DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA

LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO.

DAVID ARNAU VERA

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Servei de Publicacions
2010

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 23 de juny de 2010 davant un tribunal format per:

- Dr. Luis Rico Romero
- Dr. Francisco Fernandez Garcia
- Dr. Eugenio Filloy Yagüe
- Dra. Mercedes Palarea Medina
- Dr. Alejandro Fernandez Lajusticia

Va ser dirigida per:
Dr. Luis Puig Espinosa

Dipòsit legal: V-2056-2011
I.S.B.N.: 978-84-370-7916-5
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Arts Gràfiques, 13 baix
46010 València
Spain
Telèfon:(0034)963864115

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Departament de Didàctica de la Matemàtica

La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:
David Arnau Vera

DIRIGIDA POR:
Luis Puig Espinosa

València 2010

A mi madre y a mi padre, de quien siempre pensé que no sabía matemáticas porque quería que resolviera problemas de álgebra por falsa posición.

A Reme, David, Jaume y Miquel.

Índice

Capítulo 1
DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA 1

1.1. Justificación y propósito de la investigación 1
1.1.1. Justificación de la investigación 1
1.1.2. Objetivos de la investigación 2
1.1.3. Justificación de la elección de la población y del momento de la observación 3
1.2. Metodología 3
1.3. Desarrollo de la investigación 4
1.4. Descripción de los capítulos 5

Capítulo 2
REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA 9

2.1. La transición de la aritmética al álgebra 9
2.2. La resolución de problemas en la enseñanza del álgebra 12
2.3. El uso de ordenadores en la enseñanza del álgebra 16
2.4. El uso de la hoja de cálculo en la enseñanza del álgebra 19

Capítulo 3
EL MODELO DE COMPETENCIA 27

3.1. El método cartesiano 27
3.2. El método de inferencias analíticas sucesivas 33
3.3. La resolución de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo 34
3.3.1. Características de la hoja de cálculo 35
3.3.2. El lenguaje de la hoja de cálculo 37

3.3.2.1. La gramática del lenguaje de la hoja de cálculo ... 38
3.3.2.2. La semántica de las expresiones simbólicas en el lenguaje de la hoja de cálculo ... 42
3.3.3. El método de la hoja de cálculo ... 44

Capítulo 4
EL MODELO DE ENSEÑANZA Y SU APLICACIÓN ... 51

4.1. La población y materiales ... 53
4.2. La secuencia de enseñanza ... 54
4.2.1. La enseñanza de rudimentos de la hoja de cálculo ... 55
4.2.1.1. Ficha "La hoja de cálculo" (Sesión segunda de rudimentos) ... 56
Descripción de las actividades ... 56
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 57
4.2.1.2. Ficha "Copia y pegado de fórmulas" (Sesión segunda de rudimentos) ... 57
Descripción de las actividades ... 57
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 59
4.2.1.3. Ficha "Generación de secuencias numéricas 1" (Sesión tercera de rudimentos) ... 60
Descripción de las actividades ... 60
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 60
4.2.1.4. Ficha "Generación de secuencias numéricas 2" (Sesión tercera de rudimentos) ... 61
Descripción de las actividades ... 61
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 61
4.2.1.5. Ficha "Fórmulas 1" (Sesión cuarta de rudimentos) ... 62
Descripción de las actividades ... 62
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 62
4.2.1.6. Ficha "Fórmulas 2" (Sesión cuarta de rudimentos) ... 62
Descripción de las actividades ... 62
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 63
4.2.1.7. Ficha "Fórmulas 3" (Sesión quinta de rudimentos) ... 63
Descripción de las actividades ... 63
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes ... 63
4.2.1.8. Ficha "Fórmulas 4" (Sesión quinta de rudimentos) ... 64

Descripción de las actividades 64
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes 64
4.2.1.9. Ficha “Problema 1” (Sesión sexta de rudimentos) 65
Descripción de las actividades 65
Comentarios a las actuaciones de los estudiantes 66
4.2.1.10. Ficha “Colección de problemas 1” (Sesiones sexta y séptima de rudimentos) 66
4.2.1.10.1. Problema “La final de baloncesto” 66
4.2.1.10.2. Problema “La frutería” 67
4.2.1.10.3. Problema “El mosto” 68
4.2.1.10.4. Problema “La paga mensual” 69
4.2.1.10.5. Problema “Los cromos” 69
4.2.1.10.6. Problema “El jersey” 70
4.2.1.10.7. Problema “Los hortelanos” 70
4.2.1.10.8. Problema “El envío” 71
4.2.2. La enseñanza del MHC 72
4.2.2.1. La presentación del MHC (Sesión primera del MHC) 72
4.2.2.1.1. Problema “Jaime y David” 73
4.2.2.1.2. La exposición de la resolución del problema “Jaime y David” 73
4.2.2.2. Problemas 1 (Sesión segunda del MHC) 75
4.2.2.2.1. El problema “Encuentra el número” 76
4.2.2.2.2. El problema de los deportistas 77
4.2.2.3. Ficha “Colección de problemas 2” (Sesiones tercera, cuarta, quinta y sexta del MHC) 78
4.2.2.3.1. Problema “Los yogures” 78
4.2.2.3.2. Problema “Paz, Petra y su madre” 79
4.2.2.3.3. Problema “Números 1” 79
4.2.2.3.4. Problema “Otro reparto” 80
4.2.2.3.5. Problema “Números 2” 81
4.2.2.3.6. Problema “Las zapatillas deportivas” 82
4.2.2.3.7. Problema “El concierto” 82
4.2.2.3.8. Problema “Amaya y Andrea” 83
4.2.2.3.9. Problema “Juanjo, Raúl y Laura” 84
4.2.2.3.10. Problema “Juan, su padre y su hijo” 85

Capítulo 5

ESTUDIO DE GRUPO ... 87
5.1. La finalidad del estudio ... 87
5.2. Descripción de los cuestionarios ... 89
5.2.1. El cuestionario 1 ... 89
5.2.2. El cuestionario 2 ... 90
5.2.3. El cuestionario 3 ... 91
5.2.4. El cuestionario Post ... 92
5.3. Análisis de los problemas ... 93
5.3.1. Análisis de los problemas del cuestionario 1 ... 93
Las naranjas ... 93
El tren ... 96
El ordenador ... 98
La inversión ... 100
Las cortinas ... 101
El salario ... 103
El perfume ... 105
5.3.2. Análisis de los problemas del cuestionario 2 ... 106
La edad de Consuelo ... 106
Números ... 107
La familia de Andrea ... 108
Marta y María ... 109
La visita al teatro ... 110
Bolígrafos y lapiceros ... 112
La lotería ... 115
El precio del pan ... 116
5.3.3. Análisis de los problemas del cuestionario Post ... 117
La edad de Pablo ... 117
Más números ... 118
La familia de Marcos ... 119
Amelia y Enrique ... 121
Bolígrafos ... 122
Pantalones y camisas ... 124
La quiniela ... 127
La paga ... 128

5.4. Las técnicas para el análisis de las producciones 129
5.4.1. Procedimiento para los cuestionarios de problemas verbales 130
5.4.1.1. El método para la reducción de las producciones escritas a variables 131
5.4.1.1.1. La lectura inferida 132
5.4.1.1.2. La lectura mínima asociada a la actuación en un problema 135
5.4.1.1.3. Descripción de las variables y codificación 137
5.4.1.1.3.1. La variable que establece la existencia de producción.......... 138
5.4.1.1.3.2. Las variables que determinan el tipo de lectura.................. 138
5.4.1.1.3.3. Las variables que dan cuenta del sistema matemático de signos.. 138
5.4.1.1.3.4. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 1 del MC 138
5.4.1.1.3.5. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 2 del MC 141
5.4.1.1.3.6. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 3 del MC 141
5.4.1.1.3.7. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 4 del MC 142
5.4.1.1.3.8. Las variables que dan cuenta de la construcción de nombres para las cantidades.. 142
5.4.1.1.3.9. Las variables que dan cuenta de los usos incorrectos de magnitudes y unidades 143
5.4.2. Procedimiento para el cuestionario sobre el uso de la hoja de cálculo 143
5.4.2.1. La reducción de las producciones a variables 143
5.5. Análisis de las producciones de los cuestionarios previos 145
5.5.1. El cuestionario 1 146
Alumno 1 146
Alumna 2 147
Alumno 3 149
Alumna 4 150
Alumno 5 151
Alumna 6 153
Alumno 7 155

Alumno 8 156
Alumno 9 157
Alumna 10 159
Alumna 11 160
Alumno 12 161
Alumna 13 162
Alumna 14 163
Alumno 15 165
Alumna 16 166
Alumna 17 168
Alumno 18 169
Alumna 19 171
Alumno 20 173
Alumna 21 174
Alumna 22 175
Alumno 23 176
5.5.2. El cuestionario 2 178
Alumno 1 178
Alumna 2 179
Alumno 3 181
Alumna 4 184
Alumno 5 185
Alumna 6 187
Alumno 7 188
Alumno 8 189
Alumno 9 191
Alumna 10 193
Alumna 11 194
Alumno 12 195
Alumna 13 196
Alumna 14 198
Alumno 15 199
Alumna 16 201
Alumna 17 203
Alumno 18 204

Alumna 19 205
Alumno 20 207
Alumna 21 209
Alumna 22 211
Alumno 23 213
5.5.3. El cuestionario 3 214
5.6. La clasificación de la población 216
5.7. Análisis de las producciones del cuestionario Post 218
Alumno 1 218
Alumna 2 219
Alumno 3 221
Alumna 4 223
Alumno 5 225
Alumna 6 227
Alumno 7 228
Alumno 8 228
Alumno 9 230
Alumna 10 232
Alumna 11 233
Alumno 12 234
Alumna 13 236
Alumna 14 237
Alumno 15 239
Alumna 16 240
Alumna 17 241
Alumno 18 243
Alumna 19 244
Alumno 20 246
Alumna 21 248
Alumna 22 250
Alumno 23 251
5.8. La comparación de los cuestionarios 2 y post 253
5.8.1. La comparación sin exigir restricciones 255
5.8.1.1. La comparación de todos los problemas 255
5.8.1.2. La comparación de los problemas de edades 258

5.8.1.3. La comparación del resto de problemas... 261
5.8.2. La comparación exigiendo lectura algebraica.. 263
5.8.2.1. La comparación de todos los problemas.. 264
5.8.2.2. Los comparación de los problemas de edades 266
5.8.2.3. La comparación del resto de problemas... 269
5.8.3. La comparación exigiendo el uso del SMS del álgebra............................ 270
5.8.3.1. La comparación de todos los problemas.. 271
5.8.3.2. La comparación de los problemas de edades 273
5.8.3.3. La comparación del resto de problemas... 275
5.8.4. La comparación entre clases de individuos 277
5.8.4.1. Atendiendo a la tendencia en la lectura 277
5.8.4.2. Atendiendo a la competencia del resolutor 282
5.8.4.3. Atendiendo a la competencia en el entorno de la hoja de cálculo.. 287

Capítulo 6
ESTUDIO DE CASOS 293

6.1. El propósito del estudio 293
6.2. La técnica de obtención de datos 293
6.2.1. La obtención de los protocolos audiovisuales.. 294
6.2.2. La obtención de los protocolos escritos.. 295
6.3. La selección de los participantes.. 297
6.4. La selección de los problemas 298
6.4.1. El problema “Adrián”.. 299
6.4.2. El problema “Las ovejas” 300
6.4.3. El problema “Las actividades deportivas”... 301
6.4.4. El problema “Los tres amigos” 302
6.4.5. El problema “Lana y algodón”... 303
6.4.6. El problema “Paz, Petra y su madre” 304
6.5. El análisis de los casos 305
6.5.1. La pareja Candelaria-María 305
6.5.1.1. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema “Adrián”.. 306
6.5.1.2. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema “Las ovejas” 319

6.5.1.3. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema
"Las actividades deportivas" 321
6.5.1.4. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema
"Los tres amigos".. 327
6.5.1.5. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema
"Lana y algodón" 335
6.5.2. La pareja Alberto-Lluís... 343
6.5.2.1. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema
"Adrián".. 344
6.5.2.2. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema
"Las ovejas"... 346
6.5.2.3. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema
"Las actividades deportivas" 350
6.5.2.4. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema
"Los tres amigos".. 354
6.5.2.5. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema
"Lana y algodón" 357
6.5.2.6. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema
"Paz, Petra y su madre".. 365
6.5.3. La pareja Macarena-Ester 367
6.5.3.1. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema
"Adrián".. 368
6.5.3.2. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema
"Las ovejas"... 375
6.5.3.3. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema
"Las actividades deportivas" 381
6.5.3.4. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema
"Los tres amigos".. 391
6.5.3.5. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema
"Paz, Petra y su madre".. 396
6.5.4. La pareja Marcos-Jorge 399
6.5.4.1. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema
"Adrián".. 399
6.5.4.2. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el
problema "Las ovejas" 401

6.5.4.3. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema
"Las actividades deportivas" 405
6.5.4.4. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema
"Los tres amigos" 411
6.5.4.5. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema
"Lana y algodón" 423
6.5.4.6. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema
Paz, Petra y su madre" 431
6.5.5. La pareja Paco-Lorenzo 434
6.5.5.1. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema
"Adrián" 435
6.5.5.2. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema
"Las ovejas" 441
6.5.5.3. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema
"Las actividades deportivas" 445
6.5.5.4. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema
"Los tres amigos" 449
6.5.5.5. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema
"Lana y algodón" 453
6.5.5.6. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema
"Paz, Petra y su madre" 456

Capítulo 7
CONCLUSIONES 463

7.1. Conclusiones desde el estudio de casos 463
7.1.1. La tendencia a evitar el uso del MHC 464
7.1.1.1. El uso de variables en lugar de cantidades 465
7.1.1.2. El recurso a la resolución aritmética 467
7.1.1.3. El recurso al MC 468
7.1.2. Dificultades y errores al usar el MHC 470
7.1.2.1. El primer paso 470
7.1.2.2. Los pasos segundo y tercero 471
7.1.2.2.1. Las dificultades ligadas a la ausencia de la celda de
referencia 471
7.1.2.2.2. Las dificultades para operar con lo desconocido 472

7.1.2.2.3. Las dificultades para invertir las relaciones obtenidas tras la lectura analítica ... 472
7.1.2.2.4. La modificación de las fórmulas sin atender a las relaciones ... 473
7.1.2.3. El paso cuarto ... 473
7.1.2.4. El paso quinto ... 473
7.1.2.4.1. La generación de progresiones aritméticas en lugar de replicar el paso tercero del MHC ... 473
7.1.2.4.2. La omisión del paso quinto del MHC ... 475
7.1.2.4.2.1. El uso del ensayo y error ... 475
7.1.2.4.2.2. La tendencia a seguir calculando. ... 476
7.1.3. La gestión del proceso de resolución ... 476
7.1.3.1. El uso del conocimiento de los pasos del MHC ... 476
7.1.3.2. La atención a las restricciones impuestas por el contexto ... 476
7.2. Conclusiones desde el estudio de grupo ... 477

Capítulo 8
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ... 483

1. Delimitación del problema

1.1. JUSTIFICACIÓN Y PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos ha sido un componente destacado en la mayoría de currículos de matemáticas. Dejando de lado el paréntesis que supuso la llamada reforma de las matemáticas modernas, la resolución de problemas verbales ha recibido distintos encargos como instrumento para la enseñanza de las matemáticas. Así, se ha utilizado como una forma de aplicar el contenido matemático que se había enseñado previamente; como una metodología de enseñanza a través de los problemas; o como una parte de una disciplina cuando el objetivo era el de enseñar la resolución de problemas como contenido. La trascendencia del uso de la resolución de problemas como una forma de aplicar o enseñar ideas algebraicas se ha reflejado en la presencia habitual de capítulos dedicados a la resolución de problemas en las agendas de investigación y en las recopilaciones de estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Bednarz y Janvier, 1996; Chaiklin, 1989; Filloy, Rojano y Rubio, 2001; Rojano, 1996; Schoen, 1988).

Por otra parte, las investigaciones llevadas a cabo con la intención de identificar las dificultades de los estudiantes en los primeros cursos de álgebra proporcionaron un amplio catálogo de observaciones entre las que podemos destacar: a) la tendencia a interpretar el signo igual como una señal para hacer algo y los problemas para identificarlo como un indicador de comparación (Behr, Erlwanger y Nichols, 1976; Kieran, 1981); b) los conflictos a la hora de comprender el uso de letras como incógnita, número generalizado o variable (Booth, 1984; Küchemann, 1981); y c) las dificultades para operar con la incógnita (Bednarz y Janvier, 1996; Filloy y Rojano, 1989; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Herscovics y Linchevski, 1994). Desde el punto de vista de la resolución de problemas verbales, estas dificultades se reflejan en una predisposición a usar métodos no algebraicos para resolver los problemas (Filloy, Rojano y Rubio; 2001), lo que en ocasiones se manifiesta en una tendencia a regresar a la manera aritmética de resolverlos o en la aparición de estrategias espontáneas como el ensayo y error. Con el fin de superar los obstáculos que se presentan en la transición entre la resolución aritmética y algebraica de problemas, se han propuesto métodos que actuaran como mediadores entre ambos. El propósito fundamental sería el de soslayar algunas de las dificultades observadas ligadas a las características del lenguaje del álgebra o a la base lógica sobre la que se asienta la resolución algebraica de problemas. Entre los métodos alternativos propuestos se encuentra el llamado método de la hoja de cálculo

(Filloy, Rojano y Puig, 2008; Filloy, Rojano y Rubio, 2001; Rojano, 1996; Rojano y Sutherland, 1993 y 1997; Sutherland y Rojano, 1993).

Plantear un método algebraico de resolución de problemas en la hoja de cálculo se apoya en que numerosos estudios han puesto de manifiesto que el empleo de este entorno informático puede tener un papel destacado en los primeros momentos de la enseñanza del álgebra (Abramovich y Nabors, 1997; Ainley, 1995; Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Friedlander, 1996 y 1999; Sutherland y Balacheff, 1999; Tabach y Friedlander, 2008; Tabach, Hershkowitz y Arcavi, 2008; Wilson, Ainley y Bills, 2005). En concreto, se señala que el estatus híbrido aritmético-algebraico de la hoja de cálculo puede ayudar a superar las dificultades que produce la introducción del álgebra. Por ejemplo, se apunta que "la pantalla muestra dos niveles: la hoja de cálculo, la cual aparece temporalmente y las tablas de valores numéricos resultantes de los cálculos, los cuales son visibles la mayor parte del tiempo" (Haspekian, 2005a, p. 111). Sin embargo, estos mismos estudios que describían el potencial de la hoja de cálculo, junto a otros (Capponi y Balacheff, 1989; Haspekian, 2005a y 2005b), también señalan algunas limitaciones del entorno que podrían actuar como obstáculo en su uso en la enseñanza del álgebra. Haspekian (2005a) insiste en la necesidad de analizar el instrumento y contestar a preguntas como: ¿Cuáles son las potencialidades de la hoja de cálculo? ¿Qué condiciones deben cumplirse para que puedan ponerse de manifiesto? ¿Pueden generarse complicaciones específicas ligadas al uso de la hoja de cálculo, y si es así, cuáles son? Yerushalmy y Chazan (2002) sostienen que la simbolización en la hoja de cálculo resulta un tema complejo pues los símbolos representan celdas (lugares) y, en principio, estos símbolos no son incógnitas, ni variables. Así, cuando los estudiantes están buscando un valor específico, trabajan con una incógnita; pero, en otras ocasiones, la misma operación en la hoja de cálculo puede llevar a considerar variables y funciones (Kieran y Yerushalmy, 2004).

La importancia de atender tanto a la facilidades como a las limitaciones y a reflexionar sobre el lenguaje de la hoja de cálculo tendrá un papel crucial en nuestra investigación. Esto es consecuencia de que en todo momento consideramos la enseñanza del método algebraico de resolución de problemas en la hoja de cálculo con la finalidad de que sea un intermediario; pues somos conscientes que el objetivo final de la acción educativa en un sistema escolar ha de ser conseguir la competencia en la resolución de problemas verbales mediante el método algebraico por excelencia: el método cartesiano.

Dentro de este panorama, planteamos construir una secuencia de enseñanza basada en el método de resolución de la hoja de cálculo y analizar los efectos de aplicarla a un grupo de estudiantes de secundaria. Nuestro estudio se sitúa dentro del programa de investigación sobre adquisición del lenguaje algebraico que, desde hace años, están llevando a cabo Eugenio Filloy, Teresa Rojano y Luis Puig del que se ofrece una recapitulación en el libro *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach* (Filloy, Rojano y Puig; 2008) y parte, fundamentalmente, de los trabajos de Teresa Rojano y Rosamund Sutherland realizados dentro del proyecto *Spreadsheet Algebra Project* (Rojano, 1996; Rojano y Sutherland, 1993, 1997; Sutherland y Rojano, 1993).

1.1.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En concreto, pretendemos dar respuesta a dos preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas en la hoja de cálculo después de haber sido instruidos en la resolución algebraica de problemas en dicho entorno?

2. ¿Cómo influye la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo en la competencia de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales con lápiz y papel y, en especial, mediante el método cartesiano?

Para poder contestar a estas cuestiones, llevaremos a cabo un estudio de casos y un estudio de grupo. El estudio de casos tendrá una naturaleza exploratoria y su finalidad será la de proporcionar observaciones empíricas de las actuaciones, más o menos generalizadas, de los resolutores cuando resuelven, por parejas, problemas verbales mediante la hoja de cálculo tras la instrucción. Para dar respuesta al segundo objetivo, planteamos un estudio de grupo en el que se comparará la competencia de la población a la hora de resolver problemas verbales con lápiz y papel (usando el método cartesiano o no) antes y después de la enseñanza. La articulación del estudio de grupo seguirá el esquema: primera toma de datos, intervención, segunda toma de datos. El estudio de grupo tendrá una perspectiva cuantitativa, pero la interpretación de los resultados que proporcione se apoyará en un análisis cualitativo de los datos, así como en las actuaciones observadas en el estudio de casos.

La elaboración de la secuencia de enseñanza y las técnicas de análisis de las observaciones empíricas nos obligarán, entre otras cosas, a:

1) Describir las características de la hoja de cálculo prestando especial atención a la sintaxis y la semántica de su lenguaje para poder compararlo con el lenguaje del álgebra.
2) Determinar qué se considera una resolución algebraica competente en la hoja de cálculo y establecer similitudes y diferencias con la resolución mediante el método cartesiano.
3) Diseñar una secuencia de enseñanza sobre la resolución algebraica de problemas verbales en la hoja de cálculo.
4) Establecer un método que nos permita determinar lo próxima que una resolución se halla de la que realizaría un sujeto competente.

1.1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA ELECCIÓN DE LA POBLACIÓN Y DEL MOMENTO DE LA OBSERVACIÓN

Las exigencias del estudio de grupo nos restringieron a la hora de elegir la población que participaría en la investigación, ya que necesitábamos estudiantes que fueran capaces de resolver problemas con lápiz y papel de manera algebraica; pero que aún no fueran competentes. Esta limitación nos llevó a seleccionar un grupo de 24 estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria que acababan de ser instruidos en la resolución de problemas verbales mediante el método cartesiano; ya que era una población y un momento en el que aún podríamos observar un aumento en la competencia al usar el método, pero en el que también podrían surgir tendencias cognitivas negativas tales como una vuelta a la utilización de la aritmética o de otros métodos de resolución no algebraicos.

1.2. METODOLOGÍA

Utilizaremos como armazón sobre el que construir nuestro marco teórico y metodológico lo que Filloy llama Modelos Teóricos Locales (ver Filloy, 1999; Kieran y Filloy, 1989; Filloy, Rojano y Puig, 2008). Un Modelo Teórico Local (en adelante, MTL) es un modelo teórico porque está constituido por un conjunto de afirmaciones que, al tomarlas como referencia, sirven para describir y explicar un fenómeno. Un

MTL es local porque no pretende ser una teoría de carácter universal aplicable a un fenómeno en cualquier escenario, sino que sólo da cuenta de aquéllos que observamos en una situación concreta. Además cualquier MTL tendrá un carácter recursivo, pues se construye para estudiar una situación problemática cuya definición se verá precisada o modificada por los resultados de la investigación con el fin de poder explicar las nuevas evidencias.

El enfoque semiótico desde el que contemplamos las situaciones de enseñanza y aprendizaje conduce a utilizar la noción de sistema matemático de signos (en adelante, SMS) para describir el significado matemático formal y el pragmático dentro de los procesos de comunicación y producción de sentido. Un SMS permite descodificar una expresión que incluye signos matemáticos y no matemáticos para convertirla en un mensaje con un contenido matemático. En Puig (2003), se señala el cambio de perspectiva que supone el uso de los SMS:

> Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. Hay que hablar pues de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales, y que, por tanto, lo que nos interesa para el desarrollo de la matemática educativa es estudiar cuáles son las características de esos sistemas (matemáticos) de signos debidas no sólo a que son sistemas de signos sino a que son precisamente sistemas matemáticos. (Puig, 2003, pp. 181-182)

Un MTL está constituido por cuatro componentes. La división responde al hecho de que lo utilizamos para explicar un fenómeno incrustado en un contexto de enseñanza-aprendizaje, ya que:

> el hecho de que en toda situación de enseñanza y aprendizaje de matemáticas sea preciso tener presente, como sus tres personajes fundamentales, al profesor, el alumno y las matemáticas, conduce a considerar cuatro componentes de los MTL: un componente de competencia, un componente de actuación (o de los procesos cognitivos), un componente de enseñanza y un componente de comunicación. (Puig, 2006, p. 108)

El componente de actuación pretende dar cuenta de las acciones que realiza un estudiante cuando se enfrenta a una tarea matemática con la finalidad de caracterizar las estrategias que utiliza, los obstáculos que encuentra y los errores que comete. Durante el proceso de aprendizaje los estudiantes manifiestan unas tendencias cognitivas que podremos calificar de positivas o negativas según tiendan o no a las que llevaría a cabo un sujeto competente. El componente de competencia incluye tanto el conocimiento propio del domino matemático puesto en juego como la descripción de un SMS lo suficiente abstracto que permita descodificar todos los textos que se producen en las situaciones de enseñanza-aprendizaje asociadas. El componente de enseñanza tiene como fuente el conocimiento matemático, el currículum y los libros de textos y tiene por misión, dentro de un sistema escolar, lograr que las actuaciones de los estudiantes se aproximen a las de los sujetos competentes. El componente de comunicación pretende dar cuenta del intercambio de mensajes entre sujetos con diversos grados de competencia en el uso de los SMS.

1.3. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Las distintas acciones que llevamos a cabo sobre la población se describirán con mayor detalle en los capítulos 4, 5 y 6. Sin embargo, la organización de los capítulos no atenderá a cómo se desarrollaron los acontecimientos en el tiempo, sino a que contengan aspectos relacionados con la secuencia de enseñanza, el estudio de grupo y el estudio de casos, respectivamente. Por este motivo, hemos considerado conveniente exponer la fase experimental de la investigación de manera ordenada para intentar subsanar las posibles confusiones que se pudieran producir.

En primer lugar, se administraron dos cuestionarios cuya finalidad era determinar la competencia de los estudiantes cuando resolvían problemas verbales aritmético-algebraicos con lápiz y papel. El primer cuestionario (el que llamamos cuestionario exploratorio 1) estaba formado por problemas verbales que, habitualmente, se resuelven de manera aritmética; mientras que el segundo (el cuestionario exploratorio 2) contenía problemas típicamente algebraicos. A continuación, se inició la enseñanza de los rudimentos de la hoja de cálculo donde se ofrecieron técnicas básicas como la construcción de fórmulas o la generación de secuencias numéricas por copia y pegado por arrastre. Los estudiantes, durante la instrucción, se agruparon en parejas por cuestiones metodológicas y de espacio. Esta primera fase de enseñanza se desarrolló a lo largo de siete sesiones y se remató con la administración de un tercer cuestionario (el cuestionario exploratorio 3) cuya intención era medir la competencia de la población en el uso de la hoja cálculo. Apoyándonos en los resultados obtenidos en estos tres cuestionarios diagnósticos, se clasificó a la población asignando a cada estudiante un perfil mediante una terna (x, y, z), donde x, y y z eran, respectivamente, las clases en las que cada alumno fue incluido según su actuación en los cuestionarios exploratorios 1, 2 y 3.

Seguidamente, se inició la enseñanza del MHC que se extendió a lo largo de seis sesiones. Se organizó alrededor de la resolución de problemas verbales típicamente algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo después de haber instruido a los alumnos en el uso del MHC. Al terminar la secuencia de enseñanza, se administró un último cuestionario (el Cuestionario Post) integrado por problemas isomorfos a los del Cuestionario Exploratorio 2. La comparación de estos dos cuestionarios nos permitió dar respuesta al segundo objetivo de nuestra investigación con conclusiones más o menos significativas.

Por último, se realizó un estudio de casos en el que participaron una selección de los estudiantes que constituían la población. La elección de las parejas atendió a cómo habían quedado clasificados sus integrantes a partir de los resultados obtenidos en los cuestionario exploratorios. Se buscó que participara como mínimo un miembro de cada perfil y también se consideró que hubieran protagonizado actuaciones singulares durante la secuencia de enseñanza.

1.4. DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

Umberto Eco en su libro *Cómo se hace una tesis* (Eco, 2001) afirma que una tesis es un libro en potencia dirigido a toda la humanidad. Dejando de lado un propósito que se nos antoja demasiado pretencioso, no podemos dejar de atender a que la redacción de una tesis doctoral debe conciliar la precisión y minuciosidad de un estudio de científico con la consideración a las distintas intenciones que puede tener un lector que la consulta. Con este fin, hemos decidido describir los capítulos que integran el trabajo para ofrecer una guía de lectura a aquéllos que se aproximen al texto con diferentes intereses y conocimientos.

En el capítulo en que nos encontramos, hemos señalado los objetivos de la investigación, hemos justificado su pertinencia y hemos establecido el armazón del marco teórico y metodológico que nos guiará en la experimentación y en la interpretación de los resultados.

El capítulo 2 ofrece una revisión de trabajos anteriores sobre: las dificultades observadas en los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra; la resolución de problemas en la enseñanza del álgebra; el uso de ordenadores en la enseñanza del álgebra y el caso particular de la hoja de cálculo. Este capítulo tiene la misión de mostrar lo que ya se sabe sobre el tema y de ofrecer un catálogo de observaciones empíricas que nos servirán, en ocasiones, de base sobre la que explicar la actuaciones de los estudiantes

El capítulo 3 describe el modelo de competencia. En los apartados 3.1. y 3.2. se ofrecen los métodos clásicos de resolución de problemas verbales: el método cartesiano y el método de las inferencias analíticas sucesivas. El primero es el método algebraico por excelencia, mientras que el segundo es el método analítico de resolución de problemas de manera aritmética. La presencia de una descripción de estos métodos responde a que uno de los intereses de nuestra investigación es el de observar cómo evoluciona la competencia de los estudiantes al resolver problemas con lápiz y papel tras la instrucción. En el apartado 3.3.1. se describe el entorno y el funcionamiento de la hoja de cálculo *Excel 2003*; mientras que el apartado 3.3.2. se ofrece una gramática de las expresiones del lenguaje de la hoja de cálculo y unas reflexiones sobre su semántica. Por último, en el apartado 3.3.3. se muestra la división en pasos ideales del método algebraico de resolución de problemas en la hoja de cálculo, comparándolo con el método cartesiano y dando cuenta de sus limitaciones.

El capítulo 4 ofrece una descripción de la aplicación de una secuencia de enseñanza basada en la división en pasos ideales del método algebraico de resolución en la hoja de cálculo. La finalidad es la de proporcionar explicaciones sobre las decisiones tomadas durante la instrucción y describir actuaciones singulares de los estudiantes durante la parte de la enseñanza de los rudimentos de la hoja de cálculo. Las actividades que constituyeron la secuencia de enseñanza, tal y como se ofrecieron a los estudiantes, se facilitan de forma integra en el anexo A. Las producciones de los estudiantes se encuentran en los anexos B, C y D. En el apartado 4.1., se presenta la población y los materiales empleados, por tratarse del primer capítulo en el que se analizan las actuaciones de los estudiantes.

El capítulo 5 está dedicado al estudio de grupo. En los apartados 5.1. y 5.2. se relata la finalidad del estudio y se describen los cuestionarios utilizados. Las producciones de los estudiantes en los cuestionarios se hallan en los anexos E, F, G y H. El análisis de los problemas empleados en los cuestionarios sobre problemas verbales se halla en el apartado 5.3. Su consulta es indispensable si se quiere entender la descripción cualitativa de las producciones ofrecida en los extensos apartados 5.5. y 5.7.; sin embargo, se puede prescindir de su lectura en un primer momento. El apartado 5.4. da una imagen precisa de las técnicas empleadas para describir cuantitativamente las actuaciones de los estudiantes al resolver los cuestionarios formados por problemas verbales. Las tablas de datos obtenidas al aplicar estos métodos sobre las producciones de los estudiantes se ofrecen en el anexo I. El análisis cuantitativo de las producciones de los estudiantes en los cuestionarios se empleó para categorizar la población y valorar los efectos de la enseñanza. Así, en el apartado 5.6. se hace una clasificación de los estudiantes atendiendo a los resultados obtenidos en los cuestionarios exploratorios; mientras que en el apartado 5.8. se hace un estudio comparativo de los datos obtenidos en los cuestionarios isomorfos previo y posterior a la secuencia de enseñanza. Los resultados brutos de las pruebas estadísticas se encuentran en el anexo J.

El capítulo 6 está dedicado al estudio de casos. Los apartados 6.1., 6.2., 6.3. y 6.4. indican la finalidad del estudio, las técnicas de obtención de datos, la selección de los participantes y analizan los problemas empleados[1], respectivamente. En el extenso apartado 6.5. se examinan fragmentos de los protocolos escritos obtenidos a partir de los protocolos audiovisuales. La totalidad de los protocolos escritos se encuentran en el anexo K.

En el capítulo 7 se responde a las preguntas de investigación. El apartado 7.1. ofrece un resumen organizado, a modo de conclusiones, de las observaciones empíricas del estudio de casos; mientras que en el apartado 7.2. se contesta a cómo ha influido la enseñanza en la competencia a la hora de resolver problemas con lápiz y papel.

Por último, señalaremos que hemos decidido ofrecer los anexos en formato electrónico dada la dificultad que suponía trasladar al papel toda la información recogida en los archivos de hoja de cálculo y en los archivos del programa de tratamiento estadístico. Hemos intentado ser canónicos por lo que respecta al contenido de los anexos, por lo que hemos incluido las producciones brutas de los estudiantes, las tablas de datos, los cálculos estadísticos y las fichas de actividades utilizadas durante la secuencia de enseñanza.

[1] Nuevamente, el análisis de los problemas llevado a cabo en el apartado 6.4. puede omitirse en un primer momento y recurrir a él cuando sea necesario para comprender el estudio del apartado 6.5.

2. Revisión bibliográfica

Una vez hemos definido los objetivos y justificado el interés de nuestra investigación, la revisión de la literatura nos permitirá responder a qué se sabe ya sobre el problema y con qué otros métodos se ha tratado de resolver. También nos proporcionará una base sobre la que describir algunos fenómenos que ya han sido explicados en otras investigaciones.

Dividiremos el capítulo en cuatro apartados: la transición de la aritmética al álgebra, la resolución de problemas en la enseñanza del álgebra, el uso de ordenadores para la enseñanza del álgebra y el caso concreto del uso de la hoja de cálculo.

2.1. LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

Aritmética y álgebra comparten signos como el igual y las cuatro operaciones básicas. Sin embargo, los signos presentes en las expresiones algebraicas, deben interpretarse de forma distinta a como se haría en aritmética. Estos problemas de interpretación crean dificultades a los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra (Kieran, 2006). Así, antes de entrar en contacto con el álgebra, los estudiantes han utilizado letras en fórmulas, como las de las áreas de figuras planas. También es habitual encontrar situaciones en las que se les pide obtener el valor perdido (un hueco) en una expresión aritmética. Sin embargo, los estudiantes muestran dificultades para interpretar letras como incógnitas, variables o parámetros. Dentro del estudio *Concepts in Secondary Mathematics and Science* dirigido por K. Hart a finales de los 70, Küchemann (1978, 1981) identifica seis niveles de interpretación de las letras: letra evaluada, letra no usada, letra usada como un objeto, letra usada como una incógnita específica, letra usada como número generalizado y letra usada como variable. El estudio mostró que la mayoría de los estudiantes que participaron (11-16 años) tenían dificultades para abordar actividades que requerían interpretar letras como números generalizados, incógnitas especificas o variables.

Behr, Erlwanger y Nichols (1976) analizaron si estudiantes de entre 6 y 12 años consideraban el signo igual como una relación (comparación de los dos miembros de una igualdad) o como un operador (una señal para hacer algo). Los resultados mostraron una fuerte tendencia a ver la igualdad como una señal para hacer algo, lo que parece un síntoma de su limitada comprensión de términos relacionales como igual, más que, menos que, tantos como, etc. Los autores indican que no se produce una mejora con la edad, sino que se observa el efecto contrario. Kieran (1981) coincide en que los estudiantes desde preescolar hasta la universidad interpretan el signo igual como una señal para hacer algo. Observa una evolución hacia una interpretación relacional a medida que se aumenta el nivel, junto a la aparición de formas más sofisticadas de usos operacionales (por ejemplo, emplear el signo igual como un mero nexo de unión entre pasos) que muestran la falta de conciencia sobre el papel de equivalencia que tiene el signo igual.

Por lo que refiere a los signos de operación en las expresiones algebraicas (pero sin abandonar la predisposición por la acción) Collis (1974) describe la tendencia de los estudiantes a ver las expresiones algebraicas como algo que necesita ser completado y llama a este fenómeno la dificultad para aceptar la falta de cierre. Dentro del proyecto *Strategies and Errors in Secondary Mathematics* (SESM) dirigido por L. R. Booth (Booth, 1984, 1988) se exponen dificultades y errores en el uso de la notación y convenciones algebraicas. Se observa la propensión de los estudiantes por obtener una respuesta (un único término), convirtiendo expresiones como $2a + 5b$ en $7ab$ o transformando $a + b$ en ab. "Este problema puede ocurrir como consecuencia de que los estudiantes tengan una dificultad cognitiva en 'aceptar la falta de cierre' (Collis, 1975), o puede que refleje sencillamente las expectativas derivadas de la aritmética respecto a lo que se supone que son 'respuestas bien formadas'" (Booth, 1988, pp. 23-24). También se reporta una falta de atención en el uso de paréntesis, que se asocia a los hábitos aritméticos, y otras confusiones en la notación a la hora de interpretar expresiones. Por ejemplo, $4y$ puede interpretarse como "cuarenta y y" o como $4 + y$.

Estos primeros estudios centraron su análisis en las dificultades y errores de los estudiantes al iniciarse en el mundo del álgebra. Generalmente, apuntan a la forma en la que se organiza la enseñanza como causa del problema. Se critica una enseñanza (y un aprendizaje) centrada en las definiciones formales (Chalouh y Herscovics, 1988) que produce una falta de comprensión de los conocimientos básicos para su posterior aplicación (Brown et al., 1988) y que conduce a la memorización de reglas (Kieran, 1992). Kaput (1995) expone las consecuencias de una enseñanza basada en la manipulación de expresiones: "El efecto neto es una trágica alienación de las matemáticas por parte de todos aquéllos que superan este filtro e incluso una pérdida más trágica de oportunidades en la vida para todos aquéllos que no lo hacen" (p. 71). En la misma línea, Booth (1988) indica que la habilidad para manejar símbolos algebraicos (sintaxis) es importante, pero el aspecto fundamental de la manipulación algebraica lo constituye la justificación subyacente (semántica) encarnada en las propiedades estructurales.

Surgen investigaciones cuyos objetivos son describir cómo los estudiantes dan sentido a la sintaxis del álgebra y construir modelos de enseñanza para lograr este fin. Filloy (1987) separa los modelos de enseñanza sintácticos, que ponen énfasis en las reglas de uso, de los semánticos, que ponen el énfasis en dar significado a las reglas. Los modelos de enseñanza semánticos proponen el uso de modelos en un contexto concreto para dotar de significado a las nuevas operaciones (por ejemplo, el uso de balanzas o áreas para dar sentido a la manipulación de ecuaciones). En la modelización de situaciones concretas se distinguen dos conceptos: la traducción, "por medio de la cual los objetos y operaciones de las situaciones abstractas son dotados de significado y sentido al ser ofrecidos en manifestaciones más 'concretas'" (Filloy y Rojano, 1989, p. 24), y la separación "de los nuevos objetos y operaciones introducidos mediante el nuevo modelo de los detalles del significado propio del modelo concreto" (p. 25).

Chalouh y Herscovics (1988) utilizan un enfoque geométrico basado en el área del rectángulo para construir significado para las expresiones algebraicas. Filloy y Rojano (1989) emplean dos modelos concretos, la balanza y un modelo geométrico basado en la comparación de áreas, para enseñar a operar con la incógnita cuando se resuelven ecuaciones. Al comparar los modelos, encuentra argumentos a favor y en contra de cada uno. En el modelo geométrico no es trivial resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$, mientras que en el modelo de la balanza es imposible manejar $Ax - B = Cx$ y $Ax - B = Cx + D$. En la misma línea, Vlassis (2002) concluye que el método de la balanza es útil para enseñar el método formal de aplicar la misma operación a los dos términos; pero destaca la necesidad de actividades que sirvan para distanciarse del modelo concreto y superar todos los obstáculos asociados al proceso de separación, consecuencia de las limitaciones del modelo, como la presencia de números negativos.

La dificultad a la hora de explicar las observaciones conduce al desarrollo de una terminología y de unos marcos teóricos que puedan dar cuenta de los aspectos sintácticos y semánticos del álgebra en las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Filloy introduce la idea de *sistema matemático de signos* como un marco de interpretación semiótico para describir los mensajes matemáticos que se producen durante los procesos de enseñanza-aprendizaje (Filloy, 1990, 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kieran y Filloy, 1989).

> Filloy (1990) y Kieran y Filloy (1989) introdujeron la necesidad de usar una noción suficientemente amplia de sistema matemático de signos. Tiene que servir como herramienta para analizar los textos producidos por los estudiantes cuando se les enseñan matemáticas en los sistemas escolares –y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido–, así como analizar textos matemáticos históricos, tomados como documentos, petrificaciones de la acción humana, o procesos de cognición propios de una episteme. (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pp. 6-7)

La decisión de tomar como objeto de estudio los textos matemáticos que se producen en estas situaciones conduce a ampliar la noción de sistema matemático de signos y la de texto:

> Así se debería hablar de sistema matemático de signos, con su código correspondiente, cuando se da la posibilidad convencionalizada socialmente de generar funciones sígnicas (mediante el uso de un functor de signos, ver Capítulo 7), incluso cuando las correlaciones funcionales han sido establecidas en el uso de artefactos didácticos en una situación de enseñanza con la intención de que sean efímeras. Por otro lado, también hay que considerar los sistemas de signos o los estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dotar de sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza, aunque se rijan por un sistema de correspondencias que no ha sido socialmente establecido, sino que es idiosincrásico. (Filloy, Rojano y Puig, 2008, p. 7)

Kaput (1989) propone cuatro fuentes de significado para el álgebra: 1) La traducción entre sistemas de representación matemáticos. 2) La traducción entre sistemas de representación matemáticos y sistemas de representación no matemáticos. 3) Las transformaciones y operaciones dentro de un sistema de representación. 4) La construcción de objetos mentales a través de la reificación de las acciones, procedimientos y conceptos en nuevos objetos que servirán como base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel de organización más elevado. “Los puntos de partida son: (a) la noción de *representación mental* como el medio por el cual el individuo organiza y gestiona el flujo de la experiencia y (b) la noción de *sistema de representación* (o *sistema de símbolos*) como un artefacto lingüístico o cultural compartido, materialmente realizable” (p. 167). Partiendo de lo anterior, Kaput afirma que los estudiantes utilizan los sistemas de representación para elaborar sus propias construcciones mentales durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

También hay espacio para las propuestas (escasas) de una enseñanza del álgebra basada en modelos de enseñanza sintácticos. Kirshner (2001) distingue entre los accesos estructural y referencial al álgebra (los accesos sintáctico y semántico, respectivamente). Señala que los fallos de los currículos actuales no pueden achacarse a un acceso al álgebra basado en la enseñanza de reglas, pues nunca se ha puesto en marcha un currículo exclusivamente estructural. Esboza una propuesta curricular que supone una combinación del componente de análisis sintáctico del álgebra[1] con la reglas de transformación algebraicas habituales y que se basa "en una *gramática descriptiva*[2] (Kirshner, 1987) que intenta modelar la práctica real de los usuarios que tienen fluidez en lenguaje algebraico" (p. 96).

2.2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

Polya (1945/1965) elabora un modelo del proceso de resolución de problemas dividido en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Cuando se resuelven problemas verbales aritmético-algebraicos, y se conoce el lenguaje algebraico, una parte importante del proceso de resolución consiste en traducir el enunciado del problema a ese lenguaje; es decir, en *poner el problema en ecuaciones*. De esta forma el problema que hay que resolver se transforma en el problema de resolver la ecuación para, una vez resuelta, volver al problema planteado y comprobar el resultado (Puig, 1998). De acuerdo con las intenciones de nuestra investigación, dirigiremos la revisión a aquellos estudios que se han centrado en el proceso de traducción. Describiremos las dificultades observadas en los estudiantes en la fase de traducción del enunciado de los problemas verbales aritmético-algebraicos y cómo afectan las características de los problemas en este proceso.

Dentro de los estudios que se centran en las características de los problemas, podemos distinguir entre aquéllos que lo hacen en las variables sintácticas, de contenido y de contexto de los que lo hacen en las variables estructurales de los problemas. Goldin (1979) indica que para las primeras no se necesita un análisis matemático del problema, mientras que las variables estructurales sí que lo necesitan. Entre las características sintácticas del enunciado del problema que se vinculan a su dificultad a la hora de resolverlo, encontramos (Barnett, 1979; Caldwell y Goldin, 1979; Cook, 1973; Jerman y Ress, 1972; Nesher, 1976; Puig y Cerdán, 1988): número de palabras del enunciado, longitud de las frases, la complejidad gramatical, legibilidad, pistas verbales, magnitud de los números, o la situación de la pregunta.

Caldwell y Goldin (1979, 1987) comparan la dificultad relativa de cuatro tipos de problemas: factual abstracto, hipotético abstracto, factual concreto e hipotético concreto. Los concretos serían problemas que reflejan una situación de la realidad; los abstractos, los que llamamos de ábaco[3]; y los hipotéticos, aquellos que plantean situaciones condicionales. Para el caso de estudiantes de primaria (Caldwell y Goldin, 1979) concluyen que los problemas verbales concretos plantean menor dificultad que los abstractos. Al analizar los problemas concretos, las versiones factual e hipotética

---

[1] Este análisis sintáctico permite determinar la jerarquía de las operaciones de un expresión algebraica.

[2] Distingue entre gramática prescriptiva, que dice cómo debe usarse un lenguaje sin atender a las prácticas de los hablantes, y gramática descriptiva, que atiende a cómo usan el lenguaje los usuarios competentes.

[3] Los problemas de ábaco son aquellos "en los que las historias que se narran tratan sobre números y los acontecimientos que se producen son operaciones aritméticas" (Puig, 1997, p. 116).

difieren poco en su nivel de dificultad. Para los problemas abstractos, las versiones hipotéticas son menos difíciles que las factuales, lo que puede ser debido a que las formas de expresión hipotéticas sugieran el uso de la operación matemática apropiada. Los estudiantes de secundaria (Caldwell y Goldin, 1987) siguen mostrando una mayor dificultad al resolver problemas abstractos, pero se observa una disminución de la diferencia al aumentar el nivel educativo. Como hallazgo más importante señalan la fuerte interacción entre la variable factual-hipotético y la variable concreto-abstracto en todos los niveles analizados: "Parece que la mayor dificultad de los problemas hipotéticos ocurre casi exclusivamente en los contextos concretos" (Caldwell y Goldin, 1987, p. 195).

Desde el punto de vista de cómo afecta las relaciones entre cantidades a la dificultad del problema, Bednarz y Janvier (1994, 1996) intentan establecer criterios para analizar la complejidad relativa de los problemas. Al aplicar estos criterios identifican tres clases principales de problemas en los libros de texto atendiendo a las cantidades implicadas y las relaciones entre ellas: problemas que incluyen un reparto desigual[4], problemas que incluyen una transformación de magnitud, y problemas que incluyen magnitudes no homogéneas y razones externas. Establecen como criterios para describir la complejidad: la naturaleza y número de las relaciones implicadas, la presencia de comparaciones aditivas y/o multiplicativas, la comparación entre dos cantidades desconocidas o una sola desconocida. Los resultados experimentales, al administrar una colección de problemas de reparto desigual a 132 estudiantes de entre 12 y 13 años (que no habían recibido instrucción algebraica), mostraron la influencia de estos factores de complejidad en el éxito al resolver los problemas.

En su tesis doctoral, Cerdán (2008) define la complejidad de un problema desde cuatro aspectos: la complejidad relacional, la complejidad en cuanto a lo desconocido, la complejidad de la intervención de lo desconocido en las relaciones y la complejidad del entretejido de las relaciones. Tras refinar estos cuatro aspectos (por ejemplo, dentro de la complejidad relacional, distingue entre número de aristas aditivas y multiplicativas), acaba identificando la complejidad de un problema mediante una 7-tupla de números definidos a partir del grafo trinomial orientado de una lectura analítica del mismo[5]. La 7-tupla estaría formada por: R = el número de aristas del grafo trinomial; Rm = el número de aristas multiplicativas; x = el número de vértices claros; d = el número de datos; $a2$ = el número de aristas de género 2; $a3$ = el número de aristas de género 3; n = el orden del nodo de mayor orden. En los estudios empíricos llevados a cabo con estudiantes de secundaria se observa que para problemas de complejidad relacional (el número de aristas del grafo trinomial, R) 3, 5 y 7, los valores de dificultad de la solución, de la dificultad del proceso y del error (medido por la diferencia de dificultades) siguen un orden creciente.

Dentro de las investigaciones sobre dificultades en la traducción, Küchemann (1978, 1981) observa $b + r = 90$ como respuesta errónea más común a la tarea:

[4] Un ejemplo de este tipo de problemas sería: "380 estudiantes se han apuntado a actividades deportivas esta temporada. En baloncesto hay 76 más que en patinaje y en natación 114 más que en baloncesto. ¿Cuántos estudiantes hay en cada una de las actividades?" (Bednarz y Janvier, 1996, p. 120).

[5] En el apartado 3.1. se ofrece una explicación más precisa del uso de los grafos como una representación de una lectura analítica.

> Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compro algunos lápices azules y algunos rojos y juntos me cuestan 90 peniques. Si *b* es el número de lápices azules comprados, y *r* el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedes escribir sobre *b* y *r*? (Küchemann, 1978, p. 26)

Este tipo de error indica que muchos estudiantes usan las letras como etiquetas para referirse a conjuntos, siendo *b* y *r* abreviaturas de lápices azules (blue pencils) y lápices rojos (red pencils).

Un grupo de investigadores liderado por J. Clement describió un error clásico en la traducción de enunciados al que dieron el nombre de error de inversión (Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981; Clement, Lochhead y Soloway, 1980). Propusieron a 150 estudiantes de primer año de ingeniería la tarea siguiente (junto a cinco cuestiones más): "Escribe una ecuación usando las variables *S* y *P* para representar el enunciado siguiente: 'Hay seis veces más estudiantes que profesores en esta universidad'. Usa *S* para el número de estudiantes y *P* para el número de profesores" (Clement, Lochhead y Monk, 1981, p. 288). Encontraron que sólo el 63% de los estudiantes dieron la respuesta correcta y que la mayoría de las respuestas incorrectas fueron $6S = P$ (error de inversión). Identificaron dos posibles causas para el error de inversión (Clement, Lochhead y Monk, 1981): a) una conversión literal de las palabras a símbolos del álgebra (lo que fue descrito por Paige y Simon (citado en Clement, Lochhead y Monk, 1981) como traducción sintáctica); b) el estudiante comprende que el número de estudiantes es mayor que el de profesores y la expresión $6S$ se utiliza para indicar un conjunto mayor y *P* un conjunto menor (llamaron a este fenómeno comparación estática). En Clement, Lochhead y Soloway (1980) se apunta que el porcentaje de errores de inversión disminuye cuando se realiza la actividad en un contexto de programación de ordenadores. Algunas hipótesis explicativas son: la precisión y el nivel de explicitación requerido por los lenguajes de programación (debemos escribir $6{*}S$ y no $6S$); las ecuaciones en un entorno de programación son vistas como una transformación de entrada y salida (la entrada se encuentra en el lado derecho y se opera para obtener la salida que se encuentra en el lado izquierdo) y la práctica de descomponer un problema en todos sus pasos cuando se programa. Fisher (1988) sugiere la posibilidad de que los resultados obtenidos por Clement sean debidos a la elección de la notación y plantea un experimento en el que administra dos versiones del problema: una primera, idéntica; una segunda, en la que sustituye *S* por *Ns* y *P* por *Np*. "Así, es más probable que *Ns* se lea como número de estudiantes y *Np* como número de profesores que las notaciones correspondientes más simples, *S* y *P*" (Fisher, 1988, p. 260). Sin embargo, obtuvo un mayor número de errores de inversión en los estudiantes que resolvieron el problema con la notación *Ns-Np* que con la notación *S-P*. Como posible causa apunta que los procesos mentales en ambos casos son los mismos y que la complejidad de la notación *Ns-Np* incrementa el número de errores. Sugiere (aunque indica que no se puede demostrar a partir de sus datos) que es posible que la nueva notación reduzca los errores debidos a la traducción sintáctica, pero que permanezcan los errores por comparación estática. En la misma línea, MacGregor y Stacey (1993), muestran que el error de inversión se produce también en las comparaciones aditivas y que no se puede considerar la traducción sintáctica como la causa principal de este tipo de errores. "Nuestra teoría postula que las ecuaciones y expresiones invertidas se producen cuando los estudiantes intentan representar sobre el papel modelos cognitivos de cantidades desiguales comparadas" (MacGregor y Stacey, 1993, p. 229).

Un tema central de investigación dentro de la enseñanza del álgebra lo ocupa la necesidad de determinar qué es un problema algebraico y qué características debe tener un método de resolución algebraico. Así lo hicieron ver Wagner y Kieran (1989), que los propusieron como parte de los asuntos de *An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra*:

> ¿Hay problemas verbales que sean intrínsecamente más algebraicos que aritméticos?
>
> ¿Qué hace que un método de resolver un problema verbal sea más algebraico que aritmético? (Wagner y Kieran, 1989, p. 226)

Como parte de un programa de investigación que pretendía clarificar las condiciones en las que surge el razonamiento algebraico, Bednarz y Janvier (1994, 1996) ofrecen una respuesta vaga a la pregunta:

> En aritmética, los problemas que se ofrecen a los estudiantes son problemas que podríamos etiquetar como "conectados": Se puede establecer una relación fácilmente entre dos datos conocidos […] Por el contrario, en álgebra los problemas que se ofrecen a los estudiantes son de los que podemos etiquetar como "desconectados": no se puede establecer una conexión entre los datos conocidos". (Bednarz y Janvier, 1996, p. 123)

En un análisis llevado a cabo por Puig y Cerdán (1990) se daba respuesta a las preguntas formuladas por Wagner y Kieran de una forma más precisa[6]. La exploración de estos autores parte de: a) dentro de la resolución del problema el proceso crucial será el de traducción; b) hay que estudiar los problemas verbales de varias operaciones combinadas; c) como instrumento de análisis se pueden emplear los métodos de análisis-síntesis y el método cartesiano. Atendiendo a todo lo anterior responden:

> Lo que podremos calificar de aritmético o algebraico será el proceso de traducción, las características que diferenciarán uno de otro vendrán determinadas por la comparación entre los dos métodos históricos que se usan como instrumento de análisis, lo que resultará determinante no será pues la estructura del problema, sino la estructura del proceso de traducción, y sólo será posible decir que un problema es más algebraico que aritmético en función de que presente características que impidan que se pueda dar el proceso de traducción modelado por el método de análisis-síntesis. (Puig y Cerdán, 1990, p. 36)

Palarea y Socas (1995) analizan la influencia de los sistemas de representación (formal, visual-geométrico, diagramas…) en la forma de resolver los problemas verbales aritmético-algebraicos y concluyen que las características aritméticas o algebraicas no son intrínsecas al problema, sino que "depende de los sistemas de representación elegidos que provocan en el resolutor un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución" (p. 34).

Las experiencias aritméticas previas vuelven a presentarse como una de las explicaciones a la falta de comprensión a la hora de resolver problemas algebraicamente. Stacey y MacGregor (2000) identifican el origen de las dificultades en las discontinuidades presentes al pasar de métodos aritméticos a métodos algebraicos de resolución en: 1) El cambio de calcular con números a operar con la incógnita. 2) La transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico expresado en la dualidad procedimental-estructural (u operacional-conceptual). 3) La base lógica del método algebraico es diferente: los problemas aritméticos se resuelven yendo de lo conocido hacia lo desconocido. Las autoras realizan un experimento con 30 individuos de entre 13 y 16 años para analizar las dificultades ligadas a la comprensión de la base

---

[6] Se expone de una manera mucho más desarrollada en Filloy, Rojano y Puig (2008).

lógica. Concluyen: a) El impulso por calcular les impide pensar en la ecuación. b) Se observan usos de la letra como: la letra refiere a distintas cantidades en una ecuación; la letra refiere a distintas cantidades en diferentes estadios del proceso de solución; la letra representa a cualquier cantidad desconocida. c) Los estudiantes tienen distintas percepciones de las ecuaciones como: una fórmula para dar la respuesta; una narración simbólica de las operaciones que proporcionan el resultado; una descripción de las relaciones esenciales.

Nuevamente surgen intentos de facilitar la transición entre aritmética y álgebra (en este caso, entre la manera aritmética y algebraica de resolver problemas verbales) ya sea mediante el uso de nuevas tecnologías (ver apartado siguiente), empleando métodos de resolución a caballo entre la aritmética y el álgebra, o recurriendo a la refinación de estrategias espontáneas observadas en los estudiantes. Así, se realizan estudios teóricos y empíricos (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Filloy, Rojano y Rubio, 2001; Rubio, 1988) sobre el papel del método analítico de la exploraciones sucesivas (MAES) como puente en el camino hacia la resolución mediante el método cartesiano. El uso del MAES se inicia asignando un valor hipotético a la cantidad que se quiere calcular y a continuación se inicia un proceso de verificación de la validez del valor. De esta forma se propicia que el estudiante desencadene el análisis lógico de los problemas y que rompa con la tendencia a usar lo desconocido como se hace en aritmética. Van Amerom (2003) realiza un experimento con estudiantes de últimos cursos de primaria y primeros de secundaria para analizar si el uso de los métodos prealgebraicos informales de razonamiento y simbolización puede facilitar la transición. Concluye que simbolización y razonamiento no se desarrollan al mismo ritmo, pues los estudiantes son capaces de construir ecuaciones con sus notaciones informales, pero no consiguen resolverlas. "Parece que la resolución de ecuaciones no depende de una percepción estructural de las ecuaciones" (Van Amerom, 2003, p. 73). Indica que se trata de un hecho que ya se pone de manifiesto en las formas en que se simbolizan y resuelven los problemas verbales en los textos históricos.

2.3. EL USO DE ORDENADORES EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

Las primeras investigaciones sobre el uso de ordenadores para la enseñanza de las matemáticas se remontan a finales de la década de los 60. Existen referencias indirectas a ellas (una literatura posiblemente vasta, pero difícilmente accesible) en algunos artículos de principios de los años 70. Así en Alspaugh (1972, p. 89) podemos leer: "Muchos escritores actuales han percibido la influencia que los ordenadores han tenido o posiblemente tendrán en el futuro en la educación matemática." En Hatfield y Kieren (1972, p. 99) encontramos: "Muchos educadores matemáticos han sugerido que las actividades de escribir, procesar y estudiar la salida de un algoritmo en una computadora promoverían el desarrollo de los conceptos y principios matemáticos, habilidades de cálculo y habilidades en la resolución de problemas en los estudiantes". Haciendo de la necesidad virtud, estos estudios analizaban el uso de la programación de ordenadores como herramienta para la enseñanza de matemáticas: "Para usar un ordenador se necesita algún tipo de lenguaje de programación" (Alspaugh, 1972, p. 99). En consecuencia, un primer punto de atención fue el uso de la programación para la enseñanza de la resolución de problemas, pues como indicaban Roberts y Moore (1984, p. 162): "Escribir un programa de ordenador es resolución de problemas". Surgieron lenguajes de programación, como el *Logo*, específicamente diseñados para la enseñanza de matemáticas y se investigaron los efectos de desarrollos curriculares basados en su uso (Feurzeig, Papert, Bloom, Grant y Solomon, 1970). Como señala Kieran y

Yerushalmy (2004), fueron los estudios adscritos al movimiento *Logo* los primeros que establecieron una relación directa entre programación y álgebra inspirados en que "la programación se veía como una actividad algebraica porque implicaba expresar ideas y procesos matemáticos de una manera general con el acompañamiento de un lenguaje y una sintaxis particular" (p. 101). Concretamente, se concluyó que los estudiantes pueden construir conocimiento algebraico en un entorno no computacional a partir del álgebra que han usado en un entorno *Logo* (Noss, 1986). Los alumnos son capaces de utilizar ideas derivadas del *Logo* para resolver problemas de álgebra (Sutherland, 1987). Los entornos basados en *Logo* pueden ayudar en el trabajo de los estudiantes con diferentes caracterizaciones del concepto de variable (Ursini, 2001). Los estudiantes pueden aceptar trabajar en *Logo* con expresiones "no cerradas", expresar relaciones matemáticas generales y aceptar que una letra representa a un número general (Healy, Pozzi y Sutherland, 2001).

En la década de los 80, las mejoras en la capacidad de proceso de los ordenadores y la aparición de nuevos lenguajes de programación posibilitaron el uso de tutores inteligentes y de los entornos WYSIWYG (son las iniciales de What You See Is What You Get[7]). La aplicación de estas nuevas tecnologías a la enseñanza del álgebra y a la resolución de problemas verbales ha generado una gran cantidad de estudios cuya descripción excedería las intenciones de este apartado. Atendiendo al objetivo de nuestra investigación nos centraremos en los estudios sobre la enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones y el manejo de expresiones algebraicas. También analizaremos los modos de simbolización de las cantidades y las relaciones en los programas cuya finalidad es la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos.

Los entornos informáticos diseñados para la enseñanza-aprendizaje del trabajo simbólico con expresiones algebraicas podemos clasificarlos en: sistemas algebraicos computacionales (CAS), entornos estructurados de cálculo simbólico y sistemas de representación múltiple[8] (Kieran y Yerushalmy, 2004). Los CAS aparecieron como potentes sistemas de cálculo simbólico diseñados inicialmente para matemáticos y científicos. Las mejoras tecnológicas permitieron incorporarles prestaciones como el empleo de tablas numéricas y la representación gráfica de funciones (Thomas, Monaghan y Pierce, 2004) e implementarlos en ordenadores de uso doméstico. Un sistema de representación múltiple usa más de una representación para crear significado para un objeto o proceso. Por ejemplo, dos expresiones son equivalentes si tienen la misma gráfica (Kieran y Yerushalmy, 2004). Un entorno estructurado de cálculo simbólico es un sistema informático que actúa como un tutor inteligente. Se trata de entornos que, al igual que los CAS, pueden encargarse de parte del proceso de cálculo; pero con el objetivo de ofrecer pistas, señalar errores o indicar estrategias al usuario. La mayoría proporcionan reglas de transformación en botones o menús que el usuario aplica a subexpresiones para modificar su estado. Entre los ejemplos de entornos diseñados para la solución de ecuaciones y la creación y transformación de expresiones algebraicas podemos citar: *Expressions* (Thompson, 1989), *Equation Solving* (McArthur y Stasz, 1990), *Dissolve* (Oliver y Zuckerman, 1990), *L'Algebrista* (Mariotti y Cerulli, 2001) o *Aplusix* (Nicaud, Bouhineau y Chaachoua, 2004).

---

[7] Lo que ves es lo que obtienes.

[8] Pretender clasificar los programas en uno de estos tres tipos siempre resulta difícil, ya que, por ejemplo, podemos encontrar entornos estructurados de cálculo simbólico en los que se dé una representación múltiple.

Las conclusiones de las investigaciones sobre el uso de estos entornos en la enseñanza del álgebra arrojaban luces y sombras. El estudio de McArthur y Stasz (1990) sobre el uso de *Equation Solving* indica una mejora significativa entre los resultados de las pruebas suministradas antes y después del uso del programa. Sin embargo, también señalaba las limitaciones del tutor: "La primera era la limitación del tutor como una ayuda para el aprendizaje de porciones específicas de conocimiento necesarias para resolver problemas algebraicos simbólicos. El segundo problema fue la incapacidad del tutor para mejorar el modelo de matemáticas del estudiante" (p. 35). Más optimistas, Mariotti y Cerulli (2001) destacan el papel de mediador semiótico del programa *L'Algebrista* y muestran el uso de símbolos derivados de este entorno en las actuaciones de los estudiantes en lápiz y papel. En el caso del programa *Aplusix* también encontramos informes sobre sus virtudes. Nicaud, Bouhineau y Chaachoua (2004) apuntan su capacidad como un medio de validación de la equivalencia de expresiones, ya que el estudiante puede obtener la respuesta sin la mediación del profesor. Mafei y Mariotti (2006) concluyen que no sólo mejoran las habilidades en el cálculo algebraico, sino también en el nivel metacognitivo, pues se observa una evolución en la toma de conciencia y autocontrol de los estudiantes.

Para el análisis de los programas empleados en la enseñanza de la resolución de problemas, centraremos nuestra atención en el modo en que se expresan las cantidades y las relaciones entre ellas. Thompson (1989) describe un programa llamado *Word Problem Assistant* que pretende actuar como un tutor inteligente en la resolución de problemas verbales. El resolutor representa las cantidades mediante cuatro posibles iconos (número de objetos, razones externas, diferencias y razones internas)[9], les da un nombre en lenguaje natural y la unidad que las mide. Para indicar las relaciones entre cantidades el estudiante traza flechas entre ellas. Las operaciones no se plantean explícitamente, sino que son inferidas por el programa a partir de las relaciones que plantea el resolutor.

The Algebraic Proposer (Schwartz 1996) era un entorno informático adecuado para la resolución de problemas aritméticos y algebraicos que, al igual que el *Word Problem Assistant*, no necesitaba que los problemas se acoplaran a ningún modelo predeterminado. El resolutor representaba en una tabla las cantidades mediante un valor (que se situaba en la columna "How many"), una unidad (que se situaba en la columna "What") y un comentario (que se situaba en la columna "Notes"). El programa asignaba automáticamente una letra mayúscula a cada cantidad (que se situaba en la primera columna) que se utilizaba para definir las operaciones entre las cantidades. Antes de realizar la operación propuesta, el programa determinaba la unidad de la nueva cantidad y solicitaba confirmación al resolutor. Cuando el resolutor daba por resuelto el problema, el programa ofrecía un esquema en forma de árbol invertido que resumía las relaciones que se habían establecido entre las cantidades.

El entorno *Schemes for Problems Analysis* se diseñó para la resolución de problemas aditivos o multiplicativos de dos etapas (Hershkovitz y Nesher, 1999). El resolutor, antes de introducir los datos, debía elegir el esquema relevante para la situación de entre tres posibles: compartir el todo, compartir una parte y jerárquico. Una vez seleccionado el esquema, debía determinar el papel de cada componente; introducir los valores de las

[9] Traducimos *rate* y *ratio* como razón externa y razón interna, respectivamente, aunque también podíamos haber usado tasa y razón.

cantidades conocidas y su unidad; y determinar qué cantidades eran desconocidas. El programa pedía la confirmación del esquema seleccionado atendiendo a la coherencia de las unidades de forma similar a como lo hacía *The Algebraic Proposer*. Por último, el usuario escribía los cálculos necesarios para alcanzar el resultado.

2.4. EL USO DE LA HOJA DE CÁLCULO EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

Desde la aparición de las primeras hojas de cálculo electrónicas a principio de la década de los 80 se observó su potencial para la enseñanza de la resolución de problemas verbales.

> La hoja electrónica de cálculo puede ser usada para complementar el estudio de los problemas verbales en álgebra, trigonometría y cálculo. Estos problemas pueden ser formulados en la hoja de cálculo usando formatos comúnmente adoptados para obtener soluciones algebraicas. Las capacidades "¿Y si...?" de la hoja de cálculo fomentan la experimentación de ensayo y error, tanto en las resoluciones como al examinar los efectos que los cambios en los parámetros tienen en las soluciones. (Arganbright, 1984, p. 187)

Capponi y Balacheff (1989) afirman que el uso de la hoja de cálculo requiere de la manipulación de expresiones con letras, pero que el carácter algebraico de estas manipulaciones no es evidente. Identifican dos problemas del uso de la hoja de cálculo en la enseñanza: la prioridad que el entorno da al cálculo y la necesidad de integrar en las expresiones de la hoja de cálculo la sintaxis del álgebra y la de la hoja de cálculo[10]. La prioridad en el cálculo puede inducir a los estudiantes a interpretar las fórmulas como descripciones de cálculos numéricos, en lugar de relaciones entre datos.

Friedlander (1996, 1999) concluye que la resolución de problemas[11] con la hoja de cálculo favorece que los estudiantes busquen esquemas, construyan expresiones algebraicas, generalicen y justifiquen conjeturas; pues el entorno ofrece ventajas en la transición gradual de la aritmética al álgebra como:

> - liberan al estudiante de la tarea de los cálculos y manipulaciones algebraicas,
> - expanden el campo de los conceptos de álgebra que pueden adquirirse en este nivel,
> - permiten un movimiento libre de vaivén entre el mundo de los números y el del álgebra,
> - presentan un medio en el cual el uso del álgebra es una necesidad natural, más que un requisito arbitrario. (Friedlander, 1996, p. 71)

---

[10] La hoja de cálculo *Multiplan*, empleada en el estudio, utilizaba la notación F1C1 en lugar de la notación A1, usada por defecto en *Excel 2003*. En la notación F1C1 la referencia a las celdas dentro de una fórmula se hace tomando como origen la celda donde se introduce la fórmula. Por ejemplo, para sumar uno al valor presente en una celda que se encuentra una fila por encima y una columna a la derecha, deberíamos escribir =F(-1)C(1)+1. La notación ofrece ventajas en la copia y pegado por arrastre de fórmulas, ya que la expresión permanece invariable. Los problemas de sintaxis que se apuntan están ligados a la notación F1C1: "Son dos sintaxis distintas que se reencuentran y mezclan en una escritura como '=L(-2)C * (2 + L(+ 1)C(- 1)'. Particularmente, todos los paréntesis no tienen aquí la misma significación ni la misma función" (Capponi y Balacheff, 1989, p. 207).

[11] Friedlander utiliza lo que llama *superproblemas* y los define como "un cúmulo de preguntas o problemas relacionados con una misma historia (la situación del problema)" (Friedlander, 1996, p. 72.). En ningún caso se trata de problemas verbales aritmético-algebraicos. De hecho Friedlander (1996) presenta los superproblemas como una alternativa en la enseñanza del álgebra al uso de los problemas verbales.

Para el autor, el uso de fórmulas para producir ejemplos numéricos pone de manifiesto el carácter generalizador de las expresiones algebraicas. Sin embargo, también indica que las potencialidades de la hoja de cálculo pueden convertirse en obstáculos: "Así, la generación de datos numéricos en gran cantidad puede provocar un exceso de confianza en la 'razonabilidad'[12] de la salida y disminuir la necesidad de una comprensión en profundidad del problema en cuestión" (Friedlander, 1999, p. 344).

En Friedlander y Tabach (2001) y Tabach y Friedlander (2004) se ofrece una descripción de las formas en las que los estudiantes expresan la generalización en la hoja de cálculo y su relación con la habilidad para generalizar algebraicamente. Con este fin establecen una categorización de las fórmulas que sirve para indicar la habilidad de los estudiantes a la hora de generalizar algebraicamente. Distinguen entre: usar exclusivamente números, fórmulas recursivas (expresa una relación entre dos números consecutivos en una secuencia), fórmulas explícitas (usan una sola variable, la independiente, para expresar la generalidad) y fórmulas multivariables (usan más de una variable para expresar la generalidad). Al relacionar los tipos de fórmulas anteriores con los equivalentes en álgebra encuentran: "En álgebra estándar, las fórmulas recursivas son herramientas menos efectivas para encontrar un número solicitado en una secuencia o para analizar y justificar propiedades de las secuencias […] Las fórmulas multivariables son consideradas frecuentemente un obstáculo para las actuaciones de los estudiantes en álgebra" (Tabach y Friedlander, 2004, p. 429). Concluyen que la potencia de la hoja de cálculo a la hora de generar grandes cantidades de números empleando cualquier tipo de fórmula, hace imposible establecer una jerarquía, válida en ambos entornos, de las habilidades necesarias para expresar generalización.

Tras las investigaciones centradas en actividades matemáticas de tipo generacional y metanivel/global[13], en Tabach y Friedlander (2008) se presenta un estudio sobre el uso de la hoja de cálculo para la enseñanza de habilidades transformacionales. En concreto se analizó la comprensión de la equivalencia de expresiones simbólicas al aplicar la propiedad distributiva. Para ello se diseñó una secuencia de enseñanza que incluía una actividad en hoja de cálculo, ejercicios con lápiz y papel y una última actividad de evaluación en la hoja de cálculo. La actividad inicial[14] pedía al estudiante que escribiera en la columna D la suma $=2\cdot A + 2\cdot B$ (en las columnas A y B había unos valores que había copiado previamente); que creara columnas idénticas (los valores debían ser

---

[12] Utilizaremos esta palabra, no presente en el *Diccionario de la Lengua Española* (Real Academia Española de la Lengua, 2001), para intentar reflejar el sentido del original donde se gasta *reasonability*, que en inglés podemos considerar como poco normativa. De hecho, el diccionario *The Oxford English Dictionary* (Simpson y Weiner, 1989) la considera rara y remite a *reasonableness*, que podríamos traducir por *sensatez*.

[13] Partiendo de la idea de álgebra como actividad, Kieran (2004, 2007) desarrolla un modelo que reduce a tres tipos las actividades escolares relacionadas con el álgebra: las actividades generacionales, las transformacionales y las actividades metanivel/global. "El foco de las actividades generacionales es la representación (y la interpretación) de situaciones, propiedades, modelos y relaciones" (Kieran, 2004, p. 23). Las actividades transformacionales incluirían, entre otras, la factorización, la sustitución algebraica o la resolución de ecuaciones. Las actividades de metanivel/global serían, en palabras de Kieran (2007, p. 714), "resolver problemas, modelar, generalizar patrones, comprobar y justificar, hacer predicciones y conjeturas, estudiar el cambio en una situación funcional" y precisa "actividades que podrían llevarse a cabo sin el uso de ninguna letra-símbolo algebraico".

[14] Las actividades se basan en que dos expresiones algebraicas serán equivalentes si producen el mismo resultado para cualquier número que se sustituya.

idénticos) a la columna D y que escribiera las fórmulas que había usado para conseguirlo. Los autores destacan que la integración de la hoja de cálculo (donde se realizan actividades generacionales y transformacionales) y del lápiz y papel (donde se realizan actividades transformacionales) en la secuencia de enseñanza permite a los estudiantes considerar las actividades al mismo tiempo como generacionales, transformacionales y metanivel/global. Sobre el uso de la hoja de cálculo en los momentos iniciales de la enseñanza de transformaciones simbólicas concluyen:

- Manifestó el significado numérico de las expresiones equivalentes.
- Promovió conexiones y transiciones entre secuencias numéricas y sus correspondientes simbolizaciones usando variables y expresiones.
- Creó un entorno experimental al permitir a los estudiantes comprobar y validar sus soluciones.
- Posibilitó que los estudiantes adoptaran varias trayectorias de aprendizaje, mientras participaban en actividades simbólicas significativas.
- Proporcionó un auténtico entorno para discusiones reflexivas espontáneas sobre el significado de los procesos de resolución y sus resultados. (Tabach y Friedlander, 2008, p. 45)

Ainley (1995) destaca (aunque no especifica cuáles son) las características de la notación de la hoja de cálculo, similar a la del álgebra, y el uso de su potencial gráfico como una posible vía de introducción a la generalización mediante una notación algebraica formal. El estudio describe la actuación de una pareja de estudiantes que se enfrenta a un problema de optimización. Se observa que los estudiantes aceptan la referencia a una celda como un recipiente de una forma cada vez más sofisticada. En principio la referencia a la celda se utiliza como un nombre más para la variable; a continuación, la perciben como un recipiente para un número potencial; y, por último, usan la referencia a la celda como un recipiente para un rango de números. Dentro del entorno de la hoja de cálculo la formalización tiene el claro propósito de generar más datos con los que mejorar la gráfica que representa la situación problemática. Concluye: “Conjeturamos que estas actividades dan a los niños un sentido del propósito y el poder de la formalización” (Ainley, 1995, p. 33).

Dejando de lado el uso de las representaciones múltiples, Wilson, Ainley y Bills (2004) identifican tres características ligadas al trabajo en la hoja de cálculo que apoyan la actividad generacional: centrarse en los cálculos, uso de notación y retroalimentación. En el entorno de la hoja de cálculo se necesita expresar el cálculo de una manera formal (centrarse en los cálculos), mientras que en lápiz y papel pueden hacerse de una forma idiosincrásica. Se necesita adoptar unas convenciones en la notación (uso de notación) para poder copiar y pegar por arrastre la fórmula. La hoja de cálculo ofrece respuesta inmediata (retroalimentación), lo que permite comprobar la validez de una fórmula. Estas tres características no aparecen de forma necesaria cuando se realizan las mismas actividades en lápiz y papel; sin embargo, las autoras afirman que: “Trabajar en una hoja de calculo fue un andamiaje suficiente para que los estudiantes de alto nivel corrigieran sus generalizaciones escritas” (Wilson, Ainley y Bills, 2004, p. 447).

En Wilson, Ainley y Bills (2005) y Wilson (2006) se presenta un estudio sobre la evolución del concepto de variable al aplicar una secuencia de enseñanza que utiliza la hoja de cálculo y lápiz y papel. Las actividades planteadas incluían generación de expresiones equivalentes, construcción de fórmulas para expresar una relación funcional y resolución de problemas verbales. La característica distintiva del estudio es la enseñanza de la asignación de nombres a columnas[15] cuando se trabaja en la hoja de cálculo. Sin embargo, algunas actividades se desarrollaron previamente con la intención de observar las actuaciones de los estudiantes cuando utilizaban referencias relativas. Una de las actividades previas consistía en introducir varias expresiones (entre otras 6*A2+12 y 5*(A2+1)+8) y encontrar aquélla que generaba números impares, probando valores en A2. Los estudiantes variaban el valor asociado a la variable independiente de dos formas: modificando el valor presente en A2 y generando una secuencia numérica en la columna A. En el primer caso, los estudiantes perciben que se puede introducir una rango de valores en la celda (lo que las autoras llaman *metáfora del cambio*) y que la fórmula no cambia. En el segundo, los estudiantes ven en la columna un rango de valores como una lista (lo que las autoras llaman *metáfora del arrastre*) y distintas fórmulas que refieren a diferentes celdas (A2, A3, A4…). La asignación de una letra a una columna produce los mismos efectos que los asociados a la metáfora del arrastre, pero utiliza una notación más próxima a la habitual. Las fórmulas que se generan al arrastrar la fórmula inicial refieren (internamente) a distintas celdas, pero en su forma superficial se observa siempre la misma letra. Concluyen que "los estudiantes dan nombre a las columnas con determinación y se refieren a las columnas nombradas de una manera que sugiere que están pensando en variables" (Wilson, 2006, p. 129) y que "dar nombre a una columna puede, potencialmente, ayudar a desarrollar en los estudiantes un sentido más claro de la notación como una variable" (Wilson, Ainley y Bills, 2005, p. 327).

Haspekian (2005a, 2005b) analiza la construcción de conocimiento en el entorno de la hoja de cálculo y la integración de la tecnología partiendo de un enfoque antropológico y asumiendo la teoría de la instrumentación. Identifica algunos potenciales y restricciones de la hoja de cálculo que posibilitan que se convierta en un instrumento matemático para los estudiantes. Expondremos las conclusiones de la autora respecto a: las diferencias entre la variable en los lenguajes del álgebra y de la hoja de cálculo; la definición de nombres para rangos de celdas y la utilización de referencias mixtas como parámetros

En el lenguaje del álgebra las variables se representan mediante un símbolo (una letra) conectado a un conjunto de valores posibles y existe en referencia a ese conjunto. En el entorno de la hoja de cálculo una variable también se representa mediante un símbolo y existe en referencia a un conjunto de valores que se muestra a través de un intermediario, el *argumento de celda*, que ofrece al mismo tiempo:

- una referencia general abstracta: representa la variable (de hecho la formula refiere a ella, haciéndole jugar el papel de variable);
- una referencia concreta particular: un número (en el caso que no haya nada, algunas hojas de cálculo le atribuyen un 0);
- una referencia geográfica (se trata de una dirección especial en la hoja);
- una referencia material (se trata de un compartimento de la parrilla, algunos estudiantes pueden verlo como una caja). (Haspekian, 2005a, p. 121)

[15] En el apartado 3.3.1. mostramos cómo asignar un nombre a un rango de celdas.

Mientras una variable en álgebra sólo tiene representación abstracta, en el la hoja de cálculo tiene cuatro representaciones[16]. Para señalar estas diferencias, la autora da el nombre de *variable-celda* a la variable en el entorno de la hoja de cálculo.

Otra característica interesante de la hoja de cálculo está ligada al uso conjunto de la copia y pegado por arrastre, la definición de nombres[17] y la computación automática de las fórmulas. Podemos asignar una letra a un rango de celdas (una fila/columna o fragmento de fila/columna) de la hoja de cálculo[18]. Por ejemplo, si asignamos la letra *n* al rango A1:A3 e introducimos la fórmula =2*n en la celda B1, el programa calculará el doble del valor presente en A1, pues es la celda del rango A1:A3 que se encuentra en la línea 1. Si copiamos por arrastre la celda B1 en B2 y B3, se generan las mismas fórmulas, =2*n, pero la hoja de cálculo interpreta que se hace referencia a las *n* presentes en las líneas 2 y 3, respectivamente. La autora indica:

> Haciendo esto, generamos otra noción de variable: esta vez, la variable es *n* y el intermediario es un número finito de "argumentos de celda", cada uno de ellos tiene las características de una variable-celda. Con todo, esta "variable-grupo" no es un mero grupo de variables-celda colocadas una junto a la otra, el hecho de que estén unidas por el mismo nombre *n* añade una nueva dimensión a esta noción de variable: la multiplicidad numérica. Esta dimensión lleva consigo una concepción de variable muy próxima a la tradicional. (Haspekian, 2005a, p.122)[19]

Indicaremos por último que la autora relaciona la distinción variable/parámetro con la que existe entre referencias relativas (como A1) y absolutas (como A1) y concluye "la noción de parámetro, como una variable del problema, surge no sólo a través de la celda sino también a través del gesto de la recomputación automática de la hoja" (Haspekian, 2005a, p.122).

Dettori, Garuti y Lemut (2001) identifican los aspectos del álgebra que se desarrollan en la escuela secundaria e indican los que pueden ser introducidos usando la hoja de cálculo mediante la resolución de problemas verbales. Su estudio se centró en aquello que la hoja de cálculo permitía enseñar, más que en las posibilidades como instrumento de gran potencia de cálculo. Concluyen que las nociones algebraicas que se pueden desarrollar usando la hoja de cálculo para resolver problemas verbales son: usar

---

[16] En su tesis doctoral, Haspekian (2005b) aclara la diferencia entre referencia geográfica y material: una variable en la hoja de cálculo es localizable mediante una dirección (referencia geográfica) y puede ser localizada (referencia material), lo que no debe confundirse con su dirección.

[17] El nombre que se asigna actúa como referencia absoluta, cuando se trata de una sola celda, o mixta cuando se trata de un rango de celdas. Al tratarse de una referencia no relativa, necesitamos introducirla desde teclado. Si hiciéramos referencia a ella mediante el ratón o las teclas de edición, se introduciría la referencia a la celda y no al nombre.

[18] Para ello, seleccionamos el rango de celdas; usamos la acción Insertar / Nombre / Definir; introducimos una letra en la casilla "Nombres en el libro" y pulsamos aceptar. Existe otra forma de hacerlo: seleccionamos el rango de celdas e introducimos la letra en el *cuadro de nombres*. El cuadro de nombres es una casilla situada a la izquierda de la barra de fórmulas que indica el nombre de la celda activa.

[19] Haspekian continúa señalando que esta funcionalidad no se había utilizado con finalidades pedagógicas hasta ese momento. Sin embargo, como hemos mostrado anteriormente, Wilson, Ainley y Bills (2005) publicaron un informe sobre los efectos de asignar un nombre a una columna en la evolución del concepto de variable. Conviene apuntar que las celdas continúan manteniendo sus nombres (su referencia) después de asignar una letra a la columna. Esto se traduce en que podemos hacer referencia a la letra o a las referencias relativas. Cuando se emplea el ratón o las teclas de edición para referir a las celdas, la hoja de cálculo asigna las referencias relativas.

relaciones y sintetizar ecuaciones, iniciar en el uso de variables e incógnitas, introducir al estudio de funciones, comprobar los resultados, razonar sobre el rango de la solución, generalizar los problemas mediante parámetros y aprender el lenguaje del álgebra.

En el desarrollo de cada uno de estos aspectos se exponen algunas limitaciones y ventajas del uso de la hoja de cálculo. La utilización de la hoja de cálculo puede ayudar a la hora de expresar las relaciones entre cantidades presentes en un problema. Sin embargo, no permite emplear ecuaciones, ya que el signo igual en la hoja de cálculo significa "asignación de un valor calculado a una celda, mientras que en álgebra indica relación"[20] (Dettori, Garuti y Lemut, 2001, p. 199). El aprendizaje del álgebra exige sintetizar las relaciones parciales entre cantidades en ecuaciones que describen el problema. La posibilidad que ofrece la hoja de cálculo de encontrar la solución mediante tanteo, puede desalentar al estudiante a la hora de realizar el esfuerzo de síntesis.

