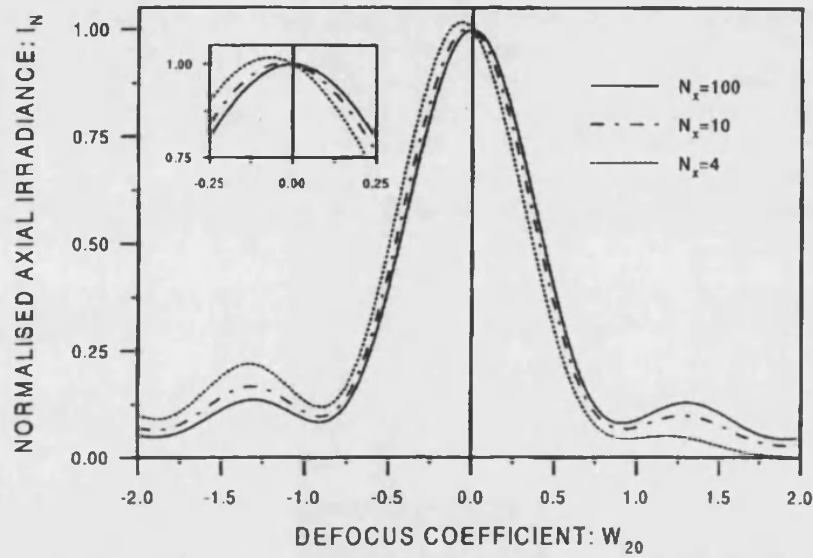


Figure 3. Axial-irradiance distribution corresponding to a slit-like window from equation (10). The on-axis behaviour is shown for three values of the Fresnel number: $N_x = 100$ (high), $N_x = 10$ (moderate), $N_x = 4$ (low).

$$W_{20}^{\max} = -\frac{45}{16\pi^2 N_x}, \quad (14)$$

where the maximum axial irradiance is attained. It seems more appropriate to express the focal shift in terms of the spatial axial coordinate, z . Hence, by combining equations (7) and (14) we find that the relative axial position of the irradiance maximum, that is, the relative focal shift, is expressed as

$$\frac{z_{\max}}{f_x} = -\frac{1}{1 + \frac{8\pi^2}{45} N_x^2}. \quad (15)$$

The minus sign in equation (15) indicates that, either in the case of a converging ($f_x > 0$) or a diverging ($f_x < 0$) cylindrical lens, the displacement of the axial-irradiance peak is always directed toward the lens. It is also remarkable that this equation is of the same form as the expression corresponding to the exact relative focal shift in a focused cylindrical Gaussian beam of Gaussian Fresnel number $N_G^2 = 8N_x^2/45$ [13]. Note that although in reference [13] the case of spherical Gaussian beams is analysed, it is easy to show that the focal shift for spherical and cylindrical Gaussian beams, both with the same waist, are equal.

To illustrate the accuracy of equation (15), in figure 4 we have represented the value of the relative focal shift obtained with the approximated formula, and its exact value derived from equation (10). The examination of this figure reveals that the approximated formula gives suitable results for moderate and high values of N_x (for example, when $N_x = 5$ the error is 2.2% and for $N_x = 50$ the error is less than 0.6%).

Finally, we would like to point out that although this analysis is equivalent to that performed by Jiang and Stammes [19], our approach shows considerable

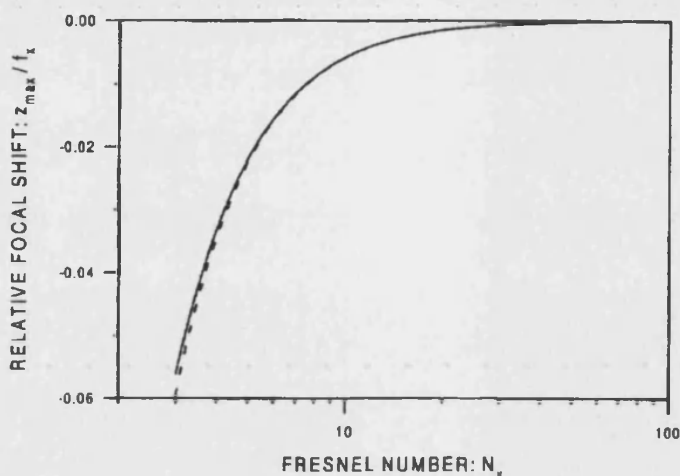


Figure 4. Relative focal shift versus Fresnel number N_x evaluated by means of equation (15) (dashed line) and by exact numerical calculations from equation (10) (solid line).

improvements. On the one hand, the results have been generalized to the case of diverging cylindrical waves. On the other hand, an approximated formula, which accurately evaluates the amount of focal shift for moderate values of N_x , is obtained [see equation (15)].

The analysis carried out above is appropriate for a great part of the practical cases found in the laboratory, in which the pupil aperture is much higher along the y -direction. Nevertheless, it seems that the assumption of infinity extent of the focusing element along the y -direction is quite stringent. Therefore it is necessary to perform a more general treatment of the problem, as will be done in the next section.

3. The case of a 2D rectangular window

In order to take into account the finite extent of the exit pupil in the two Cartesian directions, we assume a rectangular window function $p(x, y) = \text{rect}(x/a_x) \text{rect}(y/a_y)$. By substituting this pupil function into equation (3) and by performing the changes of variable

$$\xi = \frac{2x_0}{a_x}, \quad \eta = \frac{2y_0}{a_y}, \quad (16)$$

it is straightforward to find that

$$I(W_{20}) = A^2 N_x^2 T^2 \left(1 - \frac{2W_{20}}{N_x}\right)^2 \left| \int_{-1}^1 \exp(-j2\pi W_{20} \zeta^2) d\zeta \right|^2 \times \left| \int_{-1}^1 \exp[-j2\pi T(W_{20} - N_x/2)\xi^2] d\xi \right|^2, \quad (17)$$

where we have introduced a new parameter, named here the truncation ratio, defined as $T = (a_y/a_x)^2$.

The normalized axial-irradiance distribution may be expressed by

$$I_N(W_{20}) = \chi(W_{20})|\psi(W_{20})|^2, \quad (18)$$

where

$$\chi(W_{20}) = \frac{1}{|\psi(-N_x T/2)|^2} \left(1 - \frac{2W_{20}}{N_x}\right)^2 \left|\psi\left(\frac{W_{20} - N_x/2}{1/T}\right)\right|^2. \quad (19)$$

This relevant formula, that fully describes the axial behaviour of cylindrical lenses for any value of N_x and any truncation ratio, indicates that the axial-irradiance distribution is governed by the product of two different factors. The first factor, $|\psi(W_{20})|^2$, has already been described in Section 2. Regarding the second term, $\chi(W_{20})$, it is an even function centred at $W_{20} = N_x/2$, and describes both the diffraction effects due to the finite extent of the pupil along the y -direction, which explicitly depends on the value of T , and the irradiance attenuation inherent to wave propagation.

Now, we can give some general remarks on the axial behaviour of cylindrical lenses by examining its dependence with the parameter T . For this task, we assume a fixed value of the Fresnel number of the focusing geometry, say $N_x = 4$. First, we investigate the case in which the truncation parameter is much higher than unity. In this case, the function $\chi(W_{20})$ tends to $\chi(W_{20}) = |1 - 2W_{20}/N_x|$. Therefore, the axial behaviour is similar, of course, to that of cylindrical fields nontruncated along the y -direction, which indeed was described by equation (10).

When the value of the truncation ratio decreases, the function $\chi(W_{20})$ exhibits a high-frequency sinusoidal-like variation modulating a dominant linear dependence. In fact, the frequency of the modulation is proportional to the value of T , as is illustrated in figure 5, where we have represented the function $\chi(W_{20})$ for two different values of T .[†] When the product of the two terms, $\chi(W_{20})$ and $|\psi(W_{20})|^2$, is performed, an axial-irradiance distribution is obtained in which a rapidly varying ripple structure is dominant on the total profile, as is shown in figure 6. Note from this figure that the central lobe has a steep-peaks structure in which the position of the maximum strongly depends on the value of T .

When the truncation ratio is lower than unity, for example $T = 0.33$, the function $\chi(W_{20})$ has a slowly-varying behaviour so that the slope in the vicinities of the geometrical focus is positive, in opposition to the negative slope corresponding to very high values of T . When this function is multiplied by the term $|\psi(W_{20})|^2$, which is an even function with maximum value at the origin, an axial pattern is obtained in which the irradiance peak is now moved further from the lens, as shown in figure 7(b).

The appearance of this new phenomenon, which we will refer to as the inverse focal-shift effect, seems to be mainly determined by the scale of $\chi(W_{20})$ and its slope at the origin. In the next section we carry out a thorough analysis of this effect in order to find out when a cylindrical focusing geometry tends to suffer inverse focal shift.

[†] The calculation of the data for most of the curves in this paper involves the evaluation of the function $\text{erf}[\bullet]$. This function is included in standard mathematical packages, for example Matlab or Mathematica. In particular, our calculations were performed using Mathematica.

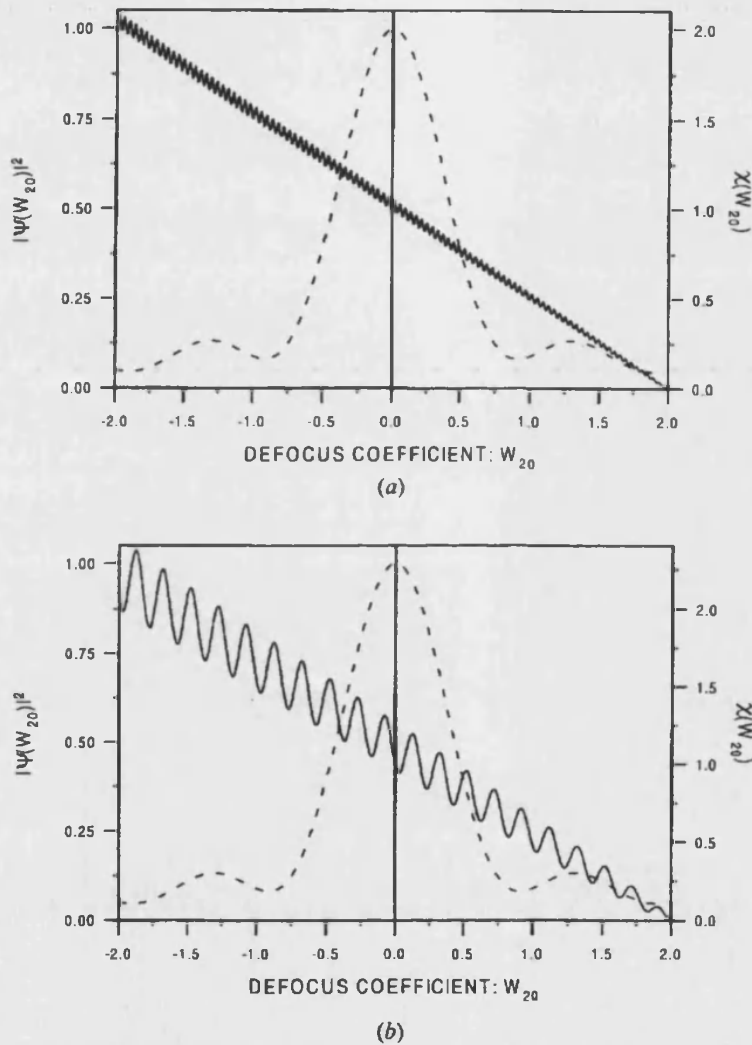


Figure 5. Graphical representation of the functions $|\psi(W_{20})|^2$ (dashed curve) and $\chi(W_{20})$ (solid curve) in a low-Fresnel-number system, $N_x = 4$. The truncation ratios are: (a) $T = 100$, (b) $T = 10$.

4. The inverse focal shift

The study of figures shown in section 3 reveals that for the appearance of an inverse focal-shift effect a twofold condition must be satisfied. On the one hand, the frequency of the ripples structure of function $\chi(W_{20})$ must be low enough so that less than one ripple lies in the core region of $|\psi(W_{20})|^2$. Therefore, the value of T must be lower than unity. On the other hand, the slope of $\chi(W_{20})$ in the vicinities of the geometrical focus, $W_{20} = 0$, must be positive.

The analysis of equation (19) indicates that (a) the scale of curve $\chi(W_{20})$ is inversely proportional to T , (b) the curve is centred at $W_{20} = N_x/2$, and (c) independently of the particular values of the parameters N_x and T , the part of the curve that is in the geometrical focus is determined by the value of the product

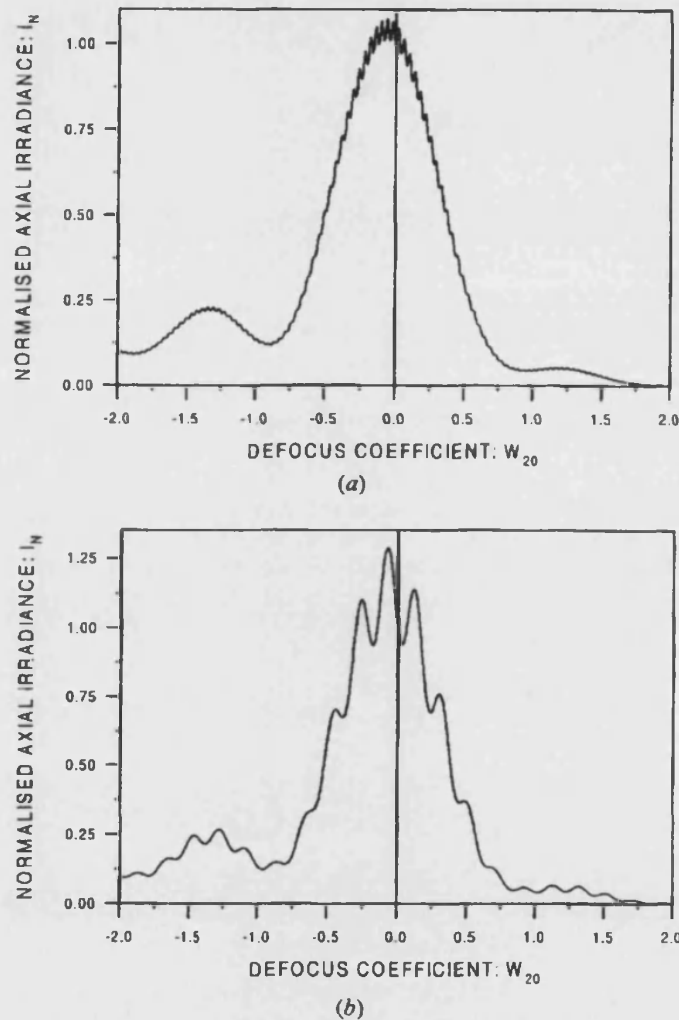


Figure 6. Axial-irradiance distribution obtained according to equation (18) by the product of the terms $|\psi(W_{20})|^2$ and $\chi(W_{20})$. We have selected the values of the Fresnel number and the truncation ratio from figure 5.

$N_x T$. Note then that, under the constraint $N_x T = \text{constant}$, a change in the value of N_x results in a displacement of the $\chi(W_{20})$ curve. However, this displacement is accompanied by a proportional change of the scale so that the same ripple of the curve always remains in the vicinity of the focus. To illustrate this property, in figure 8 we have plotted the curve $\chi(W_{20})$ for three different arrangements with $N_x T = \text{constant}$.

From the above reasoning it is then apparent that an inverse focal-shift effect similar to that shown in figure 8 can be obtained with other cylindrical focusing geometries, provided that the product $N_x T$ remains constant. Note, however, that under this constraint, the lower is the value of N_x , the higher is the slope of $\chi(W_{20})$ and, consequently, the higher is the amount of the resulting inverse focal shift (see

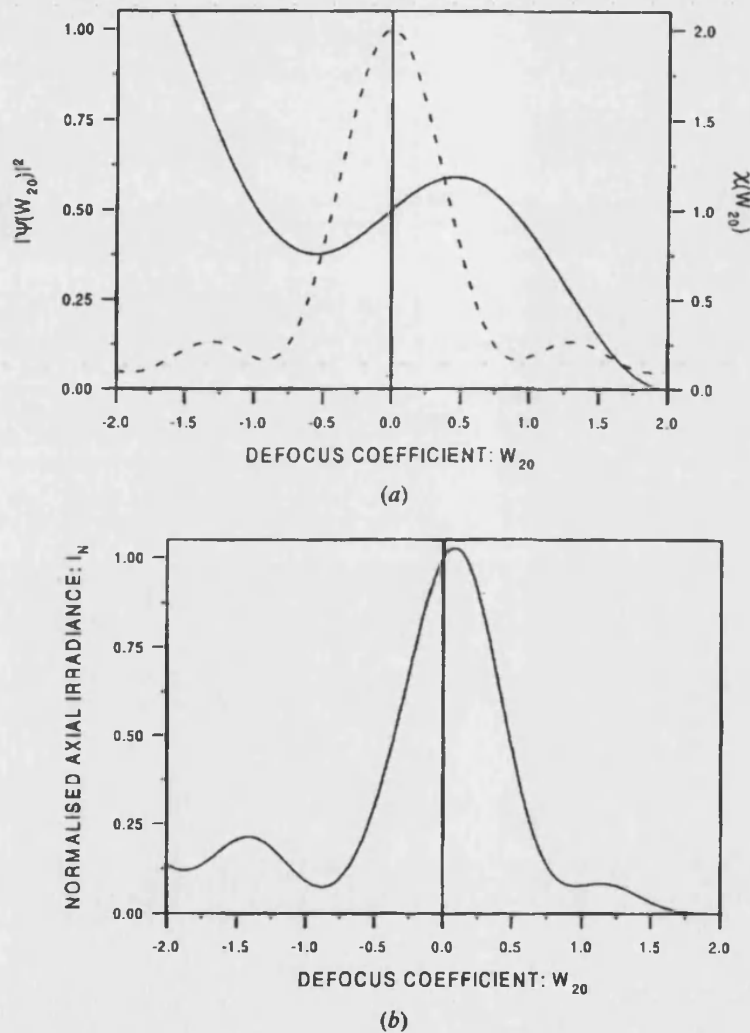


Figure 7. Graphical analysis of the cylindrical focusing set-up characterized by a Fresnel number $N_x = 4$ and a truncation ratio $T = 0.33$ by representing; (a) the functions $|\psi(W_{20})|^2$ and $\chi(W_{20})$, and (b) the normalized axial-irradiance distribution from equation (18).

figure 9). However, if N_x is too low, and then T too high, an axial pattern with a rapidly varying ripples structure results again.

A result is then obtained that is, in a certain way, similar to that corresponding to a spherically illuminated circular aperture, in which the lower the Fresnel number of the focusing set-up, the higher the magnitude of the focal shift.

To mathematically support the above heuristic reasoning, next we calculate the ratio, evaluated at the origin, between the first derivative of $\chi(W_{20})$ corresponding to any two different arrangements characterised by $N_{x,1}T_1 = N_{x,2}T_2$. The ratio is in the form

$$\frac{\chi'_1(0)}{\chi'_2(0)} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_{x,2}}{N_{x,1}}. \quad (20)$$

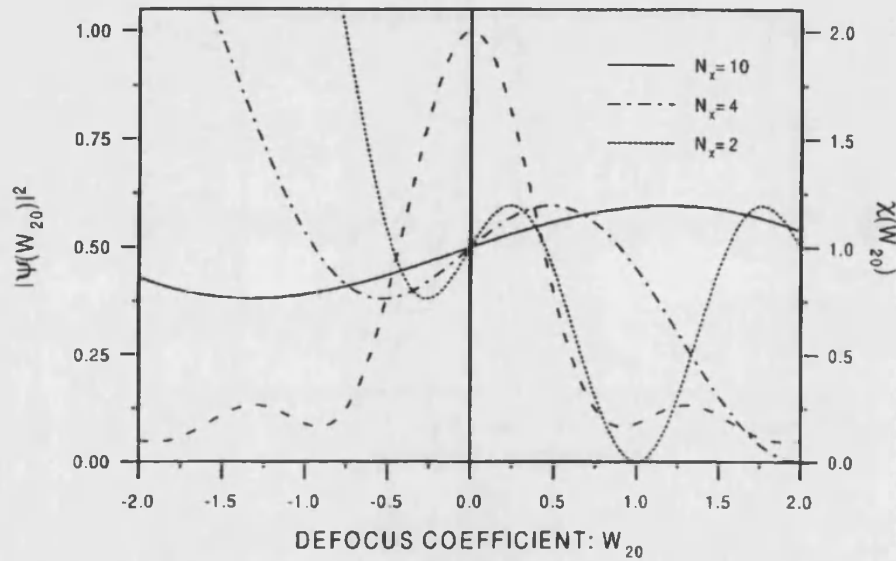


Figure 8. Variation of $\chi(W_{20})$ for three different arrangements imposing $N_x T = 1.33$.

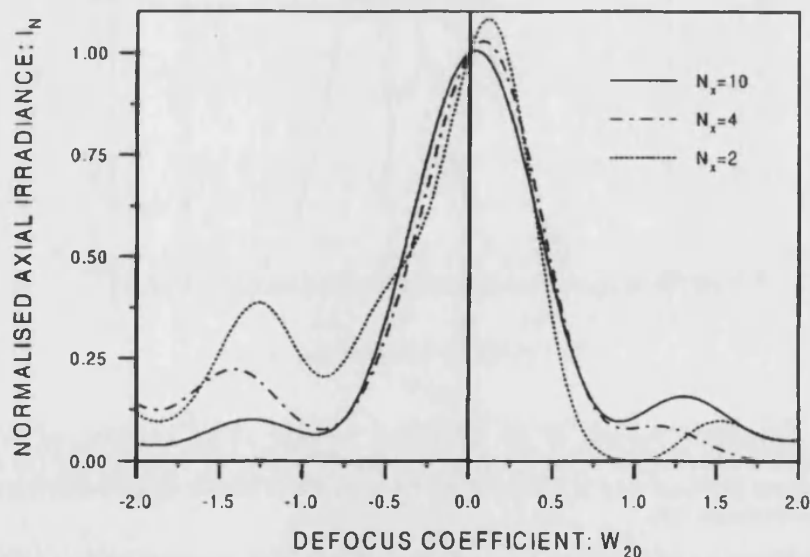


Figure 9. Normalized axial pattern I_N of the cylindrical focusing geometries analysed in figure 8.

