UNIVERSITAT DE VALENCIA

FACULTAT DE CIENCIES ECONOMIQUES I EMPRESARIALS

TITULO: **" ESTABILIZACION DE MODELOS ECONOMICOS DINAMICOS CON CONTROL OPTIMO EN TIEMPO CONTINUO. "**

TESIS DE LICENCIATURA

Presentada por :

Juan Manuel Pérez-Salamero González

Dirigida por el Doctor:

Francisco Muñoz Murgui

- I N D I C E -

<u>0.- INTRODUCCION.</u>

En esta Tesis de Licenciatura se lleva a cabo el estudio de un problema determinado de optimización dinámica y sus aplicaciones en el campo de la Ciencia Económica.

Un problema de optimización consiste, fundamentalmente, en la búsqueda de un extremo de una función o un funcional objetivo que proporcione un máximo o un mínimo para esa función. Cuando se habla de optimización dinámica hay que incorporar el factor tiempo al problema, en todas y cada una de las diferentes variables que intervienen, lo que afectará a los modelos matemáticos que se empleen para representar el comportamiento y las relaciones existentes entre dichas variables. También afecta al funcional objetivo a optimizar. Así, los modelos matemáticos vendrán expresados en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales (las variables evolucionan de forma contínua en el tiempo), o en sistemas de ecuaciones en diferencias (evolución en tiempo discreto).

Las técnicas de Optimización Dinámica podrían agruparse en las adscritas a la Programación Dinámica, y en las propias de la aproximación variacional (Cálculo de Variaciones, Teoría del Control Optimo). Se van a mostrar las que proporciona la Teoría del Control Optimo la cual, a partir de los años 60, tras el enunciado del Principio del Máximo de Pontryagin[1], se ha desarrollado superando algunas de las

[1] PONTRYAGIN, (1962).

dificultades con las que se encontraban las técnicas del Cálculo de Variaciones.

Los elementos esenciales de un problema de control óptimo son un modelo matemático a controlar, un resultado deseado para ese modelo, un conjunto de controles admisibles y un funcional de coste o de beneficio que mida si la acción de control ha sido efectiva. A modo de ejemplos de problemas de control óptimo de sistemas económicos, se puede citar el control de la inflación y la tasa de desempleo por parte del Gobierno de una nación, empleando para ese fin las variables instrumentales oportunas (medidas de política fiscal y de política monetaria). Otro problema sería el alcanzar en el mínimo tiempo el mayor beneficio actualizado de una empresa; o bien, la búsqueda del mayor valor presente de una determinada cartera de valores fijado un intervalo de tiempo para su obtención.

Cuando se habla de un problema de control con estabilización se está haciendo referencia a un determinado tipo de problema de control. En general, en un problema de C.O. (Control Optimo) con estabilización se intentará alcanzar un output, determinado o no, en un intervalo de tiempo, fijado o no, mediante unos controles o inputs, logrando simultáneamente la disminución de las fluctuaciones u oscilaciones de todas las variables que intervienen en los sistemas que se pretende estabilizar. Fluctuaciones, por otra parte, comunes a la mayoría de las variables económicas, tanto a nivel macroeconómico como a nivel microeconómico.

Por la imposibilidad de abordar el estudio de la estabilización de todo tipo de modelos económicos dinámicos se ha restringido el análisis al caso concreto de los modelos económicos dinámicos deterministas lineales y en tiempo contínuo sin restricciones sobre las variables de estado que, además, van a permitir aplicar técnicas de C.O. más sencillas, en la medida en que se puede operar matemáticamente con menor dificultad.

El problema concreto, pues, que se va a abordar es el llamado Problema Lineal Cuadrático en su versión contínua. Lineal porque se trabaja con sistemas lineales; cuadrático porque el funcional objetivo es una función cuadrática (suma de los cuadrados de las desviaciones de las variables respecto a sus niveles deseados). La solución que se obtiene es una regla de acción en la que las variables de control o instrumentales son función lineal de las variables que se quieren controlar (variables de estado).

Ya expresado cuál es el objeto de análisis, se especifican a continuación los objetivos concretos que se han perseguido:

- Recalcar la importancia de la introducción del tiempo en el análisis de los fenómenos económicos.

- Mostrar algunas técnicas de la Teoría del Control Optimo para la resolución de problemas dinámicos de optimización.

- Comprobar las potencialidades de esta teoría a la hora de obtener la solución de problemas económicos dinámicos concretos que se puedan plantear como problemas de control con estabilización.

- Destacar, por último, las limitaciones del Problema Lineal Cuadrático para trasladar al mundo real las técnicas que se van a exponer.

Como objetivos personales, este trabajo trata de ser una aproximación a la Teoría del Control Optimo, y a un problema concreto de control, así como a las posibilidades que ofrece para una posterior línea de investigación. También, y dejando el tema concreto analizado, se presentaba esta ocasión como una oportunidad para iniciarse en la metodología y etapas de un proceso de investigación previas a la elaboración de la Tesis Doctoral.

El objeto a análisis y los objetivos ya se han comentado. En el capítulo 1 se mostrará la importancia de la incorporación del tiempo en el proceso de modelización de los fenómenos económicos. Así, se recogen los factores que conviene tener en cuenta a la hora de construir un modelo dinámico, así como una clasificación, no exhaustiva de dichos modelos en función de los parámetros que delimitarán el tipo de sistemas dinámicos que se van a utilizar (modelos dinámicos lineales deterministas en tiempo contínuo). Algunos conceptos relacionados con la estabilidad de los sistemas dinámicos en tiempo contínuo se desarrollan después, tanto para modelos con coeficientes constantes como para modelos de coeficientes variables, bien sean lineales o no. Se hablará de la estabilidad de un punto de equilibrio de un determinado sistema dinámico, estableciéndose una serie de condiciones para asegurar dicha estabilidad.

En el capítulo 2 se explica en qué consiste un problema de control, cuáles son sus elementos. En la resolución de este problema se van a seguir unos pasos análogos a los que se siguen en el caso estático de la Programación Clásica.

Primero se construye un funcional objetivo; se aplican a continuación las condiciones necesarias para obtener los puntos críticos, posibles extremos del funcional; y, por último, se determina el carácter de estos puntos críticos al aplicar las condiciones suficientes. Al inicio de este segundo capítulo se hace una breve introducción al problema general del Cálculo de Variaciones, obteniendo las condiciones necesarias de extremo para ese caso. La solución para el problema general de C.O. se obtiene a partir del Principio del Máximo (mínimo) de Pontryagin (condiciones necesarias de máximo o mínimo), mostrando cómo puede derivarse éste del Cálculo de Variaciones. Una condición suficiente de máximo (mínimo) para el problema general de control se recoge en el epígrafe 2.2.3 , analizando las variaciones de segundo orden del funcional objetivo, aunque atendiendo a la concavidad (convexidad) del Hamiltoniano (análogo de la función lagrangiana en el caso estático) las condiciones necesarias pueden actuar también como suficientes.

La relación entre estabilidad y control óptimo se desarrolla en el epígrafe 2.3, dando lugar a un nuevo concepto de estabilidad. La controlabilidad y observabilidad de un sistema dinámico, propiedades fundamentales a la hora de la existencia de la solución del problema de control óptimo, se tratan en el epígrafe 2.4 para el caso de modelos dinámicos lineales deterministas y en tiempo contínuo.

El capítulo 3 desarrolla el problema concreto de control con estabilización de los modelos ya citados. Se analizan dos tipos de este problema: Modelos de Regulador Lineal, y Modelos de Seguimiento Lineal. Los primeros son un caso particular de los segundos, por lo que el planteamiento del problema del epígrafe 3.2 se realiza para el caso más general de los problemas de Seguimiento Lineal. Este consiste, en pocas palabras, en minimizar las desviaciones de las variables a controlar de un sistema dinámico en torno a unos niveles deseados, tratando de emplear al mínimo las variables de control. En el epígrafe 3.2 se justifica y se razona el porqué de la elección del funcional objetivo para este tipo de problema de control. Este funcional es una suma de formas cuadráticas de signo no negativo. Una nueva propiedad de los sistemas dinámicos surge tras el planteamiento del problema de control con estabilización: la "estabilizabilidad". Esta consiste en la existencia de una ley de control que sea estabilizadora del sistema, lo cual supone que el sistema dinámico que incluya esa ley de control es un sistema estable, tal y como se habrá definido la estabilidad en el epígrafe 2.3. Después se desarrolla el planteamiento y solución de los problemas de Regulador Lineal, y los de Seguimiento Lineal, tanto trabajando con variables de estado como cuando se desconocen los datos de éstas y es obligado el empleo de modelos que incorporen otras variables de las cuales sí se tiene información (variables output), considerando entonces la propiedad de observabilidad de los sistemas dinámicos. La solución obtenida, ley de control lineal feedback, va a pasar por la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, llamado "ecuación de Riccati" que dará lugar a una matriz simétrica y definida positiva, siempre que el funcional sea la suma de formas cuadráticas de signo no negativo y que el sistema dinámico a controlar sea lineal.

En el capítulo 4 se van a presentar unos tipos de problemas económicos que pueden formalizarse como problemas de control con estabilización. Las aplicaciones empíricas se han agrupado en dos grupos. El primero hace referencia a la aplicación del Modelo de Seguimiento Lineal a modelos económicos del tipo multiplicador-acelerador, considerando un horizonte temporal infinito y bajo el conocimiento de los niveles a seguir para las variables de control consistentes con los correspondientes a las variables de estado. Esto último permite trabajar con desviaciones de las variables y, por tanto, acometer la solución del problema de Seguimiento lineal como si fuera uno de Regulador lineal. En el primer grupo de aplicaciones se realizará un sencillo análisis de sensibilidad de los parámetros de un modelo del tipo multiplicador-acelerador derivado a partir del desarrollado por HICKS (1939) y SAMUELSON (1950). Después, partiendo de un determinado modelo macroeconómico (PHILLIPS (1954,1957)) se consideran distintas políticas de gasto público para conseguir un nivel de Renta nacional de pleno empleo, y se comparan los resultados que proporcionan estas reglas fijas de control con los asociados a la ley feedback lineal de control óptimo, incidiendo en la convergencia hacia los valores deseados y la velocidad de ésta. El segundo grupo de aplicaciones ejemplifica un tipo de problema de control, el llamado "problema de producción e inventario", con un horizonte temporal finito, y su aplicabilidad a un problema económico concreto como es el de los excedentes comunitarios de leche. Se plantea como si fuera un problema de control, partiendo de una modelización muy intuitiva y no contrastada. Se persigue, fundamentalmente, mostrar cómo es posible obtener una solución aplicando las técnicas del control óptimo.

Visto el problema lineal cuadrático determinista en tiempo contínuo, y con controles no acotados en los capítulos tercero y cuarto, el capítulo 5 aborda las limitaciones que supone trabajar con este tipo de modelos, considerando uno por uno los supuestos en los que se había sustentado todo el desarrollo analítico de los dos capítulos inmediatamente anteriores. Así, los seis primeros epígrafes de este quinto capítulo muestran cómo se ven afectados el planteamiento y la solución del problema de control con estabilización, en los casos en que se trabaja con modelos en tiempo discreto (epígrafe 5.2), con modelos no deterministas (epígrafe 5.3), con modelos no lineales (epígrafe 5.4), con variables sometidas a algún tipo de restricción (epígrafe 5.6), o con agentes económicos que anticipan las acciones de control y varían su comportamiento en función de unas expectativas (epígrafe 5.5). Con la ruptura de los supuestos inicales sobre los que se sustentará el desarrollo del problema de control con estabilización de modelos económicos en tiempo contínuo, se van a hacer patentes las limitaciones de este planteamiento, como ya se podía sospechar. Otro tipo de cuestiones y limitaciones más concretas del planteamiento se recogen en el último epígrafe de este capítulo quinto. Entre otras, se señala la existencia de varios agentes decisores, en vez de uno sólo; algunos métodos de obtención de la función cuadrática objetivo; la cuestión de la obtención de datos, y su incidencia sobre la solución.

El capítulo sexto reune, de forma escueta, las conclusiones, analizando el grado de cumplimiento de los objetivos perseguidos, así como algunas consideraciones concretas derivadas del análisis del problema lineal cuadrático y de sus limitaciones.

1.- EL ANALISIS DINAMICO DE MODELOS ECONOMICOS.

1.1.- Introducción.

HICKS,J.R. (1967), analizando el concepto de Teoría del Crecimiento, determina que ésta es parte de la Dinámica Económica, o mejor dicho, es uno de los métodos de aquella, por lo que se ve obligado a dar un significado general, al menos, de la Dinámica Económica. Para este autor, " ... la definición de Dinámica Económica debe derivarse de la definición de Estática Económica, ..." [1]. La distinción entre estática y dinámica debe buscar su origen en la Mecánica, en la cual la estática estudiaba un móvil en reposo, mientras la dinámica se refería a su movimiento. Ahora bien, un sistema económico nunca está en reposo en el sentido que emplea la Mecánica. Así, HICKS no puede más que conformarse con definir una situación estática, siendo aquella en la que determinadas variables clave se mantienen constantes (p.e., las cantidades producidas y consumidas, así como los precios de intercambio de las mismas). Por oposición a este concepto, una situación dinámica es aquella en la que las variables cambian, y la teoría dinámica será el análisis de los procesos que las hacen variar.

Si bien esta definición de HICKS no es muy rigurosa, puede servir para dar una idea general de lo que se entiende por Dinámica Económica, que es lo que él perseguía para resolver el problema de la existencia de distintas

[1] HICKS, John R.,(1967). "Capital y crecimiento". Pág. 20.

definiciones dadas por otros autores. También se justifica este significado, quizás demasiado general, porque la distinción entre estática-dinámica aparece de forma diferente según el tipo de teoría económica que la emplee.

A nadie se le puede escapar la importancia que tiene el análisis estático en Economía, pero este análisis está centrado, casi exclusivamente, en hallar los puntos de equilibrio de un modelo económico, dejando a un lado el proceso real de ajuste de las variables que acontece antes de alcanzar el estado de equilibrio. Se trata de establecer las condiciones que un sistema económico debe cumplir para que se encuentre en equilibrio, sin estudiar ni el cómo ni el cuándo se alcanza ese estado.

Puede suceder que las condiciones dadas por el análisis estático para el equilibrio de un sistema pierdan validez en el período de ajuste debido a causas exógenas, o sea, en el tiempo que transcurre desde una situación de desequilibrio hasta la teórica situación de equilibrio, siempre que ésta sea alcanzable. De estos hechos se encarga la estática comparativa, comparando el estado de equilibrio inicial con el estado de equilibrio final. Tanto en este último análisis, como en el estático, se supone que el equilibrio es estable, al ser alcanzable. La Estática Comparativa tampoco analiza el proceso de ajuste que se da entre dos estados distintos de equilibrio.

El análisis dinámico sí analiza el proceso de ajuste al equilibrio, y la estabilidad o no de éste, es decir, si existen o no fuerzas que conduzcan al sistema a un punto de equilibrio. En el análisis dinámico, las variables están afectadas temporalmente, lo que introduce el tiempo explícitamente en el diseño del modelo. Así pues, la trayectoria temporal de las variables será también una cuestión a estudio.

Centrando la atención en el análisis dinámico, habrá que considerar la importancia del tiempo en el proceso de modelización de los sistemas económicos, tanto a nivel macro como microeconómico.

Los gerentes y directores de empresas, así como los administradores públicos responsables de la política económica de una nación, toman sus decisiones dentro de una perspectiva temporal, pero hasta hace unas pocas décadas, la intuición y el sentido común habían sido las "técnicas" que la clase directiva estaba empleando para adoptar decisiones que tenían claras implicaciones de carácter dinámico. La intuición y el sentido común no siempre han sido suficientes, sobre todo conforme se acometían procesos de decisión más complejos. Para estos casos, se requiere un análisis dinámico formal, plasmado en una representación mediante un modelo que permita trabajar con él empleando las "herramientas" que proporciona el análisis dinámico.

Así pues, es necesario explicar, aunque brevemente, el proceso de modelización dinámica de fenómenos y situaciones en Economía. Según TAPIERO (1978)[2], el analista o responsable de diseñar el modelo debe centrar su atención en las siguientes cuestiones :

1.- La estructura temporal de las preferencias. En este punto se trata de establecer los mecanismos que proporcionen un ordenamiento de los resultados que se dan en los distintos momentos del tiempo para poder comparar y elegir, determinándose así las pautas de acción a seguir en el futuro. El establecimiento de esta escala de resultados dados en distintos momentos del tiempo entraña una gran dificultad, cuya causa radica en dos factores esenciales :

- la incomparabilidad de los resultados futuros con los resultados presentes, ya que los "gustos" evolucionan a lo largo del tiempo , abarcando el término "gustos" una gran gama de variables. La elección intertemporal se resuelve en los modelos económicos, normalmente, mediante la introducción de un procedimiento de descuento (tasas de interés).

- la incapacidad de predecir cambios estructurales y funcionales, lo que genera la necesidad de planificar para no desestabilizar el sistema.

Las elecciones de las funciones de preferencia temporal van a ser de vital importancia en la modelización y

[2] TAPIERO (1978) pp. 12-16.

posteriores aplicaciones que empleen a esta última.

2.- La estructura temporal de los procesos de producción, entendiendo ésta como la transformación tecnológica de un conjunto de inputs en un conjunto de outputs en un instante del tiempo dado. Existe una gran incertidumbre, no sólo en cómo modelizar los procesos de transformación, sino también en cómo éstos evolucionan a lo largo del tiempo. Una vez establecida la estructura del proceso de transformación, basándose en un profundo conocimiento del problema a modelizar, se deben usar las técnicas estadísticas para estudiar la correspondencia del modelo con la realidad.

3.- La evolución de los procesos temporales . Esta se puede apreciar en la senda temporal de ciertas variables. Existen dificultades para obtener estas sendas temporales, tanto numéricas como descriptivas. Las dificultades numéricas aparecen cuando nos encontramos ante complejos sistemas de ecuaciones. En cuanto a las otras, el problema está en la elección de la unidad de medida del tiempo, o del intervalo en cuestión (año, semestre, cuatrimestre, trimestre, mes, semana, día, ...). Esta se ve condicionada por la exactitud de los registros temporales, por los errores en que se incurre con la adopción de un procedimiento específico de contabilización del tiempo, y por los costes que pudieran darse en la selección de las observaciones o datos temporales. A lo largo de un intervalo de tiempo escogido, según sea el problema a estudiar, acontece una serie significativa de cambios, por lo que se producirán pérdidas importantes de información al emplear la medida de tiempo seleccionada.

4.- Interrelación información-toma de decisiones : Como las decisiones se van tomando a lo largo del tiempo, y la información disponible también está inmersa en un proceso de constante evolución, las relaciones entre decisiones e información van a ser muy estrechas. Las decisiones van a incidir sobre la información, y por otra parte, las decisiones se toman en base a la información pasada, presente y a las predicciones futuras de comportamiento de las variables relevantes.

Una vez introducida la importancia del análisis dinámico en Economía, así como algunas cuestiones a tener en cuenta a la hora de crear un modelo que represente un determinado fenómeno económico, se van a exponer distintos tipos de modelos dinámicos, mostrando sus características, que servirán para establecer una clasificación de los mismos.

1.2.- Clasificación de sistemas dinámicos.

A la hora de clasificar los sistemas dinámicos podemos atender a diversas características :

a) Por la consideración del tiempo como magnitud contínua o discreta se puede distinguir :

- Modelos en tiempo contínuo : En éstos, las variables evolucionan de forma continuada a lo largo del tiempo. Un ejemplo sería la tasa contínua de actualización de rendimientos. La representación matemática de dichos modelos viene dada por sistemas de ecuaciones diferenciales.

- Modelos en tiempo discreto : Estos pueden reflejar dos situaciones distintas:

- Sistemas que operan realmente en tiempo discreto.

- Sistemas que operan en tiempo contínuo pero que sólo pueden ser observados, o bien sólo interesan, en un instante determinado del tiempo.

A título de ejemplo, por la disponibilidad de los datos, un modelo que representase el comportamiento de magnitudes monetarias (oferta monetaria, tipos de interés, ...) vendría dado en magnitudes discretas, como datos trimestrales, mensuales, quincenales o semanales, según de qué país se trate. También, el comportamiento de ciertos agentes económicos viene condicionado por acciones puntuales en el tiempo : las reivindicaciones salariales no podrían variar de forma continuada en el tiempo, sino que lo harían a medida que se fuera conociendo, mes a mes, la evolución del índice de precios al consumo (IPC), aunque en realidad, las variaciones en el IPC no se dan de manera arbitraria en un instante discreto del tiempo, sino que los precios suben o bajan en un intervalo de tiempo menor que un mes. Las variables se mantienen constantes a lo largo de un intervalo de medida de tiempo, T, (día, semana, mes, trimestre, ...). El cambio en las variables sólo sucede al principio de cada período T, este período no tiene por qué ser constante. Los cambios en las variables pueden darse en un conjunto discreto de instantes del tiempo, es decir, no tienen por qué darse en intervalos de tiempo de la misma longitud.

Dada la representación mediante una ecuación diferencial de un modelo dinámico en tiempo contínuo y con coeficientes constantes (ver apartado d), como el que viene dado por (1.1), podemos llegar a expresarlo en tiempo discreto, es decir, describiendo los valores de las variables para instantes discretos de tiempo,

$$\dot{y}(t) = \alpha\, y(t) + \beta\, x(t) \tag{1.1}$$

siendo α y β escalares.

También puede llegarse a una representación discreta de un sistema de ecuaciones diferenciales, y no sólo de una ecuación, con coeficientes variables, siempre y cuando los sistemas de ecuaciones sean lineales en las variables dependientes, y(t), y las variables instrumentales o variables input [3] se mantengan todas constantes a lo largo del mismo intervalo de tiempo o unidad básica de tiempo escogida.

Integrando (1.1) a lo largo de un intervalo dado de tiempo, T, se tiene que

$$y_{k+1} = e^{\alpha T} y_k + (1/\alpha) (e^{\alpha T} - 1) ß x_k \qquad (1.2)$$ [4]

---

[3] Para los conceptos de variables input, (variables instrumentales), variables dependientes, y variables de estado, ver apartado e).

[4] La obtención de (1.2) se consigue realizando las siguientes operaciones :

Dado el sistema

$$\dot{y}(t) = \alpha\ y(t) + ß\ x(t) \qquad (1)$$

$$dy/dt = \alpha\ y + ß\ x \qquad (2)$$

suprimiendo t, para abreviar la notación, se tiene

$$dy = [\alpha\ y + ß\ x\ ]\ dt \qquad (3)$$

$$dy - [\ \alpha\ y + ß\ x\ ]\ dt = 0 \qquad (4)$$

Multiplicando los dos miembros de (4) por $e^{-\alpha t}$, para aplicar luego el método de resolución de ecuaciones diferenciales "exactas", siendo $e^{-\alpha t}$ el factor integrante que permite que (5) sea exacta, se tiene que :

$$e^{-\alpha t} dy - [\alpha y + ßx]\ e^{-\alpha t} dt = 0 \qquad (5)$$

b) Por la linealidad de las ecuaciones del sistema :

Un sistema de ecuaciones (diferenciales o en diferencias) se dice que es lineal si todas sus ecuaciones lo s n, es decir, si no incorporan potencias de orden superior al primero de las variables dependientes ni de sus derivadas, sea cual sea el orden de las mismas, ni existe ningún producto cruzado entre variables dependientes, ni entre éstas

---

Poniendo en práctica el método de resolución :

$$F(y,t) = \int (\partial F/\partial y)\, dy \quad + \quad \Phi\ (t) \qquad (6)$$

siendo $\partial F/\partial t = e^{-\alpha t}$ y $\partial F/\partial t = -\ [\alpha y + ßx]\ e^{-\alpha t}$

$$F(y,t) = y(t)\ e^{-\alpha t} + \int - ß\ e^{-\alpha t}\ x(t)\ dt \qquad (7)$$

Siendo F(y,t) una función cuya diferencial, dF(y,t)= 0 para todo (y,t), implica que F(y,t) es una función constante, y como consecuencia de este hecho,

$$F[y[(k+1)T],(k+1)T] - F[y(kT),kT] = 0 \qquad (8)$$

Por tanto,

$$e^{-\alpha(k+1)T}\ y[(k+1)T] - e^{-\alpha kT}\ y[kT] + \int_{kT}^{(k+1)T} - ß\ e^{-\alpha t}\ x(t)dt = 0 \qquad (9)$$

Despejando y[(k+1)T], y considerando que x(t) se mantiene constante a lo largo del intervalo [kT, (k+1)T]

$$y[(k+1)T] = e^{\alpha T}\ y[kT] + ßx(kT) \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\alpha[(k+1)T-t]}dt \qquad (10)$$

$$y[(k+1)T] = e^{\alpha T}\ y[kT] + (ß/\alpha)\ x(kT)\ [e^{T} - 1] \qquad (11)$$

Llamando y_k a y(kT), y x_k a x(kT), tenemos que para todo k = 0, 1, 2, ...

$$yk_{+1} = e^{\alpha T}\ y_k + (ß/\alpha)[e^{T} - 1]\ x_k$$

y sus derivadas, ni tampoco entre derivadas de las variables dependientes.

Es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, y primer grado, mediante procedimientos sencillos como lo son los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales exactas, variables separables, o bien, tratarse de ecuaciones reducibles a la forma lineal.

Cuando se trate de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, se analizará, en cuanto a la estabilidad local y a otros problemas, mediante una aproximación lineal, empleando el desarrollo de Taylor del sistema alrededor de un punto de equilibrio .

c) Por la aleatoriedad de las variables:

- Modelos deterministas: Son aquellos sistemas de ecuaciones en los que existe plena certeza acerca de los parámetros del modelo, y no existe ninguna variable aleatoria. Las relaciones entre las variables, plasmadas en las ecuaciones, son conocidas perfectamente por el analista.

- Modelos estocásticos: Son aquellos modelos en los que alguna variable es aleatoria. Los modelos estocásticos son una mejor aproximación de la realidad económica que se quiere describir, incorporando la incertidumbre que está presente en todo fenómeno social.

d) Los parámetros de un modelo pueden considerarse constantes a lo largo del tiempo, por lo que estaremos trabajando con modelos de coeficientes constantes, invariables en el tiempo, o bien, buscando una aproximación más cercana a la realidad, podrían evolucionar conforme a una senda temporal continua o discreta, según se considere por el analista diseñador del modelo, obteniéndose en este caso un modelo variable en el tiempo.

e) Si la atención se centra sobre los llamados instrumentos que son los inputs del sistema (variables exógenas), y sobre las variables dependientes, que son los outputs presentes o pasados del sistema, estaremos ante un modelo llamado input-output. Como ejemplo de este tipo de modelos estarán aquellos que vienen expresados en su forma reducida, y no en la forma estructural. Otro caso es el de los modelos autorregresivos de medias móviles. En los modelos input-output, las variables instrumentales y las dependientes están relacionadas directamente.

Por otra parte, si se introducen variables intermedias, llamadas variables de estado, las cuales pueden no tener en sí mismas ningún interés, pero ayudan a configurar el modelo, estaremos ante un modelo "state-space". En éstos, las variables de estado se relacionan mediante unas ecuaciones con las variables inputs o instrumentos, y un segundo sistema de ecuaciones relaciona a las variables de estado y a los inputs con los outputs. Los vectores de variables de estado se definen de manera que no aparezcan derivadas de las variables de control en las ecuaciones finales de la forma state-space.

Ambas representaciones son equivalentes, por lo que la elección de una representación u otra, dependerá de la conveniencia en cada caso.

Todas estas características se combinan entre sí, dando lugar a una variedad de sistemas dinámicos. A lo largo de esta Tesis de Licenciatura se van a manejar, principalmente, sistemas dinámicos lineales deterministas en tiempo continuo en su representación state-space con coeficientes variables, en algunos casos, y constantes en otros.

Una vez vista la importancia del tiempo en el análisis económico, hechas las consideraciones en el proceso de modelización de sistemas económicos dinámicos, y dada una clasificación de los mismos en base a ciertas características, hay que hacer mención a otros aspectos, propiedades y problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones, que tienen interés para el análisis económico dinámico. Entre estos aspectos, hay que destacar el estudio de la estabilidad del sistema, refiriéndose ésta a la existencia de fuerzas que conduzcan al modelo desde una situación de desequilibrio a una situación de equilibrio. El concepto de estabilidad no hay que confundirlo con el concepto de estabilización, objeto principal de este trabajo. En el siguiente apartado se estudia la estabilidad de sistemas dinámicos, en casos generales, para apoyar el desarrollo analítico de este trabajo.

Tras la construcción de un modelo económico, representación matemática de un fenómeno económico, cabe plantearse la contrastación empírica del mismo, apoyándose en las técnicas que proporciona la Econometría, determinando en su caso, la bondad del modelo teórico, viendo si el modelo econométrico asociado supera satisfactoriamente los distintos contrastes que se establezcan para probar la validez del mismo en cuanto aproximación fiel de la realidad.

Pueden diseñarse, tras la aceptación de un modelo como válido, técnicas para buscar las pautas óptimas de actuación a seguir, obteniendo como solución unas sendas temporales de comportamiento de las variables input del modelo (y las correspondientes a las variables dependientes), que proporcionen un máximo o un mínimo a una determinada función. Tras estos problemas de búsqueda de óptimos, otra cuestión que pudiera plantearse, según qué tipo de modelos se estén empleando, es el análisis de sensibilidad de los parámetros, tratando de ver cómo afectan las modificaciones en éstos sobre las soluciones de la evolución temporal de las variables.

Una vez hechas todas estas consideraciones sobre el análisis dinámico de modelos económicos, y tras realizar el estudio de la estabilidad en sistemas dinámicos, en el capítulo siguiente se desarrollará más profundamente una de las técnicas de optimización dinámica.

1.3.- Estabilidad de sistemas dinámicos en tiempo contínuo.

No existe un concepto único de estabilidad. La idea intuitiva de estabilidad en un contexto dinámico sería aquella que dice que para pequeñas perturbaciones del equilibrio en un instante t_0, las consecuentes variaciones de la variable de estado no pueden ser muy grandes.

La idea es bastante intuitiva por lo que conviene dar unas definiciones que establezcan lo que se puede entender por estabilidad. Así, dado un sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x,t)$$

se dice que un punto de equilibrio del mismo, $x = 0$, es [5] :

a) ESTABLE si para todo $\mu > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que todas las soluciones del sistema $\dot{x} = f(x,t)$ que cumplan $||x(t_o)|| < \delta$, satisfacen $||x(t)|| < \mu$, siendo $t = t_0$. Esta definición se llama " estabilidad en el sentido de Liapunov ".

b) ASINTOTICAMENTE ESTABLE, si es estable y además se cumple que $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

[5] BARNETT (1975), pág. 143.

c) <u>INESTABLE,</u> si no es estable. Esto es, si existe un $\mu > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe un $x(t_0)$ tal que $||x(t_0)|| < \delta$, y $||x(t)|| = \mu$ para algún $t > t_0$. Si se cumple esta condición para todo $x(t_0)$ siendo su norma euclídea menor que δ , entonces se dice que el equilibrio es <u>COMPLETAMENTE INESTABLE.</u>

Como puede deducirse de estos conceptos, la estabilidad no está referida a todo el sistema dinámico sino a un punto de equilibrio del mismo. Es decir, se hablará de puntos de equilibrio estables, inestables, o asintóticamente estables, y no de un sistema estable o inestable.

A continuación se plantea el estudio de la estabilidad en sistemas dinámicos en tiempo continuo empleando el álgebra matricial para determinar las condiciones de estabilidad de un estado de equilibrio.

Primero se establecerán las condiciones de estabilidad para modelos lineales en tiempo continuo con coeficientes constantes, para pasar a continuación a examinar los modelos de coeficientes variables. Por último, se dará una visión de los aspectos relacionados con la estabilidad de los modelos no lineales.

1.3.1.- Estabilidad en sistemas lineales con coeficientes constantes.

Sea

$$\dot{x} = A\,x$$

un sistema lineal en tiempo continuo que represente un sistema cerrado o abierto ('closed or open loop'), donde A es una matriz constante y cuadrada de orden n.

El único punto de equilibrio de este sistema es el origen, por lo que va a ser más fácil, a nivel de exposición, el análisis de la estabilidad del mismo.

Así pues, se va a poder deducir una condición necesaria y suficiente de equilibrio asintóticamente estable, y es la siguiente[6]

TEOREMA I.- Una condición necesaria y suficiente para que toda solución de

$$\dot{x} = A\,x$$

tienda a cero cuando $t \longrightarrow \infty$ es que las partes reales de todas las raíces características de la matriz A ($Re(\Gamma_i)$, siendo Γ_i los autovalores de A) sean negativas. Consecuentemente, si para todo i, $Re(\Gamma_i) < 0$, el equilibrio será asintóticamente estable.

---

[6] La demostración puede encontrarse en BARNETT (1975), págs. 150-151.

1.3.2.- Estabilidad en modelos lineales con coeficientes variables.

En este tipo de modelos, la situación se representa de forma más complicada :

$$\dot{x}(t) = A(t)\ x(t)$$

Podría pensarse que lo dicho para modelos de coeficientes constantes es aplicable a este otro tipo de modelos, es decir, se podría interpretar que si todas las raíces características de A(t) tuvieran partes reales negativas, para todo $t = t_0$, entonces $x = 0$ sería un equilibrio asintóticamente estable del modelo anterior. Esto no es cierto.

Así pues, si A(t) es una matriz " casi constante ", cumpliendo

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = A_\infty$$

donde A_∞ es una matriz constante, entonces puede llegarse a establecer el siguiente Teorema[7]

TEOREMA II.- Si el origen es un punto de equilibrio autónomo estable del sistema

$$\dot{x}(t) = A_\infty\ x(t),$$

[7] BARNETT(1975),págs. 161-162.

entonces también lo será de

$$\dot{x}(t) = [A_\infty + B(t)]\, x(t) \;,$$

siendo

$$\lim_{t \to \infty} \|B(t)\| = 0$$

1.3.3.- Estabilidad en modelos no lineales. El "método directo" de Liapunov.

Considerando un sistema autónomo de ecuaciones no lineales

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0 \qquad (1.3.3.1)$$

sujeto a $x(t_0) = x_0$, se va a desarrollar el llamado " segundo método " o " método directo " del matemático ruso LIAPUNOV, para estudiar la estabilidad del equilibrio de ese sistema en el origen, $x = 0$, sin necesidad de obtener la solución del mismo.

" Segundo método de Liapunov "[8]:

Se define la función de Liapunov, $V(x)$, de la siguiente

[8] En BARNETT(1975), págs. 74 y ss.

manera :

a.- $V(x)$, y todas sus derivadas parciales, $\partial V/\partial x_i$, son continuas.

b.- $V(x)$ es definida positiva, así, $V(0) = 0$, y $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, en algún entorno, $||x|| < k$, del origen.

c.- La diferencial de V es semidefinida negativa, es decir, $\dot{V}(0) = 0$, y para todo $x \neq 0$ / $||x|| < k$, $\dot{V}(x) \leq 0$, siendo $\dot{V}$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n = \qquad (1.3.3.2)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n$$

(f_i son las componentes de la función f de (1.3.3.1)).

$\dot{V}$ podrá obtenerse directamente del sistema de ecuaciones (1.3.3.2), de esta forma, se establecen fácilmente los siguientes teoremas de Liapunov.

TEOREMA III.- El origen del sistema (1.3.3.1) es estable, si existe una función de Liapunov como la descrita antes.

TEOREMA IV.- El origen de (1.3.3.1) es asintóticamente estable si existe una función de Liapunov cuya derivada total o diferencial sea definida negativa. [9]

La Teoría de Liapunov se emplea tanto para modelos lineales como no lineales. Así, para modelos lineales de coeficientes constantes, tales como

$$\dot{x}(t) = A\,x(t),$$

el método a seguir se desarrolla en las líneas siguientes.

La Teoría de Liapunov puede usarse para trabajar directamente con el sistema, extrayendo una función de Liapunov que sea una forma cuadrática

$$V = x^t\ P\ x$$

donde P es una matriz simétrica y real.

Si se sustituye en $\dot{V}$, el sistema $\dot{x} = A\,x$, se tiene

$$\dot{V} = \dot{x}^t\ P\ x + x^t\ P\ \dot{x} = x^t\ A^t\ P\ x + x^t\ P\ A\ x = -\ x^t\ Q\ x$$

$$\text{donde}\quad A^t\ P + P\ A = -\ Q\ .$$

[9] Demostración en BARNETT(1975), pág. 175-176.

Es evidente que la matriz Q es simétrica. Si tanto P como Q son matrices definidas positivas (autovalores positivos, V será una matriz definida positiva, y $\dot{V}$ definida negativa), entonces el sistema $\dot{x} = A x$, será asintóticamente estable en el punto $x=0$. Si Q es definida positiva, y la matriz P es definida negativa o indefinida, V tomará valores negativos en un entorno del origen, por lo que el sistema será inestable.

TEOREMA V.- Una matriz A real es estable si y sólo si para cualquier matriz simétrica definida positiva, Q, la solución, P, de la ecuación $A^t P + P A = - Q$, es también definida positiva.

Mediante procesos de linealización, se puede aplicar la Teoría de Liapunov para estudiar la estabilidad de **modelos no lineales** . Así, suponiendo que $f(x)$ se pueda desarrollar por Taylor en el punto $x=0$, se obtendría

$$\dot{x} = f(x) = A' x + g(x)$$

donde A' es una matriz constante cuadrada de orden n, siendo sus elementos $(\partial f_i / \partial x_j)_{x=0}$, $g(0) = 0$, y $g(x)$ es una función que admite derivadas parciales de segundo orden, por lo menos.

Por tanto,

$$\dot{x} = A' x$$

es una primera aproximación lineal del modelo no lineal.

Si este sistema linealizado, $\dot{x} = A' x$, es asintóticamente estable, entonces $f(x) = \dot{x} = A'x + g(x)$, lo será también; y si es inestable, también lo será el modelo no lineal.[10]

Para la obtención de las funciones de Liapunov que no sean una forma cuadrática [11], se emplean distintos métodos, como lo son el método del gradiente de la función V (BARNETT(1975),págs. 192-194), o el método de ZUBOV (BARNETT(1975),pág.194-196).

La relación entre la estabilidad de un determinado sistema dinámico, y la controlabilidad del mismo, se muestra en el Capítulo siguiente (epígrafe 2.3). Esta relación es de especial importancia para conocer cuándo es posible controlar con éxito un sistema dinámico.

[10] Prueba en BARNETT(1975), página 187.

[11] La obtención de la forma cuadrática que represente a la función de Liapunov requerida, puede conllevar un excesivo tiempo de cálculo. Es en estos casos donde conviene emplear métodos más rápidos de obtención de una función V que cumpla las propiedades exigidas.

2.- LA TEORIA DEL CONTROL OPTIMO : NOCIONES BASICAS.

2.1.- Planteamiento del problema general del control de un sistema dinámico.

Muchos son los problemas ante los cuales los directores de una empresa, o bien, los responsables de la política económica de una nación, se plantean unas normas de acción tendentes al control de determinadas variables consideradas de gran importancia. Los directivos de una empresa podrían estar preocupados por la necesidad de crecimiento o expansión de la entidad que dirigen y ante esta necesidad perseguir que las ventas, por ejemplo, siguieran unas trayectorias temporales deseadas, mientras que el gasto en publicidad se mantuviera en una senda temporal dada, recogiendo esta última un crecimiento proporcionalmente menor que el deseado para las ventas. Un consumidor trataría de maximizar su utilidad a lo largo de toda su vida, por lo que determinaría en base a esto, el consumo y el ahorro en cada instante del tiempo, controlaría dinámicamente qué parte de su presupuesto iría destinada a consumo y qué parte a ahorro. A nivel de política macroeconómica, por ejemplo, un gobierno se plantearía el control de la tasa de inflación y (o) de la tasa de desempleo, a fin de conducirlas lo más próximo a unas tasas consideradas como óptimas (mínimas, dada la coyuntura de la economía internacional), las cuales también podrían cambiar con el paso del tiempo, todo ello sin que se disparara el déficit público y (o) el déficit comercial de la balanza de pagos. En definitiva, el control de ciertas variables económicas es un objetivo permanentemente planteado por los agentes económicos.

Se trata de controlar unas variables que se relacionan entre sí. Estas relaciones podemos creer conocerlas mediante la intuición y el sentido común, pero como ya se ha dicho en el capítulo anterior, cuando se trata de controlar problemas más complejos no basta con esto, sería necesario modelizar dicha situación. Lo que se hace en Economía es representarla formalmente mediante un modelo de ecuaciones dinámicas cuando el problema lo requiere, proporcionado en la mayoría de los casos por la Teoría Económica; ahora bien, antes de aceptarlos como válidos deberían estar contrastados empíricamente, pues no sólo es necesario conocer las relaciones entre las variables y su signo, sino que ha de existir cierto conocimiento acerca de cuáles serían los verdaderos parámetros del modelo para controlarlo, lo cual es bastante costoso en Ciencias Sociales, debiéndonos conformar con las mejores estimaciones posibles de los mismos que pueda proporcionar la Econometría.

Dentro de los métodos de optimización dinámica podemos distinguir dos bloques: los de aproximación variacional

(Cálculo de Variaciones, Teoría del Control Optimo); y, los de programación dinámica. La atención se centrará exclusivamente en los primeros, y más concretamente en la Teoría del Control Optimo.[1]

Según ATHANS & FALB [1966,pág.3 y ss.], los elementos esenciales de un problema de control óptimo son :

1. Un modelo o sistema matemático a "controlar".
2. Un output o resultado deseado para el modelo.
3. Un conjunto de inputs o "controles" admisibles.
4. Un funcional de coste o de beneficio, que mida la efectividad de una determinada acción de control.

El modelo o sistema matemático consiste en un conjunto de relaciones que describen el output o resultado que se alcanza según los inputs empleados. Ya se han comentado en el capítulo previo a éste las cuestiones a tener en cuenta en la construcción de un modelo dinámico que represente el comportamiento de unos fenómenos económicos. Podrían establecerse ciertas restricciones que se incorporarían a ese conjunto de relaciones. Normalmente se establecen restricciones sobre los inputs del sistema, dando lugar a un conjunto de controles admisibles. El objetivo o el output

[1] Para conocer de forma breve las diferencias y similitudes entre los métodos de programación dinámica y los de aproximación variacional, véase TAPIERO (1978),págs.25-29.

deseado puede, en la mayoría de los casos, alcanzarse mediante varios inputs o controles admisibles, por lo que sería necesario medir el beneficio o el coste que supone la elección de un control u otro. Atendiendo a su mayor "beneficio" o menor "coste" se elegiría el control admisible que lo conllevase. En la construcción del funcional objetivo entran en juego no sólo la experiencia y la intuición, sino también el tipo de inputs que se puedan emplear, el sistema de variables establecido y el comportamiento deseado del modelo o sistema.

Una vez decidido el funcional objetivo, el problema de control se formula de la siguiente manera:

Se buscan los inputs (admisibles) que puedan generar el output deseado y que, a la vez, optimicen la medida elegida del rendimiento (minimicen el coste o maximicen la ganancia del control). La Teoría del Control Optimo va a dar la solución del problema de control, tal y como se verá a continuación.

2.2.- Resolución del problema general de control óptimo.[2]

La resolución del problema general de C.O. no es más que la resolución de un problema de optimización, es decir, la búsqueda de un óptimo.

Al igual que en el caso estático de la programación clásica, en la optimización dinámica (en el C.V., en el C.O.,...), se siguen unos pasos análogos : construcción de un funcional objetivo así como una función que incorpore las restricciones realizadas sobre las variables, si es el caso; luego se aplican unas condiciones necesarias para la obtención de los "puntos" extremos; y por último, para determinar el carácter de cada punto crítico, se estudiarán las condiciones de segundo orden o condiciones suficientes.

Antes de mostrar las nociones básicas sobre la Tª del C.O., conviene conocer el C.V., ya que éste es su antecedente inmediato, e incluso algunos autores han derivado el Principio del Máximo de Pontryagin a partir del C.V., siendo este principio la base teórica fundamental en el desarrollo de la Tª del Control Optimo.

[2] Este epígrafe está desarrollado para el caso de modelos dinámicos deterministas en tiempo continuo, y en la forma state-space.

2.2.1.- El Cálculo de Variaciones.

En el C.V. se considera, generalmente, el problema de hallar un extremo de cierto funcional

$$J(x,T) = \int_{t_0}^{T} f(x,\dot{x},t)\,dt \qquad (2.2.1)$$

sujeto o no, a ciertas restricciones, $g_i(x,\dot{x},t) = 0$, $i = 1, 2, ..., r$; siendo x , $\dot{x}$ vectores de n componentes que son función del tiempo. T es el tiempo terminal, y t_0 el tiempo inicial, dando lugar ambos a un intervalo $[t_0, T]$, durante el cual se determina un vector que es extremo, $x^*(t)$, no teniendo por qué ser siempre un punto (caso de la programación clásica), sino que será una función vectorial del tiempo t. Así, esa función que refleje el comportamiento temporal de la variable x deberá cumplir que :

$$\begin{aligned} &J(x,T) - J(x^*,T) \leq 0 \text{ , para todo x (Máximización)} \\ &J(x,T) - J(x^*,T) \geq 0 \text{ , para todo x (Minimización)} \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

En el C.V. se adopta un procedimiento similar al empleado en la programación clásica. En vez de considerar incrementos infinitesimales en torno al punto óptimo, ahora se tratará de curvas de perturbación, $\delta x(t)$, alrededor de la función vectorial $x^*(t)$, de manera que

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \tag{2.2.3}$$

donde $\delta x(t)$ representa una perturbación muy pequeña de $x^*(t)$, siendo además, una función continua del tiempo. Se estudiará qué ocurre con el funcional al variar la senda temporal de las variables del sistema, desde $x^*(t)$ a $x(t)$ durante el intervalo de tiempo $[t_0,T]$.

Si $x^* \longrightarrow x = x^* + \delta x \Longrightarrow J(x^*,T) \Longrightarrow J(x,T)=J(x^*+\delta x,T)$.

