Òptica I

Problemes resolts

Carlos J Zapata i Rodríguez

Part I

Butlletins de Problemes
i Treballs Tutelats

PROBLEMES D'ÒPTICA I

Butlletí 1

P1.1. Un raig de llum monocromàtica penetra en una esfera homogènia d'índex n submergida en aire, amb angle d'incidència i, i pateix p reflexions parcials en el seu interior abans d'eixir-ne.

a) Calculeu la desviació del raig emergent en relació amb el raig incident.

b) Per a quin angle d'incidència, i_m, aquesta desviació passa per un extrem relatiu?

c) Calculeu i_m i la desviació corresponent per a $n = 4/3$ i $p = 1$ i 2. Aquest resultat és la base per a la justificació geomètrica de la formació de l'arc iris.

P1.2. Considereu un espill de cara posterior, és a dir, una superfície reflectora sobre la qual es diposita una làmina transparent de cares planes i paral·leles. Si la grossària de la làmina és t i el material transparent té un índex de refracció n, determineu el desplaçament axial patit per la imatge a causa de la presència d'aquesta làmina.

P1.3. Demostreu que per a un medi estratificat pla en què $n = n(y)$, les trajectòries dels raigs lluminosos satisfan l'equació diferencial $d^2y/dx^2 = (2C^2)^{-1}\, dn^2/dy$, on C és la constant de la relació de Bouguer ($C = n \sin \varepsilon$). És possible que un raig descriga una trajectòria rectilínia en un medi com aquest?

P1.4. Considereu un medi estratificat de grossària $2h$ (regió II), caracteritzat per un índex de refracció donat per

$$n^2(|y| \le h) = n_0^2\left[1 - (y/L)^2\right]$$

i rodejat per dos medis homogenis (regions I i III) d'índex $n_1 = n_3 = n(\pm h)$. En l'origen de coordenades se situa una font puntual que emet raigs en tots els angles i possibles cap a l'exterior del medi.

a) Calculeu la trajectòria dels raigs.

b) Quina condició ha de complir la coordenada azimutal i perquè un raig es mantinga confinat en la regió II?

c) Determineu la zona a través de la qual els raigs procedents de la font travessen la superfície de separació entre les regions I i II.

d) Particularitzeu el resultat de l'apartat *a* per al cas que l'angle i siga petit (aproximació paraxial).

P1.5. Considereu un medi isòtrop caracteritzat per un índex de refracció amb simetria radial de la forma $n(r) = n_0 \big/ \left[1 + (r/a)^2\right]$. Aquest instrument òptic es denomina ull de peix de Maxwell. Determineu la trajectòria dels raigs que es propaguen en aquest medi i demostreu que formen circumferències coplanàries amb l'origen de coordenades $r = 0$.

P1.6. Considereu un medi isòtrop caracteritzat òpticament per un índex de la forma $n(y) = n_0\sqrt{1+(2y/L)}$. Determineu el temps que empra un raig lluminós a anar de $A(0, 0)$ a $C(L, 2L)$ en els següents casos:

a) Si va primer de A a $B(L, L)$ i després de B a C, ambdós recorreguts en línia recta.

b) Si va de A a C en línia recta.

c) Si realitza el recorregut al llarg de la corba continguda en el pla $z = 0$ (per a $\varepsilon_0 = -\pi/4$),

$$-\frac{x}{\sin\varepsilon_0} + L\cos\varepsilon_0 - L\sqrt{\cos^2\varepsilon_0 + 2\frac{y}{L}} = 0$$

P1.7. Determineu l'equació de la superfície reflectora que focalitza estigmàticament un feix de raigs paral·lels en un punt situat a una distància d del vèrtex de la superfície. Resoleu el problema aplicant:

a) la llei de la reflexió,

b) la condició d'estigmatisme (constància del camí òptic recorregut).

P1.8. Determineu analíticament i gràficament la posició i naturalesa de les imatges proporcionades per una lent prima submergida en aire, tant per a objectes reals com virtuals. Considereu tant el cas d'una lent convergent com el d'una lent divergent.

P1.9. Donada una lent prima de radis de curvatura r_1 i r_2 i índex n, determineu la potència φ' d'aquesta quan es troba submergida entre dues substàncies d'índex n_1 i n_2. Considereu ara una lent prima convergent, situada en aire, que té una distància focal de 20 cm i índex $n = 3/2$. Quina és la seua distància focal quan se submergeix en aigua, l'índex de refracció de la qual és 4/3? I quan se submergeix en bisulfur de carboni (amb índex de refracció 8/5). Analitzeu també el cas en què se submergisca en un medi d'índex de refracció 1.5.

P1.10. Calculeu la distància HH' entre els plans principals d'una lent esfèrica en aire. A continuació, determineu les condicions que la lent ha de complir per què:

a) HH' = e, on e és la grossària de la lent.

b) HH' = 0.

En ambdós casos, determineu la potència de la lent resultant i feu un esquema del sistema on assenyaleu la situació dels plans principals.

P1.11. Trobeu l'expressió del camp associat a una ona cilíndrica i a una ona esfèrica com a solucions de l'equació d'ones.

PROBLEMES D'OPTICA I

Butlletí 2

P2.1. Calculeu la matriu de Jones associada a una làmina retardadora, amb les seues línies neutres centrades, que introdueix un desfasament δ en la component Y. Resoleu el mateix cas quan es gira l'element anterior un angle θ.

Se situa la làmina retardadora anterior entre dos polaritzadors lineals encreuats, de manera que les línies neutres de la làmina formen un angle θ amb els eixos de transmissió d'ambdós polaritzadors. Calculeu la intensitat emergent del dispositiu si s'il·lumina normalment amb un feix paral·lel de llum natural d'intensitat I_0. ¿Sota quines condicions la intensitat anterior és màxima?

P2.2. Es disposa d'un sistema format per l'acoblament de dues làmines de mitja ona amb els seus eixos lents formant entre si un angle β.

a) Calculeu la matriu de Jones que caracteritza aquest dispositiu.

b) Se situa ara el dispositiu anterior entre dos polaritzadors lineals amb el seus eixos de transmissió perpendiculars entre si. Calculeu la intensitat emergent d'aquest dispositiu quan s'il·lumina normalment amb un feix col·limat de llum natural d'intensitat I_0.

P2.3. Siga un dispositiu òptic que es pretén caracteritzar. La seua acció sobre qualsevol llum linealment polaritzada és únicament girar el seu pla de polarització un angle γ, sense cap altre canvi en el seu estat de polarització o en la seua intensitat. Aquest fenomen es denomina *activitat òptica* o *poder rotatori*. A partir d'aquest fet,

a) Calculeu la matriu de Jones del dispositiu.

b) Obteniu els valors i vectors propis d'esta matriu, i interpreteu-los en funció de llums polaritzades elementals.

P2.4. Hi ha substàncies que absorbeixen de forma diferent la llum polaritzada circularment dextrogira, R, o levogira, L, (dicroisme circular). Calculeu la matriu de Jones associada a una substància d'este tipus, la transmitància en amplitud del qual és p_R i p_L, per a llum R i L, respectivament.

P2.5. Considereu una ona linealment polaritzada en una atmosfera d'electrons la densitat de la qual és 10^{12} electrons/m^3. En la direcció de propagació s'aplica un camp magnètic d'intensitat B_o = 0.5 10^{-4} weber/m^2. Obteniu una expressió que represente el canvi d'estat de polarització per longitud d'ona en la direcció de propagació.

PROBLEMES D'OPTICA I

Butlletí 3

P3.1. Demostreu que existeix una relació no local entre el vector desplaçament $\vec{D}$ i el camp elèctric $\vec{E}$,

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\vec{E}(t-\tau)d\tau \ ,$$

on

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega$$

és la transformada de Fourier de la susceptibilitat elèctrica χ característica del medi. A més, el principi de causalitat requereix que $\vec{D}(t)$ en un determinat instant t depenga del camp $\vec{E}(t)$ en temps anteriors, i per tant $G(t) = 0$ si $t < 0$. Demostreu açò utilitzant el model de Lorentz per a $\chi(\omega)$, on cal suposar que $\gamma<\omega_0$. A més, comproveu que el model de Lorentz té associada la funció $G(t) = \sin(\overline{\omega}_0 t)\exp(-\gamma t)\omega_p^2 / \overline{\omega}_0$ per a valors positius de t, on $\overline{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

P3.2. Considereu el model d'un àtom en el qual l'electró es troba lligat per mitjà d'un potencial d'oscil·lador harmònic de tipus anisòtrop, i que té associades freqüències pròpies d'oscil·lació , ω_x, ω_y i ω_z diferents en las direccions *X*, *Y* i *Z*, respectivament. Suposeu ara que una ona electromagnètica plana de freqüència ω es propaga en el si d'un material format per aquest tipus d'àtoms. Amb les hipòtesis de la teoria clàssica de l'índex de refracció,

a) Demostreu que el vector desplaçament elèctric $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ es pot escriure com $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\vec{E}$, on $\varepsilon(\omega)$ és una matriu diagonal 3x3. A més, obteniu una expressió dels elements d'esta.

b) Considereu ara que l'ona incident es propaga en direcció de l'eix *Z*. Demostreu que els electrons de cada àtom no vibren en la direcció del camp incident i que el pla de vibració de la polarització elèctrica $\vec{P}$ forma un angle θ amb l'eix *X* que compleix:

$$\tan\theta = \frac{\omega_x^2 - \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2}\tan\theta_E \ ,$$

on θ_E és l'angle que forma el camp elèctric amb l'eix *X*.

P3.3. Considereu un medi dielèctric, homogeni i isòtrop, sotmés a l'acció d'un camp magnètic $\vec{B}$ uniforme i estacionari en la direcció de l'eix *Z*, i en el qual es propaga una ona monocromàtica de freqüència ω. Fent ús del model de Lorentz de l'oscil·lador electrònic de freqüència pròpia ω_o i negligint, per simplificar, el terme d'amortiment,

a) Trobeu l'equació de moviment de l'electró.

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se com $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, on la susceptibilitat elèctrica complexa χ és una matriu 3x3 de la forma:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} .$$

Obteniu una expressió per als coeficients χ_{11}, χ_{12} i χ_{33}.

c) Considereu ara que l'ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l'eix *Z*. A partir de l'equació d'ones inhomogènia, demostreu que en aquest cas l'ona plana està necessàriament polaritzada circularment. Obteniu l'índex de refracció del medi per al cas en què la polarització de l'ona siga dextrogira o levogira.

PROBLEMES D'OPTICA I

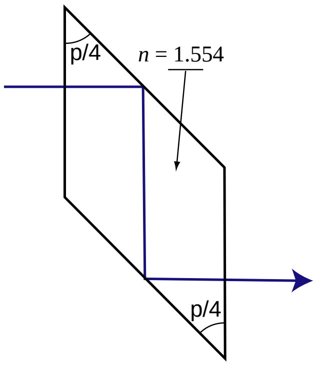
Butlletí 4

P4.1. Comproveu que els angles azimutals de les components transmesa α_T i reflectida α_R satisfan les equacions:

$$\tan\alpha_T = \cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)\tan\alpha_I \qquad \tan\alpha_R = -\frac{\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\cos(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}\tan\alpha_I$$

sent ε_I i ε_T els angles d'incidència i refracció i α_I l'angle azimutal de la radiació incident. Demostreu que en la reflexió el camp elèctric s'allunya del pla d'incidència i que en la refracció s'hi acosta.

P4.2. Un feix pla de llum monocromàtica linealment polaritzada és desviat per un romboedre de reflexió total d'índex *n* = 1.554, com s'indica en la figura. Descriviu l'efecte del dispositiu sobre cada una de les components del camp. Obteniu la matriu de Jones que caracteritza el dispositiu. Finalment, si el pla de vibració de la llum incident forma un angle de 45º amb el pla d'incidència, descriviu amb detall l'estat de polarització de la radiació que emergeix del romboedre.



P4.3. Un raig de llum natural cuasimonocromàtica incideix, amb angle ε_1, sobre una esfera dielèctrica homogènia d'índex de refracció *n* submergida en aire, i pateix una única reflexió parcial en el seu interior abans d'emergir d'aquesta. Obteniu una expressió per al grau de polarització *V* del raig emergent en funció dels angles d'incidència ε_1 i refracció ε'_1. Finalment, calculeu l'angle d'incidència per al qual el raig de llum emergent està totalment polaritzat en el cas d'una esfera d'aigua (*n* = 4/3). Raoneu la resposta.

P4.4. Representeu gràficament la dependència de la reflectància i el desfasament amb l'angle d'incidència sobre una superfície plana en el cas d'una ona monocromàtica de longitud d'ona λ = 500nm que es propaga en el espai lliure i incideix sobre plata (*n* = 0.05 – *i* 2.87).

P4.5. Considereu un camp elèctric de la forma

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{ikz-i\omega t} + \vec{B}e^{-ikz-i\omega t}$$

a) Deriveu l'expressió del camp magnètic H.

b) Considerant que el medi es transparent (*k* és real), mostreu que la potència transmesa al llarg de l'eix *OZ* es pot escriure com

$$S_z = \frac{k}{2\omega\mu}\left[\left|\vec{A}\right|^2 - \left|\vec{B}\right|^2\right]$$

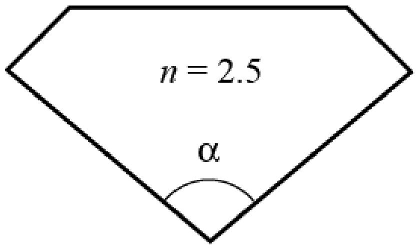
c) Deriveu el flux de potència al llarg de l'eix *OZ* en un medi dissipatiu amb una *k* complexa. Mostreu que la potència no és la suma algebraica de la potència transportada per les ones individuals.

P4.6. Un feix de llum circularment polaritzada incideix, des de l'aire, amb un angle de 45º sobre una làmina de vidre d'índex de refracció 1.5. Descriviu l'estat de polarització del feix reflectit i refractat. Repetiu el procés per a un angle d'incidència de 65º.

TREBALLS TUTELATS D'ÒPTICA I

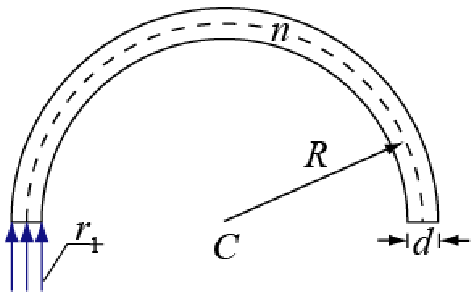
Butlletí 1

TT1.1. Un tub cilíndric té un diàmetre interior de 5 cm i una longitud d'un metre. La seua superfície interior és reflectora en els primers 89 cm i absorbent en la resta. En l'extremitat absorbent del tub es col·loca un diafragma proveït d'un orifici molt menut, centrat respecte a l'eix del cilindre. En l'altre extrem es col·loca un altre diafragma idèntic darrere del qual se situa una font lluminosa. Determineu la inclinació respecte a l'eix amb què emergeixen del tub els raigs de llum. Descriviu l'aspecte del camp observat quan es mira a través del tub.



TT1.2. Considereu un brillant amb la talla de la figura. Suposant una il·luminació paral·lela i normal a la cara superior, calculeu els valors de α que permeten que la llum, després de patir dues reflexions internes, isca del brillant per aquesta mateixa cara (per a un primer càlcul no s'ha de considerar la influència del rebaixat del cantell).

TT1.3. Considereu una guia corbada de secció rectangular com la de la figura. Tenint en compte que, segons una descripció purament geomètrica, la llum es propaga en l'interior de una guia per reflexió total.



a) Demostreu que és suficient que el raig 1 complisca la condició de propagació perquè tot el feix es propague al llarg de la guia.

b) Obteniu el radi mínim que pot tindre aquesta guia per a evitar que la llum deixe de propagar-s'hi a través.

TT1.4. Des d'un punt de la superfície terrestre, O, on l'índex de refracció de l'aire és n_0, es mesura l'angle zenital d'un estel, es a dir, l'angle que forma la direcció en què es veu l'estel amb la vertical del punt d'observació. A causa de la variació de l'índex de l'aire amb l'altura, hi ha una lleu diferència $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_O$ entre l'ángle zenital real, ε, i l'observat, ε_0. Determineu l'equació de les trajectòries que passen per O si l'índex de refracció de l'atmosfera ve donat per l'equació $n^2(z) = n_O^2 - bz$, on b és una constant. A més, obtingueu l'expresió de Δ en funció de ε_0.

TT1.5. Un raig de llum incideix sobre un medi inhomogeni estratificat en forma de làmina de cares paral·leles de grossor d, l'índex de refracció del qual varia d'acord amb l'expresió

$$n^2(0 \le y \le d) = \frac{3}{2}\left(1 + 2\frac{y}{L}\right)$$

on L és una constant amb unitats de longitud. Se suposa que la làmina es troba entre aire i un medi d'índex de refracció n_0. El raig incident es mou en l'aire $(y < 0)$ i, després de travessar la làmina, n'ix amb un determinat angle θ_r.

a) Quines condicions han de satisfer n_0 i d perquè el raig emergent siga paral·lel a l'incident, $\theta_i = \theta_r$?

b) En el cas que es satisfacen les condicions de l'apartat anterior, calculeu el desplaçament δ produït sobre el raig incident a causa de la presència de la làmina suposant que l'angle d'incidència $\theta_i = \pi/3$.

TT1.6. Un sistema de comunicacions làser està format per un emissor i un receptor, ambdós situats en torres d'una altura $y_O = 10m$ sobre el nivell de terra i separades una distancia $d = 20km$. L'aire proper a la superfície té un índex de refracció que varia en funció de l'altura com $n^2(y) = n_1^2(1-ky)$ per a $y \leq 400m$ i $n(y > 400m) = 1$, on $n_1 = 1.002$ i $k = 9.9710^{-6}m^{-1}$.

a) Trobeu els possibles angles d'eixida del feix làser respecte a l'horitzontal perquè aquest incidisca sobre el receptor.

b) Per a les solucions de l'apartat *a*, calculeu l'altura màxima sobre el nivell del sòl que aconsegueix el feix làser.

TT1.7. Considereu la lent de Luneburg, que consisteix en una bola de radi *a* submergida en un medi d'índex de refracció n_0. Aquesta bola està construïda amb un material isòtrop estratificat de simetria radial, l'índex de refracció del qual té la forma $n(r) = n_0\sqrt{2-(r/a)^2}$ per a $r \leq a$. Determineu la trajectòria dels raigs que es propaguen dins la lent de Luneburg, i demostreu que formen el·lipses coplanàries amb l'origen de coordenades $r = 0$. A més, comproveu que un feix de raigs paral·lels que incideixen sobre la lent es focalitzen en un únic punt de la superfície de la lent.

TT1.8. La fórmula de Jacobi-Anger

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}$$

representa el desenvolupament d'una ona plana entorn d'una superposició d'ones cilíndriques.

a) Utilitzant la fórmula de Jacobi-Anger, demostreu que la funció de Bessel de primera classe es pot expressar com a

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta + n\theta)} d\theta \qquad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta) d\theta$$

b) Utilitzeu el resultat anterior per a justificar per què la funció de Bessel de primera classe representa una ona estacionària.

TT1.9. Demostreu que l'equació diferencial

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\} + (\beta r)^2 - n(n+1) = 0$$

resultat de resoldre l'equació d'ones utilitzant separació de variables en coordenades esfèriques, es pot convertir en l'equació diferencial ordinària de Bessel mitjançant la transformació

$$f(r) = \frac{Z(\beta r)}{(\beta r)^{1/2}}$$

TT1.10. Utilitzant la solució de l'equació d'ones en coordenades esfèriques, demostreu que el camp d'una ona esfèrica divergent s'atenua en allunyar-se de l'origen *O* amb una dependència que és inversament proporcional a la distància recorreguda des del punt *O*.

TT1.11. Considereu el camp electromagnètic linealment polaritzat

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

on $\vec{E}_0 = E_{0y}\hat{y}$, corresponent a una ona plana que es propaga en un dielèctric transparent. Suposeu també que $\mathrm{Im}(k_x)=0$

a) Avalueu el vector de Poynting.

b) Considereu la superposició de dues ones planes linealment polaritzades. Avalueu de nou el vector de Poynting.

c) Trobeu la component *z* del vector de Poynting considerant que $E_{1y} = E_{2y}$.

d) Avalueu la divergència del vector de Poynting obtingut en l'apartat *b*.

TREBALLS TUTELTAS D'OPTICA I

Butlletí 2

TT2.1. El camp magnètic d'una ona plana uniforme que es propaga en el buit és

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{\eta_0}\left[(1+i)\hat{x} + i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{z}\right]e^{-iky}, \quad \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.6\Omega$$

on E_0 es una contant real i η_0 la impedància intrínseca del buit.

a) Determineu la direcció i sentit de propagació de l'ona. Si la freqüència és ν=500 THz. Quant valen la longitud d'ona i el nombre d'ona?

b) Escriviu l'expressió del camp elèctric.

c) Determineu el tipus de polarització i el sentit de gir dels camps.

d) Escriviu l'expressió del vector de Poynting.

TT2.2. Determineu la matriu de Jones de *i*) una làmina de quart d'ona d'eix ràpid vertical, i *ii*) una làmina de quart d'ona d'eix ràpid horitzontal. A continuació, representeu el vector camp elèctric d'un estat lineal incident sobre una làmina de quart d'ona que forma un angle de 30º amb l'eix ràpid d'esta. Descriviu amb detall l'estat de polarització de l'ona emergent.

TT2.3. Considereu un feix de llum polaritzada el·lípticament d'intensitat I_0 que incideix normalment sobre un polaritzador lineal giratori. Calculeu com varia la intensitat I emergent del sistema, en funció de l'angle que forma el polaritzador amb l'eix X. Passa aquesta intensitat per un valor màxim o mínim?

TT2.4. Siga un dispositiu òptic format per una làmina de quart d'ona, els eixos ràpid i lent del qual coincideixen, respectivament, amb els eixos *OX* i *OY* del sistema d'eixos cartesians de referència, seguida d'un polaritzador lineal l'eix de transmissió del qual forma un angle ε amb l'eix *OX*. Determineu els valors i vectors propis de la configuració i especifiqueu detalladament els tipus de llum que representen. Raoneu per què aquestes llums són pròpies del sistema en qüestió.

En una segona part, resoleu les mateixes qüestions que en el paràgraf anterior per a una configuració semblant en què el polaritzador lineal haja sigut girat 90º respecte de la seua posició original. Reconeixeu que cada un dels nous vectors propis és ortogonal a un dels de la primera situació.

TT2.5. Analitzeu l'actuació del dispositiu descrit en l'apartat anterior sobre *i*) llum el·líptica centrada, d' el·lipticitat ε, i *ii*) sobre el seu estat ortogonal.

Repetiu l'anàlisi quan s'afegeix a continuació una làmina retardadora idèntica a la primera però girada respecte a aquesta 90º. Compareu ambdós resultats.

Finalment, particularitzeu els resultats anteriors al cas en què $\varepsilon = \pi/4$.

TT2.6. Es disposa d'una làmina de mitja ona amb les seues línies neutres girades un angle α respecte als eixos cartesians de referència.

a) Avalueu l'efecte que produeix esta làmina sobre la llum polaritzada circularment, tant dextrogira com levogira. Interpreteu el resultat en termes de llums polaritzades elementals.

b) La làmina anterior se situa entre dues làmines de quart d'ona. L'eix lent de cada una d'aquestes làmines forma un angle de 45º amb l'eix X. Analitzeu l'efecte que exerceix aquest dispositiu sobre una llum linealment polaritzada a 0º i a 90º.

c) Comproveu que el dispositiu de l'apartat *b* es comporta com un retardador amb les seues línies neutres centrades. Trobeu el valor del desfasament que introdueix.

d) A quin element equivaldria el dispositiu de l'apartat *b* si les dues làmines de quart d'ona tingueren els seus eixos lents coincidents amb l'eix X?

TT2.7. Considereu el filtre de polarització dissenyat per Lyot i Öhman, que consisteix en un conjunt de làmines retardadores compreses entre polaritzadors lineals amb els seus eixos de transmissió paral·lels. El retard de les làmines segueix una progressió geomètrica, és a dir, δ, 2δ, 4δ, 8δ, … Totes les làmines tenen les seues línies neutres orientades a 45º respecte dels eixos de transmissió dels polaritzadors.

a) Trobeu la matriu de Jones d'un sistema compost per N làmines retardadores (i $N + 1$ polaritzadors).

b) Demostreu que si incideix llum natural amb una intensitat I_0, la intensitat emergent d'aquest sistema es pot escriure com:

$$I_{out} = \frac{\sin^2\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^{2N+1}\sin^2\left(\delta/2\right)} I_0$$

TREBALLS TUTELATS D'OPTICA I

Butlletí 3

TT3.1. La conductivitat d'un material es descriu mitjançant la llei d'Ohm, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Utilitzant l'equació $\vec{J} = \rho\dot{\vec{r}}$, on $\rho = -Ne$ és la densitat de càrregues i $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$,

a) Identifiqueu la conductivitat $\sigma(\omega)$ del medi.

b) Demostreu que $\sigma/(-i\omega\varepsilon_0)$ és essencialment la susceptibilitat χ del medi.

c) Com que en un metall les càrregues de conducció no estan lligades, podem considerar $\omega_0 = 0$, que és l'anomenat model de Drude. Trobeu la conductivitat nominal (és a dir, en el límit $\omega \to 0$) i la freqüència de plasma per al coure, el qual té una densitat de $8.9\times10^6\ \mathrm{gr/m^3}$ i un pes atòmic de $63.54\ \mathrm{gr/mol}$. A més considereu que γ = 2.05×1013 rad/s. En aquest cas, suposeu un electró de conducció per àtom i recordeu que el nombre d'Avogadro és $6\times10^{23}\ \mathrm{àtom/mol}$.

TT3.2. Demostreu que l'índex de refracció d'una mescla de gasos val:

$$n(\omega) = \sum_i f_i n_i(\omega) \ ,$$

on $n_i(\omega)$ és l'índex de refracció de cada un dels gasos i f_i la seua concentració fraccional molecular (nombre de molècules del gas *i* dividit pel nombre total de molècules).

Com a aplicació, trobeu l'índex de refracció de l'aire per a $\lambda = 589\ nm$ a partir dels valors $n_{O_2} = 1.000272$ i $n_{N_2} = 1.000297$ corresponents respectivament a l'oxigen i al nitrogen. (Considereu l'aire com una mescla d'aquests dos gasos amb proporcions respectives del 25% i el 75%).

TT3.3. La susceptibilitat d'un medi és definida a través de $\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{local} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$, on $\vec{E}$ és el camp elèctric macroscòpic. El camp local, és a dir, el camp elèctric actuant sobre l'àtom, està donat per $\vec{E}_{local} = \vec{E} + (3\varepsilon_0)^{-1}\vec{P}$. Demostreu que

$$\frac{3\chi}{\chi+3} = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} \ ,$$

segons la teoria de Lorentz, que s'anomena relació de Clausius-Mossotti. A continuació, obteniu la relació de Lorentz-Lorentz mitjançant l'equació $\chi = n^2 - 1$.

TT3.4. Comproveu que la fórmula de Lorentz-Lorenz satisfà, amb les aproximacions oportunes que cal establir, la fórmula de Cauchy per a l'índex de refracció de gasos:

$$n(\lambda) - 1 = A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \ ,$$

on *A* i *B* són constants a determinar.

TT3.5. A partir de l'expressió donada pel model clàssic per a la relació de dispersió, trobeu la fórmula semiempírica de Sellmeier:

$$n^2(\lambda) = A + \sum_i \frac{C_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \ ,$$

vàlida per a medis transparents en les regions espectrals allunyades de les longituds d'ona de ressonància λ_i.

Com a aplicació, considereu en la regió visible el cas del CaF_2, del qual es coneix l'existència de dues longituds d'ona de ressonància $\lambda_1 = 94.2nm$ i $\lambda_2 = 35000nm$. La primera d'aquestes està associada a una transició electrònica, mentre que la segona correspon a una transició entre estats de vibració d'ions F^- en la molècula. Trobeu el valor de les constants de la fórmula de Sellmeier en aquest cas. (Ajuda: $m_F = 3470m_e$, on m_e és la massa de l'electró).

TT3.6. Considereu el següent índex de refracció apropiat per a un medi amb freqüència de ressonància ω_0 i constant de relaxació γ [Phys. Rev. A **1** (1970) 305]:

$$n(\omega) = n_\infty - \frac{\omega_0 \omega_p}{\omega(\omega - \omega_0 + i\gamma)} \ , \text{ on } \left|\omega_p / \gamma\right| \langle\langle n_\infty$$

En l'equació anterior, n_∞ és l'índex de refracció lluny de la freqüència de ressonància i $\omega_p>0$ per a un medi dissipatiu.

a) Avalueu la velocitat de fase i la velocitat de grup d'un pols l'ample espectral $1/\tau$ del qual és molt menor que la constant de relaxació, és a dir, $\gamma\tau >> 1$.

b) Particularitzeu estes expressions quan la freqüència central del pols coincideix amb la freqüència de ressonància ω_0 del medi, i trobeu els valors de ω_p per als quals la velocitat de grup pot ser superlumínica i inclús negativa.

c) Finalment, trobeu la condició que ha de complir el paràmetre ω_p perquè la distància de penetració $d = [k_0 \operatorname{Im}(n)]^{-1}$ siga molt major que la longitud d'ona λ_0 en el buit.

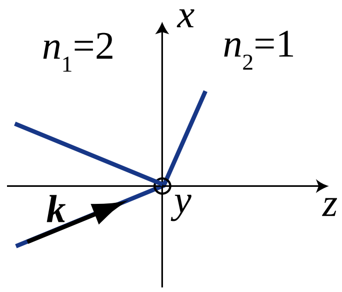
TT3.7. És ben conegut que en un dielèctric perfecte, el camp elèctric i magnètic oscil·len en fase. Considereu ara una ona plana monocromàtica que es propaga en un medi metàl·lic amb una conductivitat $\sigma \neq 0$. Trobeu el desfasament del vector camp magnètic respecte al vector camp elèctric, i demostreu que si $\sigma/\varepsilon\omega >> 1$ es compleix que $|\varphi| = 45^o$.

TREBALLS TUTELATS D'OPTICA I

Butlletí 4

TT4.1. Una ona plana homogènia de freqüència ν=500THz té un camp elèctric que s'escriu de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0\left[2(2\hat{x}-\hat{z})+i\frac{5\sqrt{5}}{2}\hat{y}\right]e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$



Considereu que aquesta ona es propaga en un medi d'índex de refracció n_1=2 i incideix obliquament sobre una superfície que separa este medi de l'espai buit (n_2=1) tal com es mostra en la figura adjunta.

a) Obteniu el valor dels angles d'incidència i de refracció. A més, escriviu les expressions dels vectors d'ona de les ones incident, reflectida, i transmesa.

b) Identifiqueu el tipus de polarització de l'ona incident.

c) Obteniu el camp elèctric de l'ona reflectida i transmesa. A més, identifiqueu el tipus de polarització d'estes ones.

TT4.2. Comproveu que l'angle límit és sempre major que l'angle de Brewster. Trobeu aquests angles per a dos medis d'índex de refracció 1.33 i 1.75.

TT4.3. Un raig de llum incideix sobre una superfície de separació aire-vidre de manera que l'angle d'incidència *i* té un valor doble que l'angle de refracció *r*. En estes condicions el factor de reflexió $R_\perp$ val 0.411.

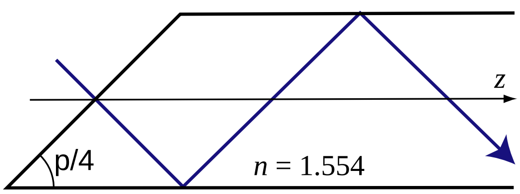
a) Determineu l'índex de refracció *n* del vidre respecte l'aire i els angles *i* i *r*.

b) Si en compte d'estar en contacte amb l'aire, el dit vidre es troba en contacte amb l'aigua (índex de refracció n_a= 1.33 respecte a l'aire) i el raig de llum incideix amb el mateix angle *i* sobre la superfície de separació d'ambdós medis, determineu el nou angle de refracció *r´* i els factors de reflexió $R_{||}$ i $R_\perp$ en els dos casos següents:

- El raig incideix des de l'aigua amb l'angle d'incidència *i*.
- El raig incideix des del vidre també amb l'angle d'incidència *i*.

c) Demostreu que per a la superfície de separació aigua-vidre no pot obtenir-se cap angle d'incidència que valga el doble que l'angle de refracció.

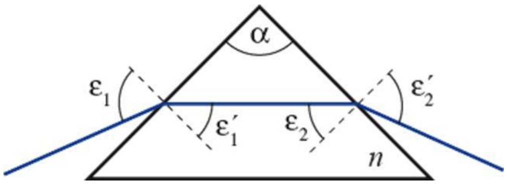
TT4.4. Es disposa d'una làmina planoparal·lela de grossària *h* i índex *n*=1.554, submergida en aire, amb una de les seues cares tallada a 45º. Un raig de llum circularment polaritzat levogir incideix normalment sobre aquesta cara d'entrada i es propaga en el seu interior, tal com mostra la figura. Determineu l'estat de polarització del raig en



l'interior de la làmina en funció de la coordenada *z*.

TT4.5. Quina ha de ser l'altura angular del sol sobre l'horitzó perquè la llum reflectida per una superfície d'aigua (n'=4/3) estiga totalment polaritzada? Quan el sol aconsegueix esta altura, se submergeix un bloc de vidre, d'índex n=1.6, la superfície plana del qual forma un angle θ amb l'horitzontal. Determineu θ perquè el feix reflectit pel bloc estiga també totalment polaritzat. ¿Pot emergir de l'aigua este feix?

TT4.6. Siga un prisma òptic d'índex de refracció n i angle de refringència α que es troba immers en aire. A més, un feix de llum natural incideix sobre la primera cara del prisma amb un angle ε_1, el qual coincideix amb l'angle de Brewster, tal com indica la figura adjunta.



a) Deduïu la condició que han de complir n i α perquè el raig que es refracta en la primera cara i es propaga dins del prisma, incidisca sobre la segona cara també amb un angle de Brewster.

b) Per a un prisma que compleix la hipòtesi anterior, calculeu el grau de polarització de la llum emergent.

c) Com a aplicació numèrica, particularitzeu els resultats anteriors per a un prisma d'índex de refracció $n=\sqrt{3}$.

Part II

Diapositives amb solucions

OPTICA I

Nombre crèdits de **problemes**: 1.5 ECTS

Nombre crèdits de **treballs tutelats**: 1.5 ECTS

Professor problemes: Carlos J. Zapata Rodríguez

Departament d'Òptica. Despatx 4307

Tutories: dijous (10:00 a 13:00)

E-mail de contacte: carlos.zapata@uv.es

OPTICA I

Classes de problemes / treballs tutelats (1 hora per setmana)

- Aquestes sessions estan centrades en el **treball de l’estudiant** i en la seua participació activa de forma individual o grupal en la resolució de dubtes sorgits de les classes teoricopràctiques i serviran també per al reforç de conceptes de més dificultat.

- Aquestes classes estan destinades a la **resolució de problemes** perquè s’exerciten les eines presentades en les classes teoricopràctiques.

OPTICA I

Avaluació contínua (obligatòria)

Basada en la realització d'un conjunt de problemes que cada alumne haurà de realitzar al llarg del quadrimestre.

L'alumne exposarà el seu treball quan siga citat pel professor de problemes (almenys 2 vegades/quadrimestre)

Aquest treball continu suposarà el 40% de la nota de problemes.

OPTICA I

GRUP A **Aula 4113** **Cinquè Quadrimestre**

HORA	DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES
8:35 - 9:00					
9:05 - 9:30	**Lab Elec AL2* (9-13 h)**		**Lab Elec AL1* (9-13 h)**		
9:35 - 10:00					
10:05 - 10:30					
10:35 - 11:00					CT FisQuant/Opt/Elec A A-4107, A-4108, A-4110
11:05 - 11:30					
11:35 - 12:00	**Lab Quànt AL1* (8:30-13:30 h)**		**Lab Quànt AL2* (8:30-13:30 h)**		CT FisQuant/Opt/Elec A A-4107, A-4108, A-4110
12:05 - 12:30					
12:35 - 13:00				**CONFERÈNCIA O REC**	CT FisQuant/Opt/Elec A A-4107, A-4108, A-4110
13:05 - 13:30					
13:35 - 14:00	CALENDARI DE LES RECUPERACIONS, EN TAULA A PART				
14:05 - 14:30					
14:35 - 15:00					
15:05 - 15:30					
15:35 - 16:00	Opt I A*	Opt I A*	Fis Quant I A*	Opt I A*	
16:05 - 16:30					
16:35 - 17:00					
17:05 - 17:30	Fis Quant I A*	Fis Quant I A*	Electrom I A*	Electrom I A*	
17:35 - 18:00					
18:05 - 18:30	Electrom I A*	Teo Lab Elec A* $	RECUPERACIONS A	Teo Lab Elec A* $	
18:35 - 19:00					
19:00- 19:30					

OPTICA I

GRUP A | **Aula 4113** | **Cinquè Quadrimestre**

HORA	DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES
8:35 - 9:00					
9:05 - 9:30	Lab Elec AL2* (9-13 h)		Lab Elec AL1* (9-13 h)		
9:35 - 10:00					
10:05 - 10:30					
10:35 - 11:00					CT FisQuant/Opt/Elec A
11:05 - 11:30					A-4107, A-4108, A-4110
11:35 - 12:00	Lab Quànt AL1*		Lab Quànt AL2*		CT FisQuant/Opt/Elec A
12:05 - 12:30	(8:30-13:30 h)		(8:30-13:30 h)		A-4107, A-4108, A-4110
12:35 - 13:00				CONFERÈNCIA O REC	CT FisQuant/Opt/Elec A
13:05 - 13:30					A-4107, A-4108, A-4110
13:35 - 14:00					
14:05 - 14:30					
14:35 - 15:00					
15:05 - 15:30					
15:35 - 16:00					
16:05 - 16:30					
16:35 - 17:00					
17:05 - 17:30					
17:35 - 18:00					
18:05 - 18:30					
18:35 - 19:00					
19:00- 19:30					

CALENDARI DE LES RECUPERACIONS, EN TAULA A PART

CLASSES TUTELADES GRUP A
1er QUADRIMESTRE

		DIVENDRES
10:35- 11:30 h	aula 4107	AU1 OI*
	aula 4108	AU2 FQI*
	aula 4110	AU3 EI*
11:35- 12:30 h	aula 4107	AU1 FQI*
	aula 4108	AU2 EI*
	aula 4110	AU3 OI*
12:35- 13:30 h	aula 4107	AU1 EI*
	aula 4108	AU2 OI*
	aula 4110	AU3 FQI*

OPTICA I

Setm.	Dilluns	Dimarts	Dimec.	Dijous	Diven.
1				13-sep	
2	17-sep	18-sep	19-sep	20-sep	
3	24-sep	25-sep	26-sep	27-sep	28-sep
4	1-oct	2-oct	3-oct	4-oct	5-oct
5	8-oct	9-oct	10-oct	11-oct	12-oct
6	15-oct	16-oct	17-oct	18-oct	19-oct
7	22-oct	23-oct	24-oct	25-oct	26-oct
8	29-oct	30-oct	31-oct	1-nov	2-nov
9	5-nov	6-nov	7-nov	8-nov	9-nov
10	12-nov	13-nov	14-nov	15-nov	16-nov
11	19-nov	20-nov	21-nov	22-nov	23-nov
12	26-nov	27-nov	28-nov	29-nov	30-nov
13	3-dic	4-dic	5-dic	6-dic	7-dic
14	10-dic	11-dic	12-dic	13-dic	14-dic
15	17-dic	18-dic	19-dic	20-dic	21-dic
16	24-dic	25-dic	26-dic	27-dic	28-dic
17	31-dic	1-ene	2-ene	3-ene	4-ene
18	7-ene	8-ene	9-ene	10-ene	11-ene
19	14-ene	15-ene	16-ene	17-ene	18-ene
20	21-ene	22-ene	23-ene	24-ene	25-ene
21	28-ene	29-ene	30-ene	31-ene	01-feb

PENDENT RECUPERACIÓ

RECUPERACIONS

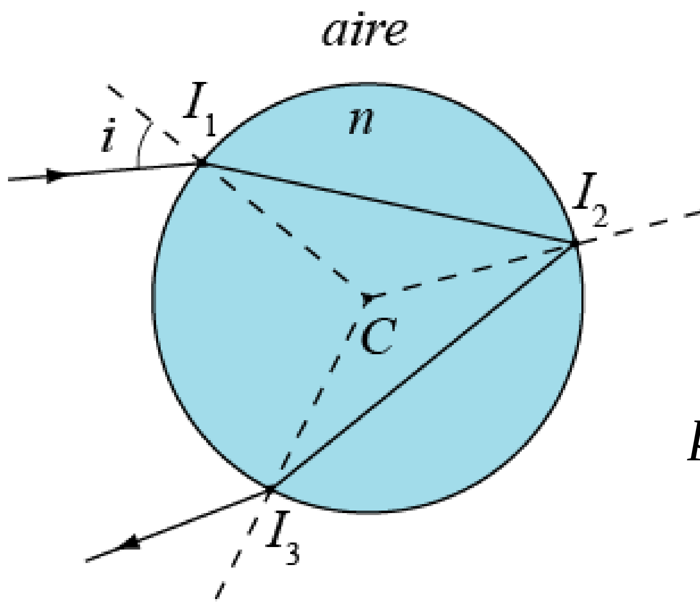
GRUP A AULA 4113	
3-oct (Dm, 18-19h)	Opt I
10-oct (Dm, 18-19h)	Fis Quant I
17-oct (Dm, 18-19h)	Electrom I

PROBLEMES D'ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 1

Problemes

P1.1. Un raig de llum monocromàtica penetra en una esfera homogènia d’índex *n* submergida en aire, amb angle d’incidència *i*, i pateix *p* reflexions parcials en el seu interior abans d’eixir-ne.



$p = 1$

Problemes

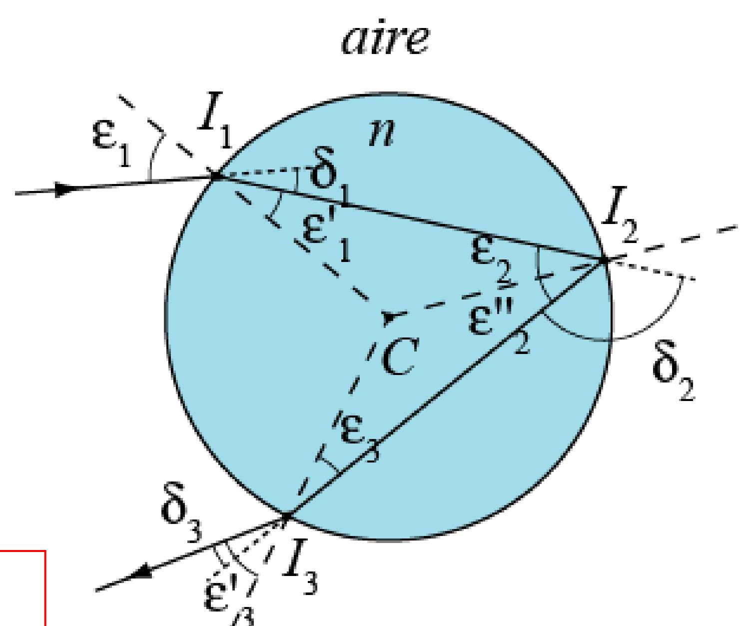
a) Calculeu la desviació del raig emergent en relació amb el raig incident.

Refracció #1

$$\boxed{\begin{gathered}\delta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1' \\ \sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1'\end{gathered}}$$

Reflexió #1

$$\boxed{\begin{gathered}\delta_2 = \pi - (\varepsilon_2'' - \varepsilon_2) \\ \varepsilon_2'' = -\varepsilon_2\end{gathered}}$$



Refracció #2

$$\boxed{\begin{gathered}\delta_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_3' \\ n\sin\varepsilon_3 = \sin\varepsilon_3'\end{gathered}}$$

$$\left.\begin{aligned}\angle I_1I_2C &\Rightarrow \varepsilon_1' = -\varepsilon_2 \\ \angle I_2I_3C &\Rightarrow \varepsilon_2'' = -\varepsilon_3\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{gathered}\varepsilon_1' = -\varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_3'\end{gathered}}$$

$$\Uparrow$$

$$\delta_1 = \delta_3$$

Problemes

a) Calculeu la desviació del raig emergent en relació amb el raig incident.

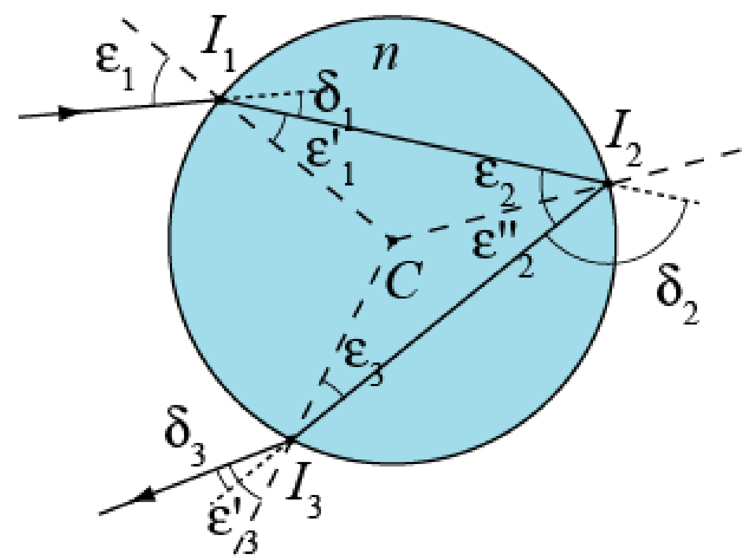
$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_1' \\ \delta_2 &= \pi - (\varepsilon_2'' - \varepsilon_2) \\ \delta_3 &= \varepsilon_3 - \varepsilon_3' \end{aligned}\right\}$$

$$(p = 1)$$

$$\boxed{\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \pi + 2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1'}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_1' = -\varepsilon_2 = \varepsilon_2'' = -\varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_3' \end{aligned}\right.$$

$$\sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1' \Rightarrow \varepsilon_1' = \arcsin\left(\frac{\sin\varepsilon_1}{n}\right)$$



$$(p \neq 1)$$

$$\boxed{\delta = \delta_1 + p\delta_2 + \delta_3 = p\pi + 2\varepsilon_1 - 2(1 + p)\varepsilon_1'}$$

Problemes

b) Per a quin angle d'incidència, i_m, aquesta desviació passa per un extrem relatiu?

$$\left.\begin{aligned}\delta = p\pi + 2\varepsilon_1 - 2(1+p)\varepsilon_1' \Rightarrow \left.\frac{d\delta}{d\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_1 = i_m} = 2 - 2(1+p)\frac{d\varepsilon_1'}{d\varepsilon_1} = 0 \\ \sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1' \Rightarrow \cos\varepsilon_1 d\varepsilon_1 = n\cos\varepsilon_1' d\varepsilon_1'\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{n\cos\varepsilon_1' = (1+p)\cos\varepsilon_1}$$

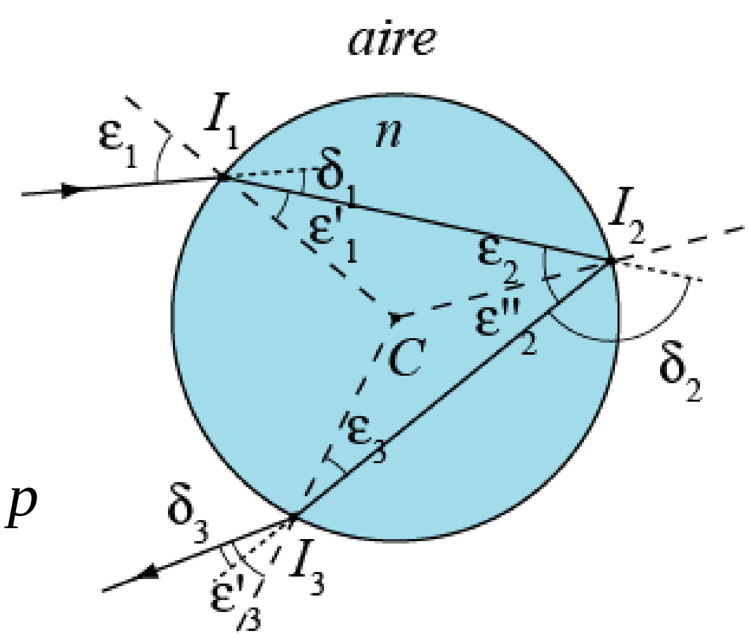
$$n^2\cos^2\varepsilon_1' = (1+p)^2\cos^2\varepsilon_1$$

$$n^2\cos^2\varepsilon_1' = n^2\left(1-\sin^2\varepsilon_1'\right) = n^2 - \sin^2\varepsilon_1$$

$$n^2 - \left(1-\cos^2\varepsilon_1\right) = (1+p)^2\cos^2\varepsilon_1$$

$$\boxed{\left.\cos\varepsilon_1\right|_{\varepsilon_1 = i_m} = \sqrt{\frac{n^2-1}{(1+p)^2-1}}}$$

$$1 < n \le 1+p$$



Problemes

c) Calculeu i_m i la desviació corresponent per a $n = 4/3$ i $p = 1$ i 2. Aquest resultat és la base per a la justificació geomètrica de la formació de l'arc iris.

$$\cos\varepsilon_1\Big|_{\varepsilon_1 = i_m} = \sqrt{\frac{n^2-1}{(1+p)^2-1}}$$

$$p=1 \quad \rightarrow \quad i_m = 59.39^{\circ}$$

$$p=2 \quad \rightarrow \quad i_m = 71.83^{\circ}$$

$$n = 4/3$$

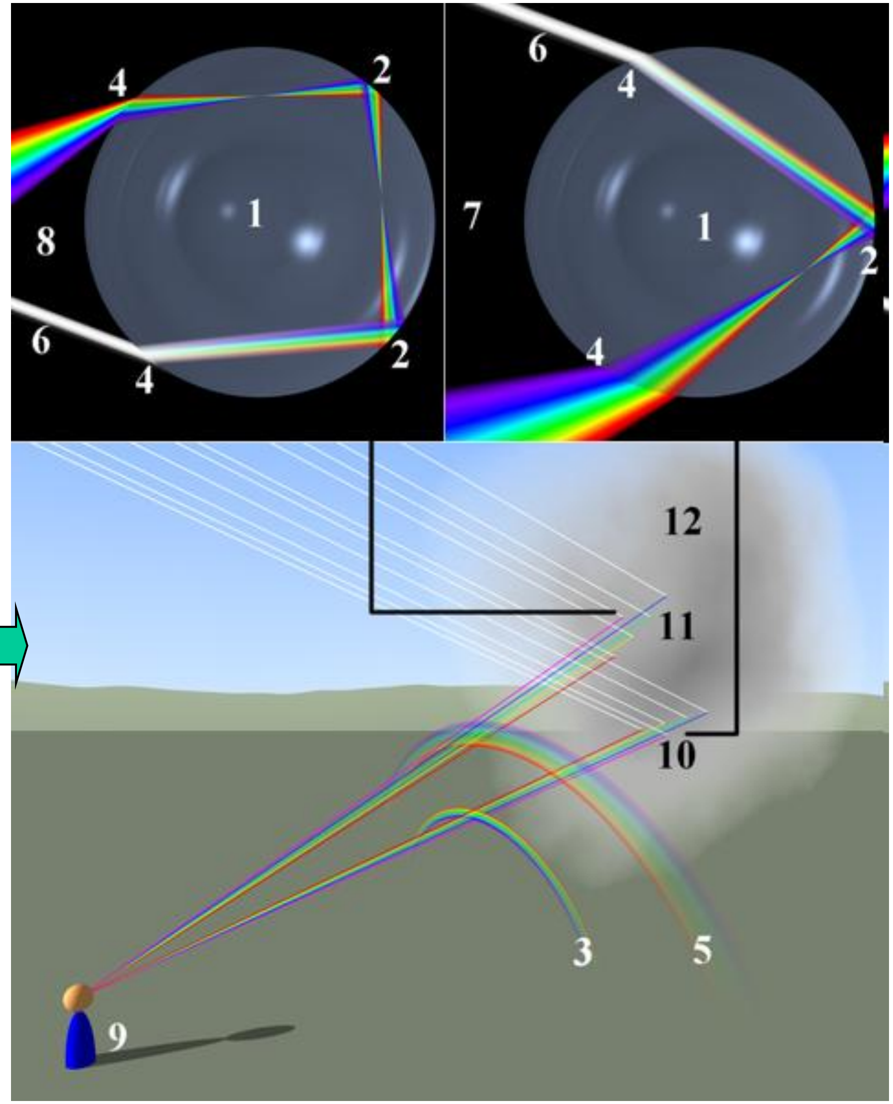
$$\left.\begin{array}{l} \sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1' \\ \delta = p\pi + 2\varepsilon_1 - 2(1+p)\varepsilon_1' \end{array}\right\}$$

$$p=1 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1' = 40.20^{\circ} \qquad \delta = 137.97^{\circ}$$

$$p=2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1' = 45.45^{\circ} \qquad \delta = 230.98^{\circ}$$

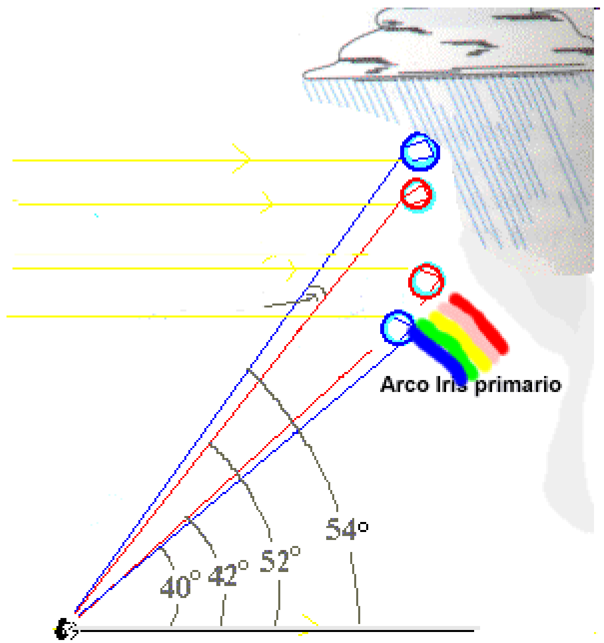
Problemes

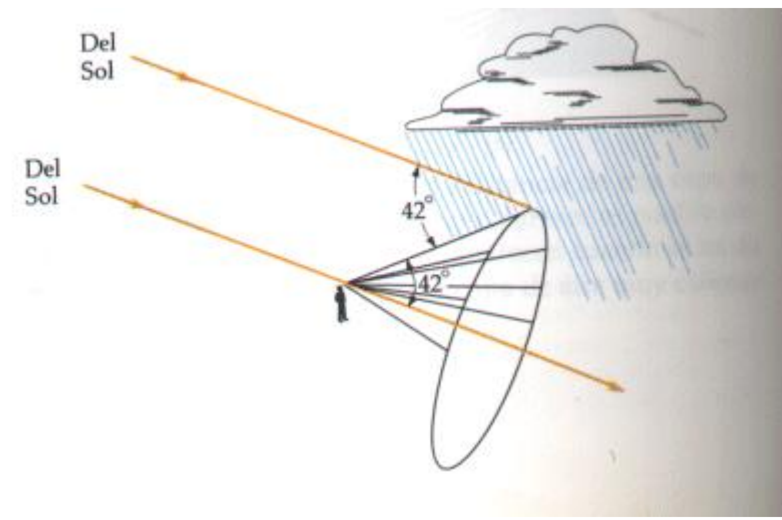
Qüestió: Hi ha algun error en aquest dibuix il·lustratiu?



http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Rainbow_formation.png

Problemes





http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/color/arcoIris/ArcoIris.htm

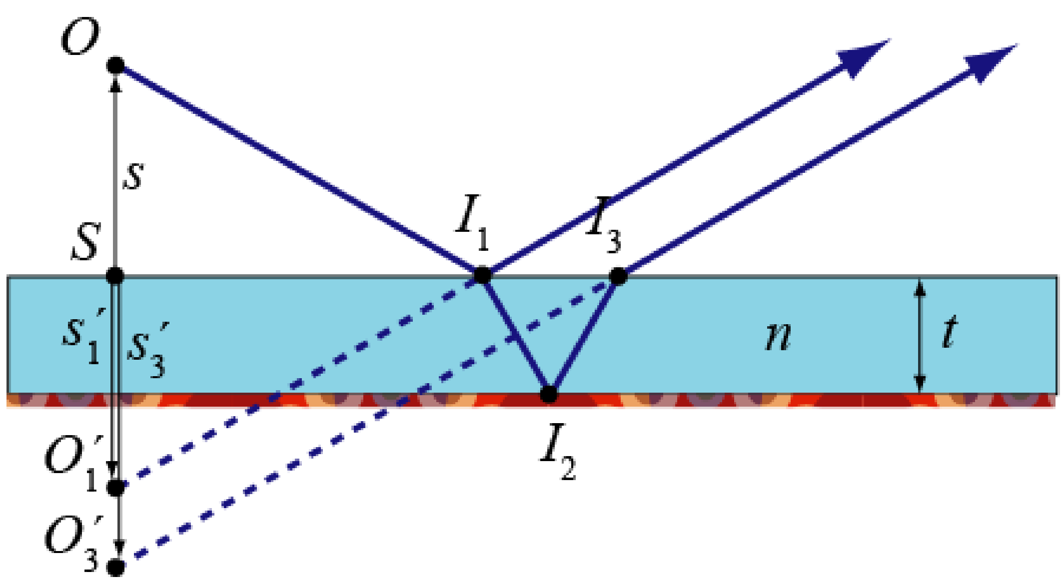
Problemes

ARC IRIS DOBLE

http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Seattle_Double_Rainbow.jpg

Problemes

P1.2. Considereu un espill de cara posterior, és a dir, una superfície reflectora sobre la qual es diposita una làmina transparent de cares planes i paral·leles. Si la grossària de la làmina és t i el material transparent té un índex de refracció n, determineu el desplaçament axial patit per la imatge a causa de la presència d'aquesta làmina.



$$\Delta O' = \overline{O_1'O_3'} = s_3' - s_1'$$

Problemes

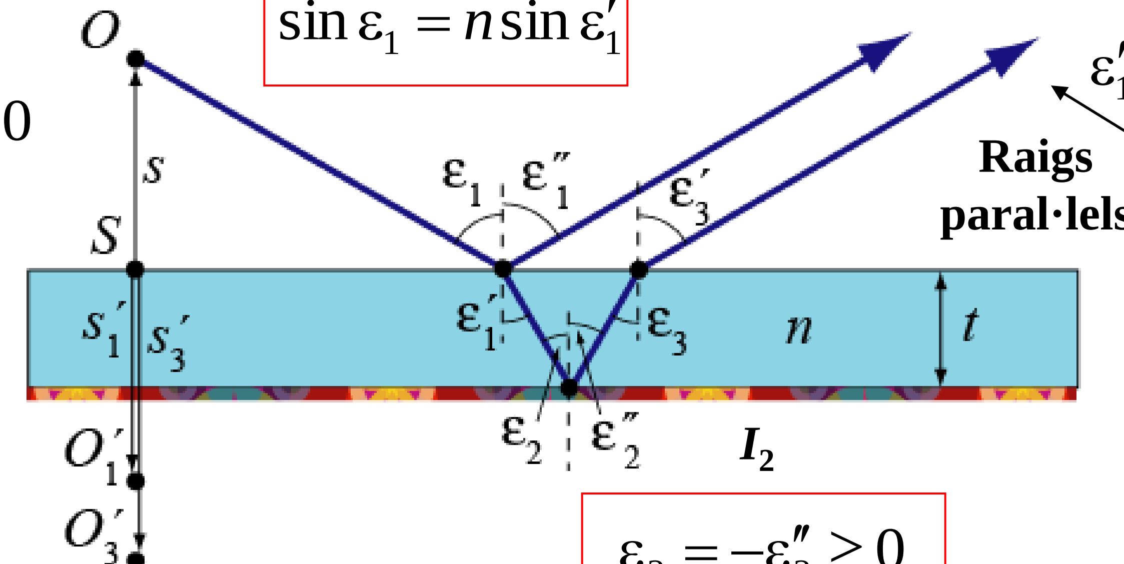
Determineu el desplaçament axial patit per la imatge a causa de la presència d'aquesta làmina.