This equation confirms that, if $N_x T = \text{constant}$, the slope of $\chi(W_{20})$ at the origin is inversely proportional to N_x . Moreover, the sign of the slope remains unaltered.

Up to now, we have centred our analysis on the inverse focal shift that appears when the positive slope of the first ripple of $\chi(W_{20})$ lies in the focal region. However, it is clear that a similar effect appears when the positive slope of a further ripple lies in the vicinity of the focus. To analyse this property, we have numerically evaluated equation (19) in order to find out which values of the

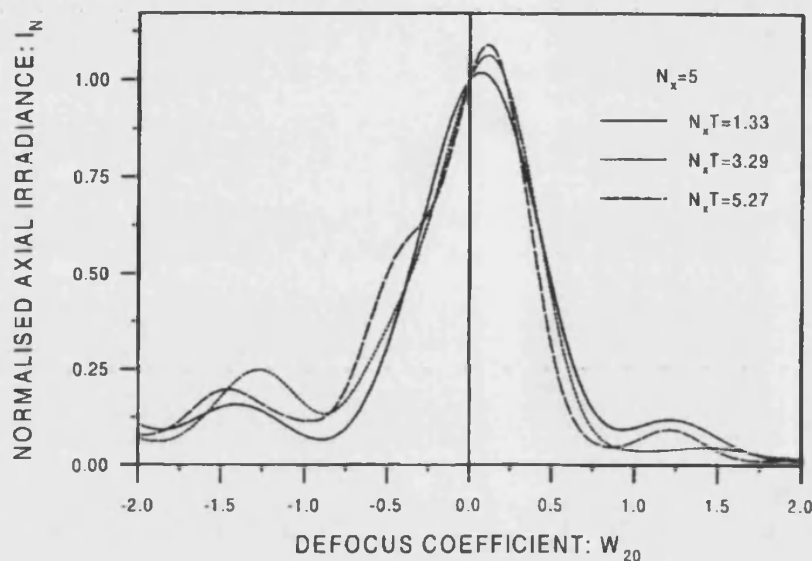


Figure 10. Normalized axial-irradiance distribution for three different focusing arrangements where the positive slopes for the first, second and third ripple of the function $\chi(W_{20})$ lie in the focal region.

Table 1. Values of the product $N_x T$ giving rise to a relative extreme of the function $\chi(W_{20})$ at the origin, $W_{20} = 0$.

Order of the ripple	$(N_x T)_{\max}^i$	$(N_x T)_{\min}^i$
$i = 1$	1.01	1.68
$i = 2$	2.88	3.69
$i = 3$	4.84	5.70
$i = 4$	6.83	7.71
$i = 5$	8.82	9.71
\vdots	\vdots	\vdots
$i = n + 1$	$(N_x T)_{\max}^n + 2$	$(N_x T)_{\min}^n + 2$

product $N_x T$ give rise to a positive slope of $\chi(W_{20})$ in the focal point. In table 1 we have listed the values of $N_x T$ which provide a maximum or a minimum at $W_{20} = 0$.

Based on the materials in this table, we may establish the following properties: cylindrical focusing set-ups with $N_x T$ lying in an interval $[(N_x T)_{\max}^i, (N_x T)_{\min}^i]$, suffer from an inverse focal shift (see figure 10). Moreover, the inverse focal shift is much higher when the value of $N_x T$ is in the centre of the interval, whereas it vanishes when $N_x T$ is close to one of the extremes.

Another interesting effect takes place when the value of $N_x T$ lies in an interval $[(N_x T)_{\min}^i, (N_x T)_{\max}^{i+1}]$, which corresponds to a case in which the slope of $\chi(W_{20})$ in the focal region is negative. In this case the product between $\chi(W_{20})$ and $|\psi(W_{20})|^2$ provides an axial-irradiance distribution in which the maximum is shifted toward the lens. Thus, it results in a conventional focal shift effect (see figure 11). It is worthy to remark that also in this case a slight change in the value of $N_x T$ implies a

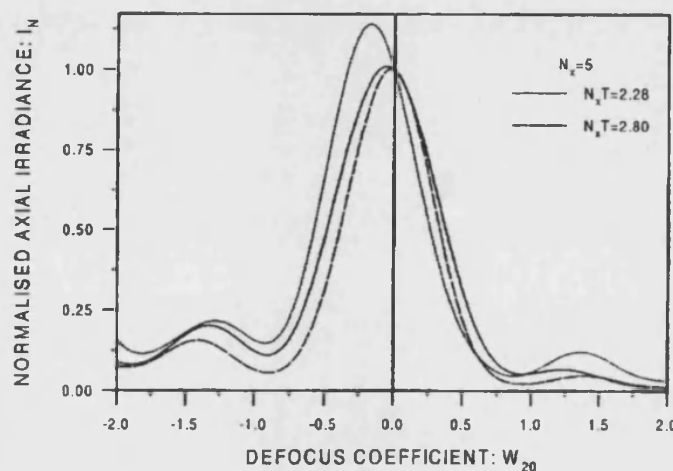


Figure 11. Axial-irradiance distribution I_N corresponding to two values of $N_x T$ giving rise to a negative slope of the function $\chi(W_{20})$ in the focal region. Both plots are compared with that of a nontruncated cylindrical wave along the y -direction (solid line), which results in the conventional focal shift phenomenon. We observe an enhanced ($N_x T = 2.28$) and attenuated ($N_x T = 2.80$) focal-shift effect.

change in the slope of $\chi(W_{20})$ and then a variation in the magnitude of the focal shift.

From the above results we conclude that one can gradually modify the magnitude of the focal shift by continuously varying the value of $N_x T$. This variation from a practical point of view can be implemented, e.g. by getting fixed N_x and varying the width of the window along the y -direction. In this way, one can alternatively obtain, for example an enhanced focal shift, an attenuated focal shift or an inverse focal shift of variable magnitude.

5. Conclusions

We have derived an analytical formulation for evaluating the on-axis diffraction behaviour of uniform cylindrical waves truncated by a rectangular window. It has been shown that the resulting axial pattern is governed by two parameters: the Fresnel number of the cylindrical focusing geometry, N_x , and the here defined truncation ratio of the window, T . For very high values of T , it is shown that, depending on the value of N_x , a focal-shift effect can appear. Moreover, an approximated formula, which accurately evaluates the amount of focal shift for moderate values of N_x , is obtained.

The most important outcome of this research is the achievement and subsequent analysis of an inverse focal-shift effect. In particular, it has been found that this phenomenon appears in principle when the value of the product $N_x T$ is low (about 1.33). However, we have shown that this effect also appears for higher values of $N_x T$, provided that a slowly varying increasing slope of the function $\chi(W_{20})$ lies in the focal region.

Contrary to what happens in the case of the conventional focal shift phenomenon, it does not seem possible to obtain a simple analytical formula to evaluate the

amount of inverse focal shift. This is because in this case the number of parameters involved is much higher.

In order to find the physical significance of the product $N_x T$, we can decompose the axial-irradiance distribution in equation (18) into two different terms. The first one, which coincides with that given in equation (10), corresponds to the on-axis pattern of a uniform cylindrical wave diffracted by an unlimited slit along the meridian with no power and, as shown in Section 2, in this case the axial behaviour depends on the Fresnel number N_x . The second factor, $|1 - 2W_{20}/N_x| |\psi[(W_{20} - N_x/2)/(1/T)]|^2$, represents the irradiance distribution along the optical axis obtained for a uniform plane wave diffracted by a slit aperture of height a_y [34]. Moreover, in agreement with equation (8) we can rewrite the parameter $N_x T$ as $N_x T = (a_y/2)^2/\lambda f_x$. In this context, this quantity provides the number of cylindrical Fresnel zones that will be visible from an axial point located at a distance f_x . The resulting nonmonotonic axial behaviour then produces, for certain values of this new Fresnel number, $N_x T$, a negative slope at $W_{20} = 0$ which features the inverse focal shift.

Finally, we have shown that by simply modifying the value of $N_x T$ one can gradually tune the magnitude of the inverse focal-shift effect, even to obtain a variable focal-shift phenomenon. To illustrate our result, some numerically evaluated examples have been presented.

We would like to conclude by emphasizing that although no experimental results have been presented in this paper, we consider that it cannot be hard to measure the inverse focal shift if, for example, a technique similar to that proposed by Karman *et al.* is used [35, 36].

Acknowledgments

This work was supported by the Dirección General de Investigación Científica y Enseñanza Superior (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. C. J. Zapata-Rodríguez gratefully acknowledges financial support from this institution.

References

- [1] COLLET, E., and WOLF, E., 1980, *Optics Lett.*, **5**, 264.
- [2] BORN, M., and WOLF, E., 1980, *Principles of Optics*, 6th edn, (Oxford: Pergamon), Sec. 8.8.1.
- [3] WANG, W., and WOLF, E., 1995, *Optics Commun.*, **119**, 453.
- [4] LI, Y., and WOLF, E., 1981, *Optics Commun.*, **39**, 211.
- [5] STAMNES, J. J., and SPJELKAVIK, B., 1981, *Optics Commun.*, **40**, 81.
- [6] MAHAJAN, V. N., 1983, *Appl. Optics*, **22**, 3042.
- [7] LI, Y., and PLATZER, H., 1983, *Optica Acta*, **30**, 1621.
- [8] OJEDA-CASTAÑEDA, J., MARTÍNEZ-CORRAL, M., ANDRÉS, P., and PONS, A., 1994, *Appl. Optics*, **33**, 7616.
- [9] SZAPIEL, S., 1983, *Optics Lett.*, **8**, 327.
- [10] MARTÍNEZ-CORRAL, M., ANDRÉS, P., and OJEDA-CASTAÑEDA, J., 1994, *Appl. Optics*, **33**, 2223.
- [11] MARTÍNEZ-CORRAL, M., and CLIMENT, V., 1996, *Appl. Optics*, **35**, 24.
- [12] MARTÍNEZ-CORRAL, M., ZAPATA-RODRÍGUEZ, C. J., ANDRÉS, P., and KOWALCZYK, M., 1998, *J. mod. Optics*, **45**, 1671.
- [13] CARTER, W. H., 1982, *Appl. Optics*, **21**, 1989.

- [14] LI, Y., and WOLF, E., 1982, *Optics Commun.*, **40**, 151.
- [15] LI, Y., 1992, *J. mod. Optics*, **39**, 1761.
- [16] MARTINEZ-CORRAL, M., ZAPATA-RODRIGUEZ, C. J., ANDRÉS, P., and SILVESTRE, E., 1998, *J. opt. Soc. Am. A*, **15**, 449.
- [17] PU, J., 1998, *J. mod. Optics*, **45**, 239.
- [18] YOSHIDA, A., and ASAKURA, T., 1994, *Optics Commun.*, **119**, 368.
- [19] JIANG, D. Y., and STAMNES, J., 1997, *Pure Appl. Optics*, **6**, 85.
- [20] FURLAN, W. D., SAAVEDRA, G., SILVESTRE, E., and MARTINEZ-CORRAL, M., 1998, *J. mod. Optics*, **45**, 69.
- [21] HESSLER, T., and KUNZ, R. E., 1997, *J. opt. Soc. Am. A*, **14**, 1599.
- [22] LI, Y., 1997, *J. opt. Soc. Am. A*, **14**, 1297.
- [23] GRANIERI, S., FURLAN, W. D., SAAVEDRA, G., and ANDRÉS, P., 1997, *Appl. Optics*, **36**, 8363.
- [24] MIENDLOVIC, D., BITRAN, Y., DORSCH, R. G., FERREIRA, C., GARCIA, J., and OZAKTAZ, H. M., 1995, *Appl. Optics*, **34**, 7451.
- [25] YOON, G. Y., JITSUNO, T., KATO, Y., and NAKATSUKA, N., 1997, *Appl. Optics*, **36**, 847.
- [26] SHEN, W., SCHARER, J. E., LAM, N. T., PORTER, B. G., and KELLY, K. L., 1995, *J. appl. Phys.*, **78**, 6974.
- [27] PETROV, D. V., CANAL, F., and TORNER, L., 1997, *Optics Commun.*, **143**, 265.
- [28] NIENHUIS, G., 1996, *Optics Commun.*, **132**, 8.
- [29] COURTIAL, J., DHOLAKIA, K., ALLEN, L., and PADGETT, M. J., 1997, *Optics Commun.*, **144**, 210.
- [30] GOODMAN, J. W., 1968, *Introduction to Fourier Optics* (New York: McGraw-Hill), Chap. 4.
- [31] HOPKINS, H. H., 1950, *Wave Theory of Aberrations* (Oxford: Clarendon), p. 11.
- [32] STOKSETH, A., 1969, *J. opt. Soc. Am.*, **59**, 1314.
- [33] ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I. A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover), p. 297.
- [34] SIEGMAN, A. E., 1986, *Lasers* (Mill Valley: University Science Books), Chap. 18.
- [35] SUCHA, G. D., and CARTER, W. H., 1984, *Appl. Optics*, **23**, 4345.
- [36] KARMAN, G. P., VANDUIJL, A., BEIJERSBERGEN, M. W., and WOERDMAN, J. P., 1997, *Appl. Optics*, **36**, 8091.

Publicación VI

**Three-dimensional superresolution
by annular binary filters**

Optics Communications **165**, pp. 267–278 (1998)



ELSEVIER

15 July 1999

OPTICS
COMMUNICATIONS

Optics Communications 165 (1999) 267–278

www.elsevier.com/locate/optcom

Full length article

Three-dimensional superresolution by annular binary filters

Manuel Martínez-Corral ^{a,*}, Pedro Andrés ^a, Carlos J. Zapata-Rodríguez ^a,
Marek Kowalczyk ^b

^a *Departamento de Óptica, Universidad de Valencia, E-46100 Burjassot, Spain*

^b *Institute of Geophysics, University of Warsaw, Pasteura 07 02-093, Poland*

Received 16 December 1998; received in revised form 30 March 1999; accepted 28 April 1999

Abstract

We present a new family of annular binary filters for improving the three-dimensional resolving power of optical systems. The filters, whose most important feature is their simplicity, permit to achieve a significant reduction, both in the transverse and in the axial direction, of the central lobe width of the irradiance point spread function of the system. The filters can be used for applications such as optical data storage or confocal scanning microscopy. © 1999 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Keywords: Apodization; Resolution; Optical data storage; Confocal microscopy

1. Introduction

The design of pupil filters to overcome the limits in resolution imposed by diffraction in imaging systems has long been the aim of many research efforts. The attention of these efforts has been chiefly centered in improving the resolving capacity of imaging systems in the transverse direction [1–9]. A lower number of publications has been addressed to the design of filters for achieving superresolution along the optical axis [7,9–12], which is of great interest

when dealing with imaging systems in which optical sectioning is important. What is highly surprising is the slight attention paid to the aim of achieving three-dimensional (3D) superresolution [13,14] that is, of obtaining a narrowness of the central lobe of the irradiance point spread function (PSF) of the system simultaneously in both the axial and the transverse direction. This would be very important in 3D imaging.

In this paper we present a whole family of annular binary filters for increasing at will the 3D resolution capacity of imaging systems. The binary filters are composed of a central clear circle and a concentric annular aperture. The area of the annular aperture is bigger than that of the circle. It will be shown that by continuously increasing the area of the resulting

* Corresponding author. E-mail: manuel.martinez@uv.es

annular mask, the width of the core of the irradiance PSF, both in the transverse and in the axial direction, gradually decreases. The transverse impulse response provided by these filters presents an additional advantage: the maximum strength of the outer rings remains reasonably low, as we will show below.

In a second step, we propose the use of the above filters for improving the performance of two important optical techniques: optical data storage and confocal scanning microscopy.

In Section 2, we discuss the influence of the filters transmittance on the transverse and axial resolving capacity of an imaging system. Then we apply this formalism to design a new set of binary filters for achieving 3D superresolution. In Section 3 we show that the above filters could be used to improve the bit packing density of optical disks. Finally, in Section 4 we define the confocal gains in resolution, and we show that the use of the proposed filters allows to obtain a significant improvement of 3D resolution capacity of confocal scanning setups.

2. Annular binary filters design

Let us consider the amplitude PSF of an imaging system apodized by a purely absorbing pupil filter, after we consider cylindrical symmetry, that is [15]

$$h(v, W_{20}) = 2 \int_0^1 p(\rho) \exp(-i2\pi W_{20} \rho^2) J_0(2\pi v \rho) \rho d\rho. \quad (1)$$

In Eq. (1) $p(\rho)$ is the pupil function, ρ being the normalized radial coordinate. Besides, $v = r_0 r / \lambda f$ corresponds to the transverse radial coordinate expressed in optical units, r_0 being the maximum radial extent of the pupil and f the focal length of the system. The axial position is specified in terms of the well-known defocus coefficient, $W_{20} = r_0^2 z / 2\lambda f^2$, which specifies the amount of defocus measured in units of wavelength λ [16], z being the axial coordinate as measured from the focus of the system

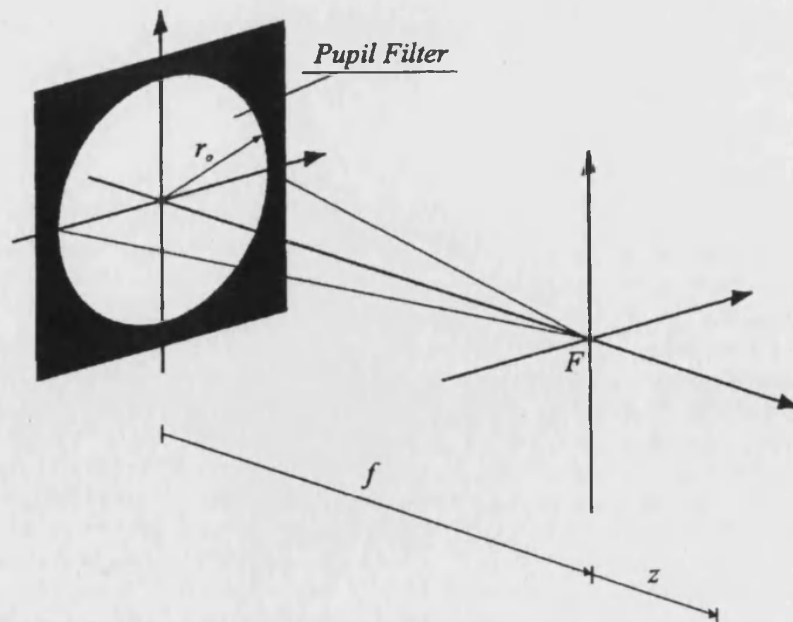


Fig. 1. Schematic layout of the focusing arrangement. The origin of the axial coordinate is taken at the focus F of the system.

(see Fig. 1). Finally, J_0 denotes the Bessel function of the first kind and zero order.

Next, it is convenient to perform the following geometrical mapping

$$\xi = \rho^2 - 0.5, \quad q(\xi) = p(\rho). \quad (2)$$

Then, except for an irrelevant phase factor, Eq. (1) can be rewritten as

$$h(\nu, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q(\xi) \exp(-i2\pi W_{20} \xi) \times J_0(2\pi\nu\sqrt{\xi+0.5}) d\xi. \quad (3)$$

We are interested in the design of annular binary filters to increase the 3D resolving capacity of imaging systems, i.e. to reduce the volume of the central lobe of the 3D PSF. To this end, the width of this lobe both in the transverse and in the axial direction

should be reduced. Then, to analyze the axial and transverse sections of the 3D PSF, it is convenient to particularize Eq. (3) for the two cases of our interest.

For the optical axis we set $\nu = 0$ in Eq. (3) to give

$$h(0, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q(\xi) \exp(-i2\pi W_{20} \xi) d\xi. \quad (4)$$

It is apparent from Eq. (4) that the axial behavior of the system is governed by the one-dimensional (1D) Fourier transform of the mapped transmittance $q(\xi)$.

On the other hand, for the image plane case, $W_{20} = 0$, we have that

$$h(\nu, 0) = \int_{-0.5}^{0.5} q(\xi) J_0(2\pi\nu\sqrt{\xi+0.5}) d\xi. \quad (5)$$

Therefore, the transverse behavior is also governed by the function $q(\xi)$, but through a different type of mathematical transformation.

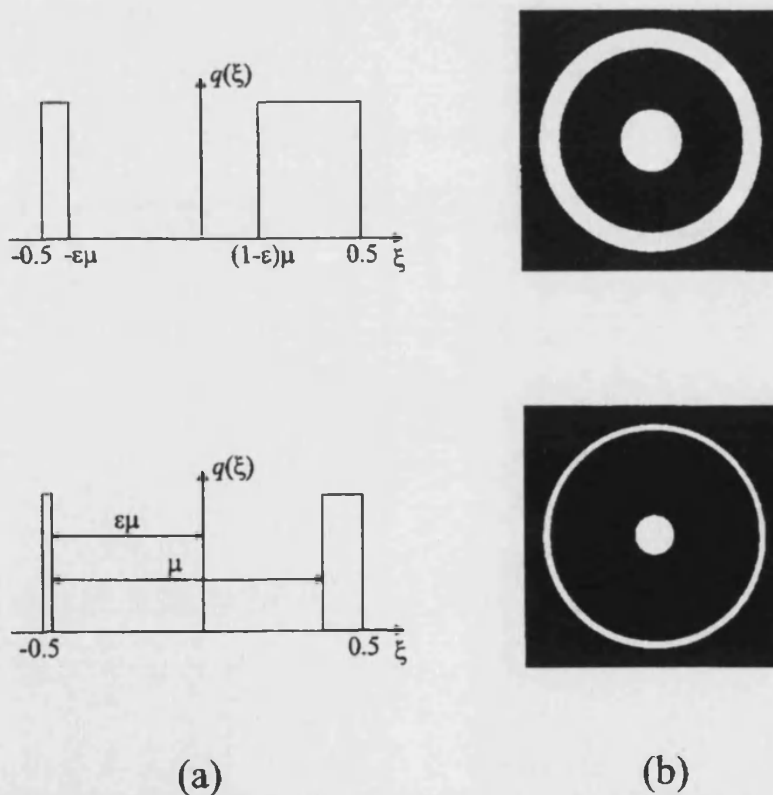


Fig. 2. Two members of the family of 3D superresolving pupil filters of Eq. (8): (a) mapped function $q(\xi)$ for $\mu = 0.6$, $\epsilon = 0.7$ and for $\mu = 0.85$, $\epsilon = 0.55$; (b) actual 2D representation.