La diferencia entre estos dos funcionales, para perturbaciones muy pequeñas, $\delta x(t)$, es [3]

$$J(x^* + \delta x,\ T) - J(x^*,T) \equiv \delta J(x,T) \tag{2.2.4}$$

A $\delta J(x,T)$ se le denomina la perturbación o variación del funcional objetivo, y sería un concepto análogo a la primera derivada en un proceso de optimización clásica.

Para que una función $x^*(t)$ fuera el óptimo, se requerirá simplemente que

$$\delta\ J(x^*,T) = 0 \tag{2.2.5}$$

Y esto implica, <u>siempre que $J(x,T)$ sea diferenciable</u>,

[3] Mediante el desarrollo de Taylor se llega a la expresión (2.2.4).

para el funcional (2.2.1) que

$$\delta J(x^*,T) = \int_0^T [f_x(x,\dot{x},t)\ \delta x + f_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)\ \delta\dot{x}]\ dt = 0 \qquad (2.2.6)$$

donde f_x es $\partial f/\partial x$, y $f_{\dot{x}}$ es $\partial f/\partial\dot{x}$, y δx es una función arbitraria continua, que cumple que $\delta x(0) = 0 = \delta x(T)$. Siendo $\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$.

Integrando por partes

$$\int_0^T \delta\dot{x}\ f_{\dot{x}}\ dt = \delta x\ f_{\dot{x}}\Big]_0^T - \int_0^T (df_{\dot{x}}/dt)\ \delta x\ dt = 0 - \int_0^T (df_{\dot{x}}/dt)\delta x\ dt \qquad (2.2.7)$$

Se han omitido los argumentos de las funciones para abreviar la notación. Sustituyendo en (2.2.6)

$$\delta J = \int^T \left[(\ f_x - (df_{\dot{x}}/dt)\ )\ \delta x \right] dt = 0 \qquad (2.2.8)$$

A partir de (2.2.8) se obtiene la **ecuación de Euler** [4]

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0 \qquad (2.2.9)$$

[4] Ver obtención de la ecuaciones de Euler en TU, P.N.V. (1981) páginas 11-14.

La solución, $x^*(t)$, a esta ecuación es el extremo del funcional $J(x,T)$, si existe.

Las ecuaciones de Euler proporcionan solamente las condiciones necesarias en el C.V.. El estudio de las condiciones de segundo orden o condiciones suficientes para C.O. se explica brevemente en el epígrafe 2.2.3 .

2.2.2.- Solución del problema de C.O. .

La Teoría del Control Optimo (C.O.) tuvo sus orígenes como tal a finales de los años 50. PONTRYAGIN estableció el llamado Principio del Máximo [5], que se constituyó en la base teórica fundamental para posteriores desarrollos de la Teoría del C.O.. El Cálculo de Variaciones puede considerarse como un caso particular dentro de la Tª del C.O., pero aún así, esta última ha sido desarrollada por algunos autores a partir del Cálculo de Variaciones (C.V.). Este último tiene en su aplicación serias limitaciones que la Tª del C.O. ha resuelto satisfactoriamente, como son los casos de existencia de restricciones de desigualdad o de pertenencia de las

[5] Ver PONTRYAGIN (1962). Para el caso de modelos dinámicos en tiempo discreto no es aplicable el principio de Pontryagin. No existe un principio como éste para este caso, a menos que se hagan supuestos acerca de la convexidad del conjunto de variables de estado. Ver epígrafe 5.2 del capítulo 5 acerca de control de modelos en tiempo discreto.

variables de estado y de control a conjuntos cerrados, así como en la resolución de algunos problemas concretos, como los de control lineal.

En el problema del C.O., como ya se ha dicho, se trata de emplear determinadas variables, u(t), para conducir al sistema dinámico $\dot{x} = g(x,u,t)$, desde una situación inicial a un punto terminal proporcionando, a la vez, un extremo a un funcional objetivo dado,

$$J(x) = \int_{t0}^{T} f(x,u,t)\, dt \qquad (2.2.10)$$

La solución en el problema de C.O. se obtiene primero definiendo el Hamiltoniano [6] como

$$H \equiv f + p\,\dot{x} \qquad (2.2.11)$$

Se tiene que

$$F = H - p\,\dot{x} \qquad (2.2.12)$$

Aplicando después el Teorema de Euler, obtenemos :

[6] El Hamiltoniano es la función análoga a la función Lagrangiana en el caso de la programación clásica. Se suprimen, además, los argumentos de las funciones para abreviar la notación.

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = H_x + \dot{p} = 0 \qquad (2.2.13)$$

$$F_u - \frac{d}{dt} F_{\dot{u}} = H_u = 0 \qquad (2.2.14)$$

Estas son las ecuaciones de Euler en forma canónica [7], resolviéndolas obtendremos la solución, el control óptimo, siempre que exista.

A continuación se desarrolla la derivación del Principio del Máximo de Pontryagin a partir del C. V. en el caso en el que el tiempo final no está especificado, aunque la función residual, S[x(T),T], que es la que proporciona el valor del programa en el tiempo final, está dada, y las variables de control y de estado pertenecen ambas a conjuntos abiertos, sin estar acotados sus valores.

Tomando fijados el tiempo inicial, t_0, y el estado inicial, x_0, no se pierde generalidad $(t_0,x(0)) = (0,x_0)$.

El problema a tratar es la elección del vector de

[7] Las ecuaciones de Euler en forma canónica reflejan un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, y se obtienen a partir de la construcción del Hamiltoniano. De esta manera, teniendo, por ejemplo, un conjunto de n ecuaciones diferenciales de segundo orden proporcionado por la Ecuación de Euler $[\partial f/\partial x_i - (d(\partial f/\partial \dot{x}_i)/dt)]$, se puede pasar a tener un sistema de (2xn) ecuaciones diferenciales de primer orden. (TU, P.N.V. (1981), pág.72).

controles admisibles, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$, de la clase de funciones vectoriales continuas, que conduzca al sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad (2.2.15)$$

desde un estado inicial, (x_0, t_0) a un no especificado estado final $(x(T), T)$, impartiendo un máximo o un mínimo a un funcional objetivo

$$J(u) = S[x(T), T] + \int_0^T f_0(x, u, t)\, dt \qquad (2.2.16)$$

donde,

$x(t)$, es un vector de n componentes no acotadas.

$u(t)$, vector de r componentes no acotadas.

$S[x(T), T]$, es la función residual.

$f_0(x, u, t)$, es una función escalar "bien comportada".[8]

$f[x(t), u(t), t]$, es una función vectorial "bien comportada".

Lo que dice el Principio del Máximo de Pontryagin es lo siguiente :

Sea $u^*(t)$ un vector de controles admisibles que conduce

[8] Por función " bien comportada " se entenderá que es una función que cumplirá la propiedad de diferenciabilidad en el intervalo $[t_0, T]$, y por tanto será continua y derivable en el mismo.

(x_0,t_0) a $(x(T),T)$, donde estos últimos, estado y tiempo, no están especificados. Sea $x^*(t)$ la trayectoria asociada a $u^*(t)$. Para que $u^*(t)$ sea óptimo, es necesario que exista una función vectorial continua[9], no nula, $p^*(t)=(p^*_1(t),p^*_2(t),\ldots, p^*_n(t))$, y un escalar constante, p_0, de manera que :

(a) $p^*(t)$ y $x^*(t)$ sean las soluciones del sistema canónico

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*,p^*,u^*,t) \qquad (\dot{x} = H_p) \qquad (2.2.17)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*,p^*,u^*,t) \qquad (\dot{p} = -H_x) \qquad (2.2.18)$$

donde

$$H \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i f_i(x,p,u,t) \equiv f_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x,u,t) \qquad (2.2.19)$$

será el Hamiltoniano, normalmente empleado, con $p_0 \equiv 1$.

(b) $H(x^*,u^*,p^*,t) \geq H(x^*,u,p,t)$ para máximo. (2.2.13)

$H(x^*,u^*,p^*,t) \leq H(x^*,u,p,t)$ para mínimo. (2.2.14)

[9] A esta función vectorial se le denominará variable de co-estado o variable dual. Es el análogo al multiplicador de Lagrange en la programación clásica.

(c) Todas las condiciones de transversalidad se cumplen.[10]

Este Teorema puede desarrollarse a partir del Cálculo de Variaciones. Veamos a continuación cómo es este desarrollo. Hay que optimizar el siguiente funcional objetivo:

$$J(u) = S[x(T),T] + \int_0^T f_0(x,u,t)\, dt \qquad (2.2.20)$$

sujeto a

$$\dot{x}(t) = f[x(t),u(t),t] \qquad (2.2.21)$$

donde

$x(t)$ y $u(t)$ son vectores de n y r componentes respectivamente como ya se ha dicho anteriormente,

$x(0)= x_0$, $t_0 = 0$,

$x(T)$, T no están especificados.

La función residual $S[x(T),T]$ se puede escribir

[10] Estas condiciones permiten la obtención de las parámetros arbitrarios que puedan aparecer en la solución del sistema en su forma canónica.

como

$$S[x(T),T] - S[x_0,0] + \int_0^T \left(\frac{d}{dt} S[x(t),t] \right) dt \qquad (2.2.22)$$

El funcional objetivo (2.2.20) quedará así

$$J(u) = S(x_0,0) + \int_0^T \left[f_0(x,u,t) + \frac{d}{dt} S(x,t) \right] dt =$$

$$= S(x_0,0) + \int_0^T [f_0(.) + (\partial S_x/\partial x) + (\partial S/\partial t)] \, dt \qquad (2.2.23)$$

Se han suprimido los argumentos de las funciones para abreviar la notación. Como $S(x_0,0)$ será un valor constante, no afectará al proceso de optimización, la solución será la misma, aunque distinto será el valor del funcional objetivo, por lo que se prescinde de este término a lo largo de las siguientes deducciones.

El funcional aumentado, es decir, el que incorpora la restricción, $\dot{x} = f(x,u,t)$, es el siguiente :

$$J_a(u) \equiv \int_0^T F(x,\dot{x},p,u,t) \, dt \qquad (2.2.24)$$

Donde

$$F(x,\dot{x},p,u,t) = f_0 + (\partial S/\partial x)\, \dot{x} + \partial S/\partial t + p\, [f - \dot{x}] \qquad (2.2.25)$$

$$\equiv H(x,u,p,t) - p\,\dot{x} + (\partial S/\partial x)\,\dot{x} + \partial S/\partial t \qquad (2.2.26)$$

Siendo $H(x,u,p,t) \equiv f_0(x,u,t) + p\ f(x,u,t)$ el Hamiltoniano que se emplea normalmente.

Las condiciones necesarias ($\delta J = 0$, ecuación (2.2.8)) que se aplican en un problema de C.V. pueden trasladarse al caso del funcional aumentado (2.2.24)

$$\delta J_a(u) = \int_0^T [(F_x - dF_{\dot{x}}/dt)\delta x + F_u\ \delta u + F_p\ \delta p]dt +$$

$$+ [F_{\dot{x}}\ \delta x + (F - F_{\dot{x}}\ \dot{x})\ \delta t]_{t=T} = 0 \qquad (2.2.27)$$

($t_0 = 0$, estaba fijado)

Sabiendo a qué es igual F y dado que la ecuación de Euler se debe cumplir,

$$F_x - dF_{\dot{x}}/dt = H_x + \partial(S_x\ \dot{x} + S_t)/\partial \dot{x} - \frac{d}{dt}(S_x - p) =$$

$$= H_x + S_{xx}\,\dot{x} + S_{xt} - S_{xx}\,\dot{x} - S_{xt} + \dot{p} = H_x + \dot{p} = 0 \qquad (2.2.28)$$

Quedando

$$\dot{p} = - H_x \qquad (2.2.29)$$

De la misma manera, como δu y δp son variaciones independientes y arbitrarias, es decir, pueden tomar cualquier valor, y (2.2.27) se anulará para cualquier valor de éstas, los coeficientes que las multiplican en (2.2.27), F_u y F_p, deben ser nulos, para que así se satisfagan las ecuaciones de Euler. Como $F_u = H_u$, y $F_p = f - \dot{x} = H_p - \dot{x}$, se tiene que

$$H_u = 0 \qquad (2.2.30)$$

$$\dot{x} = f(x,u,t) = H_p \qquad (2.2.31)$$

Por último, las condiciones de transversalidad son

$$[F_{\dot{x}} \, \delta x + (F - \dot{x} \, F_{\dot{x}}) \, \delta t \,]_{t=T} = 0 \qquad (2.2.32)$$

Pero como $F_{\dot{x}} = S_x - p$, y $F - \dot{x} \, F_{\dot{x}} = H + S_t$, las condiciones de "transversalidad" quedan así

$$\boxed{(S_x - p) \, \delta x \Big|_{t=T} + [H(t) + S_t] \, \delta t \Big|_{t=T} = 0} \qquad (2.2.33)$$

Si el estado del sistema, x(t) y el tiempo inicial no están especificados, (2.2.33) queda como

$$(S_x - p)\ \delta x \Big|_{t=t0}^{t=T} + [\ H(t) + S_t\ ]\ \delta t \Big|_{t=t0}^{t=T} = 0 \qquad (2.2.34)$$

Por lo que se puede comprobar que (2.2.29), (2.2.30), (2.2.31) y (2.2.34) son los resultados del Principio del Máximo de Pontryagin. A la vista de estos, se pueden hacer las consideraciones expresadas a continuación.

La condición (b) del Teorema de Pontryagin es el llamado Principio del Máximo. Al hacer $H_u = 0$, se obtiene el vector óptimo de variables de control, llevando al funcional a un máximo si $H_{uu} < 0$, ó a un mínimo si $H_{uu} > 0$, siempre y cuando se esté trabajando con controles, $u_i(t)$, no acotados. Cuando el vector de variables de control pertenece a un conjunto cerrado, la ecuación o condición $H_u = 0$ no proporciona el máximo de H para cualquier punto interior de dicho conjunto cerrado de controles. Además, si H es una función monótona creciente de u ($H_{ui} > 0$, $\forall\ u_i \in U$), el control óptimo es el u_{iMAX} para un problema de maximización, y el u_{iMIN} para el caso de minimización, por lo que $H_u = 0$ tampoco proporcionaría el control óptimo $u^*(t)$.

El vector p, juega el papel que jugaba el multiplicador de Lagrange en el caso de la optimización estática. Es el precio sombra de x, es decir, cómo varía el funcional objetivo, en el óptimo, si varía en un incremento la variable de estado x(t) en el instante del tiempo t.

Las ecuaciones (2.2.29), (2.2.30), y (2.2.31) proporcionan las condiciones necesarias del problema de control.(Ver CUADRO 2.I).

CUADRO 2.I.- **Condiciones necesarias del problema de control.**

$$\dot{p} = - H_x \tag{2.2.29}$$

$$H_u = 0 \tag{2.2.30}$$

$$\dot{x} = f(x,u,t) = H_p \tag{2.2.31}$$

Son un conjunto de (2xn) ecuaciones diferenciales de primer orden (ecs. (2.2.29) y (2.2.31)), y un conjunto de r relaciones algebraicas (ec. (2.2.30)), que se deben satisfacer a lo largo del intervalo [0,T]. La solución de (2.2.29) y de (2.2.31) contiene 2n constantes de integración, si sustituimos la solución de (2.2.30), $u^*(t)$, en ellas. Para obtener éstas, se tienen n ecuaciones del tipo $x(0) = x_0$, y n ecuaciones $S_x - p = 0$ para $t = T$. Si T no está especificado, se determina por la ecuación $H(t) + S_t = 0$ en $t = T$. Existirán, por tanto, las condiciones frontera o de transversalidad en número suficiente para obtener las constantes arbitrarias.[11]

En el caso de un problema de control con horizonte temporal infinito, las condiciones de transversalidad, al ser T = ý , serán análogas a las del caso donde $x(T)$ no está especificado con horizonte temporal finito (caso de la llamada "frontera natural").[12]

2.2.3.- Condiciones suficientes.

La condición (b) del Teorema de Pontryagin cubre tanto la condiciones necesarias como las condiciones de segundo orden.

Las variaciones totales del funcional aumentado, $J_a(u)$, son

$$\Delta J_a(u) \equiv J_a(u) - J_a(u^*) = \delta J_a(u) + \delta^2 J_a(u) + \theta(u) \qquad (2.2.35)$$

[11] Las distintas combinaciones de condiciones frontera que pueden darse pueden encontrarse en TU, P.N.V. (1981) en la Tabla de la pag. 127.

[12] Ver tabla TU, P.N.V. (1981), pág.127.

Despreciando los términos de orden superior, como $\theta(u)$, y cumpliéndose la condición necesaria de que para un extremo las variaciones de primer orden se anulan, se puede decir que el signo de $\Delta J_a(u)$ depende del signo de la segunda variación, $\delta^2 J_a(u)$, que debe ser no positiva para un máximo relativo, y no negativa para un mínimo relativo.

Despreciando la función residual, S(x,t) = 0, la segunda variación es

$$\delta^2 J_a(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (\delta x, \delta u) \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt$$

$$\delta^2 J_a(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [\delta x^t H_{xx}\, \delta x + 2\delta x^t H_{xu}\, \delta u + \delta u^t H_{uu}\, \delta u]\, dt \tag{2.2.36}$$

donde

$H_{xx} = [\, \partial^2 H / \partial x_i\, \partial x_j]$ en el punto óptimo, y $H_{xu} = H_{ux}$

$\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$, siendo $\delta x_i(0) = 0$ para todo i

$\delta u = (\delta u_1, \delta u_2, \ldots, \delta u_r)$

El término $[\delta u^t\ H_{uu}\ \delta u]$ va a ser en términos absolutos mayor que los otros términos de $\delta^2 J_a(u)$ en (2.2.36), siendo la parte principal en la determinación del signo de esta segunda variación.[13] Así, un control $u^*(t)$ será un máximo (mínimo) relativo del funcional J si satisface $H_u=0$ para todo $t \in [0,T]$ y si $\delta^2 J_a(u) \leq 0$ (≥ 0 para mínimo), para todo par de vectores no nulos cualesquiera (δu, $\overline{\delta u}$). Esto indica que H_{uu} en el punto $u = u^*$ es una matriz definida negativa (positiva) para máximo (mínimo), así como que la matriz de (n+r)x(n+r)

$$\begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ & \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix}$$

es semidefinida negativa(positiva) para el caso de un máximo (mínimo).

Por último, atendiendo a la concavidad o convexidad del Hamiltoniano, podemos decir que en el problema de control en el que los puntos final e inicial están fijados, si las funciones son cóncavas (convexas) en x y en u , para un determinado p, entonces las condiciones necesarias serán también suficientes para la maximización (minimización) del problema.

---

[13] Debido a que $\delta x(0)=0$, para pequeñas variaciones δu se espera que genere una pequeña variación Ùx, pero no al revés. De esta manera, puede aplicarse la condición de Legendre del C.V. para poder afirmar que las variaciones δu van a cubrir las variaciones δx. Ver en TU, P.N.V.(1981) págs. 91-93.

2.3.- Estabilidad y Control óptimo.

Cuando nos encontramos ante un problema de estabilidad con control, es conveniente definir un concepto de estabilidad distinto al empleado en el anterior capítulo. Así, si antes la estabilidad se definía a partir de perturbaciones respecto de un estado de equilibrio, ahora el concepto es distinto.

Dado un modelo o sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x,u,t), \text{ con } f(0,0,t) = 0$$

con un output $y = g(x,u,t)$, se dice que es estable en términos de variables acotadas, si para todo input (control) acotado, se produce un output también acotado.

Así, si $||u(t)|| < ß_1$, para $t \geq t_0$, donde $ß_1 > 0$, existirá un $ß_2 > 0$ / $||y(t)|| < ß_2$ para todo $t \geq t_0$.

Para el caso de un sistema lineal input-output

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

Se tiene que :

Si $\dot{x} = A x$ es asintóticamente estable , el sistema (2.3.1) será estable en el sentido de input acotado-output acotado.[14]

Esto no se cumple para sistemas con coeficientes variables, a no ser que para todo t , las normas de $B(t)$ y $C(t)$, estén acotadas, y la norma de la matriz de transición[15], también, además de tender a cero si $t \rightarrow \infty$, indistintamente del tiempo inicial, t_0 .

---

[14] Prueba en BARNETT (1975), pág.197.

[15] Matriz de transición de estado : Matriz que relaciona el estado de un sistema en cualquier instante t, $x(t)$, con el estado en otro instante del tiempo distinto, $x(t_0)$.

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\, x_0$$

2.4.- Controlabilidad y Observabilidad .

2.4.1.- Controlabilidad.

La controlabilidad de un sistema dinámico hace referencia a la existencia de un control u(t) que sea capaz de conducir un sistema dinámico desde un estado inicial dado, x_0, en el tiempo $t = t_0$, a un estado final, x_T , dado en $t = T$.

Dado un sistema lineal con coeficientes variables definido por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = A(t)\ x(t) + B(t)\ u\ (t) \qquad (2.4.0.a)$$

$$y = C(t)\ x(t) \qquad (2.4.0.b)$$

donde A es un matriz cuadrada de orden n, B es una matriz de orden nxm , y C es de orden rxn. Se dice que este sistema es **COMPLETAMENTE CONTROLABLE** si para todo t_0, para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0$ y para cualquier estado final dado, x_T , existe un instante de tiempo finito $t_1 > t_0$ y un control u(t) para el intervalo $[t_0, t_1]$, de manera que $x(t_1) = x_T$.

Existen otros conceptos más relajados de controlabilidad, que se derivan de exigir la controlabilidad pero no para todo instante inicial t_0, o no para todo estado final dado , x_T; sino para unos valores concretos de los mismos.

Tomando como estado terminal, $x(T) = 0$, como el que hay que alcanzar a partir de x_0, en el sistema dinámico a controlar (2.4.1), no se perderá generalidad

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \text{ con } x(t_0) = x_0 \qquad (2.4.1)$$

siendo $A(t)$ una matriz cuadrada de orden n, $B(t)$ es una matriz de (nxr).

Considerando que $A(t)$ y $B(t)$ sean constantes, (2.4.1) será un sistema invariante en el tiempo. Para este caso se desarrollará la obtención de las condiciones que un sistema debe cumplir para ser controlable, mientras que para sistemas variables en el tiempo, con matrices de coeficientes variables en el tiempo, los cálculos serían más complicados , pero se llegaría a la misma conclusión.

La condición para que un sistema como (2.4.1) con matrices constantes, $A(t) = A$ y $B(t) = B$, es que la matriz (2.4.2) de (nxrn), tenga el máximo rango, n.

$$\boxed{\tilde{N} \equiv [B \quad A\,B \quad A^2\,B \quad \ldots \quad A^{n-1}\,B\,] \qquad (2.4.2)}$$

A esto se llega partiendo de la solución del sistema

$$x(t) = e^{At}\,(x_0 + \int_0^T e^{-At}\,B\,u(t)\,dt) \qquad (2.4.3)$$

En el tiempo terminal, T, x(T) =0 y (2.4.3) queda

$$0 = x_0 + \int_0^T e^{-At}\,B\,u(t)\,dt \qquad (2.4.4)$$

Por el teorema de Caley-Hamilton [16], y por el hecho de que e^{At} es un polinomio en A de grado (n-1) como máximo

$$e^{-At} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\,A^i\,(t^i/i!) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t)\,A^i \qquad (2.4.5)$$

donde $c_i(t)$ son funciones escalares del tiempo, t.

Sustituyendo (2.4.5) en (2.4.4), escribiendo los

[16] Ver AOKI,M. (1976), capítulo 3, pág. 80-81, primer Teorema de Caley-Hamilton.

vectores control como sus coordenadas en base canónica por la matriz formada por los vectores que la componen, donde e^j es el vector j-ésimo de la base canónica, $(u(t)\ I \equiv \Sigma\ u_j(t)\ e^j)$, se tiene

$$- x_0 = \int_0^T (c_0\ I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_{n-1} A^{n-1})\ B\ u(t)\ dt \equiv$$

$$\equiv \int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t)\ A^i\ B\ u(t)\ dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} c_i(t)\ u_j(t)\ A^i\ B\ e^j \equiv$$

$$\equiv \int_0^T I^t\ [\ CU\ ]\ \tilde{N}\ \ dt - \left[\int_0^T [\ CU\ ]\ dt \right] \tilde{N} \qquad (2.4.6)$$

donde

$$I = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ . \\ . \\ . \\ e^r \end{bmatrix}; \quad CU = \begin{bmatrix} c_0 u_1 & c_1 u_1 & \ldots & c_{n-1} u_1 \\ c_0 u_2 & c_1 u_2 & \ldots & c_{n-1} u_2 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ c_0 u_r & c_1 u_r & \ldots & c_{n-1} u_r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N} = [\ B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B\ ]$$

Se puede ver fácilmente en (2.4.6) que x_0 pertenece al espacio generado por las columnas de Ñ, por lo que el sistema (2.4.1) será controlable si y sólo si Ñ , definida en (2.4.2) tiene por rango el máximo, n. De esta forma es posible que exista un vector u(t) que conduzca al sistema (2.4.1) desde x_0 hasta x(T) = 0 . Si Ñ tuviera por rango ñ /rg(Ñ)= ñ < n, entonces algunos estados terminales, x(T), no se podrían generar (alcanzar) a partir de alguno de los controles admisibles.

En el caso particular de que la matriz constante de coeficientes que multiplican a las variables de control, B, sea igual a un vector de (nx1) al existir una sola variable control , la condición de controlabilidad del sistema resultante se puede reducir a exigir que la matriz Ñ sea regular o no-singular.

2.4.2.- Observabilidad.

La observabilidad se refiere a la posibilidad de determinar el estado de un sistema midiendo sólo su output o resultado. Se plantea cuando hay problemas reales de medición de las variables de estado que son las que se quieren controlar de forma directa.

Un estado x_0 se dice que es observable en t_0 si, dado un control u(t), el conocimiento de $(t_0,t_1]$ y del output en ese mismo intervalo, $(t_0,t_1]$, es suficiente para determinar x_0. Si todo estado x_0 es observable en t_0, se dice que el sistema es observable en t_0. Por último, si todo estado x_0 es observable en todo t del intervalo de definición del sistema, se dice que el sistema es **COMPLETAMENTE OBSERVABLE**, o simplemente observable.

Observabilidad y controlabilidad están unidas, lo que se va a tener en cuenta para demostrar cuáles van a ser las condiciones que un sistema dinámico debe cumplir para ser observable.

Considerando el sistema (2.4.1) con coeficientes constantes

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t) \qquad (2.4.7)$$

$$y(t) = C\, x(t) \qquad (2.4.8)$$

Sustituyendo en (2.4.8) la expresión de x(t) por (2.4.3)

$$y(t) = C\, e^{At}\, (x_0 + \int_0^T e^{-At}\, B\, u(t)\, dt) \qquad (2.4.9)$$

En (2.4.9) se puede ver que y(t) y u(t) determinan x_0 para todo $t \in [0, T]$. Considerando, para simplificar, que $u(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$. De esta manera, (2.4.9) queda expresado de forma más sencilla

$$y(t) = C\, e^{At}\, x_0 = C\, [c_0\, I + c_1\, A + \ldots + c_{n-1}\, A^{n-1}]\, x_0 \qquad (2.4.10)$$

Las condiciones de observabilidad se reducirán a que la matriz Z, tenga el máximo rango

$$\boxed{Z \equiv [C' \quad A'C' \quad \ldots \quad (A')^{n-1}\, C'\,] \qquad (2.4.11)}$$

O bien, si B es un vector, se tratará de que esta matriz sea no-singular o regular.

El problema de la observabilidad de las variables de estado de un sistema aparece por la dificultad de obtener los datos que reflejen su evolución real, única y exclusivamente. Los datos que son accesibles son los de los resultados, siéndolo de variables input así como de combinaciones de variables de estado la mayoría de las veces. La observabilidad tiene sentido planteársela en este contexto, cuando aparezcan las variables output en el sistema dinámico en sustitución de las vv. de estado (problemas de regulador y de seguimiento del output, ver capítulo 3).

Ante este problema real de la obtención de datos o mediciones de las variables de estado, tendremos que conformarnos con los de las variables output o resultado, siendo necesario que el sistema sea completamente observable para que pudiera obtenerse una solución en el problema del regulador-output o del seguimiento del output, que se van a plantear en el capítulo siguiente cuando se traten los problemas de control con estabilización.

3.- CONTROL OPTIMO Y ESTABILIZACION DE SISTEMAS ECONOMICOS DINAMICOS.

3.1.- Introducción.

Las fluctuaciones y oscilaciones son inherentes a las economías capitalistas, así como a las de planificación centralizada, que también las sufren, aunque estas últimas con un carácter más reducido, en parte por las relaciones con el entorno internacional, y en parte por su propio pasado histórico. Estas oscilaciones afectan a los precios, las macromagnitudes como el PNB, las exportaciones, los tipos de cambio, tasas de desempleo, etc. La estabilización trata de eliminar esas fluctuaciones, de manera que en un problema de control con estabilización, se intentará alcanzar un output o resultado deseado mediante unos determinados inputs o variables de control, logrando a la vez una disminución de las fluctuaciones de todas las variables económicas, es decir, minimizandolas en aras de la estabilización del sistema.

Se van a estudiar dos modelos de control con estabilización:

- Modelos de Regulador Lineal.
- Modelos de Seguimiento Lineal.

Estos últimos, los de Seguimiento Lineal, constituyen una importante clase de control muy empleada en el análisis de distintos tipos de política y planificación macroeconómica (modelos de tipo multiplicador-acelerador), proporcionando soluciones a modo de leyes feedback de control lineales.

El objetivo del problema de Seguimiento lineal es minimizar las desviaciones del sistema entorno a un nivel deseado, tratando de emplear al mínimo las variables de control. El modelo de Regulador lineal es un caso especial del anterior, pero el nivel deseado respecto al cual se miden las desviaciones es cero[1], manteniendose constante a lo largo del tiempo para cada variable output, de estado y de control, lo que quiere decir que se trata de emplear al mínimo los controles para que sean mínimas las desviaciones.

Por esto, en los dos tipos de problemas se planteará el mismo funcional objetivo, consistente en una suma de formas cuadráticas a minimizar. La causa de la elección de este tipo de funcional se explica a continuación.

[1] Que sea cero no es restrictivo porque todas las variables pueden redefinirse, recogiendo no valores absolutos, sino desviaciones respecto a los niveles óptimos.

3.2.- Planteamiento del problema.

Dado un sistema dinámico lineal determinista en tiempo contínuo y con coeficientes variables, con variables de estado, x(t), variables de control, u(t), y variables output, y(t), que venga representado por las siguientes ecuaciones :

$$\dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \tag{3.2.1}$$

$$y(t) = C(t)\ x(t) \tag{3.2.2}$$

donde

$x(t) = (\ x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)\ )$

$u(t) = (\ u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_r(t)\ )$

$y(t) = (\ y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_m(t)\ )$

A(t) es una matriz cuadrada de orden n.

B(t) es una matriz de orden (nxr)

C(t) es una matriz de orden (mxn)

En el planteamiento teórico u(t) no está restringido de ninguna manera, pudiendo tomar cualquier valor, ningún control pertenece a un conjunto cerrado.[2] El objetivo es

[2] Se desarrolla la exposición, por tanto, para problemas de control no lineal, evitando las técnicas de control "bang-bang".

controlar el sistema que viene dado por (3.2.1) y (3.2.2) de manera que el vector output y(t) esté próximo al vector $\hat{y}(t)$, vector que refleja el nivel deseado a alcanzar en cada instante del tiempo. Es un vector de m componentes, $(\hat{y}_1(t),...,\hat{y}_m(t))$, siendo cada una de ellas el output "deseado" para la correspondiente variable componente del vector output , y(t).

También puede definirse un vector de error, e(t), como

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{3.2.3}$$

La idea sería buscar el control u(t) que hiciera en alguna medida mínimo ese error.

Al no estar restringido u(t) en su magnitud, se darán casos en los que el control sea excesivo (la norma del vector de control sea un número real positivo muy elevado). Asumiendo que el control va a suponer un coste (económico), se tratará de minimizar el error, pero sin emplear innecesariamente amplios controles. De entre todas las combinaciones de variables de control admisibles se elegirán las que minimicen el error y supongan un menor coste.

Estos requerimientos deben plasmarse en el funcional objetivo y su correspondiente expresión analítica :

Minimizar (3.2.4)

$$J = \frac{1}{2} e(T)^t \, S \, e(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [e(t)^t \, Q(t) e(t) + u(t)^t M(t) u(t)] dt$$

donde

T es el tiempo terminal especificado.

S es una matriz constante de orden m , simétrica y semidefinida positiva.

Q(t) es una matriz de orden m , simétrica y semidefinida positiva.

M(t) es una matriz de orden r , simétrica y definida positiva.

Son matrices de pesos relativos de las fluctuaciones del sistema. Pesos relativos dados por el agente decisor que construye el modelo para penalizar las oscilaciones y el gasto en control. Más adelante, en otros apartados, se verá en la práctica como pueden darse esos pesos relativos.[3]

[3] Ver Capítulo 5, epígrafe 5.7.

Antes de avanzar en la resolución de este tipo de problemas, conviene explicar por qué adoptan esta forma, o mejor dicho, por qué se exigen estas características a las distintas variables y parámetros que intervienen, y cuál es su sentido económico.

El sistema dinámico (3.2.1) está representado de la forma más general, por lo que las matrices de coeficientes, A(t) y B(t) son variables. El objetivo es minimizar (3.2.4), es decir, se busca guiar el sistema dinámico (3.2.1) desde un nivel inicial hasta uno terminal con las menores oscilaciones en x(t) o en y(t), así como en las variables instrumentales, u(t). Para estas últimas, se estaría minimizando el coste del control, en tanto que sus fluctuaciones reflejan el uso de controles.

El funcional es, como ya se ha dicho, la suma de formas cuadráticas de signo no negativo. Tratar de controlar unas determinadas variables, minimizando sus fluctuaciones y el coste del uso del control, obliga a que el funcional objetivo no pueda ser la mera suma de las fluctuaciones; pues podrían compensarse las de signo positivo con las de signo negativo, aun siendo de gran magnitud ambas (fuertes alzas compensarían fuertes bajas). No se conseguiría la estabilización perseguida, aunque se minimizara ese funcional erróneo. Esta es una de las causas por las que se pretenderá minimizar una suma de formas cuadráticas no negativas, para asegurar la consecución de una verdadera estabilización del sistema. Siendo formas cuadráticas se evita que las variaciones de $y_i(t)$, $x_j(t)$, y $u_k(t)$, de un determinado signo se compensen con las de signo opuesto en esas mismas variables. Y por ser formas cuadráticas no negativas, se evitan las compensaciones entre fluctuaciones de distintas variables.

Por otra parte, un funcional objetivo que podría servir para recoger el deseo de estabilizar el sistema, pero penalizando de igual forma (no se eleva al cuadrado) las fluctuaciones de gran magnitud y las pequeñas, sería el siguiente :

$$J = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(T)\left|e_i(T)\right| + \int_{t_0}^{T} \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)\left|e_i(t)\right| + \sum_{j=1}^{r} ß_j(t)\left|u_j(t)\right|\right] dt \tag{3.2.5}$$

Con $\alpha_i(t) \geq 0$ para todo i.

$ß_j(t) > 0$ para todo j.

Los coeficientes $ß_j(t)$ deben ser estrictamente mayores que cero, porque si no fuera así se podría alcanzar el mínimo de este funcional,pero sin alcanzar el objetivo planteado en el problema: minimizar las fluctuaciones de x(t) con el mínimo empleo de las variables de control. Si se pondera el uso de alguna variable $u_j(t)$ con un coeficiente nulo, entonces no se está dando importancia a su empleo, lo que va en contra del planteamiento antes mencionado.

Retomando el funcional (3.2.4), se podrá apreciar que cumple todas estas consideraciones. Si se expresa (3.2.4) en forma de sumatorios :

$$J = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} s_{ij}\, e_i(T)\, e_j(T) \right] +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{t0}^{T} \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} q_{ij}\, e_i\, e_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} m_{ij}\, u_i\, u_j \right) \right] dt \qquad (3.2.6)$$

donde q_{ij}, m_{ij}, e_i, y u_j se expresarán, para abreviar las ecuaciones, sin los argumentos de que dependen.

Como $Q(t)$ y S son matrices con signo de semidefinida positiva :

$$e(T)'\, S\, e(T) \geq 0 \quad , \quad \forall\, t \qquad (3.2.7)$$

$$e(t)'\, Q(t)\, e(t) \geq 0 \quad , \quad \forall\, t \qquad (3.2.8)$$

Se puede alcanzar el mínimo sin haberse producido oscilaciones en las variables a controlar, o mejor dicho, sin haberse producido fluctuaciones con importancia para el que toma las decisiones políticas, reflejado esto en las ponderaciones que inicialmente había concedido a aquellas.

La matriz M(t) es definida positiva, ya que si tuviera el mismo signo que Q(t) o que S, cabría la posibilidad de obtener un control óptimo, $u^*(t) \neq \theta$, pero con $u(t)'M(t)u(t)$ igual a cero, lo cual implica que no estaría valorando el empleo continuado en el tiempo de este control, o sea, el gasto que supondría, lo que iría en contra del planteamiento inicial, al igual que ocurría con el funcional (3.2.6) y los coeficientes $ß_j$.

Se ha considerado también que las matrices S, Q(t) y M(t) eran matrices simétricas, pero además se podría suponer que fueran matrices reales, lo cual no es ningún supuesto excesivamente fuerte. Como son matrices de pesos relativos dados a las fluctuaciones de las variables del sistema por el agente decisor, no es muy extraño suponer que estos pesos sean números reales para el caso de S, y funciones reales del tiempo para el caso de las matrices Q(t) y M(t). Así pues, si son matrices simétricas y reales, serán diagonalizables[4] , y las matrices diagonales semejantes a S, Q(t), y M(t),

[4] Ver MUÑOZ; DEVESA; MOCHOLI; GUERRA (1988),pp. 183-185.

representarán a la misma forma cuadrática, pero respecto a bases distintas. Se podrá obtener la expresión canónica de dichas formas cuadráticas, de manera que el funcional objetivo resultante sería :

$$J = \frac{1}{2}\, b(T)'D_s\, b(T) + \frac{1}{2}\int_{t0}^{T} [(b'D_q\, b)+(v'D_m\, v)]dt \qquad (3.2.9)$$

donde D_s, $D_q(t)$ y $D_m(t)$ son las matrices diagonales semejantes y congruentes con S, Q(t) y M(t), respectivamente. También se ha suprimido el término t para aligerar la expresión. Expresando este funcional en forma de sumatorios, por tanto, empleando las expresiones canónicas de las formas cuadráticas que representan a esas matrices, tenemos :

$$J=\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m}\alpha_i [b_i(T)]^2 + \frac{1}{2}\int_{t0}^{T} [\ \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, b_j^2 + \sum_{k=1}^{r} \mu_k v_k^2]dt \qquad (3.2.10)$$

donde

α_i son los autovalores de S, siendo $\alpha_i = 0$ para todo i.

γ_j son los autovalores de Q, siendo $\gamma_j = 0$ para todo j.

μ_k son los autovalores de M, siendo $\mu_k > 0$ para todo k.

(μ_k y γ_j son funciones del tiempo al serlo Q y M).

b es el vector error respecto a una base distinta a la que estaba referido e ($e= y - \hat{y}(t)$).

v es el vector de control referido a una base distinta de la que venía referido u.

El sentido económico que tiene el hecho de ser diagonalizables estas matrices, radica en que el político, o los agentes que establecen las políticas a seguir, dan pesos, solamente, a las fluctuaciones de cada variable (al cuadrado), pero no se da peso a las oscilaciones cruzadas, lo que está más próximo a la realidad, pues es más complicado valorar la importancia político-económico-social de esas fluctuaciones cruzadas, así como el gasto cruzado de distintos controles.

Lo único que faltaría por explicar de la expresión del funcional objetivo (3.2.4) es la aparición de " 1/2 " multiplicando. La causa estriba en exigir que S, Q, y M fueran simétricas. Si no lo fueran en un principio, se podría llegar al mismo funcional con otras matrices de ponderaciones que representaran a la misma forma cuadrática, y que fueran simétricas. Cualquier forma cuadrática que venga representada por matrices no simétricas, puede venir caracterizada de manera única, y con respecto a la misma base, mediante una matriz simétrica.[5]

---

[5] Ver MUÑOZ, DEVESA, MOCHOLI, GUERRA.(1988),pp. 236-237.

Otra consideración que debe hacerse acerca de las matrices de pesos relativos, Q(t) y M(t), es que son variables en el tiempo en vez de constantes. De esta forma se puede construir un funcional objetivo más realista. Al contemplar la variación en el tiempo de la matriz Q, se podría elegir ésta de manera que penalizara menos los errores o desviaciones iniciales, e(t), que los que vinieran a continuación. Así, para todo vector $\bar{e}$ constante ,

$$\bar{e}' \, Q(t_1) \, \bar{e} \ll \bar{e}' \, Q(t_2) \, \bar{e} \tag{3.2.11}$$

siendo $t_1 \ll t_2$; para $t_1, t_2 \in [t_0,T]$.

La razón de esto se explica porque, inicialmente, se pueden encontrar las variables del sistema más alejadas de los niveles deseados de lo que se puede suponer estarán conforme transcurra el tiempo, y se aplique una acción de control para aproximarse a esos niveles.

Habiéndose analizado detalladamente este funcional (3.2.4), que es el correspondiente al caso de control y estabilización de un modelo dinámico lineal y determinista, se verá cómo podrá tratarse matemáticamente sin grandes complicaciones, y cómo va a proporcionar una ley de control feedback lineal, siempre y cuando no se alteren los supuestos iniciales recogidos al inicio de este epígrafe (ecuaciones 3.2.1 a 3.2.4), que determinan al Problema Lineal Cuadrático en su versión continua.

Para evitar obtener la solución trivial, $u^*(t) = \theta$, se supondrá que Q(t) y S no pueden ser a la vez matrices nulas, aunque sí individualmente, por separado, en distintos momentos del tiempo. Es evidente que si u(t) es distinto del vector nulo, el coste recogido en el funcional correspondiente será positivo. Por otra parte, si para todo u(t) admisible, el funcional de coste, J(u), no está definido, $J(u) = \infty$, la solución óptima no existirá para ese problema de control.

En el epígrafe siguiente de este capítulo se establecen las condiciones para que un sistema dinámico lineal como el representado en (3.2.1) sea estabilizable, es decir, que exista una ley de control que permita cumplir el objetivo planteado de minimizar las fluctuaciones de las variables de estado y de las variables de control.

3.3.- Estabilizabilidad de un sistema dinámico.[6]

Antes de proseguir con el desarrollo de los métodos de control con estabilización de sistemas económicos dinámicos para obtener la mejor ley de control, se examina en este apartado cuándo un determinado modelo dinámico puede ser estabilizado por una determinada ley o política de control. Así, dado un sistema dinámico como (3.3.1)

$$\dot{x} = f(x,u,t) \qquad (3.3.1)$$

se dirá que la ley de control feedback

$$u = F(t)\ x + v \qquad (3.3.2)$$

es una ley de control estabilizadora si el sistema dinámico resultante

$$\dot{x} = f(x,\ F\ x + v,\ t) \qquad (3.3.3)$$

es estable.

La ley de control feedback (3.3.2) está generada parcialmente por el vector de estado mediante una regla

[6] Ver AOKI, M. (1976) Capítulo 5, epígrafe 5.1.

fijada por la matriz variable de coeficientes, F(t), matriz que fijaría el agente o agentes decisores; y por otra parte, esta ley estaría generada por unas nuevas variables de control, v. Los decisores pueden hacer depender las acciones de control de un período t, no sólo en función de la evolución de las variables de estado en el instante (t-1), lo que estaría recogiendo la efectividad de las anteriores acciones de control, así como la influencia de posibles causas exógenas, sino que se pueden introducir nuevas pautas de acción según los intereses en t de esos agentes decisores.

En el caso del control de un sistema dinámico lineal y determinista en tiempo continuo, para el cual se va a desarrollar el estudio del control con estabilización en esta Tesis de Licenciatura, se tendrá

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + M(t)\, u(t) \qquad (3.3.4)$$

La ley de control lo transforma en

$$\dot{x}(t) = [A(t) + M(t)\, F(t)]\, x(t) + M(t)\, v(t) \qquad (3.3.5)$$

Si A y M fueran constantes [7], el sistema será estable (asintóticamente estable) si las partes reales de los autovalores de (A + M F) son no positivas [8]. Y si esto es posible, entonces (3.3.4) será estabilizable mediante (3.3.2).

Así con A y M constantes , (3.3.3) queda así

$$\dot{x}(t) = A\ x(t) + M\ u(t) \qquad (3.3.6)$$

Los autovalores de la matriz (A + M F) pueden asignarse arbitrariamente mediante la elección adecuada de la matriz F, siempre y cuando el sistema (3.3.6) sea completamente controlable. En este caso, existirá una matriz F de coeficientes de los controles, que determine una ley feedback lineal de control estable que va a estabilizar a (3.3.6).[9]

---

[7] Para el caso de matrices variables, la condición que se va establecer sería la análoga atendiendo al concepto de controlabilidad de sistemas lineales deterministas variables en tiempo continuo.

[8] Para el concepto de estabilidad de sistemas dinámicos ver capítulo 1, epígrafe 1.3 .

[9] Prueba en AOKI, M. (1976), págs. 135-136.

3.4.- Modelos de regulador lineal.

3.4.1.- El problema del regulador- estado.

La solución en estos problemas proporciona, como en los restantes, una ley feedback óptima con la propiedad de que las componentes del vector estado, $x(t)$, están próximas a cero sin que se haya dado un excesivo gasto del control, $u(t)$.

Considerando el sistema dinámico y funcional de costes siguientes,

$$\dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \tag{3.4.1}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}\ [x(T)'S\ x(T)] + \frac{1}{2}\int_{t0}^{T} [x(t)'Q(t)x(t) + u(t)'M(t)u(t)]dt \tag{3.4.2}$$

La solución a obtener, $u^*(t)$, va a resultar ser una función lineal de $x(t)$, por lo que tendremos una ley de control feedback óptima que es lineal:

$u^*(t) = G(t)\ x(t)\ ,\ t \in [t_0, T]$, $G(t)$ es una matriz de (rxn)

Se supone que dado un estado inicial va a existir un control óptimo.