I_1

$$\boxed{\begin{gathered}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1'' \geq 0 \\ \sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1'\end{gathered}}$$

I_3

$$\boxed{n\sin\varepsilon_3 = \sin\varepsilon_3'}$$



$t \geq 0$

$\varepsilon_1'' = \varepsilon_3'$

$$\boxed{\begin{gathered}\varepsilon_1' = \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_2'' = \varepsilon_3 \leq 0\end{gathered}}$$

$$\overline{I_1 I_2} = \overline{I_2 I_3}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = -\varepsilon_2'' \geq 0}$$

Qüestió: Què succeeix si considerem simultàniament la primera reflexió en les dues cares de la làmina transparent?

Problemes

Determineu el desplaçament axial patit per la imatge a causa de la presència d'aquesta làmina.

$$\tan\varepsilon_3' = \frac{\overline{SI_3}}{s_3'} \Rightarrow \Delta O' = \frac{\overline{SI_3}}{\tan\varepsilon_3'} - s_1' = \frac{\overline{SI_1}+\overline{I_1I_3}}{\tan\varepsilon_1''} - s_1' = \frac{s\tan\varepsilon_1 + 2t\tan\varepsilon_1'}{-\tan\varepsilon_1} - s_1'$$

$$\Delta O' = -\frac{2t\tan\varepsilon_1'}{\tan\varepsilon_1} = -2t\frac{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon_1}}{\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon_1}} \xrightarrow{\varepsilon_1 \langle\langle 1} t\left(-\frac{2}{n}+\frac{n^2-1}{n^3}\varepsilon_1^2+\cdots\right)$$

$$\tan\varepsilon_1' = \frac{\overline{I_1I_3}/2}{t}$$

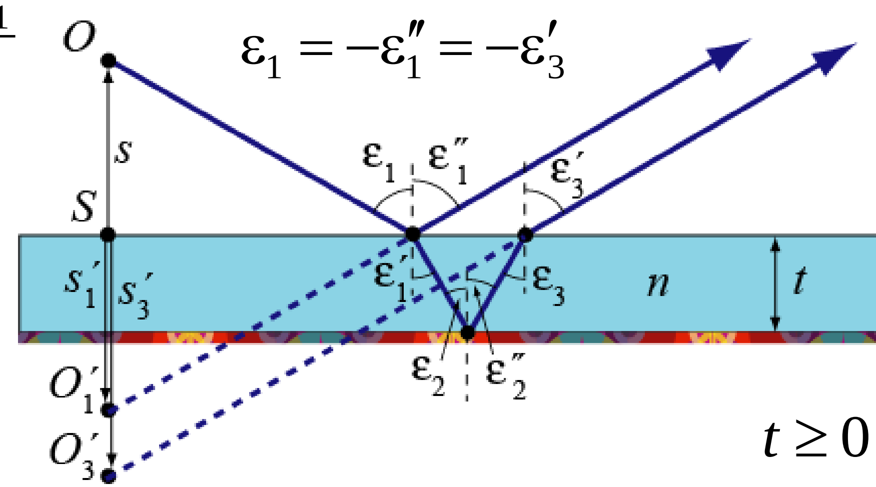
$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2 = -\varepsilon_2'' = -\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_1'' = -\varepsilon_3'$$

$$\sin\varepsilon_1' = \frac{\sin\varepsilon_1}{n}$$

Qüestió: Demostreu la igualtat

$$\left.\begin{aligned}\tan\varepsilon_1 &= \frac{\overline{SI_1}}{s}\\ \tan\varepsilon_1'' &= \frac{\overline{SI_1}}{s_1'}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{s_1' = -s}$$



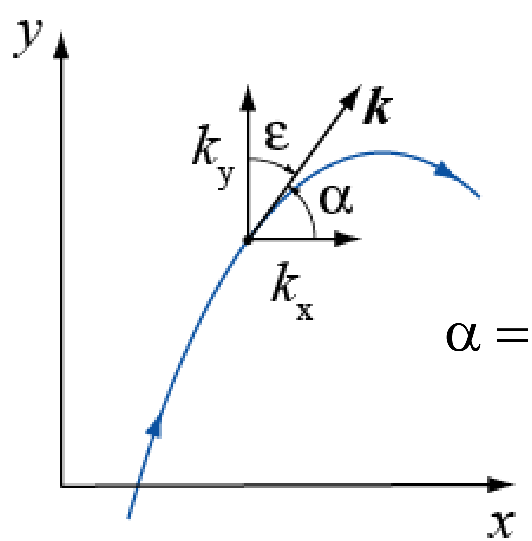
$t \geq 0$

Problemes

P1.3. Demostreu que per a un medi estratificat pla en què $n = n(y)$, les trajectòries dels raigs lluminosos satisfan l'equació diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2C^2}\frac{dn^2}{dy} \qquad C = n \sin\varepsilon$$

on C és la constant de la relació de Bouguer.



$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

Conservació de k_x

$$\boxed{k_x = nk_0 \cos\alpha = nk_0(-\sin\varepsilon) = -k_0 C}$$

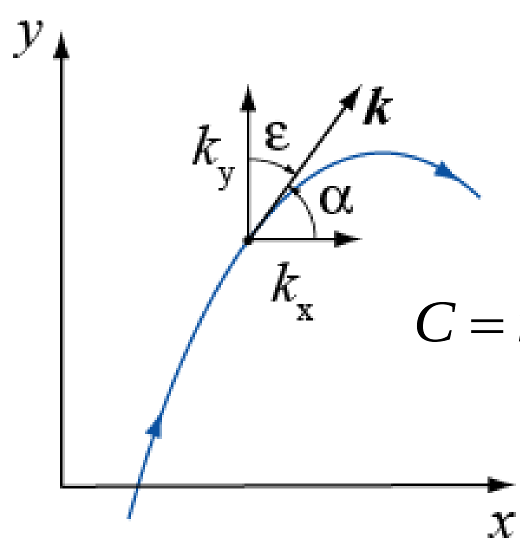
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = -\cot\varepsilon}$$

Problemes

És possible que un raig descriga una trajectòria rectilínia en un medi com aquest?

$$C^2 = n^2 \sin^2 \varepsilon \Rightarrow \frac{dC^2}{dy} = 0 = \frac{dn^2}{dy}\sin^2\varepsilon + 2n^2 \sin\varepsilon\cos\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{dy} = -\frac{\tan\varepsilon}{2n^2}\frac{dn^2}{dy}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\varepsilon \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{\sin^2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2\varepsilon}\left(-\frac{\tan\varepsilon}{2n^2}\frac{dn^2}{dy}\right)(-\cot\varepsilon)$$



$$C = n\sin\varepsilon$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2n^2\sin^2\varepsilon}\frac{dn^2}{dy} = \frac{1}{2C^2}\frac{dn^2}{dy}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dn^2}{dy} = 0$$

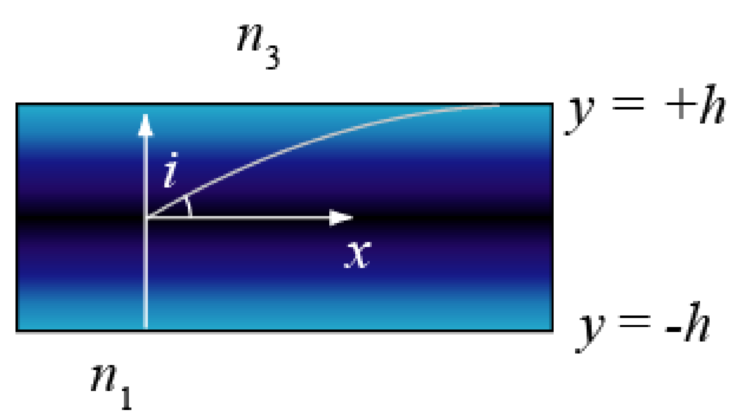
Trajectòries rectilínies només apareixen en mitjans homogenis (localment)

Problemes

P1.4. Considereu un medi estratificat de grossària $2h$ (regió II), caracteritzat per un índex de refracció donat per:

$$n^2(|y| \leq h) = n_0^2\left[1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2\right]$$

i rodejat per dos medis homogenis (regions I i III) d'índex $n_1 = n_3 = n(\pm h)$. En l'origen de coordenades se situa una font puntual que emet raigs en tots els angles i possibles cap a l'exterior del medi.



Problemes

a) Calculeu la trajectòria dels raigs.

$$n^2 = n_0^2\left[1-\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] \Rightarrow \frac{dn^2}{dy} = -\frac{2n_0^2 y}{L^2} \qquad C = n_0 \cos i_0 \qquad y(0)=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2C^2}\frac{dn^2}{dy} \Rightarrow y'' + \frac{1}{L^2\cos^2 i_0}y = 0$$

Eq. oscil·lador harmònic

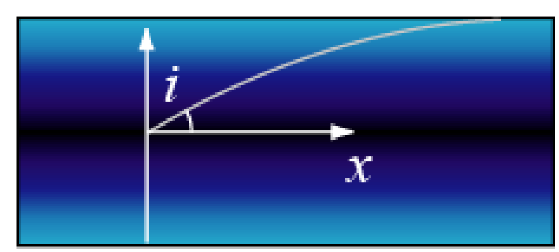
$$y(x) = A\exp\left(j\frac{x}{L\cos i_0}\right) + B\exp\left(-j\frac{x}{L\cos i_0}\right)$$

$$y(0)=0 \Rightarrow A+B=0$$

$$y'(0) = \tan i_0$$

EQUACIÓ DE LA TRAJECTÒRIA

$$y(x) = L\sin i_0 \sin\left(\frac{x}{L\cos i_0}\right)$$



Problemes

a) Calculeu la trajectòria dels raigs.

També podem resoldre el problema de la manera següent:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2}{C^2} - 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos i_0}\sqrt{\sin^2 i_0 - \left(\frac{y}{L}\right)^2} \qquad y(0)=0$$

Eq. integral parametritzada

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{y'} = \int_0^x dx = x \Rightarrow x = L\cos i_0 \int_0^{y(x)} \frac{d\left(y/L\sin i_0\right)}{\sqrt{1-\left(y/L\sin i_0\right)^2}} = L\cos i_0 \arcsin\left[\frac{y(x)}{L\sin i_0}\right]$$

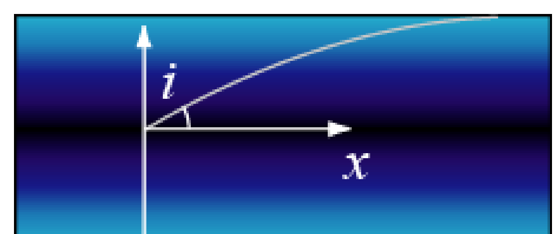
EQUACIÓ DE LA TRAJECTÒRIA

$$\boxed{y(x) = L\sin i_0 \sin\left(\frac{x}{L\cos i_0}\right)}$$

Qüestió: Demostreu que el període és:

$$\Lambda = 2\pi L\cos i_0 \xrightarrow{i_0 \langle\langle 1} \Lambda = 2\pi L$$

n_3



n_1

Problemes

b) Quina condició ha de complir la coordenada azimutal *i* perquè un raig es mantinga confinat en la regió II?

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{n^2}{C^2}-1\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos i_0}\sqrt{\sin^2 i_0-\left(\frac{y}{L}\right)^2}$$

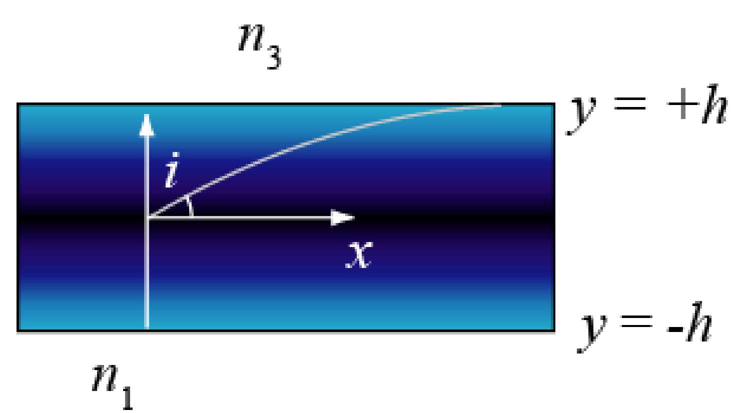
$$y'=0\Rightarrow y_{\max}=L\left|\sin i_0\right|=-y_{\min}$$

Condició de confinament: $\boxed{L\left|\sin i_0\right|=y_{\max}<h}$

• Es pot obtenir el mateix resultat utilitzant la condició de guiatge:

$$n_0^2\left[1-\left(\frac{h}{L}\right)^2\right]=\boxed{n^2(\pm h)<C^2}=n_0^2\cos^2 i_0$$

$$\sin^2 i_0<(h/L)^2$$



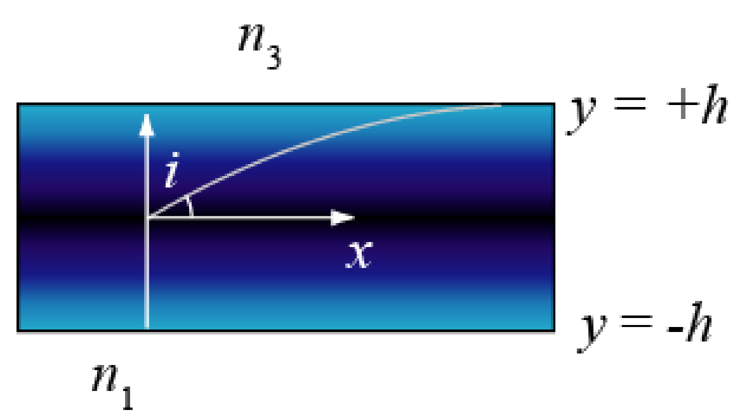
Analitzeu: $\boxed{\text{Si } h>L\xrightarrow{\forall i}\sin^2 i_0<1<(h/L)^2}$

Problemes

c) Determineu la zona a traves de la qual els raigs procedents de la font travessen la superfície de separació entre les regions I i II.

$$y(x) = h \Rightarrow x = L\cos i_0 \arcsin\left(\frac{h}{L\sin i_0}\right) \qquad 0 < i_0 < \pi/2$$

$$\left.\begin{matrix} h < L \\ h/L < \sin i_0 < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \arcsin\left(\frac{h}{L}\right) \le \arcsin\left(\frac{h}{L\sin i_0}\right) < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \cos^2 i_0 < 1-(h/L)^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{0 \le x < \frac{\pi}{2}\sqrt{L^2-h^2}}$$



Problemes

d) Particularitzeu el resultat de l'apartat *a* per al cas que l'angle *i* siga petit (aproximació paraxial)

$$i_0 \langle\langle \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} \sin i_0 = i_0 + O[i]^2 \\ \cos i_0 = 1 + O[i]^2 \end{cases}$$

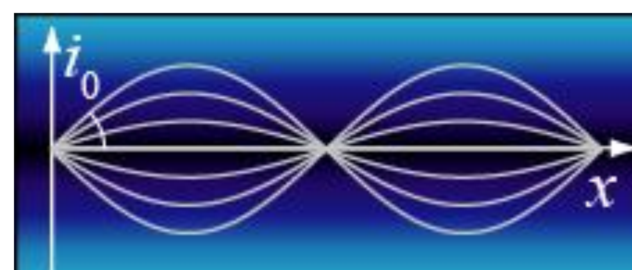
$$y(x) = L \sin i_0 \sin\left(\frac{x}{L\cos i_0}\right) \Rightarrow y(x) = L i_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) + O[i]^2$$

Aquest és un comportament general quan $n^2(y) = n^2(-y) \leq n_0^2$

$$n^2(y) \approx n_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2n^2}{dy^2}\right)_0 y^2 \Rightarrow \frac{dn^2}{dy} = \left(\frac{d^2n^2}{dy^2}\right)_0 y \qquad \frac{1}{L_{ef}^2} = \frac{-1}{2}\left[\frac{d^2\left(n^2/n_0^2\right)}{dy^2}\right]_0 \geq 0$$

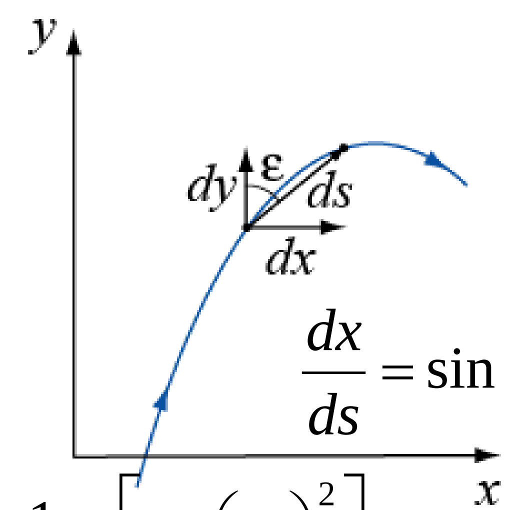
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2C^2}\frac{dn^2}{dy} \Rightarrow y'' + \frac{1}{L_{ef}^2} y = 0 \qquad C = n_0 + O[i_0]^2$$

$$y(0) = 0, y'(0) = \tan i_0 \approx i_0 \Rightarrow y(x) = L_{ef}\, i_0 \sin\left(x/L_{ef}\right)$$



Problemes

Una altra manera de resoldre l'apartat d és considerar les aproximacions següents:



$$\frac{dx}{ds} = \sin\varepsilon(y) \approx 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left\{n(y)\frac{dx}{ds}\right\} = 0 \xrightarrow{ds\approx dx} \frac{d}{dx}n(y) = 0 \\ &\frac{d}{ds}\left\{n(y)\frac{dy}{ds}\right\} = \frac{dn}{dy} \xrightarrow{ds\approx dx} \frac{d}{dx}\left\{n(y)\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{dn}{dy} \end{aligned}\right\}$$

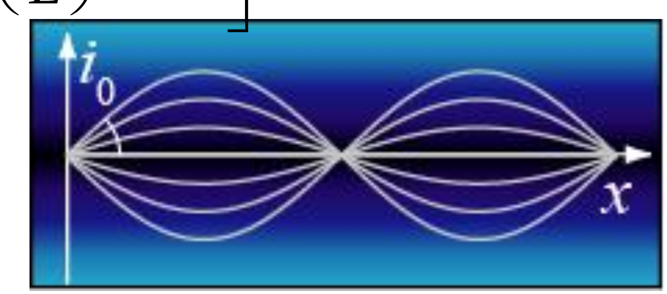
$$n(y)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dn}{dy} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\ln(n)}{dy}} \quad \ln n(y) = \ln n_0 + \frac{1}{2}\ln\left[1-\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dy}\ln n(y) = -\frac{y/L^2}{1-(y/L)^2} \xrightarrow{y^2 \langle\langle L^2} -\frac{y}{L^2}\left[1+\left(\frac{y}{L}\right)^2+\left(\frac{y}{L}\right)^4+\cdots\right]$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{L^2}}$$

$$y(x) = Li_0\sin\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = i_0$$



Problemes

P1.5. Considereu un medi isòtrop caracteritzat per un índex de refracció amb simetria radial de la forma

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}$$

Aquest instrument òptic es denomina ull de peix de Maxwell. Determineu la trajectòria dels raigs que es propaguen en aquest medi i demostreu que formen circumferències coplanàries amb l'origen de coordenades $r = 0$.

Principles of optics

Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light

MAX BORN
MA, Dr Phil, FRS
Nobel Laureate
Formerly Professor at the Universities of Göttingen and Edinburgh

and

EMIL WOLF
PhD, DSc
Wilson Professor of Optical Physics, University of Rochester, NY

Problemes

- Els raigs de llum s'han definit com les trajectòries ortogonals als fronts d'ona $S(x,y,z)$=constant. Si **r** és un vector de posició d'un punt típic en un raig i s la longitud del raig mesurat des d'un punt fix en aquest, llavors

$$n\frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla S \Leftrightarrow \boxed{n\hat{s} = \nabla S} \qquad \hat{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

- Aquesta equació especifica els raigs per mitjà de la funció S, però se'n pot derivar fàcilment una equació diferencial què especifique els raigs directament en termes de la funció d'índex de refracció $n(\mathbf{r})$.

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\nabla S) = \frac{d\vec{r}}{ds}\nabla(\nabla S) = \frac{\nabla S}{n}\nabla(\nabla S) = \frac{1}{2n}\nabla\left[(\nabla S)^2\right] = \frac{1}{2n}\nabla\left(n^2\right)$$

Problemes

- La forma vectorial de les equacions diferencials dels raigs de llum és

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\nabla n} \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(n\hat{s}\right)=\nabla n$$

- En particular, en un medi homogeni n=constant i aquesta equació es redueix a

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=0 \Rightarrow \vec{r}=s\vec{a}+\vec{b}$$

Aquesta és una equació vectorial d'una línia recta en la direcció del vector **a**, que passa pel punt **r**=**b**. Per tant, en un medi homogeni els raigs de llum tenen la forma de línies rectes.

Problemes

- Com un exemple d'un cert interès, ara considerarem els raigs en un mitjà que té simetria esfèrica, és a dir, on l'índex de refracció depèn únicament de la distància r des d'un punt fix O.

$$n = n(r)$$

- Aquest és el cas de l'atmosfera terrestre quan la curvatura de la terra es té en compte.
- Tots els raigs són corbes planes, situades en un pla que passa per l'origen.

$$\frac{d(\vec{r} \times n\hat{s})}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \times n\hat{s} + \vec{r} \times \frac{d(n\hat{s})}{ds}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times n\hat{s} = \hat{s} \times n\hat{s} = 0 \qquad \vec{r} \times n\hat{s} = \text{constant} = nr \sin\phi$$

$$\vec{r} \times \frac{d(n\hat{s})}{ds} = \vec{r} \times \nabla n = \vec{r} \times \hat{u}_r \partial_r n = 0$$

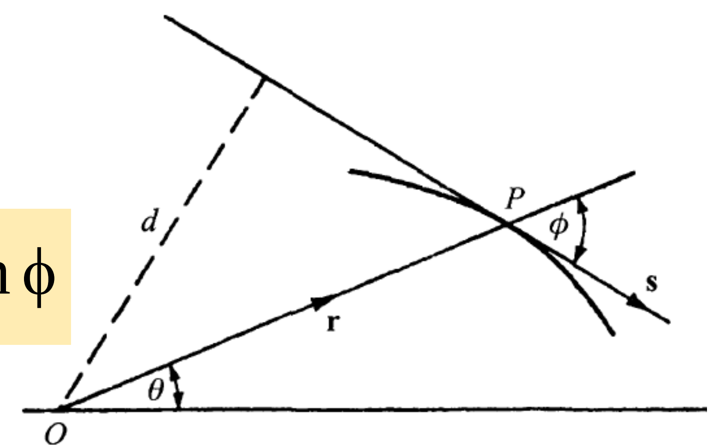


Fig. 3.5 Illustrating Bouguer's formula, nd = constant, for rays in a medium with spherical symmetry.

Problemes

- Atès que $r \sin \phi$ representa la distància d perpendicular des de l'origen a la tangent, aquesta equació també es pot escriure com

$$nr \sin \phi = nd = \text{constant}$$

- Aquesta relació es denomina la fórmula de Bouguer i és l'anàleg de la fórmula ben coneguda en dinàmica que expressa la conservació del moment angular d'una partícula que es mou sota l'acció d'una força central.

$$nr \sin \phi = c \Rightarrow \cos^2 \phi = 1 - c^2/n^2 r^2$$

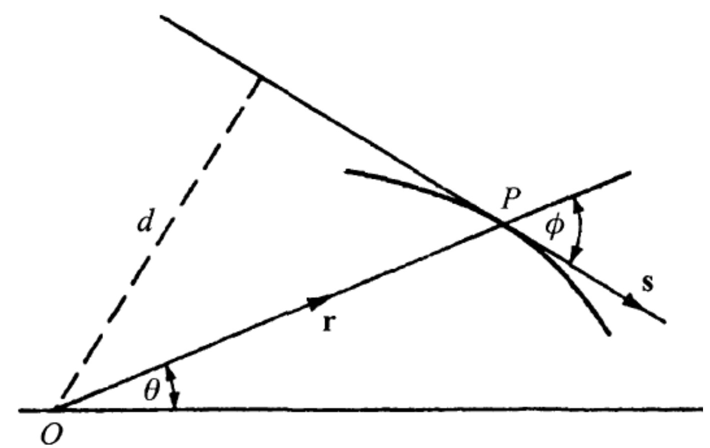
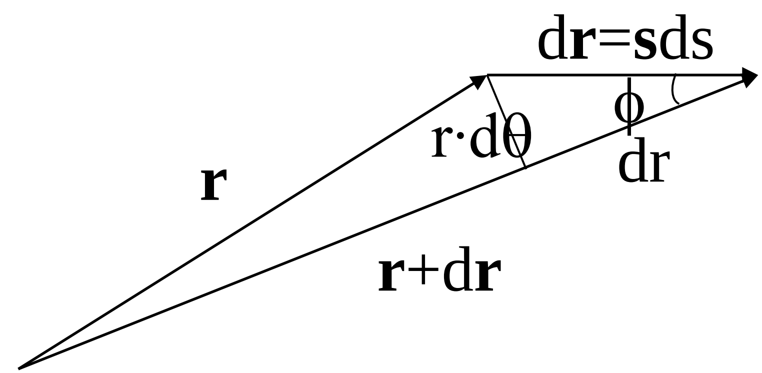


Fig. 3.5 Illustrating Bouguer's formula, nd = constant, for rays in a medium with spherical symmetry.

Problemes

- Per obtenir una expressió explícita per als raigs en un medi estratificat de simetria esfèrica, recordem que:

$$\tan\phi = \frac{r\,d\theta}{dr}$$



$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\tan\phi}{r} = \frac{c}{r\sqrt{n^2r^2 - c^2}}$$

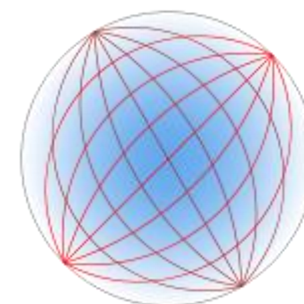
- L'equació dels raigs en un medi amb simetria esfèrica, per tant, es pot escriure en la forma

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{c}{r\sqrt{n^2r^2 - c^2}}\,dr}$$

Problemes

- Un exemple senzill i interessant és el conegut com l’ull de peix, presentat per un medi amb l'índex de refracció

$$n(r)=\frac{n_0}{1+(r/a)^2}$$



Secció transversal de la lent d'ull de peix de Maxwell amb un ombreig blau que representa un major índex de refracció (Font: Wikipedia)

- Resolem les equacions dels raigs.

$$\left.\begin{array}{l} \theta=\theta_0+\displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{c}{r\sqrt{n^2r^2-c^2}}\,dr \\[2ex] \rho=\dfrac{r}{a} \qquad\qquad K=\dfrac{c}{an_0} \end{array}\right\} \quad \theta=\theta_0+\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{K(1+\rho^2)}{\rho\sqrt{\rho^2-(1+\rho^2)^2K^2}}\,d\rho$$

Problemes

- Pot demostrar-se que

$$\frac{d}{d\rho}\left[\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho^2-1}{\rho}\right)\right]=\frac{K\left(1+\rho^2\right)}{\rho\sqrt{\rho^2-\left(1+\rho^2\right)^2K^2}}$$

$$\theta=\theta_0+\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho^2-1}{\rho}\right)-\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho_0^2-1}{\rho_0}\right)$$

$$\alpha=\theta_0-\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho_0^2-1}{\rho_0}\right)\Rightarrow \boxed{\sin\left(\theta-\alpha\right)=\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho^2-1}{\rho}}$$

- L'equació polar dels raigs és

$$\sin\left(\theta-\alpha\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2n_0^2-4c^2}}\frac{r^2-a^2}{ar}$$

Problemes

- La família del paràmetre α dels raigs a través d'un punt fix $P_0(r_0,\theta_0)$ ve donat per

$$n(r=0)=n_0 \qquad n(r=a)=n_0/2$$

$$\frac{r^2-a^2}{r\sin(\theta-\alpha)}=\frac{r_0^2-a^2}{r_0\sin(\theta_0-\alpha)}$$

- Tots els raigs procedents d'un punt arbitrari P_0 es reuneixen en un punt $P_1(r_1,\theta_1)$ en la línia que uneix P_0 a O:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a^2/r_0 \\ \theta_1 &= \pi+\theta_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} r_\pm &= a \\ \theta_\pm &= \alpha+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right.$$

- Cada raig interseca el cercle $r=a$ en punts diametralment oposats.

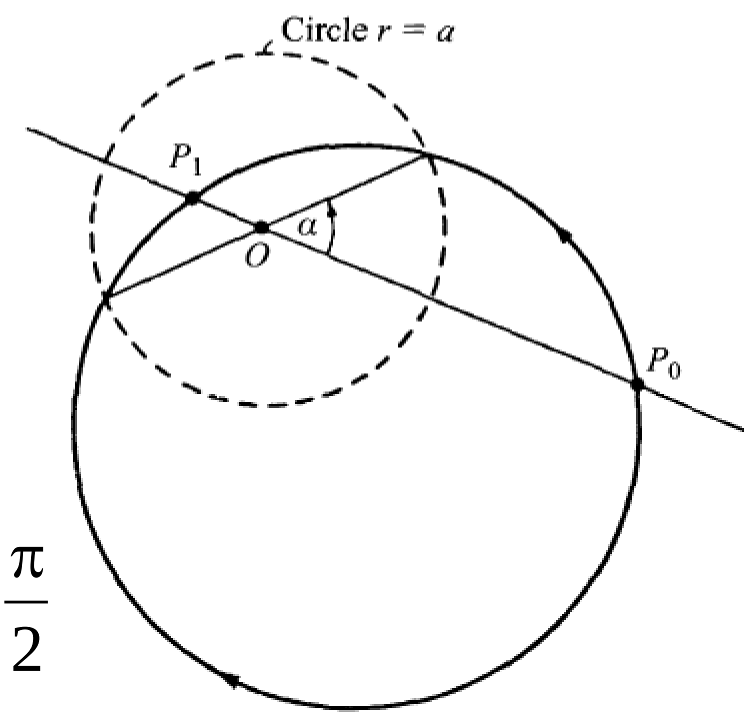


Fig. 4.8 Rays in Maxwell's 'fish-eye'.

Problemes

- Per obtenir l'equació dels raigs en coordenades cartesianes, posem:

$$\sin(\theta-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2n_0^2-4c^2}}\frac{r^2-a^2}{ar}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad y\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{c}{a\sqrt{a^2n_0^2-4c^2}}\left(x^2+y^2-a^2\right)$$

$$\frac{1}{b}=\frac{2c}{a\sqrt{a^2n_0^2-4c^2}} \qquad 2b(y\cos\alpha - x\sin\alpha)=x^2+y^2-a^2$$

$$0\le c\le an_0/2$$

- *Conclusió*: **Cada raig és un cercle**.

$$(x+b\sin\alpha)^2+(y-b\cos\alpha)^2=a^2+b^2$$

$$c=0\Rightarrow b\to\infty \;\&\; y=x\tan\alpha$$

$$c=an_0/2\Rightarrow b=0 \;\&\; r=a$$

Problemes

P1.6. Considereu un medi isòtrop caracteritzat òpticament per un índex de la forma $n^2 = n_0^2 \left(1 + 2\, y/L\right)$. Determineu el temps que empra un raig lluminós a anar de $A(0, 0)$ a $C(L, 2L)$ en els casos següents:

a) Si va primer de A a $B(L, L)$ i després de B a C, ambdós recorreguts en línia recta.

b) Si va de A a C en línia recta.

c) Si realitza el recorregut al llarg de la corba continguda en el pla $z = 0$ (per a $\varepsilon_0 = -\pi/4$)

$$-\frac{x}{\sin \varepsilon_0} + L\cos \varepsilon_0 - L\sqrt{\cos^2 \varepsilon_0 + 2\frac{y}{L}} = 0$$

Problemes

Primer estudiem la trajectòria que prendria el raig per anar de $A(0, 0)$ a $C(L, 2L)$.

$$n^2 = \left(1 + 2\frac{y}{L}\right) n_0^2 \Rightarrow \frac{dn^2}{dy} = \frac{2}{L} n_0^2$$

EQUACIO PARABÒLICA DE LA TRAJECTÒRIA

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2} y''(0) x^2$$

$$y(0) = 0 \qquad C = n_0 \sin \varepsilon_0$$

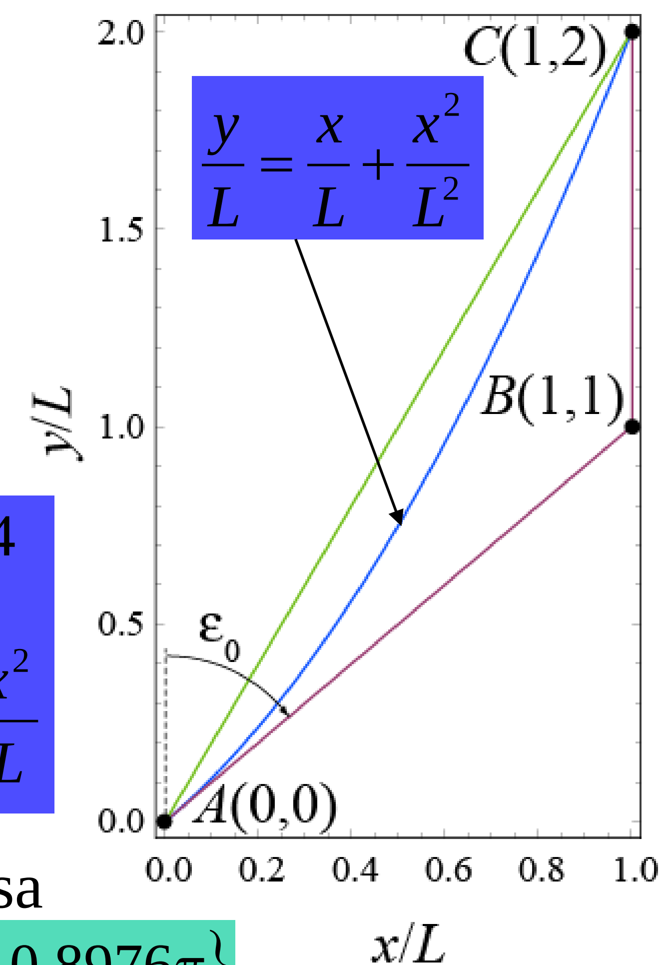
$$y'(0) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0\right) = -\cot \varepsilon_0$$

$$y''(0) = \frac{1}{2C^2} \left.\frac{dn^2}{dy}\right|_{x=0} = \frac{1}{L \sin^2 \varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = -\pi/4$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = x + \frac{x^2}{L}$$



Comproveu que la trajectòria parabòlica passa per C si: $1 - \sin 2\varepsilon_0 = 4 \sin^2 \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varepsilon_0 = \{-\pi/4, -0.8976\pi\}$

Problemes

a) Si va primer de A a $B(L, L)$ i després de B a C, ambdós recorreguts en línia recta.

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} \qquad t = L/c$$

$$y(x) = x \Rightarrow dy = dx$$

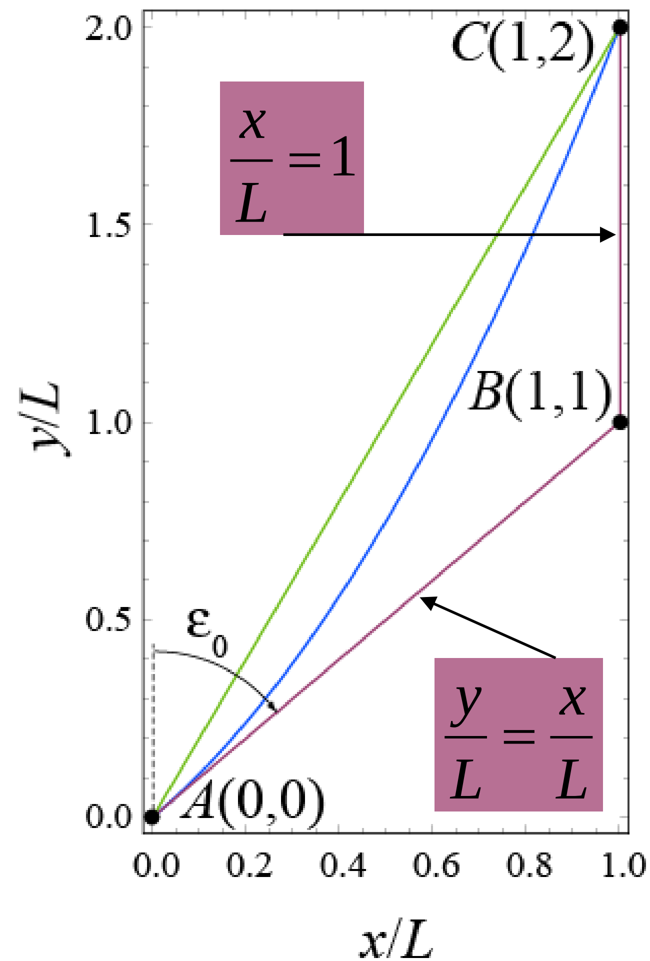
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{2}dy$$

$$L_{AB} = \int_A^B n ds = \sqrt{2} n_0 \int_0^L \sqrt{1 + 2\frac{y}{L}} dy = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) n_0 L$$

$$x = L \Rightarrow dx = 0$$

$$ds = dy$$

$$L_{BC} = \int_B^C n ds = n_0 \int_L^{2L} \sqrt{1 + 2\frac{y}{L}} dy = \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \sqrt{3}\right) n_0 L$$



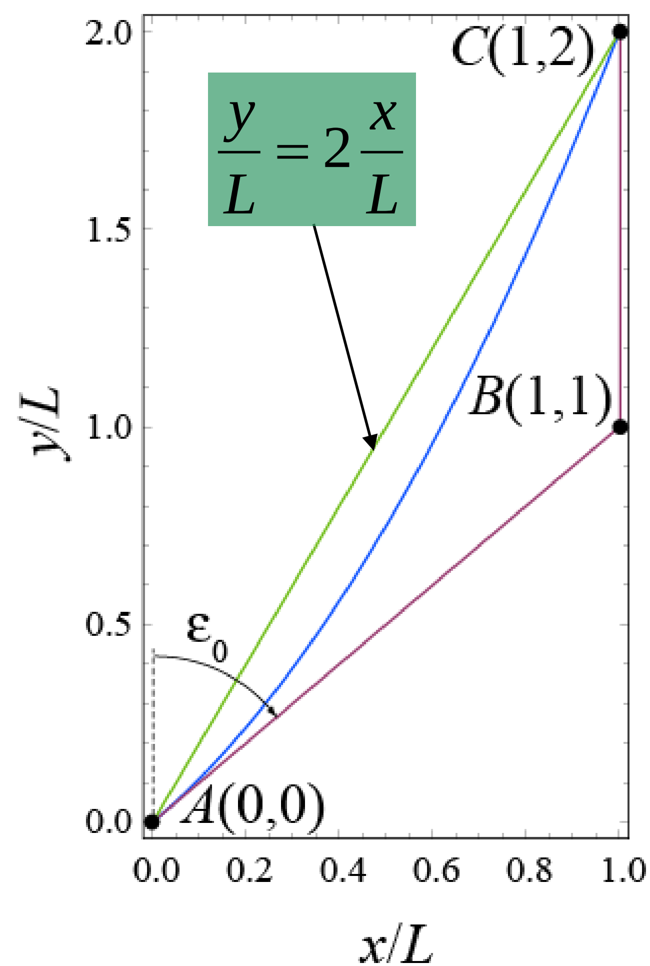
Problemes

b) Si va de *A* a *C* en línia recta.

$$y(x) = 2x \Rightarrow dy = 2dx$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\sqrt{5}/2\right)dy$$

$$L_{AC} = \int_A^C n\,ds = n_0 \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{2L} \sqrt{1 + 2\frac{y}{L}}\,dy = \frac{\left(25 - \sqrt{5}\right)}{6} n_0 L$$



Problemes

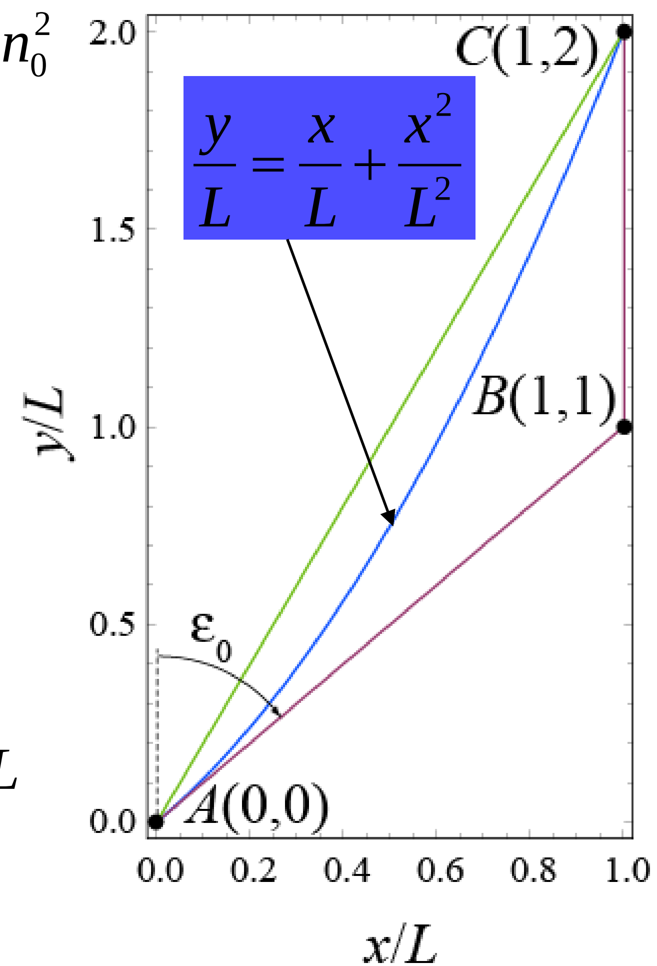
c) Si realitza el recorregut al llarg de la corba:

$$y(x) = x + \frac{x^2}{L} \Rightarrow n^2 = \left(1 + 2\frac{y}{L}\right)n_0^2 \equiv \left(1 + \frac{2x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)n_0^2$$

$$dy = \left(1 + 2\frac{x}{L}\right)dx$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + 2\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2}}dx$$

$$L_{AC} = \int_A^C n\,ds = \sqrt{2}n_0\int_0^L \left(1 + \frac{2x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)dx = \sqrt{2}\frac{8}{3}n_0 L$$



Problemes

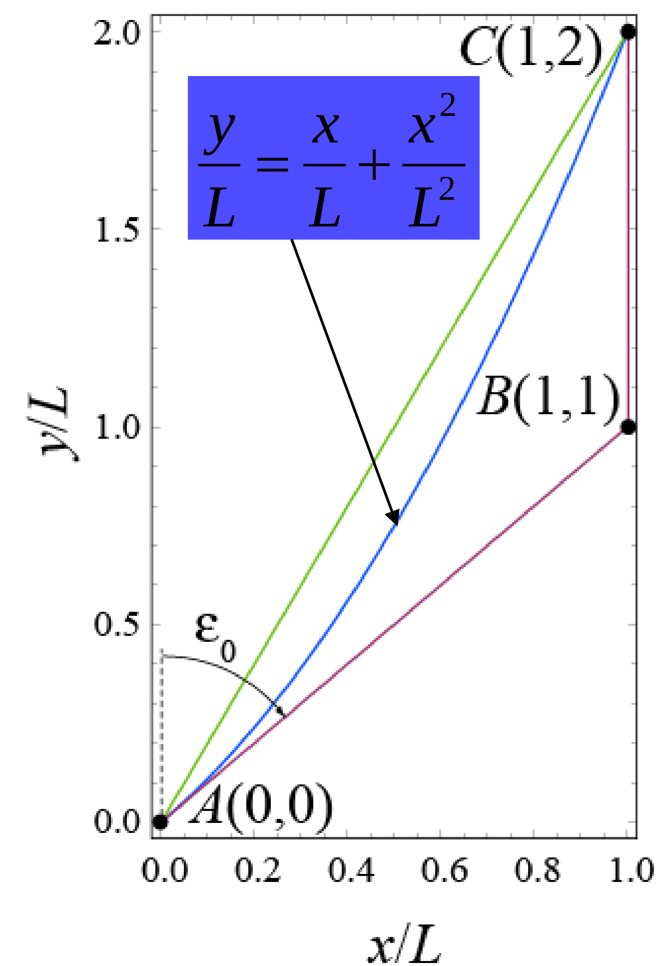
c) Si realitza el recorregut al llarg de la corba:

$$y(x) = x + \frac{x^2}{L} \Leftrightarrow x = -\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\sqrt{1+4\frac{y}{L}}$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{y}{L}}}dy$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{\frac{2+4\frac{y}{L}}{1+4\frac{y}{L}}}dy$$

$$L_{AC} = \int_A^C n\,ds = \sqrt{2}n_0\int_0^{2L}\frac{1+2\frac{y}{L}}{\sqrt{1+4\frac{y}{L}}}dy = \sqrt{2}\frac{8}{3}n_0L$$



Problemes

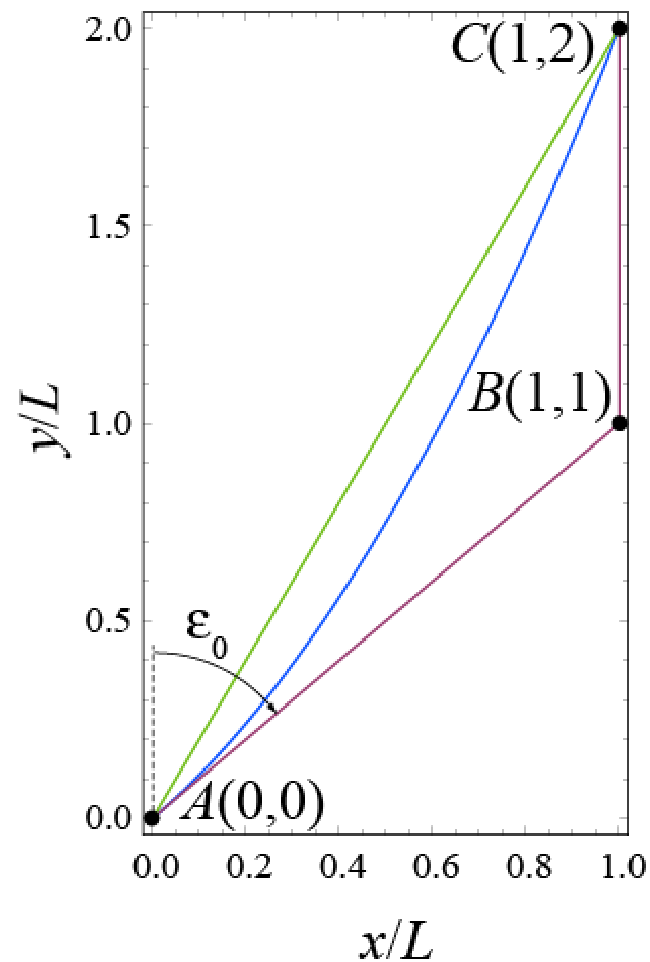
Resum:

$$\begin{cases} L_{AC} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) n_0 L + \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \sqrt{3}\right) n_0 L \\ t_{AC} = 3.973\, n_0 L / c \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{AC} = \frac{\left(25 - \sqrt{5}\right)}{6} n_0 L \\ t_{AC} = 3.794\, n_0 L / c \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{AC} = \sqrt{2}\,\frac{8}{3} n_0 L \\ t_{AC} = 3.771\, n_0 L / c \end{cases}$$

Conclusió: El temps emprat és menor per a la trajectòria parabòlica.