The two-point resolution of an imaging system is usually evaluated in terms of the full width at the half maximum (FWHM) of the central lobe of the irradiance PSF [17]. However, since the parabolic term in the power-series expression for the irradiance

distribution in the focal region dominates within the central lobe, an alternative method for evaluating the resolution of optical systems are the transverse and axial resolution gains defined by Sheppard and Hegedus [7]. The gains are defined as the ratio of the

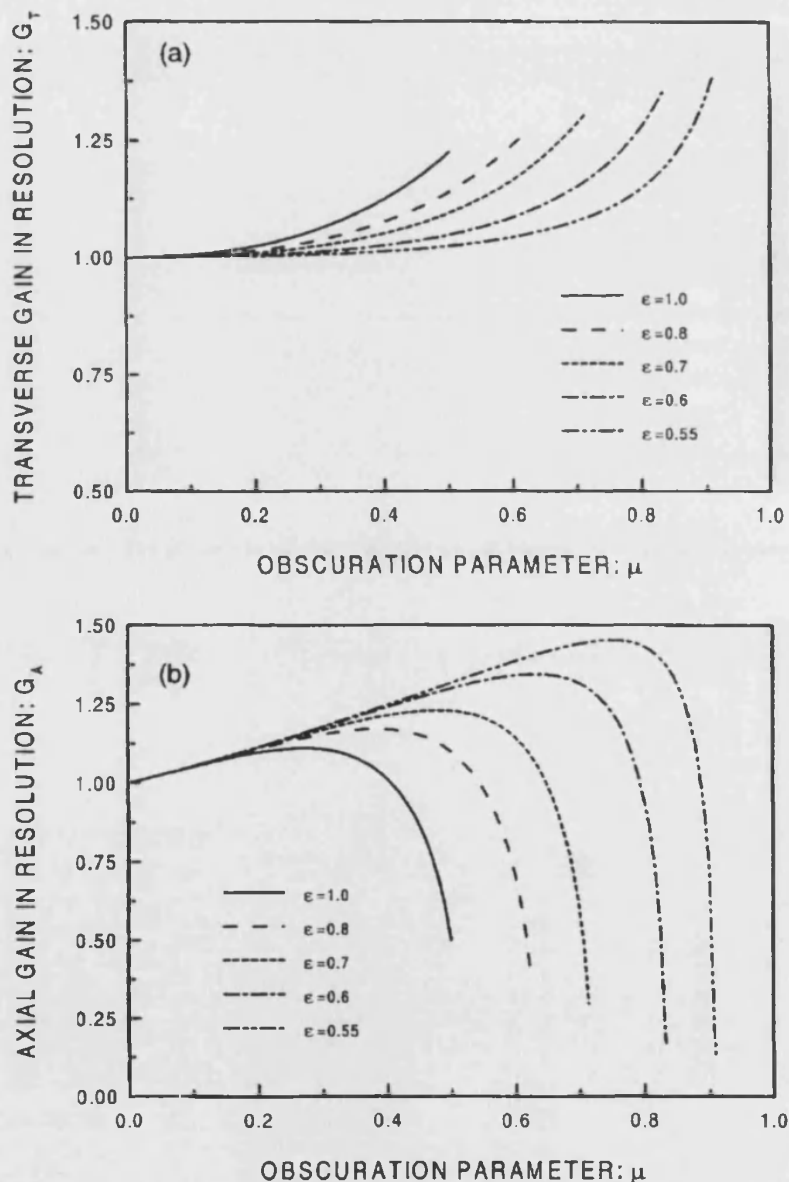


Fig. 3. Variation of: (a) transverse; (b) axial; and (c) 3D resolution gains versus the obscuration parameter μ , and for some typical values of the asymmetry parameter ϵ . Note that for a fixed value of ϵ one can tune the 3D gain by simply continuously varying the amount of obscuration.

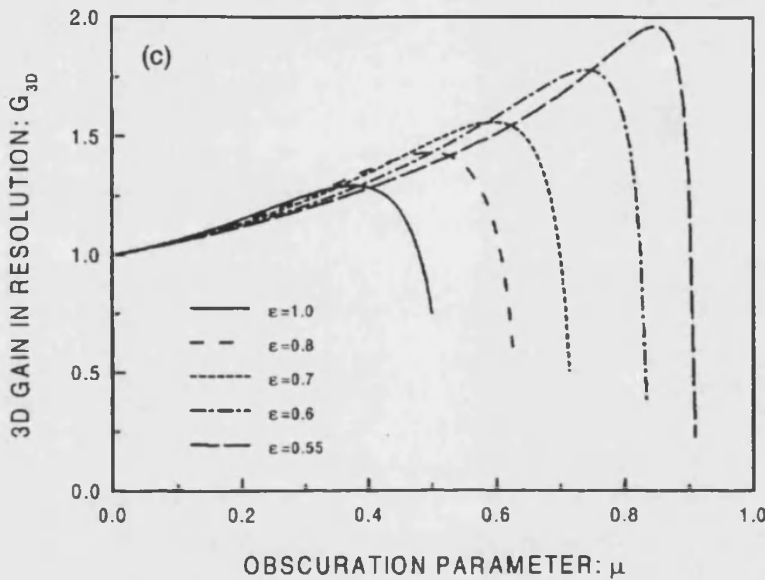


Fig. 3 (continued).

parabolic approximation of the irradiance response provided by the nonapodized imaging system to that corresponding to the apodized one.

The transverse, G_T , and the axial, G_A , resolution gains are [11]

$$G_T = \sqrt{\frac{1 + 2\bar{\xi}_a}{1 + 2\bar{\xi}_c}} \quad \text{and} \quad G_A = \frac{\sigma_a}{\sigma_c}, \quad (6)$$

respectively, where subscript 'c' corresponds to the nonapodized circular pupil, and subscript 'a' to the apodized pupil. In Eq. (6) $\bar{\xi}$ is the mean abscissa of the function $q(\xi)$ and σ the standard deviation. A superresolving effect in one of both directions, transverse or axial, is obtained when the value of the corresponding gain is bigger than unity.

For the clear circular pupil, $q(\xi) = \text{rect}(\xi)$, the mean abscissa and the standard deviation are $\bar{\xi}_c = 0$ and $\sigma_c = 1/\sqrt{12}$, respectively. Thus, the gains can be definitively written as

$$G_T = \sqrt{1 + 2\bar{\xi}_a} \quad \text{and} \quad G_A = \sqrt{12} \sigma_a. \quad (7)$$

Finally, since we are analyzing the 3D resolving power of optical systems, we can define the 3D gain in resolution as the product $G_{3D} = G_A G_T^2$, where we have considered that the quadratic 3D irradiance PSF has an ellipsoidal form.

As it is made clear above, for obtaining axial superresolution it is necessary that $\sigma_a > \sigma_c$. Thus, the value of $q(\xi)$ in the vicinity of $\xi = -0.5$ and $\xi = +0.5$ should be much bigger than at $\xi = 0$. In other words, we need a purely absorbing pupil filter whose amplitude transmittance, $p(\rho)$, is maximum at $\rho = 0$ and at $\rho = 1$, and minimum at $\rho = 1/\sqrt{2}$. Note that this kind of filter enhances the low and the high frequencies over the intermediate frequencies.

On the other hand, to produce an effect of transverse superresolution we need that the mean abscissa of $q(\xi)$ is bigger than zero. Then the light throughput in the vicinity of $\xi = +0.5$ should be much bigger than in the vicinity of $\xi = -0.5$. In other words, we need a pupil filter, $p(\rho)$, that enhances the high frequencies over the low frequencies.

Since our aim here is designing pupil filters to achieve 3D superresolution, the above two conditions should be simultaneously fulfilled. This requirement could be satisfied by continuously-varying purely-absorbing filters. However, although digital-half-toning techniques have been recently adapted to produce radially-symmetric pupil filters [18], such filters are still difficult to fabricate for practical use. In order to be useful for mass production, the apodizers should offer the following: simple structure, low production cost and high tolerance. Thus, according

to these constraints we propose the set of annular binary filters characterized by the mapped function

$$q(\xi) = \text{rect}(\xi) - \text{rect}\left[\frac{\xi + (\varepsilon - 0.5)\mu}{\mu}\right], \quad (8)$$

with $0.5 < \varepsilon \leq 1$, and $0 < \varepsilon\mu < 0.5$. From now on, parameter μ will be called as the obscuration parameter and ε as the asymmetry parameter.

Note that any member of the above family of filters consists of a circular pupil obstructed by an annular mask, in such a way that the area of the resulting transparent annulus is higher than that of the central circular aperture, as it is illustrated in Fig. 2.

To investigate the superresolving properties of the proposed set of annular binary filters, we first calculate the moments of the function $q(\xi)$. We obtain

$$m_0 = 1 - \mu, \quad m_1 = (\varepsilon - 0.5)\mu^2, \\ \text{and} \\ m_2 = \frac{1}{12} [1 - 4\mu^3(3\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1)]. \quad (9)$$

Therefore, the resolution gains provided by the set of binary filters are

$$G_T = \sqrt{1 + \frac{(2\varepsilon - 1)\mu^2}{1 - \mu}}, \quad (10)$$

and

$$G_A = \frac{1}{1 - \mu} \sqrt{\mu^4 - 4\mu^3[1 + 3\varepsilon(\varepsilon - 1)] - \mu + 1}. \quad (11)$$

In Fig. 3 we have plotted the variation of the transverse, axial, and 3D resolution gains as a function of the obscuration parameter μ , and for some typical values of the asymmetry parameter ε . Note from Fig. 3a that, for a fixed value of ε the function $G_T(\mu)$ has a slowly-varying behavior, with positive slope, so that the maximum transverse resolution is attained when μ reaches its maximum value. On the contrary, the function $G_A(\mu)$ shows a slowly increasing variation only for low and intermediate values of μ , where the gain reaches the maximum value. For high values of μ the axial gain dramatically decreases (see Fig. 3b). This fact limits the amount of obscuration that can be used. Finally, in Fig. 3c we

have depicted the variation of the 3D resolution gain. From this figure it is clear that for a fixed value of ε one can gradually increase, between certain limits, the 3D resolution of the system simply by continuous variation of the parameter μ . Moreover, as the value of ε decreases, the maximum achievable value of the 3D resolution gain increases. However, a price is paid: the irradiance peak, S , drops as the obscuration parameter increases according to $S = |h(0,0)|^2 = m_0^2 = (1 - \mu)^2$.

3. Application to optical data storage systems

The design of superresolving filters has constituted the aim of many research efforts. The irradiance impulse response provided by such filters has a narrow central lobe, but, unfortunately, large sidelobes. As a result, the usable field of view is dramatically reduced. Therefore, the application of such filtering technique is not very useful in conventional imaging systems. Nevertheless, over the last few years two novel important optical techniques have been developed in which the above drawback is overcome.

On the one hand, in optical data storage setups the use of superresolving filters for decreasing the laser writing spot size and increasing the read optics resolution, with the aim of improving the bit packing density of optical disk systems, has been extensively proposed [19–26]. The requirements that pupil filters should fulfill are: (i) narrow central lobe of the irradiance transverse impulse response, (ii) maximum transverse sidelobe irradiance under a threshold level, and (iii) not too low irradiance transmission efficiency. The threshold level is dependent on the recording medium, but in general it can be assumed that to avoid recording errors the allowable sidelobe irradiance must be $\leq 30\%$ of the main peak irradiance [22].

Another important feature, which indeed was taken into account only by Lee et al. [26], is an improvement of sensitivity on the focus error signal, i.e. an improvement in the axial resolution.

The use of pupil filters that fulfill some of the above constraints has been already proposed [19–26]. However, up to now no pupil filters that satisfy all the constraints have been proposed. At this point, it

is remarkable that many members of the here presented family of annular binary filters simultaneously fulfill all the above requirements. To exemplify this statement, we select the filter whose asymmetry parameter is $\varepsilon = 0.7$ and whose obscuration parameter is $\mu = 0.6$. For this filter the values for the gains and the transmission efficiency are $G_A = 1.15$, $G_T = 1.17$, and $S = 0.16$, respectively. In Fig. 4 we show the axial and the transverse behavior of this filter, calculated according to Eqs. (4) and (5). Note from this figure that an important reduction in the width of the central lobe is obtained both in the transverse and in the axial direction. Moreover, the

largest transverse sidelobe is low (about 11%), which is quite important in the writing process. This is because the proposed radially-symmetric filter attenuates the intermediate frequencies [4].

As for the readout process, it is remarkable that by the use of a confocal readout system [27], which involves the use of a narrow aperture in the detector plane, both the transverse and the axial sidelobes are extinguished.

Finally, we would like to remark that whereas the use of a shading band as a pupils filter, as proposed by some researchers [22–26], permits a transverse resolution improvement only in the direction of scan, the annular binary filter presented here is appropriate for improvement in two dimensions.

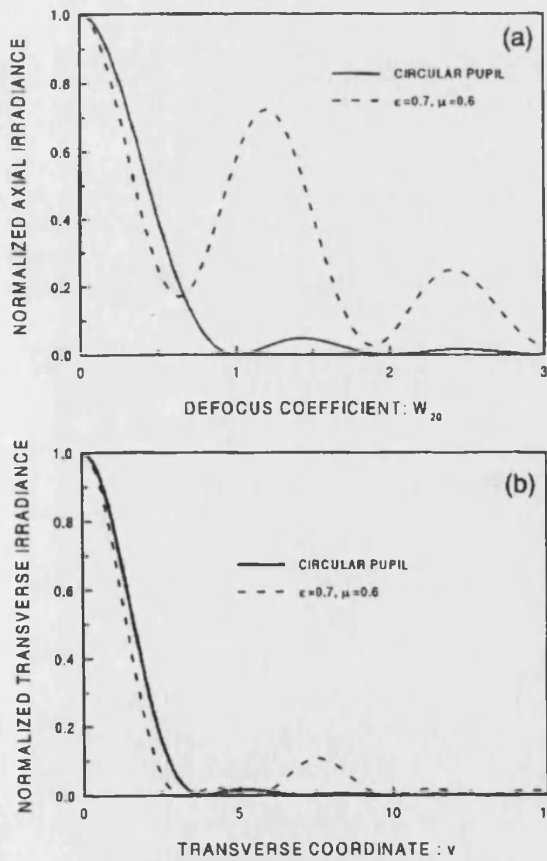


Fig. 4. (a) Normalized axial irradiance PSF corresponding to a system apodized by the annular filters whose parameters are $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.7$ (dashed line), and a nonapodized system (solid line); (b) normalized transverse irradiance PSF for the same cases. Note that an important reduction in the FWHM is obtained both in the axial and in the transverse direction.

4. Application to confocal scanning systems

The second imaging technique where superresolving filters are useful is confocal scanning microscopy [28–37]. In the case of bright-field confocal scanning systems, the irradiance PSF is given by

$$I(v, W_{20}) = |h_{il}(v, W_{20}) h_{col}(v, W_{20})|^2, \quad (12)$$

where

$$h_{il}(v, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q_{il}(\xi) \exp(-i2\pi W_{20} \xi) \times J_0(2\pi v \sqrt{\xi + 0.5}) d\xi, \quad (13)$$

represents the amplitude PSF of the illumination set, whereas

$$h_{col}(v, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q_{col}(\xi) \exp(\mp i2\pi W_{20} \xi) \times J_0(2\pi v \sqrt{\xi + 0.5}) d\xi, \quad (14)$$

is the amplitude PSF of the collecting arm. The upper and lower signs correspond to the reflection and the transmission architectures, respectively. Note that in Eq. (12) it is assumed that the pupil functions of the two arms of the confocal setup have the same radial extent.

What we propose now is the use of our annular binary filters in the illuminating arm of the confocal system to improve its 3D resolution power. Thanks

to the multiplicative character of the 3D irradiance PSF, the large axial and transverse sidelobes inherent to the use of the annular filters are drastically reduced by placing a clear circular aperture as the collecting-set pupil.

In order to select, among the set of annular binary filters, the most suitable for obtaining 3D superresolution we should take into account that the resolution

gains defined in Section 2 are not valid for describing the focal behavior of confocal systems. This is because now the irradiance PSF is given by the squared modulus of the product of two individual PSFs. Therefore, it is convenient to define the confocal gains in resolution.

It is straightforward to find (see Appendix A) that, within the second order approximation, the

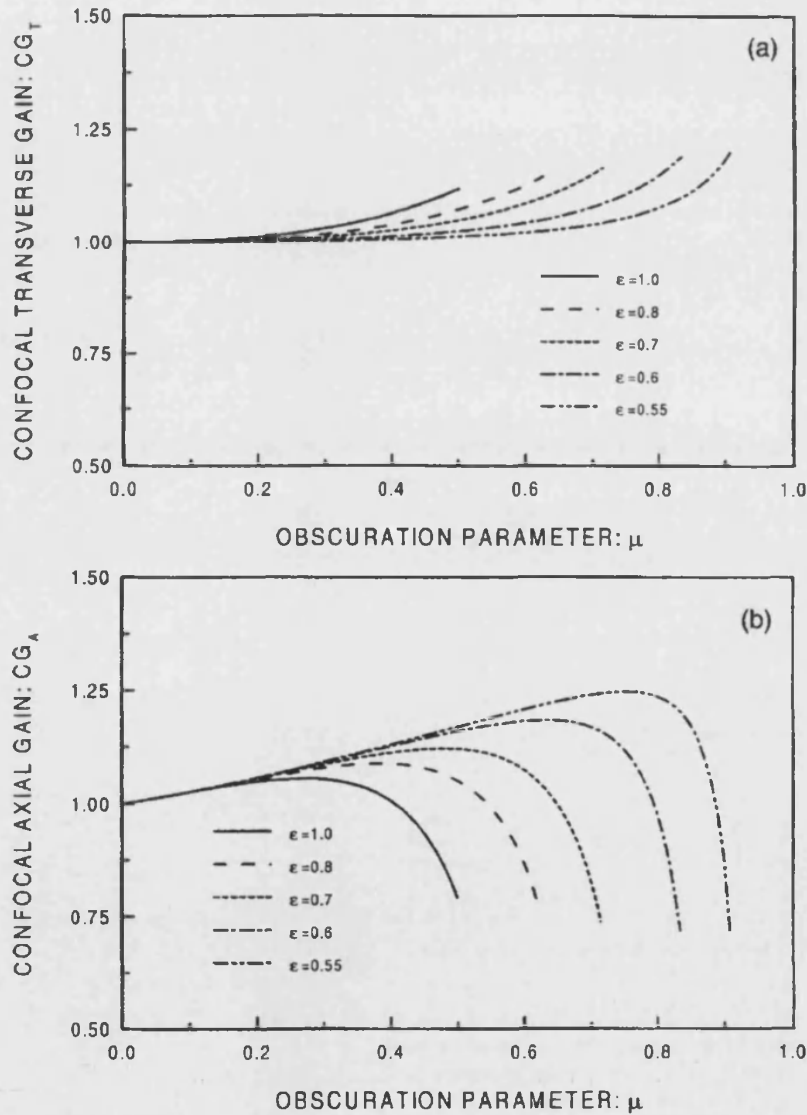


Fig. 5. Variation of: (a) transverse; (b) axial; and (c) 3D resolution confocal gains versus the obscuration parameter μ , and for some typical values of the asymmetry parameter ϵ .

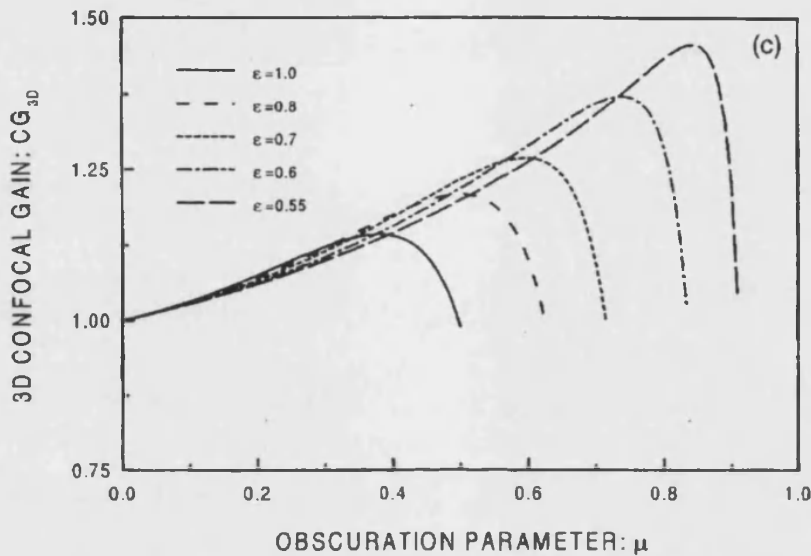


Fig. 5 (continued).

variation of the normalized irradiance in the focal region of an apodized confocal system is given by:

(a) the focal plane (see Eq. (A.8)),

$$I_N(v,0) = 1 - 2\pi^2(1 + \bar{\xi}_{il} + \bar{\xi}_{col})v^2. \quad (15)$$

Following a reasoning similar to that of Section 2, i.e. by comparing the quadratic fall-off for the irradiance responses provided by the non-apodized and the apodized confocal set-ups, the confocal gain in transverse resolution is then given by

$$CG_T = \sqrt{1 + \bar{\xi}_{il} + \bar{\xi}_{col}}. \quad (16)$$

Since we have assumed that a clear circular aperture is used as the collecting-set pupil (and then $\bar{\xi}_{col} = 0$), the gain can be rewritten as

$$CG_T = \sqrt{1 + \bar{\xi}_{il}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + G_T^2}, \quad (17)$$

where we have expressed the value of the confocal gain in terms of the conventional gain.

(b) the optical axis (see Eq. (A.4)),

$$I_N(0,W_{20}) = 1 - 4\pi^2(\sigma_{il}^2 + \sigma_{col}^2)W_{20}^2. \quad (18)$$

Therefore, the confocal gain in axial resolution is

$$CG_A = \sqrt{6(\sigma_{il}^2 + \sigma_{col}^2)}. \quad (19)$$

If we assume again that $q_{col}(\xi) = \text{rect}(\xi)$, then $\sigma_{col}^2 = 1/12$. Consequently, the axial gain is rewritten as

$$CG_A = \sqrt{1/2 + 6\sigma_{il}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + G_A^2}, \quad (20)$$

where G_A represents the conventional gain in axial resolution.