La Teoría del Control óptimo (el principio del máximo de Pontryagin), proporciona las condiciones necesarias para que un control sea extremo de ese funcional. Con el estudio de las condiciones suficientes, se determinará si un extremo es mínimo o no.

El Hamiltoniano para el sistema (3.4.1) y el funcional (3.4.2) es el siguiente :

$$H = \frac{1}{2} (x'Q\, x) + \frac{1}{2} (u'M\, u) + x'A'p + u'B'p \qquad (3.4.3)$$

Se ha suprimido t para abreviar la notación. El vector p(t), vector de variables adjuntas (de co-estado), es la solución de la ecuación diferencial vectorial (3.4.4)

$$\dot{p}(t) = - \partial H / \partial x(t) \qquad (3.4.4)$$

Que se reduce a

$$\dot{p}(t) = - Q\, x - A'\, p \qquad (3.4.5)$$

A lo largo de la trayectoria óptima debe cumplirse que (recordemos que u(t) no estaba restringido) :

$$\partial H / \partial u(t) = 0 \qquad (3.4.6)$$

lo que implica que

$$\partial H / \partial u(t) = M u + B' p = 0 \qquad (3.4.7)$$

Despejando u(t) de (3.4.7),

$$u(t) = - M^{-1} B' p \qquad (3.4.8)$$

Como M(t) es definida positiva para todo $t \in [t_0, T]$, entonces existirá $M^{-1}(t)$ para todo $t \in [t_0, T]$.

Esta es la condición necesaria para que u(t) sea extremo del Hamiltoniano. Más adelante se comprobará que este control es al menos un mínimo local.

El siguiente paso es obtener las ecuaciones canónicas en forma reducida. Se sustituye la regla de C.O. (3.4.8) en el sistema dinámico (3.4.1).

$$\dot{x} = A x - B M^{-1} B' p \qquad (3.4.9)$$

Las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.9) son las ecuaciones canónicas en forma reducida, que dan lugar al siguiente sistema :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B\ M^{-1}\ B' \\ -Q & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \qquad (3.4.10)$$

La ecuación (3.4.10) es un sistema de (2xn) ecuaciones diferenciales homogéneas, lineales y con coeficientes variables. Para obtener una única solución de este sistema, es necesario conocer (2xn) condiciones frontera.

Conocido el estado inicial , en t_0, $x(t_0)$, se determinan n condiciones frontera. Las n restantes condiciones se obtienen de las condiciones de transversalidad, que requieren, mientras x(T) no esté especificado, que en el tiempo terminal T, la variable adjunta, p(t), satisfaga la siguiente relación

$$p(T) = [\frac{1}{2}\ x(T)'\ S\ x(T)]/\ \ x(T) = S\ x(T) \qquad (3.4.11)$$

Sea $\Omega\ (t;t_0)$ la matriz fundamental o de transición de (2n)x(2n) para el sistema (3.4.10). En t = T

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ -\ - \\ p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega(T;t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -\ - \\ p(t) \end{bmatrix} \qquad (3.4.12)$$

Si dividimos la matriz $\Omega(T;t)$ en 4 submatrices de (nxn)

$$\left[\Omega(T;t) \right] = \left[\begin{array}{cc} \Omega_{11}(T;t) & \Omega_{12}(T;t) \\ \hline \Omega_{21}(T;t) & \Omega_{22}(T;t) \end{array} \right] \qquad (3.4.13)$$

Ahora (3.4.12) puede escribirse como

$$x(T) = \Omega_{11}(T;t)\ x(t) + \Omega_{12}(T;t)\ p(t) \qquad (3.4.14)$$

$$p(T) = \Omega_{21}(T;t)\ x(t) + \Omega_{22}(T;t)\ p(t) \qquad (3.4.15)$$

Como $p(T) = S\ x(T)$ por las condiciones de transversalidad recogidas en (3.4.11), tenemos que si se multiplica (3.4.14) por S, y si se iguala (3.4.14) con (3.4.15)

$$p(T) = S\ x(T) = S\ \Omega_{11}(T;t)\ x(t) + S\ \Omega_{12}(T;t)\ p(t) \qquad (3.4.16)$$

$$S\ \Omega_{11}(T;t)x(t) + S\ \Omega_{12}(T;t)p(t) = \Omega_{21}(T;t)x(t) + \Omega_{22}(T;t)p(t) \qquad (3.4.17)$$

Despejando p(t);

$$p(t) = [\Omega_{22}(T;t) - S\ \Omega_{12}(T;t)]^{-1}\ [S\ \Omega_{11}(T;t) - \Omega_{21}(T;t)]\ x(t) \qquad (3.4.18)$$

Como se cumple siempre que existe la matriz inversa [10] , $[\Omega_{22}(T;t) - S\ \Omega_{12}(T;t)]^{-1}$,la ecuación (3.4.18) determina una relación entre p(t), variable adjunta, y x(t), variable de estado.

$$p(t) = K(t)\ x(t) \quad \text{para todo } t \in [t_0, T] \tag{3.4.19}$$

Sustituyendo (3.4.19) en (3.4.8) obtendremos la <u>ley de control óptima feedback.</u>

$$u^*(t) = -\ M^{-1}(t)\ B'(t)\ K(t)\ x(t) \tag{3.4.20}$$

Ahora bien, falta conocer la matriz K(t) $\forall\ t \in [t_0, T]$, para que esta ley quede perfectamente determinada.

K(t) es una matriz funcional de (nxn), que depende del tiempo, y en particular del tiempo terminal, T, así como de la matriz S, pero no depende del estado inicial ni de las variables de estado.

$$K(t)=[\Omega_{22}(T;t)-S\ \Omega_{12}(T;t)]^{-1}[S\ \Omega_{11}(T;t)+\ \Omega_{21}(T;t)] \tag{3.4.21}$$

Cuando t = T ,

$$\Omega(T;T)= I \tag{3.4.22}$$

---

[10] Prueba en KALMAN (1960).

Por tanto, las submatrices serán :

$$\Omega_{11}(T;T) = \Omega_{22}(T;T) = I \qquad (3.4.23)$$

$$\Omega_{12}(T;T) = \Omega_{21}(T;T) = 0 \qquad (3.4.24)$$

La matriz $[\Omega_{22}(T;T) - S\ \Omega_{12}(T;T)] = I$ es regular y

$$K(T) = [\Omega_{22}(T;T) - S\ \Omega_{12}(T;T)]^{-1}\ [S\ \Omega_{11}(T;T) - \Omega_{21}(T;T)] \qquad (3.4.25)$$

va a quedar como

$$K(T) = S \qquad (3.4.26)$$

A este mismo resultado se puede llegar, más fácilmente, considerando las condiciones de transversalidad de (3.4.11) y la relación existente entre $p(t)$ y $x(t)$ mostrada por (3.4.19).

$$p(T) = S\ x(T) \qquad (3.4.11)$$

$$p(T) = K(T)\ x(T) \quad \text{por (3.4.19)} \qquad (3.4.27)$$

Es imposible obtener la expresión analítica de $\Omega(T;t)$ si todas las matrices A(t), B(t), M(t) y Q(t) son variables en el tiempo. En este caso, la evaluación de K(t) será aproximada y se obtendrá por ordenadores digitales.[11] Sin embargo, si estas matrices son constantes, se resuelve la matriz Ω(T;t) analíticamente, utilizando cualquier método válido para este caso. De todas maneras, la matriz inversa de la expresión (3.4.21) es de difícil cálculo, sobre todo cuanto mayor sea "n", el número de variables de estado, pero la matriz K(t) cumple unas propiedades que van a facilitar la obtención de su expresión analítica.

Suponiendo que se cumple (3.4.19), si diferenciamos ésta respecto al tiempo, tenemos

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t)\ x(t) + K(t)\ \dot{x}(t) \qquad (3.4.28)$$

Sustituyendo (3.4.19) en (3.4.9)

$$\dot{x} = [A - B\ M^{-1}\ B\ K]\ x \qquad (3.4.29)$$

Sustituyendo (3.4.29) en (3.4.28),

$$\dot{p} = [\dot{K} + K\ A - K\ B\ M^{-1}\ B']\ x \qquad (3.4.30)$$

[11] Ver página 97 para el cálculo aproximado de la matriz K(t); y el epígrafe 4.2.2 del capítulo 4 dedicado a aplicaciones prácticas.

Sustituyendo (3.4.19) en (3.4.5)

$$\dot{p} = [-Q - A' K] x \qquad (3.4.31)$$

Restando (3.4.30) con (3.4.31) podemos llegar a

$$[\dot{K} + K A - K B M^{-1} B K + A' K + Q] x = 0 \qquad (3.4.32)$$

$$\forall t \in [t_0, T]$$

Sea cual sea el estado inicial, $x(t_0)$, como $K(t)$ no depende de éste, y como (3.4.32) se cumple para cualquier $x(t)$ y $\forall t \in [t_0, T]$, la matriz que multiplica a la variable de estado, $x(t)$,deberá ser nula.

$$\dot{K} + K A + A' K - K B M^{-1} B K + Q = 0 \qquad (3.4.33)$$

Y por tanto, $K(t)$ deberá satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4.34).

$$\dot{K} = - K A - A' K + K B M^{-1} B' K - Q \qquad (3.4.34)$$

Al sistema de ecuaciones (3.4.34) se le denomina, normalmente, **ecuación de Riccati** (una extensión natural de la ecuación lineal de primer orden).

Así pues, resumiendo, x(t) y p(t) son las soluciones de las ecuaciones canónicas (3.4.10), y si p(t) = K(t) x(t) $\forall t \in [t_0,T)$, la matriz K(t) debe cumplir el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4.34). La ecuación (3.4.26) proporciona las condiciones frontera necesarias para resolverlo. Por la existencia y unicidad de la solución en sistemas de ecuaciones diferenciales (ec. tipo Riccati), K(t) existirá y será única.

A primera vista, K(t), como es una matriz de (nxn), la ecuación de Ricatti (3.4.34) sería un sistema de n^2 ecuaciones diferenciales de primer orden, sin embargo la matriz K(t) es simétrica [12], por lo que el sistema se reducirá a uno de n(n+1)/2 ecuaciones diferenciales de primer orden.

---

[12] Las matrices Q, y $(B\ M^{-1}\ B')$ por los supuestos hechos al inicio de la exposición, son matrices simétricas. K será simétrica si K' = K. Demostrando que K' cumple el sistema de ecuaciones de Riccati (3.4.34), basándose en el hecho de que la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales es única, se llega a que

$$(\dot{K})' = [dK/dt]' = -A'K-K'A+K'BM^{-1}B'K-Q = (\dot{K'})=(dK'/dt)$$

Se ha visto que K y K' cumplen las ecuaciones de Riccati. Aparte cumplen las condiciones frontera, S x(T) = K(T) x(T) ===> x'(T) S' = x'(T) S = x'(T) K'(T) ===> K'(T)=S'=S=K(T). Por tanto, K(t) es una matriz simétrica.

La matriz K(t) es definida positiva $\forall\ t \in [t_0,T]$ [13], y semidefinida positiva cuando t = T (K(T) = S).

El sistema de ecuaciones de Riccati no es lineal, y por esta razón , no puede obtenerse fácilmente la solución de este sistema. Si las matrices de coeficientes A, B, M, y Q, son variables en el tiempo, se puede obtener una aproximación de K(t) mediante cálculo numérico:

Sabiendo que $\dfrac{dK(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t}$, se puede resolver la ecuación de Ricatti empleando la fórmula $K(t+\Delta t) \cong K(t) + \Delta t\{- K(t)A(t) - A'(t)K(t) + K(t)B(t)M^{-1}(t)B'(t)K(t) - Q(t)\}$. Se resolverá hacia atrás en el tiempo, utilizando pequeños incrementos, Δt, negativos, y partiendo de que K(T) = S. Cuanto más pequeños sean los incrementos, mejor será la aproximación. Así pues, como K(t) es independiente de x(t), una vez esté especificado el funcional objetivo podrá resolverse la ecuación de Riccati, antes incluso de operar con el sistema dinámico.

El control óptimo $u^*(t)$ dado por (3.4.20), representa, al menos, un mínimo local para el funcional (3.4.2). Si la

---

[13] Ver ATHANS & FALB (1966). Capítulo 9, págs. 764-766

siguiente matriz (3.4.35) es definida positiva, el control que hace que $\partial H/\partial u = 0$, es al menos , un mínimo local:

$$\begin{bmatrix} \partial^2 H/\partial x^2 & \partial^2 H/\partial x \partial u \\ \partial^2 H/\partial u \partial x & \partial^2 H/\partial u^2 \end{bmatrix} \tag{3.4.35}$$

Calculando las derivadas de segundo orden del Hamiltoniano de este problema, la matriz (3.4.35) queda

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \tag{3.4.36}$$

Como M(t) es definida positiva, el signo de (3.4.36) depende del signo de Q(t), que como se ha supuesto era semidefinida positiva, por lo que (3.4.36) será semidefinida positiva. El hecho de ser M(t) definida positiva es suficiente garantía para que (3.4.20) , $u = - M^{-1} B' K x$, minimice, al menos localmente, el coste. Va a cumplir las condiciones suficientes de mínimo que en estos problemas se exigen normalmente. Además , ese control óptimo, $u^*(t)$, si existe, será único.[14]

Conviene señalar que si las matrices de coeficientes $A(t)$, $B(t)$, $M(t)$ y $Q(t)$ son constantes, $T = \infty$, la matriz $S = 0$, y el sistema controlable, la matriz $K(t)$ seguiría siendo variable, pero KALMAN (1960) demostró que el $\lim_{t \to \infty} K(t) = \overline{K}$, siendo $\overline{K}$ una matriz constante que satisface el sistema de ecuaciones de Riccati, quedándose éste reducido a uno de ecuaciones algebraicas, en vez de ecuaciones diferenciales no lineales. Además, el sistema de ecuaciones diferenciales que proporcionaría la trayectoria óptima de la variable $x(t)$ va a ser un sistema estable (el sistema, por tanto, será estabilizable).

A continuación se plantea un ejemplo de un problema de regulador lineal con tiempo terminal finito, con matrices de coeficientes y matrices de ponderaciones constantes, siendo además las matrices S y Q definidas positivas, lo que va a proporcionar un control óptimo que va a ser un mínimo del funcional. Después se verá otro ejemplo de un problema con horizonte temporal infinito y coeficientes constantes.

<u>Ejemplo.1</u>.- En 20 años, un gobierno de una ex-colonia

---

[14] Ver ATHANS & FALB (1966). Capítulo 9, página 764.

británica se plantea mantener la tasa de crecimiento de la población negra, $x_1(t)$, y la tasa de mortalidad de los ciudadanos blancos, $x_2(t)$ lo más próximas a cero como sea posible. Para ello, dispone de unos recursos del presupuesto nacional dentro de la partida especial de " Sanidad, Higiene y Orden público", $u(t)$. Sabiendo la relación que existe realmente entre estas variables, los políticos (ciudadanos blancos), plantean el siguiente sistema dinámico y el funcional de coste J_1 :

$$\dot{x}_1(t) = u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

$$\text{Min } J_1 = \frac{1}{2}[x^2(20)+10x^2(20)] + \frac{1}{2}\int_0^{20}[(2x^2(t)+4x^2(t)+0.5u^2(t)]dt$$

Con un estado inicial $x(0)= (x_1(0),x_2(0))$ en $t_0 = 0$.

Las matrices son

$$A(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad Q(t)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad u(t)=\begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$$

La matriz $K(t)$, que será variable de todas formas, es

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}$$

El control óptimo será

$$u^*(t) = -2\,[k_{11}(t)\; x_1(t) + k_{12}(t)\; x_2(t)]$$

La ecuación de Riccati nos va a proporcionar en este ejercicio un sistema de 3 ecuaciones diferenciales no lineales.

$$\dot{K}(t) = -K\,A - A'\,K + K\,B\,M^{-1}\,B'\,K - Q$$

Teniendo como condiciones frontera

$$K(20) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

El sistema resultante es

$$\dot{k}_{11} = 2\,k_{11} - 2\,k_{12} - 2$$
$$\dot{k}_{12} = 2\,k_{11}\,k_{12} - k_{22}$$
$$\dot{k}_{22} = 2\,k_{21} - 4$$

Resolviendo este sistema no lineal obtendríamos la matriz K(t), y por tanto, la ley de control óptimo feed-back, $u^*(t)$.

Ejemplo 2.- Un país con un endeudamiento externo de x(t) dólares en el período t (se incluye en x(t) sólo el capital pendiente), y una política de devolución de dicha deuda u(t), con u(t) negativos que significan desembolsos correspondientes a la devolución de parte de la deuda , y u(t) positivos que corresponden a un nuevo endeudamiento. Siempre que no se produzca una devolución (minoración de la deuda) o un nuevo endeudamiento, la deuda crece a una tasa constante α como consecuencia de los intereses, del crecimiento de la población, desarrollo de los proyectos iniciados, y de los gustos de los habitantes del país (consumo conspicuo de las clases privilegiadas). El sistema dinámico es, para un nivel inicial $x(0)= x_0$,

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + u(t) \ , \quad x(0) = x_0$$

El funcional objetivo es minimizar

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (qx^2 + ru^2)\, dt$$

donde q, r > 0. S = 0, A = α, B = b=1, Q = q , y M = r.

El Hamiltoniano es

$$H \equiv \tfrac{1}{2}\,(qx^2 + ru^2) + p\alpha x + pu$$

La política óptima, obtenida por $\partial H/\partial u = 0$, es

$$u^* = - p/r$$

Sustituyendo $p(t) = k\, x(t)$ gracias a (3.4.19),

$$u^{*}(t) = -\ (k/r)\ x(t)$$

Como k es constante ($t \rightarrow \infty$), la ecuación de Riccati nos da la ecuación algebraica :

$$k^2 - 2r\alpha k - rq = 0$$

cuya solución, sabiendo que k es definida positiva ($k>0$)

$$k = \alpha r + r\ (\alpha^2 + q/r)^{1/2}$$

Llamando $ß = (\alpha^2 + q/r)^{1/2}$, siendo $ß > 0$.

$$k = (\alpha + ß)\ r$$

El control óptimo es

$$u^{*}(t) = -\ (\alpha + ß)\ x(t)$$

Con un sistema dinámico para la variable de estado a resolver

$$\dot{x}(t) = \alpha\ x(t) + u(t) = -\ ß\ x(t)$$

La solución de este sistema es

$$- \beta = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$$, integrando ambos lados

$$- \beta\, t + c = \ln x(t)$$

$$x^*(t) = e^{-\beta t + c} = e^{-\beta t}\; e^c$$

Por las condiciones frontera en $t_0 = 0$ se obtiene el valor del término constante

$$x(0) = x_0 = e^c$$

La trayectoria óptima de la variable de estado es

$$x^*(t) = x_0\, e^{-\beta t}$$

Y la ley de control óptimo feedback

$$u^*(t) = -\,(\alpha + \beta)\; x_0\, e^{-\beta t}$$

El resultado es una política óptima de pago de la deuda y una deuda que va a decrecer a una tasa exponencial, ß, a lo largo del tiempo.

3.4.2.- El problema del regulador-output.

En este tipo de problemas se va a tratar que todas las componentes del vector output, $y(t)$ sean lo más pequeñas posibles.

Si el sistema dinámico a controlar es observable [15], se podrá reducir el problema de regulador del output a uno de regulador de la variable de estado.

Dado el sistema <u>observable</u>

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \qquad (3.4.37)$$

$$y(t) = C(t)\, x(t) \qquad (3.4.38)$$

donde

$x(t)$ es un vector columna de n componentes

$u(t)$ es un vector columna de r componentes

$y(t)$ es un vector columna de m componentes

siendo $0 < m$ ¾ r , n

Y el funcional

---

[15] El concepto de observabilidad va a permitir deducir la unicidad del control óptimo.

$$J_2 = \frac{1}{2}[y(T)'S\ y(T)] + \frac{1}{2}\int_{t0}^{T}[y(t)'Q(t)y(t)+u(t)'M(t)u(t)]dt \qquad (3.4.39)$$

donde

u(t) no está restringido

M(t), Q(t) y S cumplen las mismas propiedades que en el modelo de regulador-estado.

T está fijado; t_0 y $x(t_0)$ son conocidos.

Se resuelve este problema reduciéndolo a un problema de regulador- estado, siguiendo, por tanto, los mismos pasos que anteriormente se vieron. Esto es posible gracias a que el sistema representado por (3.4.37) y (3.4.38) es <u>observable.</u>

Sustituyendo (3.4.38) en el funcional objetivo (3.4.39), quedará, prescindiendo del término t para abreviar la notación

$$J_2 = \frac{1}{2}\ x(T)'C(T)'S\ C(T)x(T) + \frac{1}{2}\int_{t0}^{T}[x'C'Q\ C\ x + u'M\ u]dt \qquad (3.4.40)$$

La expresión de este funcional es muy parecida a la del funcional J_1, (3.4.2), pero con la diferencia de que en lugar de las matrices S y Q(t), en J_2 aparecen [C(T)'S C(T)], y [C'Q C]. Pero va a resultar que [C(T)'S C(T)] y [C'Q C] son matrices semidefinidas positivas, también por serlo S y Q(t), y por ser el sistema (3.4.37)-(3.4.38) observable.[16] Por tanto J_1 y J_2 van a resultar totalmente equivalentes y la solución se obtendrá del mismo modo.

Así, con este sistema observable, con este funcional con matrices semidefinidas positivas, va a existir un control óptimo, único, y que estará dado por

$$u^*(t) = - M^{-1}(t)\ B'(t)\ K(t)\ x(t) \qquad (3.4.41)$$

---

[16] Sean S y Q(t) matrices simétricas semidefinidas positivas. Las matrices [C'(T) S C(T)] y [C'Q(T)C(T)] son también simétricas, pero además serán semidefinidas positivas. Si el sistema (3.4.37)-(3.4.38) es observable, la matriz C'(t) no puede ser nula en ningún instante del tiempo t, ($t \in [t_0, T]$). Entonces si Q(t) es semidefinida positiva

$$y'(t)Q(t)y(t) \geq 0 \quad \forall\ y(t).$$

Si y(t)= C(t)x(t), tendremos que

$$x'(t)\ C'(t)\ Q(t)\ C(t)\ x(t) \geq 0 \quad , \quad \forall\ C(t)x(t)$$

Pero como la observabilidad implica que cada output y(t), está generado por un único estado x(t), se podrá concluir que

$$x'(t)\ C'(t)\ Q(t)\ C(t)\ x(t) \geq 0 \quad , \forall\ x(t)$$

Por lo que la matriz [C'(t) Q(t) C(t)] va a ser semidefinida positiva. Lo mismo podría argumentarse para demostrar que [C'(T) S C(T)] es semidefinida positiva.

donde K(t) es una matriz definida positiva que es solución de la ecuación de Riccati (se ha eliminado t)

$$\dot{K} = - K A - A'K + K B M^{-1} B' K - C'Q C \qquad (3.4.42)$$

Con condiciones frontera

$$K(T) = C'(T)S C(T) \qquad (3.4.43)$$

El estado óptimo es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.4.44), dado $x(t_0)$,

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t) M^{-1}(t) B'(t) K(t)] x(t) \qquad (3.4.44)$$

Con esto se completaría el proceso de obtención de la solución del problema de regulador-output planteado, que era el de controlar un sistema observable y variable en el tiempo, además de lineal.

Si tuviéramos un sistema lineal y constante en el tiempo, observable y controlable, con $T = \infty$ (tiempo terminal infinito) en el funcional de coste , el resultado sería similar al obtenido para el problema del regulador-estado, teniendo en cuenta la solución obtenida para el problema de regulador-estado planteado. La matriz K(t) se comportaría de la misma manera, sería variable, pero cumpliría lo siguiente

$$\lim_{t \to \infty} K(t) = \overline{K}$$

siendo $\overline{K}$ una matriz constante definida positiva que cumpliría la ecuación de Riccati, que pasaría a ser un simple sistema de ecuaciones algebraicas, y no de ecuaciones diferenciales. Además, en este caso, (matrices constantes en el tiempo), el sistema (3.4.44) para K, sería estable al tener la matriz $[A - B\ M^{-1}\ B'\ K]$, denominada matriz de ganancia ("gain matrix"), autovalores con partes reales negativas.

3.5.- Modelos de seguimiento lineal.

El problema de seguimiento lineal consiste en concebir un mecanismo de control que conduzca al output, y(t), del sistema (o al estado x(t)), de manera que siga una trayectoria deseada, $\hat{y}(t)$, (o $\hat{x}(t)$). Un ejemplo clásico aplicado a la Economía sería el problema de encontrar el control óptimo, mediante el gasto público, tasa de interés o la oferta monetaria, que indujera al Producto Nacional a seguir un cierto nivel óptimo determinado por el pleno empleo, o por consideraciones a más largo plazo (crecimiento autosostenido, equilibrio ecológico, ...), a la vez que se estabiliza la economía, es decir, no produciéndose fuertes fluctuaciones en las variables.

La expresión de este tipo de problemas será, dado un sistema dinámico,

$$\dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \tag{3.5.1}$$

$$y(t) = C(t)\ x(t) \tag{3.5.2}$$

El objetivo es minimizar J_3

$$J_3 = \frac{1}{2}\ e(T)'S\ e(T) + \frac{1}{2}\int_0^T [e(t)'Q(t)e(t)+u(t)'M(t)u(t)]\ dt \tag{3.5.3}$$

Este funcional es el mismo que el planteado en el apartado 2 de este trabajo, por lo que no se va a repetir la explicación del mismo. Se trata, en resumen, de minimizar la suma ponderada de las variables de error al cuadrado, sin que se dé un excesivo gasto en control, u' M u. El vector error se definía en el epígrafe 3.3 como $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, pero se puede definir también como $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, empleando variables de estado en vez de variables output como se hizo en el funcional (3.3.4). En realidad la distinción entre la variable de estado x(t) y la variable output y(t), es en definitiva un problema de medida de las observaciones. La mayoría de las veces solo unas pocas variables de estado son importantes o son observables. Además el output es una combinación de variables de estado, $[y(t) = C(t)x(t)]$, y en otros casos lo es de aquéllas y de las variables de control, $[y(t) = C(t)x(t)+D(t)u(t)]$. Por esta razón al vector y(t) se le denomina vector de medidas.

En la práctica es costoso o difícil medir todas las variables de estado directamente, pero es más fácil medir el resultado u output. Si no existiera ese problema de medidas o de obtención de datos, la distinción entre el vector x(t) de variables de estado y el vector y(t) de variables output desaparecería $(C(t)=I)$, siempre que el output no dependa del control.

A lo largo del capítulo 5 se comentarán algunos aspectos del problema de la medida y de la obtención de datos, pero para el estudio teórico de los problemas de seguimiento lineal se supondrá que no existen esos problemas de medición de las variables de estado, que son en todo momento las que se pretende controlar, y el output es solamente el resultado medible. Así pues,en el desarrollo de este apartado se estará suponiendo que no existen problemas de medida de x(t). Si se considera la existencia de estos problemas, un análisis para este caso, siempre que el sistema dinámico a controlar sea perfectamente observable, puede encontrarse en ATHANS & FALB (1966), pags. 793 a 804.

Como el problema de seguimiento lineal es una generalización del problema de regulador lineal [17], se pueden utilizar los resultados obtenidos en este último caso para no repetir los casi mismos pasos que se hicieron en el epígrafe 3.4.1.

El funcional a minimizar será ahora

---

[17]. Para conocer las condiciones que se requieren para que un problema de seguimiento lineal se pueda reducir a un problema de regulador lineal, ver ATHANS & FALB(1966), capítulo 9, págs. 804-806.

$$J_3 = \frac{1}{2}\,[x(T)-\hat{x}(T)]'S[x(T)-\hat{x}(T)] + \frac{1}{2}\int_0^T [(x-\hat{x})'Q(x-\hat{x})+u'M\,u]\ \ dt \tag{3.5.4}$$

Dados el tiempo y el estado iniciales, $x(0) = x_0$, y manteniendo las matrices del sistema dinámico, representado ahora sólo por (3.5.1), y las del funcional (3.5.4) y las propiedades que se les atribuía en anteriores apartados, las etapas para la obtención del control óptimo serán las siguientes:

El Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}\,(x-\hat{x})'Q\,(x-\hat{x}) + \frac{1}{2}\,u'\,M\,u + p'Ax + p'Bu \tag{3.5.5}$$

La variable adjunta satisfará el sistema

$$\dot{p} = -\,\partial H/\partial x = -\,Q\,x - A'p + Q\,\hat{x} \tag{3.5.6}$$

con las condiciones de transversalidad correspondientes

$$p(T) = S\,(x(T) - \hat{x}(T)) \tag{3.5.7}$$

El control óptimo que se obtendría al igualar a cero la derivada del Hamiltoniano respecto a u ($\partial H/\partial u = 0$), es

$$u^*(t) = - M^{-1} B' p \qquad (3.5.8)$$

Sustituyendo (3.5.8) en (3.5.1), y con el sistema de ecuaciones (3.5.6) se obtiene el sistema de ecuaciones canónicas

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & - B M^{-1} B' \\ - Q & - A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \hat{x} \end{bmatrix} \qquad (3.5.9)$$

Resolviendo el sistema (3.5.9) de la misma manera que se resolvería el sistema (3.4.10), mediante la matriz de transición, obtendremos, tras las sustituciones y operaciones necesarias , la solución equivalente a la ecuación (3.4.19) en el problema del regulador-output

$$p(t) = K(t) x(t) + v(t) \qquad (3.5.10)$$

donde K(t) es la misma matriz que en (3.4.21), y v(t) es el vector (0, $Q\hat{x}$) de (3.5.10).[18]

Sustituyendo (3.5.10) en el sistema de ecuaciones

---

[18] Para la derivación del vector v(t) ver ATHANS & FALB (1966), págs 794 y ss. .

dinámicas (3.5.9),

$$\dot{x} = (A - B\ M^{-1}\ B'\ K)\ x - B\ M^{-1}\ B'\ v \tag{3.5.11}$$

$$\dot{p} = -\ (Q + A'K)\ x - A'v + Q\ \hat{x} \tag{3.5.12}$$

Diferenciando (3.5.10) y sustituyendo en el resultado (3.5.11)

$$\dot{p} = \dot{K}\ x + K\ \dot{x} + \dot{v} = \tag{3.5.13}$$

$$= (\dot{K} + KA - KBM^{-1}B'K)x - KBM^{-1}B'v + \dot{v} \tag{3.5.14}$$

Igualando (3.5.12) con (3.5.14)

$$(\dot{K} + KA + A'K - KBM^{-1}B'K + Q)x + (\dot{v} + A'v - KBM^{-1}B'v - Q\ \hat{x}) = 0 \tag{3.5.15}$$

Como la ecuación (3.5.15) se cumple para cualquier valor de $x(t)$, $\hat{x}(t)$, y t, la matriz $K(t)$ y el vector $v(t)$ van a satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{K} = -\ K\ A - A'K - Q + K\ B\ M^{-1}\ B'\ K \tag{3.5.16}$$

$$\dot{v} = -\ (A' - K\ B\ M^{-1}\ B')\ v + Q\ \hat{x} \tag{3.5.17}$$

con las condiciones frontera (3.5.7), y haciendo $t=T$ en (3.5.10),

$$p(T) = S\,[x(T) - \hat{x}(T)] = K(T)\,x(T) + v(T) \qquad (3.5.18)$$

Como $K(T) = S$ [19], $v(T)$ debe ser igual a $[-\,S\,\hat{x}(T)]$

La ecuación (3.5.16) es precisamente la ecuación de Riccati del problema de regulador lineal, siendo también $K(t)$ una matriz simétrica , definida positiva, y por tanto con $n(n+1)/2$ términos distintos.

Así el problema de seguimiento lineal está compuesto por dos componentes : la parte del problema de regulador lineal y la parte asociada al término $v(t)$. Si $v(t)$ es igual a 0, $\hat{x}(t)$ será igual al 0, el problema de seguimiento se reduce al modelo de regulador lineal.

La ley de control óptimo es

$$u^{*}(t) = -\,M^{-1}(t)\,B(t)'[K(t)\,x(t) + v(t)] \qquad (3.5.19)$$

Esta solución óptima se puede demostrar que es única [20], así como que minimiza el funcional objetivo J_3.

---

[19] Ver epígrafe 3.4, ecuaciones (3.4.12) a (3.4.26).

[20] La unicidad de $u^{*}(t)$ se va a poder deducir por la unicidad de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales, tal y como se demostraría en el caso de un modelo de regulador lineal.

4.- APLICACIONES PRACTICAS.

4.1.-Modelos macroeconómicos tipo acelerador - multiplicador.

Ya se ha mencionado en el inicio del capítulo 3 que los métodos de Regulador y de Seguimiento Lineal han sido muy empleados como técnicas de control en el análisis de distintos tipos de política y planificación macroeconómica. Por ello, en este apartado se verán dos situaciones de aplicación de estas técnicas.

El análisis de estas aplicaciones se inicia con el caso de una economía cerrada. El modelo no incorpora las relaciones económicas que pudiera tener aquélla con otras economías. Al incorporar en el segundo conjunto de casos el sector exterior, también se añadirán nuevos objetivos de política de estabilización , como va a ser el equilibrio de la Balanza de Pagos.

4.1.1.- Una economía cerrada.

4.1.1.1.- MODELO A (SAMUELSON, HICKS)

Se tomará un modelo que se puede derivar de SAMUELSON

(1939), y de HICKS (1950), del tipo multiplicador-acelerador, caracterizado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$I(t) = v\,\dot{Y}(t) + G(t)$$

$$S(t) = s_1\,Y(t) + s_2\,Y(t) = s\,Y(t)$$

$$\dot{Y}(t) = h\,[I(t) - S(t)]$$

La ecuación dinámica que se obtiene es la siguiente :

$$\dot{Y}(t) = \frac{-\,h\,s}{1 - h\,v}\,Y(t) + \frac{h}{1 - h\,v}\,G(t) = a\,Y(t) + b\,G(t)$$

siendo $a = \dfrac{-\,h\,s}{1 - h\,v}$; $b = \dfrac{h}{1 - h\,v}$

El funcional objetivo es

$$\text{Min} \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [\,q\,(Y - Y^{PE})^2 + m\,(G - G^{PE})^2]\,dt$$

con $q > 0$; $m > 0$, y donde

$I(t)$ es la demanda total de inversión, dividida en dos partes , la correspondiente al sector privado, $v\dot{Y}(t)$, siendo v el acelerador que se considera constante, y la correspondiente al sector público, G(t).

S(t) es el ahorro total, que se divide en ahorro privado, s_1 Y(t), y en ahorro público, s_2 Y(t); donde s_1 es la propensión marginal a ahorrar del sector privado, y s_2, la propensión marginal al ahorro del sector público,($s = s_1+s_2$).

Y(t) es la renta nacional o producto nacional, siendo $Y^{PE}(t)$ el nivel de pleno empleo que se va a considerar constante. Su evolución temporal viene dada por una proporción, h , de la diferencia entre la inversión y el ahorro. Esta ecuación se obtiene a partir de la distinción realizada por HICKS(1950) entre dos sentidos dados al ahorro en una economía :

- el que se desprende de la igualdad que debe darse entre inversión y ahorro de un período.
- el ahorro que siendo función de la renta, lo es como diferencia entre la renta del período anterior y el consumo actual.

Esta proporción, h, marcará la velocidad del ajuste de la inversión del período al ahorro que se produce como consecuencia de la renta no consumida en el período anterior.

G(t) es el gasto público en inversión, y $G^{PE}(t)$ el nivel deseado. Se va a considerar este último igual a cero, $G^{PE}(t) = 0$, por tanto nos vamos a encontrar con un problema de seguimiento lineal del tratado en el epígrafe (3.5.1) con horizonte temporal infinito y coeficientes constantes.

El funcional quedará así,

$$\text{Min} \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\, q\, y^2 + m\, g^2 \,]\, dt$$

siendo $y = Y - Y^{PE}$, $g = G - G^{PE}$.

El objetivo, según se desprende del funcional, es estabilizar la economía, minimizando las desviaciones de la renta y del gasto público de sus niveles deseados, sujeto a un sistema dinámico que refleja la evolución temporal de las variables a controlar y que viene representado por

$$\dot{y} = a\, y + b\, g$$

siendo $a = \dfrac{-h\, s}{1 - h\, v}$; $b = \dfrac{h}{1 - h\, v}$

La representación se realiza trabajando con desviaciones para de esta forma solucionar un problema de seguimiento lineal con horizonte temporal infinito. Esto se debe a la falta de desarrollo teórico para solucionar este tipo de problemas, por lo que sólo podemos contentarnos, bien, con unas aproximaciones numéricas para instantes finales T muy elevados, pero finitos ($T<\infty$); o bien, intentar transformar el problema de seguimiento lineal en un problema de regulador lineal, y resolverlo como tal.

Para la solución de la mayoría de los distintos casos en los que se ha empleado el control óptimo en este apartado, se ha optado por la segunda posibilidad de las mencionadas. Si bien puede no cumplirse alguna de las diferentes condiciones suficientes planteadas por diversos autores [1] para transformar un problema de seguimiento lineal en uno de regulador lineal; se ha podido transformar haciendo el supuesto de alcanzabilidad[2] en el equilibrio del nivel de pleno empleo para la renta nacional mediante un gasto público consistente con él. Así, para $\hat{Y} = Y^{PE}$, $\hat{G} = G^{PE}$, se cumplirá que

$$0 = \dot{Y}^{PE} = a\,Y^{PE} + b\,G^{PE}$$

restando esta ecuación al sistema

---

[1] Vease el no cumplimiento de la condición suficiente expuesta en ATHANS & FALB (1966), págs. 804-805.

[2] Para el concepto de estado alcanzable o accesible, ver ATHANS & FALB (1966), pág. 197.

$$\dot{Y} = a\,Y + b\,G$$

se tiene el sistema expresado en desviaciones de las variables respecto de los valores deseados

$$\dot{y} = a\,y + b\,g$$

De esta forma, el problema de S.L. ha quedado reducido a uno de R.L. con horizonte temporal infinito. Quizás sea muy fuerte el supuesto de alcanzabilidad del pleno empleo en el equilibrio, es decir, la existencia de un control (gasto público) que garantice la consecución de los objetivos en el punto de equilibrio, pero no lo es más que el hecho de considerar un nivel de pleno empleo constante para la renta nacional.

El hamiltoniano correspondiente es,

$$H = \frac{1}{2} [\, q\,y^2 + m\,g^2 \,] + p\,[\, a\,y + b\,g \,]$$

La condición $\dfrac{\partial H}{\partial g} = 0$, proporcionará la ley de control óptimo lineal y feedback,

$$g = - p \frac{b}{m}$$

Por (3.4.19), se tiene que $p = k\, y$, por tanto

$$g = - k \frac{b}{m} y$$

Como estamos ante un problema de horizonte temporal infinito con coeficientes constantes , el $\lim_{t \to \infty} k(t) = \bar{k}$, siendo $\bar{k}$ una constante que cumple la ecuación de Riccati , la cual ya no es diferencial sino algebraica.

Por ser $\bar{k}$ constante, y $\dot{k} = 0$, se tiene

$$\dot{k} = - k\, a - a\, k + k\, b\, m^{-1}\, b\, k - q = 0$$

Resolviendo la ecuación atendiendo al hecho de que $k > 0$ para todo $t \in [0,\infty]$ (la matriz de Kalman es simétrica y definida positiva), se tiene como solución de k , la siguiente

$$k = \frac{m}{b^2} \left(a + (a^2 + b^2\, q / m)^{1/2} \right)$$

Para t elevados se tiene que

$$g(t) = -(b/m) \lim_{t \to \infty} k(t)\, y(t) = -(b/m)\, k\, y(t)$$

$$g(t) = ß\, y(t)$$

siendo $ß = -(b/m)\, k$.

Esto significa que si existe en un instante del tiempo un "gap" entre el producto nacional y su nivel deseado de pleno empleo, Y^{PE} , (lo que se conocerá estudiando la evolución de Y), este "gap" va a determinar cuál será el gasto en exceso o en defecto correspondiente que minimice tanto las desviaciones de Y(t), como el gasto en sí. De esta manera, tenemos la ley de control óptima feedback :

$$g^*(t) = ß\, y(t).$$

La senda temporal óptima de las desviaciones del producto nacional, y(t), es

$$\dot{y} = a\, y + b\, g^* = a\, y + b\, ß\, y = (\, a - (b^2 k/m)\,)\, y = n\, y$$

donde $n = (\, a - (b^2k/m)\,) = -\,(\, s + (q/m)\,)^{1/2} / (1-m^2) < 0$.

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtendrá la función que relaciona los valores de y con respecto a t, aplicando la política de gasto público óptima proporcionada por el C.O., para $y(0) = y_0$.

$$y^*(t) = y_0 \, e^{nt}$$

A medida que transcurra el tiempo, como $n < 0$, tenderán a reducirse las desviaciones entre la renta nacional y la de pleno empleo siguiendo esta política de gasto público óptima.

CUADRO 4.1.I.- Resumen MODELO A.

F U N C I O N A L   O B J E T I V O
$$\text{Min } J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\, q\, (Y - Y^{PE})^2 + m\, (G - G^{PE})^2]\, dt$$ $$q > 0 \;;\; m > 0$$
S I S T E M A   D I N A M I C O
$$\dot{Y}(t) = \frac{-hs}{1-hv} Y(t) + \frac{h}{1-hv} G(t) = a\, Y(t) + b\, G(t)$$ En desviaciones: $\dot{y} = a\, y + b\, g$ $y = Y - Y^{PE}$; $g = G - G^{PE}$; $y(0) = 0$; $a = \frac{-hs}{1-hv}$; $b = \frac{h}{1-hv}$
R E G L A   D E   C O N T R O L   O P T I M O
$$\boxed{g^*(t) = -\, k\, b\, y\, /m}$$ $$k = [m\, (a+(a^2+b^2 q/m)^{1/2})]\, /\, b^2$$
R E N T A   O P T I M A
$$\boxed{y^*(t) = y_0\, e^{nt}}$$ $$n=(a-(b^2 k/m)) = -(s+(q/m))^{1/2}/(1-m^2) < 0.$$

A continuación se realiza un pequeño análisis sobre los parámetros constantes del modelo, h, s, v, q y m, dada la condición inicial apuntada. Este análisis se desarrolla en términos gráficos. De esta forma, se puede conocer cómo incidirían los distintos valores de los parámetros del modelo (propensión marginal al consumo, acelerador, penalizaciones a las desviaciones,...) sobre la rapidez en la convergencia del output al nivel deseado, bajo las pautas marcadas por la Tª del C.O..

Los distintos escenarios planteados se recogen en la TABLA 4.I. Cualquiera de ellos dará como resultado la convergencia al pleno empleo tras un período de tiempo. Se va a tomar el escenario R1 como situación de partida, y se irán comparando los otros cinco restantes para extraer, en la medida de lo posible, unos simples comentarios que ejemplifiquen cuál podría ser uno de los múltiples usos del C.O. en el estudio de modelos macroeconómicos.

TABLA 4.I.- Escenarios del modelo A.

	E S C E N A R I O S					
PARAMETROS	R1	R2	R3	R4	R5	R6
h	1	0.5	1	1	1	1
s	0.2	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2
v	0.4	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4
q	0.5	0.5	0.5	0.5	0.1	0.9
m	0.5	0.5	0.5	0.5	0.9	0.1

Tras el examen de la Figura 4.1.I, puede decirse que una menor proporción, h, de la diferencia entre la Inversión y el Ahorro de un período, conlleva una más lenta aproximación en el tiempo de la renta nacional a su nivel de pleno empleo. Lo mismo sucede comparando con el escenario R5; la evolución de la desviación óptima de la renta nacional, $y^{*}(t) = Y-Y^{PE}$, es muy parecida a la de R2, tal y como puede verse en la Figura 4.1.II y en el detalle mostrado por la Figura 4.1.III.