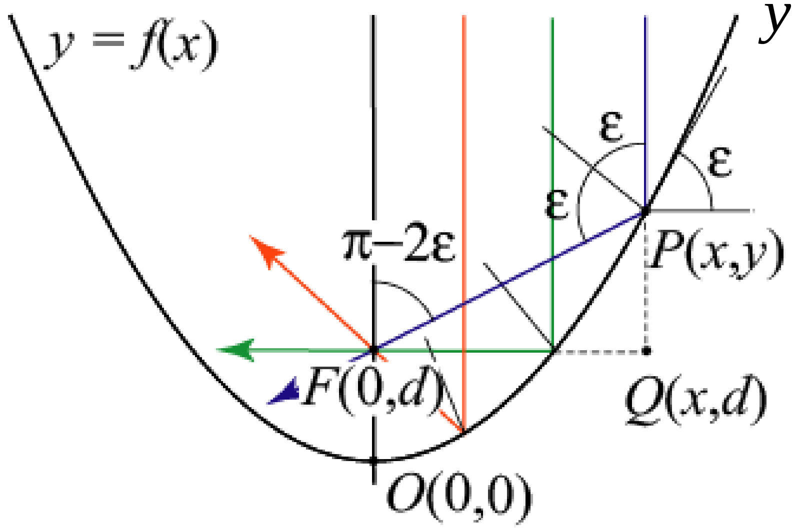


Problemes

P1.7. Determineu l'equació de la superfície reflectora que focalitza estigmàticament un feix de raigs paral·lels en un punt situat a una distància d del vèrtex de la superfície. Resoleu el problema aplicant:

a) la llei de la reflexió

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{FP}=(x,y-d)\Rightarrow \tan(2\varepsilon-\pi/2)=\frac{y-d}{x}\\&y'(x)=\tan\varepsilon\end{aligned}\right\}\quad \frac{y-d}{x}=\frac{y'^2-1}{2y'}\quad \left\{\begin{aligned}&y'^2=\frac{y}{d}\\&2y'=\frac{x}{d}\end{aligned}\right.$$



PARÀBOLA

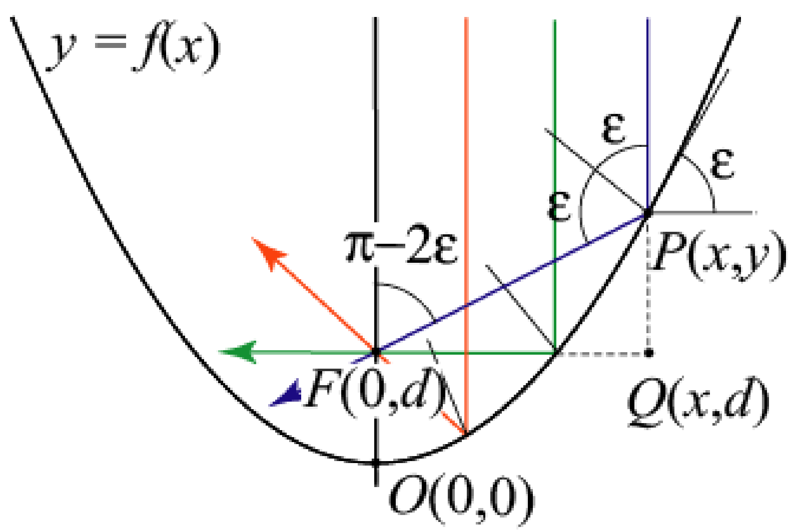
$$\boxed{y(x)=\frac{x^2}{4d}}$$

$$\tan(2\varepsilon-\pi/2)=-\cot(2\varepsilon)=\frac{\tan^2\varepsilon-1}{2\tan\varepsilon}$$

Problemes

b) la condició d'estigmatisme (constància del camí òptic recorregut)

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \overline{FO} + \overline{OF} = 2d \\ L &= \overline{QP} + \overline{PF} = (d-y) + \sqrt{x^2 + (d-y)^2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} L &= L_0 \\ d &> 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = \frac{x^2}{4d}}$$

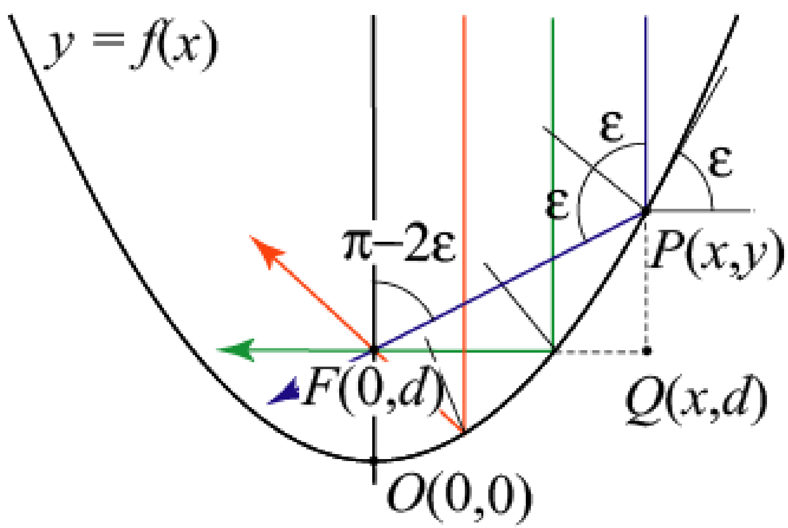


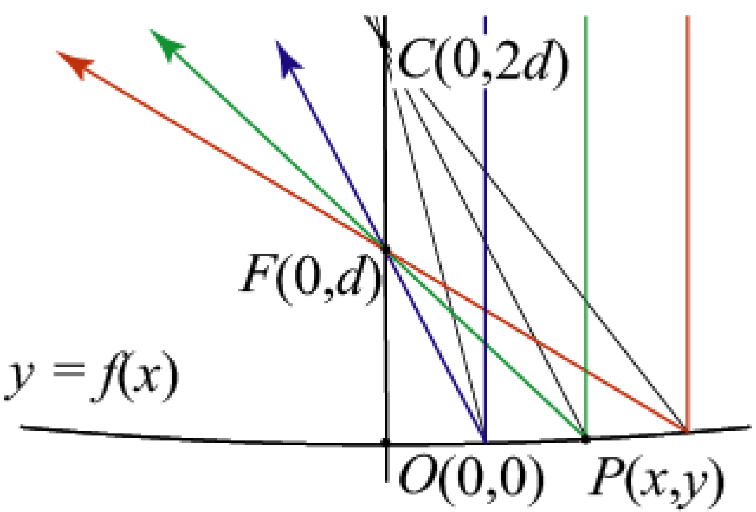
Problemes

L'aproximació paraxial: $(y-R)^2 = R^2 - 2Ry + y^2 \approx R^2 - 2Ry$

$x, y \langle\langle d \Rightarrow \boxed{x^2 + (y-R)^2 = R^2}$ **ESFERA CENTRADA EN C**

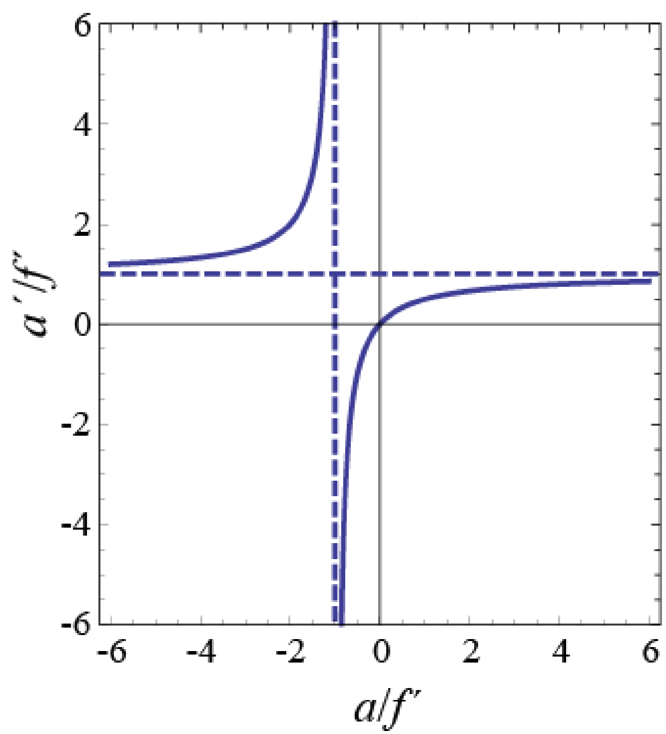
$$d = \frac{R}{2}$$





Problemes

P1.8. Determineu analíticament i gràficament, la posició i la naturalesa de les imatges proporcionades per una lent prima submergida en aire, tant per a objectes reals com virtuals. Considereu tant el cas d'una lent convergent com el d'una lent divergent.



EQUACIÓ DE CONJUGACIÓ DE GAUSS

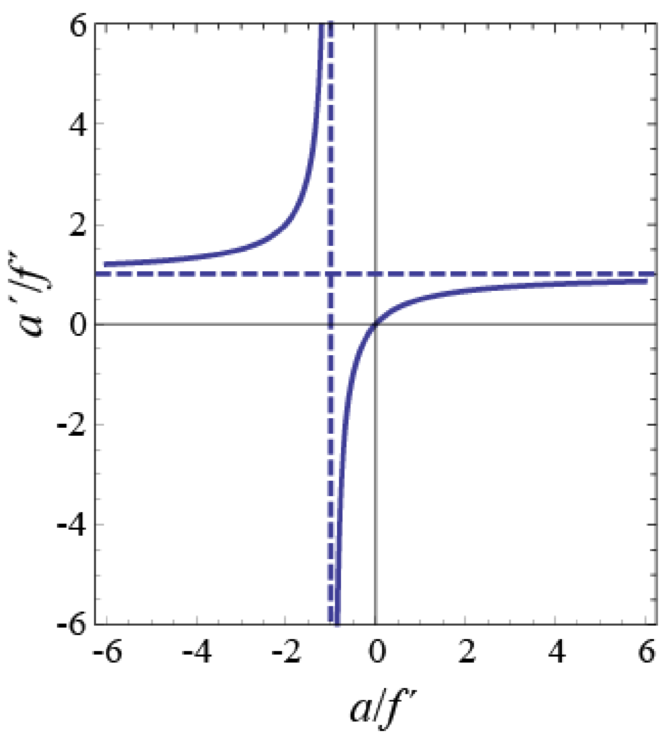
$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}$$

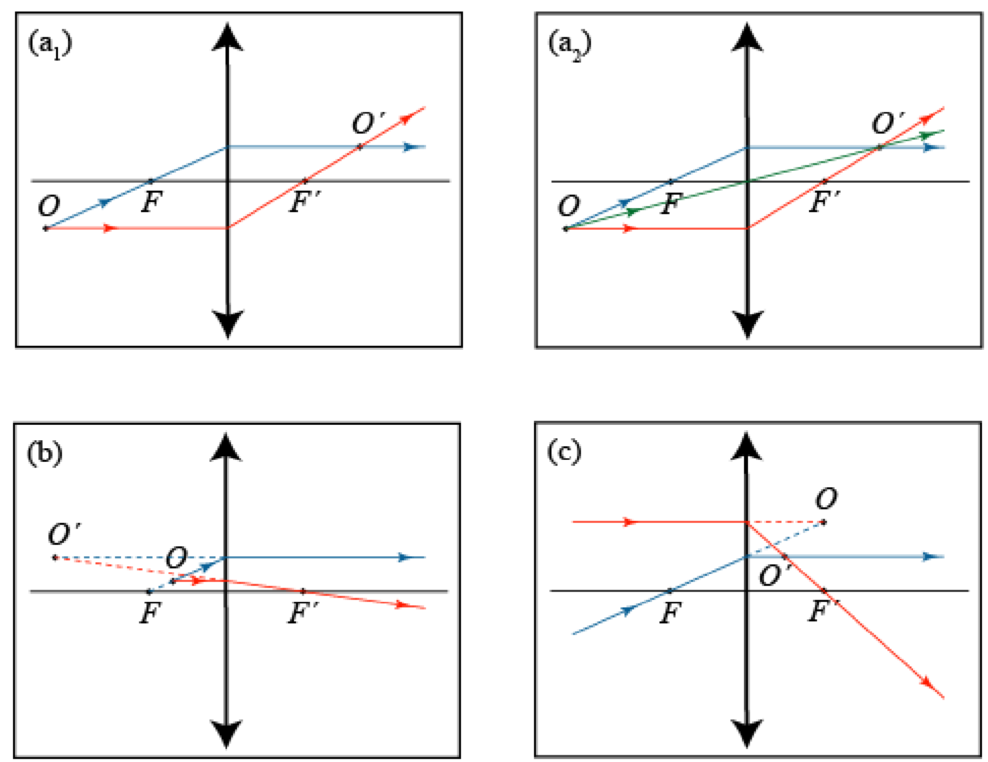
$$a \equiv \overline{HO}$$
$$a' \equiv \overline{H'O'}$$
$$f' \equiv \overline{H'F'}$$

Lent convergent $f' > 0$	Objecte real $a < 0$	Imatge real $a' > 0$
Lent divergent $f' < 0$	Objecte virtual $a > 0$	Imatge virtual $a' < 0$

Problemes

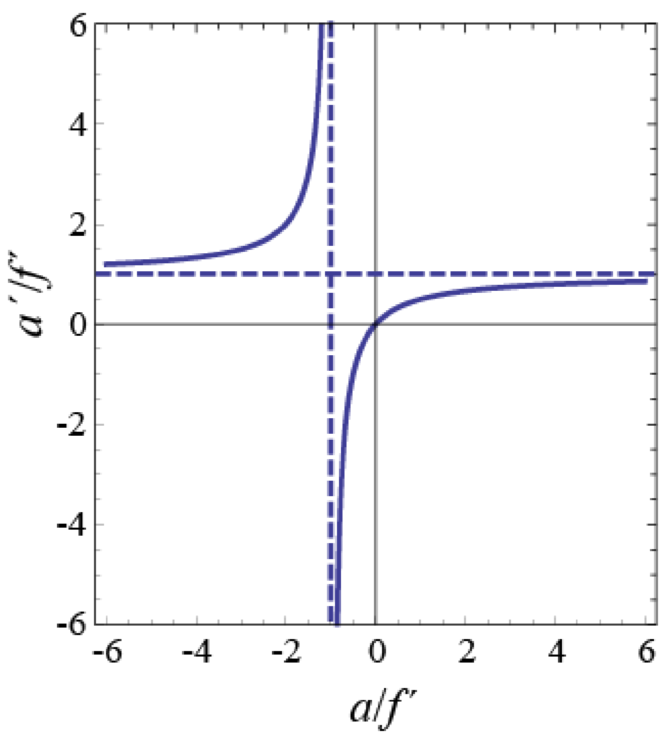
P1.8. Determineu analíticament i gràficament, la posició i la naturalesa de les imatges proporcionades per una lent prima submergida en aire, tant per a objectes reals com virtuals. Considereu tant el cas d'una lent convergent com el d'una lent divergent.

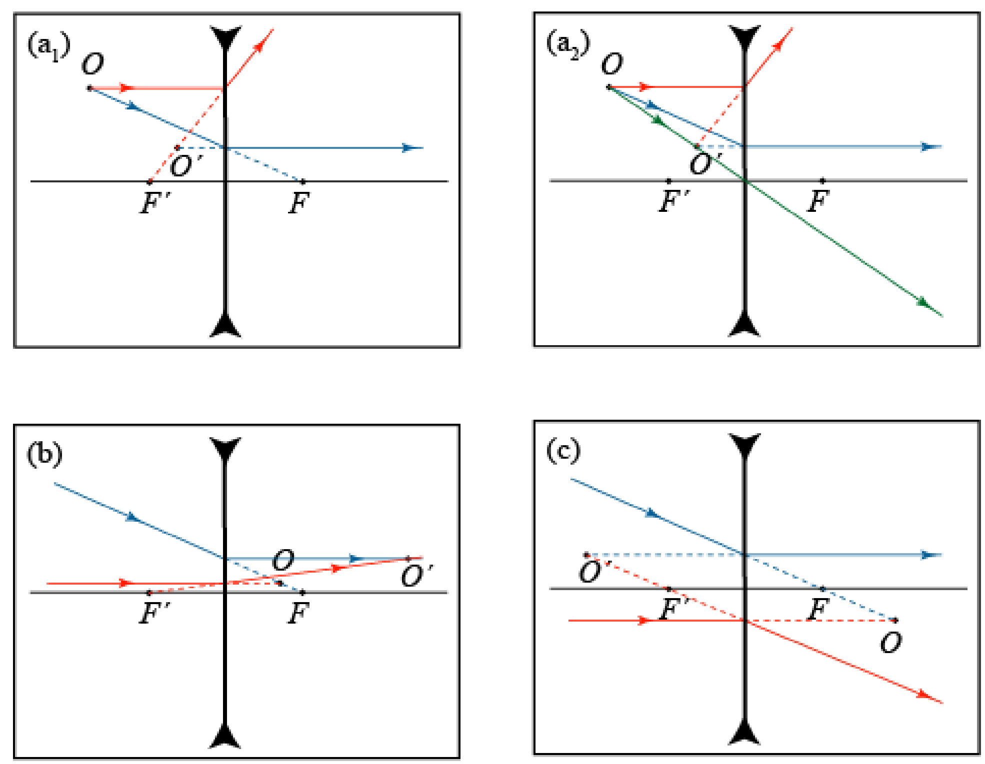




Problemes

P1.8. Determineu analíticament i gràficament, la posició i la naturalesa de les imatges proporcionades per una lent prima submergida en aire, tant per a objectes reals com virtuals. Considereu tant el cas d'una lent convergent com el d'una lent divergent.





Problemes

P1.11. Trobeu l’expressió del camp associat a una ona cilíndrica i a una ona esfèrica com a solucions de l’equació d’ones.

ADVANCED ENGINEERING ELECTROMAGNETICS

CONSTANTINE A. BALANIS
Arizona State University

Problemes

- Les dues primeres equacions de Maxwell en forma diferencial són equacions diferencials de primer ordre acoblades.

$$\nabla\times\vec{E} = -\vec{M}_i - \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_i + \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- En general, és molt desitjable desacoblar aquestes equacions. Això pot aconseguir-se a costa d'augmentar l'ordre de les equacions diferencials de segon ordre.
- Suposant un medi homogeni, es pot escriure que

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\vec{M}_i - \mu\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla\times\vec{M}_i - \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

EQUACIÓ D'ONES VECTORIAL

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} = \frac{\nabla q}{\varepsilon} + \nabla\times\vec{M}_i + \mu\frac{\partial\vec{J}_i}{\partial t} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

Problemes

- Suposant un medi homogeni, es pot escriure que

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\vec{J}_i+\sigma\nabla\times\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right)$$

VECTOR WAVE EQUATION

$$\nabla\cdot\vec{H}=0\Rightarrow\nabla^2\vec{H}=-\nabla\times\vec{J}_i+\sigma\vec{M}_i+\varepsilon\frac{\partial\vec{M}_i}{\partial t}+\sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

- Per a un medi lliure de fonts, les equacions d'ona són

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{H}=\sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

MEDI SENSE PÈRDUES

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{H}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Problemes

- Per a camps harmònics en el temps [variacions en el temps de la forma exp(-iωt)], les equacions d'ona poden ser creades usant

EQUACIÓ D'ONES DE HELMHOLTZ

$$\nabla^2\vec{E} = -i\omega\mu\sigma\vec{E} - \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = -\omega^2\mu\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0}$$

EQUACIÓ D'ONES DE HELMHOLTZ

$$\boxed{\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0}$$

EQUACIÓ DE DISPERSIÓ

$$\boxed{k^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\,\sigma/\omega)}$$

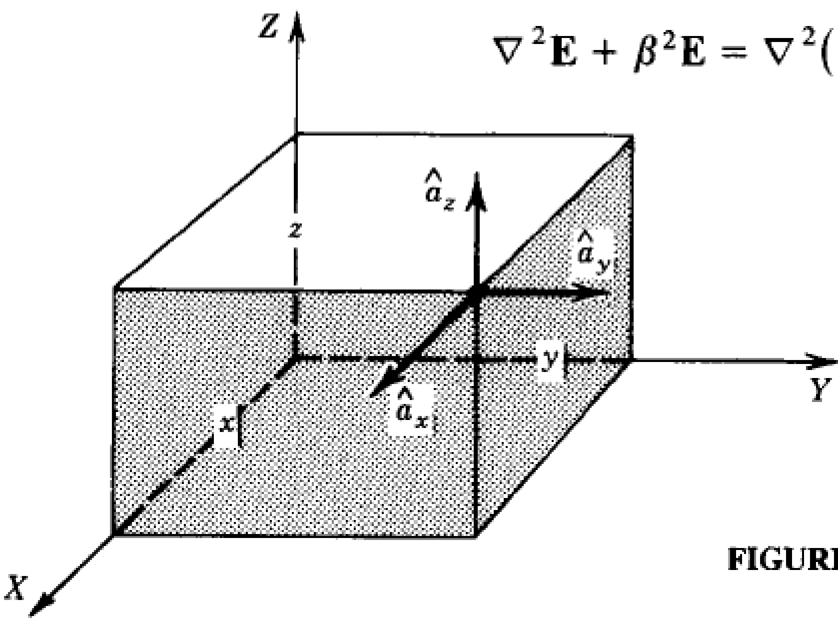
- La constant de propagació és *k*. La part real de *k* és la constant de fase i la part imaginària de *k* és la constant d'atenuació.

Problemes

- En aquesta secció es demostra el mètode de la separació de variables que pot ser utilitzat per a resoldre l'equació escalar de Helmholtz.
- En coordenades rectangulars, es pot escriure una solució general per a **E** com

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \hat{a}_x E_x(x, y, z) + \hat{a}_y E_y(x, y, z) + \hat{a}_z E_z(x, y, z)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} = \nabla^2(\hat{a}_x E_x + \hat{a}_y E_y + \hat{a}_z E_z) + \beta^2(\hat{a}_x E_x + \hat{a}_y E_y + \hat{a}_z E_z) = 0$$



$$\nabla^2 E_x(x, y, z) + \beta^2 E_x(x, y, z) = 0$$
$$\nabla^2 E_y(x, y, z) + \beta^2 E_y(x, y, z) = 0$$
$$\nabla^2 E_z(x, y, z) + \beta^2 E_z(x, y, z) = 0$$

FIGURE 3-1 Rectangular coordinate system and corresponding unit vectors.

Problemes

- Utilitzant el mètode de separació de les variables,

$$\nabla^2 E_x + \beta^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 E_x = 0$$

$$E_x(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)$$

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fh \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \beta^2 fgh = 0 \qquad \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dz^2} = -\beta^2$$

- La suma dels tres primers termes pot ser igual a $-\beta^2$ només si cada terme és constant.

Problemes

- La suma dels tres primers termes pot ser igual a $-\beta^2$ només si cada terme és constant.

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = -\beta_x^2 \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -\beta_x^2 f$$

$$\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dy^2} = -\beta_y^2 \Rightarrow \frac{d^2g}{dy^2} = -\beta_y^2 g$$

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2} = -\beta_z^2 \Rightarrow \frac{d^2h}{dz^2} = -\beta_z^2 h$$

CONDICIÓ DE LLIGADURA

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \beta^2$$

- A més, β_x, β_y i β_z es coneixen com les constants (o nombre) d'ona en la direcció *x*, *y*, *z*, respectivament.
- Algunes solucions vàlides típics serien

ONES VIATGERES

$$f_1(x) = A_1 e^{-j\beta_x x} + B_1 e^{+j\beta_x x}$$

ONES ESTACIONÀRIES

$$f_2(x) = C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)$$

Problemes

Wave type	Wave functions	Zeroes of wave functions	Infinities of wave functions
Traveling waves	$e^{-j\beta x}$ for $+x$ travel $e^{+j\beta x}$ for $-x$ travel	$\beta x \to -j\infty$ $\beta x \to +j\infty$	$\beta x \to +j\infty$ $\beta x \to -j\infty$
Standing waves	$\cos(\beta x)$ for $\pm x$ $\sin(\beta x)$ for $\pm x$	$\beta x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ $\beta x = \pm n\pi$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\beta x \to \pm j\infty$ $\beta x \to \pm j\infty$
Evanescent waves	$e^{-\alpha x}$ for $+x$ $e^{+\alpha x}$ for $-x$ $\cosh(\alpha x)$ for $\pm x$ $\sinh(\alpha x)$ for $\pm x$	$\alpha x \to +\infty$ $\alpha x \to -\infty$ $\alpha x = \pm j\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ $\alpha x = \pm jn\pi$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\alpha x \to -\infty$ $\alpha x \to +\infty$ $\alpha x \to \pm\infty$ $\alpha x \to \pm\infty$
Attenuating traveling waves	$e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}$ for $+x$ travel $e^{+\gamma x} = e^{+\alpha x}e^{+j\beta x}$ for $-x$ travel	$\gamma x \to +\infty$ $\gamma x \to -\infty$	$\gamma x \to -\infty$ $\gamma x \to +\infty$
Attenuating standing waves	$\cos(\gamma x) = \cos(\alpha x)\cosh(\beta x) - j\sin(\alpha x)\sinh(\beta x)$ for $\pm x$	$\gamma x = \pm j\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$	$\gamma x \to \pm j\infty$
	$\sin(\gamma x) = \sin(\alpha x)\cosh(\beta x) + j\cos(\alpha x)\sinh(\beta x)$ for $\pm x$	$\gamma x = \pm jn\pi$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\gamma x \to \pm j\infty$

Problemes

- Considerem en primer lloc la solució de **E** per a un medi lliure de fonts i sense pèrdues.
- L'equació per a E_z és una equació en derivades parcials de segon ordre:

$$\mathbf{E}(\rho,\phi,z) = \hat{a}_\rho E_\rho(\rho,\phi,z) + \hat{a}_\phi E_\phi(\rho,\phi,z) + \hat{a}_z E_z(\rho,\phi,z)$$

$$\nabla^2(\hat{a}_\rho E_\rho + \hat{a}_\phi E_\phi + \hat{a}_z E_z) = -\beta^2(\hat{a}_\rho E_\rho + \hat{a}_\phi E_\phi + \hat{a}_z E_z)$$

$$\nabla^2(\hat{a}_\rho E_\rho) \neq \hat{a}_\rho \nabla^2 E_\rho$$

$$\nabla^2(\hat{a}_\phi E_\phi) \neq \hat{a}_\phi \nabla^2 E_\phi$$

$$\nabla^2(\hat{a}_z E_z) = \hat{a}_z \nabla^2 E_z$$

$$\nabla^2 E_\rho + \left(-\frac{E_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}\right) = -\beta^2 E_\rho$$

$$\nabla^2 E_\phi + \left(-\frac{E_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right) = -\beta^2 E\phi$$

$$\nabla^2 E_z = -\beta^2 E_z$$

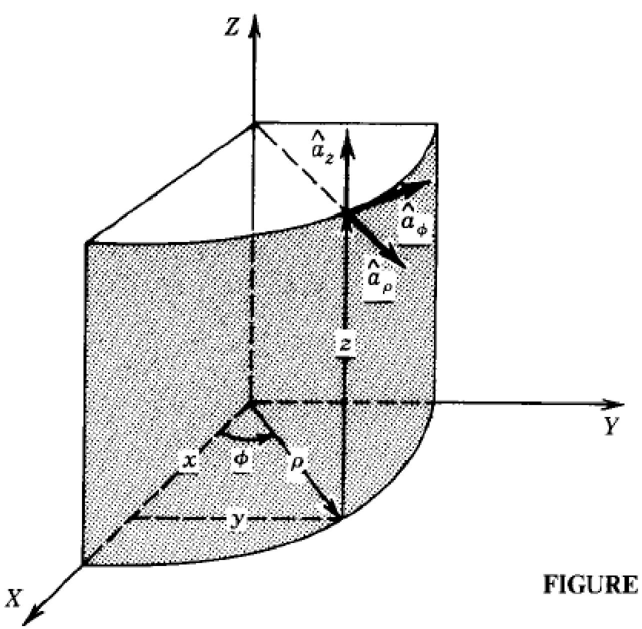


FIGURE 3-4 Cylindrical coordinate system and corresponding unit vectors.

Problemes

$$\nabla^2 E_z = -\beta^2 E_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\beta^2\psi$$

$$\psi(\rho,\phi,z) = f(\rho)g(\phi)h(z)$$

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{f}\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2g}{d\phi^2} + \frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2} = -\beta_z^2$$

$$h_1(z) = A_3 e^{-j\beta_z z} + B_3 e^{+j\beta_z z}$$

$$h_2(z) = C_3\cos(\beta_z z) + D_3\sin(\beta_z z)$$

$$\frac{\rho^2}{f}\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{\rho}{f}\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g}\frac{d^2g}{d\phi^2} + (\beta^2 - \beta_z^2)\rho^2 = 0$$

$$\frac{1}{g}\frac{d^2g}{d\phi^2} = -m^2$$

$$g_1(\phi) = A_2 e^{-jm\phi} + B_2 e^{+jm\phi}$$

$$g_2(\phi) = C_2\cos(m\phi) + D_2\sin(m\phi)$$

BESSEL DIFFERENTIAL EQUATION

$$\rho^2\frac{d^2f}{d\rho^2} + \rho\frac{df}{d\rho} + \left[(\beta_\rho\rho)^2 - m^2\right]f = 0$$

$$\beta^2 - \beta_z^2 = \beta_\rho^2 \Rightarrow \beta_\rho^2 + \beta_z^2 = \beta^2$$

Problemes

- Les **funcions de Bessel** de primera i segona classe, $J_m(\beta_\rho\rho)$ i $Y_m(\beta_\rho\rho)$, s'utilitzen per a representar les ones estacionàries, mentre que les **funcions de Hankel** de primera i segona classe, $H^{(1)}{}_m(\beta_\rho\rho)$ i $H^{(2)}{}_m(\beta_\rho\rho)$, representen les ones que viatgen.

$$f_1(\rho) = A_1 J_m(\beta_\rho\rho) + B_1 Y_m(\beta_\rho\rho)$$
$$f_2(\rho) = C_1 H_m^{(1)}(\beta_\rho\rho) + D_1 H_m^{(2)}(\beta_\rho\rho)$$

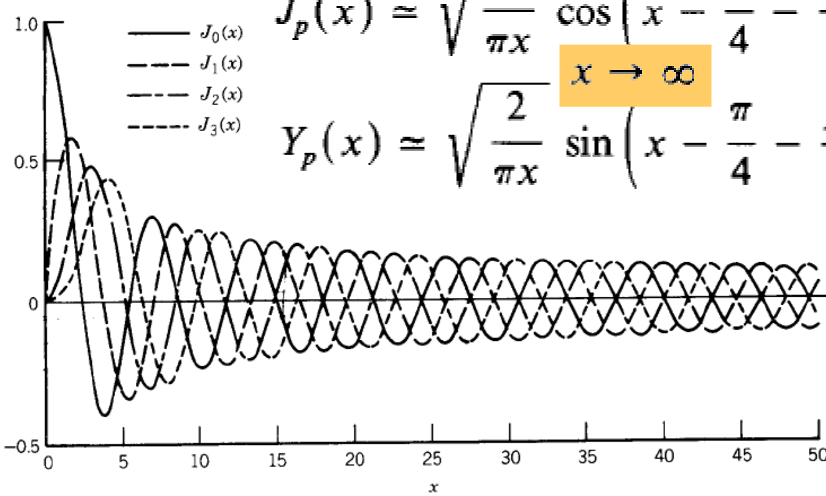
$$\rho^2\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho\frac{df}{d\rho} + \left[(\beta_\rho\rho)^2 - m^2\right] f = 0$$

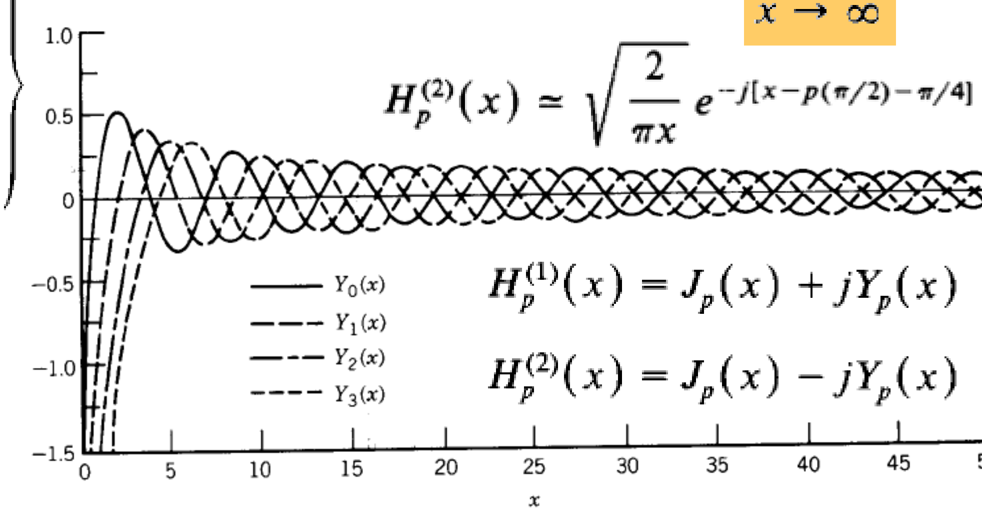
$$J_p(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right)$$
$$Y_p(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right)$$

$x \to \infty$

$$H_p^{(1)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{j[x - p(\pi/2) - \pi/4]}$$
$$H_p^{(2)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-j[x - p(\pi/2) - \pi/4]}$$

$x \to \infty$





$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + jY_p(x)$$
$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - jY_p(x)$$

Problemes

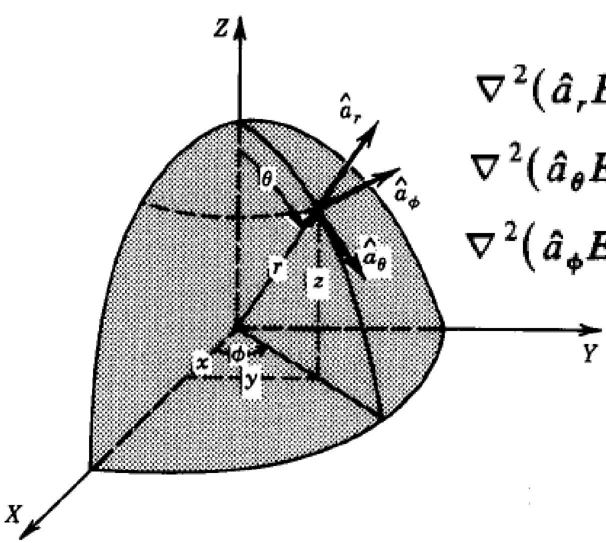
Wave type	Wave functions	Zeroes of wave functions	Infinities of wave functions
Traveling waves	$H_m^{(1)}(\beta\rho) = J_m(\beta\rho) + jY_m(\beta\rho)$ for $-\rho$ travel	$\beta\rho \to +j\infty$	$\beta\rho = 0$ $\beta\rho \to -j\infty$
	$H_m^{(2)}(\beta\rho) = J_m(\beta\rho) - jY_m(\beta\rho)$ for $+\rho$ travel	$\beta\rho \to -j\infty$	$\beta\rho = 0$ $\beta\rho \to +j\infty$
Standing waves	$J_m(\beta\rho)$ for $\pm\rho$	Infinite number (see Table 9-2)	$\beta\rho \to \pm j\infty$
	$Y_m(\beta\rho)$ for $\pm\rho$	Infinite number	$\beta\rho = 0$ $\beta\rho \to \pm j\infty$
Evanescent waves	$K_m(\alpha\rho) = \frac{\pi}{2}(-j)^{m+1}H_m^{(2)}(-j\alpha\rho)$ for $+\rho$	$\alpha\rho \to +\infty$	
	$I_m(\alpha\rho) = j^m J_m(-j\alpha\rho)$ for $-\rho$		$\alpha\rho \to +\infty$ for integer orders
Attenuating traveling waves	$H_m^{(1)}(\gamma\rho) = H_m^{(1)}(\alpha\rho + j\beta\rho)$ for $-\rho$ travel	$\gamma\rho \to +j\infty$	$\gamma\rho \to -j\infty$
	$H_m^{(2)}(\gamma\rho) = H_m^{(2)}(\alpha\rho + j\beta\rho)$ for $+\rho$ travel	$\gamma\rho \to -j\infty$	$\gamma\rho \to +j\infty$
Attenuating standing waves	$J_m(\gamma\rho) = J_m(\alpha\rho + j\beta\rho)$ for $\pm\rho$	Infinite number	$\gamma\rho \to \pm j\infty$
	$Y_m(\gamma\rho) = Y_m(\alpha\rho + j\beta\rho)$ for $\pm\rho$	Infinite number	$\gamma\rho \to \pm j\infty$

Problemes

- Suposem que l'espai en què els camps elèctrics i magnètics han de ser resolts està lliure de fonts i no té pèrdues.
- Les tres equacions escalars diferencials parcials estan acoblades. No obstant això, solucions TE^r i TM^r han de satisfer l'equació d'ona escalar: $\nabla^2\psi(r,\theta,\phi) = -\beta^2\psi$

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = \hat{a}_r E_r(r,\theta,\phi) + \hat{a}_\theta E_\theta(r,\theta,\phi) + \hat{a}_\phi E_\phi(r,\theta,\phi)$$

$$\nabla^2(\hat{a}_r E_r + \hat{a}_\theta E_\theta + \hat{a}_\phi E_\phi) = -\beta^2(\hat{a}_r E_r + \hat{a}_\theta E_\theta + \hat{a}_\phi E_\phi)$$



$$\nabla^2(\hat{a}_r E_r) \neq \hat{a}_r \nabla^2 E_r$$

$$\nabla^2(\hat{a}_\theta E_\theta) \neq \hat{a}_\theta \nabla^2 E_\theta$$

$$\nabla^2(\hat{a}_\phi E_\phi) \neq \hat{a}_\phi \nabla^2 E_\phi$$

$$\nabla^2 E_r - \frac{2}{r^2}\left(E_r + E_\theta \cot\theta + \csc\theta \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}\right) = -\beta^2 E_r$$

$$\nabla^2 E_\theta - \frac{1}{r^2}\left(E_\theta \csc^2\theta - 2\frac{\partial E_r}{\partial \theta} + 2\cot\theta\csc\theta \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}\right) = -\beta^2 E_\theta$$

$$\nabla^2 E_\phi - \frac{1}{r^2}\left(E_\phi \csc^2\theta - 2\csc\theta \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - 2\cot\theta\csc\theta \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi}\right) = -\beta^2 E_\phi$$

Problemes

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\phi) = -\beta^2\psi(r,\theta,\phi) \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = -\beta^2\psi$$

$$\psi(r,\theta,\phi) = f(r)g(\theta)h(\phi)$$

$$\frac{\sin^2\theta}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\} + \frac{\sin\theta}{g}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{dg}{d\theta}\right\} + \frac{1}{h}\frac{d^2h}{d\phi^2} = -(\beta r\sin\theta)^2$$

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{d\phi^2} = -m^2$$

$$h_1(\phi) = A_3e^{-jm\phi} + B_3e^{+jm\phi}$$

$$h_2(\phi) = C_3\cos(m\phi) + D_3\sin(m\phi)$$

EQUACIÓ DIFERENCIAL DE LEGENDRE

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\} + (\beta r)^2 + \frac{1}{g\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{dg}{d\theta}\right\} - \left\{\frac{m}{\sin\theta}\right\}^2 = 0$$

$$\frac{1}{g\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{dg}{d\theta}\right\} - \left\{\frac{m}{\sin\theta}\right\}^2 = -n(n+1)$$

$n \neq$ integer

$$g_1(\theta) = A_2P_n^m(\cos\theta) + B_2P_n^m(-\cos\theta)$$

$$g_2(\theta) = C_2P_n^m(\cos\theta) + D_2Q_n^m(\cos\theta)$$

$n =$ integer

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\} + (\beta r)^2 - n(n+1) = 0$$

Problemes

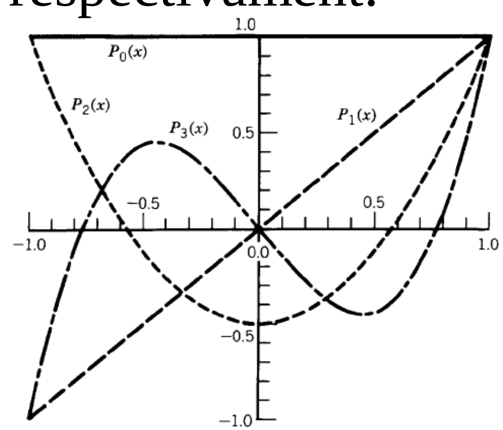
- Les funcions de Bessel esfèriques de primera i segona classe, $j_n(\beta r)$ i $y_m(\beta r)$, s'utilitzen per a representar les ones estacionàries, mentre que les funcions de Hankel esfèriques de primera i segona classe, $h^{(1)}{}_n(\beta r)$ i $h^{(2)}{}_n(\beta r)$, representen les ones que viatgen.

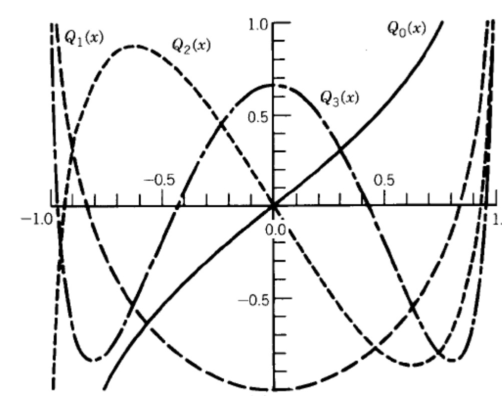
$$\left.\begin{aligned} f_1(r) &= A_1 j_n(\beta r) + B_1 y_n(\beta r) \\ f_2(r) &= C_1 h_n^{(1)}(\beta r) + D_1 h_n^{(2)}(\beta r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\} + (\beta r)^2 - n(n+1) = 0$$

- $P_n^m(\cos\theta)$ i $Q_n^m(\cos\theta)$ són les **funcions de Legendre associades de primera** i **segona classe**, respectivament.

$$P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

$$Q_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m}$$





Problemes

Wave type	Wave functions	Zeroes of wave functions	Infinities of wave functions
Traveling waves	$h_n^{(1)}(\beta r) = j_n(\beta r) + j y_n(\beta r)$ for $-r$ travel	$\beta r \to +j\infty$	$\beta r = 0$ $\beta r \to -j\infty$
	$h_n^{(2)}(\beta r) = j_n(\beta r) - j y_n(\beta r)$ for $+r$ travel	$\beta r \to -j\infty$	$\beta r = 0$ $\beta r \to +j\infty$
Standing waves	$j_n(\beta r)$ for $\pm r$	Infinite number	$\beta r \to \pm j\infty$
	$y_n(\beta r)$ for $\pm r$	Infinite number	$\beta r = 0$ $\beta r \to \pm j\infty$

FÓRMULA DE RODRIGUES

$$j_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}}\, J_{n+1/2}(\beta r) \qquad h_n^{(1)}(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$y_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}}\, Y_{n+1/2}(\beta r) \qquad h_n^{(2)}(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}}\, H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r)$$

$$\psi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$Q_n(x) = P_n(x)\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \psi(n)\right\} + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m (n+m)!}{(m!)^2 (n-m)!}\psi(m)\left(\frac{1-x}{2}\right)^m$$

PROBLEMES D’ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 2

Problemes

P2.1. Calculeu la matriu de Jones associada a una làmina retardadora, amb les seues línies neutres centrades, que introdueix un desfasament δ en la component *Y*. Resoleu el mateix cas quan es gira l'element anterior un angle θ.

$$R(0,\delta) = P_0 P_0^* + \exp(i\delta) P_{\pi/2} P_{\pi/2}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \exp(i\delta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(0,\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\delta) \end{pmatrix}$$

LÀMINA RETARDADORA EIX RÀPID VERTICAL

$$R(\theta,\delta) = P_\theta P_\theta^* + \exp(i\delta) P_{\theta+\pi/2} P_{\theta+\pi/2}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} + \exp(i\delta) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta,\delta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \exp(i\delta)\sin^2\theta & [1-\exp(i\delta)]\sin\theta\cos\theta \\ [1-\exp(i\delta)]\sin\theta\cos\theta & \exp(i\delta)\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

LÀMINA RETARDADORA EIX RÀPID GIRAT Θ

Problemes

Resoleu el mateix cas quan es gira l'element anterior un angle θ.

Mètode 2n:

$$R(0,\delta) = P_0 P_0^* + \exp(i\delta) P_{\pi/2} P_{\pi/2}^*$$

$$R(\theta,\delta) = P_\theta P_\theta^* + \exp(i\delta) P_{\theta+\pi/2} P_{\theta+\pi/2}^*$$

$$R(\theta,\delta) = R(-\theta) R(0,\delta) R(\theta)$$

$$R(\theta) = P_0 P_\theta^* + P_{\pi/2} P_{\theta+\pi/2}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R(-\theta) = P_\theta P_0^* + P_{\theta+\pi/2} P_{\pi/2}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

MATRIUS DE ROTACIÓ DEL SISTEMA DE REFERÈNCIA

Problemes

Se situa la làmina retardadora anterior entre dos polaritzadors lineals encreuats, de manera que les línies neutres de la làmina formen un angle θ amb els eixos de transmissió d'ambdós polaritzadors. Calculeu la intensitat emergent del dispositiu si s'il·lumina normalment amb un feix paral·lel de llum natural d'intensitat I_0.

1r ELEMENT

$$P(0) = P_0 P_0^*$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{I_0/2}\,P_0$$

2n ELEMENT

$$R(\theta,\delta) = P_\theta P_\theta^* + \exp(i\delta) P_{\theta+\pi/2} P_{\theta+\pi/2}^*$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_2\rangle = R(\theta,\delta)|\psi_1\rangle$$

3r ELEMENT

$$P(\pi/2) = P_{\pi/2} P_{\pi/2}^*$$

$$|\psi_3\rangle = P(\pi/2)|\psi_2\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \sqrt{I_0/2}\left\{P_\theta \cos\theta - P_{\theta+\pi/2}\exp(i\delta)\sin\theta\right\}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{I_0/2}\left\{\left(P_{\pi/2}^* P_\theta\right)\cos\theta - \left(P_{\pi/2}^* P_{\theta+\pi/2}\right)\exp(i\delta)\sin\theta\right\}P_{\pi/2}$$

Problemes

Calculeu la intensitat emergent del dispositiu si s'il·lumina normalment amb un feix paral·lel de llum natural d'intensitat I_0. Sota quines condicions la intensitat anterior és màxima?

$$\left|\psi_3\right\rangle = \sqrt{\frac{I_0}{2}}\{\sin\theta\cos\theta - \exp(i\delta)\sin\theta\cos\theta\}P_{\pi/2} = \sqrt{\frac{I_0}{2}}\{1-\exp(i\delta)\}\sin\theta\cos\theta P_{\pi/2}$$

$$\left|\psi_3\right\rangle = -i\sqrt{I_0/2}\,\sin(2\theta)\sin(\delta/2)\exp(i\delta/2)P_{\pi/2}$$

$$I = (I_0/2)\sin^2 2\theta\sin^2(\delta/2) \qquad I_{max} = I_0/2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \pm\pi/2 \\ \delta/2 = \pm\pi/2 \end{cases}$$

Conclusió: La intensitat és màxima quan la làmina retardadora és de mitja ona (rotor) i es col·loca a $\theta = \pm 45^{\circ}$

$$\left|\psi_1\right\rangle = \sqrt{I_0/2}P_0 \qquad \left|\psi_2\right\rangle = \sqrt{I_0/2}P_{\pm\pi/2} \qquad \left|\psi_3\right\rangle = \pm\sqrt{I_0/2}P_{\pi/2} = \left|\psi_2\right\rangle$$

Problemes

P2.2. Es disposa d'un sistema format per l'acoblament de dues làmines de mitja ona amb els seus eixos lents formant entre si un angle β.

a) Calculeu la matriu de Jones que caracteritza aquest dispositiu.

NOTA: TRACTAMENT MATEMÀTIC POC AVANTATJÓS

$$M = R(\alpha+\beta,\pi)R(\alpha,\pi) = \left(P_{\alpha+\beta}P^*_{\alpha+\beta} + \exp(i\pi)P_{\alpha+\beta+\pi/2}P^*_{\alpha+\beta+\pi/2}\right)\left(P_\alpha P^*_\alpha + \exp(i\pi)P_{\alpha+\pi/2}P^*_{\alpha+\pi/2}\right)$$

$$M = \cos\beta P_{\alpha+\beta}P^*_\alpha + \sin\beta P_{\alpha+\beta+\pi/2}P^*_\alpha - \sin\beta P_{\alpha+\beta}P^*_{\alpha+\pi/2} + \cos\beta P_{\alpha+\beta+\pi/2}P^*_{\alpha+\pi/2}$$

$$R(\alpha,\pi) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$M = R(\alpha+\beta,\pi)R(\alpha,\pi) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha+\beta) & \sin 2(\alpha+\beta) \\ \sin 2(\alpha+\beta) & -\cos 2(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} = \exp(2i\beta)LL^* + \exp(-2i\beta)RR^*$$

Problemes

a) Calculeu la matriu de Jones que caracteritza aquest dispositiu.

$$R(\alpha,\pi)=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{pmatrix}P_0^* + \begin{pmatrix}\sin 2\alpha\\ -\cos 2\alpha\end{pmatrix}P_{\pi/2}^* = P_{2\alpha}P_0^* + P_{2\alpha-\pi/2}P_{\pi/2}^*$$

$$R(\alpha,\pi)P_\gamma = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha\cos\gamma+\sin 2\alpha\sin\gamma\\ \sin 2\alpha\cos\gamma-\cos 2\alpha\sin\gamma\end{pmatrix}$$

POLARITZACIÓ LINEAL SIMÈTRICA RESPECTE A L'EIX LENT DEL RETARDADOR

$$\boxed{R(\alpha,\pi)P_\gamma = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha-\gamma)\\ \sin(2\alpha-\gamma)\end{pmatrix}=P_{2\alpha-\gamma}}$$

POLARITZACIÓ LINEAL AMB ROTACIÓ 2β

$$M\cdot P_\gamma = R(\alpha+\beta,\pi)R(\alpha,\pi)P_\gamma = R(\alpha+\beta,\pi)P_{2\alpha-\gamma} = P_{2(\alpha+\beta)-(2\alpha-\gamma)} = P_{\gamma+2\beta}$$

$$R(-\theta)=P_\theta P_0^* + P_{\theta+\pi/2}P_{\pi/2}^* = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

MATRIU DE ROTACIÓ

Problemes

b) Se situa ara el dispositiu anterior entre dos polaritzadors lineals amb el seus eixos de transmissió perpendiculars entre si. Calculeu la intensitat emergent d'aquest dispositiu quan s'il·lumina normalment amb un feix col·limat de llum natural d'intensitat I_0.

1r ELEMENT

$$P(0) = P_0 P_0^*$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{I_0/2}\,P_0$$

2n ELEMENT

$$M = \exp(2i\beta)LL^* + \exp(-2i\beta)RR^*$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_2\rangle = M|\psi_1\rangle$$

3r ELEMENT

$$P(\pi/2) = P_{\pi/2}P_{\pi/2}^*$$

$$|\psi_3\rangle = P(\pi/2)|\psi_2\rangle$$

<u>**1r MÈTODE**</u>

$$|\psi_2\rangle = \sqrt{I_0/2}\{M \cdot P_0\} = \sqrt{I_0/2}\,P_{2\beta}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{I_0/2}\{\cos(2\beta - \pi/2)\}P_{\pi/2} = \sqrt{I_0/2}\,\sin(2\beta)P_{\pi/2}$$

Problemes

b) Se situa ara el dispositiu anterior entre dos polaritzadors lineals amb el seus eixos de transmissió perpendiculars entre si. Calculeu la intensitat emergent d'aquest dispositiu quan s'il·lumina normalment amb un feix col·limat de llum natural d'intensitat I_0.

1r ELEMENT

$$P(0) = P_0 P_0^*$$

2n ELEMENT

$$M = \exp(2i\beta) L L^* + \exp(-2i\beta) R R^*$$

3r ELEMENT

$$P(\pi/2) = P_{\pi/2} P_{\pi/2}^*$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{I_0/2}\, P_0 = \sqrt{I_0/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_3\rangle = P(\pi/2) M |\psi_1\rangle$$

$$P(\pi/2) M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_3\rangle = \sqrt{I_0/2} \sin 2\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2n MÈTODE

$$\boxed{I = \langle \psi_3 | \psi_3 \rangle = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\beta}$$

Problemes

P2.3. Siga un dispositiu òptic que es pretén caracteritzar. La seua acció sobre qualsevol llum linealment polaritzada és únicament girar el seu pla de polarització un angle γ, sense cap altre canvi en el seu estat de polarització o en la seua intensitat. Aquest fenomen es denomina *activitat òptica* o *poder rotatori*. A partir d'aquest fet,

a) Calculeu la matriu de Jones del dispositiu.

b) Obteniu els valors i vectors propis d'aquesta matriu, i interpreteu-los en funció de llums polaritzades elementals.

$$\left.\begin{array}{c} |\psi_2\rangle = M(\gamma)|\psi_1\rangle \\ |\psi_1\rangle = P_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow |\psi_2\rangle = P_{\alpha+\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{c} P_\gamma = M(\gamma)P_0 \\ P_{\gamma+\pi/2} = M(\gamma)P_{\pi/2} \end{array}\right\} \Rightarrow M(\gamma) = P_\gamma P_0^* + P_{\gamma+\pi/2}P_{\pi/2}^*$$

Problemes

a) Calculeu la matriu de Jones del dispositiu.

$$M(\gamma) = P_\gamma P_0^* + P_{\gamma+\pi/2} P_{\pi/2}^*$$

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Conclusió: Com és lògic, la matriu de Jones coincideix amb la matriu de rotació $R(-\gamma)$

$$M(\gamma)P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma+\alpha) \\ \sin(\gamma+\alpha) \end{pmatrix} = P_{\alpha+\gamma}$$

Problemes

b) Obteniu els valors i vectors propis d'aquesta matriu, i interpreteu-los en funció de llums polaritzades elementals.

$$M(\gamma)|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Leftrightarrow \det\left(\overleftrightarrow{M} - \lambda\overleftrightarrow{I}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma - \lambda & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\cos\gamma - \lambda)^2 + \sin^2\gamma = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\gamma + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_\pm = \cos\gamma \pm \sqrt{\cos^2\gamma - 1} = \exp(\pm i\gamma)}$$

$$M(\gamma)|\psi_\pm\rangle = \lambda_\pm|\psi_\pm\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{x\pm} \\ \psi_{y\pm} \end{pmatrix} = \exp(\pm i\gamma) \begin{pmatrix} \psi_{x\pm} \\ \psi_{y\pm} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{x\pm}\cos\gamma - \psi_{y\pm}\sin\gamma = \psi_{x\pm}\exp(\pm i\gamma) \equiv \psi_{x\pm}\cos(\gamma) \pm i\psi_{x\pm}\sin(\gamma) \Rightarrow \psi_{y\pm} = \mp i\psi_{x\pm}$$

$$|\psi_\pm\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{x\pm} \\ \psi_{y\pm} \end{pmatrix} = \psi_{x\pm}\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle\psi_\pm|\psi_\pm\rangle = 1} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi_+\rangle &= L \\ |\psi_-\rangle &= R \end{aligned}}$$

Problemes

b) Obteniu els valors i vectors propis d'aquesta matriu, i interpreteu-los en funció de llums polaritzades elementals.

$$M(\gamma) = \exp(-i\gamma)RR^* + \exp(i\gamma)LL^*$$

- Com hem vist, la matriu M coincideix amb la matriu de rotació $R(-\gamma)$.
- Açò provoca una rotació de l'el·lipse de polarització, sense modificar el desfasament entre les dues components principals.
- Finalment, aquesta rotació no afecta (excepte un factor de fase) estats amb simetria circular, com són l'estat L i l'estat R, els quals constitueixen els estats propis del sistema.

Problemes

P2.4. Hi ha substàncies que absorbeixen de forma diferent la llum polaritzada circularment dextrogira, *R*, o levogira, *L*, (dicroisme circular). Calculeu la matriu de Jones associada a una substància d'aquest tipus, la transmitància en amplitud del qual és p_R i p_L, per a llum *R* i *L*, respectivament.

$$D = p_R RR^* + p_L LL^* = \frac{p_R}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix} + \frac{p_L}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}$$

$$D = \frac{p_R}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix} + \frac{p_L}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{p_R+p_L}{2} & -i\,\frac{p_R-p_L}{2}\\ i\,\frac{p_R-p_L}{2} & \frac{p_R+p_L}{2}\end{pmatrix}$$

Problemes

Efecte sobre llum linealment polaritzada:

$$\left|\psi_{out}\right\rangle = D\cdot P_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{p_R+p_L}{2}\cos\alpha - i\,\frac{p_R-p_L}{2}\sin\alpha \\ i\,\frac{p_R-p_L}{2}\cos\alpha + \frac{p_R+p_L}{2}\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{p_R+p_L}{2}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + i\,\frac{p_R-p_L}{2}\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle = D\cdot P_\alpha = \frac{p_R+p_L}{2}P_\alpha + i\,\frac{p_R-p_L}{2}P_{\alpha+\pi/2}$$

Conclusió: L'acció d'aquestes substàncies sobre llum linealment polaritzada és la de transformar aquesta en llum el·lípticament polaritzada, dextrogira si $p_R > p_L$, on l'eix major coincideix amb el pla de polarització de la llum entrant.