Las fórmulas implican los conceptos de variable y de función y las ecuaciones pueden verse como la comparación entre dos funciones. La ambigüedad del sentido de las letras cuando resolvemos problemas en la hoja de cálculo se observa en que "las letras dentro de las fórmulas cambian su significado cuando algunas fórmulas se combinan para formar una ecuación, pasando de valores genéricos que varían en un intervalo dado (variable) a valores bien determinados, aunque desconocidos (incógnitas)" (Dettori, Garuti y Lemut, 2001, p. 201). Por lo tanto, los conceptos de variable e incógnita pueden ser introducidos a partir de las operaciones realizadas en la hoja de cálculo. Sin embargo, los estudiantes no son capaces de comprenderlos de manera inmediata y necesitan de la ayuda del profesor para abstraerlos.

Las manipulaciones formales no se pueden llevar a cabo en el entorno de la hoja de cálculo, sólo podemos asociar significado a los símbolos. Tampoco es posible la lectura de una relación en cualquier dirección, ya que las relaciones en sí mismas no están presentes en la hoja de cálculo.

En definitiva, las autoras concluyen que el uso de la hoja de cálculo bajo la supervisión del profesor puede conducir a comprender lo que significa resolver una ecuación, incluso antes de que los estudiantes sean capaces de manipularlas algebraicamente, o a introducir habilidades cognitivas necesarias como la generalización, la abstracción y la síntesis. Sin embargo, el papel que le asignan es únicamente introductorio: "Estas consideraciones muestran que la hoja de cálculo puede empezar el viaje de aprendizaje del álgebra, pero no dispone de herramientas suficientes para acabarlo" (Dettori, Garuti y Lemut, 2001, p. 206).

El *Spreadsheet Algebra Project* fue un proyecto británico-mexicano que desarrollaron T. Rojano y R. Sutherland en la década de los 90. En una primera fase investigaron cómo dos grupos de estudiantes (uno británico y otro mexicano) de 10-11 años, sin conocimientos algebraicos previos, abordaban una secuencia de actividades centradas

[20] Aunque las autoras afirmen esto, encontramos que sí que existe el signo igual en el sentido de relación, no de asignación. Se trata de una función booleana que implementan las hojas de cálculo y que tiene el mismo signo (=) que el que se usa para la asignación. El interprete de la hoja de cálculo considera el uso que ha de hacer del signo igual por la posición que ocupa en la fórmula. Por ejemplo, si escribiéramos la fórmula =B1=B2 en la celda C4 se compararía el contenido de las celdas B1 y B2 ("igual comparador", el de la derecha) y en la celda C4 aparecería VERDADERO, si el valor presente en B1 y B2 coincide; o FALSO, si no coincide ("igual asignador", el de la izquierda).

en las ideas de función y función inversa, expresiones algebraicas equivalentes y la resolución de problemas verbales (Rojano y Sutherland, 1993). En la segunda fase se utilizaron actividades similares para analizar las actuaciones de dos grupos de estudiantes de 14-15 años con un largo historial de dificultades en el área de matemáticas (Sutherland y Rojano, 1993).

El esquema metodológico usado en el proyecto fue un estudio de casos longitudinal integrado por una entrevista previa, una secuencia de enseñanza y una entrevista posterior. El proyecto tenía la intención de:

- investigar la forma en que los alumnos usan el entorno de la hoja de cálculo para representar y resolver problemas algebraicos relacionando este hecho con sus experiencias aritméticas previas y su uso en evolución de un lenguaje simbólico,
- caracterizar los procesos de resolución de problemas por parte de los estudiantes a través de la dimensión aritmético-algebraica mientras evolucionan al trabajar en el entorno de la de hoja de cálculo. (Sutherland y Rojano, 1993, p. 354)

La secuencia de enseñanza se dividía en dos bloques: el primero de introducción y el segundo de problemas verbales. Las sesiones del bloque introductorio constaban fundamentalmente de actividades de construcción de funciones y funciones inversas, construcción de expresiones algebraicas equivalentes y generación de secuencias numéricas. El bloque de problemas verbales se componía de problemas que normalmente se resuelven de manera algebraica. Dentro de esta parte los estudiantes resolvían los problemas de acuerdo con el esquema:

- representar la incógnita mediante una celda de la hoja de cálculo;
- expresar las relaciones presentes en el problema en términos de esta incógnita;
- variar la incógnita para encontrar la solución. (Sutherland y Rojano, 1993, p. 356)

En las actividades se ofrecía ayuda con ejemplos o pistas para evitar la actuación del profesor-investigador. Las intervenciones del profesor durante las sesiones de enseñanza tuvieron la finalidad de:

- motivar a los alumnos a enfrentarse a los problemas por ellos mismos.
- motivar a los alumnos a usar un rango de números como variable de entrada de una función.
- enfatizar la generalidad de una relación simbólica.
- mantener a los alumnos atentos a la tarea. (Sutherland y Rojano, 1993, p. 356)

Las categorías para el análisis de los datos que se obtuvieron tanto de los antecedentes teóricos como de los datos se tipificaron del siguiente modo:

Categorías del apoyo prestado por el profesor

- no intervención
- proporcionar una pequeña pista
- intervención substancial

Categorías que caracterizan los procesos matemáticos utilizados por los estudiantes al resolver problemas

- dirigir la atención hacia la incógnita
- centrarse en expresar/comunicar/manipular generalidad matemática
    - en código aritmético
    - en código algebraico
- pensar con
    - objetos generales
    - objetos específicos de una situación
- generalización de una estrategia de solución (para problemas del mismo tipo)
- transferencia de una estrategia de solución (para problemas de diferente tipo). (Sutherland y Rojano, 1993, p. 359)

Las conclusiones obtenidas al comparar las actuaciones de los estudiantes de 14-15 años antes y después de la secuencia de enseñanza pueden resumirse en:

- un aumento de la percepción de todas las relaciones entre cantidades desconocidas y entre cantidades conocidas y desconocidas;
- el uso del simbolismo de la hoja de cálculo para expresar relaciones generales;
- la aparición de estrategias de prueba y error cuando los alumnos británicos trabajan en un entorno no informático;
- la integración de los método no algebraicos parte-todo y de ensayo y error con un método de la hoja de cálculo;
- una evolución hacia un “método más general y algebraico” consistente en ir de lo desconocido a lo conocido. (Rojano y Sutherland, 1993, p. 193)

Tomando los resultados ofrecidos en el conjunto del proyecto, que encontramos en Rojano (1996), Rojano y Sutherland (1993, 1997) y Sutherland y Rojano (1993), se observa que la hoja de cálculo ayuda a los alumnos a explorar, expresar y formalizar sus ideas informales. Las estrategias informales que utilizan van, en la mayoría de los casos, de lo conocido hacia lo desconocido. Esto supone una clara manifestación de una manera no algebraica de pensar. Estas estrategias informales son la parte/todo (dividir el todo entre las partes) y la prueba/refinamiento (dar un valor a la incógnita y variar este valor hasta que se cumplen las condiciones). Sin embargo, el método de la hoja de cálculo no debe considerarse como una simple estrategia de ensayo y error. La toma de conciencia de las relaciones entre valores desconocidos y conocidos, la elección de la incógnita que hay que variar y la obtención de su valor numérico atendiendo a las restricciones que impone el problema son la base de la diferencia entre el método de la hoja de cálculo y la estrategia de prueba y error basada en la experiencia numérica del mundo aritmético. Se señala así la similitud entre el método de la hoja de cálculo y el método algebraico, pues en la hoja de cálculo se promueve una producción de relaciones parciales elementales que incorporan incógnitas al mismo nivel que los datos. El uso de la incógnita en un entorno numérico podría considerarse como el inicio de la aceptación de operar con la incógnita simbólica en el álgebra tradicional. En definitiva, se observa la evolución de un pensamiento en términos de lo específico a un pensamiento referido a lo general. De hecho, al final del estudio los alumnos eran capaces de resolver problemas algebraicos que no podían resolver al principio del mismo.

3. El modelo de competencia

3.1. EL MÉTODO CARTESIANO

La competencia en la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos depende básicamente de tres componentes: la competencia en el lenguaje natural en el que está escrito el enunciado; la competencia en el lenguaje del álgebra en el que se representará la ecuación y la competencia en el proceso de conversión del texto expresado en lenguaje natural a lenguaje algebraico (Filloy, Puig y Rojano, 2008). De forma global, podemos describir las exigencias anteriores mediante lo que se hace al emplear el método cartesiano (en adelante, MC). El método cartesiano es la manera en la que habitualmente se introduce la resolución de problemas mediante el uso del lenguaje algebraico en los textos de álgebra (Filloy, Rojano y Puig, 2008). Le damos este nombre porque Polya (1966) tituló "El patrón cartesiano" al capítulo en el que reescribió las reglas cartesianas para que se pudieran ver como pautas de resolución de problemas que usan el SMS del álgebra. Presentamos el MC desglosado en una secuencia ordenada de pasos[1]:

1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2) Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3) Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4) Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5) Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6) Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7) Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema. (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 330)

---

[1] Los cuatro primeros pasos proceden de una reelaboración de las *Regulae ad directionem ingenii* propuestas por R. Descartes, el quinto lo podemos encontrar en *La Géométrie*, también de Descartes, y el resto proceden de un análisis de los autores indicados.

En el primer paso del MC se especifica que debe realizarse “una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades”. Para una completa descripción debemos precisar qué entendemos por lectura analítica y por reducir a una lista de cantidades y relaciones entre cantidades. Partimos de que el enunciado de un problema es un texto en lenguaje natural referido a un mundo que incluye cantidades, relaciones entre cantidades y elementos propios del contexto. La lectura analítica supone convertir el texto del enunciado del problema en otro texto en lenguaje natural, pero en el que se incluyen únicamente cantidades y relaciones entre cantidades. En este proceso se produce una secuencia de textos que en ocasiones supone la exploración del mundo en busca de cantidades no presentes en el enunciado y en otros casos la eliminación de los elementos superfluos asociados al enunciado. Durante la lectura analítica pueden aparecer cantidades o relaciones que no estaban presentes explícitamente en el enunciado y que son consecuencia de aplicar estructuras conceptuales a las que hemos podido dar sentido en el contexto del problema.

Los pasos segundo, tercero y cuarto traducen el texto obtenido tras la lectura analítica a otro texto en el sistema de signos del álgebra. Estos tres pasos exigen competencia en las reglas de generación de expresiones bien formadas en el sistema de signos del álgebra, el mantenimiento de la semántica del texto al que hemos convertido el problema tras la lectura analítica y “lo que Descartes llamaba ‘expresar una cantidad de dos maneras diferentes’ (Descartes, 1701, p. 66), que es lo que da sentido a la construcción de la ecuación, y constituye el significado algebraico del signo igual en una ecuación” (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 330).

Los pasos quinto y sexto requieren competencia en la transformación de un texto en un sistema de signos exclusivamente algebraico en otro texto en el mismo sistema de signos con la intención de reducir la ecuación (o sistemas de ecuaciones) a una de las cuatro formas canónicas posibles sobre las que se aplicarán una de las cuatro transformaciones viéticas o eulerianas (Solares, 2007)[2] que nos permitirán determinar una de las cantidades a las que se ha asociado una letra (y a partir del valor de esta letra, el resto de cantidades a las que se asoció una expresión algebraica).

El último paso supone la incorporación de los valores obtenidos a la situación propuesta en el enunciado, y de la que habíamos partido, para determinar la adecuación del resultado, lo que exige competencia en el conocimiento del contenido del problema.

Evidentemente, el MC no proporciona todas las competencias que deben ponerse en juego para resolver un problema verbal. Describe las más importantes, pero el resolutor necesitará recurrir a otras, en función de las características del problema que quiera resolver. Así, en la lectura analítica, necesitará de estructuras conceptuales propias de los contextos que definen las distintas subfamilias de problemas verbales (como el hecho de que un contexto de edades el tiempo transcurrido se relaciona con la edad

---

[2] Según Solares (2007) todas las ecuaciones lineales de una incógnita pueden reducirse a una de las cuatro formas canónicas: $x\ O\ \theta = \omega$, $(x\ O_1\ \theta)\ O_2\ \rho = \omega$, $(x\ O_1\ \theta)\ O_2\ \rho = x\ O_3\ \omega$ y $(x\ O_1\ \theta)\ O_2\ \rho = (x\ O_3\ \omega)\ O_4\ \varphi$ (donde x es una incógnita, las letras O son operaciones y las letras griegas son números) aplicando las transformaciones algebraicas propuestas en su gramática. Llama transformaciones viéticas o eulerianas a las que se aplican sobre las formas canónicas para resolver la ecuación. Las transformaciones viéticas serían las que permiten pasar elementos al otro término de la ecuación invirtiendo operaciones, mientras que las eulerianas serían las que aíslan la letra efectuando la misma operación a ambos lados de la ecuación.

inicial y final mediante una relación aditiva o que la diferencia de edad de dos personas se mantienen constante en el transcurso del tiempo). La estructura del problema, entendida como el entramado de relaciones entre cantidades obtenida tras la lectura, será otra característica que puede exigir del uso de nuevas competencias.

Para describir la estructura de los problemas, recurrimos a unos diagramas con forma de grafo que hemos adaptado de la idea de grafo trinomial propuesta por Fridman (1990)[3]. Estos grafos representarán una lectura analítica de un problema verbal aritmético-algebraico. Las cantidades se representarán mediante los vértices y las relaciones mediante las aristas. Para diferenciar las cantidades conocidas de las desconocidas asociamos vértices oscuros circulares a las primeras y vértices claros cuadrangulares a las segundas. Las aristas podrán tener cualquier número de vértices, pero lo más habitual será encontrar: aristas de dos vértices[4] (para dar cuenta de las relaciones binarias de igualdad), aristas de tres vértices (para dar cuenta de las relaciones ternarias aditivas y multiplicativas), aristas de cuatro vértices (para dar cuenta de las relaciones de proporcionalidad) y aristas de seis vértices (para dar cuenta de las relaciones de proporcionalidad compuesta). También podemos encontrar aristas con un número de variable de vértices, ligadas a relaciones que provienen de estructuras conceptuales como la relación aditiva entre las partes y el todo.

En definitiva, el grafo supone una representación topológica de las relaciones entre cantidades. Con la finalidad de añadir información, más allá de la conexión entre cantidades, tomamos el convenio de utilizar líneas verticales para las aristas aditivas y líneas horizontales para la multiplicativas y de proporcionalidad. Las relaciones de igualdad, por ser las únicas de dos vértices, no tendrán una orientación específica. La disposición de los vértices dentro de una arista aditiva será tal que el vértice inferior representará a la cantidad que se obtendría como suma de las otras dos. La distribución de los vértices dentro de una arista multiplicativa será tal que el vértice situado más a la derecha representará a la cantidad que se obtendría como producto de las otras dos. En las aristas que representan una relación de proporcionalidad las cantidades se ubicaran como si se expresaran razones internas. No obstante, podemos encontrar situaciones en las que el entramado de relaciones nos impidan trazar líneas verticales u horizontales para representar a las relaciones aditivas y multiplicativas, respectivamente. En ese caso se atenderá a la forma en la que la arista entra en el vértice inferior de la derecha. Si lo hace horizontalmente, la arista representará a una relación multiplicativa; si lo hace de otra forma, la arista representará a una relación aditiva.

Ejemplificaremos el uso de los grafos utilizando los problemas *Conejos y gallinas* y *Trajes y abrigos*.

Conejos y gallinas

> En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

---

[3] El nombre de grafos trinomiales proviene de que Fridman únicamente considera aquellos problemas en los que todas las cantidades (conocidas o desconocidas) están ligadas por relaciones ternarias. Estos grafos trinomiales serían una evolución de los *modelos estructurales* propuestos por el mismo autor (Fridman, 1967).

[4] También llamadas aristas binarias, ternarias, etc.

Una posible lectura analítica del enunciado lo reduciría a las cantidades conocidas: número de cabezas, N (20); número de patas, P (52); número de patas de un conejo, Ppc (4) y número de patas de una gallina, Ppg (2). Y las desconocidas: número de conejos, Nc; número de gallinas Ng; número de patas de los conejos, Pc y número de patas de las gallinas, Pg. Estas cantidades se relacionarían mediante: $N = Nc + Ng$ y $P = Pc + Pg$; $Pg = Ng \cdot Ppg$ y $Pc = Nc \cdot Ppc$. Esta lectura analítica se representaría mediante el grafo de la Figura 1.

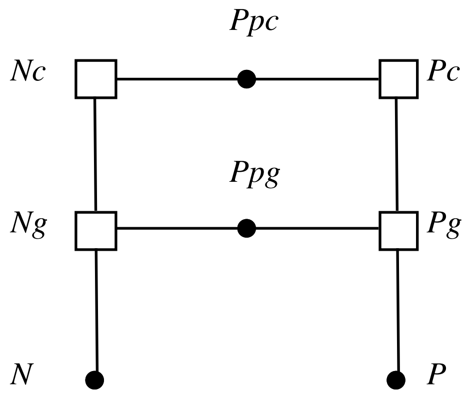


Figura 1. Una lectura analítica del problema *Conejos y gallinas*.

Trajes y abrigos

> Se van a utilizar cuatro piezas de tela de 50 m cada una para hacer 20 trajes que necesitan 3 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer abrigos. Si para hacer cada abrigo se necesitan 4 m, ¿cuántos abrigos pueden hacerse?

En este caso podríamos identificar las cantidades conocidas: número de piezas de tela, P (4); número de trajes, T (20); metros de tela por abrigo, Mua (4); metros de tela por traje, Mut (3) y metros de tela por pieza, Mup (50). Y las desconocidas: número de abrigos, A; metros de tela para el total de abrigos, Ma; metros de tela para el total de trajes, Mt y metros totales de tela, Mp. Estas cantidades se relacionaría mediante: $Mp = Ma + Mt$; $Ma = Mua \cdot A$; $Mt = Mut \cdot T$; $Mp = Mup \cdot P$. Esta lectura analítica se representaría mediante el grafo de la Figura 2.

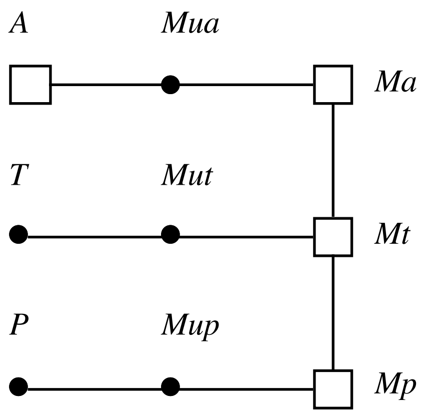


Figura 2. Una lectura analítica del problema *Trajes y abrigos*.

En la lectura que hemos descrito del problema *Conejos y gallinas*, ninguna de las cantidades desconocidas pueden calcularse a partir de las conocidas. En el grafo, esta circunstancia se traduce en que en todas las aristas hay más de un vértice claro. Sin embargo, en la lectura del problema *Trajes y abrigos*, sí que sería posible determinar directamente una cantidad desconocida a partir de otras conocidas y de forma secuencial calcular la totalidad de cantidades desconocidas. En la representación mediante grafos de la lectura analítica, la posibilidad de calcular cantidades desconocidas a partir de conocidas se deduce de la presencia aristas en las que únicamente hay un vértice claro; mientras que el carácter secuencial del proceso se expresaría mediante la posibilidad de ir oscureciendo estos vértices claros. De hecho, podríamos hacer el juego formal de abandonar la resolución mediante el método cartesiano en el segundo problema, identificar el análisis[5] del problema en la lectura y pasar a la síntesis del mismo resolviéndolo en el sistema matemático de signos de la aritmética (SMSari). Sin embargo, en el problema *Conejos y gallinas* no tendríamos más remedio que continuar avanzando en los pasos del MC. Parece coherente, a la luz de la observación anterior, dar el nombre de grafo algebraico a aquéllos en los que no es posible oscurecer vértices claros (como en el problema *Conejos y gallinas*) y aritméticos a aquéllos en los que se pueden oscurecer todos los vértices claros (como en el problema *Trajes y abrigos*). Sin embargo, esto no significa que podamos calificar como aritméticos o algebraicos a dichos problemas: lo que es aritmético o algebraico es la lectura analítica del problema o el grafo que la representa.

El grafo también permite la representación de los pasos 2, 3 y 4 del MC (Filloy, Rojano y Puig; 2008), si, por obligación o devoción, deseamos avanzar en la resolución del problema siguiendo el MC. La expresión del paso 2 en un grafo se refleja en el oscurecimiento de un vértice claro (uno o más) que representa a la cantidad desconocida a la que se le asigna una letra (ver Figura 3).

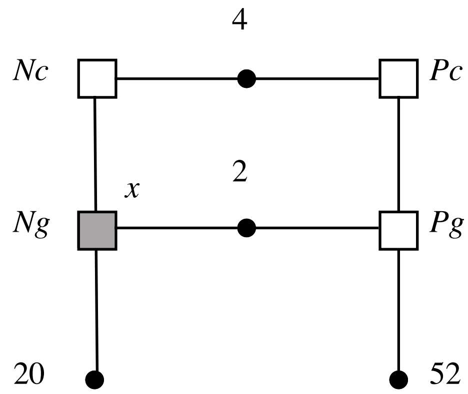


Figura 3. El paso 2 en el problema *Conejos y gallinas*.

En el tercer paso (ver Figura 4), oscurecemos el resto de vértices claros atendiendo de forma sucesiva a la presencia de aristas con todos los vértices oscuros menos uno, lo que simbolizaría la representación de otras cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas.

---

[5] El método de análisis y síntesis para la resolución de problemas verbales se encuentra explicado de manera más detallada en Puig y Cerdán (1988). De manera concisa, podemos decir que el análisis es el camino que lleva desde la incógnita a los datos y la síntesis el que va de los datos a la incógnita. El análisis se encarga de proporcionar un plan de solución y la síntesis ejecuta el plan.

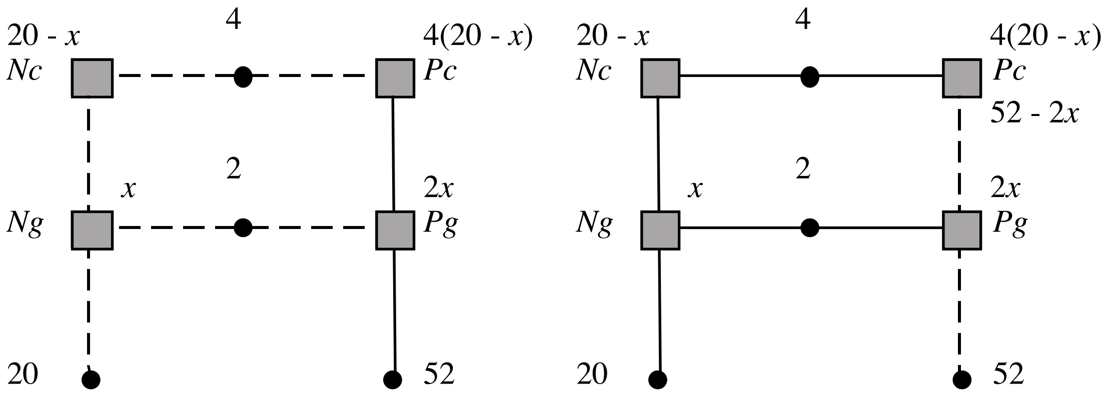


Figura 4. El paso 3 en el problema *Conejos y gallinas*.

Sin embargo, el proceso de oscurecimiento de vértices terminaría sin haber necesitado emplear todas las aristas, como se muestra en el grafo de izquierda de la Figura 4, donde hemos utilizado líneas discontinuas para indicar las aristas que se han considerado. Al oscurecer un vértice que ya era oscuro (ver grafo de la derecha de la Figura 4), representamos una misma cantidad de dos formas distintas y planteamos de esta forma una ecuación (ver Figura 5) que da cuenta de lo exigido en el paso 4.

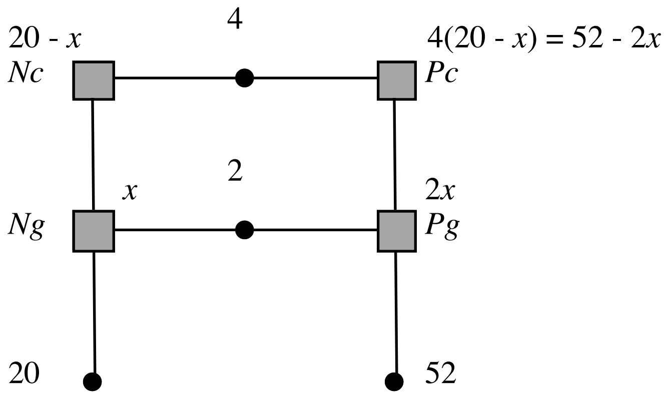


Figura 5. El paso 4 en el problema *Conejos y gallinas*.

Podemos asignar varias letras a otras tantas cantidades desconocidas en la lectura que hemos realizado del problema *Conejos y gallinas*, lo que se representaría en el grafo oscureciendo varios vértices claros. En los grafos de las Figuras 6, 7 y 8, representamos los pasos 2, 3 y 4 del MC en el caso que usáramos dos letras para resolverlo.

Paso 2:

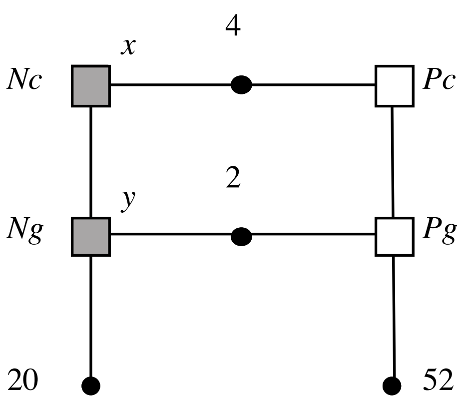


Figura 6. El paso 2 del problema *Conejos y gallinas* usando dos letras.

Paso 3:

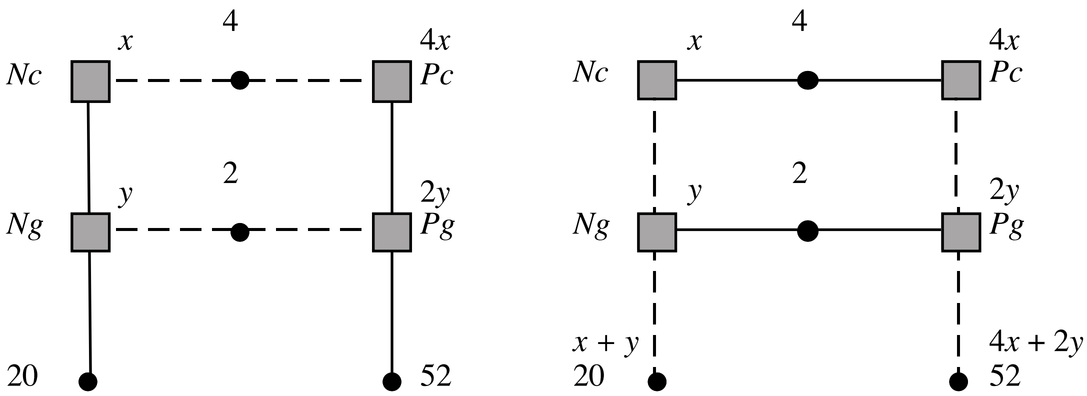


Figura 7. El paso 3 del problema *Conejos y gallinas* usando dos letras.

Paso 4:

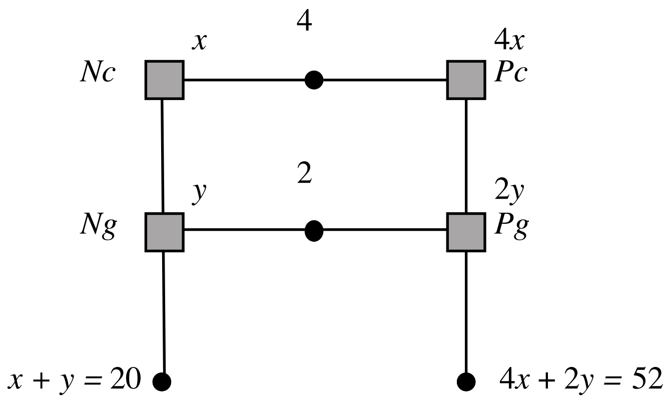


Figura 8. El paso 4 del problema *Conejos y gallinas* usando dos letras.

3.2. EL MÉTODO DE INFERENCIAS ANALÍTICAS SUCESIVAS

Aunque el método que acabamos de exponer es el que esperaríamos que utilizara un resolutor ideal, hemos de contemplar la posibilidad de que la competencia en la resolución de problemas verbales se alcance de una forma distinta en otros entornos culturales, momentos históricos o niveles educativos. Los sujetos de nuestro estudio únicamente habían sido instruidos (y suponemos que habían utilizado) en la resolución aritmética de problemas verbales hasta poco antes de iniciar nuestra investigación. Como consecuencia será pertinente determinar la competencia aritmética en la resolución de problemas que vendría definida por el llamado método de inferencias analíticas sucesivas (MIAS). El MIAS se concibe como una secuencia de transformaciones de la situación presentada en el enunciado de un problema en nuevos estados posibles del mundo, mediante la aplicación de inferencias lógicas, hasta alcanzar una que se reconoce como solución del problema (Rubio, 1994; Filloy, Rojano y Rubio, 2001; Filloy, Rojano y Puig, 2008). Ejemplificaremos la aplicación del MIAS resolviendo nuevamente el problema *Conejos y gallinas*.

- Se plantea la situación hipotética de determinar el número de gallinas si sólo hubiera gallinas en el corral. Para ello dividimos el número de patas de los animales de la granja entre el número de patas que tiene cada gallina (52/2 = 26).

- Todos los animales tienen una cabeza en cualquier estado posible del mundo. Por lo tanto, el hecho de que haya 20 cabezas en la granja, implica que hay 20 animales.
- El número de gallinas calculadas en la situación hipotética (26) supera el número de animales que hay en la granja (20). Como la parte no puede ser mayor que el todo, concluimos que sobran 6 gallinas (26 – 20 = 6), con sus correspondientes 12 patas. Estas 12 patas forman 6 grupos de dos patas que uniremos a 6 gallinas de las 20 que quedan para obtener 6 animales de cuatro patas. Es decir, 6 conejos con su correspondientes 24 patas. Esto nos permite inferir que el exceso de gallinas de la situación hipotética será igual al número de conejos en la situación planteada en el enunciado (6).
- Por último, calcularemos el número de gallinas restando el número de conejos al número de animales (20 – 6 = 14).

En la resolución anterior utilizamos las cantidades conocidas: número de cabezas, N (20); número de patas, P (52) y número de patas por gallina, Ppg (2). También empleamos las cantidades desconocidas: número de conejos, C; número de gallinas, G; número de gallinas si se considera que no hay conejos, Gh; exceso de gallinas si se considera que no hay conejos, Egh. Estas cantidades se relacionarían mediante $P = Ppg \cdot Gh$, $Gh = N + Egh$; $Egh = C$ y $N = C + G$. Podemos representar el entramado de relaciones entre cantidades mediante el grafo de la Figura 9.

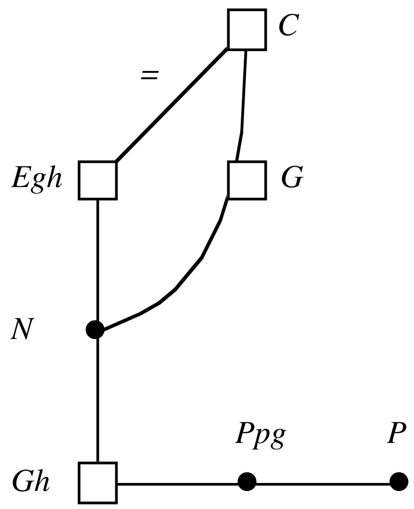


Figura 9. Una lectura aritmética del problema *Conejos y gallinas*

Observamos que el grafo de la Figura 9 es aritmético, mientras que el asociado a la lectura del mismo problema en el apartado anterior (ver grafo de la Figura 1) era algebraico. Esto vuelve a poner de manifiesto que lo que se puede calificar de aritmético o algebraico es el grafo o la solución, pero no el problema.

3.3. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO

Cuando resolvemos problemas verbales aritmético-algebraicos en la hoja de cálculo nos vemos sometidos a las restricciones que nos impone el entorno. Nos encontramos con un nuevo lenguaje que no es el del álgebra, aunque tiene elementos comunes, y con una estructuración del espacio físico que impondrá unas limitaciones no presentes cuando utilizamos lápiz y papel. Evidentemente, en estas condiciones no es posible utilizar el

MC[6]. La competencia en la resolución de problemas en la hoja de cálculo la definiremos mediante el que llamaremos método de la hoja de cálculo (en adelante, MHC). Este método lo obtendremos adaptando el MC a las restricciones que impone el entorno y por lo tanto nos permitirá realizar una valoración de lo que desde el punto de vista de la enseñanza uno puede hacer por el otro.

Como expusimos al introducir el MC, son necesarias más competencias, aparte de las que señala el propio método, para poder resolver problemas verbales. Algunas se asocian al conocimiento particular de las situaciones reales que se describen en los problemas; otras al uso del lenguaje natural en el que se expresan los enunciados o del lenguaje algebraico en el que se expresan la ecuaciones. Al introducir un entorno nuevo, como es la hoja de cálculo, no podemos dejar de describir las habilidades necesarias para poder utilizarlo ligadas al lenguaje de las expresiones de la hoja de cálculo o al conocimiento del funcionamiento del propio programa. Para poder establecer la competencia en un sistema de signos podemos recurrir a la elaboración de una gramática, pues la gramática de un lenguaje es "una descripción de la competencia intrínseca de un hablante-oyente ideal" (Chomsky, 1965, p. 4). Evidentemente, esto implica considerar que el sistema de signos de la hoja de cálculo es un sistema de signos lingüísticos, como pondrá de manifiesto el hecho de que podamos construir la gramática.

En definitiva, describiremos las características de la hoja de cálculo que es necesario conocer para poder utilizarla para resolver problemas verbales; construiremos un gramática generativa transformacional, basada en las elaboradas por Kirshner (1987) y Solares (2007), para dar cuenta del nivel sintáctico del lenguaje de la hoja de cálculo y utilizaremos las ideas de G. Frege descritas en Frege (1973) y Drouhard y Teppo (2004) como base de un análisis que nos permita describir el nivel semántico del mismo.

3.3.1. Características de la hoja de cálculo

Una hoja de cálculo es un programa que permite manipular datos numéricos y alfanuméricos dispuestos en forma de tablas. Los datos se introducen en celdas que son espacios rectangulares que se forman en la intersección de una fila y una columna. Cada fila tiene asociada un número y cada columna una letra. En la hoja de cálculo *Excel 2003*, las columnas pueden tomar una letra entre A e IV y las filas un número entre 1 y 65536. Las celdas se identifican con una referencia única (por ejemplo, A5) que se construye combinando la letra de la columna y el número de la fila a la que pertenece. El programa siempre muestra una celda de borde resaltado a la que llamamos celda activa que es la encargada de almacenar cualquier carácter alfanumérico introducido desde el teclado. Podemos cambiar de celda activa mediante las teclas de edición, haciendo clic con el ratón en otra celda, o introduciendo la referencia de una celda en el *cuadro de nombres*[7].

---

[6] Es posible, si consideramos las celdas como líneas de un editor de texto. Nos encontraríamos ante una réplica del uso del lápiz y papel, donde el lápiz sería el teclado y el papel, la cuadrícula de la hoja de cálculo que se muestra en la pantalla. La única característica digna de estudio, en este caso, sería la sintaxis del lenguaje del álgebra confinada en una sola línea. La modificación de la prioridad de las operaciones en estas expresiones algebraicas debería hacerse mediante paréntesis que se omiten habitualmente al ser sustituidos por indicadores posicionales de yuxtaposición vertical o diagonal.

[7] A la izquierda de la barra de fórmulas se encuentra el cuadro de nombres que muestra la referencia de la celda activa, mientras que a la derecha de la barra de fórmulas se presenta el contenido de la celda activa.

Para poder realizar un cálculo necesitamos introducir una fórmula. *Excel 2003* interpreta que lo que se introduce en una celda es una fórmula si empieza por el signo igual[8]. Las fórmulas están formadas por los símbolos de operación y números o referencias a celdas (por ejemplo, =A5*3+B1). Cuando se introduce una fórmula en una celda, y siempre que no contenga ningún error de construcción, el programa[9] devolverá un valor numérico o lógico. A partir de este momento, en la celda se muestra el valor que se obtiene al evaluar la fórmula y ésta queda oculta. No obstante, es posible verla en la *barra de fórmulas* cuando se selecciona, como celda activa, la celda donde se ha introducido la fórmula. También podemos verla al editar (para editar una celda debemos hacer doble clic sobre ella) la celda.

Hemos mencionado que las fórmulas pueden contener números o referencias a celdas. Para introducir las referencias a celdas en las fórmulas tenemos tres métodos: 1) escribir la referencia mediante el teclado; 2) situarnos sobre la celda a la que queremos referir mediante las flechas de las teclas de edición e introducir mediante el teclado un símbolo de operación o pulsar *Intro*; 3) hacer clic con el ratón sobre la celda a la que queremos referir. Cualquiera de estas tres formas de referir a las celdas consigue los mismos fines y por lo tanto podrán ser usadas indistintamente por un usuario competente.

Uno de los potenciales de la hoja de cálculo reside en la forma en que el programa gestiona la copia y pegado de celdas que contienen fórmulas con referencias a otras celdas. Al realizar una copia y pegado no se produce una simple duplicación del contenido. En el caso en que existan referencias relativas[10] en la fórmula copiada, la hoja de cálculo aplicará una corrección para tener en cuenta el desplazamiento entre la celda inicial (la celda de la que se copia) y la final (sobre la que se pega). Si, por ejemplo, copiamos la celda B4, que contiene la fórmula =A1+1, y la pegamos en la celda C6, se generará la fórmula =B3+1. La sustitución de A1 por B3 se debe a que para ir de una a otra debemos desplazarnos el mismo número de filas y columnas que para ir de B4 (celda inicial) a C6 (celda final).

Existen dos métodos para copiar y pegar el contenido de una celda: 1) usar la acción Edición / Copiar (o la combinación de teclas Control+C o seleccionar Copiar en el *menú*

---

[8] En la hoja de cálculo podemos introducir expresiones que empiecen por los signos + y – y el intérprete también las reconocerán como fórmulas. Sin embargo, no las incluimos en la gramática porque lo que realmente hace el intérprete de la hoja de cálculo es corregir la expresión y convertirla en una fórmula que comienza por =+ e =-, respectivamente. Aclaremos con un ejemplo: si introdujéramos la expresión +2*F3-17, el intérprete de la hoja de cálculo la transformaría en =+2*F3-17. Recordemos que nuestra intención en este apartado es describir la competencia de un usuario ideal y no debemos considerar los automatismos de la hoja de cálculo con los que corrige las imprecisiones de un usuario real.

[9] El programa dispone de un módulo que se encarga de traducir las acciones y textos producidos por el usuario (introducción de números o fórmulas, copia y pegado del contenido de celdas…) al que llamaremos *intérprete de la hoja de cálculo*.

[10] No entraremos a discutir la posibilidad de utilizar referencias absolutas o mixtas, ya que la forma de funcionar por defecto de una hoja de cálculo es mediante referencias relativas. Las referencias absolutas o mixtas bloquean la variación de la referencia (de forma total y parcial, respectivamente) de fila, columna o ambas, al copiar y pegar una fórmula. Se antecede del símbolo $ el identificador de columna (la letra) o fila (el número) para bloquear la variación. Un ejemplo de referencia absoluta sería A4 y un ejemplo de referencia mixta sería $A4 (en este caso sólo se bloquea la variación en columnas). El uso de referencias mixtas o absolutas obliga al usuario a introducir las referencias a celdas en las fórmulas mediante teclado o corregirlas posteriormente para incluir los símbolos de dólar.

contextual[11]) y, a continuación Edición / Pegar (o la combinación de teclas Control+V o seleccionar Pegar en el menú contextual); 2) situar la celda activa en la celda a copiar y estirar horizontal o verticalmente del vértice inferior derecho (donde aparece un pequeño recuadro llamado *controlador de relleno*). Al último procedimiento le llamaremos *copia y pegado por arrastre* y a la acción la llamaremos *estirar* o *arrastrar*.

Las características que acabamos de exponer sobre la copia y pegado de fórmulas proporcionan la posibilidad de generar secuencias numéricas por arrastre de una celda que contenga una fórmula de recurrencia[12]. Para generar una progresión aritmética de diferencia 3 que tenga por término inicial el 7: introducimos en una celda el número 7 (por ejemplo en la celda B5); en la inmediatamente situada a su la derecha[13] (C5) introducimos la fórmula de recurrencia =B5+3; estiramos de la celda C5 para copiar y pegar la fórmula en las celdas de la fila. De esta forma conseguiremos que en D5 se genere la fórmula =C5+3, lo que supondrá calcular el siguiente término, y así sucesivamente.

Existe otro método para generar progresiones aritméticas que permite evitar la escritura de la fórmula de recurrencia. Debemos escribir dos términos consecutivos de la secuencia en dos celdas contiguas de una fila (o columna). Después seleccionamos ambas celdas y estiramos del controlador de relleno horizontalmente (verticalmente si se trata de celdas en una columna). El programa calcula la diferencia entre los valores y la emplea para determinar el resto de términos.

3.3.2. El lenguaje de la hoja de cálculo

En Chomsky (1965) encontramos una descripción de aquello que debe especificar el componente sintáctico de una gramática de un lenguaje natural oral y/o escrito:

> El componente sintáctico de una gramática debe especificar […] una estructura profunda que determina su interpretación semántica y una estructura superficial que determina su interpretación fonética […] La idea central de una gramática transformacional es que […] la estructura superficial se determina por aplicación repetida de ciertas operaciones formales llamadas "transformaciones gramaticales" a objetos de tipo más elemental. Si esto es cierto (como asumo a partir de ahora), entonces el componente sintáctico debe generar estructuras profundas y superficiales, para cada expresión, y debe interrelacionarlas. (pp. 16-17)

Kirshner (1987), tomando como punto de partida los trabajos de Chomsky, elaboró una gramática generativa transformacional de las expresiones algebraicas simples. En este trabajo se ejemplifica la diferencia entre la estructura profunda y la estructura superficial.

> Por ejemplo, la forma superficial "$3x^2$", implica las operaciones implícitas de multiplicación y exponenciación, además de un análisis de la expresión. La forma profunda 3M[*x*E2], muestra las operaciones y el análisis explícitamente, siendo "M" y

[11] Es el menú que aparece cuando hacemos clic sobre un objeto (en nuestro caso una celda) con el botón derecho del ratón.

[12] Llamarla fórmula de recurrencia supone abusar del lenguaje, ya que realmente sólo nos indica un caso particular de una relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + d$.

[13] También puede generarse la secuencia de derecha a izquierda en una fila y en los dos sentidos verticales en una columna.

> "E" multiplicación y exponenciación, respectivamente, y los paréntesis indicadores de agrupamiento como es habitual. (Kirshner, 1987, p. 60)

La gramática de Kirshner permitía generar expresiones algebraicas bien formadas en forma profunda, transformar las formas profundas en otras formas profundas y traducir las expresiones en forma profunda a expresiones en forma superficial y viceversa. Solares (2007) completó el trabajo anterior incorporando la gramática de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones a la gramática de las expresiones algebraicas simples.

Vamos a diseñar una gramática del lenguaje de la hoja de cálculo que nos permitirá generar expresiones bien formadas en el sistema matemático de signos de la hoja de cálculo (SMShc), tal y como serían producidas por un usuario competente[14]. La gramática contará con unas reglas de generación de las formas profundas y unas reglas de traducción de las formas profundas en formas superficiales y viceversa; pero no con unas reglas de transformación de formas profundas en formas profundas. Por otro lado, como nuestro estudio se circunscribirá a ecuaciones lineales y a expresiones algebraicas simples que contengan las operaciones suma, resta, multiplicación, división y cambio de signo, obviaremos cualquier referencia al resto de operaciones (potencias, raíces, etc.).

3.3.2.1. La gramática del lenguaje de la hoja de cálculo

Para generar las formas profundas se utilizarán una serie de reglas de reescritura que sustituirán un símbolo inicial por otros símbolos. En lingüística es habitual usar la letra S para representar al símbolo inicial; sin embargo Kirshner (1987) y Solares (2007) utilizaron el símbolo Z para evitar confusiones con el símbolo terminal S (que representa a la operación sustracción). En nuestro caso, también podrían producirse confusiones con los símbolos terminales que representan a las celdas (podemos encontrarnos con símbolos terminales como S2, Z4, etc.) y cualquier letra mayúscula que se usara como símbolo. Para evitar estos problemas asignaremos letras griegas mayúsculas a los símbolos no terminales y letras latinas minúsculas a los signos terminales de operación.

Las expresiones (fórmulas o números) en la hoja de cálculo se introducen en celdas. El símbolo inicial Θ representará a la celda que contendrá a la expresión y el símbolo inicial contenido en la celda se representará por Ω. Las transformaciones se representarán mediante $\alpha \rightarrow \beta$, donde α y β son símbolos o cadenas de símbolos. Las reglas de reescritura $\alpha \rightarrow \beta$ se interpretarán como que la cadena de símbolos α puede ser transformada en la cadena de símbolos β.

Las producciones de la gramática son:

1. $\Theta \rightarrow \Theta \supset \Omega$. Donde el símbolo $\supset$ se interpreta como asignar y con $\Theta \supset \Omega$ se representaría que Ω se asigna a Θ. Esta es la única transformación que podemos aplicar sobre el símbolo inicial Θ más allá de reducirlo a un símbolo terminal.

[14] En este caso, podemos asociar competencia a un ente real, ya que el intérprete de la hoja de cálculo es un lector real competente.

2. $\Theta \supset \Omega \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ \mathrm{i}\ \Omega\ ]$[15]. Donde *i* es un símbolo terminal que se interpreta como la operación binaria de comparación. Esta transformación puede aplicarse sólo una vez sobre el primer símbolo Ω generado.
3. $\Omega \rightarrow [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]$. Donde el símbolo ϑ se interpreta como operación binaria y tiene como posibilidades de reemplazo los símbolos terminales: *a*, adición; *s*, sustracción; *m*, multiplicación; *d*, división.
4. $\Omega \rightarrow [\ \mathrm{n}\ \Omega\ ]$. Donde *n* es el símbolo de la operación unaria cambio de signo.
5. $\Theta \rightarrow \Lambda$. Donde el símbolo Λ se interpreta como una celda que puede ser reemplazada por los símbolos terminales A1, A2[16]…
6. $\Omega \rightarrow \Lambda$. Donde el símbolo Λ se interpreta como una celda que puede ser reemplazada por los símbolos terminales A1, A2…
7. $\Omega \rightarrow \Delta$. Donde el símbolo Δ se interpreta como un número que puede ser reemplazado por los símbolos terminales 0, 1, 2, 3, 4, 5...

En el siguiente ejemplo se muestra el empleo de la gramática de construcción de frases para generar una forma profunda asociada a la forma superficial bien formada =(A7-3)/(4*B8) escrita en la celda H5:

$$\Theta \rightarrow \Theta \supset \Omega \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ d\ \Omega\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ d\ [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ \Omega\ d\ [\ \Omega\ m\ \Omega\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ d\ [\ \Omega\ m\ \Lambda\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ d\ [\ \Omega\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ \Omega\ d\ [\ \Delta\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ]$$
$$\rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ s\ \Omega\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ s\ \Delta\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \Omega\ s\ 3\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Lambda\ s\ 3\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \mathrm{A7}\ s\ 3\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ] \rightarrow \mathrm{H5} \supset [\ [\ \mathrm{A7}\ s\ 3\ ]\ d\ [\ 4\ m\ \mathrm{B8}\ ]\ ].$$

En el siguiente ejemplo se muestra el empleo de la gramática de construcción de frases para generar una forma profunda, que contiene una operación de comparación, asociada a la forma superficial bien formada =7+F5=4*(A1+7) escrita en la celda U6:

$$\Theta \rightarrow \Theta \supset \Omega \rightarrow \Theta \supset [\ \Omega\ i\ \Omega\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ m\ \Omega\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ m\ [\ \Omega\ \vartheta\ \Omega\ ]\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ m\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ m\ [\ \Lambda\ a\ \Delta\ ]\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Omega\ m\ [\ \mathrm{A1}\ a\ 7\ ]\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ \Delta\ m\ [\ \mathrm{A1}\ a\ 7\ ]\ ]\ ] \rightarrow \Theta \supset [\ [\ \Omega\ a\ \Omega\ ]\ i\ [\ 4\ m\ [\ \mathrm{A1}\ a\ 7\ ]\ ]\ ] \rightarrow$$
$$\Theta \supset [\ [\ \Delta\ a\ \Lambda\ ]\ i\ [\ 4\ m\ [\ \mathrm{A1}\ a\ 7\ ]\ ]\ ] \rightarrow \mathrm{U6} \supset [\ [\ 7\ a\ \mathrm{F5}\ ]\ i\ [\ 4\ m\ [\ \mathrm{A1}\ a\ 7\ ]\ ]\ ].$$

---

[15] La transformación se aplica a Ω; pero representamos Θ en la regla de producción para indicar que únicamente se puede aplicar si se cumple la condición $\Theta \supset \Omega$, es decir, que Ω sea el primer símbolo asignado a Θ.

[16] Estos símbolos terminales pueden escribirse en minúsculas. Para evitar confusiones con la símbolos de operación y para no asignar símbolos excesivamente artificiales hemos decidido no permitir el uso de minúsculas.

A continuación describiremos las reglas de traducción de las formas profundas a las formas superficiales del lenguaje de la hoja de cálculo. Identificaremos cuatro estadios en los que se atenderá a distintos aspectos del proceso. En los tres primeros nos referiremos únicamente al fragmento de la forma profunda situado a la derecha del signo ⊃, mientras que en el cuarto atenderemos a ambos términos.

ESTADIO 1 (ELIMINACIÓN DE PARÉNTESIS REDUNDANTES EN LA FORMA PROFUNDA)

La redundancia de los paréntesis surge al definir la prioridad de unas operaciones sobre otras. Por ello necesario establecer la jerarquía de las operaciones en el lenguaje de la hoja de cálculo que nos permita suprimirlos tras la aplicación de unas reglas sintácticas. Presentamos a continuación la jerarquía de operaciones, señalando, por ejemplo, que las operaciones del nivel 3 se dice que son de nivel superior a las del nivel 2.

Nivel 1. Las operaciones son *a* (adición) y *s* (sustracción).

Nivel 2. Las operaciones son *m* (multiplicación) y *d* (división).

Nivel 3. La operación es *n* (negación)[17].

Nivel 4. La operación es *i* (comparación).

El proceso de eliminación de paréntesis es un proceso que se inicia en la operación dominante y se aplica de manera repetida hasta alcanzar la operación menos dominante.

A continuación se expone la regla sintáctica de eliminación de paréntesis redundantes

1. Regla sintáctica.

El paréntesis se elimina de una subexpresión si:

- La operación dominante de una subexpresión no está dominada por ninguna operación.
- La operación dominante de una subexpresión está directamente dominada por la operación comparación.
- La operación dominante de una subexpresión está directamente dominada por una operación de nivel inferior.
- La operación dominante de una subexpresión está directamente dominada por una operación de igual nivel, siempre que ésta última esté a la derecha.

En la Tabla 1, ilustramos la aplicación de la primera regla sintáctica a la forma profunda U6 ⊃ [[7 *a* F5] *i* [4 *m* [A1 *a* 7]]] que la transforma en U6 ⊃ 7 *a* F5 *i* 4 *m* [A1 *a* 7].

[17] La fórmula = -3^2 da como resultado 9, pues primero se ejecuta la operación cambio de signo y después la potencia.

Tabla 1.

Expresión	Operación dominante	Dominada por	Acción
U6 ⊃ { [7 *a* F5] *i* [4 *m* [A1 *a* 7]] }	*i*	Ninguna	Suprimir
U6 ⊃ { 7 *a* F5 } *i* [4 *m* [A1 *a* 7]]	*a*	*i*	Suprimir
U6 ⊃ 7 *a* F5 *i* { 4 *m* [A1 *a* 7] }	*m*	*i*	Suprimir
U6 ⊃ 7 *a* F5 *i* 4 *m* { A1 *a* 7 }	*a*	*m*	Ninguna

ESTADIO 2 (TRADUCCIÓN)

En este estadio se realiza la traducción de los símbolos de los operadores de la forma profunda a la forma superficial. Las reglas de traducción necesarias para lograr nuestro propósito se presentan a continuación:

2. $n\,\alpha \rightarrow -\alpha$
3. $\alpha\, a\, \beta \rightarrow \alpha+\beta$
4. $\alpha\, s\, \beta \rightarrow \alpha-\beta$
5. $\alpha\, m\, \beta \rightarrow \alpha*\beta$
6. $\alpha\, d\, \beta \rightarrow \alpha/\beta$
7. $\alpha\, i\, \beta \rightarrow \alpha=\beta$

La expresión que estamos tratando quedaría después del estadio 2 en la forma U6 ⊃ 7+F5=4*[A1+7].

ESTADIO 3 (AJUSTES DE NOTACIÓN DE ACUERDO CON LAS CONVENCIONES)

8. Se ajusta el tipo de paréntesis, ya que la hoja de cálculo sólo admite paréntesis y no corchetes.

La expresión que estamos tratando quedaría después del estadio 3 en la forma U6 ⊃ 7+F5=4*(A1+7).

ESTADIO 4 (UBICACIÓN DE LA FORMA SUPERFICIAL)

9. Se coloca en la celda indicada a la izquierda del signo ⊃, la expresión situada a la derecha precedida del signo =.

Al finalizar el estadio 4 escribiríamos en la celda U6 la expresión =7+F5=4*(A1+7).

Una vez finalizado el proceso de traducción de las formas profundas en formas superficiales señalaremos que el proceso de traducción en sentido contrario, que permitiría pasar de la forma superficial a la forma profunda, se consigue por inversión del orden de los estadios y dirección de las producciones.

La definición de un procedimiento de traducción entre las formas profundas del lenguaje de la hoja de cálculo, que genera nuestra gramática, y las formas profundas del lenguaje del álgebra, que genera la gramática propuesta por Solares (2007), choca con la ambigüedad entre el igual como asignación y comparación en el lenguaje del álgebra (que se traduce en la existencia de un único símbolo en la gramática) cuyas consecuencias trataremos a continuación.

3.3.2.2. La semántica de las expresiones simbólicas en el lenguaje de la hoja de cálculo

G. Frege, en la conferencia "Función y concepto" dictada en 1891 (Frege, 1973), precisa el concepto de función separándose de la visión habitual de "una expresión de cálculo que contenga x, una fórmula que incluya la letra x" (p. 18), ya que si la función sólo fuera la referencia a una expresión de cálculo, entonces sería un número. Frege considera que en una función, como por ejemplo $2x^3 + x$, podemos distinguir, además de la x (un número indeterminado al que llama el argumento), otro elemento que escribe como $2()^3 + ()$, y concluye que "el argumento no forma parte de la función, sino que constituye, junto a la función, un todo completo" (p. 22). Siguiendo esta línea llegamos a la distinción fundamental entre número y función: un número no necesita complemento, mientras que una función sí que lo necesita. En palabras de Frege "la función por sí sola, debe denominarse incompleta, necesitada de complemento o no-saturada" (p. 22) y denomina valor de la función para un argumento a aquello en lo que se transforma la función al completar el argumento.

Frege, modificando la referencia de la palabra función, incluye una expresión del tipo $x^2 = 1$ (una ecuación) dentro de las funciones, pues en ella encontramos el argumento x (un número indeterminado) y aquello que podríamos escribir como $()^2 = 1$ que señala el carácter incompleto de la función. A diferencia del ejemplo anterior, en el que el valor de la función era un número, en este caso el valor de la función sería un valor veritativo. Siguiendo el razonamiento anterior, una expresión del tipo 4·6 tendría por referencia a un número, el mismo número al que se refiere el signo 24; mientras que una expresión del tipo 4·6=24 referiría a un valor veritativo. Siendo coherentes con lo anterior, debemos considerar que 2·2=4 y 2>1 tienen la misma referencia, aunque no evocan el mismo pensamiento. Para señalar la similitud y la diferencia Frege distingue entre sentido y referencia. Así, y parafraseando a Frege (pp. 29-30), las expresiones 2·2=4 y 2>1 tienen ciertamente la misma referencia; es decir, son nombres propios del mismo valor veritativo, pero no tienen el mismo sentido.

Del mismo modo que convencionalmente asignamos una letra a un número indeterminado, podemos asignar a una función[18] el símbolo $f(x)$ o alguna letra distinta de la que se presenta en el argumento de la función, como y. La construcción de un nuevo nombre (sentido) para un mismo referente introduce un conocimiento idiosincrásico. Para explicitarlo recurrimos a conectar las expresiones mediante el signo igual (asignación). Por ejemplo, si consideremos que a la función $2x + 3$ le asignamos la letra y tendremos $y = 2x + 3$. En este caso no nos encontramos ante una función veritativa, sino ante dos formas de decir lo mismo. Sin embargo, si nos separamos de la intención inicial, sí que puede considerarse una función veritativa que depende de dos argumentos. Evidentemente lo contrario también sería cierto. Tenemos que a un mismo sentido podemos asignarle dos referentes distintos. Desde el punto de vista semántico, la expresión es polisémica y únicamente la pragmática o el contexto deshace la incertidumbre que lleva asociada.

---

[18] "Así como se alude indeterminadamente a un número por medio de un letra, para expresar generalización, asimismo se siente la necesidad de aludir indeterminadamente a una función por medio de letras. Para ello, se suele hacer uso de las letras f y F, de tal manera que, en '$f(x)$' y '$F(x)$', x representa el argumento" (Frege, 1973, p. 27).

En la hoja de cálculo podemos generar funciones que toman valores numéricos y funciones que toman valores veritativos. Un ejemplo del primer tipo sería =A1*3-6, donde podemos distinguir el argumento A1 y =()*3-6. Un ejemplo del segundo sería =A4*7=3, donde podemos distinguir el argumento A4 y =()*7=3. Comparando las funciones escritas en el lenguaje del álgebra y en el lenguaje de la hoja de cálculo, podemos concluir que una referencia a una celda (por ejemplo A1) juega el mismo papel que una letra (por ejemplo x): ambas actúan como argumento de un función numérica o veritativa. Sin embargo, las referencias a celda no se limitan a representar un número indeterminado, como lo haría una letra, sino que también señalan con su nombre la posición de la celda donde se ubican los valores que completan el argumento dentro de la hoja de cálculo.

Lógicamente, también podemos emplear expresiones que hagan referencia a un número o a un valor veritativo. Ejemplos del primer caso serían: 7, que referiría al número siete, o =2*6, que referiría al número doce. Ejemplos del segundo: FALSO[19] que referiría a lo falso, o =2*6=12, que referiría a lo verdadero. Las expresiones, sean funciones (numéricas o veritativas) o valores (numéricos o veritativos), deben introducirse en una celda y esto supone la asignación automática de un nuevo sentido ligado al referente de la expresión: la referencia de la celda donde se introduce. Así, si la función =A1*3-6 se ubica en B1, ambas expresiones tendrán un mismo referente. A diferencia del carácter voluntario que tiene cuando usamos el lenguaje del álgebra, esta asignación es automática y obligatoria, pues cualquier fórmula se ha de escribir en una celda. La consecuencia fundamental es que en el lenguaje de la hoja de cálculo la expresión de una función conserva la intención con la que se creó: las funciones numéricas sólo contendrán un igual y las veritativas, dos.

Una vez se introduce una fórmula, toma valor automáticamente. El programa se encarga de realizar las operaciones (aritméticas o lógicas) y muestra el valor correspondiente en la celda en la que se ha introducido la fórmula[20]. Sin embargo, la hoja de cálculo conserva internamente las fórmulas y cualquier modificación que realicemos sobre las celdas argumento de la fórmula repercutirá sobre el valor mostrado. Por lo tanto, si consideramos el uso de la hoja de cálculo para la resolución de problemas verbales, donde las celdas representarán a cantidades, nos encontramos con que un resolutor ideal podrá referirse a una cantidad mediante: el nombre en el lenguaje natural, la celda que la representa (mediante el nombre de celda o mediante deícticos que señalen su posición de una manera vaga[21]), el valor presente en la celda (que puede ser provisional) o la fórmula contenida en la celda (si la hay). Cuando nos refiramos a la cantidad mediante el lenguaje natural podremos utilizar cualquiera de los anteriores; sin embargo, dentro del lenguaje de la hoja de cálculo, y como queremos construir expresiones (fórmulas) bien formadas, sólo serán posibles las tres últimas.

---

[19] La hoja de cálculo *Excel 2003* considera la introducción del texto “FALSO” o “falso” y “VERDADERO” o “verdadero” como un valor lógico y no como un texto.

[20] Las celdas que se utilizan como argumento de las fórmulas mostrarán un número o estarán vacías (no vamos a considerar otros posibles argumentos). El programa supone que las celdas vacías contienen un cero.

[21] Corresponderían, respectivamente, a lo que Haspekian (2005a) identifica como referencia geográfica y material.

En el lenguaje de la hoja de cálculo, la referencia al valor o a la fórmula contenida en una celda sólo pueden hacerse manualmente. Evidentemente, si el valor presente en la celda es provisional, utilizarlo como referencia a la cantidad, para construir una fórmula (función) que exprese una relación entre cantidades, provocará restringir la función a un número, convirtiendo una cantidad desconocida con un valor provisional en una cantidad conocida (al menos en ese instante) con un valor definitivo. La referencia a la celda puede realizarse mediante el uso del ratón, el teclado alfanumérico o las flechas del teclado de edición. El uso del ratón o de las flechas para hacer referencia a una cantidad representada en la hoja de cálculo puede enmascarar el tipo de referencia empleado: la hoja de cálculo considera una referencia a la celda, sin embargo el usuario[22] puede creer que ha seleccionado el valor ubicado en un contenedor.

3.3.3. EL MÉTODO DE LA HOJA DE CÁLCULO

Una vez hemos comparado de manera sintáctica y semántica los lenguajes algebraico y de la hoja de cálculo, estamos en condiciones de poder exportar el MC al entorno de la hoja de cálculo. Las limitaciones de la hoja de cálculo nos obligarán a eliminar pasos y a introducir restricciones en las libertades que el MC permitía. Hemos establecido una división en pasos ideales del MHC que no pretendemos que refleje el comportamiento real, sino un inventario de aquello que de una manera u otra haría un resolutor ideal. El usuario real, cuando ponga en práctica el método, abreviará pasos y cambiará su orden. Exponemos la división en pasos ideales y realizamos un análisis de los pasos y de los motivos que nos han llevado a tener que introducir las restricciones. La división en pasos ideales del MHC sería la siguiente:

1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2) La asignación de una celda a una o varias cantidades desconocidas y la elección de una única cantidad desconocida representada en una celda de la que dependerán directa o indirectamente el resto de cantidades desconocidas representadas. A esta cantidad la llamaremos cantidad de referencia y a la celda que ocupa, celda de referencia.
3) Representar en las celdas anteriores (excepto en la celda de referencia) fórmulas que describen la relación que esas cantidades desconocidas tienen con otras cantidades.
4) El establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando dos expresiones que representan la misma cantidad.
5) La variación[23] del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad. Con este fin, *replicaremos los pasos 3 y 4*[24] sobre una

[22] El modelo de competencia no debe describir dificultades o errores, pues esto es propio del componente de actuación de un MTL. Sin embargo, hemos decidido incluir algunas desviaciones de la actuación competente en este capítulo, porque se tratan de análisis a priori que estamos explicando empleando nuestro modelo de competencia.

[23] Hasta el cuarto paso del MHC consideramos cantidades, mientras que en el paso quinto pasamos a suponer variables.

[24] Llamaremos *replicar los pasos 3 y 4* a la copia y pegado en otras celdas del contenido de las celdas que han servido para representar expresiones en estos pasos. En nuestra secuencia de enseñaza la replicación supondrá la copia y pegado por arrastre de fragmentos de columna de izquierda a derecha.

secuencia de posibles valores de la cantidad representada en la celda de referencia.

6) Interpretación del valor que verifica la igualdad en términos del problema.

En el primer paso del MHC se especifica exactamente lo mismo que en el primer paso del MC. Esto no significa que los análisis del enunciado que realizamos en ambos métodos sean equivalentes, pues cada uno prevé el uso de distintos sistemas matemáticos de signos con sus virtudes y limitaciones. Sin embargo, sí coinciden en aspectos como considerar de la misma manera a cantidades conocidas y desconocidas.

Los pasos segundo, tercero y cuarto son similares a los respectivos pasos del MC; ya que básicamente se reemplazan las referencias al SMSalg que se hacen en el MC por el uso del SMShc. Así, en estos pasos se traduce el texto obtenido tras la lectura analítica en otro texto en el sistema de signos de la hoja de cálculo, lo que exige competencia en: las reglas de generación de expresiones bien formadas en el lenguaje de la hoja de cálculo, la adecuación de los significados del texto al que hemos reducido el problema tras la lectura analítica y la construcción de una ecuación. Sin embargo, en el MHC se introduce la limitación del uso de una única celda de referencia que se traslada al paso cuarto en la construcción de una única ecuación. Antes de entrar en la explicación de la necesidad de imponer esta restricción aclaremos que el método no impide el uso de más celdas (ya vimos la equivalencia entre celda y letra) que representen a cantidades desconocidas, sino que, sencillamente, asigna un papel especial a una de ellas: la celda de referencia. Esta celda, además, tendrá la característica especial de que normalmente estará en blanco.

Introduciremos las ideas expuestas en el apartado anterior como marco de reflexión sobre las letras y expresiones algebraicas que ponemos en funcionamiento cuando empleamos el MC, para explicar la necesidad de que haya una única cantidad de referencia en el MHC. Al aplicar el MC utilizando más de una letra para designar las cantidades desconocidas, las ecuaciones podrán interpretarse como funciones numéricas o veritativas y las letras como argumentos de dichas funciones. Las transformaciones algebraicas que se realizan en el paso quinto del MC reducen esta información a una función veritativa con una única letra como argumento y a varias funciones numéricas con una o más letras como argumento. La decisión de qué letra y qué función tendrán este papel especial queda a criterio del resolutor. Sin embargo, en la hoja de cálculo, y como consecuencia de no poder realizar transformaciones algebraicas, la celda que sirve de argumento a la función veritativa debe ser identificada desde un principio y el resto de celdas que representan a cantidades desconocidas, si existen, deben contener funciones numéricas que tengan a la celda de referencia como argumento directo o indirecto.

El quinto paso, supone la generación de tablas de valores para las distintas funciones numéricas y para la función veritativa, utilizando la replicación de las fórmulas mediante la técnica de copia y pegado por arrastre. Todas las funciones (fórmulas) expresadas tienen como argumento (directo o indirecto) la celda de referencia. A partir de esta celda se generará una secuencia numérica que proporcionará valores a los argumentos de las funciones. La verificación de la igualdad se producirá en la celda donde la función veritativa tome el valor VERDADERO. El número que toman las funciones numéricas y la celda de referencia en esa línea proporcionará los valores definitivos para las cantidades desconocidas.

El último paso implica, al igual que en el MC, la incorporación de los valores obtenidos al texto del que habíamos partido para determinar la adecuación del resultado, lo que exige competencia en el conocimiento del contenido del problema.

La necesidad de diferenciar entre los signos igual de asignación y comparación en el lenguaje de la hoja de cálculo exige competencias en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos que quedaban ocultas en el MC por la ambigüedad del lenguaje del álgebra. Las dificultades de los resolutores reales a la hora de diferenciar entre ambos usos del signo igual, junto al carácter de contenedor de las celdas, puede dar origen a la aparición de *referencias circulares*. Tomaremos el problema *Conejos y gallinas* y emplearemos los grafos para mostrar cómo la asignación de fórmulas a las cantidades desconocidas (el oscurecimiento de los vértices claros en los grafos) en una determinada secuencia exigirá la puesta en marcha de esta competencia y expondremos las posibles consecuencias de no atenderla. Junto a cada vértice que vayamos oscureciendo colocaremos una posible celda donde introducir la fórmula que se genera.

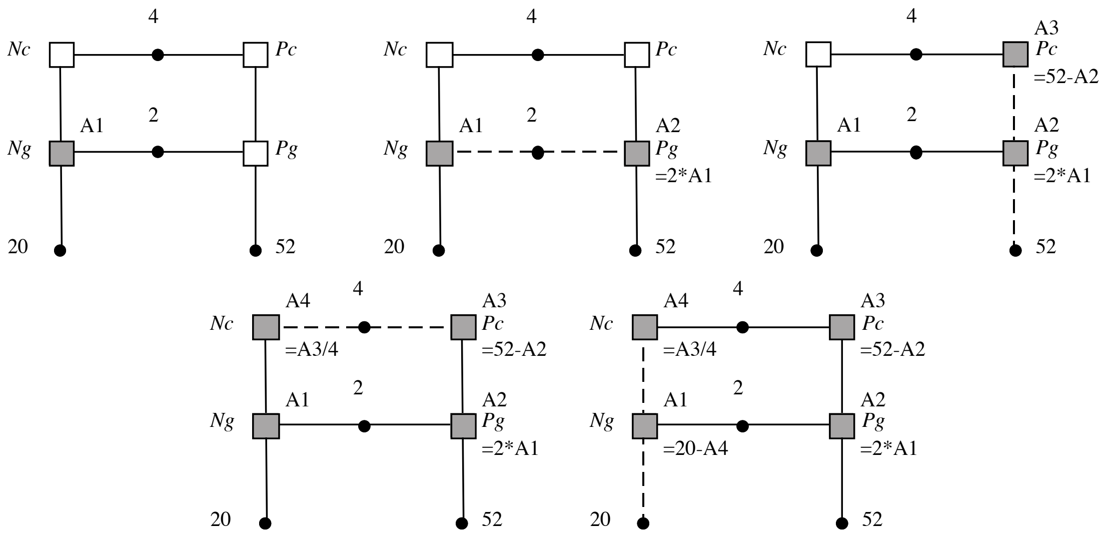


Figura 10. La aparición de un referencia circular.

En el primer grafo de la secuencia de la Figura 10, se asigna la celda A1 a la cantidad desconocida *Ng*. Esto permite expresar el resto de cantidades desconocidas mediante fórmulas (oscurecimiento de vértices claros) que plasman las relaciones consideradas en la lectura analítica. En el último grafo de la Figura 10, se observa que el proceso conduce a que la cantidad *Ng* esté representada tanto por A1 como por la fórmula =20-A4[25], dando, de esta forma, cuenta del paso 4. Podríamos decidir introducir la fórmula =20-A4 en la celda A1 (que está vacía por tratarse de la celda de referencia) amparados en el hecho de que representan a la misma cantidad y en la confianza adquirida por la ambigüedad del signo igual en el lenguaje de la aritmética y el álgebra. Sin embargo, en el lenguaje de la hoja de cálculo, esto supondría asignar a A1 la función numérica =20-A4, en lugar de comparar las expresiones. Si intentáramos esta asignación, el programa nos respondería con un aviso de referencia circular, pues para calcular el valor contenido en A1 se utilizaría el contenido en A4 que a su vez se calcularía del de A1 (entrando en un círculo vicioso). Para poder representar la comparación que propone el

[25] Ambas (una letra o celda expresaría la función identidad) son funciones numéricas que no tienen el mismo referente en el mundo de la matemáticas, pues para ello deberían tener el mismo recorrido. Sin embargo, representan al mismo referente en una situación real, *Ng*.

paso cuarto del MHC, debemos introducir la fórmula =A1=20-A4 en una celda que no sea ninguna de la empleadas anteriormente. El primer igual de la fórmula será de asignación y el segundo de comparación.

Hemos visto anteriormente que el paso 2 del MHC requiere del uso de un única celda de referencia. Esta exigencia podría verse comprometida por la imbricación de las relaciones obtenidas tras la lectura analítica en caso que fuera necesario emplear más de una cantidad de referencia para poder completar los pasos 3 y 4. Consideramos el problema *Arroz, lentejas y garbanzos* para dar un ejemplo de esta situación, donde nuevamente recurrimos a los grafos para representar la lectura analítica, la elección de la cantidad de referencia (oscurecimiento de un vértice claro) y la asignación de fórmulas al resto de cantidades desconocidas (oscurecimiento del resto de vértices claros).

Arroz, lentejas y garbanzos

> Cierto supermercado hace el mismo pedido a tres proveedores diferentes A, B y C. Dicho pedido contiene ciertas cantidades de arroz, lentejas y garbanzos (expresadas en t). Cada uno de los proveedores marca para los distintos productos los siguientes precios (expresados en miles de pta/t): el proveedor A, el arroz a 1,5, las lentejas a 3 y los garbanzos a 4; el proveedor B, el arroz a 2, las lentejas a 3 y los garbanzos a 3,5; el proveedor C, el arroz a 2, las lentejas a 3 y los garbanzos a 4. El pedido que recibe el proveedor A le cuesta al supermercado 1.600.000 ptas; el del proveedor B, 1.650.000 ptas; y el del proveedor C, 1.700.000 ptas. ¿Cuántas toneladas de arroz, lentejas y garbanzos se pide a cada proveedor?

Una posible lectura analítica del enunciado lo reduciría a las cantidades conocidas: precio de una tonelada de arroz para el distribuidor A, *Puza* (1,5); precio de una tonelada de lentejas para el distribuidor A, *Pula* (3); precio de una tonelada de garbanzos para el distribuidor A, *Puga* (4); precio de una tonelada de arroz para el distribuidor B, *Puzb* (2); precio de una tonelada de lentejas para el distribuidor B, *Pulb* (3); precio de una tonelada de garbanzos para el distribuidor B, *Pugb* (3,5); precio de una tonelada de arroz para el distribuidor C, *Puzc* (2); precio de una tonelada de lentejas para el distribuidor C, *Pulc* (3); precio de una tonelada de garbanzos para el distribuidor C, *Pugc* (4); dinero pagado al distribuidor A, *Pa* (1600000); dinero pagado al distribuidor B, *Pb* (1650000); dinero pagado al distribuidor C, *Pc* (1700000). Y las desconocidas: número de toneladas de arroz compradas a cada distribuidor, *Tz*; número de toneladas de lentejas compradas a cada distribuidor, *Tl*; número de toneladas de garbanzos compradas a cada distribuidor, *Tg*; precio de las toneladas de arroz compradas al distribuidor A, *Pza*; ; precio de las toneladas de lentejas compradas al distribuidor A, *Pla*; precio de las toneladas garbanzos compradas al distribuidor A, *Pga*; precio de las toneladas de arroz compradas al distribuidor B, *Pzb*; ; precio de las toneladas de lentejas compradas al distribuidor B, *Plb*; precio de las toneladas garbanzos compradas al distribuidor B, *Pgb*; precio de las toneladas de arroz compradas al distribuidor C, *Pzc*; precio de las toneladas de lentejas compradas al distribuidor C, *Plc*; precio de las toneladas garbanzos compradas al distribuidor C, *Pgc*. Estas cantidades se relacionarían mediante: $Pzi = Puzi \cdot Tz$, $Pli = Puli \cdot Tl$, $Pgi = Pugi \cdot Tg$, $Pi = Pzi + Pli + Pgi$ siendo $i \in \{a,b,c\}$. Esta lectura analítica se representaría mediante el grafo de la Figura 11.

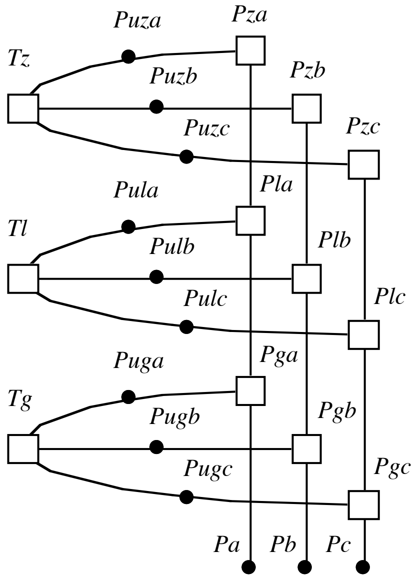


Figura 11. Una lectura analítica del problema *Arroz, lentejas y garbanzos*.

Si, como exige el MHC, únicamente usamos una cantidad de referencia (oscurecemos un vértice claro) al abordar del paso 2, no nos será posible completar el paso 3 partiendo de esta lectura analítica (ver secuencia de grafos de la Figura 12). Para continuar con el proceso, deberíamos oscurecer un segundo vértice claro, lo que implicaría recurrir a una segunda celda de referencia si estuviéramos utilizando el MHC (o recurrir a una segunda letra si estuviéramos utilizando el MC). Evidentemente esto tendría como consecuencia la aparición de dos ecuaciones en el paso 4. Cuando usamos el MC, el lenguaje del álgebra nos permitiría utilizar las transformaciones algebraicas para reducir las ecuaciones generadas a una sola ecuación con una incógnita (una función veritativa con un solo argumento) como exige el paso 5 del MC. Sin embargo, en el lenguaje de la hoja de cálculo esta reducción no sería posible y, por lo tanto, nos enfrentaríamos a dos funciones veritativas que dependerían cada una de dos argumentos. En conclusión, no todas las lecturas algebraicas que hagamos de un problema verbal podrán resolverse mediante el MHC.

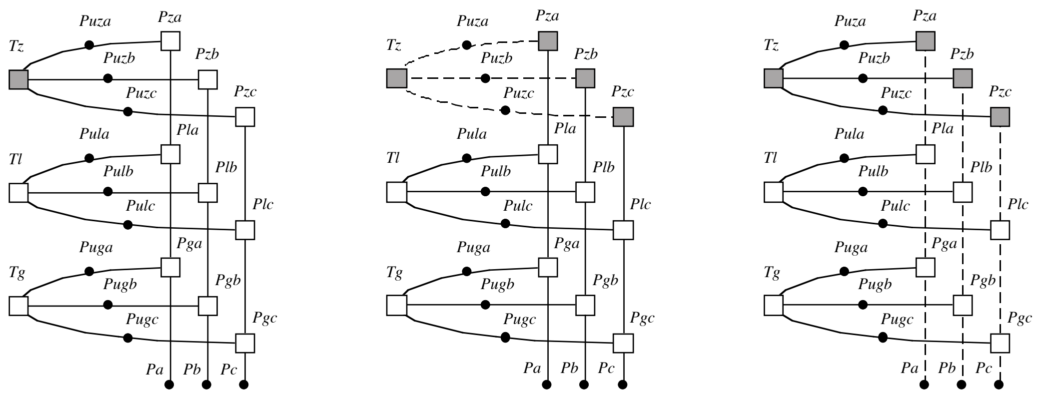


Figura 12. La imposibilidad de completar el paso 3.

Para terminar nos preguntamos qué característica tiene la lectura analítica anterior que nos obliga a usar dos letras para completar los pasos 3 y 4 del MC. La respuesta se encuentra en una característica del lenguaje del álgebra que no aparece en los cuatro primeros pasos del MC, que son los que se representan en los grafos: la necesidad de operar con la incógnita. Las lecturas que únicamente necesitan una letra en el paso 2 pueden utilizar más letras voluntariamente, pero la reducción a una ecuación (función veritativa) no necesita de operar con la incógnita. Las que necesitan más de una letra en el paso 2 sí que necesitan operar con la incógnita para reducir el sistema de ecuaciones a una única ecuación (función veritativa).

Si la necesidad de operar con la incógnita para resolver una ecuación marcaba un corte didáctico entre la aritmética y el álgebra (Filloy y Rojano, 1989; Filloy, Rojano y Puig, 2008), la necesidad de operar con la incógnita para reducir un sistema de ecuaciones a una sola marcará un segundo corte entre el álgebra con una incógnita y el álgebra con dos. Sin embargo, no podemos considerar que este corte tenga influencia didáctica, ya que la complejidad de los problemas donde surge esta necesidad hace que se programen en un momento en el que los estudiantes ya se habrán enfrentado a la necesidad de operar con la incógnita.

4. El modelo de enseñanza y su aplicación

La finalidad (ideal) de nuestro modelo de enseñanza será conseguir la competencia de los estudiantes de nuestra población en el uso del MHC como un paso más hacia la competencia en la resolución de problemas mediante el MC. Como se indicó en la introducción, una de las fuentes de un modelo de enseñanza dentro de un MTL debe ser el modelo de competencia. En cualquier caso, nuestro modelo de enseñanza debe atender a todas las características que hemos establecido como necesarias para poder resolver problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. Esto nos obliga a incorporar dentro de la enseñanza: las características y el lenguaje de la hoja de cálculo, el MHC y algunas exigencias a las que deberemos hacer frente como consecuencia de las limitaciones que impone el entorno.

Dentro de las características y lenguaje de la hoja de cálculo, debemos dar cuenta de: la identificación de algunos elementos característicos del entorno, la introducción de fórmulas y la necesidad del uso de paréntesis como consecuencia de la ausencia de marcas posicionales de yuxtaposición vertical, la instanciación automática de una fórmula cuando se modifica el valor de una celda a la que refiere y la generación de secuencias numéricas. Como, en algunos casos, disponemos de varios métodos para conseguir un mismo fin, tuvimos que elegir cuál de ellos utilizar. Así, optamos por el uso del ratón, frente al teclado y las flechas, como generador de referencias a celdas cuando se introducen fórmulas, porque evita la necesidad de escribir el código simbólico de las celdas de la hoja de cálculo. También, se escogió el uso de fórmulas de recurrencia para generar progresiones aritméticas frente al método de introducir los dos primeros valores de la secuencia en dos celdas contiguas, seleccionarlas y estirar del controlador de relleno. La técnica elegida es más flexible a la hora de modificar el origen de la secuencia, pues basta con cambiar el valor de la primera celda, lo cual puede ser útil en el paso quinto del MHC[1]. Evidentemente, esto no supuso que impidiéramos que los estudiantes utilizaran métodos distintos a los propuestos.

La secuencia de enseñanza del MHC se inició con la exposición de los pasos ideales y continuó con la resolución, por parte de los estudiantes, de una colección de problemas que normalmente se resuelven de manera algebraica. Evitamos problemas con resultados no enteros o en los que las cantidades por las que se preguntaba tuvieran

---

[1] Una progresión aritmética que se inicie en cero y tenga diferencia uno no puede superar el valor 255 cuando generamos la secuencia en una fila en *Excel 2003*. Esto impide dar solución a un problema si la cantidad de referencia tiene un valor mayor. En este caso deberíamos construir una nueva secuencia que empezara en el 256 (o un número mayor) para continuar la búsqueda de la verificación de la igualdad.

valores mayores a 254. De esta forma, todos los problemas podían resolverse generando valores para la cantidad de referencia mediante progresiones aritméticas de diferencia uno con origen en uno.

Por lo que respecta a la conversión del MHC en objeto de enseñanza, se omitió referirse a la celda de referencia como tal cuando se presentó el método a los estudiantes y se prefirió identificarla como la única celda que queda en blanco cuando hemos acabado de plantear el problema. Sin embargo, sí que se indicó que todas las cantidades desconocidas dependen de ella, para lo que se hizo prestar atención al efecto que tenía modificar el valor del celda de referencia sobre las otras celdas que representaban a cantidades desconocidas.

En lugar de construir una ecuación mediante una fórmula, se optó por identificar las cantidades (o las dos expresiones de una misma cantidad) que debían ser iguales coloreando las filas que ocupaban. Esta decisión plantea inconvenientes como la necesidad de asignar dos celdas distintas a una misma cantidad para poder generar las secuencias de valores numéricos que compararemos cuando la igualdad se construye sobre dos expresiones de una misma cantidad. Sin embargo, la visión de los valores de las cantidades que forman la igualdad ofrece una referente numérico que permite gestionar el proceso de resolución en el paso quinto y valorarlo en su conjunto; ya que el resolutor puede utilizar el hecho de que antes de alcanzar la igualdad los valores de un término de la ecuación son mayores que los del otro y que esta relación se invierte tras alcanzarla. Así, a medida que nos aproximemos a la coincidencia de valores de las cantidades igualadas, se observará una disminución en la diferencia y cuando nos alejemos, un aumento. Durante la secuencia de enseñanza se les hizo ver este hecho siempre que se presentó la oportunidad.

Dotar de una segunda celda a una cantidad para asignarle una segunda expresión, junto al hecho de que únicamente pueda plantearse una ecuación en el MHC, implica establecer la igualdad sobre la coincidencia de esta cantidad. Podemos encontrarnos con enunciados en los que una traducción excesivamente literal del texto lleve a los resolutores reales a duplicar más una cantidad, lo que implicaría plantear más de una ecuación. El resolutor ideal evita lo anterior atendiendo de forma ordenada a los requisitos del MHC: primero selecciona la cantidad de referencia y luego asigna fórmulas a las cantidades desconocidas que las conectan de manera directa o indirecta con la cantidad de referencia. Los resolutores reales, normalmente, llevarán a cabo una puesta en escena del MHC desordenada donde la identificación de la cantidad de referencia puede ser posterior a la representación de las relaciones mediante fórmulas. Esto puede dar origen a la aparición de más de una cantidad a la que se le hayan asignado dos celdas. Podremos encontrar actuaciones de este tipo en el problema *Los tres amigos*[2] donde la proposición "Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto" se traduce de forma "natural" en dos fórmulas, ubicadas en dos celdas, que calculan lo que ganó Luis; pero también es habitual en este problema asignar dos celdas al dinero ganado, una para introducir el valor conocido 960 y otra para expresar la fórmula que calcula la suma de lo que ha ganado cada amigo. Una vez se haya planteado la situación, un resolutor real debe disponer de recursos que

[2] Este problema fue uno de los utilizados en el estudio de casos y se había empleado en un estudio previo (Arnau, 2004) en el que se habían observado las dificultades descritas. Su enunciado dice: "Tres muchachos ganaron novecientos sesenta euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?"

le permitan invertir fórmulas para asignar expresiones a cantidades que aún no las han recibido y de esta forma deshacerse del exceso de cantidades con duplicación de celda. Por esta razón encontraremos actividades en las que se le pide a los estudiantes la obtención de una fórmula que invierta lo que hace otra fórmula.