FIGURA 4.1.I.- Escenarios R1/R2

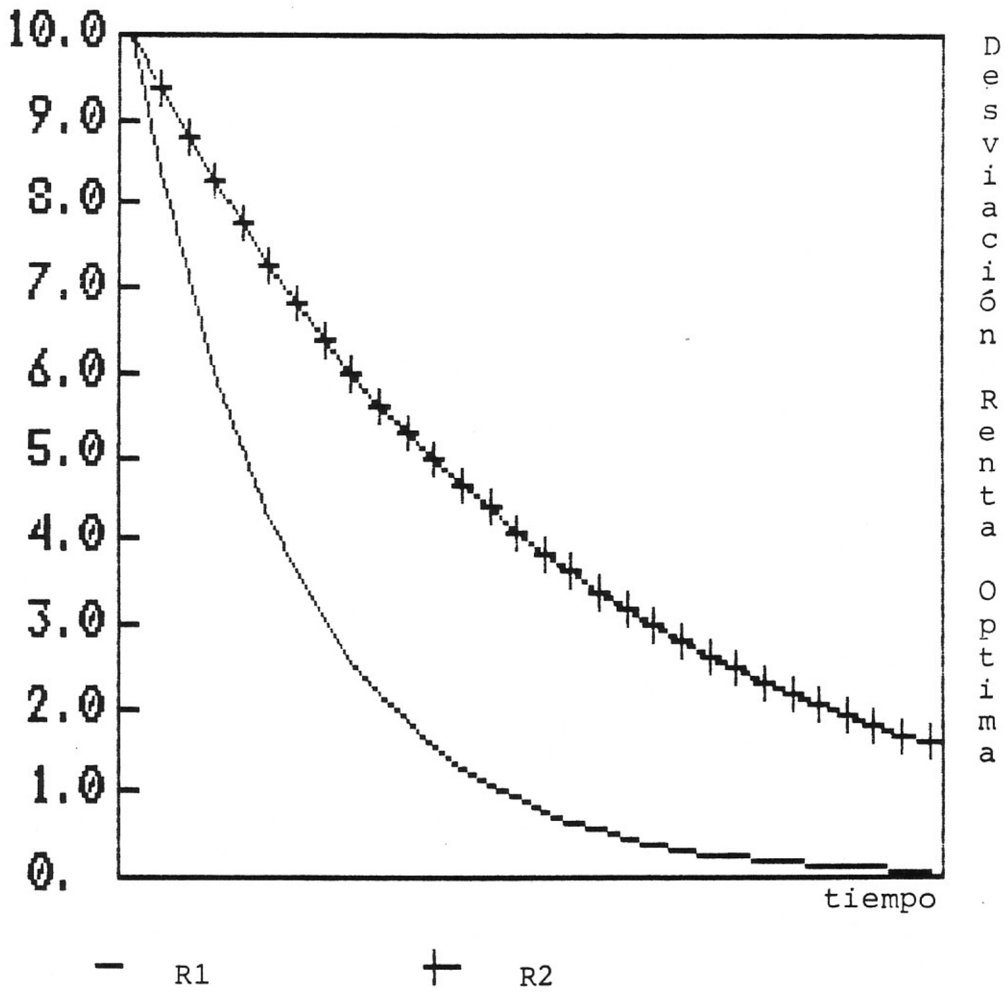


FIGURA 4.1.II.- Todos los escenarios. Modelo A

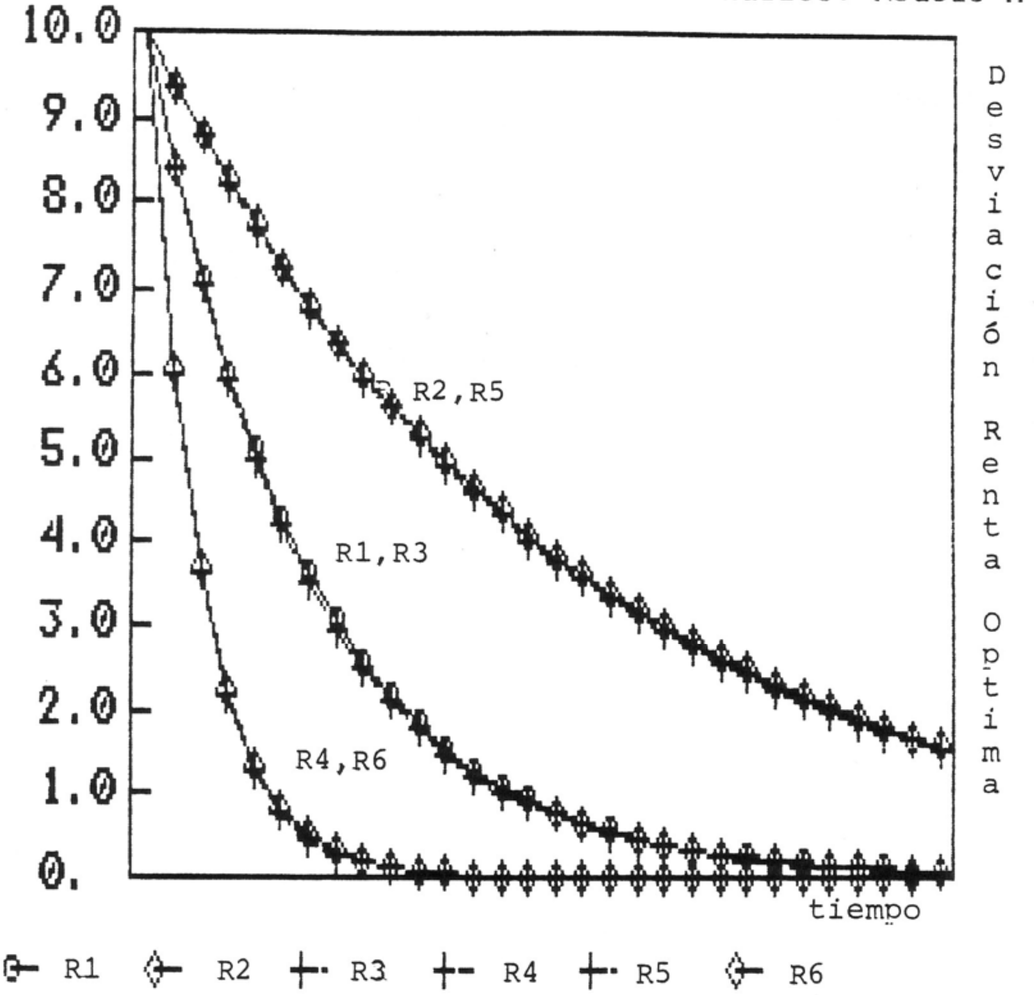
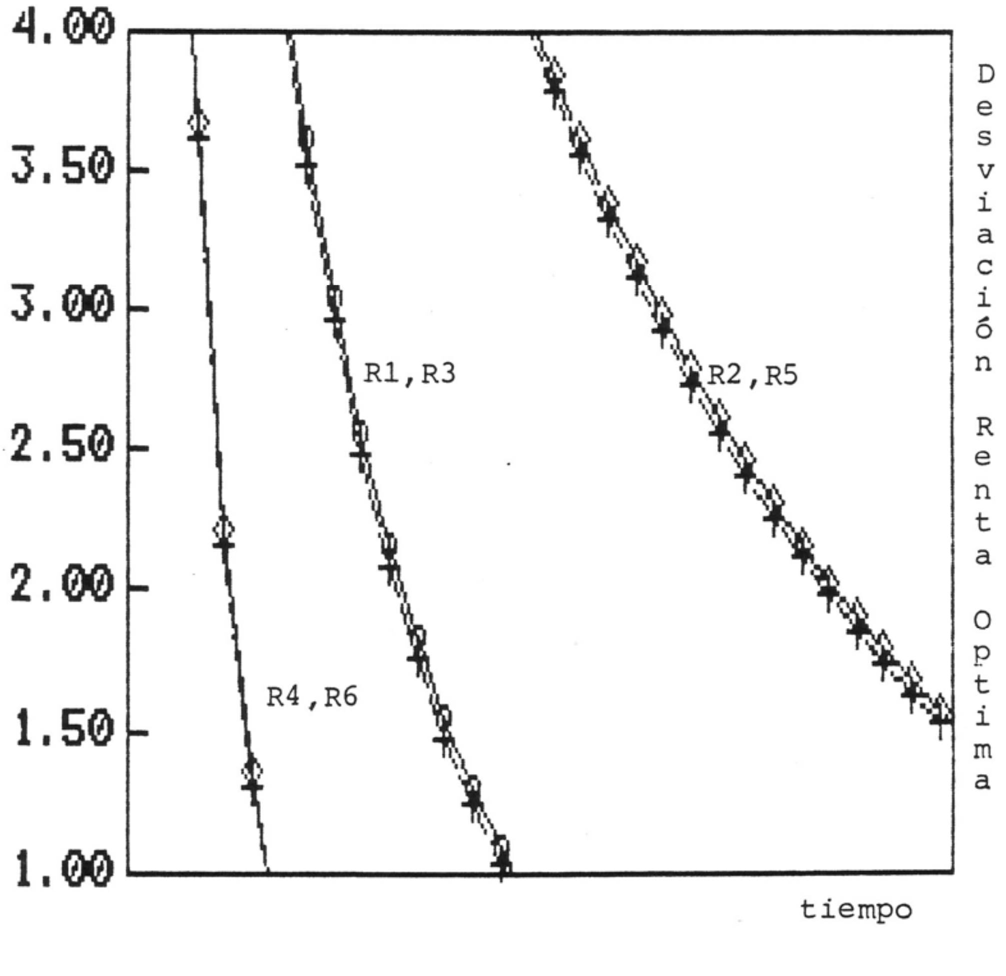


FIGURA 4.1.III.- Detalle Figura 4.1.II



En la Figura 4.1.IV, las curvas que marcan la evolución de y^*, R1 y R3, están casi superpuestas, lo que va a indicar que, dados esos valores de los parámetros, un aumento de la tasa de ahorro de 0.2 a 0.3 , no iba a suponer grandes cambios en la velocidad de la convergencia al pleno empleo. Este hecho podría apreciarse también en la figura 4.1.III que recoge a todos los escenarios con un mayor detalle.

Dados los valores marcados por la TABLA 4.I para los distintos parámetros; el penalizar con 0.1 las desviaciones de la renta nacional, y con un 0.9 el gasto público, equivale casi a considerar a h a su mitad (0.5). Así, un aumento en la penalización del gasto y una disminución en la correspondiente a la desviación de la renta, tal y como se refleja en la Figura 4.1.V, hace que el proceso de convergencia a la renta de pleno empleo sea más lento que en el otro caso, R1. Esto mismo podía haberse deducido antes de examinar las gráficas, ya que el penalizar menos , en términos relativos, a las fluctuaciones de la renta de su nivel deseado, hace menos "urgente" , por tanto, el alcanzar ese nivel, por lo que la convergencia es menos rápida, aunque estamos considerando instantes de tiempo muy pequeños, ya que para cualquiera de los escenarios que se pudieran plantear la convergencia de la renta nacional a su nivel de pleno empleo está asegurada para valores de t suficientemente elevados.

FIGURA 4.1.VI.- Escenarios R1/R3

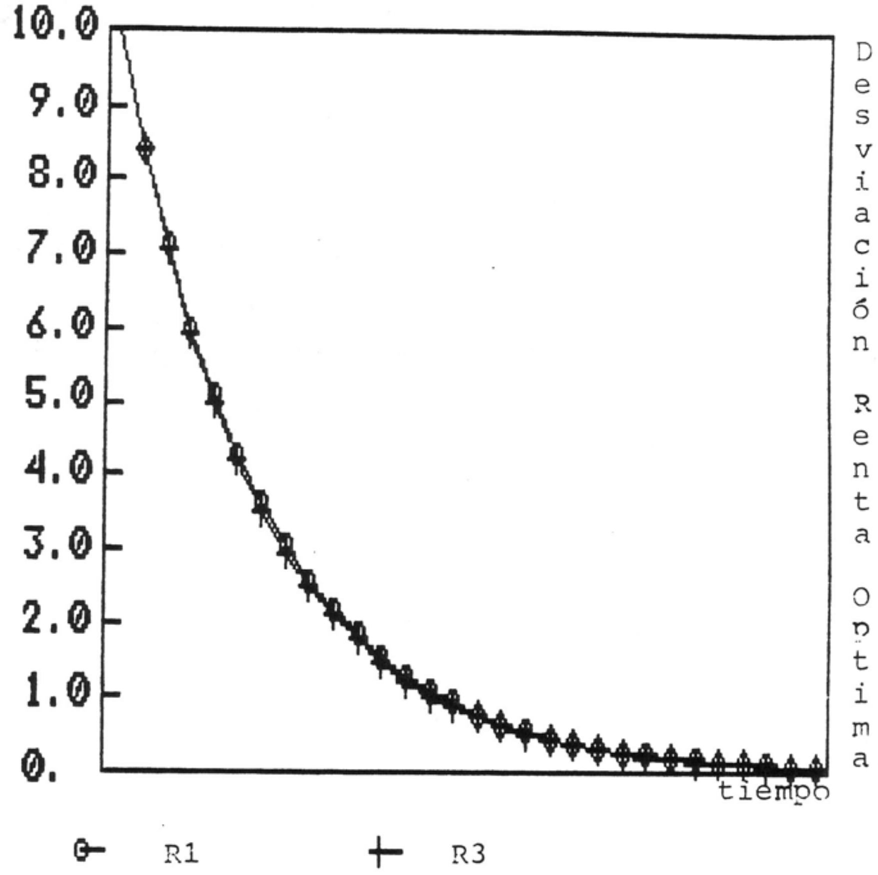
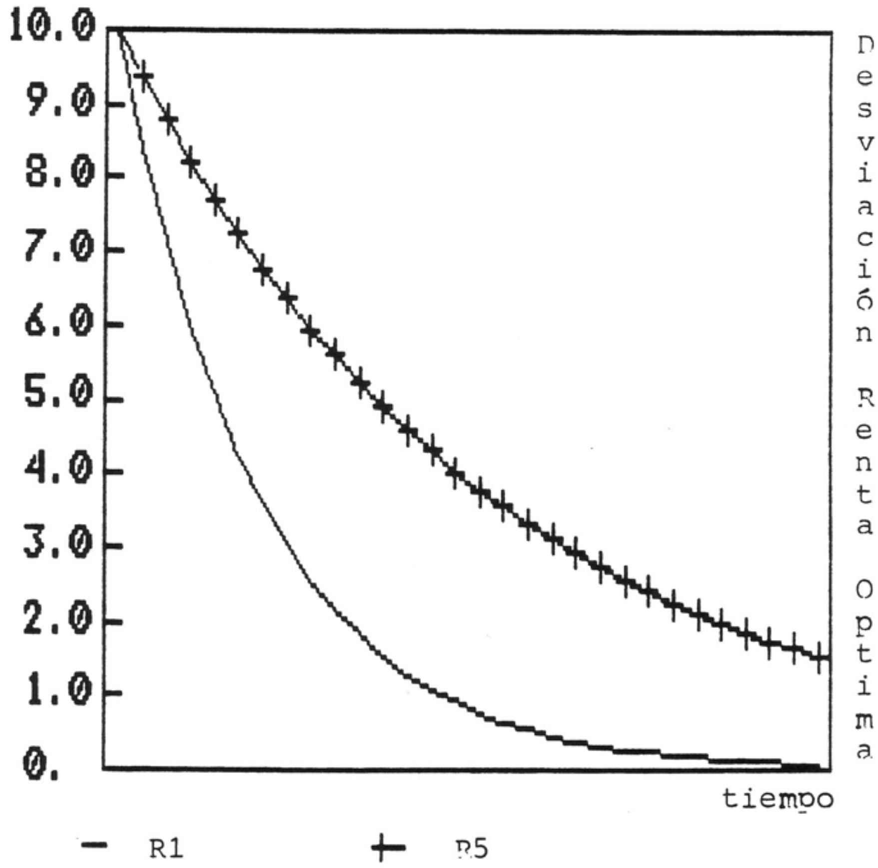


FIGURA 4.1.V.- Escenarios R1/R5



La figura 4.1.VII recoge el escenario R6 que representa la situación opuesta. Se penaliza en mayor medida la desviación de la renta que el empleo del gasto público; por lo que la convergencia de la renta a su nivel de pleno empleo se efectúa de forma más rápida.

Por último, cabe decir que los escenarios R4 (Figura 4.1.VI) y R6 (Figura 4.1.VII) marcan sendas de evolución temporal de las desviaciones de la renta similares. De forma simplista podría concluirse que si el acelerador, v, pasa a duplicarse (de 0.4 a 0.8), las desviaciones del producto nacional respecto de su nivel de pleno empleo siguen una trayectoria casi igual a la resultante de mantener el acelerador en 0.4, y aumentar la penalización de aquellas desviaciones (de 0.5 a 0.9) a la vez que se disminuye la correspondiente al empleo de gasto público (de 0.5 a 0.1).

FIGURA 4.1.VI.- Escenarios R1/R4

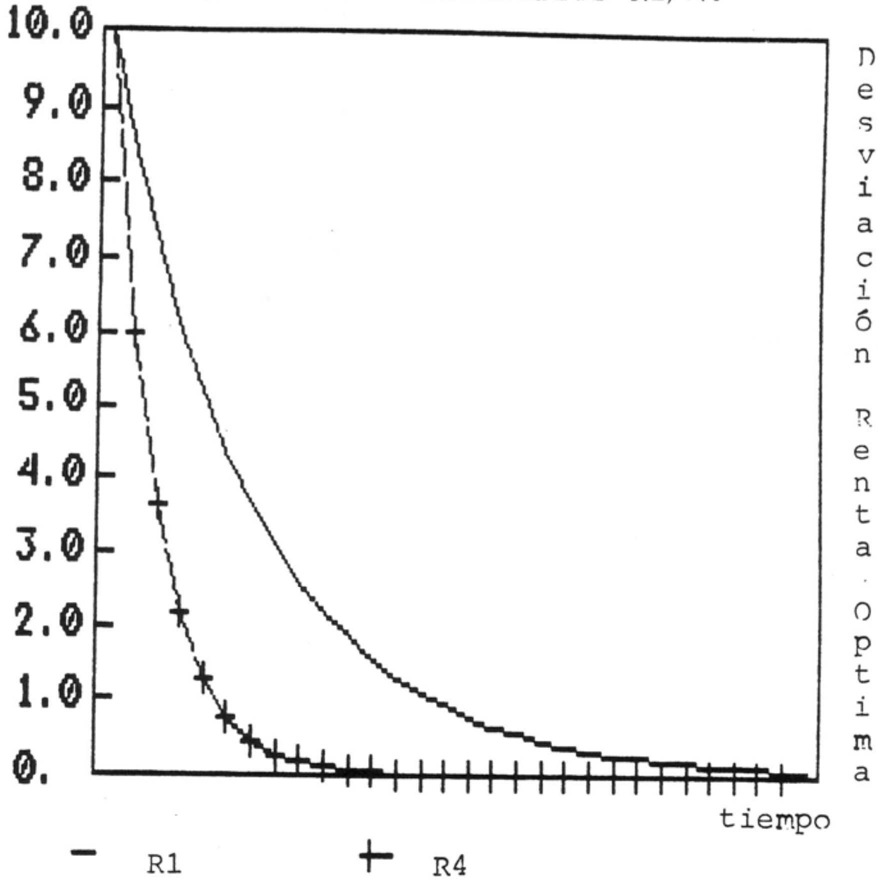
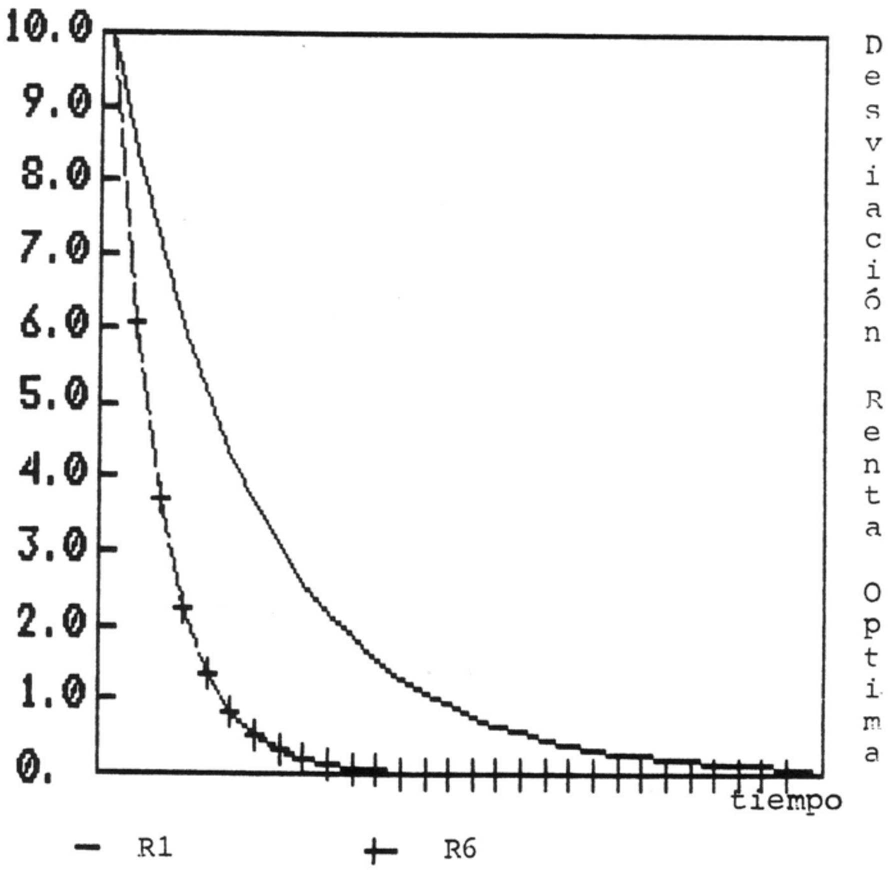


FIGURA 4.1.VII.- Escenarios R1/R6



4.1.1.2.- MODELO B. (PHILLIPS)

Tomando otro modelo de una economía cerrada, que incluya no sólo el sector real de la economía, sino también el monetario, se plantea a continuación un modelo que PHILLIPS (1954) y (1957)[1] empleó para analizar tres tipos de políticas de estabilización. Se compararán con la que va a proporcionar el C.O. .

El modelo en cuestión es el siguiente,

$C = \alpha\, Y$,	$\alpha > 0$,	C = Consumo nacional
		Y = Renta nacional
$I = -\beta\, r$,	$\beta > 0$,	I = Inversión
		r = Tasa de interés
$E = C + I + G$,		E = Gasto nacional
		G = Gasto público
$\dot{Y} = \mu\, (E - Y)$,	$\mu > 0$	
$M^d = \sigma\, Y - \Gamma\, r$,	$\sigma,\ \Gamma > 0$	M^d = Demanda monetaria
$M^s = \overline{M}$		M^s = Oferta monetaria
$M^s = M^d$		

[1] Modelo extraído de STEVENSON, A.; MUSCATELLI, V.; GREGORY, M. (1988). Págs. 303-312. Es una versión en tiempo contínuo de PHILLIPS, A.W. . Puede encontrarse un análisis de los tres tipos de política utilizados con este modelo en TURNOVSKY (1977).

La ecuación dinámica que se obtiene es

$$\dot{Y} = \mu \; [\; (\alpha - 1) - (ß/\Gamma) \; \sigma \;] \; Y + (\mu ß/\Gamma) \; \bar{M} + \mu \; G$$

con variables de control G, y de estado, Y ; siendo $\bar{M}$ una variable exógena.

El problema de control con estabilización es alcanzar un determinado nivel de renta nacional Y^{PE} (pleno empleo), empleando el gasto público G, de manera que a la vez se esté estabilizando la economía.

El primer tipo de política examinada por PHILLIPS es la regla del gasto proporcional

$$G = \pi \; (Y^{PE} - Y) \qquad\qquad \pi > 0.$$

Se incrementa el gasto público cuando el nivel de ingreso nacional es menor que el deseado o de pleno empleo, y decrece cuando es superior a éste.

Sustituyendo esta regla en la anterior ecuación diferencial

$$\dot{Y} = \mu \; [\; (\; \alpha - (ß \; \sigma \; / \; \Gamma) - \pi - 1) \; Y + \pi \; Y^{PE} + (ß \; / \; \Gamma) \; \bar{M} \;]$$

La estabilidad del sistema económico depende del signo del término (α - ($\beta\sigma$ / Γ) - π - 1). Si el término es negativo, el sistema será estable, lo que indicaría que la política de gasto proporcional tiende a estabilizar la economía, por lo que conforme π tenga un valor mayor, más estabilidad proporcionará esa política. Detrás de esta ecuación está el hecho de considerar que las autoridades nunca alcanzarían el objetivo marcado por Y^{PE}, como puede observarse en la Figura 4.1.VIII.a, para los valores de los parámetros que recoge la TABLA 4.II .

FIGURA 4.1.VIII.a.- P^{ca} de Gasto Proporcional

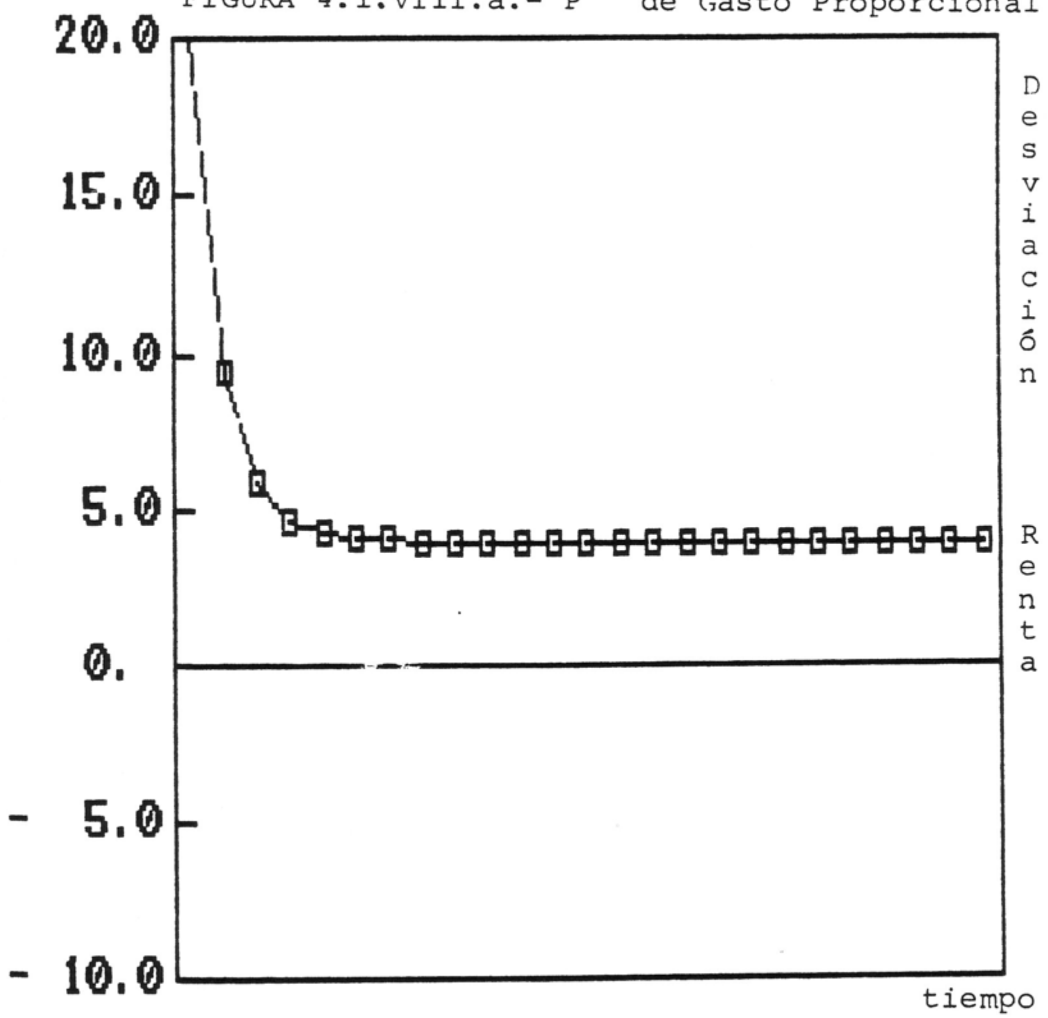


TABLA 4.1.II.- Parámetros del modelo de Phillips. Economía cerrada.

α	0.9	Γ	0.7	$m = m_1$	2	M(0)	60
ß	1.25	M	60	m_2	1	$Y=Y^{PE}$	120
μ	0.9	π	2	Y(0)	100	G	0
σ	0.5	q	1	G(0)	5	M	60

Así, intentando hallar la renta nacional de equilibrio, $\overline{Y}$, siendo $\dot{Y} = 0$, se tiene

$$\overline{Y} = \frac{\pi\ Y^{PE} + (ß\ /\ \Gamma)\ \ \overline{M}}{(\ 1 + \pi + (ß\sigma\ /\ \Gamma) - \alpha\ )}$$

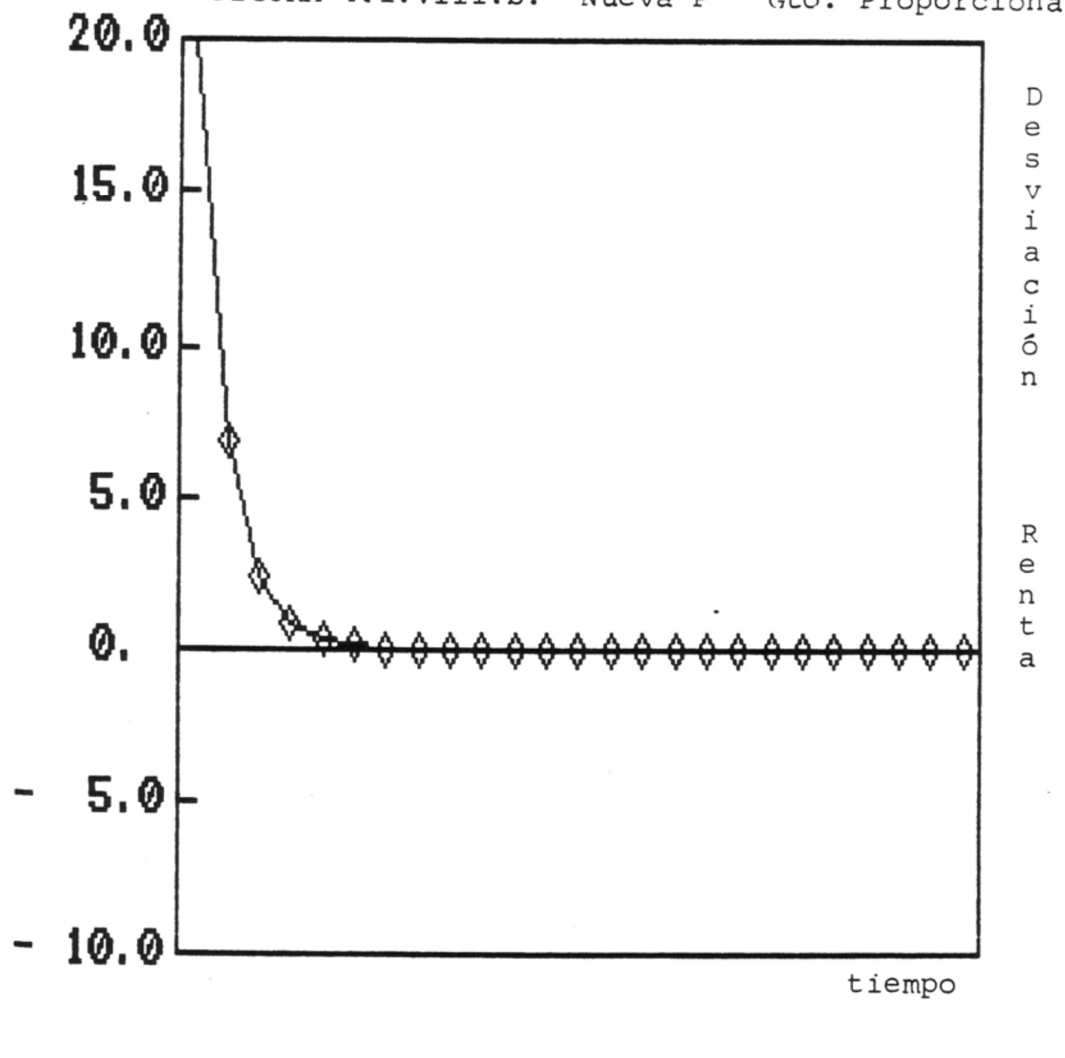
Donde $\overline{Y}$ será igual a Y^{PE} solamente cuando $\pi = \infty$, por lo que nunca se alcanzará el objetivo, a no ser que se modifique esta regla política de acción. Se deberá modificar la regla, encontrando el nivel de gasto, G^{PE}, que sea consistente con el nivel de equilibrio estático de la renta nacional, $Y^{PE} = \overline{Y}$.

La nueva regla política planteada es

$$G - G^{PE} = \pi\ (Y^{PE} - Y), \qquad \text{con} \quad \pi > 0.$$

No basta con variar el gasto público o la política de intervención, en función de las desviaciones de la renta nacional o producto nacional respecto de sus niveles deseados, sino que se debe conocer cuál sería el valor del gasto público, del instrumento, en la situación de equilibrio estático (steady-state), G^{PE}. La política se ejecuta tomando como referencia un determinado equilibrio. De esta forma, aplicando esta nueva regla de política económica se alcanza el pleno empleo en el equilibrio, tal y como refleja la Figura 4.1.VIII.b .

FIGURA 4.1.VIII.b.- Nueva P^{ca} Gto. Proporcional



El segundo tipo de regla política que consideró PHILLIPS en base a estas consideraciones, la llamó la regla integral de control.

$$\dot{G} = \pi\ (Y^{PE} - Y), \qquad\qquad \pi > 0.$$

O bien

$$G(t) = \pi \int_{-\infty}^{t} [Y^{PE} - Y(t)]\ dt$$

Con esta política, las autoridades determinan el gasto corriente no sólo atendiendo al "gap" existente entre el ingreso actual y su nivel deseado, sino todas las desviaciones del ingreso con respecto al nivel a alcanzar. Esta nueva regla, junto con el modelo IS-LM, proporciona el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

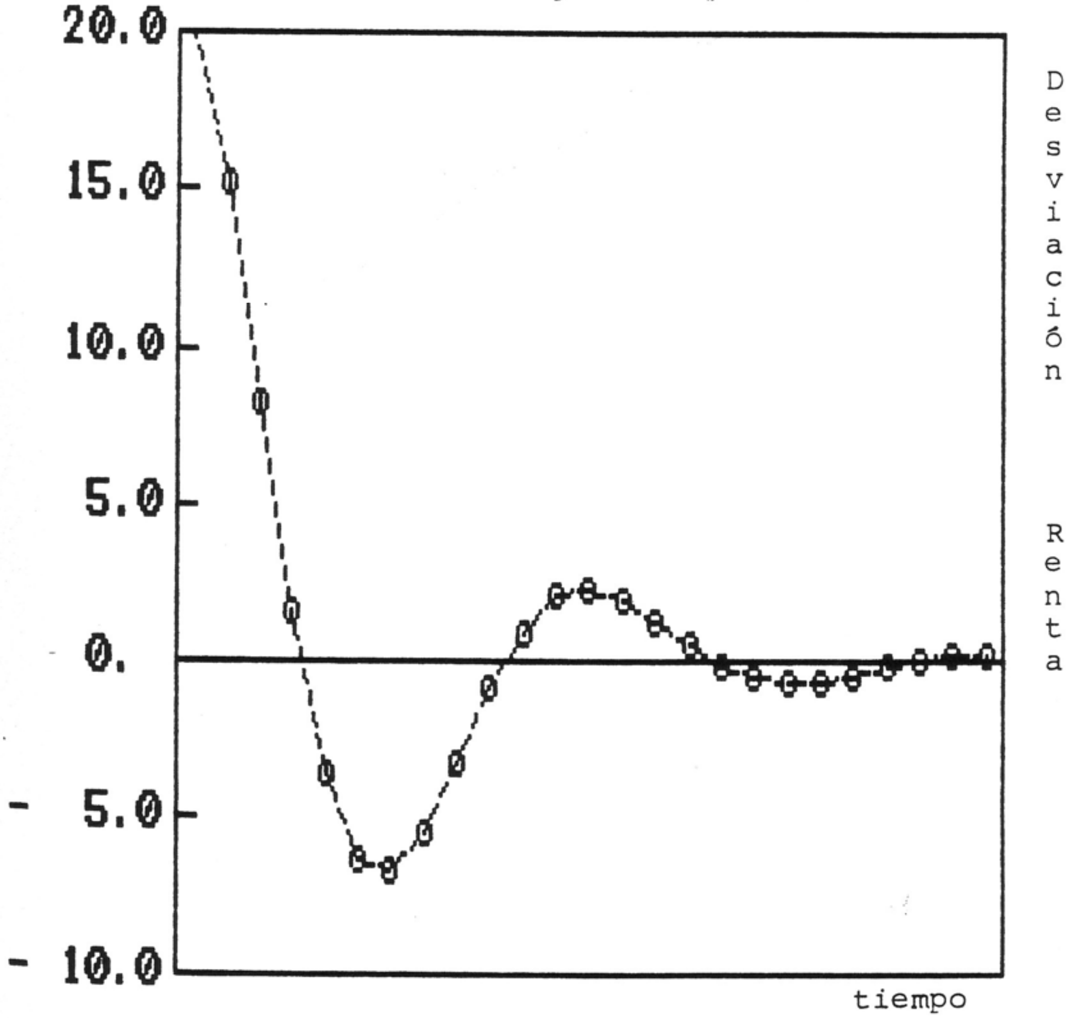
$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\ (\alpha-(ß\sigma/\Gamma)-1) & \mu \\ -\ \pi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mu ß\ /\ \Gamma)\ \bar{M} \\ \pi\ Y^{PE} \end{bmatrix}$$

Se podría ver que el modelo es globalmente estable, siempre que $(\alpha - 1 - (ß\ \sigma / \Gamma)) < 0$. Conforme mayor sea el valor de π, más rápidamente el sistema va a converger al equilibrio. Esta regla de acción política es estabilizadora. En el equilibrio, la renta nacional converge al nivel deseado por los políticos, $\overline{Y} = Y^{PE}$, y el nivel de gasto de equilibrio será

$$\overline{G} = - (ß / \Gamma)\ \overline{M} + Y^{PE}\ (1 + (ß\ \sigma / \Gamma) - \alpha)$$

La evolución de la renta nacional y su convergencia al nivel de pleno empleo, Y^{PE}, para los valores de la TABLA 4.II se muestra en la Figura 4.1.IX.

FIGURA 4.1.IX.- Regla integral de control



El tercer tipo de política, es la llamada <u>regla de política derivada</u>, siendo del tipo

$$G = -\pi \dot{Y} \quad , \qquad \text{con} \quad \pi > 0.$$

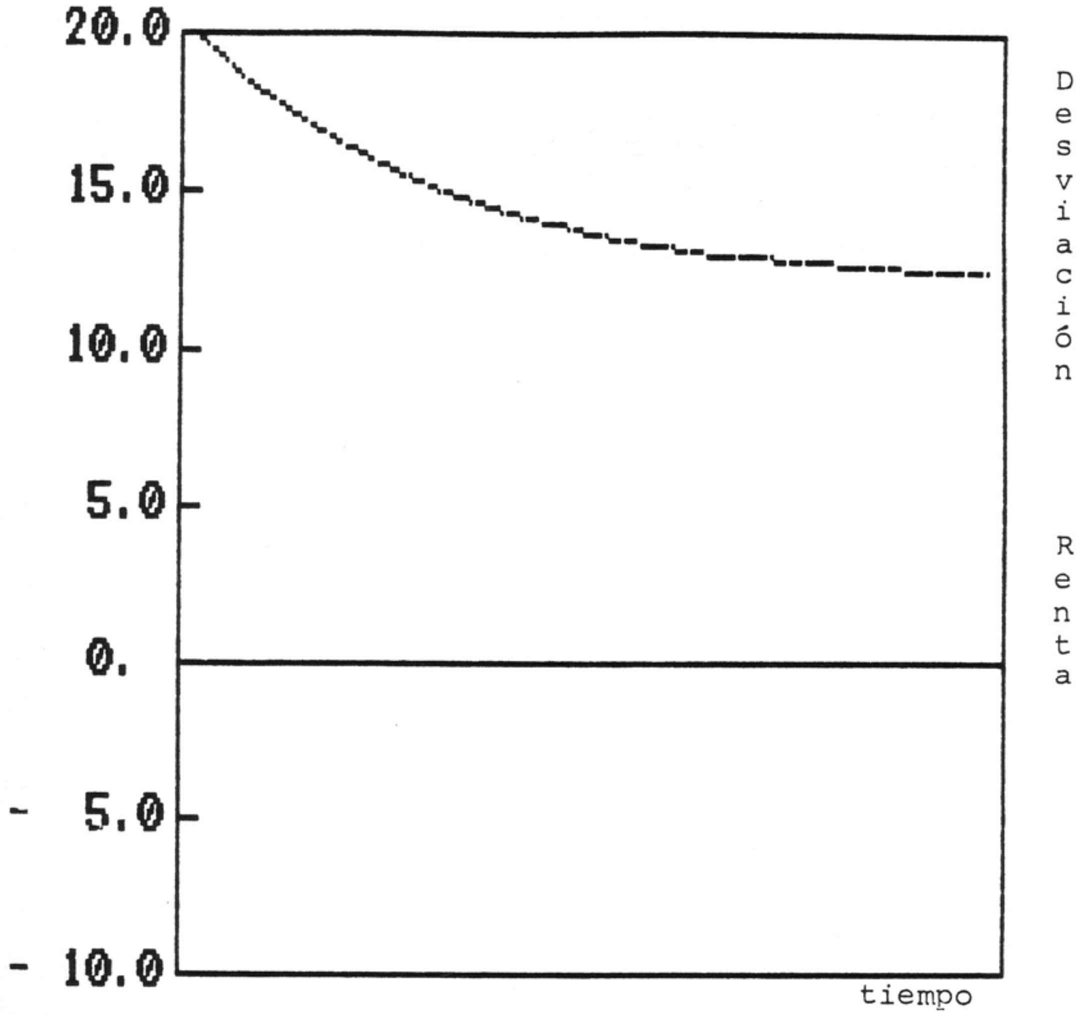
El gasto público se incrementa siempre que la tasa de variación de la renta nacional sea negativa.

Sustituyendo en el modelo IS-LM, se obtiene, esta vez, una sóla ecuación diferencial

$$\dot{Y} = \frac{\mu \; [(\alpha - (ß \; \sigma \; / \; \Gamma) - 1) \; Y + (ß \; / \; \Gamma) \; M]}{(1 + \mu \; \pi)}$$

Para que sea estable, se requiere que $\alpha < [1+(ß \; \sigma \; /\Gamma)]$. El alcance de los objetivos planteados en el punto de equilibrio no está garantizado, como puede verse en la Figura 4.1.X .

FIGURA 4.1.X.- Regla de política derivada



Nótese que estos tres tipos de políticas no se han planteado tras un proceso de optimización. Además, no se han valorado los costes que pudieran ocasionar, sino que sólo se ha hecho mención a la consecución en el equilibrio de los objetivos perseguidos.

En el contexto del modelo macroeconómico expuesto anteriormente, y planteando ahora un funcional objetivo a minimizar, que afecte tanto las desviaciones de la renta nacional con respecto al nivel deseado, Y^{PE} , como al gasto público a emplear, se tendría el problema de control con estabilización expresado a continuación :

C A S O 1

$$\text{Min} \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q\ [Y - Y^{PE}]^2 + m\ [G - G^{PE}]^2)\ dt$$

s. a

$$\dot{Y} = \mu\ [(\alpha - 1) - (ß\ \sigma\ /\ \Gamma)]\ Y + (\mu\ ß\ /\ \Gamma)\ \overline{M} + \mu\ G$$

Trabajando con desviaciones de las variables respecto de los valores deseados, como se hizo en el caso anterior, la ecuación diferencial resultante es

$$\dot{y} = a\ y + b\ g$$

con $a = \mu\ [\alpha - 1 - (ß\ \sigma\ /\ \Gamma)]$

$b = \mu$

$y = Y - Y^{PE}$

$g = G - G^{PE}$

El horizonte temporal se considerará infinito (t-->∞), así la solución para la política de gasto, es la siguiente

$$g^*(t) = -\ (b\ /\ m)\ k\ y(t)$$

siendo

$$k = \frac{a + [a^2 + (q\ b^2\ /\ m)]^{1/2}}{b^2/m} > 0$$

La trayectoria óptima de las desviaciones de la renta nacional vendrá dada por la solución a la siguiente ecuación

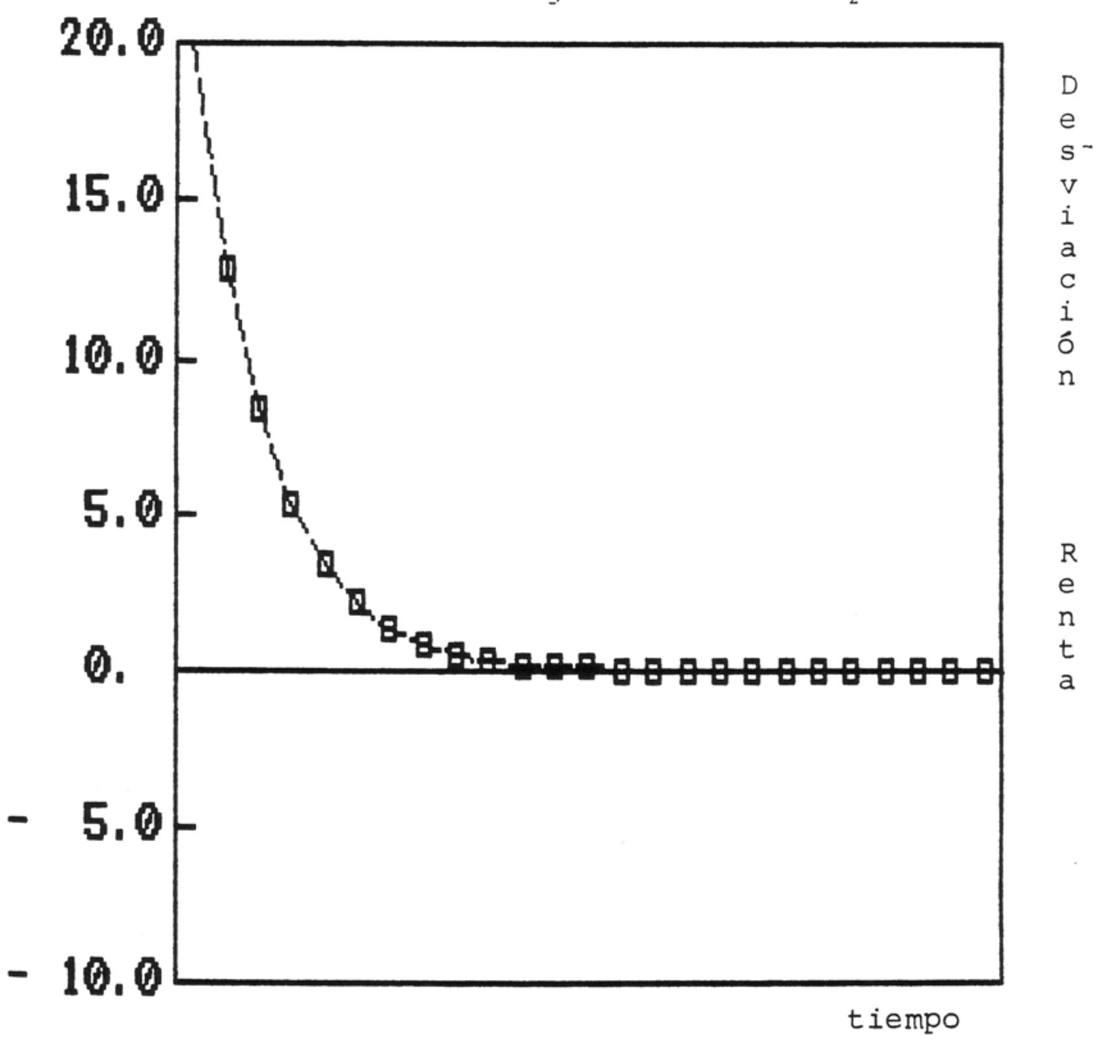
$$\dot{y} = [a - (b^2\ k\ /\ m)]\ y$$

$$y^*(t) = y_0\ e^{\alpha t}$$

con $\alpha = [a - (b^2\ k\ /\ m)]$; $y_0 = Y(0) - Y^{PE}$.