Problemes

Altres exemples:

POLARITZADOR CIRCULAR LEVOGIR

$$\left.\begin{aligned} p_R &= 0 \\ p_L &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

POLARITZADOR CIRCULAR DEXTROGIR

$$\left.\begin{aligned} p_R &= 1 \\ p_L &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

En el cas que ambdós coeficients d'absorció coincidisquen, l'element òptic es converteix en un *filtre gris*.

$$\left.\begin{aligned} p_R &= t \\ p_L &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t \cdot \overleftrightarrow{I}$$

Problemes

P2.5. Considereu una ona linealment polaritzada en una atmosfera d'electrons la densitat de la qual és 10^{12} m^{-3}. En la direcció de propagació s'aplica un camp magnètic d'intensitat B_0 = 0.5 10^{-4} weber/m^2. Obteniu una expressió que represente el canvi d'estat de polarització per longitud d'ona en la direcció de propagació.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - ikz)$$

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}\right)$$

P2.3

$$\chi_{11} = -N\frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 - \left(\omega\omega_c\right)^2}$$

$$\chi_{12} = -N\frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega\omega_c}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 - \left(\omega\omega_c\right)^2}$$

$$|\psi_{in}\rangle = E_0 L \Rightarrow |\psi_{out}\rangle = E_0 L \exp(-ik_+ z)$$

$$|\psi_{in}\rangle = E_0 R \Rightarrow |\psi_{out}\rangle = E_0 R \exp(-ik\_z)$$

Problemes

Obteniu una expressió que represente el canvi d'estat de polarització per longitud d'ona en la direcció de propagació.

$$\left.\begin{array}{l} |\psi_{in}\rangle = E_0 L \Rightarrow |\psi_{out}\rangle = E_0 L \exp(-ik_+ z) \\ |\psi_{in}\rangle = E_0 R \Rightarrow |\psi_{out}\rangle = E_0 R \exp(-ik_- z) \end{array}\right\} \qquad |\psi_{out}\rangle = A|\psi_{in}\rangle$$

$$A = \exp(-ik_- z)RR^* + \exp(-ik_+ z)LL^* = \exp(-i\varphi_+)\{\exp(-i\varphi_-)RR^* + \exp(i\varphi_-)LL^*\}$$

$$\varphi_\pm(z) = \frac{k_- \pm k_+}{2} z$$

$$M(\gamma) = \exp(-i\gamma)RR^* + \exp(i\gamma)LL^* \equiv P_\gamma P_0^* + P_{\gamma+\pi/2}P_{\pi/2}^*$$ **P3.3**

$$A = \exp(-i\varphi_+)M(\varphi_-)$$

Conclusió: Un estat P gira el seu pla de polarització un angle φ_-

Problemes

Obteniu una expressió que represente el canvi d’estat de polarització per longitud d’ona en la direcció de propagació.

$$\chi_{11} = -\frac{\omega_1^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} \xrightarrow{\omega_0=0} -\frac{\omega_1^2}{\omega^2-\omega_c^2}$$

$$\chi_{12} = -\frac{\omega_1^2\omega\omega_c}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} \xrightarrow{\omega_0=0} -\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\omega_1^2}{\omega^2-\omega_c^2} = \frac{\omega_c}{\omega}\chi_{11}$$

$$e = 1.6022\times10^{-19}C$$
$$m = 9.1094\times10^{-31}kg$$
$$\varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}\,F/m$$

$$\omega_c = (e/m)B_0 = 8.79\times10^6\,s^{-1} \Rightarrow \lambda_c = 214m$$
$$\omega_1^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m) \Rightarrow \omega_1 = 5.64\times10^7\,s^{-1} \Rightarrow \lambda_1 = 33.4m$$

Exemple numèric:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda = 632.8nm \\ \omega = 2.98\times10^{15}s^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\chi_{11} \approx -\omega_1^2/\omega^2 = -3.59\times10^{-16} \\ \chi_{12} = -1.06\times10^{-24}\end{array}\right.$$

Problemes

Obteniu una expressió que represente el canvi d'estat de polarització per longitud d'ona en la direcció de propagació.

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_\pm^2 \qquad n_\pm = \sqrt{1+\chi_{11}\pm\chi_{12}} \approx 1 + \frac{\chi_{11}\pm\chi_{12}}{2} < 1$$

$$\varphi_\pm(z) = \frac{\omega}{c}\frac{n_- \pm n_+}{2} z \qquad \varphi_+(z) = \frac{\omega}{c}\left(1+\frac{\chi_{11}}{2}\right) z$$

$$\varphi_-(z) = -\frac{\omega}{c}\frac{\chi_{12}}{2} z \xrightarrow{\omega \rangle\rangle \omega_c} \frac{\omega_c}{c}\frac{\omega_1^2}{2\omega^2} z \propto \frac{z}{\omega^2}$$

$$\boxed{\varphi_-(\lambda) = \pi\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_c}}$$

En la ionosfera, la radiació del visible és pràcticament lumínica i no sent l'efecte del camp magnètic terrestre.

$$\varphi_-(\lambda) = 2\pi m \Leftrightarrow m = 5.3\times 10^{-25} \qquad \boxed{\varphi_-(\lambda/m) = 2\pi \Leftrightarrow \lambda/m = 1192\times 10^{12}\ km}$$

Per a això es necessiten camps magnètics més intensos:

$$\lambda_c = 632.8 nm \Rightarrow \omega_c = (e/m)B_0 = 2.98\times 10^{15} s^{-1} \qquad B_0 = 16.9\times 10^3 T$$

PROBLEMES D’ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 3

Problemes

P3.1. Demostreu que existeix una relació no local entre el vector desplaçament **D** i el camp elèctric **E**,

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,d\tau$$

on

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega)\exp(-i\omega\tau)\,d\omega$$

és la transformada de Fourier de la susceptibilitat característica χ del medi. A més, el principi de causalitat requereix que **D**(t) en un determinat instant t depenga del camp **E**(t) en temps anteriors i, per tant, $G(\tau)=0$ si $\tau < 0$. Demostreu açò utilitzant el model de Lorentz per a $\chi(\omega)$.

Classical Electrodynamics

Third Edition

John David Jackson
Professor Emeritus of Physics,
University of California, Berkeley

Chapter 7 / *Plane Electromagnetic Waves and Wave Propagation* ***295***

Problemes

- Una altra conseqüència de la dependència espectral de $\varepsilon(\omega)$ és la connexió no local en el domini temporal entre el vector desplaçament $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ i el camp elèctric $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t')e^{i\omega t'}\, dt' \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}\, d\omega \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \epsilon(\omega)e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{i\omega t'}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t')$$

Problemes

- Una altra conseqüència de la dependència espectral de $\varepsilon(\omega)$ és la connexió no local en el domini temporal entre el vector desplaçament $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ i el camp elèctric $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\varepsilon(\omega)\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{E}(\mathbf{x},t')\exp(i\omega t')$$

$$\xrightarrow{\tau=t-t'}\quad \mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\mathbf{E}(\mathbf{x},t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\varepsilon(\omega)\exp(-i\omega\tau)$$

$$F(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\varepsilon(\omega)\exp(-i\omega\tau)\Rightarrow\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau F(\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x},t-\tau)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi)}\quad F(\tau)=\varepsilon_0\left\{\delta(\tau)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\chi(\omega)\exp(-i\omega\tau)\right\}$$

Problemes

- Aquestes equacions proporcionen una connexió no local entre **D** i **E**, en la qual **D** en un temps t depèn del camp elèctric en temps diferents de t

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1]e^{-i\omega\tau}\, d\omega$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0\left\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t - \tau)\, d\tau\right\}$$

$$F(\tau) = \varepsilon_0\left[\delta(\tau) + G(\tau)\right]$$

- Si $\varepsilon(\omega)$ és independent de ω, llavors $G(\tau) \propto \delta(\tau)$ i s'obté la connexió instantània, però si $\varepsilon(\omega)$ canvia amb ω, $G(\tau)$ no s'anul·la per a valors de τ diferents de zero.

Problemes

A més, el principi de causalitat requereix que $\mathbf{D}(t)$ en un determinat instant t depenga del camp $\mathbf{E}(t)$ en temps anteriors i, per tant, $F(\tau) = 0$ si $\tau < 0$. Demostreu açò utilitzant el model de Lorentz per a $\chi(\omega)$.

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}$$

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega = \frac{\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}d\omega$$

Els pols de l'integrand es troben tots en la meitat inferior del pla complex:

$$\overline{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \text{si } \gamma < \omega_0$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega = -(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-) \Leftrightarrow \boxed{\omega_\pm = -i\gamma \pm \overline{\omega}_0}$$

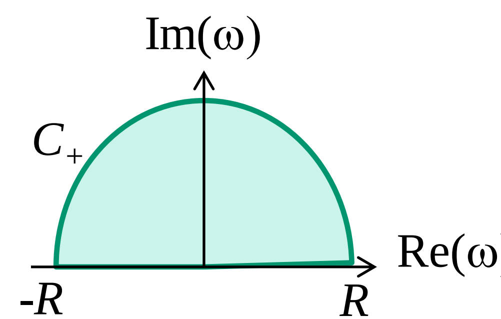
L'integrand és analític tant en la meitat superior ($\text{Im}\,\omega > 0$) com en l'eix real.

Problemes

Demostreu que $F(\tau) = 0$ si $\tau < 0$ utilitzant el model de Lorentz per a $\chi(\omega)$.

$$\oint \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} d\omega = \int_{-R}^{R} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} d\omega + \int_{C_+} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} d\omega = 0$$

Ara considerem un contorn d'integració des de $-R$ cap a R i també al llarg d'un semicercle en la meitat superior del pla, el qual està centrat a l'origen i té un radi R.



$$\mathrm{Im}(\omega) > 0 \;\&\; \tau < 0 \Rightarrow \left|\exp(-i\omega\tau)\right| = \exp\left[\mathrm{Im}(\omega)\tau\right] < 1$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_+} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} d\omega = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} d\omega = 0$$

Aleshores aquesta integració de contorn dóna zero si $\tau < 0$.

Problemes

Avalueu $F(\tau)$ si $\tau > 0$ utilitzant el model de Lorentz per a $\chi(\omega)$.

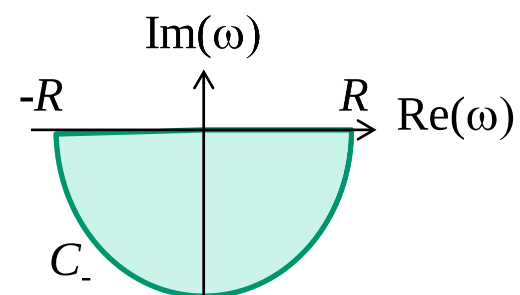
$$\int_{-R}^{R}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega+\int_{C_-}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega=-2\pi i\sum_{\pm}\operatorname{Res}(\omega_\pm)$$

$$\operatorname{Res}(\omega_+)=\lim_{\omega\to\omega_+}(\omega-\omega_+)\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}=\frac{\exp(-i\omega_+\tau)}{-(\omega_+-\omega_-)}=\frac{\exp(-\gamma\tau)\exp(-i\overline{\omega}_o\tau)}{-2\overline{\omega}_o}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega=-(\omega-\omega_\pm)(\omega-\omega_\mp)\\ \omega_\pm=-i\gamma\pm\overline{\omega}_0\end{gathered}}$$

$$\operatorname{Res}(\omega_-)=\frac{\exp(-\gamma\tau)\exp(i\overline{\omega}_0\tau)}{2\overline{\omega}_0}$$

Ara considerem un contorn d'integració des de $-R$ cap a R i també al llarg d'un semicercle en la meitat inferior del pla.



$$\operatorname{Im}(\omega)<0\ \&\ \tau>0\Rightarrow|\exp(-i\omega\tau)|=\exp[\operatorname{Im}(\omega)\tau]<1$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_-}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega=0\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega=-2\pi i\sum_{\pm}\operatorname{Res}(\omega_\pm)$$

Problemes

Avalueu $F(\tau)$ si $\tau > 0$ utilitzant el model de Lorentz per a $\chi(\omega)$.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega = -2\pi i\sum_{\pm}\mathrm{Res}(\omega_\pm)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega = -2\pi i\left[\frac{\exp(-\gamma\tau)\exp(-i\overline{\omega}_o\tau)}{-2\overline{\omega}_o}+\frac{\exp(-\gamma\tau)\exp(i\overline{\omega}_0\tau)}{2\overline{\omega}_0}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega = \frac{2\pi}{\overline{\omega}_o}\sin(\overline{\omega}_o\tau)\exp(-\gamma\tau)$$

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}d\omega = \frac{\omega_p^2}{\overline{\omega}_o}\sin(\overline{\omega}_o\tau)\exp(-\gamma\tau)$$

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\overline{\omega}_o}\sin(\overline{\omega}_o\tau)\exp(-\gamma\tau)}$$

Problemes

P3.2. Considereu el model d’un àtom en el qual l’electró es troba lligat per mitjà d’un potencial d’oscil·lador harmònic de tipus anisòtrop, i que té associades freqüències pròpies d’oscil·lació, ω_x, ω_y i ω_z diferents en les direccions *X*, *Y* i *Z*, respectivament. Suposeu ara que una ona electromagnètica plana de freqüència ω es propaga en el si d’un material format per aquest tipus d’àtoms. Amb les hipòtesis de la teoria clàssica de l’índex de refracció:

a) Demostreu que el vector desplaçament elèctric $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es pot escriure com $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}$, on $\varepsilon(\omega)$ és una matriu diagonal 3×3. A més, obteniu una expressió dels elements d’aquesta.

b) Considereu ara que l’ona incident es propaga en direcció de l’eix *Z*. Demostreu que els electrons de cada àtom no vibren en la direcció del camp incident.

Problemes

a) Demostreu que el vector desplaçament elèctric $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es pot escriure com $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}$, on $\varepsilon(\omega)$ és una matriu diagonal 3×3. A més, obteniu una expressió dels elements d'aquesta.

$$\overleftrightarrow{\omega}_0 = \begin{bmatrix} \omega_x & 0 & 0 \\ 0 & \omega_y & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = -e\vec{E} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_x^2 x = -\dfrac{e}{m} E_x \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = -\dfrac{e}{m} E_y \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z = -\dfrac{e}{m} E_z \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \overleftrightarrow{\omega}_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\ \vec{r} = \vec{r}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow -\omega^2 \vec{r}_0 + \overleftrightarrow{\omega}_0^2 \vec{r}_0 = -\frac{e}{m} \vec{E}_0$$

Problemes

a) Demostreu que el vector desplaçament elèctric $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es pot escriure com $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}$, on $\varepsilon(\omega)$ és una matriu diagonal 3×3. A més, obteniu una expressió dels elements d'aquesta.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{e}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2 - \omega_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 - \omega_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2 - \omega_z^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{P}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\ \vec{D} &= \vec{D}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\vec{P} = -Ne\vec{r}} \vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0 - Ne\vec{r}_0$$

Problemes

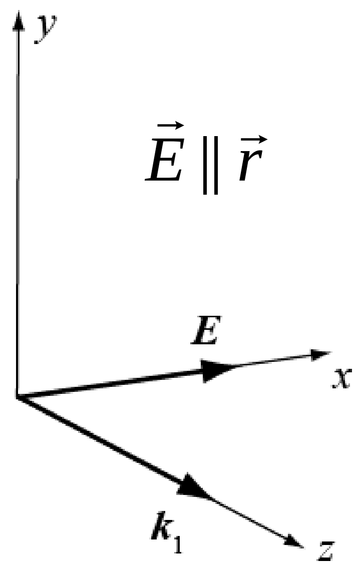
a) Demostreu que el vector desplaçament elèctric $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es pot escriure com $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}$, on $\varepsilon(\omega)$ és una matriu diagonal 3×3. A més, obteniu una expressió dels elements d'aquesta.

$$\begin{bmatrix} D_{0x} \\ D_{0y} \\ D_{0z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_z^2} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_0 \varepsilon(\omega)} \times \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}$$

Problemes

b) Considereu ara que l'ona incident es propaga en direcció de l'eix *Z*. Demostreu que els electrons de cada àtom no vibren en la direcció del camp incident.

$$\left.\begin{aligned}\vec{k} &= k_1\hat{z}\\ \vec{E}_0 &= E_{0x}\hat{x}\end{aligned}\right\}$$



$$\vec{E} \parallel \vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}_0 &= D_{0x}\hat{x}\\ \vec{P}_0 &= P_{0x}\hat{x}\\ \vec{r}_0 &= x_0\hat{x}\end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp\left(i\omega t - ik_1 z\right)\\ \vec{D} &= \vec{D}_0 \exp\left(i\omega t - ik_1 z\right)\\ \vec{P} &= \vec{P}_0 \exp\left(i\omega t - ik_1 z\right)\\ \vec{r} &= \vec{r}_0 \exp\left(i\omega t - ik_1 z\right)\end{aligned}\right.$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} = -\mu_0\partial_t^2\vec{P}$$

$$-ik_1\hat{z}\times\left(-ik_1\hat{z}\times E_{0x}\hat{x}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}E_{0x}\hat{x} = \mu_0\omega^2 P_{0x}\hat{x}$$

$$P_{0x} = -\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega_x^2}E_{0x}$$

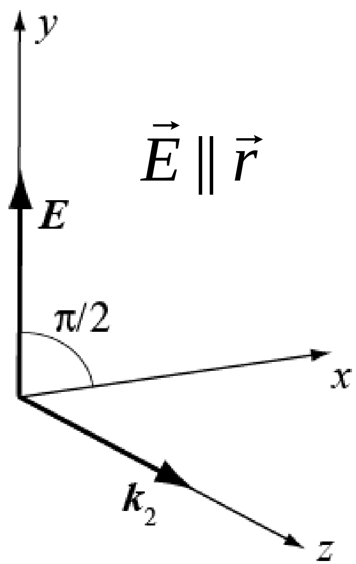
$$\boxed{k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega^2-\omega_x^2}\right)}$$

PLA DE POLARITZACIÓ XZ

Problemes

b) Considereu ara que l'ona incident es propaga en direcció de l'eix *Z*. Demostreu que els electrons de cada àtom no vibren en la direcció del camp incident.

$$\left.\begin{aligned}\vec{k} &= k_2\hat{z}\\ \vec{E}_0 &= E_{0y}\hat{y}\end{aligned}\right\}$$



$$\vec{E} \parallel \vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}_0 &= D_{0y}\hat{y}\\ \vec{P}_0 &= P_{0y}\hat{y}\\ \vec{r}_0 &= y_0\hat{y}\end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp\left(i\omega t - ik_2 z\right)\\ \vec{D} &= \vec{D}_0 \exp\left(i\omega t - ik_2 z\right)\\ \vec{P} &= \vec{P}_0 \exp\left(i\omega t - ik_2 z\right)\\ \vec{r} &= \vec{r}_0 \exp\left(i\omega t - ik_2 z\right)\end{aligned}\right.$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} = -\mu_0\partial_t^2\vec{P} \quad -ik_2\hat{z}\times\left(-ik_2\hat{z}\times E_{0y}\hat{y}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}E_{0y}\hat{y} = \mu_0\omega^2 P_{0y}\hat{y}$$

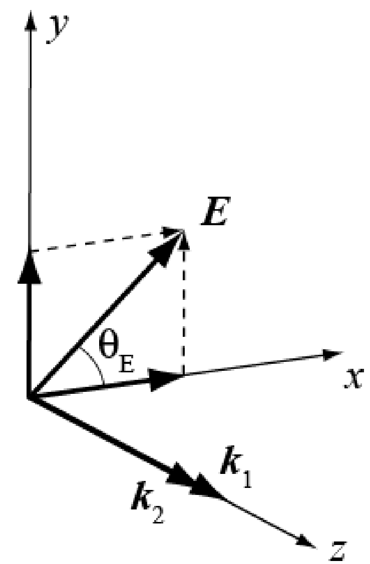
$$P_{0y} = -\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega_y^2}E_{0y}$$

$$\boxed{k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega^2-\omega_y^2}\right)}$$

PLA DE POLARITZACIÓ YZ

Problemes

b) Considereu ara que l'ona incident es propaga en direcció de l'eix *Z*. Demostreu que els electrons de cada àtom no vibren en la direcció del camp incident.



$$\vec{E} = \hat{x}E_{0x}\exp(i\omega t - ik_1 z) + \hat{y}E_{0y}\exp(i\omega t - ik_2 z)$$

$$\vec{E} = \left\{\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}\exp\left[-i(k_2 - k_1)z\right]\right\}\exp(i\omega t - ik_1 z)$$

$$E_{0x} = E_0\cos\theta_E \qquad E_{0y} = E_0\sin\theta_E$$

$$\vec{P} = \left\{\hat{x}P_{0x} + \hat{y}P_{0y}\exp\left[-i(k_2 - k_1)z\right]\right\}\exp(i\omega t - ik_1 z)$$

$$P_{0x} = P_0\cos\theta \qquad P_{0y} = P_0\sin\theta$$

$$(P_{0x}, P_{0y}) = -\frac{Ne^2}{m}\left(\frac{E_{0x}}{\omega^2 - \omega_x^2}, \frac{E_{0y}}{\omega^2 - \omega_y^2}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{P_{0y}}{P_{0x}} = \frac{\omega^2 - \omega_x^2}{\omega^2 - \omega_y^2}\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \frac{\omega^2 - \omega_x^2}{\omega^2 - \omega_y^2}\tan\theta_E$$

Problemes

P3.3. Considereu un medi dielèctric, homogeni i isòtrop, sotmès a l'acció d'un camp magnètic $\vec{B}$ uniforme i estacionari en la direcció de l'eix Z, i en el qual es propaga una ona monocromàtica de freqüència ω. Fent ús del model de Lorentz de l'oscil·lador electrònic de freqüència pròpia ω_0 i negligint, per simplificar, el terme d'amortiment:

a) Trobeu l'equació de moviment de l'electró.

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

c) Considereu ara que l'ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l'eix Z. Demostreu que en aquest cas l'ona plana està necessàriament polaritzada circularment.

Problemes

a) Trobeu l'equació de moviment de l'electró.
Analitzem el cas en què no hi ha camp magnètic extern.

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E} - \frac{e}{m}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \xrightarrow{\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}} \vec{B} = \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0\right) \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right)$$

Les amplituds E i B estan relacionades a través de la velocitat de fase de l'ona plana.

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{v_f} \qquad \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|}{v_f} \langle\langle 1 \Rightarrow \vec{F} \approx -e\vec{E} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

Problemes

a) Trobeu l'equació de moviment de l'electró.
Si incloem un camp magnètic extern: $\vec{B} = B_0 \hat{z}$

EQUACIÓ DE MOVIMENT

$$\vec{F} = -e\vec{E} - eB_0\left(\dot{\vec{r}} \times \hat{z}\right) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E} - \frac{e}{m}B_0\left(\dot{\vec{r}} \times \hat{z}\right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \hat{z} = \left(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}\right) \times \hat{z} = -\dot{x}\hat{y} + \dot{y}\hat{x} \qquad \vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} + E_{0z}\hat{z}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}E_{0x}\exp\left(i\omega t\right) - \frac{e}{m}B_0\dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{e}{m}E_{0y}\exp\left(i\omega t\right) + \frac{e}{m}B_0\dot{x}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m}E_{0z}\exp\left(i\omega t\right)$$

$$\left|\vec{k} \cdot \vec{x}\right| \langle\langle 1$$

Problemes

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

EQUACIÓ DE MOVIMENT

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(i\omega t) \Rightarrow -\omega^2 \vec{r}_0 + \omega_0^2 \vec{r}_0 = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 - \frac{e}{m} B_0 (i\omega \vec{r}_0 \times \hat{z})$$

$$-\omega^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = -\frac{e}{m} E_{0x} - i\omega \frac{e}{m} B_0 y_0$$

$$-\omega^2 y_0 + \omega_0^2 y_0 = -\frac{e}{m} E_{0y} + i\omega \frac{e}{m} B_0 x_0$$

$$-\omega^2 z_0 + \omega_0^2 z_0 = -\frac{e}{m} E_{0z} \longrightarrow z_0 = \frac{e/m}{\omega^2 - \omega_0^2} E_{0z}$$

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & -i\omega \frac{e}{m} B_0 \\ i\omega \frac{e}{m} B_0 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{e}{m} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix}$$

Problemes

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

$$\begin{bmatrix} \omega^2-\omega_0^2 & -i\omega\omega_c \\ i\omega\omega_c & \omega^2-\omega_0^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{e}{m} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix}$$

Freqüència de ciclotró

$$\omega_c = \frac{e}{m} B_0$$

$$\begin{bmatrix} A & iC \\ -iC & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & -iC \\ iC & A \end{bmatrix} = \left(A^2 - C^2\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \omega^2 - \omega_0^2$$

$$C = \omega\omega_c$$

$$\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 - \left(\omega\omega_c\right)^2\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{e}{m} \begin{bmatrix} \omega^2-\omega_0^2 & i\omega\omega_c \\ -i\omega\omega_c & \omega^2-\omega_0^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix}$$

Problemes

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{e}{m} \begin{bmatrix} \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & \dfrac{i\omega\omega_c}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & 0 \\ \dfrac{-i\omega\omega_c}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \exp(i\omega t) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{P}_0 = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_0 \\ \vec{P}_0 = -Ne\vec{r}_0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{-Ne\vec{r}_0 = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_0}$$

Problemes

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

$$\overleftrightarrow{\chi} = -N\frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\begin{bmatrix} \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & \dfrac{i\omega\omega_c}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & 0 \\ \dfrac{-i\omega\omega_c}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2-\left(\omega\omega_c\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \end{bmatrix}$$

Problemes

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\chi_{11} = -\frac{\omega_p^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 - \left(\omega\omega_c\right)^2}$$

$$\chi_{12} = -\frac{\omega_p^2 \omega\omega_c}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 - \left(\omega\omega_c\right)^2}$$

$$\chi_{33} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Conclusió: El medi és isòtrop només quan el camp elèctric de l'ona plana és paral·lel al camp magnètic estàtic.

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

Problemes

b) Suposant que els electrons del medi oscil·len a la mateixa freqüència que el camp $\vec{E}$ de l'ona plana, demostreu que la polarització $\vec{P}$ del medi pot expressar-se per mitjà d'una susceptibilitat elèctrica complexa.

$$\overleftrightarrow{\chi} = (\chi_{11} + \chi_{12})(\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1) + (\chi_{11} - \chi_{12})(\vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2) + \chi_{33}(\vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3)$$

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

LLUM CIRCULARMENT POLARITZADA LEVOGIRA

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LLUM CIRCULARMENT POLARITZADA DEXTROGIRA

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LLUM LINEALMENT POLARITZADA

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conclusió: Quan $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$, llavors el camp elèctric $\boldsymbol{E}$ és proporcional a $\boldsymbol{P}$ si el seu estat de polarització és circular.

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}_0 = \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}_0$$

Problemes

c) Considereu ara que l'ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l'eix *Z*. Demostreu que en aquest cas l'ona plana està necessàriament polaritzada circularment.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E} = -\mu_0 \partial_t^2 \vec{P} \qquad \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\ \vec{P} = \vec{P}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow -i\vec{k} \times \left(-i\vec{k} \times \vec{E}_0\right) - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_0 = \mu_0 \omega^2 \vec{P}_0$$

$$\left.\begin{array}{c} \vec{P}_0 = \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\chi} \vec{E}_0 \\ \vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) = \vec{k}\left(\vec{k}\vec{E}_0\right) - k^2 \vec{E}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\vec{k}\left(\vec{k}\vec{E}_0\right) + k^2 \vec{E}_0 - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\chi} \vec{E}_0$$

Problemes

c) Considereu ara que l’ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l’eix *Z*. Demostreu que en aquest cas l’ona plana està necessàriament polaritzada circularment.

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{x}\otimes\hat{x} + \hat{y}\otimes\hat{y} + \hat{z}\otimes\hat{z} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{I}\vec{E}_0 = \vec{E}_0$$

$$\overleftrightarrow{J} = \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & k_y^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_z^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2}\vec{k}\otimes\vec{k} \Leftrightarrow k^2\overleftrightarrow{J}\vec{E}_0 = \vec{k}\left(\vec{k}\vec{E}_0\right)$$

$$-k^2\overleftrightarrow{J}\vec{E}_0 + k^2\overleftrightarrow{I}\vec{E}_0 - \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{I}\vec{E}_0 = \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}\vec{E}_0 \Leftrightarrow \left(k^2\overleftrightarrow{J} - k^2\overleftrightarrow{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}\right)\vec{E}_0 = 0$$

Problemes

c) Considereu ara que l'ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l'eix *Z*. Demostreu que en aquest cas l'ona plana està necessàriament polaritzada circularment.

EQUACIÓ DE VALORS PROPIS

$$\boxed{\left(k^2\overleftrightarrow{J}+\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}+\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{I}\right)\vec{E}_0=k^2\vec{E}_0}$$

$$\boxed{E_{0z}=0} \Rightarrow z_0=0 \Rightarrow P_{0z}=0 \xrightarrow{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}} D_{0z}=0$$

$$\boxed{\vec{k}=k\hat{z}} \xrightarrow{\vec{B}_0=\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}_0} B_{0z}=0 \Rightarrow H_{0z}=0$$

$$\overleftrightarrow{J}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\hat{z}\otimes\hat{z}$$

$$\overleftrightarrow{J}\cdot\vec{E}_0=0 \Leftrightarrow \frac{\omega^2}{c^2}\left(\overleftrightarrow{I}+\overleftrightarrow{\chi}\right)\vec{E}_0=k^2\vec{E}_0$$

Problemes

c) Considereu ara que l'ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l'eix *Z*. Demostreu que en aquest cas l'ona plana està necessàriament polaritzada circularment.

$$\frac{\omega^2}{c^2}\begin{bmatrix} 1+\chi_{11} & i\chi_{12} \\ -i\chi_{12} & 1+\chi_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = k^2 \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix}$$

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\chi_{11} \pm \chi_{12}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\chi_\pm\right) \Leftrightarrow \boxed{n_\pm^2 = 1+\chi_\pm}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\chi}\right)\vec{E}_{0\pm} = k_\pm^2 \vec{E}_{0\pm}$$

Polarització circular levogira

$$\boxed{\vec{E}_{0+} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}$$

Polarització circular desxtrogira

$$\boxed{\vec{E}_{0-} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}}$$

Conclusió: Ones amb polarització circular levogira i dextrogira es propaguen amb velocitats de fase diferents.

Problemes

c) Considereu ara que l'ona plana que es propaga en el medi, ho fa en la direcció de l'eix *Z*. Demostreu que en aquest cas l'ona plana està necessàriament polaritzada circularment.

$$n_{\pm}^2 = 1 + \chi_{\pm} = 1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}$$

$$\omega_0^2 \equiv 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \chi_{11} = -\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \xrightarrow{\omega^2 \langle\langle \omega_c^2} \dfrac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \\ \chi_{12} = -\dfrac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)} \xrightarrow{\omega^2 \langle\langle \omega_c^2} \dfrac{\omega_p^2}{\omega \omega_c} = \dfrac{\omega_c}{\omega} \chi_{11} \rangle\rangle \chi_{11} \end{array} \right] \boxed{n_{\pm}^2 = \pm \chi_{12}}$$

Conclusió: En els plasmes, les ones amb polarització circular dextrogira no es propaguen a freqüències baixes.

PROBLEMES D’ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 4

Problemes

P4.1. Comproveu que els angles azimutals de les components transmesa α_T i reflectida α_R satisfan les equacions:

$$\tan\alpha_T = \cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)\tan\alpha_I \qquad \tan\alpha_R = -\frac{\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\cos(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}\tan\alpha_I$$

sent ε_I i ε_T els angles d'incidència i refracció i α_I l'angle azimutal de la radiació incident.

$$|\psi_{in}\rangle = \begin{pmatrix} \psi_\parallel \\ \psi_\perp \end{pmatrix} = \sqrt{I_0}\begin{pmatrix} \cos\alpha_I \\ \sin\alpha_I \end{pmatrix} \qquad t^{(TE)} = \frac{2\sin\varepsilon_T\cos\varepsilon_I}{\sin(\varepsilon_I + \varepsilon_T)} \quad t^{(TM)} = \frac{2\sin\varepsilon_T\cos\varepsilon_I}{\sin(\varepsilon_I + \varepsilon_T)\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}$$

$$|\psi_{tr}\rangle = \begin{pmatrix} t^{(TM)}\psi_\parallel \\ t^{(TE)}\psi_\perp \end{pmatrix} \Rightarrow \tan\alpha_T = \frac{t^{(TE)}}{t^{(TM)}}\frac{\psi_\perp}{\psi_\parallel} = \cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)\tan\alpha_I$$

Problemes

Comproveu que els angles azimutals de les components transmesa α_T i reflectida α_R satisfan les equacions:

$$\tan\alpha_T = \cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)\tan\alpha_I \qquad \tan\alpha_R = -\frac{\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\cos(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}\tan\alpha_I$$

sent ε_I i ε_T els angles d'incidència i refracció i α_I l'angle azimutal de la radiació incident.

$$\left|\psi_{in}\right\rangle = \begin{pmatrix}\psi_\parallel \\ \psi_\perp\end{pmatrix} = \sqrt{I_0}\begin{pmatrix}\cos\alpha_I \\ \sin\alpha_I\end{pmatrix} \qquad r^{(TE)} = -\frac{\sin(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\sin(\varepsilon_I + \varepsilon_T)} \qquad r^{(TM)} = \frac{\tan(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\tan(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}$$

$$\left|\psi_{ref}\right\rangle = \begin{pmatrix}r^{(TM)}\psi_\parallel \\ r^{(TE)}\psi_\perp\end{pmatrix} \Rightarrow \tan\alpha_R = \frac{r^{(TE)}}{r^{(TM)}}\frac{\psi_\perp}{\psi_\parallel} = -\frac{\sin(\varepsilon_I - \varepsilon_T)\tan(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}{\tan(\varepsilon_I - \varepsilon_T)\sin(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}\tan\alpha_I = -\frac{\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\cos(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}\tan\alpha_I$$

Problemes

Demostreu que en la reflexió el camp elèctric s'allunya del pla d'incidència i que en la refracció s'hi acosta.

$$\frac{\tan\alpha_T}{\tan\alpha_I} = \cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T) \le 1 \Rightarrow \tan\alpha_T \le \tan\alpha_I \Rightarrow \alpha_T \le \alpha_I$$

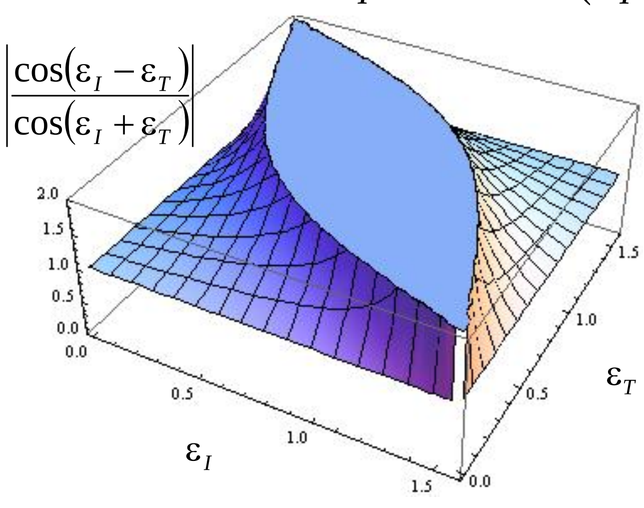
$$\frac{\tan\alpha_R}{\tan\alpha_I} = -\frac{\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\cos(\varepsilon_I + \varepsilon_T)}$$

$\varepsilon_I + \varepsilon_T < \pi/2$

$$\frac{\tan(-\alpha_R)}{\tan\alpha_I} \ge 1 \Rightarrow (-\alpha_R) \ge \alpha_I$$

$\varepsilon_I + \varepsilon_T > \pi/2$

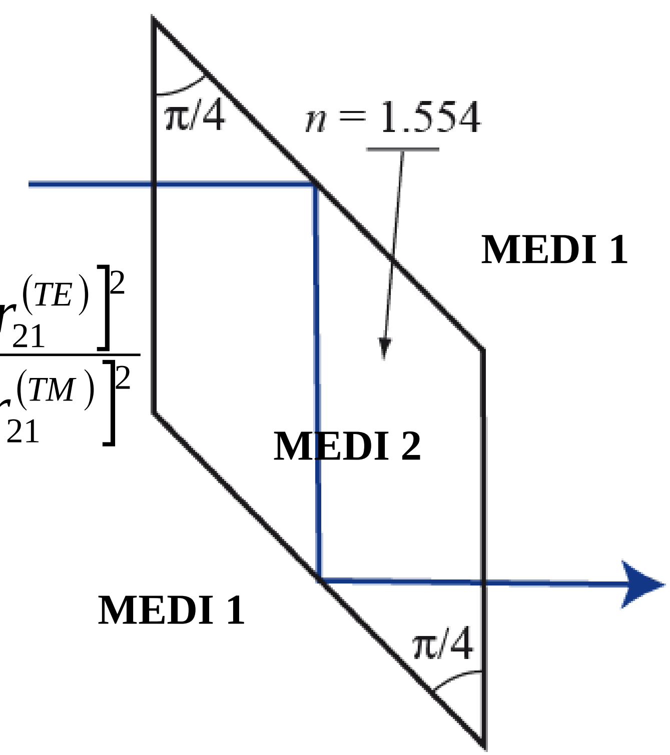
$$\frac{\tan\alpha_R}{\tan\alpha_I} \ge 1 \Rightarrow \alpha_R \ge \alpha_I$$



Problemes

P4.2. Un feix pla de llum monocromàtica linealment polaritzada és desviat per un romboedre de reflexió total d'índex $n = 1.554$, com s'indica en la figura. Descriviu l'efecte del dispositiu sobre cada una de les components del camp.

$$\left|\psi_{in}\right\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\parallel} \\ \psi_{\perp} \end{pmatrix} = \sqrt{I_0}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$t_{12}^{(TM)}(0^{o}) = t_{12}^{(TE)}(0^{o}) = \frac{2}{1+n} = 0.7831 \equiv t_{12}$$

$$t_{21}^{(TM)}(0^{o}) = t_{21}^{(TE)}(0^{o}) = \frac{2n}{1+n} = 1.217 \equiv t_{21}$$

$$\exp(i\varphi) = \frac{\left[r_{21}^{(TE)}\right]^2}{\left[r_{21}^{(TM)}\right]^2}$$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} t_{21}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_{\parallel} \\ t_{21}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_{\perp} \end{pmatrix} \equiv t_{12} t_{21} \begin{pmatrix} \psi_{\parallel} \\ \exp(i\varphi)\psi_{\perp} \end{pmatrix}$$

Problemes

Descriviu l'efecte del dispositiu sobre cada una de les components del camp.

$$n\sin\varepsilon_2 = \sin\varepsilon_1 \xrightarrow{\varepsilon_2=45^\circ} \begin{cases} \varepsilon_1 = \pi/2 + i0.441 \\ \cos\varepsilon_1 = -i0.455 \end{cases}$$

DESFASAMENT TOTAL

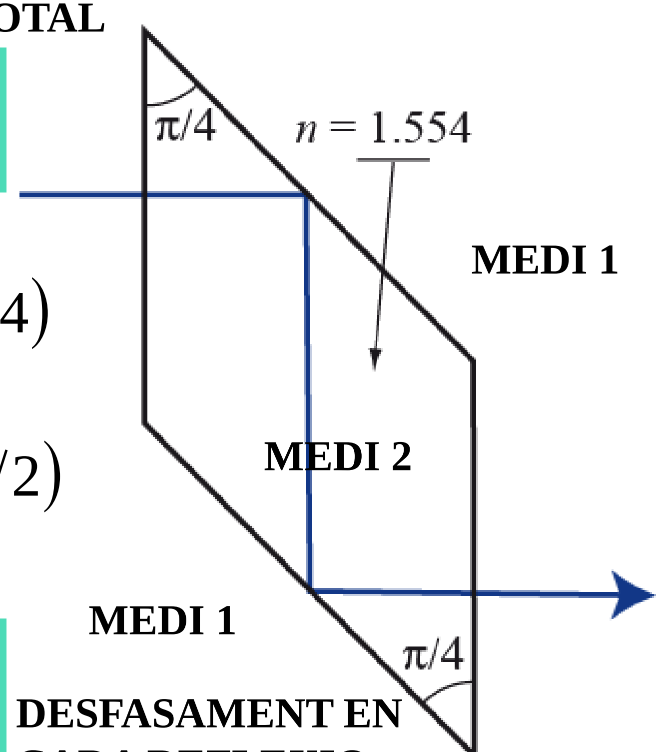
$$\exp(i\varphi) = \frac{\left[r_{21}^{(TE)}\right]^2}{\left[r_{21}^{(TM)}\right]^2} = \exp(-i1.5718) \Rightarrow \boxed{\varphi \approx -\pi/2}$$

$$r_{21}^{(TE)} = \frac{n\cos\varepsilon_2 - \cos\varepsilon_1}{n\cos\varepsilon_2 + \cos\varepsilon_1} = \exp(+i0.7859) \approx \exp(i\pi/4)$$

$$r_{21}^{(TM)} = \frac{\cos\varepsilon_2 - n\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_2 + n\cos\varepsilon_1} = \exp(+i1.5718) \approx \exp(i\pi/2)$$

$$\tan(\delta/2) = -\frac{\cos\varepsilon_2\sqrt{\sin^2\varepsilon_2 - (1/n)^2}}{\sin^2\varepsilon_2} \Rightarrow \boxed{\delta = -\frac{\pi}{4}}$$

DESFASAMENT EN CADA REFLEXIO

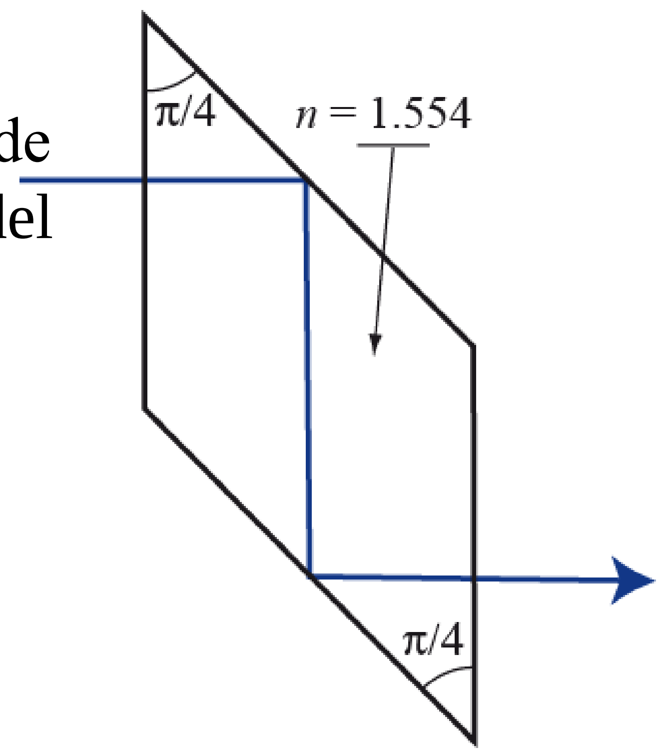


Problemes

Obteniu la matriu de Jones que caracteritza el dispositiu.

$$t_{12}t_{21} = 0.953 \approx 1 \quad \Rightarrow \quad R(0,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi=-\pi/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Si el pla de vibració de la llum incident forma un angle de 45º amb el pla d'incidència, descriviu amb detall l'estat de polarització de la radiació que emergeix del romboedre.



$$|\psi_{in}\rangle \xrightarrow{\alpha=\pi/4} \sqrt{I_0}P_{\pi/4} = \sqrt{\frac{I_0}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

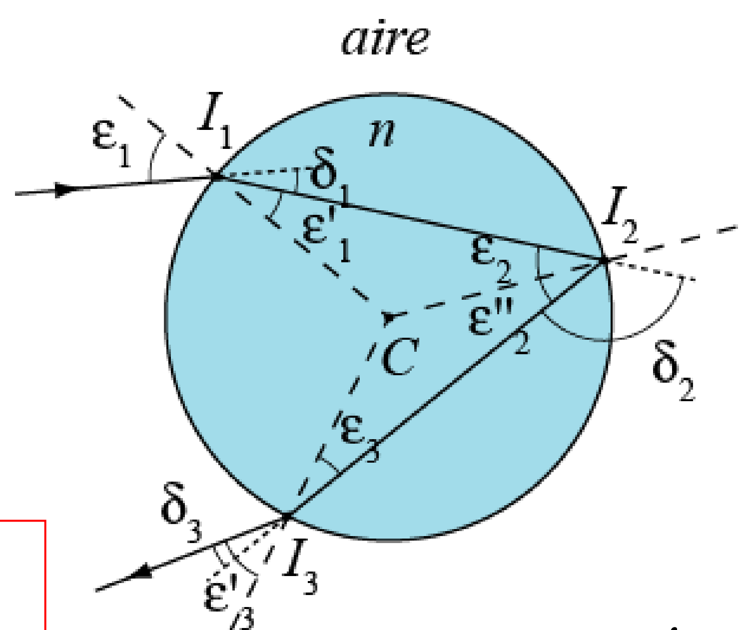
$$|\psi_{out}\rangle = \sqrt{\frac{I_0}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \equiv \sqrt{I_0}L$$

Problemes

P4.3. Un raig de llum natural quasimonocromàtica incideix, amb angle ε_1, sobre una esfera dielèctrica homogènia d'índex de refracció *n* submergida en aire, i pateix una única reflexió parcial en el seu interior abans d'emergir d'aquella.

Refracció #1

$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1'$$
$$\sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1'$$



Reflexió #1

$$\delta_2 = \pi - \left(\varepsilon_2'' - \varepsilon_2\right)$$
$$\varepsilon_2'' = -\varepsilon_2$$

$$\delta_1 = \delta_3$$

Refracció #2

$$\delta_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_3'$$
$$n\sin\varepsilon_3 = \sin\varepsilon_3'$$

$$\left.\begin{aligned} \angle I_1 I_2 C &\Rightarrow \varepsilon_1' = -\varepsilon_2 \\ \angle I_2 I_3 C &\Rightarrow \varepsilon_2'' = -\varepsilon_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon_1' = -\varepsilon_3$$
$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3'$$

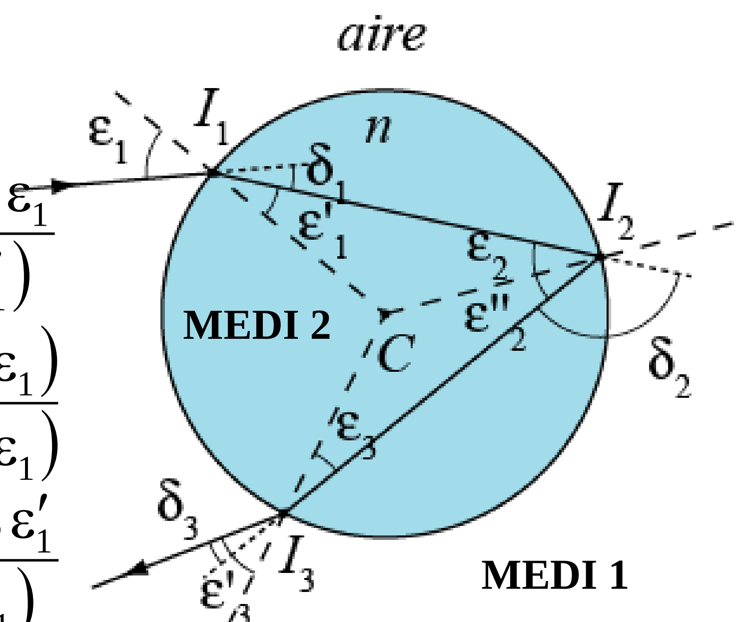
Problemes

Obteniu una expressió per al grau de polarització V del raig emergent en funció dels angles d'incidència ε_1 i refracció ε'_1.

$$\left|\psi_{in}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_\parallel \\ \psi_\perp \end{pmatrix} \qquad \left\langle \psi_{in} \middle| \psi_{in} \right\rangle = I_0 \Leftrightarrow \left|\psi_\parallel\right| = \left|\psi_\perp\right| = \sqrt{I_0/2}$$

$$\Delta_{in} = \frac{\left|\psi_\parallel\right|}{\left|\psi_\perp\right|} = 1 \Rightarrow V_{in} = \frac{1-\Delta_{in}^2}{1+\Delta_{in}^2} = 0$$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} t_{21}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_\parallel \\ t_{21}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_\perp \end{pmatrix}$$



$$t_{12}^{(TM)} = \frac{2\sin\varepsilon'_1\cos\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1+\varepsilon'_1)\cos(\varepsilon_1-\varepsilon'_1)} \qquad t_{12}^{(TE)} = \frac{2\sin\varepsilon'_1\cos\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1+\varepsilon'_1)}$$

$$r_{21}^{(TM)} = \frac{\tan(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)}{\tan(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)} \qquad r_{21}^{(TE)} = -\frac{\sin(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)}$$

$$t_{21}^{(TM)} = \frac{2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon'_1}{\sin(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)\cos(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)} \qquad t_{21}^{(TE)} = \frac{2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon'_1}{\sin(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)}$$

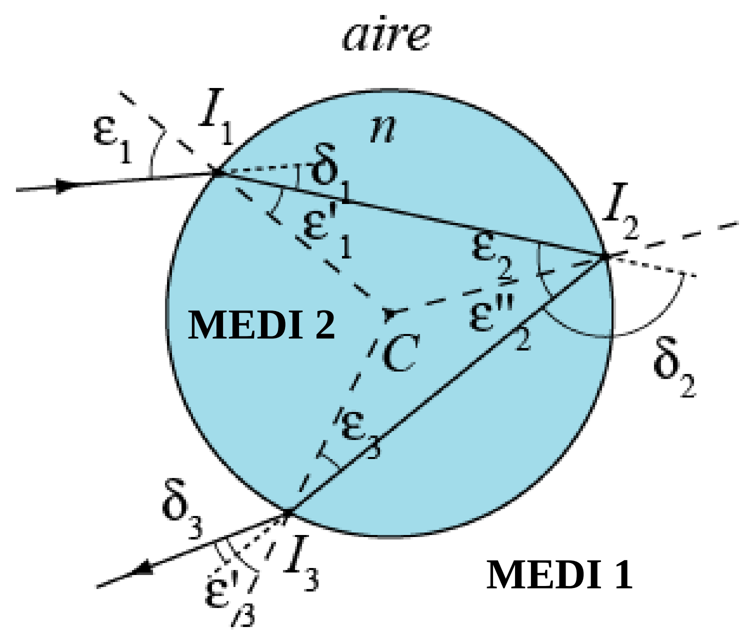
Problemes

Obteniu una expressió per al grau de polarització V del raig emergent en funció dels angles d'incidència ε_1 i refracció ε'_1.

$$\left|\psi_{in}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}\psi_\parallel \\ \psi_\perp\end{pmatrix} \qquad \left\langle\psi_{in}\middle|\psi_{in}\right\rangle = I_0 \Leftrightarrow \left|\psi_\parallel\right| = \left|\psi_\perp\right| = \sqrt{I_0/2}$$

$$\Delta_{in} = \frac{\left|\psi_\parallel\right|}{\left|\psi_\perp\right|} = 1 \Rightarrow V_{in} = \frac{1-\Delta_{in}^2}{1+\Delta_{in}^2} = 0$$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} t_{21}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_\parallel \\ t_{21}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_\perp \end{pmatrix}$$



$$\Delta_{out} = \frac{\left|t_{21}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_\parallel\right|}{\left|t_{21}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_\perp\right|} = \left|\frac{\cos(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)}{\cos^3(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)}\right|$$

$$\boxed{V_{out} = \frac{1-\Delta_{out}^2}{1+\Delta_{out}^2}}$$

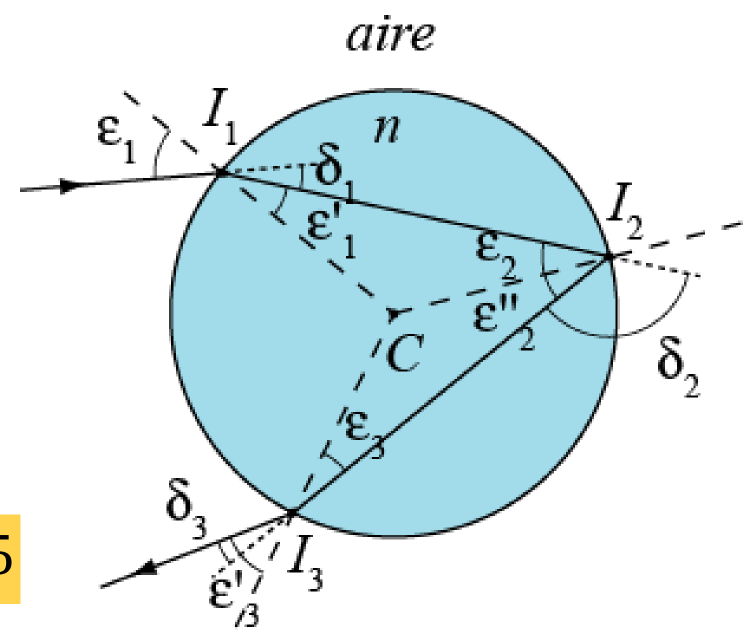
Problemes

Finalment, calculeu l'angle d'incidència per al qual el raig de llum emergent està totalment polaritzat en el cas d'una esfera d'aigua (n = 4/3). Raoneu la resposta.

$$V_{out} = 1 \Leftrightarrow \Delta_{out} = \left| \frac{\cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1)}{\cos^3(\varepsilon_1' - \varepsilon_1)} \right| = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1' + \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_B = \arctan n = 53.13^{\circ}$$

Conclusió: Si el feix incideix amb l'angle de Brewster, la component TM no es reflecteix en el punt I_2. En eixir del punt I_3, el feix es troba linealment polaritzat (TE pur).



$$\left.\begin{aligned} i_m &= 59.39^{\circ} \\ \varepsilon_1' &= 40.20^{\circ} \end{aligned}\right\}$$

ARC IRIS APROX.
LINEALMENT POLARITZAT

$$\Delta_{out} = 0.200 \Rightarrow V_{out} = 0.925$$

Problemes

P4.4. Representeu gràficament la dependència de la reflectància i el desfasament amb l'angle d'incidència sobre una superfície plana en el cas d'una ona monocromàtica de longitud d'ona λ = 500 nm que es propaga en el espai lliure i incideix sobre plata ($n = 0.05 - i\,2.87$).

$$r_{12}^{(TE)} = \frac{\cos\varepsilon_1 - n\cos\varepsilon_2}{\cos\varepsilon_1 + n\cos\varepsilon_2} \qquad r_{12}^{(TM)} = \frac{n\cos\varepsilon_1 - \cos\varepsilon_2}{n\cos\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_2} = \frac{n^2\cos\varepsilon_1 - n\cos\varepsilon_2}{n^2\cos\varepsilon_1 + n\cos\varepsilon_2}$$

$$\Big\downarrow \; \sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_2$$

$$n\cos\varepsilon_2 = n\sqrt{1-\sin^2\varepsilon_2} = \sqrt{n^2 - n^2\sin^2\varepsilon_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon_1} = -i\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}$$

Problemes

P4.4. Representeu gràficament la dependència de la reflectància i el desfasament amb l'angle d'incidència sobre una superfície plana en el cas d'una ona monocromàtica de longitud d'ona λ = 500 nm que es propaga en el espai lliure i incideix sobre plata (n = 0.05 – i 2.87).

$$n\cos\varepsilon_2 = -i\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}$$

Negligint pèrdues del metall

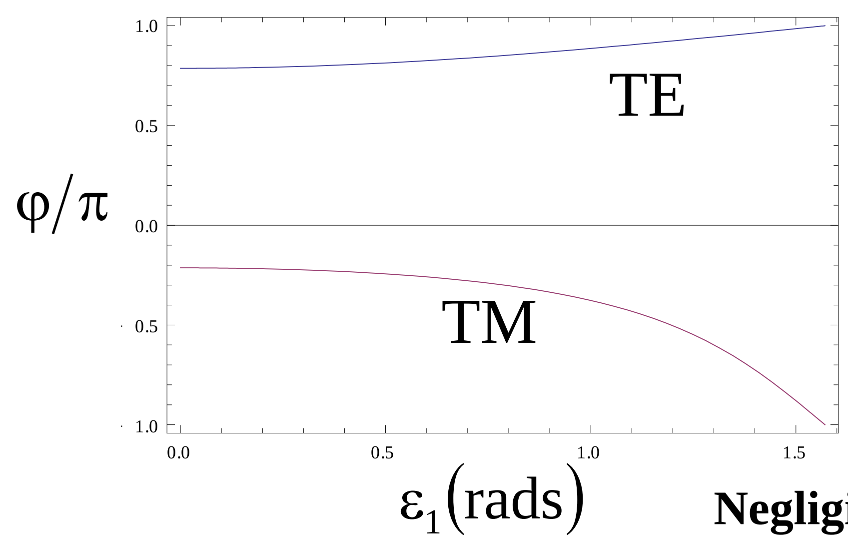
$$n = \text{-}i2.87 \Rightarrow \varepsilon_{Ag} \equiv n^2 = \text{-}8.24$$

$$r_{12}^{(TE)} = \frac{\cos\varepsilon_1 - n\cos\varepsilon_2}{\cos\varepsilon_1 + n\cos\varepsilon_2} = \exp\left(i\varphi^{(TE)}\right) \qquad r_{12}^{(TM)} = \frac{n^2\cos\varepsilon_1 - n\cos\varepsilon_2}{n^2\cos\varepsilon_1 + n\cos\varepsilon_2} = \exp\left(i\varphi^{(TM)}\right)$$

$$\tan\frac{\varphi^{(TE)}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}}{\cos\varepsilon_1} \qquad \left|r_{12}^{(TE)}\right| = \left|r_{12}^{(TM)}\right| = 1 \qquad \tan\frac{\varphi^{(TE)}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}}{n^2\cos\varepsilon_1}$$

Problemes

P4.4. Representeu gràficament la dependència de la reflectància i el desfasament amb l'angle d'incidència sobre una superfície plana en el cas d'una ona monocromàtica de longitud d'ona λ = 500 nm que es propaga en el espai lliure i incideix sobre plata (n = 0.05 – i 2.87).



$$\varepsilon_{Ag} \equiv n^2 = -8.24$$

$$\left|r_{12}^{(TE)}\right| = \left|r_{12}^{(TM)}\right| = 1$$

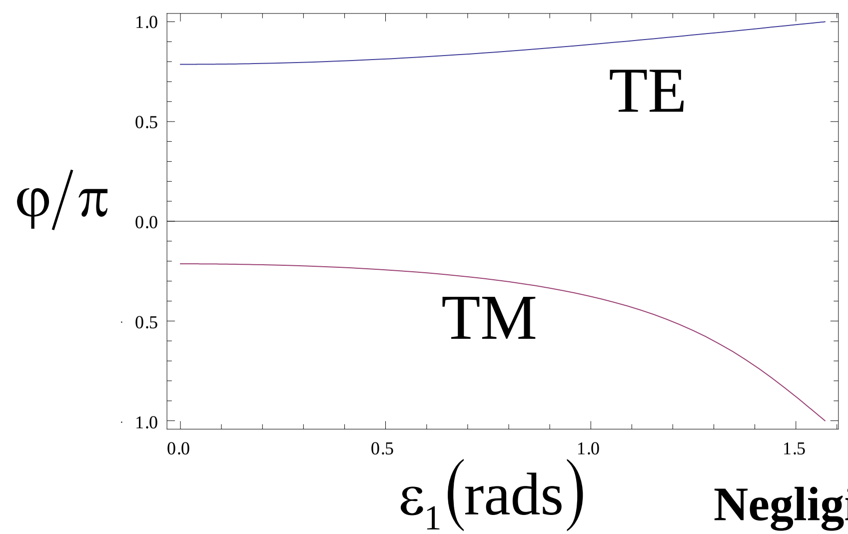
Negligint pèrdues del metall

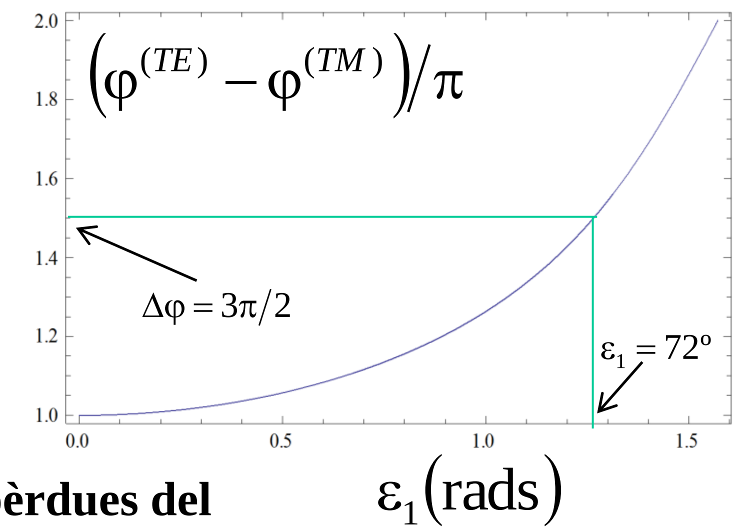
$$\tan\varphi^{(TE)} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}}{\cos\varepsilon_1}$$

$$\tan\varphi^{(TE)} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}}{n^2\cos\varepsilon_1}$$

Problemes

P4.4. Representeu gràficament la dependència de la reflectància i el desfasament amb l'angle d'incidència sobre una superfície plana en el cas d'una ona monocromàtica de longitud d'ona λ = 500 nm que es propaga en el espai lliure i incideix sobre plata ($n = 0.05 - i\,2.87$).