Finally, the confocal gain in 3D resolution is defined as the product $CG_{3D} = CG_T^2 CG_A$.

By using the values of the conventional gains (see Eqs. (10) and (11)) corresponding to the proposed set of annular binary filters, we can evaluate the dependence of the confocal gains with the parameters μ and ϵ . In this context, in Fig. 5 we have plotted the variation of the transverse, axial and 3D confocal resolution gains as a function of μ , and for some typical values of ϵ .

Note from this figure that, for a given value of the asymmetry parameter, the 3D resolution power of the confocal system can be tuned by simply gradually increasing the obscuration parameter μ .

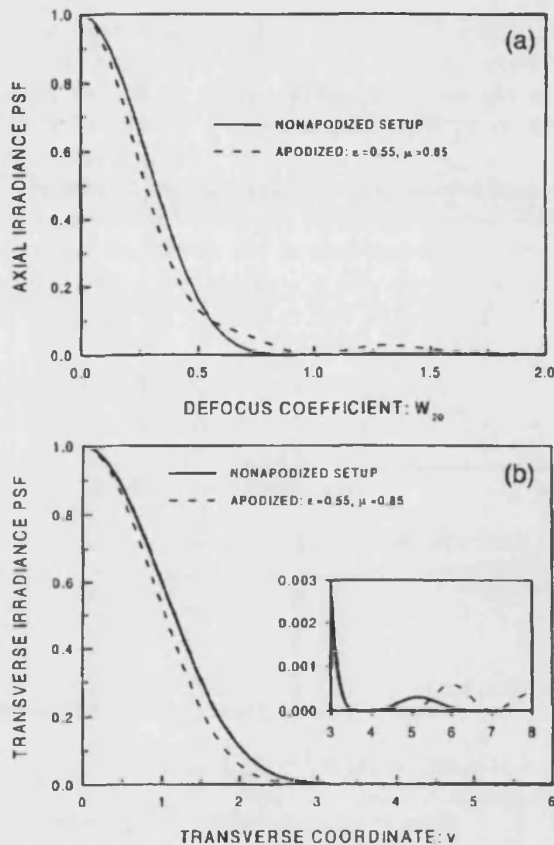


Fig. 6. (a) Normalized axial irradiance PSF of a confocal microscope whose illuminating set incorporates the annular filter whose parameters are $\mu = 0.85$, $\varepsilon = 0.55$. The solid curve corresponds to the nonapodized set-up; (b) normalized transverse irradiance PSF for the same confocal cases.

As an example of the improvement in 3D resolution that can be achieved by the use of this method we consider the annular filter whose parameters are $\varepsilon = 0.55$ and $\mu = 0.85$. The value for the 3D confocal gain provided by this filter is $CG_{3D} = 1.45$. Therefore, the filter produces a quite important reduction in the width of the 3D irradiance PSF, and then a very important improvement in the 3D resolution power of the confocal system. To illustrate the effect produced by this filter in the PSF of the confocal set-up, in Fig. 6 we show the transverse and the axial irradiance PSF of a confocal system whose illuminating-set pupil is apodized by the proposed

annular filter¹. The solid curve correspond to the nonapodized confocal system.

Note from this figure that by simply placing an annular binary filter in the illuminating path of the confocal system, an important reduction in the central lobe of the quadratic irradiance PSF in the axial and in the transverse direction (and therefore in any other direction passing through the focus) is achieved.

As for the influence of the above annular filter in the transfer function of the confocal system, it can be easily found that the cut-off spatial frequency remains unaffected in both that transverse and the axial direction. Moreover, it is achieved, also in both directions, a slight diminution for the low frequencies and a significant enhancement for the high frequencies. Providing then an equalization in the transfer functions. Therefore, it could be stated that by using the above annular filter it is obtained an improvement in the quality of images of extended objects.

We would like to emphasize that although we have focused our study on confocal systems in which only one of the pupils is apodized, our formalism could be also applied to analyze the performance of systems in which both arms are apodized. In such a case, the confocal gains are those defined in Eqs. (16) and (19). It is remarkable that these formulae constitute a very useful tool for the design of the optimal pair of filters when dealing with twofold apodized confocal set-ups, as those reported in references [36] and [38].

Note, finally, that although the results obtained in this paper have been deduced for the bright-field mode, they also hold for the fluorescence mode.

5. Conclusions

We have designed a new set of annular binary filters which have the ability of tuning the 3D resolu-

¹ The term apodization etymologically comes from the Greek (to remove foot), and involves the suppression, or at least a considerable decrease, of the sidelobes of the diffraction pattern. However, during the last decades the use of this term has been extended, and then now it is generally accepted the use of the word apodization to denote any modification of the uniform amplitude distribution of the pupil (see reference [1]).

tion power of imaging systems. The filters consist of a central circular aperture and a concentric annulus such that its area is bigger than that of the inner circle. The corresponding 3D resolution gain depends on the value of the design parameters ε and μ . It was shown that for a given value of ε , the 3D resolving power of the system can be tuned by simply gradually change the obscuration ratio μ .

We have recognized that the members of the proposed family of annular filters can be used to improve the performance of two important, recently developed, optical techniques. In the case of optical data storage set-ups, the use of the proposed filters permits to increase the bit packing density of optical disks. This is because the filters provide a narrow central lobe of the irradiance impulse response, both in the axial and the transverse direction, a low value for the maximum transverse sidelobe irradiance, and a reasonable irradiance transmission efficiency. Furthermore, we estimate that the use of these filters can be also very useful for the readout system of volumetric optical disks, since they can reduce the inter-layer cross talk [39].

To analyze the ability of the filters to improve the resolution of confocal scanning set-ups, we have defined the confocal gains in resolution. Although in our study we have centered our attention in the case in which a clear circular aperture is used as the collecting-set pupil, a more general study, in which pupil filters are placed in the two arms of the confocal set-up, could also be performed. The study of the dependence of the confocal gains with the asymmetry and the obscuration parameters, allows us to recognize that an important improvement in 3D resolution of confocal systems can be obtained by using our binary filters.

Acknowledgements

C.J.Z.-R. gratefully acknowledges financial support from the Dirección de Investigación Científica y Enseñanza Superior, Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. M.K. gratefully acknowledges financial support by the Komitet Badan Naukowych, Poland (project 8T11F 020 12).

Appendix A

The axial amplitude PSF of the illuminating and the collecting arms of a confocal system are given by the 1D Fourier transform of the corresponding pupil filter (as it can be inferred from Eqs. (13) and (14)). The kernel of these Fourier transforms can be expressed as a power series as

$$\exp(\mp i2\pi W_{20} \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp i2\pi W_{20} \xi)^n}{n!} \quad (A.1)$$

Then, the individual axial amplitude PSFs can be written in the form

$$h_{il}(0, W_{20}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi W_{20})^n}{n!} m_n^{il},$$

$$\text{and } h_{col}(0, W_{20}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp i2\pi W_{20})^n}{n!} m_n^{col}, \quad (A.2)$$

where m_n^{il} and m_n^{col} represents the n th moment of the functions $q_{il}(\xi)$ and $q_{col}(\xi)$, respectively.

Now, the amplitude PSF of the confocal set-up can be approximated by

$$h_{il}(0, W_{20}) h_{col}(0, W_{20})$$

$$= m_0^{il} m_0^{col} \left[1 - i2\pi \left(\frac{m_1^{il}}{m_0^{il}} \pm \frac{m_1^{col}}{m_0^{col}} \right) W_{20} \right.$$

$$\left. - 2\pi^2 \left(\frac{m_2^{il}}{m_0^{il}} + \frac{m_2^{col}}{m_0^{col}} \mp 2 \frac{m_1^{il}}{m_0^{il}} \frac{m_1^{col}}{m_0^{col}} \right) W_{20}^2 \right]. \quad (A.3)$$

Therefore, taking into account that we deal with purely absorbing pupil filters, the normalized axial irradiance PSF of the confocal system is given, in parabolic approximation, by

$$I_N(0, W_{20}) = \frac{I(0, W_{20})}{I(0, 0)}$$

$$\approx 1 - 4\pi^2 \left[\frac{m_2^{il}}{m_0^{il}} - \left(\frac{m_1^{il}}{m_0^{il}} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{m_2^{col}}{m_0^{col}} - \left(\frac{m_1^{col}}{m_0^{col}} \right)^2 \right] W_{20}^2$$

$$= 1 - 4\pi^2 (\sigma_{il}^2 + \sigma_{col}^2) W_{20}^2. \quad (A.4)$$

For the case of the transverse PSF, we use the formula of the power expansion of J_0 [40], that is

$$J_0(2\pi\sqrt{\xi+0.5}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\pi v\sqrt{\xi+0.5})^{2n}. \quad (\text{A.5})$$

Then, the individual amplitude transverse PSFs can be written, for both the illuminating and the collecting sets, in terms of the moments of $q(\xi)$ as

$$h(v,0) = m_0 - \pi^2 \left(\frac{m_0}{2} + m_1 \right) v^2 + \dots \quad (\text{A.6})$$

So, the amplitude transverse PSF of the confocal system can be approximated by

$$h_{il}(v,0)h_{col}(v,0) \approx m_0^{il}m_0^{col} \left[1 - \pi^2 \left(1 + \frac{m_1^{il}}{m_0^{il}} + \frac{m_1^{col}}{m_0^{col}} \right) v^2 \right]. \quad (\text{A.7})$$

Finally, the normalized transverse quadratic irradiance PSF is

$$I_N(v,0) = \frac{I(v,0)}{I(0,0)} \approx 1 - 2\pi^2 (1 + \bar{\xi}_{il} + \bar{\xi}_{col}) v^2. \quad (\text{A.8})$$

References

- [1] P. Jacquinot, B. Rozien-Dossier, Apodisation, in: E. Wolf (Ed.), *Progress in Optics*, vol. III, North-Holland, Amsterdam, 1964.
- [2] A. Boivin, *Théorie et Calcul des Figures de Diffraction de Révolution*, Université de Laval, Quebec, 1964.
- [3] G. Toraldo di Francia, *Nuovo Cimento Suppl.* 9 (1952) 426.
- [4] G.R. Boyer, *Opt. Acta* 30 (1983) 807.
- [5] R. Barakat, *J. Opt. Soc. Am.* 52 (1962) 264.
- [6] B.R. Frieden, *Opt. Acta* 16 (1969) 795.
- [7] C.J.R. Sheppard, Z.S. Hegedus, *J. Opt. Soc. Am. A* 5 (1988) 643.
- [8] T.R.M. Sales, G.M. Morris, *J. Opt. Soc. Am. A* 14 (1997) 1637.
- [9] C.J.R. Sheppard, G. Calvert, M. Wheatland, *J. Opt. Soc. Am. A* 15 (1998) 849.
- [10] M. Martínez-Corral, P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, *Appl. Opt.* 33 (1994) 2223.
- [11] M. Martínez-Corral, P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, G. Saavedra, *Opt. Commun.* 119 (1995) 491.
- [12] T. Cichocki, M. Martínez-Corral, M. Kowalczyk, P. Andrés, *J. Mod. Opt.* 45 (1998) 227.
- [13] C.J.R. Sheppard, *Optik* 99 (1995) 32.
- [14] A. Magiera, *Opt. Appl.* 26 (1996) 57.
- [15] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford, 1980, chap. 8.
- [16] H.H. Hopkins, *Wave Theory of Aberrations*, Clarendon, Oxford, 1950, p. 11.
- [17] E.H.K. Stelzer, *J. Microsc.* 189 (1998) 15.
- [18] M. Kowalczyk, M. Martínez-Corral, T. Cichocki, P. Andrés, *Opt. Commun.* 114 (1995) 211.
- [19] I.J. Cox, *Appl. Opt.* 23 (1984) 3260.
- [20] H. Ando, *Jpn. J. Appl. Phys.* 31 (1992) 557.
- [21] H. Ando, T. Yokota, K. Tanoue, *Jpn. J. Appl. Phys.* 32 (1993) 5269.
- [22] Y. Yamanaka, Y. Hirose, H. Fujii, K. Kubota, *Appl. Opt.* 29 (1990) 3046.
- [23] T.D. Milster, C.H. Curtis, *Appl. Opt.* 31 (1992) 6272.
- [24] T.D. Milster, M.S. Wang, W. Li, E. Walker, *Jpn. J. Appl. Phys.* 32 (1993) 5397.
- [25] H. Dobashi, T. Tanabe, M. Yamamoto, *Jpn. J. Appl. Phys.* 36 (1997) 450.
- [26] C.W. Lee, C.S. Chung, K.H. Cho, P.Y. Seong, T.K. Kim, S.Y. Jung, B.H. Choi, J.H. Yoo, J.E. Seo, D.H. Shin, *Jpn. J. Appl. Phys.* 36 (1997) 486.
- [27] A. Toriumi, S. Kawata, M. Gu, *Opt. Lett.* 23 (1998) 1924.
- [28] T. Wilson (Ed.), *Confocal Microscopy*, Academic, London, 1990.
- [29] Z.S. Hegedus, *Opt. Acta* 32 (1985) 815.
- [30] I.J. Cox, C.J.R. Sheppard, *J. Opt. Soc. Am. A* 3 (1986) 1152.
- [31] T. Wilson, S.J. Hewlett, *J. Mod. Opt.* 37 (1990) 2025.
- [32] C.J.R. Sheppard, M. Gu, *Opt. Commun.* 84 (1991) 7.
- [33] E.H.K. Stelzer, S. Lindek, *Opt. Commun.* 111 (1994) 536.
- [34] S. Lindek, C. Cremer, E.H.K. Stelzer, *Appl. Opt.* 35 (1996) 126.
- [35] M. Martínez-Corral, M. Kowalczyk, C.J. Zapata-Rodríguez, P. Andrés, *Appl. Opt.* 37 (1998) 6914.
- [36] M. Martínez-Corral, P. Andrés, C.J. Zapata-Rodríguez, C.J.R. Sheppard, *Optik* 107 (1998) 145.
- [37] M. Kowalczyk, C.J. Zapata-Rodríguez, M. Martínez-Corral, *Appl. Opt.* 37 (1998) 8206.
- [38] Z. Ding, G. Wang, M. Gu, Z. Wang, Z. Fan, *Appl. Opt.* 36 (1997) 360.
- [39] B.W. Yang, H.P. Shieh, *Appl. Opt.* 38 (1999) 333.
- [40] M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1970.

Publicación VII

**Improvement of three-dimensional
resolution in confocal scanning
microscopy by combination of two
pupil filters**

Optik 107 (4), pp. 145–148 (1998)

Improvement of three-dimensional resolution in confocal scanning microscopy by combination of two pupil filters

M. Martínez-Corral, P. Andrés, C. J. Zapata-Rodríguez

Departamento de Óptica, Universidad de Valencia, Burjassot, Spain

C. J. R. Sheppard

Physical Optics Department, School of Physics, University of Sydney, Australia

Improvement of three-dimensional resolution in confocal scanning microscopy by combination of two pupil filters. A simple technique for improving 3-D resolution in confocal scanning microscopy is presented. The technique is based on the equal contribution to the image of the illuminating and the collecting lenses. It is proposed, then, to apodize such lenses with complementary filters, the one designed for increasing the resolution in the image plane, and the other for achieving axial superresolution. Each pupil independently introduces zeros in the point spread function, the positions of which can be chosen to lie in the focal plane or along the optic axis. The combined action of both filters produces a narrowing of the point spread function of the system both in the image plane, and along the optical axis. A numerical example with two well-known pupil filters is carried out.

Verbesserung der dreidimensionalen Auflösung im konfokalen Rastermikroskop durch Kombination zweier Pupillenfilter. Es wird eine einfache Methode zur Verbesserung der dreidimensionalen Auflösung im konfokalen Rastermikroskop vorgestellt. Die Methode basiert auf der entsprechenden Verteilung der Bilder in der Beleuchtungs- und Sammellinse. Es wird vorgeschlagen, diese Linsen mit komplementären Filtern zu apodisieren, das eine zur Erhöhung der Auflösung in der Bildebene und das andere zur Erreichung von axialer Superauflösung. Jede Pupille führt unabhängig Nullstellen in der Punktbild-Übertragungsfunktion ein, deren Position in der Fokusebene oder entlang der optischen Achse gewählt werden kann. Die gemeinsame Antwort beider Filter gibt eine Verschmälerung in der Punktbild-Übertragungsfunktion des Systems in der Bildebene wie auch entlang der optischen Achse. Ein numerisches Beispiel mit zwei bekannten Pupillen-Filtern wird vorgestellt.

1 Introduction

Confocal scanning microscopes (CSM) are imaging systems in which the light radiated from a point source is focused onto the object by an illuminating set, then the transmitted light is imaged by a collecting set and the light which passes through a pinhole at the center of the image plane is detected. In this symmetrical configuration both the illuminating and collecting sets, play equal roles in the image properties. The most important feature of

the CSM is their ability to form a three-dimensional (3-D) image of 3-D objects [1]. This 3-D capability results from both their high transverse resolution capacity and their optical sectioning ability. Over the last years several attempts have been made in order to achieve an improvement of the resolution capacity of the CSM either in the transverse direction [2–6], or along the axial direction [7–9].

The goal of this work is to report a technique for improving the resolution capacity of the CSM simultaneously in the transverse and the axial direction. The technique is based on a proper combination of two different pupil filters, the one designed for increasing the resolution in the image plane, and the other for achieving axial superresolution. It will be shown that with this combination it is possible to reduce globally the size of the central lobe of the 3-D point spread function (PSF) of the CSM. This important property results from the fact that each of the pupils gives rise to zeros in intensity in the final effective PSF. Previously Hegedus [2] has shown that the zeros can be chosen to lie in the focal plane. Here we demonstrate that the zeros can lie both on the optic axis and in the focal plane, thus resulting in improved 3-D imaging.

2 Basic theory

For our present discussion we start by considering a transmission CSM in which the pupils of illuminating and collecting sets are apodized by the radially-symmetric pupil filters of amplitude transmittance $\bar{p}_1(\rho)$ and $\bar{p}_2(\rho)$, respectively (see fig. 1). Then the intensity distribution in the image of an axial point source, i.e. the 3-D intensity PSF, is given by [10]

$$I(v, W_{20}) = |p_1(v, W_{20}) p_2(v, W_{20})|^2, \quad (1)$$

being

$$p(v, W_{20}) = 2\pi \int_0^1 \bar{p}(\rho) \exp(-i2\pi W_{20} \rho^2) J_0(2\pi v \rho) \rho d\rho, \quad (2)$$

where a unit-radius pupil is assumed.

In eq. (2) v is a normalized coordinate related to the radial coordinate, r , by $v = r_0 r / \lambda f$, where r_0 is the maximum radial extension of the pupil, and f the focal length

Received May 5, 1997; accepted August 12, 1997.

M. Martínez-Corral, P. Andrés, C. J. Zapata-Rodríguez, Departamento de Óptica, Universidad de Valencia, Dr. Moliner 50, 46100-Burjassot (Valencia), Spain.

C. J. R. Sheppard, Physical Optics Department, School of Physics, University of Sydney, N.S.W. 2006, Australia.

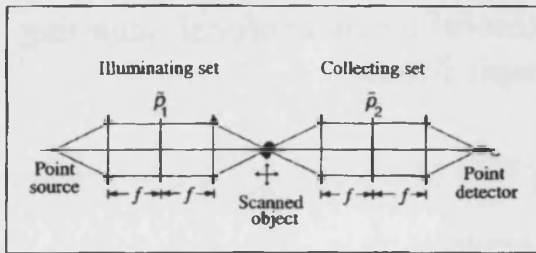


Fig. 1. Scheme of the transmission confocal scanning system.

of the system. The coefficient W_{20} is the well-known defocus coefficient that specifies the amount of defocus measured in units of wavelength.

From eqs. (1) and (2), it is clear that the 3-D intensity PSF of a confocally scanned system is governed by both the amplitude transmittance of the illuminating-set pupil and that of the collecting-set pupil. This particular property can be exploited for shaping the 3-D PSF by means of a combination of two different nonuniform transmission pupil filters.

Since we are interested in increasing the resolution capacity of a confocally scanned system, a pair of filters should be selected such that the width of the central lobe of the 3-D PSF of the CSM is reduced both in transverse and in axial directions. To reach this end, we follow the next reasoning.

First we particularize eq. (2) for the two cases of our interest: the amplitude distribution in the image plane, and that along the optical axis. For the focal plane, $W_{20} = 0$, we have that

$$p(v, 0) = 2\pi \int_0^1 \bar{p}(\rho) J_0(2\pi v \rho) \rho d\rho. \quad (3)$$

Then the two-dimensional (2-D) amplitude distribution in the image plane, what we will refer to hereafter as the transverse amplitude PSF, is given by the Hankel transform of the amplitude transmittance, $\bar{p}(\rho)$, of the filter. So, if we want to produce an effect of transverse superresolution, a filter that enhances the high frequencies over the low frequencies is necessary, that is, a purely absorbing pupil filter whose maximum transmittance is at $\rho = 1$ and whose minimum transmittance is at $\rho = 0$.

On the other hand, for the case of the optical axis, $v = 0$, we have that

$$p(0, W_{20}) = 2\pi \int_0^1 \bar{p}(\rho) \exp(-i2\pi W_{20} \rho^2) \rho d\rho. \quad (4)$$

This equation can be converted into a one-dimensional (1-D) Fourier transform by using the next geometrical mapping,

$$\zeta = \rho^2 - 0.5, \quad q(\zeta) = \bar{p}(\rho). \quad (5)$$

Under this variable change, eq. (4) can be rewritten, aside from irrelevant premultiplying phase and constant factors, as

$$p(0, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q(\zeta) \exp(-i2\pi W_{20} \zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Then, the axial amplitude distribution is given by the 1-D Fourier transform of the function $q(\zeta)$. In order to investigate which characteristics a filter should have for producing an axial superresolving effect, it is convenient to point out the similarity existing between this situation and that corresponding to the analysis of a 1-D imaging system. For the latter case, the transmittance of a 1-D pupil filter and its corresponding 1-D amplitude PSF are also connected by an 1-D Fourier transformation.