Gráficamente, la Figura 4.1.XI refleja la función temporal que seguirán las desviaciones de la renta nacional cuando t--> ∞ , aplicando la ley de control óptima. Mientras que las evoluciones que se han derivado de aplicar la política de gasto proporcional, la regla integral de control y la regla derivada de control, reflejan el valor de $Y(t)-Y^{PE}(t)$ $\forall t \in [0,+\infty]$, no puede decirse lo mismo de la función representada en la Figura 4.1.XI. Esta es válida sólo cuando $t \longrightarrow \infty$, en cualquier otro caso, la solución sería distinta, ya que k no será constante.

FIGURA 4.1.XI.- Regla de control óptimo. Caso 1



Analizando cuál sería el gasto público resultante de la utilización de una política u otra, se puede afirmar a la vista de las Figuras 4.1.XII, que con la ley obtenida por las técnicas de control, el gasto público converge a cero cuando t-->∞ ; mientras que empleando las políticas proporcional y derivada (por separado), el gasto no tiene por qué converger al valor deseado. Para la regla de gasto integral y la redefinida regla de gasto proporcional, el objetivo, $G^{PE}= G^{*}$, se alcanza también, al igual que sucede con la renta nacional; ahora bien, las oscilaciones o fluctuaciones que sufren las variables de estado y de control son mucho mayores aplicando esta regla de gasto, que siguiendo la pauta de actuación marcada por la ley de control óptimo, la cual minimiza aquéllas de acuerdo con el funcional planteado.

FIGURA 4.1.XII.a.- Gasto proporcional

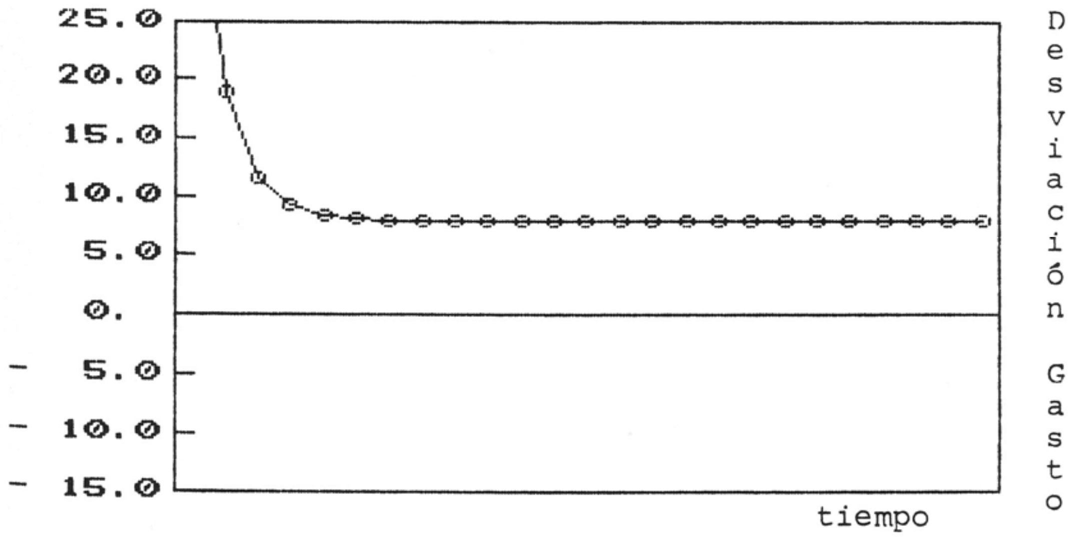


FIGURA 4.1.XII.b.- Nuevo Gasto proporcional

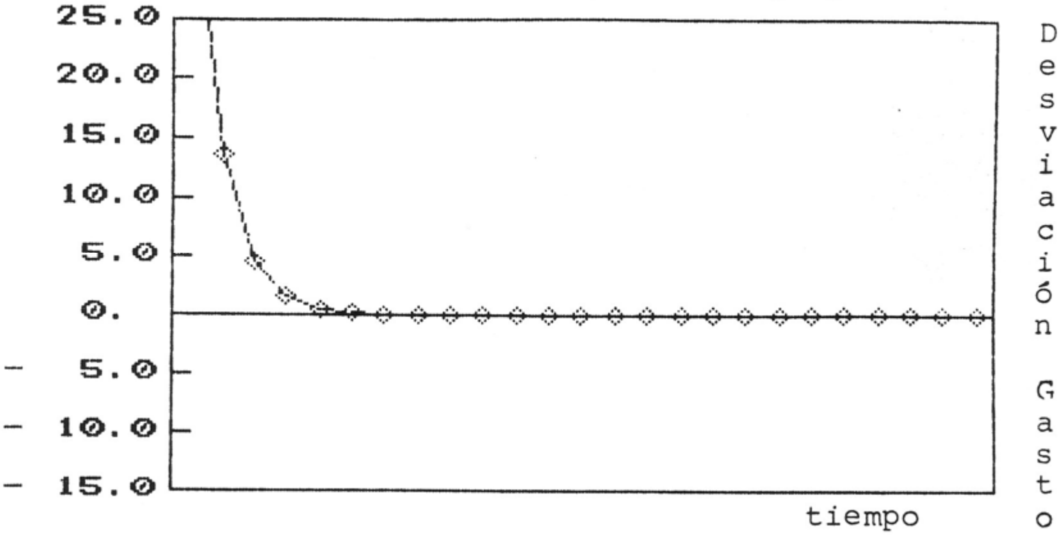


FIGURA 4.1.XII.c.- Regla integral de control

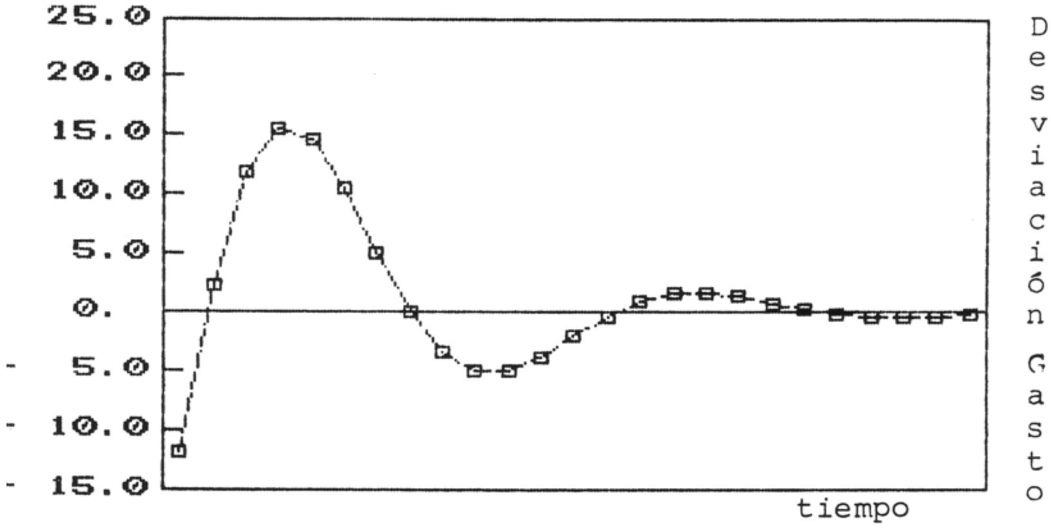


FIGURA 4.1.XII.d.- Regla derivada de control

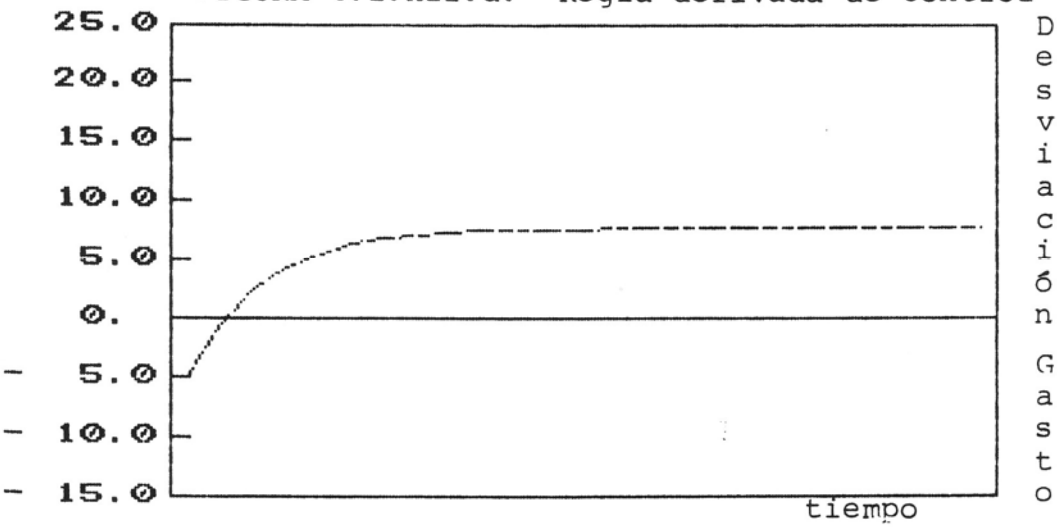
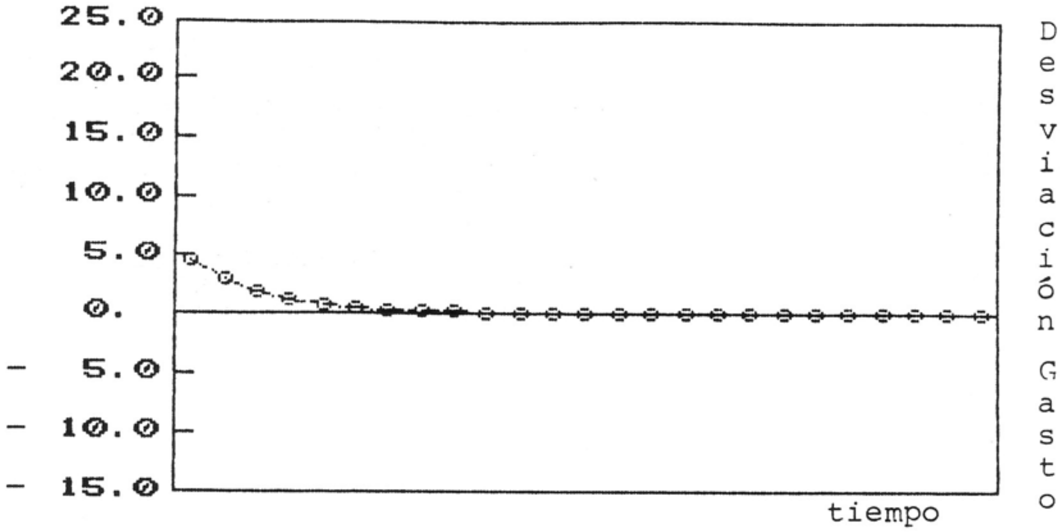


FIGURA 4.1.XII.e.- Regla de control óptimo.



<u>C A S O   2</u>

Si se tomara la oferta monetaria , $\overline{M}$, no como una variable exógena, sino como una variable de control a emplear por el gobierno, el nuevo funcional podría ser

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [q\ (Y-Y^{PE})^2 + m_1\ (G-G^{PE})^2 + m_2\ (M - \hat{M})^2]dt$$

con

$$\dot{Y} = A\ Y + B\ u$$

siendo

$$A = \mu\ [\alpha - 1 - (\beta\ \sigma / \Gamma)]$$

$$B = \begin{bmatrix} \mu\ ,\ \mu\ \beta / \Gamma \end{bmatrix}$$

$$u = (G, M)$$

Trabajando con desviaciones de las variables respecto a los valores deseados[2] , el sistema dinámico resultante es

$$\dot{y} = A\ y + B\ (u - \hat{u})$$

$$\text{con}\quad y = Y - Y^{PE}\ ;\quad (u - \hat{u}) = \begin{bmatrix} G - G^{PE} \\ M - \hat{M} \end{bmatrix}$$

La solución para los controles, es:

$$\begin{bmatrix} g^{*}(t) \\ m^{*}(t) \end{bmatrix} = R\ y(t)\ ,\quad \text{con}\quad R = \begin{bmatrix} -\ \mu\ k / m_1 \\ -\ \mu\ (\beta k/\Gamma m_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{con}\quad k = \frac{a + (a^2 + q\ r)^{1/2}}{r}\ ,\quad r = \mu^2 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{\beta^2}{\Gamma^2 m_2} \end{bmatrix}$$

[2] El pleno empleo también es alcanzable.

La trayectoria óptima de la desviación de la renta se obtiene como solución del sistema :

$$\dot{y} = [a - (\mu^2 k / m_1) - (\mu^2 ß^2 k / m_2 \Gamma^2)] y$$

$$y^*(t) = y_0 e^{nt}$$

con $n = [a - (\mu^2 k ((1/m_1) - (ß^2 / m_2 \Gamma^2)))]$

Las figuras 4.1.XIII y 4.1.XIV muestran, respectivamente, las trayectorias de las desviaciones de la renta nacional y del gasto público cuando $t \longrightarrow \infty$. La convergencia a los valores deseados está asegurada al ser un sistema estabilizable y alcanzable. Al contar con una variable más, la convergencia es " más rápida " que en el último caso, en el que sólo se contaba con el gasto público como instrumento. ¿Se puede concluir que la introducción de variables de control posibilita una más rápida convergencia hacia los valores deseados?. En principio no se ha expuesto en este trabajo nada que sustente esta afirmación, por lo que no será lícito concluir que la introducción de un mayor número de variables de control vaya a proporcionar una convergencia más rápida, e incluso no estaría garantizada la consecución de los objetivos perseguidos.

FIGURA 4.1.XIII.- Regla control óptimo.Caso 2

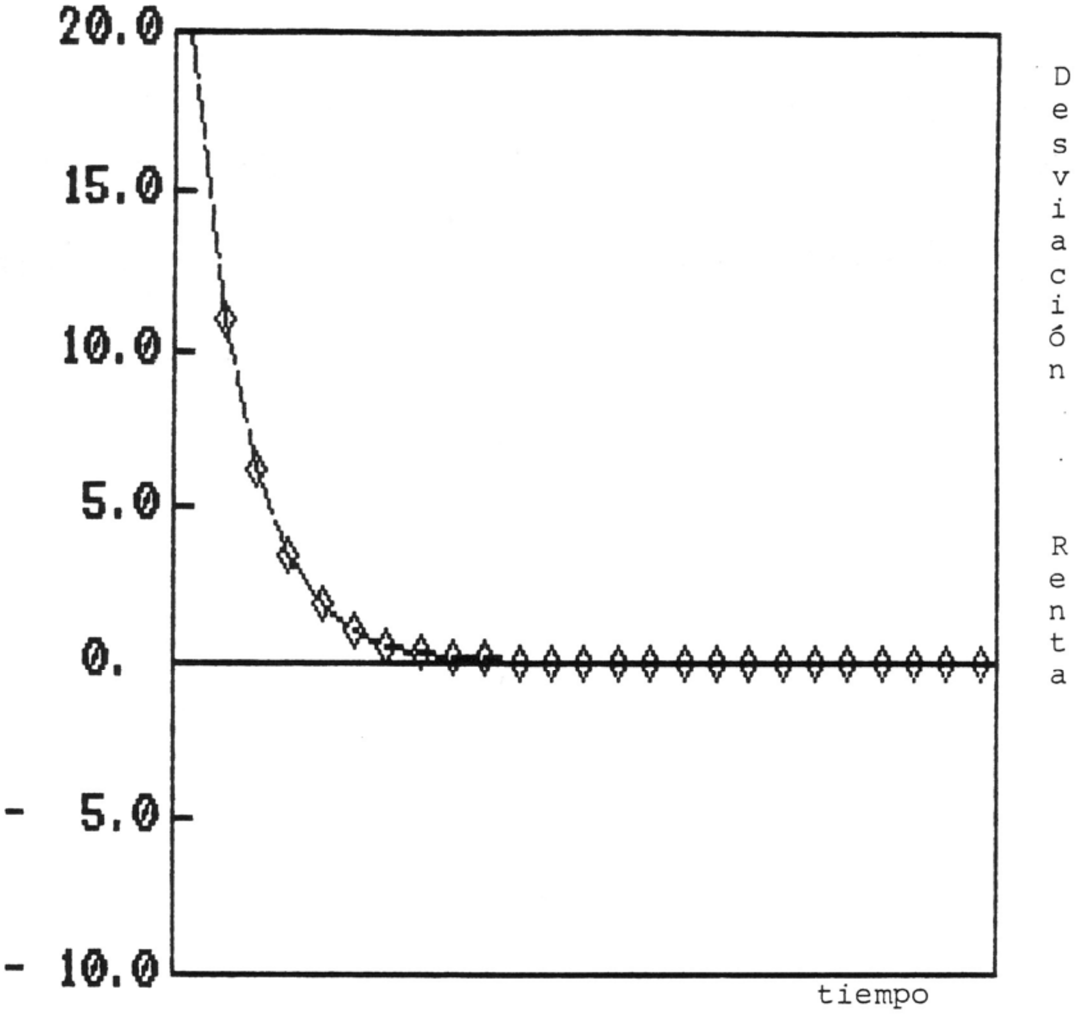
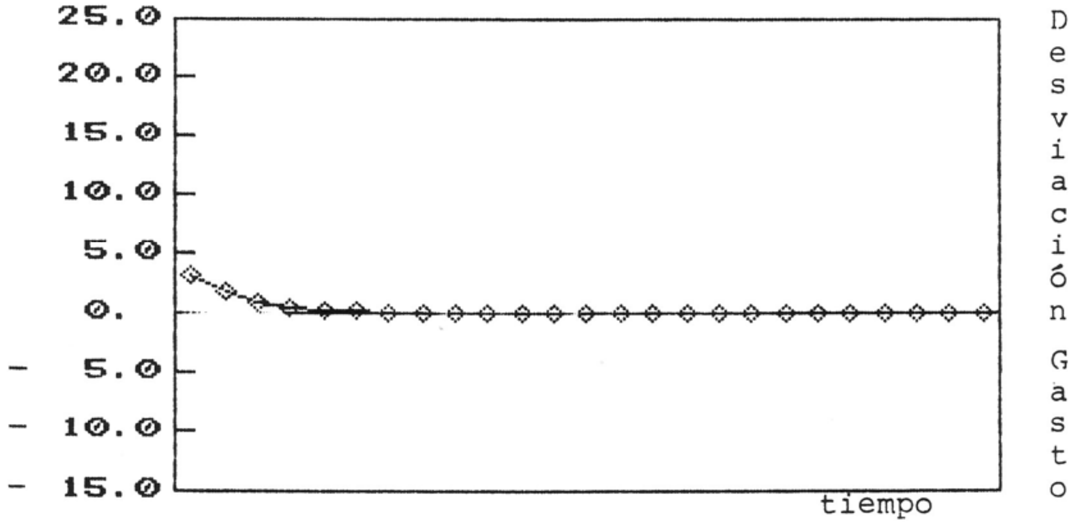


FIGURA 4.1.XIV.- Regla de control óptimo.Caso 2



CUADRO 4.1.II.- RESUMEN MODELO B (PHILLIPS)

S I S T E M A D I N A M I C O I N I C I A L		
$\dot{Y} = \mu\ [\ (\alpha - 1) - (ß/\Gamma)\ \sigma\ ]\ Y + (\mu ß/\Gamma)\ M + \mu\ G$ $Y(0) = Y_0 \qquad \alpha\ ,\ ß,\ \mu,\ \sigma,\ \Gamma > 0$		
POLITICAS	REGLA DE GASTO	SOLUCION RENTA
PROPORCIONAL	$\pi > 0$	$Y(t)=[y(0)-(b/a)]e^{-at}+(b/a)$
1	$G = \pi\ (Y^{PE}-Y)$ Fig.4.XII.a	$a=-\mu(\alpha-1-(ß\sigma/\Gamma))$ $b=\mu(\pi Y^{PE}+(ßM/\Gamma)$ Fig.4.VIII.a
2	$G-G^{PE}=\pi(Y^{PE}-Y)$ Fig.4.XII.b	$a=-\mu(\alpha-1(ß\sigma/\Gamma))$ Fig.4.VIII.b $b=\mu(\pi Y^{PE}+(ßM/\Gamma)+G^{PE}$
INTEGRAL	$\pi > 0$ $\dot{G} = \pi\ (Y^{PE}-Y)$ Fig.4.1.XII.c	$Y=Y^{PE} + \dfrac{e^{hht}}{-\pi}\ (coswt(hhA_1+wA_2)+$ (*) $+ \dfrac{e^{hht}}{-\pi}\ (coswt(hhA_1+wA_2)$ $A_1=G(0) - G_p$ $A_2=[Y_0-Y^{PE}-hh(A_1/-\pi)]/(w/-\pi)$ $G(0) = G_0$ $G_p =-[1+(ß\sigma/\Gamma)-\alpha]Y^{PE}+(ß\bar{M}/\Gamma)$ $hh = [\mu(\alpha-1-(ß\sigma/\Gamma))]/2$ $w = \dfrac{[4\mu\pi-\mu^2(\alpha-1-(ß\sigma/\Gamma))]^{1/2}}{2}$ Fig.4.1.IX
DERIVADA	$G = -\pi\ \dot{Y}$ Fig.4.1.XII.d	$Y(t)=[y(0)-(b/a)]e^{-at}+(b/a)$ $a=-\mu[\alpha-1-(ß\sigma/\Gamma)]/(1+\mu\pi)$ $b= [\mu(ßM/\Gamma)]/(1+\mu\pi)$ Fig.4.1.X

(*): Raices imaginarias.

CUADRO 4.1.II.-RESUMEN MODELO B (PHILLIPS) (continuac.)

C O N T R O L O P T I M O		
CASO 1	SISTEMA DINAMICO EN DESVIACIONES	
	$\dot{y} = a\ y + b\ g\ ,\quad y(0)= Y(0)-Y^{PE}$ $a = \mu\ [\alpha-1-(\beta\sigma/\Gamma)],\ b = \mu,\ y = Y-Y^{PE},\ g = G- G^{PE}$	
	F U N C I O N A L	
	$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (q\ [Y-Y^{PE}]^2 + m\ [G-G^{PE}]^2)\ dt$	
	Regla de control óptimo	$g^*(t) = -\ (b\ /\ m)\ k\ y(t)$ $k = [a+[a^2+(q\ b^2/m)]^{1/2}]/(b^2/m)$ Fig.4.1.XII.5
	Renta óptima (desviac.)	$y^*(t) = y_0\ e^{\alpha t}$ $\quad\alpha=[a-(b^2k/m)]$ Fig.4.1.XI
CASO 2	SISTEMA DINAMICO EN DESVIACIONES	
	$\dot{y} = A\ y + B\ (u - \hat{u})\quad ;\ y=Y-Y^{PE}\ ;\ u = (G,M)$ $(u-\hat{u})= \begin{bmatrix} G - G^{PE} \\ M - \hat{M} \end{bmatrix}\ ;A=\mu[\alpha-1-(\beta\sigma/\Gamma)],\ B=(\mu,\mu\beta/\Gamma)$	
	F U N C I O N A L	
	$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [q(Y-Y^{PE})^2 + m_1(G-G^{PE})^2 + m_2(M-\hat{M})^2]\ dt$	
	REGLA DE CONTROL OPTIMO	Fig.4.1.XIV
	$[g^*(t),m^*(t)]= R\ y(t)$	$R=-\mu[(k/m_1),(\beta k/\Gamma\ m_2)]$
	$k =[a+(a^2+qr)^{1/2}]/r\ ,\ r=\mu^2[(1/m_1)+(\beta/\Gamma m_2)2]$	
	RENTA OPTIMA	Fig.4.1.XIII
	$y^*(t)=y_0e^{nt}$	$n=[a-(\mu^2k((1/m_1)-(\beta^2/m_2\Gamma^2)))]$

4.1.2.- Una economía abierta.

La introducción del Sector Exterior en el modelo macroeconómico va a plantear distintos problemas, entre los que se encuentran los relacionados con el equilibrio de la Balanza de Pagos, o la estabilidad del tipo de cambio.

Al MODELO B (PHILLIPS) se le podría incorpar el Sector Exterior, resultando las siguientes ecuaciones :

$$C = \alpha Y \qquad , \alpha > 0$$

$$I = -\beta r \qquad , \beta > 0$$

$$E = C + I + G + N$$

$$\dot{Y} = \mu (E - Y) \qquad , \mu > 0$$

$$M^d = \sigma Y - \Gamma r \qquad , \sigma > 0 \text{ y } \Gamma > 0$$

$$M^s = \overline{M}$$

$$M^s = M^d$$

donde N es el saldo de la Balanza de Pagos[1].

---

[1] Se considera de forma simplista, como el saldo de la Balanza Comercial : Exportaciones - Importaciones.

Ahora bien, si se introduce el Sector Exterior en el modelo, no como una variable exógena, sino que se añade el objetivo de política económica de mantener el equilibrio de la Balanza de Pagos, podrá introducirse una variable de control más, así como otra ecuación dinámica. Así, el modelo que refleja la nueva situación contará además de las anteriores ecuaciones, con la siguiente[2]

$$\dot{N} = \gamma_1\ TC + \gamma_2\ G + \gamma_3\ r - \gamma_4\ Y \qquad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4 > 0$$

donde TC , tipo de cambio fijado por el gobierno ,es la nueva variable de control, suponiendo que se pueda instrumentalizar.

El sistema de ecuaciones diferenciales resultante es

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} Y \\ N \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} G \\ TC \end{bmatrix} + C$$

[2] Esta ecuación se ha establecido de forma intuitiva, considerando nociones muy básicas de Teoría Macroeconómica para la elección de las variables, así como la caracterización del signo de los parámetros. La linealidad de la ecuación es un requisito impuesto por el tipo de modelos con los que se está trabajando con las técnicas de C.O. expuestas.

siendo

$$A = \begin{bmatrix} \mu[\alpha-ß\sigma/\Gamma)-1] & \mu \\ (\gamma_3\sigma/\Gamma) - \gamma_4 & 0 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} \mu ß/\Gamma\bar{M} \\ (-\gamma_3 \bar{M}/\Gamma) \end{bmatrix}$$

Al haber considerado sólo dos variables de control, G y TC, (la oferta monetaria, M, se ha considerado exógena), el funcional objetivo es

$$J= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [(Y-\hat{Y},N-\hat{N})^t Q(Y-\hat{Y},N-\hat{N})+(G-\hat{G},TC-T\hat{C})^t M(G-\hat{G},TC-T\hat{C})]dt$$

con

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} ; \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} ; \; \hat{G} = G^{PE} ; \; \hat{N} = 0 \quad \hat{Y} = Y^{PE}$$

En términos de las desviaciones de las variables de estado y de control respecto de sus valores deseados (pleno empleo alcanzable), el sistema dinámico puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} g \\ e \end{bmatrix}$$

con $y = Y - Y^{PE}$; $n = N - \hat{N} = N$; $g = G - \hat{G}$; $e = TC - \hat{TC}$

El sistema de ecuaciones de Riccati correspondiente es

$$\dot{K} = - K A + K B M^{-1} B' K - Q - A'K$$

Se tratará de un problema de horizonte temporal infinito ($t \to \infty$), al igual que como se hizo para el caso de economía cerrada. La solución de K(t) cumple que

$$\lim_{t \to \infty} K(t) = \overline{K}$$

Se deberá resolver, pues, un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, en vez de ecuaciones diferenciales no lineales.

Para los valores de los distintos parámetros del modelo recogidos en la TABLA 4.1.III , la solución de $\overline{K}$ es , mediante un cálculo aproximado de la solución del sistema [3]

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} 0.4956501117540264 & 0.1261358531048569 \\ 0.1261358531048569 & 4.775363961934988 \end{bmatrix}$$

Así, el vector de control óptimo, $(\hat{u}-u)^*$, cuando t -->∞ será

$$(\hat{u}-u)^* = - M^{-1} B'\lim_{t \to \infty} [K(t)x(t)] = - M^{-1} B'\overline{K}\, x(t)$$

con

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \quad ; \qquad (\hat{u} - u) = \begin{bmatrix} g^*(t) \\ e^*(t) \end{bmatrix}$$

[3] Aproximación con un error de 10^{-16}, obtenida por bipartición, aplicando el Teorema de Bolzano del valor medio. Se obtuvieron 4 soluciones de K, pero sólo una de ellas era una matriz simétrica definida positiva.

TABLA 4.1.III.- Parámetros del modelo de economía abierta.

α	0.9	Γ	0.7	γ_1	0.3	m_1	2
ß	1.25	$\bar{M}$	60	γ_2	0.1	m_2	1
μ	0.9	q_1	1	γ_3	0.35	$\hat{N}$	0
σ	0.5	q_2	2	γ_4	0.28	N(0)	- 15

Nota.- Los valores mostrados en esta Tabla recogen los equivalentes a los mismos parámetros dados en la TABLA 4.1.II, permitiendo que el modelo sea estabilizable.

El resultado, según estos valores, será la ley de control lineal óptima feedback que se concreta a continuación

$$\begin{bmatrix} g^*(t) \\ e^*(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.2293493429 & 0.295529332 \\ 0.0378407559 & 1.432609189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ n(t) \end{bmatrix}$$

Recuérdese que lo que se expresa en esta ley lineal es la evolución temporal óptima de las desviaciones de las variables de control, en función de las desviaciones de las variables de estado. Sustituyendo esta ley de control óptima en el sistema dinámico se obtendrá la senda temporal óptima del vector x(t) cuando t--> ∞.

$$\dot{x} = A\ x + B\ u^{*}$$

$$\dot{x} = A\ x + B\ (- M^{-1}\ B\ \bar{K}\ x) = [A - B\ M^{-1}\ B'\ \bar{K}]\ x$$

Este sistema será estable si todos los autovalores de la matriz $[A - B\ M^{-1}\ B'\ \bar{K}]$ tienen parte real no positiva. En este caso, la tienen, y la solución, para unas condiciones iniciales dadas y(0) = - 20 (Y(0)= 100), n(0) = -15, es

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - 16.240311\ e^{R1t} - 3.7596889\ e^{R2t} \\ - 14.575234\ e^{R1t} - 0.4247658\ e^{R2t} \end{bmatrix}$$

siendo R1 = -0.530967025

R2 = -1.028354502

Como puede verse, cuando t-->∞, esta sería la expresión matemática aproximada de la evolución temporal de las desviaciones de la renta nacional y del saldo de la balanza de pagos. Ambas variables de estado, pues, alcanzarán los valores deseados cuando t-->∞ .

Se reitera una vez más, que la solución aquí mostrada no es la representación matemática de la senda temporal que seguirán tanto Y como N en cualquier instante $t \in [0, \infty)$, ya que existirá un valor distinto de K, y por tanto, un control óptimo que determinará unos valores para el vector de variables de estado que no tendrá por qué satisfacer la solución aquí presentada.

La representación gráfica, tanto de la renta nacional , así como de sus desviaciones respecto al nivel de pleno empleo, y del saldo de la balanza de pagos, se muestran en las figuras 4.1.2.I, 4.1.2.II, y 4.1.2.III, respectivamente.

FIGURA 4.1.2.I.- Economía abierta:Renta Nacional

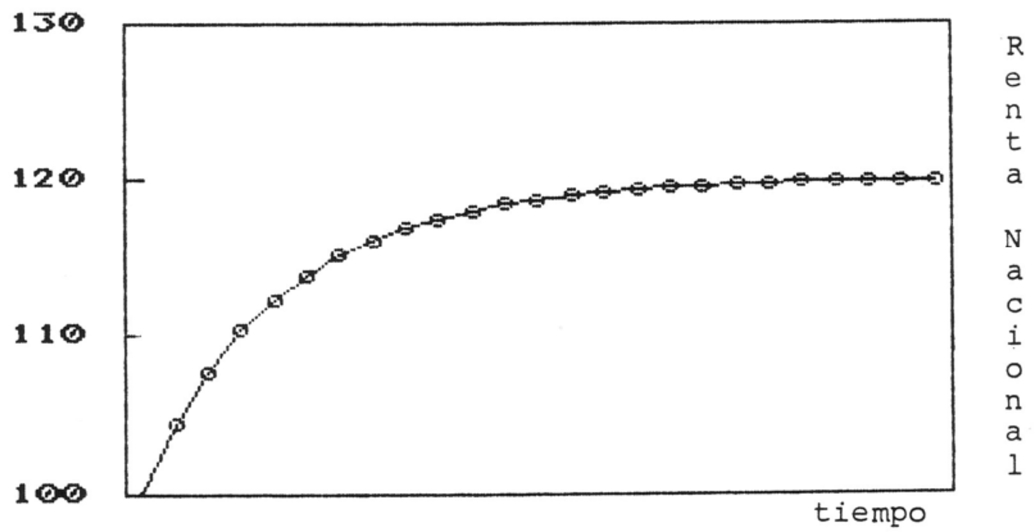


FIGURA 4.1.2.II.- Economía abierta:Desv. Renta

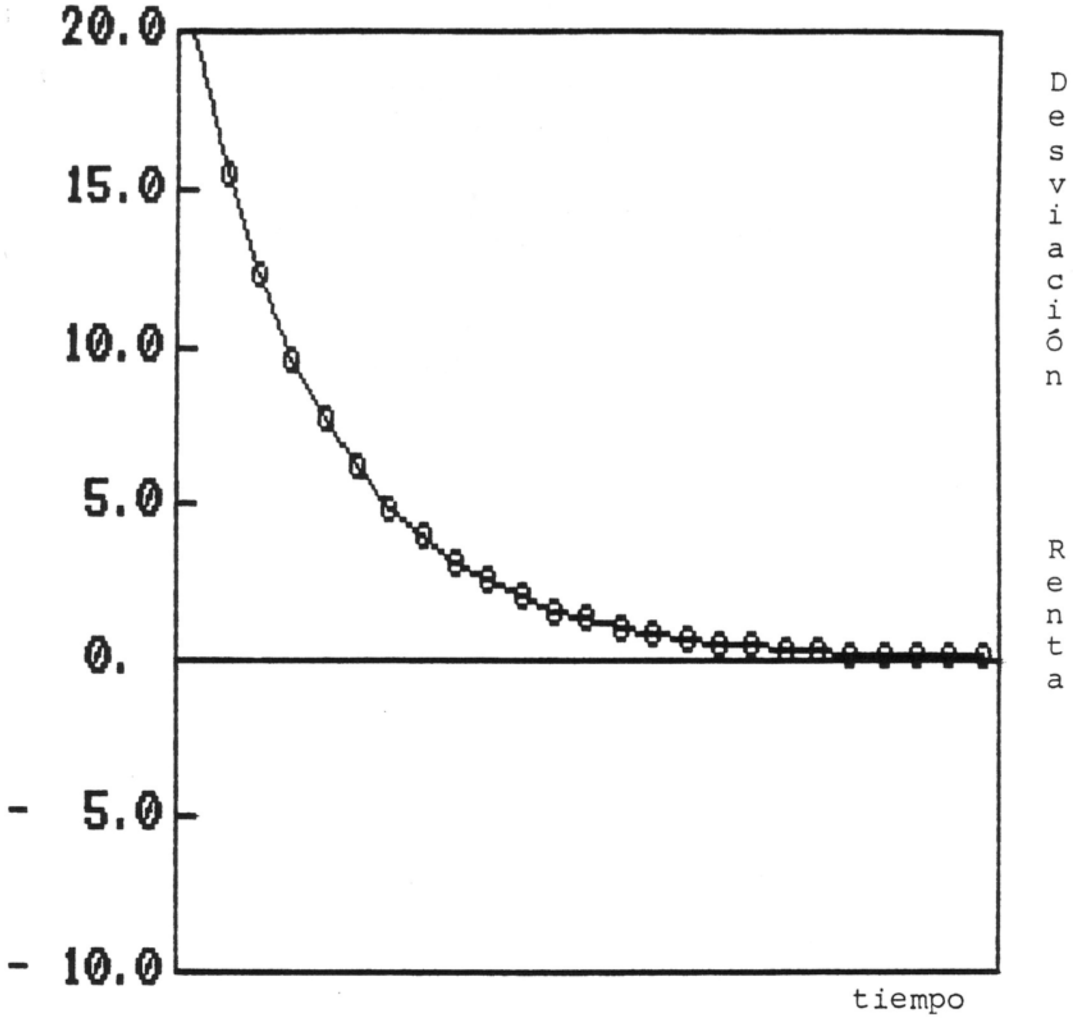
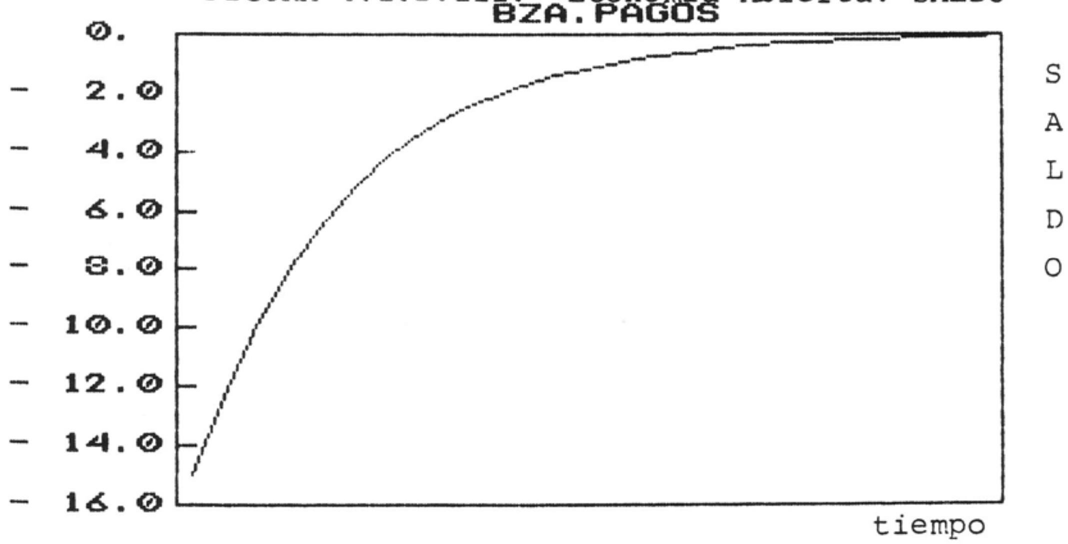


FIGURA 4.1.2.III.- Economía Abierta: SALDO BZA.PAGOS



Comparando la evolución de Y^* en la figura 4.1.2.II con la de la renta nacional en una economía cerrada, tanto con una como con dos variables de control (figuras 4.1.XI, pág.145, y 4.1.XIII, pág. 151), sólo puede concluirse, intuitivamente, que para los valores arbitrarios de la TABLA 4.1.II, los casos que representan a una economía cerrada muestran una más rápida convergencia al nivel de pleno empleo que en el caso de una economía abierta, no pudiéndose extraer conclusiones de carácter general.

En cuanto a la evolución de la variable de control que refleja el gasto público, $G^*(t)$, se expresa gráficamente en la Figura 4.1.2.IV, junto con las correspondientes a las dos soluciones del caso de una economía cerrada. Sólo se puede hacer el mismo tipo de comentario que se ha hecho para con la renta nacional, su evolución converge, en el infinito, más lentamente al nivel deseado que en las dos soluciones obtenidas con C.O. para el caso de una economía cerrada.

Por último, y para mostrar qué sucede con el tipo de cambio, en la figura 4.1.2.V, se puede apreciar las desviaciones de éste respecto al tipo considerado por los responsables de política económica como compatible con una situación de pleno empleo, y de equilibrio de la balanza de pagos.

FIGURA 4.1.2.IV.- Economía abierta: Gto. Optimo

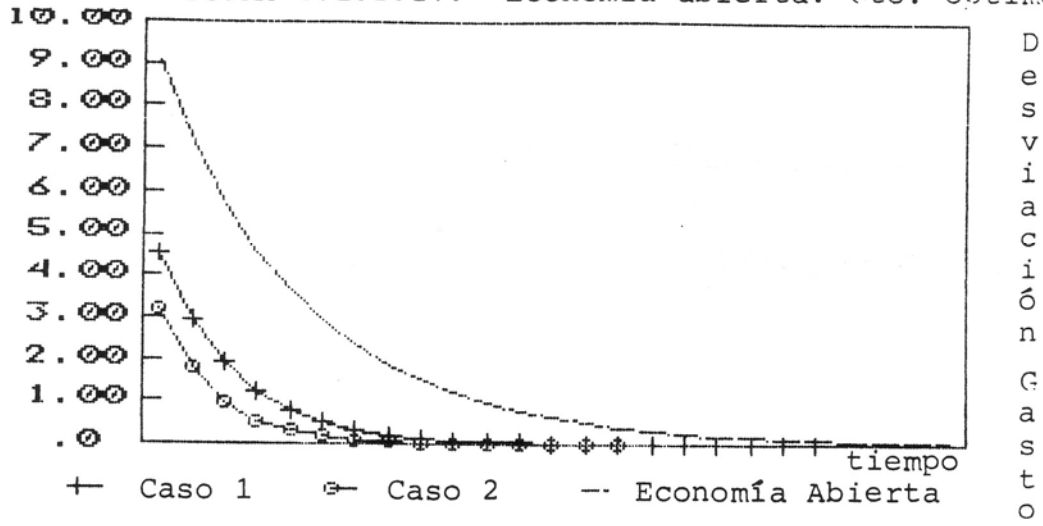
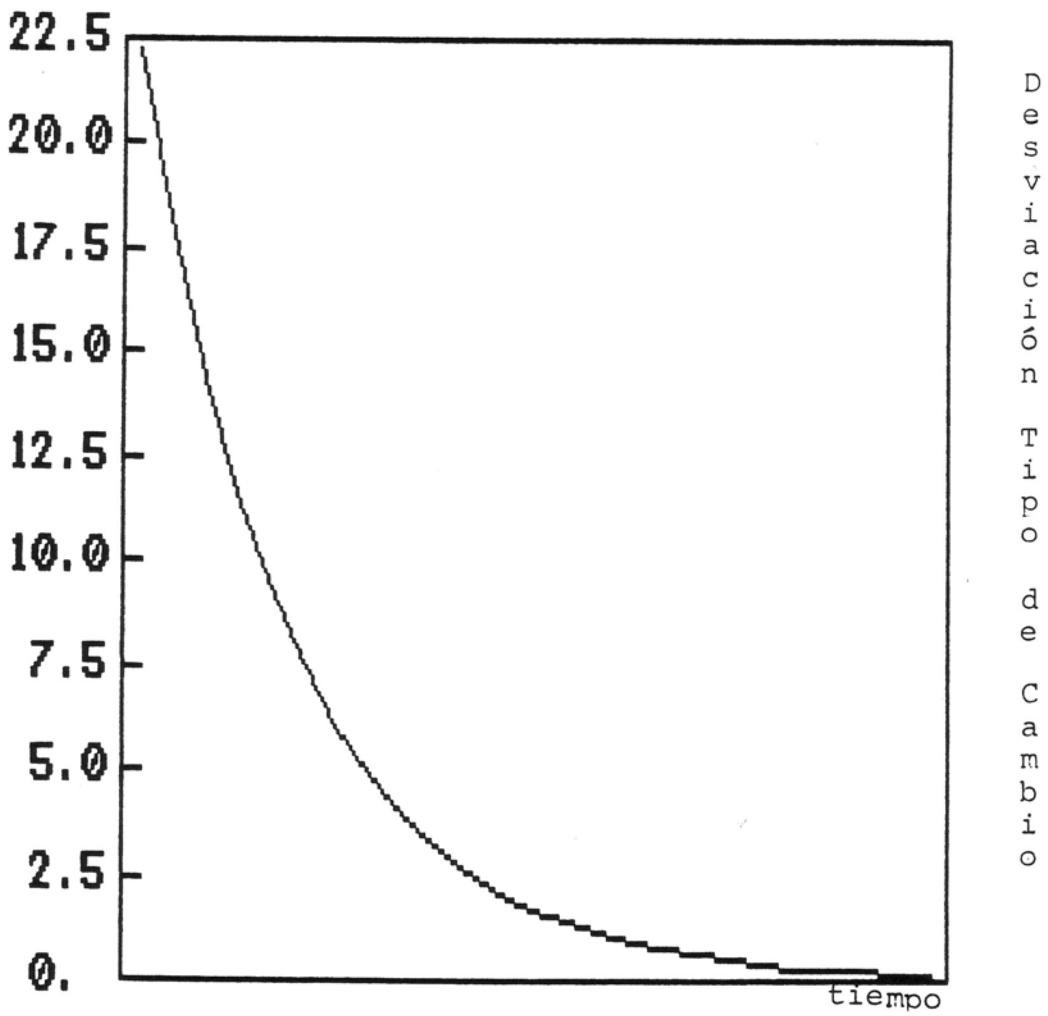


FIGURA 4.1.2.V.- Economía Abierta: Tipo de cambio



Así, de esta forma, se ha querido ejemplificar el uso de las técnicas de Control Optimo para obtener la ley de política óptima que conduzca la economía, siempre que el modelo lo permita, de un estado inicial a otro estado, que en estos casos ha sido el pleno empleo, compatibilizándose este objetivo con otros como el equilibrio de la balanza de pagos, o el minimizar el gasto público (o sus desviaciones respecto al nivel en el pleno empleo).

En el apartado siguiente, al trabajar con otro tipo de fenómenos económicos, y por consiguiente, con otras modelizaciones, se analizará la obtención de la solución de problemas de control en otras condiciones distintas a las ya empleadas : coeficientes variables y horizonte temporal finito, frente a los coeficientes constantes y horizonte temporal infinito utilizados en este epígrafe.

4.2.- Modelo de estabilización de producción y almacenamiento.[1]

Un caso típico de control es el problema de minimizar el coste de mantener un almacenamiento y una producción de un determinado producto próximos a unos niveles deseados. El enfoque empleado en este apartado para abordar el problema está enmarcado en el contexto propio de esta Tesis de Licenciatura, es decir, la estabilización de sistemas económicos dinámicos, y más concretamente, aplicando el modelo de seguimiento lineal para el planteamiento y obtención de la ley de control feedback óptima.

Antes de acometer el caso de los excedentes agrícolas comunitarios originados por la política de sostenimiento de precios, se resolverá un problema más simple y general, para facilitar una mejor comprensión del planteamiento, así como de las novedades incorporadas en el caso concreto.