El hecho de que las fórmulas queden ocultas tras los valores que calculan hace desaparecer de la vista las operaciones aritméticas que podrían servir de guía para identificar las cantidades puestas en juego. Esto nos condujo a etiquetar las cantidades contendidas en las celdas (fundamentalmente las desconocidas) mediante un nombre. Con este fin se tomó la decisión de enseñar a introducir los nombres, que se construyen para las cantidades que se representan, en las celdas de la columna A y en las celdas contiguas de la columna B sus valores o las fórmulas que las calculan. De este modo, se consiguió que el número de cantidades a la vista del resolutor no se viera comprometido por la longitud del nombre asignado. Esta decisión nos obligó a orientar la replicación de los pasos 3 y 4 en sentido horizontal en contra de lo que habitualmente se ha hecho al generar secuencias numéricas en otras investigaciones sobre resolución de problemas en la hoja de cálculo (véase, por ejemplo, Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Friedlander, 1999; Sutherland y Rojano, 1993; Wilson 2006).

Atendiendo al título del capítulo, se describirá el modelo de enseñanza, la forma en que se aplicó y algunas actuaciones observadas en los estudiantes. Además, se presentará a la población que formó parte del estudio por tratarse del primer capítulo en el que se hace referencia a los estudiantes.

4.1. LA POBLACIÓN Y MATERIALES

La población de nuestro estudio experimental estaba formada por una clase de 24 estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria del colegio *Sant Bertomeu* de Godella (Valencia). La selección del grupo respondió a que fue la única que encontramos disponible. Los estudiantes tenían una edad entre 13 y 14 años. La clase estaba integrada por 11 hombres y 13 mujeres. A cada individuo se le identificó mediante un número del 1 al 24. La elección de los individuos y el momento de observación respondió a que los estudiantes acababan de ser instruidos en la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos, pero aún no eran competentes en el uso del MC. Era, por tanto, un momento en el que aún podríamos observar un aumento en la competencia en el MC, pero en el que también podrían surgir tendencias cognitivas negativas como una vuelta al uso de las formas de resolver y/o del SMS de la aritmética.

La secuencia de enseñanza se desarrolló a lo largo de trece sesiones de 50 minutos que ocuparon un periodo de cuatro semanas entre mediados de mayo y junio de 2007. Todas las sesiones se desarrollaron en el aula de informática del centro que disponía de 16 ordenadores *Pentium II*[3] con sistema operativo *Windows XP* y con la suite *Microsoft Office 2003* que incluía la hoja de cálculo *Excel 2003*. Los estudiantes se organizaron por parejas por motivos de espacio y por razones metodológicas que expondremos con

---

[3] Los equipos tenían diez años de antigüedad aproximadamente y presentaban numerosos problemas técnicos. La mayoría de la unidades de discos flexibles no funcionaban, lo que nos obligó a utilizar los discos duros internos para almacenar la información mientras los estudiantes trabajaban. En todos los ordenadores se había "congelado" el disco duro (aunque no en todos los equipos funcionaba correctamente) lo que nos obligaba a extraer los archivos generados por los estudiantes antes de apagar los equipos.

detalle en el estudio de casos (ver capítulo 6). La composición de las parejas se dejó a criterio de los estudiantes. A cada pareja se le asignó un ordenador. Utilizamos el número del ordenador que ocupaban para identificar a cada pareja. Sin embargo, la pareja a la que se le asignó inicialmente el ordenador número 9 tuvimos que reubicarla en el ordenador número 6 por problemas técnicos. En la Tabla 1 se ofrecen los individuos que formaron cada pareja.

Tabla 1. Composición de las parejas.

Pareja	Estudiantes
1	6 y 17
3	7 y 20
4	19 y 21
5	2 y 10
6 (inicialmente 9)	11 y 22
7	1 y 4
8	8 y 23
10	13 y 16
11	15 y 24
13	12 y 18
14	3 y 9
16	5 y 14

4.2. LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

En la secuencia de enseñanza se identifican dos partes: la enseñanza de los rudimentos de la hoja de cálculo, y su uso para resolver problemas de forma aritmética, y la enseñanza del MHC para resolver problemas verbales aritmético-algebraicos. Los tiempos se repartieron casi por igual entre ambas partes: siete sesiones para la primera y seis para la segunda. Antes de iniciar la secuencia de enseñanza se les administraron dos cuestionarios formados por problemas verbales aritmético-algebraicos. La intención era observar, previamente a la enseñanza del MHC, la forma en que resolvían problemas y la competencia que tenían los estudiantes en el uso del MC. Entre ambos bloques de la secuencia de enseñanza, se administró un tercer cuestionario cuya objetivo era determinar la competencia en el uso del lenguaje de la hoja de cálculo. Al acabar la secuencia de enseñanza se propuso un último cuestionario, isomorfo al segundo, con la intención de observar la variación en la competencia a la hora de resolver problemas y, en especial, cuando se resolvían empleando el MC. Daremos una descripción más detallada de los cuestionarios empleados en el capítulo 5.

Durante la secuencia de enseñanza estuvieron presentes la profesora de matemáticas del grupo y el investigador, al que llamaremos profesor-investigador por el doble papel que desempeñó en la secuencia de enseñanza. En la parte de rudimentos de la hoja de cálculo, la introducción de nuevas ideas o técnicas y el resumen de los aspectos clave siempre corrió a cargo del profesor-investigador[4]. No obstante, ambos profesores ofrecieron sugerencias y aclararon dudas técnicas cuando los estudiantes solicitaban ayuda. En la parte de la enseñanza del MHC, la introducción del método mediante la resolución de un problema la realizó el profesor-investigador. A lo largo de esta sesión y la siguiente, los profesores corrigieron errores y ayudaron a superar las dificultades que los estudiantes encontraron al aplicar el MHC. En el resto de sesiones, la intervención de los profesores se produjo únicamente cuando había petición de los estudiantes.

Las actividades realizadas por los estudiantes se recogieron en formularios escritos en la parte de enseñanza de las características y del lenguaje de la hoja de cálculo y en archivos informáticos en la parte de resolución de problemas.

4.2.1. LA ENSEÑANZA DE RUDIMENTOS DE LA HOJA DE CÁLCULO

Las actividades de esta parte son una reelaboración y ampliación de las utilizadas en un estudio piloto previo (Arnau, 2004) que, a su vez, se basaron en algunas de las que aparecían en los textos *Enseñando Álgebra con Hojas Electrónicas de Cálculo* (Rojano y Ursini, 1997) y *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (Mochón, Rojano y Ursini, 2000). El hecho de haberlas utilizado anteriormente nos permitió conocer el tiempo necesario para completarlas y, de esta forma, poder exigir un mismo ritmo de trabajo a todo el grupo.

En la primera sesión, el profesor-investigador introdujo algunos elementos característicos del entorno como: celda, celda activa, columna, fila, barra de fórmulas y hoja activa. También se ofrecieron técnicas básicas como: cambiar el nombre a una hoja, seleccionar una celda o un rango de celdas y abrir y guardar un archivo. En las cuatro sesiones siguientes se les proporcionaron ocho fichas con actividades en las que se trataba: la introducción de fórmulas, la copia y pegado de celdas y la generación de secuencias numéricas. Las dos últimas sesiones se dedicaron a que los estudiantes utilizaran las nuevas competencias adquiridas en la hoja de cálculo para que resolvieran problemas verbales de manera aritmética en dicho entorno.

Como ya hemos señalado, se impuso a todas las parejas el mismo ritmo de trabajo en esta parte de la enseñanza. En las cuatro sesiones centrales (de la segunda a la quinta), se ofrecieron dos fichas en sendas hojas (de papel) donde se agrupaba un número variable de actividades. La participación de los profesores consistió en hacer sugerencias y contestar a la dudas técnicas que planteaban los estudiantes[5]. Al acabar cada ficha se realizaba una puesta en común, dirigida por el profesor-investigador, de los aspectos destacables que se habían introducido. De esta manera se podía corregir las contestaciones incorrectas que se hubieran producido y recalcar las ideas importantes. En la penúltima sesión (la sexta), se ofreció una ficha en la que se guiaba en la

[4] Se disponía de un ordenador conectado a un proyector multimedia que permitía ofrecer explicaciones al conjunto de la clase.

[5] En ningún caso se ayudó a responder a las preguntas con las que se pretendía que los estudiantes extrajeran conclusiones como, por ejemplo, “La ausencia de valor en una celda equivale a ___________”.

resolución aritmética de un problema verbal y, a continuación, se propuso la resolución de una colección de problemas, que normalmente se resuelven de manera aritmética, que se concluyó en la última sesión (la séptima).

Pasamos a describir las actividades que se propusieron y ofrecemos comentarios de algunas contestaciones de los estudiantes en las fichas; sin embargo, no analizaremos las producciones de los estudiantes cuando se enfrentaron a la colección de problemas. Estas producciones tendría escaso valor como medida de la actuación, pues se atendió a las preguntas en las que pedían ayuda y no se impidió que se apoyaran en las parejas vecinas. Además, en el capítulo 6 se llevará a cabo un estudio de casos que nos permitirá hacer una descripción más precisa de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas en la hoja de cálculo. El título de los subapartados responde al de las fichas suministradas y se indica entre paréntesis la sesión en la que cada ficha se realizó. Las fichas completas se encuentran en el anexo A y las producciones de los estudiantes en los anexos B y C.

4.2.1.1. Ficha "La hoja de cálculo" (Sesión segunda de rudimentos[6])

Descripción de las actividades

Se les enseñó lo que era un fórmula y cómo editarla y a construir fórmulas utilizando el ratón para referirse a las celdas. Se plantearon situaciones que pusieron de manifiesto que la hoja de cálculo recalcula automáticamente una fórmula cuando se modifica el valor presente en una celda a la que la fórmula hace referencia. Por último, se propuso una situación que mostraba la equivalencia entre la ausencia de valor en una celda y la presencia de un cero.

- Coloca el cursor en la celda A2, teclea el número 4 y presiona INTRO.
- Coloca el cursor en B7, teclea =, haz clic en A2, teclea +2 y presiona INTRO.

  ¿Qué número aparece en B7?______________________________________

  ¿Es este número el resultado de 4+2?________________________________

  Haz doble clic en B7. Lo que aparece es una fórmula. Escríbela: ____________________________

- Haz clic en A2, escribe el número que quieras y pulsa INTRO. ¿Qué número aparece en B7?____

  ¿Qué crees que hace la fórmula? ____________________________________

Figura 1.

En concreto se les pedía que introdujeran la fórmula =A2+2 en la celda B7 y modificaran los valores de A2 para observar cómo cambiaban los valores de B7 (ver Figura 1). El último valor que se les hizo introducir en A2 fue el cero (ver Figura 2), obteniendo en B7 como respuesta el valor 2. A continuación, se les hizo borrar el valor (cero) presente en A2 para que observaran que en B7 se mantenía el mismo valor y concluyeran que en una celda vacía el número presente es el cero.

---

[6] Recordemos que la primera sesión se empleó en introducir los elementos básicos de la hoja de cálculo y para que los estudiantes se organizaran por parejas.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

A la pregunta "¿Qué crees que hace la fórmula?" (ver Figura 1) la mayoría respondió de manera correcta. Un ejemplo sería la pareja 1: "Al número que tenemos en A2 se le suman 2 unidades y el resultado aparece en B7". La pareja 11 introdujo la palabra cambio en su respuesta: "como es A2+2, si en A2 se cambia el número el resultado tambien [sic] cambia". La pareja 7 dio una respuesta centrada en la operación empleada en la situación: "Sumar las celdas que elijas". La pareja 14 parece responder a si el resultado ofrecido es correcto pues contestan: "Si [sic] porque A2 = 7".

Todas las parejas, excepto la 8, contestaron correctamente a la pregunta "La ausencia de valor en una celda equivale a _________". La pareja 8 dio por respuesta 2 (el valor presente en B7), en lugar de concluir que en B7 el valor que aparece es el mismo tanto si en A2 hay un cero como si la celda está vacía.

- Escribe en A2 el número 0… en B7 aparece ________________________

Ahora vamos a borrar

- Coloca el cursor en A2, pulsa la tecla SUPR.

  ¿Qué aparece en la celda B7?____________________________________

  La ausencia de valor en una celda equivale a _________________________

Figura 2.

4.2.1.2. Ficha "Copia y pegado de fórmulas" (Sesión segunda de rudimentos)

Descripción de las actividades

Se propone completar la factura de una compra (ver Figura 3). En primer lugar, se ofrecen instrucciones sobre cómo construir la fórmula que deberían utilizar para calcular el precio total de los tomates a partir del precio de un kilo de tomates y del número de kilos que se han comprado ("Sitúate en la celda D2 y escribe =, haz clic en B2, teclea *, haz clic en C2 y presiona INTRO"), volviendo a insistir en el uso del ratón para hacer referencia a las celdas que contienen los valores. A continuación (ver Figura 4), se les guía en la generación de las fórmulas que calculan el precio total del resto de productos mediante la copia y pegado por arrastre de la fórmula creada en D2 (la que calcula el precio total de los tomates). Con este fin, se les indica qué es el controlador de relleno y cómo se utiliza para la replicación del contenido de una celda.

- Hemos ido de compras a una verdulería y hemos hecho la siguiente:

	A	B	C	D
1	PRODUCTO	KILOS	PRECIO POR UNIDAD	COSTE
2	Tomates	2	1,5	
3	Patatas	5	0,3	
4	Cebollas	3	0,5	
5	Plátanos	1	1,3	
6	Naranjas	4	0,9	
7	Kiwis	0,5	1,1	
8				
9			TOTAL	
10				

- Sitúate en la celda D2 y escribe =, haz clic en B2, teclea *, haz clic en C2 y presiona INTRO.

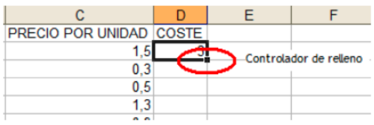
  ¿Qué número aparece en la celda D2?______________________

  ¿Qué significa ese número?______________________________________

Figura 3.

Se les pide (ver Figura 4) que interpreten los valores obtenidos por las fórmulas que se han generado tras el *arrastre* ("¿Qué significan los números que aparecen?"), introduciendo este término para referirse a la acción de copia y pegado por arrastre, y se les pregunta por cuál es el efecto del arrastre sobre las nuevas fórmulas generadas ("¿Qué crees que ocurre cuando se arrastra una fórmula?").

- Haz clic sobre la celda D2. Aparecerá un rectángulo con un pequeño cuadrado en el vértice inferior derecho llamado controlador de relleno.



  Sitúa el cursor sobre él, pulsa el botón izquierdo del ratón y, sin soltar, arrástralo hacia abajo hasta llegar a la fila de los "Kiwis". Deja de pulsar el botón izquierdo.

  ¿Qué significan los números que aparecen?_____________________

  ____

  ____

  Mueve el cursor a las celdas D3, D4, etc. y observa las fórmulas que se han generado al "arrastrar" la celda D2. ¿Qué crees que ocurre cuando se "arrastra" una fórmula? ____

Figura 4.

A continuación (ver Figura 5), se solicita la construcción de una fórmula que calcule el precio total de la compra sin dar instrucciones sobre cómo debería hacerse ("Calcula en la celda D9 el total de dinero gastado") y por último se pide que expliquen cuál es el efecto de variar el valor, que era dato, del precio por kilo de las naranjas ("¿Qué valores debes modificar tú y cuáles los modificará automáticamente la hoja de cálculo? Discútelo con tu compañero."). La intención vuelve a ser que observen que la modificación del valor presente en una celda se refleja en el resultado de las fórmulas que refieren a esa celda dentro de la fórmula.

- Calcula en la celda D9 el total de dinero gastado.

  ¿Qué resultado has obtenido?:____________________

- Antes de cobrarnos, el dependiente se da cuenta de que se ha equivocado en el precio por kilo de naranjas. Las había cobrado a 0,9 € el kilo, cuando lo debería haber hecho a 1,4 € el kilo.

  ¿Qué valores debes modificar tú y cuáles los modificará automáticamente la hoja de cálculo? Discútelo con tu compañero.__________________________

Figura 5.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

A la pregunta "¿Qué significa ese número?" (haciendo referencia al número que aparece en D2 y que da el precio de dos kilos de tomates, ver Figura 3) la mayoría contestaron de manera parecida a como lo hizo la pareja 4: "lo que cuestan 2 kg de tomates". Dentro de este grupo, la pareja 8 respondió "coste 2 tomates", lo que podemos interpretar como un respuesta abreviada o una confusión entre kilos de tomates y número de tomates. También surgieron respuestas más generales como la que da la pareja 5: "El resultado de Kilos por precio de la unidad". Encontramos dos casos en los que se ofrecía la fórmula que se había utilizado. La pareja 11 escribió la fórmula correcta "=B2×C2" y la 13, la fórmula incorrecta "=A2×C2" (el hecho que fueran parejas vecinas nos sugiere que de algún modo la respuesta de una pareja influyó en la otra).

Cuando se les hizo la pregunta "¿Qué significan los números que aparecen?" (haciendo referencia a los números que se muestran en D3, D4, D5, D6 y D7, que dan el precio de cinco kilos de patatas, tres de cebollas, etc., ver Figura 4), refiriéndose a los números generados al arrastrar la celda D2, la mayoría de las parejas contestaron de forma similar a como lo hizo la pareja 8: "el precio de los productos". Las parejas 5 y 11 dieron una respuesta menos ligada al contexto de la situación planteada: la pareja 5 contestó "Que aparecen todos los resultados de las operaciones" y la pareja 11, "El resultado de todas la fórmulas". La pareja 13 dio una respuesta que era la esperada para la siguiente pregunta, pero que sorprendió por su precisión: "Las celdas de los factores son relativas a la del resultado. Entonces si cambias la celda del resultado, canvia [sic] la de los factores".

La pregunta "Qué crees que ocurre cuando se 'arrastra' una fórmula?" (refiriéndose a la copia y pegado por arrastre de D2 en D3, D4, D6, D6 y D7, ver Figura 4) tuvo respuestas que van desde la exactitud de la pareja 13 ("Si el resultado baja una celda, los factores de las fórmulas, bajan") a la pobreza de la pareja 11 ("Que se ponen los resultados de todas las demás fórmulas") o la pareja 1 ("Que se calcula, que se realiza"). Sin embargo, la mayoría de parejas coincidió en referirse de una forma u otra a la fórmula inicial. Por ejemplo, la pareja 5 respondió "Que aparecen en las celdas la fórmula"; la 7, "Se hace lo mismo que en la primera" y la 6 (cuando aún era 9), "Que la fórmula inicial se utiliza en los otros productos para saber el coste".

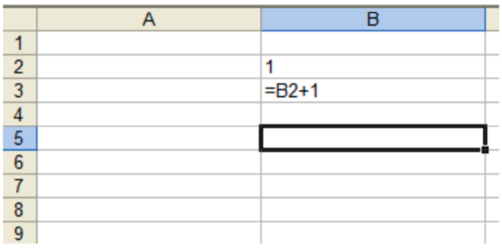
Por último, la pregunta "¿Qué valores debes modificar tú y cuáles los modificará automáticamente la hoja de cálculo?" (refiriéndose a la actividad en la que se propone una modificación de precio de un kilo de naranjas, ver Figura 5) todas las parejas dieron una respuesta correcta, parecida a la que dio la pareja 14: "Mi compañero ha modificado el precio por unidad y la máquina ha hecho el coste".

4.2.1.3. Ficha "Generación de secuencias numéricas 1" (Sesión tercera de rudimentos)

Descripción de las actividades

Esta ficha y la siguiente pretendían introducir la técnica de la copia y pegado por arrastre para generar secuencias numéricas usando fórmulas de recurrencia. En concreto, se les guía en el proceso de generar una secuencia que se inicia en el número 1 (situado en la celda B2) y llega hasta el 11 avanzando de uno en uno, mediante el arrastre de la fórmula =B2+1 que se introduce en la celda B3 (ver Figura 6). También se insiste en las consecuencias, respecto a la variación de las referencias relativas, que tiene sobre la fórmula el hecho de copiarla y pegarla en otro lugar. Para ello se les hizo que observaran las fórmulas que se generaron en la columna B al arrastrar la celda B3 ("Mueve el cursor a las celdas B4, B5, etc. y observa qué fórmulas generaste al copiar tu fórmula original.", ver Figura 7). Por último, se le instó a que observaran las consecuencias de modificar el valor presente en B2 ("¿Qué pasa si cambias el valor en la celda B2?", ver Figura 7), volviendo a insistir en la característica de recalculado automático de fórmulas.

- Introduce en la celda B2 el número 1.
- En la celda B3 escribe igual, haz clic en la celda B2, escribe +1 y pulsa INTRO.



- Selecciona la celda B3. Haz clic en el controlador de relleno y sin soltar copia la fórmula hacia abajo. Obtendrás una pantalla como la siguiente:

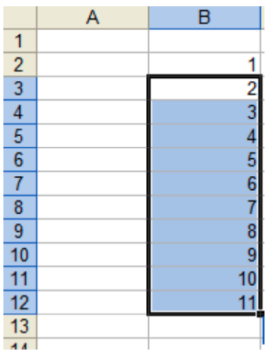


Figura 6.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

A la pregunta "¿Qué pasa si le cambias el valor en la celda B2?" (refiriéndose al valor inicial de la secuencia numérica, ver Figura 7) todas las parejas dieron una respuesta que de algún modo describía el cambio que se producía en la secuencia. La mayoría de las respuestas se centran en la modificación del conjunto de valores. Por ejemplo, la pareja 3 contesta "que canvian [sic] los demas [sic] (suman 1)" o la pareja 13 "Que todos aumentan lo mismo que B2”. La pareja 10, sin embargo, apunta a la constancia en la diferencia de valores y responde: “Que augmenta [sic] otra vez de 1 en 1”. La pareja 6 (cuando aún se le llamaba pareja 9) contestó “Que cambia la fórmula y augmenta [sic] todos los números” lo que supone que han confundido celdas y fórmulas (lo más probable) o que sugieren la existencia de un cambio en las fórmulas, cuando realmente sólo se han modificado los valores que generan.

Mueve el cursor a las celdas B4, B5, etc. y observa qué fórmulas generaste al copiar tu fórmula original.

Hemos construido una secuencia que empieza por el número ___ y aumenta de __ en __.

¿Qué pasa si le cambias el valor en la celda B2?___________________________

Figura 7.

4.2.1.4. Ficha “Generación de secuencias numéricas 2” (Sesión tercera de rudimentos)

Descripción de las actividades

De manera similar a la ficha *Generación de secuencias numéricas 1* (ver Figura 6), se les guía en la generación de una secuencia que se inicia en el número 1 (situado en la celda B2) y llega hasta el 6, avanzando de 0,5 en 0,5, mediante el arrastre de la fórmula =B2+0,5 que se introduce en la celda B3. A continuación, y ya sin ninguna ayuda, se les propone la construcción de “una secuencia que empiece por el 5 y aumente de 3 en 3” y de una progresión geométrica que “empiece en 20 y cada número sea la mitad del anterior”. Por último, se insiste en que observen el efecto que tiene la modificación del valor inicial en el cálculo automático del resto de la serie (“¿Qué pasa si sustituimos el 20 por 1200?”, ver Figura 8).

- En la Hoja 3 construye una secuencia que empiece en 20 y cada número sea la mitad del anterior.

¿Qué pasa si sustituimos el 20 por 1200?______________________________

Figura 8.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

La pregunta “¿Qué pasa si sustituimos el 20 por 1200?” se contesta normalmente destacando el cambio de los números de la secuencia. Encontramos respuestas vagas como la de la pareja 6[7] (“Que cambian todos los números”), más precisas como la de la pareja 4 (“Que a partir del 1200 va disminuyendo a cada numero [sic] pa [sic] la mitad”) y otras que introducen expresiones algebraicas como la de la pareja 5 (“Que se aplica la formula [sic] $x/2$ en todos los números”). Existen, sin embargo, dos contestaciones singulares. La pareja 11 responde “Cambian todas las fórmulas”, lo que supone que ha confundido celdas y fórmulas (lo más probable) o que realmente sugiere una variación de fórmulas inexistente. La pareja 14 se centra en la variación, y no en los números generados, y contesta “Pues que le pasa lo mismo, que con el 20”.

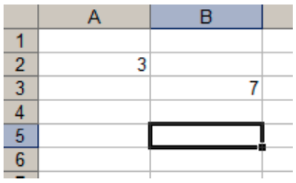
[7] Dejamos de insistir en que la pareja 6 empezó llamándose 9, pero téngase en cuenta este hecho si se consultan las producciones de los estudiantes en el anexo B.

4.2.1.5. Ficha "Fórmulas 1" (Sesión cuarta de rudimentos)

Descripción de las actividades

Estas actividades vuelven a insistir sobre la construcción de fórmulas y la recalculación automática cuando se modifica el valor presente en una celda a la que se refiere la fórmula. Se pretende que un miembro de la pareja introduzca un número en la celda A2 y que escriba una fórmula en la celda B3 que realice un cálculo empleando una referencia a la celda A2 (ver Figura 9). El otro integrante de la pareja, que no habrá estado mirando, debe determinar la fórmula que ha introducido su compañero en B3 modificando el número presente en la celda A2. Una vez la haya identificado, tiene que reproducirla en otra celda y observar que, efectivamente, coinciden los resultados de ambas fórmulas cuando se varía el valor presente en A2.

Observa la siguiente tabla.



El número 7 resulta de escribir la fórmula = A2 + 4.

Ahora, sin que tu compañero lo vea, escribe un número en la celda A2 y una fórmula en la celda B3. Puedes emplear cualquier operación para tu fórmula, por ejemplo:

= A2 -5, = A2 * 3, = A2/4, etc.

Figura 9.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

Al principio los estudiantes probaban números de una manera no sistemática, pero de manera espontánea o por sugerencia de los profesores emplearon los números 1 y 0 para de esa forma identificar la presencia de relaciones multiplicativas o aditivas. El uso de esta técnica se vio favorecida porque la mayoría de las fórmulas que se construyeron contenían una única operación aritmética como se sugería en las instrucciones.

4.2.1.6. Ficha "Fórmulas 2" (Sesión cuarta de rudimentos)

Descripción de las actividades

Estas actividades vuelven a insistir sobre la construcción de fórmulas y la recalculación automática cuando se modifica el valor presente en una celda a la que refiere la fórmula; pero además pretenden apoyar la necesidad, que en ocasiones surgirá, de plasmar un relación con una fórmula en un sentido distinto al que inicialmente habíamos previsto. Por turnos, cada estudiante debe introducir en B3 (ver Figura 10) una fórmula que realice una operación con el valor presente en A2 y enseñársela a su compañero. Éste debe introducir otra en C2 que tome el valor de B3 e invierta la acción que hacía la primera fórmula. Con este fin, se les indica como método de comprobación que deben conseguir que los valores de A2 y C2 sean siempre iguales. En la ficha se les proporcionó espacio para cuatro situaciones.

Escribe un número en la celda A2 y una fórmula en la celda B3. Enséñale a tu compañero la fórmula y pídele que escriba una fórmula en la celda C2 que invierta la acción de la fórmula que aparece en B3; es decir, el resultado de la celda C2 siempre debe ser igual al valor que aparece en A2.

Vamos a aclararlo con el ejemplo siguiente:

	A	B	C
1			
2	3		3
3		7	
4			
5			
6			

Para obtener el 7 en la celda B3 se escribió la fórmula =A2+4. Para invertir esta fórmula, en C2 se escribió =B3-4. Así se obtuvo el 3 en C2, cuyo valor es igual que en A2. Si cambias el valor en A2, aparecerá el mismo en C2.

Figura 10.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

La mayoría de estudiantes introdujeron en B3 una fórmula con una única operación aritmética y su compañero construyó una fórmula correcta que deshacía la acción. Destacamos el caso de l apareja 13, donde un miembro propuso la fórmula “=A2^4” y su compañero construyó “=(B3)^(1/4)”. Las parejas 4 y 5 tuvieron actuaciones similares (lo que dado la proximidad física nos hace suponer que hubo algún intercambio de información). En ambos casos, construyeron fórmulas con dos operaciones en B3 y escribieron en C2 fórmulas que invertían las operaciones, pero sin alteran su orden. Como ejemplo, un integrante de la pareja 4 introdujo “=A2/2+5” en B3 y su compañero construyó “=B3*2-5” en C2. Un caso singular lo constituyó la pareja 10 que, supuestamente, no construyó fórmulas con referencias a A2 y B3, sino que empleo números. Por ejemplo, una integrante de la pareja introdujo “15 + 4 = 19” en B3 y su compañera invirtió la acción mediante “19 – 4 = 15”.

4.2.1.7. Ficha “Fórmulas 3” (Sesión quinta de rudimentos)

Descripción de las actividades

Las actividades de este apartado consistieron en la construcción de fórmulas a partir de expresiones matemáticas como $\frac{12-8}{32}$ o de proposiciones verbales como “En la misma hoja, escribe en B2 una fórmula que multiplique por 2 el resultado de sumar A2 y A4”. Para que los estudiantes pudieran comprobar la validez de la fórmula se les ofreció el resultado de las expresiones matemáticas, mientras que para las proposiciones escritas se les procuró el resultado de un caso concreto. Así, para el primer ejemplo que hemos planteado se les indicaba “Si lo has hecho todo bien, el resultado que debe aparecer es 0,125” y en el segundo “Si los has hecho bien, al introducir en la celda A2 el número 7 y en la A4 el número 10, debe aparecer como resultado 34”.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

Evidentemente, el hecho de que se ofreciera la posibilidad de comprobar el resultado hizo que normalmente se ofreciera la respuesta correcta. Únicamente, las parejas 14 y 16 dieron la misma respuesta incorrecta a un ítem, lo que nos hace pensar en un intercambio de información debido a la vecindad. En concreto, contestaron "=3/(C9-C8)" al ítem "En la misma hoja, escribe en C7 una fórmula que divida entre 3 el resultado de restar C8 a C9. Si lo has hecho bien, al introducir en la C8 el número 7 y en la C9 el número 10, debe aparecer como resultado 1". Otro caso digno de mención es el de la pareja 7 que, aunque contestó correctamente a todos los ítems, no expresó la fórmula (se indicaba "Escribe la fórmula tal y como queda en la hoja de cálculo") en ningún caso, sino una expresión matemática sin marcadores posicionales de yuxtaposición vertical. Por ejemplo, en lugar de responder =(10-3)/(5*2+4), escribieron "=(10-3):(5×2+4)".

4.2.1.8. Ficha "Fórmulas 4" (Sesión quinta de rudimentos)

Descripción de las actividades

Esta ficha se inicia con una actividad de cada tipo de las propuestas en la ficha anterior (ver Figura 11), pero sin ofrecer el resultado ni una forma para comprobarlo, respectivamente. A continuación se guía en la actividad de "escribir una fórmula que divida por 3 el siguiente de un número" y se proponen dos actividades más sin ayudas: "una fórmula que sume 2 al triple de un número" y "una fórmula que multiplique por 3 el resultado de añadir 2 a un número". Por último, se pide que describan las diferencias que encuentran entre estas últimas dos fórmulas.

- Utilizando una única fórmula, calcula $\frac{12-6{,}7}{32}$ en la celda A2. Escribe la fórmula: ________________________
- En la misma hoja, escribe en B2 una fórmula que multiplique por 2 el resultado de sumar A2 y A4. Anota la fórmula: ___________________

Figura 11.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

Por lo que respecta al cálculo de $\frac{12-6{,}7}{32}$ (ver Figura 11), todas las parejas dieron una respuesta correcta a excepción de las 7, 8 y 16 que omitieron el paréntesis que debía modificar la prioridad de la división sobre la resta. Así, la pareja 7 escribió "=12-6,7:32" y la 8 y la 16, "=12-6,7/32". En la actividad "escribe en B2 una fórmula que multiplique por 2 el resultado de sumar A2 y A4" (ver Figura 11), únicamente las parejas 5 y 7 dan una respuesta errónea ("2×A2+A4" y "A2×2+A4", respectivamente) al prescindir del paréntesis que debía dar prioridad a la suma. La pareja 16 dio una respuesta correcta ("(11,790625+0) ×2"), pero construyendo la fórmula con los valores presentes en las celdas A2 (11,790625 que era el resultado de "=12-6,7/32") y A4 (cero por estar vacía) y no con las referencias a dichas celdas.

Sólo las parejas 7 y 8 dieron respuesta incorrecta a la pregunta "una fórmula que sume 2 al triple de un número". La pareja 7 contestó "=(B3+2)×3", cambiando el orden de las operaciones propuestas, y la pareja 8 ofreció la respuesta de una actividad anterior. A excepción de las parejas 4 y 13, todas las que contestaron correctamente utilizaron un paréntesis innecesario como, por ejemplo, la pareja 1 que escribió "=(A1*3)+2".

Por lo que respecta a las respuestas a la actividad "una fórmula que multiplique por 3 el resultado de añadir 2 a un número", la pareja 7 contestó "=3×2+3", utilizando valores concretos en lugar de referencias a celdas, y la 14 respondió “=B1+2*3”, omitiendo en ambos casos un paréntesis necesario.

A la pregunta “¿Qué diferencia encuentras en estas dos fórmulas?” (las que se generan en “una fórmula que sume 2 al triple de un número” y “una fórmula que multiplique por 3 el resultado de añadir 2 a un número”), la mayoría de las respuestas refieren de un modo u otro al orden en el que se realizan las operaciones. Encontramos parejas, como la pareja 1, que se centran en las operaciones: “Que en una primero se suma y después se multiplica y en la otra al contrario”. Otras, como la pareja 5 (que usa paréntesis en ambas fórmulas), se centran en el contenido de los paréntesis: “Que dentro del paréntesis hay diferentes operaciones”. La pareja 13 dio la respuesta más formal (“En la prioridad de las operaciones”) y la 16, la más ambigua (“Que son al revés”).

4.2.1.9. Ficha “Problema 1” (Sesión sexta de rudimentos)

Descripción de las actividades

Se propone la resolución guiada del problema “El precio de una entrada de cine es de 5,75 €. Calcula lo que nos ha costado 113 entradas”. La intención es aplicar lo aprendido sobre el lenguaje y uso de la hoja de cálculo a la resolución de problemas. Con la finalidad que los estudiantes identifiquen los valores que directamente o como resultado de introducir una fórmula aparezcan, se les instruye para que escriban en las celdas de la columna A los nombres de las cantidades que se pondrán en juego y en las celdas contiguas de la columna B su valores o las fórmulas que las calculan. Así, en la celda A1 se les pide que introduzcan “Precio de una entrada de cine”, en la A2, “Número de entradas de cine” y en la A3, “Precio total”. A continuación, se les exige que introduzcan los valores de las cantidades conocidas mediante las instrucciones: “En la celda B1 escribe 5,75” y “En la celda B2 escribe 113”. Por último, se les indica la fórmula que plasmará la relación que existe entre las cantidades y que servirá para calcular el “Precio total”: “En la celda B3 escribe =, haz clic en B1, escribe * haz clic en B2 y pulsa INTRO”.

A continuación, se plantean actividades (ver Figura 12) cuya intención es que vuelvan a observar los efectos que tiene la modificación de un valor en un celda (como “Escribe en la celda B1 el número 4,5… en B3 aparece”) que sirve como referencia en una fórmula y se pregunta “¿Qué representaría ese valor?” con el propósito de que interpreten la modificación en el contexto del problema.

- Escribe en la celda B1 el número 4,5… en B3 aparece___________________

  ¿Qué representaría ese valor?

  ____

  ____

- Escribe en la celda B2 el número 10… en B3 aparece ___________________

  ¿Qué representaría ese valor?

  ____

  ____

Figura 12.

Comentarios a las actuaciones de los estudiantes

Todas las parejas respondieron correctamente a "Escribe en la celda B1 el número 4,5… en B3 aparece" y a "Escribe en la celda B2 el número 10… en B3 aparece" (ver Figura 12). A la pregunta "¿Qué representaría ese valor?" en cada una de las situaciones (introducir 4,5 en B1 y 10 en B2), la mayoría de las parejas dieron respuestas como la que ofreció la pareja 1: "Precio total de 113 entrada si costasen 4,5 € cada entrada" y "Precio de 10 entradas a 4,5 €". Otras, como las parejas 10 y 16 dieron respuestas más pobres que no atienden a la variación que se ha producido. Por ejemplo, la pareja 10 contestó en ambos casos: "El total de las entradas". Destacamos el caso de la pareja 3 que respondió "Precio de las entradas con descuento" a la variación del precio de una entrada (la modificación del valor de B1 a 4,5), lo que podemos interpretar como un intento de ir más allá de la situación numérica, buscando una explicación en el mundo real al fenómeno que se ha producido.

4.2.1.10. Ficha "Colección de problemas 1" (Sesiones sexta y séptima de rudimentos)

Se administró una colección de problemas para que fueran resueltos en el entorno de la hoja de cálculo. La colección la formaban ocho problemas que tenían la característica de que habitualmente se resuelven de manera aritmética y se eligieron atendiendo a que no tuvieran la misma estructura. Para dar respuesta a la exigencia anterior, tomamos como estructura del problema el grafo de una lectura analítica del mismo realizada por el investigador. Ofrecemos una descripción de los problemas a continuación.

4.2.1.10.1. Problema "La final de baloncesto"

Para ver la final de baloncesto han llegado 126 autocares llenos con 50 plazas cada uno y 1325 automóviles con sus 4 plazas ocupadas. En cada fila del pabellón caben 80 espectadores. ¿Cuántas filas se llenan en total?

Análisis de cantidades

Número de autocares = A = 126.

Número de plazas por autocar = Pa = 50.

Número de automóviles = C =1325.

Número de plazas por automóvil = Pc = 4.

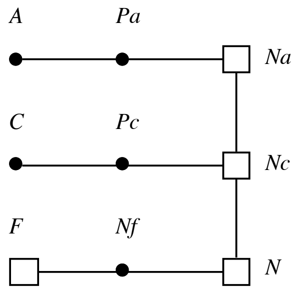
Número de personas que han venido en autocar = Na.

Número de personas que han venido en coche = Nc.

Número de personas que han venido = N.

Número de personas que caben en cada fila = Nf = 80.

Número de filas que se llenan = F.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Na = A \cdot Pa$ $Nc = C \cdot Pc$ $N = Na + Nc$ $N = Nf \cdot F$	 La final de baloncesto.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Na = 126 \cdot 50 \\ Nc = 1325 \cdot 4 \\ N = Na + Nc \\ N = 80 \cdot F \end{cases} \rightarrow 11600 = 80 \cdot F \rightarrow F = 145$$

4.2.1.10.2. Problema "La frutería"

Por 3 kg de melocotones y 4 kg de peras he pagado 5 €. Si las peras están a 0,8 €/kg, ¿cuánto cuestan 2 kg de melocotones y uno de peras?

Análisis de cantidades

Precio de un kilo de melocotones = *Um*.

Precio de un kilo de peras = *Up* = 0,8.

Kilos de melocotones en la situación inicial = *Kmi* = 3.

Kilos de melocotones en la situación final = *Kmf* = 2.

Kilos de peras en la situación inicial = *Kpi* = 4.

Kilos de peras en la situación final = *Kpf* = 1.

Precio de los melocotones en la situación inicial = *Pmi*.

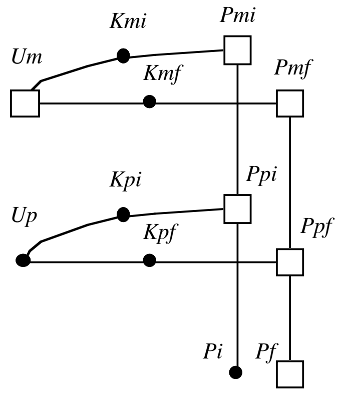
Precio de los melocotones en la situación final = *Pmf*.

Precio de las peras en la situación inicial = *Ppi*.

Precio de las peras en la situación final = *Ppf*.

Precio de la fruta en la situación inicial = *Pi* = 5.

Precio de la fruta en la situación final = *Pf*.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Pi = Pmi + Ppi$ $Pmi = Kmi \cdot Um$ $Ppi = Kpi \cdot Up$ $Pf = Pmf + Ppf$ $Pmf = Kmf \cdot Um$ $Ppf = Kpf \cdot Up$	 La frutería.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 5 = Pmi + Ppi \\ Pmi = 3 \cdot Um \\ Ppi = 4 \cdot 0{,}8 \\ Pf = Pmf + Ppf \\ Pmf = 2 \cdot Um \\ Ppf = 1 \cdot 0{,}8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = 3 \cdot Um + 3{,}2 \\ Pf = 2 \cdot Um + 0{,}8 \end{cases} \rightarrow Pf = 2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \rightarrow Pf = 2$$

4.2.1.10.3. Problema "El mosto"

De 6000 kg de uva se han obtenido 4350 litros de mosto. ¿Qué cantidad de uva será necesaria para conseguir 5800 litros de mosto?

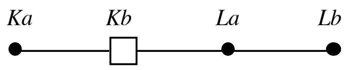
Análisis de cantidades

Kilos de uva en la situación A = *Ka* = 6000.

Litros de mosto en la situación A = *La* = 4350.

Kilos de uva en la situación B = *Kb*.

Litros de mosto en la situación B = *Lb* = 5800.

Análisis de relaciones.	*Grafo*
$\frac{Ka}{Kb} = \frac{La}{Lb}$	 El mosto.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\frac{6000}{Kb} = \frac{4350}{5800} \rightarrow Kb = 8000$$

4.2.1.10.4. Problema "La paga mensual"

Actualmente me dan 15 € mensuales de paga, pero he convencido a mis padres para que me suban el 15%. ¿Cuál será mi paga a partir de ahora?

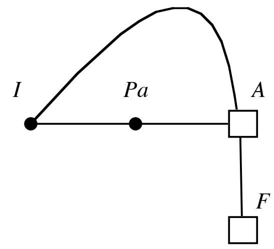
Análisis de cantidades

Paga inicial = I = 15.

Paga final = F.

Porcentaje de aumento = Pa = 0,15.

Aumento de paga = A.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$A = Pa \cdot I$ $F = I + A$	 La paga mensual.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} A = 0{,}15 \cdot 15 \\ F = 15 + A \end{cases} \rightarrow F = 17{,}25$$

4.2.1.10.5. Problema "Los cromos"

Esteban tiene 27 cromos más que Hernán mientras que Jaime tiene 3 veces más que Esteban. Si Esteban tiene 138 cromos. ¿Cuántos tienen los tres juntos?

Análisis de cantidades

Número de cromos que tiene Esteban = E = 138.

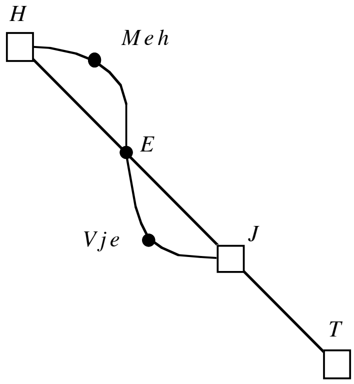
Número de cromos que tiene Hernán = H.

Número de cromos que tiene Jaime = J.

Número de cromos que tienen entre los tres = T.

Número de cromos de más que tiene Esteban respecto a los que tiene Hernán = Meh = 27.

Número por el que hay que multiplicar el número de cromos de Esteban para obtener el número de cromos de Jaime = Vje = 3.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$E = H + Meh$
$J = Vje \cdot E$
$T = E + H + J$</td><td>

Los cromos.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 138 = H + 27 \\ J = 138 \cdot 3 \\ T = 138 + H + J \end{cases} \rightarrow T = 663$$

4.2.1.10.6. Problema “El jersey”

Un jersey costaba 50 € y he pagado 40 €. ¿Qué porcentaje me han rebajado?

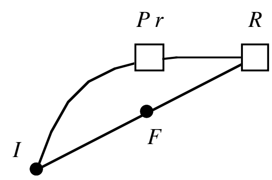
Análisis de cantidades

Precio inicial del jersey = *I* = 50.

Precio final del jersey = *F* = 40.

Rebaja de precio = *R*.

Porcentaje de rebaja = *Pr*.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$R = Pr \cdot I$
$I = F + R$</td><td>

El jersey.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} R = Pr \cdot 50 \\ 50 = 40 + R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = Pr \cdot 50 \\ R = 10 \end{cases} \rightarrow Pr = 0{,}2$$

4.2.1.10.7. Problema “Los hortelanos”

Un mayorista paga 975 € a tres hortelanos, a los que ha comprado respectivamente, 400 kg, 300 kg y 800 kg de tomates. ¿Cuánto corresponde a cada hortelano?

Análisis de cantidades

Kilos de tomates vendidos por el hortelano A = Ka = 400.

Kilos de tomates vendidos por el hortelano B = Kb = 300.

Kilos de tomates vendidos por el hortelano C = Kc = 800.

Precio pagado al hortelano A = Pa.

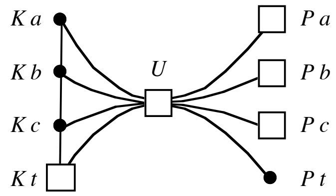
Precio pagado al hortelano B = Pb.

Precio pagado al hortelano C = Pc.

Kilos totales de tomates vendidos = Kt.

Precio total pagado por los tomates = Pt = 975.

Precio pagado por un kilo de tomates = U.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Kt = Ka + Kb + Kc$ $Pt = Kt \cdot U$ $Pa = Ka \cdot U$ $Pb = Kb \cdot U$ $Pc = Kc \cdot U$	 Los hortelanos.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Kt = 400 + 300 + 800 \\ 975 = Kt \cdot U \\ Pa = 400 \cdot U \\ Pb = 300 \cdot U \\ Pc = 800 \cdot U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Kt = 1500 \\ 975 = Kt \cdot U \\ Pa = 400 \cdot U \\ Pb = 300 \cdot U \\ Pc = 800 \cdot U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U = 0{,}65 \\ Pa = 400 \cdot U \\ Pb = 300 \cdot U \\ Pc = 800 \cdot U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Pa = 260 \\ Pb = 195 \\ Pc = 520 \end{cases}$$

4.2.1.10.8. Problema "El envío"

Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una población que está a 60 km de distancia, una empresa de transporte me ha cobrado 9 €. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 15 kg a 200 km de distancia?

Análisis de cantidades

Peso del paquete en la situación A = Ka = 5.

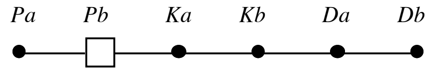
Distancia a la que se envía el paquete en la situación A = Da = 60.

Precio del envío en la situación A = Pa = 9.

Peso del paquete en la situación B = Kb = 15.

Distancia a la que se envía el paquete en la situación B = Db = 200.

Precio del envío en la situación B = Pb.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$\frac{Pa}{Pb}=\frac{Ka}{Kb}\cdot\frac{Da}{Db}$	 El envío.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\frac{9}{Pb}=\frac{5}{15}\cdot\frac{60}{200}\rightarrow Pb=90$$

4.2.2. LA ENSEÑANZA DEL MHC

La enseñanza del MHC se inició con la exposición por el profesor-investigador de cómo se resolvería un problema verbal utilizando este método. A continuación, los estudiantes imitaron lo observado tratando de resolver el mismo problema. En la segunda sesión se administró una ficha que contenía dos problemas que los estudiantes debían resolver utilizando el MHC. Los enunciados se ofrecían junto a una reproducción de un fragmento de hoja de cálculo en la que se mostraban los nombres de algunas cantidades con la intención de que sirvieran de ayuda a la hora de plantear el problema. En el resto de sesiones, los estudiantes resolvieron una colección de problemas verbales en la hoja de cálculo a distintos ritmos.

Los 13 problemas de la secuencia de enseñanza del MHC (incluyendo el problema ejemplo y los dos problemas en los que ofrecían pistas que guiaban la solución) se seleccionaron teniendo en cuenta los que se habían utilizado en los cuestionarios sobre problemas verbales (ver capítulo 5) y aquello que se pretendía observar en el estudio de casos (ver capítulo 6). Se excluyeron algunas subfamilias como geometría, grifos o móviles y se emplearon cuatro de compra-venta, cuatro de edades, tres de ábaco y dos de reparto. Se atendió a que no tuvieran la misma estructura para lo que se recurrió a identificar como tal el grafo de una lectura del problema realizada por el investigador.

La participación de los profesores en las dos primeras sesiones consistió en vigilar la correcta resolución de los problemas. Para ello se intervino, cuando fue necesario, aclarando las dudas y corrigiendo errores. No se permitió pasar a la colección de problemas sin haber terminado las actividades iniciales. Durante la resolución de la colección de problemas los profesores únicamente intervinieron a petición de los estudiantes y las ayudas se ofrecieron de manera progresiva (sugerencia, pista, ayuda significativa).

A continuación, describiremos el contenido utilizado en las seis sesiones que ocuparon la enseñanza del MHC. Las producciones escritas de los estudiantes en respuesta a la ficha *Problemas 1* se encuentran en el anexo B, mientras que las soluciones a los problemas de la *Colección de problemas 2* se hallan en el anexo D. Omitimos una descripción de las resoluciones, porque en el capítulo 6 se llevará a cabo un estudio de casos que nos permitirá hacer un retrato más preciso de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando el MHC.

4.2.2.1. La presentación del MHC (Sesión primera del MHC)

En la primera sesión el profesor-investigador resolvió el problema *David y Jaime* mediante el MHC. Tras la exposición, se invitó los estudiantes a resolver el problema imitando la actuación del profesor-investigador. A continuación, presentamos el análisis del problema empleado y la descripción detallada del guión seguido en la exposición.

4.2.2.1.1. Problema “Jaime y David”

A principio de curso Jaime y David fueron a comprar material escolar a una papelería. David compró un compás de 4 € y 5 libretas; Jaime, 7 libretas. ¿Cuánto cuesta cada libreta si los dos se gastaron lo mismo en la papelería?

Análisis de cantidades

Precio una libreta = Pl.

Precio de un compás = Pc = 4.

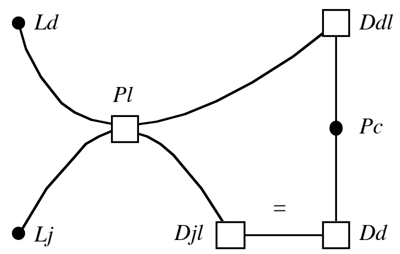
Número de libretas compradas por Jaime = Lj = 7.

Número de libretas compradas por David = Ld = 5.

Precio de las libretas que compra Jaime = Djl.

Precio de las libretas que compra David = Ddl.

Dinero que gasta David = Dd.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Djl = Pl \cdot Lj$
$Ddl = Pl \cdot Ld$
$Dd = Ddl + Pc$
$Dd = Djl$</td><td>

Jaime y David.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Djl = Pl \cdot 7 \\ Ddl = Pl \cdot 5 \\ Dd = Ddl + 4 \\ Dd = Djl \end{cases} \rightarrow 7 \cdot Pl = 5 \cdot Pl + 4 \rightarrow Pl = 2$$

4.2.2.1.2. La exposición de la resolución del problema “Jaime y David”

A continuación, se ofrece el esquema que siguió el profesor-investigador mientras resolvía el problema-ejemplo en una hoja de cálculo. Lo ofrecemos en un cuerpo de letra más pequeño y sin etiquetar las figuras para señalar que se trata del guión textual que empleó el profesor.

- Se presenta el problema *Jaime y David*.

> “A principio de curso Jaime y David fueron a comprar material escolar a una papelería. David compró un compás de 4€ y 5 libretas; Jaime, 7 libretas. ¿Cuánto cuesta cada libreta si los dos se gastaron lo mismo en la papelería?”.

- Después de leer el problema, en la primera columna de la hoja de cálculo, escribimos los nombres de las cantidades que aparecen en el problema.

	A	
1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	
3	nº de libretas que compra David	
4	nº de libretas que compra Jaime	
5	dinero gastado por David en libretas	
6	dinero gastado por Jaime en libretas	
7	dinero gastado por David en libretas y compás	
8		
9		

- Si sabemos el valor de una cantidad, lo introducimos en la celda situada a la derecha del nombre.

	A	B
1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	4
3	nº de libretas que compra David	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7
5	dinero gastado por David en libretas	
6	dinero gastado por Jaime en libretas	
7	dinero gastado por David en libretas y compás	

- También introducimos las fórmulas que relacionan unas cantidades con otras.
  - El “dinero gastado por David en libretas” se obtendría multiplicando el “precio de una libreta” por el “nº de libretas que compra David”.
  - El “dinero gastado por Jaime en libretas” se obtendría multiplicando el “precio de una libreta” por el “nº de libretas que compra Jaime”.
  - El “dinero gastado por David en libretas y compás” se obtendría sumando el “dinero gastado por David en libretas” más “precio de un compás”.

	A	B
1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	4
3	nº de libretas que compra David	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7
5	dinero gastado por David en libretas	0
6	dinero gastado por Jaime en libretas	0
7	dinero gastado por David en libretas y compás	4

- Cuando acabamos de escribir las fórmulas, observamos que queda una celda vacía. Para que el método que utilizamos funcione correctamente, sólo debe aparecer una celda en blanco[8]. En el problema que estamos resolviendo, la cantidad ligada a esta celda es el “precio de una libreta”.
- Identificamos dos cantidades que según el enunciado del problema deben ser iguales y coloreamos las filas en las que se encuentran[9]. Estas celdas, normalmente, no contienen valores iguales. En el problema que nos ocupa, las cantidades iguales son “dinero gastado por David en libretas y compás” y “dinero gastado por Jaime en libretas”.
- Probamos un valor para la cantidad “precio de una libreta”. Si lo acertáramos, los números que aparecerían en las celdas “dinero gastado por David en libretas y compás” y “dinero gastado por Jaime en libretas” serían iguales. A continuación, se presenta el resultado de suponer que el “precio de una libreta” es 1€. Observa que las cantidades “dinero gastado por David en libretas”, “dinero gastado por Jaime en libretas” y “dinero gastado por David en libretas y compás” cambian su valor. Esto es debido a que para calcularlas utilizamos, directa o indirectamente, el valor de “precio de una libreta”. Sin embargo, podemos ver que el “dinero gastado por Jaime en libretas” y el “dinero gastado por David en libretas y compás” no es el mismo.

---

[8] Como dijimos al inicio del capítulo, evitamos deliberadamente referirnos a esa celda como celda de referencia.

[9] Como dijimos al inicio del capítulo, evitamos la construcción de una fórmula que exprese la ecuación.

	A	B
1	precio de una libreta	1
2	precio de un compás	4
3	nº de libretas que compra David	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7
5	dinero gastado por David en libretas	5
6	dinero gastado por Jaime en libretas	7
7	dinero gastado por David en libretas y compás	9

- Como probar valores uno a uno es pesado[10], vamos a generar una secuencia numérica a partir de la celda que había quedado en blanco. Para ello en C1 escribimos =, hacemos clic en B1 y escribimos +1. A continuación, seleccionamos la celda C1 y con el controlador de relleno estiramos hacia la derecha. A lo largo de la fila 1 aparecerá la secuencia 1, 2, 3… Para que se recalculen todas las operaciones según los distintos valores del "precio de una libreta", debemos seleccionar las otras celdas de la columna B, hacer clic en el controlador de relleno y, sin soltar, arrastrar hacia la derecha[11].

- Debemos buscar ahora si en alguna columna coinciden los valores de las cantidades que deben ser iguales. En nuestro caso, esto se produce cuando el "dinero gastado por Jaime en libretas" y el "dinero gastado por David en libretas y compás" vale 14 €, lo que supone que el "precio de una libreta" será de 2 €.

	A	B	C	D	E	F	G
1	precio de una libreta	1	2	3	4	5	6
2	precio de un compás	4	4	4	4	4	4
3	nº de libretas que compra David	5	5	5	5	5	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7	7	7	7	7	7
5	dinero gastado por David en libretas	5	10	15	20	25	30
6	dinero gastado por Jaime en libretas	7	14	21	28	35	42
7	dinero gastado por David en libretas y compás	9	14	19	24	29	34

- Concluimos que el "precio de una libreta" era de 2 € el cual es un resultado posible porque las restricciones del problema implican que el "precio de una libreta" debe ser inferior al "precio de un compás".

4.2.2.2. Problemas 1 (Sesión segunda del MHC)

La siguiente sesión consistió en la resolución de los problemas *Encuentra el número* y *El problema de los deportistas*. Como ayuda se proporcionaban (ver Figuras 13 y 14, respectivamente) los nombres de algunas cantidades. En ambos problemas, además de contestar a la pregunta del problema, se pedía identificar las dos cantidades que debían ser iguales. En el primer problema, se igualaban dos cantidades en principio distintas cuyos nombres se ofrecían en la lista ("el número multiplicado por 4" y "el número más 9", ver Figura 13), mientras que en el segundo se igualaba una misma cantidad que debía expresarse de dos formas distintas ("Nº total de personas", ver Figura 14), pero de la que sólo se ofrecía una representación en celda. Esto obligaba a los estudiantes a asignar una segunda celda a la cantidad "Nº total de personas" en la que introducir la segunda expresión.

---

[10] A la técnica de probar valores en la celda de referencia le llamaremos ensayo y error. Este método tiene el inconveniente de que cuando la igualdad se establece sobre una cantidad desconocida, se necesita de una mayor esfuerzo para memorizar el sentido de variación de los números que aparecen en las celdas.

[11] Se explicó que cuando se arrastra una celda que contiene un número junto a otra que contiene una fórmula, la hoja de cálculo Excel 2003 puede generar una progresión aritmética de diferencia uno en la fila de la celda donde se encuentra el número. Para evitar este efecto, se propuso arrastrar celda a celda.

- Colorea las cantidades que deben ser iguales

	A	B
1	el número	
2	el número multiplicado por 4	
3	el número más 9	
4		
5		

- ¿Cuál es el resultado?_______

Figura 13.

A la pregunta “¿Qué has hecho para conseguir tener dos cantidades iguales?” (ver Figura 14) encontramos dos tipos de respuestas. Por un lado, tenemos las que se centran en la necesidad de duplicar las celdas que representan a una cantidad, como la pareja 4 que contesta “Sumar la cantidad de personas de cada deporte”. Por otro, tenemos las que atienden a la igualdad de valores, no de cantidades, como la pareja 7 que responde “Estirar de las celdas”.

¿Encuentras dos cantidades que sean iguales?__________

	A	B
1	Nº de personas apuntadas a fútbol	
2	Nº de personas apuntadas a baloncesto	
3	Nº de personas apuntadas a natación	
4	Nº total de personas	
5		

¿Qué has hecho para conseguir tener dos cantidades iguales?

Figura 14.

Durante esta sesión (que en parte se utilizó para que algunas parejas completaran el problema propuesto en la clase anterior) los dos profesores aclararon dudas y corrigieron la puesta en práctica del MHC ya fuera en respuesta a preguntas de los estudiantes o actuando de oficio. Fundamentalmente las explicaciones se centraron en el paso 5: la generación de una secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia y la replicación de los pasos 3 y 4.

A continuación ofrecemos un análisis de ambos problemas.

4.2.2.2.1. El problema “Encuentra el número”

Si a un número lo multiplico por 4 me da lo mismo que si a ese número le sumo 9. ¿Cuál es ese número?

Análisis de cantidades

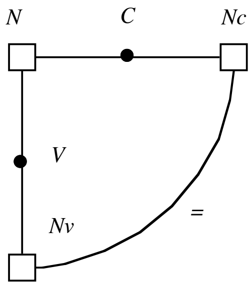
El número a encontrar = N.

El número por el que multiplicamos el número a encontrar = $C = 4$.

El número que obtenemos al cuadruplicar el número a encontrar = Nc.

El número que sumamos al número a encontrar = $V = 9$.

El número que obtenemos al sumar nueve al número a encontrar = Nv.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Nc = C \cdot N$ $Nv = V + N$ $Nc = Nv$	 Encuentra el número.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Nc = 4 \cdot N \\ Nv = 9 + N \rightarrow 4 \cdot N = 9 + N \rightarrow N = 3 \\ Nc = Nv \end{cases}$$

4.2.2.2.2. El problema de los deportistas

380 personas se han apuntado en actividades deportivas esta temporada. En fútbol hay 3 veces más personas que en baloncesto y natación tiene 114 personas más que en fútbol. ¿Cuántas personas hay en cada actividad?

Análisis de cantidades

Número de personas apuntadas a actividades deportivas = T = 380.

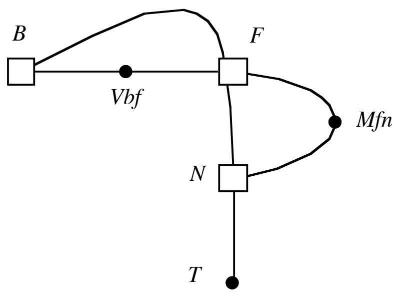
Número de personas apuntadas a fútbol = F.

Número de personas apuntadas a baloncesto = B.

Número de personas apuntadas a natación = N.

Número por el que hay que multiplicar el número de personas apuntadas a baloncesto para obtener el número de personas apuntadas a fútbol = Vbf = 3.

Número de personas de más que hay apuntadas en natación respecto a las que hay apuntadas a fútbol = Mfn = 114.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$T = F + B + N$ $F = B \cdot Vbf$ $N = F + Mfn$	 El problema de los deportistas.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 380 = F + B + N \\ F = 3 \cdot B \\ N = F + 114 \end{cases} \rightarrow 380 = 3B + B + 3B + 114 \rightarrow \begin{cases} N = 228 \\ F = 114 \\ B = 38 \end{cases}$$

4.2.2.3. Ficha "Colección de problemas 2" (Sesiones tercera, cuarta, quinta y sexta del MHC)

El resto de sesiones se empleo en la resolución de una colección de problemas. Durante esta fase, los profesores atendieron a las preguntas de los estudiantes, pero no actuaron de oficio. Ofrecemos una descripción de los problemas a continuación.

4.2.2.3.1. Problema "Los yogures"

Un yogur de frutas cuesta 10 céntimos más que uno natural. ¿Cuál es el precio de cada uno si he pagado 2,6 euros por cuatro naturales y seis de frutas?

Análisis de cantidades.

Precio de un yogur de frutas = Uf .

Precio de un yogur natural = Un.

Precio que cuesta de más un yogur de frutas respecto de uno natural = Mnf = 10.

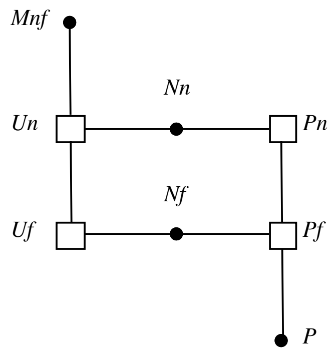
Número de yogures de frutas = Nf = 6.

Números de yogures naturales = Nn = 4.

Precio de los yogures de frutas = Pf.

Precio de los yogures naturales = Pn.

Precio de los yogures = P = 260.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$P = Pf + Pn$
$Pf = Nf \cdot Uf$
$Pn = Nn \cdot Un$
$Uf = Mnf + Un$</td><td>

Los yogures.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 260 = Pf + Pn \\ Pf = 6 \cdot Uf \\ Pn = 4 \cdot Un \\ Uf = Un + 10 \end{cases} \rightarrow 260 = 6 \cdot (Un + 10) + 4 \cdot Un \rightarrow \begin{cases} Un = 10 \\ Uf = 30 \end{cases}$$

4.2.2.3.2. Problema "Paz, Petra y su madre"

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Análisis de cantidades

Edad actual de Paz = $Aa = 6$.

Edad actual de Petra = $Ae = 9$.

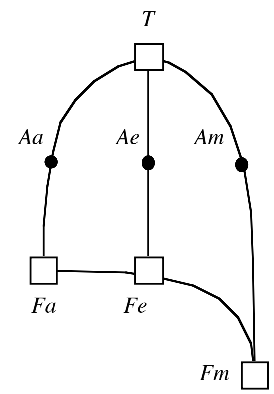
Edad actual de Ana (la madre) = $Am = 35$.

Tiempo transcurrido = T.

Edad futura de Paz = Fa.

Edad futura de Petra = Fe.

Edad futura de Ana (la madre) = Fm.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Fa = Aa + T$ $Fe = Ae + T$ $Fm = Am + T$ $Fm = Fa + Fe$	 Paz, Petra y su madre.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Fa = 6 + T \\ Fe = 9 + T \\ Fm = 35 + T \\ Fm = Fa + Fe \end{cases} \rightarrow 35 + T = 6 + T + 9 + T \rightarrow T = 20$$

4.2.2.3.3. Problema "Números 1"

Un número es el triple que otro y la diferencia de ambos es 26. ¿Cuáles son esos números?

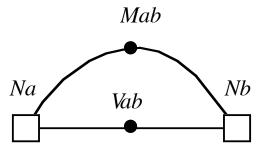
Análisis de cantidades

El número menor = *Na*.

El número mayor = *Nb*.

El número por el que multiplicamos el número menor para obtener el número mayor = *Vab* = 3.

El número que sumamos al número menor para obtener el número mayor = *Mab* = 26.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Nb = Vab \cdot Na$ $Nb = Mab + Na$	 Números 1.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Nb = 3 \cdot Na \\ Nb = 26 + Na \end{cases} \rightarrow 3 \cdot Na = 26 + Na \rightarrow \begin{cases} Na = 13 \\ Nb = 39 \end{cases}$$

4.2.2.3.4. Problema "Otro reparto"

Reparte 1000 € entre tres personas de forma que la primera reciba el doble que la segunda y ésta, el triple que la tercera.

Análisis de cantidades

Dinero a repartir = *N* = 1000.

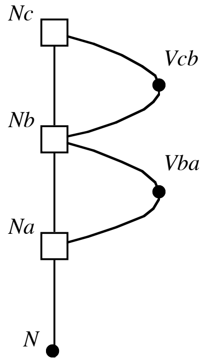
Dinero que le corresponde a la primera persona = *Na*.

Dinero que le corresponde a la segunda persona = *Nb*.

Dinero que le corresponde a la tercera persona = *Nc*.

Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a la segunda persona para obtener el dinero que le corresponde a la primera persona = *Vba* = 2.

Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a la tercera persona para obtener el dinero que le corresponde a la segunda persona = *Vcb* = 3.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Na = Vba \cdot Nb$ $Nb = Vcb \cdot Nc$ $N = Na + Nb + Nc$	 Otro reparto.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 1000 = Na + Nb + Nc \\ Na = 2 \cdot Nb \\ Nb = 3 \cdot Nc \end{cases} \rightarrow 1000 = 6 \cdot Nc + 3 \cdot Nc + Nc \rightarrow \begin{cases} Na = 600 \\ Nb = 300 \\ Nc = 100 \end{cases}$$

4.2.2.3.5. Problema "Números 2"

La suma de dos números es 87 y su diferencia 25. ¿Cuáles son esos números?

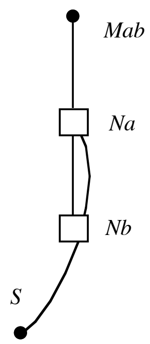
Análisis de cantidades

El número menor = *Na*.

El número mayor = *Nb*.

El número que se obtiene al sumar los números menor y mayor = *S* = 87.

El número que sumamos al número menor para obtener el número mayor = *Mab* = 25.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$S = Na + Nb$ $Nb = Mab + Na$	 Números 2.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 87 = Na + Nb \\ Nb = 25 + Na \end{cases} \rightarrow 87 = Na + 25 + Na \rightarrow \begin{cases} Na = 31 \\ Nb = 56 \end{cases}$$

4.2.2.3.6. Problema "Las zapatillas deportivas"

Un comerciante tiene a la venta 50 pares de zapatillas deportivas a 40 € el par. Cuando lleva vendidos unos cuantos, los rebaja a 30 € el par, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 1620 €. ¿Cuántos pares vendió sin rebajar y cuántos rebajados?

Análisis de cantidades

Número inicial de pares de zapatillas = $N = 50$.

Precio de cada par de zapatillas antes de iniciar la rebaja = $Pi = 40$.

Número de pares vendidos antes de iniciar la rebaja = Ni.

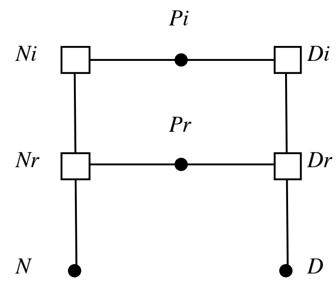
Recaudación de los pares vendidos antes de iniciar la rebaja = Di.

Precio de cada par de zapatillas tras la rebaja = $Pr = 30$.

Número de pares vendidos tras la rebaja = Nr.

Recaudación de los pares vendidos tras la rebaja = Dr.

Recaudación total = $D = 1620$.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Di = Ni \cdot Pi$ $Dr = Nr \cdot Pr$ $D = Di + Dr$ $N = Ni + Nr$	 Las zapatillas deportivas.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Di = Ni \cdot 40 \\ Dr = Nr \cdot 30 \\ 1650 = Di + Dr \\ 50 = Ni + Nr \end{cases} \rightarrow 1620 = 40 \cdot Ni + (50 - Ni) \cdot 30 \rightarrow \begin{cases} Ni = 12 \\ Nr = 38 \end{cases}$$

4.2.2.3.7. Problema "El concierto"

Marta gasta la mitad de su dinero en la entrada para un concierto y la quinta parte del mismo en una hamburguesa. ¿Cuánto tenía si aún le quedan 2,70 €?

Análisis de cantidades

Dinero inicial = D.

Precio de una entrada = De.

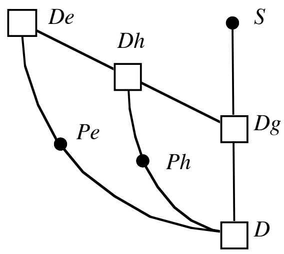
Precio de una hamburguesa = Dh.

Parte del total de dinero que cuesta la entrada = $Pe = 2$.

Parte del total de dinero que cuesta la hamburguesa = $Ph = 5$.

Dinero gastado = Dg.

Dinero final = $S = 2{,}70$.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$D = Dg + S$ $Dg = De + Dh$ $D = De \cdot Pe$ $D = Dh \cdot Ph$	 El concierto

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} D = Dg + 2{,}70 \\ Dg = De + Dh \\ D = De \cdot 2 \\ D = Dh \cdot 5 \end{cases} \rightarrow D = \frac{D}{2} + \frac{D}{5} + 2{,}70 \rightarrow D = 9$$

4.2.2.3.8. Problema "Amaya y Andrea"

Amaya tiene 9 años más que Andrea, y dentro de 3 años la doblará en edad. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Análisis de cantidades

Edad actual de Andrea = Ad.

Edad actual de Amaya = Ay.

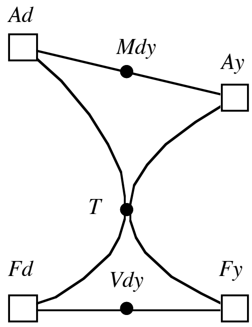
Años de más que tiene Amaya respecto a los que tiene Andrea actualmente = $Mdy = 9$.

Tiempo transcurrido = $T = 3$.

Edad futura de Andrea = Fd.

Edad futura de Amaya = Fy.

Número por el que hay que multiplicar la edad futura de Andrea para obtener la edad futura de Amaya = $Vdy = 2$.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Ay = Ad + Mdy$ $Fy = Ay + T$ $Fd = Ad + T$ $Fy = Vdy \cdot Fd$	 Amaya y Andrea.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Ay = Ad + 9 \\ Fy = Ay + 3 \\ Fd = Ad + 3 \\ Fy = 2 \cdot Fd \end{cases} \rightarrow Ad + 9 + 3 = 2 \cdot (Ad + 3) \rightarrow \begin{cases} Ad = 6 \\ Ay = 15 \end{cases}$$

4.2.2.3.9. Problema "Juanjo, Raúl y Laura"

Juanjo tiene el doble de edad que Raúl y Laura, tres años más que Juanjo. Si la suma de sus edades es 38, ¿cuál es la edad de cada uno?

Análisis de cantidades

Edad de Juanjo = *J*.

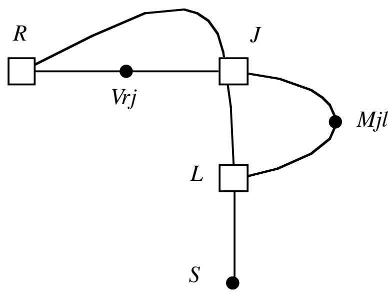
Edad de Raúl = *R*.

Edad de Laura = *L*.

Años de más que tiene Laura respecto a los que tiene Juanjo = *Mjl* = 3.

Suma de las edades = *S* = 38.

Número por el que hay multiplicar la edad de Raúl para obtener la edad de Juanjo = *Vrj* = 2.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$L = J + Mjl$ $J = Vrj \cdot R$ $S = L + J + R$	 Juanjo Raúl y Laura.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} L = J + 3 \\ J = 2 \cdot R \\ 38 = L + J + R \end{cases} \rightarrow 38 = 2 \cdot R + 3 + 2 \cdot R + R \rightarrow \begin{cases} R = 7 \\ J = 14 \\ L = 17 \end{cases}$$

4.2.2.3.10. Problema "Juan, su padre y su hijo"

Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno, sabiendo que entre los tres suman 100 años?

Análisis de cantidades

Edad de Juan = J.

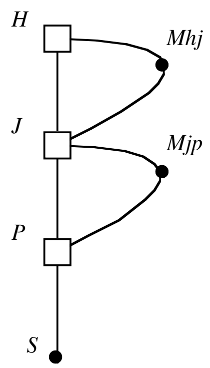
Edad del padre de Juan = P.

Edad del hijo de Juan = H.

Años de más que tiene el padre respecto a los que tiene Juan = Mjp = 28.

Años de más que tiene Juan respecto a los que tiene su hijo = Mhj = 24.

Suma de las edades = S = 100.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$P = J + Mjp$ $J = H + Mhj$ $S = J + P + H$	 Juan, su padre y su hijo.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} P = J + 28 \\ J = H + 24 \\ 100 = J + P + H \end{cases} \rightarrow 100 = H + 24 + H + 24 + 28 + H \rightarrow \begin{cases} H = 8 \\ J = 32 \\ P = 60 \end{cases}$$

5. Estudio de grupo

5.1. LA FINALIDAD DEL ESTUDIO

La intención con la que se planteó el estudio de grupo respondió a una doble finalidad. Por un lado, se pretendía obtener una descripción de la población para poder clasificarla; por otro, analizar el efecto de la enseñanza sobre la población. Para clasificarla se atendió a tres criterios: la tendencia a realizar lecturas algebraicas, la competencia a la hora de identificar y relacionar cantidades al resolver problemas y la competencia en el uso del lenguaje de la hoja de cálculo. Para analizar el efecto de la enseñanza se compararon las actuaciones de los estudiantes cuando resolvían problemas verbales (que normalmente se resuelven de manera algebraica) antes y después de la enseñanza.

Como nuestro propósito era estudiar a un grupo de estudiantes, recurrimos a cuatro pruebas escritas a las que llamamos cuestionario 1, cuestionario 2, cuestionario 3 y cuestionario Post. Los cuestionarios 1, 2 y Post debían resolverse en papel, mientras que el cuestionario 3 se contestaba en un archivo de hoja de cálculo. Los cuestionarios 1 y 2 se administraron previamente al inicio de la secuencia de enseñanza en dos sesiones distintas. El cuestionario 3 se situó a continuación de la enseñanza de los rudimentos de la hoja de cálculo y el cuestionario Post, al finalizar la enseñanza del MHC. Los cuestionarios 1, 2 y Post planteaban la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos; mientras que el cuestionario 3 proponía la construcción de fórmulas y secuencias numéricas en la hoja de cálculo. Los cuestionarios 1, 2 y 3 tenían la misión fundamental de describir la población para poder clasificarla atendiendo a los criterios anteriormente expuestos; mientras que el cuestionario Post (al compararlo con el cuestionario 2) pretendía analizar la influencia de la enseñanza del MHC en la variación de la competencia de los estudiantes a la hora de resolver problemas verbales aritmético-algebraicos (fundamentalmente cuando lo hacían mediante el MC).

Los cuestionarios 1, 2 y 3 se administraron a los 24 estudiantes que componían la población; pero el sujeto 24 fue excluido del estudio, tanto de la clasificación como de la comparación, porque se observó que copiaba. Para evitar que modificara su nivel de participación, y afectara de esta forma a su compañero durante la secuencia de enseñanza, no se le informó de la circunstancia. Por esta razón, únicamente se hace referencia a 23 individuos en la clasificación de la población. El cuestionario Post se administró a 22 individuos, ya que, a la exclusión del individuo 24, se unió la no asistencia del sujeto 7, por motivos de salud, a la sesión en la que se pasó este cuestionario. En consecuencia, la parte del estudio que compara los cuestionarios 2 y Post se realizó sobre 22 sujetos.

Los cuestionarios se administraron en el horario habitual de la asignatura adaptándose a la duración máxima de 55 minutos y como si de un examen se tratase. Los cuestionarios sobre resolución de problemas se realizaron en el aula de exámenes del centro para que hubiera la máxima separación posible entre los sujetos y evitar que pudieran copiar. El cuestionario 3 se realizó en el aula de informática. La limitación en el número de computadores, nos obligó a realizarlo en dos turnos de 20 minutos cada uno. Durante los ensayos siempre estuvieron presentes la profesora de la asignatura de matemáticas y el investigador.

Los estudiantes eran conocedores de que lo que produjesen no iban a ser utilizado ni a su favor ni en su contra en la evaluación de la asignatura. Se les informó del tipo de investigación en la que iban a participar; pero no se desvelaron detalles que pudieran influir en sus actuaciones.

Los cuestionarios 1, 2 y Post estaban formados por una primera hoja en la que se debía escribir el nombre, la edad, la fecha y el grupo. El resto de hojas contenían un problema en cada página. Los estudiantes debían resolverlo en el espacio en blanco, aunque se le informó que se les podían suministrar más hojas si lo consideraban conveniente. En la parte inferior de la primera página aparecían escritas las instrucciones (ver Figura 1) en las que se les indicaba lo que debían hacer, insistiendo en que sólo era necesario plantear el problema y que no se debía tachar ni borrar nada de lo que se hiciera para conservar la mayor cantidad de información posible. Se pedía únicamente el planteamiento del problema por dos razones: 1) Para la clasificación de la población únicamente necesitamos identificar el tipo de lectura y valorarla, lo que en una actuación escrita se puede hacer a partir de la ecuación. 2) Para comparar la variación de competencia en el uso del MC, debida a la enseñanza del MHC, parece lógico centrarse en los pasos consecutivos comparables de ambos métodos; es decir, los cuatro primeros.

INSTRUCCIONES.
Intenta hacer todos los problemas que puedas. Cuando creas que un problema ya está planteado y sólo falta "resolver o hacer operaciones", puedes pasar al siguiente. Si te queda tiempo después de plantearlos todos, resuélvelos hasta el final.
Utiliza bolígrafo y no taches nada de lo que escribas. Si consideras que algo no es correcto, haz una raya encima.

Figura 1. Instrucciones de los cuestionarios 1, 2 y Post.

El cuestionario 3 tenía una primera hoja con las instrucciones (ver Figura 2), en la que había que anotar los datos personales, y una segunda hoja en la que se ofrecían todas las tareas. En las instrucciones se explicaba que sólo debían utilizar una fórmula para contestar a cada pregunta, pues uno de los aspectos a estudiar en el cuestionario era el uso de los paréntesis para modificar la prioridad de la operaciones. También se indicaba que cada tarea se debía hacer en una hoja de cálculo distinta, pero dentro de un mismo libro. Para ello se les suministro un archivo de hoja de cálculo con 11 hojas en blanco etiquetadas con los nombres Hoja1, Hoja2…

INSTRUCCIONES.
Debes contestar a las preguntas en la hoja de cálculo. Utiliza la Hoja 1 para la pregunta 1, la Hoja 2 para la pregunta 2, y así sucesivamente.
Recuerda que sólo puedes utilizar una fórmula para contestar a cada pregunta.

Figura 2. Instrucciones del cuestionario 3.

5.2. DESCRIPCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS

5.2.1. EL CUESTIONARIO 1

Los siete problemas del cuestionario 1 se eligieron de entre los utilizados por Rubio (1994) en el Cuestionario Exploratorio I de su tesis doctoral. En palabras de Rubio "este cuestionario está conformado por problemas aritmético/algebraicos que tienen un nivel de representación ligado en forma más usual con el SMS de la aritmética o estratos de este sistema" (Rubio, 1994, p. 103). Los enunciados fueron modificados para sustituir el peso por el euro como moneda, lo que en algunos casos nos obligó a cambiar los valores o los objetos considerados para que la situación planteada fuera creíble. Así, mientras en el problema 5 de Rubio (siguiendo la numeración del autor) dice "Pagué 14,440 pesos por un libro después de obtener un descuento del 15% del precio marcado. ¿Cuál es el precio del libro sin descuento?" (Rubio, 1994, p. 104), en nuestro problema titulado *El ordenador* el enunciado dice "Pagué 1440 € por un ordenador después de obtener un descuento del 15% del precio marcado. ¿Cuál es el precio del ordenador sin descuento?".

La organización de los problemas en el cuestionario 1 siguió la utilizada por Rubio y se ofrecieron en esta disposición a los estudiantes. Los problemas que se plantearon en el cuestionario 1 fueron los siguientes:

Las naranjas

Antonio ha comprado 15 docenas de naranjas en dos sacos; pero en uno de ellos hay 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas naranjas corresponden a cada saco?

El tren

Una locomotora avanza 2 metros en cada segundo, ¿cuántos kilómetros avanza cada hora?

El ordenador

Pagué 1440 € por un ordenador después de obtener un descuento del 15% del precio marcado. ¿Cuál es el precio del ordenador sin descuento?

La inversión

Pedro y Hugo invirtieron, respectivamente, 28.000 y 16.000 euros en un negocio, conviniendo en repartir la ganancia proporcionalmente al dinero invertido por cada uno. Si Hugo ganó 7.000 euros, ¿cuánto ganó Pedro?

Las cortinas

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron y cuánto costó cada metro?

El salario

Si 4 hombres ganan 144 € en 12 días. ¿Cuánto ganarán 6 hombres en 10 días?

El perfume

¿Cuántos gramos de esencia de perfume deben agregarse a 60 gramos de alcohol para tener una loción con el 70% de perfume?

5.2.2. EL CUESTIONARIO 2

Los problemas del cuestionario 2 se seleccionaron de distintos libros de texto, incluido *Educación Secundaria 2 Matemáticas* de la colección *En tus manos* de la editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2003). Este manual era el que empleaban los estudiantes, por lo que, en la selección de los problemas, se tuvo la precaución de elegirlos de entre los que no se habían resuelto con anterioridad en clase. Se tomaron dos criterios para decidir que se trataban de problemas que normalmente calificaríamos de algebraicos. El primero lo constituía la presencia del problema dentro de un tema de álgebra (lo que supone que estos problemas se resuelven habitualmente de manera algebraica para los autores del manual). El segundo, la lectura analítica llevada a cabo por el investigador, que será la primera lectura que aparecerá en el análisis de los problemas.

Los problemas del cuestionario 2 se ofrecieron en el mismo orden a todos los estudiantes sin que la organización respondiese a ningún criterio. Los problemas que se plantearon en el cuestionario 2 fueron:

La edad de consuelo

¿Cuál es la edad de Consuelo si dentro de 30 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

Números

Si al triple de un número se le suman 28 unidades, se obtiene el quíntuplo del número menos 4 unidades. ¿De qué número se trata?

La familia de Andrea

Andrea tiene 16 años, su hermano Paco, 14, y su padre, 40 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?

Marta y María

La edad de María es 3 veces la de su hija Marta, pero dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

La visita al teatro

Se quiere colocar a un grupo de niños en una sala de teatro. Si se colocan 10 niños en cada banco, quedan sin sitio 11 niños, y si se ponen 11 niños en cada banco, quedan 7 sin poderse sentar. ¿Cuántos niños hay en el grupo?

Bolígrafos y lapiceros

Un bolígrafo cuesta 25 céntimos más que un lapicero. He pagado 3 € por 3 lapiceros y dos bolígrafos. ¿Cuál es el precio de cada uno?

La lotería

Tres amigos juegan un décimo de lotería en Navidad que resulta premiado con 5000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega el doble que el segundo y éste el triple que el tercero.

El precio del pan

Ayer la barra de pan subió un 10%. Si ahora cuesta 55 céntimos, ¿cuál era el precio anterior?

5.2.3. EL CUESTIONARIO 3

El cuestionario 3 trataba de medir la competencia de los estudiantes en el entorno de la hoja de cálculo y más concretamente en la construcción de fórmulas (los ocho primeros ítems) y en la generación de secuencias numéricas (los tres últimos ítems). Los ocho primeros ítems responden a lo que exige el tercer paso del MHC: expresar (en la hoja de cálculo) ciertas cantidades mediante fórmulas que describen la relación que esas cantidades tienen con otras. Los tres últimos ítems darían cuenta de la demanda del quinto paso del MHC: la variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad.

Los tres primeros ítems plantean la traducción a un única fórmula de una expresión matemática integrada por operaciones entre números. Fundamentalmente, se pretendía observar si los sujetos atendían a la necesidad de sustituir por paréntesis las marcas de yuxtaposición vertical que indicaban modificación en la prioridad de operaciones. Los ítems 4, 5, 6, 7 y 8 proponen la plasmación en fórmula de unas operaciones escritas en lenguaje natural. En los dos primeros casos las operaciones son entre números, mientras que en los tres últimos son entre números y referencias a celdas, lo que nos permitiría observar, además de lo ya indicado sobre la gestión de paréntesis, cómo negociaban operar con lo desconocido. Los tres últimos ítems pretendían valorar la capacidad de los estudiantes a la hora de producir secuencias numéricas utilizando fórmulas de recurrencia del tipo $a_n = a_{n-1} + d$; siendo a_n el término que se quiere calcular, a_{n-1} el término del que se parte y d la diferencia entre ambos términos.

El cuestionario 3 lo formaban los siguientes 11 ítems:

1) Utilizando una única fórmula, calcula $44\ \ 71 - 132$

2) Utilizando una única fórmula, calcula $\dfrac{2845{,}12}{5747{,}3 - 652}$

3) Utilizando una única fórmula, calcula $\dfrac{5\ \ (135 + 233)}{2}$

4) Usando una única fórmula, calcula 257 más 284 menos la mitad de 437.

5) Usando una única fórmula, calcula 51 por el resultado de restar 63,8 a 184.

6) Escribe una fórmula que divida entre 52 el resultado de sumar C4 y B7.

7) Escribe una fórmula que multiplique B3 por A2 y al resultado le reste A4.

8) Escribe una fórmula que reste B6 a C6 y el resultado lo multiplique por el resultado de sumar 3 a C6.