From the above analogy one can infer, as is made clear by Ojeda-Castañeda et al. [11], that for obtaining axial superresolution a filter is necessary whose mapped function $q(\zeta)$ enhances the "high frequencies" over the "low frequencies", in other words, it is convenient that the amplitude transmittance of the purely absorbing filter, $\bar{p}(\rho)$, is maximum at $\rho = 0$ and at $\rho = 1$, and minimum at $\rho = \sqrt{2}/2$.

3 Combination of two complementary filters

It is clear that a pupil filter designed for increasing the transverse resolution capacity of an optical system, produces a narrowing of the central lobe of its transverse PSF, which is accompanied by an increase in the strength of secondary side lobes, and a widening of the central lobe of its axial PSF. On the contrary, if the filter is designed for achieving axial superresolution, an increase in the width of the central lobe of the transverse PSF appears, in general, as a collateral effect [12].

As has been established in eq. (1), the 3-D intensity PSF of a CSM is given by the product of two independent 3-D PSFs, one corresponding to the illuminating set and the other to the collecting set. The independence of these two factors permits us to select a couple of filters which have the ability of producing the wanted complementary effects. In this way, for reaching the aim of reducing the area of the central lobe of 3-D PSF of the CSM, we propose to combine a filter designed for producing transverse superresolution, with an axially superresolving filter.

When the product of the two independent 3-D PSFs is performed, a 3-D amplitude distribution is obtained in which the width of the central lobe in the transverse direction is governed by the PSF of the transverse superresolving filter, whereas the width in the axial direction is imposed by the PSF corresponding to the axially superresolving filter. A similar reasoning can be applied to any other direction passing through the focus. In this general case the width of the central lobe in any direction is imposed by the narrowest of the independent PSF in such direction. In this way, a 3-D PSF can be obtained whose central lobe dimensions are globally reduced in comparison with those corresponding to a nonapodized CSM. Thus, it can be stated that the proper combination of two pupil filters provides a 3-D superresolving effect.

At this point we would like to emphasize that the use of purely absorbing pupil filters of continuously varying amplitude transmittance does not constitute a technolog-

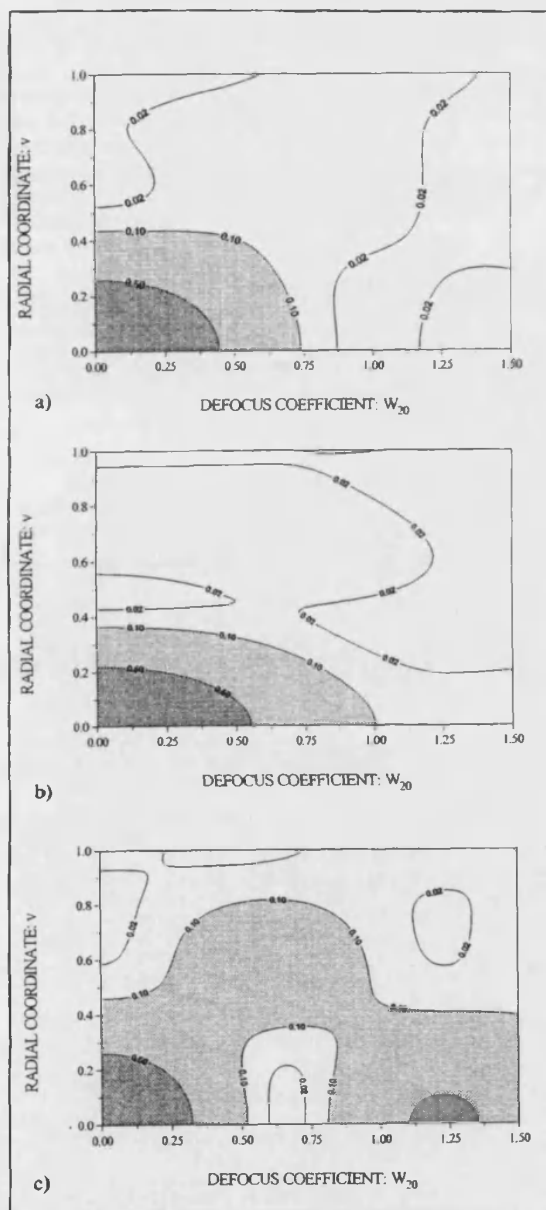


Fig. 2. Numerically evaluated contours of equal normalized intensity corresponding to the 3-D PSF of: a) circular aperture; b) transverse superresolving parabolic filter, $\bar{p}_1(\rho) = \rho^2$; c) axially superresolving parabolic filter, $\bar{p}_2(\rho) = 4\rho^4 - 4\rho^2 + 1$.

ical problem. As has been stated by some authors [2, 13, 14], the use of an adequate digital halftoning technique permits the manufacture of binary masks such that the difference between their PSF and that of the continuous pupil filter is negligible.

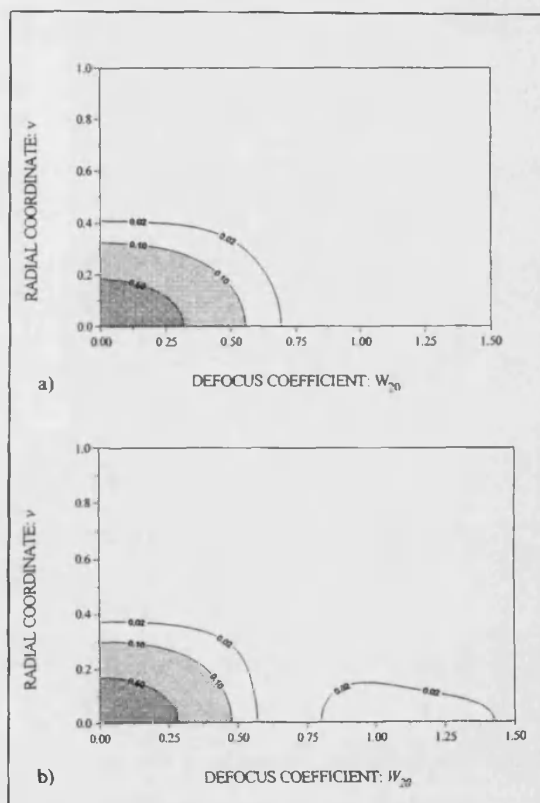


Fig. 3. Theoretical contours of equal normalized intensity corresponding to the 3-D PSF of: a) a nonapodized CSM; b) a CSM in which the illuminating and collecting sets are apodized by the filters $\bar{p}_1(\rho) = \rho^2$ and $\bar{p}_2(\rho) = 4\rho^4 - 4\rho^2 + 1$.

4 Numerical example

In order to illustrate our result we select as a couple of filters the well known transverse superresolving parabolic filter $\bar{p}_1(\rho) = \rho^2$, and the axially superresolving parabolic filter $q_2(\zeta) = 4\zeta^2$, whose representation in radial coordinates is $\bar{p}_2(\rho) = 4\rho^4 - 4\rho^2 + 1$. In fig. 2 we have represented, in isophotes diagrams, the normalized 3-D intensity PSFs corresponding to the selected filters, beside that corresponding to the nonapodized circular aperture. Note, from these plots, that the narrowing of the central lobe in the selected direction is accompanied by an increase in the strength of the secondary lobes, and by a widening in the opposite direction.

Next, in fig. 3b we have depicted the normalized 3-D intensity PSF of a CSM in which the collecting-set pupil is apodized by one of the above proposed filters and the illuminating-set pupil by the other, assuming that both pupil-filters have the same external radius. When comparing this figure with figs. 2b-c, we recognize that the width of the central lobe in transverse direction is im-

posed, precisely, by the transverse superresolving filter, and that the width in the axial direction is governed by the axially superresolving filter. Moreover, the height of the secondary lobes at any direction, passing through the focus, has been drastically reduced in comparison with the corresponding to the independent 3-D PSF. If we compare now this intensity distribution with that corresponding to a nonapodized CSM (fig. 3a), it is clear that there is an important reduction of the width of the central lobe at any direction, and hence in its global volume. In particular, the width of the central lobe exhibits a reduction of 21% in the transverse direction and of 34% along the axis. In terms of the half-intensity, the percentage reduction in the transverse and axial directions are 7.3% and 11%, respectively.

The proposed method can be used in either the reflection or the transmission geometry, and in either bright-field or fluorescence imaging modes. For the latter in particular the signal collection efficiency is of great importance. Thus as the filter $\bar{p}_1(\rho)$ gives a Strehl ratio of 1/4, whereas that for $\bar{p}_2(\rho)$ is 1/9, it is preferable to use $\bar{p}_1(\rho)$ in the collecting set.

In reflection imaging, the image of a planar object is of particular importance. The axial image amplitude from a level planar object is given by the 2-D Fourier transform of the product of the mapped pupils. For the example given here, the axial image from a plane is broader than for the system without filters. However it should be stressed that there is considerable flexibility in overall design of the system, and that the product of the pupils can be designed accordingly.

5 Conclusions

We have proposed a novel technique for improving the 3-D resolution capacity of a CSM. The cornerstone of our approach is to combine the effects of two properly selected pupil filters. We have shown that by this quite simple method it is possible to achieve a high reduction of the width of the central lobe of the 3-D PSF both in the transverse and in the axial directions. To illustrate our result, we have performed a numerical example in which we have evaluated the 3-D intensity PSF of a CSM apodized by two well-known pupil filters. This numerical example allowed us to recognize an important reduction of the size of the central lobe of PSF in terms both of the zero and the half-intensity width.

Previously, it has been shown that improving transverse resolution usually results in degradation of the imaging performance in the axial direction [12]. Thus improving resolution in both transverse and axial directions is an important advance. The method is based on the independent specification of zeros in the effective point spread function both in the focal plane and along the optic axis. This basic approach is applicable to more complex filters, which have the potential to achieve better performance than the very simple filters considered here.

Part of this work has been presented at the Second Iberoamerican Meeting of Optics held in Guanajuato, México, in September 1995. This work was supported by the Dirección General de Investigación Científica y Enseñanza Superior (grant PB93-0354-CO2-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. C. J. Zapata-Rodríguez gratefully acknowledges financial support from this institution.

References

- [1] C. J. R. Sheppard, C. J. Cogswell: Three-dimensional imaging in Confocal Microscopy. In T. Wilson (Ed.): *Confocal Microscopy*. pp. 155–161. Academic Press, London 1990.
- [2] Z. S. Hegedus: Annular pupil arrays. Application to confocal scanning. *Opt. Acta* **32** (1985) 815–826.
- [3] Z. S. Hegedus, V. Sarafis: Superresolving filters in: confocally scanned imaging systems. *J. Opt. Soc. Am. A* **3** (1986) 1892–1896.
- [4] J. Grochmalicki, E. R. Pike, J. G. Walker, M. Bertero, P. Boccacci, R. E. Davies: Superresolving masks for incoherent scanning microscopy. *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 1074–1077.
- [5] J. G. Walker, E. R. Pike, R. E. Davies, M. R. Young, G. I. Brakenhoff, M. Bertero: Superresolving scanning optical microscopy using holography optical processing. *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 59–64.
- [6] T. Wilson, S. J. Hewlett: The use of annular pupil plane filters to tune the imaging properties in confocal microscopy. *J. Mod. Opt.* **37** (1990) 2025–2046.
- [7] C. J. R. Sheppard, M. Gu: Improvement of axial resolution in confocal microscopy using an annular pupil. *Opt. Commun.* **84** (1991) 7–13.
- [8] M. Gu, C. J. R. Sheppard, H. Zhou: Optimization of axial resolution in confocal imaging using annular pupils. *Optik* **93** (1993) 87–90.
- [9] M. Martínez-Corral, P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, G. Saavedra: Tunable axial superresolution by annular binary filters. Application to confocal microscopy. *Opt. Commun.* **114** (1995) 211–218.
- [10] C. J. R. Sheppard, A. Choudhury: Image formation in the scanning microscopy. *Opt. Acta* **24** (1977) 1051–1073.
- [11] J. Ojeda-Castañeda, M. Martínez-Corral, P. Andrés, A. Pons: Strehl ratio versus defocus for noncentrally obscured pupils. *Appl. Opt.* **33** (1994) 7611–7616.
- [12] C. J. R. Sheppard, Z. S. Hegedus: Axial behavior of pupil-plane filters. *J. Opt. Soc. Am. A* **5** (1988) 643–647.
- [13] S. Weissbach, F. Wyrowski: Error diffusion procedure: Theory and applications in optical signal processing. *Appl. Opt.* **31** (1992) 2518–2534.
- [14] M. Kowalczyk, M. Martínez-Corral, T. Cichocki, P. Andrés: One-dimensional error-diffusion technique adapted for binarization of rotationally symmetric pupil filters. *Opt. Commun.* **114** (1995) 211–218.

Publicación VIII

**Asymmetric apodization in confocal
scanning systems**

Applied Optics **37**, pp. 8206–8214 (1998)

Asymmetric apodization in confocal scanning systems

Marek Kowalczyk, Carlos Javier Zapata-Rodriguez, and Manuel Martínez-Corral

A new class of superresolution pairs of pupil filters for three-dimensional, two-pupil confocal imaging is proposed. A distinctive feature of these filters is the asymmetry of their impulse response. For synthesizing the amplitude transmittance of such filters the Fourier transform properties of Hermitian functions are employed. It is shown that, with simple phase-only filters that belong to the class in question, either axial or unidirectional lateral superresolution is achieved. © 1998 Optical Society of America

OCIS codes: 220.1230, 180.1790, 050.1970.

1. Introduction

In the vast majority of cases the point-spread function (PSF) of an aberration-free optical imaging system is rotationally symmetric or it has at least two axes of symmetry. Nevertheless, in some systems the PSF can be made asymmetric on purpose. For example, Cheng and Siu¹ and Siu *et al.*² used this technique to achieve suppression of the sidelobes in the PSF (apodization). Here we use asymmetric PSF's in subsystems of a confocal imaging arrangement to narrow the central maximum in the PSF of the whole system (superresolution). In what follows, we use the term apodization in a wide sense, i.e., for any modification of the pupil function (coherent transfer function) aimed at molding the PSF, unless it would lead to ambiguity.

From Fourier transform theory we know that to obtain an asymmetric PSF it is convenient to use either Hermitian or anti-Hermitian pupil functions.³ In fact, Cheng and Siu¹ and Siu *et al.*² chose highly Hermitian pupil functions to apodize both slit and circular pupils, although they did not describe them as Hermitian. In Refs. 1 and 2 it was shown that asymmetric PSF's have a good side in which low sidelobes and a steep principal maximum are achieved at the cost of their worsening on the bad side. Simi-

larly, as we see below, asymmetric superresolution PSF's have their good and bad sides.

In this paper we show that, for some Hermitian pupils placed in both the illuminating and the collecting sets of a confocal imaging system, the problem of a bad side can be considerably relieved. It is also shown that, when we deal with the axial behavior of the three-dimensional (3-D) PSF of a confocal system, this function can be made symmetric and both of its sides are good, irrespective of the fact that PSF's of the collecting and the illuminating sets are asymmetric functions of the axial coordinate. To demonstrate this, we propose certain Hermitian superresolution pupil functions.

2. Lateral Apodization

In this section we consider a coherent (i.e., with a point detector) confocal imaging arrangement that is a typical scheme of, for example, a confocal scanning microscope.⁴ In Fig. 1 a basic version of such an arrangement, *viz.*, a transmission-mode microscope, is shown. A point source S of a narrow-band light of wavelength λ , e.g., a TEM₀₀ laser beam focused on a pinhole, is imaged by an illuminating system, which consists of lenses L_{i1} and L_{i2} and a pupil filter P_1 , onto an object O . The object is characterized by its amplitude transmittance $t(x_0, y_0)$. The collecting system L_{c1} , L_{c2} , and P_2 images the illuminated spot of the object in the conjugated detector plane (x_2, y_2) . When the object is scanned in the (x_0, y_0) plane the signal detected by a point detector D placed on the axis is processed by corresponding electronics and software, and finally the image of the object is displayed on a TV monitor. The spatial resolution of the image depends on both the PSF $h_1(x_0, y_0)$ of the illuminating system and the PSF $h_2(x_2, y_2)$ of the

M. Kowalczyk is with the Instytut Geofizyki, Uniwersytet Warszawski, Pasteura 7, 02-093, Warszawa, Poland. C. J. Zapata-Rodriguez and M. Martínez-Corral are with the Departamento de Óptica, Universidad de Valencia, 46100 Burjassot, Spain. The e-mail address for C. J. Zapata-Rodriguez is carlos.zapata@uv.es.

Received 16 March 1998.

0003-6935/98/358206-09\$15.00/0

© 1998 Optical Society of America

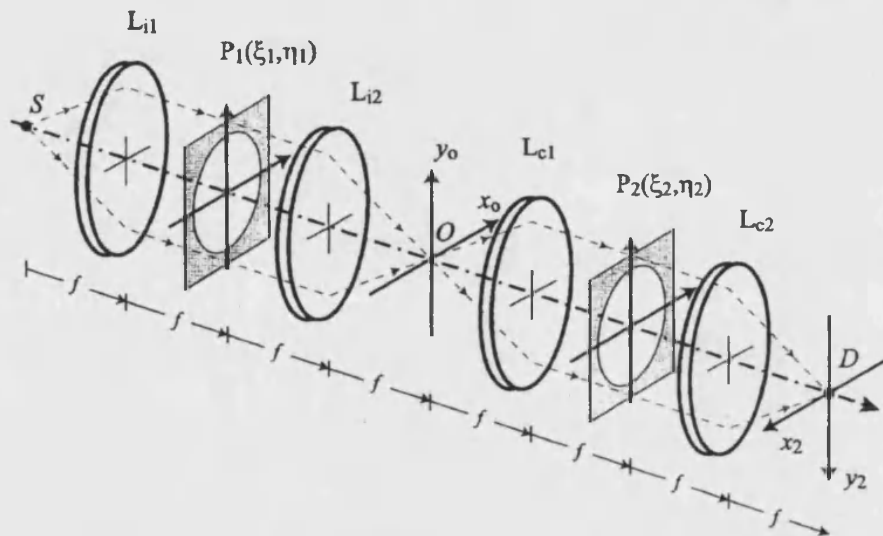


Fig. 1. Optical scheme of a transmission-mode confocal scanning microscope: $L_{11}, L_{12}, L_{c1}, L_{c2}$: lenses of focal length f ; P_1, P_2 : pupil filters; O : object, D : point detector; S : point source.

collecting system. The PSF's h_1 and h_2 are as follows:

$$h_1(x_0, y_0) = \int_{-x}^x \int_{-y}^y P_1(\xi_1, \eta_1) \times \exp\left[i \frac{k}{f} (\xi_1 x_0 + \eta_1 y_0)\right] d\xi_1 d\eta_1, \quad (1)$$

$$h_2(x_2, y_2) = \int_{-x}^x \int_{-y}^y P_2(\xi_2, \eta_2) \times \exp\left[-i \frac{k}{f} (\xi_2 x_2 + \eta_2 y_2)\right] d\xi_2 d\eta_2, \quad (2)$$

where $P_1(\xi_1, \eta_1)$ and $P_2(\xi_2, \eta_2)$ are the pupil functions, i.e., the amplitude transmittances, of pupil filters P_1 and P_2 , respectively, $k = 2\pi/\lambda$ is the wave number of the radiation, and f is the focal length. Let us assume that during the scanning process the point $(x_0 = x_s, y_0 = y_s)$ of the original, i.e., untranslated, object is placed on axis. Thus the origin of the object is now at the point $(x_0 = -x_s, y_0 = -y_s)$, and the object is described by the function $t(x_0 + x_s, y_0 + y_s)$. In this position the amplitude distribution $U(x_2, y_2)$ in the detector plane of the transmission-mode system can be written as the convolution of the amplitude in the object plane $h_1(x_0, y_0)t(x_0 + x_s, y_0 + y_s)$ with $h_2(x_2, y_2)$:

$$U(x_2, y_2; x_s, y_s) = \int_{-x}^x \int_{-y}^y h_1(x_0, y_0)t(x_0 + x_s, y_0 + y_s) h_2(x_2 - x_0, y_2 - y_0) dx_0 dy_0, \quad (3)$$

where the unit magnification of the system is assumed. After a change of variables, $-x_0, -y_0 \rightarrow x_0, y_0$, the intensity detected by a point detector at $x_2 = y_2 = 0$ is

$$I(x_s, y_s) = \left| \int_{-x}^x \int_{-y}^y h_1(-x_0, -y_0)t(-x_0 + x_s, -y_0 + y_s) \times h_2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right|^2. \quad (4)$$

With the definition

$$h_1(x_0, y_0) = h_1(-x_0, -y_0) = \int_{-x}^x \int_{-y}^y P_1(\xi_1, \eta_1) \exp\left[-i \frac{k}{f} (\xi_1 x_0 + \eta_1 y_0)\right] \times d\xi_1 d\eta_1, \quad (5)$$

i.e., with both h_2 and h_1 defined as minus Fourier transforms of the corresponding pupil functions, the detected intensity becomes

$$I(x_s, y_s) = \left| \int_{-x}^x \int_{-y}^y h_1(x_0, y_0)t(x_s - x_0, y_s - y_0) \times h_2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right|^2 = |[h_1(x_s, y_s)h_2(x_s, y_s)] \otimes t(x_s, y_s)|^2, \quad (6)$$

where the symbol \otimes denotes the convolution operation. Relation (6) was derived previously under the assumption that $h_q(q = 1; 2)$ are even functions (e.g., Ref. 5). In view of the above reasoning this

assumption seems superfluous. From Eq. (6) we can see that the image intensity of a point object, e.g., a pinhole in an opaque screen, described by a Dirac delta function, i.e., the PSF of the whole confocal system, is given by

$$\text{PSF}(x_s, y_s) = |h_1(x_s, y_s)h_2(x_s, y_s)|^2 \quad (7)$$

The same result holds for the reflection-mode system. Because of factorization of the amplitude impulse response (AIR) into h_1 and h_2 , one has more freedom to shape the PSF of the confocal scanning system than with a classical system.⁶ Also, in the case of confocal fluorescence microscopy, in which the illuminating beam induces the fluorescence of an autofluorescent or suitably prepared object, a similar factorization takes place.⁷ As a result of the incoherence of the fluorescent light, we have

$$I(x_s, y_s) = |h_1(x_s, y_s)h_2(x_s, y_s)|^2 \otimes F(x_s, y_s), \quad (8)$$

where $F(x_s, y_s)$ stands for the spatial distribution of the fluorescence generation and, for simplicity, we assume that the wavelength of the fluorescent light equals that of the illuminating beam.