[1] Ha sido estudiado por muchos autores. Puede verse una recopilación de distintos planteamientos en SETHI (1978), y SETHI(1981).

4.2.1.- Un modelo simple de producción y almacenamiento con estabilización.

Una empresa se plantea, dada una tasa de ventas exógena s(t), positiva, buscar el nivel de producción, u(t), que minimice

$$J = \int_0^T [\ q(x - \hat{x})^2 + r(u - \hat{u})^2\ ]dt$$

donde x , y u son los niveles de stocks almacenados y de producción , respectivamente, $\hat{x}$ y $\hat{u}$, los niveles deseados; y q y r los pesos constantes dados por la empresa para penalizar las desviaciones de la producción y almacenamiento de las sendas planeadas.

La acumulación de inventarios en el tiempo, x(t), es la diferencia entre la producción, u(t), y las ventas, s(t). Está reflejada en la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = u(t) - s(t)$$

Se parte de un nivel de existencias almacenado ,

$x(0) = x_0$, conocido , estando el tiempo inicial y el final fijados, (0,T).

Se construye el Hamiltoniano correspondiente, para resolverlo como si se tratara de un problema de maximización. (Min F(x) = - Máx F(x)).

$$H \equiv - q\ (x - \hat{x})^2 - m\ (u - \hat{u})^2 + p\ (u - s)$$

Así, tendremos

$$- H_x = \dot{p} = 2\ q\ (x - \hat{x})\ ; \quad \text{con}\ \ p(T) = 0.$$

$$H_u = 0 = - 2\ r\ (u - \hat{u}) + p$$

El control óptimo es

$$u^* = (p/2r) + \hat{u}$$

Sustituyendo en la restricción

$$\dot{x} = (p/2r) + \hat{u} - s(t)\ \ ; \quad \text{con}\ \ x(0) = x_0$$

Como se vio en el epígrafe 3.5.1

$$p(t) = k(t)\ x(t) + v(t)$$

Las ecuaciones de Riccati resultantes son

$$\dot{k} + (k^2/2r) - 2\ q = 0$$

$$\dot{v} + (k\ /\ 2r)\ v - k\ (u - s) + 2\ q\ \hat{x} = 0$$

con $k(T) = 0$, $v(T) = 0$ $(p(T) = 0)$.

Las soluciones de este sistema son

$$k(t) = -\ 2\ r\ \alpha\ \tanh[\alpha(T - t)]$$

donde $\alpha \equiv (q\ /\ r)^{1/2}$

$$v(t) = 2\ r\ \alpha\ \hat{x}\ \tanh\ [\alpha(T - t)]$$

con $\hat{u} = s$

De esta forma, queda totalmente determinado el control óptimo $u^*(t)$,

$$u^*(t) = (\alpha(\hat{x} - x) \tanh [\alpha(T - t)] + s(t)$$

Siendo el nivel óptimo de inventarios

$$x^*(t) = \hat{x} + \cosh [\alpha(T - t)](x_0 - \hat{x}) / \cosh(\alpha T)$$

La tasa de producción óptima, $u^*(t)$, es un control feedback, depende además de los parámetros del sistema, y de la tasa exógena de ventas, s(t), del nivel corriente de almacenamiento, x(t).

Puede verse que la evolución temporal óptima del inventario refleja que si, inicialmente, $x_0 = \hat{x}$, es decir, el nivel inicial de stocks es el deseado, se mantendrá siempre en ese nivel. Ahora bien, si $x_0 \neq \hat{x}$, se aproximará asintóticamente al nivel deseado.

4.2.2.- El caso de los excedentes agrícolas comunitarios.

Después de las dos Guerras Mundiales, la política agrícola seguida por los distintos gobiernos experimentó un cambio, tratando de segurar un abastecimiento alimenticio mediante la oferta agrícola interior del país. Las imágenes de la guerra y postguerra permanecían presentes en la mente de los dirigentes de las naciones afectadas. Así, no es de extrañar que con el nacimiento de la CEE, la Política Agrícola Común (P.A.C.) fuera el pilar fundamental de la política comunitaria. Sus objetivos prioritarios fueron y son, entre otros, la seguridad en el abastecimiento de alimentos, y garantizar, para la consecución del anterior objetivo, un nivel de renta mínimo a los agricultores.[1]

---

[1] Art.39.1 "Tratado de Roma".1959. Gaceta Jurídica de la CEE nº 2. 1985.

" 1. Los objetivos de la política agrícola común serán:

a) incrementar la productividad agrícola, fomentado el progreso técnico, asegurando el desarrollo racional de la producción agrícola, así como el empleo óptimo de los factores de producción, en particular, de la mano de obra;

b) garantizar así un nivel de vida equitativo a la población agrícola, en especial, mediante el aumento de la renta individual de los que trabajan en la agricultura;

c) estabilizar los mercados;

d) garantizar la seguridad de los abastecimientos;

e) asegurar al consumidor suministros a precios razonables."

Debido al predominio que ha tenido en la P.A.C. la política de sostenimiento de precios sobre una política tendente a reformar las estructuras de la agricultura, ciertos sectores de ésta han generado unos importantes excedentes que el mercado interior no ha podido absorber. Cabe reseñar que mientras la oferta en la agricultura crece a un ritmo rápido debido a la continua mejora de la productividad de las explotaciones agrícolas, la demanda presenta una fuerte inelasticidad-precio, y una elasticidad-renta incluso negativa para algunos productos y elevados niveles de renta, propios de los países industrializados.

En el sector de productos lácteos, el problema de los excedentes comunitarios se acentúa, destacando la mantequilla y la leche de vaca desnatada en polvo como casos más relevantes de este problema. El régimen de intervenciones para estos productos contempla tanto medidas comunes a todo el sector, como otras más específicas.

Entre las medidas comunes, podemos hablar de la existencia de un <u>precio indicativo</u> para la leche con un determinado contenido de grasa (fue de 36 ptas./litro para la campaña 85/86, 27'84 ecus/100 kgs.). Este precio se trata de asegurar para toda la leche vendida por los agricultores, y por esta vía mantener un nivel determinado de renta para aquellos.

Se establece, también, un precio umbral para una serie de productos representativos, y que se van a considerar como precios mínimos para las importaciones realizadas por terceros países, tratando de situar los precios de los productos lácteos importados al nivel correspondiente al precio indicativo. Así, como medida protectora de la industria láctea comunitaria frente a los intercambios con terceros países, existen los llamados "prélèvement"[2], que se deben pagar por los productos lácteos importados.

Para eliminar los excedentes almacenados, la política comunitaria puede emplear las restituciones a la exportación[3] de los mismos , pagándose a los que exporten leche comunitaria a terceros países.

En Abril de 1984, el Consejo creó un régimen de cuotas de producción. Dicho mecanismo estaba basado en una cuota global que se descompone en :

---

[2] Diferencia entre el precio umbral y el precio más favorable del mercado mundial.

[3] Diferencia entre el precio de intervención comunitario y el precio de mercado de destino.

- una cantidad de referencia para la entrega a las industrias lácteas (por productor o por industria láctea), según criterio del país miembro, eligiendo entre la fórmula A o la fórmula B para calcularla.[4]

- una cantidad de referencia para la venta directa efectuada por el productor.

Si se sobrepasan las cantidades de referencia, el productor deberá pagar, aparte de la tasa de corresponsabilidad[5], vigente desde 1977, una tasa suplementaria, que se eleva al 100% del precio indicativo de la leche en caso de exceso en las "entregas" a las industrias lácteas, y del 75% de dicho precio, en caso de "ventas directas". La tasa suplementaria se aplica a las cantidades que sobrepasen la cuota.

De una forma menos directa, tienen también incidencia sobre la producción, las ayudas de carácter estructural que concede la C.E.E. en el marco de la política de la mejora de

[4] Para el conocimiento del establecimiento de esas fórmulas ver LIBRO VERDE N°220, 1988, págs. 24-27.

[5] La tasa de corresponsabilidad se encontrará entre el 0.5 y el 2.5 % del precio indicativo. De esta forma se ha hecho partícipes a los ganaderos de la financiación de los gastos originados por el sector.

las estructuras agrarias (ayudas al abandono de la actividad, modernización de las explotaciones,etc.).

Para la leche desnatada en polvo existían unos precios de intervención (174'04 ecus/100 Kgs. en la campaña 85/86), así como un régimen de intervenciones que se plasmaba en compras de garantía permanentes y sin límite cuantitativo. Además, se concedían ayudas concretas para destinar la leche en polvo a alimentación animal, así como otras encaminadas a financiar el almacenamiento privado.

A pesar de la aplicación del régimen de cuotas a la producción para poder ajustar-equilibrar el mercado de productos lácteos por el lado de la oferta, la producción lechera ha permanecido a unos niveles muy superiores a su demanda, lo que llevó a la Comisión a proponer una serie de medidas tendentes a sanear la situación. Las medidas fueron adoptadas por el Consejo en 1986 y 1987, y se referían, principalmente, a tres aspectos :

- Reducción de las cantidades de referencia (cuotas globales a la producción); y refuerzo a la tasa suplementaria;
- Adaptación de los mecanismos de intervención;

- Aplicación de un programa de salida de almacén, especialmente en cuanto a la mantequilla, a fin de eliminar existencias de intervención acumuladas.

El régimen de tasa suplementaria sobre las cantidades entregadas o compradas que sobrepasen la cantidad de referencia se ha prolongado; pues las cuotas han generado unos resultados insuficientes en cuanto a adaptación de la oferta a la demanda.

En cuanto a los mecanismos de intervención, la Comisión puede limitar las compras de intervención según los siguientes criterios :

- suspensión periódica de la intervención para la leche desnatada en polvo (LDP), limitando de forma permanente las compras entre el día 1 de marzo y el 31 de agosto de cada año. Por otra parte, también pueden suspenderse las compras antes, incluso, de acabar el período si alcanzan la cifra de 100.000 toneladas. En caso de suspensión, está permitida la posibilidad de conceder ayudas al almacenamiento privado de LDP.

- suspensión de las compras de mantequilla de intervención, en cuanto las cantidades ofrecidas a la intervención desde el 1 de marzo de 1987 hayan sobrepasado la cifra de 180.000 toneladas, lo cual ya se produjo en junio de ese mismo año.

La intervención tradicional se ha suspendido, y se ha sustituido por un procedimiento de licitación. Esta puede volverse a abrir si los precios de mercado se sitúan a un nivel igual o inferior al :

- 92% del precio de intervención, si las existencias desde el 1 de marzo de 1987 siguen siendo inferiores a 250.000 toneladas.
- 90% si las existencias constituidas desde el 1 de marzo de 1987 sobrepasan las 250.000 toneladas.

Una vez conocidos los instrumentos o controles de los que se puede disponer para regular la producción y el almacenamiento de productos lácteos en la CEE, se plantearía la necesidad de modelizar el problema, para darle solución posteriormente.

Las representaciones matemáticas de este problema se harán en tiempo continuo, siendo modelos lineales y deterministas en su forma state-space. Esta no es , obviamente, la representación más fiel de la situación. Un modelo en tiempo discreto, estocástico y no lineal, hubiera podido conseguir una representación más aproximada. Lo que ha primado para la elección de este tipo de modelización, ha sido el hecho de ejemplificar el uso de un método de resolución de un problema de control con estabilización, más que plasmar un sistema dinámico que pueda asumirse como verdadera representación de la realidad. Así, no todas las posibles variables instrumentales entrarán en juego (explícitamente), y las relaciones que reflejan los sistemas de ecuaciones diferenciales están establecidas de forma intuitiva, por lo que no están obtenidas tras un proceso de contrastación mediante un modelo econométrico. Se va a suponer, por tanto, que el modelo recoge la opinión de unos hipotéticos políticos responsables de la política agrícola sobre la forma de interrelacionarse las variables relevantes del problema. Los coeficientes de las ecuaciones planteadas son variables en el tiempo, para obtener, mediante una aproximación numérica, una solución del sistema de ecuaciones de RICCATI. Por ello, y por tratarse de modelos deterministas, los coeficientes deben ser funciones reales del tiempo conocidas.

Además, como es lógico, en la construcción del funcional objetivo se seguirán los criterios subjetivos marcados por los agentes decisores, dando unos valores conocidos a los pesos que penalicen las desviaciones de las variables respecto a los niveles deseados.

Así pues, se trabajará con modelos en los que todo parámetro estará perfectamente determinado, y ninguna variable sufrirá perturbaciones aleatorias. Antes de comenzar a mostrar el modelo, conviene reiterar que el objetivo del estudio de este caso es el mostrar un método de resolución, mediante una aproximación numérica, de un problema de control con estabilización (problema de seguimiento lineal, en concreto),con coeficientes variables y horizonte temporal finito; y en ningún caso, se está afirmando que el sistema matemático representado sea válido, en el sentido de asumible, como explicación del fenómeno de los excedentes agrícolas comunitarios. Se deja para una futura investigación la búsqueda de una modelización contrastada empíricamente, y la aplicación de las técnicas de C.O. para obtener la solución del problema.

De todas formas, y para no aparentar un intento de "asepsia" analítica, en cuanto a la incorporación de elementos de teoría o política económica, se dará una justificación intuitiva de la elección de las variables incorporadas al sistema dinámico,y de cómo se entendería la interrelación entre ellas, lo que se traduce en el porqué de la asignación de un determinado signo a los distintos parámetros. Ahora bien, de lo que no puede darse explicación alguna, en términos económicos, es de los valores concretos que toman las funciones reales que representan a los parámetros, aunque quizás sí que podría hacerse de forma muy vaga de la evolución que marcan para aquéllos.

El problema planteado en términos de un problema de C.O., quedaría recogido por un funcional objetivo a minimizar, sujeto a un sistema dinámico. Se van a considerar dos sistemas dinámicos de partida, cuya diferencia estriba únicamente en el número de variables de control que incorporan. El primero consta de dos variables de control, mientras que el segundo añade tres variables distintas de las que ya participaban en el primer sistema. La razón de realizar estas dos modelizaciones, radica en analizar si el hecho de contar con un mayor número de variables de control repercute en alcanzar unas sendas óptimas de evolución de las variables de estado, consideradas en sí mismas por los agentes decisores como "mejores" a las obtenidas con un sistema que cuente con un número menor de variables instrumentales. Además de esta comparación de soluciones, quedaría el hecho de que el empleo de las variables instrumentales o de control , y sus fluctuaciones , no son ajenos a la valoración por los políticos. Esto se trata de recoger individualmente, para cada modelo, en el funcional objetivo, pero no van a existir criterios objetivos de comparación entre el valor del funcional objetivo que proporcione el óptimo del primer problema con el correspondiente al segundo caso.

El problema se refleja, pues, de la siguiente manera :

$$\text{Min } J = \frac{1}{2}(x-\hat{x})'S(x-\hat{x}) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[(x-\hat{x})'Q(x-\hat{x})+(u-\hat{u})'M(u-\hat{u})]dt$$

s. a

$$\dot{x} = A\,x + B\,u + C$$

En los dos casos que se van a considerar, estos son los elementos comunes :

a) El vector de variables de estado es :

$$x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

siendo sus dos componentes:

$x_1(t)$, la cantidad almacenada por los organismos de intervención públicos de leche, es decir, de leche desnatada y mantequilla en unidades de medida equivalentes de leche.

$x_2(t)$, cantidad producida de leche.

b) Vector de valores deseados para las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$\hat{x} = \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Estos valores deseados son

$$\hat{x}_1(t) = 0$$

$$\hat{x}_2(t) = d(t) > 0$$

donde $d(t)$ es la demanda interior del país y es igual a

$$d(t) = 100 + 20\ e^{-0.3t}$$

La elección de esta función para representar a la demanda interior recoge el hecho de ser siempre positiva y decreciente con el tiempo, debido al tipo de producto de que se trata de (un bien agrícola), con una elasticidad renta baja, y rigidez relativa en cuanto a modificaciones en el precio. Esto explicaría la tasa decreciente, pero podría pensarse que los aumentos de población iban a traer como consecuencia aumentos en la demanda. Dadas las características demográficas que actualmente presenta la C.E. (tasas de natalidad decrecientes), el político que hipotéticamente ha establecido esta función de demanda considera que los débiles efectos sobre el consumo de leche debidos al aumento de la población, se absorben por las características propias del producto en cuanto a elasticidad-renta muy baja, que incluso podría ser negativa en el transcurso del tiempo.

c) Matriz residual. Da lugar al valor del funcional objetivo en el instante final t = T.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Matriz diagonal de penalizaciones de las desviaciones de las variables de estado respecto de sus niveles deseados.

$$Q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) & 0 \\ 0 & q_2(t) \end{bmatrix}$$

Siendo

$$q_1(t) = 10 + 10\,t^2 \quad > 0$$
$$q_2(t) = 2 \quad > 0$$

De esta forma, el político está penalizando más las desviaciones de la cantidad almacenada, que las asociadas con la cantidad producida. Además, para las primeras la penalización se incrementa con el tiempo, lo que indica que se tiene en cuenta el punto del que se parte. Al principio de la acción política, las desviaciones no se gravan tanto como una vez transcurrido un período de tiempo, tras el cual, las exigencias políticas requieren resultados, es decir, que las variables de estado estén próximas a sus valores deseados.

e) t_0, es el tiempo inicial, y será igual a 0.

f) T, es el tiempo final, que será T = 15.

g) las condiciones frontera para el instante inicial , $t_0 = 0$, son

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 135 \end{bmatrix}$$

Considerando, ahora, las particularidades de cada caso, tenemos los distintos modelos.

-------------------- MODELO 1. ------------------

El sistema dinámico

$$\dot{x} = A\,x + B\,u + C$$

queda de la siguiente forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ 0 & \alpha_3(t) \end{bmatrix} ; \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & ß_1(t) \\ ß_2(t) & ß_3(t) \end{bmatrix};$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_2(t)d(t) \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Donde

$$\alpha_1(t) = -0.4+(0.1\ t/T) < 0 , \quad ß_1(t) = -(0.4+0.4t)/T < 0$$

$$\alpha_2(t) = (4/6)+(t/6T) > 0 , \quad ß_2(t) = 0.3+0.6\ e^{-0.003t} > 0$$

$$\alpha_3(t) = -0.1 < 0 , \quad ß_3(t) = -((1/7)+(t/8T)) < 0$$

$$\forall\ t \in [0,T]$$

$u_1(t)$, es el precio indicativo de la leche, (política de sostenimiento de precios).

$u_2(t)$, es el gasto en reforma de las estructuras agrarias, (política de estructuras).

La elección del signo de cada parámetro α_i , β_j, se hace en base a ciertas consideraciones que a continuación se desarrollan para cada uno de ellos.

- $\alpha_1 < 0$. La cantidad almacenada por los órganos de intervención públicos, siempre que exista alguna, ($x_1 > 0$), va a influir negativamente en el aumento de dicho stock.

- $\alpha_2 > 0$. La cantidad almacenada varía en la misma dirección que el exceso de producción u oferta interna (producción - demanda, $x_2(t) - d(t)$).

- $\alpha_3 < 0$. El nivel instantáneo de producción influye automáticamente, y de forma negativa en el aumento de la cantidad producida. La tasa suplementaria y la tasa de corresponsabilidad tienen un efecto negativo sobre la cantidad producida de leche que recoge el parámetro α_3, superándose los posible efectos positivos que pudiera tener la inercia productiva en el incremento de la producción.

- $\beta_1 < 0$. Los recursos destinados al gasto en reforma de las estructuras agrarias tienden a hacer disminuir la cantidad almacenada.

- $\beta_2 > 0$. El precio indicativo influye positivamente en el aumento de la cantidad producida.

- $\beta_3 < 0$. El gasto en reforma de las estructuras agrarias afecta negativamente al aumento de la producción, entendiéndose que las reformas perseguidas tienden al abandono de las actividades productivas generadoras de excedentes, en beneficio de otras en las que la C.E.E. todavía es deficitaria.

En el funcional objetivo tenemos

$$- \hat{u}(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \\ \hat{u}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{d}(t) - \alpha_3(t) - d(t)}{\beta_2(t)} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

\- Matriz de penalizaciones de las desviaciones de las variables de control respecto de sus niveles deseados. Es definida positiva y diagonal para todo $t \in [0,T]$.

$$M(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & 0 \\ 0 & m_2(t) \end{bmatrix}$$

siendo

$$m_1(t) = 10 + 10\,t > 0 \quad , \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

$$m_2(t) = 5 + 5\,t^2 > 0 \quad , \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

-------------------- MODELO 2. --------------------

El sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + C(t)$$

queda así

$$A(t)=\begin{bmatrix}\alpha_1(t) & \alpha_2(t)\\ 0 & \alpha_3(t)\end{bmatrix};\quad B(t)=\begin{bmatrix}0 & ß_1(t) & ß_4(t) & 0 & ß_5(t)\\ ß_2(t) & ß_3(t) & 0 & ß_6(t) & 0\end{bmatrix}$$

$$C(t)=\begin{bmatrix}-\alpha_1(t)d(t)\\ 0\end{bmatrix}\quad ;\quad u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t)\\ u_5(t)\end{bmatrix}$$

Donde

$\alpha_1(t) = -\ 0.4+(0.1\ t/T) < 0$, $ß_1(t) = -(0.4+0.4t)/T < 0$

$\alpha_2(t) = (4/6)+(t/6T) > 0$, $ß_2(t) = 0.3+0.6\ e^{-0.003t} > 0$

$\alpha_3(t) = -\ 0.1 < 0$, $ß_3(t) = -\ ((1/7)+(t/8T)) < 0$

$ß_4(t) = -\ (0.2+0.2(t/T)) < 0$

$ß_5(t) = -\ ((1/6)+(t/6T)) < 0$

$ß_6(t) = -\ 0.8 < 0$

para todo $t \in [0,T]$

$u_1(t)$, es el precio indicativo de la leche.

$u_2(t)$, es el gasto en reforma de las estructuras agrarias.

$u_3(t)$, es el gasto público en subvencionar el almacenamiento privado.

$u_4(t)$, es la cantidad de referencia para la producción lechera.

$u_5(t)$, es el gasto en restituciones a la exportación.

La elección del signo de los parámetros α_i y de los tres parámetros $ß_j$, (para j= 1,2,3), ya ha quedado explicada en el MODELO 1, para los nuevos parámetros introducidos, ésta podría ser su justificación :

- $ß_4 < 0$. El gasto público destinado a fomentar el almacenamiento por parte del sector privado tenderá a hacer disminuir la cantidad intervenida que se encuentre en almacenes públicos; cuyo coste se haya sufragado con cargo al presupuesto comunitario.

- $ß_5 < 0$. El gasto en restituciones a la exportación pretende disminuir la oferta interna, colocando en el exterior posibles stocks de productos lácteos que, quizás, sin este tipo de gasto, acabarían comprándose por los órganos comunitarios responsables, aumentándose así la cantidad almacenada, x_1.

- $\beta_6 < 0$. El signo es negativo, pues podría entenderse que la existencia de una cantidad de referencia, y las consiguientes cuotas acompañadas de tasas suplementarias, fuera a incidir negativamente en el aumento de la producción. Aunque este es el signo que se ha tomado en el desarrollo, podría haberse tomado el contrario, el positivo, justificándose por unas razones concretas : El signo de $\beta_6(t)$ se derivaría del signo de la incidencia del exceso de producción, $x_2(t)$, sobre la cantidad de referencia, $\hat{u}_4(t)$, medido como $[x_2(t) - \hat{u}_4(t)]$. El parámetro que multiplica a la variable de estado $x_2(t)$ (producción de leche), $\alpha_3(t)<0$, se considera en el MODELO 2 formado por dos componentes o sumandos de signo contrario :

- la inercia productiva, por una parte, $\alpha'_3(t)>0$. Esta presupone que los productores van a tender a aumentar la cantidad de leche producida con el fin de obtener una mayor renta. El parámetro $\alpha'_3(t)$ es distinto del parámetro $\alpha_3(t)$ del MODELO 1. Este último recogía de forma global los dos efectos en que se descompone ahora $\alpha_3(t)$ del MODELO 2.

- la desincentivación a la producción consecuencia del establecimiento de unas cantidades de referencia (y las correspondientes cuotas que pueden acompañarla), y la imposición de la tasa suplementaria sobre las cantidades que excedan la cantidad de referencia asignada, $\alpha_3''(t) < 0$.

La segunda ecuación quedaría, suprimiendo el parámetro t para simpificar la notación, así

$$\dot{x}_2 = \alpha_3' \; x_2 + ß_2 \; u_1 + ß_3 \; u_2 + \alpha_3''[x_2 - u_4]$$

O también

$$\dot{x}_2 = [\alpha_3' + \alpha_3''] \; x_2 + ß_2 \; u_1 + ß_3 \; u_2 + ß_6 \; u_4$$

siendo $ß_6 = - \alpha_3'' > 0$.

Por lo que $\alpha_3(t) = \alpha_3'(t) + \alpha_3''(t)$. Es de esta forma como se explicaría la elección del signo positivo para $ß_6(t)$. Se considerará que $|\alpha_3'| < |\alpha_3''|$, es decir, los efectos del establecimiento de una cantidad de referencia son más fuertes que los de la inercia productiva, ($\alpha_3 = - 0.1$).

Todo esto no se ha hecho más que para mostrar la debilidad en la justificación de la elección de un signo determinado para un parámetro, al aportarse razones tanto para que $ß_6$ fuese negativo como para que fuese positivo.

En el funcional objetivo se tiene :

- El vector de valores deseados para las variables de control ; cumpliéndose el mismo requisito que se exigía en el MODELO 1 para que el estado deseado sea alcanzado en t=T.

$$u(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \hat{u}_3(t) \\ \hat{u}_4(t) \\ \hat{u}_5(t) \end{bmatrix}$$

Son sus componentes

$$\hat{u}_1(t) = \frac{\dot{d}(t) - [\alpha_3(t) + \beta_6(t)]\ d(t)}{\beta_2(t)}$$

$\hat{u}_2(t) = 0$

$\hat{u}_3(t) = 0$

$\hat{u}_4(t) = d(t)$, la cantidad de referencia pretende guiar a la producción hacia la evolución de la demanda, es por ello, por lo que el agente decide este objetivo

$\hat{u}_5(t) = 0$

- Matriz diagonal de penalizaciones de las variables de control

$$M(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5(t) \end{bmatrix}$$

$M(t)$ es definida positiva, ya que para todo $t \in [0,T]$

$$m_1(t) = 10 + 10\ t > 0$$
$$m_2(t) = 5 + 5\ t^2 > 0$$
$$m_3(t) = 20 + 20\ t^2 > 0$$
$$m_4(t) = 15 + 15\ t > 0$$
$$m_5(t) = 10 > 0$$

Una vez planteados los dos modelos, de manera que sean estabilizables, y que los estados deseados sean alcanzables, la resolución se llevará a cabo con el método explicado para un problema de seguimiento lineal y horizonte temporal finito.

El sistema de ecuaciones de RICCATI será

$$\dot{K} = -\ KA - A'K - Q + KBM^{-1}B'K$$

$$\dot{V} = -\ (A' - KBM^{-1}B')V + Q\hat{x} - KC - KB\hat{u}$$

siendo $K(T) = S$, y $V(T) = -\ S\ \hat{x}(T)$.

Como las matrices A, B, C, Q, y M son variables, se puede obtener una aproximación numérica de las soluciones de K y de V [6], resolviendo hacia atrás en el tiempo, con Δt negativos, sabiendo que

$$K(t+\Delta t) \approx K(t) + \Delta t \, [- K(t)\, A(t) - A(t)'K(t) - Q(t) + \\ + K(t)\, B(t)\, M(t)^{-1} B(t)'K(t)]$$

$$V(t+\Delta t) \approx V(t) + \Delta t \, [-(A(t)'-K(t)B(t)M(t)^{-1}B(t)')V(t) + \\ + Q(t)\, \hat{x}(t) - K(t)C(t) - K(t)B(t)\, \hat{u}(t)]$$

Una vez obtenidas las aproximaciones a las soluciones de $K^*(t)$ y $V^*(t)$, se consigue conocer las leyes de control óptimo, $u^*(t)$, que seguirán siendo aproximaciones, tanto más cercanas a la solución, como pequeños sean los Δt. Sustituyendo las leyes de C.O. feedback en el sistema dinámico, obtendremos la evolución óptima aproximada de las variables de estado, $x^*(t)$. Como partimos de una sucesión numérica de $K^*(t)$ y de $V^*(t)$, nos vemos abocados a obtener el mismo tipo de solución para $x_1^*(t)$ y $x_2^*(t)$, mediante

[6] Aproximación obtenida tras el diseño de un programa en lenguaje APL.

otra aproximación hacia adelante en el tiempo, con $\Delta t > 0$, tomando como punto de partida las condiciones iniciales de las variables de estado, ($x_1(0)=20$, $x_2(0)= 135$).

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \Delta t\, [A(t)\, x(t) + B(t)\, u^*(t) + C(t)]$$

siendo $u^*(t)$ la ley de control óptimo feedback que han generado las aproximaciones numéricas de $K^*(t)$ y de $V^*(t)$.

Las figuras 4.2.I y 4.2.II representan, respectivamente, la solución para la senda temporal óptima de la cantidad almacenada de leche, $x_1^*(t)$, y la de las desviaciones de la producción respecto a la demanda de leche, $x_2^*(t)$, para el caso del MODELO 1. Puede apreciarse claramente como los objetivos perseguidos se alcanzan en el instante final marcado por T, pero este hecho ya se conocía por haber escogido objetivos para las variables de control consistentes con los fijados para las variables de estado. El objetivo fijado para la cantidad almacenada se alcanza antes que el fijado para la producción, ya que se ha penalizado más las desviaciones de la primera variable de estado.

FIGURA 4.2.I.- Modelo 1: Leche Almacenada

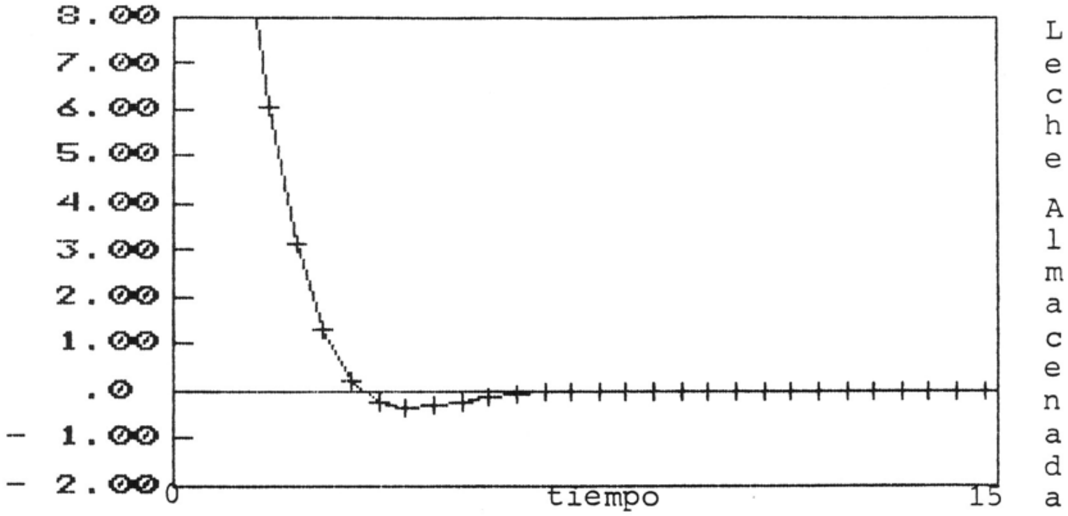
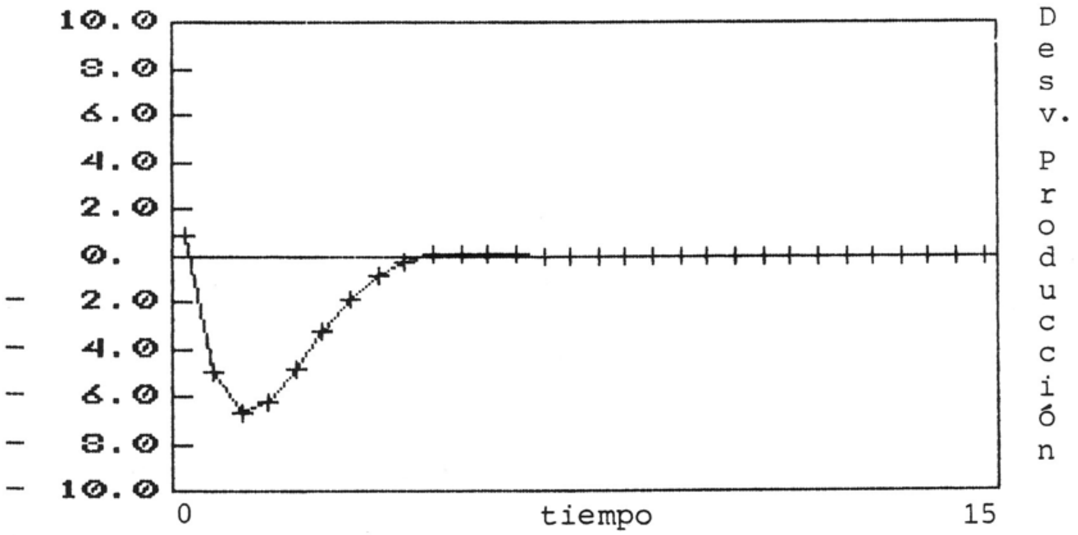


FIGURA 4.2.II.- Modelo 1: Producción de leche



Las variables de control también alcanzan sus valores deseados; las figuras 4.2.III y 4.2.IV recogen este hecho para las desviaciones del precio indicativo, $u_1(t)$, y para el gasto en reforma de las estructuras, $u_2(t)$.

FIGURA 4.2.III.- Modelo 1: Precio indicativo

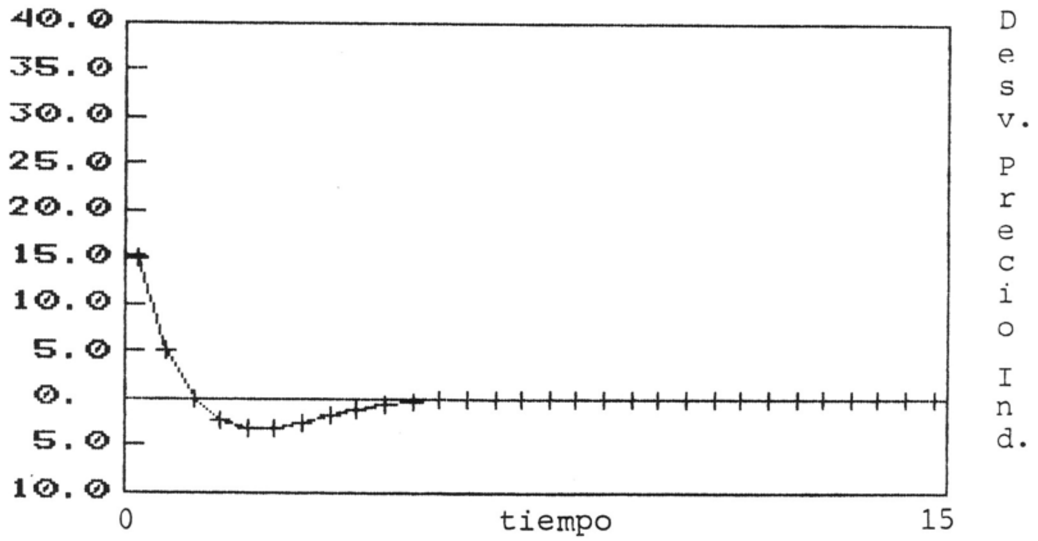
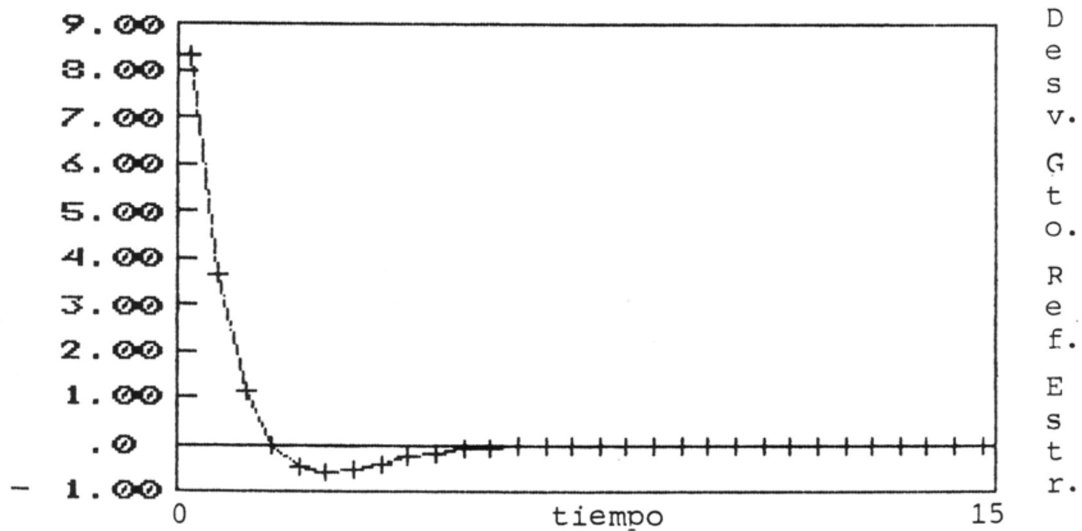


FIGURA 4.2.IV.- Modelo 1: Gto. Reforma estruct.



Ahora bien, si el vector $\hat{u}(t)$ fuera distinto del planteado, no se alcanzarían los valores deseados para las variables de estado. Estableciendo un precio indicativo de la leche superior al expuesto, $\hat{u}_1'(t) = u_1(t) + 25$, con fines de mantener la renta de los agricultores a unos niveles políticamente deseables, se podría lograr lo contrario, al rebasarse en T el nivel de producción acorde con la demanda, y las cantidades almacenadas no disminuir lo suficiente como para poder afirmar que la renta de los agricultores fuera a ser la perseguida en un principio.

La política de sostenimiento de precios, pues, al establecer precios indicativos superiores a los consistentes con una situación de excedentes y gasto en reforma de las estructuras agrarias nulos, estaría facilitando la aparición de excedentes, o bien , la necesidad de destinar recursos comunitarios a la política de reforma de las explotaciones agrarias, y modificar, por tanto, el objetivo que se había fijado para esta política.

Las figuras 4.2.V y 4.2.VI reflejan la evolución de $x_1(t)$, y de las desviaciones de $x_2(t)$ respecto de la demanda para el nuevo valor de $\hat{u}_1(t)$; mientras que las Figuras 4.2.VII y 4.2.VIII hacen lo propio para las soluciones de las variables de control, (desviaciones del precio indicativo, $u_1-\hat{u}_1$, y gasto comunitario en política de reforma de las estructuras agrarias, u_2)

FIGURA 4.2.V.- Modelo 1: Leche alm.($u_1=u_1+25$)

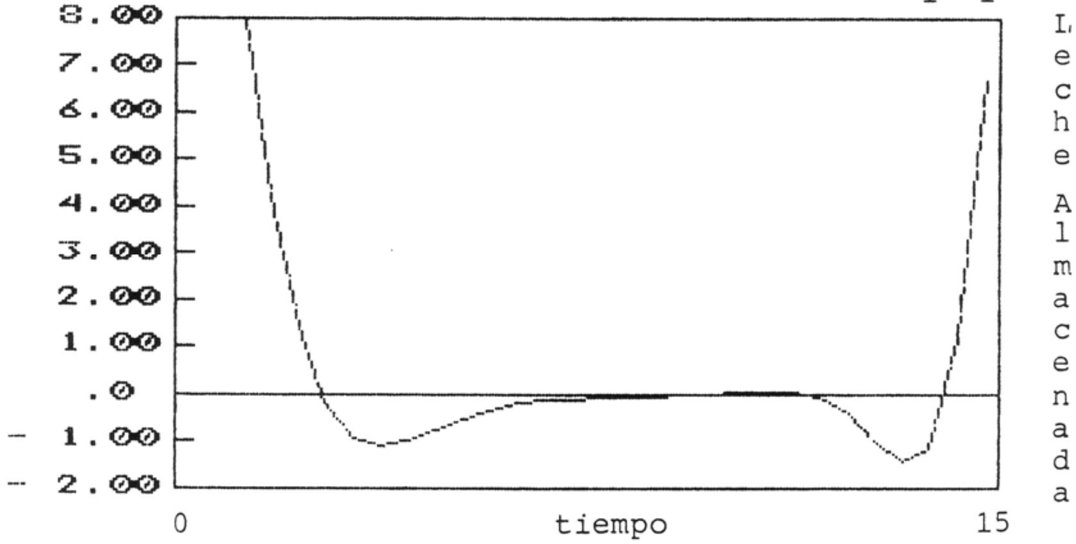


FIGURA 4.2.VI.- Modelo 1: Producc. leche($\acute{u}_1=u_1+25$)

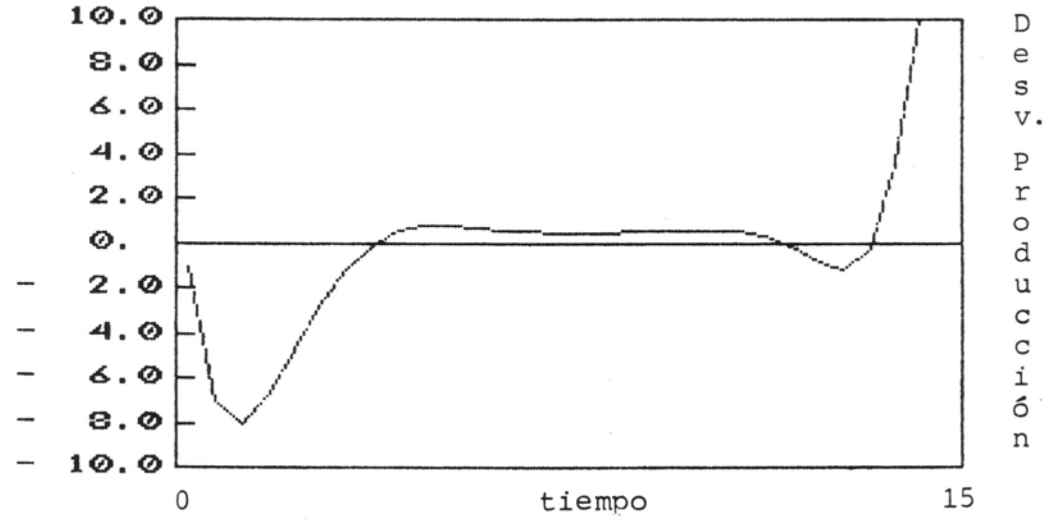


FIGURA 4.2.VII.- Modelo 1: Precio indic.($u_1=u_1+25$)

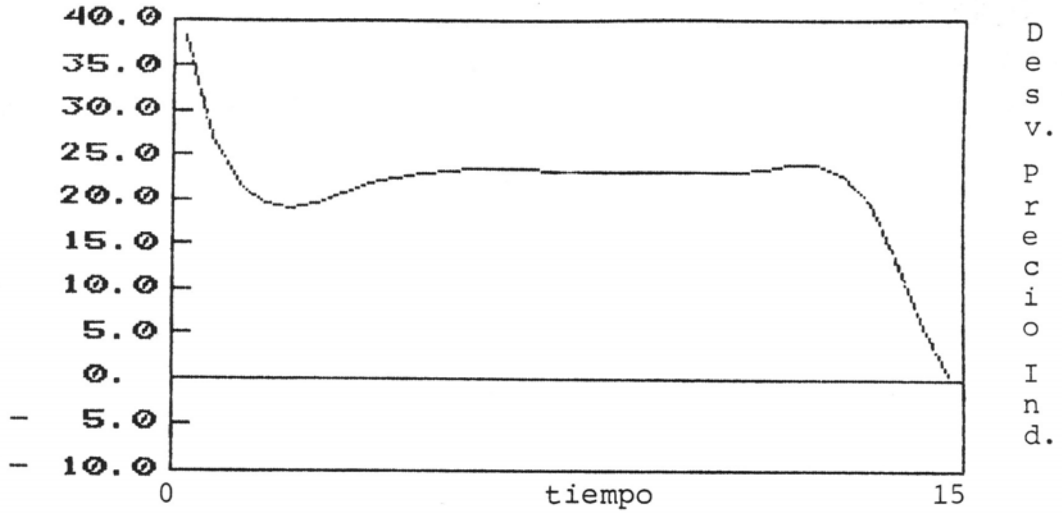
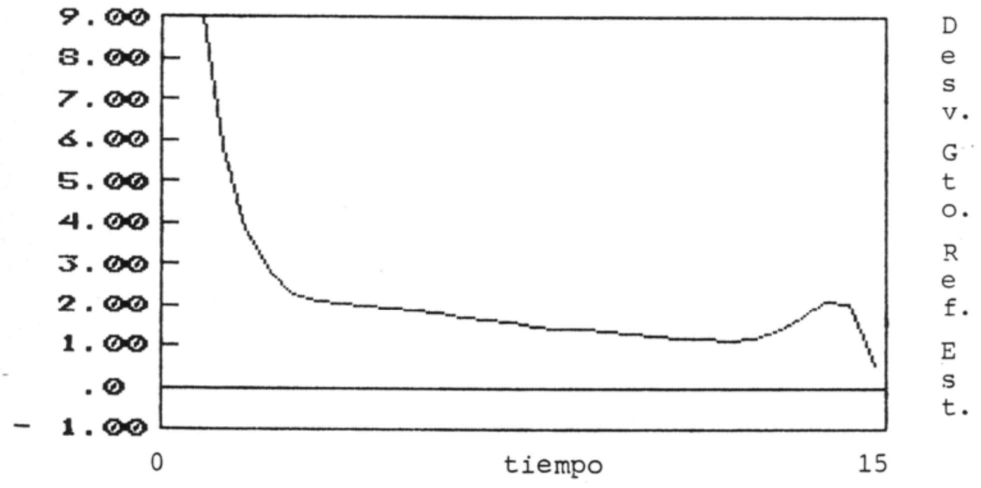


FIGURA 4.2.VIII.- Modelo 1: Gto. Refor. Estr.($u_1=u_1+25$)



En cuanto al MODELO 2, si bien cumple las mismas propiedades que el MODELO 1, como puede constatarse en las figuras 4.2.IX y 4.2.X, (alcanzabilidad del estado deseado), permite un mayor abanico de posibilidades de acción política, al contar el agente decisor con cinco variables de control. De esta manera, puede decidir alcanzar las metas planteadas para las variables de estado mediante el seguimiento para cuatro de las variables de control de unos valores fijados libremente en función, sola y exclusivamente, de los objetivos políticos del agente decisor; mientras que la quinta variable de control se verá obligada a seguir un objetivo impuesto matemáticamente por la exigencia de la consistencia de este objetivo con los correspondientes al resto de variables del sistema. Se han fijado arbitrariamente los valores a seguir para u_2, u_3, u_4 y u_5, y el correspondiente a u_1 se ha obtenido matemáticamente como consecuencia de la exigencia de consistencia con el resto de metas fijadas. Así pues, en el caso aquí presentado, ha primado, pues, la decisión política de no realizar ningún gasto de recursos públicos en determinadas áreas de la política de sostenimiento de precios ni en la política de reforma de las estructuras agrarias, y la cantidad de referencia se ha elegido que siguiera a la demanda, al pretender que la producción fuese igual a esa cantidad ; mientras que el precio indicativo se ha establecido de forma condicionada. Esta es, claramente, una situación contraria a la que en verdad se ha venido dando en todos estos años. El precio indicativo se fija por campañas, y son otras las variables que verían roto el objetivo político si se pretendiera alcanzar el estado deseable para la producción y cantidad almacenada de leche.