Negligint pèrdues del metall

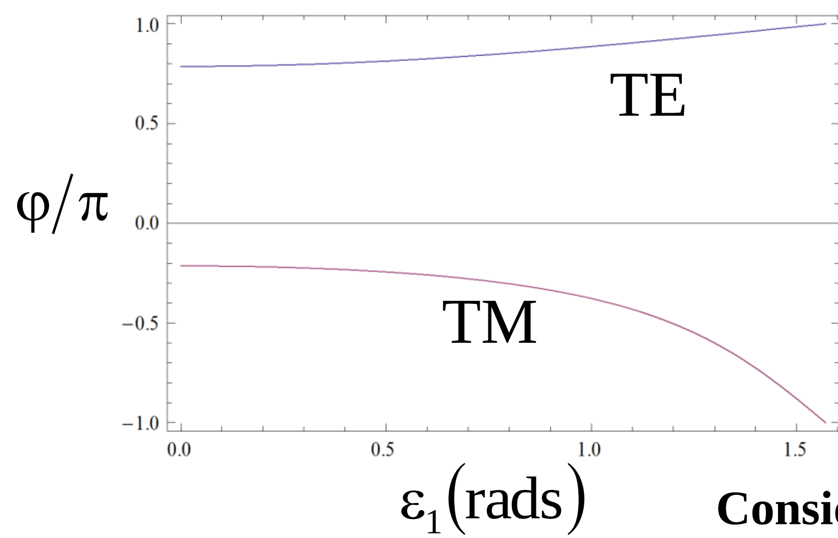
$$\tan\varphi^{(TE)} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}}{\cos\varepsilon_1}$$

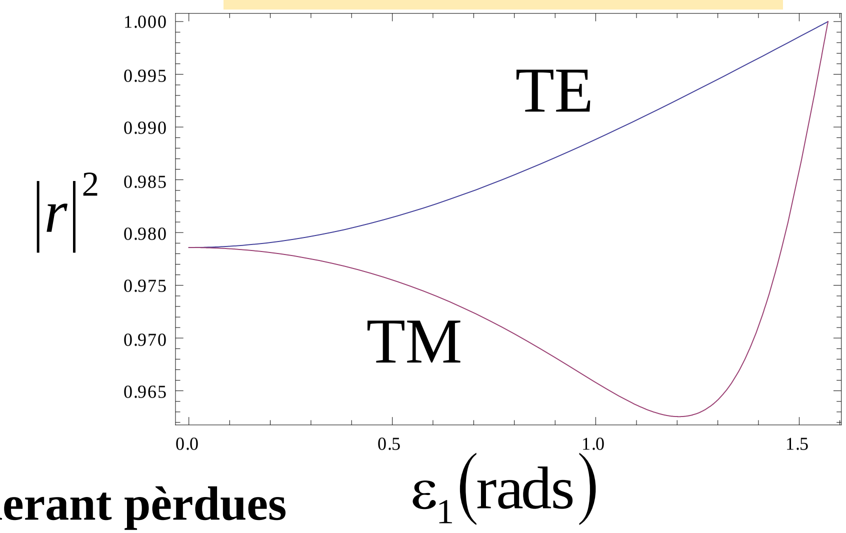
$$\tan\varphi^{(TE)} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}}{n^2\cos\varepsilon_1}$$

Problemes

P4.4. Representeu gràficament la dependència de la reflectància i el desfasament amb l'angle d'incidència sobre una superfície plana en el cas d'una ona monocromàtica de longitud d'ona λ = 500 nm que es propaga en el espai lliure i incideix sobre plata ($n = 0.05 - i\,2.87$).

$$\varepsilon_{Ag} \equiv n^2 = -8.23 - 0.29i$$





Considerant pèrdues del metall

$$r_{12}^{(TE)} = \frac{\cos\varepsilon_1 - n\cos\varepsilon_2}{\cos\varepsilon_1 + n\cos\varepsilon_2} = \left|r^{(TE)}\right| \exp\left(i\varphi^{(TE)}\right)$$

$$n\cos\varepsilon_2 = -i\sqrt{\sin^2\varepsilon_1 - n^2}$$

ELECTROMAGNETIC THEORY

BY

JULIUS ADAMS STRATTON
Professor of Physics
Massachusetts Institute of Technology

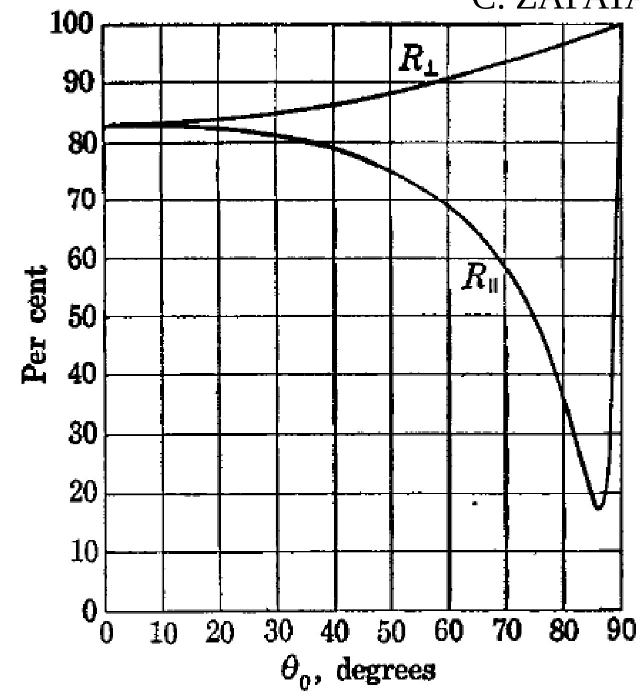


Fig. 94.—Reflection coefficients of plane radio waves from the surface of the sea.

Metal	$1 - R$, % at $\lambda = 12\mu$		$1 - R$, % at $\lambda = 25.5\mu$	
	Observed	Calculated	Observed	Calculated
Ag	1.15	1.3	1.13	1.15
Cu	1.6	1.4	1.17	1.27
Al	—	—	1.97	1.60
Au	2.1	1.6	1.56	1.39
Pt	3.5	3.5	2.82	2.96
Ni	4.1	3.6	3.20	3.16
Sn	—	—	3.27	3.23
Hg	—	—	7.66	7.55

Problemes

P4.5. Considereu un camp elèctric de la forma

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{A}e^{ikz-i\omega t}+\vec{B}e^{-ikz-i\omega t}$$

a) Deriveu l'expressió del camp magnètic ***H***.
b) Considerant que el medi és transparent (*k* és real), mostreu que la potència transmesa al llarg de l'eix *OZ* es pot escriure com

$$S_z=\frac{k}{2\omega\mu}\left[\left|\vec{A}\right|^2-\left|\vec{B}\right|^2\right]$$

c) Deriveu el flux de potència al llarg de l'eix *OZ* en un medi dissipatiu amb una *k* complexa. Mostreu que la potència no és la suma algebraica de la potència transportada per les ones individuals.

Problemes

a) Deriveu l'expressió del camp magnètic ***H***.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{ikz-i\omega t} + \vec{B}e^{-ikz-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{C}e^{ikz-i\omega t} + \vec{D}e^{-ikz-i\omega t}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$ik\hat{z} \times \vec{C}e^{ikz-i\omega t} - ik\hat{z} \times \vec{D}e^{-ikz-i\omega t} = -i\omega\varepsilon\vec{A}e^{ikz-i\omega t} - i\omega\varepsilon\vec{B}e^{-ikz-i\omega t}$$

$$\hat{z} \times \left(\hat{z} \times \vec{C}\right) = -\frac{\omega\varepsilon}{k}\hat{z} \times \vec{A}$$

$$\hat{z} \times \left(\hat{z} \times \vec{D}\right) = \frac{\omega\varepsilon}{k}\hat{z} \times \vec{B}$$

$$\left[\begin{array}{c} \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \\ k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{C} = \dfrac{1}{\eta}\hat{z} \times \vec{A} \\ \vec{D} = -\dfrac{1}{\eta}\hat{z} \times \vec{B} \end{array}}$$

$$\hat{z} \times \left(\hat{z} \times \vec{C}\right) = \hat{z}\left(\hat{z} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\hat{z} \cdot \hat{z}\right) = -\vec{C}$$

Problemes

b) Considerant que el medi és transparent (k es real), mostreu que la potència transmesa al llarg de l'eix OZ es pot escriure com

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{ikz-i\omega t} + \vec{B}e^{-ikz-i\omega t} \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{C}e^{ikz-i\omega t} + \vec{D}e^{-ikz-i\omega t}$$

$$\vec{E}\times\vec{H}^* = \vec{A}\times\vec{C}^* e^{i(k-k^*)z} + \vec{A}\times\vec{D}^* e^{i(k+k^*)z} + \vec{B}\times\vec{C}^* e^{-i(k+k^*)z} + \vec{B}\times\vec{D}^* e^{-i(k-k^*)z}$$

$$\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{\hat{z}}{\eta^*}\left[\vec{A}\cdot\vec{A}^* e^{i(k-k^*)z} + \vec{B}\cdot\vec{A}^* e^{-i(k+k^*)z} - \vec{A}\cdot\vec{B}^* e^{i(k+k^*)z} - \vec{B}\cdot\vec{B}^* e^{-i(k-k^*)z}\right]$$

$$\vec{E}\times\vec{H}^* \xrightarrow{k\in\text{real}} \frac{\hat{z}}{\eta}\left[\left|\vec{A}\right|^2 - \left|\vec{B}\right|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\left(\vec{B}\cdot\vec{A}^* e^{-i2kz}\right)\right] \qquad \vec{C} = \frac{1}{\eta}\hat{z}\times\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \frac{\hat{z}}{2\eta}\left[\left|\vec{A}\right|^2 - \left|\vec{B}\right|^2\right]} \qquad \vec{D} = -\frac{1}{\eta}\hat{z}\times\vec{B}$$

Problemes

c) Deriveu el flux de potència al llarg de l'eix *OZ* en un medi dissipatiu amb una *k* complexa. Mostreu que la potència no és la suma algebraica de la potència transportada per les ones individuals.

$$\vec{E}\times\vec{H}^{*}=\frac{\hat{z}}{\eta^{*}}\left[\vec{A}\cdot\vec{A}^{*}e^{i\left(k-k^{*}\right)z}+\vec{B}\cdot\vec{A}^{*}e^{-i\left(k+k^{*}\right)z}-\vec{A}\cdot\vec{B}^{*}e^{i\left(k+k^{*}\right)z}-\vec{B}\cdot\vec{B}^{*}e^{-i\left(k-k^{*}\right)z}\right]$$

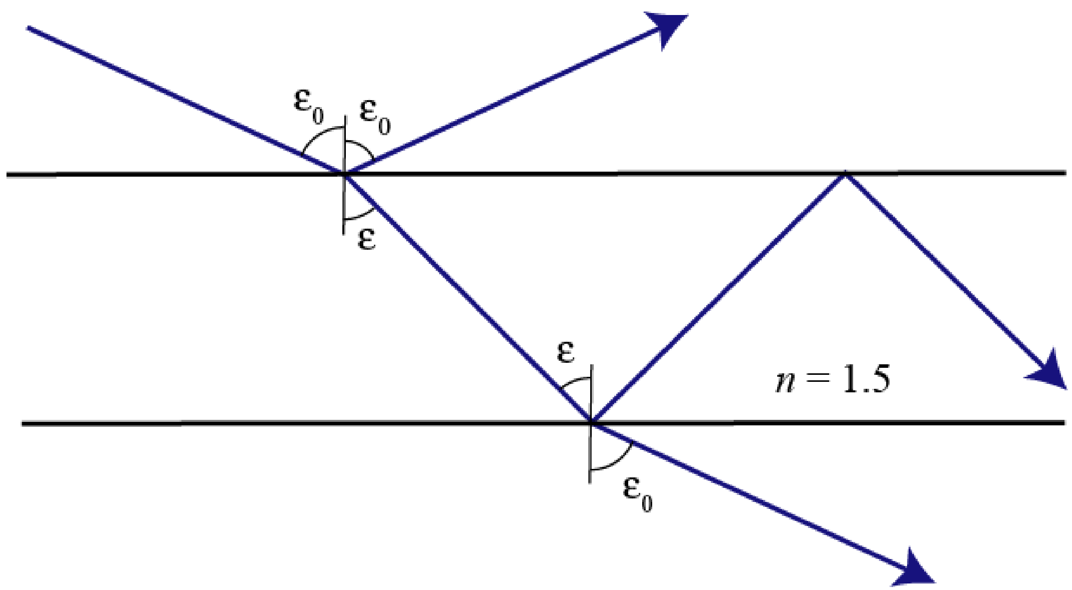
$$\vec{E}\times\vec{H}^{*}\xrightarrow{k=k'+ik''}\frac{\hat{z}\eta}{\left|\eta\right|^{2}}\left[\left|\vec{A}\right|^{2}e^{-2k''z}+\vec{B}\cdot\vec{A}^{*}e^{-i2k'z}-\vec{A}\cdot\vec{B}^{*}e^{i2k'z}-\left|\vec{B}\right|^{2}e^{2k''z}\right]$$

$$\hat{z}\,\frac{\eta'+i\eta''}{\left|\eta\right|^{2}}\left[\left|\vec{A}\right|^{2}e^{-2k''z}-\left|\vec{B}\right|^{2}e^{2k''z}+2i\,\mathrm{Im}\left(\vec{B}\cdot\vec{A}^{*}e^{-i2k'z}\right)\right]$$

$$S_{z}=\frac{\left|\vec{A}\right|^{2}e^{-2k''z}-\left|\vec{B}\right|^{2}e^{2k''z}}{2\left|\eta\right|^{2}/\eta'}\overbrace{-\frac{\eta''}{\left|\eta\right|^{2}}\mathrm{Im}\left(\vec{B}\cdot\vec{A}^{*}e^{-i2k'z}\right)}^{\textbf{Terme d'interferència}}$$

Problemes

P4.6. Un feix de llum circularment polaritzada incideix, des de l'aire, amb un angle de 45º sobre una làmina de vidre d'índex de refracció 1.5. Descriviu l'estat de polarització del feix reflectit i refractat. Repetiu el procés per a un angle d'incidència de 65º.



$$\sin \varepsilon_0 = n \sin \varepsilon$$

$$\varepsilon_0 = 45^{\circ} \Rightarrow \varepsilon = 28.1255^{\circ}$$

$$\varepsilon_0 = 65^{\circ} \Rightarrow \varepsilon = 37.1717^{\circ}$$

Problemes

Descriviu l'estat de polarització del feix reflectit i refractat.

$$r_{12}^{(TE)} = \frac{n_1 \cos\varepsilon_1 - n_2 \cos\varepsilon_2}{n_1 \cos\varepsilon_1 + n_2 \cos\varepsilon_2}$$

$$t_{12}^{(TE)} = \frac{2 n_1 \cos\varepsilon_1}{n_1 \cos\varepsilon_1 + n_2 \cos\varepsilon_2}$$

$$\varepsilon_1 = 45^{\circ} = \varepsilon_3$$

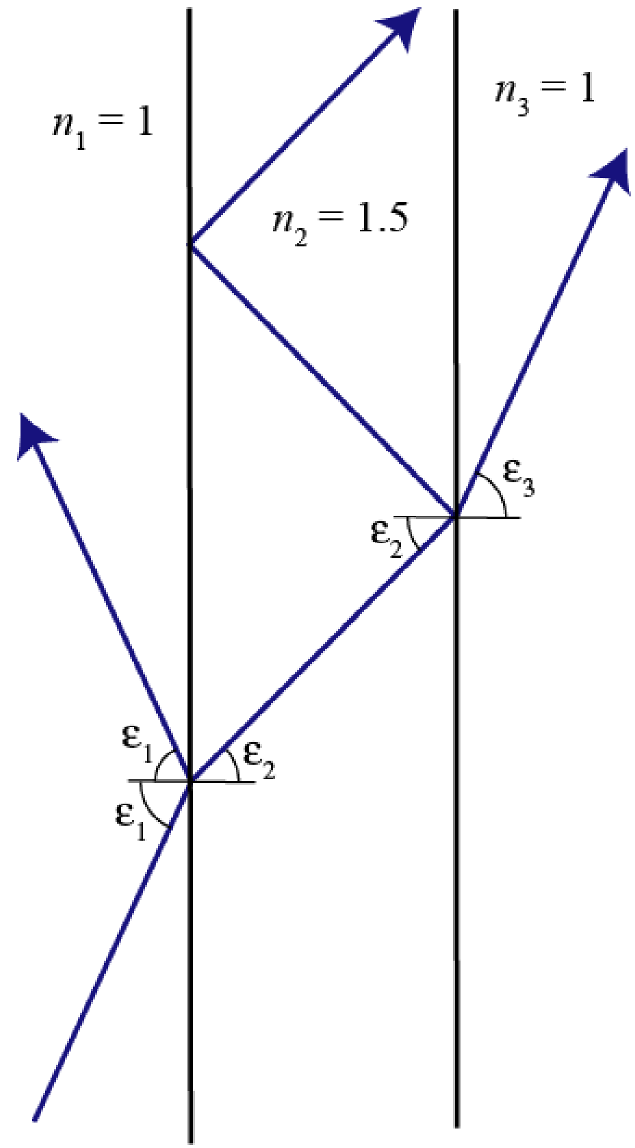
$$\varepsilon_2 = 28.1255^{\circ}$$

$$r_{12}^{(TE)} = -0.303337$$

$$t_{12}^{(TE)} = +0.696663$$

$$r_{21}^{(TE)} = +0.303337$$

$$t_{21}^{(TE)} = +1.303337$$



Problemes

Descriviu l'estat de polarització del feix reflectit i refractat.

$$r_{12}^{(TM)} = \frac{n_2 \cos\varepsilon_1 - n_1 \cos\varepsilon_2}{n_2 \cos\varepsilon_1 + n_1 \cos\varepsilon_2}$$

$$t_{12}^{(TM)} = \frac{2n_1 \cos\varepsilon_1}{n_2 \cos\varepsilon_1 + n_1 \cos\varepsilon_2}$$

$$\varepsilon_1 = 45^{o} = \varepsilon_3$$

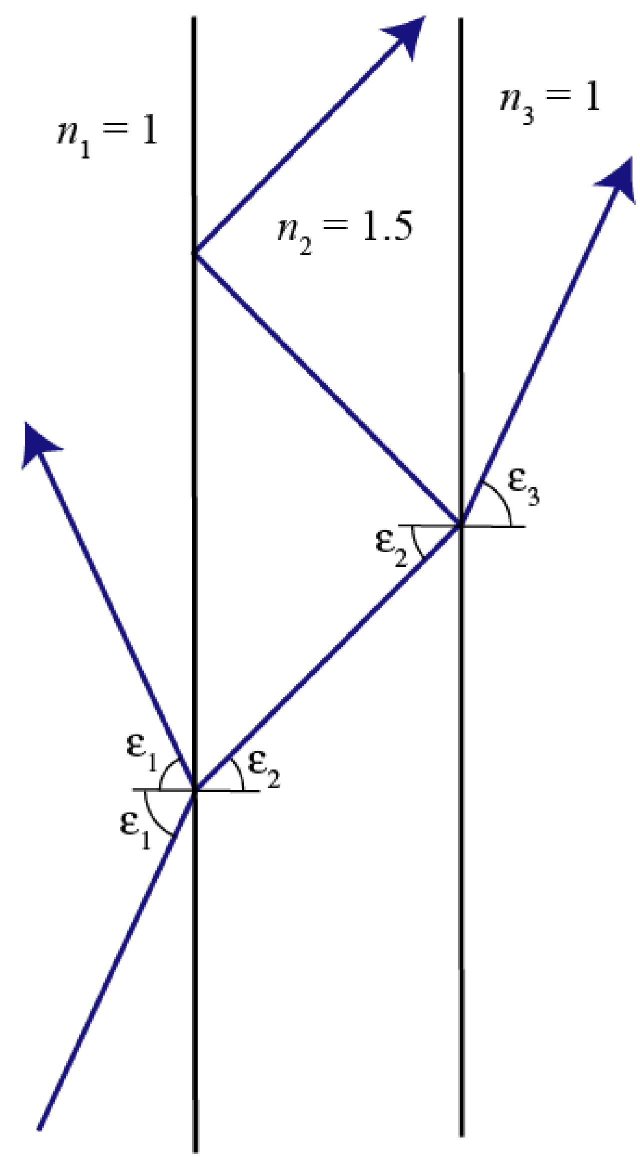
$$\varepsilon_2 = 28.1255^{o}$$

$$r_{12}^{(TM)} = +0.0920134$$

$$t_{12}^{(TM)} = +0.728009$$

$$r_{21}^{(TM)} = -0.0920134$$

$$t_{21}^{(TM)} = +1.36198$$



Problemes

Descriviu l'estat de polarització del feix reflectit i refractat.

$$\left|\psi_{in}\right\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\parallel} \\ \psi_{\perp} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{I_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 45^{\circ} = \varepsilon_3$$

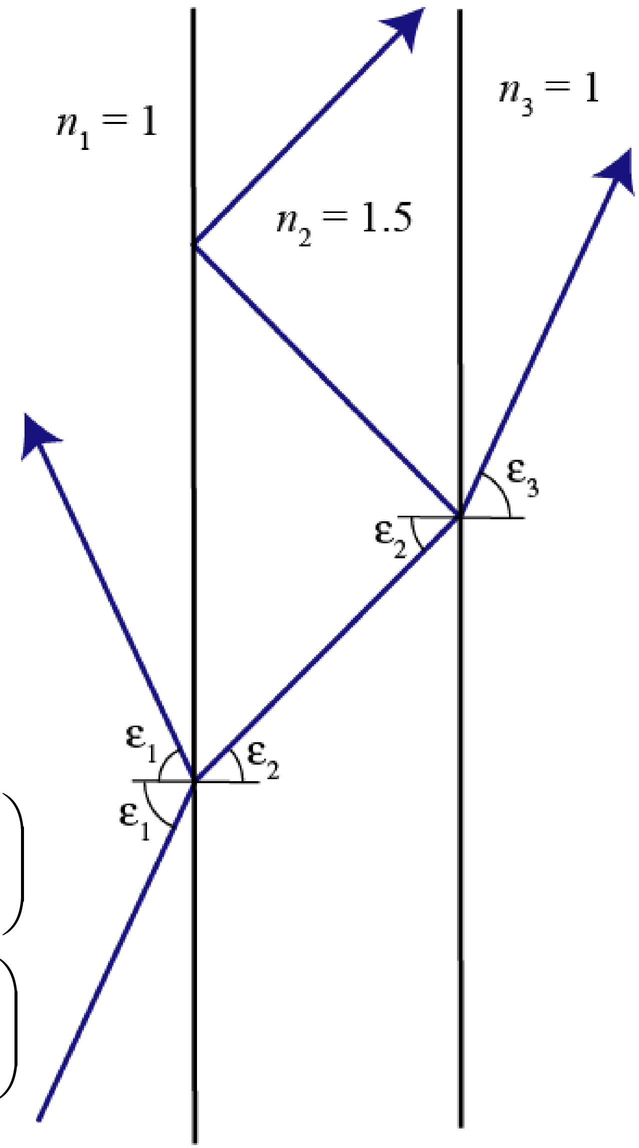
$$\varepsilon_2 = 28.1255^{\circ}$$

$$\left|\psi_{ref}\right\rangle = \begin{pmatrix} r_{12}^{(TM)}\psi_{\parallel} \\ r_{12}^{(TE)}\psi_{\perp} \end{pmatrix} = r_{12}^{(TM)} \sqrt{\frac{I_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\, r_{12}^{(TE)} / r_{12}^{(TM)} \end{pmatrix}$$

$$\left|\psi_{ref}\right\rangle = 0.092 \sqrt{\frac{I_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i3.30 \end{pmatrix}$$

$$\left|\psi_{tr}\right\rangle = 0.99 \sqrt{\frac{I_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i0.916 \end{pmatrix}$$

$$\left|\psi_{tr}\right\rangle = \begin{pmatrix} t_{12}^{(TM)} t_{21}^{(TM)} \psi_{\parallel} \\ t_{12}^{(TE)} t_{21}^{(TE)} \psi_{\perp} \end{pmatrix} = t_{12}^{(TM)} t_{21}^{(TM)} \sqrt{\frac{I_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\, t_{12}^{(TE)} t_{21}^{(TE)} / t_{12}^{(TM)} t_{21}^{(TM)} \end{pmatrix}$$

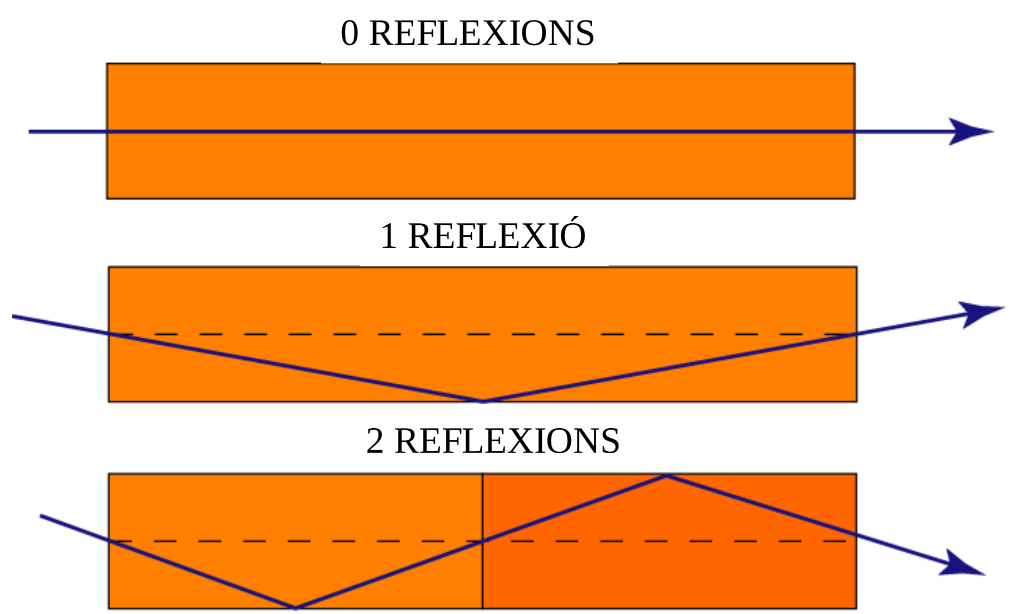


TREBALLS TUTELATS D'ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 1

Treballs tutelats

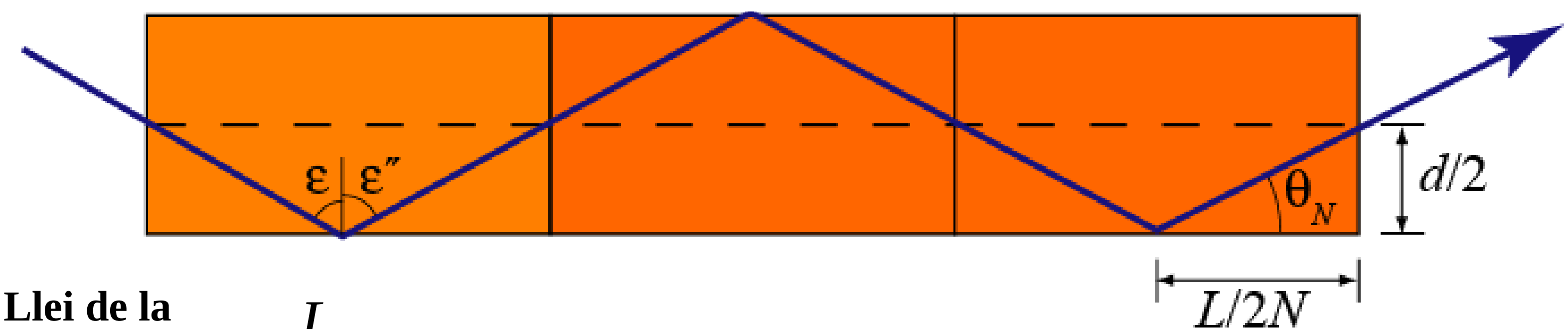
TT1.1. Un tub cilíndric té un diàmetre interior de 5 cm i una longitud d’un metre. La seua superfície interior és reflectora en els primers 89 cm i absorbent en la resta. En l’extremitat absorbent del tub es col·loca un diafragma proveït d'un orifici molt menut, centrat respecte a l’eix del cilindre. En l’altre extrem es col·loca un altre diafragma idèntic darrere del qual se situa una font lluminosa.



Treballs tutelats

Determineu la inclinació respecte a l'eix amb què emergeixen del tub els raigs de llum. Descriviu l'aspecte del camp observat quan es mira a través del tub.

3 REFLEXIONS



$L = 1m$

$d = 5cm$

Llei de la reflexió

$\varepsilon'' = -\varepsilon$

$$\frac{L}{2N} = 11cm \Rightarrow N = 4.55$$

$$\tan\theta_N = \frac{d/2}{L/2N} \rightarrow \frac{Nd}{L}$$

Es produeixen només fins a 4 reflexions.

$\theta_1 = 2.86^o \quad \theta_3 = 8.53^o$

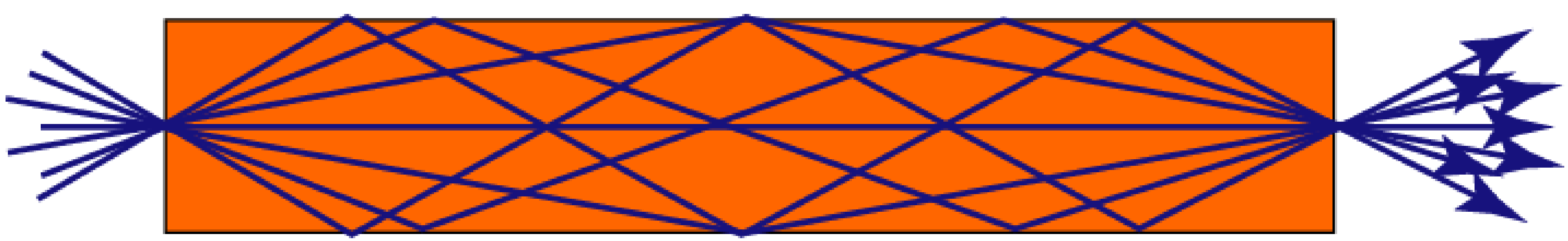
$\theta_2 = 5.71^o \quad \theta_4 = 11.31^o$

Treballs tutelats

Qüestions:

a) Què succeeix si tota la superfície interior del tub és reflector?

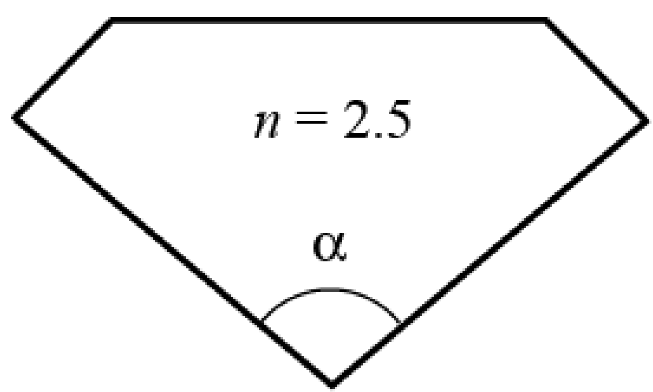
b) Com és el camp observat si el diafragma d'eixida és circular de diàmetre no negligible?



El camp observat consisteix en un punt central i 4 anells.

Treballs tutelats

TT1.2. Considereu un brillant amb la talla de la figura. Suposant una il·luminació paral·lela i normal a la cara superior, calculeu els valors de α que permeten que la llum, després de patir dues reflexions internes, isca del brillant per aquesta mateixa cara (per a un primer càlcul no s’ha de considerar la influència del rebaix del cantell).



Treballs tutelats

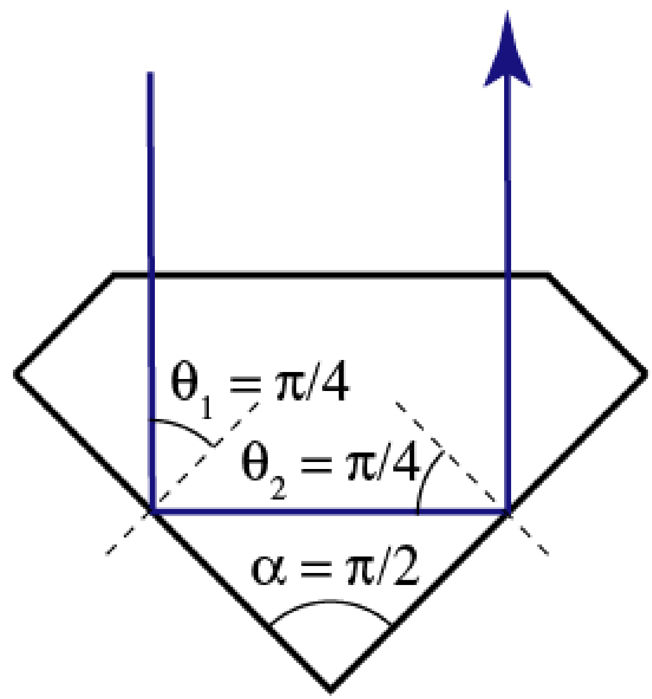
Solució: Si considerem que $\alpha = 90^{o}$, hem d'exigir que $\theta_1 = \theta_2$ siga major que l'angle límit θ_{lim}.

Llei de Snell

$$n \sin\theta_1 = \sin\theta_1' \leq 1$$

Angle límit

$$n \sin\theta_{lim} = 1$$



$$\theta_{lim} = \arcsin\frac{1}{n} = 23.6^{o} < 45^{o} = \theta_1 = \theta_2$$

Treballs tutelats

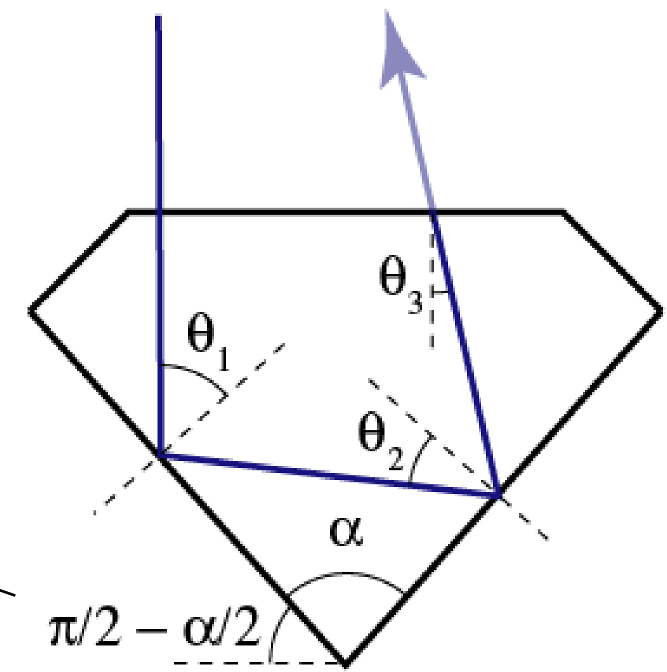
Considerant triangles interiors, trobem la relació dels angles d'incidència amb α.

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \pi \Rightarrow \theta_2 = \alpha - \theta_1$$

$$2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 = \pi \Rightarrow \theta_3 = \pi - 2(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\boxed{\theta_3 = \pi - 2\alpha}$$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}}$$



Treballs tutelats

Perquè hi haja una doble reflexió:

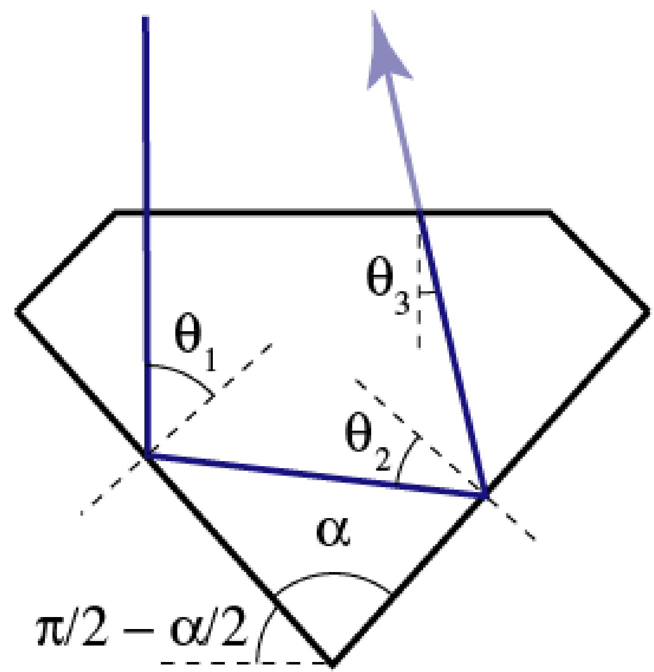
$$\theta_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{2\pi}{3} = 120^o$$

Per a evitar una triple reflexió:

$$\theta_3 < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha > \frac{2\pi}{5} = 72^o$$

LIMITACIÓ GEOMÈTRICA

$$72^o < \alpha < 120^o$$

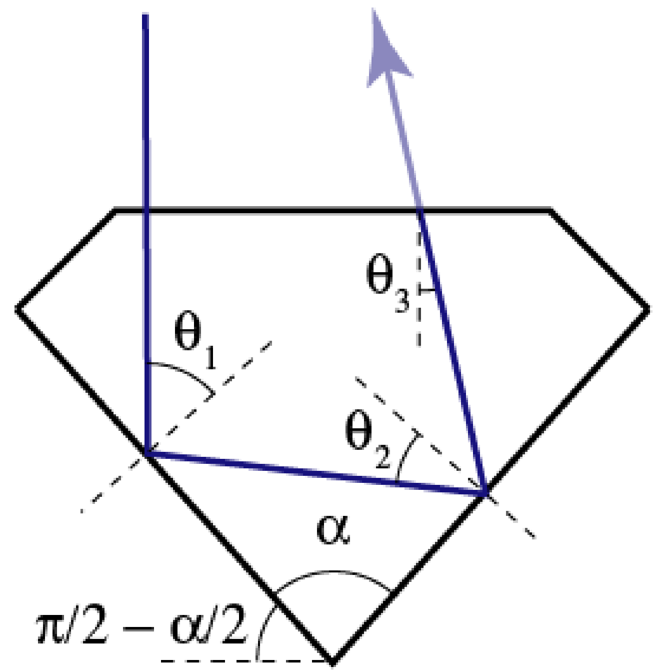


Treballs tutelats

Hem de fer complir la condició de reflexió total en les dues primeres cares i evitar-la en la tercera.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} > \theta_{\lim} \Leftrightarrow \alpha < \pi - 2\theta_{\lim} = 132.8^{\circ}$$

$$\theta_2 = \frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} > \theta_{\lim} \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{3} + \frac{2\theta_{\lim}}{3} = 75.7^{\circ}$$



Doble reflexió interna

$$75.7^{\circ} < \alpha < 132.8^{\circ}$$

Qüestió: Hem de considerar valors negatius de θ_2?

Treballs tutelats

Hem de fer complir la condició de reflexió total en les dues primeres cares i evitar-la en la tercera.

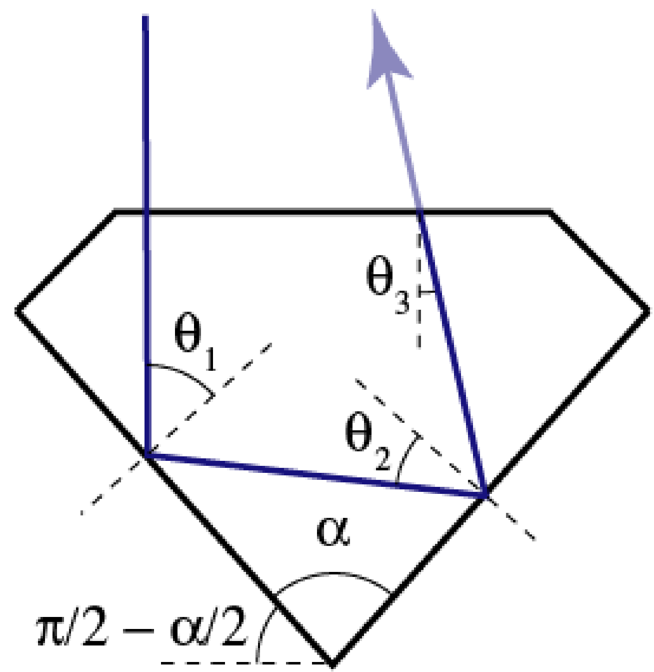
$$|\theta_3 = \pi - 2\alpha| < \theta_{\lim} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha > \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta_{\lim}}{2} = 78.2^{o} \\ \alpha > \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_{\lim}}{2} = 101.8^{o} \end{cases}$$

CONDICIÓ D'EMERGÈNCIA

$$78.2^{o} < \alpha < 101.8^{o}$$

Conclusió: La condició d'emergència domina sobre la resta.

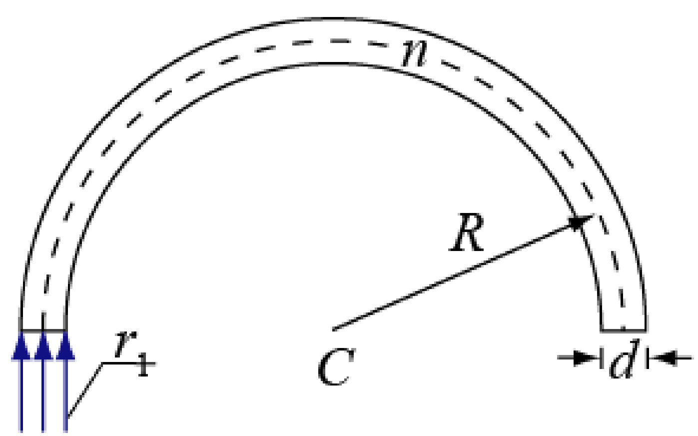
Qüestió: Quina és la raó de tallar el diamant i produir-li rebaixos laterals?



Treballs tutelats

TT1.3. Considereu una guia corbada de secció rectangular com la de la figura. Tenint en compte que, segons una descripció purament geomètrica, la llum es propaga en l'interior de una guia per reflexió total.

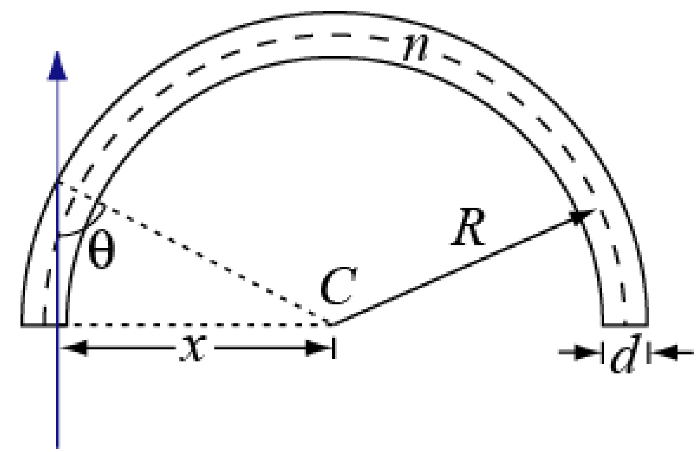
a) Demostreu que és suficient que el raig 1 complisca la condició de propagació perquè tot el feix es propague al llarg de la guia.



Treballs tutelats

a) Demostreu que és suficient que el raig 1 complisca la condició de propagació perquè tot el feix es propague al llarg de la guia.

$$\sin\theta = \frac{x}{R+(d/2)}$$



$$x = R + \frac{d}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{2}$$

Raig #1

$$x = R - \frac{d}{2} \Rightarrow \theta_{min} = \arcsin\frac{R-(d/2)}{R+(d/2)}$$

Conclusió: Si es produeix reflexió total per a r_1, $\theta_{min}>\theta_{lim}$, llavors també s'observarà per a la resta de raigs.

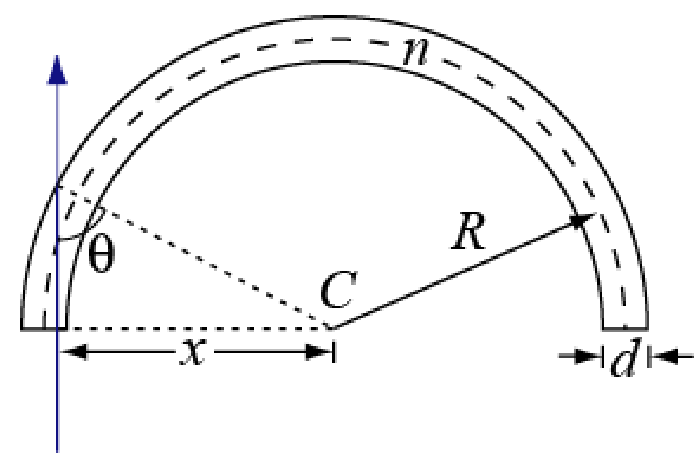
Treballs tutelats

b) Obteniu el radi mínim que pot tenir aquesta guia per a evitar que la llum deixe de propagar-s'hi a través.

Condició de propagació

$$\arcsin\frac{1}{n} = \theta_{\text{lim}} < \theta_{\text{min}} = \arcsin\frac{R-(d/2)}{R+(d/2)}$$

$$\boxed{R_{\text{min}} = \frac{d}{2}\,\frac{n+1}{n-1}} \qquad (n>1) \quad (R>d/2)$$



Qüestió: Demostreu que si un raig incideix sobre la cara exterior amb un angle θ, després de reflectir-s'hi, torna a incidir en un altre punt d'aquesta mateixa cara amb el mateix angle θ.

Treballs tutelats

TT1.4. Des d’un punt de la superfície terrestre, O, on l’índex de refracció de l’aire és n_0, es mesura l’angle zenital d’un estel, és a dir, l’angle que forma la direcció en què es veu l’estel amb la vertical del punt d’observació. A causa de la variació de l’índex de l’aire amb l’altura, hi ha una lleu diferència $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_0$ entre l’angle zenital real, ε, i l’observat, ε_0. Determineu l’equació de les trajectòries que passen per O si l’índex de refracció de l’atmosfera ve donat per l’equació:

$$n^2(z) = n_0^2 - bz \qquad\qquad b > 0$$

on b és una constant. A més, obteniu l’expressió de Δ en funció de ε_0.