9) Crea una serie de 10 números que empiece en el 6 y aumente de 1 en 1.

10) Crea una serie de 25 números que empiece en el 7,6 y aumenten de 4 en 4.

11) Crea una serie de 8 números que empiece en el 2 y disminuya de 3 en 3.

5.2.4. EL CUESTIONARIO POST

Los problemas del cuestionario Post se eligieron de las mismas fuentes o se reelaboraron a partir de los seleccionados para el cuestionario 2 con la intención de que los problemas de ambas pruebas fueran isomorfos uno a uno. Para la transformación de los problemas se modificaron los personajes, situaciones y/o datos, manteniendo la estructura del problema.

La problemas del cuestionario Post no se ofrecieron en el mismo orden a todos los estudiantes. Con este fin, el investigador se situó en un extremo del aula y repartió uno a uno los cuatro últimos problemas; mientras la profesora del grupo hizo lo propio con los cuatro primeros problemas desde otro extremo de la clase. Los problemas que integraban el cuestionario Post eran:

La edad de Pablo

¿Cuál es la edad de Pablo si dentro de 15 años tendrá cuatro veces la edad que tiene ahora?

Más números

Si al quíntuplo de un número se le restan 10 unidades, se obtiene el triple del número más 8 unidades. ¿De qué número se trata?

La familia de Marcos

Marcos tiene 12 años, su hermano Javier, 7, y su padre, 32 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?

Amelia y Enrique

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia sólo será el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Bolígrafos

Compro 5 bolígrafos y me sobran 6 €. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado 2 €. ¿Cuánto dinero llevo?

Pantalones y camisas

En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 126 €. Recuerdo que un pantalón costaba 8 euros más que una camisa. ¿Cuál era el precio de cada prenda?

La quiniela

Tres amigos hacen una quiniela que resulta premiado con 5000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega el doble que el segundo y éste el triple que el tercero.

La paga

Me han subido la paga semanal un 20%. Si ahora me dan 60 €, ¿cuánto me daban antes?

5.3. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

En este apartado se analizan y comentan los problemas propuestos en los cuestionarios 1, 2 y Post. Se ofrece de cada problema una o más lecturas (a las que llamaremos lecturas teóricas), la solución siguiendo la primera lectura que se presenta y, en el caso que se considere conveniente, comentarios a alguna de las lecturas. El número de lecturas que se proporcionan de cada problema es variable y da cuenta de todas las lecturas mínimas asociadas a las actuaciones[1] de los estudiantes. El orden en que se presentan las lecturas no responde a ningún criterio.

5.3.1. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO 1

Las naranjas

Antonio ha comprado 15 docenas[2] de naranjas en dos sacos; pero en uno de ellos hay 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas naranjas corresponden a cada saco?

Análisis de cantidades

Lectura A

Número de naranjas compradas = N = 180.

Número de naranjas en el saco que más tiene (el saco grande) = Sg.

Número de naranjas en el saco que menos tiene (el saco pequeño) = Sp.

Número de naranjas de más que hay en el saco grande respecto al saco pequeño = Mgp = 30.

Lectura B

Número de naranjas compradas = N = 180.

Número de naranjas en el saco que más tiene (el saco grande) = Sg.

Número de naranjas en el saco que menos tiene (el saco pequeño) = Sp.

Número de naranjas de más que hay en el saco grande respecto al saco pequeño = Mgp = 30.

Número de sacos = S = 2.

---

[1] En el apartado 5.4. se da una definición de lectura mínima asociada a la actuación en un problema.

[2] Omitiremos del análisis las cantidades y relaciones empleadas en los cambios de unidades excepto cuando éste sea el objetivo del problema, como en el caso de *El tren*.

Número de naranjas si eliminamos el exceso de naranjas del saco grande = *Nqe*.

Lectura C

Número de naranjas compradas = N = 180.

Número de naranjas en el saco que más tiene (el saco grande) = *Sg*.

Número de naranjas en el saco que menos tiene (el saco pequeño) = *Sp*.

Número de naranjas de más que hay en el saco grande respecto al saco pequeño = *Mgp* = 30.

Número de sacos = S = 2.

Número de naranjas compradas si añadimos el defecto de naranjas del saco pequeño = *Nad*.

Lecturas D1, D2 y D3

Número de naranjas compradas = N = 180.

Número de naranjas en el saco que más tiene (el saco grande) = *Sg*.

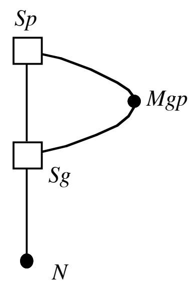
Número de naranjas en el saco que menos tiene (el saco pequeño) = *Sp*.

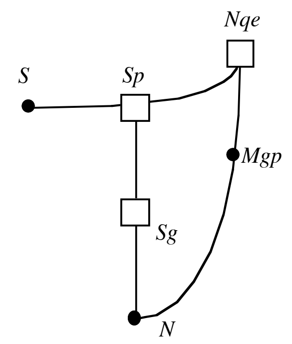
Número de naranjas de más que hay en el saco grande respecto al saco pequeño = *Mgp* = 30.

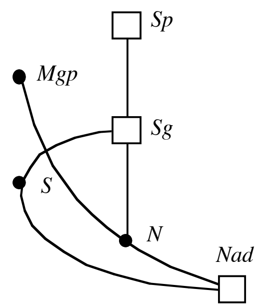
Número de sacos = S = 2.

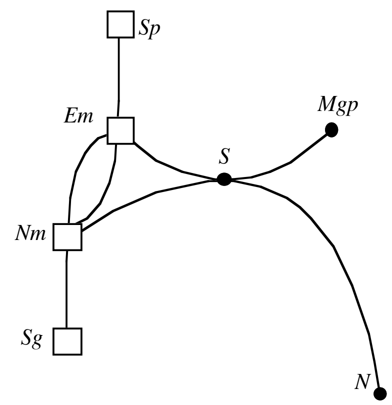
La mitad del número de naranjas de más que hay en el saco grande respecto al saco pequeño = *Em*.

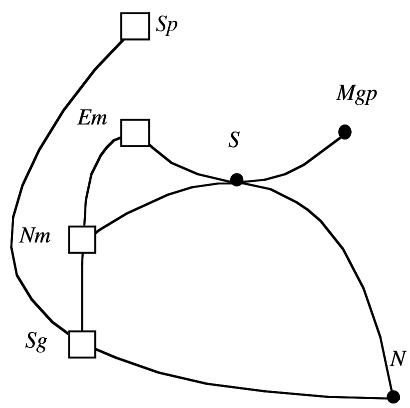
La mitad del número de naranjas compradas = *Nm*.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$N = Sg + Sp$ $Sg = Mgp + Sp$	 Las naranjas. Lectura A.

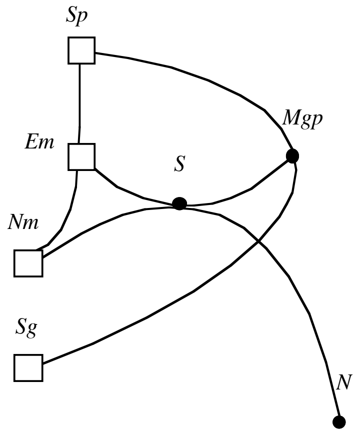
<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Sg = Sp + Mgp$
$N = Nqe + Mgp$
$Nqe = Sp \cdot S$</td><td>

Las naranjas. Lectura B.</td></tr>
<tr><td>$N = Sg + Sp$
$Nad = Mgp + N$
$Nad = Sg \cdot S$</td><td>

Las naranjas. Lectura C.</td></tr>
<tr><td>$N = Nm \cdot S$
$Mgp = Em \cdot S$
$Sg = Nm + Em$
$Nm = Sp + Em$</td><td>

Las naranjas. Lectura D1.</td></tr>
<tr><td>$N = Nm \cdot S$
$Mgp = Em \cdot S$
$Sg = Nm + Em$
$N = Sg + Sp$</td><td>

Las naranjas. Lectura D2.</td></tr>
</table>

Análisis de relaciones	*Grafo*
$N = Nm \cdot S$ $Mgp = Em \cdot S$ $Nm = Sp + Em$ $Sg = Mgp + Sp$	 Las naranjas. Lectura D3.

Solución partiendo de la lectura A.

$$\begin{cases} 180 = Sg + Sp \\ Sg = 30 + Sp \end{cases} \rightarrow 180 = 30 + 2 \cdot Sp \rightarrow \begin{cases} Sp = 75 \\ Sg = 105 \end{cases}$$

El tren

Una locomotora avanza 2 metros en cada segundo, ¿cuántos kilómetros avanza cada hora?

Análisis de cantidades

Lectura A

Metros que avanza en un segundo = *Ms* = 2.

Segundos que hay en una hora = *Tsh* = 3600.

Metros que avanza en una hora = *Mh*.

Metros que hay en un kilómetro = *Emk* = 1000.

Kilómetros que avanza en una hora = *Kh*.

Lectura B

Metros que avanza en un segundo = *Ms* = 2.

Segundos que hay en un minuto = *Tsm* = 60.

Metros que avanza en un minuto = *Mm*.

Minutos que hay en una hora = *Tmh* = 60.

Metros que avanza en una hora = *Mh*.

Metros que hay en un kilómetro = *Emk* = 1000.

Kilómetros que avanza en una hora = *Kh*.

Lectura C

Metros que avanza en un segundo = Ms = 2.

Segundos que hay en un minuto = Tsm = 60.

Metros que avanza en un minuto = Mm.

Metros que hay en un kilómetro = Emk = 1000.

Kilómetros que avanza en un minuto = Km.

Minutos que hay en una hora = Tmh = 60.

Kilómetros que avanza en una hora = Kh.

Lectura D

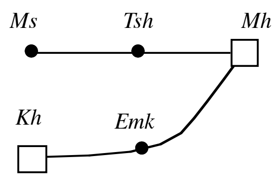
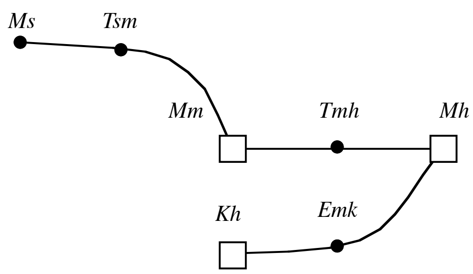
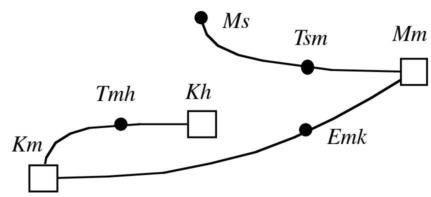
Metros que avanza en un segundo = Ms = 2.

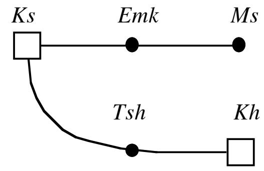
Metros que hay en un kilómetro = Emk = 1000.

Kilómetros que avanza en un segundo = Ks.

Segundos que hay en una hora = Tsh = 3600.

Kilómetros que avanza en una hora = Kh.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Mh = Tsh \cdot Ms$ $Mh = Emk \cdot Kh$	 El tren. Lectura A.
$Mm = Tsm \cdot Ms$ $Mh = Tmh \cdot Mm$ $Mh = Emk \cdot Kh$	 El tren. Lectura B.
$Mm = Tsm \cdot Ms$ $Mm = Emk \cdot Km$ $Kh = Tmh \cdot Km$	 El tren. Lectura C.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Ms = Emk \cdot Ks$ $Kh = Tsh \cdot Ks$	 El tren. Lectura D.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Mh = 3600 \cdot 2 \\ Mh = 1000 \cdot Kh \end{cases} \rightarrow Kh = 7{,}2$$

El ordenador

Pagué 1440 € por un ordenador después de obtener un descuento del 15% del precio marcado. ¿Cuál es el precio del ordenador sin descuento?

Análisis de cantidades

Lectura A

Precio inicial = I.

Precio final = F = 1440.

Porcentaje rebajado = Pr = 0,15.

Dinero rebajado = R.

Lectura B

Precio inicial = I.

Precio final = F = 1440.

Porcentaje rebajado = Pr = 0,15.

Porcentaje correspondiente al precio inicial = Pi = 1.

Porcentaje correspondiente al precio final = Pf.

Lectura C

Precio inicial = I.

Precio final = F = 1440.

Partes en que dividimos el precio inicial = Ni = 100.

Partes del precio inicial que corresponden al precio final = Nf.

Partes del precio inicial que corresponden al precio rebajado = Nr = 15.

Lectura D

Precio inicial = I.

Precio final = F = 1440.

Dinero rebajado = R.

Partes en que dividimos el precio inicial = Ni = 100.

Partes del precio inicial que corresponden al precio final = Nf.

Partes del precio inicial que corresponden al precio rebajado = Nr = 15.

Lectura E

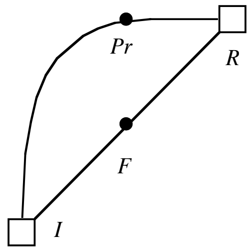
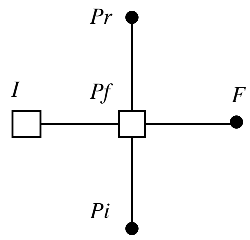
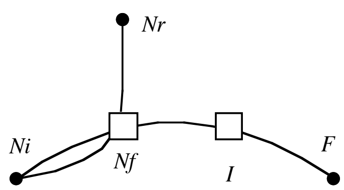
Precio inicial = I.

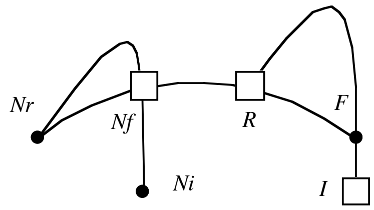
Precio final = F = 1440.

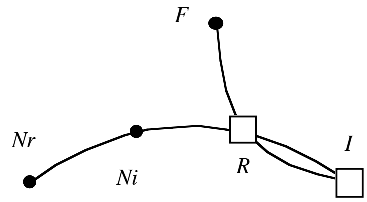
Dinero rebajado = R.

Partes en que dividimos el precio inicial = Ni = 100.

Partes del precio inicial que corresponden al precio rebajado = Nr = 15.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$I = F + R$ $R = Pr \cdot I$	 El ordenador. Lectura A.
$Pi = Pr + Pf$ $F = Pf \cdot I$	 El ordenador. Lectura B.
$Ni = Nr + Nf$ $\frac{Ni}{Nf} = \frac{I}{F}$	 El ordenador. Lectura C.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$I = F + R$
$Ni = Nr + Nf$
$\dfrac{Nr}{Nf} = \dfrac{R}{F}$</td><td>

El ordenador. Lectura D.</td></tr>
<tr><td>$I = F + R$
$\dfrac{Nr}{Ni} = \dfrac{R}{I}$</td><td>

El ordenador. Lectura E.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} I = 1440 + R \\ R = 0{,}15 \cdot I \end{cases} \rightarrow 1440 = I - 0{,}15 \cdot I \rightarrow I = 28800/17$$

La inversión

Pedro y Hugo invirtieron, respectivamente, 28.000 y 16.000 euros en un negocio, conviniendo en repartir la ganancia proporcionalmente al dinero invertido por cada uno. Si Hugo ganó 7.000 euros, ¿cuánto ganó Pedro?

Análisis de cantidades

Lectura A

Inversión de Pedro = *Ip* = 28.000.

Inversión de Hugo = *Ih* = 16.000.

Ganancia de Pedro = *Gp*.

Ganancia de Hugo = *Gh* = 7.000.

Lectura B

Inversión de Pedro = *Ip* = 28.000.

Inversión de Hugo = *Ih* = 16.000.

Ganancia de Pedro = *Gp*.

Ganancia de Hugo = *Gh* = 7.000.

Dinero de más que invirtió Pedro respecto al que invirtió Hugo = *Iph*.

Dinero de más que ganó Pedro respecto al que ganó Hugo = *Gph*.

Lectura C

Inversión de Pedro = Ip = 28.000.

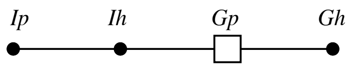
Inversión de Hugo = Ih = 16.000.

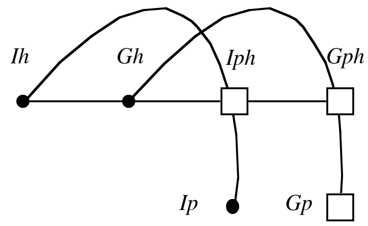
Ganancia de Pedro = Gp.

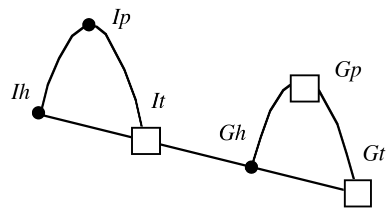
Ganancia de Hugo = Gh = 7.000.

Inversión total = It.

Ganancia total = Gt.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$</td><td>

La inversión. Lectura A.</td></tr>
<tr><td>$\frac{Ih}{Gh} = \frac{Iph}{Gph}$
$Ip = Ih + Iph$
$Gp = Gh + Gph$</td><td>

La inversión. Lectura B.</td></tr>
<tr><td>$\frac{Ih}{It} = \frac{Gh}{Gt}$
$It = Ih + Ip$
$Gt = Gh + Gp$</td><td>

La inversión. Lectura C.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\frac{28000}{16000} = \frac{Gp}{7000} \rightarrow Gp = 12250$$

Las cortinas

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron y cuánto costó cada metro?

Análisis de cantidades

Lectura A

Metros de tela comprados = M.

Precio de los metros de comprados = P = 528.

Precio de un metro de tela = U.

Metros de más comprados en la situación hipotética = *Mhm* = 6.

Metros de tela comprados en la situación hipotética = *Mh*.

Precio que hubieran tenido los metros de tela comprados en la situación hipotética = *Ph* = 564.

Lectura B

Metros de tela comprados = *M*.

Precio de los metros de comprados = *P* = 528.

Precio de un metro de tela = *U*.

Metros de más comprados en la situación hipotética = *Mhm* = 6.

Precio que hubieran tenido los metros de tela comprados en la situación hipotética = *Ph* = 564.

Precio de los metros de más comprados en la situación hipotética = *Phm*.

Lectura C

Metros de tela comprados = *M*.

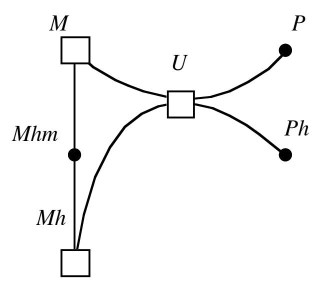
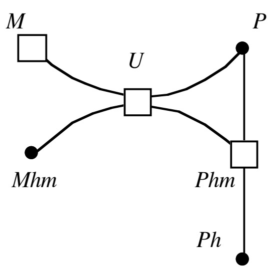
Precio de los metros de comprados = *P* = 528.

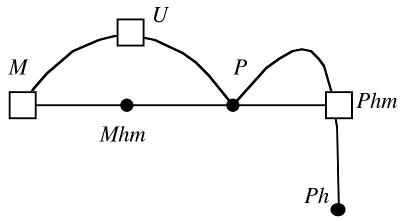
Precio de un metro de tela = *U*.

Metros de más comprados en la situación hipotética = *Mhm* = 6.

Precio que hubieran tenido los metros de tela comprados en la situación hipotética = *Ph* = 564.

Precio de los metros de más comprados en la situación hipotética = *Phm*.

Análisis de relaciones.	*Grafo.*
$P = M \cdot U$ $Ph = Mh \cdot U$ $Mh = M + Mhm$	 Las cortinas. Lectura A.
$Ph = Phm + P$ $Phm = Mhm \cdot U$ $P = M \cdot U$	 Las cortinas. Lectura B.

Análisis de relaciones.	*Grafo.*
$Ph = Phm + P$ $\dfrac{M}{Mhm} = \dfrac{P}{Phm}$ $P = M{\cdot}U$	 Las cortinas. Lectura C.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 528 = M \cdot U \\ 564 = Mh \cdot U \rightarrow 528 = M \cdot \dfrac{564}{M+6} \rightarrow \begin{cases} M = 88 \\ U = 6 \end{cases} \\ Mh = M + 6 \end{cases}$$

El salario

Si 4 hombres ganan 144 € en 12 días. ¿Cuánto ganarán 6 hombres en 10 días?

Análisis de cantidades

Lectura A

Número de hombres en la situación A = *Ha* = 4.

Número de hombres en la situación B = *Hb* = 6.

Sueldo ganado en la situación A = *Sa* = 144.

Sueldo ganado en la situación B = *Sb*.

Días trabajados en la situación A = *Da* = 12.

Días trabajados en la situación A = *Db* = 10.

Sueldo por hombre en la situación A = *Sha*.

Sueldo por hombre en la situación B = *Shb*.

Sueldo por hombre y día = *U*.

Lectura B

Número de hombres en la situación A = *Ha* = 4.

Número de hombres en la situación B = *Hb* = 6.

Sueldo ganado en la situación A = *Sa* = 144.

Sueldo ganado en la situación B = *Sb*.

Días trabajados en la situación A = *Da* = 12.

Días trabajados en la situación A = *Db* = 10.

Lectura C

Número de hombres en la situación A = *Ha* = 4.

Número de hombres en la situación B = *Hb* = 6.

Sueldo ganado en la situación A = *Sa* = 144.

Sueldo ganado en la situación B = *Sb*.

Días trabajados en la situación A = *Da* = 12.

Días trabajados en la situación A = *Db* = 10.

Sueldo por día en la situación A = *Sda*.

Sueldo por día en la situación B = *Sdb*.

Sueldo por hombre y día = *U*.

Lectura D

Número de hombres en la situación A = *Ha* = 4.

Número de hombres en la situación B = *Hb* = 6.

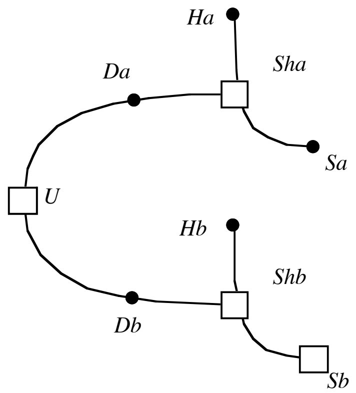
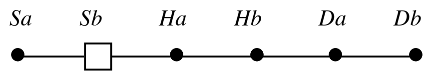
Sueldo ganado en la situación A = *Sa* = 144.

Sueldo ganado en la situación B = *Sb*.

Días trabajados en la situación A = *Da* = 12.

Días trabajados en la situación A = *Db* = 10.

Sueldo ganado si en la situación A el número de hombres fuera el mismo que en la situación B = *Sab*.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Sha = U \cdot Da$ $Sa = Sha \cdot Ha$ $Shb = U \cdot Db$ $Sb = Shb \cdot Hb$	 El salario. Lectura A.
$\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$	 El salario. Lectura B.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>

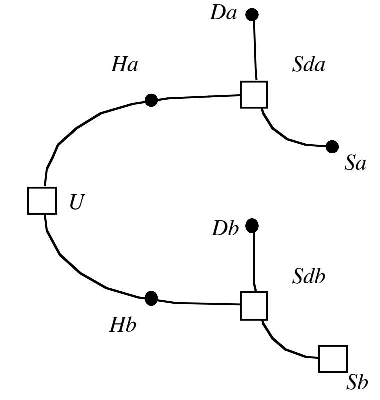
$Sda = U \cdot Ha$

$Sa = Sda \cdot Da$

$Sdb = U \cdot Hb$

$Sb = Sdb \cdot Db$

</td><td>



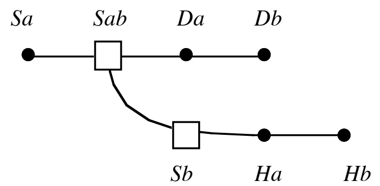
El salario. Lectura C.

</td></tr>
<tr><td>

$\frac{Sa}{Sab} = \frac{Da}{Db}$

$\frac{Sab}{Sb} = \frac{Ha}{Hb}$

</td><td>



El salario. Lectura D.

</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Sha = U \cdot 12 \\ 144 = Sha \cdot 4 \\ Shb = U \cdot 10 \\ Sb = Shb \cdot 6 \end{cases} \rightarrow Sha = 36 \rightarrow U = 3 \rightarrow Shb = 30 \rightarrow Sb = 180$$

El perfume

¿Cuántos gramos de esencia de perfume deben agregarse a 60 gramos de alcohol para tener una loción con el 70% de perfume?

Análisis de cantidades

Lectura A

Gramos de esencia = Ge.

Gramos de alcohol = $Gh = 60$.

Porcentaje de esencia = $Pe = 0{,}7$.

Porcentaje total = $P = 1$.

Porcentaje de alcohol = Ph.

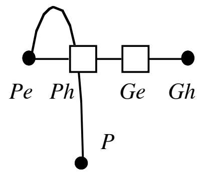
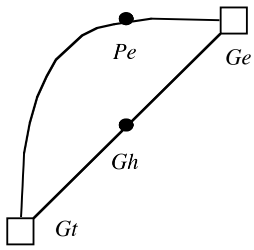
Lectura B

Gramos de esencia = Ge.

Gramos de alcohol = $Gh = 60$.

Gramos de loción = *Gt*.

Porcentaje de esencia = *Pe* = 0,7.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$P = Pe + Ph$ $\dfrac{Pe}{Ph} = \dfrac{Ge}{Gh}$	 El perfume. Lectura A.
$Gt = Ge + Gh$ $Ge = Gt{\cdot}Pe$	 El perfume. Lectura B.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 1 = 0{,}7 + Ph \\ \dfrac{0{,}7}{Ph} = \dfrac{Ge}{60} \end{cases} \rightarrow Ph = 0{,}3 \rightarrow Ge = 140$$

5.3.2. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO 2

La edad de Consuelo

¿Cuál es la edad de Consuelo si dentro de 30 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

Análisis de cantidades

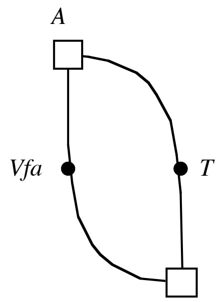
Lectura A

Edad actual de Consuelo = A.

Edad futura de Consuelo = F.

Tiempo transcurrido = T = 30.

Número por el que hay que multiplicar la edad actual de Consuelo para obtener cuatro veces su edad actual = *Vfa* = 4.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$F = A + T$ $F = Vfa \cdot A$	 La edad de Consuelo. Lectura A.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} F = A + 30 \\ F = 4 \cdot A \end{cases} \rightarrow A + 30 = 4 \cdot A \rightarrow A = 10$$

Números

Si al triple de un número se le suman 28 unidades, se obtiene el quíntuplo del número menos 4 unidades. ¿De qué número se trata?

Análisis de cantidades

Lectura A

El número a encontrar = N.

El número por el que multiplicamos el número a encontrar para obtener el triple del número a encontrar = T = 3.

El número que obtenemos al triplicar el número a encontrar = Nt.

El número que sumamos al triple del número a encontrar = V = 28.

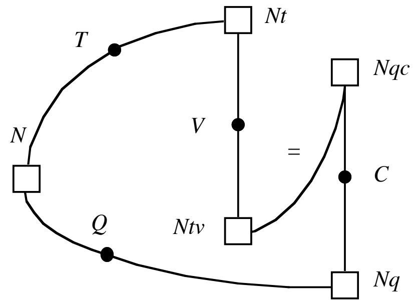
El número que obtenemos al sumar veintiocho al triple del número a encontrar = Ntv.

El número por el que multiplicamos al número a encontrar para obtener el quíntuplo del número a encontrar = Q = 5.

El número que obtenemos al quintuplicar el número a encontrar = Nq.

El número que restamos al quíntuplo del número a encontrar = C = 4.

El número que obtenemos al restar cuatro al quíntuplo del número a encontrar = Nqc.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Nt = T \cdot N$
$Ntv = V + Nt$
$Nq = Q \cdot N$
$Nq = Nqc + C$
$Ntv = Nqc$</td><td>

Números. Lectura A.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Nt = 3 \cdot N \\ Ntv = 28 + Nt \\ Nq = 5 \cdot N \\ Nq = Nqc + 4 \\ Ntv = Nqc \end{cases} \rightarrow 28 + 3 \cdot N = 5 \cdot N - 4 \rightarrow N = 16$$

La familia de Andrea

Andrea tiene 16 años, su hermano Paco, 14, y su padre, 40 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?

Análisis de cantidades

Lectura A

Edad actual de Andrea = *Aa* = 16.

Edad actual de Paco = *Af* = 14.

Edad actual del padre = *Ap* = 40.

Edad futura de Andrea = *Fa*.

Edad futura de Paco = *Ff*.

Edad futura del padre = *Fp*.

Tiempo transcurrido = *T*.

Lectura B

Edad actual de Andrea = *Aa* = 16.

Edad actual de Paco = *Af* = 14.

Edad actual del padre = *Ap* = 40.

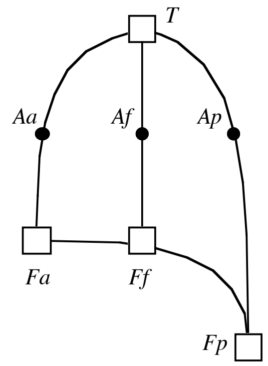
Tiempo transcurrido = *T*.

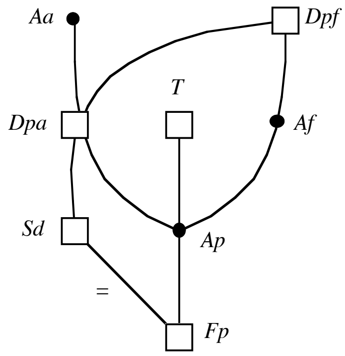
Diferencia de edad entre el padre y Andrea = *Dpa*.

Diferencia de edad entre el padre y Paco = *Dpf*.

Suma de las diferencias de edades = *Sd*.

Edad futura del padre = *Fp*.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Fa = Aa + T$
$Ff = Af + T$
$Fp = Ap + T$
$Fp = Fa + Ff$</td><td>

La familia de Andrea. Lectura A.</td></tr>
<tr><td>$Ap = Dpa + Aa$
$Ap = Dpf + Af$
$Sd = Dpa + Dpf$
$Fp = Sd$
$Fp = T + Ap$</td><td>

La familia de Andrea. Lectura B.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Fa = 16 + T \\ Ff = 14 + T \\ Fp = 40 + T \\ Fp = Fa + Ff \end{cases} \rightarrow 16 + T + 14 + T = 40 + T \rightarrow T = 10$$

Marta y María

La edad de María es 3 veces la de su hija Marta, pero dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

Análisis de cantidades

Lectura A

Edad actual de María (la madre) = *Am*.

Edad actual de Marta (la hija) = *Ah*.

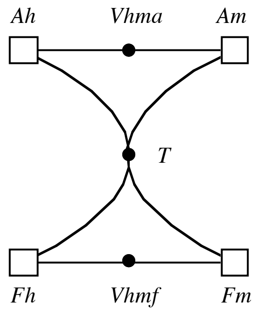
Edad futura de María (la madre) = *Fm*.

Edad futura de Marta (la hija) = *Fh*.

Tiempo transcurrido = T = 12.

Número por el que hay multiplicar la edad actual de Marta (la hija) para obtener la edad actual de María (la madre) = *Vhma* = 3.

Número por el que hay multiplicar la edad futura de Marta (la hija) para obtener la edad futura de María (la madre) = *Vhmf* = 2.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Am = Vhma \cdot Ah$ $Fm = Vhmf \cdot Fh$ $Fm = T + Am$ $Fh = T + Ah$	 Marta y María. Lectura A.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Am = 3 \cdot Ah \\ Fm = 2 \cdot Fh \\ Fm = 12 + Am \\ Fh = 12 + Ah \end{cases} \rightarrow 12 + 3 \cdot Ah = 2 \cdot (12 + Ah) \rightarrow \begin{cases} Ah = 12 \\ Am = 36 \end{cases}$$

La visita al teatro

Se quiere colocar a un grupo de niños en una sala de teatro. Si se colocan 10 niños en cada banco, quedan sin sitio 11 niños, y si se ponen 11 niños en cada banco, quedan 7 sin poderse sentar. ¿Cuántos niños hay en el grupo?

Análisis de cantidades

Lectura A

Número de niños = *N*.

Número de bancos = *B*.

Número de niños sentados en cada banco en la primera situación = *Na* = 10.

Número de niños sentados en cada banco en la segunda situación = *Nb* = 11.

Número de niños sentados en la primera situación = *Sa*.

Número de niños sentados en la segunda situación = *Sb*.

Número de niños de pie en la primera situación = *Pa* = 11.

Número de niños de pie en la segunda situación = *Pb* = 7.

Lectura B

Número de niños = N.

Número de bancos = B.

Número de niños sentados en cada banco en la primera situación = Na = 10.

Número de niños sentados en la primera situación = Sa.

Número de niños de pie en la primera situación = Pa = 11.

Número de niños de pie en la segunda situación = Pb = 7.

Diferencia entre los niños que quedan de pie en la situación A y la situación B = D.

Lectura C

Número de niños = N.

Número de niños sentados en cada banco en la primera situación = Na = 10.

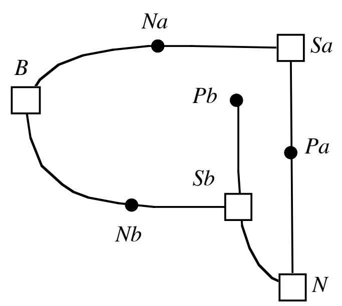
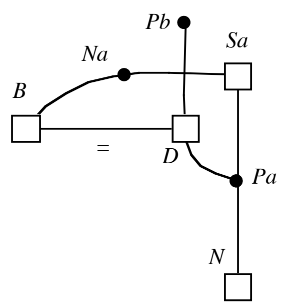
Número de niños sentados en cada banco en la segunda situación = Nb = 11.

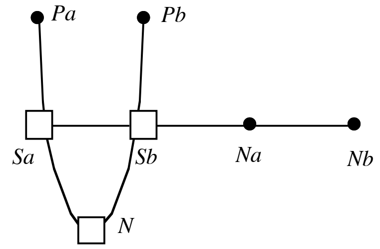
Número de niños sentados en la primera situación = Sa.

Número de niños sentados en la segunda situación = Sb.

Número de niños de pie en la primera situación = Pa = 11.

Número de niños de pie en la segunda situación = Pb = 7.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$N = Sa + Pa$ $N = Sb + Pb$ $Sa = B{\cdot}Na$ $Sb = B{\cdot}Nb$	 La visita al teatro. Lectura A.
$Pa = D + Pb$ $D = B$ $Sa = B{\cdot}Na$ $N = Sa + Pa$	 La visita al teatro. Lectura B.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$N = Sa + Pa$ $N = Sb + Pb$ $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Na}{Nb}$	 La visita al teatro. Lectura C.

Comentario a la lectura B

En esta lectura se aprovecha de que entre la situación inicial (A) y la final (B) lo que se hace es colocar a un niño más en cada banco. Por lo tanto la diferencia entre los que estaban de pie en la situación A y B serán los nuevos sentados que, a su vez, deben coincidir con el número de bancos.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} N = Sa + 11 \\ N = Sb + 7 \\ Sa = B \cdot 10 \\ Sb = B \cdot 11 \end{cases} \rightarrow \frac{N-11}{10} = \frac{N-7}{11} \rightarrow N = 51$$

Bolígrafos y lapiceros

Un bolígrafo cuesta 25 céntimos más que un lapicero. He pagado 3 € por 3 lapiceros y dos bolígrafos. ¿Cuál es el precio de cada uno?

Análisis de cantidades

Lectura A

Precio de un bolígrafo = B.

Precio de un lapicero = L.

Dinero de más que cuesta un bolígrafo con respecto a un lapicero = Mbl = 0,25.

Precio de tres lapiceros y dos bolígrafos = P = 3.

Número de bolígrafos = Nb = 2.

Número de lapiceros = Nl = 3.

Precio de dos bolígrafos = Pb.

Precio de tres lapiceros = Pl.

Lectura B

Precio de un bolígrafo = B.

Precio de un lapicero = L.

Dinero de más que cuesta un bolígrafo con respecto a un lapicero = *Mbl* = 0,25.

Precio de tres lapiceros y dos bolígrafos = *P* = 3.

Número de bolígrafos = *Nb* = 2.

Número de lapiceros = *Nl* = 3.

Dinero que nos gastamos de más en bolígrafos = *Peb*.

Precio si eliminamos lo que cuestan de más los bolígrafos = *Pqe*.

Número de bolígrafos y lapiceros = *N*.

Precio si hubiéramos comprado tantos lapiceros como la suma de bolígrafos y lapiceros que se han comprado realmente = *Ph*.

Lectura C

Precio de un bolígrafo = *B*.

Precio de un lapicero = *L*.

Dinero de más que cuesta un bolígrafo con respecto a un lapicero = *Mbl* = 0,25.

Precio de tres lapiceros y dos bolígrafos = *P* = 3.

Número de bolígrafos = *Nb* = 2.

Número de lapiceros = *Nl* = 3.

Dinero que deberíamos añadir al precio total si los lapiceros costaran lo mismo que los bolígrafos = *Pdl*.

Precio final si añadiéramos el defecto de precio de los lapiceros = *Pad*.

Número de bolígrafos y lapiceros = *N*.

Precio si hubiéramos comprado tantos bolígrafos como la suma de bolígrafos y lapiceros que se han comprado realmente = *Ph'*.

Lectura D

Precio de un bolígrafo = *B*.

Precio de un lapicero = *L*.

Dinero de más que cuesta un bolígrafo con respecto a un lapicero = *Mbl* = 0,25.

Precio de tres lapiceros y dos bolígrafos = *P* = 3.

Número de bolígrafos = *Nb* = 2.

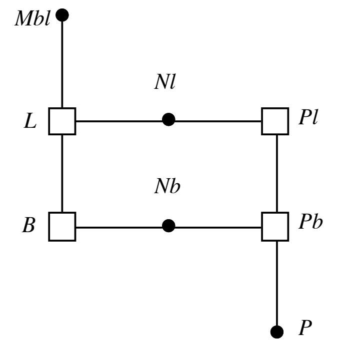
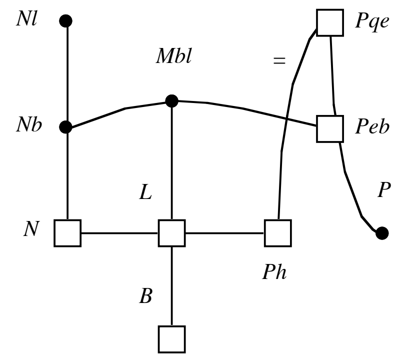
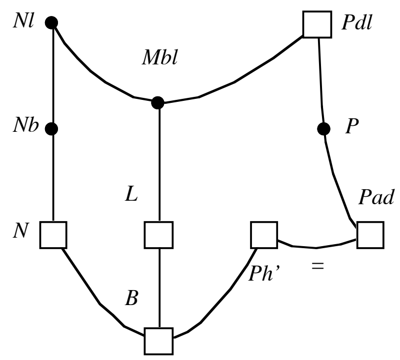
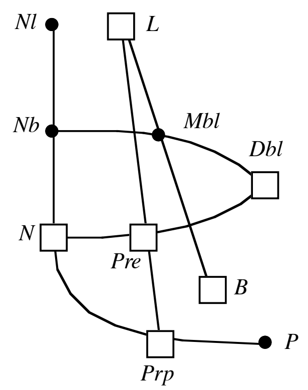
Número de lapiceros = *Nl* = 3.

Número de bolígrafos y lapiceros = *N*.

Precio de cada bolígrafo o lapicero suponiendo que costaran lo mismo = *Prp*.

Dinero de más que cuestan los dos bolígrafos = *Dbl*.

Parte de dinero que corresponde a cada bolígrafo o lapicero si repartiéramos de forma equitativa lo que cuestan de más los dos bolígrafos = *Pre*.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$B = L + Mbl$ $Pb = Nb \cdot B$ $Pl = Nl \cdot L$ $P = Pb + Pl$	 Bolígrafos y lapiceros. Lectura A.
$Peb = Nb \cdot Mbl$ $P = Peb + Pqe$ $Ph = Pqe$ $N = Nb + Nl$ $Ph = N \cdot L$ $B = L + Mbl$	 Bolígrafos y lapiceros. Lectura B.
$Pdl = Nl \cdot Mbl$ $Pad = Pdl + P$ $Ph' = Pad$ $N = Nb + Nl$ $Ph' = N \cdot B$ $B = L + Mbl$	 Bolígrafos y lapiceros. Lectura C.
$B = L + Mbl$ $Dbl = Nb \cdot Mbl$ $N = Nb + Nl$ $P = Prp \cdot N$ $Dbl = Pre \cdot N$ $Prp = Pre + L$	 Bolígrafos y lapiceros. Lectura D.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} B = L + 0{,}25 \\ Pb = 2 \cdot B \\ Pl = 3 \cdot L \\ 3 = Pb + Pl \end{cases} \rightarrow 3 = 2 \cdot (L + 0{,}25) + 3L \rightarrow \begin{cases} L = 0{,}5 \\ B = 0{,}75 \end{cases}$$

La lotería

Tres amigos juegan un décimo de lotería en Navidad que resulta premiado con 5000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega el doble que el segundo y éste el triple que el tercero.

Análisis de cantidades

Lectura A

Premio = P = 5000.

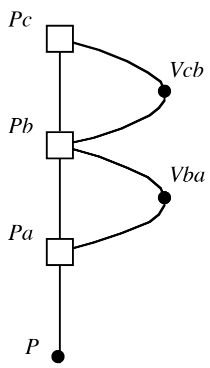
Premio que le corresponde al primer amigo = *Pa*.

Premio que le corresponde al segundo amigo = *Pb*.

Premio que le corresponde al tercer amigo = *Pc*.

Número por el que hay que multiplicar el premio que le corresponde al segundo amigo para obtener el premio que le corresponde al primer amigo = *Vba* = 2.

Número por el que hay que multiplicar el premio que le corresponde al tercer amigo para obtener el premio que le corresponde al segundo amigo = *Vcb* = 3.

Análisis de relaciones	*Grafo*
Pa = Vba·Pb *Pb = Vcb·Pc* *P = Pa + Pb + Pc*	 La lotería. Lectura A.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 5000 = Pa + Pb + Pc \\ Pa = 2 \cdot Pb \\ Pb = 3 \cdot Pc \end{cases} \rightarrow 5000 = 6 \cdot Pc + 3 \cdot Pc + Pc \rightarrow \begin{cases} Pa = 3000 \\ Pb = 1500 \\ Pc = 500 \end{cases}$$

El precio del pan

Ayer la barra de pan subió un 10%. Si ahora cuesta 55 céntimos, ¿cuál era el precio anterior?

Análisis de cantidades

Lectura A

Precio inicial = I.

Precio final = F = 55.

Porcentaje correspondiente al aumento de precio = Pa = 0,1.

Aumento de precio = A.

Lectura B

Precio inicial = I.

Precio final = F = 55.

Porcentaje correspondiente al aumento de precio = Pa = 0,1.

Porcentaje correspondiente al precio inicial = Pi = 1.

Porcentaje correspondiente al precio final = Pf.

Aumento de precio = A.

Lectura C

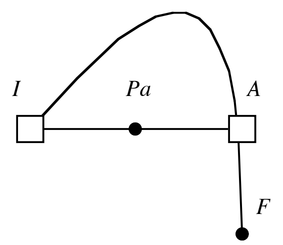
Precio inicial = I.

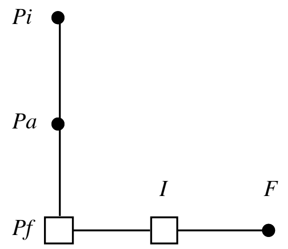
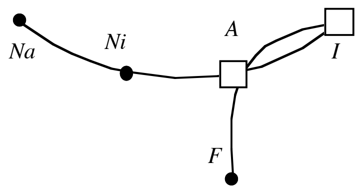
Precio final = F = 55.

Partes que añadimos para aumentar el precio = Na = 10.

Partes en que dividimos el precio inicial = Ni = 100.

Aumento de precio = A.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$F = I + A$ $A = Pa \cdot I$	 El precio del pan. Lectura A.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Pf = Pa + Pi$ $F = Pf \cdot I$	 El precio del pan. Lectura B.
$F = I + A$ $\frac{Na}{Ni} = \frac{A}{I}$	 El precio del pan. Lectura C.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 55 = I + A \\ A = 0{,}1 \cdot I \end{cases} \rightarrow 55 = I + 0{,}1 \cdot I \rightarrow I = 50$$

5.3.3. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO POST

La edad de Pablo

¿Cuál es la edad de Pablo si dentro de 15 años tendrá cuatro veces la edad que tiene ahora?

Análisis de cantidades

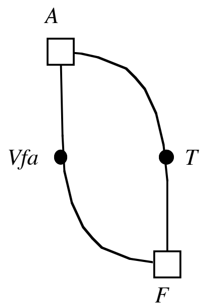
Lectura A

Edad actual de Pablo = A.

Edad futura de Pablo = F.

Tiempo transcurrido = T = 15.

Número por el que hay que multiplicar la edad actual de Pablo para obtener su edad futura = Vfa = 4.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$F = A + T$ $F = Vfa \cdot A$	 La edad de Pablo. Lectura A.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} F = A + 15 \\ F = 4 \cdot A \end{cases} \rightarrow A + 15 = 4 \cdot A \rightarrow A = 5$$

Más números

Si al quíntuplo de un número se le restan 10 unidades, se obtiene el triple del número más 8 unidades. ¿De qué número se trata?

Análisis de cantidades

Lectura A

El número a encontrar = *N*.

El número por el que multiplicamos al número a encontrar para obtener el quíntuplo del número a encontrar = *Q* = 5.

El número que obtenemos al quintuplicar el número a encontrar = *Nq*.

El número que restamos al quíntuplo del número a encontrar = *D* = 10.

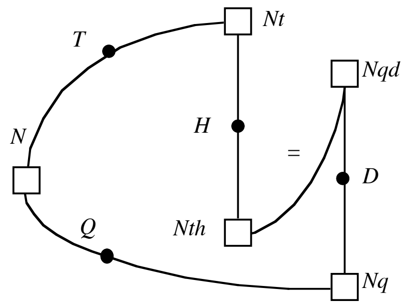
El número que obtenemos al restar diez al quíntuplo del número a encontrar = *Nqd*.

El número por el que multiplicamos al número a encontrar para obtener el triple del número a encontrar = *T* = 3.

El número que obtenemos al triplicar el número a encontrar = *Nt*.

El número que sumamos al triple del número a encontrar = *H* = 8.

El número que obtenemos al sumar ocho al triple del número a encontrar = *Nth*.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Nq = Q \cdot N$
$Nq = Nqd + D$
$Nt = T \cdot N$
$Nth = H + Nt$
$Nth = Nqd$</td><td>

Más números. Lectura A.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Nq = 5 \cdot N \\ Nq = Nqd + 10 \\ Nt = 3 \cdot N & \rightarrow 8 + 3 \cdot N = 5 \cdot N - 10 \rightarrow N = 9 \\ Nth = 8 + Nt \\ Nth = Nqd \end{cases}$$

La familia de Marcos

Marcos tiene 12 años, su hermano Javier, 7, y su padre, 32 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?

Análisis de cantidades

Lectura A

Edad actual de Marcos = Am = 12.

Edad actual de Javier = Aj = 7.

Edad actual del padre = Ap = 32.

Edad futura de Marcos = Fm.

Edad futura de Javier = Fj.

Edad futura del padre = Fp.

Tiempo transcurrido = T.

Lectura B

Edad actual de Marcos = Am = 12.

Edad actual de Javier = Aj = 7.

Edad actual del padre = Ap = 32.

Tiempo transcurrido = T.

Diferencia de edad entre el padre y Marcos = Dpm.

Diferencia de edad entre el padre y Javier = Dpj.

Suma de las diferencias de edades = *Sd*.

Edad futura del padre = *Fp*.

Lectura C

Edad actual de Marcos = *Am* = 12.

Edad actual de Javier = *Aj* = 7.

Edad actual del padre = *Ap* = 32.

Edad futura de Marcos = *Fm*.

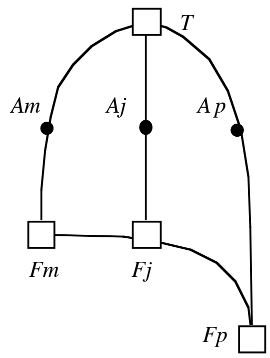
Edad futura de Javier = *Fj*.

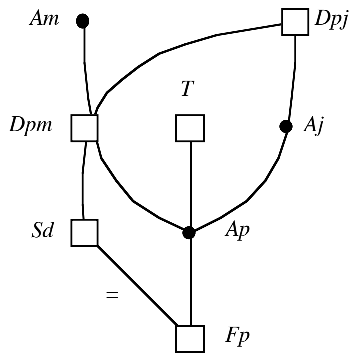
Edad futura del padre = *Fp*.

Tiempo transcurrido = *T*.

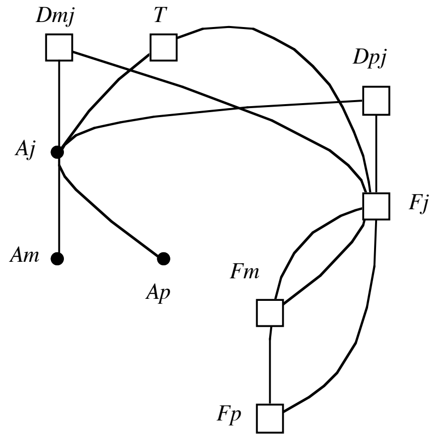
Diferencia de edad entre Marcos y Javier = *Dmj*.

Diferencia de edad entre el padre y Javier = *Dpj*.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Fm = Am + T$
$Fj = Aj + T$
$Fp = Ap + T$
$Fp = Fm + Fj$</td><td>

La familia de Marcos. Lectura A.</td></tr>
<tr><td>$Ap = Dpm + Am$
$Ap = Dpj + Aj$
$Sd = Dpm + Dpj$
$Fp = Sd$
$Fp = T + Ap$</td><td>

La familia de Marcos. Lectura B.</td></tr>
</table>

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Fp = Fm + Fj$ $Fm = Fj + Dmj$ $Fp = Fj + Dpj$ $Am = Aj + Dmj$ $Ap = Aj + Dpj$ $Fj = T + Aj$	 La familia de Marcos. Lectura C.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Fm = 12 + T \\ Fj = 7 + T \\ Fp = 32 + T \\ Fp = Fm + Fj \end{cases} \rightarrow 12 + T + 7 + T = 32 + T \rightarrow T = 13$$

Amelia y Enrique

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia sólo será el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Análisis de cantidades

Lectura A

Edad actual de Amelia = Aa.

Edad actual de Enrique = Ae.

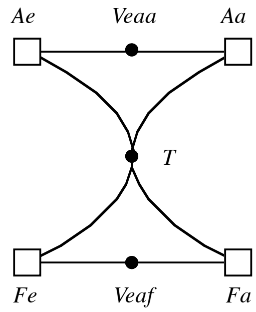
Edad futura de Amelia = Fa.

Edad futura de Enrique = Fe.

Tiempo transcurrido = $T = 5$.

Número por el que hay multiplicar la edad actual de Enrique para obtener la edad actual de Amelia = $Veaa = 3$.

Número por el que hay multiplicar la edad futura de Enrique para obtener la edad futura de Amelia = $Veaf = 2$.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Aa = Veaa \cdot Ae$ $Fa = Veaf \cdot Fe$ $Fa = T + Aa$ $Fe = T + Ae$	 Amelia y Enrique. Lectura A.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} Aa = 3 \cdot Ae \\ Fa = 2 \cdot Fe \\ Fa = 5 + Aa \\ Fe = 5 + Ae \end{cases} \rightarrow 5 + 3 \cdot Ae = 2 \cdot (5 + Ae) \rightarrow \begin{cases} Ae = 5 \\ Aa = 15 \end{cases}$$

Bolígrafos

Compro 5 bolígrafos y me sobran 6 €. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado 2 €. ¿Cuánto dinero llevo?

Análisis de cantidades

Lectura A

Dinero que lleva encima = D.

Precio de un bolígrafo = B.

Número de bolígrafos que compró en la primera situación = Na = 5.

Número de bolígrafos que compró en la segunda situación = Nb = 9.

Precio de los bolígrafos en la primera situación = Pa.

Precio de los bolígrafos en la segunda situación = Pb.

Dinero que me sobra en la primera situación = Sa = 6.

Dinero que me falta en la segunda situación = Sb = 2.

Lectura B

Dinero que lleva encima = D.

Precio de un bolígrafo = B.

Número de bolígrafos que compró en la primera situación = Na = 5.

Número de bolígrafos que compró en la segunda situación = Nb = 9.

Precio de los bolígrafos en la primera situación = Pa.

Dinero que me sobra en la primera situación = Sa = 6.

Dinero que me falta en la segunda situación = Sb = 2.

Diferencia entre el dinero que sobra y falta en ambas situaciones = Dd.

Diferencia entre el número de bolígrafos que se compran en ambas situaciones = Db.

Lectura C

Dinero que lleva encima = D.

Número de bolígrafos que compró en la primera situación = Na = 5.

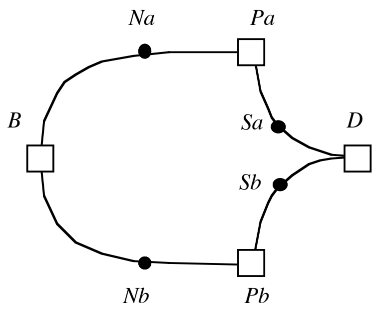
Número de bolígrafos que compró en la segunda situación = Nb = 9.

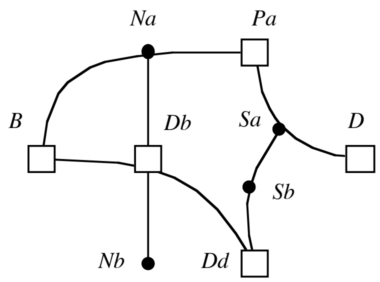
Precio de los bolígrafos en la primera situación = Pa.

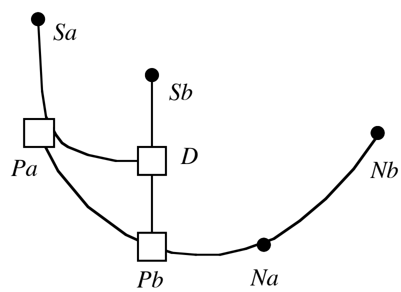
Precio de los bolígrafos en la segunda situación = Pb.

Dinero que me sobra en la primera situación = Sa = 6.

Dinero que me falta en la segunda situación = Sb = 2.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$D = Pa + Sa$
$Pb = D + Sb$
$Pa = B \cdot Na$
$Pb = B \cdot Nb$</td><td>

Bolígrafos. Lectura A.</td></tr>
<tr><td>$D = Pa + Sa$
$Pa = B \cdot Na$
$Dd = Sa + Sb$
$Nb = Db + Na$
$Dd = B \cdot Db$</td><td>

Bolígrafos. Lectura B.</td></tr>
<tr><td>$D = Pa + Sa$
$Pb = D + Sb$
$\frac{Pa}{Pb} = \frac{Na}{Nb}$</td><td>

Bolígrafos. Lectura C.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} D = Pa + 6 \\ Pb = D + 2 \\ Pa = B \cdot 5 \\ Pb = B \cdot 9 \end{cases} \rightarrow \frac{D-6}{5} = \frac{D+2}{9} \rightarrow D = 16$$

Pantalones y camisas

En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 126 €. Recuerdo que un pantalón costaba 8 euros más que una camisa. ¿Cuál era el precio de cada prenda?

Análisis de cantidades

Lectura A

Precio de una camisa = *C*.

Precio de un pantalón = *P*.

Dinero de más que cuesta un pantalón con respecto a una camisa = *Mpc* = 8.

Precio de tres camisas y dos pantalones = *T* = 126.

Número de camisas = *Nc* = 3.

Número de pantalones = *Np* = 2.

Precio de tres camisas = *Pc*.

Precio de dos pantalones = *Pp*.

Lectura B

Precio de una camisa = *C*.

Precio de un pantalón = *P*.

Dinero de más que cuesta un pantalón con respecto a una camisa = *Mpc* = 8.

Precio de tres camisas y dos pantalones = *T* = 126.

Número de camisas = *Nc* = 3.

Número de pantalones = *Np* = 2.

Parte del precio total que corresponde a lo que nos gastamos de más en pantalones = *Pep*.

Parte del precio que queda si eliminamos lo que cuestan de más los pantalones = *Pqe*.

Número de prendas = *N*.

Precio si hubiéramos comprado tantas camisas como la suma de pantalones y camisas que se han comprado realmente = *Ph*.

Lectura C

Precio de una camisa = *C*.

Precio de un pantalón = *P*.

Dinero de más que cuesta un pantalón respecto a lo que cuesta una camisa = *Mpc* = 8.

Precio de tres camisas y dos pantalones = *T* = 126.

Número de camisas = *Nc* = 3.

Número de pantalones = *Np* = 2.

Número de prendas = *N*.

Precio de cada prenda si repartiéramos el precio total de forma equitativa = *Prp*.

Dinero de más que cuestan los dos pantalones = *Dpc*.

Parte de dinero que corresponde a cada una de las prendas si repartiéramos de forma equitativa lo que cuesta de más los dos pantalones = *Pre*.

Lectura D

Precio de una camisa = *C*.

Precio de un pantalón = *P*.

Dinero de más que cuesta un pantalón con respecto a una camisa = *Mpc* = 8.

Precio de tres camisas y dos pantalones = *T* = 126.

Número de camisas = *Nc* = 3.

Número de pantalones = *Np* = 2.

Parte del precio total que corresponde a lo que nos gastamos de más en pantalones = *Pep*.

Parte del precio que queda si eliminamos lo que cuestan de más los pantalones = *Pqe*.

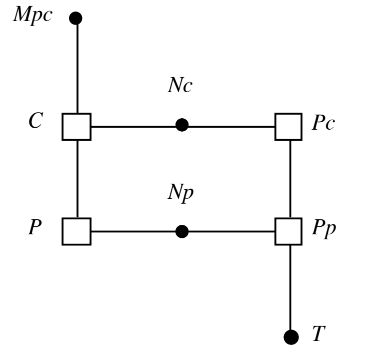
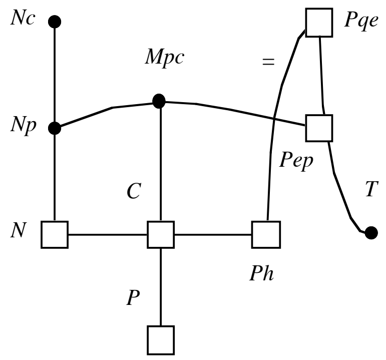
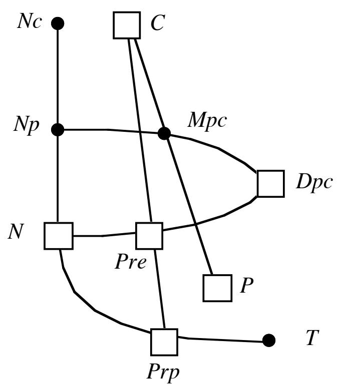
Número de prendas = *N*.

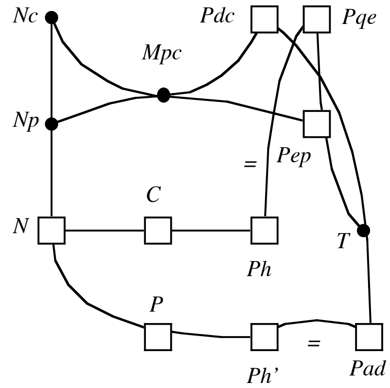
Precio si hubiéramos comprado tantas camisas como la suma de pantalones y camisas que se han comprado realmente = *Ph*.

Dinero que habría que añadir al precio total si las camisas costaran lo mismo que los pantalones = *Pdc*.

Precio que tendríamos que pagar si las camisas costaran lo mismo que los pantalones = *Pad*.

Precio si hubiéramos comprado tantos pantalones como la suma de pantalones y camisas que se han comprado realmente = *Ph’*.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$P = C + Mpc$ $Pc = Nc \cdot C$ $Pp = Np \cdot P$ $T = Pc + Pp$	 Pantalones y camisas. Lectura A.
$Pep = Np \cdot Mpc$ $T = Pep + Pqe$ $Ph = Pqe$ $N = Np + Nc$ $Ph = N \cdot C$ $P = C + Mpc$	 Pantalones y camisas. Lectura B.
$P = C + Mpc$ $Dpc = Np \cdot Mpc$ $N = Nc + Np$ $T = Prp \cdot N$ $Dpc = Pre \cdot N$ $Prp = Pre + C$	 Pantalones y camisas. Lectura C.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Pep = Np \cdot Mpc$ $T = Pep + Pqe$ $Ph = Pqe$ $N = Np + Nc$ $Ph = N \cdot C$ $Pdc = Nc \cdot Mpc$ $Pad = Pdc + T$ $Ph' = Pad$ $Ph' = N \cdot P$	 Pantalones y camisas. Lectura D.

Comentario a la lectura C

En la lectura C se reparte equitativamente el precio total para obtener el precio unitario de cinco hipotéticas prendas (que no serán camisas ni pantalones). El precio de esta prenda será mayor que el de la camisa, pero inferior que el del pantalón. A continuación le restamos el reparto equitativo del exceso de precio de los pantalones y obtenemos el precio unitario de las camisas. Se fundamenta en:

$$\frac{126}{5} = \frac{C+C+C+P+P}{5} = \frac{C+C+C+C+Mpc+C+Mpc}{5} = \frac{5C+2Mpc}{5} = C + \frac{2Mpc}{5}$$

Comentario a la lectura D

Esta solución se basa en crear dos situaciones hipotéticas en las que sólo hubieran camisas o sólo pantalones. La clave está en que si añadimos el defecto de lo que cuestan las camisas al precio real obtenemos una cantidad cuyo valor es igual al precio si sólo hubiéramos comprado pantalones. Por otro lado, si restamos el exceso de comprar los pantalones tendríamos al precio real obtenemos una cantidad cuyo valor es igual al precio si sólo hubiéramos comprado camisas.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} P = C + 8 \\ Pc = 3 \cdot C \\ Pp = 2 \cdot P \\ 126 = Pc + Pp \end{cases} \rightarrow 126 = 3 \cdot C + 2 \cdot (C + 8) \rightarrow \begin{cases} C = 22 \\ B = 30 \end{cases}$$

La quiniela

Tres amigos hacen una quiniela que resulta premiado con 5000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega el doble que el segundo y éste el triple que el tercero

Análisis de cantidades

Premio = P = 5000.

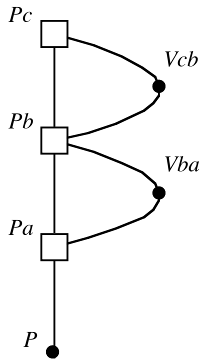
Premio que le corresponde al primer amigo = *Pa*.

Premio que le corresponde al segundo amigo = *Pb*.

Premio que le corresponde al tercer amigo = *Pc*.

Número por el que hay que multiplicar el premio que le corresponde al segundo amigo para obtener el premio que le corresponde al primer amigo = *Vba* = 2.

Número por el que hay que multiplicar el premio que le corresponde al tercer amigo para obtener el premio que le corresponde al segundo amigo = *Vcb* = 3.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Pa = Vba{\cdot}Pb$ $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ $P = Pa + Pb + Pc$	 La quiniela. Lectura A.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 5000 = Pa + Pb + Pc \\ Pa = 2 \cdot Pb \\ Pb = 3 \cdot Pc \end{cases} \rightarrow 5000 = 6 \cdot Pc + 3 \cdot Pc + Pc \rightarrow \begin{cases} Pa = 3000 \\ Pb = 1500 \\ Pc = 500 \end{cases}$$

La paga

Me han subido la paga semanal un 20%. Si ahora me dan 60 €, ¿cuánto me daban antes?

Análisis de cantidades

Lectura A

Paga inicial = *I*.

Paga final = *F* = 60.

Porcentaje de aumento = *Pa* = 0,2.

Aumento de paga = *A*.

Lectura B

Paga inicial = *I*.

Paga final = *F* = 60.

Porcentaje de aumento = *Pa* = 0,2.

Porcentaje correspondiente a la paga inicial = *Pi* = 1.

Porcentaje correspondiente a la paga final = *Pf*.

Lectura C

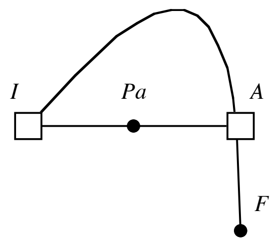
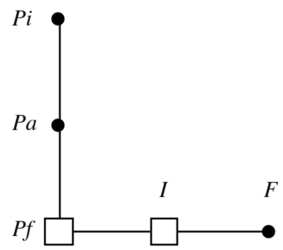
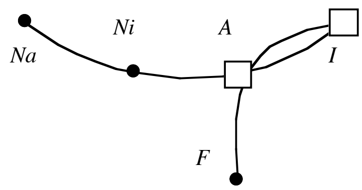
Paga inicial = *I*.

Paga final = *F* = 60.

Partes que añadimos para aumentar la paga = *Na* = 20.

Partes en que dividimos la paga inicial = *Ni* = 100.

Aumento de paga = *A*.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$F = I + A$ $A = Pa \cdot I$	 La paga. Lectura A.
$Pf = Pa + Pi$ $F = Pf \cdot I$	 La paga. Lectura B.
$F = I + A$ $\frac{Na}{Ni} = \frac{A}{I}$	 La paga. Lectura C.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 60 = I + A \\ A = 0{,}2 \cdot I \end{cases} \rightarrow 60 = I + 0{,}2 \cdot I \rightarrow I = 50$$

5.4. LAS TÉCNICAS PARA EL ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES

En este apartado, describimos las técnicas de análisis de las producciones escritas (ya lo estuvieran en un papel o en un archivo de hoja de cálculo) por los estudiantes cuando se enfrentaban a los cuestionarios. También presentamos las variables empleadas para dar cuenta del proceso de resolución de problemas, la construcción de fórmulas y la generación de secuencias numéricas en la hoja de cálculo.

5.4.1. PROCEDIMIENTO PARA LOS CUESTIONARIOS DE PROBLEMAS VERBALES

Para organizar el análisis de las actuaciones de los estudiantes al enfrentarse a problemas verbales, partiremos de la clásica clasificación propuesta por J. Kilpatrick, y expuesta en Kilpatrick (1978) y Kulm (1979), de las variables utilizadas en la investigación sobre resolución de problemas. En primer lugar, se distingue entre variables independientes y dependientes. Se consideran variables independientes: las variables del sujeto, las variables de la tarea y las variables de situación. Las variables dependientes se obtendrán de las respuestas de los sujetos y las podemos dividir en: las variables de producto, las variables de proceso, las variables de evaluación y las variables concomitantes.

Las variables del sujeto son aquellas que describen atributos del individuo, como características psicológicas o conocimientos matemáticos. Las variables de tarea serían aquellas que tendrían que ver con el problema. En Kulm (1979) se señalan a su vez tres subcategorías dentro de las variables de tarea: las variables de contexto, las variables de estructura y las variables de formato. Las variables de estructura describen las características matemáticas del problema, las de contexto dan cuenta de la situación planteada y del lenguaje utilizado y las de formato atienden a la distribución en la que se ofrecen los problemas, si se proporcionan pistas, etc. Por último, las variables de situación describen el entorno en el que tiene lugar la resolución del problema.

Las variables de producto tienen que ver con la validez del resultado, con el tiempo empleado para alcanzarlo, etc. Las variables de proceso se derivan de las aportaciones verbales del sujeto durante el proceso de resolución o de sus producciones escritas. En esta categoría incluiríamos el uso de herramientas heurísticas, algoritmos o métodos de resolución. Las variables de evaluación describen los pensamientos y opiniones expresados por los sujetos después de que el problema haya sido resuelto. Por último, las variables concomitantes conformarían el cajón de sastre donde incluiríamos todo lo que no se ha incluido en las categorías anteriores.

Inicialmente, en nuestro estudio de grupo consideraremos como variable de sujeto el nivel educativo al que pertenecen los estudiantes. Se trataba de estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria que en el momento en el que se inició el estudio (final del tercer trimestre del curso) acababan de ser instruidos en la resolución algebraica de problemas. Desconocíamos el modelo de enseñanza seguido para este fin, pero conocíamos el libro de texto utilizado, la forma en que se presenta el tema en el mismo, la colección de problemas disponibles y cuáles se utilizaron en clase. Los cuestionarios previos a la enseñanza nos permitieron describir a los estudiantes mediante los valores de dos variables de sujeto: el tipo de lectura (aritmética o algebraica) que tienden a realizar al abordar los problemas y la competencia a la hora de identificar y relacionar las cantidades al enfrentarse a los mismos.

Las variables de tarea se utilizaron para evitar la presencia de características no deseadas en los problemas o introducir otras. Por lo que respecta a las variables de contexto, se excluyeron los problemas que pertenecían a subfamilias como geometría, grifos o relojes. Se eligieron para el cuestionario 1: un problema de mezclas, dos de compra-venta, uno de móviles, uno de trabajo y dos de reparto. En el cuestionario 2 se seleccionaron tres problemas de la subfamilia edades, uno de ábaco, dos de reparto y dos de compra-venta. Por último, el cuestionario Post estaba integrado por tres problemas de edades, uno de ábaco, uno de reparto y tres de compra-venta. Por lo que respecta a las variables de estructura, se consideró que los problemas del cuestionario 1 tuvieran lectura aritmética y los de los cuestionarios 2 y Post, algebraica. También se cuidó que no se repitiera la misma estructura en problemas distintos de un mismo cuestionario y que los problemas del cuestionario 2 y Post tuvieran estructura isomorfa uno a uno. Se tomó como estructura de un problema el entramado de relaciones entre cantidades obtenido tras una lectura analítica del mismo. Como la lectura analítica de un problema no tiene por qué ser única, se consideró como tal una lectura llevada a cabo por el investigador. Por lo que respecta a las variables de formato, todos los problemas de los cuestionarios están enunciados verbalmente y no se apoyan en ningún dibujo o esquema. Se respetaron los tiempos verbales que aparecían en los originales, las imprecisiones del enunciado que debían resolverse en el contexto del problema y la mención o no a cantidades necesarias para resolverlo. Así, por ejemplo, en el problema *La familia de Andrea* se mantiene la pregunta "¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?" dejando al resolutor la labor de identificar si se refiere a la edad actual o futura del padre a luz que le proporcionan los valores ofrecidos en el enunciado. En el problema *El tren*, no se ofrecen datos necesarios como la equivalencia entre kilómetros y metros o entre horas y segundos.

La intención con la que se administraron los cuestionarios de problemas verbales era la de cuantificar las variables de sujeto, lo que nos permitirá identificar tipos de resolutor, y comparar la competencia en el uso del MC antes y después de la enseñanza. Evidentemente no podemos responder a este propósito centrándonos exclusivamente en variables de producto como serían el número de problemas bien resueltos o bien planteados. Hemos de definir unas variables de proceso que reflejen el nivel de competencia en los distintos pasos del MC e instrumentos para medirlas.

5.4.1.1. El método para la reducción de las producciones escritas a variables

Para determinar la competencia de los estudiantes (resolutores reales) en los distintos pasos del MC, hemos de diseñar un método que permita comparar la actuación de éstos con la que tendría un resolutor competente (resolutor ideal)[3]. El único elemento del que disponemos para observar y describir el proceso de resolución son las producciones escritas de los estudiantes. Atendiendo a necesidades y restricciones, hemos diseñado un procedimiento para transformar las producciones escritas de los sujetos en un conjunto de variables que midan la proximidad de su actuación (la parte observable en el texto), en los cuatro primeros pasos del MC, a la que hubiera tenido el resolutor ideal. En el procedimiento podemos diferenciar: la reducción del texto a cantidades y relaciones entre cantidades (la lectura analítica); la identificación de las cantidades a las que se les asigna una letra; la determinación de la validez de la asignación de valor o expresión a las cantidades; y la valoración de la igualdad (o igualdades) sobre la que se plantea la ecuación (o ecuaciones). Cada uno de estos elementos se cuantificará mediante unas variables que serán descritas más adelante.

Al aplicar el método se asume que el que analiza (en este caso el investigador, que toma el papel de resolutor ideal) las producciones respeta los principios de economía de cantidades y relaciones y el de presunción de competencia. La finalidad de ambos principios es reducir la subjetividad en la interpretación y disminuir las variaciones de mejora que podrían aparece entre el cuestionario 2 y el Post. El primero intenta limitar las suposiciones innecesarias a la hora de establecer la presencia de cantidades y relaciones en la producción escrita y atiende al principio de parsimonia, "*entia non sunt*

[3] El método también servirá para analizar las producciones en las que se utilicen otros métodos de resolución como el MIAS o el MAES.

multiplicanda praeter necessitatem"[4], enunciado por Guillermo de Ockham. La presunción de competencia supone que el investigador tenderá a calificar como correctas las producciones en caso de duda. Con todo, somos conscientes de que las suposiciones que nos llevarán del texto producido a la lectura analítica, que supuestamente hizo el resolutor, quedan bajo la subjetividad de las decisiones del investigador.

5.4.1.1.1. La lectura inferida

La reducción de la producción escrita a las variables de producto y de proceso se inicia con la identificación de la lectura analítica que, supuestamente, realizó el resolutor. En las actuaciones de los sujetos reales podemos encontrar más de un intento de resolver un problema. Cada uno de estos intentos puede estar ligado a una lectura analítica distinta. Para distinguir los distintos intentos de dar el resultado presentes en las producciones escritas, nos fijaremos en que el propio resolutor las diferencie mediante alguna marca (línea de separación, tachado, etc.) o que se observe la utilización de una relación entre cantidades que sustituya a otra que se estaba usando (que puede haber tachado). Tomaremos como intento definitivo de dar el resultado (y a partir de él se obtendrá la lectura analítica realizada por el resolutor) al único que no esté tachado o al último que se dé en el caso que haya más de uno sin tachar o estén todos tachados.

En las producciones de los estudiantes, podemos encontrar comprobaciones del resultado que pongan en juego cantidades y relaciones entre cantidades que no se habían contemplado al plantear el problema. Hemos tomado la decisión de no considerar a efectos de lectura cualquier texto que se produzca para la comprobación del resultado excepto cuando se use dentro de una estrategia de prueba y error.

Una vez hemos acotado la parte de la producción escrita que vamos a considerar, pasaremos a identificar la lectura analítica que supuestamente realizó el resolutor. Iniciaremos el procedimiento con un análisis sintáctico de las expresiones matemáticas empleadas, que reducirá la totalidad de la producción a una distribución jerárquica de operaciones entre números y/o expresiones algebraicas. En el nivel inferior encontraremos letras aisladas y números que no se habrán determinado a partir de una operación con otros números. A medida que ascendamos de nivel, encontraremos nuevos números y/o expresiones algebraicas obtenidos al operar con las expresiones de menor nivel.

Necesitamos de un protocolo que nos permita asociar una cantidad a cada número o expresión algebraica[5] (utilizaremos en ocasiones el término *representación* para sustituir a la proposición *número o expresión algebraica*) del texto producido por el resolutor. En las actuaciones de un resolutor ideal, los números que ocupan el nivel inferior deberían representar a cantidades conocidas y las letras, a cantidades desconocidas[6]. En este caso y tras asociar una cantidad a estas representaciones de nivel inferior, podríamos ir ascendiendo en la jerarquía e ir asignando nuevas cantidades e

[4] El célebre aforismo de Guillermo de Ockham que podemos traducir por: no se deben multiplicar los entes sin necesidad.

[5] Abandonaremos el uso de número y función numérica y nos decantaremos por emplear número y expresión algebraica como formas más habituales del mundo de la resolución de problemas verbales.

[6] Desde un punto de vista de un usuario real, podemos encontrar que utilice letras para representar a cantidades conocidas y números como valores provisionales (o no) de cantidades desconocidas.

identificando relaciones hasta determinar la lectura analítica. Sin embargo, en las producciones de un usuario real, se dan actuaciones que nos impiden emprender una traducción organizada exclusivamente por la jerarquía de números y operaciones. Así, podemos encontrar: asignaciones arbitrarias de números a cantidades desconocidas; asignaciones de dos números distintos a una misma cantidad; expresiones algebraicas que se asocian a cantidades distintas; representaciones a las que no podemos asociar una cantidad con referente en el contexto del problema; etc. La imposibilidad de establecer una correspondencia estable entre una representación y una cantidad nos obliga a diseñar un procedimiento para decidir, en cada situación, la cantidad que hay que asociar a una representación. El procedimiento trata de respetar las decisiones explícitas del resolutor y, en caso de duda, se recurre a la presunción de competencia. Inicialmente, asignamos la cantidad que el resolutor haya asociado explícitamente a la representación (escribiendo un nombre junto al número o expresión algebraica, por ejemplo). A continuación, se procede siguiendo la estructura jerárquica obtenida del análisis sintáctico avanzando desde el nivel inferior hacia el superior. A los distintos valores que vayamos encontrado se les asignará una cantidad siguiendo el orden siguiente:

1) Se le asigna la cantidad que haga correcta la relación[7] asociada a la operación donde se encuentra el número o expresión algebraica.
2) Se le asigna una cantidad por el uso que haga del número o expresión algebraica posteriormente.
3) Se le asigna una cantidad por el uso que haya hecho del número o expresión algebraica anteriormente.
4) Se le asigna la cantidad de acuerdo con las indicaciones que se ofrecen en el enunciado del problema o atendiendo al contexto del mismo. Llegados a este punto, un número que corresponde a un dato ofrecido en el enunciado se considerará que representa a esta cantidad; mientras que una letra (habitualmente x) se considerará que representa a alguna de las cantidades desconocidas por las que se pregunta en el enunciado.

En el caso que una representación no sea atrapada en ninguno de los niveles, consideraremos que simboliza una cantidad sin referente en las lecturas teóricas que conducen a la solución del problema. Estas cantidades sin referente pueden ser cálculos intermedios ligados a una relación plasmada por más de una operación (como las sumas parciales ligadas a una estructura conceptual total)[8] o cantidades sin utilidad para alcanzar la solución a las que llamaremos espurias. Las primeras no se considerarán parte de la lectura realizada por el resolutor; las segundas, sí. Las cantidades espurias pueden tener o no significado en el contexto del problema, pero su uso no permite alcanzar la solución[9]. Representaremos las cantidades espurias mediante letras griegas

---

[7] Una relación se considerará correcta si aparecen en alguna lectura teórica del problema. Una lectura teórica es cualquier lectura de un problema realizada por el investigador (actuando como resolutor ideal) que se ha utilizado como lectura mínima asociada a una actuación.

[8] Se trata de cantidades sin referente en el contexto del problema pues su significado va ligado a la operación matemática de la que son resultado.

[9] El hecho de que no tenga referente en ninguna de las lecturas teóricas no significa que no tenga referente en el contexto del problema. Si tomamos como ejemplo un problema de edades, la edad del

minúsculas para diferenciarlas de las que podemos asociar a una cantidad de una lectura teórica que simbolizaremos mediante una o varias letras latinas, siendo la primera siempre mayúscula.

Ya hemos indicado que un mismo número o expresión algebraica puede usarse como representante de cantidades distintas. Cuando suceda esto, y siempre que no haya indicación explícita en contra, supondremos que una de las dos cantidades (no siempre podremos afirmar cuál de las dos es) toma el valor de la otra, sin que esto implique que ambas cantidades se consideran iguales. También puede ocurrir que una misma cantidad reciba dos valores distintos a lo largo de la resolución o que incluso el segundo valor de la cantidad se obtenga utilizando el primer valor asignado (lo que daría origen a una contradicción). Para poder identificar el orden de las asignaciones a una misma cantidad, y cuando sea necesario, situaremos un asterisco a la derecha de la combinación de letras que representan al número o expresión algebraica de mayor nivel en la jerarquía.

Las relaciones entre cantidades se deducirán a partir de las cantidades asignadas a los distintos valores y de las operaciones en las que participan. Consideraremos seis posibles relaciones correctas entre cantidades: la relación binaria de igualdad, las relaciones ternarias aditivas y multiplicativas, las relaciones cuaternarias de proporcionalidad simple, las relaciones senarias de proporcionalidad compuesta y las relaciones aditivas de longitud variable ligadas a la estructura conceptual total.

Las operaciones que incluyan cantidades espurias se asocian siempre a relaciones no presentes en ninguna lectura teórica del problema (incorrectas). El resultado de estas operaciones será una nueva cantidad que puede ser espuria. Sólo la intención con la que la use el resolutor antes o después, o alguna indicación explícita, nos puede inclinar a no considerarla como tal. Cuando una operación que incluya cantidades espurias aparezca únicamente como una subexpresión de una expresión mayor, nos podemos encontrar con una cascada de cantidades espurias y relaciones incorrectas. Con la finalidad de respetar los principios metodológicos expuestos anteriormente, se toma la decisión de minimizar el número de cantidades espurias y de relaciones que contengan este tipo de cantidades; aunque ello conduzca a la aparición de relaciones que no podamos incluir entre las seis (correctas) enunciadas previamente. No obstante, y con la intención de ser fieles a la actuación del resolutor, cuando nos encontremos con una ecuación que plantea una igualdad entre cantidades espurias; asignaremos a cada término una cantidad distinta y estableceremos una relación binaria de igualdad (incorrecta) entre ambas cantidades espurias.

Llamaremos lectura inferida de la actuación de un sujeto en un problema al conjunto de cantidades y de relaciones entre cantidades obtenidas al aplicar el método anterior sobre la solución definitiva de un problema. No hemos de confundir la lectura inferida con la lectura analítica que realmente llevó a cabo el resolutor, pues en la lectura inferida las cantidades y relaciones consideradas son las que el investigador supone que utiliza el resolutor. Aun así, supondremos que la lectura inferida fue la lectura analítica que realizó el resolutor.

A partir de la lectura inferida podemos decidir si el resolutor ha realizado una lectura aritmética o algebraica. Diremos que una lectura es aritmética cuando podamos calcular

protagonista dentro de un año tiene referente en el contexto del problema, pero puede no conducir a la solución del mismo.

todas las cantidades desconocidas a partir de las cantidades conocidas, considerando como cantidades conocidas y desconocidas las que determinaría como tales el resolutor ideal. En caso contrario diremos que la lectura es algebraica.

5.4.1.1.2. La lectura mínima asociada a la actuación en un problema

Para poder cuantificar la calidad de la lectura realizada por un resolutor real, la compararemos con otra lectura, necesariamente correcta, y que supondremos obra de un resolutor ideal (en nuestro caso, el investigador). Como un sujeto ideal podría realizar más de una (en principio todas las posibles) lectura de un mismo problema, es necesario establecer un criterio que nos permita fijar previamente respecto a qué lectura se comparará. Con esta intención vamos a definir qué entendemos por relación necesaria, cantidad necesaria y por lectura analítica mínima asociada a la actuación del resolutor. Llamamos relación (cantidad) necesaria a cualquier relación (cantidad) correcta que si se eliminara de una solución correcta nos impediría llegar al resultado. Definimos lectura mínima asociada a la actuación del resolutor como aquella lectura correcta que integra a todas las relaciones y cantidades necesarias que utiliza el resolutor y que emplea el mínimo número de relaciones y cantidades posible. La lectura analítica mínima asociada a la actuación del resolutor la podríamos interpretar como aquélla que realizaría un sujeto competente a partir de lo que hay de correcto en la actuación del usuario real. Tomaremos la lectura analítica mínima como referencia respecto a la que comparar la lectura inferida.

Un resolutor real también puede emplear relaciones incorrectas y relaciones correctas innecesarias. La característica común de ambas es que no aparecen en el lectura mínima asociada. La diferencia la marcaría el hecho de que una relación incorrecta tampoco está en ninguna de las otras lecturas teóricas, pero la correcta innecesaria, sí. Con el fin de establecer un referente respecto al que comparar las relaciones correctas innecesarias y las relaciones incorrectas que utiliza el resolutor, también definimos la lectura (no mínima) asociada a la actuación y la lectura ampliada asociada a la actuación del resolutor, respectivamente. La primera se obtendría de la unión de la lectura mínima asociada a la actuación y de las relaciones correctas innecesarias usadas por el resolutor. La lectura ampliada asociada a la actuación del resolutor incluiría la lectura mínima asociada a la solución y las relaciones incorrectas empleadas por el resolutor.

La determinación de cuál es la lectura mínima asociada no ofrece dificultad cuando el resolutor produce una solución correcta, pues será la misma lectura tras eliminar las relaciones innecesarias si existen (y las incorrectas, si las hubiera). Cuando la solución no es correcta, pueden haber varias lecturas teóricas que se adapten a las relaciones correctas que hay en la lectura inferida. Como norma general, dadas dos lecturas analíticas teóricas L1 y L2, consideraremos que la lectura L1 es la lectura mínima asociada si L1 contiene un mayor número de las relaciones necesarias empleadas por el resolutor que L2. Si tuvieran el mismo número, consideraríamos que la lectura L1 es la lectura mínima asociada, si en L1 podemos encajar la mayor cantidad de fragmentos de relaciones incorrectas dentro de relaciones correctas. Si tuvieran el mismo número, consideraríamos que la lectura L1 es la lectura mínima asociada, si en L1 las cantidades que forman parte de los fragmentos de relaciones incorrectas respetan en mayor número ser conocidas o desconocidas cuando deberían serlo. Si tuvieran el mismo número, consideraríamos que la lectura L1 es la lectura mínima asociada si L1 contiene un mayor número de las cantidades necesarias empleadas por el resolutor que L2.

A continuación, ofrecemos ejemplos de cómo se identifica la lectura inferida, cómo se le asigna una lectura mínima asociada y cómo se identifican algunas características de la resolución que posteriormente serán codificadas mediante variables.

Ejemplo 1.

La alumna 11 resuelve el problema *Marta y María* de forma incorrecta, pues plantea la ecuación “$3x + 12 = 2x$” (ver Figura 3).

$$3x+12=2x \qquad x=12.$$
$$3x-2x=-12$$
$$-x=-12$$

Figura 3. La solución de la alumna 11 para el problema *Marta y María*.