If P_1 and P_2 form a pair of complex-conjugated Hermitian pupil functions, i.e., $P_1^* = P_2$, $\text{Re}P_q$ is even, and $\text{Im}P_q$ is odd, then h_q are real and asymmetric, and the following holds:

$$\begin{aligned} h_1(x_s, y_s)h_2(x_s, y_s) &= h_1(x_s, y_s)h_1(-x_s, -y_s) \\ &= h_2(-x_s, -y_s)h_2(x_s, y_s), \end{aligned} \quad (9)$$

which means that for such a pair of pupil filters the PSF of the confocal system is symmetric with respect to the x and the y axes.

To proceed further, we specify the form of P_q , as follows:

$$\begin{aligned} P_q(\xi_q, \eta_q) &= \{H(\xi_q)\exp[(-1)^q i\phi] + H(-\xi_q) \\ &\times \exp[(-1)^{q+1} i\phi]\} \left(\text{circ} \frac{r_q}{r_0} - \text{circ} \frac{r_q}{\epsilon r_0} \right) \\ &+ \text{circ} \frac{r_q}{\epsilon r_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

where H is a Heaviside unit step function,³ ϕ is the phase shift involved ($-\pi < \phi < \pi$), r_0 is the radius of the pupil, $r_q = (\xi_q^2 + \eta_q^2)^{1/2}$, and ϵ is a dimensionless coefficient ($0 < \epsilon < 1$). Thus we consider phase-only three-level pupils with a real inner disk and complex-conjugated outer semiannuli (Fig. 2). The same geometry for the pupil was assumed by Cheng and Siu.¹ For such pupils the functions h_q can be calculated analytically by means of known formulas for the Fraunhofer diffraction by a semicircular aperture.⁸ Nevertheless, we found that numerical calculation by means of the fast Fourier transform was more practical, as the closed-form result is expressed in terms of incomplete Struve functions that are not included in standard mathematical packages such as, for example, MATLAB or MATHEMATICA.

With the trial-and-error method, we found the

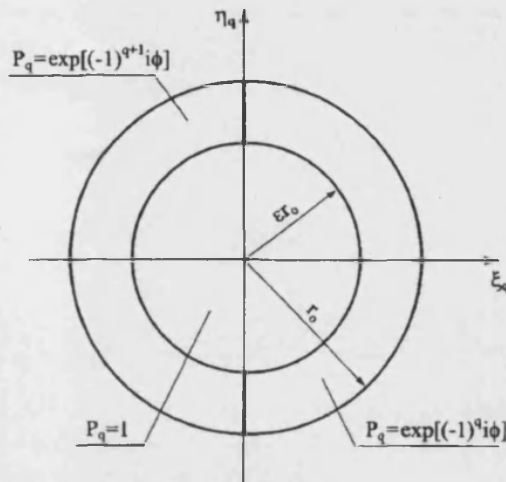


Fig. 2. General scheme of the lateral-resolution pupil filters.

phase shift of $\phi = \pi/3$ to be one for which the super-resolution of the system can clearly be demonstrated. To choose ϵ , we drew h_1^2 and $(h_1 h_2)^2$ as the functions of two variables: x_s and ϵ for $y_s = 0$ and $\phi = \pi/3$. For each value of ϵ , the cross sections of the PSF's were normalized so that they reached unity at the absolute-maximum point. The gray-scale representations of those functions are shown in Fig. 3. It can be seen that the asymmetry of h_q increases as ϵ decreases and that a value of ϵ equal to approximately 0.7 results in a noticeable narrowing of the central maximum of $(h_1 h_2)^2$ and in small sidelobes. In Fig. 4 the main cross sections of $h_1^2(x_s, y_s; \pi/3, 0.7)$ and $h_1^2(x_s, y_s; \pi/3, 0.7)h_2^2(x_s, y_s; \pi/3, 0.7)$ are presented. It can be seen that, unlike in nonconfocal systems, the use of Hermitian pupils in confocal ones yields a PSF that has two perpendicular axes of symmetry. Along one axis the system demonstrates the desired properties, whereas along the other the system behaves in an even worse way than the nonapodized one. Thus here we should not speak of the good and the bad side of the PSF but rather of the good and the bad directions. In other words, we have two good sides and two bad sides. It should be noted that the above is not an inherent feature of any confocal system with Hermitian pupils. Such behavior of the system should be attributed to the fact that we chose a pair of complex-conjugated pupils. For example, for Hermitian pupils such that $P_1 = P_2$, the PSF of the confocal system will be asymmetric.

In the particular case of the pupil functions defined by Eq. (10) in which $\phi = \pi/3$ and $\epsilon = 0.7$, superresolution along the x direction and small losses of energy (the Strehl ratio equals approximately 0.31) are experienced. Therefore the system could be especially useful for the imaging of highly directional patterns, e.g., diffraction gratings or muscle tissue. The superresolution properties of the confocal system in which the proposed pupil filters are placed are pre-

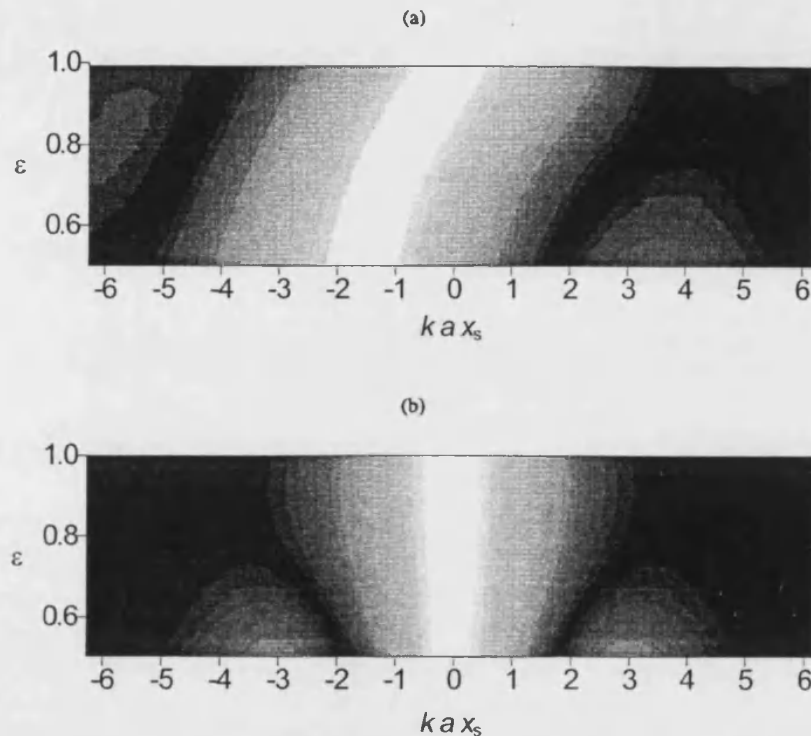


Fig. 3. Nonlinear gray-scale representations of (a) $N_1(\epsilon)h_1^2(x_s, 0; \pi/3, \epsilon)$ and (b) $N_2(\epsilon)h_1^2(x_s, 0; \pi/3, \epsilon) h_2^2(x_s, 0; \pi/3, \epsilon)$. N_1, N_2 : normalization factors. A one-sided suppression of the sidelobes, as described in Ref. 1, is observed in (a) for $\epsilon \approx 0.9$.

sented in Fig. 5, which shows images of two point sources of the fluorescent radiation separated by a normalized distance d and compares them with those for a nonapodized system. The resultant intensity is summed up on an intensity basis. It can be seen that, for two incoherent point sources located along the good direction and separated by the classical Rayleigh distance $d = 0.610$, the value of the intensity in the central minimum is considerably smaller than approximately 0.8, which is typical for nonconfocal systems. This occurs for both apodized and nonapodized systems. Such an advantage in spatial resolution is typical for confocal scanning imagery. For a confocal system that is apodized with the pupil filters proposed here, the value of 0.8 is achieved for values of d as small as 0.375.

3. Axial Apodization

A distinctive feature of coherent confocal imaging is its ability to provide 3-D images of 3-D objects.⁹ Therefore the axial behavior of a 3-D PSF is of interest because it represents a certain measure of the spatial resolution along the axis of the system. Also, this resolution can be improved by means of adequately designed pupil filters.¹⁰⁻¹² As the axial behavior of the 3-D PSF is governed by the zero-order circular harmonic of the pupil function,¹³ which for a rotationally symmetric pupil is identical to the pupil

function itself, we can restrict the analysis to rotationally symmetric pupils without loss of generality.

Let us introduce a normalized radial coordinate ρ_q in the pupil planes and cylindrical optical coordinates (u, v) in the 3-D confocal region as follows:

$$\rho_q = r_q/r_0, \quad (11)$$

$$v = k(x_s^2 + y_s^2)^{1/2} \sin(a), \quad (12)$$

$$u = 4kz_s \sin^2(a/2), \quad (13)$$

where a is the angular aperture of the illuminating and the collecting optics and z_s is the actual axial scanning coordinate whose origin coincides with the confocal point. The 3-D AIR $h_1(v, u)$ of the illuminating set is related to the pupil function by the following integral transform¹⁴:

$$h_1(v, u) = 2 \int_0^1 P_1(\rho_1) \exp\left(\frac{1}{2} iu\rho_1^2\right) J_0(v\rho_1) \rho_1 d\rho_1. \quad (14)$$

The relation that defines the 3-D AIR of the collecting set depends on whether we deal with a transmission-mode or a reflection-mode system:

$$h_2(v, u) = 2 \int_0^1 P_2(\rho_2) \exp\left(+\frac{1}{2} iu\rho_2^2\right) J_0(v\rho_2) \rho_2 d\rho_2 \quad (15)$$

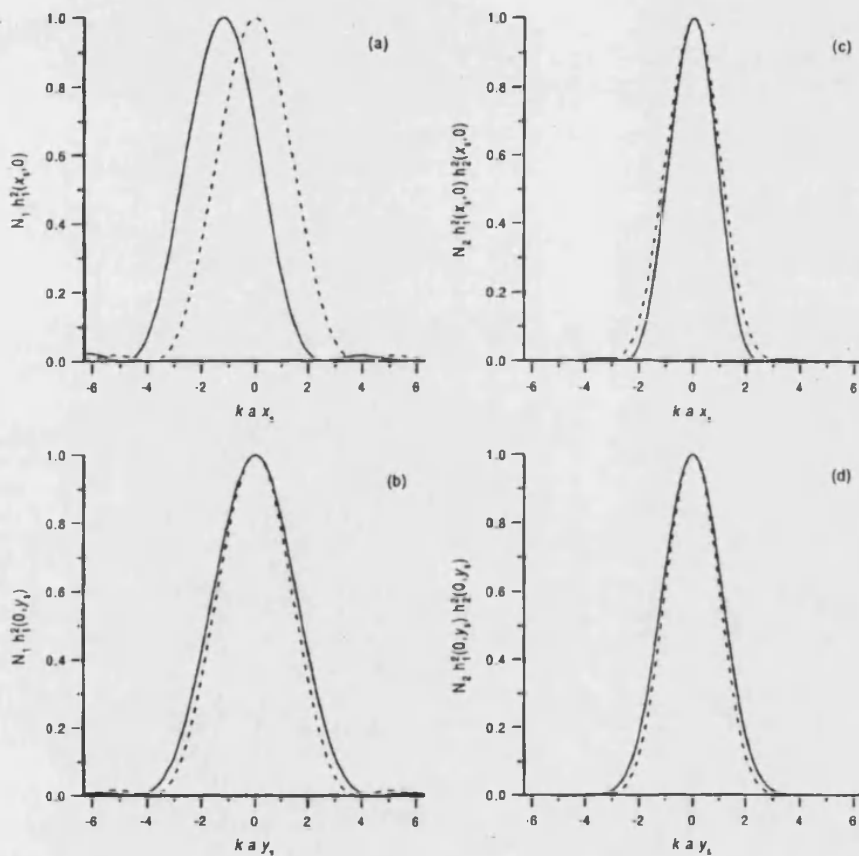


Fig. 4. Main cross sections of normalized h_1^2 and $(h_1 h_2)^2$ along (a) and (b) the good and (c) and (d) the bad directions for $\phi = \pi/3$ and $\epsilon = 0.7$. The dashed curves correspond to a nonapodized system.

for a reflection system and

$$h_2(v, u) = 2 \int_0^{11} P_2(\rho_2) \exp\left(-\frac{1}{2} i u \rho_2^2\right) J_0(v \rho_2) \rho_2 d\rho_2 \quad (16)$$

for a transmission system. The 3-D PSF, i.e., the 3-D image of a point object, is given by

$$\text{PSF}(v, u) = |h_1(v, u) h_2(v, u)|^2. \quad (17)$$

For a reflection-mode system with two complex-conjugated pupils, Eqs. (14), (15), and (17) yield

$$\begin{aligned} \text{PSF}_r(v, u) &= |h_1(v, u) h_1^*(v, -u)|^2 \\ &= |h_1(v, u) h_1(v, -u)|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

To maintain the relation of Eq. (18) in a transmission-mode system, i.e.,

$$\text{PSF}_t(v, u) = |h_1(v, u) h_1(v, -u)|^2, \quad (19)$$

we have to use a pair of identical pupil filters, which is produced by Eqs. (14), (16), and (17). To analyze the axial behavior of the PSF_t and the PSF_r , we use a

value of $v = 0$ in relations (18) and (19). In particular, we have

$$\text{PSF}_r(u) = \text{PSF}_t(u) = |h_1(u) h_1(-u)|^2, \quad (20)$$

where $h_q(u) \equiv h_q(0, u)$.

To benefit from the above factorization and from properties of the Hermitian functions, we need to establish a Fourier transform relation between the pupil functions and the corresponding axial AIR's. This can be done with the following mapping in the pupil planes:

$$\rho_q^2 - \frac{1}{2} = s_q. \quad (21)$$

With the mapping of Eq. (21) and with $v = 0$, we can rewrite Eq. (14) as

$$h_1(u) = \int_{-0.5}^{0.5} g_1(s_1) \exp(i u s_1 / 2) ds_1, \quad (22)$$

in which an unessential phase factor is neglected and $g_1(s_1) \equiv P_1[\rho_1(s_1)]$ is a mapped pupil function that is

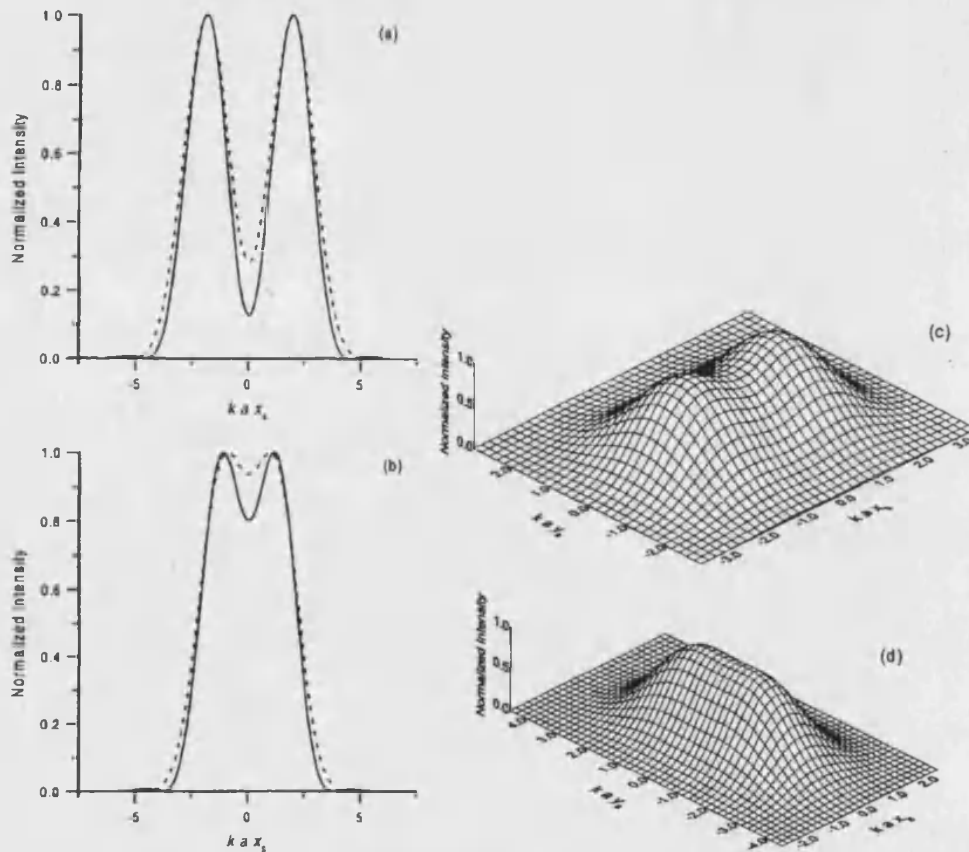


Fig. 5. Images of two fluorescent point sources separated by a normalized distance d for points placed along (a), (b), and (c) the good and (d) the bad directions. Main cross sections along the good, i.e., x_1 , direction for (a) $d = 0.610$ and (b) $d = 0.375$. Pseudo 3-D plots for (c) and (d) $d = 0.375$. The dashed curves correspond to a nonapodized system.

identically equal to zero for $|s_1| > 0.5$. Equations (20) and (22) yield

$$\begin{aligned} \text{PSF}_t(u) &= \text{PSF}_t(u) \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} g_1(s_1) \exp(+ius_1/2) ds_1 \\ &\quad \times \int_{-0.5}^{0.5} g_1(s_2) \exp(-ius_2/2) ds_2 \Big|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Therefore we express the axial behavior of the 3-D PSF in terms of the Fourier transform of $g_1(s)$. Thus in the analysis to follow we consider such pupil functions $P(p)$ that become Hermitian when the mapping of Eq. (21) is completed. It is worth noting that the Fourier transform relation of Eq. (22) allows us to apply the results obtained previously for one-dimensional (1-D) asymmetric lateral apodization (slit pupils)^{1,2} to axial apodization, as there is a direct correspondence between mapped pupil functions $g(s)$ and 1-D actual pupil functions.

To design a superresolution pupil function $P_1(\rho_1)$ properly, we should take into account the following relations between $g(s)$ and $h(u)$, which hold for any Hermitian $g(s)$:

$$h(0) = \int_{-x}^x g_e(s) ds, \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial h(u)}{\partial u} \right|_{u=0} = -\frac{1}{2} \int_{-x}^x g_o(s) s ds, \quad (25)$$

where $g_e(s)$ and $g_o(s)$ are the real and the imaginary parts of $g(s)$, respectively, with $g_e(s)$ an even and $g_o(s)$ an odd function. As $P_q(\rho_q)$ must be a legitimate pupil function, we have to add the restriction

$$g_e^2(s) + g_o^2(s) \leq 1. \quad (26)$$

Good superresolution performance of $h(u)h(-u)$ can be attributed to a high value of the first derivative of $h(u)$ at the origin, hence by virtue of Eq. (25) to the first moment of $g_o(s)$, which favors a concentration of

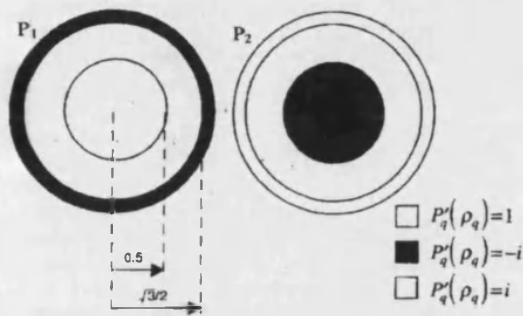


Fig. 6 Superresolution pair of complex-conjugate three-zone pupils.

$g_o(s)$ close to $s = \pm 0.5$, whereas the brightness in the image of a point object is directly proportional to the average value of $g_o(s)$. Maximum brightness is obtained for $g_o(s) \equiv 0$ for which $h(u)$ takes a zero slope at the origin. Similarly, the maximum slope is obtained for $g_o(s) = \text{sgn}(\pm s)\text{rect}(s)$, for which $g_o(s) \equiv 0$ and $h(0) = 0$. Thus the requirement of obtaining high brightness and good superresolution is contradictory, and certain compromises should be established. Taking into account the above considerations and the requirement of technological simplicity, we propose the following mapped phase-only three-level pupil function $g_1'(s_1)$:

$$g_1'(s_1) = \begin{cases} i & -0.5 \leq s_1 < -0.25 \\ 1 & -0.25 \leq s_1 < 0.25 \\ -i & 0.25 \leq s_1 \leq 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

The actual three-zone pupils P_1 and P_2 generated by $g_1'(s_1)$, which should be used in a reflection-mode system, are shown in Fig. 6. The axial behavior of the impulse response of a conventional imaging system with a pupil function $P_1'(\rho_1)$ and that of a two-pupil confocal scanning system are presented in Figs. 7(a) and 7(b), respectively. It is seen that improvement of the axial resolution is accompanied by an increment of the sidelobes, which is a usual effect observed in superresolution systems. Using the full width at half-maximum (FWHM) as a merit function, we can state that, by means of simple Hermitian pupils, one can achieve a 30% gain in axial resolution.