Treballs tutelats

Determineu l'equació de les trajectòries que passen per O si l'índex de refracció de l'atmosfera ve donat per l'equació:

$$n^2(z)=n_0^2-bz \quad \begin{cases} n(0)=n_0 \\ n(d)=1=\sqrt{n_0^2-bd} \Rightarrow d=\dfrac{n_0^2-1}{b} \end{cases}$$

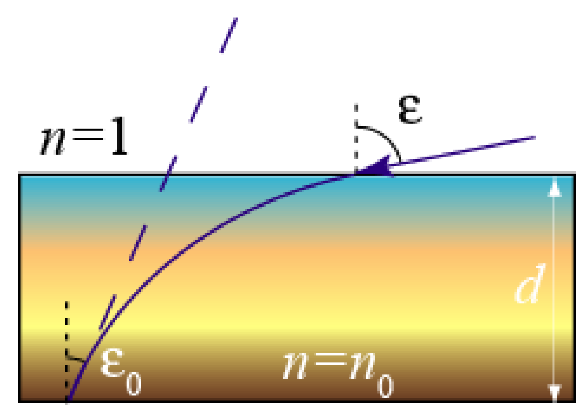
$$\boxed{\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{2C^2}\frac{dn^2}{dz}}$$

$$0 \le z \le d$$

$$\frac{dn^2}{dz}=-b \Rightarrow z(x)=z(0)+z'(0)x+\frac{1}{2}z''(0)x^2$$

$$\left.\begin{aligned} &z(0)=0 \qquad C=n_0\sin\varepsilon_0 \\ &z'(0)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0\right)=-\cot\varepsilon_0 \\ &z''(0)=\frac{1}{2C^2}\left.\frac{dn^2}{dz}\right|_{x=0}=-\frac{b}{2n_0^2\sin^2\varepsilon_0} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{z=-\cot\varepsilon_0 x-\frac{b}{4n_0^2\sin^2\varepsilon_0}x^2}$$



Treballs tutelats

Determineu l'equació de les trajectòries que passen per O si l'índex de refracció de l'atmosfera ve donat per l'equació:

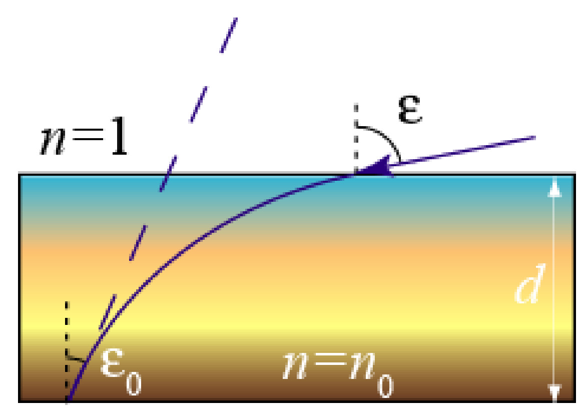
$$n^2(z) = n_0^2 - bz \quad \begin{cases} n(0) = n_0 \\ n(d) = 1 = \sqrt{n_0^2 - bd} \Rightarrow d = \dfrac{n_0^2 - 1}{b} \end{cases}$$

$$0 \le z \le d$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 = -\cot \varepsilon_0 - \frac{b}{2n_0^2 \sin^2 \varepsilon_0} x$$

$$(x, z) = \left(-\sin 2\varepsilon_0, \cos^2 \varepsilon_0\right) n_0^2 / b$$

$$\boxed{z = -\cot \varepsilon_0 x - \frac{b}{4n_0^2 \sin^2 \varepsilon_0} x^2}$$



Condició d'observació

$$\cos^2 \varepsilon_0 \, n_0^2 / b \ge d \Rightarrow 1 \ge n_0^2 \sin^2 \varepsilon_0 \equiv C^2 = \sin^2 \varepsilon$$

$$\boxed{|C| \le 1}$$

Treballs tutelats

A més, obteniu l'expressió de Δ en funció de ε_0.

$$n^2(z) = n_0^2 - bz \quad \begin{cases} n(0) = n_0 \approx 1 \\ n(d) = 1 \Rightarrow d = \dfrac{n_0^2 - 1}{b} \approx 2\dfrac{n_0 - 1}{b} \end{cases}$$

$$\Delta = \varepsilon - \varepsilon_0 \approx 0 \qquad 0 \le z \le d$$

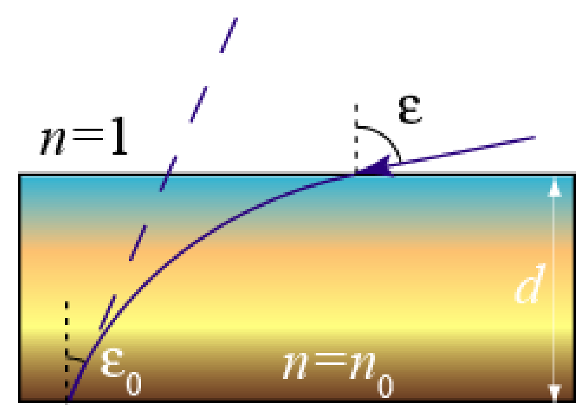
1a Llei de Bouguer

$$\sin\varepsilon = C = n_0 \sin\varepsilon_0 \approx \sin\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon \approx \varepsilon_0$$

$$z \approx -\cot\varepsilon_0 x - \frac{b}{4\sin^2\varepsilon_0} x^2$$

$$\sin\varepsilon = \sin(\varepsilon_0 + \Delta) \approx \sin(\varepsilon_0) + \Delta\cos(\varepsilon_0)$$

$$\Delta \approx \frac{\sin\varepsilon - \sin\varepsilon_0}{\cos\varepsilon_0} = \frac{n_0 \sin\varepsilon_0 - \sin\varepsilon_0}{\cos\varepsilon_0} = (n_0 - 1)\tan\varepsilon_0$$



Qüestió: Demostreu que si $\begin{cases} \varepsilon_0 = 45^{\circ} \\ n_0 = 1.0003 \end{cases}$

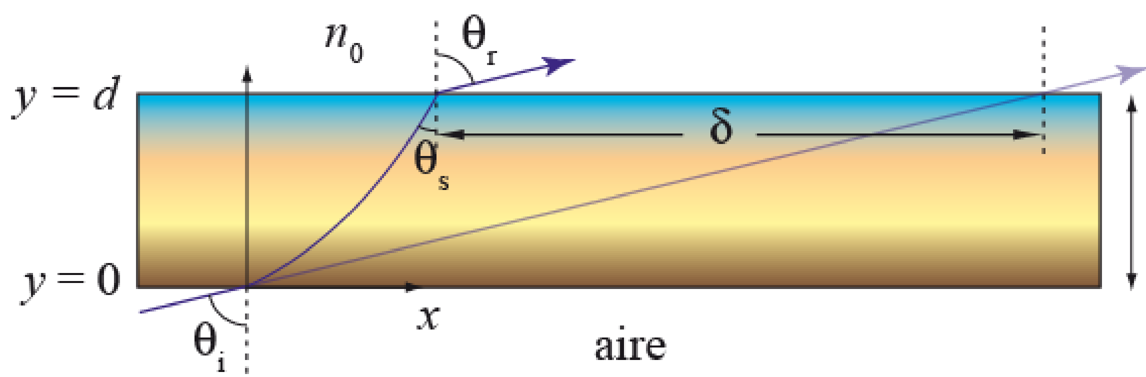
$$\Delta = 1'2''$$

Treballs tutelats

TT1.5. Un raig de llum incideix sobre un medi inhomogeni estratificat en forma de làmina de cares paral·leles de grossor d, l'índex de refracció del qual varia d'acord amb l'expresió:

$$n^2(0 \le y \le d) = \left(1 + 2\frac{y}{L}\right) n^2(0)$$

on $n^2(0) = 3/2$ i L és una constant amb unitats de longitud. Se suposa que la làmina es troba entre aire i un medi d'índex de refracció n_0. El raig incident es mou en l'aire ($y < 0$) i, després de travessar la làmina, n'ix amb un determinat angle θ_r.



Treballs tutelats

a) Quines condicions han de satisfer n_0 i d perquè el raig emergent siga paral·lel a l'incident?

$$n^2 = \left(1 + 2\frac{y}{L}\right) n^2(0^+) \Rightarrow \frac{dn^2}{dy} = \frac{2}{L} n^2(0^+) \qquad C \equiv n \sin\theta = \sin\theta_i \qquad y(0) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2C^2}\frac{dn^2}{dy} \Rightarrow y''(x) = \frac{n^2(0)}{L\sin^2\theta_i}$$

EQUACIO PARABÒLICA DE LA TRAJECTÒRIA

$$\boxed{y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2}$$

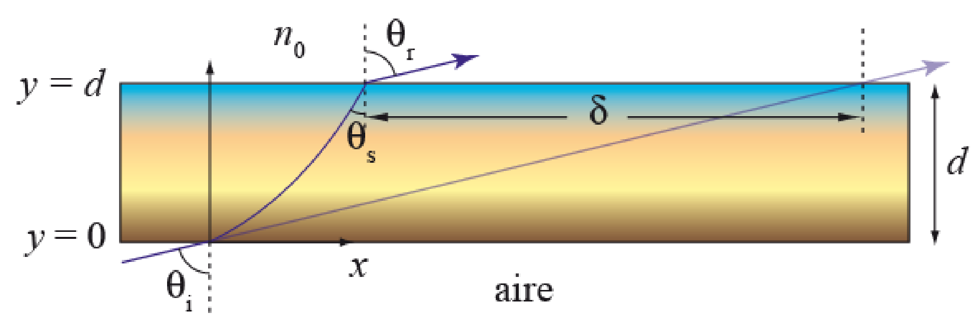
$$y''(0^+) = \frac{n^2(0^+)}{L\sin^2\theta_i} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \equiv \cot^2\theta = \frac{n^2}{C^2} - 1 \Rightarrow y'(0^+) = \sqrt{\frac{n^2(0^+)}{\sin^2\theta_i} - 1}$$

De l'invariant de Bouguer:

$$n_0 \sin\theta_r = C = \sin\theta_i$$

$$\theta_r = \theta_i \Rightarrow \boxed{n_0 = 1}$$

Independent del valor de *d*!



Treballs tutelats

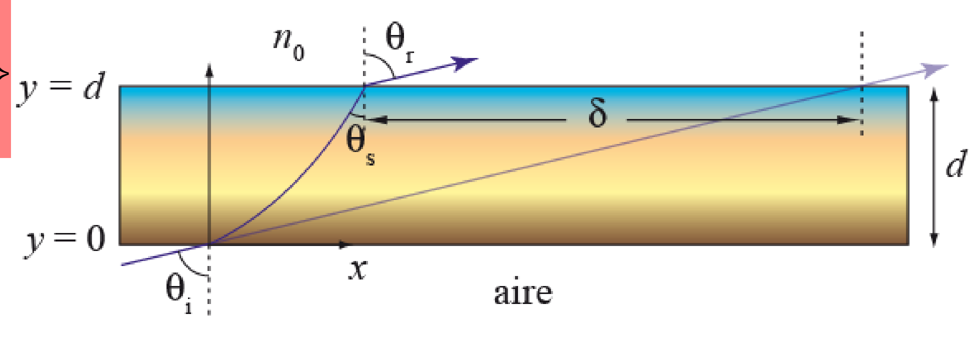
b) En el cas que es satisfacen les condicions de l'apartat anterior, calculeu el desplaçament δ produït sobre el raig incident a causa de la presència de la làmina suposant que l'angle d'incidència $\theta_i = \pi/3$

$$\left.\begin{aligned}\theta_i &= \pi/3\\ n^2(0^+) &= 3/2\end{aligned}\right\} \Rightarrow y(0 \le y \le d) = x + \frac{x^2}{L} \qquad y(y<0) = \frac{x}{\tan\theta_i} \xrightarrow{\theta_i = \frac{\pi}{3}} y(y<0) = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$d = x_{r1} + \frac{x_{r1}^2}{L} \Rightarrow x_{r1} = \frac{-1+\sqrt{1+(4d/L)}}{2}L \qquad d = \frac{x_{r2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_{r2} = \sqrt{3}d$$

$$\boxed{\delta = x_{r2} - x_{r1} = L\left\{\sqrt{3}\frac{d}{L} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4d}{L}}\right\}}$$

$$d \ge 0 \qquad \frac{d}{L} \ge -\frac{1}{4}$$



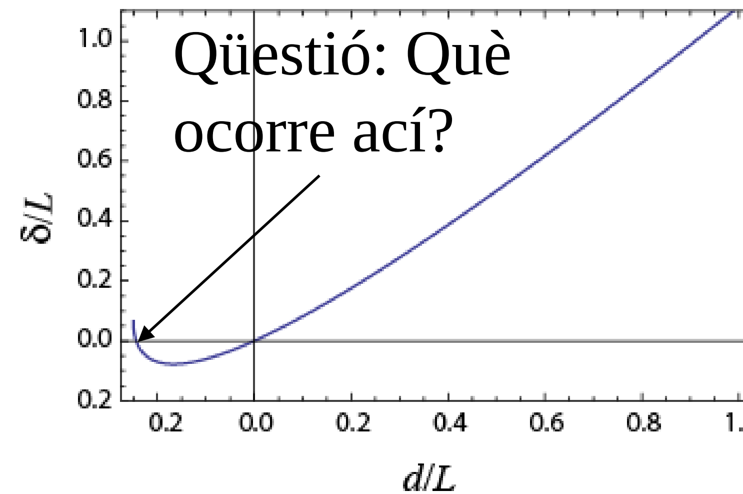
Treballs tutelats

b) En el cas que es complisquen les condicions de l'apartat anterior, calculeu el desplaçament δ produït sobre el raig incident a causa de la presència de la làmina suposant que l'angle d'incidència $\theta_i = \pi/3$

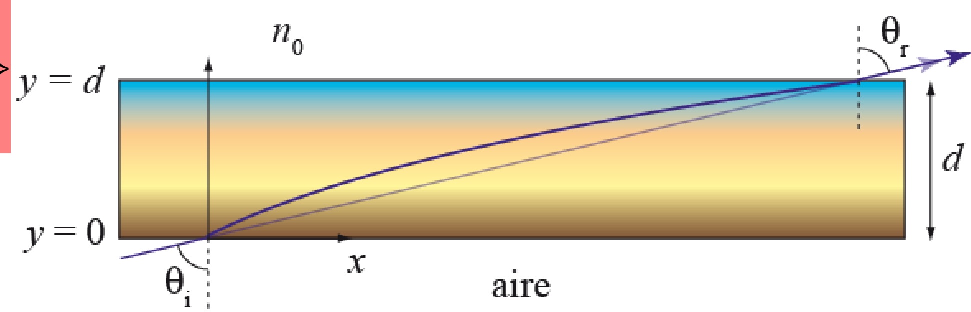
$$\left.\begin{aligned}\theta_i &= \pi/3\\ n^2(0^+) &= 3/2\end{aligned}\right\} \Rightarrow y(0 \le y \le d) = x + \frac{x^2}{L}$$

$$\Downarrow$$

$$d = x_{r1} + \frac{x_{r1}^2}{L} \Rightarrow x_{r1} = \frac{-1+\sqrt{1+(4d/L)}}{2}L$$



$$\delta = x_{r2} - x_{r1} = L\left\{\sqrt{3}\frac{d}{L} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4d}{L}}\right\}$$



Qüestió: Què ocorre quan $d/L = -1/4$?

Treballs tutelats

TT1.7. Considereu la lent de Luneburg, que consisteix en una bola de radi a submergida en un medi d'índex de refracció n_0. Aquesta bola està construïda amb un material isòtrop estratificat de simetria radial, l'índex de refracció del qual té la forma

$$n(r) = n_0 \sqrt{2 - (r/a)^2}$$

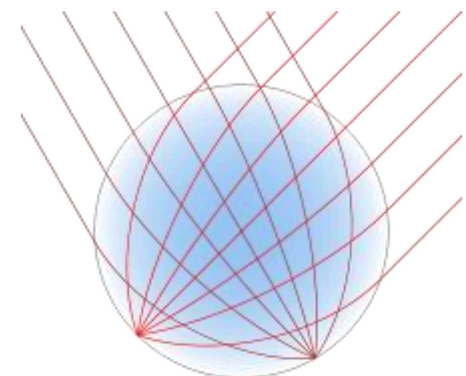
per a $r \leq$ a. Determineu la trajectòria dels raigs que es propaguen dins la lent de Luneburg i demostreu que formen el·lipses coplanàries amb l'origen de coordenades $r = 0$. A més, comproveu que un feix de raigs paral·lels que incideixen sobre la lent es focalitzen en un únic punt de la superfície de la lent.

Treballs tutelats

- Un exemple senzill i interessant és conegut com la "lent de Luneburg", que es caracteritza per un medi d'índex de refracció

$$n(r) = n_0 \sqrt{2 - (r/a)^2}$$

$$0 \le r \le a$$



Secció transversal de la lent de Luneburg, amb ombreig blau proporcional a l'índex de refracció (Font: Wikipedia)

- Resolem les equacions dels raigs.

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \theta_0 + \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{c}{r\sqrt{n^2 r^2 - c^2}}\, dr \\[2ex] \rho = \dfrac{r}{a} \qquad K = \dfrac{c}{a n_0} \end{array}\right\} \quad \theta = \theta_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{K}{\rho\sqrt{-\rho^4 + 2\rho^2 - K^2}}\, d\rho$$

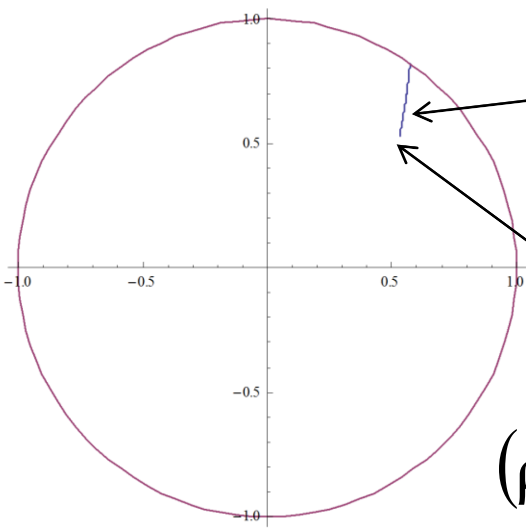
$$0 \le K \le 1 \qquad 1 - \sqrt{1 - K^2} \le \rho^2 \le 1$$

Treballs tutelats

- Es pot demostrar que

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\rho^2-K^2}{K\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}\right)\right]=\frac{K}{\rho\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}$$

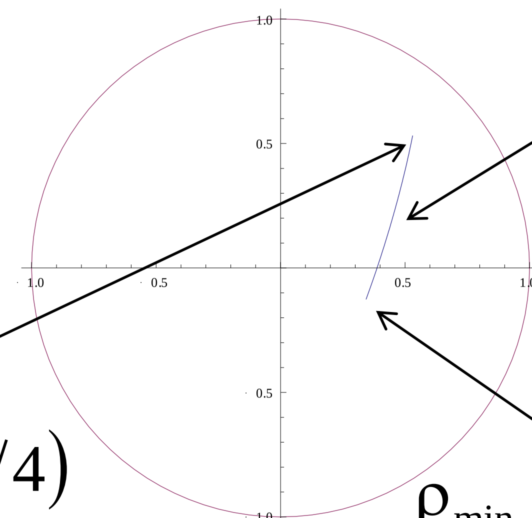
$$\Theta(\rho)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\rho^2-K^2}{K\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}\right)\Rightarrow \boxed{\theta=\theta_0+\Theta(\rho)-\Theta(\rho_0)}$$



$\rho \geq \rho_0$

$K = 1/2$

$(\rho_0, \theta_0) = (3/4, \pi/4)$



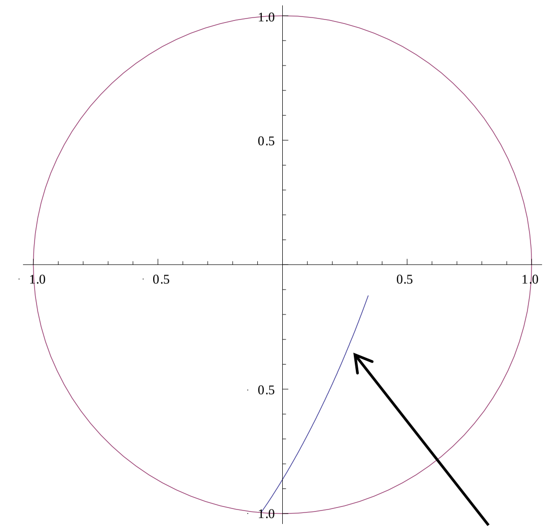
$\rho \leq \rho_0$

$\rho_{min} = \sqrt{1-\sqrt{1-K^2}}$

Treballs tutelats

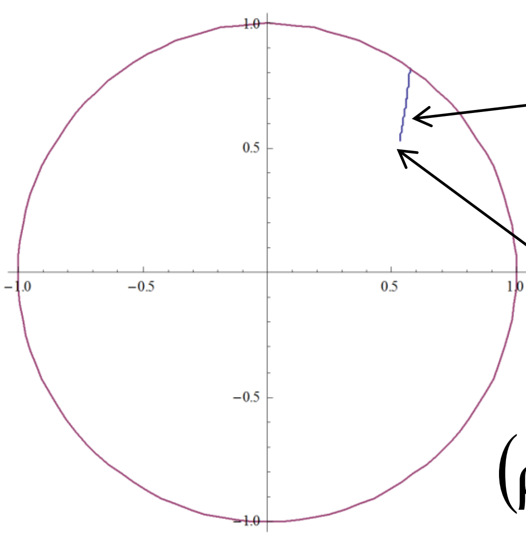
- La trajectòria completa està donada per

$$\theta = \theta_0 + \left(\int_{\rho_0}^{\rho_{\min}} \pm \int_{\rho_{\min}}^{\rho} \right) \frac{K}{\rho\sqrt{-\rho^4 + 2\rho^2 - K^2}} d\rho$$



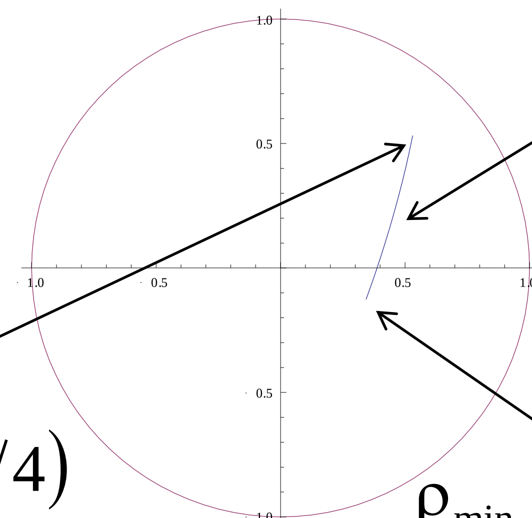
$$\theta = \theta_0 + \left[\Theta(\rho_{\min}) - \Theta(\rho_0)\right] \pm \left[\Theta(\rho) - \Theta(\rho_{\min})\right]$$

$$\theta = \theta_0 + 2\Theta(\rho_{\min}) - \Theta(\rho_0) - \Theta(\rho)$$



$\rho \geq \rho_0$

$K = 1/2$



$\rho \leq \rho_0$

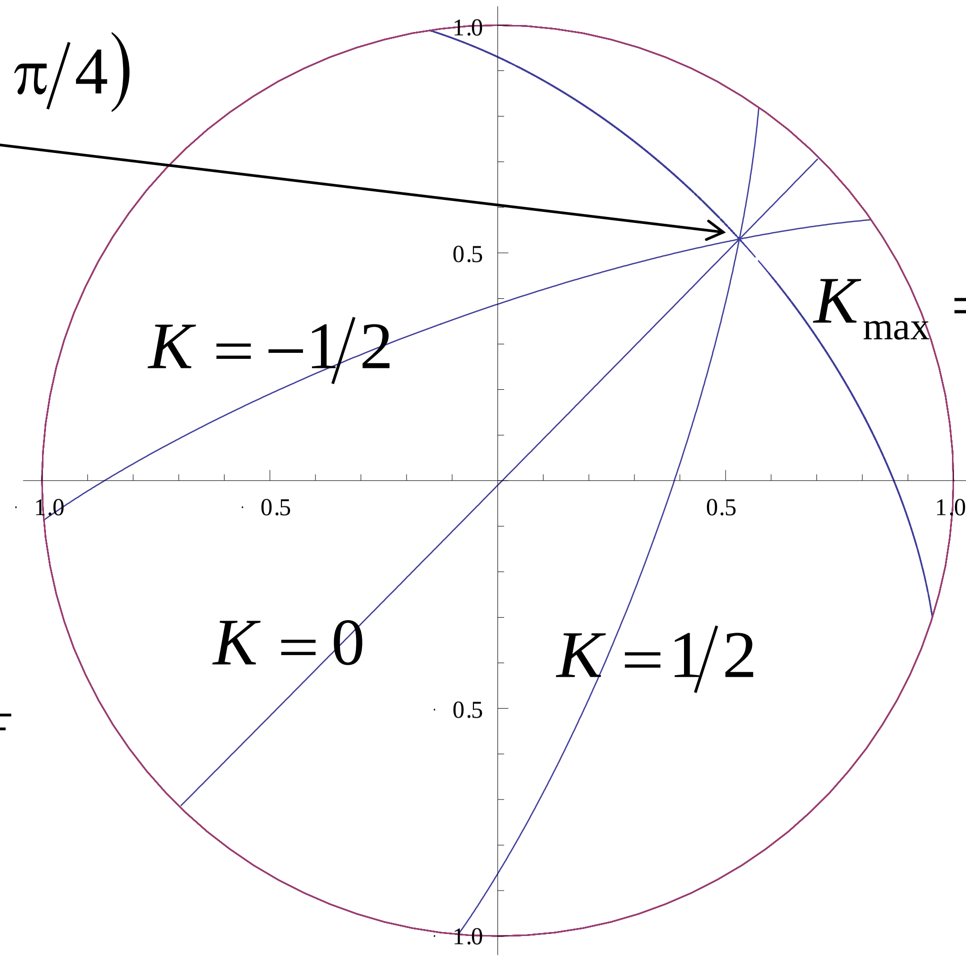
$(\rho_0, \theta_0) = (3/4, \pi/4)$

$$\rho_{\min} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - K^2}}$$

Treballs tutelats

$$\theta = \theta_0 + \left[\Theta(\rho_{min}) - \Theta(\rho_0)\right] \pm \left[\Theta(\rho) - \Theta(\rho_{min})\right]$$

$$(\rho_0, \theta_0) = (3/4, \pi/4)$$



$$K_{max} = \rho_0 \sqrt{2 - \rho_0^2}$$

$$\rho_{min} = \rho_0$$

$$\rho_{min} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - K^2}}$$

$$\Theta(\rho_{min}) = -\pi/4$$

Treballs tutelats

- Es pot demostrar que

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\rho^2-K^2}{K\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}\right)\right]=\frac{K}{\rho\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}$$

$$\theta=\theta_0+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\rho^2-K^2}{K\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\rho_0^2-K^2}{K\sqrt{-\rho_0^4+2\rho_0^2-K^2}}\right)$$

$$\alpha=\theta_0-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\rho_0^2-K^2}{K\sqrt{-\rho_0^4+2\rho_0^2-K^2}}\right)\Rightarrow\tan 2(\theta-\alpha)=\frac{\rho^2-K^2}{K\sqrt{-\rho^4+2\rho^2-K^2}}$$

$$\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

- L'**equació polar** dels raigs és

$$0\le c\le an_0$$

$$\boxed{\sin 2(\theta-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}\left(1-\frac{K^2}{\rho^2}\right)}\equiv\frac{an_0}{\sqrt{a^2n_0^2-c^2}}\left(1-\frac{c^2}{n_0^2r^2}\right)$$

$$\sqrt{1-\sqrt{1-c^2/a^2n_0^2}}\,a\le r\le a$$

$$|\alpha|\le\pi/2$$

Treballs tutelats

- Per obtenir l'equació dels raigs en coordenades cartesianes, posem:

$$\rho^2 = \frac{K^2}{1-\sin 2(\theta-\alpha)\sqrt{1-K^2}}$$

$$\begin{cases} \theta = \alpha + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \rho^2_{\max} = \dfrac{K^2}{1-\sqrt{1-K^2}} = 1+\sqrt{1-K^2} \\ \theta = \alpha - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \rho^2_{\min} = \dfrac{K^2}{1+\sqrt{1-K^2}} = 1-\sqrt{1-K^2} \end{cases}$$

$$1-\sqrt{1-K^2} \le \rho^2 \le 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = r\cos(\theta-\alpha+\pi/4) \\ y' = r\sin(\theta-\alpha+\pi/4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = r^2 \\ x'^2 - y'^2 = -r^2 \sin 2(\theta-\alpha) \end{cases}$$

- *Conclusió*: Cada raig és una el·lipse.

$$r^2 \sin 2(\theta-\alpha)\sqrt{1-K^2} = r^2 - a^2K^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'^2}{r^2_{\min}} + \frac{y'^2}{r^2_{\max}} = 1$$

Treballs tutelats

- L'eix major de l'el·lipse es troba centrat al llarg de l'eix y' amb un angle

$$K=0 \Rightarrow \boxed{\theta=\alpha+\pi/4} \Leftrightarrow x'=0 \Leftrightarrow y=x\tan\theta$$

- Cada raig interseca el cercle fix $r=a$ en quatre punts especularment col·locats respecte als eixos x' i y'. Els quatre punts amb $y'>0$ satisfan:

$$\bar{\theta}=\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}=\alpha+\frac{\pi}{4}$$

$$\rho_\pm = 1 \Rightarrow \sin 2(\theta_\pm-\alpha)=\sqrt{1-K^2}$$

$$\boxed{\theta_\pm=\alpha+\frac{1}{2}\arccos(\mp K)} \qquad \left\{\begin{array}{l} K=\cos 2\gamma \\ 0\le\gamma\le\pi/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \theta_- = \bar{\theta}-(\pi/4-\gamma) \\ \theta_+ = \bar{\theta}+(\pi/4-\gamma) \end{array}}$$

- Donat un punt en el cercle $r=a$ en un angle θ_0, tenim:

$$\alpha_\pm=\theta_0-\frac{1}{2}\arccos(\mp K) \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha_+ = (\theta_0-\pi/4)+(\pi/4-\gamma) \\ \alpha_- = (\theta_0-\pi/4)-(\pi/4-\gamma) \end{array}}$$

Treballs tutelats

- Donat un punt en el cercle $r=a$ en un angle θ_0, tenim:

$$\alpha_\pm = \theta_0 - \frac{1}{2}\arccos(\mp K)$$

- En aquest cas, les dues equacions de les dues trajectòries són

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}\left(1-\frac{K^2}{\rho^2}\right) = \sin 2(\theta-\alpha_\pm) = \sqrt{1-K^2}\cos 2(\theta-\theta_0) \mp K\sin 2(\theta-\theta_0)$$

$$\boxed{\frac{\rho^2-K^2}{\rho^2(1-K^2)} = \cos 2(\theta-\theta_0) \mp \frac{K}{\sqrt{1-K^2}}\sin 2(\theta-\theta_0)}$$

$$K = \cos 2\gamma$$

$$0 \le \gamma \le \pi/4$$

$$\rho^2 = \frac{\cos^2 2\gamma}{1-\sin 2(\theta-\alpha_\pm)\sin 2\gamma}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin 2\gamma}\left(1-\frac{\cos^2 2\gamma}{\rho^2}\right) = \sin 2[\gamma \mp (\theta-\theta_0)]}$$

Treballs tutelats

- A banda del punt en el cercle $r=a$ en un angle θ_0, també tenim:

$$\rho = 1 \Leftrightarrow \sin 2\gamma = \sin[2\gamma \mp 2(\theta - \theta_0)]$$

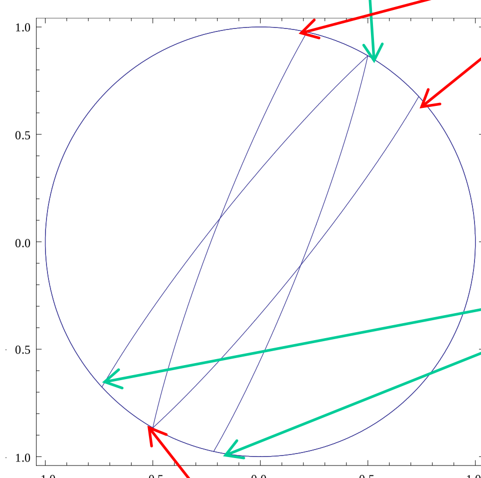
$$d\rho = \mp \rho^3 \frac{\sin 2\gamma}{\cos^2 2\gamma} \cos 2[\gamma \mp (\theta - \theta_0)] d\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta}{\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta}$$

- Un feix col·limat amb raigs inclinats un angle θ_0 es focalitza en la part posterior de la lent.

$\theta = \theta_0$

$\cancel{\theta = \theta_0 \mp 2(\pi/4 - \gamma)}$



$\theta = \theta_0 \mp 2(\pi/4 - \gamma) + \pi$

$$d\rho = \pm \tan 2\gamma d\theta$$

$\cancel{\theta = \theta_0 + \pi}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\tan(\theta \mp 2\gamma)} = \tan\theta_0}$$

Treballs tutelats

TT1.8. La fórmula de Jacobi-Anger

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}$$

representa el desenvolupament d'una ona plana entorn d'una superposició d'ones cilíndriques.

a) Utilitzant la fórmula de Jacobi-Anger, demostreu que la funció de Bessel de primera classe es pot expressar com a

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta + n\theta)}\,d\theta \qquad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

b) Utilitzeu el resultat anterior per a justificar per què la funció de Bessel de primera classe representa una ona estacionària.

Treballs tutelats

Demostreu que la funció de Bessel de primera classe es pot expressar com a

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta + n\theta)}d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta+n\theta)}d\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x)\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{in\theta}d\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) 2\pi\delta_{m(-n)} = 2\pi i^{-n}J_{-n}(x)$$

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)\theta}d\theta \xrightarrow{m\neq -n} \left[\frac{e^{i(m+n)\theta}}{i(m+n)}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{e^{i2\pi(m+n)}-1}{i(m+n)} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta+n\theta)}d\theta \xrightarrow{\Theta=-\theta} -\int_0^{-2\pi} e^{i(x\cos\Theta - n\Theta)}d\Theta = \int_{-2\pi}^{0} e^{i(x\cos\Theta-n\Theta)}d\Theta = 2\pi i^n J_n(x)$$

$$i^n J_n(x) = i^{-n}J_{-n}(x) \Rightarrow J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Treballs tutelats

Demostreu que la funció de Bessel de primera classe es pot expressar com a

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta + n\theta)}\,d\theta \xrightarrow{\Theta=\theta-\pi/2} \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{2\pi-\pi/2} e^{i[x\cos(\Theta+\pi/2)+n(\Theta+\pi/2)]}\,d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{2\pi-\pi/2} e^{i(n\Theta - x\sin\Theta)}\,d\Theta$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{2\pi-\pi/2} e^{i(n\Theta - x\sin\Theta)}\,d\Theta = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} e^{i(n\theta - x\sin\theta)}\,d\theta + \int_0^{\pi} e^{i(n\theta - x\sin\theta)}\,d\theta\right\}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{e^{i(n\theta - x\sin\theta)} + e^{-i(n\theta - x\sin\theta)}\right\}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

Treballs tutelats

Utilitzeu el resultat anterior per a justificar per què la funció de Bessel de primera classe representa una ona estacionària.

Considerem, per simplificar, el camp ondulatori d'un **feix Bessel d'ordre 0** que es propaga a l'espai lliure en el sentit positiu de l'eix *z*, el qual es pot representar de la següent manera:

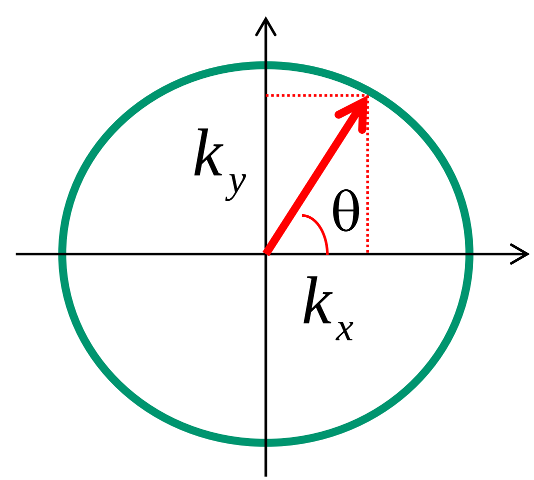
$$E_z = A_1 J_m(\beta_\rho \rho)\left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)\right] e^{i\beta_z z} \xrightarrow{m=0} A J_0(\beta_\rho \rho) e^{i\beta_z z}$$

$$J_0(\beta_\rho \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\beta_\rho \rho \cos(\theta-\varphi)} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left[k_x(\theta)x + k_y(\theta)y\right]} d\theta \qquad \beta_\rho^2 + \beta_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

$$(k_x, k_y) = \beta_\rho(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$(x, y) = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$J_0(\beta_\rho \rho) \xrightarrow[\theta_l = l2\pi/N]{\textbf{SUMA DE RIEMANN}} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} e^{i\left[k_x(\theta_l)x + k_y(\theta_l)y\right]}$$



Treballs tutelats

Utilitzeu el resultat anterior per a justificar per què la funció de Bessel de primera classe representa una ona estacionària.

Considerem, per simplificar, el camp ondulatori d’un **feix Bessel d’ordre 0** que es propaga a l’espai lliure en el sentit positiu de l’eix *z*, el qual es pot representar de la següent manera:

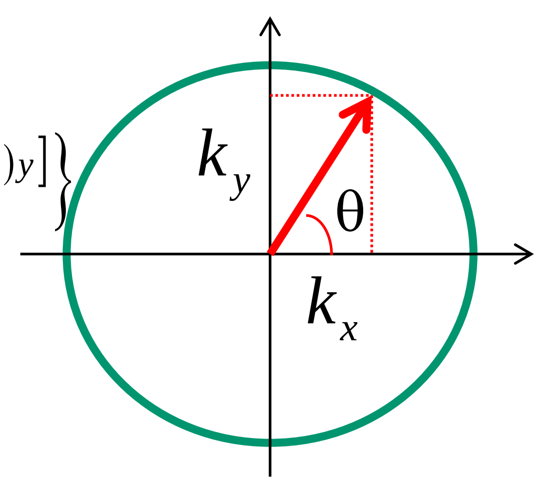
$$E_z = A_1 J_m(\beta_\rho \rho)\left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)\right] e^{i\beta_z z} \xrightarrow{m=0} A J_0(\beta_\rho \rho) e^{i\beta_z z}$$

$$(k_x, k_y) = \beta_\rho (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$J_0(\beta_\rho \rho) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} e^{i[k_x(\theta_l)x + k_y(\theta_l)y]}$$

$$J_0(\beta_\rho \rho) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N/2} \left\{ e^{i[k_x(\theta_l)x + k_y(\theta_l)y]} + e^{i[k_x(\theta_l+\pi)x + k_y(\theta_l+\pi)y]} \right\}$$

$$J_0(\beta_\rho \rho) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} \cos\left[k_x(\theta_l)x + k_y(\theta_l)y\right]$$



Treballs tutelats

TT1.9. Demostreu que l’equació diferencial

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\}+(\beta r)^2-n(n+1)=0$$

resultat de resoldre l’equació d’ones utilitzant separació de variables en coordenades esfèriques, es pot convertir en l’equació diferencial ordinària de Bessel mitjançant la transformació

$$f(r)=\frac{Z(\beta r)}{(\beta r)^{1/2}}$$

Treballs tutelats

Demostració: $$\frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{df}{dr}\right\}+(\beta r)^2-n(n+1)=0$$

$$x=\beta r \quad \Downarrow \quad \frac{1}{f}\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}\left\{\frac{(\beta r)^2}{\beta^2}\frac{dx}{dr}\frac{df}{dx}\right\}+(\beta r)^2-n(n+1)=0$$

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dx}\left\{x^2\frac{df}{dx}\right\}+x^2-n(n+1)=0$$

$$f(x)=\frac{Z(x)}{x^{1/2}} \quad \Downarrow \quad \frac{df}{dx}=\frac{1}{x^{1/2}}\frac{dZ}{dx}-\frac{Z(x)}{2x^{3/2}}$$

$$\frac{x^{1/2}}{Z(x)}\frac{d}{dx}\left\{x^{3/2}\frac{dZ}{dx}-\frac{x^{1/2}}{2}Z(x)\right\}+x^2-n(n+1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^{1/2}}{Z(x)}\left\{\frac{3x^{1/2}}{2}\frac{dZ}{dx}+x^{3/2}\frac{d^2Z}{dx^2}-\frac{x^{1/2}}{2}\frac{dZ}{dx}-\frac{1}{4x^{1/2}}Z(x)\right\}+x^2-n(n+1)=0$$

Treballs tutelats

$$\frac{x^{1/2}}{Z(x)}\left\{\frac{3x^{1/2}}{2}\frac{dZ}{dx}+x^{3/2}\frac{d^2Z}{dx^2}-\frac{x^{1/2}}{2}\frac{dZ}{dx}-\frac{1}{4x^{1/2}}Z(x)\right\}+x^2-n(n+1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{Z(x)}\left\{x\frac{dZ}{dx}+x^2\frac{d^2Z}{dx^2}\right\}-\frac{1}{4}+x^2-n(n+1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{Z(x)}\left\{x\frac{dZ}{dx}+x^2\frac{d^2Z}{dx^2}\right\}+x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Downarrow \qquad v=n+\frac{1}{2}$$

EQUACIÓ DIFERENCIAL DE BESSEL

$$\boxed{x^2Z_v''+xZ_v'+\left(x^2-v^2\right)Z_v=0}$$

Treballs tutelats

TT1.10. Utilitzant la solució de l’equació d’ones en coordenades esfèriques, demostreu que el camp d’una ona esfèrica divergent s’atenua en allunyar-se de l’origen O amb una dependència que és inversament proporcional a la distància recorreguda des del punt O.

$$\psi_2 = B_{mn} h_n^{(1)}(\beta r) P_n^m(\cos\theta)\left[C_3\cos(m\phi) + D_3\sin(m\phi)\right] \xrightarrow{m,n=0} B_{00} C_3 h_0^{(1)}(\beta r)$$

$$\left.\begin{aligned} h_n^{(1)}(\beta r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) \\ H_p^{(1)}(x) &\xrightarrow{x\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i[x - p(\pi/2) - \pi/4]} \end{aligned}\right\}$$

$$h_n^{(1)}(\beta r) \xrightarrow{\beta r \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}}\sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}\, e^{i[\beta r - (n+1/2)(\pi/2) - \pi/4]} = \frac{i^{-(n+1)}}{\beta r} e^{i\beta r}$$

$$\boxed{\psi_2 \to A\frac{e^{i\beta r}}{r}}$$

Treballs tutelats

TT1.11. Considereu el camp electromagnètic linealment polaritzat

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{E}_0 = E_{0y}\hat{y}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

corresponent a una ona plana que es propaga en un dielèctric transparent. Suposeu també que $\mathrm{Im}(k_x)=0$.

a) Avalueu el vector de Poynting.

b) Considereu la superposició de dues ones planes linealment polaritzades. Avalueu de nou el vector de Poynting.

c) Trobeu la component *z* del vector de Poynting considerant que $E_{1y}=E_{2y}$.

d) Avalueu la divergència del vector de Poynting.

Treballs tutelats

a) Avalueu el vector de Poynting $\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{y}E_{0y}e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \xrightarrow{\rho=0;\vec{D}=\varepsilon\vec{E}} \nabla\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \partial_y\left\{E_{0y}e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}\right\}=0$$

Llei de Gauss

$$ik_y E_{0y}e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}=0 \qquad i\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$$

$$k_y=0 \Leftrightarrow \vec{k}=\hat{x}k_x+\hat{z}k_z$$

Llei de Faraday d'inducció

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\vec{B}=\mu\vec{H}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E_{0y}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} & 0 \end{vmatrix} = -\mu\partial_t\left\{\vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right\}$$

$$\hat{x}\left\{-ik_z E_{0y}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right\}+\hat{z}\left\{ik_x E_{0y}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right\}=i\omega\mu\vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad i\vec{k}\times\vec{E}_0=i\omega\mu\vec{H}_0$$

$$\vec{H}_0=-\hat{x}\frac{k_z}{\omega\mu}E_{0y}+\hat{z}\frac{k_x}{\omega\mu}E_{0y}$$

Treballs tutelats

a) Avalueu el vector de Poynting

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}E_{0y}e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = (-\hat{x}k_z + \hat{z}k_x)\frac{E_{0y}}{\omega\mu}e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

Llei de Biot-Savart

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \xrightarrow{\vec{J}=0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_{0x}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} & 0 & H_{0z}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \end{vmatrix} = \varepsilon\partial_t\left\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right\}$$

$$-\hat{y}\left\{ik_x H_{0z}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - ik_z H_{0x}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right\} = -\hat{y}i\omega\varepsilon E_{0y}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad i\vec{k}\times\vec{H}_0 = -i\omega\varepsilon\vec{E}_0$$

$$k_x H_{0z} - k_z H_{0x} = \omega\varepsilon E_{0y} \Leftrightarrow \boxed{k_x^2 + k_z^2 = \omega^2\varepsilon\mu \in \Re}$$

$$k_z \xrightarrow{k_x^2<\omega^2\varepsilon\mu} \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_x^2} \qquad k_z \xrightarrow{k_x^2>\omega^2\varepsilon\mu} i\sqrt{k_x^2 - \omega^2\varepsilon\mu}$$

Treballs tutelats

a) Avalueu el vector de Poynting

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{y}E_{0y}e^{i(k_x x+k_z z-\omega t)}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\left(-\hat{x}k_z+\hat{z}k_x\right)\frac{E_{0y}}{\omega\mu}e^{i(k_x x+k_z z-\omega t)}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & E_{0y}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} & 0\\ H_{0x}^*e^{-i(\vec{k}^*\vec{r}-\omega t)} & 0 & H_{0z}^*e^{-i(\vec{k}^*\vec{r}-\omega t)}\end{vmatrix}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left(\hat{x}E_{0y}H_{0z}^*-\hat{z}E_{0y}H_{0x}^*\right)e^{i(\vec{k}-\vec{k}^*)\cdot\vec{r}}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left(\hat{x}k_x^*+\hat{z}k_z^*\right)\frac{\left|E_{0y}\right|^2}{\omega\mu}e^{-2\,\mathrm{Im}(\vec{k})\cdot\vec{r}}\right\}$$

$$\vec{S}=\mathrm{Re}\left(\vec{k}\right)\frac{\left|E_{0y}\right|^2}{2\omega\mu}e^{-2\,\mathrm{Im}(\vec{k})\cdot\vec{r}}\xrightarrow{k_x^2<\omega^2\varepsilon\mu}\vec{k}\,\frac{\left|E_{0y}\right|^2}{2\omega\mu}$$

$$\vec{S}\xrightarrow{k_x^2>\omega^2\varepsilon\mu}\hat{x}k_x\,\frac{\left|E_{0y}\right|^2}{2\omega\mu}e^{-2\,\mathrm{Im}(k_z)\cdot z}$$

Treballs tutelats

b) Considereu la superposició de dues ones planes linealment polaritzades. Avalueu de nou el vector de Poynting

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{y}E_{1y}e^{i(k_{1x}x+k_{1z}z-\omega t)}+\hat{y}E_{2y}e^{i(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega t)} \qquad k_{1x}^2+k_{1z}^2=k_{2x}^2+k_{2z}^2=\omega^2\varepsilon\mu$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\left(-\hat{x}k_{1z}+\hat{z}k_{1x}\right)\frac{E_{1y}}{\omega\mu}e^{i(k_{1x}x+k_{1z}z-\omega t)}+\left(-\hat{x}k_{2z}+\hat{z}k_{2x}\right)\frac{E_{2y}}{\omega\mu}e^{i(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega t)}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & E_{1y}e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}}+E_{2y}e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}} & 0\\ H_{1x}^*e^{-i\vec{k}_1^*\cdot\vec{r}}+H_{2x}^*e^{-i\vec{k}_2^*\cdot\vec{r}} & 0 & H_{1z}^*e^{-i\vec{k}_1^*\cdot\vec{r}}+H_{2z}^*e^{-i\vec{k}_2^*\cdot\vec{r}}\end{vmatrix}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}\hat{x}\left[E_{1y}H_{1z}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_1^*)\vec{r}}+E_{2y}H_{1z}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\vec{r}}+E_{1y}H_{2z}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\vec{r}}+E_{2y}H_{2z}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_2^*)\vec{r}}\right]\\ -\hat{z}\left[E_{1y}H_{1x}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_1^*)\vec{r}}+E_{2y}H_{1x}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\vec{r}}+E_{1y}H_{2x}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\vec{r}}+E_{2y}H_{2x}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_2^*)\vec{r}}\right]\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_{12}+\vec{S}_2}$$

Treballs tutelats

b) Considereu la superposició de dues ones planes linealment polaritzades. Avalueu de nou el vector de Poynting

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}E_{1y}e^{i(k_{1x}x+k_{1z}z-\omega t)} + \hat{y}E_{2y}e^{i(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega t)} \qquad k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = (-\hat{x}k_{1z} + \hat{z}k_{1x})\frac{E_{1y}}{\omega\mu}e^{i(k_{1x}x+k_{1z}z-\omega t)} + (-\hat{x}k_{2z} + \hat{z}k_{2x})\frac{E_{2y}}{\omega\mu}e^{i(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega t)}$$

$$\vec{S}_1 = \mathrm{Re}(\vec{k}_1)\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}e^{-2\mathrm{Im}(\vec{k}_1)\cdot\vec{r}} = [\hat{x}\,\mathrm{Re}(k_{1x}) + \hat{z}\,\mathrm{Re}(k_{1z})]\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}e^{-2\mathrm{Im}(k_{1z})\cdot z}$$

$$\vec{S}_{12} = \frac{1}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l} \hat{x}\left[E_{2y}E_{1y}^*k_{1x}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\cdot\vec{r}} + E_{1y}E_{2y}^*k_{2x}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\cdot\vec{r}}\right] \\ +\,\hat{z}\left[E_{2y}E_{1y}^*k_{1z}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\cdot\vec{r}} + E_{1y}E_{2y}^*k_{2z}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\cdot\vec{r}}\right] \end{array}\right\}$$

$$\vec{S}_{12} = \frac{1}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{(\hat{x}k_{1x}^* + \hat{z}k_{1z}^*)E_{2y}E_{1y}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\cdot\vec{r}} + (\hat{x}k_{2x}^* + \hat{z}k_{2z}^*)E_{1y}E_{2y}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\cdot\vec{r}}\right\}$$

$$\boxed{\vec{S}_{12} = \frac{1}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{\vec{k}_1^*E_{2y}E_{1y}^*e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\cdot\vec{r}} + \vec{k}_2^*E_{1y}E_{2y}^*e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\cdot\vec{r}}\right\}}$$

Treballs tutelats

c) Trobeu la component *z* del vector de Poynting considerant que $E_{1y}=E_{2y}$.

$$S_{1z} = \mathrm{Re}(k_{1z})\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu} e^{-2[\mathrm{Im}(k_{1z})\cdot z]} \geq 0$$

$$S_{2z} = \mathrm{Re}(k_{2z})\frac{|E_{2y}|^2}{2\omega\mu} e^{-2[\mathrm{Im}(k_{2z})\cdot z]} = \frac{\mathrm{Re}(k_{2z})}{\mathrm{Re}(k_{1z})} e^{-2[\mathrm{Im}(k_{2z}-k_{1z})\cdot z]} S_{1z} \geq 0$$

$$k_z^2 = \omega^2\varepsilon\mu - k_x^2$$

$$S_{12z} = \frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{k_{1z}^* e^{i(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*)\cdot\vec{r}} + k_{2z}^* e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*)\cdot\vec{r}}\right\}$$

$$S_{12z} = \frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu} e^{-\mathrm{Im}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{r}}\,\mathrm{Re}\left\{k_{1z}^*\left[e^{-i\,\mathrm{Re}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}}\right] + k_{2z}^*\left[e^{i\,\mathrm{Re}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}}\right]\right\}$$

$$S_{12z} = \frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu} e^{-\mathrm{Im}(k_{1z}+k_{2z})\cdot z}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(k_{1z}+k_{2z})\cos\left[\mathrm{Re}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}\right] \\ -\,\mathrm{Im}(k_{1z}-k_{2z})\sin\left[\mathrm{Re}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}\right]\end{array}\right\}$$

Treballs tutelats

c) Trobeu la component *z* del vector de Poynting considerant que $E_{1y}=E_{2y}$.

$$S_{1z}=\mathrm{Re}(k_{1z})\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}e^{-2[\mathrm{Im}(k_{1z})\cdot z]}$$

$$S_{12z}=\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}e^{-\mathrm{Im}(k_{1z}+k_{2z})\cdot z}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(k_{1z}+k_{2z})\cos\left[\mathrm{Re}\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2\right)\cdot\vec{r}\right]\\-\mathrm{Im}(k_{1z}-k_{2z})\sin\left[\mathrm{Re}\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2\right)\cdot\vec{r}\right]\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{Im}(k_{1z})=\mathrm{Im}(k_{2z})=0$$

$$k_x^2\le\omega^2\varepsilon\mu$$

$$S_{1z}=k_{1z}\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}\ge 0$$

$$S_z=(k_{1z}+k_{2z})\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}\left\{1+\cos\left[\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2\right)\cdot\vec{r}\right]\right\}\ge 0$$

$$\mathrm{Re}(k_{1z})=\mathrm{Re}(k_{2z})=0$$

$$k_x^2\ge\omega^2\varepsilon\mu$$

$$S_{1z}=S_{2z}=0$$

$$S_z=S_{12z}=-\mathrm{Im}(k_{1z}-k_{2z})\frac{|E_{1y}|^2}{2\omega\mu}e^{-\mathrm{Im}(k_{1z}+k_{2z})\cdot z}\sin\left[(k_{1x}-k_{2x})\cdot x\right]$$

Treballs tutelats

d) Avalueu la divergència del vector de Poynting

$$\nabla\cdot\vec{S}=\nabla\cdot\vec{S}_1+\nabla\cdot\vec{S}_{12}+\nabla\cdot\vec{S}_2$$

$$\vec{S}_1=\mathrm{Re}\left(\vec{k}_1\right)\frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}e^{-2\,\mathrm{Im}\left(\vec{k}_1\right)\cdot\vec{r}}=\left[\hat{x}\,\mathrm{Re}\left(k_{1x}\right)+\hat{z}\,\mathrm{Re}\left(k_{1z}\right)\right]\frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}e^{-2\,\mathrm{Im}\left(k_{1z}\right)\cdot z}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_1=\left[\mathrm{Re}\left(k_{1x}\right)\partial_x+\mathrm{Re}\left(k_{1z}\right)\partial_z\right]\frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}e^{-2\,\mathrm{Im}\left(k_{1z}\right)\cdot z}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_1=-\frac{\left|E_{1y}\right|^2}{\omega\mu}\mathrm{Re}\left(k_{1z}\right)\mathrm{Im}\left(k_{1z}\right)e^{-2\,\mathrm{Im}\left(k_{1z}\right)\cdot z}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_1=\nabla\cdot\vec{S}_2=0$$

Treballs tutelats

d) Avalueu la divergència del vector de Poynting

$$\vec{S}_{12} = \frac{1}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{\vec{k}_1^{\,*} E_{2y} E_{1y}^{*} e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} + \vec{k}_2^{\,*} E_{1y} E_{2y}^{*} e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}}\right\}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_{12} = \frac{1}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{E_{2y}E_{1y}^{*}\left(k_{1x}^{*}\partial_x + k_{1z}^{*}\partial_z\right)e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} + E_{1y}E_{2y}^{*}\left(k_{2x}^{*}\partial_x + k_{2z}^{*}\partial_z\right)e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}}\right\}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_{12} = \frac{1}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l} iE_{2y}E_{1y}^{*}\left[\left(k_{2x}-k_{1x}^{*}\right)k_{1x}^{*} + \left(k_{2z}-k_{1z}^{*}\right)k_{1z}^{*}\right]e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} \\ +iE_{1y}E_{2y}^{*}\left(\left[\left(k_{1x}-k_{2x}^{*}\right)k_{2x}^{*} + \left(k_{1z}-k_{2z}^{*}\right)k_{2z}^{*}\right]\right)e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}} \end{array}\right\}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_{12} \xrightarrow[E_{1y}=E_{2y}]{\mathrm{Im}(k_{1x})=\mathrm{Im}(k_{2x})=0} \frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l} i\left[\cancel{k_{1x}k_{2x}\left(e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} + e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}}\right)} + \cancel{\left(k_{1z}^{*}k_{2z}e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} + k_{1z}k_{2z}^{*}e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}}\right)}\right] \\ -i\left[\left\{k_{1x}^2 + \left(k_{1z}^{*}\right)^2\right\}e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} + \left\{k_{2x}^2 + \left(k_{2z}^{*}\right)^2\right\}e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}}\right] \end{array}\right\}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_{12} = \frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}\mathrm{Im}\left\{\left[k_{1x}^2 + \left(k_{1z}^{*}\right)^2\right]e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^{*}\right)\cdot\vec{r}} + \left[k_{2x}^2 + \left(k_{2z}^{*}\right)^2\right]e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^{*}\right)\cdot\vec{r}}\right\}$$

Treballs tutelats

d) Avalueu la divergència del vector de Poynting

$$\nabla\cdot\vec{S}_{12}=\frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}\,\mathrm{Im}\left\{\left[k_{1x}^2+\left(k_{1z}^*\right)^2\right]e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*\right)\cdot\vec{r}}+\left[k_{2x}^2+\left(k_{2z}^*\right)^2\right]e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*\right)\cdot\vec{r}}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} k_{1x}^2+k_{1z}^2=\omega^2\varepsilon\mu \\ k_{1x}^2+\left(k_{1z}^2\right)^*=\omega^2\varepsilon\mu \end{array}\right\} \quad \nabla\cdot\vec{S}_{12}=\frac{\left|E_{1y}\right|^2}{2\omega\mu}\,\mathrm{Im}\left\{\omega^2\varepsilon\mu\left[e^{i\left(\vec{k}_1-\vec{k}_2^*\right)\cdot\vec{r}}+e^{i\left(\vec{k}_2-\vec{k}_1^*\right)\cdot\vec{r}}\right]\right\}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{S}_{12}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{S}=\nabla\cdot\vec{S}_1+\nabla\cdot\vec{S}_{12}+\nabla\cdot\vec{S}_2=0$$

TREBALLS TUTELATS D’ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 2

Treballs tutelats

TT2.1. El camp magnètic d'una ona plana uniforme que es propaga en el buit és

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.6\Omega$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{\eta_0}\left[(1+i)\hat{x} + i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{z}\right]e^{i\omega t - iky}$$

on E_0 es una contant real i η_0 la impedància intrínseca del buit.

a) Determineu la direcció i el sentit de propagació de l'ona. Si la freqüència és ν=500 THz quant valen la longitud d'ona i el nombre d'ona?