FIGURA 4.2.IX.- Modelo 2: Leche Almacenada

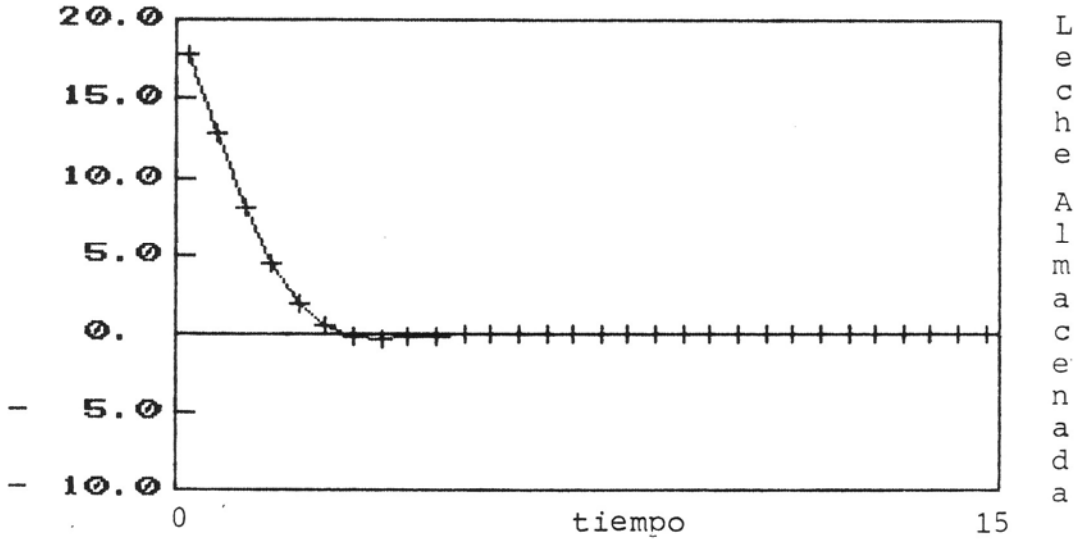
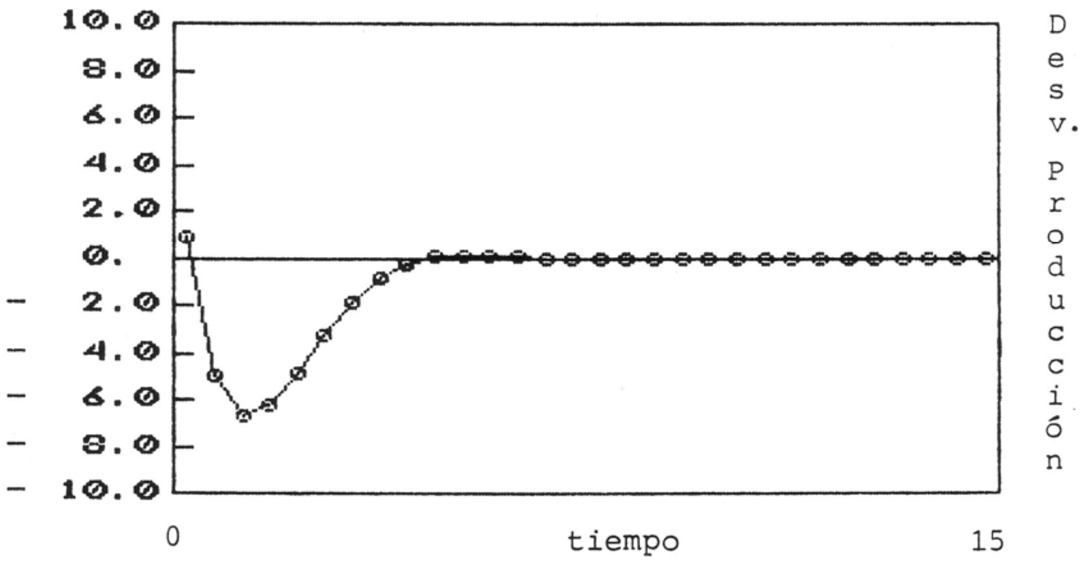


FIGURA 4.2.X.- Modelo 2: Producción de leche



Todo esto viene a resaltar que en la solución de un problema es muy importante la elección de los valores deseados para las variables de control, así como la elección de las penalizaciones de las distintas desviaciones. El uso de un sistema dinámico u otro es, obviamente, determinante para la consecución de los objetivos. Todos estos aspectos se fijan siempre tras una decisión política por parte de los agentes encargados de plantear y (o) resolver el problema en cuestión; y es precisamente en ese proceso político, donde se van a sentar las bases de la posibilidad o imposibilidad de solucionarlo.

Es evidente que los modelos con los que aquí se ha trabajado son irreales, no han sido tan siquiera extraídos tras algún proceso sencillo de estimación econométrica, además, presentan unas propiedades muy especiales y envidiables, que no es lógico suponer vayan a cumplir los verdaderos sistemas dinámicos. Aún así, puede concluirse, gracias a este ejemplo del empleo de las técnicas de C.O., que la consecución de los objetivos va a ser posible en unos casos muy reducidos, en los que además de ser estabilizable el modelo, las variables de control se plantean de forma que esos objetivos se alcancen en el horizonte temporal fijado. Esto explica cuán difícil es en realidad primero, estabilizar un sistema dinámico económico, y después, aún cuando esto sea posible, estabilizarlo en torno a los valores deseados en ese momento.

5.- LIMITACIONES DEL PLANTEAMIENTO TEORICO EN LA ESTABILIZACION DE SISTEMAS ECONOMICOS DINAMICOS.

5.1.- Supuestos utilizados.

El planteamiento teórico mantenido a lo largo de los anteriores capítulos se ha desarrollado a partir de unos supuestos fundamentales que conviene recordar :

- La continuidad de las variables que intervienen en el problema, tanto las de control como las de estado, lo que ha obligado a trabajar con sistemas dinámicos en tiempo continuo, o lo que es lo mismo, sistemas de ecuaciones diferenciales. El funcional también se ha visto afectado, al convertirse en una suma infinitesimal en vez de una suma discreta.

- Certidumbre plena : modelos deterministas. No existe ningún tipo de incertidumbre ni respecto a los valores de los parámetros del modelo, ni en cuanto a la especificación del mismo.

- Las variables de estado y las variables de control no están sujetas a ningún tipo de restricción; por tanto no estarán acotadas.

- No existe ningún tipo de "expectativas racionales" o "adaptativas" por parte de los agentes económicos, por lo que los sistemas económicos y reglas de control no son anticipados, y por tanto, no se modificarán las pautas de acción.

- Los sistemas dinámicos son lineales, y los funcionales objetivos son cuadráticos.

- Existe un único agente (o grupo de agentes) decisor.

Todo este conjunto de supuestos nos conduciría a concluir que la exposición se ha limitado a un restringido número de casos que, además, reflejarían una visión más lejana de la realidad que la que proporcionarían aquellos casos en que se prescinde de una, o incluso de todas estas premisas. A continuación se mostrará, brevemente, qué efectos puede tener el abandono de alguno de estos supuestos sobre el planteamiento y la solución del problema de control con estabilización tratado, (problema lineal-cuadrático, PLC).

5.2.- El problema de los datos: Modelos en tiempo discreto.

Ya se hicieron algunos comentarios en el primer capítulo referentes a este problema. La elección entre un modelo representado por ecuaciones diferenciales, y otro por ecuaciones en diferencias, estará determinada por la conveniencia y la bondad de la aproximación. Ya se dijo que los modelos dinámicos en tiempo discreto podían estar reflejando tanto a sistemas que operaran, efectivamente, en tiempo discreto, como a otros que operasen en tiempo continuo, pero con observaciones disponibles o relevantes solamente en instantes discretos de tiempo. Ya se expuso la manera de convertir un sistema dinámico en tiempo continuo en un sistema de ecuaciones en diferencias[1]; ahora bien, este último hecho no permite aplicar las técnicas de control expuestas al caso de modelos en tiempo discreto. Así, el planteamiento de un problema general de control en tiempo discreto quedaría de la siguiente forma

$$\text{Min} \quad J = \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t)$$

[1] Ver nota 4 al pie de la página 21 en el Capítulo 1.

sujeto a

$$x_{t+1} - x_t = f'(x_t,u_t) \; ; \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq T-1$$

$$u_t \in U, \text{ (control restringido)}$$

$$x(0) = x_0$$

$$g(x_T) = 0$$

donde $L(x_t,u_t)$ es una función continuamente diferenciable con respecto a x, y continua respecto a u.

Se podría tratar el problema de control en tiempo discreto como uno de programación no lineal, aplicando las condiciones necesarias de KUHN-TUCKER. No es posible obtener un principio del máximo para sistemas en tiempo discreto que sea tan fuerte como el establecido para los sistemas en tiempo continuo, si no se hacen supuestos acerca de la convexidad de las funciones que intervienen en el problema. Así, HALKIN (1966), derivó un principio del máximo para sistemas en tiempo discreto, que generalizó después HOLTZMAN (1966). HOLTZMAN relajó suavemente el supuesto de convexidad que empleó HALKIN. De esta forma, el principio asume que el conjunto de todos los estados alcanzables ya no es convexo, sino "direccionalmente convexo"[2] . Después de este supuesto, dados un control óptimo, u^*_t, y su correspondiente trayectoria óptima para la variable de estado x^*_t, el principio del máximo queda así :

Si (u^*_t, x^*_t) es la solución del problema anteriormente citado, existen unos multiplicadores de Lagrange, p_t, con t=0,1,...,T, que cumplen que :

$$(p_t - p_{t+1}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*_t,u^*_t)\ p_{t+1} - \frac{\partial L}{\partial x}(x^*_t,u^*_t)$$

$$p(T) = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*_T)\ u\ , \quad t = 0,1,2,...,T-1$$

[2] La convexidad direccional está definida como sigue :

Sea e un vector de dimensión n ($e \in E^n$),
Sea S un conjunto de E^n ($S \subset E$),

S será un conjunto convexo en la dirección del vector e, o e-direccionalmente convexo, si para todo vector z^1 de la envoltura convexa del conjunto S, existe un vector $z \in S$ tal que

$$z = z^1 + ße\ , \quad \text{siendo } ß>0$$

La propiedad de convexidad direccional requerida siempre se cumple cuando el funcional objetivo, L(x,u), es una función convexa, y la restricción es lineal, mejor dicho, f(x,u) es lineal.

(Definición en TAPIERO (1978), págs. 18 y 25) y para todo control del conjunto de los admisibles, U, y todo t = 0,1,..., T, se cumple que

$$- L(x^*_t,u^*_t)+ p_t f(x^*_t,u^*_t) \geq - L(x_t,u_t) + p_t f(x_t,u_t)$$

siempre que se defina el Hamiltoniano en tiempo discreto como

$$H(x_t,u_t,p_t) = - L(x_t,u_t) + p_t f(x_t,u_t)$$

La formulación de este principio del máximo es similar a la del caso continuo. Es evidente que en el problema en tiempo discreto que se ha planteado se han añadido supuestos que no se han mantenido en la exposición de este trabajo. Se trata de considerar un conjunto no abierto de controles admisibles, U, y un estado final restringido; mientras que en la modelización tiempo continuo desarrollada, se suponían no acotados de ninguna manera los controles y las variables de estado. Este supuesto es el que permitía asegurar la convexidad direccional, e incluso la convexidad exigida por HALKIN, para el conjunto de estados finales posibles. Esto es así, porque este conjunto sería un espacio vectorial de dimensión igual al número de variables de estado que intervengan, y por tanto, sería un conjunto convexo.

Las diferencias entre los problemas de control en tiempo continuo, y los definidos en tiempo discreto, según LUENBERGER (1972, pág. 108), se pueden establecer considerando más de un punto de vista. Así, desde el punto de vista de la Teoría del Cálculo de variaciones, la diferencia entre estos dos problemas, estribaría en que mientras en el caso continuo una perturbación histórica de gran magnitud del control, pero de corta duración, puede considerarse que introduce, solamente, cambios leves en la trayectoria resultante, en el caso discreto, esta amplia perturbación genera grandes cambios en la solución. Desde otro punto de vista, más directamente relacionado con la Programación Matemática, la diferencia, según LUENBERGER, es que mientras el conjunto de estados alcanzables (los puntos finales de las trayectorias posibles), es convexo en el caso continuo, no necesariamente tiene que serlo en el caso discreto.

En cuanto a los métodos que pueden emplearse para la solución del problema planteado en tiempo discreto están los proporcionados por la Teoría del Control óptimo, en función de las características concretas del problema; y los que brinda la Programación Matemática, sobre todo en aquellos casos en donde falla el principio del máximo, es decir, en los modelos en donde el conjunto de estados alcanzables no es ni convexo, ni direccionalmente convexo.

Centrándose ya en el problema que nos ocupa, la estabilización de sistemas dinámicos deterministas en tiempo discreto con variables no acotadas, el planteamiento del mismo y su solución, aplicando el principio del mínimo (máximo) para estos casos, se desarrolla a continuación para el modelo del regulador-estado.

$$\text{Min } J = x'_T \, S \, x_T + \sum_{t=0}^{T-1} W_t$$

$$\text{donde} \quad W_t = x'_t \, Q_t \, x_t + u'_t \, M \, u_t$$

sujeto a

$$x_{t+1} = A_t \, x_t + B_t \, u_t \, , \quad \text{con} \quad t = 0,1,\dots,T$$

siendo Q_t, M_t, y S matrices que cumplen las mismas propiedades que se dan en el caso continuo.

La solución al problema abordada desde el punto de vista del cálculo variacional, siempre que el conjunto de estados finales alcanzables sea direccionalmente convexo, será análoga a la del caso continuo.

Se construye el Hamiltoniano

$$H_t = x_{t-1} Q x_{t-1} + u_t' M u_t + p_t' (A x_{t-1} + B u_t)$$

Las condiciones de primer orden dan como resultado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial u_t} = 0$$

$$x_t = \frac{\partial H}{\partial p_t}$$

$$p_{t-1} = \frac{\partial H}{\partial x_{t-1}}$$

El control óptimo es una regla lineal feedback.

$$u_t = F_t\ x_{t-1}$$

donde F_t es una matriz variable que depende de las matrices Q, M, A y B.

La existencia y unicidad de la solución pueden demostrarse de forma análoga al caso continuo. La condición de segundo orden, o condiciones suficientes, se cumplen también en los mismos términos que en el caso continuo.

Para ejemplificar qué sucede al aplicar las técnicas de Programación Dinámica (P.D.), necesaria en ciertos casos, se plantea el problema de estabilización de un sistema dinámico lineal determinista en tiempo discreto, mostrando un caso de seguimiento lineal del output.[3]

---

[3] Extraído de AOKI (1976), págs. 159-160. Puede verse también la solución para este mismo caso en FRIEDMAN, B. (1975), pág. 155-181 .

Sea

$$J = x_T' \, S \, x_T + \sum_{t=0}^{T-1} W_t \quad ; \quad W_t = y_t' \, y_t$$

sujeto a

$$x_{t+1} = A_t \, x_t + B_t \, u_t$$

$$y_t = C_t \, x_t + D_t \, u_t$$

La ley de control óptimo será aquella que

$$\boxed{J^*_{t,T}(x_t,S;\{u^*_{t,T}\}) = \operatorname*{Min}_{\{u_{t,T}\}} J_{t,T}(x_t,S;\{u_{t,T}\})}$$

siendo $J_{t,T}(x_t,S;\{u_{t,T}\})$, el funcional J donde $\{u_{t,T}\}$ representa la sucesión de puntos $\{u_t,u_{t+1},...,u_T\}$.

Por el principio de optimalidad de BELLMAN, $J^*_{t,T}$ cumple la siguiente ecuación :

$$J^{*}_{t,T}(x_t,S;\{u^{*}_{t,T}\})= \mathrm{Min}\ [||y_t||^2 + J^{*}_{t+1,T}(x_{t+1},S;\{u^{*}_{t+1,T}\})]$$

AOKI (1976, pág.159-160), mediante un proceso inductivo, desarrollado hacia atrás en el tiempo, muestra cómo obtener la sucesión de instrumentos óptimos $\{u^{*}_{t,T}\}$. Se trata de una función lineal de la variable de estado, al igual que sucedía empleando el principio del mínimo (máximo) para el caso discreto.

La justificación del título del presente epígrafe, "El problema de los datos ...", puede entenderse si no se pierde de vista la realidad que se analiza. Los datos u observaciones de los que se dispone en Economía para la mayoría de las variables económicas sólo pueden conocerse en instantes de tiempo concretos. Las estadísticas pueden facilitar datos quinquenales, anuales, semestrales, trimestrales, mensuales, semanales, e incluso diarios u horarios. Así pues, está la imposibilidad real de conocer cuáles son los valores instantáneos que van tomando las variables relevantes del problema considerado, lo que condiciona, en la mayoría de los casos, el uso de modelos en tiempo discreto. Se habla de condicionamiento y de imposibilidad para no olvidar que alguna de las variables que intervienen en el modelo pueda realmente evolucionar de forma continua en el tiempo, frente a las que lo hacen sólo en instantes discretos. De esta forma, se puede afirmar que el empleo, en algunas ocasiones, de modelos expresados por ecuaciones en diferencias obedece fundamentalmente a este hecho, al "problema de los datos".

Otro problema distinto, y que no es el que ha dado lugar a este epígrafe, es el ya mencionado en el tercer capítulo, cuando se trataban los casos de regulador y de seguimiento del output. Se entraría en cuestiones relativas a la observabilidad del sistema, aunque es posible establecer una relación entre ésta y el uso de modelos en tiempo discreto. Esta relación se basaría en que las variables de estado, cuyos datos no son conocidos, podrían evolucionar en tiempo continuo, mientras que los únicos datos disponibles fueran los de las variables output, las cuales podrían evolucionar realmente en tiempo discreto. Así el problema de la existencia de datos estaría influyendo en un tipo de modelización e introduciría el estudio de la observabilidad del sistema como cuestión a tener en cuenta a la hora de obtener una solución a un problema de control con estabilización.

Para finalizar este apartado, y considerando el caso concreto expuesto en el epígrafe 4.2.2 acerca de los excedentes agrícolas comunitarios, puede decirse que un planteamiento en tiempo discreto hubiera sido más aproximado a la realidad. Una serie de variables relevantes evolucionan de forma discreta. El precio indicativo se establece para cada campaña, y las cantidades de referencia también. Las compras de intervención, en el caso de que sea posible efectuarlas, se llevan a cabo en períodos concretos de tiempo. Los presupuestos comunitarios que determinan los recursos que se destinan para cada una de las acciones de política agrícola se fijan en instantes discretos, y no se agotan continuamente en el tiempo. Así podría seguirse con otra serie de variables.

5.3.- El problema de la incertidumbre: control estocástico.

En Economía, como Ciencia Social que es, no sucede lo mismo que en las llamadas "Ciencias Naturales". No es posible aislar los fenómenos que se desean estudiar, y trabajar bajo "condiciones de laboratorio". Existen fenómenos que están fuera de cualquier posibilidad de control, por lo que no existirá plena certeza de cuál es el comportamiento exacto de las variables relevantes del problema a estudiar.

Según BORRELL VIDAL (1988, págs. 22-23),

" En management, aunque las decisiones se tomen en ambiente de incertidumbre, la aproximación determinista resulta razonable en numerosas ocasiones. [...] ... cuanto más limitado sea el horizonte temporal en el que vaya a aplicarse un modelo cierto tanto mejor será, **ceteris paribus**, la aproximación lograda. Y ello es así porque cualquier proceso planificador implica básicamente dos actividades : organización de sucesos en el tiempo, y reducción de la incertidumbre en el tiempo."

Así, cuando se trabaje en <u>ambiente de riesgo</u> (perturbaciones aleatorias que siguen una estructura probabilística objetiva), se debería usar modelos aleatorios, es decir, para decisiones con un horizonte temporal de medio plazo. En un ambiente de <u>incertidumbre</u>, o sea, cuando sea poco satisfactorio manejar los modelos aleatorios anteriores, (largo plazo), puede resultar de utilidad, además de los modelos bayesianos, los **modelos borrosos**[1], los cuales se basan en la distinción entre azar e incertidumbre.

Para introducir la incertidumbre, los modelos con los que se ha trabajado son modelos estocásticos, principalmente. La generalización del uso de modelos econométricos para el análisis cuantitativo de la política macroeconómica, permitió la realización de predicciones acerca del comportamiento que pudieran tener las variables de control; y en función de esas proyecciones se valoraban las políticas de cara a decidir cuál debía seguirse, todo ello considerando a los modelos econométricos como si se tratara de modelos deterministas. Estos métodos eran defectuosos para el análisis de las políticas económicas por dos razones, fundamentalmente , según CHOW (1976, pág.340) . La primera hace referencia a

[1] Para una aproximación a la la llamada Matemática Borrosa y sus aplicaciones al management y modelos económicos, veáse KAUFMANN,A.; y GIL ALUJA,J.(1986) y (1987).

que la respuesta dinámica de las variables económicas a una concreta evolución de las variables de control es complicada e impredecible. Esto hace que la selección de la política económica mediante estos métodos sea muy ineficiente. Sería conveniente especificar una función de coste que dependiera de las variables clave, y tratar de minimizar su valor empleando las variables de control. Así pues, la especificación de la función objetivo, y la obtención de la política a seguir tras un proceso de optimización es una de las características fundamentales de las técnicas de C.O. . La solución, según aquellos métodos que no empleaban ese funcional objetivo, podría mejorarse mediante técnicas de simulación estocástica que incorporaran perturbaciones aleatorias en el modelo econométrico a la hora de realizar proyecciones. La segunda razón, y más importante, se debe a la incertidumbre de las proyecciones. Esto hace que la evaluación de una determinada evolución de las variables de política económica sea irreal e irrelevante. La incertidumbre hace que los políticos no sigan muchas veces un plan fijo que no tenga en cuenta los futuros aconteceres de las variables. Las decisiones futuras se harán, pues, sobre la base de las observaciones futuras de la economía. Una regla de acción más realista que la regla fija que proporcionan los métodos mencionados antes, es una ley de control feedback. Con las técnicas de Control Optimo Estocástico (C.O.E.), las soluciones que se obtienen son controles feedback.

En algunos casos es posible, mediante los métodos de control determinista apoyados con simulación estocástica, proporcionar la misma solución que da las técnicas de C.O.E., aunque tras un proceso más laborioso. Así, si el modelo dinámico econométrico es lineal, con perturbaciones aleatorias aditivas, los parámetros son conocidos con certeza, y el funcional objetivo consiste en el valor esperado de una función de costes cuadrática para T períodos (tiempo discreto), se tiene que, de acuerdo con el Teorema debido a SIMON,A. (1956, págs. 74-81), y THEIL,H.(1957, págs. 346-349) la solución óptima del primer período es idéntica a la que se obtiene por medio del modelo determinista acompañado con un proceso de generación estocástica de las perturbaciones aleatorias. Ahora bien, la solución que se obtiene empleando las técnicas de C.O.E. (ley de control feedback) se calcula por una simple fórmula, y además, puede proporcionar más información de la evolución dinámica de la economía que la obtenida analíticamente con el otro método.

Según CHOW (1976), las técnicas de C.O.E., que valen tanto para modelos lineales como para los no lineales, pueden clasificarse según el tratamiento que den a la incertidumbre. Considera que pueden establecerese tres niveles de incertidumbre, una vez descartado el caso de la inexistencia de ésta (modelos deterministas, plena certeza) :

1.- Modelos con perturbaciones aleatorias : Al modelo determinista, con parámetros conocidos, se le incorporan perturbaciones aleatorias.

2.- Existe , además de lo recogido en el punto 1, incertidumbre sobre los parámetros del modelo.

3.- La incertidumbre en este nivel afecta a la especificación correcta del modelo en sí mismo.

Para cada uno de estos casos, algunas de las técnicas de C.O.E. que suelen emplearse para solucionar el problema de la estabilización de un sistema dinámico, que en la mayoría de los casos se expresará en tiempo discreto, se exponen en el epígrafe 5.3.1; mientras que en el epígrafe 5.3.2 se recoge otra forma de introducir la incertidumbre en el análisis económico, y en concreto, en los problemas de control y estabilización de un sistema de dinámico. Se trata de manejar los conceptos que proporciona la matemática borrosa, y trabajar con modelos borrosos.

5.3.1.- Las técnicas de control estocástico.

La Teoría del Control Optimo Estocástico, (C.O.E.), está muy relacionada con la Programación Dinámica Estocástica (P.D.E.), de hecho, a partir del principio de optimalidad de la PDE ha podido comprobarse que la solución del problema de COE cumple la ecuación de optimalidad de la PD (**ecuación de Bellman**). Sin perder de vista esta circunstancia, lo que va a desarrollarse a continuación no es sino una breve exposición de alguno de los métodos utilizados para resolver ciertos problemas de control estocástico, clasificados en base al tratamiento de la incertidumbre y los supuestos establecidos en cada uno. Los distintos casos en los que se aplican técnicas de C.O.E., agrupados según la clasificación de CHOW (1976) que ya se ha expuesto antes, y en concreto, el problema lineal-cuadrático gaussiano (LCG), se presentan ahora.

a) Incorporación de perturbaciones aleatorias al modelo determinista.

Antes de abordar el problema que más profusamente ha sido estudiado del LCG, que se mantiene en el contexto del presente trabajo (control y estabilización de modelos dinámicos deterministas en tiempo contínuo) , cabría resaltar que la solución del problema de COE de sistemas lineales con funcional lineal, viene dada por el "Teorema de la separación"[2], que indica que la estrategia óptima puede suponerse descompuesta en dos partes. Una de las partes es un filtro óptimo que estima la variable de estado a través de la media condicional (esperanza matemática condicionada), dada por las señales observadas del output. La otra parte es una ley lineal feedback que conduce desde la variable de estado hasta el control.

Centrándonos ya en el caso concreto que nos atañe, la introducción de la incertidumbre en el problema de control con estabilización se va a realizar mediante la simple adición de un término aleatorio, y el objetivo será minimizar la esperanza matemática de un determinado funcional de costes. En cuanto al tipo de problema de control con

[2] El primer enunciado de este Teorema de separación se plasma en JOSEPH Y TOU (1961). Un resultado similar en Econometría, puede verse, como ya se ha dicho, en SIMON (1956), Y THEIL (1957): El principio de certeza-equivalencia.

estabilización analizado en todas estas páginas, que es conocido como el problema lineal cuadrático (PLC), suele representarse en tiempo discreto de la siguiente forma[3]

$$\text{Min} \quad E(J) = E \left\{ x(T)' \, S \, x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} W_t \right\}$$

siendo $S = S'$, una matriz semidefinida positiva, y $W_t \geq 0$, sujeto al sistema de ecuaciones en diferencias siguiente

$$x_{t+1} = A_t \, x_t + B_t \, u_t + \varepsilon_t$$

$$y_{t+1} = C_t \, x_t + D_t \, u_t + \mu_t$$

$$\text{siendo} \quad W_t = y_t' \, y_t .$$

Las matrices son conocidas (parámetros conocidos). Donde ε_t y μ_t son perturbaciones aleatorias que se distribuyen normalmente con media cero, varianza conocida y no están correlacionadas serialmente ni entre ellas dos, ni entre sí

[3] Ver AOKI, M. (1976) págs. 280-285.

en distintos instantes.

$$V_\varepsilon = E(\varepsilon_t,\ \varepsilon_t')$$

$$V_\mu = E(\mu_t, \mu_t')$$

$$E(\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t+s}') = 0, \text{ si } \ s \neq 0$$

$$E(\mu_t, \mu_{t+s}') = 0, \text{ si } \ s \neq 0$$

$$E(\varepsilon_t, \mu_{t+s}') = 0, \text{ para todo } s$$

Se hace, pues, un supuesto sobre el comportamiento de las perturbaciones aleatorias. A este problema se le llama el problema lineal-cuadrático gaussiano (PLCG). "Lineal" por las características del sistema; "cuadrático" por el funcional que emplea; y "gaussiano" por considerar a las perturbaciones aleatorias como variables "ruido blanco".

Para solucionar el PLCG, tal y como normalmente se hace para el caso determinista discreto, puede emplearse una versión estocástica de la PD, y ésta será la única posibilidad si las variables están acotadas, o están restringidas a algún conjunto, como ya se explicó para el caso determinista en tiempo discreto.

Ahora bien, ha sido precisamente este caso, el PLCG, el que se ha ido analizando y estudiando desde los años 60 en el campo específico del C.O. y de la teoría de sistemas. Así, si todos los costes son cuadráticos, los controles no están restringidos ($U{-}R^m$) , y el sistema es lineal, se obtiene una solución óptima del tipo regla feedback lineal. Cuando las perturbaciones aleatorias se distribuyen normalmente, KALMAN (1960) proporcionó un algoritmo secuencial, llamado el "filtro de Kalman" que junto con la regla de control óptima obtenida, proporcionaban la solución completa al PLCG, sin necesidad de utilizar técnicas de Programación Dinámica Estocástica.

Este problema ha sido empleado en numerosas aplicaciones al management y en determinados modelos económicos. Quizás el amplio uso del PLCG se base en que permite fácilmente el cálculo matemático. Además, como KARP (1985,págs.41-45) comenta, el PLCG ofrece los medios para investigar la importancia de la incertidumbre y de la aversión al riesgo en los problemas dinámicos. Esto es así, según él, porque si bien el supuesto establecido de comportamiento de las perturbaciones aleatorias no se requiere para el cálculo del primer momento del funcional objetivo , E(J), sí permite el cálculo de momentos de orden superior , los cuales proporcionan una mayor información a la hora de comparar las diferentes reglas de control.

Bien es cierto que el uso y abuso de un método para resolver un cierto problema real mediante una modelización no justifica la validez de dicho procedimiento; y en relación al PLCG basta afirmar que los shocks aleatorios que se dan en sistemas económicos no se pueden aproximar correctamente mediante una variable "ruido blanco". El "ruido blanco" representa, si acaso, el límite de muchos pequeños shocks, como dice BLATT,J.M.(1985), pero son precisamente los shocks más fuertes los que tienen impactos más drásticos en la economía real y no son recogidos por el PLCG. Difícilmente puede entenderse, también, que la representación lineal sea la más correcta. Así, y desde un punto de vista práctico, BLATT, J.M. (1985) afirma que cuando se tratara de controlar un sistema económico y la información acerca del estado de ese sistema fuera incompleta, podría no ser la teoría del COE la única solución. Otros métodos de control pueden proporcionar mejores resultados, aún sin mantener supuestos tan fuertes acerca del comportamiento de las perturbaciones aleatorias y del sistema, aunque conllevaran mayor dificultad o complicación a la hora de obtener una solución.

b) Incertidumbre acerca de los parámetros.

Cuando la incertidumbre se introduce en los parámetros de un modelo lineal, o no lineal, las soluciones son sólo aproximadamente óptimas. Se va a mostrar a continuación la solución del control óptimo para un sistema lineal de ecuaciones en diferencias con una función de coste (funcional objetivo) cuadrática.[4]

Dado el sistema

$$x_t = A_t\ x_{t-1} + B_t\ u_t + \varepsilon_t$$

donde x_t es el vector de variables de estado o variables endógenas en el instante t ; u_t es el vector de variables de política económica o de control en el instante t ; las matrices A_t y B_t están formadas por parámetros desconocidos cuya distribución probabilística se asume como dada ; y ε_t es un vector de perturbaciones aleatorias con media cero, y matriz de varianzas-covarianzas V, no estando dichas perturbaciones correlacionadas serialmente.

[4] CHOW (1976), págs. 342-343.

Se puede incluir las variables de control en el vector x_t para que u_t no necesite ser un argumento del funcional objetivo. Tras unas transformaciones, el funcional para un problema de horizonte temporal finito, T, queda

$$J = \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{x}_t)' \, Q_t \, (x_t - \hat{x}_t)$$

donde $\hat{x}_t$ es el vector de objetivos de las variables x_t que se va a considerar como $\hat{x}_t = 0$ [5], y Q_t es una matriz diagonal que proporciona las penalizaciones en términos relativos para las desviaciones de las distintas variables respecto de sus niveles deseados.

El proceso para obtener la solución emplea un método de la Programación Dinámica. Primero se resuelve el problema para el último período, T, minimizando respecto a x_t el siguiente funcional

$$V_T = E_{T-1}(x_T' Q_T \, x_T)$$

E_{T-1} : Esperanza matemática condicionada a la información disponible en el instante T-1.

[5] Se tratará de un problema de regulador lineal.

Se obtendrá la ley de control óptimo, u_T^*, para el último período. Para resolver el problema para los dos últimos períodos, se aplica el principio de optimalidad de la P.D. para minimizar con respecto a x_{T-1} la siguiente expresión

$$V_{T-1} = E_{T-2}(x_{T-1}'Q_{T-1}\, x_{T-1} + V_T^*)$$

donde V_T^* es el mínimo coste esperado para el último período asociado con la política óptima obtenida en el paso anterior. De esta forma, se obtendrá la ecuación de control óptimo para (T-1), u_{T-1}^*, siendo esta ecuación la misma que se emplea para el instante final, sólo que considerando el instante (T-1) en vez de T. Así sucesivamente, resolviendo hacia atrás en el tiempo, se obtendrá la solución para u_t^*, para $t = 0,1,2,...,T$. En todos estos cálculos, la aproximación se hace cuando todas las expectativas acerca de los parámetros desconocidos del futuro, A_t y B_t, se basan sólo en los datos disponibles al principio del período 1. Por eso se habla de soluciones aproximadas cuando los parámetros son desconocidos.

c) Incertidumbre en la especificación del modelo.

El grado o nivel mayor de incertidumbre es aquél en el que el agente decisor debe optar entre dos o más modelos. Lo que suele hacer es calcular las políticas óptimas para cada uno de ellos, y examina cómo éstas se comportan bajo los supuestos de los diferentes modelos. Se emplea una matriz de doble entrada, en donde las columnas corresponden a los distintos modelos, y las filas representan a las políticas alternativas. Cada elemento de la matriz es la pérdida esperada asociada a una política y a un modelo dados. Con este análisis podría descubrirse políticas que fueran superiores al resto para todos los modelos. Ahora bien, si esto no es posible, se hará necesaria la obtención de una mayor información relativa a las diferencias entre los distintos modelos, las áreas que requieren una mayor investigación y las bases empíricas que deban sustentar las recomendaciones o decisiones políticas. Las técnicas de C.O.E. son importantes, no tanto por que existan modelos econométricos casi perfectos, sino porque permiten mostrar lo imperfecto que son éstos, y qué líneas requieren mayor investigación.

Otros trabajos relacionados con el COE intermedios entre el nivel b) y el nivel c) de incertidumbre mostrados, son los que emplean métodos bayesianos, o bien, controles del tipo mini-max , dentro de la P.D., si las perturbaciones aleatorias se supone que están restringidas a conjuntos compactos cuando no se conoce su distribución.

Por último, dentro de este epígrafe, se hace notar la profunda interrelación que existe entre el problema de C.O.E. y los otros presentados, como son el empleo de modelos en tiempo discreto, y los problemas de control adaptativo, estos últimos no tienen razón de ser en un mundo de plena certeza. Así, NORMAN, A. (1984) muestra nueve posibles combinaciones de supuestos que se pueden formar con tres niveles de incertidumbre (supuestos acerca del comportamiento de las variables aleatorias), y tres niveles de información que pueden disponer los agentes económicos, pero se tratará con un poco más de extensión los problemas de control adaptativo en el epígrafe 5.5. .

5.3.2.- Control óptimo de modelos dinámicos borrosos.

El origen de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos se remonta a 1965 con la definición de "conjunto borroso" dada por ZADETH,L. (1965). Esta Teoría permite un tratamiento de la incertidumbre basado en la distinción entre lo que se denomina "azar" y la "incertidumbre". En muchos casos, ambos términos se han empleado como sinónimos, y así ha sucedido en el epígrafe anterior; pero "... existe una diferencia esencial entre los contenidos de estas dos palabras : el azar va ligado a una medida, la de las probabilidades, mientras que , por definición, lo incierto no se puede medir." (KAUFMANN,A.; Y GIL ALUJA, J., 1987, pág. 13).

Unida a la distinción entre azar/incertidumbre está la distinción entre probabilidad/posibilidad de que un fenómeno suceda. La falta de datos exactos permitiría el empleo de algunas teorías que incorpore la incertidumbre (teorías de los errores, de los intervalos de confianza, de los números borrosos,...), que pese a introducir la subjetividad en detrimento de una mayor exactitud, tienen a su favor una mayor honestidad en el análisis, al asumir el desconocimiento de los fenómenos por falta de medición. De esta manera, la noción de optimización en un ambiente de incertidumbre tiene menos fuerza que un ambiente de certidumbre, o incluso en uno de azar.

La distinción entre azar e incertidumbre, sin embargo, no nos está indicando que la teoría de las probabilidades (el uso de modelos estocásticos) deba competir con las teorías de lo incierto (modelos borrosos). Ambas son herramientas que se emplearán en función de la fiabilidad de las medidas, y del tipo de modelos con los que nos enfrentemos, incluso, se combina la incertidumbre y el azar en los llamados "**números híbridos**" , que asocian datos borrosos con datos aleatorios.

Como se ha mencionado, cuando se trabaje con intervalos de confianza[6], o con números borrosos[7], no se realizará una optimización en el sentido estricto de la palabra. Trabajando

---

[6] Intervalo de confianza: Es un intervalo cerrado de R, en el que sus extremos representan las cotas inferiores y superiores del valor que el parámetro desconocido pudiera tomar.

[7] Un número borroso está formado por una serie finita o infinita de intervalos de confianza con unas propiedades que deben cumplir y que se recogen en KAUFMANN;A., Y GIL ALUJA, J.;(1987) ,pág.43.

con números borrosos triangulares[8] (NBT), y en concreto con sus representaciones aproximadas ciertas, puede emplearse la Programación Dinámica bajo todas sus formas para solucionar problemas de optimización. Este proceso se asemeja a la forma de operar en PDE (Programación Dinámica Estocástica), en donde la optimización se realiza sobre la esperanza matemática, que es un número cierto que representa a uno aleatorio. Comparando los valores ciertos de los NBT se irá avanzando en cada una de las etapas del método de PD empleado, aunque pudieran seguirse otros criterios de optimización que no compararan esos valores ciertos, sino que, basándose en los operadores "minimización" y "maximización" definidos para los NBT, se efectuara la elección comparando directamente los NBT y no sus aproximaciones. Este segundo método conllevaría un mayor trabajo de cálculo, pero no por ello va a proporcionar unos resultados muy distintos de los que generan los métodos que emplean las aproximaciones ciertas de los NBT.

Utilizando los operadores "minimización" y

[8] Un Número Borroso Triangular se representa por una terna (a_1, a_2, a_3), en la que el valor central, a_2, será el valor que con máxima posibilidad pueda tomar el parámetro. Los otros dos valores, a_1 y a_3, son los de menor posibilidad. Se tiene que a_1, a_2, y a_3, son números reales, siendo a_1 y a_3 las cotas inferior y superior, respectivamente, del posible valor del parámetro incierto.

"maximización", y la PD, la optimización no se realizará en sentido estricto, lo que ya se ha dicho, pues en casi todos los casos, la solución obtenida no proporciona la política óptima a seguir. La PD se aplica teóricamente sin que pueda especificarse al final del proceso la elección óptima. Lo que algunos autores realizan a este respecto, es establecer un método mixto entre el mencionado arriba (aproximaciones ciertas de NBT), y el empleo de estos operadores, lo que va a proporcionar resultados muy similares a los obtenidos por el primer tipo de técnicas.

Todavía está poco desarrollada lo que podría llamarse una Teoría del control borroso, con un principio del máximo (mínimo) borroso (PMB), que permitiera garantizar la existencia y unicidad de un vector de controles que condujera al sistema dinámico borroso a lo largo del tiempo, "optimizando" un determinado funcional. Queda, pues, un camino abierto para desarrollar el empleo de modelos inciertos en problemas de control. Existen trabajos de distintos autores que ya incorporan el análisis borroso en determinados problemas de control[9] , pero convendría

---

[9] De entre los trabajos que combinan técnicas de control óptimo de sistemas dinámicos, tal y como se han presentado en los capítulos anteriores, y la Matemática Borrosa, pueden mencionarse KACPRZYK,J. (1980); KAUFMANN,A. (1983); NEGUTA,C.V. Y RALESCU,D. (1975); PEDRYCZ,W. (1981); WILAYES

profundizar en el estudio de problemas más generales de control borroso, si ello fuera posible.

A continuación, simplemente, se mostrará cómo podría incorporarse la teoría de los números borrosos al problema de control con estabilización (Problema Lineal Cuadrático).

Dado el problema de seguimiento lineal de las variables de estado

$$\text{Min } J = \frac{1}{2}(x-\hat{x})'S(x-\hat{x}) + \int_{t_0}^{T}[(x-\hat{x})'Q(x-\hat{x}) + (u-\hat{u})'M(u-\hat{u})]dt$$

s. a

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \quad , \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0, \quad y \quad T \text{ dados.}$$

D. Y MAVACHE, N. (1981); ZIMMERMANN,H.J. (1983). Los que se han subrayado tratan de forma más general la incorporación del análisis borroso a la teoría de sistemas.

la incertidumbre podría aparecer en los siguientes casos:

- Los parámetros del sistema dinámico: Las matrices A y B serían matrices cuyas componentes fueran números borrosos. No se conoce exactamente el valor de los parámetros, y las distintas estimaciones que pudieran existir de los mismos no coinciden. Podría considerarse a estos parámetros inciertos como números borrosos, y quizás , sus estimaciones permitirían dar una idea de los valores que en grado de mayor o menor posibilidad pudieran tomar.

- El instante final podría no conocerse, o mejor dicho, podría existir una disparidad de criterios por parte de los agentes decisores acerca de cuál debería ser T. De esta forma, T podría considerarse como un número borroso.

- También podría hacerse lo mismo con la matriz S , y presumir que sus componentes fueran números borrosos, atendiendo al desconocimiento del valor del funcional objetivo en el instante final T.

- El estado inicial, $x(t_0)$, podría ser desconocido por la inexistencia de datos ciertos, y por tanto, se podría considerar como un número borroso.

- El vector de los valores deseados para las variables de estado, $\hat{x}(t)$, o para los controles, $\hat{u}(t)$, debido a lo inexacto que puede resultar el establecimiento de los objetivos a seguir a largo plazo, podrían considerarse también que sus componentes fueran borrosas, a la vez que variables en el tiempo.

- Ya por último, las matrices de penalizaciones de las desviaciones de las variables de estado y de control con respecto a sus valores deseados, Q y M, también podrían ser caracterizadas sus componentes como números borrosos, pero no tanto por la incertidumbre como expresión de falta de datos ciertos, sino porque esas penalizaciones se determinarían tras un proceso de elección en el que intervendrían los distintos responsables, habiéndose aplicado las técnicas de la Matemática Borrosa para llegar a la solución de ese proceso, expresada ésta como un número borroso que recogiera las diferentes opiniones presentadas.

Lo que se puede decir, de forma intuitiva, es que la incorporación de la incertidumbre al problema de control con estabilización le afectará de dos maneras, fundamentalmente :

- Se consigue una representación que puede ser sustitutiva de la puramente estocástica, cuando ésta no sea lo satisfactoria que pueda desearse.

- El proceso de cálculo es más laborioso que el que en principio puede suponerse para el problema determinista, o el problema estocástico en ciertos casos, aunque con el empleo de ordenadores este hecho ve reducida su importancia.

Como ya se ha mencionado, estará todavía por determinar si puede obtenerse un Principio del Máximo equivalente al de Pontryagin para el caso de modelos borrosos en tiempo continuo. A pesar de esto, hay ciertos problemas concretos de control en los que la incorporación de la incertidumbre afecta sólo a unas determinadas componentes del problema, cuya solución óptima puede hallarse con las técnicas de C.O. expuestas en este trabajo. Tal sería el caso en el que el estado inicial, por ejemplo, no fuera conocido exactamente, y viniera representado por un NBT.

5.4.- El problema de la no linealidad de los sistemas económicos dinámicos.

Es evidente que problemas diferentes van a requerir tipos de solución diferentes, y eso es lo que va a suceder cuando se trabaje con modelos no lineales. En los inicios de la Teoría del C.O. , las aplicaciones de la Tª del C.O. no lineal se restringían casi enteramente al modelo de crecimiento neoclásico y sus distintas variantes. A partir de los primeros años 70, las áreas de aplicación se han ido extendiendo considerablemente : recursos renovables, recursos agotables, polución, política de inversiones, ...