Ante la ausencia de indicaciones explicitas sobre la asignación de cantidades a una expresión, realizamos un análisis sintáctico de la ecuación (ver Figura 4) y procedemos a identificar las expresiones de menor nivel (3, x, 12 y 2). Al número 3 se le asignaría la cantidad *Vhma*[10] respetando las indicaciones del enunciado. A la letra x le podríamos asignar tanto *Ah* como *Am*, pues son las cantidades por las que pregunta el problema; pero nos decantamos por *Ah* porque supondría usar la relación correcta $Am = Vhma{\cdot}Ah$. El número 12 representaría a T y se relacionaría con *Am* (representado por $3x$) para dar $3x + 12$ empleando la relación correcta $Fm = T + Am$. Basándonos en la información ofrecida en el enunciado, el número 2 representaría a la cantidad *Vhmf*; pero mantener la suposición de que x simboliza a *Ah* nos conduciría a suponer que ha empleado una relación incorrecta. Por este motivo, decidimos que el resolutor ha utilizado x para representar a dos cantidades (polisemia de la equis): *Ah* cuando la multiplicó por 3 y *Am* cuando la multiplica por 2. De esta forma identificamos las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ y $Fm = T + Am$ junto a la asignación a la letra x de las cantidades *Am* y *Ah*. La lectura inferida tendría tres de las cuatro que aparecen en la lectura teórica A, con lo que concluimos que la lectura mínima asociada a la actuación es la A.

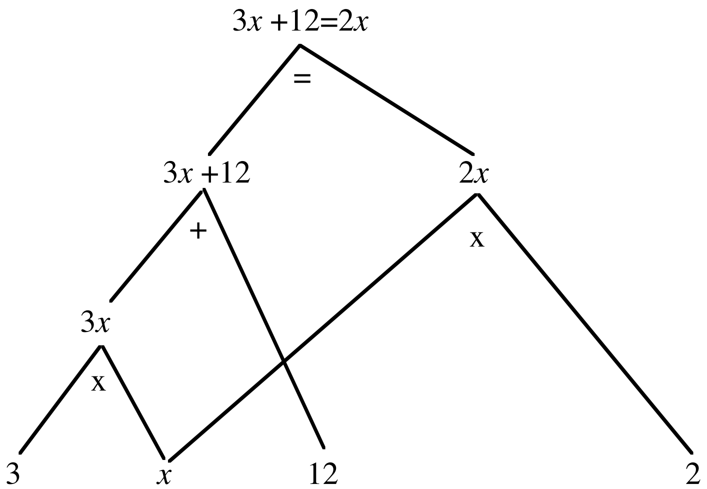


Figura 4. Análisis sintáctico de la producción la alumna 11 en el problema *Marta y María*.

[10] Las lecturas teóricas a las que hacemos referencia y la explicación de las cantidades a las que refieren las combinaciones de letras se encuentran en el apartado 5.3 donde se ofrece el análisis de los problemas empleados en los cuestionarios.

Ejemplo 2

El alumno 3 resuelve el problema *Las naranjas* aritméticamente y de manera incorrecta (ver Figura 5).

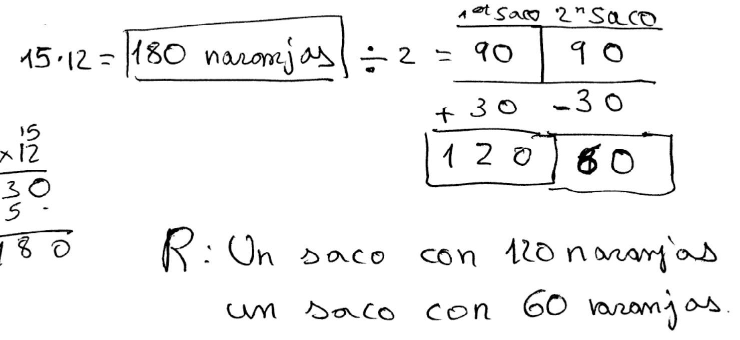


Figura 5. La solución del alumno 3 para el problema *Las naranjas*.

En este caso sí que aparecen indicaciones explícitas que nos permiten identificar: 180 con la cantidad *N*, 120 con la cantidad *Sg* y 60 con la cantidad *Sp*. A continuación, procedemos siguiendo la jerarquía de operaciones (ver Figura 6). El número 2 se asigna a la cantidad *S*, atendiendo a la información del enunciado, y el número 90 a la cantidad *Nm*, para asociar la operación "180 naranjas ÷ 2 = 90" a la relación correcta $N = S{\cdot}Nm$. En contra de la información ofrecida en el enunciado, pero de acuerdo con nuestro protocolo, asociamos el número 30 a la cantidad *Em* para hacer corresponder a relaciones correctas las operaciones donde aparece esta cantidad. En definitiva, el resolutor asigna de manera incorrecta el valor 30 de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y utiliza las relaciones correctas $N = S{\cdot}Nm$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$. Por lo tanto, como las tres relaciones son correctas y aparecen únicamente en la lectura D1, concluimos que la lectura mínima asociada a la actuación es la D1 y que la lectura inferida contiene tres de las cuatro relaciones necesarias.

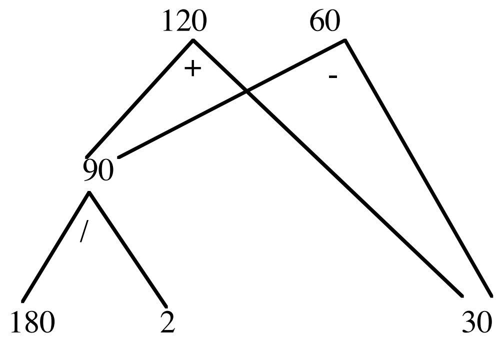


Figura 6. Análisis sintáctico de la producción del alumno 3 en el problema *Las naranjas*.

5.4.1.1.3. Descripción de las variables y codificación

Como nuestro objetivo es dar cuenta de aspectos del proceso de resolución, organizaremos la exposición de las variables con este propósito. Así encontraremos variables que determinan: la existencia de producción, el tipo de lectura, el tipo de SMS empleado, la competencia en los distintos pasos del MC, la construcción de nombres para las cantidades y el uso de magnitudes y unidades.

5.4.1.1.3.1. La variable que establece la existencia de producción

- *A* – Abordado. Un problema se considerará abordado cuando se escriba cualquier texto en el espacio destinado a la respuesta. Se codificará con un 1 cuando se aborde y con un 0 cuando no.

5.4.1.1.3.2. Las variables que determinan el tipo de lectura

Disponer de una producción escrita como único elemento de análisis del proceso de resolución nos impide saber el tipo de lectura o si la habido cuando no haya escrita ninguna operación aritmética. Por ello, supondremos que existe lectura analítica (o que al menos tenemos acceso a ella) cuando se observe alguna operación aritmética entre cantidades y consideraremos como tal a la lectura inferida. Distinguiremos entre:

- *LArit* – Lectura aritmética. Se considerará que un resolutor realiza una lectura aritmética (se codificará con 1) cuando sea posible calcular todas las cantidades desconocidas que pone en juego partiendo exclusivamente de cantidades conocidas. La representación de la lectura mediante un grafo nos proporcionará un grafo aritmético.
- *LAlg* – Lectura algebraica. Se considerará que un resolutor realiza una lectura algebraica (se codificará con 1) cuando no sea posible calcular todas las cantidades desconocidas que pone en juego partiendo exclusivamente de cantidades conocidas. La representación de la lectura mediante un grafo nos proporcionará un grafo algebraico.

5.4.1.1.3.3. Las variables que dan cuenta del sistema matemático de signos

- *SMSalg*[11]. Sistema matemático de signos del álgebra. Se considera que un resolutor utiliza el SMSalg (se codificará con 1) cuando en la solución aparezca alguna operación entre números y letras.
- *SMSarialg*. Sistema matemático de signos intermedio. Se considera que un resolutor utiliza un SMSari-alg (se codificará con 1) cuando en la solución se presenten números y letras, sin que las letras participen en ninguna operación.
- *SMSari*. Sistema matemático de signos de la aritmética. Se considera que un resolutor utiliza el SMSari (se codificará con 1) cuando la solución se presente como operaciones entre números sin que se observe la presencia de letras.
- *SMSn*. Sistema matemático de signos del lenguaje natural. Se considera que un resolutor utiliza un SMSn (se codificará con 1) cuando en la solución se representan las relaciones entre cantidades mediante el uso exclusivo de proposiciones escritas en una lengua natural.

5.4.1.1.3.4. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 1 del MC

Las variables de este apartado sirven para medir la calidad de la lectura que lleva a cabo un resolutor tomando como referencia la que realizaría un resolutor ideal.

- *RelNec* – Relaciones necesarias. Es el número de relaciones que tiene la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.

[11] El uso o no de cursiva nos permitirá decidir si nos referimos a la variable o nombramos al sistema matemático de signos, respectivamente.

- *RelNecEmp* – Relaciones necesarias empleadas. Es el número de relaciones utilizadas por el resolutor que podemos integrar en la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.[12]
- *RelInR* –Relaciones incorrectas con error en el tipo de relación. Es el número de relaciones incorrectas utilizadas que conectan cantidades mediante un tipo de relación distinta a la que las une en la lectura mínima asociada a la actuación.
- *RelInO* – Relaciones incorrectas con error en el orden de las cantidades. Es el número de relaciones incorrectas utilizadas que conectan cantidades mediante un tipo de relación correcto, pero en un orden distinto al que presentan en la lectura mínima asociada a la actuación.
- *NoRel* – Relaciones entre cantidades no relacionadas. Es el número de relaciones que no podemos integrar en la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor ni en ninguna otra lectura teórica del problema.
- *IRelNec* – Índice de relaciones necesarias empleadas. El valor será cero cuando no podamos afirmar la existencia de lectura y se calculará mediante la fórmula $IRelNec = \dfrac{RelNecEmp}{RelNec}$ cuando sí podamos identificarla. Tomará el valor cero cuando el resolutor no emplee ninguna relación correcta necesaria y uno cuando las utilice todas; ya que el número de relaciones necesarias empleadas no puede superar al número de relaciones de la lectura mínima asociada. Esta medida no tiene en cuenta las relaciones no correctas que puedan aparecer en la solución, ni las correctas innecesarias. Únicamente refleja la competencia del resolutor para reducir el problema a un conjunto de relaciones correctas tomando como referente al resolutor ideal.
- *IRelIn* – Índice de relaciones incorrectas empleadas. El valor será cero cuando no podamos afirmar la existencia de lectura y se calculará mediante la fórmula $IRelIn = \dfrac{NoRel + RelInR + RelInO}{RelNec + NoRel + RelInR + RelInO}$ cuando sí podamos identificarla. Como el número de relaciones incorrectas que puede utilizar un resolutor no tiene límite, tendremos que la variable tenderá a uno cuando el número de relaciones incorrectas tienda hacia infinito, y será cero cuando el resolutor no emplee ninguna relación incorrecta. Esta medida no tiene en cuenta las relaciones correctas que puedan aparecer en la solución; únicamente muestra la inclinación del resolutor a producir relaciones incorrectas.
- *IAcRel* – Índice de acierto en las relaciones empleadas. El valor será cero cuando no podamos afirmar la existencia de lectura y se calculará mediante la fórmula $IAcRel = \dfrac{RelNecEmp}{RelNec + NoRel + RelInR + RelInO}$ cuando sí podamos identificarla. Tomará el valor uno cuando el resolutor realice una lectura analítica que coincida con la lectura mínima asociada (por lo tanto, una lectura analítica correcta) y cero cuando la lectura no contenga ninguna relación correcta

[12] Inicialmente consideramos también la variable *RelCoInn* (relaciones correctas innecesarias) que media el número de relaciones utilizadas por el resolutor que no podíamos integrar en la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor; pero sí en otra lectura teórica del problema. La aparición de relaciones de este tipo fue muy rara y decimos no utilizarla en nuestro estudio.

necesaria[13]. Esta medida no permite diferenciar si el resolutor no ha hecho nada o lo ha hecho todo mal. Nos da una idea de la proximidad de la actuación del sujeto real respecto de la que hubiera tenido el sujeto ideal. La coincidencia de este índice e *IRelNec* indica que el resolutor no ha utilizado relaciones incorrectas y en el caso en que ambos sean uno, nos muestran que la lectura de la actuación permitiría alcanzar el resultado.

- *CanNecC* – Cantidades necesarias conocidas. Es el número de cantidades conocidas que tiene la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.
- *CanNecD* – Cantidades necesarias desconocidas. Es el número de cantidades desconocidas que tiene la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.
- *CanNecEmpC* – Cantidades necesarias conocidas utilizadas. Es el número de cantidades conocidas empleadas por el resolutor que aparecen en la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.
- *CanNecEmpD* – Cantidades necesarias desconocidas utilizadas. Es el número de cantidades desconocidas empleadas por el resolutor que aparecen en la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.
- *CanEsp* – Cantidades espurias. Es el número de cantidades utilizadas por el resolutor que no podemos integrar en ninguna lectura teórica, aunque sí que pueden tener referente en el contexto del problema.
- *ICanNecC* – Índice de cantidades necesarias conocidas empleadas. El valor será cero cuando no podamos afirmar la existencia de lectura y se calculará mediante la fórmula $ICanNecC = \dfrac{CanNecEmpC}{CanNecC}$ cuando sí podamos identificarla. Tomará el valor cero cuando el resolutor no emplee ninguna cantidad necesaria conocida y uno cuando las utilice todas. Esta medida no tiene en cuenta si las cantidades reciben una asignación de valor o expresión algebraica correcta, únicamente mide la capacidad del resolutor para identificar cantidades conocidas necesarias para resolver el problema.
- *ICanNecD* – Índice de cantidades necesarias desconocidas empleadas. El valor será cero cuando no podamos afirmar la existencia de lectura y se calculará mediante la fórmula $ICanNecD = \dfrac{CanNecEmpD}{CanNecD}$ cuando sí podamos identificarla. Tomará el valor cero cuando el resolutor no emplee ninguna cantidad necesaria desconocida y uno cuando las utilice todas. Esta medida no tiene en cuenta si las cantidades reciben una asignación de valor o expresión algebraica correcta, únicamente mide la capacidad del resolutor para identificar cantidades desconocidas necesarias para resolver el problema.
- *ICanEsp* – Índice de cantidades espurias. El valor será cero cuando no podamos afirmar la existencia de lectura y se calculará mediante la fórmula $ICanEsp = \dfrac{CanEsp}{CanNecC + CanNecD + CanEsp}$ cuando sí podamos identificarla. Como el número de cantidades espurias que puede utilizar un resolutor no tiene límite, tendremos que la variable tenderá a uno cuando utilice un número infinito de

[13] También tenderá hacia cero cuando el número de relaciones incorrectas tienda hacia infinito.

cantidades espurias y será cero cuando el resolutor no emplee ninguna. Esta medida no tiene en cuenta las cantidades necesarias que puedan aparecer en la solución; únicamente muestra la inclinación del resolutor a emplear cantidades sin lectura asociada.

5.4.1.1.3.5. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 2 del MC

- *Tan* – Asignación de un valor provisional a una cantidad desconocida. Se codificara con 1 cuando el resolutor asigne un número arbitrario a alguna cantidad desconocida después de haber efectuado una lectura algebraica.
- *LetCo* – Letra correcta. Se codificará con un 1 cuando todas las letras utilizadas en la solución estén en correspondencia biunívoca con una cantidad a la que representan.
- *LetPol* – Letra polisémica. Se codificará con un 1 cuando alguna letra represente a más de una cantidad. Para codificarla como tal se atenderá a que el resolutor utilice la letra, con sus distintos referentes, en una misma expresión matemática.

5.4.1.1.3.6. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 3 del MC

Estas variables describen la competencia de la actuación cuando se asignan números o expresiones algebraicas a las cantidades correctas necesarias consideradas en la lectura analítica. El hecho de disponer únicamente de producciones escritas provoca que nuestro método de análisis de las producciones tienda a situar la fuente de las decisiones, correctas o incorrectas, en la lectura analítica. Sólo la asignación a una cantidad de un valor extraño[14] o de un valor o expresión algebraica propio de otra cantidad nos permitirá identificar errores propios del paso 3.

La decisión de mantener estas variables en nuestro estudio responde a la pretensión de construir un método de análisis de las actuaciones de los resolutores sea cual sea la situación en la que se presente: teniendo sólo producciones escritas o cuando vienen acompañadas con diálogos. Somos conscientes de la escasa información que nos proporcionarán, pero decidimos mantenerlas.

- *CanCoC* – Cantidades necesarias conocidas con asignación correcta. Es el número de cantidades necesarias conocidas empleadas que reciben una (o varias) representación (entendida como un número o una expresión algebraica) correcta.
- *CanCoD* – Cantidades necesarias desconocidas con asignación correcta. Es el número de cantidades necesarias desconocidas empleadas que reciben una (o varias) representación (entendida como un número o una expresión algebraica) correcta.
- *AsigArb* – Asignación arbitraria. Es el número de cantidades a las que se les asigna la representación de otra cantidad presente en la lectura mínima asociada o que reciben un valor extraño.[15]

[14] La llamamos extraña en el sentido de que no proviene de la situación planteada en el problema ni de operaciones aritméticas entre cantidades propias del problema.

[15] También consideremos, pero no utilizamos por su escasa aparición, la variable *AsigRec* (asignación recursiva) que medía el número de cantidades que recibían la asignación de una segunda representación empleando para ello una primera representación.

- *IAsigCoC* – Índice de asignaciones correctas a cantidades conocidas empleadas. El valor será cero cuando no se empleen cantidades conocidas necesarias en la actuación del resolutor. En caso contrario se calculará mediante la fórmula $IAsigCoC = \frac{CanCoC}{CanNecEmpC}$. Su valor nos informa de la fracción de cantidades conocidas necesarias que fueron consideradas en la lectura analítica y que recibieron posteriormente una asignación de valor o expresión algebraica correcta.
- *IAsigCoD* – Índice de asignaciones correctas a cantidades desconocidas empleadas. El valor será cero cuando no se empleen cantidades desconocidas necesarias en la actuación del resolutor. En caso contrario se calculará mediante la fórmula $IAsigCoD \quad \frac{CanCoD}{CanNecEmpD}$. Su valor nos informa de la fracción de cantidades desconocidas necesarias que fueron consideradas en la lectura analítica y que recibieron posteriormente una asignación de valor o expresión algebraica correcta.
- *IAsigArb* – Índice de asignaciones arbitrarias. El valor será cero cuando no se empleen cantidades necesarias en la actuación del resolutor. En caso contrario se calculará mediante la fórmula $IAsigArb \quad \frac{AsigArb}{CanNecEmpC + CanNecEmpD}$. Su valor nos informa de la fracción de cantidades necesarias que fueron consideradas en la lectura del problema y que recibieron posteriormente una asignación de valor o expresión arbitraria.

5.4.1.1.3.7. Las variables que dan cuenta de la actuación en el paso 4 del MC

- *IgCo* – Igualdad correcta. Se codificará con un 1 cuando todas las ecuaciones se construyan sobre relaciones correctas y con un 0 en caso contrario.
- *IgIn* – Igualdad correcta. Se codificará con un 1 cuando alguna de las ecuaciones se construya sobre una relación incorrecta y con un 0 en caso contrario.
- *EcCo* – Ecuación correcta. Se codificará con un 1 cuando todas las ecuaciones sean correctas y con un 0 en caso contrario.
- *EcIn* – Ecuación incorrecta. Se codificará con un 1 cuando alguna de las ecuaciones sea incorrecta y con un 0 en caso contrario.

5.4.1.1.3.8. Las variables que dan cuenta de la construcción de nombres para las cantidades[16]

Consideramos que se asigna un nombre a una cantidad cuando se representa el número o expresión algebraica asociado a la cantidad junto a una expresión escrita en lenguaje natural (incluimos el uso de abreviaturas) que incluye alguna referencia al objeto del que la cantidad describe alguna característica o refiere a la magnitud que mide. No consideraremos como nombre la presencia única de la expresión escrita de la unidad junto al valor o expresión algebraica.

[16] Un aspecto no analizado es la idoneidad del nombre construido o la asignación de un mismo nombre a cantidades distintas.

- *NomC* – Número de nombres construidos para cantidades conocidas.
- *NomD* – Número de nombres construidos para cantidades desconocidas.
- *INomC* – Índice de nombres construidos para cantidades conocidas. El valor será cero cuando no se empleen cantidades necesarias conocidas. En caso contrario se calculará mediante la fórmula $INomC = \dfrac{NomC}{CanNecEmpC}$. Tomará el valor cero cuando no se construya ningún nombre y uno cuando se les asigne a todas las cantidades necesarias conocidas empleadas.
- *INomD* – Índice de nombres construidos para cantidades desconocidas. El valor será cero cuando no se empleen cantidades necesarias desconocidas. En caso contrario se calculará mediante la fórmula $INomD = \dfrac{NomD}{CanNecEmpD}$. Tomará el valor cero cuando no se construya ningún nombre y uno cuando se les asigne a todas las cantidades necesarias desconocidas empleadas.

5.4.1.1.3.9. Las variables que dan cuenta de los usos incorrectos de magnitudes y unidades

- *EHom* – Error de homogeneidad. Entendemos por error de homogeneidad: la suma o resta de magnitudes distintas y la multiplicación o división de magnitudes a las que se le asigna otra magnitud sin cumplir las reglas de análisis dimensional. Se codifica 1 cuando aparece algún error y 0 en caso contrario.
- *EUni* – Error de unidades. Se codifica con 1 cuando se opera con cantidades que refieren a una misma magnitud pero usan unidades distintas sin que ello suponga violar el análisis dimensional (pues se codificaría como *EHom*). Un ejemplo sería sumar un precio expresado en euros con otro expresado en céntimos.

5.4.2. PROCEDIMIENTO PARA EL CUESTIONARIO SOBRE EL USO DE LA HOJA DE CÁLCULO

5.4.2.1. La reducción de las producciones a variables

Para describir las actuaciones de los estudiantes al enfrentarse al cuestionario 3 disponemos de un conjunto de variables que nos informarán sobre el éxito o fracaso, el tipo de errores y técnicas utilizadas cuando se construyen fórmulas y series numéricas. Partimos de las producciones de los estudiantes almacenadas en archivos informáticos (libros) formados por 11 hojas de cálculo en las que debían contestar los 11 ítems de forma ordenada.

En los ítems en los que se solicita la construcción de una fórmula, consideramos correcta una producción, cuando se realice el cálculo propuesto en una sola fórmula sin llevar a cabo ningún operación de forma externa. También consideraremos correcta una fórmula que suponga el cálculo de una expresión equivalente a la propuesta por aplicación de propiedades matemáticas, como la asociativa o la distributiva, sin que ello suponga realizar cálculo externos. En los ítems en los que se pide la construcción de secuencias numéricas, daremos por buena una producción, cuando se inicie en el valor que se indica, todos los términos tenga la diferencia adecuada con su anterior y posterior y la longitud de la secuencia sea la solicitada.

Las variables *A* y *C* describirán si se acomete la tarea y se da una respuesta correcta, respectivamente. Los nombres del resto de variables responden a: E, dan cuenta de un error; D, describen alguna característica o técnica que no se asocia con el éxito o el fracaso; F, la variable cuantifica aspectos relacionados con la construcción de fórmulas; S, la variable cuantifica aspectos relacionados con la construcción de secuencias numéricas. En todas 1 significa presencia y 0 ausencia

- *A* – Abordado. Un ítem se considerará abordado (1) cuando se escriba cualquier texto en la hoja de cálculo destinada a la respuesta.
- *C* – Correcto. Se codificará con un 1 cuando se conteste al ítem de forma correcta y 0 cuando no, de acuerdo con los criterios anteriormente expuestos.
- *EF1* – Se codificará con un 1 cuando se omita alguna operación necesaria o se emplee alguna operación incorrecta al construir la fórmula y con un 0 cuando no.
- *EF2* – Se codificará con un 1 cuando se emplee un valor o referencia incorrecto al construir la fórmula.
- *EF3* – Se codificará con un 1 cuando se construya más de una fórmula para contestar al ítem.
- *EF4* – Se codificará con un 1 cuando se realice algún cálculo fuera de la hoja de cálculo.
- *EF5* – Se codificará con un 1 cuando se omita algún paréntesis necesario al construir la fórmula, modificando de esta forma el orden en que se deberían ejecutar las operaciones.
- *EF6* – Se codificará con un 1 cuando se construya una fórmula en la que se modifique el orden de una operación (o más de una) de manera incorrecta mediante el uso de paréntesis.
- *EF7* – Se codificará con un 1 cuando se empleen los valores arbitrarios que ha introducido el sujeto en las celdas que se deberían utilizar como referencia, en lugar de usar las referencias a dichas celdas al construir la fórmula. Por ejemplo, en el ítem 6, "Escribe una fórmula que divida entre 52 el resultado de sumar C4 y B7", codificaríamos con un 1 en el caso que un sujeto introdujera 1 en C4, 2 en B7 (ambos valores arbitrarios) y construyera la fórmula = (1 + 2)/52.
- *DF1* – Se codificará con un 1 cuando se construya una fórmula utilizando paréntesis (innecesarios) que no supongan una modificación de la prioridad de las operaciones.
- *DF2* – Se codificará con un 1 cuando se construya una fórmula que suponga una modificación de las instrucciones, más allá de la conmutatividad, sin que implique una modificación del resultado. Por ejemplo, en el ítem 5, "Usando una única fórmula, calcula 51 por el resultado de restar 63,8 a 184", codificaríamos con un 1 en el caso que un sujeto, aplicando la propiedad distributiva, diese como respuesta = 51*184 – 51*63,8.
- *DF3* – Se codificará con un 1 cuando el sujeto introduzca valores arbitrarios en las celdas que se utilizan como referencia en la construcción de la fórmula. A diferencia de *EF7*, el sujeto construye la fórmula refiriendo a las celdas. Por ejemplo, en el ítem 6, "Escribe una fórmula que divida entre 52 el resultado de sumar C4 y B7", codificaríamos con un 1 en el caso que el sujeto introdujera 1 en C4, 2 en B7 (ambos valores arbitrarios) y construyera la fórmula = (C4 + B7)/52.

- *DF4* – Se codificará con un 1 cuando el sujeto construya una fórmula empleando referencias a las celdas donde sitúa los valores con los que debería construir la fórmula. Por ejemplo, en el ítem 1, "Utilizando una única fórmula, calcula $44\ 71 - 132$", codificaríamos con 1 en el caso que el sujeto introdujera 44 en A1, 71 en A2, 132 en A3 y construyera la fórmula =A1*A2 – A3.
- *ES1* – Se codificará con un 1 cuando se generen series con más o menos elementos de los que debería tener.
- *ES2* – Se codificará con un 1 cuando la serie no empiece por el valor que se indica.
- *ES3* – Se codificará con un 1 cuando la diferencia entre los términos de la serie no sea la que se propone.
- *DS1* – Se codificará con un 1 cuando la serie (correcta o incorrecta) se construya mediante fórmulas que no contengan referencias a celdas. Estas fórmulas estarán formadas únicamente por números y, por lo tanto, sólo podrán generarse una a una sin aprovechar ningún automatismo de la hoja de cálculo.
- *DS2* – Se codificará con un 1 cuando la serie (correcta o incorrecta) se construya mediante fórmulas que contengan referencias a celdas; pero que por su estructura sólo podrán generarse una a una sin aprovechar ningún automatismo de la hoja de cálculo.
- *DS3* – Se codificará con un 1 cuando la serie se genere a partir de los primeros elementos de la secuencia utilizando la característica que implementa la hoja de cálculo de reconocimiento automático de diferencias. El uso de esta técnica implica que el sujeto no utiliza la fórmula de recurrencia $a_n = a_{n-1} + d$.

5.5. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS CUESTIONARIOS PREVIOS

De los cuestionarios sobre resolución de problemas (cuestionarios 1 y 2), detallaremos las cantidades y relaciones empleadas, el uso de letras y la presencia de ecuaciones. Identificaremos la utilización de relaciones correctas e incorrectas y, en ocasiones, se ofrecerán las posibles causas que pueden haber dado origen a una actuación (correcta o incorrecta). Se describen todos los intentos que llevó a cabo el resolutor, no únicamente el que consideramos definitivo. Para hacer el texto más comprensible se indicará entre paréntesis la presencia de una determinada característica escribiendo el nombre de la variable que la cuantifica sin cursivas. Así, la presencia de una letra polisémica la acompañaremos en el texto por "(LetPol)". El análisis cualitativo que presentamos es la base sobre la que se realizó la codificación de las actuaciones mediante las variables descritas en el apartado 5.4.1.1.3.

En la parte cuantitativa, cada estudiante quedó definido por una matriz 7×42 en el cuestionario 1 (7 problemas por 42 variables) y 8×42 (8 problemas por 42 variables) en el cuestionario 2. Las variables consideradas fueron las 42 descritas en el apartado 5.4.1.1.3. La matriz de datos que describía las actuaciones en el cuestionario 1 tenía una dimensión 161×42 (23 estudiantes, 7 problemas y 42 variables) y la del cuestionario 2, 184×42 (23 estudiantes, 8 problemas y 42 variables). El tamaño de las matrices nos impide ofrecerlas en el cuerpo de la tesis y remitimos al anexo I para su consulta.

Mostraremos una descripción cuantitativa de la actuación de cada estudiante en el cuestionario 3 mediante una matriz de dimensión 23×19 (23 estudiantes por las 19 variables descritas en el apartado 5.4.2.1.) que recoge la suma por estudiante de los valores que toman las variables en cada uno de los 11 ítems. El análisis cualitativo de las producciones y la matriz de datos en la que se codifican las actuaciones en el cuestionario 3 se relegan al anexo I.

5.5.1. EL CUESTIONARIO 1

Alumno 1

Las naranjas

Calcula "15×12 = 180 → en dos sacos", "180:2 = 90", "90 + 30 = 120" y concluye "1er Saco → 120" y "2º Saco → 90". Asigna el resultado de "180:2 = 90" a *Sp*, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S·Sp$ (NoRel[17]) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

Calcula "2×60 = 120 m/min", "120×60 = 7.200 m/h" y "7.200 m = 7 km y 200 m". Reduce el problema a las relaciones $Mm = Tsm·Ms$, $Mh = Tmh·Mm$ y $Mh = Emk·Kh$ (todas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula "100 + 15 = 115 = 1,15" y "1,15×1.440 = 1656 €". Añade el 15% al 100% para obtener el porcentaje que corresponde al precio inicial sin atender a que el dato del 15% supone que el 100% debe referir al precio inicial. Asigna el valor de la cantidad *Pi* a la cantidad *Pf* y lo utiliza para calcular *Pi*. Reduce el problema a las relaciones $Pi = Pr + Pf$ (RelNecEmp) e $I = Pi·F$ (NoRel).

La inversión

Obtiene "44.000 → total €" de sumar 28000 a 16000 y calcula "44.000:2 = $\boxed{22.000\ €}$". Determina el total de dinero invertido y obtiene la ganancia repartiendo el dinero invertido en partes iguales. Reduce el problema a las relaciones $It = Ih + Ip$ (RelNecEmp) e $It = Gp·\alpha$ (NoRel, siendo α el número de personas que invierten dinero).

Las cortinas

Calcula "564 – 528 = 36 € = 6 metros", "528:36 = $\boxed{14,6\ m}$ [abajo] $\boxed{\text{se compraron}}$", "36 €:6 m = 6 €". Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm·U$ (ambas RelNecEmp) y $P = M·Phm$ (NoRel). El uso de la relación $P = M·Phm$ implica que se le asigne la magnitud longitud por precio a la cantidad *P* en lugar de precio (EHom).

El salario

Considera inversa la relación entre *Sa-Sb* y *Da-Db* y directa la relación entre *Ha-Hb* y *Sa-Sb* (ver Figura 7). Utiliza la coincidencia en el tipo de incremento que se produce entre los valores de la situación antigua (A) y nueva (B) como criterio para determinar

[17] Nuestra intención en este caso es explicar cómo clasificamos la relación y no referirnos a la variable. Por esta razón no la escribimos en cursiva.

el tipo de proporcionalidad. Así, concluye que la relación entre *Da-Db* y *Sa-Sb* es inversa debido a que el número de días disminuye al pasar de 12 a 10 y el sueldo aumenta (aunque no aclara la razón). Plantea la ecuación "$\frac{4}{6}\cdot\frac{10}{12}=\frac{144}{x}$" (LetCo/EcIn), la resuelve correctamente y obtiene "x = 259,2". Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb}=\frac{Ha}{Hb}\cdot\frac{Db}{Da}$ (RelInO).

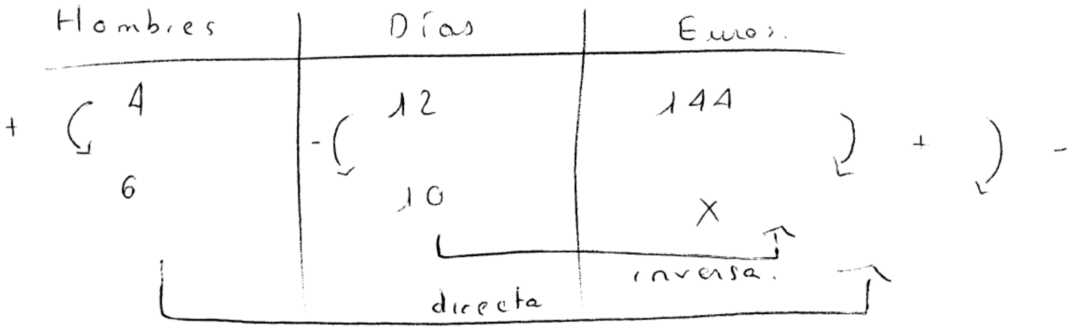


Figura 7.

El perfume

Calcula "70% = 0,70 → 0,70×60 = $\boxed{42\ g}$". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación *Ge* = *Gt·Pe* (RelNecEmp).

Alumna 2

Las naranjas

Calcula "15·12 = 180", "180 – 30 = 150", "150:2 = 75" y concluye "R: en un saco 75 naranjas i [sic] en el otro 105". Reduce el problema a las relaciones *Sg* = *Sp* + *Mgp*, *N* = *Nqe* + *Mgp* y *Nqe* = *Sp·S* (todas RelNecEmp).

El tren

Escribe "1 km = 1.000 m", "1 h = 3600 seg"; calcula "3·600×2 = 7.200", "7.200:1000 = 7,2" y concluye "R: avanza 7,2 km". Reduce el problema a las relaciones *Mh* = *Tsh·Ms* y *Mh* = *Emk·Kh* (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula "0,15·1440 = 2.16 [sic]", "1440 + 216 = 1656" y concluye "R: 1656 €". Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en "1440 + 216 = 1656" y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones *R* = *Pr·F* (NoRel) e *I* = *F* + *R* (RelNecEmp).

La inversión

Organiza los datos del problema mediante un esquema de regla de tres (ver Figura 8), calcula "$\frac{28000\cdot 7000}{16.000}=12.250$" y concluye "R: 12.250 €". Utiliza la relación $\frac{Ip}{Ih}=\frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

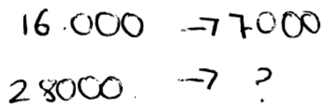


Figura 8.

Las cortinas

Escribe “528 → *x*” y “564 → *x* + 6”; plantea la ecuación (EcIn) “$528 \cdot x + 6 = 564$” (donde omite poner *x* + 6 entre paréntesis); la transforma en “$x = 564 - 6 - 528$” (error de transposición de términos) y obtiene “$x = 30$”. Calcula “528:30 = 17,6” y concluye “R = Cada metro vale 30 € y compró 17,6 m”. Con “528 → *x*” y “564 → *x* + 6” indica que se han comprado *x* metros de tela y nos han costado 528 y que hemos comprado *x* + 6 metros de tela y nos han costado 564; lo que implica asignar la letra *x* a la cantidad *M* y la expresión *x* + 6 a la cantidad *Mh*. Sin embargo, al dar el resultado del problema, supone que la letra *x* refiere a la cantidad *U* (LetPol). Utiliza las relaciones $P = M \cdot U$, $Mh = M + Mhm$ (ambas RelNecEmp) y $Ph = Mh \cdot P$ (NoRel). La relación $Ph = Mh \cdot P$ implica que la cantidad *Ph* refiera a la magnitud longitud multiplicado por precio en lugar de hacerlo a la magnitud precio (EHom).

El salario

Inicialmente considera el mismo número de días en las dos situaciones descritas en el enunciado (ver Figura 9) y escribe “$\frac{4}{6} \times \frac{12}{12} = \frac{144}{\quad}$”. Representa a la incógnita con un interrogante en la tabla y con un espacio en blanco en la ecuación lo que interpretamos como una reticencia a emplear el SMSalg. Reduce el problema a la relación de proporcionalidad compuesta $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelNecEmp).

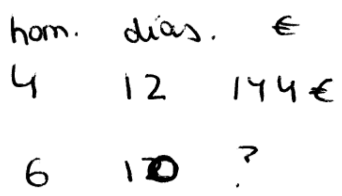


Figura 9.

Tacha la solución anterior, calcula “$\frac{144}{4} = 36$”, “$6 \cdot 36 = 216$” y “R = 216”, lo que pone de manifiesto que sigue considerando el mismo número de días en las dos situaciones. Por lo tanto considera que el valor de *Db* es 12 y reduce el problema a las relaciones $Sha = U \cdot Da$, $Sa = Sha \cdot Ha$, $Shb = U \cdot Db$ y $Sb = Shb \cdot Hb$ (todas RelNecEmp); aunque no se hagan explícitas las relaciones $Sha = U \cdot Da$ y $Shb = U \cdot Db$ como consecuencia de la coincidencia de valores de *Da* y *Db* y, como consecuencia, de *Sha* y *Shb*.

Parece que se da cuenta del error después de realizar los dos intentos de solución, pues tacha en la tabla (ver Figura 9) el valor 12 incorrecto y lo sustituye por un 10; pero no modifica la solución que da por buena.

El perfume

Calcula “70% de 60 = 0,7·60 = 42” y concluye “R: 42 gramos”. Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación *Ge* = *Gt·Pe* (RelNecEmp).

Alumno 3

Las naranjas

Calcula “15·12 = 180”, “180 naranjas ÷ 2 = 90”, obtiene 120 de sumar 90 más 30, 60 de restar 30 a 90 y concluye “R: Un saco con 120 naranjas y un saco con 60 naranjas”. Asigna el valor de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y reduce el problema a las relaciones *N* = *Nm·S*, *Sg* = *Nm* + *Em* y *Nm* = *Sp* + *Em* (las tres RelNecEmp).

El tren

Calcula “2·60 = 120 metros en un minuto” y “2·3600 = 7200 metros en una hora = 120 km”. Utiliza la relación *Mm* = *Tsm·Ms* (RelCoInn) que, siendo correcta, es innecesaria en la solución. Asigna de manera incorrecta el valor (60) de la cantidad *Tsm* o *Tmh* a la cantidad *Emk* y utiliza las relaciones *Mh* = *Tsh·Ms* y *Mh* = *Emk·Kh* (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula “$\frac{15}{100}$ = 0,15 → 0,15·1440 = 216”, obtiene 1656 de sumar 1440 más 216 y concluye “R: Antes valía 1656 €”. Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en la segunda operación y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones *R* = *Pr·F* (NoRel) e *I* = *F* + *R* (RelNecEmp).

La inversión

Escribe “Pedro → 28.000”, “Hugo → 16.000” y “44000” que responde al uso de la relación *It* = *Ip* + *Ih* (RelNecEmp).

Las cortinas

Escribe “x^c = 528” y “x^c + 6 = 564 €”; calcula “*x* = 564 – 6” y obtiene “*x* = 558”. Podemos interpretar “x^c + 6 = 564 €” como una representación de “Si se hubiesen comprado 6 metros más [x^c + 6] se hubiera pagado [=] 564 € [564 €]”. El estudiante convierte en ecuación (*x* + 6 = 564; EcIn/LetCo) lo que en principio era una reescritura idiosincrásica de un fragmento del enunciado (“x^c + 6 = 564 €”). Reduce el problema a las relaciones *Mh* = *M* + *Mhm* (RelNecEmp) y *Mh* = *Ph* (NoRel), que supone iguales cantidades que refieren a magnitudes distintas (EHom, pues *Mh* refiere a longitud y *Ph*, a dinero).

El salario

Considera un relación de proporcionalidad inversa entre *Ha-Hb* (“+”) y *Sa-Sb* (“–”) y una directa entre *Ha-Hb* (“+”) y *Da-Db* (“+”) (ver Figura 10). Escribe “$\frac{6}{4}$ + $\frac{12}{10}$ =”, donde observamos que plantea un esquema de resolución de la proporcionalidad compuesta, pero suma en lugar de multiplicar. Concluimos, de acuerdo con lo expresado en la Figura 10 y con el cálculo que empieza a plantear, que reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Hb}{Ha} + \frac{Da}{Db}$ (RelInR).

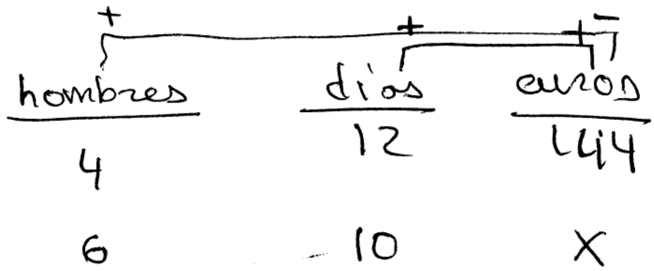


Figura 10.

El perfume

Plantea la ecuación "x + 60 = 0,7" (LetCo/EcIn), la transforma en "60 – 0,7 = x" (error de transposición de términos) y concluye "x = $\boxed{59{,}3}$ Gramos". La ecuación refleja una traducción sintáctica del enunciado: "¿Cuántos gramos de esencia de perfume [x] deben agregarse [+] a 60 gramos de alcohol [60] para tener [=] una loción con el 70% de perfume [0,7]?". Reduce el problema a la relación $Pe = Ge + Gh$ (NoRel) en la que se conectan aditivamente cantidades que refieren a una magnitud extensiva ($Ge + Gh$) con otra que lo hace a una magnitud intensiva (Pe) (EHom).

Alumna 4

Las naranjas

Calcula "15×12 = 180", "180:2 = 90", "90 + 30 = 120" y concluye "En total son: [abajo] 1 saco són [sic] 90 naranjas [abajo] 2 saco són [sic] 120 naranjas". Asigna el resultado de "180:2 = 90" a Sp, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S{\cdot}Sp$ (NoRel) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

Escribe "60 segundos = 1 hora"; calcula "60×2 =120 metros", "120:10 = 12 kilómetros", "60:12 = 5 kilómetros"; y concluye "En total son: [abajo] 5 kilómetros que avanza cada hora". Asigna incorrectamente el valor 10 a la cantidad Emk (el factor de conversión correcto es 1000) y reduce el problema a las relaciones $Mm = Tsm{\cdot}Ms$, $Mm = Emk{\cdot}Km$ (ambas RelNecEmp) y $Tmh = Kh{\cdot}Km$ (RelInO/EHom, pues iguala Tmh, que refiere a la magnitud tiempo, al producto de Kh por Km, que lo hace a espacio al cuadrado).

El ordenador

Calcula "15×10 = 150 → 1,5", "1440 + 1,5 = 1441.5 €" y concluye "En total són [sic]: 1441.5 sin descuento". En "15×10 = 150 → 1,5" comete un error al pasar el porcentaje a su expresión decimal. Considera que el valor que ha calculado para la cantidad Pr corresponde a la cantidad R y reduce el problema a la relación $I = F + R$ (RelNecEmp) .

La inversión

Obtiene 44.000 de sumar "Pedro → 28.000" a "Hugo → 16.000" y calcula "Pedro → 28.000·22 = $\frac{44.000}{2} = 22$" y "Hugo → 16.000·22 =". Podemos interpretar el cálculo "$\frac{44.000}{2} = 22$" (error en operación aritmética, pues 44000 dividido entre 2 da 22000) como la justificación del cálculo mental que le había llevado a obtener el valor 22 y sirve para indicarnos que la estudiante ha sustituido la situación de reparto proporcional por otra de reparto equitativo. Reduce el problema a las relaciones $It = Ih + Ip$ (RelNecEmp) y $It = Gp \cdot \alpha$ (NoRel, siendo α el número de personas que invierten dinero).

Las cortinas

No abordado.

El salario

No abordado.

El perfume

No abordado.

Alumno 5

Las naranjas

Calcula "15·12 = 180 naranjas", "180÷2 = 90", "90 + 30 = 120", "90 – 30 = 60" y concluye "En un saco hay 120 y en el otro 60 naranjas". Asigna el valor de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y reduce el problema a las relaciones $N = Nm \cdot S$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$ (las tres RelNecEmp).

Tacha la solución anterior; calcula "15·12 = 180", "180÷2 = 90", "90 + 30 = 120" y concluye "En un saco hay 120 naranjas y en el otro 90". Asigna el resultado de "180÷2 = 90" a *Sp*, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S \cdot Sp$ (NoRel) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

Calcula "3.600×2 = 7200 y concluye "Avanzara [sic] 7 km y 200m", sin expresar la respuesta en kilómetros. Utiliza la relaciones $Mh = Tsh \cdot Ms$ y $Mh = Emk \cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula "1440·15 = $\frac{21600}{100}$ = 216", "1440 + 216 =1656" y concluye "El precio es de 1656 €". Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en "1440 + 216 = 1656" y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr \cdot F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Obtiene 12000 de restar 16.000 a 28.000, calcula “7000 + 1200 = 19000” y concluye “Pedro gana 19000€”. Supone que lo que invierte de más Pedro, será lo que gana de más. Reduce el problema a las relaciones $Ip = Ih + Iph$ (RelNecEmp) y $Gp = Iph + Gh$ (NoRel).

Las cortinas

Escribe la expresión algebraica “$\frac{x}{528} \cdot \frac{6}{564}$” (LetCo); la transforma en “$\frac{6}{297.792}$”, haciendo desaparecer la x del numerador (error en operación algebraica), y da como resultado “49.632”, lo que supone dividir denominador entre numerador (error en operación aritmética). Parece que pretende reducir el problema a una relación de proporcionalidad compuesta en la que la expresión “$\frac{x}{528} \cdot \frac{6}{564}$” respondería a dos de las tres cantidades que la deberían integrar. Al no poder encontrar la tercera cantidad, el estudiante decide ejecutar las operaciones indicadas y para ello elimina la letra con la que no puede operar. En definitiva, el estudiante reduce el problema a la relación $\alpha = \frac{M}{P} \cdot \frac{Mhm}{Ph}$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Tacha la solución anterior; obtiene 36 de restar 528 a 564; calcula “36÷6 = 6 €”, “528÷6 = 88”; y concluye “Cada metro vale 6 €” y “Compraron 88 m de tela”. Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm \cdot U$ y $P = M \cdot U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Recoge la información del problema en una tabla (ver Figura 11) y calcula de manera incorrecta “$\frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} = \frac{48}{60}$” (error en operación aritmética, pues opera como si se tratara de una división de fracciones). Considerar inversa la relación de proporcionalidad entre *Sa-Sb* y *Da-Db* y directa la relación entre *Ha-Hb* y *Sa-Sb*. Plantea la ecuación “$\frac{48}{60} = \frac{144}{x}$” (LetCo/EcIn), obtiene un resultado correcto, que es fruto de la concatenación de dos errores, y concluye “Ganaron 180 €”. Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Db}{Da}$ (RelInO).

Hombres	Días	€
4	12	144
6	10	x

Figura 11.

El perfume

Escribe "60 de 70%", calcula "60×70 = $\frac{4200}{100}$ = 42" y concluye "Hay que añadir 42 gramos". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt{\cdot}Pe$ (RelNecEmp).

Alumna 6

Las naranjas

Plantea la ecuación "180 = x + (x + 30)" (EcCo), en la que asigna la letra x a la cantidad *Sb* (LetCo); la resuelve correctamente y concluye "En el primer saco corresponden 75 naranjas y en el segundo 105". Utiliza las relaciones $N = Sg + Sp$ y $Sg = Mgp + Sp$ (ambas RelNecEmp).

El tren

Plantea un esquema de regla de tres (ver Figura 12); calcula "$\frac{60 \cdot 2}{1}$ = 120" y "120·60 = 7200" y concluye "S = 7,2 Km avanza cada hora". Reduce el problema a las relaciones $Mh = Tsh{\cdot}Ms$ y $Mh = Emk{\cdot}Kh$ (ambas RelNecEmp).

1 s —> 2m
60 s —> x m

Figura 12.

El ordenador

Plantea la ecuación "1440 = x – 15% de x" (EcCo); intenta calcula el valor de "15% de x" y abandona la solución. Así, escribe "15% de x = $\frac{15 \cdot x}{100}$"; supone "$\frac{15 \cdot x}{100}$ = 1"; lo transforma en "x = 15·100" (error de transposición de términos) y obtiene "x = 1500". Sustituye 1500 en "15% de x" y escribe "15% de 1500". Asigna la letra x a la cantidad *I* (LetCo) y reduce el problema a las relaciones $I = F + R$ y $R = Pr{\cdot}I$ (ambas RelNecEmp).

Tacha la solución anterior y plantea "75% de x = 1440" (error en operación aritmética, pues el 75% proviene de 100% – 15% cuyo resultado correcto es 85%) que le lleva a considerar un esquema de regla de tres (ver Figura 13). Calcula "1440·100 = 144000", "144000/75 = 1920" y concluye "R = E [sic] precio del ordenador sin descuento es de 1920 €". Reduce el problema a las relaciones $\frac{Ni}{Nf} = \frac{I}{F}$ y $Ni = Nr + Nf$ (ambas RelNecEmp).

75 = 1440
100 = x

Figura 13.

La inversión

Obtiene "TOTAL → 44000 €" de sumar "Pedro → 28000 €" a "Hugo → 16000" y escribe "100 = 44000", en lo que interpretamos como una representación de un esquema de regla de tres que no llega a completar. A continuación, expresa la información relativa a las ganancias (ver Figura 14) y plantea "$y = x + 7000$" (LetCo/EcCo). Reduce el problema a las relaciones $It = Ih + Ip$ y $Gt = Gh + Gp$ (ambas RelNecEmp).

Ganancias → Pedro x
Hugo 7000€
Total y

Figura 14.

Abandona la solución anterior, calcula "7000/16000=0,4375", "28000·0,4375 = 12250" y concluye "R = Pedro gana 12.250 €". Reduce el problema a la relación $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

Las cortinas

Obtiene 36 de restar 528 a 564; calcula "36/6 = 6" y "528/6 = 88"; y concluye "S = Se compraron 88 metros y se pagó a 6 € el metro". Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm{\cdot}U$ y $P = M{\cdot}U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Resumen la información del problema como se muestra en la Figura 15; materializa la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelNecEmp) en la ecuación "$\frac{4}{6} \cdot \frac{12}{10} = \frac{144}{x}$ (LetCo/EcCo)"; la resuelve correctamente y concluye "R = Ganarán 180 €".

Hombres	Días	€
4	12	144
6	10	x

Figura 15.

El perfume

Plantea un esquema de regla de tres (ver Figura 16), calcula "70·60 = 4200", "4200/300 = 140" y concluye "R = Deben agregarse 140 g de perfume". Reduce el problema a las relaciones $P = Pe + Ph$ y $\frac{Pe}{Ph} = \frac{Ge}{Gh}$ (ambas RelNecEmp).

60 gramos de alcohol = 30% del contenido de la botella
x gramos de esencia = 70% del contenido de la botella
de perfume

Figura 16.

Alumno 7

Las naranjas

Obtiene 90 de dividir 180 entre 2, 75 de restar 15 a 90 y 105 de sumar 90 y 15. Concluye "En un saco hay 75 naranjas i [sic] en otro 105". Reduce el problema a las relaciones $N = Nm \cdot S$, $Mgp = Em \cdot S$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$ (todas RelNecEmp).

El tren

Se limita a multiplicar 2 por 60 y obtiene como resultado "120 m". Utiliza la relación correcta $Mm = Tsm \cdot Ms$ (RelNecEmp).

El ordenador

Obtiene 96 de dividir 1440 entre 15 y lo tacha. Utiliza la relación $F = Nr \cdot \alpha$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

La inversión

Escribe "16000" y lo tacha posteriormente.

Las cortinas

Obtiene 36 de restar 528 a 564; 6 de dividir 36 entre 6; 88 de dividir 528 entre 6; y concluye "Compraron 88 m a 6 € cada uno". Utiliza las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm \cdot U$ y $P = M \cdot U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Expresa (ver Figura 17) que el número de hombres aumenta entre la primera y la segunda situación, mientras que el de días disminuye; pero no se observa si relaciona este hecho con el tipo de relación de proporcionalidad existente entre *Ha-Hb* y *Sa-Sb* y entre *Da-Db* y *Sa-Sb*. Abandona la solución y tacha la tabla.

	hombres	días	euros.
+	4	12	144
	6	10	x

Figura 17.

El perfume

Plantea un esquema de regla de tres (ver Figura 18); escribe “60 g = 30 → 20 g = 10%”; obtiene “140 g” de multiplicar 20 por 7 y “70%” de multiplicar 10 por 7; y da como resultado “x = 140”. El estudiante deduce lo que le corresponde al 10% a partir de lo que les corresponde al 30% y obtiene lo que le corresponde al 70% multiplicando por 7. Reduce el problema a las relaciones $P = Pe + Ph$ y $\frac{Pe}{Ph} = \frac{Ge}{Gh}$ (ambas RelNecEmp).

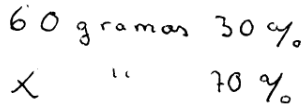


Figura 18.

Alumno 8

Las naranjas

Calcula “180:2 = 90”, obtiene 75 de restar 15 a 90 y 105 de sumar 90 y 15. Concluye “R: 1º saco = 75 [abajo] 2º saco = 105”. Utiliza las relaciones $N = Nm{\cdot}S$, $Mgp = Em{\cdot}S$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$ (todas RelNecEmp).

El tren

Calcula “2 metros/s = 0,002 km/s”, “1 hora = 3600 segundos”, “3600×0,002 = 7,2 km/h” y concluye “R: 7,2 Km/h”. Utiliza las relaciones $Ms = Emk{\cdot}Ks$ y $Kh = Tsh{\cdot}Ks$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula “15% de 1440 = 15:100 = 0,15” y “0,15·1440 = 216”; obtiene 1656 de sumar 1440 a 216 y concluye “R: 1656 € costó el ordenador”. Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en la última operación y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr{\cdot}F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Supone un esquema de regla de tres (ver Figura 19); calcula “28000·7000 = 196.000.000”, “196.000.000:16000 = 12.250” y concluye “R = Hugo gana 7000 € [abajo] Pedro gana 12.250 €”. Reduce el problema a la relación $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

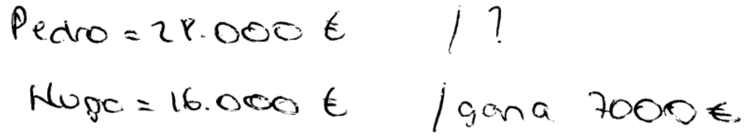


Figura 19.

Las cortinas

Escribe “6 metros = 36”, “1 metro = 6”; calcula “528:6 = 88 metros” y concluye “R: 1 metro cuesta 6 €. Se compraron 88 metros de tela”. Aunque omite la mayoría de las cálculos, concluimos que utiliza las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm{\cdot}U$ y $P = M{\cdot}U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Indica (ver Figura 20) que existe una relación de proporcionalidad inversa entre *Ha-Hb* y *Sa-Sb* y una directa entre *Da-Db* y *Sa-Sb*. Plantea la ecuación "$\frac{6}{4}\cdot\frac{12}{10}=\frac{144}{x}$" (LetCo/EcIn); la transforma en "$\frac{60}{48}=\frac{144}{x}$" (error en operación aritmética, pues opera como si se tratara de una división de fracciones) y ésta en "$\frac{6912}{60}$ = 115,2"; y concluye "R: 6 hombres ganaran [sic] en 10 días 115,2 €". Durante la solución considera que la letra x representa al dinero que le corresponde a cada trabajador en la nueva situación, pero, al interpretar el resultado, la identifica con el sueldo que ganan los seis hombres en la nueva situación. Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb}=\frac{Hb}{Ha}\cdot\frac{Da}{Db}$ (RelInO).

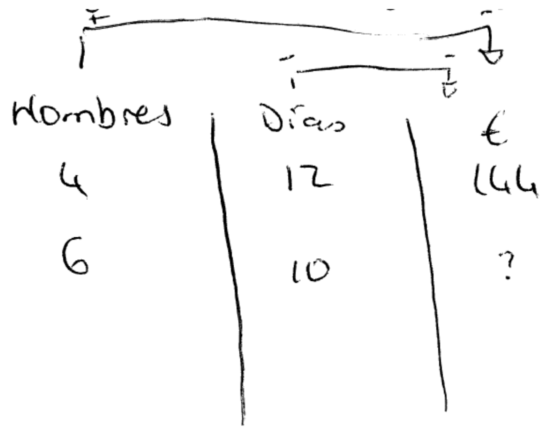


Figura 20.

El perfume

Calcula "70% de 60 = $\frac{70}{100}$= 0,7", "0,7·60 = 42 g" y concluye "R: 42 gramos de esencia de perfume". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt{\cdot}Pe$ (RelNecEmp).

Alumno 9

Las naranjas

Calcula "15·12 = 180 total naranjas", "180:2 = 90 mitad naranjas por saco", "90 – 30 = 60", "90 + 30 = 120 y concluye "R = En uno habrá 60 y en el otro habrá 120 naranjas". Asigna el valor de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y reduce el problema a las relaciones $N = Nm{\cdot}S$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$ (las tres RelNecEmp).

El tren

Escribe "1 hora → 216000 seg", lo que supone asignar una valor incorrecto a *Tsh*, y "1 segundo avanza 2 metros"; calcula "216000·2 = 432000 metros"; y concluye "R =

432000 metros → 432 kilometros [sic]”. Utiliza las relaciones $Mh = Tsh{\cdot}Ms$ y $Mh = Emk{\cdot}Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula “15% = $\frac{15}{100}$ = 0,15”, “1440·0,15 = 216 €”, “1440 + 216 = 1656 €” y concluye “R = Tendria [sic] que pagar 1656 € si no me hubiera hecho el descuento de 15 %”. Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en “1440 + 216 = 1656” y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr{\cdot}F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Supone un esquema de regla de tres (ver Figura 21); calcula “28000·7000 = 196.000.000”, “196.000.000:16000 = 12.250 €” y concluye “R = Pedro ha ganado 12.250 €”. Reduce el problema a la relación $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

Pedro → 28000 → ?
Hugo → 16000 → 7000 €

Figura 21.

Las cortinas

Escribe “Cantidad → x”, “Comprado 6 metros más → $6x$”; plantea la ecuación “$x + 6x + 528 = 564$” (LetCo/EcIn) y obtiene “x = 5,14 metros”. Partiendo de que en “Cantidad → x” asigna la letra x a la cantidad M, concluimos que en “Comprado 6 metros más → $6x$” hace corresponder a Mh la expresión $6x$ considerando multiplicativa la acción de añadir. Reduce el problema a las relaciones las relaciones $Mh = Mhm{\cdot}M$ (RelInR), $Ph = Phm + P$ (RelNecEmp) y $Phm = M + Mh$ (NoRel). La relación $Phm = M + Mh$ liga, mediante una relación aditiva, cantidades cuyo resultado refiere a magnitudes distintas (Phm refiere a dinero y $M + Mh$ a longitud); mientras que en la relación $Mh = Mhm{\cdot}M$ se asigna incorrectamente a la cantidad Mh una magnitud del tipo longitud al cuadrado (EHom, en ambos casos).

El salario

Calcula “144:12 = 12”, “6 hombres = 12·10 = 120” y concluye “R = ganarían 120 € en 10 días”. Considera que la cantidad Sdb toma el valor de la cantidad Sda y reduce el problema a las relaciones $Sa = Sda{\cdot}Da$ y $Sb = Sdb{\cdot}Db$ (ambas RelNecEmp).

El perfume

Calcula “7:100 = 0,07” (errata, pues calcula la expresión decimal del 7% en lugar de calcular la del 70%), “0,07·60 = 4,2 gramos”; “60 + 4,2 = 64,2 g” y “R = Se le añade 4,2 gramos para obtener el 70% de loción”. Utiliza las relaciones $Ge = Pe{\cdot}Gh$ (NoRel) y $Gt = Gh + Ge$ (RelNecEmp, aunque no la gasta para llegar a la solución).

Alumna 10

Las naranjas

Obtiene “180n” de multiplicar 15 por 12, “210n” de sumar 180 más 30, 105 de dividir 210 entre 2 y concluye “R = 105 naranjas”. Usa las relaciones $Nad = Mgp + N$ y $Nad = Sg \cdot S$ (ambas RelNecEmp); pero no utiliza $N = Sg + Sp$ o $Sg = Mgp + Sp$ y por eso no ofrece un resultado para Sp.

El tren

Obtiene “7200 m” de multiplicar 3600 por 2 y concluye “R = 7200 metros = 7, 2 km [abajo] (7200:1000 = 7.2)”. Tras la lectura del enunciado reduce el problema a las relaciones $Mh = Tsh \cdot Ms$ y $Mh = Emk \cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula “15% de 1440 = $\frac{15}{100} \times 1440 = 0{,}15 \times 1440 = 216$ €”, obtiene 1656 de sumar 1440 a 216 y concluye “R = 1656 €”. Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en la última operación y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr \cdot F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Obtiene “9000 €” de restar 7000 a 16000 y concluye “R = Pedro ganó 9.000 €”. Reduce el problema a la relación $Ih = Gp + Gh$ (NoRel).

Las cortinas

Obtiene “94 € 1 metro” de dividir 564 entre 6, “5,617...” de dividir 528 entre 94 y concluye “R = 94 € por metro [abajo] 5,617... metros”. Supone que 6 metros de tela cuestan 564 €, con lo que asigna el valor de la cantidad Mhm a la cantidad Mh, y utiliza las relaciones $Ph = U \cdot Mh$ y $P = M \cdot U$ (ambas RelNecEmp).

El salario

Obtiene “12 € 1 dia [sic]” de dividir 144 entre 12; “120 € 10 dias [sic]” de multiplicar 12 por 10; “36 € 1 hombre” de dividir 144 entre 4; “216 € 6 hombres” de multiplicar 36 por 6; “336 €” de sumar 216 a 120; y concluye “R = 336 €”. Calcula lo que ganarían 4 hombres en 10 días, lo que ganarían 6 hombres en 12 días y suma ambas cantidades para obtener incorrectamente lo que ganarían 6 hombres en 10 días. Genera cantidades que pertenecerían a una situación mixta entre la nueva y la antigua y al sumarlas considera que únicamente quedan los referentes a la nueva situación. Reduce el problema a las relaciones $Sa = Da \cdot Sda$ (RelNecEmp), $Sa = Ha \cdot Sha$ (RelCoInn), $\alpha = Sda \cdot Db$, $\beta = Sha \cdot Hb$ y $Sb = \alpha + \beta$ (la tres NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema).

El perfume

Calcula “70% de 60 = $\frac{70}{100}\times 60 = 0{,}7\cdot 60 = 42$ gramos” y concluye “R = 42 gramos”. Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt\cdot Pe$ (RelNecEmp).

Alumna 11

Las naranjas

Calcula “15·12 = 180 + 30 = 210:2 = 105”. Usa las relaciones $Nad = Mgp + N$ y $Nad = Sg\cdot S$ (ambas RelNecEmp); pero no utiliza $N = Sg + Sp$ o $Sg = Mgp + Sp$ y por eso no obtiene un resultado para *Sp*.

El tren

Calcula “3600×2 = 7200 m” y “7200:1000 = 7,2 km”. Reduce el problema a las relaciones $Mh = Tsh\cdot Ms$ y $Mh = Emk\cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula “15% de 1440 = $\frac{15}{100}$ de 1440 = 1440×15 = 21,6:10 = 2,16 €” (errata y error en operación aritmética). Supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde al precio inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pr\cdot F$ (NoRel).

La inversión

Calcula “16000 – 7000 = 9000”, obtiene 44000 de sumar 28000 a 16000 y concluye “44000 – 9000 = 35000 ganó Pedro”. Reduce el problema a las relaciones $It = Ih + Ip$ (RelNecEmp), $Ih = \alpha + Gh$ e $It = Gp + \alpha$ (ambas NoRel, siendo α la diferencia entre el dinero invertido y el beneficio obtenido por Hugo).

Las cortinas

Calcula “564:6 = 94” y concluye “Se compro [sic] 6 metros”. Supone que 6 metros de tela cuestan 564 €, con lo que asigna el valor de la cantidad *Mhm* a la cantidad *Mh*, y reduce el problema a la relación $Ph = Mh\cdot U$ (RelNecEmp).

El salario

Representa la cantidad *Sb* mediante la letra *x* y le asigna el valor 2 (ver Figura 22). Calcula “144:2 = 72 € en los 10 dias [sic] ganaran [sic] 6 hombres” que materializa la relación $Sa = Sb\cdot Sb^*$ (NoRel), lo que implica asignar a la cantidad *Sb* un segundo valor. El uso de $Sa = Sb\cdot Sb$ supone referir la cantidad *Sa* a la magnitud dinero al cuadrado en lugar de hacerlo a dinero (EHom).

hombres	€	dias
4	144	12
6	X=2	10

Figura 22.

El perfume

Calcula "70% de 60 = 60×70 = 4200:100 = 42". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación *Ge* = *Gt·Pe* (RelNecEmp).

Alumno 12

Las naranjas

Calcula "1r saco: $\frac{15\cdot 12}{2}-15=75$ naranjas" y "2n saco: $\frac{15\cdot 12}{2}+15=105$ naranjas". Reduce el problema las relaciones *N* = *Nm·S*, *Mgp* = *Em·S*, *Sg* = *Nm* + *Em* y *Nm* = *Sp* + *Em* (todas RelNecEmp).

El tren

Calcula "$\frac{7200\ \text{m}}{1000}$ = 7,2 Km/h" lo que implica considerar las relaciones *Mh* = *Tsh·Ms* y *Mh* = *Emk·Kh* (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula "$\frac{1440}{0{,}85}$ = 1.694,12 € (aproximado)". Utiliza las relaciones *Pi* = *Pr* + *Pf* y *F* = *Pf·I* (ambas RelNecEmp).

La inversión

Calcula "Pedro = invierte → $\frac{28.000}{44.000}=\frac{7}{11}$ del total", "Hugo = invierte → $\frac{16.000}{44.000}=\frac{4}{11}$ del total" y concluye "Pedro gana = $\frac{7.000}{4}\cdot 7$ = 12.250 €". Reduce el problema a la relaciones $\frac{Ip}{Ih}=\frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp) e *It* = *Ih* + *Ip* (RelCoInn)

Las cortinas

Calcula "$\frac{564-528}{6}$ = 6 €/metro" y "$\frac{528}{6}$ = 88 m de tela". Reduce el problema a las relaciones *Ph* = *Phm* + *P*, *Phm* = *Mhm·U* y *P* = *M·U* (todas RelNecEmp).

El salario

Representa la información del problema (ver Figura 23); plantea la ecuación "$\frac{6}{4}\cdot\frac{12}{10}=\frac{72}{40}=\frac{144}{x}$" (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente. Supone una relación de proporcionalidad inversa entre las cantidades *Ha-Hb* y *Sa-Sb* y reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Hb}{Ha} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelInO).

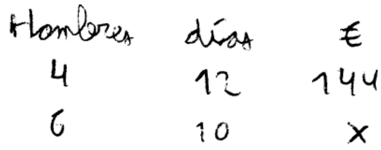


Figura 23.

El perfume

Plantea un esquema de regla de tres mediante “60 = 30% del total” y calcula “$\frac{60}{30} \cdot 70$ = 140 gramos de perfume” Reduce el problema a las relaciones $P = Pe + Ph$ y $\frac{Pe}{Ph} = \frac{Ge}{Gh}$ (ambas RelNecEmp).

Alumna 13

Las naranjas

Calcula “15·12 =180”, “180:2 = 90” y concluye “→1 saco hay 120 naranjas (90 + 30 = 120 / 180 – 120 = 60) [abajo] → otro saco 60”. Asigna de manera incorrecta el valor de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y reduce el problema a las relaciones $N = Nm \cdot S$, $Sg = Nm + Em$ y $N = Sg + Sp$ (las tres RelNecEmp).

El tren

Calcula “3600·2 = 7200”, “7200·1000 = 7200000” y concluye “R: cada hora avanza 7200000”. Considera las relaciones $Mh = Tsh \cdot Ms$ (RelNecEmp) y $Kh = Emk \cdot Mh$ (RelInO).

El ordenador

Considera un esquema de regla de tres (ver Figura 24), plantea la ecuación “$\frac{1440}{100} = \frac{x}{15}$” (LetCo/EcIn) y la transforma en “$x = \frac{1440 \cdot 15}{100}$ = 216”. Supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde al precio inicial. Reduce el problema a la relación $\frac{Ni}{Nr} = \frac{F}{I}$ (NoRel).

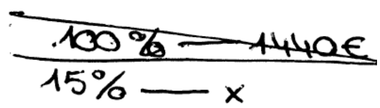


Figura 24.

Tacha la solución anterior y reconsidera el esquema de regla de tres (ver Figura 25). Plantea la ecuación “$\frac{1440}{15} = \frac{x}{100}$” (LetCo/EcIn), la transforma en “$x = \frac{1440 \cdot 100}{15}$ =

9600 €" y calcula "9600 – 1440 = $\boxed{8160}$ €". Reduce el problema a las relaciones $\frac{Nr}{Ni} = \frac{F}{R}$ (NoRel) y $R = I + F$ (RelInO).

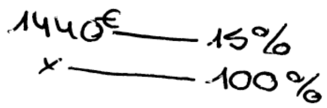


Figura 25.

La inversión

Calcula "28000 + 16000 = 44000 €", "44000 – 7000 = 37000 €" y concluye "R: Pedro ganó 37000 €". Plantea una situación en la que se aportan dos cantidades de dinero (inversión), un amigo coge una parte de esta suma (ganancias de Hugo) y el otro, el resto (ganancias de Pedro). Considera las relaciones $Gt = It$ (NoRel), $It = Ip + Ih$ y $Gt = Gp + Gh$ (ambas RelNecEmp).

Las cortinas

No abordado.

El salario

Se limita a expresar la información del problema que se muestra en la Figura 26.

Figura 26.

El perfume

Considera un esquema de regla de tres (ver Figura 27), plantea la ecuación "$\frac{60}{30} = \frac{x}{70}$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "R: tiene que agregarse 140 gramos de esencia". Reduce el problema a las relaciones $P = Pe + Ph$ y $\frac{Pe}{Ph} = \frac{Ge}{Gh}$ (ambas RelNecEmp).

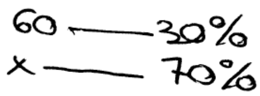


Figura 27.

Alumna 14

Las naranjas

Obtiene 180 de multiplicar 15 por 12 y "90 naranjas por saco" de dividir 180 entre 2; calcula "90 + 30 = 120" y "180 – 120 = 060"; y concluye "En un saco 60 naranjas y en otro 120 naranjas". Asigna de manera incorrecta el valor de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y reduce el problema a las relaciones $N = Nm \cdot S$, $Sg = Nm + Em$ y $N = Sg + Sp$ (las tres RelNecEmp).

El tren

Calcula "2·60 = 120 m", obtiene 1,2 de dividir 120 entre 100 (considerando erróneamente 100 como valor de *Emk*) y concluye "1,2 km por hora". Asigna el valor 120, correspondiente a la cantidad *Mm*, a la cantidad *Mh* y reduce el problema a las relaciones $Mm = Tsm \cdot Ms$ y $Mh = Emk \cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula "15 % de 1440 = 0,15·1440 = 2160 €" (errata, pues debería ser 216). Supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde al precio inicia. Reduce el problema a la relación $I = Pr \cdot F$ (NoRel).

La inversión

Calcula el dinero total invertido mediante "P y H → 28000 + 16000 = 44.000 €" y asigna la letra *x* a la cantidad *Gp* (LetCo) en "P = *x*". Reduce el problema a la relación $It = Ip + Ih$ (RelNecEmp).

Las cortinas

Indica que se han comprado *x* metros de tela y han costado 528 € ("*x* m → 528 €") y que han comprado 6 metros de tela y han costado 564 € ("6 m → 564 €"). Obtiene 94 de dividir 564 entre 6 (explica la intención de la operación en la Figura 28) y 5,617 de dividir 528 entre 94. Supone que 6 metros cuestan 564 €, con lo que asigna el valor de la cantidad *Mhm* a la cantidad *Mh*, y reduce el problema a las relaciones $Ph = U \cdot Mh$ y $P = M \cdot U$ (ambas RelNecEmp).

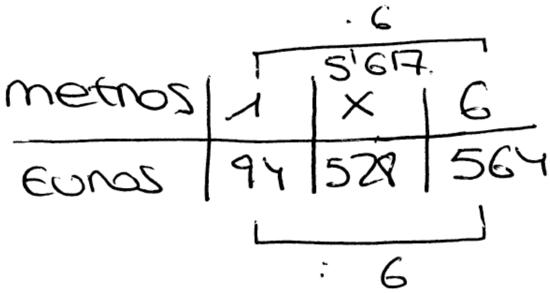


Figura 28.

El salario

Esquematiza la información que se ofrece en el enunciado (ver Figura 29); plantea la ecuación "$\frac{4}{6} \cdot \frac{12}{10} = \frac{144}{x}$" (LetCo/EcCo); la transforma en "$\frac{40}{72} = \frac{144}{x}$" (error en operación aritmética, pues opera como si se tratara de una división de fracciones) y obtiene $x = \frac{40 \cdot 144}{72} = 80$€" (error de transposición de términos). Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelNecEmp).

4h 144€ 12d

6h x 10d

Figura 29.

El perfume

Calcula "70% de 60 = 0,7·60 = 42 g". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt{\cdot}Pe$ (RelNecEmp).

Alumno 15

Las naranjas

Calcula "15·12 = 180", "180 – 30 = 150", "150:2 = 75 + 30 = 105" y concluye "1er saco → 105 naranjas [abajo] 2n saco → 75 naranjas". Reduce el problema a las relaciones entre cantidades $Sg = Sp + Mgp$, $N = Nqe + Mgp$ y $Nqe = Sp{\cdot}S$ (todas RelNecEmp).

El tren

Calcula "60·2 = 120 m/min" y "120·60 = 7200 m → 72 km/h". Comete un error al dividir 7200 entre 1000 cuando pasa de "7200 m" a "72 km/h" (error en operación aritmética). Considera que el problema se reduce a las relaciones $Mm = Tsm{\cdot}Ms$, $Mh = Tmh{\cdot}Mm$ y $Mh = Emk{\cdot}Kh$ (todas RelNecEmp).

El ordenador

Plantea la ecuación "15% de x = 1440 € → $\frac{15}{100} \cdot x = 1440$ € → $0{,}15 \cdot x = 1440$ €" (EcIn) y obtiene $x = \frac{1440}{0{,}15} = 9600$". Asigna la letra x a la cantidad *I* (LetCo) y reduce el problema a la relación $F = Pr{\cdot}I$ (NoRel).

Tacha la solución anterior, calcula "$x = 1440 \cdot 0{,}15 = 216$" y "$x = 1440 + 216 = 1656$". Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en "$x = 1440 + 216 = 1656$" y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Asigna la letra x a las cantidades *R* e *I* en dos expresiones independientes y reduce el problema a las relaciones $R = Pr{\cdot}F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Considera un esquema de proporcionalidad, plantea (LetCo/EcCo) la ecuación (ver Figura 30) y la transforma en "$x = \frac{28000 \cdot 7000}{16000} = 12.250$". Reduce el problema a la relación de proporcionalidad $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

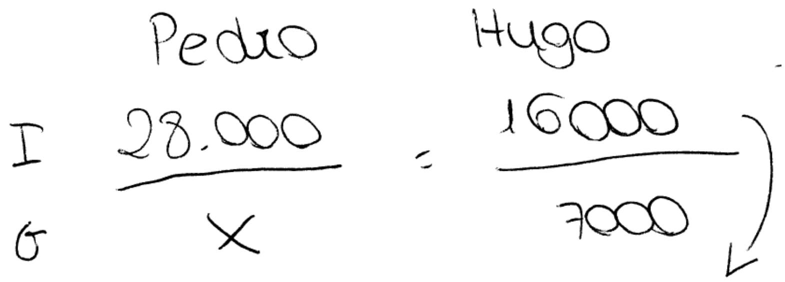


Figura 30.

Las cortinas

Escribe “$x = 528$” y “$6 + x = 564$ €” (LetCo, la letra x representa a la cantidad M). Estas expresiones resumen, respectivamente, los fragmentos del enunciado “cierta cantidad de metros de tela [x] para cortinas, pagándose [=] 528 € [528 €]” y “Si se hubiesen comprado 6 metros más [$x + 6$] se hubiera pagado [=] 564 € [564 €]”. Calcula “564 – 528 = 36/6 = 6 €/m” y “528:6 = 88 m”. Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm{\cdot}U$ y $P = M{\cdot}U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Calcula “144:12 = 12 : 4 = 3 €/día/hombre” y “3·6·10 = 180 €”. Reduce el problema a las relaciones $Sda = U{\cdot}Ha$, $Sa = Sda{\cdot}Da$, $Sdb = U{\cdot}Hb$ y $Sb = Sdb{\cdot}Db$ (todas RelNecEmp).

El perfume

Plantea la ecuación “x + 60 g = 70% perfume” (LetCo/EcIn), la reescribe como “x + 0,06 kg = 0,7” y la resuelve correctamente obteniendo “x = 0,7 – 0,06 = 0,64 kg → 64 g” (error al cambiar las unidades, pues debería dar 640 g). La ecuación refleja una traducción sintáctica del enunciado: “¿Cuántos gramos de esencia de perfume [x] deben agregarse [+] a 60 gramos de alcohol [60] para tener [=] una loción con el 70% de perfume [70%]?”. El estudiante lleva a cabo una conversión de gramos a kilogramos (60 g → 0,06 kg) con el único propósito de evitar obtener una solución negativa al resolver la ecuación. Reduce el problema a la relación $Pe = Ge + Gh$ (NoRel) en la que se conectan aditivamente cantidades que refieren a una magnitud extensiva (Ge y Gh) con otra que lo hace a una magnitud intensiva (Pe) (EHom).

Alumna 16

Las naranjas

Calcula “15·12 = 180”, “180:2 = 90”, “90 + 30 = 120” y concluye “un saco tiene 90 i [sic] otro 120”. Asigna el resultado de “180:2 = 90” a Sp, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S{\cdot}Sp$ (NoRel) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

Plantea un esquema de regla de tres (ver Figura 31), calcula “$\frac{3600\cdot 2}{1}$ = 7200” y concluye “Avanza 7,200 Km por hora”. Utiliza la relaciones $Mh = Tsh{\cdot}Ms$ y $Mh = Emk{\cdot}Kh$ (ambas RelNecEmp).

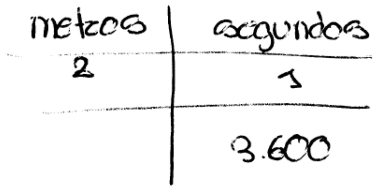


Figura 31.

El ordenador

Calcula “1440 de 15% → $\frac{1440\cdot 15}{100}=216$ con descuent.”, “1440 + 216 = 1656 €” y concluye “El precio del ordenador es de 1656 €”. Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en “1440 + 216 = 1656 €” y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr{\cdot}F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Escribe “Pedro → 28000”, “Hugo → 16000” y “Pedro a [sic] ganado 14000 €”. Calcula la ganancia de Pedro dividiendo entre dos la inversión de Pedro, lo que supone reducir el problema a la relación $Ip = Gp{\cdot}\alpha$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 2).

Las cortinas

Plantea un esquema de regla de tres (ver Figura 32), calcula “→ $\frac{528\cdot 6}{564}$ = 5,6” y concluye “A [sic] comprado 5,3” (errata, pues debería ser 5,6) y “A [sic.] costado 0,010 €” (divide 5,6 entre 528, en lugar de dividir 528 entre 5,6). Supone que 6 metros de tela cuestan 564 €, con lo que asigna el valor de la cantidad Mhm a la cantidad Mh, y reduce el problema a las relaciones $\frac{M}{Mhm}=\frac{P}{Phm}$ (RelNecEmp) y $M = P{\cdot}U$ (RelInO).

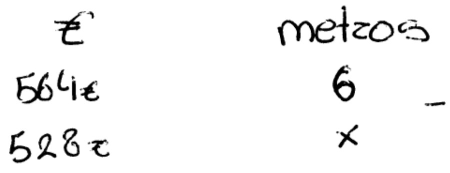


Figura 32.

El salario

Resume la información que ofrece el enunciado en la Figura 33, calcula “$\frac{10\cdot 144}{12}$ = 120 €” y concluye “- Ganan 120 € en 10 días”. Esto supone calcular lo que ganarían 4 hombres (que no 6) en 10 días e implica reducir el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb}=\frac{Da}{Db}$ (NoRel), asignando a Sb el valor que debería hacer corresponder a Sab.

hombres	días	€
4	12	144
6	10	x

Figura 33.

El perfume

Calcula "60 de 70% → $\frac{60 \cdot 70}{100}$ = 42" y concluye "Deben agregarse 42". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad Gh a la cantidad Gt, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt{\cdot}Pe$ (RelNecEmp).

Alumna 17

Las naranjas

Obtiene "150 naranjas" de restar 30 a 180; "75 naranjas" de dividir 150 entre 2; y concluye "R → 75 naranjas en un saco [abajo] R → 105 naranjas en el otro saco". Reduce el problema a las relaciones $Sg = Sp + Mgp$, $N = Nqe + Mgp$ y $Nqe = Sp{\cdot}S$ (todas RelNecEmp).

El tren

Calcula "2×60 = 120m/h = 0,12 Km" y concluye "R → 120m/h = 0,12 Km/h". Asigna el valor de la cantidad Tsm a la cantidad Tsh (le da el valor 60 cuando debería asignarle 3600) y utiliza las relaciones $Mh = Tsh{\cdot}Ms$ y $Mh = Emk{\cdot}Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Obtiene 216 de multiplicar 1440 por 0,15, 1656 de sumar 1440 más 216 y concluye "R → 1,656 € es el precio sin descuento". Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en la última operación y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr{\cdot}F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Escribe "Pedro → 28.000", "Hugo → 16.000 €", "Hugo → ganó 7000 de 16000 que invirtió. 1000 euros – de la mitad que invirtió" y "R → Pedro → ganó 13000 de 28000 que invirtió. 1000 euros – de la mitad que invirtió". Observa que se cumple la relación $Gh = Ih/\alpha - \beta$ (RelCoInn, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema que toman los valores 2 y 1000, respectivamente) para los valores concretos que toman las cantidades Ih y Gh en el enunciado y la generaliza al caso de Pedro mediante $Gp = Ip/\alpha - \beta$ (NoRel).

Las cortinas

Escribe "528 € → x m" y "564 € → x m + 6"; plantea la ecuación "x + 6 = 564 €" (EcIn/LetCo); la resuelve correctamente y obtiene "x = 558 €". Utiliza las relaciones $Mh = M + Mhm$ (RelNecEmp) y $Ph = Mh$ (NoRel) que emplea una igualdad entre cantidades cuyo resultado refieren a una magnitud distinta (EHom, pues *Ph* refiere a precio y *Mh* a longitud).

Tacha la solución anterior, obtiene “036 €” de restar 528 a 564; “6 €/m” de dividir 36 entre 6; “$71,\widehat{3}$ m” de dividir 528 entre 6 (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 88); “77,3 m” de sumar 71,3 a 6,0 y concluye “R → 77,3 m de tela a 6 € cada metro”. Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm \cdot U$ y $P = M \cdot U$ (todas RelNecEmp). Sin embargo, en lugar de responder a la pregunta del problema, ofreciendo el valor de *M*, da como resultado final *Mh*, utilizando para ello $Mh = M + Mhm$ (RelCoInn).

El salario

Representa la información del enunciado como se muestra en la Figura 34; plantea “$\frac{4}{6} \cdot \frac{12}{10} = \frac{144}{x}$” (LetCo/EcCo); la transforma en “$\frac{40}{72} = \frac{144}{x}$” (error en operación aritmética, pues opera como si se tratara de una división de fracciones) y concluye “R→ 259 €” (ofreciendo una aproximación de 259,2). Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelNecEmp).

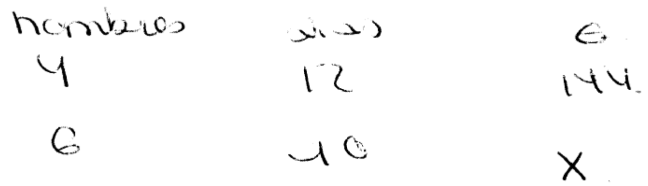


Figura 34.

El perfume

Escribe “? → gramos de esencia a 60 g de alcohol = 70% de perfume”, calcula “60:100 = 0,6”, “0,6×70 = 42 gramos” y concluye “R → 42 gramos”. Aunque afirma que hay 60 gramos de alcohol, posteriormente asigna el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt \cdot Pe$ (RelNecEmp).

Alumno 18

Las naranjas

Obtiene 180 de multiplicar 15 por 12; 90 de dividir 180 entre 2; 120 de sumar 90 a 30; y concluye “1º saco = 120” y “2º saco = 90”. Asigna el resultado de dividir 180 entre 2 a *Sp*, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S \cdot Sp$ (NoRel) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

Calcula “3600×2 = 7200 m → la hora” y “7200:1000 = 7,2 km → la hora”, lo que implica considerar las relaciones $Mh = Tsh \cdot Ms$ y $Mh = Emk \cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Obtiene 85 de restar 15 a 100 y calcula “1440×0,85 = 1224”. Considera que el 85% del precio rebajado es el precio inicial cuando en realidad es al contrario. Utiliza las relaciones $Pi = Pf + Pr$ (RelNecEmp) e $I = F \cdot Pf$ (RelInO).

Tacha la solución, posiblemente alertado por el hecho de que tras la rebaja el precio del ordenador es mayor. Calcula "15% de 1440 = 216 €" y "1440 + 216 = 1656 €". Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en "1440 + 216 = 1656" y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr \cdot F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Obtiene 44000 al sumar 28000 a 16000; calcula "7000:44000 = 0,15" (redondeo incorrecto pues el resultado es 0,159), "28000×0,15 = 4200"; y concluye "Pedro ganó 4200 €". Utiliza las relaciones $It = Ih + Ip$ (RelNecEmp) y $\frac{Gh}{It} = \frac{Gp}{Ip}$ (NoRel).