L'ona es propaga al llarg de l'eix OY i sentit positiu.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\omega t - iky} \Rightarrow \vec{k} = k\hat{y}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{E_0}{\eta_0}\left[(1+i)\hat{x} + i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{z}\right]$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times 10^8\, m/s}{500\times 10^{12}\, Hz} = 600nm$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10.47\mu m^{-1}$$

Treballs tutelats

b) Escriviu l'expressió del camp elèctric.

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i\omega t - iky} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - iky}} \qquad \vec{H}_0 = \frac{E_0}{\eta_0}\left[(1+i)\hat{x} + i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{z}\right]$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \times \vec{H}_0 = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_0$$

$$\vec{k} = k\hat{y} \Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{k}{\omega\varepsilon_0}\hat{y} \times \vec{H}_0 = \frac{k}{\omega\varepsilon_0}\frac{E_0}{\eta_0}\left[(1+i)\hat{z} - i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.6\Omega \\ k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \end{array}\right\} \qquad \boxed{\vec{E}_0 = E_0\left[(1+i)\hat{z} - i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{x}\right]}$$

Treballs tutelats

c) Determineu el tipus de polarització i el sentit de gir dels camps.

$$\vec{E}_0 = E_0\left[(1+i)\hat{z} - i\sqrt{2}e^{i\pi/4}\hat{x}\right] = E_0\sqrt{2}e^{i\pi/4}\left(\hat{z} - i\hat{x}\right)$$

$$\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 45^{\circ} \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$$

Sol: Llum circularment polaritzada *L*

d) Escriviu l'expressió del vector de Poynting.

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) = \frac{2E_0^2}{\eta_0}\hat{y}$$

Treballs tutelats

TT2.2. Determineu la matriu de Jones de *i*) una làmina de quart d'ona d'eix ràpid vertical, i *ii*) una làmina de quart d'ona d'eix ràpid horitzontal.

$$R\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=P_0P_0^* + \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)P_{\pi/2}P_{\pi/2}^* = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{R\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}}$$

LÀMINA λ/4
EIX RÀPID VERTICAL

$$R\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)P_0P_0^* + P_{\pi/2}P_{\pi/2}^* = i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{R\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}i & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -i\end{pmatrix}}$$

LÀMINA λ/4
EIX RÀPID HORITZONTAL

Exercici: Comproveu l'equivalència indicada

Treballs tutelats

A continuació, representeu el vector camp elèctric d’un estat lineal incident sobre una làmina de quart d’ona que forma un angle de 30º amb l’eix ràpid d’aquesta. Descriviu amb detall l’estat de polarització de l’ona emergent.

$$\left|\psi\right\rangle = R\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_{30^{\circ}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -i/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -i/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^{\circ} \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$$

LLUM EL•LÍPTICA CENTRADA LEVOGIRA

Treballs tutelats

TT2.3. Considereu un feix de llum polaritzada el·lípticament d'intensitat I_0 que incideix normalment sobre un polaritzador lineal giratori. Calculeu com varia la intensitat I emergent del sistema, en funció de l'angle que forma el polaritzador amb l'eix X. Passa aquesta intensitat per un valor màxim o mínim?

$$P(\theta) = P_\theta P_\theta^* = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{in}\rangle = \sqrt{I_0}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_{out}\rangle = P(\theta)|\psi_{in}\rangle = \sqrt{I_0}\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{out}\rangle = \sqrt{I_0}\begin{pmatrix} \cos^2\theta\cos\alpha + e^{i\varphi}\cos\theta\sin\theta\sin\alpha \\ \cos\theta\sin\theta\cos\alpha + e^{i\varphi}\sin^2\theta\sin\alpha \end{pmatrix} = \sqrt{I_0}\left(\cos\theta\cos\alpha + e^{i\varphi}\sin\theta\sin\alpha\right)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Treballs tutelats

Calculeu com varia la intensitat I emergent del sistema, en funció de l'angle que forma el polaritzador amb l'eix X.

$$\left|\psi_{out}\right\rangle = \sqrt{I_0}\left(\cos\theta\cos\alpha + e^{i\varphi}\sin\theta\sin\alpha\right)P_\theta$$

LLUM LINEALMENT POLARITZADA

1r MÈTODE

$$I = \left\langle\psi_{out}\middle|\psi_{out}\right\rangle = I_0\left|\cos\theta\cos\alpha + e^{i\varphi}\sin\theta\sin\alpha\right|^2$$

$$I = I_0\left\{\cos^2\theta\cos^2\alpha + \sin^2\theta\sin^2\alpha + 2\cos\varphi\cos\theta\cos\alpha\sin\theta\sin\alpha\right\}$$

$$= I_0\left\{\cos^2\theta\cos^2\alpha + \sin^2\theta\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\varphi\sin 2\theta\sin 2\alpha\right\}$$

2n MÈTODE

$$I = \left\langle\psi_{out}\middle|\psi_{out}\right\rangle = \left\langle\psi_{in}\right|P^*(\theta)\cdot P(\theta)\left|\psi_{in}\right\rangle \xrightarrow{P^*(\theta)=P(\theta),\,P^2(\theta)=P(\theta)} \left\langle\psi_{in}\middle|P_\theta\right\rangle\left\langle P_\theta\middle|\psi_{in}\right\rangle$$

$$I = \left|\left\langle\psi_{in}\middle|P_\theta\right\rangle\right|^2 = I_0\left|\cos\theta\cos\alpha + e^{-i\varphi}\sin\theta\sin\alpha\right|^2$$

Treballs tutelats

Passa aquesta intensitat per un valor màxim o mínim?

$$I = I_0\left\{\cos^2\theta\cos^2\alpha + \sin^2\theta\sin^2\alpha + 2\cos\varphi\cos\theta\cos\alpha\sin\theta\sin\alpha\right\}$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial\theta} = I_0\left\{\begin{array}{l} -2\cos\theta\sin\theta\cos^2\alpha + 2\cos\theta\sin\theta\sin^2\alpha \\ -2\cos\varphi\sin\theta\cos\alpha\sin\theta\sin\alpha \\ +2\cos\varphi\cos\theta\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha \end{array}\right\}$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial\theta} = 2I_0\left\{\cos\varphi\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\cos\alpha\sin\alpha - \cos\theta\sin\theta\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\right\}$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial\theta} = I_0\left\{\cos\varphi\cos 2\theta\sin 2\alpha - \sin 2\theta\cos 2\alpha\right\} \Leftrightarrow \tan 2\theta = \tan 2\alpha\cos\varphi$$

Conclusió: El valor màxim i mínim s'aconsegueixen quan el pla de polarització d'eixida coincideix amb els eixos major i menor de l'el·lipse de polarització d'entrada.

$$2\theta = 2\psi \pm \pi$$

$$\tan 2\psi = \tan 2\alpha\cos\varphi$$

Treballs tutelats

Passa aquesta intensitat per un valor màxim o mínim? Quan la llum transmesa pel polaritzador aconsegueix un màxim o un mínim, s'està seleccionant la direcció dels eixos principals de l'el·lipse d'entrada.

$$I = \frac{I_0}{2}\left\{1 + \cos 2\alpha \cos 2\theta + \cos\varphi \sin 2\theta \sin 2\alpha\right\}$$

$$\tan 2\theta = \tan 2\alpha \cos\varphi$$

$$I_{extr} \rightarrow \frac{I_0}{2}\left\{1 + \frac{\cos\varphi \sin 2\alpha}{\sin 2\theta}\right\} \rightarrow \frac{I_0}{2}\left\{1 \pm \sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2\varphi}\right\}$$

$$\sin 2\theta = \pm\frac{\tan 2\theta}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} \rightarrow \pm\frac{\sin 2\alpha \cos\varphi}{\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2\varphi}}$$

Treballs tutelats

Qüestió: Es pot determinar *experimentalment* el valor de l'el·lipticitat de l'el·lipse de polarització de la llum incident?

$$\left.\begin{aligned} I_{max} &= \frac{I_0}{2}\left\{1+\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}\right\} \\ I_{min} &= \frac{I_0}{2}\left\{1-\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{I_{max} + I_{min} = I_0}$$

$$\boxed{\tan^2 \beta = \frac{I_{min}}{I_{max}}} = \frac{1-\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}}{1+\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1-\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}}{2} \qquad \cos^2 \beta = \frac{1+\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}}{2}$$

$$\sin^2 2\beta = 4\sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1-\left(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi\right) = \sin^2 2\alpha \sin^2 \varphi$$

$$\boxed{\sin^2 2\beta = \sin^2 2\alpha \sin^2 \varphi}$$

Treballs tutelats

TT2.4. Siga un dispositiu òptic format per una làmina de quart d'ona, els eixos ràpid i lent del qual coincideixen, respectivament, amb els eixos *OX* i *OY* del sistema d'eixos cartesians de referència, seguida d'un polaritzador lineal l'eix de transmissió del qual forma un angle ε amb l'eix OX. Determineu els valors i vectors propis de la configuració i especifiqueu detalladament els tipus de llum que representen. Raoneu per què aquestes llums són pròpies del sistema en qüestió.

$$M_1 = P(\varepsilon)R(\pi/2,\pi/2) = P_\varepsilon P_\varepsilon^*\left(P_0P_0^* - iP_{\pi/2}P_{\pi/2}^*\right) = \cos\varepsilon P_\varepsilon P_0^* - i\sin\varepsilon P_\varepsilon P_{\pi/2}^*$$

$$M_1 = P_\varepsilon\left(\cos\varepsilon P_0^* - i\sin\varepsilon P_{\pi/2}^*\right) = P_\varepsilon \underbrace{\left(\cos\varepsilon P_0 + i\sin\varepsilon P_{\pi/2}\right)^*}_{\substack{\textbf{LLUM El·LÍPTICA CENTRADA} \\ \textbf{DEXTROGIRA AMB EL·LIPTICITAT } \varepsilon}}$$

Treballs tutelats

Determineu els valors i vectors propis de la configuració i especifiqueu detalladament els tipus de llum que representen. Raoneu per què aquestes llums són pròpies del sistema en qüestió.

$$M_1 = P_\varepsilon\left(\cos\varepsilon P_0^* - i\sin\varepsilon P_{\pi/2}^*\right) = \begin{pmatrix}\cos\varepsilon\\ \sin\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varepsilon & -i\sin\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\varepsilon & -i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\\ \sin\varepsilon\cos\varepsilon & -i\sin^2\varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\det\left(M_1 - \lambda I\right) = 0 = \left(\cos^2\varepsilon - \lambda\right)\left(-i\sin^2\varepsilon - \lambda\right) + i\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon = -\lambda\left(\cos^2\varepsilon - i\sin^2\varepsilon\right) + \lambda^2$$

$$\lambda_{11} = \cos^2\varepsilon - i\sin^2\varepsilon \Rightarrow \left|\psi_{11}\right\rangle = \begin{pmatrix}\cos\varepsilon\\ \sin\varepsilon\end{pmatrix} \equiv P_\varepsilon$$

$$\lambda_{12} = 0 \Rightarrow \left|\psi_{12}\right\rangle = \overbrace{\begin{pmatrix}\sin\varepsilon\\ -i\cos\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/2-\varepsilon)\\ -i\sin(\pi/2-\varepsilon)\end{pmatrix}}^{\text{LLUM EL·LÍPTICA CENTRADA LEVOGIRA AMB EL·LIPTICITAT } \pi/2\text{-}\varepsilon}$$

Treballs tutelats

En una segona part, resoleu les mateixes qüestions que en el paràgraf anterior per a una configuració semblant en què el polaritzador lineal haja sigut girat 90º respecte de la seua posició original.

$$M_2 = P(\varepsilon+\pi/2)R(\pi/2,\pi/2) = P_{\varepsilon+\pi/2}P^*_{\varepsilon+\pi/2}\left(P_0P_0^* - iP_{\pi/2}P^*_{\pi/2}\right) = -\sin\varepsilon P_{\varepsilon+\pi/2}P_0^* - i\cos\varepsilon P_{\varepsilon+\pi/2}P^*_{\pi/2}$$

$$M_2 = -P_{\varepsilon+\pi/2}\left[\sin\varepsilon P_0^* + i\cos\varepsilon P^*_{\pi/2}\right] = -P_{\varepsilon+\pi/2}\Big[\underbrace{\sin\varepsilon P_0 - i\cos\varepsilon P_{\pi/2}}_{\substack{\textbf{LLUM EL·LÍPTICA CENTRADA} \\ \textbf{LEVOGIRA AMB EL·LIPTICITAT } \boldsymbol{\pi/2-\varepsilon}}}\Big]^*$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varepsilon \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\varepsilon & -i\cos\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\varepsilon & i\sin\varepsilon\cos\varepsilon \\ -\sin\varepsilon\cos\varepsilon & -i\cos^2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Treballs tutelats

Reconeixeu que cada un dels nous vectors propis és ortogonal a un dels de la primera situació.

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varepsilon \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varepsilon & -i\cos\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\varepsilon & i\sin\varepsilon\cos\varepsilon \\ -\sin\varepsilon\cos\varepsilon & -i\cos^2\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\det(M_2 - \lambda I) = 0 = (-i\cos^2\varepsilon - \lambda)(\sin^2\varepsilon - \lambda) + i\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon = -\lambda(\sin^2\varepsilon - i\cos^2\varepsilon) + \lambda^2$$

$$\lambda_{21} = \sin^2\varepsilon - i\cos^2\varepsilon \Rightarrow |\psi_{21}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\varepsilon \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix} \equiv P_{\varepsilon+\pi/2}$$

$$\underbrace{\lambda_{22} = 0 \Rightarrow |\psi_{22}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix}}^{\text{LLUM EL·LÍPTICA CENTRADA DEXTROGIRA AMB EL·LIPTICITAT } \varepsilon}$$

$$\langle\psi_{12}|\psi_{22}\rangle = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon & i\cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\psi_{11}|\psi_{21}\rangle = P_\varepsilon^* P_{\varepsilon+\pi/2} = 0$$

Treballs tutelats

Reconeixeu que cada un dels nous vectors propis és ortogonal a un dels de la primera situació.

$$M_1 = P_\varepsilon\left(\cos\varepsilon P_0 + i\sin\varepsilon P_{\pi/2}\right)^* = |\psi_{11}\rangle\langle\psi_{22}|$$

$$M_1 \neq \lambda_{11}|\psi_{11}\rangle\langle\psi_{11}| + \lambda_{12}|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}| = \left(\cos^2\varepsilon - i\sin^2\varepsilon\right)P_\varepsilon P_\varepsilon^*$$

Qüestió: Per què no es compleix el teorema de descomposició espectral?

$$M_2 \neq \lambda_{21}|\psi_{21}\rangle\langle\psi_{21}| + \lambda_{22}|\psi_{22}\rangle\langle\psi_{22}| = \left(\sin^2\varepsilon - i\cos^2\varepsilon\right)P_{\varepsilon+\pi/2}P_{\varepsilon+\pi/2}^*$$

$$M_2 = -P_{\varepsilon+\pi/2}\left[\sin\varepsilon P_0 - i\cos\varepsilon P_{\pi/2}\right]^* = -|\psi_{21}\rangle\langle\psi_{12}|$$

Treballs tutelats

TT2.5. Analitzeu l'actuació del dispositiu descrit en l'apartat anterior sobre *i*) llum el·líptica centrada, d'el·lipticitat ε, i *ii*) sobre el seu estat ortogonal.

$$M_1 = |\psi_{11}\rangle\langle\psi_{22}| \qquad M_2 = -|\psi_{21}\rangle\langle\psi_{12}|$$

(i)

$$M_1|\psi_{22}\rangle = |\psi_{11}\rangle = P_\varepsilon$$

$$M_2|\psi_{22}\rangle = 0$$

(ii)

$$M_1|\psi_{12}\rangle = 0$$

$$M_2|\psi_{12}\rangle = -|\psi_{21}\rangle = -P_{\varepsilon+\pi/2}$$

Treballs tutelats

Repetiu l’anàlisi quan s’afegeix a continuació una làmina retardadora idèntica a la primera però girada respecte a aquesta 90º. Compareu ambdós resultats.

$$R(0,\pi/2)M_1|\psi_{12}\rangle = 0$$

$$R(0,\pi/2)M_1|\psi_{22}\rangle = \left(P_0P_0^* + iP_{\pi/2}P_{\pi/2}^*\right)P_\varepsilon = \left(\cos\varepsilon P_0 + i\sin\varepsilon P_{\pi/2}\right)$$

$$R(0,\pi/2)M_1|\psi_{22}\rangle = |\psi_{22}\rangle \Rightarrow R(0,\pi/2)M_1 = |\psi_{22}\rangle\langle\psi_{22}|$$

$$R(0,\pi/2)M_2|\psi_{22}\rangle = 0$$

$$R(0,\pi/2)M_2|\psi_{12}\rangle = \left(P_0P_0^* + iP_{\pi/2}P_{\pi/2}^*\right)\left(-P_{\varepsilon+\pi/2}\right) = \left(\sin\varepsilon P_0 - i\cos\varepsilon P_{\pi/2}\right)$$

$$R(0,\pi/2)M_2|\psi_{12}\rangle = |\psi_{12}\rangle \Rightarrow R(0,\pi/2)M_2 = |\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|$$

Treballs tutelats

Finalment, particularitzeu els resultats anteriors al cas en què $\varepsilon = \pi/4$.

$$\left|\psi_{12}\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon \\ -i\cos\varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon=\pi/4} L \qquad \left|\psi_{22}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon=\pi/4} R$$

$$M_1 = P_{\pi/4}R^* \qquad M_2 = -P_{3\pi/4}L^* = P_{-\pi/4}L^*$$

$$R(0,\pi/2)M_1 = \left\{R(0,\pi/2)P_{\pi/4}\right\}R^* = RR^*$$

$$R(0,\pi/2)M_2 = \left\{R(0,\pi/2)P_{-\pi/4}\right\}L^* = LL^*$$

Conclusió: Podem construir polaritzadors circulars amb dues làmines de quart d'ona i un polaritzador lineal.

$$RR^* = R(0,\pi/2)P(\pi/4)R(\pi/2,\pi/2) \qquad LL^* = R(0,\pi/2)P(3\pi/4)R(\pi/2,\pi/2)$$

Treballs tutelats

TT2.6. Es disposa d'una làmina de mitja ona amb les seues línies neutres girades un angle α respecte als eixos cartesians de referència.

a) Avalueu l'efecte que produeix aquesta làmina sobre la llum polaritzada circularment, tant dextrogira com levogira. Interpreteu el resultat en termes de llums polaritzades elementals.

$$R(\alpha,\pi) = P_\alpha P_\alpha^* - P_{\alpha+\pi/2} P_{\alpha+\pi/2}^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R(\alpha,\pi) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Treballs tutelats

a) Avalueu l'efecte que produeix aquesta làmina sobre la llum polaritzada circularment, tant dextrogira com levogira. Interpreteu el resultat en termes de llums polaritzades elementals.

$$\left.\begin{aligned} L &= P_0 - iP_{\pi/2} \\ R &= P_0 + iP_{\pi/2} \\ \overset{\leftrightarrow}{I} &= P_\alpha P_\alpha^* + P_{\alpha+\pi/2} P_{\alpha+\pi/2}^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot L = L = \exp(-i\alpha)\left\{P_\alpha - iP_{\alpha+\pi/2}\right\} \\ \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot R = R = \exp(+i\alpha)\left\{P_\alpha + iP_{\alpha+\pi/2}\right\} \end{cases}$$

$$R(\alpha,\pi)\cdot L = \exp(-i\alpha)\left\{P_\alpha + iP_{\alpha+\pi/2}\right\} = \exp(-i\alpha)\left\{\exp(-i\alpha)R\right\}$$

$$R(\alpha,\pi) = P_\alpha P_\alpha^* - P_{\alpha+\pi/2} P_{\alpha+\pi/2}^*$$

$$R(\alpha,\pi)\cdot R = \exp(+i\alpha)\left\{P_\alpha - iP_{\alpha+\pi/2}\right\} = \exp(+i\alpha)\left\{\exp(+i\alpha)L\right\}$$

$$\boxed{R(\alpha,\pi) = \exp(i2\alpha)L\cdot R^* + \exp(-i2\alpha)R\cdot L^*}$$

Treballs tutelats

a) Avalueu l'efecte que produeix aquesta làmina sobre la llum polaritzada circularment, tant dextrogira com levogira. Interpreteu el resultat en termes de llums polaritzades elementals.

$$R(\alpha,\pi) = P_\alpha P_\alpha^* - P_{\alpha+\pi/2} P_{\alpha+\pi/2}^*$$

$$R(\alpha,\pi)\cdot R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ i\end{pmatrix} = \frac{\exp(i2\alpha)}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ -i\end{pmatrix} = \exp(i2\alpha)L$$

$$R(\alpha,\pi)\cdot L = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -i\end{pmatrix} = \frac{\exp(-i2\alpha)}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ i\end{pmatrix} = \exp(-i2\alpha)R$$

$$R(\alpha,\pi) = \exp(i2\alpha)L\cdot R^* + \exp(-i2\alpha)R\cdot L^*$$

Treballs tutelats

b) La làmina anterior se situa entre dues làmines de quart d'ona. L'eix lent de cada una d'aquestes làmines forma un angle de 45º amb l'eix *X*. Analitzeu l'efecte que exerceix aquest dispositiu sobre una llum linealment polaritzada a 0º i a 90º.

$$R(\pi/4,\pi/2) = P_{\pi/4}P^*_{\pi/4} + iP_{3\pi/4}P^*_{3\pi/4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$R(\pi/4,\pi/2)\cdot R = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(i\pi/4)P_0$$

$$R(\pi/4,\pi/2)\cdot L = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \exp(-i\pi/4)P_{\pi/2}$$

$$\boxed{R(\pi/4,\pi/2) = \exp(i\pi/4)P_0 \cdot R^* + \exp(-i\pi/4)P_{\pi/2} \cdot L^*}$$

Treballs tutelats

b) La làmina anterior se situa entre dues làmines de quart d'ona. L'eix lent de cada una d'aquestes làmines forma un angle de 45º amb l'eix *X*. Analitzeu l'efecte que exerceix aquest dispositiu sobre una llum linealment polaritzada a 0º i a 90º.

$$R(\pi/4,\pi/2) = P_{\pi/4}P^{*}_{\pi/4} + iP_{3\pi/4}P^{*}_{3\pi/4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$R(\pi/4,\pi/2)\cdot P_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \exp(i\pi/4)L$$

$$R(\pi/4,\pi/2)\cdot P_{\pi/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \exp(-i\pi/4)R$$

$$R(\pi/4,\pi/2) = \exp(i\pi/4)L\cdot P^{*}_{0} + \exp(-i\pi/4)R\cdot P^{*}_{\pi/2}$$

Treballs tutelats

b) La làmina anterior se situa entre dues làmines de quart d'ona. L'eix lent de cada una d'aquestes làmines forma un angle de 45º amb l'eix *X*. Analitzeu l'efecte que exerceix aquest dispositiu sobre una llum linealment polaritzada a 0º i a 90º.

1r ELEMENT

$$R(\pi/4,\pi/2)=\exp(i\pi/4)L\cdot P_0^*+\exp(-i\pi/4)R\cdot P_{\pi/2}^*$$

LLUM EMERGENT

$$|\psi_1\rangle = R(\pi/4,\pi/2)\cdot P_0 = \exp(i\pi/4)L$$

2n ELEMENT

$$R(\alpha,\pi)=\exp(i2\alpha)L\cdot R^*+\exp(-i2\alpha)R\cdot L^*$$

$$|\psi_2\rangle = \exp(-i2\alpha)\exp(i\pi/4)R$$

3r ELEMENT

$$R(\pi/4,\pi/2)=\exp(i\pi/4)P_0\cdot R^*+\exp(-i\pi/4)P_{\pi/2}\cdot L^*$$

$$|\psi_3\rangle = \exp(-i2\alpha)\exp(i\pi/4)R(\pi/4,\pi/2)\cdot R = \exp(-i2\alpha)\exp(i\pi/2)P_0$$

Treballs tutelats

b) La làmina anterior se situa entre dues làmines de quart d'ona. L'eix lent de cada una d'aquestes làmines forma un angle de 45º amb l'eix *X*. Analitzeu l'efecte que exerceix aquest dispositiu sobre una llum linealment polaritzada a 0º i a 90º.

1r ELEMENT **LLUM EMERGENT**

$$R(\pi/4,\pi/2) = P_{\pi/4}P^*_{\pi/4} + iP_{3\pi/4}P^*_{3\pi/4} \Rightarrow |\psi_1\rangle = R(\pi/4,\pi/2)\cdot P_{\pi/2} = \frac{P_{\pi/4} + iP_{3\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_1\rangle = \exp(-i\pi/4)R$$

2n ELEMENT

$$R(\alpha,\pi) = \exp(i2\alpha)L\cdot R^* + \exp(-i2\alpha)R\cdot L^* \Rightarrow |\psi_2\rangle = R(\alpha,\pi)\cdot|\psi_1\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \exp(i2\alpha)\exp(-i\pi/4)L$$

3r ELEMENT

$$R(\pi/4,\pi/2) = P_{\pi/4}P^*_{\pi/4} + iP_{3\pi/4}P^*_{3\pi/4} \Rightarrow |\psi_3\rangle = R(\pi/4,\pi/2)\cdot|\psi_2\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \exp(i2\alpha)\exp(-i\pi/4)R(\pi/4,\pi/2)\cdot L = \exp(i2\alpha)\exp(-i\pi/2)P_{\pi/2}$$

Treballs tutelats

c) Comproveu que el dispositiu de l'apartat *b* es comporta com un retardador amb les seues línies neutres centrades. Trobeu el valor del desfasament que introdueix.

$$R(\pi/4,\pi/2)R(\alpha,\pi)R(\pi/4,\pi/2)=\exp\{-i(2\alpha-\pi/2)\}P_0P_0^* + \exp\{i(2\alpha-\pi/2)\}P_{\pi/2}P_{\pi/2}^*$$

$$R(\pi/4,\pi/2)R(\alpha,\pi)R(\pi/4,\pi/2)=\exp\{-i(2\alpha-\pi/2)\}\left\{P_0P_0^* + \exp\{i(4\alpha-\pi)\}P_{\pi/2}P_{\pi/2}^*\right\}$$

$$R(\pi/4,\pi/2)R(\alpha,\pi)R(\pi/4,\pi/2)=\exp\{-i(2\alpha-\pi/2)\}R(0,4\alpha-\pi)$$

Treballs tutelats

d) A quin element equivaldria el dispositiu de l'apartat *b* si les dues làmines de quart d'ona tingueren els seus eixos lents coincidents amb l'eix *X*?

$$\left.\begin{aligned} R(0,\pi/2) &= P_0 P_0^* + iP_{\pi/2} P_{\pi/2}^* \\ R(\pi/4,\pi/2) &= P_{\pi/4} P_{\pi/4}^* + iP_{3\pi/4} P_{3\pi/4}^* \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} R(0,\pi/2) &= R(\pi/4) R(\pi/4,\pi/2) R(-\pi/4) \\ R(\pi/4,\pi/2) &= R(-\pi/4) R(0,\pi/2) R(\pi/4) \end{aligned}$$

$$M = R(0,\pi/2) R(\alpha,\pi) R(0,\pi/2)$$

$$M = \{R(\pi/4)R(-\pi/4)\} R(0,\pi/2) \{R(\pi/4)R(-\pi/4)\} R(\alpha,\pi) \{R(\pi/4)R(-\pi/4)\} R(0,\pi/2) \{R(\pi/4)R(-\pi/4)\}$$

$$\left.\begin{aligned} R(\theta) &= P_0 P_\theta^* + P_{\pi/2} P_{\theta+\pi/2}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ R(-\theta) &= P_\theta P_0^* + P_{\theta+\pi/2} P_{\pi/2}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

MATRIUS DE ROTACIÓ DEL SISTEMA DE REFERÈNCIA

Treballs tutelats

d) A quin element equivaldria el dispositiu de l'apartat *b* si les dues làmines de quart d'ona tingueren els seus eixos lents coincidents amb l'eix *X*?

$$M = R(\pi/4)\{R(-\pi/4)R(0,\pi/2)R(\pi/4)\}\{R(-\pi/4)R(\alpha,\pi)R(\pi/4)\}\{R(-\pi/4)R(0,\pi/2)R(\pi/4)\}R(-\pi/4)$$

$$M = R(\pi/4)R(\pi/4,\pi/2)R(\alpha+\pi/4,\pi)R(\pi/4,\pi/2)R(-\pi/4)$$

$$R(\pi/4,\pi/2)R(\alpha,\pi)R(\pi/4,\pi/2) = \exp\{-i(2\alpha-\pi/2)\}R(0,4\alpha-\pi)$$

$$M = R(\pi/4)\{\exp(-i2\alpha)R(0,4\alpha)\}R(-\pi/4)$$

$$\boxed{M = \exp(-i2\alpha)R(-\pi/4,4\alpha)}$$

$$M = \exp(-i2\alpha)\{P_{-\pi/4}P^{*}_{-\pi/4} + \exp(i4\alpha)P_{\pi/4}P^{*}_{\pi/4}\}$$

$$\boxed{M = \exp(i2\alpha)P_{\pi/4}P^{*}_{\pi/4} + \exp(-i2\alpha)P_{-\pi/4}P^{*}_{-\pi/4}}$$

Treballs tutelats

TT2.7. Considereu el filtre de polarització dissenyat per Lyot i Öhman, que consisteix en un conjunt de làmines retardadores compreses entre polaritzadors lineals amb els seus eixos de transmissió paral·lels. El retard de les làmines segueix una progressió geomètrica, és a dir, δ, 2δ, 4δ, 8δ, … Totes les làmines tenen les seues línies neutres orientades a 45º respecte dels eixos de transmissió dels polaritzadors.
a) Trobeu la matriu de Jones d'un sistema compost per N làmines retardadores (i N + 1 polaritzadors).

$$M = M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P(45^\circ)$$

$$M_{2^{N-1}} = P(45^\circ) \cdot R\left(0, 2^{N-1}\delta\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i2^{N-1}\delta\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \exp\left(i2^{N-1}\delta\right) \\ 1 & \exp\left(i2^{N-1}\delta\right) \end{pmatrix}$$

Treballs tutelats

a) Trobeu la matriu de Jones d'un sistema compost per N làmines retardadores (i N + 1 polaritzadors).

$$M_{2^{N-1}} \cdot M_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \exp\left(i2^{N-1}\delta\right) \\ 1 & \exp\left(i2^{N-1}\delta\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \exp(i\delta) \\ 1 & \exp(i\delta) \end{pmatrix} = \frac{1+\exp\left(i2^{N-1}\delta\right)}{4}\begin{pmatrix} 1 & \exp(i\delta) \\ 1 & \exp(i\delta) \end{pmatrix}$$

$$M_{2^{N-1}} \cdot M_1 = \frac{1+\exp\left(i2^{N-1}\delta\right)}{2} M_1 = \exp\left(i2^{N-2}\delta\right)\cos\left(2^{N-2}\delta\right) M_1$$

$$M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 = \exp(i\delta)\cos(\delta) M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_1$$

$$M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 = \exp\left(i2^{N-2}\delta\right)\cos\left(2^{N-2}\delta\right) \ldots \exp(i2\delta)\cos(2\delta)\exp(i\delta)\cos(\delta) M_1$$

$$M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 = \exp\left(i\delta \sum_{n=1}^{N-1} 2^{n-1}\right) \prod_{n=1}^{N-1} \cos\left(2^{n-1}\delta\right) M_1$$

Treballs tutelats

a) Trobeu la matriu de Jones d'un sistema compost per N làmines retardadores (i $N + 1$ polaritzadors).

$$M = M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P(45^{\circ})$$

$$M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 = \exp\left(i\delta \sum_{n=1}^{N-1} 2^{n-1} \right) \prod_{n=1}^{N-1} \cos\left(2^{n-1}\delta\right) M_1$$

$$M_1 \cdot P(45^{\circ}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \exp(i\delta) \\ 1 & \exp(i\delta) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1+\exp(i\delta)}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\delta/2)\cos(\delta/2) P(45^{\circ})$$

$$M = M_{2^{N-1}} \cdot \ldots \cdot M_4 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P(45^{\circ}) = \exp\left(i\frac{\delta}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n} \right) \prod_{n=0}^{N-1} \cos\left(2^{n} \frac{\delta}{2} \right) P(45^{\circ})$$

Treballs tutelats

a) Trobeu la matriu de Jones d'un sistema compost per N làmines retardadores (i N + 1 polaritzadors).

$$\sum_{n=0}^{N-1} 2^n = 1+2+4+\ldots+2^{N-1} = 2^N - 1$$

$$\frac{\sin\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^N \sin(\delta/2)} = \frac{2\sin\left(2^{N-2}\delta\right)\cos\left(2^{N-2}\delta\right)}{2^N \sin(\delta/2)} = \frac{2^2 \sin\left(2^{N-3}\delta\right)\cos\left(2^{N-3}\delta\right)\cos\left(2^{N-2}\delta\right)}{2^N \sin(\delta/2)}$$

$$\frac{\sin\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^N \sin(\delta/2)} = \frac{2^M \sin\left(2^{N-M-1}\delta\right)\prod_{n=N-M}^{N-1}\cos\left(2^n \frac{\delta}{2}\right)}{2^N \sin(\delta/2)} \xrightarrow{N=M} \prod_{n=0}^{N-1}\cos\left(2^n \frac{\delta}{2}\right)$$

$$M = \exp\left(i\frac{\delta}{2}\sum_{n=0}^{N-1}2^n\right)\prod_{n=0}^{N-1}\cos\left(2^n\frac{\delta}{2}\right)P(45^{\circ}) = \exp\left(i\frac{\delta\left(2^N-1\right)}{2}\right)\frac{\sin\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^N\sin(\delta/2)}P(45^{\circ})$$

Treballs tutelats

b) Demostreu que si incideix llum natural amb una intensitat I_0, la intensitat emergent d'aquest sistema es pot escriure com:

$$\boxed{I_{out} = \frac{\sin^2\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^{2N+1}\sin^2\left(\delta/2\right)} I_0}$$

$$M = \exp\left(i\,\frac{\delta\left(2^N-1\right)}{2}\right)\frac{\sin\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^N\sin\left(\delta/2\right)}P\left(45^{\circ}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle = \exp\left(i\,\frac{\delta\left(2^N-1\right)}{2}\right)\frac{\sin\left(2^{N-1}\delta\right)}{2^N\sin\left(\delta/2\right)}\sqrt{\frac{I_0}{2}}P_{45^{\circ}}$$

TREBALLS TUTELATS D’ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 2

Treballs tutelats

TT3.1. La conductivitat d'un material es descriu mitjançant la llei d'Ohm, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Utilitzant l'equació $\vec{J} = \rho\dot{\vec{r}}$, on $\rho = -Ne$ és la densitat de càrregues i $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$:

a) Identifiqueu la conductivitat $\sigma(\omega)$ del medi.

b) Demostreu que $\sigma/(-i\omega\varepsilon_0)$ és essencialment la susceptibilitat χ del medi.

c) Com que en un metall les càrregues de conducció no estan lligades, podem considerar $\omega_0 = 0$, que és l'anomenat model de Drude. Trobeu la conductivitat nominal (és a dir, en el límit $\omega \to 0$) i la freqüència de plasma per al coure, el qual té una densitat de 8.9×10^6 gr/m^3 i un pes atòmic de 63.54 gr/mol. A més, considereu que $\gamma = 2.05 \times 10^{13}$ rad/s. En aquest cas, suposeu un electró de conducció per àtom i recordeu que el nombre d'Avogadro és 6×10^{23} àtom/mol.

Treballs tutelats

a) Identifiqueu la conductivitat $\sigma(\omega)$ del medi.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+2\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}+\omega_0^2\vec{r}=-\frac{e}{m}\vec{E}\Rightarrow\vec{r}=-\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}\vec{E}$$

$$\vec{J}=\rho\dot{\vec{r}}\xrightarrow{\rho=-Ne}\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}\dot{\vec{E}}=\frac{Ne^2}{m}\frac{-i\omega}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}\vec{E}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}\Rightarrow\boxed{\sigma=\frac{-i\omega\omega_p^2\varepsilon_0}{\omega_0^2-\omega^2-i2\gamma\omega}}\qquad\omega_p^2=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

$$\sigma_{Drude}\xrightarrow{\omega_0=0}\frac{i\omega_p^2\varepsilon_0}{\omega+i2\gamma}\qquad\sigma_{\mathrm{nom}}=\lim_{\omega\to 0}\sigma_{Drude}=\frac{\omega_p^2\varepsilon_0}{2\gamma}$$

Treballs tutelats

b) Demostreu que $\sigma/(-i\omega\varepsilon_0)$ és essencialment la susceptibilitat χ del medi.

$$\vec{J} = \rho\dot{\vec{r}} \xrightarrow{\rho=-Ne} (-Ne)(-i\omega\vec{r}) = -i\omega(-Ne\vec{r}) = -i\omega\vec{P}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

$$\boxed{\sigma = -i\omega\varepsilon_0\chi}$$

Treballs tutelats

c) Com que en un metall les càrregues de conducció no estan lligades, podem considerar $\omega_0 = 0$, que és l'anomenat model de Drude. Trobeu la conductivitat nominal (és a dir, en el límit $\omega \to 0$) i la freqüència de plasma per al coure, el qual té una densitat de 8.9×10^6 gr/m^3 i un pes atòmic de 63.54 gr/mol. A més, considereu que $\gamma = 2.05 \times 10^{13}$ rad/s. En aquest cas, suposeu un electró de conducció per àtom i recordeu que el nombre d'Avogadro és 6×10^{23} àtom/mol.

$$N = \frac{6\times10^{23}\ \text{àtoms/mol}}{63.54\ \text{gr/mol}}\left(8.9\times10^{6}\ \text{gr/m}^3\right)\left(1\frac{\text{electró}}{\text{àtom}}\right) = 8.4\times10^{28}\ \frac{\text{electrons}}{\text{m}^3}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} = 1.6\times10^{16}\ \text{rad/s} \Leftrightarrow f_p = 2.6\times10^{15}\ \text{Hz}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{\omega_p^2\varepsilon_0}{2\gamma} = 5.8\times10^{7}\ \text{Siemens/m}$$

$$e = 1.6022\times10^{-19} C$$

$$m = 9.1094\times10^{-31} kg$$

$$\varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}\ F/m$$

Treballs tutelats

TT3.2. Demostreu que l'índex de refracció d'una mescla de gasos val:

$$n(\omega) = \sum_i f_i n_i(\omega)$$

on $n_i(\omega)$ és l'índex de refracció de cada un dels gasos i f_i la seua concentració fraccional molecular (nombre de molècules del gas i dividit pel nombre total de molècules).

Com a aplicació, trobeu l'índex de refracció de l'aire per a $\lambda = 589nm$ a partir dels valors $n_{O_2} = 1.000272$ i $n_{N_2} = 1.000297$ corresponents respectivament a l'oxigen i al nitrogen. (Considereu l'aire com una mescla d'aquests dos gasos amb proporcions respectives del 25% i el 75%).

Treballs tutelats

Relació entre la susceptibilitat i l'índex de refracció

Nombre de dipols per unitat de volum

Càrrega elèctrica

Susceptibilitat elèctrica

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Permitivitat dielèctrica

Massa de l'electró

Freqüència de ressonància

$$e = 1.6022 \times 10^{-19} C$$

$$m = 9.1094 \times 10^{-31} kg$$

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\, F/m$$

MEDIS MOLT DILUÏTS

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \xrightarrow{\chi \ll 1} 1 + \frac{1}{2}\chi(\omega)$$

Treballs tutelats

Suposem que existeix més d'una espècie atòmica.
Si les espècies *a* tenen Z_a electrons amb freqüències de ressonància ω_{ai}, llavors podem escriure:

$$N = \sum_i N_i$$

$$\chi(\omega) = \sum_i \frac{N_i}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{Z_i} \frac{e^2/m}{\omega_{ij}^2 - \omega^2}$$

$$f_i = \frac{N_i}{N} \Rightarrow 1 = \sum_i f_i$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{Z_i} \frac{e^2/m}{\omega_{ij}^2 - \omega^2} = \sum_i f_i + \sum_i f_i \frac{N}{2\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{Z_i} \frac{e^2/m}{\omega_{ij}^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{n(\omega) = \sum_i f_i \left(1 + \frac{N}{2\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{Z_i} \frac{e^2/m}{\omega_{ij}^2 - \omega^2}\right) = \sum_i f_i n_i(\omega)}$$

Treballs tutelats

EXEMPLE NUMÈRIC:

$$n_{O_2} = 1.000272 \qquad f_{O_2} = 0.25$$

$$n_{N_2} = 1.000297 \qquad f_{N_2} = 0.75$$

$$n_{AIRE} = f_{O_2} n_{O_2} + f_{N_2} n_{N_2} = 1.000291$$

Treballs tutelats

TT3.3. La susceptibilitat d'un medi és definida a través de $\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{local} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$, on $\vec{E}$ és el camp elèctric macroscòpic. El camp local, és a dir, el camp elèctric actuant sobre l'àtom, està donat per $\vec{E}_{local} = \vec{E} + (3\varepsilon_0)^{-1}\vec{P}$. Demostreu que

$$\frac{3\chi}{\chi+3} = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}$$

segons la teoria de Lorentz, que s'anomena la relació de Clausius-Mossotti. A continuació, obteniu la relació de Lorentz-Lorentz mitjançant l'equació $\chi = n^2 - 1$

Treballs tutelats

Demostreu la relació de Clausius-Mossotti.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}_{loc} \Rightarrow \vec{r} = -\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}\vec{E}_{loc}$$

$$\vec{P} = -eN\vec{r} = N\alpha\vec{E}_{local} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}}$$

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{local} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_{local} = \frac{\varepsilon_0\chi}{N\alpha}\vec{E}$$

$$\vec{E}_{local} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0\chi}{N\alpha} = 1 + \frac{\varepsilon_0\chi}{3\varepsilon_0}$$

RELACIÓ DE CLAUSIUS-MOSSOTTI

$$\frac{\chi}{1+\frac{\chi}{3}} = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}$$

Treballs tutelats

A continuació, obteniu la relació de Lorentz-Lorentz.

$$\frac{\chi}{3+\chi} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{3}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}$$

$$\chi = n^2 - 1$$

RELACIÓ DE LORENTZ-LORENTZ

$$\boxed{\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1}{3}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}}$$

Treballs tutelats

T3.4. Comproveu que la fórmula de Lorentz-Lorenz safisfà, amb les aproximacions oportunes que cal establir, la fórmula de Cauchy per a l’índex de refracció de gasos:

$$n(\lambda)-1=A\left(1+\frac{B}{\lambda^2}\right)$$

on A i B són constants a determinar.

Treballs tutelats

Relació entre la susceptibilitat i l'índex de refracció

Nombre de dipols per unitat de volum

Càrrega elèctrica

Susceptibilitat elèctrica

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Permitivitat dielèctrica

Massa de l'electró

Freqüència de ressonància

$$e = 1.6022 \times 10^{-19} C$$

$$m = 9.1094 \times 10^{-31} kg$$

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} F/m$$

MEDIS MOLT DILUÏTS

$$\boxed{n(\omega) = \sqrt{1+\chi(\omega)} \xrightarrow{\chi \ll 1} 1 + \frac{1}{2}\chi(\omega)}$$

Treballs tutelats

Suposant que hi ha Z electrons que responen de forma independent a un camp donat:

$$\chi(\omega) = \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{Z} \frac{e^2/m}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{n(\omega) - 1 = \frac{1}{2} \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{Z} \frac{e^2/m}{\omega_i^2 - \omega^2}}$$

$$\lambda_i = \frac{2\pi c}{\omega_i}$$

$$n(\lambda) - 1 = \frac{Ne^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m c^2} \sum_{i=1}^{Z} \frac{\lambda^2 \lambda_i^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = \frac{Ne^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m c^2} \sum_{i=1}^{Z} \frac{\lambda_i^2}{1 - (\lambda_i/\lambda)^2}$$

$$\frac{1}{1 - (\lambda_i/\lambda)^2} \xrightarrow{\lambda_i/\lambda \ll 1} 1 + (\lambda_i/\lambda)^2$$

Treballs tutelats

Suposant que hi ha Z electrons que responen de forma independent a un camp donat:

$$n(\lambda)-1 = A\left(1+\frac{B}{\lambda^2}\right)$$

$$n(\lambda)-1 = \frac{Ne^2}{8\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^2\left(1+\frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right) = \overbrace{\frac{Ne^2}{8\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^2}^{A} + \overbrace{\frac{Ne^2}{8\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^4\frac{1}{\lambda^2}}^{AB}$$

$$A = \frac{Ne^2}{8\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^2 \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^4}{\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^2}$$

Treballs tutelats

EXEMPLE NUMÈRIC: Gas He a temperatura i pressió estàndard.

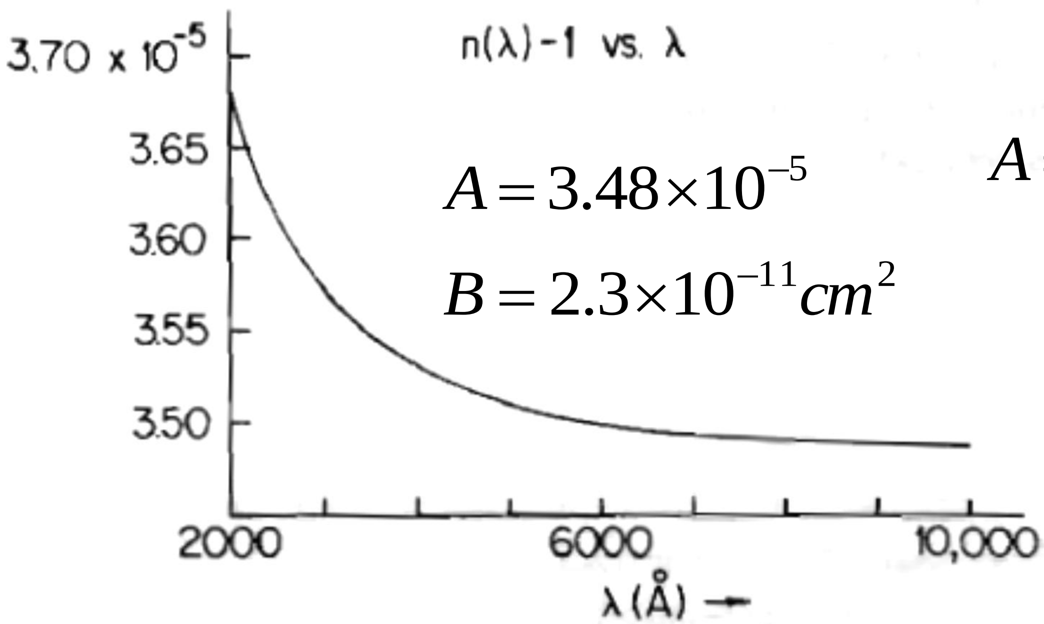
$$n(\lambda)-1 = A\left(1+\frac{B}{\lambda^2}\right)$$

$$Z = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 584\,\mathring{A}$$

$$N = 2.69\times10^{19}\,cm^{-3}$$

$$A = \frac{Ne^2}{8\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^2 = 8.23\times10^{-5}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^4}{\sum_{i=1}^{Z}\lambda_i^2} = 3.42\times10^{-11}\,cm^2$$



$$A = 3.48\times10^{-5}$$

$$B = 2.3\times10^{-11}\,cm^2$$

* *Lasers* (P.W. Milonni & J.H.Eberly), p. 40

Treballs tutelats

T3.5. A partir de l'expressió donada pel model clàssic per a la relació de dispersió, trobeu la fórmula semiempírica de Sellmeier:

$$n^2(\lambda) = A + \sum_i \frac{C_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

vàlida per a medis transparents en les regions espectrals allunyades de les longituds d'ona de ressonància λ_i.

Treballs tutelats

Relació entre la susceptibilitat i l'índex de refracció

$$\chi(\omega) = \frac{N}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{Z}\frac{e^2/m}{\omega_i^2-\omega^2} \equiv \frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\sum_{i=1}^{Z}\frac{\lambda^2\lambda_i^2}{\lambda^2-\lambda_i^2} \qquad \lambda_i = \frac{2\pi c}{\omega_i}$$

FÓRMULA DE SELLMEIER

$$\boxed{n^2(\omega) = 1+\chi(\omega) \to 1+\sum_{i=1}^{Z}\frac{\lambda^2 B_i}{\lambda^2-\lambda_i^2}} \qquad B_i = \frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 mc^2}\lambda_i^2$$

$$\frac{\lambda^2 B_i}{\lambda^2-\lambda_i^2} = B_i + \left(\frac{\lambda^2 B_i}{\lambda^2-\lambda_i^2} - B_i\right) = B_i + \left(\frac{\lambda_i^2 B_i}{\lambda^2-\lambda_i^2}\right)$$

$$C_i = \lambda_i^2 B_i$$

$$\boxed{n^2(\lambda) = 1+\sum_{i=1}^{Z}B_i + \sum_{i=1}^{Z}\frac{\lambda_i^2 B_i}{\lambda^2-\lambda_i^2} = A+\sum_{i}\frac{C_i}{\lambda^2-\lambda_i^2}} \qquad A = 1+\sum_{i=1}^{Z}B_i$$

Treballs tutelats

Lluny de la zona de ressonància es compleix: $\lambda \rangle\rangle \lambda_i$

$$n^2(\lambda) = A + \sum_i \frac{C_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = A + \sum_i \frac{C_i}{\lambda^2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}} \approx A + \sum_i \frac{C_i}{\lambda^2}\left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} + \cdots\right)$$

$$C_i = \lambda_i^2 B_i$$

$$B_i = \frac{Ne^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m c^2} \lambda_i^2$$

$$A = 1 + \sum_{i=1}^{Z} B_i$$

Treballs tutelats

Com a aplicació, considereu en la regió visible el cas del CaF_2, del qual es coneix l'existència de dues longituds d'ona de ressonància $\lambda_1 = 94.2nm$ i $\lambda_2 = 35\mu m$. La primera d'aquestes està associada a una transició electrònica, mentre que la segona correspon a una transició entre estats de vibració d'ions F^- en la molècula. Trobeu el valor de les constants de la fórmula de Sellmeier en aquest cas. (Ajuda: $m_F = 3470 m_e$, on m_e és la massa de l'electró).

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}\,F/m \\ e = 1.6022\times10^{-19} C \\ N = ?? \\ m_e = 9.1094\times10^{-31} kg \end{array}\right]$$

$$\Lambda^{-2} = \frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e c^2} = ??$$

$$B_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}\right)^2 = ??$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\frac{m_e}{m_F} = 39.8$$

$$C_1 = \lambda_1^2 B_1 = ??$$

$$C_2 = \lambda_2^2 B_2 = ??$$

$$A = 1 + \sum_{i=1}^{2} B_i = ??$$

Treballs tutelats

TT3.6. Considereu el següent índex de refracció apropiat per a un medi amb freqüència de ressonància ω_0 i constant de relaxació γ [*Phys. Rev*. A **1** (1970) 305]:

$$n(\omega) = n_\infty - \frac{\omega_0 \omega_p}{\omega(\omega - \omega_0 + i\gamma)} \qquad \left|\omega_p / \gamma\right| << n_\infty$$

En l'equació anterior, n_∞ és l'índex de refracció lluny de la freqüència de ressonància i $\omega_p > 0$ per a un medi dissipatiu.
a) Avalueu la velocitat de fase i la velocitat de grup d'un pols l'ample espectral $1/\tau$ del qual és molt menor que la constant de relaxació, $\gamma\tau >> 1$.

$$n(\omega) = n_\infty - \frac{\omega_0 \omega_p (\omega - \omega_0 - i\gamma)}{\omega(\omega - \omega_0 + i\gamma)(\omega - \omega_0 - i\gamma)} \xrightarrow{n = n' + i n''} \begin{cases} n' = n_\infty - \dfrac{\omega_0 \omega_p (\omega - \omega_0)}{\omega\left[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2\right]} \\ n'' = \dfrac{\omega_0 \omega_p \gamma}{\omega\left[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2\right]} \end{cases}$$

Treballs tutelats

a) Avalueu la velocitat de fase i la velocitat de grup d'un pols l'ample espectral $1/\tau$ del qual és molt menor que la constant de relaxació, $\gamma\tau >> 1$.