La obtención de la solución en problemas de control no lineal se vuelve extremadamente dificultosa para aquellos sistemas dinámicos de más de una variable de estado, y siempre que se esté trabajando con sistemas de orden relativamente bajo, porque si no, esta solución requeriría un gran coste de obtención. Los modelos lineales que se suelen emplear en el problema lineal cuadrático, (PLC), problemas de control con estabilización, solucionan este problema de la complejidad en la obtención de la solución, pudiendo trabajar con sistemas dinámicos de un orden mayor que el permisible para los modelos no lineales.

Según LIVESEY,D.A. (1979,pág.72), no hay ninguna razón para no aplicar la teoría de control feedback a los modelos no lineales empleando una linealización local. Este método ha sido empleado con mucho éxito en numerosas aplicaciones. Se trata, resumiendo, de generar una linealización válida y local del modelo no lineal, y obtener un control feedback estable para esa representación lineal. Como generalmente los modelos económicos no van a ser lineales, o se trabaja con ellos tal y como son, o se recurre a esas aproximaciones lineales.

Para AOKI,M. (1976,pág.59-62), si se puede tratar a los sistemas no lineales como si fueran perturbaciones de un sistema lineal, se podría decir mucho acerca del comportamiento local de los sistemas no lineales. Así, como ya se ha dicho antes, se construirán aproximaciones de los modelos no lineales que son localmente válidas para fluctuaciones muy pequeñas respecto del punto de equilibrio, o de una determinada senda temporal de referencia. Quedaría por determinar cómo se eligen las sendas temporales de referencia, y cómo deberían ser escogidas. Esta senda temporal de referencia representa, normalmente, un compromiso entre los distintos y conflictivos objetivos de los políticos. Podría considerarse aquéllas como una solución de problemas de optimización intertemporal. Una vez elegida esa senda temporal de referencia, se realizaría una transformación del problema no lineal que va a permitir su solución de forma análoga al caso lineal.[1]

Si bien unas veces la representación lineal del sistema dinámico económico atiende al supuesto de que las relaciones que recoge el modelo teórico económico son lineales, y por tanto, estaría representado correctamente; otras, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales no es más que una aproximación, como ya se ha insistido, de un sistema que en realidad está constituido por ecuaciones diferenciales no lineales. Por este motivo, aunque estos métodos de linealización han sido muy empleados, CHIARELLA, (1985), afirma que el modelo lineal no puede servir como base para explicar las fluctuaciones económicas permanentes que se pueden observar en el ciclo económico. El llevar a cabo una linealización está impuesto en muchos casos, según él, por la dificultad de analizar las ecuaciones diferenciales no lineales, especialmente cuando éstas se especifican sólo cualitativamente. Ahora bien, si los modelos lineales no pueden matemáticamente generar oscilaciones o fluctuaciones

[1] Puede verse todo el proceso para el caso contínuo en AOKI,M.(1.976, págs. 60-62).

cíclicas , se tiene por otra parte que los modelos no lineales que sí las pueden generar, no están muy relacionados con los modelos dinámicos macroeconómicos propuestos por las diferentes líneas de pensamiento. Si se acepta que las oscilaciones del ciclo económico son debidas a shocks aleatorios, entonces el uso de modelos lineales en el análisis macroeconómico podría estar justificado.

En base a estas ideas, CHIARELLA (1985) construye un modelo del déficit público que contiene una parte lineal y otra no lineal, obteniendo una solución distinta de la que se extraería trabajando con un modelo lineal. Así , la solución es una senda temporal , que sufre oscilaciones cíclicas, aunque éstas estén acotadas. A esta senda temporal que sigue la solución se le denomina "límite del ciclo", ya que recoge la tendencia que marcan las persistentes fluctuaciones cíclicas. De esta forma consigue representar las fluctuaciones cíclicas que pueden observarse en la realidad, lo que era imposible de obtener a partir de un modelo lineal.

En el caso concreto del PLC (control con estabilización) ya se ha comentado en el apartado 5.3 referente a Control

Optimo Estocástico, que las distintas técnicas empleadas en el caso lineal podían servir para el caso no lineal. También se acaba de decir que los modelos lineales estocásticos pueden servir, a veces, como aproximaciones aceptables de modelos deterministas no lineales. El problema aparecerá cuando la aproximación lineal estocástica no sea válida para un modelo no lineal. Normalmente se linealiza el modelo, y a partir de ese paso, se obtiene la solución, tal y como se ha dicho ya, pero lo que va a suceder es que ciertos fenómenos reales no podrán estar recogidos en la solución que proporcione esa aproximación lineal, como sucede con las fluctuaciones cíclicas.

5.5.- El problema de control adaptativo.

Las reglas de control adaptativo pueden caracterizarse por la cantidad y calidad de la información que utilicen. La información puede usarse para modificar la especificación del modelo, para rectificar el valor de sus parámetros, o para actualizar de forma inmediata el valor del estado del sistema.

El término "adaptativo" se usa a menudo para señalar el empleo de información reciente en el proceso de toma de decisiones. Hay varios niveles de información que pueden emplearse para distintos fines en este proceso. En particular, hay dos procesos generales adaptativos; uno pasivo y otro activo. Se parte de una información recogida en datos que describe el estado de un sistema, como pudiera ser la cifra de ventas mensuales de un producto, el output de una determinada máquina, la rentabilidad de un determinado activo financiero, o la tasa de inflación. Esta información puede usarse para tomar ciertas decisiones, sin que se produzca ninguna modificación en el modelo descrito por el sistema, (adaptación pasiva). Alternativamente, la información podría haberse utilizado primero para modificar el modelo y sus parámetros, y luego como base para el cálculo de la decisión óptima, (adaptación activa). Muchas de las aplicaciones al management han considerado el primer tipo de proceso adaptativo. Pero incidiendo en problemas de control adaptativo activo, cabe decir que además de la cantidad interviene la calidad de la información disponible para adaptar el modelo, los parámetros y tomar las decisiones de control.

Desde un punto de vista pragmático, la investigación en materia de Control Adaptativo (C.A.) reconoce que un sistema evoluciona a lo largo del tiempo más rápidamente que lo que aparecen los datos necesarios para revisar y analizar la influencia de los controles alternativos sobre ciertas medidas de los resultados. En general, las revisiones de las representaciones de los sistemas podrían no verse por separado de la derivación de la política óptima.

Decisiones diferentes pueden revelar más o menos información acerca del actual sistema a través de los diferentes conjuntos de datos obtenidos. Por el lado de los beneficios, cada información puede resultar en una representación no probada de la estructura del sistema, proporcionando un control futuro superior. Por otra parte, el coste asociado a cada información conduce a tomar decisiones que son menos óptimas que las que proporcionaría el punto de vista de C.O. puro.

Así pues, el control óptimo adaptativo (C.O.A.) requiere una solución óptima de un problema de control y de un diseño secuencial de experimentos, y éste es en naturaleza **dual**. A la vez que se obtiene una solución debe proporcionarse una nueva especificación del modelo . Esta característica dual del problema de C.O.A. fue reconocida por FELDBAUM, A.A. (1965). Un examen de las técnicas de control dual planteadas por FELDBAUM se puede encontrar en SWORDER, D.(1966), AOKI,M.(1967), MEIER, L. (1966,1965), entre otros. De estos trabajos se puede concluir que las técnicas de control dual pueden caracterizarse por tres elementos fundamentales :

a) Control directo: Despreciando la relación entre la información actual y las futuras medidas, el elemento de control tiene en cuenta el efecto directo de las decisiones sobre el funcional objetivo.

b) Aprendizaje : El factor aprendizaje está motivado por la existencia de un conjunto de estadísticos suficientes condicionados por la información relacionada con el estado actual del sistema, y por la más reciente estimación de la distribucuón de probabilidades de los parámetros desconocidos del problema.

c) Diseño de experimentos o pruebas : Como la generación de muestras de datos futuros, información, tienen una directa influencia sobre las futuras estimaciones de las distribuciones de probabilidad de los parámetros y variables desconocidos, y esto tiene, a la vez, influencia sobre la bondad de las distintas decisiones; las acciones de control adaptativo adquieren una dimensión experimental.

Infortunadamente no es posible expresar, en muchos casos, las soluciones de los controles duales o adaptativos en forma analítica. Algunos autores presentan las ecuaciones recursivas relevantes, pero no proprocionan soluciones explícitas. Por esta razón, desde el punto de vista de los métodos, la mayoría de los esfuerzos de investigación se han dirigido hacia el desarrollo de aproximaciones analíticas y reglas de control adaptativo factibles.

5.6.- La irrealidad de la existencia de controles no acotados en el mundo de la política económica : Control óptimo restringido.

Es irreal considerar la inexistencia de ningún tipo de restricción sobre las variables económicas de estado o de control. En concreto, pues, cabría plantearse como poco aceptable el pensar que los controles no están acotados, ya que la experiencia nos muestra cómo los recursos de que se dispone para efectuar política económica macroeconómica o de la empresa, son escasos. Ciertas variables no pueden tomar valores negativos para tener sentido económico (precios, cantidades producidas, stock de capital, ...). Otras restricciones las impone la legislación (salario mínimo interprofesional, precios indicativos, umbrales de garantía, cuotas de producción, presupuestos públicos, ...). La tecnología y disponibilidades de recursos y factores productivos en un período de tiempo marcan las relaciones que deben seguir variables de estado y controles.

Todo este conjunto de restricciones que existen en el mundo real, y siempre que no estén recogidas en el sistema dinámico, pueden expresarse matemáticamente como :

- restricciones de igualdad.

- restricciones de desigualdad sobre:
  - las variables de control; siendo un caso concreto los controles acotados.
  - las variables de control conjuntamente con las de estado.
  - las variables de estado, exclusivamente.

La introducción de las restricciones sobre las variables en un problema general de control incide directamente en los métodos que proporciona la Teoría del Control Optimo para su resolución.

Para el caso de restricciones de igualdad, el procedimiento seguido, normalmente, para solucionarlo es el de la relajación lagrangiana. Otra forma de intentar su solución es sustituir directamente las restricciones en el funcional objetivo que se había planteado. Estos métodos se basan en que el óptimo del problema original con restricciones es el mismo para el problema resultante de cambiar el funcional inicial por otro, el funcional aumentado, que incorpora la función lagrangiana, o que el funcional resultante de sustituir directamente las restricciones en el funcional original.

Cuando las restricciones son de desigualdad, las soluciones se deben buscar dentro de ciertas regiones del espacio de las variables de estado (región o conjunto de estados alcanzables).

Si las restricciones afectan sólo a las variables de control, el problema incide en una modificación de la región de controles admisibles. Dentro de esta clase de problemas tenemos el problema de controles acotados. Atendiendo a las características de esta región (conjunto cerrado), y a si el Hamiltoniano que resulte del problema es lineal respecto a las variables de control, se emplean las llamadas técnicas de control bang-bang (conjunto cerrado y Hamiltoniano lineal respecto a las variables de control). Este no es el caso que resultará de establecer este tipo de restricciones en el Problema Lineal Cuadrático descrito en los capítulos anteriores, ya que el Hamiltoniano en este caso no es lineal respecto a los controles.

El problema consistiría en trabajar con una región de controles admisibles que fuera un conjunto cerrado, ya que las condiciones necesaria (principio máximo Pontryagin) y suficiente planteadas en el PLC ($H_u = 0$; $H_{uu} < 0$ para máximo), sólo tendrán sentido en los puntos interiores del conjunto, por lo que será necesario estudiar el Hamiltoniano en esos puntos, ya que puede no haber un óptimo para $H_u = 0$, teniendo que buscarlo en otros puntos donde $H_u \neq 0$. El procedimiento para resolver este tipo de problemas se suele hacer, también, a través de la relajación lagrangiana, manejando variables de holgura para eliminar el problema de la desigualdad de las restricciones, aunque puede resultar dificultosa la búsqueda del óptimo. Por este motivo, se suele definir un "**Hamiltoniano generalizado**" , aplicando el P.M.P., teniendo en cuenta las condiciones de holgura complementaria.

Para que las condiciones necesarias que proporciona este método sean válidas, a las restricciones de desigualdad hay que exigirles que no se comporten irregularmente en el caso de cumplirse en términos de igualdad. Este requisito, conocido como cualificación de las restricciones, comporta unas propiedades que se conocen como condiciones de ARROW-

HURWITZ-UZAWA.[1]

Las condiciones de holgura complementaria aseguran que en el óptimo se cumplan las restricciones.

Para el problema concreto de control con estabilización, la existencia de restricciones de desigualdad sobre las variables de control y de estado conjuntamente (las restricciones que exclusivamente estén realizadas sobre las variables de control estarían incluidas como un caso más), se tiene

$$\text{Min } J = \frac{1}{2} \int_0^T (x' \, Q \, x + u' \, M \, u) \, dt$$

s. a

$$\dot{x} = A \, x + B \, u \quad , \quad \text{con} \quad x(0) = x_0$$

con restricciones de desigualdad sobre las variables de

[1] Ver TAKAYAMA,A. (1981, pág. 97-98).

control y (o) sobre éstas conjuntamente con las de estado

$$g(x,u) \geq 0$$ [2]

El Hamiltoniano generalizado quedaría así :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [x'Q\, x + u'M\, u] + p\, [A\, x + B\, u] + \mu\, [g(x,u)]$$

y las condiciones necesarias serán :

1) $\hat{H}_p = \dot{x}$

$\hat{H}_x = - \dot{p}$

2) $\hat{H}(x^*,u^*,p,\mu) \leq \hat{H}(x,u,p,\mu)$, para todo u(t) posible

---

[2] Las restricciones podrían ser lineales

$$C\, x + D\, u \geq 0$$

y englobar a las que exigieran controles acotados

$$||\, u\, || < \delta$$

3) Cumplimiento las condicones de holgura complementaria

$$\mu(t) \leq 0 \quad ; \; g(x^*(t),u^*(t)) \geq 0 \quad , \; y \quad \mu(t)\, g(x^*(t),u^*(t)) = 0$$

4) Cumplimiento de las condiciones de transversalidad.

Ya se ha mostrado, pues, cómo resolver el problema de control lineal cuadrático con existencia de restricciones de desigualdad sobre las variables de control , y sobre éstas y las de estado conjuntamente.

Si a la hora de modelizar este problema, no se hubiera considerado relevante las desviaciones de las variables de control como para incluir penalizaciones a las mismas en el funcional objetivo, la matriz M sería una matriz nula, y en este caso el funcional quedaría

$$\text{Min } J = \frac{1}{2} \int_0^T (x'\, Q\, x)\, dt$$

que da lugar a un Hamiltoniano que sí sería lineal respecto a las variables de control, lo que condiciona, en ausencia de cualquier tipo de restricciones, que la solución para las variables de control sea del tipo $u^*(t) \rightarrow \pm \infty$. Así pues, cuando no se penalicen las desviaciones de la variable de control, se hará necesario el establecimiento de restricciones a los valores que puedan tomar los controles. Y una vez planteado el problema de control restringido, se resolvería mediante las técnicas de control lineal bang-bang.

Ya por último, en muchos problemas económicos, las restricciones de desigualdad se establecen sólo sobre las variables de estado (no negatividad, cotas superiores o inferiores). El método de resolución es similar al explicado para las restricciones sobre los controles, y podrían surgir problemas cuando las restricciones se cumplan en términos de igualdad, ya que al no aparecer explícitamente las variables de control en ellas, podría entenderse que no fuera posible obtener $u^*(t)$, pero se llega a otras expresiones que sí van a depender directamente de las variables de control, lo que permitiría obtener $u^*(t)$, el control óptimo.

5.7.- Otras limitaciones del planteamiento teórico.

Se ha comentado al inicio de este capítulo que uno de los suspuestos sobre los que se ha desarrollado todo este trabajo ha sido la existencia de un único centro de decisión o grupo de agentes decisores. Eliminando este supuesto, y considerando el problema de optimización con múltiples agentes, cada uno de ellos con su propio funcional objetivo a optimizar, nos encontraríamos en el campo de la Teoría de Juegos, y al trabajar con modelos dinámicos, con Juegos diferenciales. Se ha creído conveniente mencionar la existencia de este campo de investigación, por la mejor aproximación a ciertos problemas de control que brinda, pero el problema de control con estabilización y su proceso de obtención de la solución para el caso de un único agente decisor también podrían ser de utilidad en determinados juegos diferenciales.

Por otro lado, una de las primeras preocupaciones que se dieron a principios de los años 60, etapa en la que se impulsó la planificación y control de la economía, estribaba en el planteamiento adecuado del funcional objetivo. En el análisis realizado no se ha justificado convenientemente el por qué de la elección de ese funcional, o mejor dicho, no se ha explicado el proceso real de elección de ese funcional. En general, el agente decisor de política económica quiere una función no lineal que represente sus prioridades. En la mayoría de los casos el funcional objetivo no puede ser especificado, o bien no puede ser "taylorizado" (linealizado). Ante esto, tenemos que se asume, generalmente, la función objetivo cuadrática para cubrir estas dificultades, por los motivos , entre otros, que siguen :

1. Puede considerarse esta función como la aproximación de segundo orden por Taylor de la verdadera función objetivo del político.

2. Dan una medida sencilla de las desviaciones de los valores actuales de las variables con respecto a una trayectoria deseada.

3. La solución del problema del control óptimo con una función objetivo cuadrática está bien determinada , pudiéndose trabajar matemáticamente con ella con escasa dificultad.

Así, por la importancia que tiene en la optimización de las decisiones políticas la especificación del funcional objetivo, RÜSTEM, WESTCOTT, ZARROP, HOLLY Y BECKER,(1979) desarrollan un método iterativo para reespecificar la función objetivo cuadrática. El algoritmo que emplea trata de ajustar la matriz de pesos o ponderaciones de la función cuadrática para aproximarse a la matriz de pesos que proporcionara la solución óptima deseada. Se trata de que los ajustes se hagan para generar políticas óptimas que sean preferidas por el político a la actual trayectoria. El proceso iterativo continúa hasta que se obtiene una solución óptima aceptable. La dificultad de la correcta especificación de la matriz de pesos de la función objetivo cuadrática depende de la información que se tenga acerca de ella. El método que RÜSTEM, WESTCOTT, ZARROP, HOLLY Y BECKER,(1979) describen en su trabajo trata este problema de la información en dos niveles. El primero es cuando el gradiente de la verdadera función de costes del político es conocido. En este caso, el método es convergente a la verdadera matriz de pesos de la función cuadrática. En el segundo nivel de información lo único que se conoce son las trayectorias preferidas por el político. En este caso, lo que se llegará a obtener es una nueva trayectoria que será preferida por el político a la anterior. En ambos casos se modifican las trayectorias óptimas que en una primera especificación se habían obtenido.

Según WESTCOTT,J.H.; ZARROP,M.B.; HOLLY,S.; RÜSTEM,B. Y

BECKER,R.(1979), las soluciones de los problemas de control óptimo proporcionan un control que no depende del coste marcado por el funcional objetivo, lo cual no es cierto si se considera una componente aleatoria en el modelo, ya que en la realidad las variables instrumentales (input, o control) de política económica dependen de los valores presentes y pasados de las variables, estando relacionados éstos con el funcional objetivo.

Las etapas para formular un funcional objetivo, según ellos son tres [1] :

1. Dados los valores para las variables instrumentales, el agente que construya el modelo calcula las variables output.

2. El político evalúa la relevancia económica de los valores de los instrumentos y output, si son satisfactorios el problema termina. Si no lo son, se hacen criticas al modelo para que se cambie.

---

[1] En CHOW (1979), se plantean 12 etapas, detallando los pasos a seguir para formular políticas económicas, basándose en las ventajas de los métodos estocásticos de control, asumiendo las imperfecciones de los modelos econométricos considerados.

3. Se proponen correcciones sobre los valores de las variables instrumentales para conseguir el valor del output deseado que esté en línea con los requerimientos del político.

Si existen restricciones, las etapas son similares, sólo que se emplea un algoritmo iterativo.

Aún así, sean cuales sean las etapas para llegar a la función cuadrática que represente el funcional va a suceder, como dice CARAVANI,P.(1986), que al asumir este tipo de función en concreto se mantiene una perfecta simetría en la penalización, y por tanto, en la valoración de las desviaciones de las variables relevantes. Esto es difícil de aceptar como cierto en muchos casos, ya que para una variable de estado concreta, como pudiera ser la inflación, no parece normal penalizar lo mismo, sobre un objetivo del 4%, el que la inflación se situara en un 2% que en un 6%. CARAVANI,P.(1986) plantea un funcional no cuadrático, ni lineal, que recoge las posibles asimetrías en las penalizaciones que puedan darse a las desviaciones de igual valor absoluto, pero de distinto signo.

Otra limitación del planteamiento teórico radica en la presunción de plena certeza, e información perfecta, frente al problema relacionado con los errores de medida de los datos. Así para las políticas fiscal y monetaria, según KENDRICK,D.(1979), este problema se centra en tres preguntas:

1. Los errores de medida de los datos ¿tienen suficiente magnitud como para marcar diferencias sustanciales en las políticas fiscal y monetaria óptimas , obtenidas tras un planteamiento de un problema de control?

2. ¿Los métodos que puedan tener en cuenta estos errores de medición van a proporcionar políticas óptimas diferentes de las que no los consideran?

3. Considerando estos errores de medición, los métodos de control adaptativo, que tienen en cuenta el hecho de que los parámetros pueden ser aprendidos o anticipados por los agentes económicos, ¿proporcionan mejores políticas que los métodos de control con certidumbre que no tienen en cuenta el aprendizaje o esa anticipación de la política por parte de los agentes?

Utilizando los datos de la contabilidad nacional USA, intenta llegar a las respuestas a estas tres preguntas.

Compara los resultados proporcionados por un modelo determinista que no considera los errores de medición, y uno estocástico en un problema de control, llegando a la conclusión de que los errores de medición son lo suficientemente importantes para marcar diferencias sustanciales en las políticas óptimas obtenidas. A la segunda pregunta no pudo dar una respuesta concluyente en su estudio. A la tercera cuestión contesta afirmativamente, los complejos métodos de control adaptativos son mejores que los métodos sencillos con certidumbre; cuando existen errores de medición.

Para finalizar, cabe decir que la solución obtenida (la ley feedback de control óptimo), en la práctica, cambiará cuando cambie el gobierno, agente decisor, ya que cambiará el funcional objetivo; así como cuando se den cambios estructurales en la economía que deban incorporarse en la especificación de todo el modelo. Así queda claro que esta ley feedback es una cuestión empírica, no es permanente, ya que depende de los valores del pasado de las variables output o de estado. Por tanto, hay que tener cierta cautela a la hora de emplear técnicas de control, en el sentido de considerar que la solución obtenida sea válida en cualquier período y situación, aparte de que el poder predictivo de los modelos suele ser escaso, al estar obtenidas las soluciones a partir de los valores pasados de las variables, no pudiendo preveer cambios a corto plazo en la economía. Esto es lo que ocurrió en las economías industrializadas que en los inicios de los años 70 estaban inmersas en una ola de planificación basada en el crecimiento a largo plazo, y que no predijeron el crack de oferta de recursos energéticos que aconteció.

6.- CONCLUSIONES.

Las conclusiones extraídas se han agrupado en cuatro apartados relacionados entre sí :

- Conclusiones generales del análisis teórico.
- Grado de cumplimiento de los objetivos planteados.
- Consideraciones autocríticas.
- Proyectos futuros de investigación.

a) Consideraciones generales del análisis teórico.

- La importancia del factor tiempo en el análisis económico: Las decisiones que toman los responsables de la política económica de una nación, o de la dirección de una empresa, tienen unas fuertes implicaciones de carácter dinámico. Para abordar la solución a estos problemas dinámicos se hace necesaria una modelización temporal de los fenómenos sujetos a estudio. En este proceso de modelización hay que tener en cuenta una serie de factores como el establecimiento de los mecanismos que proporcionen un ordenamiento de los resultados que se den en distintos momentos del tiempo; la construcción de un modelo mediante las técnicas que proprociona la Econometría representativo de la evolución temporal de los fenómenos económicos; el seguimiento de la evolución de los procesos temporales; y la interrelación entre la información existente en cada momento y la toma de decisiones.

- Los elementos esenciales de un problema de control óptimo son un modelo o sistema matemático a "controlar", un output o resultado deseado para el modelo, un conjunto de inputs o "controles" admisibles, y un funcional de coste o de beneficio, que mida la efectividad de una determinada acción de control. El problema de control se formula de la siguiente manera: Se buscan los inputs (admisibles) que puedan generar el output deseado y que, a la vez, optimicen la medida elegida del rendimiento (minimicen el coste o maximicen la ganacia del control).

- La solución del problema general de control óptimo la proporciona el Principio del Máximo de Pontryagin, el cual ha podido derivarse a partir de las Técnicas del Cálculo de Variaciones, aunque la Teoría del Control Optimo ha resuelto muchos de los problemas no solucionados por dichas técnicas, (restricciones de desigualdad, control lineal,...) .

- Las fluctuaciones y oscilaciones son inherentes a los fenómenos económicos. La estabilización trata de minimizar estas fluctuaciones, de manera que en un problema de control con estabilización, se intentará alcanzar un determinado estado mediante unas variables de control, minimizando a la vez las fluctuaciones de todas las variables económicas. El Problema Lineal Cuadrático, en su versión contínua y determinista, dentro de los problemas de control con estabilización de sistemas dinámicos, es el que se ha expuesto en estas páginas. Se han expuesto dos tipos de problemas , los de Regulador Lineal y los de Seguimiento Lineal, siendo el primer tipo un caso concreto del segundo. El funcional objetivo que se emplea consiste en la suma de unas formas cuadráticas de signo no negativo, y que recogerían las penalizaciones a las desviaciones de las variables que se pretende estabilizar.

- Con el planteamiento del problema de control con estabilización se define una nueva propiedad que puede cumplir un sistema dinámico : la estabilizabilidad. Así, un sistema dinámico se entendería como estabilizable si existiera una ley de control que lo transformara en un modelo estable.

- Las limitaciones del Problema Lineal Cuadrático en su versión contínua y determinista, sin restricciones sobre las variables, se han podido constatar en el quinto capítulo. El problema que se ha expuesto peca de excesivos supuestos, con la implicación que esto lleva en cuanto a la exactitud o veracidad de la representación del fenómeno real utilizada. Además, se puede destacar lo siguiente :

- El problema de la obtención de la información y datos incide en que los modelos dinámicos se formulan mediante sistemas de ecuaciones en diferencias, recogiendo, por tanto, una evolución en tiempo discreto para las variables del sistema. Así, los modelos en tiempo contínuo no han podido ser sometidos a un proceso de contrastación empírica, a no ser que ésta se haya efectuado sobre una versión discreta de aquéllos. Se formuló un principio del máximo(mínimo) para el control de estos modelos discretos análogo al formulado para modelos contínuos, aunque se exige que el conjunto de controles admisibles sea direccionalmente convexo. Los métodos que se emplean para resolver el problema de control con estabilización de modelos dinámicos en tiempo discreto son, en su mayoría, los que proporciona la Programación Dinámica.

- La aproximación determinista resulta conveniente en numerosas ocasiones (corto plazo). Los modelos aleatorios o estocásticos pueden ser de mayor utilidad cuando se trabaje en un ambiente de riesgo (medio plazo). En un ambiente de incertidumbre es decir, cuando sea poco satisfactorio manejar estos modelos estocásticos, los modelos borrosos proporcionarán un mejor resultado.

- La introducción de la incertidumbre o del azar en el modelo dinámico a controlar se efectúa mediante el manejo de modelos borrosos o de modelos estocásticos, respectivamente. Los primeros los proporciona la Matemática Borrosa, y su empleo se ha centrado en problemas concretos de control, dando lugar a una solución específica para cada caso. A nivel teórico, el control borroso se ha desarrollado para modelos discretos a partir del sustento teórico que ofrecía la Programación Dinámica, no habiéndose establecido todavía un principio del máximo (mínimo) para el control de modelos borrosos dinámicos en tiempo contínuo equiparable al de Pontryagin, o al que enunciaron Halkin y Holtzman para el caso discreto. En cuanto a los modelos que introducen el azar en el análisis, los modelos estocásticos, pueden agruparse según el tratamiento que dan al azar. Así, en un primer nivel estarían aquellos modelos que incorporan las perturbaciones aleatorias al modelo. Se establecen supuestos acerca del comportamiento de estas perturbaciones aleatorias (variables ruido blanco). El problema de control con estabilizacion de modelos de este tipo, llamado el Problema Lineal Cuadrático Gaussiano, consistirá, a grandes rasgos, en la minimización de la esperanza matemática de un determinado funcional de costes. Ha sido muy empleado este tipo de modelo (PLCG), pero hay que hacer ver que un supuesto de comportamiento de las perturbaciones aleatorias como variables ruido blanco implica que el modelo no pueda aproximar correctamente los shocks o fluctuaciones más fuertes de las variables, que son los que tienen un mayor impacto sobre la economía. Un segundo nivel, estaría recogiendo aquellos modelos en los que existiera incertidumbre acerca de los parámetros del modelo, aunque no de su distribución probabilística. La resolución se complica, obteniendo un resultado aproximado a partir de métodos de la Programación Dinámica. Y un tercer nivel incluiría la existencia de incertidumbre sobre la especificación correcta del modelo. Existen varios modelos y hay que optar por uno de ellos. Se construye una matriz de doble entrada, que recoja los modelos, por una parte, y las distintas políticas por otra, elgiéndose aquél modelo, siempre que sea posible, que sea superior a los demás.

- El sistema de ecuaciones diferenciales lineales suele tener su origen en una linealización de otro modelo no lineal más acorde con el comportamiento del fenómeno real objeto de estudio. Así, los modelos no lineales se considerarían como si fueran perturbaciones de un sistema lineal. Las aproximaciones lineales con las que se trabaja son válidas para fluctuaciones pequeñas, pero no sirven de base para explicar las fluctuaciones económicas permanentes que se pueden observar en el ciclo económico. Los modelos no lineales sí que las pueden representar, pero, sin embargo, la mayoría de modelos dinámicos formulados por las distintas lineas de pensamiento teórico son lineales. La obtención de la solución en modelos no lineales de más de una variable de estado se vuelve extremadamente complicada, sobre todo si el orden del sistema es alto.

- Otra limitación del modelo con el que se ha trabajado es el hecho de no considerar la existencia de expectativas adpatativas que harían insostenible el mantenimiento del modelo y supuestos ya mencionados. Los agentes económicos pueden anticipar una determinada acción de control, y cambiar su pauta de comportamiento en función de esa nueva información. Según se trate de un proceso de adaptación pasivo o activo, se tendrá que la información disponible se emplea para tomar decisiones, (adaptación pasiva), o además, se modifica el modelo representado por el sistema dinámico (adaptación activa). El problema de control adaptativo es un problema dual, ya que junto con la solución óptima de control se ha de proporcionar un diseño secuencial de experimentos, es decir, obtenida la solución del problema se debe acompañar de una nueva especificación del modelo, resultante del manejo de la información disponible en ese momento, la cual depende, a su vez, del tipo de experimentos o métodos de extracción de datos que se haya diseñado. La solución de los controles adaptativos (duales), en muchos casos no es posible expresarla en forma analítica.

- El supuesto de no existencia de controles acotados, o de no existencia de restricciones sobre ninguna variable es irreal. En el mundo de la política económica es impensable que no existan limitaciones sobre los recursos disponibles para llevar a cabo las alternativas políticas. La incorporación de las restricciones al problema de control se realiza bien mediante la sustitución de las restricciones en el funcional objetivo, o bien, mediante la relajación lagrangiana. En la práctica se construye un hamiltoniano generalizado y se aplica el Principio del Máximo (mínimo) de Pontryagin para aquél.

- El Problema Lineal Cuadrático, al asumir una función cuadrática como funcional, está penalizando por igual desviaciones de igual magnitud aunque de distinto signo. Este hecho es difícil de aceptar ya que, por ejemplo, un político no va a valorar de la misma manera que el objetivo de la inflación no se cumpla por defecto que por exceso. Así pues, para incorporar esta puntualización será necesario abandonar el funcional cuadrático por otro que recoja las posibles asimetrías en las penalizaciones de las desviaciones de igual valor absoluto.

- Las aplicaciones prácticas han puesto de manifiesto como, a pesar de los supuestos restrictivos que se han mantenido en el análisis teórico, ha sido necesario establecer otros adicionales (controlabilidad, estabilizabilidad, horizonte temporal infinito) para poder obtener una solución. Aun así, se ha mostrado qué tipo de casos son los que se suelen plantear a modo de problema de control con estabilización, y se puede intuir las potencialidades que ofrece la Teoría del Control Optimo para abordar la solución de problemas reales.

- En el problema de los excedentes comunitarios de leche ha quedado patente la dificultad real de llegar a una solución. Se ha partido de unos modelos no contrastados empíricamente, con unos supuestos muy restrictivos, pero que hacían que los sistemas planteados cumplieran unas propiedades muy deseables, y poco próximas a las que en la realidad cumplirán. Se ha llevado a cabo un ejercicio de simulación, y ha podido concluirse que la consecución de los objetivos va a resultar, en la práctica, difícil de obtener. Esto permite afirmar que si se eliminan la mayoría de los supuestos mantenidos con fines de constriur un modelo más fiel a la realidad, va a hacer casi inviable la consecución en el mundo real de las metas marcadas.

b) Grado de cumplimiento de los objetivos.

- La importancia del tiempo en el análisis económico se ha destacado en el primer capítulo, y en los sucesivos haciendo ver el empleo de modelos dinámicos para representar fenómenos económicos de carácter dinámico.

- En cuanto a la exposición de las Técnicas de Control

Optimo se ha recogido de forma general en qué consistía un problema de control óptimo, pero sólo se ha presentado de forma más detallada el problema de control con estabilización. Quizás hubiera sido conveniente haber incluído una breve relación de los diferentes tipos de problemas económicos que pudieran ser abordados como problemas de control, pero dado el objeto de estudio de este trabajo no se consideró oportuna.

- En el capítulo de aplicaciones prácticas se ha constatado que el problema de control con estabilización es un problema vinculado directamente con ciertos fenómenos económicos, y que la Teoría de Control Optimo ofrece las herramientas necesarias para obtener una solución, y para comparar las distintas propuestas de política económica. Como ya se ha comentado en el anterior apartado de este capítulo, el modelo empleado en el análisis tiene enormes limitaciones, pero ello no ha sido impedimento para constatar las potencialidades que posee.

- El último objetivo se ha visto cumplido en la dedicación de un capítulo a las limitaciones del problema lineal cuadrático en su versión determinista y contínua, sin restricciones.

c) Consideraciones autocríticas.

- Los objetivos se han cumplido en un grado aceptable, pero se trataba de objetivos excesivamente modestos.

- No ha existido un capítulo previo de consideraciones metodológicas para explicar los procesos seguidos para la elaboración de cada capítulo.

- Mientras en algunos procesos deductivos han sido extensamente detallados, otros, en cambio, no han consistido más que en meras afirmaciones sin apoyar analíticamente. Tal es el caso, por ejemplo, del estudio de la controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales con coeficientes variables.

- Las aplicaciones prácticas no han sido muy numerosas, y además se han establecido ciertos supuestos con el único fin de facilitar la obtención de una solución. Esto ha motivado la imposibilidad de obtener conclusiones válidas, y una interpretación económica de los resultados. Ha primado un planteamiento mecanicista, basado en la aplición de las técnicas de control óptimo a distintos modelos, para mostrar el proceso de resolución, y se ha dejado a un lado las implicaciones teóricas que pudieran tener los resultados a nivel económico. Así, no se han obtenido más conclusiones que la de la incomparabilidad de los resultados, la escasa transcendencia de los mismos, o la irrealidad de los modelos con los que se ha trabajado.

d) Proyectos futuros de investigación.

Tras la realización de cualquier trabajo de investigación muchas de las viejas incógnitas todavía permanecen, otras se han resuelto, y nuevos campos de investigación se presentan abiertos para una futura aproximación. En concreto, los proyectos inmediatos de investigación que a lo largo de estas páginas incluso se han mencionado, son :

- Profundización en el estudio de sistemas dinámicos borrosos, y en las técnicas de control óptimo borroso. Establecimiento de un principio del máximo para modelos dinámicos borrosos en tiempo contínuo.

- Especificación y contrastación de un modelo econométrico, o un modelo borroso, que represente al mercado comunitario de productos lácteos; y aplicación de las técnicas de control óptimo oportunas para su solución.

- Proyecto de tesis doctoral: Aplicación de las técnicas de control óptimo para la determinación de las políticas óptimas para fomentar el desarrollo económico.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

AOKI, Masanao (1967). - Optimization of Stochastic Systems. Academic Press, New York.

——————— (1976). - Optimal Control and System Dinamic Economic Analysis . North-Holland / Elsevier.

ATHANS, M. y FALB, P. (1966). - Optimal Control : An introduction to the Theory and Its Applications. McGraw-Hill, New York.

BARNETT, Stephen (1975). - Introduction to Mathematical Control Theory. Oxford Applied Mathematics and computing Science Series, 2, Oxford.

BLATT, John M. (1985). - " Modelling and Optimal Control of random walk process in economics ". New mathematical advances in economic dyanamics , pp. 37-45 . David F. Batlen y Paul F. Lesse, (ed.). Croom Helm, London

BORRELL VIDAL, Máximo (1988). - Teoría del control óptimo. Hispano Europea S.A., Barcelona.

CANON, M.D.; CULLUM, C.D. Jr.; POLAK, E. (1970). - Theory of Optimal Control and Mathematical Programming. McGraw-Hill , New York.

CARAVANI, P. (1986). - "On extending linear quadratic control theory to non-symmetric risky objectives ". Journal of Economic Dynamics and Control 10 , pp. 83-88 . North-Holland.

CHIANG, Alpha C. (1987). - Métodos fundamentales de Economía Matemática. Mcgraw-Hill, Madrid.

CHIARELLA, Carl (1985). - " Analysis of the Effects of Time Lags and Nonlinearities in a Macroeconomic Model ". New mathematical advances in economic dyanamics, pp.131-152. David F.Batlen y Paul F.Lesse,(ed.). Croom Helm, London.

CHOW, Gregory C. (1976). - " Application of optimal control to problems of economic stabilization. Control methods for macroeconomic policy analysis ". American Economic Review, 66(2), pp. 340-345.

________________ (1979). - " Effective Use of Econometric Models in Macroeconomic Policy Formulation". Optimal control for econometric models, pp. 31-39 . Holly, S.; Rüstem,B. y Zarrop,M.(ed.) McMillan Press Lted., London.

EUROPA VERDE (1988).- " Las modificaciones de la organización del mercado de la leche y de los productos lácteos " . Europa Verde, 220 . Oficina de Publicaciones periódicas de las Comunidades Europeas, Bélgica.

FELDBAUM, A.A. (1965). - Optimal Control Systems. Academic Press, New York.

FRIEDMAN, B. (1975). - " Economic Stabilization : Methods in Optimization ". Studies in Mathematical and Managerial Economics , 15 . North-Holland / American Elsevier.

GACETA JURIDICA DE LA CEE (1985). - " Tratado de Roma " . Gaceta Jurídica de la CEE, 2, pp. 30-35. Junio.

HALKIN, H. (1966). - " A maximun principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations ". SIAM Journal on Control, 4, pp. 90-111.

HICKS, J.R. (1950). - Una aportación a la Teoría del Ciclo Económico. Aguilar, Madrid.

———————— (1967). - Capital y Crecimiento. Capítulo 1 . Bosch, Barcelona.

HOLTZMAN, J. M. (1966). - " On the maximun principle for nonlinear discrete time systems ". IEEE Transactions on Automatic Control, 11, pp. 273-274.

JOSEPH,P.D. y TOU,J.T.(1961). - " On linear Control Theory ". AIEE Trans. (Appl.Ind.), 80, Septiembre, pp. 193-196.

KACPRZYK, J. (1980). - On a fuzzy inventory control problem with fuzzy random demand. Congreso EURO IV.

KALMAN, R. E. (1960). - " Contributions to the Theory of Optimal Control ". Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 5, pp. 102-119.

KARP, L. (1985). - " Higher moments in the linear-quadratic-gaussian problem ". Journal of Economic Dynamics and Control, 9, pp. 41-54. North-Holland.

KAUFFMAN, A. (1983). - " Hybrid data and their use in management, control and Operations research ". IEEE CH 1962, pp.309-313.

KAUFFMAN, A. y GIL ALUJA, J. (1986). - Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos a la Gestión de las Empresas. Milladoiro, Santiago de Compostela.

———————————————— (1987). - Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. Hispano Europea, Barcelona

KENDRICK, D. (1979). - " Adaptative Control of Macroeconomic Models with Measurement Error". Optimal control for econometric models, pp. 204-227. Holly, S.; Rüstem, B. y Zarrop, M. (ed.). McMillan Press Lted., London.

KLEINDORFER, Paul R. (1978). - " Stochastic Control Models in Management Science : Theory and Computation ". TIMS. Studies in the Management Science, 9 , pp. 69-88. North-Holland.

KUSHNER, H.J. y SCHWEPPE, F.C.(1964). - " A maximum principle for stochastic control systems ".Journal of Mathematical Analysis and Applications, 8, pp. 287-302.

LIVESEY,D.A.(1979). - " The Role of Feedback in Macroeconomic Policy ". Optimal control for econometric models , pp. 58-73 . Holly, S. ; Rüstem, B. y Zarrop, M. (ed.). McMillan Press Lted., London.

LUENBERGER, P. G. (1972). - " Mathematical programming and control theory " . Perspectives on Optimization . Trends and interplay in A.M. Geoffrimon (ed.), Addison-Wesley Reading, Massachussets.

MEIER, L.(1965). - " Combined optimal control and estimation, in Proceedins " . Circuit and System Theory, 3rd Annual Allerton Conference.

———————— (1966). - " Adaptative control and the combined optimization problem " . Contract NAS , Memo 6 , SRI Project 5578 , pp. 12-59 , February 10 . Standford Res. Institute, California.

MUÑOZ. F. ; DEVESA, J. ; MOCHOLI, M. y GUERRA, J. (1988). - Manual de Algebra Lineal. Ariel. Barcelona

MURATA, Yasuo (1977). - Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems . Academic press, New York.

NEGOITA, C.V. y RALESCU, D.A. (1975). - Applications of fuzzy sets to systems analysis. Editura Technica. Biirkauser-Verlag.

NEME, Jacques ; NEME, Colette (1979). - Políticas económicas comparadas. Capítulo I y II . Editorial Vicens Vives, Barcelona.

NORMAN, Alfred (1984). - " Information structure and stochastic control performance " . Journal of Economic Dynamics And Control, 8, pp. 137-149. North-Holand.

PEDRYCZ, W. (1981). - " Concept of fuzzy reliability of complex systems". Revue Busefal, 6, pp.45-53. Primavera. L.S.I. Univ. Paul Sabatier, Toulouse

PEKELMAN, D. ; RAUSSER, G. (1978). - " Adaptative Control : Survey of Methods and Applications ". TIMS. Studies in the Management Science, 9, pp. 89-120. North-Holland.

PHILLIPS, A.W. (1954). - " Stabilization policies in a closed economy ". The Economic Journal, 64, pp. 290-323.

———————— (1957). - " Stabilization policies and the time form of lagged responses " . The Economic Journal , 67 , pp. 265-277.

PITCHFORD, J.; TURNOVSKI, S.(1977). - Applications of Control Theory to Economic Analysis. North-Holland, Amsterdam.

PONTRYAGIN, I.S. y otros (1962). - The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience, New York.

RÜSTEM,B.;WESTCOTT,J.;ZARROP,M.;HOLLY,S. y BECKER,R. (1979).- " Iterative Respecification of the Quadratic Objetive Function " . Optimal control for econometric models , pp. 106-133. Holly, S.; Rüstem, B. y Zarrop, M. (ed.). McMillan Press Lted., London.

SAMUELSON, Paul (1939). - " Analysis and the Principles of Acceleration ". Review of Economic Statistics, 21.

SEIERSTAD, A. y SYDSAETER, K. (1987).- " Optimal Control Theory with Economic Applications " . North-Holland.

SETHI, Suresh (1978). - " A survey of Management Science Applications of the Deterministic Maximun Principle ". TIMS. Studies in the Management Science, 9 , pp. 33-67. North-Holland.

SETHI, Suresh ; THOMPSON , Gerald (1981). - Optimal Control Theory. Applications to Management Science.International Series in Management Science / Opertations Research. Martinus Nijhoff Publishing.

SIMON, H.A. (1956). - " Dynamic Programming under Uncertanty with a Quadratic Criterion Function ". Econometrica, 24, pp. 74 - 81.

STEVENSON, A. ; MUSCATELLI, V. y GREGORY, M. (1988).- Macroeconomic Theory And Stabilization Policy . Phillip Allan/Barnes and Noble Books.

SWORDER, D. (1966). - Optimal Adaptative Control Systems. Academic Press, New York.

TAKAYAMA, Akira (1985). - Mathematical Economics . Segunda edición. Cambridge University Press. Cambridge (USA).

TAMAMES, Ramón (1970). - Sistemas de apoyo a la agricultura : España y los países de la C. E. E. . Instituto de Desarrollo Económico, Madrid.

TAPIERO, Charles S. (1978). - " Time, Dynamics and Process of Management Modeling " . TIMS . Studies in the Management Science, 9, pp. 7-31. North-Holland.

THEIL, H. (1957). - " A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Planning ". Econometrica, 25, pp. 346-349.

TU, P.N.V. , (1984). - Introductory optimization dynamics . Optimal Control with economics and management science applications . Springer-Verlag.

TURNOVSKY, S.J. (1977). - Macroeconomic Analysis and Stabilisation Policy. Cambridge University Press, Cambridge.

WESTCOTT,J.;ZARROP,M.;HOLLY,S.;RÜSTEM,B. y BECKER,R. (1979).- " A Control Theory Framework for Policy Analysis " . Optimal control for econometric models, pp. 3-28. Holly, S. ; Rüstem,B. y Zarrop, M. (ed.). McMillan Press Lted., London.

WILAYES, D. y MALVACHE, N. (1982). - " Some fuzzy tools for systems modelizations and automatic control " . IFAC Sympos.On Theory & Appl. of Digital Control Nueva Delhi. Publ. M.L. Malhora.

ZADETH, Lofti (1965). - " Fuzzy Sets " . Information and Control, 8 , pp. 338-353

ZIMMERMANN, H.J. (1983). - " Using fuzzy sets in operations research ". European Journal of Operations Research , v. 13, n° 3, pp. 201-216.