Las cortinas

Obtiene "36 €" de restar 528 a 564; plantea un esquema de regla de tres (ver Figura 35); calcula "528×6 = 3168", "3168:36 = 88 m" y concluye "Se compraron 88 m. de tela". Plantea un nuevo esquema de regla de tres (ver Figura 36); calcula "1×36 = 36", "36:6 = 6" y concluye "Cada metro cuesta 6 €". Utiliza la letra *x* para representar a las cantidades *M* y *U* en dos fragmentos independientes de la solución sin que se produzca confusión de referentes (LetCo). Reduce el problema a las relaciones (todas RelNecEmp) $Ph = Phm + P$, $\frac{M}{Mhm} = \frac{P}{Phm}$ y $P = M \cdot U$.

36 €	~~vale~~ son	6 m
528 €	~~vale~~ son	x

Figura 35.

36 €	són	6 m
x	són	1 m

Figura 36.

El salario

Representa la información del problema como se muestra en la Figura 37; plantea la ecuación "$\frac{4}{6} + \frac{12}{10} = \frac{144}{x}$" (LetCo/EcIn); la transforma en "$\frac{16}{16} = \frac{144}{x}$" (error en operación aritmética, pues suma numeradores y denominadores); y concluye "$x = 144$ €". Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} + \frac{Da}{Db}$ (RelInR), haciendo un interpretación incorrecta del esquema de proporcionalidad compuesta.

Hombres	Días	€
4	12	144
6	10	x

Figura 37.

El perfume

Calcula “70% de 60 = 42” y obtiene “18 gramos” de restar 42 a 60. Asigna el valor de la cantidad *Gh* (que supone desconocida) a la cantidad *Gt* y utiliza las relaciones $Gh = Pe \cdot Gt$ (NoRel) y $Gt = Ge + Gh$ (RelNecEmp).

Alumna 19

Las naranjas

Calcula “15×12 = 180”, “180:2 = 90”, “1r Saco: 90 – 30 = 60 naranjas” y “2º Saco: 90 + 30 = 120 ´´ [naranjas]”. Asigna el valor de la cantidad *Mgp* a la cantidad *Em* y reduce el problema a las relaciones $N = Nm \cdot S$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$ (las tres RelNecEmp).

El tren

Calcula “3600·2 = 7200”, “7200:100 = 7,2 km” (errata, pues aunque escribe 100, divide entre 1000) y concluye “R = Avanza 7,2 km”. Reduce el problema a las relaciones $Mh = Tsh \cdot Ms$ y $Mh = Emk \cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Plantea “$x = 1440 + 15\%$ de $x \rightarrow x = 1440 + 0{,}15x$” (LetCo/EcCo) y la transforma en “$\frac{x}{x} = 1440 + 0{,}15$” (error de transposición de términos). Reduce el problema a las relaciones $I = F + R$ y $R = Pr \cdot I$ (ambas RelNecEmp).

Tacha la solución anterior y calcula “1440·0,15 = 216” y “1440 + 216 = 1656 = *x*” (LetCo). Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en “1440 + 216 = 1656” y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr \cdot F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Supone un esquema de regla de tres (ver Figura 38), calcula “$\frac{28.000 \cdot 7000}{16.000} = 12.250$” y concluye “$x = 12.250$”. Asigna la letra *x* a la cantidad *Gp* (LetCo) y reduce el problema a la relación $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

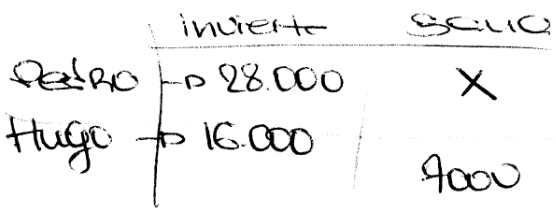


Figura 38.

Las cortinas

Escribe “$x \rightarrow 528$ €” y “$x + x + 6 \rightarrow 564$” que podemos interpretarlo, respectivamente, como: si compra *x* metros, le cuesta 528 €; y si compra *x* más *x* + 6, le cuesta 564 (lo que es incorrecto). A continuación, plantea la ecuación “$x + x + x + 6 = 528 + 564$”

(EcIn/LetCo); la resuelve correctamente, obtiene "x = 362" y calcula "528:362 = 1,46 €/m". La ecuación es la adición término a término de las expresiones "$x \rightarrow$ 528 €" y "$x + x + 6 \rightarrow$ 564". Reduce el problema a las relaciones $\alpha = M + Mh$, $\beta = P + Ph$, $\alpha = \beta$, $Mh = M + M + Mhm$ (las cuatro NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema) y $P = M{\cdot}U$ (RelNecEmp). La estudiante iguala una cantidad que refiere a la magnitud longitud con otra que refiere a precio (EHom) en la ecuación que se construye a partir de la relación $\alpha = \beta$.

El salario

Representa la información del problema como se muestra en la Figura 39; escribe la expresión algebraica "$\frac{4}{6} + \frac{144}{x} + \frac{12}{10}$"(LetCo); plantea la ecuación "$\frac{4}{6} + 144 + \frac{12}{10} = 1 \cdot x$" (EcIn) mediante una transformación incorrecta (error de transposición de términos) que parte de igualar la expresión inicial a 1 (EcIn); reduce a denominador común "$x = \frac{20}{30} + \frac{4320}{30} + \frac{36}{30}$"; y ofrece como resultado "x = 20 + 4320 + 36 $\rightarrow$ 4376 = x" (error de transposición de términos). Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} + \frac{Ha}{Hb} + \frac{Da}{Db} = \alpha$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

hombres	€	días
4	144	12
6	x	10

Figura 39.

El perfume

Supone inicialmente un esquema de regla de tres (ver Figura 40) y plantea la ecuación "100% = 60 + x" (LetCo/EcIn). La estudiante asume las expresiones "70% = x" y "30% = 60" como igualdades (inicialmente el signo igual significaba "le corresponde", de modo que con "30% = 60" daba a entender que al 30% le correspondían 60) y construye la ecuación sumándolas término a término. Reduce el problema a las relaciones $P = Ge + Gh$ (NoRel/EHom) y $P = Pe + Ph$ (RelNecEmp).

70% = x
30% = 60

Figura 40.

Tacha la solución anterior, calcula "$\frac{60}{100} \cdot 70 = x \rightarrow 0{,}6 \cdot 70 = 42$" (LetCo) y concluye "$x$ = 42 gramos". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad Gh a la cantidad Gt, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt{\cdot}Pe$ (RelNecEmp).

Alumno 20

Las naranjas

Obtiene 90 de dividir 180 entre 2; 75 de restar 15 a 90; 105 de sumar 90 y 15; y concluye "1er saco = 75" y "2º saco = 105". Reduce el problema a las relaciones $N = Nm \cdot S$, $Mgp = Em \cdot S$, $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$ (todas RelNecEmp).

El tren

Obtiene "7200 m" de multiplicar 3600 por 2, "7,2 km" de dividir 7200 entre 1000 y concluye "R = 7,2 Km por hora". Utiliza la relaciones $Mh = Tsh \cdot Ms$ y $Mh = Emk \cdot Kh$ (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula "1440·0,15 = 216", "216 = Descuento", obtiene 1656 de sumar 1440 a 216 y concluye "R: Costaba 1656 €". Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en la última operación y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr \cdot F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Calcula "28.000·7000 = 196.000.000", "196.000.000:16.000 = 12.250" y concluye "R: Pedro gana 12.250 €". Reduce el problema a la relación $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

Las cortinas

Obtiene 36 de restar 528 a 564; 6 de dividir 36 entre 6; 88 de dividir 528 entre 6; y concluye "R: cada m vale 6 €, Ha [sic] comprado 88 rollos [sic]" donde en lugar de hablar de metros, habla de "rollos". Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm \cdot U$ y $P = M \cdot U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Representa la información del problema como se muestra en la Figura 41; plantea la ecuación "$\frac{4}{6} \cdot \frac{12}{10} = \frac{144}{x}$" (LetCo/EcCo); y la transforma en "$\frac{48}{60} \cdot \frac{144}{x} = \frac{6912}{60} = 115{,}2$" (error en operación algebraica, pues para multiplicar $\frac{48}{60}$ por $\frac{144}{x}$ sustituye la letra x, que le molesta, por un 1 y asigna el resultado a x). Reduce el problema a la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelNecEmp).

Figura 41.

El perfume

Obtiene 30 de restar 70 a 100; escribe “60 = 30” (donde expresa de forma idiosincrásica que los 60 gramos de alcohol representan el 30% del total); calcula “60×7 = 420:3 = 140” y concluye “R = 140 gramos”. Reduce el problema a las relaciones $P = Pe + Ph$ y $\frac{Pe}{Ph} = \frac{Ge}{Gh}$ (ambas RelNecEmp).

Alumna 21

Las naranjas

Calcula “15·12 = 180 naranjas”, “180:2 = 90” y “1 saco tiene 90 naranjas [abajo] el segundo saco tiene 90 + 30 = 120 naranjas”. Asigna el resultado de “180:2 = 90” a *Sp*, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S{\cdot}Sp$ (NoRel) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

Calcula “2 metros por 60 = 120 metros por minuto”, “120×60 = 7200 km por hora” (deberían ser metros en lugar de kilómetros) y “7200·1000 = 7,2 km” (errata, pues lo que hace es dividir). Reduce el problema a las relaciones $Mm = Tsm{\cdot}Ms$, $Mh = Tmh{\cdot}Mm$ y $Mh = Emk{\cdot}Kh$ (todas RelNecEmp).

El ordenador

Esquematiza el enunciado mediante “*x* – 15% = 1440 €”; pero no especifica respecto a qué cantidad se calcula el 15%. Calcula “$\frac{1440 \cdot 0{,}15}{100}$ = 21,6 €” (errata, pasa de 15% a expresión decimal dividiendo 15 dos veces entre 100), “1440 + 21,6 = 1461,16” y concluye “Valia [sic] 1461,6 €”. Consideramos que asigna el valor 21,6 a la cantidad *R*, por el uso que hace de este valor en “1440 + 21,6 = 1461,16”, y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones $R = Pr{\cdot}F$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Calcula “28000 + 16000 = 44000”, “28000·7000:16000=12250” y concluye “Pedro gano [sic] 12250 €”. Asigna la letra *x* a la cantidad *Gp* y reduce el problema a las relaciones $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp) e $It = Ih + Ip$ (RelCoInn).

Las cortinas

Calcula “564 – 528 = 36 €”, “528:6 = 88” y concluye “compro [sic] 88 metros de tela” y “cada metro: 6 €”. Reduce el problema a las relaciones $Ph = Phm + P$, $Phm = Mhm{\cdot}U$ y $P = M{\cdot}U$ (todas RelNecEmp).

El salario

Calcula de manera correcta la cantidad *U* mediante “144:4 = 36 € en 12 días” y “36 €:12 = 3 € por día”, utilizando las relaciones $Sha = U{\cdot}Da$ y $Sa = Sha{\cdot}Ha$ (ambas RelNecEmp). A continuación realiza dos intentos para calcular *Db* mediante “36·6:10 =

21,6 €” (que tacha posteriormente) y “36·10:6 = 60 €”. En el primer caso supone utilizar las relaciones α = *Sha·Hb* y α = *Sb·Db* (ambas NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema) y la segunda, α = *Sha·Db* y α = *Sb·Hb* (ambas NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

El perfume

Calcula “$\frac{60}{100}\cdot 70$ = 42 grams [sic] de perfume”. Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación *Ge* = *Gt·Pe* (RelNecEmp).

Alumna 22

Las naranjas

Calcula “15·12 = 180”, “180 – 30 = 150”, “150:2 = 75”, “75 + 30 = 105” y concluye “R: 105 naranjas 75 naranjas”. Reduce el problema a las relaciones *Sg* = *Sp* + *Mgp*, *N* = *Nqe* + *Mgp*, y *Nqe* = *Sp·S* (todas RelNecEmp).

El tren

Calcula “3600·2 = 7.200”, “7.200:1000 = 7,2 Km” y concluye “R: en una hora avanza 7,2 Km”. La estudiante supone las relaciones *Mh* = *Tsh·Ms* y *Mh* = *Emk·Kh* (ambas RelNecEmp).

El ordenador

Calcula “el 15% de 1440 → $\frac{1440}{100}\cdot 15$ = 14,4·15 = 216”, “1440 + 216 = 1656 €” y concluye “R: 1656 €”. Consideramos que asigna el valor 216 a la cantidad *R* por el uso que hace de este valor en “1440 + 216 = 1656 €” y que supone erróneamente que una rebaja del precio inicial del 15%, implica que el 15% del precio final corresponde a la rebaja. Reduce el problema a las relaciones *R* = *Pr·F* (NoRel) e *I* = *F* + *R* (RelNecEmp).

La inversión

Calcula “7.000:16000 = 0,4375”, “28000·0,4375 = 12250” y concluye “R: pedro [sic] ganó 12.250 €”. Reduce el problema a la relación $\frac{Ip}{Ih} = \frac{Gp}{Gh}$ (RelNecEmp).

Las cortinas

Escribe: “? m/cortinas → 528 €”, “6 m + → 564” y “1 m → ?”. Calcula “564 – 528 = 36” y “36:6 = 6”; pero lo tacha. Utiliza las relaciones *Ph* = *Phm* + *P* y *Phm* = *Mhm·U* (ambas RelNecEmp).

Tras tachar las operaciones anteriores, calcula “564:6 = 94” y “528:94 = 5,6”, y completa los interrogantes que aparecían en el esquema inicial: “$\boxed{\text{5,6 m}}$ ← ? m/cortinas → 528 €” y “1 m → ? → $\boxed{\text{94 €}}$”. Supone que 6 metros de tela cuestan 564 €, con lo que asigna el valor de la cantidad *Mhm* a la cantidad *Mh*, y utiliza las relaciones *Ph* = *Mh·U* y *P* = *M·U* (ambas RelNecEmp).

El salario

Indica la intención de resolver por reducción a la unidad (ver Figura 42) en “1 hombre → ? → 1 día”. Calcula “144:4 = 36”, “36:12 = 3 €”, “3·6 = 18”, “18·10 = $\boxed{\text{180 €}}$” y “R: $\boxed{\text{180 €}}$”. Reduce el problema a las relaciones $Sha = U{\cdot}Da$, $Sa = Sha{\cdot}Ha$, $Shb = U{\cdot}Db$ y $Sb = Shb{\cdot}Hb$ (todas RelNecEmp).

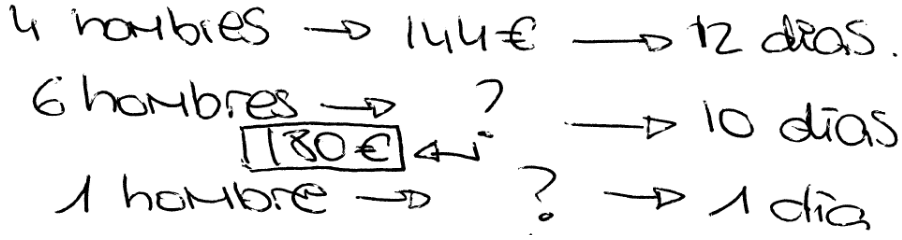


Figura 42.

El perfume

Calcula “el 70% de 60 → $\frac{60}{100}\cdot 70$ → 0,6·70 = $\boxed{\text{42 g}}$” y concluye “R: 42 gramos de perfume”. Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad Gh a la cantidad Gt, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt{\cdot}Pe$ (RelNecEmp).

Alumno 23

Las naranjas

Obtiene 180 de multiplicar 15 por 12 ; 90 de dividir 180 entre 2; 120 de sumar 90 a 30; y concluye “90 — naranjas en 1 saco” y “120 — naranjas en el 2º saco”. Asigna el resultado de dividir 180 entre 2 a Sp, con lo que reduce el problema a las relaciones $N = S{\cdot}Sp$ (NoRel) y $Sg = Sp + Mgp$ (RelNecEmp).

El tren

No utiliza ninguna de las relaciones presentes en el problema y se limita a calcular factores de conversión de forma incorrecta. Así, obtiene el valor de la cantidad Tsm (“60×1 = 60 segundos”). Parece calcular Tsh (“60×60 = 3600 minutos”), aunque le asigna minutos como unidad, y Tmh (“3600:60 = 60 horas”), aunque le asigna horas como unidad.

El ordenador

Calcula “100 – 15 = $\frac{85}{100}$ = 0,85”, lo que supone usar la relación $Pi = Pr + Pf$ (RelNecEmp), pero lo tacha.

Calcula “15% de x = 1440 = x = $\frac{1440}{15}$ = 96 = ” (LetCo/EcIn, pues considere que el 15% es 15) y “1440 + 96 = $\boxed{1536}$”. Consideramos que asigna el valor 96 a la cantidad R por el uso que hace de este valor en “1440 + 96 = 1536” y que supone erróneamente que el 15% del precio rebajado es igual al precio final. Asigna la letra x a la cantidad R y reduce el problema a las relaciones $F = Pr{\cdot}R$ (NoRel) e $I = F + R$ (RelNecEmp).

La inversión

Obtiene 44000 de sumar 28000 más 16000; calcula $\frac{7000}{44000} = 0{,}15$ (el redondeo correcto sería 0,16) "28000·0,15 = 4200" y "16000·0,15 = 2400". El estudiante asigna dos valores a la cantidad *Gh*: el proporcionado en el enunciado del problema y el que obtiene en "16000·0,15 = 2400". Reduce el problema a las relaciones $It = Ih + Ip$ (RelNecEmp), $\frac{Gh}{It} = \frac{Gp}{Ip}$ y $\frac{Gh}{It} = \frac{Gh}{Ih}$ (ambas NoRel).

Las cortinas

Plantea la ecuación (idiosincrásica) "$x = 528 + x + 6 = 564 =$" (EcIn); la transforma en "$x - x = 528 + 6 - 564$" y "$0 = -30$"; y, a continuación, tacha la solución probablemente advertido por la contradicción que obtiene. Podemos interpretar la ecuación como una traducción lineal del enunciado, donde el signo igual sustituye a pagar: "Se compró una cierta cantidad de metros de tela [*x*] para cortinas, pagándose [=] 528 € [528 +]. Si se hubiesen comprado 6 metros más [x + 6] se hubiera pagado [=] 564 € [564]." En definitiva, si consideramos que la letra *x* representa a la cantidad *M* (LetCo), tendríamos que se utilizan las relaciones $M = P + Mh$ (NoRel), $Mh = M + Mhm$ (RelNecEmp) y $Ph = P + Mh$ (NoRel). Por otra parte, la ecuación plantea la igualdad entre cantidades que refieren a magnitudes distintas, pues *M* (representada por *x*) lo hace a longitud y *Ph* (representada por el valor 564), a dinero (EHom).

El salario

Considera (ver Figura 43) un relación de proporcionalidad directa entre las cantidades *Ha-Hb* y *Sa-Sb* y entre *Da-Db* y *Sa-Sb*. Plantea la ecuación "$\frac{4}{6} \cdot \frac{12}{10} = \frac{144}{x}$" (LetCo/EcCo) que utiliza la relación $\frac{Sa}{Sb} = \frac{Ha}{Hb} \cdot \frac{Da}{Db}$ (RelNecEmp).

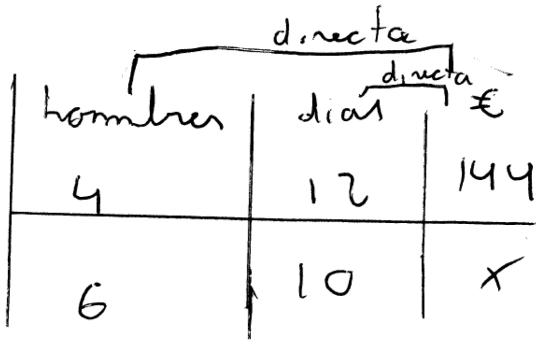


Figura 43.

El perfume

Calcula "70% de 60 = $\frac{70}{100} \cdot 60 = \boxed{42}$". Considera que los 60 gramos hacen referencia al total de loción, lo que supone asignar el valor de la cantidad *Gh* a la cantidad *Gt*, y reduce el problema a la relación $Ge = Gt \cdot Pe$ (RelNecEmp).

5.5.2. EL CUESTIONARIO 2

Alumno 1

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación “$30 + x = 4x$” (LetCo/EcCo), la transforma en “$30 = 4x^2$” (error en operación algebraica y error de transposición de términos) y concluye “± 2,7” sin despreciar la solución negativa que carece de sentido en el contexto de un problema de edades. Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa·A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación “$3x + 28 = 5x - 4$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación “$16 + x + 14 + x = 40 + x$” (LetCo/EcCo); la transforma en “$30 + x = 40 + x$” (error en operación algebraica); ésta en “$2x = 70$” (error de transposición de términos) y obtiene “$x = 35$”. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

Plantea la ecuación “$3 + x + 2 + x = 12$” (EcIn) y la resuelve correctamente. En las expresiones “$3 + x$” y “$2 + x$” (que hacen referencia, respectivamente, a Am y Fm) la letra x representa tanto a Ah como a Fh (LetPol) y suponen considerar “3 veces la de su hija Marta” como añadir 3 y “el doble de la de Marta” como añadir 2. Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma + Ah$, $Fm = Vhmf + Fh$ (ambas RelInR/EHom) y $T = Am + Fm$ (RelInO).

La visita al teatro

Asigna la letra x a la cantidad B; plantea la ecuación “$10x + 11x = 11x + 7x$” (EcIn); la transforma en “$4x = 39$” (error en operación algebraica y error de transposición de términos), ésta en “$39/4 = x$” y concluye “$x = 6$” (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 9,75). Interpreta que el número de niños que quedan sin sentarse en cada situación no es en total, sino por banco. Reduce el problema a las relaciones $N = Sa + \alpha$, $N = Sb + \beta$ (ambas EHom, pues se suman cantidades que no refieren a la misma magnitud), $\alpha = B·Pa$, $\beta = B·Pb$ (las cuatro NoRel), $Sa = B·Na$ y $Sb = B·Nb$ (ambas RelNecEmp).

Bolígrafos y lapiceros

Plantea la ecuación “$25 + x = 3x + 3 + 2$” (EcIn); la transforma en “$22x = 5$” (error en operación algebraica) y ésta en “$22/5 = x$” (error de transposición de términos). La letra x representa a la cantidad L y la ecuación parece responder a una traducción sintáctica del enunciado en la que “$25 + x$” representaría a “Un bolígrafo cuesta 25 céntimos más [+] que un lapicero [x]”; mientras que el término de la derecha lo podríamos interpretar como “He pagado 3 € [+ 3] por 3 lapiceros [$3x$] y dos bolígrafos [+ 2]”. También observamos que utiliza dos unidades distintas para la magnitud dinero (25 céntimos y 3 €) y que iguala una magnitud intensiva (“$25 + x$” sería una precio unitario) a otra extensiva (en el mejor de los casos “$3x + 3 + 2$” sería un precio). Suponemos que asigna el valor de la cantidad Nb a la cantidad Pb y que reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pl = Nl \cdot L$ (ambas RelNecEmp), $B = P + Pl + Pb$ (NoRel/EHom, pues B refiere a una magnitud intensiva y $P + Pl + Pb$ a una extensiva).

La lotería

Plantea la ecuación “$x + 2x + 3x = 5.000$ €” (EcIn); la transforma en “$5x^2 = 5.000$ €” (error en operación algebraica) y concluye “$\pm\sqrt{1.000} = 31{,}6$ €”, despreciando la solución negativa. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión “$2x$”, que sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, la letra x representaría a Pb; mientras que en “$3x$”, que lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula “$0{,}90 \cdot 55 = \boxed{49{,}5\text{ €}}$” y enmarca el resultado dando a entender que es la solución del problema. El estudiante supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10% implica que el 10% del precio final corresponde al aumento y el 90% al precio inicial. Reduce el problema a las relaciones $Pi = Pa + \alpha$ e $I = \alpha \cdot F$ (ambas NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Alumna 2

La edad de Consuelo

Plantea “$4x = 30$” (LetCo/EcIn), obtiene 7,5 como solución, y concluye “R: Consuelo tiene 7 años i [sic] medio”. La ecuación refleja una traducción sintáctica del enunciado “… 30 años [30] tendrá [=] 4 veces [4·] la edad que tiene ahora [x]?”. Considera que la cantidad F toma el valor 30, cuando realmente es el valor de la cantidad T, y reduce el problema la relación $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp).

Después de tachar lo anterior, plantea “$x + 30 = 4x$” (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye “R: Consuelo tiene 10 años”. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación “$3x + 28 = 5x - 4$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Calcula el mínimo común múltiplo de 16, 14 y 40. Para ello descompone en factores primos 16, 14 y 40 (2^4, $2 \cdot 7$ y $2^3 \cdot 5$, respectivamente); calcula incorrectamente “m.c.m. = $2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$” y concluye “Han de pasar 70 años”. Interpreta el problema como si 16, 14 y 40 fuera el tiempo invertido en realizar tres objetos una acción (una vuelta a un circuito, por ejemplo) y con su resolución pretende dar respuesta al tiempo que debe transcurrir para que coincidan los tres en un mismo punto. Reduce el problema a la relación T = m.c.m. (Aa, Af, Ap) (NoRel).

Marta y María

Plantea la ecuación “$x = 3x$”, que es una traducción literal del fragmento del enunciado “La edad de María es 3 veces la de su hija Marta”, donde la letra x representa a las cantidades Am y Ah (LetPol). Reduce el problema a la relación $Am = Vhma \cdot Ah$ (RelNecEmp).

A continuación, plantea la ecuación “$x + 12 = 2x$” (EcIn), que es una traducción literal del fragmento “dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta”, donde la letra x representa a Am y Fh (LetPol). La resuelve correctamente obteniendo “$x = 12$”; calcula “$12 \cdot 3 = 36$” (donde se pone de manifiesto que la estudiante considera ahora que x sólo representa a la edad actual de Marta), “$12 + 12 = 24$” (aquí calcula la edad futura de Marta utilizando $Fh = T + Ah$), “$36 + 12 = 48$”, “$\frac{48}{24} = 2$”; y concluye “Marta tiene 12 años i [sic] María 36. Dentro de dos años Marta tendra [sic] 24 i [sic] María 48”. Reduce el problema a las relaciones $Fm = Vhmf \cdot Fh$, $Fm = T + Am$, $Am = Vhma \cdot Ah$ y $Fh = T + Ah$ (las cuatro RelNecEmp, aunque la última la gasta para determinar una cantidad una vez ha dado respuesta a la pregunta del problema).

La visita al teatro

Calcula “$\frac{10}{11} \cdot \frac{11}{7} = \frac{110}{77} =$”. Lo interpretamos como un intento de plantear una proporcionalidad compuesta que abandona al no encontrar la tercera cantidad que varíe entre las situaciones antigua y nueva. Reduce el problema a la relación $\alpha = \frac{Na}{Nb} \cdot \frac{Pa}{Pb}$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Tacha la solución anterior; plantea “$\frac{10}{x} = 11 \rightarrow x = 11 \cdot 10 = 110$” (EcIn y error de transposición de términos) y “$\frac{11}{x} = 7 \rightarrow x = 7 \cdot 11 = 77$” (EcIn y error de transposición de términos); y tacha esta solución, posiblemente al no poder explicar los dos valores distintos que toma x. Suponiendo que la letra x representa a la cantidad N, podemos concluir que reduce el problema a las relaciones $Na = N \cdot Pa$ y $Nb = N \cdot Pb$ (ambas NoRel) que igualan una cantidad que refiere a número de niños partido por número de bancos (Na y Nb) a otra que refiere a número de niños por número de bancos ($N \cdot Pa$ y $N \cdot Pb$) (EHom).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe “Lapices [sic] $\rightarrow x$” (LetCo), “Bolis $\rightarrow x + 25$”; plantea la ecuación “$3x + 2(x + 25) = 3$”; transforma “$3x + 2x = 3 – 50$” en “$x = -47$” (error en operación algebraica); y no calcula B posiblemente al asumir la imposibilidad de un resultado negativo para L. Expresa la cantidad P en euros y la cantidad Mbl en céntimos sin atender a la necesidad de que ambas lo hagan en la misma unidad (EUni). Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

La lotería

Escribe “el primero $\rightarrow 6x$”, “el segundo $\rightarrow 3x$” y “el tercero $\rightarrow x$” (LetCo); calcula “$6x + 3x + x = 10x$” y “$\frac{5000}{10x} = 500$”, lo que supone plantear la ecuación $6x + 3x + x = 5000$

(EcCo); y concluye “El primero […] → $6x \cdot 500 = 300$”, “El segundo […] → $3x \cdot 500 = 1500$” y “El tercero […] → $x = 500$”. La estudiante utiliza la letra x para representar a una de las partes en que se divide el premio y en consecuencia a la cantidad Pc (pues al tercer individuo le corresponde sólo una de las partes en que se divide el premio). Así, cuando escribe “$\frac{5000}{10x}$” parece expresar 5000 dividido entre 10 partes y en “$6x \cdot 500$”, 6 partes por 500. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Plantea la ecuación “x + 10% = 55” (LetCo/EcIn). Consideramos que “10%” representa a “subió un 10%”; es decir, a la cantidad A; lo que supone reducir el problema a la relación $F = I + A$ (RelNecEmp).

Tacha la solución anterior; calcula “10% de 55 = 5.5” y “55 – 5,5 = 49,5”; y concluye “R: Antes valía 49,5”. Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “55 – 5,5 = 49,5” y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 3

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación “$x + 30 = 4x$” (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye “$\boxed{x = 10 \text{ Años}}$”. El estudiante reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación “$3x + 28 = 5x – 4$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Representa la cantidad T mediante la letra x (LetCo) y asigna correctamente una expresión algebraica a las cantidades Fa, Ff y Fp (ver Figura 44). Plantea la ecuación “$16x + 14x = 40 + x$” (EcIn) y la resuelve correctamente. Suponemos que comete un error a la hora de copiar las expresiones algebraicas “$16 + x$” y “$14 + x$” (errata) de la tabla a la ecuación. Utiliza las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

	Ahora	+tarde
Andrea	16	16+ x
Paco	14	14+x
Padre	40	40+x

Figura 44.

Marta y María

Plantea la ecuación "$3x + 12 = 2x$" (EcIn), la resuelve correctamente y obtiene "$-x = 12$". De acuerdo con la información (ver Figura 45) que representa previamente a la construcción de la ecuación, "$3x$" y "$2x$" hacen referencia a la edad actual y futura de María, respectivamente (interpretando "E. Actual" como un error al querer referirse a la edad futura). Por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol) y que la asignación de x a Ah y $-x$ a Fh en la fila inferior responde a un intento, posterior a la solución de la ecuación, para contrarrestar el resultado negativo. Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

	Ahora	E. Actual
María	3 x +$\boxed{36}$	2 x
Marta	x	- x

Figura 45.

La visita al teatro

Representa gráficamente las dos situaciones del problema (ver Figura 46) y escribe "10 – 11 = 11 – 7". Interpretamos la igualdad como un intento de expresar la simetría de la situación y, al mismo tiempo, como una muestra de su incapacidad para generar las expresiones asociadas a las cantidades que permanecen constantes en ambos escenarios. Ciñéndonos al uso que hace las cantidades en la resolución, concluimos que reduce el problema a las relaciones $Na = \alpha + Pa$, $Nb = \beta + Pb$ (ambas EHom, pues suma cantidades que no refieren a la misma magnitud) y $\alpha = \beta$ (todas NoRel).

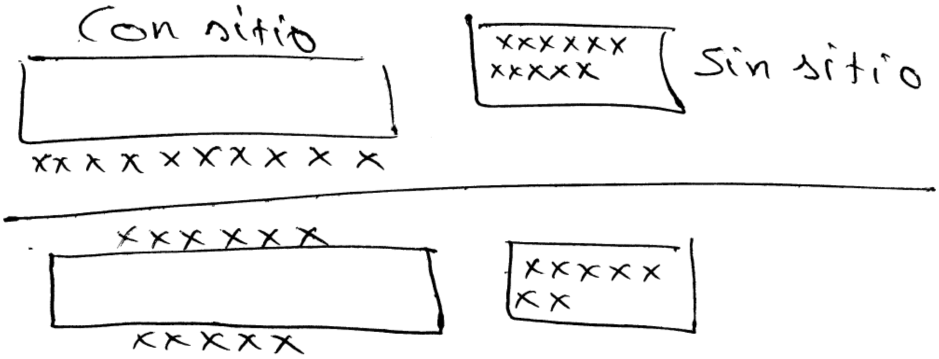


Figura 46.

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "Boligrafo [sic] = 25 + *x*", "Lapiceros = 75 – *x*" y "Bolígrafos = 50 + *x*". En "Boligrafo [sic] = 25 + *x*" asigna la letra *x* a la cantidad *L* y hace un uso correcto de la relación $B = L + Mbl$ (RelNecEmp). En "Lapiceros = 75 – *x*" supone que la letra *x* representa a la cantidad *B* (LetPol); considera que el precio de un lápiz es 25 – *x* (error de transposición de términos, al transformar $B = L + Mbl$ en $L = Mbl - B$); y aplica incorrectamente la propiedad distributiva al multiplicar por 3 el precio de un lápiz (error en operación algebraica), materializando $Pl = Nl{\cdot}L$ (RelNecEmp). En "Bolígrafos = 50 + *x*" plasma la relación $Pb = Nb{\cdot}B$ (RelNecEmp), repitiendo el error anterior al aplicar la propiedad distributiva (error en operación algebraica), y vuelve a considerar que la letra *x* representa a la cantidad *L*. Plantea la ecuación "75 – *x* + 50 + *x* = 300" (EcIn) a partir de la relación $P = Pl + Pb$ (RelNecEmp) y la transforma correctamente hasta que llega a "0*x* = 275".

Tacha la solución anterior; plantea la ecuación "75 – 3*x* = 50 + 2*x*" (EcIn); la resuelve correctamente y obtiene "*x* = 50" casualmente. En este segundo planteamiento corrige los errores cometidos al aplicar la propiedad distributiva, pero vuelve a utilizar la letra *x* para representar tanto a *B* como a *L* (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb{\cdot}B$, $Pl = Nl{\cdot}L$ (las tres RelNecEmp) y $Pb = Pl$ (NoRel).

Asigna los valores 68 y 48 a *B* y *L*, respectivamente; calcula "68×3 + 48×2 = 300; y concluye "Boli = 68 cent" y "Lapicero = 48 cent". En esta solución el estudiante no considera todas las restricciones que impone el problema, se limita a suponer las relaciones $Pb = Nb{\cdot}B$, $Pl = Nl{\cdot}L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp); pero no tiene en cuenta la condición de que un bolígrafo cueste 25 céntimos más que un lapicero.

La lotería

Plantea la ecuación "6*x* + 3*x* + *x* = 5000" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente; y concluye "*x* = 500", "3*x* = 1500" y "6*x* = 3000". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula "0,10·55 = 5,5", "5,5 + 55 = 60,5" y concluye "60,5 centimos [sic] valía ayer". Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento y añade el aumento al precio final en lugar de restarlo. El estudiante no observa contradicción en que el precio sea menor tras una aumento y reduce el problema a las relaciones $A = F{\cdot}Pa$ (NoRel) e $I = F + A$ (RelInO).

Alumna 4

La edad de Consuelo

Calcula "30 – 4 = $\boxed{26}$ años tiene ahora" lo que sólo tiene cabida en una relación entre edad inicial, edad final y tiempo transcurrido que, siendo arbitraria, respeta la condición de que el tiempo transcurrido sea menor que la edad final. Así, emplea la relación $F = A + T$ (RelNecEmp), asociando el valor 4 (que corresponde a *Vfa*) a la cantidad *T* y el valor 30 (que corresponde a *T*) a la cantidad *F*, con lo que esta cantidad pasa a ser conocida y de este modo evita operar con lo desconocido. A continuación, escribe "26·4 = 104 años después de 30 años", que supone el uso de la relación $F = A{\cdot}Vfa$ (RelNecEmp), sin atender a la contradicción que implica el nuevo valor obtenido para *F* respecto al empleado anteriormente.

Números

La resolución se inicia con "3 + 28 = 31" en la que expresa mediante una operación matemática la proposición "Si al triple de un número [3] se le suman [+] 28 unidades [28], se obtiene el quíntuplo del número [31]". Asigna el valor correspondiente a la cantidad *T* ("triple de un número") a la cantidad *Nt* y asocia el resultado de la operación a *Nq*. Continúa con la interpretación lineal del enunciado y escribe "31 – 4 = $\boxed{27}$" en la que plasma la proposición "el quíntuplo del número [31] menos [-] 4 unidades [4]" y concluye "Total: se trata de numero [sic] 27". Las operaciones anteriores, junto con el hecho de considerar 27 como valor de *N*, implican el uso de las relaciones $Nq = V + Nt$ y $Nq = N + C$ (ambas NoRel). Finaliza con la secuencia de operaciones "27·15 = 405" y "405:15 = 27" que podemos interpretar como una comprobación tautológica del resultado en que la estudiante utiliza la relación $Nq = N{\cdot}Q$ (RelNecEmp) y en donde supone que el quíntuplo de un número se traduce en multiplicar el número por 15.

La familia de Andrea

Basa la resolución sobre el hecho de que la diferencia de edades se mantiene constante a lo largo del tiempo (se ofrece un esquema explicativo en la Figura 47) y de que la pregunta del problema se puede transformar en "¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea *la suma de las diferencias de edades entre padre e hijos*?". Así, calcula la diferencia de edad entre el padre y los hijos mediante "40 – 16 = 24" y "40 – 14 = 26" materializando las relaciones $Ap = Dpa + Aa$ y $Ap = Dpf + Af$ (ambas RelNecEmp). A continuación, emplea las relaciones $Sd = Dpa + Dpf$, $Fp = Sd$ y $Fp = T + Ap$ (todas RelNecEmp) para obtener 50 de sumar 24 más 26 y concluir "50 – 40 = $\boxed{10}$".

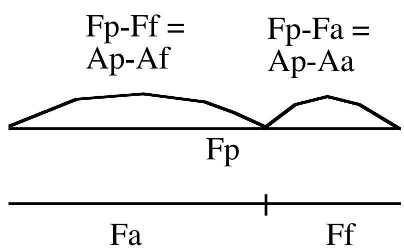


Figura 47.

Marta y María

No abordado.

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

No abordado.

La lotería

No abordado.

El precio del pan

Expresa "$\frac{10}{100} \cdot 55 = \frac{10 \cdot 55}{100} =$"; pero abandona el cálculo. Reduce el problema a la relación $\alpha = Pa \cdot F$ (NoRel, siendo α una cantidad a la que no podemos asignar referente como resultado de la operación aritmética, ni tampoco la alumna se lo asigna).

Tacha lo anterior; escribe "10% → 0,1"; calcula "55 – 0,1 = 54" (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 54,9); y concluye "Total: 54 centimos [sic] era el precio anterior". La estudiante confunde el porcentaje de aumento con el aumento. Asocia el valor de *Pa* a *A* y reduce el problema a la relación $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 5

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "4*x* = 30" (LetCo/EcIn), la transforma en "*x* = 30 – 4" (error de transposición de términos) y obtiene "*x* = 26". La ecuación parece traducir textualmente el fragmento de enunciado "… 30 [30] años tendrá [=] 4 veces [4·] la edad que tiene ahora [*x*]?". Considera que la cantidad *F* toma el valor 30, cuando realmente es el valor de la cantidad *T*, y reduce el problema la relación $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp).

El estudiante parece entender que el valor obtenido anteriormente para la cantidad *A* (26) no es el correcto y decide utilizarlo en una nueva lectura, que expresa en el SMSari, y que le conduce a nuevo valor de *A* (14) sin que observe contradicción en la duplicidad. Así calcula "26 + 30 =56" y "56:4 = 14" y concluye "Tiene 14 años". Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "3*x* + 28 = 5*x* – 4" (LetCo/EcCo); pero obtiene un resultado incorrecto porque se equivoca al dividir "$\frac{-32}{-2} = 17{,}5$" (error en operación aritmética) en el último paso de la resolución. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Representa la cantidad *T* mediante la letra *x* (LetCo) y asigna correctamente una expresión algebraica a las cantidades *Fa*, *Ff* y *Fp* (ver Figura 48). Plantea la ecuación "(16 + *x*) + (14 + *x*) = 40" (EcIn). Obtiene para *x* el valor 5, realiza las operaciones "16 + 5 = 21" y "14 + 5 = 19" y concluye "La suma sera [sic] 21 i [sic] 19". En lugar de ofrecer el valor de *T* como respuesta al problema, nos proporciona *Fa* y *Ff*. Tras la lectura reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ (las tres RelNecEmp) y $Ap = Fa + Ff$ (NoRel).

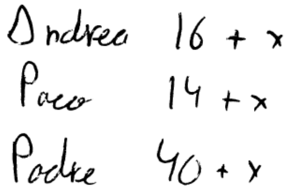


Figura 48.

Marta y María

Plantea la ecuación “$3x + 12 = 2x$” (EcIn), la resuelve correctamente y obtiene “$x = -12$”. Las expresiones “$3x$” y “$2x$” hacen referencia a la edad de María actual y futura, respectivamente y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma \cdot Ah$, $Fm = Vhmf \cdot Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

La visita al teatro

Calcula “$10 - 11 + 11 - 7 = x$” (LetCo/EcIn), obtiene “$x = 3$” y concluye “Hay 3 bancos”. A continuación, calcula “3·10 = 30”, “30 + 11 = 41 niños” y “Hay 11 niños”. También calcula “3·11 = 33” y “33 + 7 = 40 niños”; aunque después lo tacha posiblemente tratando de ocultar la contradicción que suponen los dos valores distintos que toma N. Reduce el problema a las relaciones $B = Na - Pa + Nb - Pb$ (NoRel/EHom), $N = Sa + Pa$, $Sa = B \cdot Na$, $N = Sb + Pb$, $Sb = B \cdot Nb$ (las cuatro RelNecEmp). Las cuatro relaciones correctas serían suficientes para resolver el problema algebraicamente; sin embargo, el estudiante calcula B a partir de una relación inventada evitando utilizar el SMSalg.

Bolígrafos y lapiceros

Calcula “3:5 = 0,6” , “0,6 + 0,25 = 0,85” y concluye “Un boli → 0,85 €” y “Un lapiz [sic] → 0,6 €”. Supone incorrectamente una situación de reparto equitativo en la que utiliza las relaciones $P = L \cdot N$ (NoRel), $N = Nb + Nl$ y $B = L + Mbl$ (ambas RelNecEmp). También escribe “2 bolis → 1.7” lo que supone utilizar la relación $Pb = B \cdot Nb$ (RelCoInn) que siendo correcta y necesaria en otras lecturas, no es lo es en ésta.

La lotería

Calcula “5000:3 = 1.666,6”; escribe “1º → doble que el segundo”, “2º → triple que el tercero” y calcula “1 → 3332” (1666·2 = 3332). Asigna el resultado de aplicar un reparto equitativo a Pb; pero, a continuación, calcula Pa (3332), materializando una relación que entra en contradicción con el hecho de suponer un reparto equitativo. Reduce el problema a las relaciones $P = \alpha \cdot Pb$ (NoRel, siendo α el número de personas entre las que se reparte el premio) y $Pa = Vba \cdot Pb$ (RelNecEmp).

Tacha la solución anterior y concluye “1→1668”, “2→1666” y “3→1666”. Supone que a todos los amigos les corresponde el mismo premio; pero, a continuación, observa que si a todos les correspondieran 1666 €, entonces la suma de los premios no daría 5000 €. Decide compensar en el primer amigo la parte del premio que se pierde en el redondeo al pasar de $1666,\overset{\frown}{6}$ a 1666 (1666+1+1=1668). El estudiante no observa contradicción entre realizar un reparto equitativo inicialmente y considerar que las tres personas no reciben el mismo premio posteriormente. Reduce el problema a las relaciones $P = \alpha \cdot Pb$ (NoRel, siendo α el número de personas entre las que se reparte el premio), $P = Pa + Pb + Pc$ (RelNecEmp, que es la que emplea para compensar los efectos del redondeo), $Pa = Pb$ y $Pb = Pc$ (ambas NoRel).

El precio del pan

Calcula "55·10÷100 = 5.5", "55 – 5.5 = 49,5" y concluye "49,5 cent cuesta". Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en "55 – 5,5 = 49,5" y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 6

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "$x + 30 = 4x$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "S = Consuelo tiene 10 años". Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x - 4$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "S = Se trata del número 16". Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación "$40 + x = 16 + x + 14 + x$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye " S = dentro de 10 años igualarán la edad de su padre". Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

Escribe "María → $3x$" y "Marta → x" y plantea las ecuaciones "$y = 3x$" (correcta) e "$y + 12 = 2x$" (incorrecta). En la primera ecuación utiliza la letra y para referirse a la cantidad Am (LetCo); mientras que la segunda, que es una traducción del fragmento "dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta", usa la letra x para referirse a Fh (LetCo). Reduce el problema a las relaciones $Fm = Vhmf \cdot Fh$, $Am = Vhma \cdot Ah$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

Tacha la solución anterior y plantea la ecuación "$x + 12 = 2x$" (EcIn), que es una traducción literal del fragmento "dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta", donde la letra x representa a Am y Fh (LetPol). La resuelve correctamente obteniendo "$x = 12$" y concluye "La eda [sic] actual de Marta es 12 años y la de su madre 36 años". Reduce el problema a las relaciones $Fm = Vhmf \cdot Fh$ y $Fm = T + Am$, (ambas RelNecEmp).

La visita al teatro

Señala que "x = Nº de niños" e "y = Nº de bancos" (ambas LetCo); Plantea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas "$x = 10y + 11$" y "$x = 11y + 7$" (ambas EcCo). Parece resolverlo por igualación; pero siguiendo un procedimiento idiosincrásico, pues calcula "11 – 7 = 4" y une esta expresión a "y = 4" mediante una flecha. A continuación, calcula "$x = 4 \cdot 10 + 11$" y concluye "S = Hay 51 niños en el grupo". Reduce el problema a las relaciones $N = Sa + Pa$, $N = Sb + Pb$, $Sa = B \cdot Na$ y $Sb = B \cdot Nb$ (todas RelNecEmp).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "boli → $x + 25$"; plantea la ecuación "3 € = 3[x +25] + 2x" (EcIn); la resuelve correctamente y obtiene "x = -14,4". Confunde los valores de las cantidades Nb y Nl, de forma que la ecuación que plantea responde a pagar 3€ por 3 bolígrafos y 2 lapiceros en lugar de por 2 bolígrafos y 3 lapiceros, y utiliza unidades distintas para las magnitud dinero (usa 3 € y 25 céntimos). Asigna la letra x a la cantidad L y reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

Tacha la solución anterior, posiblemente alertada por el valor negativo que obtiene para un precio; vuelve a plantear la misma ecuación y obtiene el mismo resultado incorrecto.

La lotería

Escribe "A → 2[3x]", "B → 3x", "C → x" y "TOTAL → 5000"; transforma la expresión algebraica "$6x + 3x + x$" en "$10x$"; y plantea "$6x + 3x + x = y$" (EcCo). Representa la cantidad Pc mediante la letra x (LetCo) y la cantidad P mediante la letra y (LetCo). Construye la ecuación sobre la igualdad de dos expresiones que hacen referencia la cantidad conocida P; pero sin que se relacionen con el valor que se ofrece como dato (lo que se conseguiría mediante una segunda ecuación que completaría un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o sustituyendo y por 5000). Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (las tres RelNecEmp).

El precio del pan

Plantea la ecuación "x = 55 – 10% de x", la transforma en "$x + \frac{x}{10} = 55$" (LetCo/EcCo), la reduce hasta "$x = \frac{550}{11}$" y ésta en "$x = 11$" (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 50). Tacha lo anterior; plantea la ecuación "$55 = \frac{x}{1} + \frac{10 \cdot x}{100}$" (LetCo/EcCo); la transforma correctamente en "$55 = \frac{x}{10} + \frac{x}{1}$" y ésta en "$55 = x + 10\,x$" (error de transposición de términos, pues no multiplica 55 por 10); concluye "$x = 5$" y tacha la solución. En ambos casos reduce el problema a las relaciones $F = I + A$ y $A = Pa \cdot I$ (ambas RelNecEmp).

Alumno 7

La edad de Consuelo

No abordado.

Números

No abordado.

La familia de Andrea

No abordado.

Marta y María

No abordado.

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

No abordado.

La lotería

No abordado.

El precio del pan

No abordado.

Alumno 8

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "$x + 30 = 4x$" (LetCo/EcCo), la transforma siguiendo la secuencia "$x - 4x = 30$" (error de transposición de términos), "$-3x = 30$", "$x = -10$" y "$\boxed{x = 10}$" (error de transposición de términos). Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x - 4$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Representa la cantidad T mediante la letra x (LetCo) y asigna correctamente una expresión algebraica a las cantidades Fa, Ff y Fp (ver Figura 49). Plantea la ecuación "$x + 16 + 2(x + 14) = x + 40$" (EcIn), comete un error al resolverla al pasar de "$2x = -4$" a "$\frac{-4}{2} = -x$" (error de transposición de términos) y obtiene "$x = 2$". Utiliza las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ (las tres RelNecEmp) y $Fp = Fa + \alpha \cdot Ff$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 2).

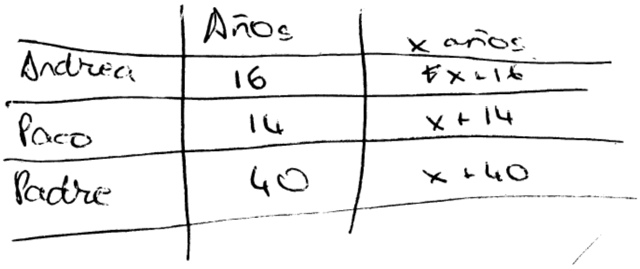


Figura 49.

Tacha lo anterior, plantea la ecuación “16 + x + 14 + x = 40 + x” (EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

Plantea las ecuaciones “3x = x” (EcIn) y “12 + x = 2x” (EcIn) y resuelve la segunda de manera correcta. La ecuación “3x = x” correspondería a “La edad de María es 3 veces la de su hija Marta”; mientras que la ecuación “12 + x = 2x”, correspondería con “dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta”. Concluimos que el estudiante emplea la letra x para representar a Am, Ah y Fh (LetPol) y que reduce el problema a las relaciones $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$, $Fm = T + Am$ y $Am = Vhma{\cdot}Ah$ (las tres RelNecEmp, aunque la última no participa en los cálculos que conducen a la obtención del resultado).

La visita al teatro

Obtiene “21 niños” de sumar 11 más 10; “18 niños” de sumar 11 más 7 y “39 niños” de sumar 21 y 18. Parece interpretar que el problema describe la situación de dos bancos en concreto y no la de cada banco del teatro. Se limita a sumar los niños sentados y de pie que hay junto a cada uno de los dos bancos. Reduce el problema a las relaciones $\alpha = Na + Pa$, $\beta = Nb + Pb$ y $N = \alpha + \beta$ (todas NoRel) y supone que son extensivas las cantidades intensivas Na y Nb (EHom).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe “boli 25 + x”; plantea la ecuación “25 + x = 3” (EcIn); la transforma en “25 – 3 = 1x” (error de transposición de términos) y concluye “22 cent. lapiceros”. A continuación, comprueba la validez del resultado: calcula el precio de tres lapiceros (“3 lapiceros = 66 cent”); el de dos bolígrafos (“2 bolis = 94 cent”); obtiene 160 de sumar 66 más 94; y tacha la solución al encontrar que el precio total no es 300 céntimos. El estudiante utiliza las relaciones $B = L + Mbl$ (RelNecEmp) y $B = P$ (NoRel/EHom) para construir la ecuación y $Pb = Nb{\cdot}B$, $Pl = Nl{\cdot}L$ y $P = Pb + Pl$ para comprobar la validez del resultado.

La lotería

Escribe “1º = 2x”, “2º = 3x” y “3º = x”; plantea la ecuación “2x + 3x + x = 5000” (EcIn); resuelve la ecuación correctamente y concluye “1º = $833{,}\overset{\frown}{3}\cdot 2 = 1666{,}\overset{\frown}{6}$”, “2º = $833{,}\overset{\frown}{3}\cdot 3 = 2499{,}9$” y “3º = 833,3 [sic]”. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión “1º = 2x”, que sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, la letra x representaría a Pb; mientras que en “2º = 3x”, que lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula "10% de 55 = $\frac{10}{100}{\cdot}55 = 0{,}1{\cdot}55 = 5{,}5$" y obtiene "49,5 cent" de restar 5,5 a 55. Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en la segunda operación y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa{\cdot}F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 9

La edad de Consuelo

Escribe "Edad de Consuelo = x" (LetCo), "Dentro de 30 años = + 30" y "4 veces la edad = + 4x"; plantea la ecuación "$x + 30 = 4x$" (EcCo); la resuelve correctamente y obtiene "$x = +10$". Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Escribe "triple de un número = 3x" y "suma 28 unidades = +28", plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x – 4$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Escribe "Andrea = 16", "Paco = 14", "Padre = 40" y "Años = $x + 1$" lo que supone asignar "$x + 1$" a la cantidad T. Esto implica que la letra x se asocia a una cantidad sin referente en el contexto del problema y que podríamos llamar años transcurridos menos uno. Plantea la ecuación "$16 + 14 = 40 + x + 1$" (EcIn); comete un error al transformar "$30 = 41 + x$" en "$x = 41 – 30$" (error de transposición de términos); obtiene "$x = 11$" y concluye "R = Pasarán 11 años". Por lo tanto, utiliza la letra x al plantear la ecuación para referirse a la cantidad años transcurridos menos uno y como T (LetCo, pues no tiene consecuencias sobre la ecuación) cuando interpreta la solución de la ecuación. De la estructura de la ecuación, deducimos que interpreta "¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades *actuales* de los hijos?" sin atender a que esa situación es imposible en el contexto del problema, pues la edad del padre ya supera la suma de las edades de los hijos. En definitiva, reduce el problema a las relaciones $Fp = Aa + Af$ (NoRel) y $Fp = Ap + T$ (RelNecEmp).

Marta y María

Asigna "$3x + x$" a Am "x" a Ah (ver Figura 50); plantea la ecuación "$3x + x = 12$" (EcIn/LetCo); obtiene "$x = 3$" y concluye "Maria [sic] = 3·3·3 = 27" (errata, pues debería ser 3·3 + 3) y "Marta = 3". La flecha que traza desde "María = x" (ver Figura) con destino a la segunda x de "$3x + x$", nos sugiere que inicialmente había considerado Am como "3x". Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah + Ah$ y $Am = T$ (ambas NoRel).

Maria = 3x + x
Marta = x

Figura 50.

La visita al teatro

Escribe “Bancos = x”, lo que supone asignar la letra x a la cantidad B, y plantea “x + 10 = 11 – 7” (EcIn). Reduce el problema a las relaciones $\alpha = B + Na$ (EHom, pues suma bancos a personas por banco), $Nb = \beta + Pb$ (EHom, pues se relacionan aditivamente Nb, que es intensiva, y Pb, que es extensiva) y $\alpha = \beta$ (todas NoRel , siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema).

Tacha la solución anterior; calcula “11·7 = 77”, “77 + 10 = 87” y “87:11 = 7”; y marca como respuesta “7” sin encontrar contradicción en que asistan al teatro menos personas de las que se sientan en un banco. Reduce el problema a las relaciones $\alpha = Pa \cdot Pb$, $\beta = \alpha + Na$ (EHom, las cantidades α y Na refieren a magnitudes distintas) y $\beta = N \cdot Nb$ (todas NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema).

Bolígrafos y lapiceros

Supone una situación de reparto equitativo: obtiene 60 de dividir 300 entre 3 (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 100) y concluye “R = Todo cuesta 60 cent”. Reduce el problema a las relaciones $P = L \cdot Nl$ y $L = B$ (ambas NoRel)

A continuación, tacha la “R” (de resultado) y pasa a considerar el valor 60 una estimación inicial de la cantidad L. Calcula B mediante “60 + 25 cent = 85”; Pb mediante “85 + 85 = 170”; Pl mediante “300 – 170 cent = 130 cent”; obtiene un segundo valor para L calculando “130:3 =$43,\overset{\frown}{3}$”; y concluye “R = Los bolis 85 cent i [sic] los lapices [sic] 43 cent” (eliminando la parte decimal). Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp)

La lotería

Escribe “A = 2x”, “B = 3x” y “C = x”; plantea la ecuación “6x= 5000” (EcIn); la resuelve correctamente; y concluye “A […] → 833·2 → 1666”, “B […] → 833·3 → 2499” y “C […] → 833·1 → 833”. Calcula la suma de los premios que corresponden a cada uno de los amigos, obtiene “4998 € (Redondeo 5000 €)” y concluye “R = A causa de los decimales 4998 €”. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión “A = 2x”, que sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, la letra x representaría a Pb; mientras que en “B = 3x”, que lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula “0,1·55 cent = 5,5”, “55 – 5,5 = 49,5 y concluye “49,5 → $\boxed{\text{50 cent}}$”. Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “55 – 5,5 = 49,5” y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 10

La edad de Consuelo

Plantea “$x + 30 = 4x$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación “$3x + 28 = 5x – 4$” (LetCo/EcCo) y comete dos errores al resolverla: al pasar de “$3x – 5x = -4 – 28$” a “$-2x = -36$” (error en operación aritmética) y de “$-2x = -36$” a “$x = \frac{-36}{-2} = 9$” (error en operación aritmética). Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Obtiene 30 de sumar 16 más 14, calcula “16 + 30 = 46”, “14 + 30 = 44” y “40 + 30 = 70”. Reduce el problema a $\delta = Aa + Af$, $\alpha = Aa + \delta$, $\beta = Af + \delta$ y $\gamma = Ap + \delta$ (todas NoRel, siendo α, β, y γ cantidades sin referente en el contexto del problema y donde δ representaría a la suma de las edades actuales de los hijos).

Marta y María

Plantea la ecuación “$3x + 12 = 2x$” (EcIn); la transforma en “$3x – 2x = -12$”, y ésta en “$-x = -12$” (error en operación algebraica), y obtiene “$x = 12$”. Las expresiones “$3x$” y “$2x$” hacen referencia a la edad actual y futura de María, respectivamente y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma \cdot Ah$, $Fm = Vhmf \cdot Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

La visita al teatro

Se limita a realizar la operación 10 más 11 igual a 21 que podemos interpretar como un uso de la relación $\alpha = Na + Pa$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema), que conecta mediante una relación aditiva una cantidad intensiva (Na) y una extensiva (Pa) (EHom).

Bolígrafos y lapiceros

Obtiene 0,6 de dividir 3 entre 5, lo que podemos interpretar como el precio unitario de bolígrafos y lapiceros si ambos costaran lo mismo. Decide compensar la diferencia de precios añadiendo y quitando *Mbl* a este valor, sin atender a que de ese modo la diferencia de precios es de 50 céntimos. Así, obtiene “0,85 bolígrafo” de sumar 0,6 más 0,25 y “0,35 lapiz [sic]” de restar 0,25 a 0,6. Redondea ambos resultados (asociando a B el valor 0,90 y a L, 0,40) y lleva a cabo una serie de cálculos con la intención de comprobar la validez del resultado: obtiene “1,80 €” de multiplicar 0,90 por 2; “1,20 €” de multiplicar 0,40 por 3; y “3,00 €” de sumar 1,80 y 1,20. Utiliza las relaciones $N = Nb + Nl$, $P = Prp \cdot N$ (ambas RelNecEmp), $B = Prp + Mbl$ y $Prp = L + Mbl$ (las dos NoRel) para llegar al resultado y $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$ y $P = Pb + Pl$ (las tres RelNecEmp) para comprobar la validez del mismo.

La lotería

Calcula “5000:3 = 1,666… [sic]” (errata), lo que supone considerar una situación de reparto equitativo. Considera las relaciones $Pb = Pa$ y $Pc = Pa$ y utiliza $P = Pa\cdot\alpha$, (las tres NoRel, siendo α el número de personas entre las que hay que repartir el premio).

El precio del pan

Calcula “10% de 55 = $\frac{10}{100}\cdot 55 = 0{,}1\cdot 55 = 5{,}5$”, obtiene 0,50 de restar 0,5 a 0,55 (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 0,05) y concluye “R = 0,50 €”. Comete un error de conversión de unidades al pasar 5,5 céntimos a euros (a 5,5 céntimos le asigna 0,5 €). Consideramos que el valor 5,5 (que ha convertido a 0,5) representa a la cantidad A por el uso que hace de este valor en la segunda operación y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa\cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 11

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación “$x + 30 = 4x$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa\cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación “$3x + 28 = 5x - 4$” (LetCo/EcCo) y comete dos errores al resolverla: al pasar de “$3x - 5x = -4 - 28$” a “$-2x = -36$” (error en operación aritmética) y de “$-2x = -36$” a “$x = \frac{-36}{-2} = 9$” (error en operación aritmética). Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Calcula “16 + 14 = 30” y abandona la solución. Reduce el problema $\alpha = Aa + Af$ (NoRel, donde α representaría a la suma de las edades actuales de los hijos).

Marta y María

Plantea la ecuación “$3x + 12 = 2x$” (EcIn), la resuelve correctamente y obtiene “$x = -12$”. Las expresiones “$3x$” y “$2x$” hacen referencia a la edad de María actual y futura, respectivamente y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma\cdot Ah$, $Fm = Vhmf\cdot Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

Obtiene 0,6 de dividir 3 entre 5, lo que podemos interpretar como el precio unitario de bolígrafos y lapiceros si ambos costaran lo mismo. Reduce el problema a una situación de reparto equitativo que utiliza las relaciones $N = Nl + Nb$ y $P = Prp{\cdot}N$ (ambas RelNecEmp).

La lotería

Obtiene 10000 de multiplicar 5000 por 2 y 15000 de multiplicar 5000 por 3. Considera que los 5000 € de premio es lo que corresponden al amigo (el primero, según la estudiante) al que le toca la parte menor e interpreta linealmente el enunciado para obtener lo que le corresponde a los otros dos protagonistas. Al multiplicar 5000 por 2 supone "el primero [5000] juega el doble [·2] que el segundo [10000]"; mientras que multiplicar 5000 por 3 implica "y éste [interpreta el primero y le asigna el valor 5000] el triple [·3] que el tercero [15000]". Asigna el valor de la cantidad P a Pa y reduce el problema a las relaciones $Pb = Pa{\cdot}Vba$ (RelInO) y $Pc = Pa{\cdot}Vcb$ (NoRel).

El precio del pan

Calcula "10% de 55 = $\frac{10}{100}\cdot 55 = 0{,}1\cdot 55 = 5{,}5$". Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al precio inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa{\cdot}F$ (NoRel).

Alumno 12

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "$x + 30 = 4x$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x – 4$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T{\cdot}N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación "$(16 + x) + (x + 14) = 40 + x$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "$x = 10$ años deben pasar". Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

Escribe "María = $3x$" y "Marta = x"; plantea la ecuación "$3x + 12 = 2x$" (EcIn); la resuelve correctamente; y concluye "$x = 12$ años Marta" y "$12\cdot 3 = 36$ años María". Las expresiones "$3x$" y "$2x$" hacen referencia a la edad actual y futura de María, respectivamente y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

La visita al teatro

Plantea la ecuación "$\frac{10}{x} = x + 11$" (EcIn) e inmediatamente la tacha. Interpretamos que utiliza la letra x para representar a la cantidad N (LetCo) y que reduce el problema a las relaciones $Na = N{\cdot}\alpha$, $\beta = N + Pa$ y $\alpha = \beta$ (ambas NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema). La cantidad α refiere a la magnitud inversa del número de bancos en la primera relación (pues "$\frac{10}{x}$" tiene por ecuación de dimensiones $\frac{\text{personas/bancos}}{\text{personas}} = \frac{1}{\text{bancos}}$), mientras que β lo hace a número de personas (pues "x + 11" tiene por ecuación de dimensiones personas + personas = personas) (EHom).

Bolígrafos y lapiceros

Plantea la ecuación "$x + 25 = \frac{3}{3} + 2$" (LetCo/EcIn) que supone la igualdad de la cantidad B y otra sin referente en el contexto del problema. La ecuación incluye una suma de cantidades ("3/3 + 2") que refieren a magnitudes distintas (EHom). Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$ (RelNecEmp), $\alpha = \frac{P}{Nl} + Nb$ y $B = \alpha$ (las tres NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Tacha la solución anterior; plantea la ecuación "$3(x + 25) + 2x = 300$" (LetCo/EcIn); la resuelve correctamente y concluye "45 céntimos un bolígrafo" y "45 + 25 = 70 céntimos un lapicero". La ecuación respondería a pagar 3 € por 3 bolígrafos y 2 lapiceros en lugar de 2 bolígrafos y 3 lapiceros. Intercambia los valores de las cantidades Nl y Nb y reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb{\cdot}B$, $Pl = Nl{\cdot}L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

Tacha la solución anterior; plantea "$3x + 2(x + 25) = 300$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "50 c. lapicero" y "75 c. bolígrafo". Emplea las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb{\cdot}B$, $Pl = Nl{\cdot}L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

La lotería

Plantea la ecuación "$2(3x) + 3x + x = 5.000$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente; y concluye "$x = \frac{5.000}{10} = 500$ € el 3º", "500·3 = 1.500 € el 2º" y "1.500·2 = 3.000 € el 1º". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Plantea la ecuación "$x{\cdot}1{,}1 = 55$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Pf = Pa + Pi$ y $F = Pf{\cdot}I$ (ambas RelNecEmp).

Alumna 13

La edad de Consuelo

Calcula "4·30 = 120", "$\frac{120}{4} = 30$" y concluye "R: Consuelo tiene 30 años". Asigna el valor de la cantidad T a la cantidad A, con lo que transforma A en cantidad conocida, y utiliza la relación $F = Vfa{\cdot}A$ (RelNecEmp) en ambas operaciones. Interpretamos la segunda operación, que deshace lo que hace la primera, como una respuesta a la necesidad de expresar el resultado como fruto de una operación aritmética.

Números

No abordado.

La familia de Andrea

Representa la cantidad *T* mediante la letra *x* (LetCo) y asigna correctamente una expresión algebraica a las cantidades *Fa*, *Ff* y *Fp* (ver Figura 51). Plantea la ecuación "(16 + *x*) + (12 + *x*) = 40 + *x*" (EcIn), en la que la presencia de la expresión "12 + *x*" parece un error a la hora de copiar "14 + *x*" (errata) de la tabla a la ecuación. Obtiene "*x* = 12" al resolver la ecuación y comprueba el resultado mediante "16 + 12 = 28", "14 + 12 = 26", "40 + 12 = 52" y "28 + 26 = 52" (error en operación aritmética, el resultado correcto es 54). Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

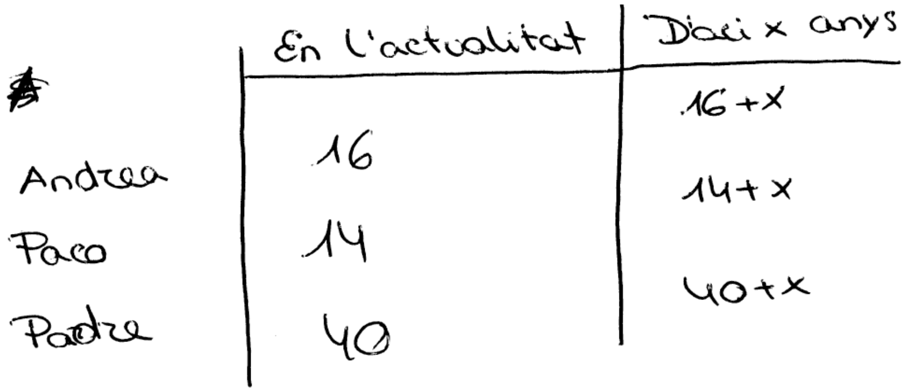


Figura 51.

Marta y María

No abordado.

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

No abordado.

La lotería

No abordado.

El precio del pan

Considera un esquema de regla de tres (ver Figura 52), plantea la ecuación "$\frac{x}{100} = \frac{55}{10}$" (LetCo/EcIn) y la transforma en "$x = \frac{55 \cdot 100}{10}$ = 550. Considera que el precio final es el 10% del precio inicial lo que implica reducir el problema a la relación $\frac{Na}{Ni} = \frac{F}{I}$ (NoRel).

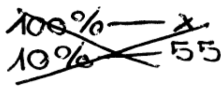


Figura 52.

Tacha el planteamiento anterior y reconsidera el esquema de regla de tres (ver Figura 53). Plantea la ecuación “$\frac{55}{100}=\frac{x}{10}$” (LetCo/EcIn); la transforma en “$x = \frac{55 \cdot 10}{100} = 5{,}5$”; calcula “55 – 5,5 = 49,5”; y concluye “R: el precio anterior era de 49,5 centimos [sic]”. Suponemos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “55 – 5,5 = 49,5” y que presume erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $\frac{Na}{Ni}=\frac{A}{F}$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

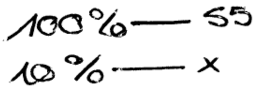


Figura 53.

Alumna 14

La edad de Consuelo

En un primer intento escribe el fragmento de ecuación “4(x + 30) =” (LetCo) en el que en lugar de expresar “tendrá 4 veces la edad que tiene ahora”, formula “tendrá 4 veces la edad que *tendrá dentro de 30 años*”. A continuación transforma “4(x + 30)” en “4x + 30” (error en operación algebraica) aplicando incorrectamente la propiedad distributiva. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ (RelNecEmp) y $\alpha = Vfa \cdot F$ (NoRel, donde α representaría a 4 veces la edad futura).

Tacha la solución anterior, plantea la ecuación “3x + 5 = 30” (LetCo/EcIn), la transforma en “3x = 25” y ésta en “x = 25” (error de transposición de términos). En esta ecuación aparecen dos valores no presentes en el enunciado del problema, 3 y 5, a los que no les podemos asociar una cantidad en el contexto del problema. Reduce el problema a la relación $T = \alpha \cdot A + \beta$ (NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema y donde α toma el valor 3 y β el valor 5).

Números

Escribe “x + ×3 + 28 =”. La estudiante considera la comparación entre dos cantidades mediante la estructura conceptual “tantas veces” como una relación aditiva y representa de forma idiosincrásica el triple mediante “×3”, donde la x refiere al signo de multiplicación en lugar de hacerlo a la incógnita. Reduce el problema a las relaciones $Nt = N + T$ (RelInR) y $Ntv = Nt + V$ (RelNecEmp).

La familia de Andrea

Se limita a escribir las edades actuales de los protagonistas: “Andrea → 16”, “Paco → 14” y “Padre → 40”.

Marta y María

Escribe "María $x + 3$", Marta "x" y la expresión algebraica "$x + 3 + 12$". Utiliza la letra x (LetCo) para representar a la cantidad Ah y supone que "3 veces" es sumar 3. Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma + Ah$ (RelInR/EHom) y $Fm = T + Am$ (RelNecEmp).

La visita al teatro

Escribe "10 n → x banco" (LetCo), "11 n → sin sitio", "11 n → x banco", "7 n → sitio" y "$\frac{x}{10} + \frac{x}{10}$". Reduce el problema a las relaciones $B = \alpha \cdot Na$ y $\beta = \alpha + \alpha$ (ambas NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "1 → 25 c + 1" y "$x + 25$". La letra x representa a la cantidad L y "$x + 25$" materializa la relación $B = L + Mbl$ (RelNecEmp).

La lotería

Escribe "1º → 2× q el 2º = 3× de 3º", lo que parece expresar de manera abreviada el fragmento del enunciado "el primero juega el doble que el segundo y éste el triple que el tercero". Las × que aparecen en "2×" y "3×" las interpretamos como signo de multiplicación.

El precio del pan

Calcula "10% de 55 = 55·0,1 = 5,5 cent". Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al precio inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa \cdot F$ (NoRel).

Alumno 15

La edad de Consuelo

En el primero intento, escribe la ecuación "$x = 4x$" (LetCo/EcIn), la resuelve y obtiene "$x = 0$". Utiliza las relaciones $A = F$ (NoRel) y $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp).

Posiblemente alertado por obtener el valor cero para una edad, tacha lo anterior y escribe la ecuación "$x = 30 + 4x$" (LetCo/EcIn). Podemos interpretarla como una traducción lineal del enunciado "¿Cuál es la edad de Consuelo [x] si [=] dentro de 30 [30 +] años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora [$4x$]?" en la que utiliza las relaciones $A = T + F$ (RelInO) y $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp). Al resolverla, obtiene una solución negativa que probablemente le sugiere que ha errado el planteamiento.

Tacha lo anterior y calcula "$x = \frac{30}{4} = 7{,}5$". Asigna el valor de T (30) a la cantidad F y utiliza la relación $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp). Esta asignación incorrecta le permite resolver el problema utilizando un SMSari-alg en el que usa la letra x como representación de una cantidad que siempre aparece aislada.

Por último, plantea la ecuación "$x + 4x = 30$" (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a la relación $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp) y $T = F + A$ (RelInO).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x - 4$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación "$16x + 14x = 40x$" (LetCo/EcIn); la resuelve correctamente y concluye "$x = \frac{0}{-10}$". Considera multiplicativa la relación entre el tiempo transcurrido y las edades inicial y final. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa{\cdot}T$, $Ff = Af{\cdot}T$, $Fp = Ap{\cdot}T$ (las tres RelInR/EHom) y $Fp = Fa + Ff$ (RelNecEmp).

Tacha la solución anterior, posiblemente alertado por el resultado obtenido, y realiza una segunda lectura del problema. Escribe "Andrea $16 + x$", "Paco $14 + x$" y "Padre $40 + x$"; plantea "$16 + x + 14 + x = 40 + x$" (LetCo/EcCo); transforma "$-10 = -1x$" en "$x = \frac{1}{10}$" (error de transposición de términos) durante la solución y vuelve a tachar desconfiando del resultado no entero. Considera las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Por último, calcula "$16 + 14 = 30$", "$40 – 30 = 10:2 = 5$" y comprueba la validez de la solución mediante "$16 + 5 = 21$", "$14 + 5 = 19$" y la suma de 21 más 19 de la que obtiene como resultado 40. Interpreta la pregunta del problema como "¿Cuántos años han de pasar para que [el valor de] la edad *actual* del padre sea la suma de las edades *futuras* de los hijos?" y resuelve mediante un planteamiento que podríamos interpretar geométricamente como se muestra en la Figura 54. Reduce el problema a las relaciones $\gamma = Aa + Af$, $Ap = \alpha + \gamma$ y $\alpha = \beta{\cdot}T$ (las tres NoRel, donde α será la suma de los aumentos de edad de cada hijo, β el número de hijos y γ la suma de las edades actuales de los hijos) y también utiliza $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Ap = Fa + Ff$ (incorrecta) en la comprobación.

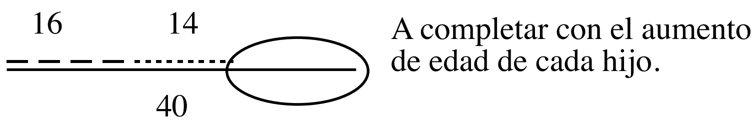


Figura 54.

Marta y María

Plantea la ecuación "$3x = 2x + 12$" (EcIn) y la resuelve correctamente. El estudiante realiza una traducción lineal del enunciado "La edad de María es 3 veces la de su hija Marta [$3x$]… pero [=] dentro de 12 años [+ 12], la edad de María será solamente el doble que la de Marta [$2x$]". Utiliza la letra x para representar a la cantidad Ah y a la cantidad Fh (LetPol) y reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ (ambas RelNecEmp) y $Am = T + Fm$ (RelInO, sobre la que se plantea la ecuación).

La visita al teatro

Escribe "10/banco → 11 sin", "11/banco → 7 sin"; calcula "$10{\cdot}11 = 110$" y "$11{\cdot}7 = 77$" y obtiene 187 de sumar 110 más 77. Emplea las relaciones $\alpha = Na{\cdot}Pa$, $\beta = Nb{\cdot}Pb$ y $N = \alpha + \beta$ (todas NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema), con lo que asigna a la cantidad N una magnitud que no refiere a número de personas (EHom).

Bolígrafos y lapiceros

Calcula "3:3 = 1:2 = 0,5 + 0,25 = 0,75" y concluye "1 boli – 0,75" y "1 lápiz – 0,5". Realiza dos repartos consecutivos del precio entre el número de lápices y bolígrafos y tiene la fortuna de obtener el valor de L como resultado. Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$ (RelNecEmp), $P = Nl\cdot\alpha$ y $\alpha = L\cdot Nb$ (ambas NoRel), siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema, que se considera intensiva en $P = Nl\cdot\alpha$ y extensiva en $\alpha = L\cdot Nb$ (EHom).

La lotería

Escribe "1º 6x", "2º 3x" y "3º x"; plantea la ecuación "6x + 3x + x = 5000" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "1º 3000", "2º 1500" y "3º 500 €". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba\cdot Pb$, $Pb = Vcb\cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Plantea la ecuación "x·0,1 = 0,55" (LetCo/EcIn), obtiene "x = 5,5 cents" y calcula "55 – 5,5 = 49,5 cents". Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en "55 – 5,5 = 49,5 cents" y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa\cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 16

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "x = 30·4x" (LetCo/EcIn) y no la resuelve. Podemos interpretar la ecuación como una traducción sintáctica del fragmento del enunciado: "¿Cuál es la edad de Consuelo [x] si dentro [=] de 30 años tendrá [30·] 4 veces [4·] la edad que tiene ahora [x]?", en la que considera multiplicativa la relación entre las edades y el tiempo transcurrido. Reduce el problema a las relaciones $A = T\cdot F$ (RelInR/EHom) y $F = Vfa\cdot A$ (RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "3x + 28 = 5x – 4" (LetCo/EcCo); la transforma en "3x – 5x = 4 + 28" (error de transposición de términos, pues se observa que tacha el signo menos que precede al 4 y que no cambia de signo a 28); ésta en "2x = 32" (error en operación algebraica, pues debería dar -2x) y obtiene "x =16". Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Representa la cantidad T mediante la letra x (LetCo) y asigna expresiones algebraicas (ver Figura 55) a las cantidades Fa, Ff y Fp; escribe "16 + x + 14 + x"; y la transforma incorrectamente en "16 + x + 14 + x = 32x" (error en operación algebraica, pues obtiene 32x de 16 + 14 + 2 de cada x). Plantea la ecuación "x = 32x + 40", que proviene de una transformación incorrecta de x + 40 = 32x (EcIn y error de transposición de términos);

la transforma en "x – 32x = 40" y ésta en "x = 40 – 32" (error en operación algebraica y error de transposición de términos); obtiene "x = 9" y concluye "An [sic] de pasar 9 años". Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

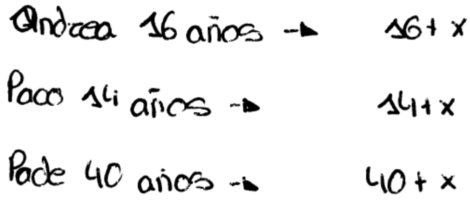


Figura 55.

Marta y María

Plantea la ecuación "3x = 12·2x" (EcIn); la transforma en "$\frac{3x}{2x}$ = 12" y ésta en "x = 1.5·12" (error en operación algebraica y error de transposición de términos); obtiene "x = 18" y concluye "Maria [sic] tiene 54 años" y "Marta tiene 18 años". Las expresiones "3x" y "2x" hacen referencia a la edad actual y futura de María, respectivamente, y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). La estudiante traduce la acción del tiempo transcurrido sobre la edad como una relación multiplicativa y reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ (ambas RelNecEmp) y $Am = T{\cdot}Fm$ (RelInR/EHom).

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "boligrafo [sic] → 2x" y "lapicero → 25". Asigna el valor de la cantidad Mbl a la cantidad L, la letra x representa a una cantidad indeterminada (que representamos por α) y utiliza la relación $B = \alpha{\cdot}\beta$ (NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema y tomando β el valor 2).

La lotería

No abordado.

El precio del pan

Calcula "55 de 10 → $\frac{55 \cdot 10}{100}$ = 5,5". Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al precio inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa{\cdot}F$ (NoRel).

Alumna 17

La edad de Consuelo

Plantea "4(x + 30) = 0" (LetCo/EcIn), la resuelve correctamente y obtiene "$x = \frac{-120}{4}$ =". Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ (RelNecEmp) y $\alpha = Vfa{\cdot}T$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 0).

Tacha la solución anterior, posiblemente alarmada por el resultado negativo; plantea la ecuación "x + 30 = 4x" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y obtiene "x = 10 años". Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "3x + 28 = 5x – 4" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación "16 + 14 = 40x" (LetCo/EcIn), la transforma en "30 = 40x" y ésta en "x = -30" (error de transposición de términos). Considera que las cantidades tiempo transcurrido, edad inicial y edad final están relacionadas multiplicativamente y supone que el problema pregunta "¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades *actuales* de los hijos?" sin atender a que esa situación es imposible en el contexto del problema, pues la edad del padre ya supera la suma de las edades de los hijos. En definitiva, reduce el problema a las relaciones $Fp = Aa + Af$ (NoRel) y $Fp = Ap{\cdot}T$ (RelInR/EHom).

Marta y María

Escribe "María → 3x" y "dentro de 12 años → 2x", plantea la ecuación "3x + 12 = 2x" y la resuelve correctamente y obtiene "x = -12". Las expresiones "3x" y "2x" hacen referencia a la edad actual y futura de María, respectivamente y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

La visita al teatro

Plantea la ecuación "$\frac{x}{10} - 11 = \frac{x}{11} - 7$" (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente. Asigna la letra x a la cantidad N e iguala dos expresiones distintas que hacen referencia a la cantidad B. El problema plantea dos situaciones de división con resto y como tal las considera la estudiante; pero, al plasmar las relaciones en la ecuación, transforma $D = d \cdot c + r$ en $c = \frac{D}{d} - r$, en lugar de transformarla en $c = \frac{D - r}{d}$ (error de transposición de términos). Como consecuencia, la estudiante expresa en la ecuación una resta entre cantidades que no refieren a la misma magnitud, pues $\frac{x}{10}$ representa número de bancos y 11, número de niños (EHom). Reduce el problema a las relaciones $N = Sa + Pa$, $N = Sb + Pb$, $Sa = B{\cdot}Na$ y $Sb = B{\cdot}Nb$ (todas RelNecEmp).

Bolígrafos y lapiceros

Calcula “$\frac{3-0{,}50}{5}=\frac{2{,}50}{5}=0{,}5$” y concluye “R → 0,5 → cada lápiz [abajo] 0,75 → cada bolígrafo”. Elimina el exceso de precio de los dos bolígrafos convirtiendo el problema a una nueva situación en la que sólo se consideran lápices. Reduce el problema a las relaciones $Peb = Nb{\cdot}Mbl$, $P = Peb + Pqe$, $Ph = Pqe$, $N = Nb + Nl$, $Ph = N{\cdot}L$ y $B = L + Mbl$ (todas RelNecEmp).

La lotería

Escribe “3º → x”, “2º → $3x$” y “1º → $6x$”; plantea la ecuación “$x + 3x + 6x = 5000$” (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente; y concluye “3º → 500€”, “2º → 1500€” y “1º → 3000€”. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio de pan

Convierte 55 céntimos a 0,55 euros, calcula “0,55 – 10% = 0,495 €” y concluye “R → Precio anterior = 0,495 €”. El 10% presente en la ecuación es sustituido por el valor 0,055 que se obtiene de calcular el 10% de 0,55. Consideramos que asigna el valor 0,055 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “0,55 – 10% [0,055] = 0,495 €” y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa{\cdot}F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 18

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación “$x + 30 = 4x$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Inicialmente plantea “$3x + 28 = 5x + 4$” (LetCo/EcIn) en la que se observa que en lugar de restar 4 unidades, las suma. Utiliza las relaciones correctas $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$ y $Ntv = Nqc$ (las cuatro RelNecEmp) y $Nqc = Nq + C$ (RelInO).

Tacha la solución anterior, plantea la ecuación “$3x + 28 = 5x – 4$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Escribe “An 16 + x”, “Pa 14 + x” y “Pad 40 + x”, lo que supone asignar la letra x a la cantidad T (LetCo) y reducir el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$ y $Fp = Ap + T$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

No abordado.

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

Se limita a escribir “$x + 25$” materializando la relación $B = L + Mbl$ (RelNecEmp).

La lotería

Plantea la ecuación “$2x + x + 3x = 5.000$” (EcIn), la resuelve correctamente y concluye “$x = 5000/6 = 833,\widehat{3}$”. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). La expresión “$2x$” sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, donde la letra x representaría a Pb; mientras que “$3x$” lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, donde la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula “100 + 10 = 110”, “1,10*55 ce = 60,5” y abandona la solución posiblemente al observar que el precio del pan disminuía tras el aumento de precio. Reduce el problema a las relaciones $Pf = Pa + Pi$ (RelNecEmp) e $I = Pf{\cdot}F$ (RelInO).

Tacha la solución anterior, plantea “10% de $x = 55$” y calcula “$x = 55{:}10 = 5,5$” y “55 – 5,5 = 49,5 cént.”. Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “55 – 5,5 = 49,5 cént.” y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Utiliza la letra x para representar a la cantidad A (LetCo) y reduce el problema a las relaciones $A = Pa{\cdot}F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 19

La edad de Consuelo

Interpreta la información que se muestra en la Figura 56 como un esquema de regla de tres y propone calcular “$\frac{x(x+30)}{4x}$” con la intención de determinar la cantidad que llama “ahora” (la que nosotros llamamos A). Transforma la expresión “$\frac{x(x+30)}{4x}$” en “$\frac{2x+30x}{4x}$” (error en operación algebraica); ésta, en “$\frac{32x}{4x}$”; y, por último, concluye “$8x$” (error en operación algebraica). Reduce el problema a $F = A + T$, $F^* = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp) y $\frac{A^*}{A} = \frac{F}{F^*}$ (NoRel).

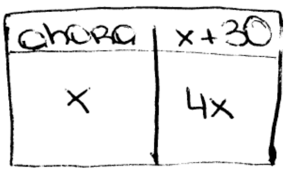


Figura 56.