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n'}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left[\frac{d\left(n'\omega/c\right)}{d\omega}\right]^{-1} \qquad n' = n_\infty - \frac{\omega_0\omega_p\left(\omega-\omega_0\right)}{\omega\left[\left(\omega-\omega_0\right)^2+\gamma^2\right]}$$

$$v_g = \left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{n_\infty}{c}\omega - \frac{\omega_0\omega_p}{c}\frac{\left(\omega-\omega_0\right)}{\left[\left(\omega-\omega_0\right)^2+\gamma^2\right]}\right)\right]^{-1}$$

$$v_g = \left[\frac{n_\infty}{c} - \frac{\omega_0\omega_p}{c}\frac{\gamma^2-\left(\omega-\omega_0\right)^2}{\left[\gamma^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2\right]^2}\right]^{-1} \qquad \left|\omega_p/\gamma\right| << n_\infty$$

Treballs tutelats

b) Particularitzeu aquestes expressions quan la freqüència central del pols coincideix amb la freqüència de ressonància ω_0 del medi, i trobeu els valors de ω_p per als quals la velocitat de grup pot ser superlumínica i inclús negativa.

$$v_f \xrightarrow{\omega=\omega_0} \frac{c}{n_\infty} \qquad v_g \xrightarrow{\omega=\omega_0} \left[\frac{n_\infty}{c} - \frac{\omega_0\omega_p}{c}\frac{1}{\gamma^2}\right]^{-1} = \frac{c}{n_\infty - \omega_0\omega_p/\gamma^2}$$

$$v_g > c \Leftrightarrow \begin{cases} n_\infty - \omega_0\omega_p/\gamma^2 > 0 \Leftrightarrow \omega_p < n_\infty\gamma^2/\omega_0 \\ \dfrac{\gamma^2}{n_\infty\gamma^2 - \omega_0\omega_p} > 1 \Leftrightarrow \omega_p > (n_\infty - 1)\gamma^2/\omega_0 \end{cases}$$

$$v_g < 0 \Leftrightarrow n_\infty\gamma^2 - \omega_0\omega_p < 0$$

$$\boxed{\omega_p > \frac{n_\infty\gamma}{\omega_0/\gamma}} \qquad \boxed{\frac{(n_\infty - 1)\gamma}{\omega_0/\gamma} < \omega_p < \frac{n_\infty\gamma}{\omega_0/\gamma}}$$

Treballs tutelats

c) Finalment, trobeu la condició que ha de complir el paràmetre ω_p perquè la distància de penetració $d = [k_0 \mathrm{Im}(n)]^{-1}$ siga molt major que la longitud d'ona λ_0 en el buit.

$$n'' = \frac{\omega_0 \omega_p \gamma}{\omega\left[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2\right]} \xrightarrow{\omega=\omega_0} \frac{\omega_p}{\gamma}$$

$$d = \frac{1}{k_0 n''} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{1}{\omega_p/\gamma} \gg \lambda_0 \Leftrightarrow \omega_p \ll \frac{\gamma}{2\pi} < \gamma$$

Qüestió: És compatible aquest resultat amb els obtinguts en l'apartat anterior?

Treballs tutelats

TT3.7. És ben conegut que en un dielèctric perfecte, el camp elèctric ***E*** i magnètic ***H*** d'una ona plana oscil·len en fase. Considereu ara una ona plana monocromàtica que es propaga en un medi metàl·lic amb una conductivitat $\sigma \neq 0$. Trobeu el desfasament φ del vector camp magnètic respecte al vector camp elèctric, i demostreu que si $\sigma/\varepsilon\omega >> 1$ es compleix que $\varphi = -45^o$.

$$\left.\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\
\vec{H} &= \vec{H}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\
\vec{D} &= \varepsilon\vec{E} = \vec{D}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\
\vec{B} &= \mu\vec{H} = \vec{B}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right) \\
\vec{J} &= \sigma\vec{E} = \vec{J}_0 \exp\left(i\omega t - i\vec{k}\vec{x}\right)
\end{aligned}\right\}$$

CAMP TRANSVERSAL

$$\nabla\vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 = \vec{k}\cdot\vec{H}_0}$$

$$\nabla\vec{D} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k}\cdot\vec{D}_0 = 0 = \vec{k}\cdot\vec{E}_0}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \Rightarrow -i\vec{k}\times\vec{E}_0 = -i\omega\vec{B}_0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \partial_t\vec{D} \Rightarrow -i\vec{k}\times\vec{H}_0 = \sigma\vec{E}_0 + i\omega\vec{D}_0$$

Treballs tutelats

Trobeu el desfasament φ del vector camp magnètic respecte al vector camp elèctric, i demostreu que si σ/εω >> 1 es compleix que φ = -45º.

$$\varepsilon_c = \varepsilon - i\sigma/\omega$$

$$-i\vec{k}\times\vec{E}_0 = -i\omega\vec{B}_0 \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\mu\vec{H}_0$$

$$-i\vec{k}\times\vec{H}_0 = \sigma\vec{E}_0 + i\omega\vec{D}_0 \Rightarrow \vec{k}\times\vec{H}_0 = i\sigma\vec{E}_0 - \omega\varepsilon\vec{E}_0 \equiv -\omega\varepsilon_c\vec{E}_0$$

EQUACIÓ DE DISPERSIÓ

$$\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right) = \omega\mu\vec{k}\times\vec{H}_0 \Rightarrow \boxed{k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c \equiv \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma}$$

$$n^2 = k^2/\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \xrightarrow{\mu=\mu_0} n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \qquad \varepsilon,\sigma\in\Re$$

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\mu\vec{H}_0 \Rightarrow \arg(k) + \arg(E_0) = \arg(H_0)$$

$$\varphi = \arg(H_0) - \arg(E_0) = \arg(k)$$

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma \Rightarrow \boxed{\tan(2\varphi) = -\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \xrightarrow{\sigma\rangle\rangle\omega\varepsilon} -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\pi/4$$

TREBALLS TUTELATS D’ÒPTICA I

Solucions del Butlletí 4

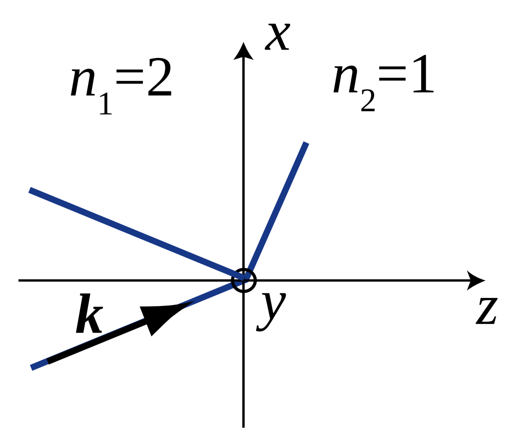
Treballs tutelats

TT4.1. Una ona plana homogènia de freqüència ν=500THz té un camp elèctric que s'escriu de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \left[2(2\hat{x} - \hat{z}) + i\,\frac{5\sqrt{5}}{2}\,\hat{y} \right] e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

Considereu que aquesta ona es propaga en un medi d'índex de refracció n_1=2 i incideix obliquament sobre una superfície que separa aquest medi de l'espai buit (n_2=1) tal com es mostra en la figura adjunta.

a) Obteniu el valor dels angles d'incidència i de refracció. A més, escriviu les expressions dels vectors d'ona de les ones incident, reflectida i transmesa.



Treballs tutelats

a) Obteniu el valor dels angles d'incidència i de refracció. A més, escriviu les expressions dels vectors d'ona de les ones incident, reflectida i transmesa.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0\left[2(2\hat{x}-\hat{z}) + i\frac{5\sqrt{5}}{2}\hat{y}\right]e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ i5\sqrt{5}/2 \\ -2 \end{pmatrix} E_0$$

ONA TRANSMESA

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}_0' e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$$

$$\vec{k}' = k_0 n_2 \hat{u}'$$

ONA REFLECTIDA

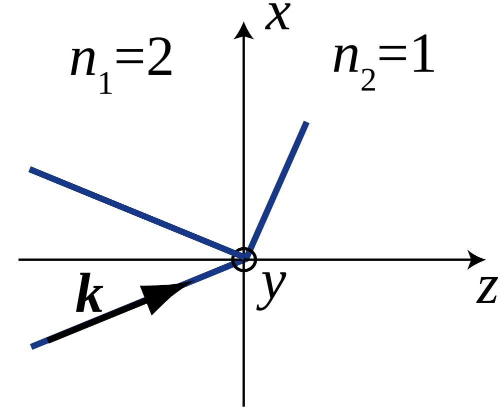
$$\vec{E}''(\vec{r}) = \vec{E}_0'' e^{-i\vec{k}''\vec{r}}$$

$$\vec{k}'' = k_0 n_1 \hat{u}''$$

$$\boxed{\vec{k} = k_0 n_1 \hat{u}} \Rightarrow \hat{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}\cdot\vec{E}_0 = 0 \\ \hat{u}\cdot\hat{y} = 0 \end{array}\right\} \hat{u} = \frac{\vec{E}_0 \times \hat{y}}{\left|\vec{E}_0 \times \hat{y}\right|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$k_0 = \frac{2\pi\nu}{c} \Downarrow \boxed{k_0 = 10.5\mu m^{-1}}$$



Treballs tutelats

a) Obteniu el valor dels angles d'incidència i de refracció. A més, escriviu les expressions dels vectors d'ona de les ones incident, reflectida i transmesa.

ONA INCIDENT

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\vec{k} = k_0 n_1 \hat{u}$$

ONA TRANSMESA

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}'_0 e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$$

$$\vec{k}' = k_0 n_2 \hat{u}'$$

ONA REFLECTIDA

$$\vec{E}''(\vec{r}) = \vec{E}''_0 e^{-i\vec{k}''\vec{r}}$$

$$\vec{k}'' = k_0 n_1 \hat{u}''$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon \\ 0 \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_x &= k'_x = k''_x \\ k_y &= k'_y = k''_y \end{aligned}}$$

$$k_z = -k_z$$

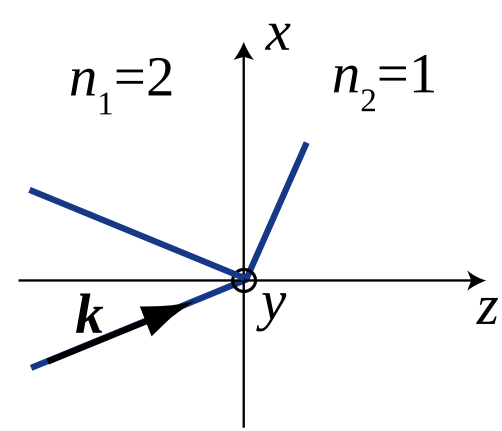
$$n_1 \sin\varepsilon = n_2 \sin\varepsilon'$$

$$\sin\varepsilon = 1/\sqrt{5}$$

$$\hat{u}' = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon' \\ 0 \\ \cos\varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 26.57^\circ \\ \varepsilon' &= 63.43^\circ \end{aligned}\right\} \Downarrow \quad \varepsilon + \varepsilon' = 90^\circ$$

$$\hat{u}'' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



Treballs tutelats

b) Identifiqueu el tipus de polarització de l'ona incident.

ONA INCIDENT

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

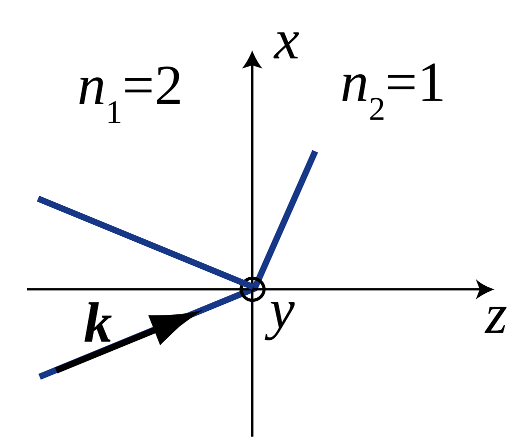
$$\vec{k} = k_0 n_1 \hat{u}$$

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ i5\sqrt{5}/2 \\ -2 \end{pmatrix} E_0 \qquad \hat{u} = \frac{\vec{E}_0 \times \hat{y}}{\left|\vec{E}_0 \times \hat{y}\right|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_0 = \left(\vec{E}_0 \cdot \hat{u}_{\parallel}\right)\hat{u}_{\parallel} + \left(\vec{E}_0 \cdot \hat{u}_{\perp}\right)\hat{u}_{\perp} \equiv \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \cdot \hat{u}_{\parallel} \\ \vec{E}_0 \cdot \hat{u}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ i5\sqrt{5}/2 \end{pmatrix} E_0$$

LLUM EL·LÍPTICA CENTRADA DEXTROGIRA

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_{\parallel} &= \hat{u}_{\perp} \times \hat{u} \\ \hat{u}_{\perp} &= \hat{y} \end{aligned}\right\} \quad \hat{u}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



Treballs tutelats

c) Obteniu el camp elèctric de l’ona reflectida i transmesa. A més, identifiqueu el tipus de polarització d’aquestes ones.

$$\vec{E}_0 = \left(\vec{E}_0 \cdot \hat{u}_\parallel\right)\hat{u}_\parallel + \left(\vec{E}_0 \cdot \hat{u}_\perp\right)\hat{u}_\perp \equiv \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \cdot \hat{u}_\parallel \\ \vec{E}_0 \cdot \hat{u}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ i5\sqrt{5}/2 \end{pmatrix} E_0$$

$$\vec{E}_0' = \left(\vec{E}_0' \cdot \hat{u}_\parallel'\right)\hat{u}_\parallel' + \left(\vec{E}_0' \cdot \hat{u}_\perp\right)\hat{u}_\perp \equiv \begin{pmatrix} \vec{E}_0' \cdot \hat{u}_\parallel' \\ \vec{E}_0' \cdot \hat{u}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}t_\parallel \\ i5\sqrt{5}t_\perp/2 \end{pmatrix} E_0$$

$$\vec{E}_0'' = \left(\vec{E}_0'' \cdot \hat{u}_\parallel''\right)\hat{u}_\parallel'' + \left(\vec{E}_0'' \cdot \hat{u}_\perp\right)\hat{u}_\perp \equiv \begin{pmatrix} \vec{E}_0'' \cdot \hat{u}_\parallel'' \\ \vec{E}_0'' \cdot \hat{u}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}r_\parallel \\ i5\sqrt{5}r_\perp/2 \end{pmatrix} E_0$$

ONA TRANSMESA

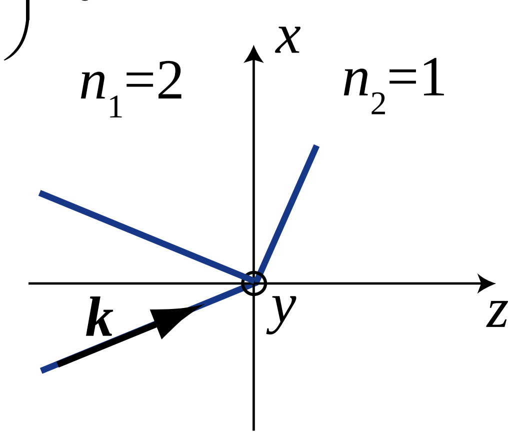
$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}_0' e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$$

$$\vec{k}' = k_0 n_2 \hat{u}'$$

ONA REFLECTIDA

$$\vec{E}''(\vec{r}) = \vec{E}_0'' e^{-i\vec{k}''\vec{r}}$$

$$\vec{k}'' = k_0 n_1 \hat{u}''$$



Treballs tutelats

c) Obteniu el camp elèctric de l'ona reflectida i transmesa. A més, identifiqueu el tipus de polarització d'aquestes ones.

$$t_\perp = \frac{2\sin\varepsilon'\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon+\varepsilon')} = \frac{8}{5} \qquad r_\perp = -\frac{\sin(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin(\varepsilon+\varepsilon')} = \frac{3}{5} \qquad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ i5\sqrt{5}/2 \end{pmatrix} E_0$$

$$t_\parallel = \frac{2\sin\varepsilon'\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon+\varepsilon')\cos(\varepsilon-\varepsilon')} = 2 \qquad r_\parallel = \frac{\tan(\varepsilon-\varepsilon')}{\tan(\varepsilon+\varepsilon')} = 0$$

$$\vec{E}_0' = \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ i4\sqrt{5} \end{pmatrix} E_0$$

LLUM CIRCULARMENT POLARITZADA DEXTROGIRA

$$\vec{E}_0'' = \begin{pmatrix} 0 \\ i3\sqrt{5}/2 \end{pmatrix} E_0$$

LLUM LINEALMENT POLARITZADA

ONA TRANSMESA

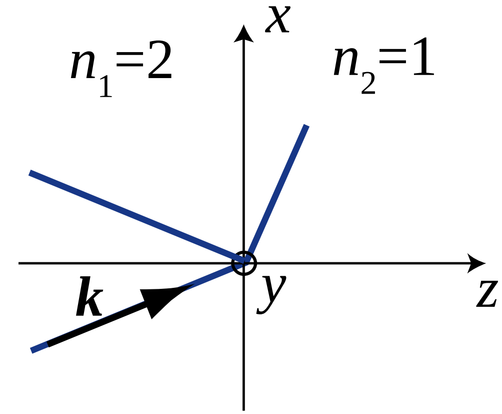
$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}_0' e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$$

$$\vec{k}' = k_0 n_2 \hat{u}'$$

ONA REFLECTIDA

$$\vec{E}''(\vec{r}) = \vec{E}_0'' e^{-i\vec{k}''\vec{r}}$$

$$\vec{k}'' = k_0 n_1 \hat{u}''$$



Treballs tutelats

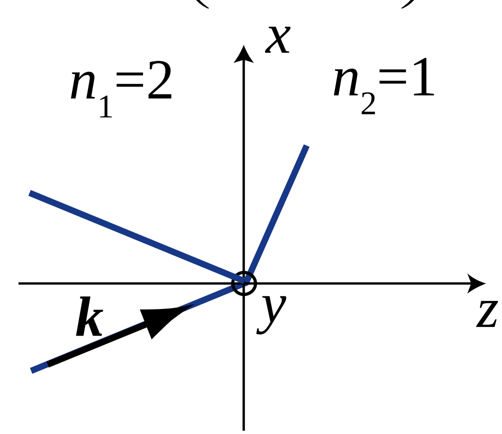
c) Obteniu el camp elèctric de l'ona reflectida i transmesa. A més, identifiqueu el tipus de polarització d'aquestes ones.

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ i5\sqrt{5}/2 \\ -2 \end{pmatrix} E_0$$

$$\vec{E}'_0 = 4\sqrt{5}E_0\hat{u}'_{\parallel} + i4\sqrt{5}E_0\hat{u}_{\perp} = \begin{pmatrix} 4 \\ i4\sqrt{5} \\ -8 \end{pmatrix} E_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}'_{\parallel} = \hat{u}_{\perp} \times \hat{u}' \\ \hat{u}_{\perp} = \hat{y} \end{array}\right\} \quad \hat{u}'_{\parallel} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}''_0 = i3\sqrt{5}/2\,E_0\hat{u}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ i3\sqrt{5}/2 \\ 0 \end{pmatrix} E_0$$



ONA TRANSMESA

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}'_0 e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$$

$$\vec{k}' = k_0 n_2 \hat{u}'$$

ONA REFLECTIDA

$$\vec{E}''(\vec{r}) = \vec{E}''_0 e^{-i\vec{k}''\vec{r}}$$

$$\vec{k}'' = k_0 n_1 \hat{u}''$$

Treballs tutelats

c) Obteniu el camp elèctric de l'ona reflectida i transmesa. A més, identifiqueu el tipus de polarització d'aquestes ones.

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ i5\sqrt{5}/2 \\ -2 \end{pmatrix} E_0 \qquad \vec{E}_0' = \begin{pmatrix} 4 \\ i4\sqrt{5} \\ -8 \end{pmatrix} E_0 \qquad \vec{E}_0'' = \begin{pmatrix} 0 \\ i3\sqrt{5}/2 \\ 0 \end{pmatrix} E_0$$

Comproveu que es compleixen les condicions de contorn:

$$E_{0x} + E_{0x}'' = E_{0x}'$$
$$E_{0y} + E_{0y}'' = E_{0y}'$$
$$D_{0z} + D_{0z}'' = D_{0z}' \Leftrightarrow \varepsilon_1 E_{0z} + \varepsilon_1 E_{0z}'' = \varepsilon_2 E_{0z}'$$

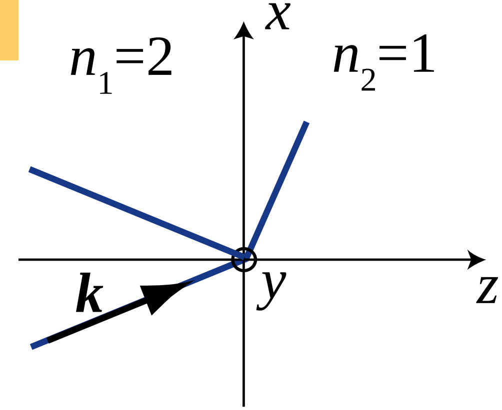
$$\varepsilon_1 = n_1^2 = 4$$
$$\varepsilon_2 = n_2^2 = 1$$

ONA TRANSMESA

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}_0' e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$$
$$\vec{k}' = k_0 n_2 \hat{u}'$$

ONA REFLECTIDA

$$\vec{E}''(\vec{r}) = \vec{E}_0'' e^{-i\vec{k}''\vec{r}}$$
$$\vec{k}'' = k_0 n_1 \hat{u}''$$



Treballs tutelats

TT4.2. Comproveu que l'angle límit és sempre major que l'angle de Brewster.

$$\sin\varepsilon_l = \frac{n'}{n} \qquad \tan\varepsilon_B = \frac{n'}{n}$$

$$\varepsilon_l > \varepsilon_B \Leftrightarrow \tan^2\varepsilon_l = \frac{\sin^2\varepsilon_l}{1-\sin^2\varepsilon_l} > \tan^2\varepsilon_B \Leftrightarrow \frac{n'^2}{n^2-n'^2} > \frac{n'^2}{n^2}$$

$$n > n'$$

$$n^2 > n^2 - n'^2$$

Trobeu aquests angles per a n = 1.33 i n = 1.75, sent n'=1.

$$\varepsilon_l = \arcsin(1/n) \qquad n = 1.33 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_l = 48.75^\circ \\ \varepsilon_B = 36.94^\circ \end{cases} \qquad n = 1.75 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_l = 34.85^\circ \\ \varepsilon_B = 29.74^\circ \end{cases}$$

$$\varepsilon_B = \arctan(1/n)$$

Treballs tutelats

TT4.3. Un raig de llum incideix sobre una superfície de separació aire-vidre de manera que l'angle d'incidència *i* té un valor doble que l'angle de refracció *r*. En aquestes condicions el factor de reflexió $R_\perp$ val 0.411.

a) Determineu l'índex de refracció *n* del vidre respecte de l'aire i els angles *i* i *r*.

$$R_\perp = r_\perp^2 = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} \xrightarrow{i=2r} \frac{\sin^2(r)}{\sin^2(3r)} = 0.411$$

$$i = 73.74^\circ$$
$$r = 36.87^\circ$$

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow n = 1.600$$

Treballs tutelats

b) Si en compte d'estar en contacte amb l'aire, el dit vidre es troba en contacte amb l'aigua (n_a= 1.33) i el raig de llum incideix amb el mateix angle *i* sobre la superfície de separació d'ambdós medis, determineu el nou angle de refracció r' i els factors de reflexió $R_\perp$ y $R_\parallel$ en els dos casos següents:

El raig incideix des de l'aigua amb l'angle d'incidència *i*.

$$n_a \sin i = n \sin r$$

$$r = 52.94^{\circ}$$

$$R_\perp = |r_\perp|^2 = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} = 0.1961$$

$$R_\parallel = |r_\parallel|^2 = \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)} = 0.08012$$

El raig incideix des del vidre també amb l'angle d'incidència *i*.

REFLEXIÓ TOTAL

$$n \sin i = n_a \sin r \Rightarrow r = \pi/2 + i0.5497$$

$$R_\perp = 1$$

$$R_\parallel = 1$$

Treballs tutelats

c) Demostreu que per a la superfície de separació aigua-vidre no pot obtenir-se cap angle d'incidència que valga el doble que l'angle de refracció.

$$n_a \sin i = n \sin r \xrightarrow{i=2r} n_a \sin 2r = n \sin r$$

$$\sin 2r = 2 \sin r \cos r$$

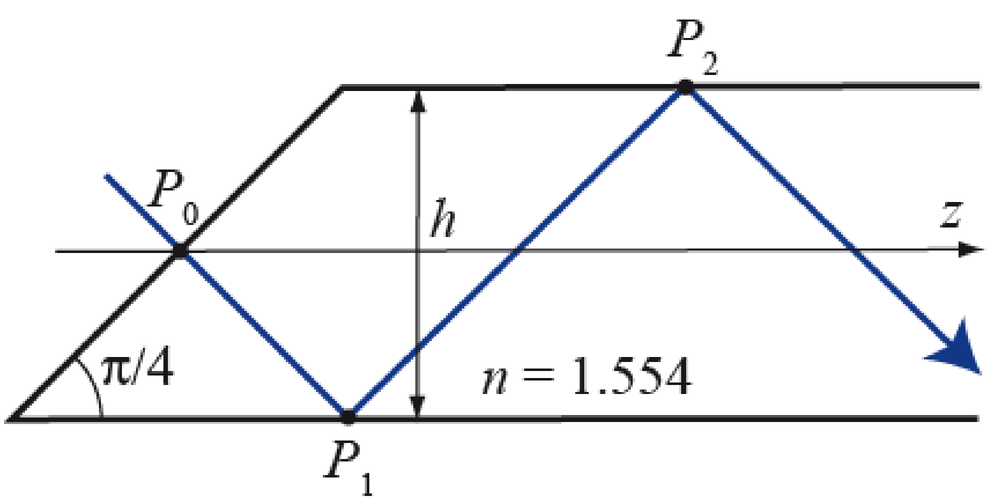
$$2n_a \cos r = n \Rightarrow \begin{cases} r = 53.02^{\circ} \\ \boxed{i = 106.04^{\circ} > 90^{\circ}} \end{cases}$$

SOLUCIÓ NO REALISTA

Treballs tutelats

TT4.4. Es disposa d’una làmina planoparal·lela de grossària h i índex n=1.554, submergida en aire, amb una de les seues cares tallada a 45º. Un raig de llum circularment polaritzat levogir incideix normalment sobre aquesta cara d’entrada i es propaga en el seu interior, tal com mostra la figura.

$$\left|\psi_{in}\right\rangle \equiv \sqrt{I_0}L = \sqrt{\frac{I_0}{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$



$$P_0 = (h/2, 0)$$

$$P_1 = (h, -h/2)$$

$$P_2 = (2h, h/2)$$

$$P_{m\geq 1} = \left(mh, (-1)^m h/2\right)$$

Treballs tutelats

Determineu l'estat de polarització del raig en l'interior de la làmina en funció de la coordenada z.

- Trajecte $P_0 \to P_1$ ($h/2<z<h$)

$$t_{12}^{(TM)}(0^{o}) = t_{12}^{(TE)}(0^{o}) = \frac{2}{1+n} = 0.7831 \equiv t_{12}$$

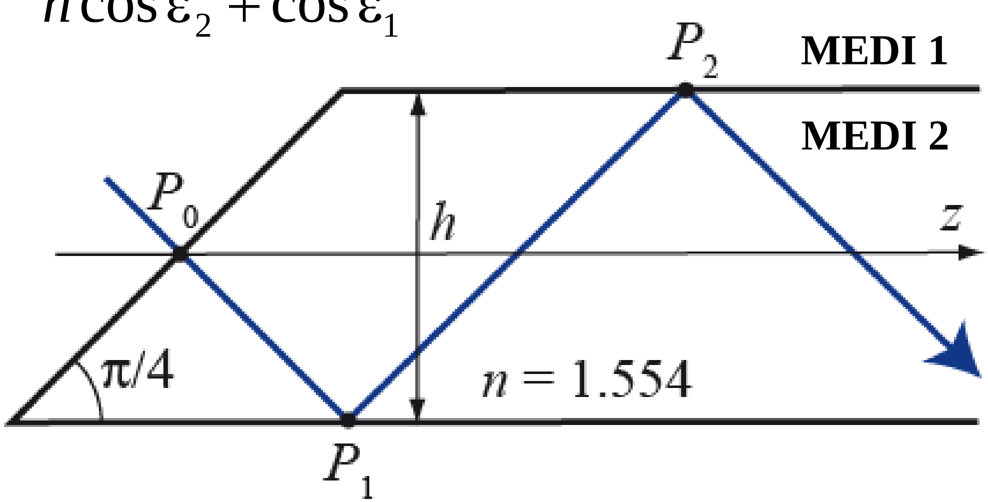
CIRCULAR LEVOGIRA

$$|\psi_{out}\rangle \equiv \begin{pmatrix} t_{12}^{(TM)}\psi_{\parallel} \\ t_{12}^{(TE)}\psi_{\perp} \end{pmatrix} \equiv t_{12}|\psi_{in}\rangle \propto \boxed{L}$$

- Trajecte $P_1 \to P_2$ ($h<z<2h$)

$$r_{21}^{(TE)} = \frac{n\cos\varepsilon_2 - \cos\varepsilon_1}{n\cos\varepsilon_2 + \cos\varepsilon_1} \approx \exp(i\,\pi/4)$$

$$r_{21}^{(TM)} = \frac{\cos\varepsilon_2 - n\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_2 + n\cos\varepsilon_1} \approx \exp(i\,\pi/2)$$



EL·LÍPTICA LEVOGIRA

$$|\psi_{out}\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix} r_{21}^{(TM)}\psi_{\parallel} \\ r_{21}^{(TE)}\psi_{\perp} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{out}\rangle \propto \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(-i\,\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}}$$

Treballs tutelats

Determineu l'estat de polarització del raig en l'interior de la làmina en funció de la coordenada z.

- Trajecte $P_2 \rightarrow P_3$ ($2h<z<3h$)

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix}\left[r_{21}^{(TM)}\right]^2 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^2 \psi_{\perp}\end{pmatrix} \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ \exp(-i\pi)\end{pmatrix} \equiv \boxed{P_{135^\circ}}$$

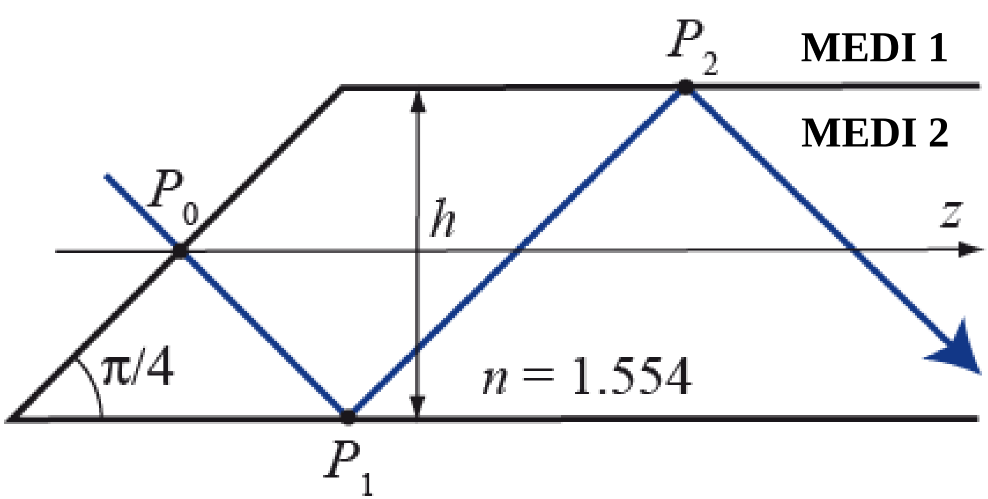
POLARITZACIÓ LINEAL

- Trajecte $P_3 \rightarrow P_4$ ($3h<z<4h$)

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix}\left[r_{21}^{(TM)}\right]^3 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^3 \psi_{\perp}\end{pmatrix}$$

EL·LÍPTICA DEXTROGIRA

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \propto \boxed{\begin{pmatrix}1 \\ \exp\left(-i\,\frac{5\pi}{4}\right)\end{pmatrix}}$$



Treballs tutelats

Determineu l'estat de polarització del raig en l'interior de la làmina en funció de la coordenada z.

- Trajecte $P_4 \rightarrow P_5$ $(4h<z<5h)$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix}\left[r_{21}^{(TM)}\right]^4 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^4 \psi_{\perp}\end{pmatrix} \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ \exp(-i\,3\pi/2)\end{pmatrix} \equiv R$$

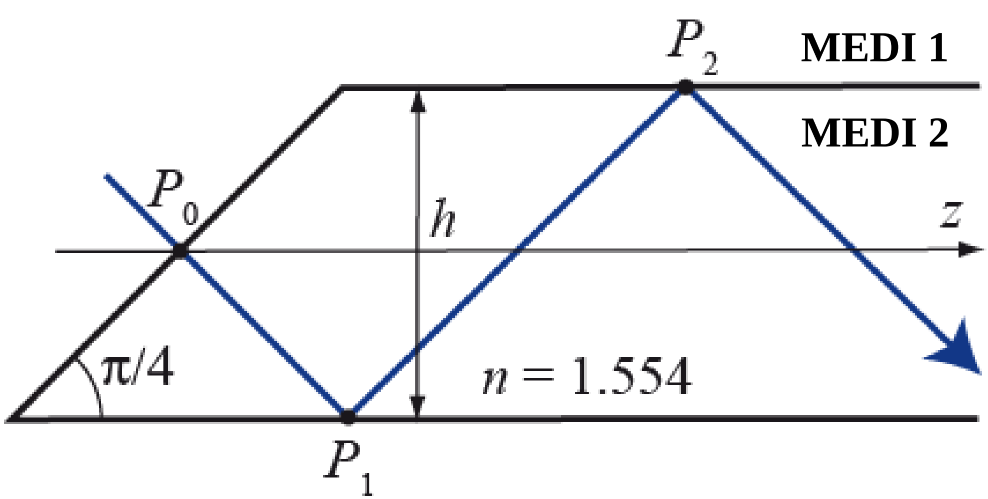
CIRCULAR DEXTROGIRA

- Trajecte $P_5 \rightarrow P_6$ $(5h<z<6h)$

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix}\left[r_{21}^{(TM)}\right]^5 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^5 \psi_{\perp}\end{pmatrix}$$

EL·LÍPTICA DEXTROGIRA

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \propto \begin{pmatrix}1 \\ \exp\left(-i\,\dfrac{7\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$



Treballs tutelats

Determineu l'estat de polarització del raig en l'interior de la làmina en funció de la coordenada z.

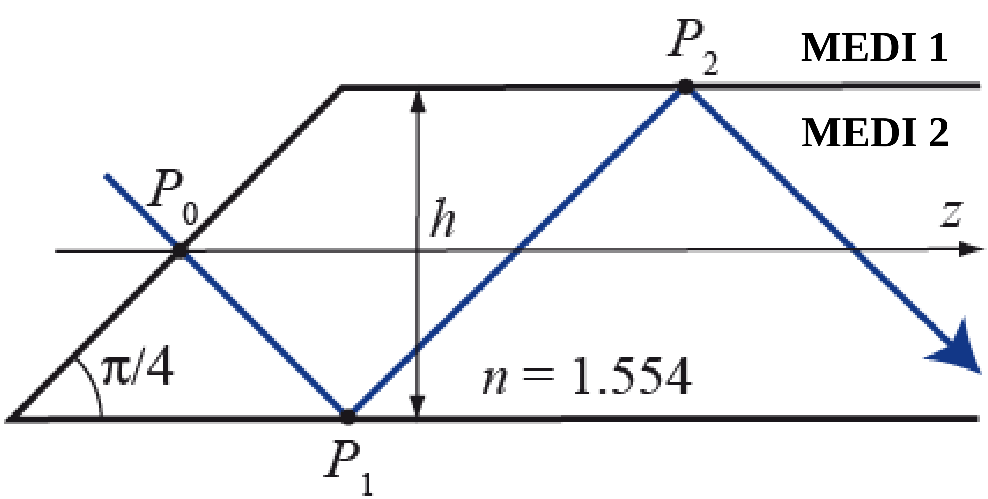
- Trajecte $P_6 \rightarrow P_7$ ($6h<z<7h$)

POLARITZACIÓ LINEAL

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix}\left[r_{21}^{(TM)}\right]^6 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^6 \psi_{\perp}\end{pmatrix} \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} \equiv \boxed{P_{45^o}}$$

- Trajecte $P_7 \rightarrow P_8$ ($7h<z<8h$)

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix}\left[r_{21}^{(TM)}\right]^7 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^7 \psi_{\perp}\end{pmatrix}$$



EL·LÍPTICA LEVOGIRA

$$\left|\psi_{out}\right\rangle \propto \boxed{\begin{pmatrix}1 \\ \exp\left(-i\,\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}}$$

Treballs tutelats

Determineu l'estat de polarització del raig en l'interior de la làmina en funció de la coordenada z.

- Trajecte $P_8 \rightarrow P_9$ ($8h<z<9h$)

CIRCULAR LEVOGIRA

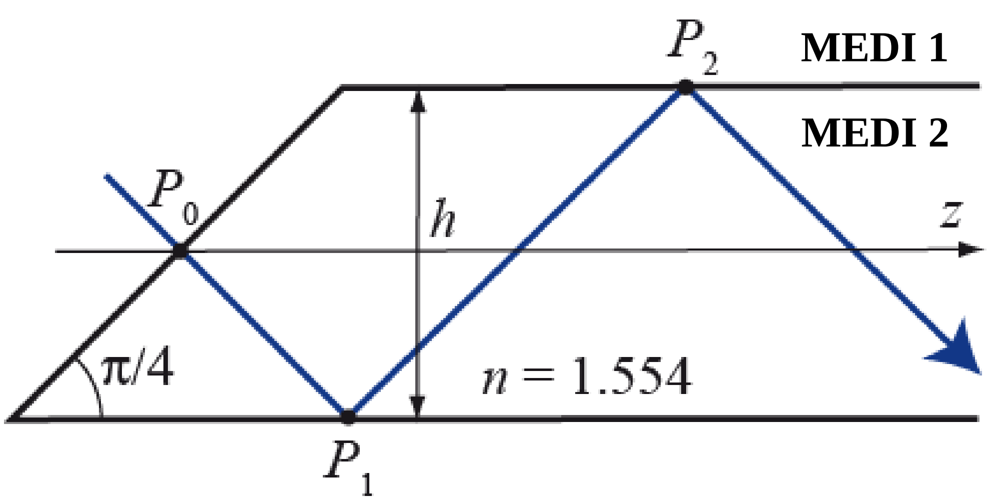
$$|\psi_{out}\rangle \equiv t_{12}\begin{pmatrix} \left[r_{21}^{(TM)}\right]^8 \psi_{\parallel} \\ \left[r_{21}^{(TE)}\right]^8 \psi_{\perp} \end{pmatrix} \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \equiv \boxed{L}$$

- Trajecte $P_9 \rightarrow P_{10}$ ($9h<z<10h$)

Conclusió: El sistema és periòdic cada 8 reflexions, amb $p=8h$

EL·LÍPTICA LEVOGIRA

$$|\psi_{out}\rangle \propto \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(-i\,\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}}$$

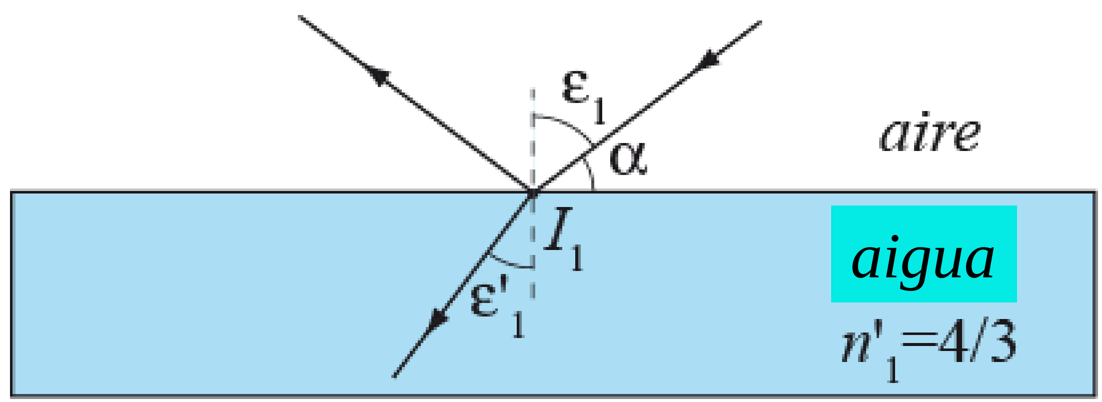


Treballs tutelats

TT4.5. Quina ha de ser l'altura angular del sol sobre l'horitzó perquè la llum reflectida per una superfície d'aigua (n'=4/3) estiga totalment polaritzada?

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{1B} = \arctan(n'_1/n_1) = 53.13^\circ \Rightarrow \alpha = 36.87^\circ$$

$$n_1 \sin\varepsilon_1 = n'_1 \sin\varepsilon'_1 \Rightarrow \varepsilon'_1 = 36.87^\circ$$

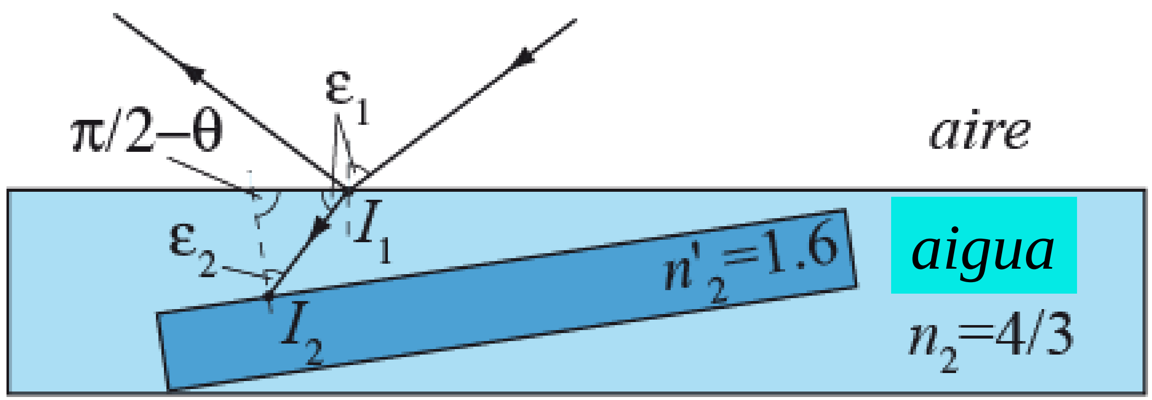


Treballs tutelats

Quan el sol aconsegueix aquesta altura, se submergeix un bloc de vidre, d'índex n=1.6, la superfície plana del qual forma un angle θ amb l'horitzontal. Determineu θ perquè el feix reflectit pel bloc estiga també totalment polaritzat.

$$\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{2B} = \arctan\left(n'_2/n_2\right) = 50.19^\text{o}$$

$$\varepsilon_{1B} + \varepsilon_{2B} + \left(\pi/2 - \theta\right) = \pi \Rightarrow \theta = \varepsilon_{1B} + \varepsilon_{2B} - \pi/2 = 13.32^\text{o}$$



Treballs tutelats

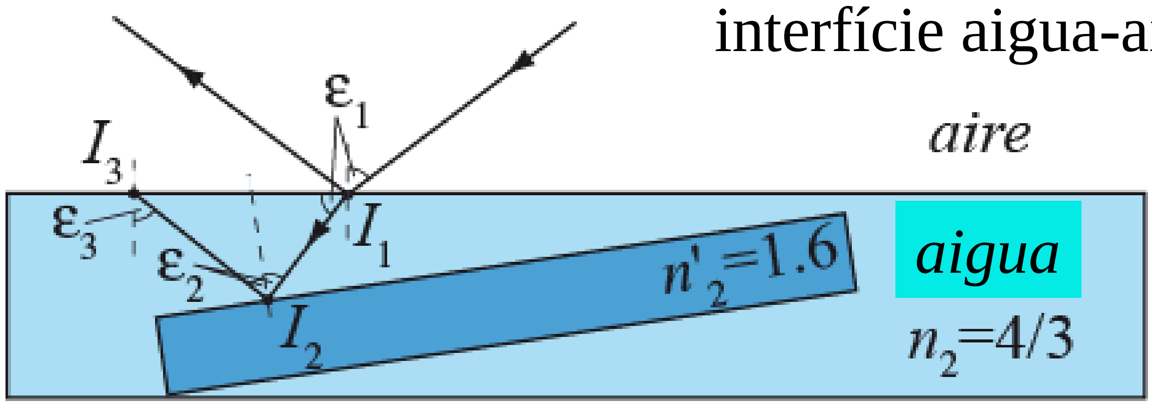
Pot emergir de l'aigua aquest feix?

$$\varepsilon_{1B} + 2\varepsilon_{2B} + \left(\pi/2 - \varepsilon_3\right) = \pi$$

$$\varepsilon_{1B} = 53.13^{o} \qquad \varepsilon_{2B} = 50.19^{o}$$

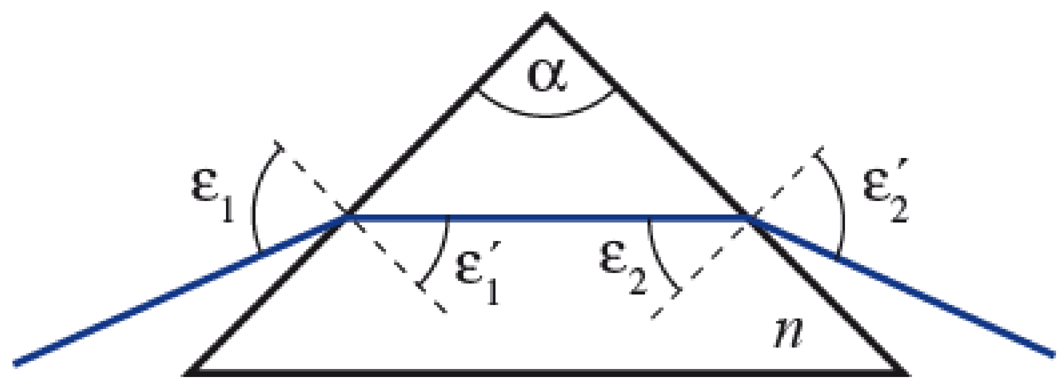
$$\varepsilon_{1B} + 2\varepsilon_{2B} - \pi/2 = \varepsilon_3 = 63.51^{o} > 48.59^{o} = \varepsilon_l = \arcsin\left(n_{aire}/n_{agua}\right)$$

Conclusió: El feix pateix reflexió total interna en el punt I_3 sobre la interfície aigua-aire.



Treballs tutelats

TT4.6. Siga un prisma òptic d'índex de refracció n i angle de refringència α que es troba immers en aire. A més, un feix de llum natural incideix sobre la primera cara del prisma amb un angle ε_1, el qual coincideix amb l'angle de Brewster, tal com indica la figura adjunta.



Refracció #1

$$\boxed{\sin\varepsilon_1 = n\sin\varepsilon_1'}$$

Refracció #2

$$\boxed{n\sin\varepsilon_2 = \sin\varepsilon_2'}$$

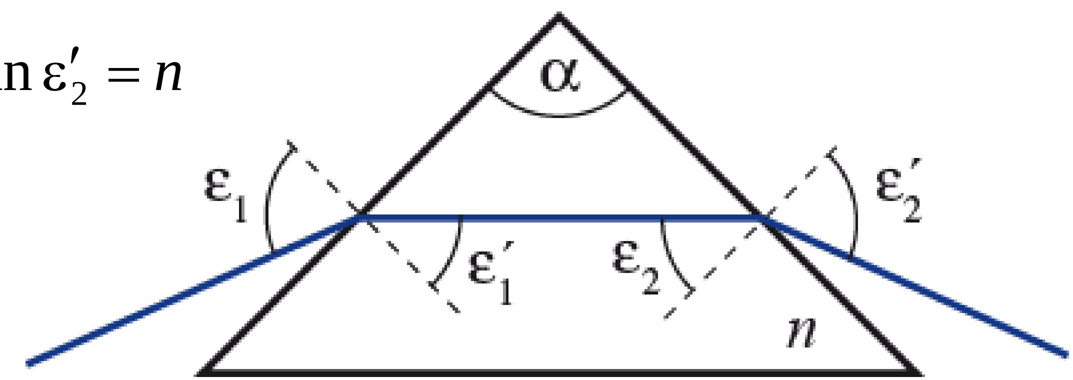
$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1'\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right) = \pi \Rightarrow \boxed{\alpha = \varepsilon_1' + \varepsilon_2}$$

$$\tan\varepsilon_1 = n \quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 + \varepsilon_1' = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos\varepsilon_1 = \sin\varepsilon_1' \end{array}\right\} \quad \tan\varepsilon_1' = 1/n$$

Treballs tutelats

a) Deduïu la condició que han de complir n i α perquè el raig que es refracta en la primera cara i es propaga dins del prisma, incidisca sobre la segona cara també amb un angle de Brewster.

$$\tan\varepsilon_2 = \frac{1}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 + \varepsilon_2' = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos\varepsilon_2 = \sin\varepsilon_2' \end{array} \right\} \quad \tan\varepsilon_2' = n$$



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2' = \arctan(n)$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1' = \arctan(1/n)$$

$$\alpha = \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \Rightarrow \alpha = 2\arctan(1/n)$$

$$\tan\varepsilon_1 = n \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + \varepsilon_1' = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos\varepsilon_1 = \sin\varepsilon_1' \end{array} \right\} \quad \tan\varepsilon_1' = 1/n$$

$$\boxed{n\tan(\alpha/2) = 1}$$

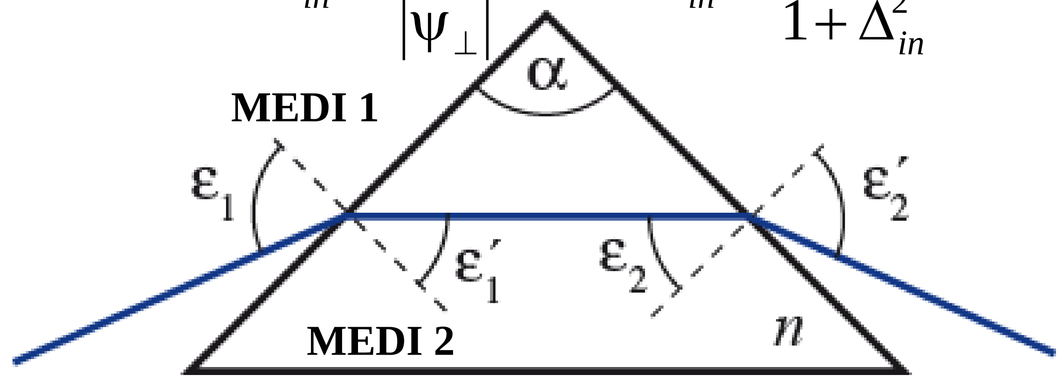
Treballs tutelats

b) Per a un prisma que compleix la hipòtesi anterior, calculeu el grau de polarització de la llum emergent.

$$|\psi_{in}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\parallel} \\ \psi_{\perp} \end{pmatrix} \qquad \langle \psi_{in} | \psi_{in} \rangle = I_0 \Leftrightarrow |\psi_{\parallel}| = |\psi_{\perp}| = \sqrt{I_0/2}$$

$$\Delta_{in} = \frac{|\psi_{\parallel}|}{|\psi_{\perp}|} = 1 \Rightarrow V_{in} = \frac{1-\Delta_{in}^2}{1+\Delta_{in}^2} = 0$$

$$|\psi_{out}\rangle \equiv \begin{pmatrix} t_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_{\parallel} \\ t_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_{\perp} \end{pmatrix}$$



$$t_{12}^{(TM)} = \frac{2\sin\varepsilon_1' \cos\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1+\varepsilon_1')\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_1')} \qquad t_{12}^{(TE)} = \frac{2\sin\varepsilon_1' \cos\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1+\varepsilon_1')}$$

$$t_{21}^{(TM)} = \frac{2\sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1'}{\sin(\varepsilon_1'+\varepsilon_1)\cos(\varepsilon_1'-\varepsilon_1)} \qquad t_{21}^{(TE)} = \frac{2\sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1'}{\sin(\varepsilon_1'+\varepsilon_1)}$$

$$\tan\varepsilon_1 = n \; \begin{cases} \sin^2\varepsilon_1 = \dfrac{n^2}{n^2+1} \\ \cos^2\varepsilon_1 = \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$$

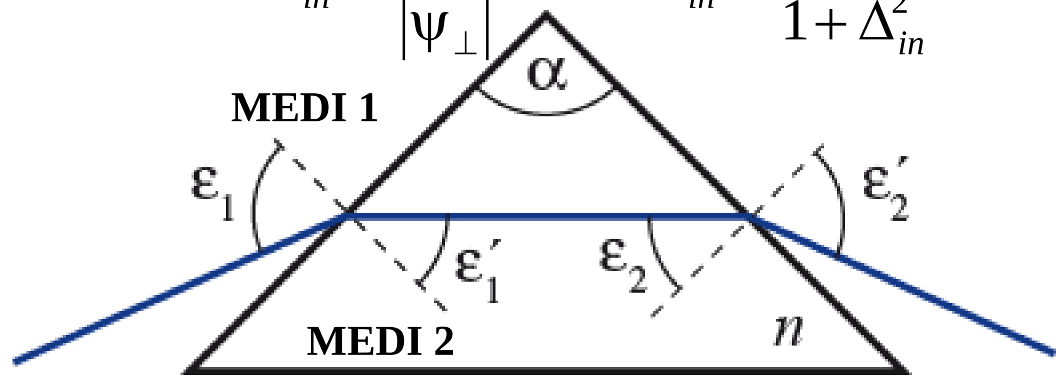
Treballs tutelats

b) Per a un prisma que compleix la hipòtesi anterior, calculeu el grau de polarització de la llum emergent.

$$|\psi_{in}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\parallel} \\ \psi_{\perp} \end{pmatrix} \qquad \langle \psi_{in} | \psi_{in} \rangle = I_0 \Leftrightarrow |\psi_{\parallel}| = |\psi_{\perp}| = \sqrt{I_0/2}$$

$$\Delta_{in} = \frac{|\psi_{\parallel}|}{|\psi_{\perp}|} = 1 \Rightarrow V_{in} = \frac{1-\Delta_{in}^2}{1+\Delta_{in}^2} = 0$$

$$|\psi_{out}\rangle \equiv \begin{pmatrix} t_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_{\parallel} \\ t_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_{\perp} \end{pmatrix}$$



$$\Delta_{out} = \frac{\left|t_{21}^{(TM)} t_{12}^{(TM)} \psi_{\parallel}\right|}{\left|t_{21}^{(TE)} t_{12}^{(TE)} \psi_{\perp}\right|} = \frac{1}{\cos^2(\varepsilon_1' - \varepsilon_1)} \equiv \frac{(n^2+1)^2}{4n^2}$$

$$\boxed{V_{out} = \frac{1-\Delta_{out}^2}{1+\Delta_{out}^2} = \frac{16n^4 - (n^2+1)^4}{16n^4 + (n^2+1)^4}}$$

$$\cos(\varepsilon_1' - \varepsilon_1) = \cos\varepsilon_1' \cos\varepsilon_1 + \sin\varepsilon_1' \sin\varepsilon_1 = 2\sin(\varepsilon_1)\cos(\varepsilon_1) = \frac{2n}{n^2+1}$$

Treballs tutelats

c) Com a aplicació numèrica, particularitzeu els resultats anteriors per a un prisma d'índex de refracció $n=\sqrt{3}$.

$$V_{out}=\frac{1-\Delta_{out}^2}{1+\Delta_{out}^2}=\frac{16n^4-\left(n^2+1\right)^4}{16n^4+\left(n^2+1\right)^4}$$

$$\Big\Downarrow \quad n=\sqrt{3}$$

$$V_{out}=\frac{16\cdot 9-4^4}{16\cdot 9+4^4}=\frac{9-4^2}{9+4^2}=-\frac{7}{25}$$