Another important characteristic of confocal imaging is its capacity for sectioning. In the case of a transmission-mode system the so-called integrated intensity is a measure of this capacity. The integrated intensity is defined as follows⁵:

$$I_{\text{int}}(u) = 2 \int_0^\infty |h_1(v, u)h_2(v, u)|^2 v dv. \quad (28)$$

Making use of Eqs. (14), (16), (21), and (27), we calculated numerically the integrated intensity for a transmission-mode system with two pupils P_1' . The

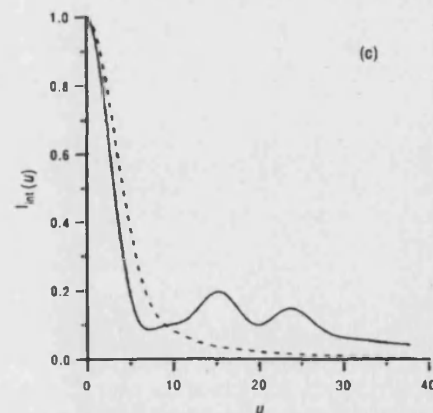
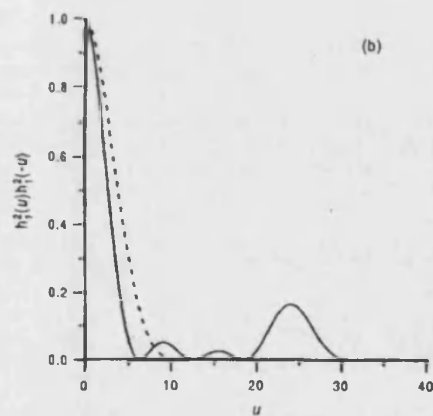
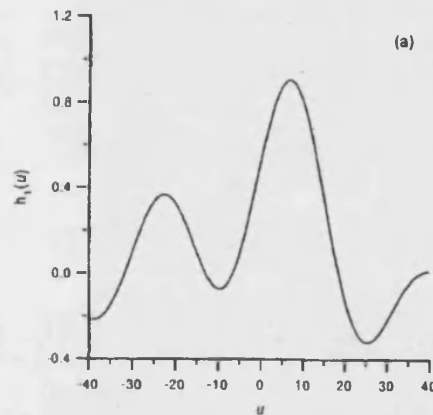


Fig. 7. Normalized axial distributions in the image of a point source: (a) the light amplitude in a conventional imaging system apodized with the pupil function P_1' and (b) the light intensity in a two-pupil confocal scanning system apodized with P_1' and $(P_1')^*$ (reflection mode) or with either two pupil functions P_1' or two pupil functions $(P_1')^*$ (transmission mode); (c) integrated intensity for an axially apodized system. In (a)–(c), the dashed curves indicate the corresponding distributions for a nonapodized system.

result is presented in Fig. 7(c). A 30% gain in the sectioning capacity (in terms of the FWHM) can be seen. In reflection-mode systems, we use instead the confocal signal $I(u)$ and not the integrated intensity. The confocal signal is, by definition, the signal received by the point detector when a perfect reflector perpendicular to the axis of the illuminating system moves axially in the vicinity of the confocal point. This magnitude can be expressed in terms of mapped pupil functions as follows¹⁴:

$$I(u) = \left| \int_{-0.5}^{0.5} g_1(s)g_2(s)\exp(ius)ds \right|^2. \quad (29)$$

Because $g_1(s) = g_2^*(s)$ and $|g_1(s)| = |g_2(s)| = 1$, Eq. (29) reduces to that for the nonapodized system. Thus no gain in confocal signal is obtained. This holds for any pair of complex-conjugated purely phase pupils. On the other hand, it can be shown that, for confocal fluorescence imaging, the confocal signal is identical to the integrated intensity.¹⁵ This is because in the latter case we use the concept of a uniform-fluorescence flat surface perpendicular to the axis and not that of a perfect reflector. Therefore in 3-D confocal fluorescence imaging we benefit from the improved sectioning capacity of the proposed pupil filters in both transmission- and reflection-mode systems.

4. Discussion and Conclusions

The superresolution achieved with the two specific filters proposed here is significant, although their pupil functions were not optimized in a rigorous manner. Therefore further improvement concerning the reduction of the spot size of the PSF or an increase of the Strehl ratio is expected. It is worth noting that, for the pupil filters in question, an optimization procedure should take into account the following constraints, which do not appear in classical apodization problems: an optimized AIR of the confocal system must be a product of two real, asymmetric, but mutually symmetric, functions.

The asymmetric lateral PSF's considered here and in Refs. 1 and 2 resemble, to some extent, the PSF of a system with the aberration of coma. On the other hand, there are some essential differences between coma and asymmetric apodization. For example, coma does not affect the images of axial points, whereas asymmetric apodization does. Similarly, the asymmetry of the axial PSF should not be considered an aberration of defocus, unless one considers mapped pupil functions of the form $g(s_q) = \cos(As_q) + i \sin(As_q)$, which are Hermitian and by virtue of Eq. (21) yield the actual pupil functions $P(\rho_q) = \exp(-iA/2)\exp(iA\rho_q^2)$. In a defocused system the axial behavior of the PSF remains symmetric about the actual focus, whereas in general this is not the case if asymmetric axial apodization is concerned [Fig. 7(a)]. Nevertheless, the above remarks confirm the existence of a close relation between aberrations and apodization,¹⁶ especially if one deals with phase-only apodizers. Moreover, even in nonconfocal systems

some aberrations can cause the same effects as do superresolution filters.¹⁷

In a recent study by Sales and Morris¹⁸ it was shown that multilevel phase-only superresolution diffractive elements not only benefit from advances made in diffractive optics technology but also demonstrate many advantages with respect to other superresolution elements. It is worth mentioning the flexibility of design, the simplicity of the optimization procedures, superresolution performance, and tolerances to fabrication errors. Thus our choice of using phase-only three-zone three-level pupils, which we made with partially heuristic reasoning, finds additional justification.

In view of our results and those presented in Refs. 1 and 2, it seems that the most promising area of application of asymmetric apodization is two-pupil confocal scanning systems and, in particular, confocal microscopes.

This study was partially supported by Komitet Badań Naukowych, Poland, under contracts 670/DZ/97 and 1313A1/DZ/97. M. Martínez-Corral gratefully acknowledges financial support from the Dirección General de Investigación Científica y Técnica (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. C. J. Zapata-Rodríguez also gratefully acknowledges financial support from that institution.

References

1. L. Cheng and G. G. Siu, "Asymmetric apodization," *Maes. Sci. Technol.* **2**, 198-202 (1991).
2. G. G. Siu, L. Cheng, D. S. Chiu, and K. S. Chang, "Improved side-lobe suppression in asymmetric apodization," *J. Phys. D: Appl. Phys.* **27**, 459-463 (1994).
3. R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications* (McGraw-Hill, New York, 1965).
4. T. Wilson, "Confocal microscopy," in *Confocal Microscopy*, T. Wilson, ed. (Academic, London, 1990), pp. 1-64.
5. T. Wilson and C. Sheppard, *Theory and Practice of Confocal Scanning Microscopy* (Academic, London, 1984).
6. Z. Hegedus, "Pupil filters in confocal imaging," in *Confocal Microscopy*, T. Wilson, ed. (Academic, London, 1990), pp. 171-183.
7. T. Wilson, "Optical aspects of confocal microscopy," in *Confocal Microscopy*, T. Wilson, ed. (Academic, London, 1990), pp. 93-141.
8. A. Barna, "Fraunhofer diffraction by semicircular apertures," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 122-123 (1977).
9. M. Gu, *Principles of Three-Dimensional Imaging in Confocal Microscopes* (World Scientific, Singapore, 1996).
10. M. Martínez-Corral, P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and G. Saavedra, "Tunable axial resolution by annular binary filters. Application to confocal microscopy," *Opt. Commun.* **119**, 491-498 (1995).
11. C. J. R. Sheppard, "Leaky annular pupils for improved axial imaging," *Optik (Stuttgart)* **99**, 32-34 (1995).
12. A. Magiera, "Transversal and axial gains in the confocal scanning microscope of leaky annular pupils," *Opt. Appl.* **26**, 57-60 (1996).
13. M. Martínez-Corral, P. Andrés, and J. Ojeda-Castañeda, "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils," *Appl. Opt.* **33**, 2223-2229 (1994).
14. C. J. R. Sheppard and C. J. Cogswell, "Three-dimensional

- imaging in confocal microscopy," in *Confocal Microscopy*, T. Wilson, ed. (Academic, London, 1990), pp. 143-169.
15. T. Wilson, "Optical sectioning in confocal fluorescent microscopes," *J. Microsc.* **154**, 143-156 (1988).
 16. J. P. Mills and B. J. Thompson, "Effect of aberrations and apodization on the performance of coherent optical systems I. The amplitude impulse response," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 694-703 (1986).
 17. H. Osterberg and L. W. Smith, "Defocusing images to increase resolution," *Science* **134**, 1193-1196 (1961).
 18. T. R. M. Sales and G. M. Morris, "Diffractive superresolution elements," *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 1637-1646 (1997).

Publicación IX

**Tunable optical sectioning in
confocal microscopy by use of
symmetrical defocusing and
apodization**

Applied Optics **37**, pp. 6914–6921 (1998)

Tunable optical sectioning in confocal microscopy by use of symmetrical defocusing and apodization

Manuel Martínez-Corral, Marek Kowalczyk, Carlos J. Zapata-Rodríguez, and Pedro Andrés

We present two novel optical methods to achieve a significant improvement in the optical-sectioning capacity of confocal scanning microscopes. The techniques, whose real power is the simplicity with which they can be implemented, consist of a suitable combination of symmetrical defocusing with two different manners of apodizing both parts of the confocal architecture. It is shown that the proposed techniques are useful in both the bright-field and the fluorescence modes and for reflection and transmission geometries. © 1998 Optical Society of America

OCIS codes: 180.1790, 220.1230, 100.6640.

1. Introduction

The most important advantage of confocal scanning microscopy (CSM) over conventional microscopy is its optical-sectioning capacity.¹ Optical sectioning refers to the attenuation of scattered and reflected light from parts of the object not in the focal plane, thus enhancing the visibility of details of interest. Thus the sectioning capacity is important because it permits the observation of three-dimensional (3-D) objects.

Over the past few years several efforts have been undertaken to improve the two-point resolution of confocal scanning microscopes (CSM's) in the transverse direction.²⁻⁷ However, the irradiance point-spread function (IPSF) is a volume element with an axial extent that, depending on the numerical aperture, is approximately 3 times higher than the radial extent. Thus the axial resolution is one third or less than that in the lateral direction. Therefore the enhancement of the axial resolution of CSM's has always been of considerable interest. As in the transverse direction, the axial two-point resolution can be defined in terms of the Rayleigh criterion.⁸

Therefore two points are separated axially only if they are far enough apart to display an approximately 26% dip between the peaks of their corresponding irradiance patterns. An alternative criterion for comparing the axial resolutions of various systems is the full width at half-maximum (FWHM) for the axial IPSF. This figure, which is closely related to the Rayleigh criterion, is used widely in both analytical and experimental studies. Several methods for enhancing the axial resolution by a narrowing of the FWHM were recently suggested. In this context the use of binary filters composed of one⁹ or two¹⁰ annuli has provided interesting results. A different approach to this problem, the so-called 4Pi confocal architecture,¹¹ is based on the coherent illumination of the fluorescent sample from both sides. This interference process in combination with point detection leads to a great narrowing of the central lobe of the axial IPSF. However, this improvement cannot easily be exploited because of the great strength of the axial sidelobes.

Another approach for increasing the axial two-point resolution, specifically in the fluorescence mode, is the so-called confocal theta-microscopy technique.¹² This technique, which is based on detection orthogonal to the illumination axis, permits the reduction of the dimensions of the central lobe of the axial IPSF by a factor of approximately 3 or even more if the confocal system is apodized with annular apertures.¹³

In this paper we present an optical method for improving the sectioning capacity of CSM's. The technique is useful in bright-field and fluorescence CSM's and for reflection and transmission geometries.

M. Martínez-Corral (manuel.martinez@uv.es), C. J. Zapata-Rodríguez, and P. Andrés are with the Departamento de Óptica, Universidad de Valencia, E-46100 Burjassot, Spain. M. Kowalczyk is with the Institute of Geophysics, Warsaw University, Pasteura 07, 02-093 Warsaw, Poland.

Received 13 November 1997; revised manuscript received 24 April 1998.

0003-6935/98/296914-08\$15.00/0

© 1998 Optical Society of America

tries. Our approach is based on suitably apodizing and symmetrically defocusing the two arms of the confocal architecture. It is shown that, by the combination of an adequate binary axially superresolving apodization with variable symmetrical defocusing, the width of the central lobe of the axial IPSF can be tuned. This width can indeed be reduced by a factor 2 with no significant increase in the strength of the secondary lobes, which is quite important for axial superresolution in the sense of the Rayleigh criterion.

In many situations stacked object layers must be separated. To quantify the axial resolution of planes perpendicular to the optical axis it is necessary to calculate the response of the system to an axially scanned thin planar fluorescent layer. We show below that the proposed method provides a significant narrowing of the FWHM of such a response. Therefore we conclude that the technique allows an important increase in the optical-sectioning capacity for 3-D information.

In a further step we present a new kind of axial apodization that is specifically suited to combination with symmetrical defocusing in CSM's. What we call destructive-interference apodization provides an axial response with zero at the focal point but twin narrow sidelobes. We show that, by the combination of this apodization with adequate symmetrical defocusing, a considerable improvement in optical-sectioning capacity can be obtained.

In Section 2 we analyze the effect of symmetrically defocusing both parts of the confocal architecture on the axial resolution of the device. In Section 3 we show that adequate combination of symmetrical defocusing with a proper axially superresolving apodization permits the optimization of the sectioning capacity of CSM's. In Section 4 we present a novel, to our knowledge, type of axial apodization—destructive-interference apodization—and show that its combination with symmetrical defocusing provides a quite good optical-sectioning capacity.

2. Symmetrical Defocusing

Let us start by considering the axial IPSF of a CSM after we consider cylindrical symmetry, that is¹

$$I(v=0, W_{20}) = |h_1(v=0, W_{20})|^2 |h_2(v=0, W_{20})|^2, \quad (1)$$

where it is assumed that the pupil functions of the two arms of the confocal setup have the same radial extent. In Eq. (1) v corresponds to the transverse coordinate expressed in optical units, whereas the axial position is specified in terms of the well-known

defocus coefficient W_{20} measured in units of wavelength. Furthermore,

$$h_1(v=0, W_{20}) = 2 \int_0^1 p_1(\rho) \exp(i2\pi W_{20} \rho^2) \rho d\rho \quad (2a)$$

represents the axial-amplitude point-spread function (PSF) of the illuminating system, where $p_1(\rho)$ is the pupil function, whereas

$$h_2(v=0, W_{20}) = 2 \int_0^1 p_2(\rho) \exp(\pm i2\pi W_{20} \rho^2) \rho d\rho \quad (2b)$$

represents the axial-amplitude PSF of the collecting set. The upper and lower signs correspond to the reflection and the transmission architectures, respectively.

Equations (2) can be rewritten in the form of a one-dimensional (1-D) Fourier transform if we perform the following geometrical mapping:

$$\zeta = \rho^2 - 0.5, \quad q(\zeta) = p(\rho). \quad (3)$$

If we now substitute Eq. (3) into Eqs. (2), we find that, except for an irrelevant premultiplication phase factor, the individual axial-amplitude PSF's can be described by

$$h_1(v=0, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q_1(\zeta) \exp(i2\pi W_{20} \zeta) d\zeta, \quad (4a)$$

$$h_2(v=0, W_{20}) = \int_{-0.5}^{0.5} q_2(\zeta) \exp(\pm i2\pi W_{20} \zeta) d\zeta. \quad (4b)$$

For the case of two circular pupils we have $q_1(\zeta) = q_2(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$, and the axial IPSF is given, according to Eqs. (1) and (4), by

$$I(v=0, W_{20}) = \text{sinc}^2(W_{20}) \text{sinc}^2(W_{20}) = \text{sinc}^4(W_{20}). \quad (5)$$

In comparison with the axial IPSF of a conventional microscope, the CSM's axial IPSF has suffered a 27% reduction in the FWHM and a 95% attenuation in the strength of the secondary lobes. Thus an important effect of two-point axial superresolution is achieved.

The two-point axial-resolution capacity of CSM's can easily be increased by a quite simple technique that takes advantage of the multiplicative character of the axial IPSF. The technique consists of symmetrically defocusing the two parts of the confocal architecture. In fact, the effect of symmetrical defocusing on the response of the system was already

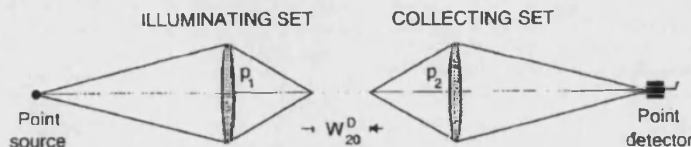


Fig. 1. Schematic layout of a symmetrically defocused transmission-mode CSM. The defocus parameter W_{20}^D gives a measure of the axial shifting of the focal points.

analyzed by other authors.¹⁴⁻¹⁶ From a practical point of view, symmetrical defocusing can easily be implemented either by a slight, controlled axial shift of the collecting set with respect to the illumination set or simply by a slight, symmetrical axial displacement of both the point source and the point detector. In both cases the displacement implies a symmetrical shift of the focal points, and therefore the system is no longer strictly confocal.

From a mathematical point of view, symmetrical defocusing implies a change in the mapped pupil functions, which are now given by

$$q_1'(\zeta) = q_1(\zeta) \exp\left(i2\pi \frac{W_{20}^D}{2} \zeta\right), \quad (6a)$$

$$q_2'(\zeta) = q_2(\zeta) \exp\left(\mp i2\pi \frac{W_{20}^D}{2} \zeta\right). \quad (6b)$$

The parameter W_{20}^D , which measures the induced longitudinal defocus in units of wavelength, can be either positive or negative (see Fig. 1).

Now the axial IPSF of this architecture is given by the product of two independent individual IPSF's that are axially shifted a distance W_{20}^D , that is,

$$\begin{aligned} I(v=0, W_{20}) &= |h_1'(v=0, W_{20})|^2 |h_2'(v=0, W_{20})|^2 \\ &= \left| \int_{-0.5}^{0.5} q_1(\zeta) \exp\left[i2\pi \left(W_{20} + \frac{W_{20}^D}{2}\right) \zeta\right] d\zeta \right|^2 \\ &\quad \times \left| \int_{-0.5}^{0.5} q_2(\zeta) \exp\left[\pm i2\pi \left(W_{20} - \frac{W_{20}^D}{2}\right) \zeta\right] d\zeta \right|^2 \\ &= \left| h_1\left(v=0, W_{20} + \frac{W_{20}^D}{2}\right) \right|^2 \\ &\quad \times \left| h_2\left(v=0, W_{20} - \frac{W_{20}^D}{2}\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

In the typical case of two circular pupils it is equal in both the reflection and the transmission architectures to

$$I(v=0, W_{20}) = \text{sinc}^2\left(W_{20} + \frac{W_{20}^D}{2}\right) \text{sinc}^2\left(W_{20} - \frac{W_{20}^D}{2}\right). \quad (8)$$

Equation (8) reveals that the axial IPSF of a non-apodized symmetrically defocused CSM is given by the product of two sinc^2 functions that, independently of the sign of W_{20}^D , are relatively shifted an axial distance of $|W_{20}^D|$ (see, for example, Fig. 2). When the product is performed an axial IPSF in which the width of the central lobe is precisely $\Delta W_{20} = 2 - |W_{20}^D|$ is obtained. In other words, the width of the core is now given by the distance between the first zero at the right-hand side of the axial IPSF shifted to the left and the first zero at the left-hand side of the other axial response. It is then clear that simply by continuous variation of the defocusing parameter

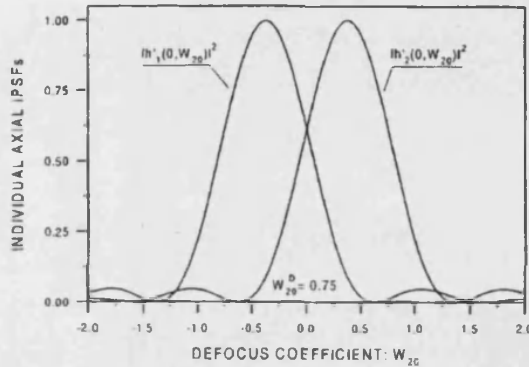


Fig. 2. Axial IPSF's corresponding to the illuminating and the collecting arms of a CSM under symmetrical defocusing of the magnitude of $W_{20}^D = 0.75$.

W_{20}^D , i.e., by gradual symmetrical defocusing of the CSM, it is possible to control at will the width of the axial IPSF core. To illustrate this effect, we have plotted in Fig. 3 the axial IPSF corresponding to some values of the defocusing parameter, including the strictly confocal architecture ($W_{20}^D = 0$). In this figure all the curves are normalized so that their peak value is unity, but in reality the detected irradiance peak drops as symmetrical defocusing increases according to $I(v=0, W_{20}=0) = \text{sinc}^4(W_{20}^D/2)$.

As can be seen from Fig. 3, while the symmetrical defocus increases, the central lobe of the IPSF becomes narrower. However, the relative strength of the sidelobes increases. Note that in this sense values of W_{20}^D higher than unity give rise to very large secondary sidelobes. This fact limits in practice the amount of symmetrical defocusing that can be used and therefore the improvement in two-point axial resolution that can be achieved with this method.

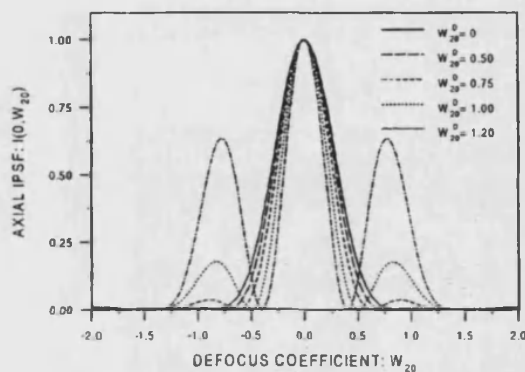


Fig. 3. Normalized axial IPSF corresponding to some symmetrically defocused CSM's. The solid curve corresponds to the strictly confocal architecture.

3. Annular Binary Apodization

As was established in Section 2, the symmetrical-defocusing technique provides a method for obtaining tunable improvement, between certain limits, in the axial resolution of CSM's. However, the technique presents a drawback: the increasing strength of the secondary lobes.