Tacha la solución anterior; planeta la ecuación “$x = x + 30 + 4x$” (LetCo/EcIn); la resuelve correctamente y, posiblemente alertada por el valor negativo que obtiene, tacha la solución. Volviendo a tomar como referencia lo expresado en la tabla (ver Figura 56), parece que realiza una traducción lineal del enunciado “¿Cuál es la edad de Consuelo [x] si [=] dentro de 30 años [$x + 30$] tendrá 4 veces [4·] la edad que tiene ahora [x]?”.

Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$, $F^{*} = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp) y $A = F + F^{*}$ (NoRel).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x - 4$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Escribe "x años" (LetCo); plantea la ecuación "$40x = 16 + x + 14 + x$" (EcIn); la resuelve correctamente y obtiene "$x = \frac{30}{38}$". Resulta difícil interpretar por qué en un caso integra el tiempo transcurrido en una relación aditiva con las edades actuales y futura y en otro caso en una multiplicativa. Reduce el problema a las relaciones $Fp = Ap{\cdot}T$ (RelInR/EHom), $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (las tres RelNecEmp).

Tacha la solución anterior, posiblemente alertada porque el resultado no sea entero; calcula "$16 + 5 = 21$", "$14 + 15 = 29$", "$21 + 29 = 50$"; concluye "$x = 10$" y tacha la solución. La estudiante considera que el tiempo pasa de forma distinta para los dos hijos sin hallar contradicción en suponer valores diferentes. Obtiene las edades futuras de los hermanos asignado arbitrariamente valores (5 y 15) a la cantidad tiempo transcurrido (T) lo que supondría dar por el resuelto el problema. El resultado final (10) que asigna a la cantidad T supone que para el padre tampoco pasa la misma cantidad de tiempo. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$ (asignando a T el valor 5), $Ff = Af + T$ (asignando a T el valor 15), $Fp = Fa + Ff$ y $Fp = Ap + T$ (todas RelNecEmp). En definitiva, la estudiante realiza una lectura algebraica del problema, pero en lugar de expresarla mediante el SMSalg, asigna valores a T de forma arbitraria para evitar trabajar con lo desconocido.

Marta y María

Asigna "$3x$" a Am, "$3x + 12$" a Fm, "x" a Ah y "$2x + 12$" a Fh (ver Figura 57); plantea la ecuación "$3x + 12 = 0$" (LetCo/EcIn); obtiene "$x = -4$ y calcula "$3{\cdot}(-4) = -12$". Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = T + Am$ (ambas RelNecEmp), $Fm = Vhmf{\cdot}Ah$, $Fh = Fm + T$ (ambas NoRel, aunque no participan en lo cálculos que conducen a la determinación del resultado) y $Fm = \alpha$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 0).

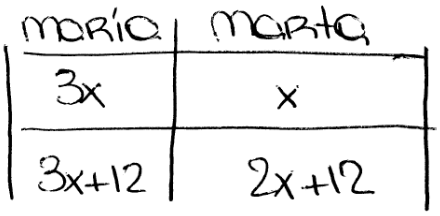


Figura 57.

La visita al teatro

Plantea la ecuación "$\frac{x}{10} - 11 = \frac{x}{11} - 7$" (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente. Asigna la letra x a la cantidad N e iguala dos expresiones distintas que hacen referencia a la cantidad B. El problema plantea dos situaciones de división con resto y como tal las considera la estudiante; pero, al plasmar las relaciones en la ecuación, transforma $D = d \cdot c + r$ en $c = \frac{D}{d} - r$, en lugar de transformarla en $c = \frac{D - r}{d}$ (error de transposición de términos). Como consecuencia, la estudiante expresa en la ecuación una resta entre cantidades que no refieren a la misma cantidad, pues $\frac{x}{10}$ representa número de bancos y 11, número de niños (EHom). Reduce el problema a las relaciones $N = Sa + Pa$, $N = Sb + Pb$, $Sa = B \cdot Na$ y $Sb = B \cdot Nb$ (todas RelNecEmp).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "1 boli → 25 + *x*" y "1 lápiz → *x*"; plantea la ecuación "3*x* + 2(25 + *x*) = 300" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente; obtiene "50 = *x*" y concluye "boli = 25 + 50 = 75 → 0,75 €" y "lápiz = 50 → 0,50 €". Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

La lotería

Escribe "Primero → 2·3*x*", "Segundo → 3*x*" y "Tercero → *x*"; plantea la ecuación "2·3*x* + 3*x* + *x* = 5000" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente; y concluye "Primero → "2·3·500 = 3000 €", "Segundo → 3·500 = 1500 €" y "Tercero → *x* = 500 €". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Plantea "$\frac{10}{100} = \frac{x}{55}$ → 5,5" (LetCo/EcIn) y calcula "55 + 5,5 = 60,5 ≈ 60 cént/€" (redondea incorrectamente). Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento y añade el aumento al precio final en lugar de restarlo. La estudiante no observa contradicción en que el precio del pan sea menor tras una aumento y reduce el problema a las relaciones $A = F \cdot Pa$ (NoRel) e $I = F + A$ (RelInO).

Alumno 20

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "*x* + 30 = 4*x*" (LetCo/EcCo); la transforma "*x* – 4*x* = -30" y ésta en "3*x* = -30" (error en operación algebraica); pasa de "*x* = -30:3 = -10" a "-*x* = -10" (error de transposición de términos), posiblemente movido por la necesidad de obtener un valor positivo para la edad; y concluye "*x* = 10". Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "3*x* + 28 = 5*x* – 4" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación “(16 + 14 + x) = 40 + x” (LetCo/EcIn), donde supone que sólo pasa tiempo para uno de los dos hermanos posiblemente para no hacer pasar más tiempo a un lado que a otro de la ecuación. Al resolver la ecuación se encuentra con “$x - x = 40 - 16 - 14$”, lo que implicaría la cancelación de las equis, y lo soluciona omitiendo la operación (error en operación algebraica) y escribiendo “$x = 10$”. Reduce el problema a las relaciones $Fp = Aa + Ff$ (NoRel), $Ff = Af + T$ y $Fp = Ap + T$ (ambas RelNecEmp).

Marta y María

Plantea las ecuaciones “$3x = x$” (EcIn) y “$x + 12 = 2x$” (EcIn) y resuelve la segunda de manera correcta. La ecuación “$3x = x$” correspondería a “La edad de María es 3 veces la de su hija Marta”; mientras que la ecuación “$x + 12 = 2x$”, correspondería con “dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta”. Concluimos que el estudiante emplea la letra x para representar a Am, Ah y Fh (LetPol) y que reduce el problema a las relaciones $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$, $Fm = T + Am$ y $Am = Vhma{\cdot}Ah$ (las tres RelNecEmp, aunque la última no participa en los cálculos que conducen a la obtención del resultado).

La visita al teatro

Considera que existe un relación de proporcionalidad compuesta entre las cantidades B, Na-Nb y Pa-Pb; aunque esto es imposible pues la cantidad B es la misma (ver Figura 58) en ambas situaciones. De acuerdo con esto, intenta plantear una ecuación que plasme la relación; pero no consigue expresar el término que reflejaría el valor de B en las dos situaciones. Así, calcula “$\frac{10}{11} : \frac{11}{7} = \frac{70}{121} = 17$, que sustituye por “$\frac{10}{11} \cdot \frac{11}{7} = \frac{110}{77} =$”, y “$\frac{10+11}{11+7} = \frac{21}{18}$” (error en operación aritmética, pues suma denominadores en lugar de reducir a común denominador). Concluimos que reduce el problema a la relación $\alpha = \frac{Na}{Nb} \cdot \frac{Pa}{Pb}$ (NoRel).

Figura 58.

Tras tachar lo anterior, escribe la ecuación “$x + 10 - 11 = x + 11 - 7$” que responde a la simetría de las situaciones en lugar de hacerlo a la igualdad de cantidades. Las operaciones entre el número de bancos, el número de personas sentadas y el número de personas de pie pretenden representar la información que ofrece el enunciado de una forma idiosincrásica: las personas que se sientan se suman; las que se quedan de pie se restan. Atendiendo a las relaciones que se establecen entre las cantidades, sin buscar el porqué se hace del modo que se hace, encontramos que comparten una misma relación aditiva cantidades intensivas (Na y Nb) con cantidades extensivas (Pa y Pb) y cantidades (B, que representa a número de bancos, y Pa o Pb, que representa a número de personas) cuyas magnitudes no refieren a la misma magnitud (EHom). De la ecuación que plantea podemos deducir que reduce el problema a las relaciones $\alpha = B + Na - Pa$, $\beta = B + Nb - Pb$ y $\alpha = \beta$ (todas NoRel).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "boli = x + 25" y "lápiz = x"; plantea la ecuación "3x + (x + 25) + (x + 25) = 3" (LetCo/EcIn); la transforma correctamente hasta llegar a "5x = -47" y de aquí pasa a "x = -47:5 = 9.5" (error en operación aritmética). Expresa *Mbl* en céntimos y *P* en euros (EUni) en la ecuación. Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$, y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

Tacha la solución anterior; plantea "3x + (2x + 0,5) = 3" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "lapiz [sic] : 0,5" y "boli : 0,75". Convierte *Mbl* a euros y da por buena la lectura anterior.

La lotería

Plantea la ecuación "3x + 2x + x = 5000" (EcIn); la resuelve correctamente; y concluye "tercero: 833,$\widehat{33}$ [sic]", "segundo: 1666,$\widehat{66}$ [sic] = 833·2" y "primero: 2499.99 = 833·3". Utiliza la letra x para representar a las cantidades *Pb* y *Pc* (LetPol). La expresión "2x" sería una traducción de "el primero juega el doble que el segundo", donde la letra x representaría a *Pb*; mientras que "3x" lo sería de "y éste [el segundo] el triple que el tercero", donde la letra x representaría a la cantidad *Pc*. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula "55·0,1 = 5.5", "55 – 5,5 = 49.5" y concluye "Ayer costaba: 49,5". Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad *A* por el uso que hace de este valor en "55 – 5,5 = 49.5" y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 21

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "x + 30 = 4x" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "Consuelo tiene 10 años". Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "3x + 28 = 5x – 4" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas ellas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Basa la resolución en que el transcurso del tiempo para el padre se compensa con el transcurso de tiempo para un hijo (en la Figura 59 se ofrece un esquema explicativo). Escribe "Andrea 16", "Paco 14" y "Padre 40"; calcula "16 + 14 = 30" y "40 – 30 = 10"; y concluye "Tenen que [sic] pasar [sic] 10 anys". Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$, $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp); aunque la estudiante realiza inferencias analíticas sobre estas relaciones que le permiten evitar el uso del SMSalg y resolver el problema expresando $Ap = Af + Aa + T$ en el SMSari.

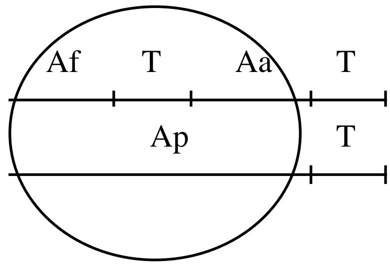


Figura 59.

Marta y María

Escribe "maría: 3*x*", "marta : *x*", "dentro de 12 años", "maria [sic] 2*x*", "marta *x*". La letra *x* hace referencia tanto a la cantidad *Ah* como a *Fh* (LetPol) y la estudiante reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma \cdot Ah$ y $Fm = Vhmf \cdot Fh$ (ambas RelNecEmp).

A continuación, plantea la ecuación "$x + 3 + 12 = 2 + x$"; la transforma en "$3 + 12 - 2 = x - x$"; obtiene "$13 = x$" (error en operación algebraica, pues la *x* debería cancelarse) y concluye "13 años marta y maría $13 \cdot 3 = 39$ años". La estudiante expresa "La edad de María es 3 veces la de su hija Marta" y "… el doble que la de Marta" mediante sendas relaciones aditivas. La letra *x* hace referencia tanto a la cantidad *Ah* como a *Fh* (LetPol); aunque interpreta el resultado de la ecuación como *Ah*. Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma + Ah$, $Fm = Vhmf + Fh$ (ambas RelInR/EHom) y $Fm = T + Am$ (RelNecEmp, sobre la que construye la ecuación).

La visita al teatro

Escribe "grupo de niños = *x*" (LetCo) y plantea la ecuación "$x + 10 - 11 = + 11 - 7$" (EcIn). La ecuación representar la información que ofrece el enunciado de una forma idiosincrásica, en lugar de expresar la igualdad de cantidades: las personas que se sientan se suman; las que se quedan de pie se restan. Reduce el problema a las relaciones $\alpha = N + Na - Pa$, $\beta = Nb - Pb$ y $\alpha = \beta$ (ambas NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema). Las cantidades α y β aparecen ligadas a cantidades intensivas (*Na* y *Nb*) y cantidades extensivas (*Pa* y *Pb*) en sendas relaciones aditivas (EHom).

Tacha la solución anterior, plantea la ecuación "$\frac{x}{10} - 11 = \frac{x}{11} - 7$" (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente. Asigna la letra *x* a la cantidad *N* e iguala dos expresiones distintas que hacen referencia a la cantidad *B*. El problema plantea dos situaciones de división con resto y como tal las considera la estudiante; pero, al plasmar las relaciones en la ecuación, transforma $D = d \cdot c + r$ en $c = \frac{D}{d} - r$, en lugar de transformarla en $c = \frac{D - r}{d}$ (error de transposición de términos). Como consecuencia, la estudiante expresa en la ecuación una resta entre cantidades que no refieren a la misma cantidad, pues $\frac{x}{10}$ representa número de bancos y 11, número de niños (EHom). Reduce el problema a las relaciones $N = Sa + Pa$, $N = Sb + Pb$, $Sa = B \cdot Na$ y $Sb = B \cdot Nb$ (todas RelNecEmp).

Bolígrafos y lapiceros

Escribe "Bolígrafo x + 25", "Lapiz [sic] = x", "3 € = 3 lapices [sic] y 2 bolis" y plantea "$x + x + 25 = 3$" (LetCo/EcIn). Emplea céntimos y euros para la magnitud dinero en una misma relación aditiva (EUni) en la ecuación. Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$ (RelNecEmp) y $P = B + L$ (NoRel/EHom).

Tacha la ecuación anterior y escribe "Si todos valieran lo mismo valdría cada uno 60 cent.", "2 bolis : 1,20 €" y "3 lapices [sic] : 1,05. Para calcular B y L utiliza las relaciones $B = L + Mbl$, $N = Nb + Nl$ (ambas RelNecEmp) y $P = B{\cdot}N$ (NoRel) y para comprobar la validez del resultado emplea $Pb = Nb{\cdot}B$ y $Pl = Nl{\cdot}L$ (ambas RelCoInn).

Abandona la solución anterior al comprobar que no da 3 la suma del precio de los bolígrafos y de los lapiceros y escribe "2 bolis 2,20 €" y "3 lapices [sic] 80 cent.". Asigna arbitrariamente los valores "2,20 €" y "80 cent." a las cantidades Pb y Pl, respectivamente, y reduce el problema a la relación $P = Pb + Pl$ (RelNecEmp).

La lotería

Escribe "Primero: 2× que el segundo [espacio en blanco] 6x" (donde la × de "2×" la interpretamos como signo de multiplicación), "Segundo: 3× que el tercero [espacio en blanco] 3x" (donde la × de "3×", en la primera aparición, la interpretamos como signo de multiplicación) y "Tercero: x". Plantea la ecuación "$5000 = 6x + 3x + x$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "El tercer 500 €", "El segon: 500·3 = 1500 €" y "El primer 1500·2 = 3000 €". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Plantea la ecuación "$x + 10 = 55$" (LetCo/EcIn), la resuelve correctamente y concluye "El pan valia [sic] 45 centimos [sic]". La estudiante interpreta el porcentaje de aumento como el precio que ha aumentado. Asigna incorrectamente el valor de la cantidad Pa a la cantidad A y reduce el problema a la relación $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 22

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "$4x = 30$" (LetCo/EcIn), la resuelve y concluye "R: Consuelo tendria [sic] 7 años y medio". La ecuación parece traducir linealmente el fragmento de enunciado "30 [30] años tendrá [=] 4 veces [4·] la edad que tiene ahora [x]". Asigna el valor de la cantidad T a la cantidad F y reduce el problema a la relación $F = Vfa{\cdot}A$ (RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x - 4$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "R: El número es 16". Utiliza las relaciones $Nt = T{\cdot}N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea la ecuación "$16 + x + 14 + x = 40$" que parece responder a "¿Cuántos años han de pasar para que la edad *actual* del padre…". Pone en juego las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$ (ambas RelNecEmp), $Ap = Fa + Ff$ (NoRel).

Tacha la solución anterior; corrige la expresión que se asigna a Fp (sustituye "40" por "$40 + x$"); plantea la ecuación "$16 + x + 14 + x = 40 + x$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "R: Han de pasar 10 años". Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$, $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

Plantea la ecuación "$3x + 12 = 2x$" (EcIn), la transforma en "$1x = -12$" y concluye "$x = 12$" (error de transposición de términos). De acuerdo con la información que se muestra en la Figura 60, que representa previamente a la construcción de la ecuación, "$3x$" y "$2x$" hacen referencia a la edad de María actual y futura, respectivamente, y la letra x representaría tanto a Ah como a Fh (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma \cdot Ah$, $Fm = Vhmf \cdot Fh$ y $Fm = T + Am$ (las tres RelNecEmp).

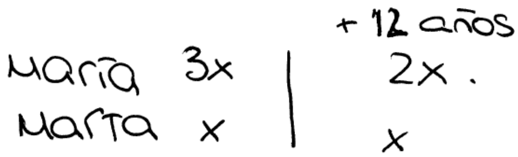


Figura 60.

La visita al teatro

Calcula "11 – 7 = 4 [espacio] 4 filas", "10·4 = 40", "40 + 11 = 51" y concluye "R → 51 niños". Concibe la segunda situación como una continuación de la primera en la que se pasa de 10 niños por banco (situación A) a 11 niños por banco (situación B) usando a los estudiantes que hay de pie en la situación A. Como sentamos un niño por banco, la diferencia de niños de pie entre la situación A y B debe ser igual al número de bancos. Concluimos que reduce el problema a las relaciones $Pa = D + Pb$, $D = B$, $Sa = B \cdot Na$ y $N = Sa + Pa$ (todas RelNecEmp).

Bolígrafos y lapiceros

Plantea la ecuación "$3x + 2x + 50 = 300$" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "lápices → 50 cnt. cada uno" y "Bolígrafos → 75 cnt. cada uno". Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$, $Pb = Nb \cdot B$, $Pl = Nl \cdot L$ y $P = Pb + Pl$ (todas RelNecEmp).

La lotería

Plantea la ecuación "$6x + 3x + x = 500$" (LetCo, EcCo y errata, pues el 500 debería ser 5000); la transforma en "$10x = 5000$" (donde corrige el valor de P); la resuelve correctamente; y concluye "$6x$ → 500·6 = 3000 €", "$3x$ → 500·3 = 1500 €" y "x → 500". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula "10% de 55 = $\frac{55}{100} \cdot 10 = 0{,}55 \cdot 10 = 5{,}5$", "55 – 5,5 = 49,5 cnt." y concluye "R → El precio anterior era de 49,5 cent.". Consideramos que asigna el valor 5,5 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en "55 – 5,5 = 49,5 cnt." y que supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa{\cdot}F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 23

La edad de Consuelo

Plantea la ecuación "$x + 30 = 4x$" (LetCo/EcCo), la transforma en "$30 = 4x - x$" y ésta en "$\frac{30}{4} = x - x$" (error de transposición de términos). Abandona la resolución y tacha la ecuación posiblemente alarmado por la inminente desaparición de la x. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Números

Plantea la ecuación "$3x + 28 = 5x - 4$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nt = T \cdot N$, $Ntv = V + Nt$, $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqc + C$ y $Ntv = Nqc$ (todas RelNecEmp).

La familia de Andrea

Plantea correctamente la ecuación "$16 + x + 14 + x = 40 + x$" (LetCo/EcCo); la transforma en "$16 + 14 - 40 = -x - x + x$" y ésta en "$-10 = x$" (error en operación algebraica); y tacha la solución posiblemente ante la imposibilidad de dar sentido a un tiempo transcurrido negativo. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Ff = Af + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fa + Ff$ (todas RelNecEmp).

Marta y María

Plantea la ecuación "$2x = x =$" (EcIn), la transforma en "$x\ (2 - 1) = 0 =$" y ésta en "$x = 0$" y "$2 - 1 = 0 = 1 = 0$". El estudiante emplea la letra x para representar (ver Figura 61) a las cantidades Ah y Fh (LetPol) y plantea la ecuación sobre la hipótesis de que las edades futuras de María y Marta serán iguales. Reduce el problema a las relaciones $Am = Vhma{\cdot}Ah$, $Fm = Vhmf{\cdot}Fh$ (ambas RelNecEmp, aunque la primera no participa en los cálculos que conducen a la obtención del resultado) y $Fm = Fh$ (NoRel, también sería posible $Fm = Ah$).

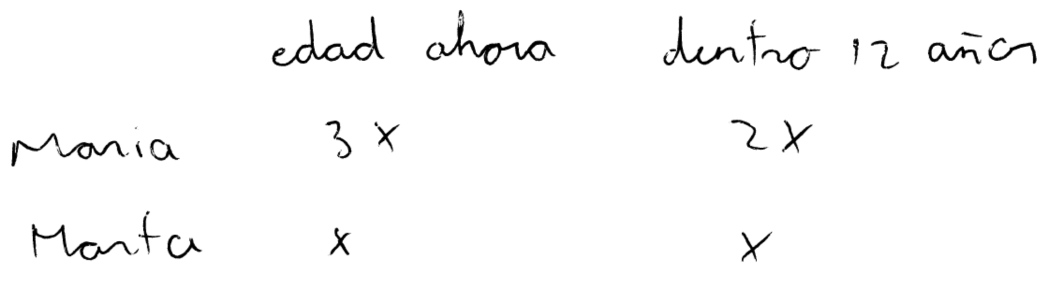


Figura 61.

La visita al teatro

No abordado.

Bolígrafos y lapiceros

Escribe “25 + x” y “$\frac{1}{25}=\frac{3}{3}$”. La segunda expresión podemos interpretarlo como una traducción sintáctica de “Un [1] bolígrafo cuesta [/] 25 céntimos [25] más que una lapicero. He pagado [=] 3 € [3] por [/] 3 lapiceros [3]”. Reduce el problema a las relaciones $B = L + Mbl$ (RelNecEmp) y $\frac{\alpha}{Mbl}=\frac{P}{Nl}$ (NoRel/EHom, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 1).

La lotería

Plantea la ecuación “$2x + x + 3x = 5.000$” (EcIn); la resuelve correctamente y concluye; “primero = $2\cdot 833,\widehat{3}$ = 1666” (redondea incorrectamente $1666,\widehat{6}$), “segundo = $3x = 3x$ = 24.999” (errata, pues debería ser 2499,9) y “tercero = 8333” (errata, pues debería ser 833,3). Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). La expresión “$2x$” sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, donde la letra x representaría a Pb; mientras que “$3x$” lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, donde la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba\cdot Pb$, $Pb = Vcb\cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

El precio del pan

Calcula “10% de $x = 55 = \frac{55}{10} = 5{,}5$”. Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 10%, implica que el 10% del precio final corresponde al precio inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa\cdot F$ (NoRel).

5.5.3. EL CUESTIONARIO 3

Como ya hemos comentado, nos limitaremos a ofrecer una tabla (ver Tabla 1) con los resultados totales obtenidos por los estudiantes en el cuestionario 3 para las 19 variables que se describen en el apartado 5.4.2.1. Evidentemente, esta tabla no proporciona detalles de la actuación de los sujetos en cada ítem; pero nos hemos visto obligados a tomar esta decisión por motivos de espacio, ya que la matriz que recoge las codificaciones por estudiante e ítem tiene una dimensión de 253×19 (23 estudiantes, 11 ítems y 19 variables). Remitimos al anexo I en el caso que se quiera obtener una información más detallada, pues en él se encontrará la tabla con las codificaciones por estudiante e ítem y un relato de la actuación de cada estudiante en cada ítem.

En este capítulo, nos limitaremos a utilizar la información recogida en la variable C para hacer una clasificación de la población según el número de ítems contestados de manera correcta. No obstante, cuando lo consideremos conveniente, recurriremos a los análisis por ítem para reforzar la interpretación de alguna actuación de los estudiantes, fundamentalmente, en el capítulo dedicado al estudio de casos.

Tabla 1. Codificación del cuestionario 3 por estudiante.

Alumno	A	C	EF1	EF2	EF3	EF4	EF5	EF6	EF7	DF1	DF2	DF3	DF4	ES1	ES2	ES3	DS1	DS2	DS3
1	10	7	1	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	2	2	0	0
2	11	8	1	2	0	0	0	0	0	1	1	3	0	0	1	1	1	2	0
3	11	8	1	0	0	0	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	7	3	2	0	2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	2	0	0
5	9	6	2	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	1	1	0	1	0	0
6	10	7	1	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
7	11	10	1	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	11	7	4	0	2	0	1	0	0	2	1	3	0	0	0	0	0	0	0
9	10	6	3	0	0	0	0	0	0	4	1	0	0	1	0	1	0	0	0
10	10	3	2	2	0	0	2	1	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	2
11	6	3	2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	11	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	8	5	1	2	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	3
14	11	4	3	2	0	2	0	0	3	1	1	0	0	1	3	0	1	0	0
15	11	8	2	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	1	0	0	0	0	3
16	9	5	2	1	0	0	2	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	11	9	0	0	2	0	0	0	0	1	1	0	5	0	0	0	0	0	0
18	11	11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	11	7	0	3	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	11	10	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3
21	11	9	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	11	11	0	0	0	0	0	0	0	3	1	3	0	0	0	0	0	3	0
23	8	5	0	2	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5.6. LA CLASIFICACIÓN DE LA POBLACIÓN

Al inicio del capítulo se indicó que la población se clasificó atendiendo a tres criterios: la tendencia a resolver de manera algebraica, la competencia a la hora de establecer relaciones entre cantidades y la competencia en el uso de la hoja de cálculo. De esta forma, se pretendía observar cómo influía la enseñanza del MHC en la variación en la competencia del MC según los distintos perfiles de los individuos y tener un criterio de selección de los sujetos que participarían en el estudio de casos.

Los criterios empleados responden al momento en el que se realiza la investigación, a aquello que se quiere enseñar y el entorno en el que se enseña. Se trata de estudiantes que acaban de ser instruidos en la resolución de problemas de manera algebraica, pero mantienen cierta tendencia a continuar resolviendo de manera aritmética. Pretendemos que los estudiantes sean capaces de resolver problemas mediante el MHC, pero el fin último es el de conseguir que sean más competentes en el uso del MC. La secuencia de enseñanza que planteamos se lleva a cabo en el entorno de la hoja de cálculo por lo que será necesaria cierta competencia en su lenguaje.

Para clasificar a los individuos, redujimos las matrices de datos donde los casos eran estudiante-problema (161 casos para el cuestionario 1, 184 para el cuestionario 2 y 253 para el cuestionario 3) a matrices donde los casos eran estudiantes (23 casos en todos los cuestionarios). Para ello sumamos los valores obtenidos para cada variable por un individuo en cada problema o ítem. A estas nuevas variables (que recogen la suma por individuo) se les dio el mismo nombre que a las variables iniciales seguido por un subíndice 1 o un subíndice 2 según midieran características del cuestionario 1 o del cuestionario 2 y se conservó el mismo nombre para las variables del cuestionario 3[18].

Sumamos el número de lecturas aritméticas y algebraicas ($LAlg_1$ + $LAlg_2$ y $LArit_1$ + $LArit_2$) que cada resolutor había hecho en los cuestionarios 1 y 2[19] para clasificar a los individuos según la tendencia a realizar un tipo u otro de lectura. La estructura del cuestionario 1 favorecía realizar lecturas aritméticas y la del cuestionario 2, algebraicas. Esperábamos una relación de 7 lecturas aritméticas (el número de problemas del cuestionario 1) frente a 8 algebraicas (el número de problemas del cuestionario 2); pero se obtuvo una media de 5,04 problemas resueltos algebraicamente. Este valor lo utilizamos como punto de corte: los sujetos que realizaron un número superior de lecturas algebraicas, los clasificamos como resolutores con tendencia a realizar lecturas algebraicas (al menos en los cuestionarios 1 y 2[20]).

La clase de los resolutores que realizaron un número de lecturas algebraicas igual o inferior a la media (a la que llamaremos L_1) quedó constituida por 14 individuos: 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

---

[18] En el análisis de los datos del cuestionario 3 siempre nos referiremos a las variables-suma, por lo que no hay posibilidad de confusión.

[19] Consideramos la que hemos llamado lectura inferida para identificar el tipo de lectura que ha llevado a cabo un estudiante en un problema.

[20] Sería una temeridad definir estudiantes con una determinada tendencia o con una mayor o menor competencia a partir de las actuaciones en los cuestionarios. Sin embargo, se nos permitirá este abuso del lenguaje para referirnos a estudiantes con una determinada tendencia o con una mayor o menor competencia *en los cuestionarios administrados*.

La clase de los resolutores con tendencia a realizar lecturas algebraicas (a la que llamaremos L_2) quedó constituida por 9 individuos: 1, 3, 6, 12, 19, 20, 21, 22 y 23.

Para clasificar a los individuos según su competencia para identificar y relacionar cantidades al resolver problemas, sumamos la variable *IAcRel* de los cuestionarios 1 y 2. Como ya se ha señalado esta variable tiene en cuenta las relaciones, entre cantidades, correctas e incorrectas que el resolutor pone en juego tomando como referencia la lectura ampliada asociada a la lectura inferida. La media de la variable se situó en 8,36. Este valor sirvió como punto de corte: los sujetos con un valor igual o inferior de la variable los etiquetamos como lectores menos competentes (al menos en los cuestionario 1 y 2) y el resto, como lectores más competentes. La clase de los menos competentes la constituyeron 12 individuos y la de los más competentes, 11.

La clase de los resolutores que mostraron menor competencia en la lectura (a la que llamaremos Com_1) quedó constituida por 12 individuos: 1, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 18 y 23.

La clase de los resolutores que mostraron mayor competencia en la lectura (a la que llamaremos Com_2) quedó constituida por 11 individuos: 2, 6, 8, 9, 12, 15, 17, 19, 20, 21 y 22.

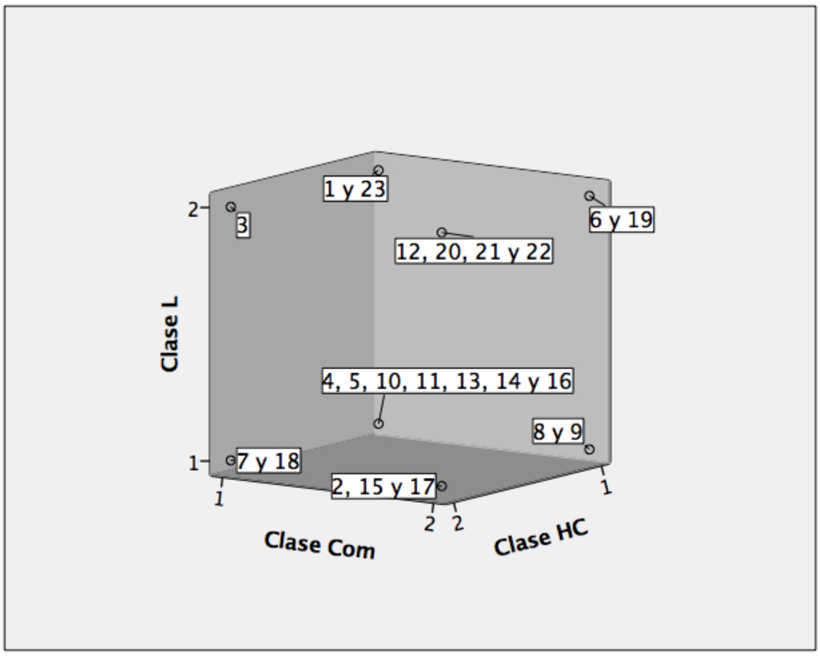


Figura 62. Clasificación de la población.

Utilizamos la variable *C* del cuestionario 3 para medir la competencia en el uso de la hoja de cálculo y poder clasificar a la población. Esta variable cuenta el número de ítems del cuestionario 3 correctamente realizados. La media de la variable quedó en 7,09. Este valor sirvió como punto de corte: los sujetos con un valor igual o inferior de la variable los etiquetamos como menos competentes en la hoja de cálculo (llamaremos HC_1 a la clase de los menos competentes) y el resto como más competentes (llamaremos HC_2 a la clase de los más competentes). La clase de los menos competentes la constituyeron 13 individuos y la de los más competentes 10.

Los resolutores menos competentes en el uso de la hoja de cálculo fueron: 1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 19 y 23.

Los resolutores más competentes en el uso de la hoja de cálculo fueron: 2, 3, 7, 12, 15, 17, 18, 20, 21 y 22.

Las tres particiones en dos clases dio como resultado la división de la población en ocho clases (ver Figura 62) que designaremos mediante una terna ordenada (L, Com, HC). De la partición destacamos: 1) La presencia de un único individuo en la clase (L_2, Com_1, HC_2) que nos indica el carácter extraordinario, dentro de la población, de un caso con tendencia a realizar lecturas algebraicas y competente en el uso de la hoja de cálculo, pero poco competente a la hora de realizar la lectura analítica. 2) La presencia de dos individuos en las clases (L_1, Com_1, HC_2), (L_2, Com_1, HC_1), (L_2, Com_2, HC_1) (L_1, Com_2, HC_1). 3) Los principales polos los constituyen (L_1, Com_2, HC_2) y, fundamentalmente, (L_2, Com_2, HC_2) y (L_1, Com_1, HC_1).

5.7. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DEL CUESTIONARIO POST

El análisis del cuestionario Post se hará del mismo modo que el del cuestionario 2, por lo que remitimos al apartado 5.5. para una descripción detallada. La matriz de datos que describía las actuaciones en el cuestionario Post tenía una dimensión 176×42 (22 estudiantes, 8 problemas y 42 variables). La dimensión de la matriz del cuestionario Post no coincide con la del cuestionario 2 (184×42) como consecuencia de la no asistencia del sujeto 7 a la sesión en la que se administró el cuestionario Post. Al igual que en los cuestionarios 1, 2 y 3, la dimensión de la matriz de datos nos impide mostrarla en el cuerpo de la tesis y la ofrecemos para su consulta al anexo I.

Alumno 1

La edad de Pablo

Plantea la ecuación “15 = 4x” (LetCo/EcIn), la resuelve correctamente, obtiene “x = 3,5” y concluye “x = 3 años y medio”. La ecuación representa una traducción sintáctica del enunciado “si dentro de 15 años [15] tendrá [=] cuatro veces [4·] la edad que tiene ahora [x]”. Asigna el valor de la cantidad T a la cantidad F y utiliza la relación $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación “5x – 10 = 3x + 8” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación “12 + x + 7 + x = 32” (LetCo/EcIn); la transforma de manera idiosincrásica en “2x = 12 + 7 = 32”, “2x = 32 – 19 = 32” y “2x = 13”; obtiene “x = 6,5” y concluye “HAN DE PASAR 6 AÑOS”. Considera que necesariamente el tiempo transcurrido ha de ser un entero e interpreta la pregunta del problema como “¿Cuántos años han de pasar para que la edad *actual* del padre sea la suma de las edades de los hijos”. Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$ (ambas RelNecEmp) y $Ap = Fm + Fj$ (NoRel).

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación “3x = 5” (LetCo/EcIn) y después la tacha. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa \cdot Ae$ (RelNecEmp) y $Aa = T$ (NoRel).

Bolígrafos

Obtiene 1,2 de dividir 6 entre 5 y 9,8 de multiplicar 1,2 por 9 (error en operación aritmética, pues da 10,8). Parece que asigna el valor de *Sa* (6) a la cantidad *Pa* y emplea la relación $\frac{Na}{Nb} = \frac{Pa}{Pb}$ (RelNecEmp) para calcula *Pb*.

Pantalones y camisas

No abordado.

La quiniela

Divide 5000 entre 3 y obtiene "1666 € cada uno" de cociente y 2 de resto; plantea la ecuación "$2x = 1666$" (EcIn) y obtiene "$x = 888$ → El 1º" (error en operación aritmética, pues el resultado correcto sería 833); plantea "$3x = 1666$" (EcIn) y obtiene "$x = 555$" (eliminando la parte decimal del resultado, pues el valor correcto era $555,\widehat{3}$); obtiene "El 3º → […] 3.357" (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 3557) de restar 1443 (que obtiene de la suma 888+555) a 5000. Plantea un reparto equitativo; pero a continuación emplea otras relaciones que suponen lo contrario. Utiliza la letra x para representar a las cantidades *Pa* y *Pb*; pero lo hace en ecuaciones independientes sin que se produzcan conflictos en la interpretación por el doble papel que se le hace desempeñar. Reduce el problema a las relaciones $P = \alpha \cdot \beta$, $Pa = Vba \cdot \beta$, $Pb = Vcb \cdot \beta$ (las tres NoRel, siendo α el numero de amigos y β lo que correspondería a cada uno si el reparto fuera equitativo) y $P = Pa + Pb + Pc$ (RelNecEmp).

La paga

Calcula "0,80×60 = $\boxed{48\ €}$". Supone erróneamente que un aumento del precio inicial del 20% implica que el 20% del precio final corresponde al aumento y el 80% al precio inicial. Reduce el problema a las relaciones $Pi = Pa + \alpha$ e $I = \alpha \cdot F$ (ambas NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Alumna 2

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "$x + 15 = 4x$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación "$5x - 10 = 3x + 8$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Basa la resolución en que la diferencia de edades se mantiene constante a lo largo del tiempo y que por lo tanto se puede calcular dos de las edades futuras añadiendo estas diferencias a la otra edad futura. De acuerdo con esto, calcula la diferencia entre la edad de Javier (la actual) y las edades del padre y Marcos (las actuales), asigna la letra x a la cantidad *Fj* y las expresiones "$x + 5$" y "$x + 25$" a las cantidades *Fm* y *Fp*, respectivamente (ver Figura 63). Utiliza las relaciones $Am = Aj + Dmj$, $Ap = Aj + Dpj$,

$Fm = Fj + Dmj$ y $Fp = Fj + Dpj$ (todas RelNecEmp). A continuación, plantea la ecuación "$x + 5 + x = x + 25$" (EcCo) a partir de la relación $Fp = Fm + Fj$ (RelNecEmp). Al resolver la ecuación obtiene "$x = 20$" y concluye "Han de pasar 20 años"; de manera, que usa la letra x para referirse a la cantidad Fj durante el planteamiento de la ecuación y como T cuando interpreta el resultado de la ecuación (LetPol) sin atender a la relación $Fj = T + Aj$ con la que obtendría el resultado correcto.

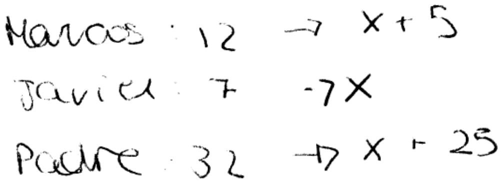


Figura 63.

Amelia y Enrique

Escribe "Amelia $3x$", "Enrique x", "Amelia + 3 = $2x$" y "Enrique + 3 = x"; plantea la ecuación "$3x + 3 = 2x$" (EcIn); la transforma en "$3x – 2x = 3$" (error de transposición de términos) y obtiene "$x = 3$". La letra x representa tanto a la cantidad Ae como a Fe (LetPol) y asigna de manera incorrecta el valor 3 a la cantidad T. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa·Ae$, $Fa = Veaf·Fe$ y $Fa = T + Aa$ (las tres RelNecEmp).

Bolígrafos

Asigna la letra x a la cantidad D (LetCo) y -2 a la cantidad Sb para indicar que, en lugar de sobrar dinero, le falta (ver Figura 64). Plantea las ecuaciones "$x – 5 = 6$" (EcIn) y "$x – 9 = -2$" (EcIn) y las resuelve correctamente obteniendo dos valores distintos para la letra x. Las ecuaciones expresan que el dinero que llevo menos lo que me gasto en los bolígrafos (aunque esto lo representa mediante el número de bolígrafos) es igual al dinero que me sobra. Asigna el valor de las cantidades Na y Nb a las cantidades Pa y Pb, respectivamente, y reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$ y $Pb = D + Sb$ (ambas RelNecEmp).

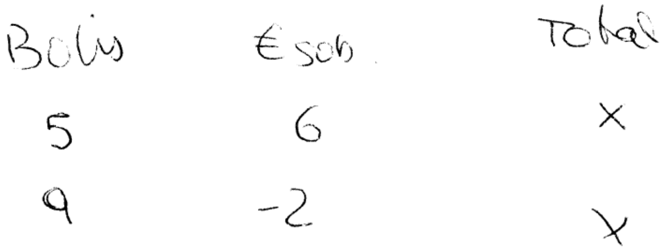


Figura 64.

Pantalones y camisas

Plantea la ecuación "$3x + 2(x + 8) = 126$ (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "1 camisa 22 €" y "1 pantalón 30 €". Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc·C$, $Pp = Np·P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Escribe "1º = $6x$", "2º = $3x$" y "3º = x"; plantea la ecuación "$6x + 3x + x = 5000$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "1º = 3000 €", "2º = 1500 €" y "3º

= 500 €”. Reduce el problema a las relaciones *Pa* = *Vba·Pb*, *Pb* = *Vcb·Pc* y *P* = *Pa* + *Pb* + *Pc* (todas RelNecEmp).

La paga

Escribe “Haciendo pruebas en la calculadora multiplicando un nº por 0,2 he descubierto que es 60” y calcula “50×0,2 = 10” y “50 + 10 = 60”. La estudiante reduce el problema a las relaciones *F* = *I* + *A* y *A* = *Pa·I* (ambas RelNecEmp) y evita el uso del SMSalg empleando una estrategia de prueba y error que le permite expresarlas en el SMSari.

Alumno 3

La edad de Pablo

Plantea la ecuación “$x = 15 + 4x$” (LetCo/EcIn); transforma “$-15 = 3x$” en “$-3x = -15$” (error de transposición de términos); obtiene “$x = 5$” y concluye “R: 5 años tiene”. Se observa un error de inversión al expresar la comparación que podemos considerar fruto de la traducción sintáctica del enunciado “¿Cuál es la edad de Pablo [*x*] si [=] dentro de 15 años [15 +] tendrá cuatro veces la edad que tiene ahora [4*x*]?”. Utiliza las relaciones *F* = *Vfa·A* (RelNecEmp) y *A* = *T* + *F* (RelInO).

Más números

Plantea la ecuación “$5x - 10 = 3x + 8$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente concluyendo “R: Se trata del 9”. Utiliza las relaciones *Nq* = *Q* · *N*, *Nq* = *Nqd* + *D*, *Nt* = *T* · *N*, *Nth* = *H* + *Nt* y *Nth* = *Nqd* (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación “$12 + x + 7 + x + 32 + x = 32 + x$” (LetCo/EcIn) que supone emplear las relaciones *Fm* = *Am* + *T*, *Fj* = *Aj* + *T*, *Fp* = *Ap* + *T* (las tres RelNecEmp) y *Fp** = *Fm* + *Fj* + *Fp* (NoRel). Al resolverla, comete un error al pasar de “$19 = -3x$” a “$3x = 19$” (error de transposición de términos) con el que parece evitar obtener un valor negativo de *x*.

Tacha la solución anterior; construye una tabla de valores (ver Figura 65) en la que representa las líneas de vida de Marcos, Javier y su padre; señala la edades de 25 y 20 para Marcos y Javier, respectivamente, que coinciden en la misma columna con una edad de 45 años para el padre (con lo que se cumple que la suma de las edades futuras de los hijos sea igual a la edad futura del padre), y concluye “R: Tienen que pasar 13 años”. Reduce el problema a las relaciones *Fm* = *Am* + *T*, *Fj* = *Aj* + *T*, *Fp* = *Ap* + *T* y *Fp* = *Fm* + *Fj* (todas RelNecEmp) y resuelve el problema mediante una estrategia de prueba y error que reproduce la resolución por prueba y error sistemática utilizada en la hoja de cálculo.

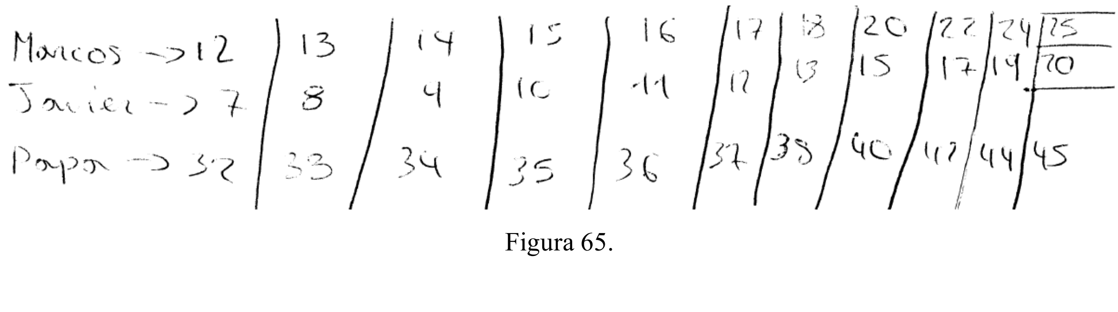


Figura 65.

Amelia y Enrique

Escribe “Amelia = 3x”, “Enrique: x” y “Amelia + 5 años = 2x”; plantea la ecuación “3x + x = 2x + 5” (EcIn); la resuelve correctamente y obtiene “x = 2,5”. A continuación, calcula “2,5·3 = 7,5 (triple), “2,5·2 = 5 años” y “2,5·4 = 10 años (Doble)” (errata, pues debería ser el cuádruple) y concluye “Amelia: 5 años” y “Enrique: 10 años”. Plantea la ecuación sobre la hipótesis de que la suma de las edades actuales de los hermanos es igual a la edad futura de Amelia más el tiempo transcurrido. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Ae y Fe (LetPol); aunque no asigna a ninguna de las dos el valor que obtiene para x tras resolver la ecuación. Así multiplica arbitrariamente 2,5 por 2, 3 y 4 con el fin de deshacerse de la solución decimal y asigna “5 años” a Aa y “10 años” a Ae sin atender a que Amelia es la hermana mayor. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa{\cdot}Ae$, $Fa = Veaf{\cdot}Fe$ (ambas RelNecEmp), $\alpha = Aa + Ae$, $\beta = Fa + T$, $\alpha = \beta$, $Ae^* = \gamma\, Ae$, $Aa = \delta{\cdot}Ae$ (las cinco NoRel, siendo α, β, γ y δ cantidades sin referente en el contexto del problema y tomando γ y δ los valores 4 y 2, respectivamente).

Bolígrafos

Se limita a sintetizar las dos situaciones que se plantean en el enunciado (ver Figura 66).

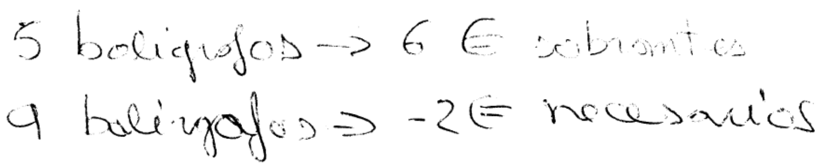


Figura 66.

Pantalones y camisas

Escribe “3 camisas y 2 pantalones → 126 €”, “Pantalom [sic] = 8 + x”, “camiseta = x” y “2(8 + x) = 16 + 2x (Pantalones)”. Plantea la ecuación “3x = 126” (EcIn) y la resuelve correctamente. Representa la cantidad C mediante la letra x (LetCo) y reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pp = Np{\cdot}P$, $Pc = Nc{\cdot}C$ (las tres RelNecEmp) y $T = Pc$ (NoRel).

Plantea las ecuaciones “3x = 126 – 24” (EcIn) y “2x = 126 + 24” (EcIn). La letra x representa a la cantidad C en la primera ecuación y a P, en la segunda; pero no comparten espacio en una misma ecuación y consideramos su uso correcto (LetCo). Con “3x = 126 – 24”, pretende eliminar el exceso de precio de los pantalones para convertir el problema en otro de reparto equitativo sobre 5 camisas. Sin embargo, calcula mal el exceso de precio (24 según el estudiante), debido a que multiplica lo cuesta de más un pantalón por el número de camisas, y reparte el precio tras eliminar el exceso (126 – 24) entre 3 en lugar de hacerlo entre 5. Utiliza las relaciones $Pep = Nc{\cdot}Mpc$ (NoRel), $T = Pep + Pqe$, $Ph = Pqe$ (ambas RelNecEmp) y $Ph = Nc{\cdot}C$ (NoRel). Con “2x = 126 + 24”, pretende añadir el defecto de precio de las camisas para convertir el problema en otro de reparto equitativo sobre 5 pantalones. Sin embargo, sólo añade el defecto de 2 camisas (deberían ser 3 camisas) y reparte entre 2 en lugar de hacerlo entre 5. Utiliza las relaciones $Pdc = Np{\cdot}Mpc$ (NoRel), $Pad = Pdc + T$, $Ph' = Pad$ (ambas RelNecEmp) y $Ph' = Np{\cdot}P$ (NoRel).

Por último plantea la ecuación “3x = 2x – 24” (EcIn); transforma la ecuación hasta “24 = -x”; calcula “x = 24·3 = 72 € (Camiseta)” y “ 24·2 = 48 + 16 = 54 € (Pantalones)”; y obtiene 126 de sumar 72 y 64 (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 136). Utiliza la letra x para referirse a las cantidades C y P (LetPol) y reduce el problema a las relaciones $Pc = Nc\cdot C$, $Pp = Np\cdot P$ (ambas RelNecEmp), $Pdc = Nc\cdot Mpc$ (RelCoInn), $Pp = Pc + Pdc$ (NoRel, sobre la que plantea la ecuación), $P = C + Mpc$ (RelNecEmp) y en la comprobación gasta $T = Pc + Pp$.

La quiniela

Escribe "6x", "3x" y "x" sin explicar qué expresión representa a cada cantidad, plantea la ecuación "$6x = 5000$" (LetCo/EcIn), la resuelve correctamente y tacha la solución. Asigna la letra x a la cantidad Pc y utiliza las relaciones $Pa = Vba\cdot Pb$, $Pb = Vcb\cdot Pc$ (ambas RelNecEmp) y $Pa = P$ (NoRel).

Tacha la solución anterior; plantea la ecuación "$6x + 3x + x = 5000$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "(1er) $x = 500$ €", "(2^n) $3x = 1500$ €" y "(3^3) [sic] → $6x = 3000$ €". El estudiante asigna, correctamente, la letra x a la cantidad Pc, tanto al plantear como al resolver la ecuación; sin embargo, interpreta la solución (el valor asociado a la letra x) de la ecuación como el valor de la cantidad Pa. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba\cdot Pb$, $Pb = Vcb\cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Plantea la ecuación "$x + (0{,}2\cdot x) = 60$" (LetCo/EcCo), la transforma en "$x(0{,}2) = 60$" (error en operación algebraica) y obtiene "$x = \frac{60}{0{,}2}$". Reduce el problema a las relaciones $F = I + A$ y $A = Pa\cdot I$ (ambas RelNecEmp).

Alumna 4

La edad de Pablo

Calcula "15·4 = 60 años tendrá dentro de 15 años", "60 – 15 = 45 años tiene ahora", "45 + 15 = 60 años tendrá dentro de 15 años" y concluye "Total: Tiene 45 tiene [sic] ahora [abajo] 60 años tendrá dentro de 15 años". Reduce el problema a las relaciones $F = Vfa\cdot A$ y $F = T + A$ (ambas RelNecEmp) que implicarían un solución algebraica. Sin embargo, realiza asignaciones a las cantidades desconocidas de manera arbitraria para escapar de la dificultad de operar con la incógnita. Así, en "15·4 = 60" asigna el valor 15 a la cantidad A (lo que supondría resuelto el problema, pues es la cantidad buscada), mientras que en "60 – 15 = 45" usa el mismo valor para la cantidad T.

Más números

Escribe "15 – 10 = 5", "5 + 8 = 13" y concluye "Total: Se trata del número 13". Ambas operaciones aritméticas reflejan una traducción sintáctica del enunciado, ya que podemos asociar "15 – 10 = 5" con "al quíntuplo [15] de un número se le restan [-] 10 unidades [10] se obtiene [5] el triple de un número" y "5 + 8 = 13" con "se obtiene [5] el triple de un número más [+] 8 unidades [8]". Concluimos que asigna a la cantidad Nq el valor correspondiente a la cantidad Q ("quíntuplo de un número") y que considera que el quíntuplo de un número es multiplicar el número por 15. Las operaciones anteriores, junto con el hecho de considerar 13 el valor asociado a N, implica el uso de las relaciones $Nq = Nt + D$ y $N = Nt + H$ (ambas NoRel).

La familia de Marcos

Basa la resolución sobre el hecho de que la diferencia de edades se mantiene constante a lo largo del tiempo y de que la pregunta del problema se puede transformar en "¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea *la suma de las diferencias de edades entre padre e hijos*?" (se ofrece un esquema explicativo en la Figura 67). Así, calcula la diferencia de edad entre el padre y los hijos mediante "32 – 12 = 20" y "32 – 7 = 25", materializando las relaciones $Ap = Dpm + Am$ y $Ap = Dpj + Aj$ (ambas RelNecEmp). A continuación, obtiene 45 de sumar 20 más 25, calcula "45 – 32 = $\boxed{13}$ años" y concluye "Deben de pasar 13 años"; empleando las relaciones $Sd = Dpm + Dpj$, $Fp = Sd$ y $Fp = T + Ap$ (las tres RelNecEmp).

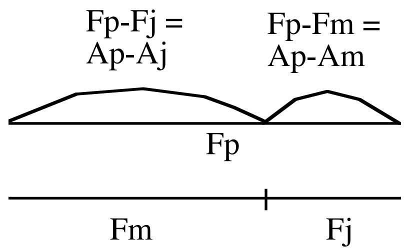


Figura 67.

Amelia y Enrique

Escribe, aunque después lo tacha, "0·3 = 0 → Amelia" y "0·5·2 = 0". El primer cálculo es una materialización de la relación $Aa = Veaa \cdot Ae$ (RelNecEmp) en la que se asigna el valor 0 a la cantidad Ae. Esta asignación podemos interpretarla como un reflejo de la celda de referencia (que es una celda vacía y que por lo tanto contiene el valor cero) del SMShc y, por lo tanto, consideramos que la estudiante utiliza el número cero, no como una asignación de un valor concreto, sino como una forma de representar a una cantidad desconocida. En la expresión "0·5·2 = 0", junto al mismo uso del cero para la cantidad Aa, considera que el paso del tiempo y la edades se vinculan mediante la relación multiplicativa $Fa = Aa \cdot T$ (RelInR/EHom). Además de las relaciones ya citadas, utiliza $\alpha = Fa \cdot Veaf$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Bolígrafos

No abordado.

Pantalones y camisas

Calcula el precio de tres camisas y dos pantalones mediante "126:5 = 25,2 camisetas" y "25,2 + 8 = 33,2 pantalones", para lo que utiliza las relaciones $N = Np + Nc$ (RelCoInn), $T = Pc \cdot N$ y $Pp = Pc + Mpc$ (ambas NoRel). A continuación, calcula el precio de cada camisa y de cada pantalón mediante "25,2:2 = 12,6 cuesta cada camiseta" y "33,2:3 = 11,06 + 8 = 19,06 cuesta cada pantalón" (11,06 debería ser 11,07). Asigna el valor de Nc a Np y el de Np a Nc y usa las relaciones $Pc = C \cdot Nc$ (RelNecEmp), $Pp = \alpha \cdot Np$ y $P = \alpha + Mpc$ (ambas NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema). La estudiante parece tener dificultades para distinguir entre las parejas de cantidades *Pc-C* y *Pp-P,* lo que se traduce en el uso de una cantidad cuando debería aparecer la otra y en considerar en una misma relación aditiva cantidades intensivas y extensivas (EHom) como en $Pp = Pc + Mpc$.

La quiniela

Calcula "5000·2 = 10000 el segundo" y "5000·3 = 15000 el tercero". Considera que los 5000 € de premio es lo que corresponden al amigo (el primero, según la estudiante) al que le toca la parte menor e interpreta linealmente el enunciado para obtener lo que le corresponde a los otros dos protagonistas. La operación "5000·2 = 10000 el segundo" supone la lectura "el primero [5000] juega el doble [·2] que el segundo [10000]"; mientras que "5000·3 = 15000 el tercero" implica "y éste [interpreta el primero y le asigna el valor 5000] el triple [·3] que el tercero [15000]". Asigna el valor de la cantidad P a Pa y reduce el problema a las relaciones $Pb = Pa \cdot Vba$ (RelInO) y $Pc = Pa \cdot Vcb$ (NoRel).

La paga

Calcula "$\frac{20}{100} \cdot 60 = \frac{20 \cdot 60}{100} = 12$ € le daban antes". Supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde a la paga inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa \cdot F$ (NoRel).

Alumno 5

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "$4x = 15$" (LetCo/EcIn); la transforma en "$x = 15 - 4$" (error de transposición de términos); obtiene "$x = 11$"; e inventa una última operación "$x = \frac{11}{2} \rightarrow 5{,}5$". La ecuación representa una traducción sintáctica del enunciado "si dentro de 15 años [15] tendrá [=] cuatro veces [4·] la edad que tiene ahora [x]". Asigna el valor de la cantidad T a la cantidad F y reduce el problema a las relaciones $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp) y $A = \alpha \cdot A^*$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 2).

Más números

Escribe "3·5 = 15", "15 – 10 = 5" y "5 + 8 = 12" (error en operación aritmética). El estudiante realiza un esbozo lógico-semiótico[21] que evita el uso del SMSalg y por lo tanto las relaciones a las que reduce el enunciado las organiza para conseguir alcanzar el resultado partiendo de lo conocido. Como no puede calcular ni el quíntuplo ni el triple del número decide usar las cantidades T y Q en el cálculo incorrecto de la cantidad Nq. El estudiante reduce el problema a las relaciones $Nq = Q \cdot T$, $Nq = D + Nt$ y $N = Nt + H$ (todas NoRel).

La familia de Marcos

Basa la resolución en que el transcurso del tiempo para el padre se compensa con el transcurso de tiempo para un hijo (en la Figura 68 se ofrece un esquema explicativo). Calcula "12 + 7 = 19", "19 + 13 = 32" y concluye "13 años tienen que pasar". Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$

[21] Llamamos esbozo lógico-semiótico a un análisis, consciente o inconsciente, inicial de un problema que pretende señalar el camino que debe seguirse en la resolución de acuerdo con algún texto matemático producido con el uso de algún SMS (Puig, 2003).

(todas RelNecEmp); aunque el estudiante realiza inferencias analíticas sobre estas relaciones que le permiten evitar el uso del SMSalg y resolver el problema expresando $Ap = Am + Aj + T$ en el SMSari.

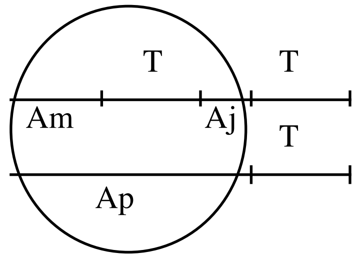


Figura 68.

Amelia y Enrique

Escribe "Amelia → $3x + 5 = 2$" (EcIn) y "Enrique → x"; obtiene 1 como valor de x; calcula "1 + 5 = 6"; y concluye "Amelia → 6" y "Enrique → 2". La ecuación parece una traducción lineal del enunciado "Amelia tiene el triple de edad [3·] que su hermano Enrique [x] , pero dentro [+] de 5 [5] años la edad de Amelia sólo será [=] el doble [2]". El estudiante asigna el valor de la cantidad *Veaf* a la cantidad *Fa* sin atender a que la edad final sería menor que el tiempo transcurrido. Considera que la letra x representa a la cantidad *Ae*; pero el valor final que asigna a esta cantidad no es el que obtiene de resolver la ecuación (LetPol), sino el que consigue de dividir *Aa* ("Amelia → 6") entre 3 (obtiene "Enrique → 2"). Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa{\cdot}Ae$, $Fa = Aa + T$ (ambas RelNecEmp) y $Aa = Ae + T$ (NoRel).

Bolígrafos

Obtiene 0,83 de dividir 5 entre 6, calcula "0,83·5 = 4,15" y "4,15 + 6 = 10,15". De lo anterior concluye "1 boli → 0,83", "5 bolis cuestan = 4,15" y "Llevas → 10,15 €". La primera operación supone la materialización de la relación inexistente $Na = B{\cdot}Sa$ (NoRel) y asignar incorrectamente a la cantidad *B* la magnitud número de bolígrafos partido por dinero (EHom). También utiliza las relaciones $Pa = Na{\cdot}B$ y $D = Pa + Sa$ (ambas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Asigna los valores "Camisas → 42" y "Pantalones → 84" a las cantidades *Pc* y *Pp*, respectivamente, atiendo a que su suma da 126 (el valor de *T*). Seguidamente calcula "Pantalon [sic] → 84 + 8 → 92€" y "Camisas → 42 – 8 → 34€". Usa la relación $T = Pp + Pc$ (RelNecEmp) para asociar a *Pc* y *Pp* dos valores arbitrarios que tienen como mérito hacer verdadera la relación y emplea $P = Pp + Mpc$ y $Pc = Mpc + C$ (ambas NoRel) que combinan en una misma relación aditiva cantidades intensivas y extensivas (EHom).

La quiniela

Escribe "Uno → $2x$", "Dos → $3x$" y "Tres → x"; plantea la ecuación "$2x{\cdot}3x{\cdot}x = 5000$" (EcIn); la transforma en "$x{\cdot}x{\cdot}x = 5000 – 5$" (error de transposición de términos, pues el 5 debería pasar dividiendo; error en operación aritmética, pues 2 por 3 da 6), ésta en "$3x = 4995$" (error en operación algebraica); y concluye "$x = \frac{4995}{3} = 1665$". Utiliza la letra x para representar a las cantidades *Pb* y *Pc* (LetPol). Así, en la expresión "Uno → $2x$", que sería una traducción de "el primero juega el doble que el segundo", la letra x representaría a Pb; mientras que en "Dos → $3x$", que lo sería de "y éste [el segundo] el triple que el tercero", la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ (ambas RelNecEmp) y $P = Pa \cdot Pb \cdot Pc$ (RelInR).

Tacha la solución anterior; pero mantiene "Uno → $2x$", "Dos → $3x$" y "Tres → x" (LetPol, pues la x representa al mismo tiempo a Pb y Pc). Calcula "Dos → $3 \cdot 1000 = 3000$", "Uno → $2 \cdot 1000 = 2000 - 500 = 1500$" y "Tres → 500". Asigna el valor 1000 a la letra x de manera arbitraria, obtiene 3000 como valor de Pb y 2000 para Pa. Observa (3000 más 2000 da 5000) que ya se han alcanzado los 5000 € correspondientes a la totalidad del premio y resta 500 a 2000 para no dejar sin parte al tercer amigo. Asigna el resultado de la resta (1500) a Pa y 500 a Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pb = Vcb \cdot Pc$, $Pa = Vba \cdot Pb$, $P = Pa + Pb + Pc$ (las tres RelNecEmp) y $Pa = Pa^* + \alpha$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema que toma el valor 500).

La paga

Calcula "20% de 60 = 12", "12 – 60 = 48" (parece que cuando escribe "12 – 60", realmente pretende escribir 60 – 12) y concluye "Le daban 48 €". Consideramos que asigna el valor 12 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en "12 – 60 = 48" y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 6

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "$x + 15 = 4x$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación "$5x - 10 = 3x + 8$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación "$32 + x = (12 + x) + (7 + x)$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp).

Amelia y Enrique

Escribe "Amelia $3x$" y "Enrique x"; plantea la ecuación "$3x + 5 = 2(x + 5)$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "Amelia = 15" y "Enrique = 5". Asigna la letra x a la cantidad Ae (LetCo) y reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa \cdot Ae$, $Fa = Veaf \cdot Fe$, $Fa = T + Aa$ y $Fe = T + Ae$ (todas RelNecEmp).

Bolígrafos

Calcula el precio de cada bolígrafo considerando que la suma de lo que sobra y falta en ambas situaciones es el precio de los bolígrafos que se compran de más en la segunda situación. Escribe "4 bolígrafos = 8 €", calcula "8/4 = 2 € → 1 bolígrafo" e indica que obtiene 16 al multiplicar 5 por 2 y sumarle 6. Reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$, $Pa = B{\cdot}Na$, $Dd = Sa + Sb$, $Nb = Db + Na$ y $Dd = B{\cdot}Db$ (todas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Escribe "Dinero gastado 126 €", "Camisas compradas 3", "pantalones [comprados] 2", "Precio de un pantalón $x + 8$" y "Precio de una camisa x" (LetCo). Plantea la ecuación "$126 = 2(x + 8) + 3x$" (EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc{\cdot}C$, $Pp = Np{\cdot}P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Escribe "Amigo 1 [espacio en blanco] $6x$", "Amigo 2 [espacio en blanco] $3x$", "Amigo 3 [espacio en blanco] x" y "Dinero ganado 5000"; plantea la ecuación "$500 = x + 3x + 6x$" (LetCo, EcIn y errata, pues escribe 500 en lugar de 5000), la resuelve correctamente y concluye "Amigo 1 […] = 300", "Amigo 2 […] 150" y "Amigo 3 […] 50". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Escribe "Paga anterior → x", plantea la ecuación "$x = 60 – 20\%$ de x", la transforma en "$x = 60 - \frac{20x}{100}$" (LetCo/EcCo) y obtiene "$x = 50$". Reduce el problema a las relaciones $F = I + A$ y $A = Pa{\cdot}I$ (ambas RelNecEmp).

Alumno 7

El alumno 7 no participó en el cuestionario Post porque dejó de asistir al centro.

Alumno 8

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "$x + 15 = 4x$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación "$10x – 10 = 3x – 8$" (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente obteniendo como resultado 0,28. Utiliza las relaciones $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T{\cdot}N$, $Nth = Nqd$ (las cuatro RelNecEmp) y $Nt = H + Nth$ (RelInO), y asigna incorrectamente el valor 10 a la cantidad Q.

La familia de Marcos

Plantea la ecuación "$x + 12 + x + 7 = 32 + x$" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp).

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación “$3x = 5\cdot 2 + 2x$” (EcIn); la resuelve correctamente, obteniendo “$x = 10$”; y concluye “Amelia = 3·10 = 30” y “Enrique = 10”. Supone que han de ser iguales la edad de actual y futura de Amelia sin observar contradicción en ello. La ecuación proviene de aplicar la propiedad distributiva sobre una representación no escrita de $3x = 2\cdot(5 + x)$. En definitiva, asigna la letra x a la cantidad Ae (LetCo) y reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa\cdot Ae$, $Fa = Veaf\cdot Fe$, $Fe = T + Ae$ (las tres RelNecEmp) y $Aa = Fa$ (NoRel, sobre la que construye la ecuación).

Bolígrafos

Se limita a sintetizar las dos situaciones que se plantean en el enunciado (ver Figura 69) y comente el error de considerar que en la segunda situación también sobra dinero.

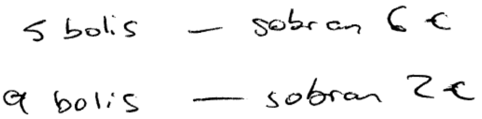


Figura 69.

Pantalones y camisas

Escribe “3 cam + 2 pant = 126 €”, “pant = 8 + camisa”; plantea la ecuación“$3x + 2x + 8 = 126$” (LetCo/EcIn); la resuelve correctamente y concluye “23,6 camisa” y “23,6 + 8 = 31,6 pantalón”. En la ecuación parece olvidar poner entre paréntesis ($x + 8$) o comete un error al aplicar la propiedad distributiva (error en operación algebraica). Realiza una lectura correcta del problema que lo reduce a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc\cdot C$, $Pp = Np\cdot P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Escribe “1º = $2x$”, “2º = $3x$” y “3º = ”. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión “1º = $2x$”, que sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, la letra x representaría a Pb; mientras que en “2º = $3x$”, que lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba\cdot Pb$, $Pb = Vcb\cdot Pc$ (ambas RelNecEmp).

A continuación, plantea la ecuación “$2 + x + 3 + x + x = 5000$”, la resuelve correctamente y concluye “x = […] = 1665 € si jugaran lo mismo”. Observamos: 1) El estudiante considera aditivas las estructuras conceptuales doble y triple. 2) Al afirmar “si jugaran lo mismo” entra en contradicción con la asimetría en la asignación de expresiones a las cantidades Pa, Pb y Pc que se observa en la ecuación. 3) La letra x vuelve a representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba + Pb$, $Pb = Vcb + Pc$ (ambas RelInR) y $P = Pa + Pb + Pc$ (RelNecEmp).

Tacha la solución anterior; pero mantiene “1º = $2x$”, “2º = $3x$” y “3º = ”. Obtiene $833,\widehat{3}$ de dividir 5000 entre 6 y concluye “1º = $833,\widehat{3}\cdot 2 = 1666,\widehat{6}$”, “2º = $833,\widehat{3}\cdot 3 = 2500$” y “3º = $833,\widehat{3}$”. Vuelve a utilizar la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol) y reduce el problema a las relaciones $P = Pa + Pb + Pc$, $Pa = Vba\cdot Pb$ y $Pb = Vcb\cdot Pc$ (la tres RelNecEmp). El número 6, por el que divide 1500, procede de materializar $Pa + Pb + Pc$, donde considera Pa como 2, Pb como 3 y Pc como 1.

La paga

Calcula "20% de 60 = $\frac{20}{100}$ = 0,2·60 = 12" y "60 – 12 = 48 € me daban antes". Consideramos que asigna el valor 12 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en "60 – 12 = 48 € me daban antes" y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa{\cdot}F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 9

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "$x(x{\cdot}15) = x{\cdot}4$", transforma "$x^2{\cdot}15 = x{\cdot}4$" en "$2x{\cdot}x = 15{\cdot}4$" (error de transposición de términos) y ésta en "$x^3 = 20$" (error en operación algebraica). El estudiante supone que la acción del tiempo transcurrido en la edad se expresa mediante una relación multiplicativa y plasma en la ecuación una traducción sintáctica del enunciado "¿Cuál es la edad de Pablo [x] si dentro de 15 años [($x{\cdot}15$)] tendrá [=] cuatro veces la edad que tiene ahora [$x{\cdot}4$]?". Reduce el problema a las relaciones $F^* = Vfa{\cdot}A$ (RelNecEmp), $F = A{\cdot}T$ (RelInR) y $F^* = A{\cdot}F$ (NoRel/EHom).

Tacha la solución anterior, plantea la ecuación "$x = 15 + 4x$" (LetCo/EcIn), resuelve la ecuación correctamente y obtiene "$x = \frac{-15}{3}$". Se observa un error de inversión al expresar la comparación entre las edades en la ecuación que podemos atribuir nuevamente a una traducción sintáctica del enunciado "¿Cuál es la edad de Pablo [x] si [=] dentro de 15 años [15 +] tendrá cuatro veces la edad que tiene ahora [$4x$]?". La solución supone considerar las relaciones $F = Vfa{\cdot}A$ (RelNecEmp) y $A = T + F$ (RelInO).

Tacha el planteamiento anterior, posiblemente alertado por la imposibilidad de dar sentido a una edad con valor negativo; plantea la ecuación "$x(x + 1) = 15{\cdot}4$" (LetCo/EcIn); la transforma en "$2x = 60 – 1$"; ésta en "$x = \frac{59}{2} = 29{,}5 \rightarrow 30$" y concluye "R = Tiene 30 años". Podemos concluir que lo que intentaba expresar al escribir la ecuación era "$x + (x + 1) = 15{\cdot}4$", pues opera con las cantidades como si estuvieran dispuestas de esta forma. Así, suma las x y pasa el 1 al otro término de la ecuación sin atender a que el paréntesis indique multiplicación ("$2x = 60 – 1$"). Para el estudiante el paréntesis sin signo de operación indica suma y "$x + 1$" parece no representar la adición de 1 a x, sino una forma de distinguir la incógnita en sus dos apariciones (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $\alpha = A + A^*$, $\beta = T{\cdot}Vfa$ y $\alpha = \beta$ (las tres NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema).

Más números

Plantea la ecuación "$5x – 10 = 3x + 8$" (LetCo/EcCo) y la transforma incorrectamente en "$5x – 3x = 8 – 10$" (error de transposición de términos). Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación "$x(x + 1+ 12 + 7) = 32$" (EcIn), la transforma en "$2x(20) = 32$ y después en "$2x = 32 – 20$". Parece que lo que intentaba expresar al escribir la ecuación era $x + (x + 1) + 12 + 7 = 32$, pues opera con las cantidades como si estuvieran dispuestas de esta forma. Así, suma las x y los números en la primera transformación sin atender a que el paréntesis indique multiplicación y pasa el "(20)" restando, en lugar de dividiendo, en la segunda transformación. Para el estudiante el paréntesis sin signo de operación indica suma y "$x + 1$" parece no representar la adición de 1 a x, sino una forma de distinguir la incógnita en sus dos apariciones (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$ (ambas RelNecEmp) y $Ap = Fm + Fj$ (NoRel) lo que supone interpretar la pregunta del problema como "¿Cuántos años han de pasar para que la edad *actual* del padre sea la suma de las edades *futuras* de los hijos?".

Amelia y Enrique

Escribe "Amelia = $3x$" y "Enrique = $-3x$" y plantea "$3x - 3x = 5\cdot 2$" (EcIn). En "Amelia = $3x$", el estudiante utiliza la letra x para representar a la cantidad Ae; mientras que en "Enrique = $-3x$" supone que la letra x representa a la cantidad Aa (LetPol) y que la operación inversa a multiplicar por 3 es multiplicar por -3. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa\cdot Ae$ (RelNecEmp), $Ae = -Veaa\cdot Aa$, $\alpha = Aa + Ae$, $\beta = T\cdot Veaf$ y $\alpha = \beta$ (las tres NoRel, siendo α la suma de las edades actuales de los hermanos y β una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Borra "Amelia = $3x$" y "Enrique = $- 3x$" y corrige "$3x - 3 = 5\cdot 2$" (EcIn); resuelve la ecuación correctamente; obtiene "$x = \frac{13}{3} = 4{,}3 = 4$" y concluye "Amelia = $3\cdot 4 = 12 + 5 = 17$" y "Enrique = $12\cdot 3 = 36 + 5 = 30$" (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 41). Utiliza la letra x para representar a la cantidad Ae en la ecuación; pero no interpreta la solución como tal (LetPol), pues la emplea para realizar una secuencia de operaciones que le llevan a un nuevo valor de Ae. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa\cdot Ae$ (RelNecEmp), $Aa = \alpha + Veaa$ (EHom), $\beta = T\cdot Veaf$, $\alpha = \beta$, $Aa^* = Aa + T$, $\gamma = Veaa\cdot Aa$ y $Ae = \gamma + T$ (las seis NoRel, siendo α, β y γ cantidades sin referente en el contexto del problema). El estudiante utiliza relaciones que entran en contradicción con otras (por ejemplo, $Aa^* = Aa + T$) y, tanto en este intento como en el anterior, no considera las edades futuras de los hermanos.

Bolígrafos

Plantea las ecuaciones "$5 = x - 6$" (EcIn) y "$9 = x + 2$" (EcIn) que parecen reflejar una traducción sintáctica del enunciado. Así la ecuación "$5 = x - 6$" podríamos interpretarla como 5 bolígrafos cuestan el dinero que llevo menos 6 €; mientras que "$9 = x + 2$" responde a 9 bolígrafos cuestan el dinero que llevo más 2 €. Es decir, considera que las cantidades Pa y Pb toman los valores de Na y Nb, respectivamente, y reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$ y $Pb = D + Sb$ (ambas RelNecEmp). Transforma la primera ecuación en "$-x = -1$" (error de transposición de términos) y la segunda, en "$x = 2 - 9$" (error de transposición de términos). Obtiene "$x = 1$" y "$x = -7$", respectivamente, y calcula "$6 + 5 = 11 + 1 = 12$". La operación anterior supone utilizar el valor de D obtenido a partir de "$5 = x - 6$" para volver a calcular D, materializando $D^* = Sa + Pa + D$ (NoRel, asignando a la segunda aparición de D en la relación el valor 1 y no atendiendo a que inicialmente había considerado $Sa + Pa$ también igual D).

Pantalones y camisetas

Escribe “Camisas = 3”, “Pantalones = 2”, “Coste camisas”, “Coste pantalones +8”, “Coste total = 126” y “126 = 5(3 + 2) prendas”. Únicamente identifica la relación $N = Np + Nc$ (RelNecEmp).

La quiniela

Escribe “A = 2x”, “B = 3x” y “C = x”; plantea la ecuación “2x + 3x + x = 5000” (EcIn); la resuelve correctamente; y concluye “C = 833,3”, ”, “B = 3·833·3 = […] 2499,9” y “A = 2·833 = […] 1666,6”. Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión “A = 2x”, que sería una traducción de “el primero juega el doble que el segundo”, la letra x representaría a Pb; mientras que en “B = 3x”, que lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Calcula “20% de 60 = $\frac{20 \cdot 60}{100} = \frac{300}{100}$ = 3” (error en operación aritmética, pues 20·60 da 1200), “60 – 3 = 57” y concluye “R = Le daban 57 €”. Consideramos que asigna el valor 3 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “60 - 3 = 57” y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa{\cdot}F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 10

Confunde restar x a y con restar x menos y siempre. Omite muchos paréntesis necesarios. En lugar de incrementar de 4 en 4, lo hace de 0,1 en 0,1. Escribe los valores a mano, lo que implica realizar cálculos mentales de las series. No construye las series por copia y pegado por arrastre ni recurrencia.

La edad de Pablo

Escribe “años Pablo = x” y “dentro de 15 a. = x·4”. Reduce el problema a la relación $F = A{\cdot}Vfa$ (RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación “5x – 10 = 3x + 8” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T{\cdot}N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Escribe “Marcos 12”, “Javier 7”, “Padre 32”, “Marcos + Javier = 19 años” y “Tras 42 años = 19 + 42 = 51” (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 61). Suma las edades actuales de los hijos y le añade un valor arbitrario (42) que representa a la cantidad T. Reduce el problema a las relaciones $\alpha = Am + Aj$ y $\beta = \alpha + T$ (ambas NoRel, donde α representaría a la suma de las edades actuales de los hijos y β una cantidad sin referente el contexto del problema).

Amelia y Enrique

Se limita a escribir “Amelia = x·3” y “Enrique = x”. Asigna la letra x a la cantidad Ae y reduce el problema a la relación $Aa = Veaa{\cdot}Ae$ (RelNecEmp).

Bolígrafos

Se limita a sintetizar parte de la información del enunciado mediante “Bolígrafos = 5”, “Dinero que sobra = 6 €”, “Boligrafos [sic] =9” y “€ que faltan = 2 €”.

Pantalones y camisas

Obtiene 25,2 de dividir 126 entre 5, lo que supone plantear un reparto equitativo; calcula P mediante “25,2 + 8 = 33,2”; Pp con “33,2·2 = 66,4”; y C y Pc usando “25,2 – 8 = 17,2·3 = 51,6”. Monta la suma de 66,4 más 51,6, con la intención de comprobar el resultado; pero abandona la solución, probablemente al darse cuenta de que 66,4 más 51,6 no da 126. Reduce el problema a las relaciones $N = Nc + Np$, $T = Prp{\cdot}N$ (ambas RelNecEmp), $P = Prp + Mpc$ y $Prp = C + Mpc$ (ambas NoRel), para calcular los valores de C y P, y $Pc = Nc{\cdot}C$, $Pp = Np{\cdot}P$ y $T = Pc + Pp$, para comprobar la validez del resultado.

La quiniela

Escribe “A – amigo 1 = 2B”, “B – amigo 2 = 3C”, “C – amigo 3 =” y “Total = 5000 €”. Utiliza las letras A, B y C (todas LetCo) para representar a las cantidades Pa, Pb y Pc, respectivamente, y reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$ y $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ (ambas RelNecEmp).

La paga

No abordado.

Alumna 11

La edad de Pablo

Plantea la ecuación “15 = 4x” (LetCo/EcIn) a partir de la traducción sintáctica del enunciado “si dentro de 15 años [15] tendrá [=] cuatro veces [4·] la edad que tiene ahora [x]”. Asigna el valor de la cantidad T a la cantidad F y reduce el problema a la relación $F = Vfa{\cdot}A$ (RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación “5x – 10 = 3x + 8” (LetCo/EcCo). Utiliza las relaciones $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T{\cdot}N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Basa la resolución en que el transcurso del tiempo para el padre se compensa con el transcurso de tiempo para un hijo (en la Figura 70 se ofrece un esquema explicativo). Calcula “32 – 19 = 23 años han de pasar” (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 13). Tras la lectura analítica reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp); aunque la estudiante realiza inferencias analíticas sobre estas relaciones que le permiten evitar el uso del SMSalg y resolver el problema expresando $Ap = Am + Aj + T$ en el SMSari.

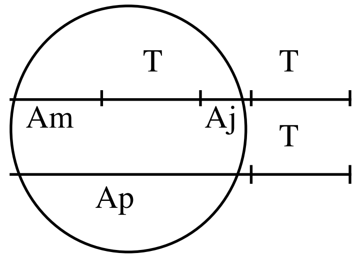


Figura 70.

Amelia y Enrique

No abordado.

Bolígrafos

Se limita a sintetizar parte de la información del enunciado mediante “5 Boligrafos [sic] [abajo] -6” y “9 Boligrafos [sic] [abajo] +2”.

Pantalones y camisas

Escribe “1 pantalón → 8 € + camisa”; calcula“ $\underbrace{8+8}_{\text{2 pantalones}} = 16$”, “3 camisetas → 110” (110 se obtiene de restar 16 a 126) y “cada camiseta 36 €” (110 dividido entre 3 da $36,\overset{\frown}{6}$). Elimina el exceso de precio de los pantalones; pero en lugar de repartirlo entre 5 prendas (suponiendo en todas el mismo precio), lo reparte entre las 3 camisetas. Utiliza las relaciones $Pep = Np \cdot Mpc$, $T = Pep + Pqe$, $Ph = Pqe$ (las tres RelNecEmp) y $Ph = Nc \cdot C$ (NoRel).

La quiniela

Se limita a escribir “3 amigos”.

La paga

Escribe “20% de 60” y calcula “ $\frac{60 \cdot 20}{100} = 12$ €”. Supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde a la paga inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa \cdot F$ (NoRel).

Alumno 12

La edad de Pablo

Plantea la ecuación “$4x = x + 15$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación “$5x - 10 = 3x + 8$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación “$12 + x + 7 + x = 32 + x$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp).

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación “$3x + 5 – x = 2$” (EcIn), la transforma en “$5 – 2 = -x + 3x$” (error de transposición de términos) y ésta en “$3 = 2x$”. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa·Ae$, $Fa = T + Aa$ (ambas RelNecEmp) y $Fa = Veaf + Fe$ (NoRel/EHom). Considera “el doble de” como añadir dos y utiliza la misma letra para representar a las cantidades Ae y Fe (LetPol).

Tacha lo anterior y plantea “$3x – (2x + 5) = 2$” (EcIn). Utiliza la misma letra para representar a las cantidades Ae y Fe (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa·Ae$, $Fa = Veaf·Fe$ (ambas RelNecEmp), $\alpha = Fa + T$ (NoRel) y $Aa = Veaf + \alpha$ (NoRel/EHom, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Tacha lo anterior; plantea “$3x = 2x + 5$” (EcIn); obtiene “$x = 5$” y concluye “Enrique = 5” y “Amelia = 5·3 = 15”. Utiliza la misma letra para representar a las cantidades Ae y Fe (LetPol) y reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa·Ae$, $Fa = Veaf·Fe$ (ambas RelNecEmp) y $Aa = T + Fa$ (RelInO).

Bolígrafos

Plantea la ecuación “$5x = x – 6$” (EcIn). La igualdad se construye mediante dos expresiones distintas que representan a la cantidad Pa; mientras que la que la letra x (LetPol) parece representar tanto a B (en “$5x$”) como a D (en “$x – 6$”). Reduce el problema a las relaciones $Pa = B·Na$ y $D = Sa + Pa$ (ambas RelNecEmp). Abandona el intento tras transformar la ecuación en “$4x = -6$” y, posiblemente, observar que iba a obtener un valor negativo como solución de la misma.

Tacha lo anterior; plantea “$5x + 6 = 9x – 2$” (LetCo/EcCo); obtiene “$x = \frac{8}{4}$ =2 €/boli” y calcula “2·5 + 6 = 2·9 – 2 = 16 € lleva”. Construye la ecuación sobre dos expresiones distintas que refieren a la cantidad D y asigna la letra x a la cantidad B. Reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$, $Pb = D + Sb$, $Pa = B·Na$ y $Pb = B·Nb$ (todas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Plantea la ecuación “$2(x + 8) + 3x = 126$” (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye “Camisa = 22 €” y “Pantalón = 22 + 8 = 30 €”. Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc·C$, $Pp = Np·P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Plantea la ecuación “$x + 3x + 2(3x) = 5.000$” (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye “1º = 500” (refiriéndose al tercer amigo), “2º = 500·3 = 1500” (refiriéndose al segundo amigo) y “3º = 1500·2 = 3000” (refiriéndose al primer amigo). Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba·Pb$, $Pb = Vcb·Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Plantea la ecuación “$x \cdot 1{,}2 = 60$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Pf = Pa + Pi$ y $F = Pf \cdot I$ (ambas RelNecEmp).

Alumna 13

La edad de Pablo

Calcula “15·4 = 60”, “60 – 15 = 45” y concluye “R: tiene ahora 45 años”. Reduce el problema a las relaciones $F = Vfa \cdot A$ y $F = T + A$ (ambas RelNecEmp) que implicarían un solución algebraica. Sin embargo, realiza asignaciones a las cantidades desconocidas de manera arbitraria para escapar de la dificultad de operar con la incógnita. Así, en “15·4 = 60” asigna el valor 15 a la cantidad A (lo que supondría resuelto el problema, pues es la cantidad buscada), mientras que en “60 – 15 = 45” usa el mismo valor para la cantidad T.

Más números

No abordado.