To overcome this drawback, we propose in this section the combination of symmetrical defocusing with using, in both arms of the confocal device, radially symmetric pupil filters that provide axial superresolution. Then we propose using one among the family of filters composed of two transparent annuli of the same area¹⁰ that has a mapped transmittance of

$$q(\zeta) = \text{rect} \left[\frac{\zeta + \frac{1}{2}(1-\epsilon)}{\epsilon} \right] + \text{rect} \left[\frac{\zeta - \frac{1}{2}(1-\epsilon)}{\epsilon} \right], \quad 0 < \epsilon < 0.5. \quad (9)$$

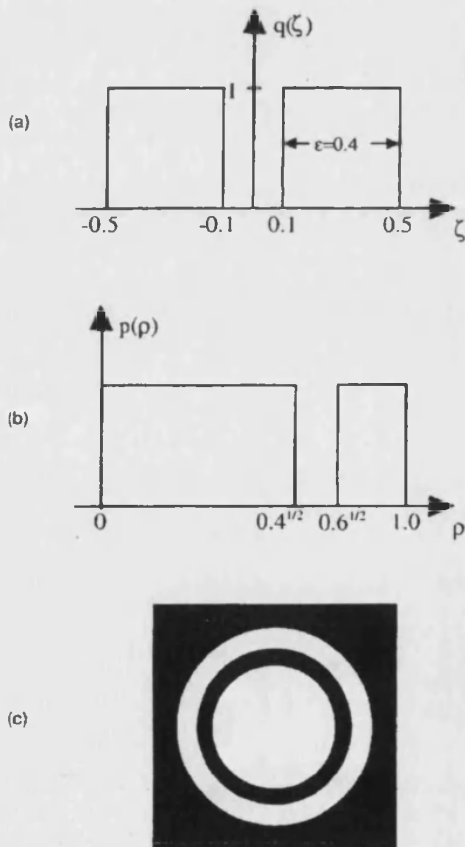


Fig. 4. Member of the family of axially superresolving pupil filters ($\epsilon = 0.4$): (a) ζ -space representation, (b) 1-D representation, and (c) actual 2-D representation.

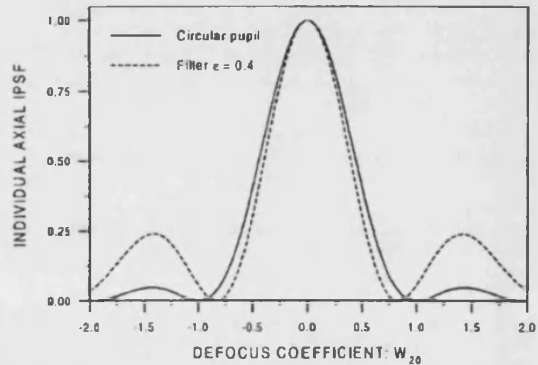


Fig. 5. Axial irradiance pattern corresponding to the filter shown in Fig. 4. As a result of the interference process a quite narrow central lobe is obtained. The solid curve corresponds to the axial response of a circular pupil.

The actual two-dimensional form is represented in Fig. 4.

These filters provide an axial response that is the result of the constructive interference between the waves proceeding through a circular and an annular aperture, both of the same area. Because the waves arrive in phase at the focal point, a narrow axial irradiance peak is obtained (see Fig. 5). This axial-interference process is, in some ways, similar to that produced in the 4Pi confocal mode.¹¹ Note that, because of the strength of the sidelobes, the use of these filters is not very useful in conventional imaging systems. However, when these filters are placed in a CSM the straightness of the sidelobes is reduced.¹⁰

Next the adequate combination of this apodization with symmetrical defocusing will permit us to obtain a reduction in the strength of the lateral lobes compared with those obtained simply by means of symmetrical defocusing. To illustrate this effect, we show in Fig. 6 the axial IPSF that corresponds to a confocal setup that combines symmetrical defocusing, $W_{20}^D = 2/3$, with the use of a pair of annular filters that have an aperture parameter of $\epsilon = 0.4$. Note from this figure that apodization has achieved a 30% reduction in the strength of the highest secondary lobe.

Thus we can establish that, whereas symmetrical defocusing permits us to tune the width of the central lobe of the irradiance response, the proposed apodization permits us to attenuate the strength of the secondary lobes. Therefore the combination of both techniques attains the effect of tunable axial superresolution.

The axially superresolving properties of the proposed arrangement are represented in Fig. 7. In this figure the irradiance images of two point sources separated by a normalized axial distance d , measured in units of defocus, are shown and compared with those for the strictly confocal setup. The resultant irradiance is summed up on an irradiance basis. In the strictly confocal setup two incoherent

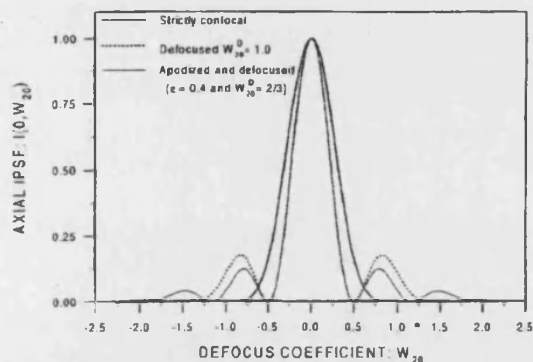


Fig. 6. Normalized axial IPSP corresponding to a suitably apodized, symmetrically defocused confocal device (light solid curve). The parameters of the setup are $\epsilon = 0.4$ and $W_{20}^D = 2/3$. The bold solid curve plots the axial response corresponding to a strictly confocal setup, whereas the dashed curve corresponds to the nonapodized but symmetrically defocused system ($W_{20}^D = 1$).

points separated by $d = 0.76$ [Fig. 7(a)] provide an axial-irradiance pattern with a 26% dip. The value of the irradiance in the central minimum is considerably smaller in the proposed apodized and defocused arrangement. The dip between peaks according to the Rayleigh criterion is achieved in the proposed arrangement when the two point sources are axially separated by $d = 0.54$ [Fig. 7(b)]. Therefore a 29% improvement in the axial resolution is achieved.

Up to this point we have analyzed the improvement in the two-point axial resolution that can be achieved with the defocusing technique. However, to make a more complete study on how the optical-sectioning capacity of CSM's is affected by the method, we need to analyze other interesting parameters. In this context it is quite interesting to study

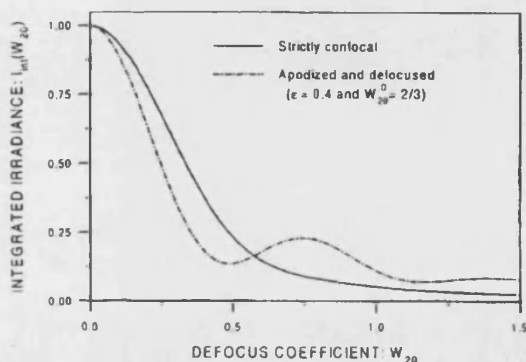


Fig. 8. Integrated-irradiance function corresponding to the setups under study.

the behavior of the so-called integrated-irradiance function, which is defined as¹

$$I_{\text{int}}(W_{20}) = \int_0^{\infty} I(v, W_{20}) v dv. \quad (10)$$

This parameter applies equally to the reflection and the transmission geometries and to the bright-field and the fluorescence modes. It gives us information on how the microscope discriminates against different parts of the object not in the focal plane.

In Fig. 8 we represent the integrated irradiance for the setups analyzed in Fig. 6. A 25% gain in sectioning capacity (in terms of the FWHM) is noticeable.

Another quite important parameter, related in this case to the behavior of the system when dealing with planar coherent objects, is the function known historically as $V(z)$. This function is meaningful for only the bright-field reflection mode. It is obtained by evaluation of the irradiance collected by the point

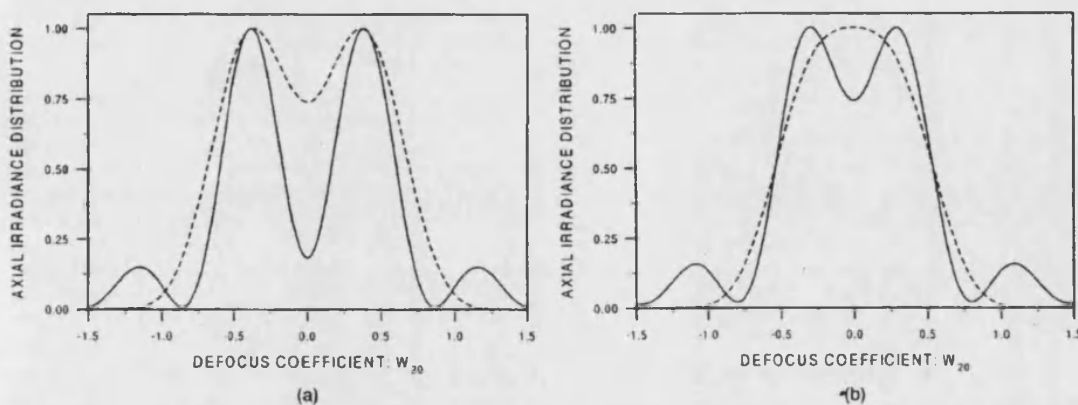


Fig. 7. Irradiance images of two point sources separated by the normalized axial distances (a) $d = 0.76$ and (b) $d = 0.54$. The dashed curves correspond to the strictly confocal arrangement.

detector when a perfect planar reflector that is placed perpendicularly to the optical axis of the setup is scanned axially through the focus. The expression for this function, which we refer to as $I(W_{20})$, is¹

$$I(W_{20}) = \left| \int_{-0.5}^{0.5} q_1'(\zeta)q_2'(\zeta)\exp(i2\pi2W_{20}\zeta)d\zeta \right|^2. \quad (11)$$

Now, taking into account the expressions for the functions q_i' [see Eqs. (6)] and the transmittance of the filters being binary [see Eq. (9)], we find that

$$\begin{aligned} I(W_{20}) &= \left| \int_{-0.5}^{0.5} q_1(\zeta)q_2(\zeta)\exp(i2\pi2W_{20}\zeta)d\zeta \right|^2 \\ &= \left| \int_{-0.5}^{0.5} q(\zeta)\exp(i2\pi2W_{20}\zeta)d\zeta \right|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

From Eq. (12) we infer, as indeed was already done by Kimura and Wilson,¹⁴ that symmetrical defocusing does not affect the function $I(W_{20})$. This is because, just when the reflector is at the confocal plane, the point source is imaged onto the detector pinhole. Moreover, because the $I(W_{20})$ curve is given by the squared modulus of the Fourier transform of $q(\zeta)$, it is equal, apart from a scale factor, to that shown in Fig. (5). Note from that figure that the narrowness of the central lobe is accompanied by sidelobes that are much stronger. Hence no improvement in terms of this parameter is achieved.

Finally, we wish to emphasize that the proposed technique barely affects the transverse resolution of the system. This lack of influence occurs for the following reasons: (a) The 3-D IPSF of a lens has an ellipsoidal form. Thus there are not strong differences between its transverse behavior in the focal plane and that in a slightly defocused plane. (b) As demonstrated in Ref. 10, the central lobe of the transverse PSF of an optical system does not spread when the system is apodized by the proposed filter.

4. Destructive-Interference Apodization

In Section 3 an important improvement in the optical-sectioning capacity was achieved by adequate combination of two axially superresolving techniques. Now we propose using a rather different approach. The idea is quite simple, as we show below.

It is seen that, by symmetrically defocusing a CSM, one can select the part of individual axial IPSF's that contributes to the core of the confocal IPSF. Now what we need is an apodization technique that provides an individual axial IPSF with a pair of twin high and narrow lateral lobes. By properly combining both techniques, one can obtain a strong axial-superresolution effect. The apodizer should be selected carefully because it should provide, in addition, a rather weak central lobe. This is because a strong central lobe in individual axial IPSF's gives rise to strong sidelobes in the confocal IPSF obtained after the product. Therefore we propose the use of

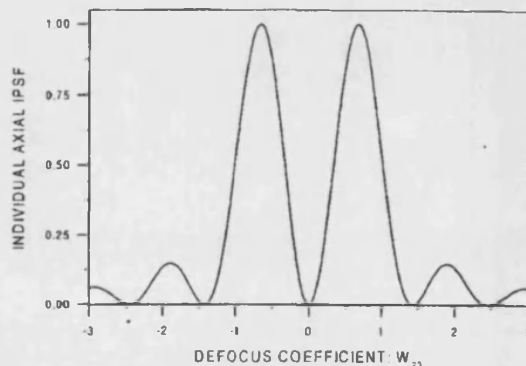


Fig. 9. Axial-irradiance impulse response corresponding to the filter given by Eq. (13). Note that, as a result of the destructive interference between the waves proceeding from the inner and the outer parts of this filter, zero irradiance is achieved at the focus. In addition, the lateral lobes are quite strong and narrow.

destructive-interference apodizers, which provide an axial response with zero irradiance at the focal point.

From among the members of the family of filters with zero focal irradiance we select the one that provides the narrowest slope around zero.¹⁷ The mapped complex-amplitude transmittance of this filter, which can be recognized as the simplest of the so-called Legendre filters,¹⁸ is

$$q(\zeta) = 2\zeta. \quad (13)$$

This filter's axial IPSF can be expressed in terms of the spherical Bessel function of the first order as

$$|h(v=0, W_{20})|^2 = |j_1(\pi W_{20})|^2. \quad (14)$$

It is plotted in Fig. 9.

Analysis of Fig. 9 shows that an axial pattern with strong, narrow, twin sidelobes and a narrow zero focal irradiance is achieved. Thus the selected apodizer clearly fulfills the imposed requirements. Now, by simply apodizing the two arms of the confocal setup with this filter and applying adequate symmetrical defocusing, we obtain significant narrowness in the core of the axial IPSF.

In Fig. 10 we plotted the axial IPSF that corresponds to a confocal setup that combines destructive-interference apodization with certain symmetrical defocusing. We selected the value of $W_{20}^D = 4/3$ because it permits the left-side maximum of one individual axially shifted IPSF to coincide with the right-side maximum of the other. In this way a strong irradiance peak is achieved. It is then apparent that the proposed technique leads to a high and narrow irradiance peak surrounded by relatively distant and weak secondary lobes, which is quite important in relation to two-point axial resolution.

Also in this case we analyze in Fig. 11 the axially superresolving properties of the method in terms of the Rayleigh criterion. From this figure it is appar-

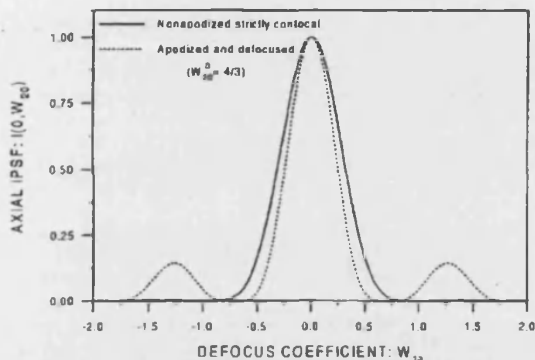


Fig. 10. Normalized axial IPSF corresponding to a confocal system under destructive-interference apodization and symmetrical defocusing of the magnitude of $W_{20}^D = 4/3$. With the solid curve we have also plotted the axial response corresponding to the strictly confocal, nonapodized setup.

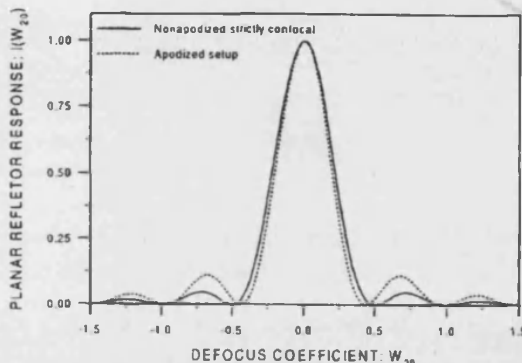


Fig. 12. $I(W_{20})$ function for the same setups that were used for Fig. 10.

ent that a 24% improvement in the axial two-point resolution is achieved.

Although it can be shown by numerical calculation that the integrated-irradiance function is slightly narrowed, we now prefer to center our attention on the $I(W_{20})$ function. As was shown in Section 3 the $I(W_{20})$ function is given by the squared modulus of the 1-D Fourier transform of the product of the mapped transmittances. In this case, $q_1(\zeta)q_2(\zeta) = 4\zeta^2$. It is easy to recognize that the function $4\zeta^2$ corresponds to the profile of an axially superresolving apodizer, so it will provide a 1-D Fourier transform in which the central lobe has undergone significant narrowing. As in the previous case [see Eq. (13)], the function $4\zeta^2$ can be expanded in terms of the Legendre polynomials¹⁷ and then the function $I(W_{20})$ can

be expressed in terms of the spherical Bessel functions as¹⁹

$$I(W_{20}) = \left| \frac{1}{3}j_0(2\pi W_{20}) - \frac{2}{3}j_2(2\pi W_{20}) \right|^2. \quad (15)$$

In Fig. 12 we represent Eq. (15) and the function corresponding to the nonapodized confocal system. A 10% reduction in the FWHM is noticeable. Moreover, in this case the narrowness of the central lobe is not accompanied by a strong increase in the lateral lobes. Finally, we wish to remark that it can be shown that, also in this case, the transverse resolution is not affected by the proposed technique.

5. Conclusions

We have presented two novel, to our knowledge, optical methods for improving the optical-sectioning capacity of CSM's. The first method successfully combines two axially superresolving techniques: symmetrical defocusing and axially superresolving apodization. The second method incorporates, besides symmetrical defocusing, an apodization technique specifically adapted to confocal architectures: destructive-interference apodization. It has been shown that both methods, which are useful in bright-field and fluorescence CSM, permit the achievement of significant improvements in the optical sectioning capacity.

This study was partially supported by the Dirección General de Investigación Científica y Técnica (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. C. J. Zapata-Rodríguez gratefully acknowledges financial support from this institution. M. Kowalczyk gratefully acknowledges financial support by the Komitet Badan Naukowych, Poland (project 8T11F 020 12).

References and Note

1. T. Wilson, ed., *Confocal Microscopy* (Academic, London, 1990).
2. I. J. Cox, C. J. R. Sheppard, and T. Wilson, "Improvement in

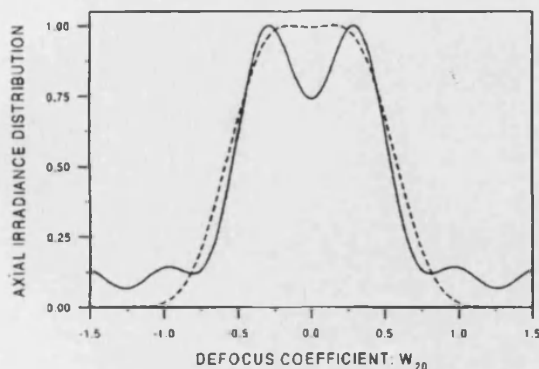


Fig. 11. Irradiance image of two point sources. The points are separated by $d = 0.58$. The 26% dip according to the Rayleigh criterion is obtained. Therefore 24% axial resolution is achieved [see Fig. 7(a)]. The dashed curve corresponds to the strictly confocal arrangement.

- resolution by nearly confocal microscopy," *Appl. Opt.* **21**, 778–781 (1982).
3. Z. S. Hegedus, "Annular pupil arrays. Application to confocal microscopy," *Opt. Acta* **32**, 815–826 (1985).
 4. Z. S. Hegedus and V. Sarafis, "Superresolving filters in confocally scanned imaging systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1892–1896 (1986).
 5. J. G. Walker, E. R. Pike, R. E. Davies, M. R. Young, G. J. Brakenhoff, and M. Bertero, "Superresolving scanning optical microscopy using holographic optical processing," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 59–64 (1993).
 6. J. Gromalicki, E. R. Pike, J. G. Walker, M. Bertero, P. Boccaci, and R. E. Davies, "Superresolving masks for incoherent scanning microscopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 1074–1077 (1993).
 7. T. Wilson and S. J. Hewlett, "The use of annular pupil plane filters to tune the imaging properties in confocal microscopy," *J. Mod. Opt.* **37**, 2025–2046 (1990).
 8. R. H. Webb, "Confocal optical microscopy," *Rep. Prog. Phys.* **59**, 427–471 (1996).
 9. C. J. R. Sheppard and M. Gu, "Improvement of axial resolution in confocal microscopy using annular filters," *Opt. Commun.* **84**, 7–13 (1991).
 10. M. Martínez-Corral, P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda, and G. Saavedra, "Tunable axial superresolution by annular binary filters. Application to confocal microscopy," *Opt. Commun.* **119**, 491–498 (1995).
 11. S. Hell and E. H. K. Stelzer, "Properties of a 4Pi confocal fluorescence microscope," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 2159–2166 (1992).
 12. E. H. K. Stelzer and S. Lindek, "Fundamental reduction of the observation volume in far-field light microscopy by detection orthogonal to the illumination axis: confocal theta microscopy," *Opt. Commun.* **111**, 536–547 (1994).
 13. S. Lindek, C. Cremer, and E. H. K. Stelzer, "Confocal theta fluorescence microscopy with annular apertures," *Appl. Opt.* **35**, 126–130 (1996).
 14. S. Kimura and T. Wilson, "Effect of axial pinhole displacement in confocal microscopes," *Appl. Opt.* **32**, 2257–2261 (1993).
 15. C. J. R. Sheppard and D. K. Hamilton, "Edge enhancement by defocusing of confocal images," *Opt. Acta* **31**, 723–727 (1984).
 16. Ho and Shao, "Axial resolution of confocal microscopes revisited," *Optik (Stuttgart)* **88**, 147 (1991).
 17. M. Martínez-Corral, P. Andrés, and J. Ojeda-Castañeda, "On-axis diffractive behavior of two-dimensional pupils," *Appl. Opt.* **33**, 2223–2229 (1994).
 18. J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés, and M. Martínez-Corral, "Zone plates with cells apodized by Legendre profiles," *Appl. Opt.* **29**, 1299–1303 (1990).
 19. In Ref. 17 it is shown that, if a 1-D function is expressed in terms of the Legendre polynomials as $t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, its Fourier transform is given by $\hat{t}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n a_n j_n(\pi u)$. The function $4\xi^2$ can be expanded in terms of the Legendre polynomials as $4\xi^2 = (1/3)P_0(\xi) + (2/3)P_2(\xi)$. Then the squared modulus of its 1-D Fourier transform is given by Eq. (15).

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÈNCIES FÍSQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral
d'En/ Na/ N.º CARLOS J. ZAPATA RODRÍGUEZ
la qualificació de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

València a 3 de DESEMBRE de 1999

El Secretari,

SALVADOR BARÁ VÍTAJ

El President,

CARLOS FERRAZA GARCIA