La familia de Marcos

Escribe “Marcos = 12”, “Javier = 7” y “Padre = 32” e indica cómo se debería resolver: “Se hace sumando de 1 en 1 i [sic] te da el resultado porque lo hicimos en informatica [sic]” (SMSn). Plantea un esquema de resolución que reproduce un método utilizado en el entorno de la hoja de cálculo. Su intención sería representar las líneas de vida de los protagonistas y buscar el momento en que se verifica la condición del problema; aunque esto no nos indica cómo lo hará. Podemos interpretar que reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ (todas RelNecEmp) con el propósito de asignar a la cantidad T los valores 1, 2… para llevar a cabo una estrategia de prueba y error.

Amelia y Enrique

No abordado.

Bolígrafos

No abordado.

Pantalones y camisas

No abordado.

La quiniela

No abordado.

La paga

Considera un esquema de regla de tres (ver Figura 71); plantea la ecuación “$\frac{60}{100} = \frac{x}{20}$” (LetCo/EcIn), la transforma en “$x = \frac{60 \cdot 20}{100} = 12$”; calcula “60 – 12 = 48 €”; y concluye “R: Antes me daban 48 €”. Suponemos que asigna el valor 12 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “60 – 12 = 48 €” y que presume erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $\frac{Na}{Ni} = \frac{A}{F}$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

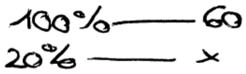


Figura 71.

Alumna 14

La edad de Pablo

Escribe “Pablo → 15 años → 4·*x*”; plantea la ecuación “4*x* = 15*x*” (LetCo/EcIn); la transforma en “*x*·*x* = 4·15” (error de transposición de términos) y ésta en “2*x* = 60” (error en operación algebraica); y obtiene “*x* = 30”. Considera multiplicativa la estructura conceptual que liga las edades con el tiempo transcurrido, lo que da origen a la expresión 15*x*. Reduce el problema a las relaciones $F = A{\cdot}T$ (RelInR/EHom) y $F = Vfa{\cdot}A$ (RelNecEmp).

Más números

Escribe “15º → *x* – 10 = 3·*x* + 8”, “(15·*x*) – 10 = (3·*x*) + 8” (LetCo/EcIn), “-10 – 3 = 3*x* – 15*x*” (errata), “13 = -12*x*” (error en operación aritmética) y “$x = \frac{-12}{13}$” (error de transposición de términos). Interpreta quíntuplo como decimoquinto y/o multiplicar por 15. Reduce el problema a las relaciones $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T{\cdot}N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp) y asigna de manera incorrecta el valor 15 a la cantidad Q.

La familia de Marcos

Representa (ver Figura 72) la cantidad T mediante la letra *x* (LetCo). Escribe en una combinación de lenguaje natural y algebraico “Padre = 12 + 7 + años”; que parece plasmar la relación $Fp = Am + Aj + T$ (NoRel), pues suponemos que si pretendiera expresar la relación $Ap = Am + Aj + T$, hubiera usado el valor “32” y no el nombre “Padre”.

Figura 72.

Amelia y Enrique

Asigna “Amelia → 3*x*”, “Enrique → *x*” y “Amelia → 5 = 2*x*”. Observamos (ver Figura 73) que mientras asigna dos expresiones algebraicas distintas para hacer referencia a la edad de Amelia en las dos situaciones, sólo utiliza una (la letra *x*) para representar a la edad de Enrique. Concluimos que interpreta el fragmento de texto “dentro de 5 años la edad de Amelia sólo será el doble “ como “dentro de 5 años la edad de Amelia sólo será el doble *que la actual de Enrique*”. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa{\cdot}Ae$ (RelNecEmp) y $Fa = Veaf{\cdot}Ae$ (NoRel).

Amelia	Enrique	Años
3x	x	
2x		5

Figura 73.

Bolígrafos

Asigna la letra x a la cantidad D y representa las cantidades Pa y Pb mediante las expresiones algebraicas "$x + 6$" y "$x - 2$", respectivamente (ver Figura 74). Esto implica que la estudiante considera las relaciones $Pa = D + Sa$ y $D = Pb + Sb$ (ambas RelInO) cometiendo un error de inversión en la comparación entre las cantidades D, Sa-Sb y Pa-Pb.

Bolígrafos	€	Total €
5	x+6	X
9	x-2	

Figura 74.

Abandona el planteamiento anterior y calcula "6 + 2 = 9" (error en operación aritmética, ya que da 8), "9 – 5 = 5" y "9 + 4 = 13". Con las dos primeras operaciones, obtiene la diferencia entre el dinero que sobra en primera situación y falta en la segunda y la diferencia entre la número de bolígrafos comprados en ambas situaciones, respectivamente. La tercera operación suma cantidades que refieren a magnitudes distintas (EHom), pues una refiere a número de bolígrafos y otra a dinero. Reduce el problema a las relaciones $Dd = Sa + Sb$, $Nb = Db + Na$ (ambas RelNecEmp) y $\alpha = Dd + Db$ (NoRel, siendo α una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Pantalones y camisas

Representa (ver Figura 75) la cantidad C mediante la letra x y asigna la expresión algebraica "Pantalones = 8 € + x = 8x" (error en operación algebraica) a la cantidad P. Únicamente emplea la relación $P = C + Mpc$ (RelNecEmp).

Camisas	Pantalones	€
3	2	12€
x	8+x	[illegible]

Figura 75.

La quiniela

Escribe "1º → 2x", "2º → 3x", "3º → x" y "Total = 5000 €". Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión "1º = 2x", que sería una traducción de "el primero juega el doble que el segundo", la letra x representaría a

Pb; mientras que en “2º = 3*x*”, que lo sería de “y éste [el segundo] el triple que el tercero”, la letra *x* representaría a la cantidad *Pc*. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$ y $Pb = Vcb \cdot Pc$ (ambas RelNecEmp).

La paga

Calcula “20% de 60 = 0,2·60 = 12”. Supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde a la paga inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa \cdot F$ (NoRel).

Alumno 15

La edad de Pablo

Plantea la ecuación “$x + 15 = 4 \cdot 15$” (LetCo/EcIn) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = Vfa \cdot A$ y $F = T + A$ (ambas RelNecEmp) que implicarían un solución algebraica. Sin embargo, realiza asignaciones a las cantidades desconocidas de manera arbitraria para escapar de la dificultad de operar con la incógnita. Así, en “15·4” asigna el valor 15 a la cantidad *A* (lo que supondría resuelto el problema, pues es la cantidad buscada), mientras que en “$x + 15$” usa el valor 15 para la cantidad *T* y la letra *x* para la cantidad *A*.

Tacha la solución anterior, plantea la ecuación “$x + 15 = 4x$” (LetCo/EcCo) y realiza dos intentos erróneos de solución. En el primer intento transforma “$x + 15 = 4x$” en “$x + x = 4 - 15$” (error de transposición de términos); mientras que en el segundo convierte “$x + 15 = 4x$” en “$x + 15 - 4/x = 0$” (error de transposición de términos). Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Por último, plantea “$\frac{x}{15} = 4 \cdot x$” (LetCo/EcIn); la transforma en “$15 = 4x/x$” (error de transposición de términos), ésta en “$15 = 4x$” (error en operación algebraica); y concluye “$x = 3{,}75$”. Reduce el problema a las relaciones $F = Vfa \cdot A$ (RelNecEmp) y $A = T \cdot F$ (NoRel/EHom).

Más números

Plantea la ecuación “$5x - 10 = 3x + 8$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación “$x + 12 + x + 7 = 32 + x$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp).

Amelia y Enrique

Escribe “amelia [sic] 3*x* → 5 años → 2*x*” y “enrique [sic] *x* → 5 años”. Plantea la ecuación “$3x + 5 = 2x$” (EcIn); obtiene “$x = -5$”; calcula “$x = \frac{-5}{1} = 5$” (error en operación aritmética) para evitar la solución negativa; y concluye “amelia [sic] 5·3 = 15” y “enrique [sic] = 5”. La ecuación parece una traducción lineal del enunciado “Amelia tiene el triple de edad [3·] que su hermano Enrique [*x*] , pero dentro [+] de 5

[5] años la edad de Amelia sólo será [=] el doble [$2x$]" donde la letra x representaría tanto a Ae como a Fe (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa \cdot Ae$, $Fa = Veaf \cdot Fe$ y $Fa = T + Aa$ (las tres RelNecEmp).

Bolígrafos

Plantea la igualdad "9 + 5 = 6 + 8". Identificamos Nb y Na en el término izquierdo; mientras que en el término derecho, aparece la descomposición del número 14 en dos números (distintos de 9 y 5) uno de los cuales es el valor de Sa. De acuerdo con la interpretación anterior, la igualdad supone considerar equivalentes dos cantidades que refieren a magnitudes distintas (EHom), pues mientras 5 (Na) y 9 (Nb) representan a número de bolígrafos, 6 (Sa) representa a dinero. En definitiva, establece una igualdad que atiende a la necesidad de tener en ambos lados de signo igual una operación aritmética que tenga 14 por resultado, sin respetar las relaciones presentes en el problema. A continuación, realiza las operaciones indicadas y obtiene "14 = 14", la transforma en "$\frac{14}{14}$ = 1 €/bolígrafo" (error de transposición de términos) y concluye "€ = 6 + 6 = 12 €" (errata, pues en el primer caso hay 5 bolígrafos, que a 1 € la unidad deberían costar 5 €, y junto a los 6 € que sobran nos darían 11 € como valor del dinero que llevamos encima). Reduce el problema a las relaciones $\alpha = Na + Nb$, $\alpha = Sa + \beta$, $\alpha = B \cdot \alpha$ (las tres NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema y tomando β el valor 8), $D = Pa + Sa$ y $Pa = B \cdot Na$ (ambas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Escribe "camisa = x" (LetCo) y "pantalón = $x + 8$"; plantea la ecuación "$x + x + x + x + 8 + x + 8 = 126$" (EcCo); la resuelve correctamente y concluye "camisa = 22 €" y "pantalón = 22 + 8 = 30 €". Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc \cdot C$, $Pp = Np \cdot P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Escribe "1º $3x \cdot 2x = 6x$" (errata, pues aparecen dos x, cuando sólo debería aparecer una, pero actúa como si sólo hubiera una), "2º $3x$" y 3º x"; plantea la ecuación "$6x + 3x + x = 5000$" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye "1º 3000", "2º 1500" y "3º 500". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Calcula "0,2·60 = 12" y "60 – 12 = 48 €/s". Consideramos que asigna el valor 12 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en "60 – 12 = 48 €/s" y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 16

La edad de Pablo

No abordado.

Más números

No abordado.

La familia de Marcos

Escribe “Marcos 12 años”, “Javier 7 años” y “Su padre 32 años”. A continuación, escribe: “An [sic] de pasar 7 años para que se igualen” y señala “Sumando de 1 en 1”. Plantea un esquema de resolución que reproduce un método utilizado en el entorno de la hoja de cálculo. Su intención sería representar las líneas de vida de los protagonistas y, supuestamente, buscar el momento en que se verifica la condición del problema. Podemos interpretar que reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ (todas RelNecEmp) con el propósito de asignar a la cantidad T los valores 1, 2, etc. para llevar a cabo una estrategia de prueba y error.

Amelia y Enrique

Se limita a escribir “Amelia el triple que su hermano”, “Dentro de 5 años sólo el doble”, “Amelia →” y “Enrique →”.

Bolígrafos

Se limita a sintetizar las dos situaciones que se plantean en el enunciado escribiendo “5 bolis sobran 6 €” y “9 bolis Faltan 2 €”.

Pantalones y camisas

Escribe “3 camisas 2 pantalones → 126 €”, “1 pantalo [sic] 8 € mas [sic] que una camiseta”, “Pantalones → 8·2 = 16 €” y “Camisetas → 100 €” (error en operación aritmética, pues debería obtener 110 al restar 16 a 126). Calcula el exceso de precio correspondiente a los pantalones y lo resta del precio total lo que implica considerar las relaciones $Pep = Np \cdot Mpc$ y $T = Pep + Pqe$ (ambas RelNecEmp).

Abandona el intento anterior, calcula “126:5 = 25,2” y “25,2·2 = 50,4”, y concluye “Pantalones 50,4”. Por el uso que hace del valor 25,2 concluimos que utiliza las relaciones $T = P \cdot N$ (NoRel) y $Pp = P \cdot Np$ (RelNecEmp).

La quiniela

Plantea la ecuación “$6x + 3x + 3x = 5.000$” (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye “1 → $6x$ → 3000”, “2 → $3x = 1500$” y “3 → x → 500”. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Escribe “$\frac{20}{100} \cdot 60$” y concluye “Antes me daban 12 €”. Supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde a la paga inicial. Reduce el problema a la relación $I = Pa \cdot F$ (NoRel).

Alumna 17

La edad de Pablo

Escribe “Pablo → pasan 15 años = $4x$”, plantea la ecuación “$4x = 15 + x$” (LetCo/EcCo) y no la resuelve. Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación “$5x - 10 = x{\cdot}3 + 8$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T{\cdot}N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación “$12 + 7{\cdot}x = 32 + x$” (LetCo/EcIn) donde el transcurso del tiempo se expresa mediante una relación multiplicativa en el término izquierdo y una aditiva en el derecho y se supone que sólo pasa tiempo para uno de los dos hermanos, posiblemente para no hacer pasar más tiempo a un lado que a otro de la ecuación. Reduce el problema a las relaciones $Fp = Am + Fj$ (NoRel), $Fp = Ap + T$ (RelNecEmp) y $Fj = Aj{\cdot}T$ (RelInR/EHom).

Plantea “$18{\cdot}x = 32{\cdot}x$” (LetCo/EcIn), donde “$18x$” proviene de sumar “$12 + 7{\cdot}x$” (error en operación algebraica y error en operación aritmética, pues 12 + 7 da 19). Expresa la acción del paso del tiempo sobre la edad mediante una relación multiplicativa y reduce el problema a las relaciones $Fp = Am + Fj$ (NoRel), $Fj = Aj{\cdot}T$ y $Fp = Ap{\cdot}T$ (ambas RelInR/EHom).

Amelia y Enrique

Asigna la letra x (ver Figura 76) tanto a Ae como a Fe (LetPol) y la expresión “$x{\cdot}5$” a la cantidad Fa lo que supone que la acción del tiempo transcurrido sobre las edades actual y futura se plasma en una relación multiplicativa donde la letra x representa a Aa. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa{\cdot}Ae$ (RelNecEmp) y $Fa = T{\cdot}Aa$ (RelInR/EHom).

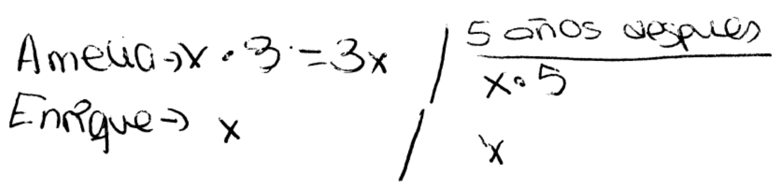


Figura 76.

A continuación, asigna el valor 5 a la cantidad Aa (ver Figura 77). Calcula Fa (15) multiplicando Aa (5) por $Veaa$ (3); Ae, sumando 5 (Aa) a 5 (T); y Fe, sumando 15 (Fa) a 5 (T). Podría interpretarse que el valor 10 se obtiene de multiplicar 5 por 2; pero suponemos que no utiliza $Veaf$ (que toma el valor 2), pues tampoco lo ha considerado en el intento anterior. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Aa{\cdot}Veea$, $Ae = Aa + T$ y $Fe = Fa + T$ (todas NoRel).

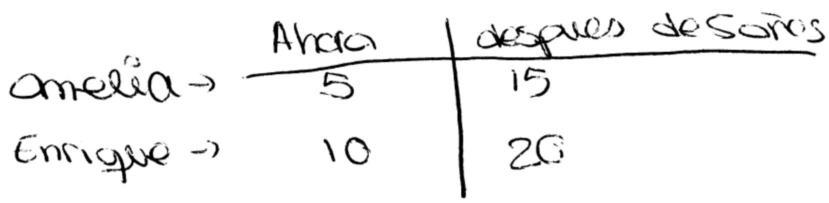


Figura 77.

Bolígrafos

Calcula “6 + 2 = 9 €” (error en operación aritmética) y “9 – 5 = 4” con lo que obtiene la diferencia entre el dinero que sobra en primera situación y falta en la segunda y la diferencia entre la número de bolígrafos comprados en ambas situaciones, respectivamente. Obtiene "2,25 €/boli" de dividir 9 entre 4; 11,10 (error en operación aritmética, pues el resultado correcto es 11,25) de multiplicar 2,25 por 5; 17,10 de sumar 11,10 más 6; y concluye "R → 17, 10 lleva". La anterior secuencia de operaciones supone calcular el precio de un bolígrafo, el precio de cinco bolígrafos y el dinero que lleva, respectivamente. Reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$, $Pa = B{\cdot}Na$, $Dd = Sa + Sb$, $Nb = Db + Na$ y $Dd = B{\cdot}Db$ (todas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Escribe "1 pantalón = 8 + *x*" y "camiseta = *x*" (LetCo); plantea la ecuación "(8 + *x*)·2 – (3*x*) = 126" (EcIn) y explica "1º) Cuanto [sic] cuestan lo [sic] 2 pantalones" y "2º) Cuanto [sic] cuestan las 3 camisas". El error que comete al restar Pp y Pc (errata), puede ser debido a una distracción más que a un error en la lectura; pues había escrito previamente "3 camisetas + 2 pantalones = 126". Asigna la letra *x* a la cantidad C y reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc{\cdot}C$, $Pp = Np{\cdot}P$ y $T = Pp + Pc$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Plantea la ecuación "6*x* + 3*x* + 3*x* = 5.000" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "1º) 3000 €", "2º) 1500 €" y "3º) 500 €". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Plantea "*x* + 0,2 = 60" (LetCo/EcIn), la transforma en "*x* = 60 – 0,2" y la tacha. Plantea "*x* + 20 = 60", la resuelve correctamente y la tacha. Por último, retoma el planteamiento inicial, vuelve a escribir "*x* + 0,2 = 60" (aclarando "20% = 0,2) y no resuelve la ecuación. Las tres ecuaciones responden a una misma lectura del problema que lo reduce a la relación $F = I + A$ (RelNecEmp), tomando como valor de la cantidad A el correspondiente a la cantidad Pa.

Alumno 18

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "*x* + 15 = 4*x*" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa{\cdot}A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación "5*x* – 10 = 3*x* + 8" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q{\cdot}N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T{\cdot}N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación "32 = 12*x* + 7*x*" (LetCo/EcIn). Considera que la acción del paso del tiempo sobre las edades se materializa en una relación multiplicativa e interpreta "¿Cuántos años han de pasar para que *el valor de* la edad *actual* del padre sea la suma de las edades *futuras* de los hijos?". Tras la lectura analítica reduce el problema a $Fm = Am{\cdot}T$, $Fj = Aj{\cdot}T$ (ambas RelInR/EHom) y $Ap = Fm + Fj$ (NoRel).

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación "$3x + 5 = 2x$" (EcIn), la resuelve correctamente y obtiene "$-x = 5$". Las expresiones "$3x$" y "$2x$" hacen referencia a la edad de Amelia actual y futura, respectivamente y, por lo tanto, consideramos que la letra x representaría tanto a Ae como a Fe (LetPol). Reduce el problema a las $Aa = Veaa \cdot Ae$, $Fa = Veaf \cdot Fe$, y $Fa = T + Aa$ (las tres RelNecEmp).

Tacha la solución anterior y plantea la ecuación "$x = 3x + 5$" (EcIn) lo que supondría asignar la letra x a la cantidad Ae (LetCo) y considerar que son iguales la edad actual de Enrique y la futura de Amelia. Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa \cdot Ae$, $Fa = T + Aa$ (ambas RelNecEmp) y $Fa = Ae$ (NoRel).

Bolígrafos

No abordado.

Pantalones y camisas

Plantea la ecuación "$3x + 2x = 126$" (EcIn). Usa la letra x para referirse tanto a C como a P (LetPol) y utiliza las relaciones $Pc = Nc \cdot C$, $Pp = Np \cdot P$ y $T = Pc + Pp$ (las tres RelNecEmp).

Tacha la solución anterior y plantea "$126 = 8 + x$" (EcIn/LetCo). Reduce el problema a la relación $T = Mpc + C$ (NoRel), en la que se iguala una cantidad intensiva (C) y una extensiva (T) (EHom).

La quiniela

Escribe "$1 = 2x$", "$2 = 3x$" y "$3 = x$", plantea la ecuación "$2x + 3x + x = 5.000$" y concluye "$x = 833{,}3$". Utiliza la letra x para representar a las cantidades Pb y Pc (LetPol). Así, en la expresión "$1 = 2x$", que sería una traducción de "el primero juega el doble que el segundo", la letra x representaría a Pb; mientras que en "$2 = 3x$", que lo sería de "y éste [el segundo] el triple que el tercero", la letra x representaría a la cantidad Pc. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Calcula "20% de 60 = 12" y obtiene "48 €" de restar 12 a 60. Consideramos que asigna el valor 12 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en la segunda operación y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 19

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "$x + 15 = 4x$" (LetCo/EcCo); la transforma en "$x - 4x + 15 = 0$" y procede como si se tratara de una ecuación de segundo grado suponiendo a = 1, b = -4 y c = 15 en $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ (error de transposición de términos). Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación “$5x - 10 = 3x + 8$” (LetCo/EcCo). Reduce el problema a las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Representa la edades actuales y futuras de los protagonistas y asigna la letra x (LetCo) a la cantidad T. Plantea la ecuación “$12 + x + 7 + x = 32 + x$” (EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp).

Amelia y Enrique

Asigna la letra x (LetPol) tanto a la cantidad Ae como a Fe (ver Figura 78) y plantea la ecuación “$x + 5 = 2x$” (EcIn) suponiendo iguales las edades futuras de los hermanos. Reduce el problema a las relaciones $Fa = Veaf \cdot Fe$, $Fe = T + Ae$ (ambas RelNecEmp), $Fe = Fa$ (NoRel, sobre la que plantea la ecuación) y $Aa = Veaa \cdot Ae$ (RelNecEmp, pero no empleada en la ecuación).

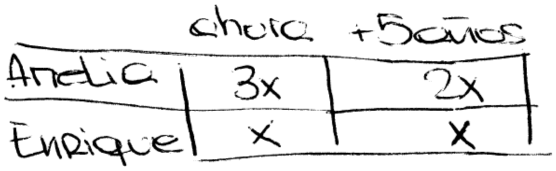


Figura 78.

Tacha la solución anterior y plantea “$2x + 5 = x + 5$” (EcIn). La ecuación responde a la posición de las expresiones en la tabla sin atender a las relaciones entre cantidades, pues la estudiante interpreta la información presente en la tercera columna de la tabla de la Figura 78 como una acción (operación) a realizar y añade 5 a $2x$ y a x. Aunque en la ecuación la letra x sólo representa a la cantidad Fe, en la tabla (ver Figura 78) sigue representando a Ae y a Fe (LetPol). En definitiva, reduce el problema a las relaciones $\alpha = Fa + T$, $\beta = Fe + T$, $\alpha = \beta$ (las tres NoRel, siendo α y β cantidades sin referente en el contexto del problema), $Fa = Veaf \cdot Fe$ (RelNecEmp) y $Aa = Veaa \cdot Ae$ (RelNecEmp, si bien no se utiliza en la ecuación).

Bolígrafos

Asigna la letra x a la cantidad D y representa las cantidades Pa y Pb mediante “$x - 6$” y “$x + 2$” (ver Figura 79), respectivamente. Plantea y resuelve la ecuación “$9 = x + 2$” (LetCo/EcIn) que responde a la posición de las expresiones en la tabla de la Figura 79 y que podríamos interpretar como la traducción sintáctica: 9 bolígrafos cuestan el dinero que llevo más 2 €. Asigna el valor de la cantidad Nb a la cantidad Pb y reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$, $Pb = D + Sb$ (ambas RelNecEmp, planteado la ecuación sobre la última relación exclusivamente).

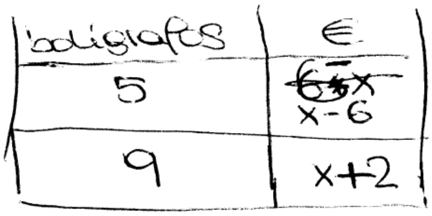


Figura 79.

Pantalones y camisas

Escribe "Camisa = *x*" (LetCo) y "Pantalón = *x* + 8"; plantea la ecuación "*x* = 3*x* + 2(*x* + 8)" (EcIn) y obtiene "*x* = -4". Utiliza las relaciones *P* = *C* + *Mpc*, *Pc* = *Nc·C*, *Pp* = *Np·P*, (las tres RelNecEmp) y *C* = *Pc* + *Pp* (NoRel, sobre la que plantea la ecuación), en la que se iguala una cantidad intensiva a una extensiva (EHom).

Tacha la solución anterior, posiblemente alertado por el resultado negativo que obtiene, y plantea la ecuación "3*x* + 2(*x* + 8) = 126" (LetCo/EcCo) que pone en juego las relaciones *P* = *C* + *Mpc*, *Pc* = *Nc·C*, *Pp* = *Np·P* y *T* = *Pc* + *Pp* (todas RelNecEmp).

La quiniela

Escribe "primero 2(3*x*)", "segundo 3*x*", "tercero *x*" y plantea la ecuación "2·3*x* + 3*x* + *x* = 5000" (LetCo/EcCo). Reduce el problema a las relaciones *Pa* = *Vba·Pb*, *Pb* = *Vcb·Pc* y *P* = *Pa* + *Pb* + *Pc* (todas RelNecEmp).

La paga

Escribe "antes → *x*" y plantea la ecuación "*x* + 20% de *x* = 60" (EcCo). Utiliza la letra *x* para representar a la cantidad *I* (LetCo) y reduce el problema a las relaciones *F* = *I* + *A* y *A* = *Pa·I* (ambas RelNecEmp).

Alumno 20

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "*x* + 15 = 4*x*" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones *F* = *A* + *T* y *F* = *Vfa·A* (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación "5*x* – 10 = 3*x* + 8" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones *Nq* = *Q·N*, *Nq* = *Nqd* + *D*, *Nt* = *T·N*, *Nth* = *H* + *Nt* y *Nth* = *Nqd* (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea un esquema de resolución que reproduce el método utilizado en el entorno de la hoja de cálculo. Construye una tabla de valores con las líneas de vida de Marcos, Javier y el padre (ver Figura 80). Señala los valores 25 y 20 para Marcos y Javier, respectivamente, que coinciden en la columna con una edad de 45 años para el padre y escribe debajo "Marcos = 25 años", "Javier = 20 años", "El padre = 45 años" y "13 años". Reduce el problema a las relaciones *Fm* = *Am* + *T*, *Fj* = *Aj* + *T*, *Fp* = *Ap* + *T* y *Fp* = *Fm* + *Fj* (todas RelNecEmp) y asigna a la cantidad *T* los valores 1, 2… para llevar a cabo una estrategia de prueba y error.

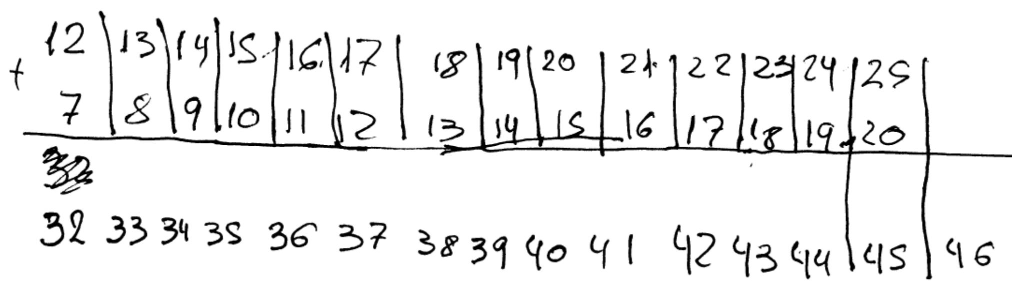


Figura 80.

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación “$3x + 5 = 2x$” (EcIn); la transforma en “$3x – 2x = 5$” (error de transposición de términos); obtiene “$x = 5$” y concluye “Amelia : 15 años” y “Enrique : 5 años”. Observamos que “$3x$” y “$2x$” hacen referencia a la edad de Amelia actual y futura, respectivamente, y que la letra x representaría tanto a Ae como a Fe (LetPol). Reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa·Ae$, $Fa = Veaf·Fe$ y $Fa = T + Aa$ (las tres RelNecEmp).

Bolígrafos

Calcula el precio de cada bolígrafo considerando que la suma de lo que sobra y falta en ambas situaciones es el precio de los bolígrafos que se compran de más en la segunda situación. Así, obtiene “2 – precio de un boli” de dividir “Diferencia de dinero 8” entre “Diferencia de bolis 4”; 10 de multiplicar 2 por 5; 16 de sumar 6 más 10; y concluye “Llevo 16 €”. Reduce el problema a las relaciones $D = Pa + Sa$, $Pa = B·Na$, $Dd = Sa + Sb$, $Nb = Db + Na$ y $Dd = B·Db$ (todas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Plantea la ecuación “$3x + (2x + 8) + (2x + 8) = 126$” (LetCo/EcIn); la transforma en “$7x = 142$” (error de transposición de términos); obtiene “$x = 20,28$” (el redondeo correcto sería 20,29) y concluye “Pantalon: [sic] 28,28” y “Camisa: 20,28”. Las expresión “$(2x + 8)$” refleja un error al aplicar la propiedad distributiva (error en operación algebraica) al materializar conjuntamente las relaciones $Pp = Np·P$ y $P = C + Mpc$ (ambas RelNecEmp). También utiliza las relaciones $Pc = Nc·C$ (RelNecEmp) y $T = Pc + Pp + Pp$ (NoRel).

Tacha la solución anterior; plantea “$3x + (x + 8) + (x + 8) =$ ” (parece olvidar el 126); la transforma en “$5x = 126 – 16$” (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente y concluye “Camisa: 22 €” y “Pantalon: [sic] 30 €”. Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc·C$, $Pp = Np·P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Plantea la ecuación “$6x + 3x + x = 5.000$” (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye “1er jugador = 3000 €”, “2º jugador = 1500 €” y “3er jugador = 500 €”. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba·Pb$, $Pb = Vcb·Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Calcula “$60·0,2 = 12$”, “$60 – 12 = 48$” y concluye “Antes le daban 48 €”. Consideramos que asigna el valor 12 a la cantidad A por el uso que hace de este valor en “60 – 12 =

48” y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 21

La edad de Pablo

Asigna explícitamente la letra x (LetCo) a la cantidad A (ver Figura 81); plantea la ecuación “$x + 15 = 4x$” (EcCo); transforma la ecuación en “$x = 4x + 15$” (error de transposición de términos) y abandona la resolución. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Figura 81.

Más números

Plantea la ecuación “$5x - 10 = 3x + 8$” (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Asigna la letra a la cantidad T (ver Figura 82) y plantea “$12 + x + 7 + x = x$” (LetCo/EcIn). Considera igual la suma de las edades de futuras de los hermanos y el tiempo transcurrido y no emplea la cantidad Fp, a la que le había asignado una expresión correcta en la tabla (de hecho parece representar “$32 + x$” como suma de “$12 + x$” y de “$7 + x$”). Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ (las tres RelNecEmp), $T = Fm + Fj$ (NoRel).

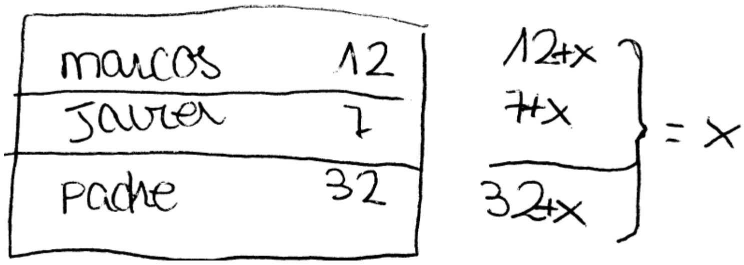


Figura 82.

Abandona la solución anterior, posiblemente alertada por el resultado negativo que empezaba a vislumbrarse, e inicia una solución aritmética. Ofrece una explicación bastante exhaustiva de la solución: “El padre y Marcos se llevan = 20 años”, “El padre y Javier se llevan = 25 años”, “25 + 20 = 45”, “Cuando el padre tenga 45 años” y “Años que tienen que pasar = 45 – 32 = 13 años tienen que pasar”. Basa la resolución sobre el hecho de que la diferencia de edades se mantiene constante a lo largo del tiempo y de que la pregunta del problema se puede transformar en “¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea *la suma de las diferencias de edades entre padre e hijos*?” (se ofrece un esquema explicativo en la Figura 83). Reduce el problema a las relaciones *Ap* = *Dpm* + *Am*, *Ap* =*Dpj* + *Aj*, *Sd* = *Dpm* + *Dpj*, *Fp* = *Sd* y *Fp* = *T* + *Ap* (todas RelNecEmp).

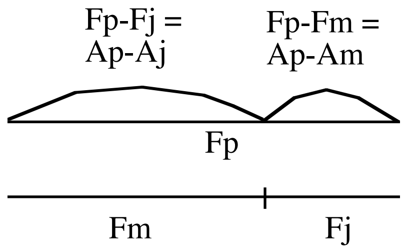


Figura 83.

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación "3*x* + *x* = 2*x* + *x* + 5" (EcIn), la resuelve correctamente y concluye "Enrique 5 años" y "Amelia = 5·3 = 15 años". La estudiante resume la información del enunciado como se muestra en la Figura 84 y plantea la ecuación considerando la ubicación de las cantidades en dicha tabla de forma lineal. Así, el primer término está compuesto por la suma de las expresiones de las dos primeras filas y el segundo por la suma de las dos últimas sobre la que se aplica la acción (añadir 5) "dentro de 5 años". Asigna la letra *x* (LetPol) a las cantidades *Ae* y *Fe* y reduce el problema a las relaciones *Aa* = *Veaa·Ae*, *Fa* = *Veaf·Fe* (ambas RelNecEmp), α = *Aa* + *Ae*, β = *Fa* + *Fe* + *T* y α = β (las tres NoRel, siendo α las suma de las edades actuales de los hermanos y β una cantidad sin referente en el contexto del problema).

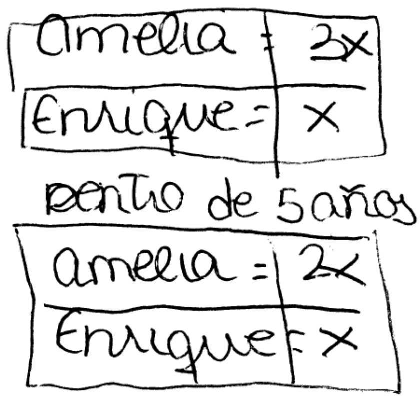


Figura 84.

Bolígrafos

Escribe "5 boligrafos [sic] = *x* – 6 " y "9 boligrafos [sic] = *x* + 2" lo que supone asignar la letra *x* a la cantidad *D* y utilizar las relaciones *D* = *Pa* + *Sa* y *Pb* = *D* + *Sb* (ambas RelNecEmp).

Abandona la incipiente solución y escribe "Llevaba 16 € porque 5·2 € (que vale cada boli) = 10 + 6 (que me han sobrado) = 16 [abajo] y 9 bolis: 9·2 = 18 y me faltan dos euros". Esta nueva solución supone una continuación de la lectura que había iniciado; pero ahora la expresa en el SMSari. Asigna el valor 2 a la cantidad *B* a modo de tanteo y reduce el problema a las relaciones *D* = *Pa* + *Sa*, *Pb* = *D* + *Sb*, *Pa* = *B·Na* y *Pb* = *B·Nb* (todas RelNecEmp).

Pantalones y camisas

Representa la cantidad *C* mediante la letra *x* (LetCo); plantea la ecuación "3*x* + 8 + *x* + 8 + *x* = 126" (EcCo); la resuelve correctamente y concluye "camisa = 22 €" y "pantalón = 22 + 8 = 30 €". Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$, $Pc = Nc·C$, $Pp = Np·P$ y $T = Pc + Pp$ (todas RelNecEmp).

La quiniela

Escribe "1º 6*x*", "2º 3*x*" y "3º *x*", calcula "5000:10 = 500" y concluye "3º *x* = 500", "2º = 500·3 = 1500" y "1º = 1500·2 = 300" (errata, pues el valor correcto es 3000). Plantea una situación de reparto proporcional, con la que evita utilizar el SMSalg, en la que divide el premio en 10 partes de las que una corresponde al tercer amigo, tres al segundo y seis al primero. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba·Pb$, $Pb = Vcb·Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Escribe "Antes = *x*" (LetCo) y plantea "Ahora = *x* + 20% = 60" (EcIn). Asigna el valor de la cantidad *Pa* a la cantidad *A* y reduce el problema a la relación $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumna 22

La edad de Pablo

Expresa de forma gráfica la relación existente entre las cantidades *A* y *F* (ver Figura 85); calcula "15·4 = 60", "60:15 = 4" y "4·4 = 16"; y concluye "4 edad ahora". Inicialmente asigna el valor 15 (el de la cantidad *T*) a la cantidad *A* y calcula *F* mediante "15·4 = 60"; a continuación, obtiene *A* calculando "60:15 = 4" (donde 60 es el valor de la cantidad *F* y 15 el de *T*), lo que supone considerar que el paso del tiempo y las edades se relacionan multiplicativamente. Reduce el problema a las relaciones $F = Vfa·A$ (RelNecEmp) y $F = T·A$ (RelInR/EHom).

Figura 85.

Más números

Plantea la ecuación "*x*·5 – 10 = *x*·3 + 8" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "R → És el número 9" (escrito en catalán). Utiliza las relaciones $Nq = Q·N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T·N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación "12 + *x* + 7 + *x* = 32 + *x*" (LetCo/EcCo); la resuelve correctamente; concluye "R → Han de pasar 13 años" y realiza una comprobación de la validez del resultado. Reduce el problema a las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ y $Fp = Fm + Fj$ (todas RelNecEmp).

Amelia y Enrique

Escribe "Amelia → 3*x*", "Enrique → *x* → 5*x*" y plantea la ecuación "5*x* + 3*x* = 2*x*" (EcIn). Considera que el paso del tiempo y las edades se relacionan de forma multiplicativa, pues la edad de Enrique pasa de "*x*" a "5*x*". Asigna la letra *x* a las cantidades *Ae* y *Fe* (LetPol) y reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa \cdot Ae$, $Fa = Veaf \cdot Fe$ (ambas RelNecEmp), $Fe = T \cdot Ae$ (RelInR/EHom) y $Fa = Aa + Fe$ (NoRel).

Bolígrafos

Escribe "5 bolígrafos = 6 €" y "9 bolígrafos → faltan 2 €" donde observamos que comete el error de asignar a la cantidad *Pa* (desconocida) el valor de *Sa* (6). Calcula "6/5 = 1,2", "9·12 = 10,8", "10,8 – 2 = 8,8" y concluye "R = Llevo 8,8 €". Reduce el problema a las relaciones $\frac{Na}{Nb} = \frac{Pa}{Pb}$ y $Pb = D + Sb$ (ambas RelNecEmp) que supondrían una lectura algebraica; pero puede expresar el problema en el SMSari como consecuencia de la asignación del valor de *Sa* a *Pa*.

Pantalones y camisas

Calcula "126/5 = 25,2", "25,2 + 8 = 33,2" y "25,2 – 8 = 17,2". Calcula el precio de cada prenda si repartiéramos el precio total de forma equitativa y le suma y resta la diferencia de precio (entre un pantalón y una camisa) para obtener el precio de un pantalón y de una camisa, respectivamente. Reduce el problema a las relaciones $N = Nc + Np$, $T = Prp \cdot N$ (ambas RelNecEmp), $Prp = C + Mpc$ y $P = Prp + Mpc$ (ambas NoRel).

La quiniela

Plantea la ecuación "6*x* + 3*x* + *x* = 5.000" (LetCo/EcCo), la resuelve correctamente y concluye "1er amigo → 6*x* → 3000", "2º amigo → 3*x* → 1500" y "3er amigo → *x* → 500". Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba \cdot Pb$, $Pb = Vcb \cdot Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Calcula "$\frac{60}{100} \cdot 20 = 12$", "60 – 12 = 48" y concluye "R → 48 € antes". Consideramos que asigna el valor 12 a la cantidad *A* por el uso que hace de este valor en "60 – 12 = 48" y que supone erróneamente que un aumento de la paga inicial del 20%, implica que el 20% de la paga final corresponde al aumento. Reduce el problema a las relaciones $A = Pa \cdot F$ (NoRel) y $F = I + A$ (RelNecEmp).

Alumno 23

La edad de Pablo

Plantea la ecuación "*x* + 15 = 4*x*" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Reduce el problema a las relaciones $F = A + T$ y $F = Vfa \cdot A$ (ambas RelNecEmp).

Más números

Plantea la ecuación "5*x* – 10 = 3*x* + 8" (LetCo/EcCo) y la resuelve correctamente. Utiliza las relaciones $Nq = Q \cdot N$, $Nq = Nqd + D$, $Nt = T \cdot N$, $Nth = H + Nt$ y $Nth = Nqd$ (todas RelNecEmp).

La familia de Marcos

Plantea la ecuación “12 + x + 7 + x + 32 + x = x + 12 + 7 + 32” (LetCo/EcIn) y la transforma hasta “51 – 51 = -3x + x”, donde se detiene posiblemente alertado por la aparición del cero. Interpreta la pregunta del problema como “¿Cuántos años hay que añadir a la suma de las edades actuales de padre e hijos para que sea igual a la suma de las edades futuras de padre e hijos?”. Utiliza las relaciones $Fm = Am + T$, $Fj = Aj + T$, $Fp = Ap + T$ (las tres RelNecEmp), $\alpha = Fm + Fj + Fp$, $\beta = T + Am + Aj + Ap$ y $\alpha = \beta$ (las tres NoRel, siendo α la suma de las edades futuras de padre e hijos y β una cantidad sin referente en el contexto del problema).

Amelia y Enrique

Plantea la ecuación “3x + x = 2x + x” y la transforma correctamente hasta reducirla a “x(4 – 3) = 0”. El estudiante supone que la suma de las edades de los hermanos es constante y la ecuación parece responder a la ubicación de las cantidades en la tabla que se muestra en la Figura 86. Así, el primer término de la ecuación se obtiene de sumar las expresiones de la columna titulada “ahora” y el segundo de sumar la expresiones de la columna “dentro de cinco años”. Utiliza la letra x (LetPol) para representar tanto a la cantidad Ae como a Fe y reduce el problema a las relaciones $Aa = Veaa{\cdot}Ae$, $Fa = Veaf{\cdot}Fe$ (ambas RelNecEmp), $\alpha = Aa + Ae$, $\beta = Fa + Fe$ y $\alpha = \beta$ (las tres NoRel, siendo α y β, la suma de las edades actuales y futuras de los hermanos, respectivamente).

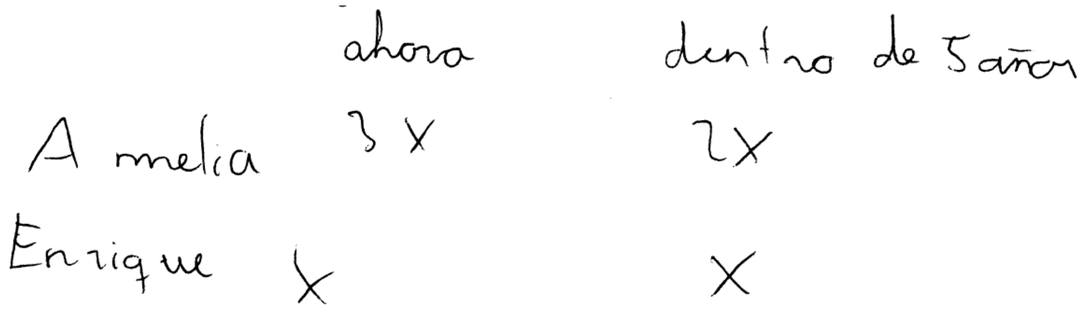


Figura 86.

Bolígrafos

Se limita a sintetizar parte de la información del enunciado mediante “5 bolis --- sobran 6 €” y “9 bolis --- faltan 2 €””.

Pantalones y camisas

Escribe “1ª camisa x”, “2ª camisa x”, “3ª camisa x”, “1er pantalón x + 8”, “2º pantalón x”. Interpreta el “un” de “un pantalón costaba 8 euros más que una camisa” como un adjetivo (uno) en lugar de considerarlo como un artículo indeterminado (un). En consecuencia, supone que sólo uno de los dos pantalones cuesta 8 euros más que una camisa y plantea la ecuación “$x + x + x + x + 8 + x = 126$” (LetCo/EcIn); resuelve la ecuación correctamente; y concluye “1ª camisa 23,60”, “2ª camisa 23,60”, “3ª camisa 23,60”, “1er pantalon [sic] 23,60” y “2º pantalon [sic] 15,6”. Reduce el problema a las relaciones $P = C + Mpc$ (siendo P el precio del pantalón más caro), $Pc = Nc{\cdot}C$ (ambas RelNecEmp), $\alpha = C$ (NoRel, siendo α el precio del pantalón que cuesta lo mismo que una camisa), $Pp = \alpha + P$ y $T = Pc + Pp$ (las dos RelNecEmp, pues la primera es equivalente a $Pp = Np{\cdot}P$).

La quiniela

Escribe "1ª persona = 2*x*", "2ª persona = 3*x*" y "3ª persona = *x*"; plantea la ecuación "2*x* + 3*x* + *x* = 5000" (EcIn) y la resuelve correctamente. Utiliza la letra *x* para representar a las cantidades *Pb* y *Pc* (LetPol). Así, en la expresión "1ª persona = 2*x*", que sería una traducción de "el primero juega el doble que el segundo", la letra *x* representaría a *Pb*; mientras que en "2ª persona = 3*x*", que lo sería de "y éste [el segundo] el triple que el tercero", la letra *x* representaría a la cantidad *Pc*. Reduce el problema a las relaciones $Pa = Vba{\cdot}Pb$, $Pb = Vcb{\cdot}Pc$ y $P = Pa + Pb + Pc$ (todas RelNecEmp).

La paga

Plantea la ecuación "x + 20% = 60" (LetCo/EcIn), la transforma en "$x = 60 - 20$" y obtiene "$x = 40$". La ecuación responde a la relación $F = I + A$ (RelNecEmp) tomando el valor correspondiente a la cantidad *Pa* como valor de la cantidad *A*.

5.8. LA COMPARACIÓN DE LOS CUESTIONARIOS 2 Y POST

El objetivo de este apartado será analizar los datos obtenidos para valorar si se ha producido, o no, un aumento en la competencia de los sujetos a la hora de resolver problemas verbales. Para ello comparemos los valores de un grupo de variables que hemos obtenido al examinar los cuestionarios isomorfos suministrados a la población antes y después de la enseñanza (los llamados cuestionario 2 y cuestionario Post, respectivamente). El grupo de las variables medidas en cada uno de los problemas y para cada sujeto que utilizamos en esta parte del estudio fue: *A*, *LAlg*, *LArit* (que describen la existencia de producción); *ICanNecC*, *ICanNecD*, *ICanEsp*, *IRelNec*, *IRelIn*, *IAcRel* (que describen la actuación en el paso 1 del MC); *SMSalg*, *SMSari*, *SMSarialg*, *SMSn* (que describen el SMS empleado); *Tan*, *LetCo*, *LetPol* (que describen la actuación en el paso 2 del MC); *IAsigCoC*, *IAsigCoD*, *IAsigArb* (que describen la actuación en el paso 3 del MC[22]); *IgCo*, *IgIn* (que describen la actuación en el paso 4 del MC) e *INomC*, *INomD* (que dan cuenta de la construcción de nombres para las cantidades). De esta forma, la actuación de los estudiantes, tanto en la prueba previa como posterior, quedaba definida por una matriz de dimensión 176×23 donde los casos eran estudiante-problema[23]. Redujimos ambas matrices sumando los valores obtenidos para las 23 las variables en los ocho problemas por cada sujeto. Esto nos proporcionó dos matrices de dimensión 22×23 donde los casos eran los estudiantes. A estas 23 nuevas variables (que recogen la suma por individuo) les dimos el mismo nombre que a las anteriores seguido por un subíndice 2 o un subíndice P según midieran características del cuestionario previo o del cuestionario posterior, respectivamente. Por ejemplo, a la suma de los valores de la variable *IRelIn* de los ocho problemas del

[22] Como ya hemos comentado, disponer únicamente de las producciones escritas de los estudiantes nos impide estructurar un conjunto de variables que midan con precisión la actuación en el paso 3, ya que no podemos diferenciar qué parte de la producción escrita hay que atribuir a la lectura (paso 1) y cuál a la plasmación de las expresiones algebraicas (paso 3). Esto produce que las variables que hemos utilizado para describir el paso 3 estén muy influidas por las variables que miden el paso 1. Por esta razón, sólo las utilizaremos cuando ofrezcamos la comparación general de los cuestionarios con una intención descriptiva.

[23] Únicamente 176 estudiantes-problema porque 2 de los 24 sujetos iniciales (el 24 y el 7) no participaron en la comparación de los cuestionarios 2 y Post por las razones que se expusieron al principio del capítulo.

cuestionario previo a la enseñanza le llamaremos $IRelIn_2$ y a los del posterior, $IRelIn_P$. Evidentemente, cada una de estas nuevas variables-suma debe tomar un valor comprendido entre cero y el número de problemas considerados[24].

El análisis de los datos lo organizaremos alrededor de tres ejes: aspectos relacionados con las características de la resolución, las subfamilias de problemas y la clasificación de la población. Respecto a las características de la resolución, en primer lugar analizaremos los datos sin imponer restricciones sobre el método utilizado para resolver los problemas. A continuación, nos restringiremos[25] a los casos estudiante-problema en los que la lectura sea algebraica en los problemas apareados isomorfos de los cuestionarios 2 y Post[26] y por último, impondremos el uso del SMSalg. La razón de exigir lecturas algebraicas o el uso del SMS del álgebra se halla en que queremos observar si se produce una variación en la competencia a la hora de resolver problemas que se abordan mediante el MC o mediante algún método, como el ensayo y error, que parta de una lectura algebraica, pero no use el SMS del álgebra.

Atendiendo a las subfamilias de problemas, en primer lugar se estudiarán todos los problemas. A continuación, analizaremos sólo los problemas de edades y, por último los problemas que no son de edades (a los que llamaremos *el resto de problemas*). El interés por estudiar específicamente los problemas de edades surgió de las actuaciones observadas en los estudiantes durante la secuencia de enseñanza y los estudios de casos, donde se identificó el uso de una estrategia espontánea para la resolución de problemas de edades basadas en la generación de las líneas de vida que se apartaba del MHC (ver capítulo 6).

En el análisis de datos en función de la clasificación de la población, compararemos los resultados entre las dos clases obtenidas al aplicar los tres criterios de clasificación.

La presentación, en todos los casos, se organizará según los grupos de variables que hemos descrito al principio del apartado. Ofreceremos una tabla con la media y la desviación típica las variables-suma en cada cuestionario utilizando dos cifras decimales para representar los datos. Cuando lo consideremos necesario, comentaremos la variación en términos de porcentajes. Debido a la gran cantidad de variables que se presentan y a las distintas situaciones donde las consideraremos, no nos limitaremos a realizar una descripción de la variación, sino que también llevaremos a cabo pruebas estadísticas[27] para averiguar en qué casos aparecen variaciones significativas. Como nuestra intención será comparar dos conjuntos de observaciones de una misma muestra, deberemos recurrir a una prueba *t* para una muestra apareada o a la prueba de pares equiparados de Wilcoxon. Usaremos la primera cuando podamos asegurar que la variable (los valores de la variable en el cuestionario anterior y posterior) considerada se distribuye normalmente y emplearemos la segunda cuando no podamos asegurarlo. Para

---

[24] Si consideramos el total de problemas de un cuestionario, el valor máximo será ocho; tres cuando comparemos los de edades y cinco cuando comparemos el resto.

[25] En primer lugar, eliminamos los casos que no cumplen la restricción en las matrices de dimensión 176×23 (una matriz para el cuestionario 2 y otra para el Post) donde los casos son estudiante-problema y después las reducimos a sendas matrices 22×23 donde los casos son los estudiantes.

[26] Los cuestionarios 2 y Post están formados por problemas que suelen resolverse de forma algebraica. En estos problemas, realizar una lectura aritmética suele conllevar un menor éxito en la resolución. Si sólo exigiéramos lectura algebraica en uno de los dos problemas apareados, sesgaríamos el análisis.

[27] Las tablas y análisis estadísticos los hemos realizado con el programa *SPSS 16.0 for Mac*.

comprobar si una variable se distribuye normalmente realizaremos una prueba de Kolmógorov-Smirnov. Cuando partamos a la población en clases, utilizaremos la prueba de Wilcoxon exclusivamente como consecuencia del reducido número de individuos que las forman. En todas estas pruebas exigiremos un valor $p < 0{,}005$ para considerar un resultado como estadísticamente significativo y utilizaremos pruebas de dos colas para no descartar la posibilidad de que el efecto de la enseñanza haya sido negativo. Como nuestras conclusiones tienen la intención de ser locales, no consideraremos la necesidad de introducir correcciones como la de Bonferroni y limitaremos el uso de los resultados de estas pruebas a organizar el análisis para extraer conclusiones locales, nunca a realizar generalizaciones ni contrastar hipótesis.

Antes de iniciar la comparación, recordaremos que descartamos al estudiante 7, por no haberse presentado al cuestionario que siguió a la enseñanza, y al estudiante 24, por haber copiado, con lo que la población que comparamos estaba formada por 22 sujetos. La ausencia del estudiante 7 modificó el número de individuos que consideramos como integrantes de los grupos obtenidos tras la clasificación. Así, la clase L_1 quedó constituida por 13 estudiantes (se eliminó el individuo 7) y la L_2 se mantuvo 9. La clase Com_1 pasó a estar formada por 11 individuos (se eliminó el individuo 7) y la Com_2 permaneció en 11. Por último, la clase HC_1 se mantuvo en 13 individuos y la HC_2 pasó a estar compuesta por 9 (se eliminó el individuo 7).

5.8.1. LA COMPARACIÓN SIN EXIGIR RESTRICCIONES

5.8.1.1. La comparación de todos los problemas

En la Tabla 2 se observa un incremento en la media del número de problemas abordados. Se pasa de 161 actuaciones (sobre un total posible de 176; es decir, 8 problemas por 22 estudiantes) que consideramos como problema abordado en el cuestionario previo, a 164. También se observa un incremento en la media de *LAlg* (+7,96%)[28], así como una disminución en el media de *LArit* (-26,09%). Se pasa de un 71,07% de lecturas algebraicas sobre el total de lecturas a un 78,21%. Sin embargo, el aumento en el número de lecturas algebraicas no se ve acompañado por un incremento en el uso de SMSalg. Así, la media de la variable *SMSalg* disminuye (ver Tabla 3), mientras aumentan las medias de *SMSari* y *SMSn*. El uso del SMSalg pasa de un 71,70%, sobre el total de problemas donde se identifica el uso de SMS, en el cuestionario previo a un 68,59% en el posterior.

Tabla 2. La existencia y tipo de lectura sin exigir restricciones.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
Media	7,32	7,45	5,14	5,55	2,09	1,55
Desv. típ.	1,39	1,14	1,58	1,71	1,34	1,01

[28] Cuando lo consideremos necesario acompañáremos el comentario con el porcentaje de variación de la media de la variable entre paréntesis. Evidentemente, este porcentaje es el mismo que el que experimenta la suma de los valores de la variable para los distintos sujetos. Se calcula a partir de los valores de la media sin redondear y por esta razón se puede observar diferencia con el resultado que se obtendría si utilizáramos los valores ofrecidos en el texto con dos cifras decimales.

Tabla 3. Los SMS empleados sin exigir restricciones.

	*SMSalg*2	*SMSalg*P	*SMSari*2	*SMSari*P	*SMSarialg*2	*SMSarialg*P	*SMSn*2	*SMSn*P
Media	5,18	4,86	1,86	1,95	0,18	0,18	0,00	0,09
Desv. típ.	1,97	2,32	1,52	1,70	0,40	0,40	0,00	0,29

Encontramos una aumento en las variables que miden el uso de cantidades y relaciones necesarias y una disminución en las que dan cuenta del uso de incorrectas (ver Tablas 4 y 5). Así, la media de *ICanNecC* (que mide el uso de cantidades conocidas necesarias) aumenta en un 2,83%; la de *ICanNecD* (que mide el uso de cantidades desconocidas necesarias), en un 3,71%; la de *ICanEsp* (que mide el uso de cantidades no presentes en las lecturas teóricas) disminuye en un 11,25%; la de *IRelNec* (que mide el uso de relaciones necesarias) aumenta un 4,23%; y la de *IRelIn* (que mide el uso de relaciones incorrectas) disminuye un 5,77%. La media de la variable *IAcRel*, que mide la calidad de la lectura, aumenta un 2,56%.

Tabla 4. La identificación de cantidades sin exigir restricciones.

	*ICanNecC*2	*ICanNecC*P	*ICanNecD*2	*ICanNecD*P	*ICanEsp*2	*ICanEsp*P
Media	6,81	7,01	6,23	6,46	0,18	0,16
Desv. típ.	1,54	1,27	1,55	1,66	0,20	0,19

Tabla 5. El establecimiento de relaciones sin exigir restricciones.

	*IRelNec*2	*IRelNec*P	*IRelIn*2	*IRelIn*P	*IAcRel*2	*IAcRel*P
Media	4,78	4,99	0,91	0,86	4,58	4,69
Desv. típ.	1,72	1,96	0,55	0,60	1,71	1,98

Entre las variables que describen el paso 2 del MC, se observa (ver Tabla 6) una disminución en la media de la variable *LetCo* y un aumento en la variable *LetPol*. El 82,91% de las letras utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje disminuía al 81,08% (evidentemente esto supone un aumento en el porcentaje de letras polisémicas). También se observa un aumento de la media de la variable *Tan* (+250,00%). Esta variable mide el uso de un número provisional para una cantidad desconocida, ya sea para emplearlo en una estrategia de ensayo y error o como un primer valor de una cantidad a partir del cual se calcula un segundo valor definitivo generando, así, una contradicción en la solución.

Tabla 6. Las variables que describen el paso 2 sin exigir restricciones.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	0,18	0,64	4,41	4,09	0,91	0,95
Desv. Típ.	0,40	0,73	1,82	2,16	0,68	1,00

Aplicamos a la variable Tan_2 una prueba de Kolmógorov-Smirnov para averiguar si sus valores se distribuyen normalmente. Los resultados (Z = 2,33; p = 0,00) nos permiten rechazar la hipótesis nula de normalidad. Realizamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Tan_2-Tan_P en las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,23; p = 0,03).

Ofrecemos la comparación de medias para las variables del paso 3 del MC volviendo a insistir en la poca utilidad de las variables *IAsigCoC* e *IAsigCoD* por tratarse de la cuantificación de producciones escritas. En la Tabla 7 se muestra un incremento en las medias de las variables *IAsigCoC* (+2,94%) e *IAsigCoD* (+5,12%) y una disminución (-1,89%) de la variable *IAsigArb* (que mide la asignación de valores de una manera arbitraria).

Tabla 7. Las variables que describen el paso 3 sin exigir restricciones.

	$IAsigCoC_2$	$IAsigCoC_P$	$IAsigCoD_2$	$IAsigCoD_P$	$IAsigArb_2$	$IAsigArb_P$
Media	7,08	7,29	5,07	5,33	0,38	0,37
Desv. típ.	1,51	1,18	1,55	1,90	0,30	0,30

Por lo que respecta al paso 4 del MC, no se observa (ver Tabla 8) variación entre el media de las variables *IgCo* (que miden el uso de igualdades correctas a la hora de plantear la ecuación) antes y después de la enseñanza y disminuye la de *IgIn* (que mide el uso de igualdades incorrectas). Sin embargo, si comparamos el número de igualdades correctas sobre el total de igualdades empleadas, encontramos que el porcentaje de uso de igualdades correctas pasa del 79,63% al 80,37%, lo que supone un ligero aumento.

Tabla 8. Las variables que describen el paso 4 sin exigir restricciones.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	3,91	3,91	1,00	0,95
Desv. típ.	2,14	2,27	0,93	1,05

Por último, se observa (ver Tabla 9) un aumento en las medias de las variables *INomC* (+47,92%) e *INomD* (+35,71%) en el cuestionario Post.

Tabla 9. La construcción de nombres sin exigir restricciones.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,91	1,34	2,42	3,29
Desv. típ.	0,65	0,88	1,33	1,41

Aplicamos a los valores de las variables $INomC_2$, $INomC_P$, $INomD_2$ e $INomD_P$ sendas pruebas de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuyen normalmente. Los resultados ($Z = 1{,}33$, $p = 0{,}059$ para $INomC_2$; $Z = 0{,}75$, $p = 0{,}619$ para $INomC_P$; $Z = 0{,}45$, $p = 0{,}986$ para $INomD_2$; $Z = 0{,}64$, $p = 0{,}813$ para $INomD_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad. Aplicamos una prueba t para datos pareados y encontramos que existen diferencias significativas en las medias de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($t(21) = 2{,}61$, $p = 0{,}016$ para $INomC_P$-$INomC_2$; $t(21) = -3{,}792857$, $p = 0{,}001$ para $INomD_2$-$INomD_P$).

El aumento significativo en la construcción de nombres para las cantidades necesarias empleadas nos invita a preguntarnos si influye en el aumento en la competencia a la hora de resolver problemas. Para responder a esta pregunta seleccionamos los casos estudiante-problema en los que existe lectura (aritmética o algebraica) en el cuestionario previo y el valor de *INomD* en este cuestionario es menor que el del cuestionario posterior. Las variables que describen el paso 1 del MC (*ICanNecC*, *ICanNecD*, *ICanEsp*, *IRelNec*, *IRelIn* e *IAcRel*) varían en el mismo sentido que cuando no se aplican restricciones. Al igual que en el caso general, no aparecen diferencias significativas, pero sí se observan diferencias en los porcentajes de aumento con respecto a las que se dieron en la comparación general. Así, la media de la variable *IAcRel* sólo aumenta un 0,76%, mientras se incrementaba un 2,40% cuando no imponíamos restricciones.

5.8.1.2. La comparación de los problemas de edades

En los problemas de edades (ver Tabla 10), permanece constante la media de problemas abordados y se observa un aumento de la media de *LAlg* (+9,43%) y una disminución (no podía ser de otro modo) de la media de *LArit* (-55,56%). Se pasa de un 85,48% de lecturas algebraicas sobre el total de lecturas a un 93,55%. Sin embargo, se produce una disminución (ver Tabla 11) en las medias de las variables *SMSalg* y *SMSarialg* (que miden el uso de SMS que utilizan letras) y un aumento de *SMSari* y *SMSn* (que miden el uso de SMS que no utilizan letras). El uso del SMSalg pasa de un 83,87%, sobre el total de problemas donde se identifica el uso de SMS, en el cuestionario previo a un 77,42% en el posterior.

Tabla 10. La existencia y tipo de lectura en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
Media	2,86	2,86	2,41	2,64	0,41	0,18
Desv. típ.	0,35	0,35	0,67	0,58	0,50	0,40

Tabla 11. Los SMS empleados en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	SMSalg$_2$	*SMSalg*$_P$	*SMSari*$_2$	*SMSari*$_P$	*SMSarialg*$_2$	*SMSarialg*$_P$	*SMSn*$_2$	*SMSn*$_P$
Media	2,36	2,18	0,41	0,55	0,05	0,00	0,00	0,09
Desv. típ.	0,79	1,05	0,59	0,74	0,21	0,00	0,00	0,29

Por lo que respecta al paso 1 del MC, se produce (ver Tabla 12) una disminución en el uso de cantidades conocidas (-1,11%) y un aumento de las desconocidas (+1,35%), así como un aumento de las cantidades espurias (la media de *ICanEsp* aumenta un 95,12%). Por lo que respecta al entramado de relaciones, se observa una disminución de la media de *IRelNec* (-5,52%) y un aumento de *IRelIn* (+55,81%), lo que supone una disminución en la competencia a la hora de establecer relaciones entre cantidades (ver Tabla 13). Lo anterior lo resumen la disminución de la media de la variable *IAcRel* (-9,56%).

Tabla 12. La identificación de cantidades en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	ICanNecC$_2$	*ICanNecC*$_P$	*ICanNecD*$_2$	*ICanNecD*$_P$	*ICanEsp*$_2$	*ICanEsp*$_P$
Media	2,73	2,70	2,53	2,57	0,06[29]	0,11
Desv. típ.	0,44	0,52	0,52	0,58	0,12	0,18

Tabla 13. El establecimiento de relaciones en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	IRelNec$_2$	*IRelNec*$_P$	*IRelIn*$_2$	*IRelIn*$_P$	*IAcRel*$_2$	*IAcRel*$_P$
Media	1,99	1,88	0,27	0,42	1,92	1,73
Desv. típ.	0,61	0,74	0,28	0,38	0,63	0,74

En las variables que describen la actuación en el paso 2 del MC, se observa un incremento en la media de la variable *Tan* (+900,00%), una disminución en la media de *LetCo* y se obtiene la misma media en ambos cuestionarios para *LetPol* (ver Tabla 14). El 73,58% de las letras utilizas utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje disminuía al 70,83% (evidentemente esto supone un aumento en el porcentaje de letras polisémicas).

[29] Hemos decidido conservar el análisis de variables como *ICanEsp* o *IAsigArb*. Estas variables tienen valores muy pequeños debido a la escasa aparición de los fenómenos que observan y son candidatas a grandes variaciones porcentuales ante pequeñas variaciones de los valores absolutos.

Tabla 14. Las variables que describen el paso 2 en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	0,05	0,45	1,77	1,55	0,64	0,64
Desv. típ.	0,21	0,67	0,75	1,06	0,49	0,79

Aplicamos a los valores de la variable Tan_2 una prueba de Kolmógorov-Smirnov para averiguar si se distribuyen normalmente. Los resultados (Z = 2,53; p = 0,000) nos permiten rechazar la hipótesis nula de normalidad. Aplicamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Tan_2-Tan_P de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,31; p = 0,021).

A partir de este momento, y por las razones que hemos expuesto de forma repetida, únicamente utilizaremos la variable *IAsigArb* para dar una descripción parcial del paso 3. Decimos parcial porque esta variable mide las asignaciones arbitrarias (un fenómeno poco habitual en nuestro estudio) que se realizan a las cantidades (conocidas o desconocidas) necesarias empleadas y, por lo tanto, sólo da cuenta de la existencia de un determinado error ligado al uso de letras polisémicas o de valores provisionales para cantidades desconocidas (siempre que los valores provisionales no se usen en una estrategia de ensayo y error). Para el caso de los problemas de edades, la media de la variable *IAsigArb* aumenta un 3,28% (pasa de M = 0,19, SD = 0,14 a M = 0,20, SD = 0,17).

Por lo que respecta a los indicadores del paso 4, se produce (ver Tabla 15) una disminución en la media de la variable *IgCo* y un aumento en la de *IgIn*. Si comparamos el número de igualdades correctas sobre el total de igualdades empleadas, encontramos que el porcentaje de uso de igualdades correctas pasa del 74,00% en el cuestionario anterior a la enseñanza al 63,83%, lo que supone un descenso (y un correspondiente aumento de la incorrectas).

Tabla 15. Las variables que describen el paso 4 en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	1,68	1,36	0,59	0,77
Desv. típ.	1,04	0,95	0,73	0,87

Por lo que refiere a la construcción de nombres (ver Tabla 16) para cantidades, se observa un aumento no significativo en las medidas de *INomC* (+12,64%) e *INomD* (+28,99%).

Tabla 16. La construcción de nombres en los problemas de edades sin exigir restricciones.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,66	0,74	1,09	1,41
Desv. típ.	0,52	0,47	0,83	0,99

5.8.1.3. La comparación del resto de problemas

En la Tabla 17, se muestra que, tras la enseñanza, se produce un aumento en las medias de las variables *A* y *LAlg* y una disminución de *LArit*. Se pasa de un 61,86% de lecturas algebraicas sobre el total de lecturas a un 68,09% (con la correspondiente disminución de lecturas aritméticas). Nuevamente se observa una disminución en la media de *SMSalg* (ver Tabla 18), una disminución de la de *SMSari* y un aumento en la de *SMSarialg*. El uso del SMSalg pasa de un 63,92%, sobre el total de problemas donde se identifica el uso de SMS, en el cuestionario previo a un 62,77% en el posterior; mientras que el porcentaje de uso de SMSari respecto al total se mantiene casi estable pasando del 32,99% al 32,98%.

Tabla 17. La existencia y tipo de lectura en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
Media	4,45	4,59	2,73	2,91	1,68	1,36
Desv. típ.	1,10	0,91	1,24	1,34	1,13	0,91

Tabla 18. Los SMS empleados en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
Media	2,82	2,68	1,45	1,41	0,14	0,18	0,00	0,00
Desv. típ.	1,44	1,46	1,22	1,22	0,35	0,40	0,00	0,00

Las variables que describen el paso 1 del MC (ver Tablas 19 y 20) muestran un evolución positiva tras la enseñanza. Aumenta la media de las variables que miden el uso de cantidades y relaciones correctas (*IRelNec*, *ICanNecC* e *ICanNecD*) y disminuyen las medias de las que miden el uso de relaciones incorrectas (*IRelIn*) o cantidades no presentes en las lecturas teóricas (*ICanEsp*). Así, la media de *ICanNecC* aumenta un 5,48%; la de *ICanNecD*, un 5,34%; la de *ICanEsp* disminuye un 61,00%; la de *IRelNec* aumenta un 11,17% y la de *IRelIn* disminuye un 31,42%. La media de la variable *IAcRel*, que mide la calidad de la lectura, aumenta un 11,29%.

Tabla 19. La identificación de cantidades en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
Media	4,08	4,30	3,69	3,89	0,12	0,05
Desv. típ.	1,22	0,92	1,19	1,16	0,12	0,08

Tabla 20. El establecimiento de relaciones en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
Media	2,79	3,11	0,65	0,44	2,66	2,96
Desv. Típ.	1,34	1,47	0,38	0,44	1,34	1,51

Aplicamos a los valores de las variables $ICanEsp_2$ e $ICanEsp_P$ una prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuyen normalmente. Los resultados ($Z = 1{,}37$, $p = 0{,}048$ para $ICanEsp_2$; $Z = 1{,}94$, $p = 0{,}001$ para $ICanEsp_P$) nos llevan a rechazar la hipótesis nula de normalidad. Aplicamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables $ICanEsp_2$-$ICanEsp_P$ de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2{,}49$; $p = 0{,}013$).

Respecto a al paso 2 del MC, se observa (ver Tabla 21) un aumento de la media de la variable *Tan* (+33,33%) sin que llegue a ser significativa, una disminución de la media de *LetCo* y un aumento de *LetPol*. El 90,63% de las letras utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje disminuía al 88,89% (evidentemente esto supone el correspondiente aumento en el porcentaje de letras polisémicas).

Tabla 21. Las variables que describen el paso 2 en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	0,14	0,18	2,64	2,55	0,27	0,32
Desv. típ.	0,35	0,50	1,40	1,50	0,46	0,48

Por lo que respecta al paso 3 del MC, se produce un descenso (-7,09%) en la media de la variable *IAsigArb* (pasa de $M = 0{,}19$, $SD = 0{,}26$ a $M = 0{,}18$, $SD = 0{,}19$) entre las actuaciones de los cuestionarios anterior y posterior.

Observamos un incremento (ver Tabla 22) en la media de la variable *IgCo* y una disminución en *IgIn*. De hecho las igualdades correctas pasa de ser el 84,48% sobre el total en el cuestionario previo al 93,33% en el posterior (con la correspondiente disminución de igualdades incorrectas).

Tabla 22. Las variables que describen el paso 4 en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	2,23	2,55	0,41	0,18
Desv. típ.	1,41	1,60	0,50	0,40

Al igual que en los casos anteriores, se observa (ver Tabla 23) un incremento en la media de las variables *INomC* (+140,91%) e *INomD* (+41,23%) que miden la construcción de nombres para las cantidades empleadas.

Tabla 23. La construcción de nombres en el resto de problemas sin exigir restricciones.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,25	0,60	1,33	1,88
Desv. típ.	0,40	0,60	0,94	0,74

Aplicamos a las variables $INomC_2$, $INomC_P$, $INomD_2$ e $INomD_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuyen normalmente. Los resultados ($Z = 1,94$, $p = 0,001$ para $INomC_2$; $Z = 0,96$, $p = 0,316$ para $INomC_P$; $Z = 0,48$, $p = 0,973$ para $INomD_2$; $Z = 0,52$, $p = 0,949$ para $INomD_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad de todos las variables excepto $INomC_2$. Por lo tanto, no podemos atribuir una distribución normal a la pareja de variables $INomC_2$-$INomC_P$, sobre la aplicaremos el test no paramétrico de Wilcoxon, pero sí a la pareja $INomD_2$-$INomD_P$ sobre la que aplicaremos una prueba t para datos pareados. Al aplicar la prueba de Wilcoxon, encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de los valores de las variables $INomC_2$-$INomC_P$ de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2,14$; $p = 0,032$). También encontramos que existen diferencias significativas en las medias de las variables $INomD_2$-$INomD_P$ en las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($t\ (21) = -4,07$, $p = 0,001$).

5.8.2. LA COMPARACIÓN EXIGIENDO LECTURA ALGEBRAICA

Como el propósito de nuestra enseñanza era conseguir mejorar la competencia al resolver los problemas de manera algebraica, parece necesario realizar un estudio en el que únicamente se comparen los casos (estudiante-problema) en los que los estudiantes realizaron una lectura algebraica en los problemas isomorfos de ambos cuestionarios. Omitiremos la referencia a las variables *A*, *LAlg* y *LArit*, porque estamos suponiendo problemas que se abordan en el cuestionario previo y posterior y de los que se realiza una lectura algebraica. De los 176 casos posibles, sólo 94 cumplieron los requisitos. Aclaramos que las puntuaciones de las variables acumuladas no tendrán el mismo valor máximo en todos los sujetos, pues dependerá del número de casos que cada estudiante haya abordado algebraicamente.

5.8.2.1. La comparación de todos los problemas

Respecto al tipo de SMS utilizado (ver Tabla 24), se observa una disminución en la media de la variable *SMSalg* y un aumento del resto de variables. El uso del SMSalg disminuye de un 92,55%, sobre el total de problemas en el cuestionario previo, a un 85,11% en el posterior y aumenta el de SMSari del 6,38% al 10,64%.

Tabla 24. Los SMS empleados exigiendo lectura algebraica.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
Media	3,95	3,64	0,27	0,45	0,05	0,09	0,00	0,09
Desv. típ.	1,91	2,04	0,55	0,60	0,21	0,29	0,00	0,29

Aplicamos a las variables $SMSalg_2$, $SMSalg_P$, $SMSari_2$ y $SMSari_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para averiguar si se distribuyen normalmente. Para las variables $SMSalg_2$ y $SMSalg_P$, los resultados (Z = 0,76; p = 0,610 para $SMSalg_2$; Z = 0,70; p = 0,705 para $SMSalg_P$) nos impiden rechazar la hipótesis nula de normalidad; mientras que para $SMSari_2$ y $SMSari_P$, los resultados (Z = 2,17; p = 0,000 para $SMSari_2$; Z = 1,73; p = 0,005 para $SMSari_P$) nos permiten rechazarla. Recurrimos a un prueba t de Student y un prueba de Wilcoxon para analizar si existe diferencia significativa entre los valores de las variables $SMSalg_2$-$SMSalg_P$ y $SMSari_2$-$SMSari_P$, respectivamente. Hallamos que existen diferencias significativas entre los medias de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (t (21) = 2,63, p = 0,016 para $SMSalg_2$-$SMSalg_P$). También encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables $SMSari_2$-$SMSari_P$ de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,00; p = 0,046).

Por lo que respecta al uso de cantidades necesarias (ver Tabla 25) se observa un aumento en la media de *ICanNecC* e *ICanNecD* (que supondrían un aumento en la competencia) y de *ICanEsp* (que supondría una disminución en la competencia). Así, la media de *ICanNecC* aumenta un 0,65%; la de *ICanNecD*, un 0,35% y la de *ICanEsp*, un 214,02%. Se observa (ver Tabla 26) una disminución en la media de la variable *IRelNec* (-3,84%) y un aumento en la media de *IRelIn* (+90,38%), lo que refleja una disminución en la competencia a la hora de relacionar cantidades en el paso 1 del MC. El valor acumulado de *IAcRel* disminuye, consecuentemente, un 5,65%.

Tabla 25. La identificación de cantidades exigiendo lectura algebraica.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
Media	4,09	4,12	4,10	4,11	0,02	0,08
Desv. típ.	1,73	1,87	1,71	1,88	0,07	0,16

Tabla 26. El establecimiento de relaciones exigiendo lectura algebraica.

	*IRelNec*2	*IRelNec*P	*IRelIn*2	*IRelIn*P	*IAcRel*2	*IAcRel*P
Media	3,67	3,53	0,16	0,31	3,60	3,40
Desv. Típ.	1,70	1,91	0,20	0,33	1,69	1,86

Las medias de las variables que dan cuenta del paso 2 del MC (ver Tabla 27) ofrecen resultados acordes con la disminución en el uso de SMSalg. Así se observa un aumento en la media de *Tan* (+200,00%)[30] y una disminución de la de *LetCo* y *LetPol*. El análisis de los totales nos muestran que el 80,68% de las letras utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje aumentaba al 81,71% (evidentemente esto supone la correspondiente disminución en el porcentaje de letras polisémicas).

Tabla 27. Las variables que describen el paso 2 exigiendo lectura algebraica.

	*Tan*2	*Tan*P	*LetCo*2	*LetCo*P	*LetPol*2	*LetPol*P
Media	0,14	0,41	3,23	3,05	0,77	0,68
Desv. Típ.	0,35	0,59	1,66	1,89	0,69	0,72

Respecto al paso 3, la variable *IAsigArb* pasa de $M = 0{,}28$ ($SD = 0{,}24$) a $M = 0{,}21$ ($SD = 0{,}16$) lo que supone una disminución de la media del 24,73%.

En el paso 4 (ver Tabla 28), se produce una disminución de la media de la variable *IgCo* y un aumento de la de *IgIn*. De hecho las igualdades correctas pasan de ser el 90,48% sobre el total en el cuestionario previo al 85,00% en el posterior.

Tabla 28. Las variables que describen el paso 4 exigiendo lectura algebraica.

	*IgCo*2	*IgCo*P	*IgIn*2	*IgIn*P
Media	3,45	3,09	0,36	0,55
Desv. típ.	2,02	1,95	0,58	0,80

Por último, se observa (ver Tabla 29) un aumento en la media de *INomC* (+39,36%) e *INomD* (+27,83%).

[30] No podemos dejar de indicar que es casi significativo, pues al aplicar la prueba de los signos de Wilcoxon se obtiene $Z = -1{,}90$ y $p = 0{,}058$.

Tabla 29. La construcción de nombres exigiendo lectura algebraica.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,36	0,50	1,61	2,06
Desv. típ.	0,50	0,69	1,00	1,18

Aplicamos a las variables $INomD_2$ e $INomD_P$ una prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuyen normalmente. Los resultados (Z = 0,46, p = 0,983 para $INomD_2$; Z = 0,54, p = 0,933 para $INomD_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad. Por lo tanto, podemos atribuir una distribución normal a la pareja de variables $INomD_2$-$INomD_P$ sobre la que aplicaremos una prueba t para datos pareados. Hallamos que existen diferencias significativas entre las medias de las variables entre las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (t (21) = -2,49, p = 0,021 para $INomD_2$-$INomD_P$).

5.8.2.2. Los comparación de los problemas de edades

Se observa una disminución en las variables que miden el uso de SMS que emplean letras (*SMSalg* y *SMSarialg*) y un aumento del resto (ver Tabla 30). El uso del SMSalg disminuye de un 91,49%, sobre el total de problemas en el cuestionario previo, a un 80,85% en el posterior y el uso de SMSari aumenta del 6,38% al 14,89%.

Tabla 30. Los SMS empleados en los problemas de edades exigiendo lectura algebraica.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
Media	1,95	1,73	0,14	0,32	0,05	0,00	0,00	0,09
Desv. típ.	0,90	0,94	0,35	0,48	0,21	0,00	0,00	0,29

Aplicamos a las variables $SMSari_2$ y $SMSari_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para averiguar si se distribuyen normalmente. Los resultados obtenidos (Z = 2,41, p = 0,000 para $SMSari_2$; Z = 2,01, p = 0,001 para $SMSari_P$) nos permiten rechazar la hipótesis nula de normalidad. Recurrimos a la prueba de signos de Wilcoxon y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables $SMSari_2$-$SMSari_P$ entre las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,00, p = 0,046).

En cuanto a las variables (ver Tabla 31) que miden la identificación de cantidades, encontramos una disminución no significativa en la media de *ICanNecC* (-1,10%) e *ICanNecD* (-3,24%) y un aumento de significativo en la de *ICanEsp*.

Tabla 31. La identificación de cantidades en los problemas de edades exigiendo lectura algebraica.

	ICanNecC$_2$	*ICanNecC*$_P$	*ICanNecD*$_2$	*ICanNecD*$_P$	*ICanEsp*$_2$	*ICanEsp*$_P$
Media	2,06	2,04	2,10	2,03	0,00	0,07
Desv. típ.	0,78	0,82	0,77	0,84	0,00	0,14

Todos los valores de la variable *ICanEsp*$_2$ son cero, lo que nos indica que no se distribuye normalmente. Aplicamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables *ICanEsp*$_2$-*ICanEsp*$_P$ de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,02; p = 0,04) en contra del aumento de la competencia.

Al igual que en la comparación de todos los problemas, al restringir el análisis a los problemas de edades, se observa (ver Tabla 32) una disminución en la media de *IRelNec* (-14,01%) e *IAcRel* (-17,76%) y un aumento de la de *IRelIn* (+198,25%).

Tabla 32. El establecimiento de relaciones en los problemas de edades exigiendo lectura algebraica.

	IRelNec$_2$	*IRelNec*$_P$	*IRelIn*$_2$	*IRelIn*$_P$	*IAcRel*$_2$	*IAcRel*$_P$
Media	1,78	1,53	0,09	0,27	1,73	1,43
Desv. típ.	0,71	0,85	0,15	0,29	0,72	0,81

Aplicamos la prueba de Kolmógorov-Smirnov a las variables *IRelNec*$_2$, *IRelNec*$_P$, *IRelIn*$_2$, *IRelIn*$_P$, *IAcRel*$_2$ e *IAcRel*$_P$ para determinar si se distribuyen normalmente. Los resultados (Z = 0,65, p = 0,792 para *IRelNec*$_2$; Z = 0,68, p = 0,743 para *IRelNec*$_P$; Z = 1,91, p = 0,001 para *IRelIn*$_2$; Z = 1,08, p = 0,192 para *IRelIn*$_P$; Z = 0,56, p = 0,911 para *IAcRel*$_2$; Z = 0,56, p = 0,911 para *IAcRel*$_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad para *IRelNec*$_2$-*IRelNec*$_P$ e *IAcRel*$_2$-*IAcRel*$_P$, y a rechazarla para *IRelIn*$_2$-*IRelIn*$_P$. Con la finalidad de poder analizar si existen diferencias significativas entre los valores de las variables, aplicamos la prueba t para datos pareados a *IRelNec*$_2$-*IRelNec*$_P$ e *IAcRel*$_2$-*IAcRel*$_P$ y la de Wilcoxon a *IRelIn*$_2$-*IRelIn*$_P$. Encontramos que existen diferencias significativas entre los medias de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (t (21) = 2,37, p = 0,027 para *IRelNec*$_2$-*IRelNec*$_P$; t (21) = 2,56, p = 0,018 para *IAcRel*$_2$-*IAcRel*$_P$) en contra de un aumento de la competencia en el cuestionario posterior a la enseñanza. También hallamos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables *IRelIn*$_2$- *IRelIn*$_P$ de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,33; p = 0,020) en contra de un aumento de competencia.

Las consecuencias de la disminución en el uso del SMSalg se reflejan (ver Tabla 33) en la disminución de la media de las variables *LetCo* y *LetPol* y un aumento significativo de la variable *Tan* (+700,00%). Sin embargo, el análisis de los valores absolutos nos muestran que el 72,73% de las letras utilizas utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje aumentaba al 73,68% (evidentemente esto supone la correspondiente disminución en el porcentaje de letras polisémicas).

Tabla 33. Las variables que describen el paso 2 en los problemas de edades exigiendo lectura algebraica.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	0,05	0,36	1,45	1,27	0,55	0,45
Desv. típ.	0,21	0,58	0,60	0,88	0,51	0,51

Aplicamos a la variable Tan_2 una prueba de Kolmógorov-Smirnov para averiguar si se distribuye normalmente. Los resultados (Z = 2,53; p = 0,000) nos permiten rechazar la hipótesis nula de normalidad. Recurrimos a la prueba de signos de Wilcoxon y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Tan_2-Tan_P entre las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,11; p = 0,035).

Respecto al paso 3, la variable *IAsigArb* pasa de M = 0,17 (SD = 0,15) a M = 0,16 (SD = 0,14) lo que supone una disminución de la media del 7,22%.

En el paso 4 se observa (ver Tabla 34) una disminución de la media de la variable *IgCo* y un aumento de la de *IgIn*. De hecho las igualdades correctas disminuyen del 85,37%, sobre el total de igualdades en el cuestionario previo, al 71,05% en el posterior (lo que supone un correspondiente aumento porcentual de igualdades incorrectas).

Tabla 34. Las variables que describen el paso 4 en los problemas de edades exigiendo lectura algebraica.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	1,59	1,23	0,27	0,50
Desv. típ.	1,05	0,87	0,55	0,67

En cuanto a la construcción de nombres (ver Tabla 35) para las cantidades empleadas, se producen aumentos en las medias de *INomC* (+11,11%) e *INomD* (+21,28%) que no son significativos.

Tabla 35. La construcción de nombres en los problemas de edades exigiendo lectura algebraica.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,34	0,38	0,89	1,08
Desv. típ.	0,47	0,49	0,69	0,72

5.8.2.3. La comparación del resto de problemas

Se observa (ver Tabla 36) una disminución en la media de *SMSalg*, la estabilización de la de *SMSari* y un aumento de la media de *SMSarialg*. El uso del SMSalg disminuye de un 93,62%, sobre el total de problemas en el cuestionario previo, a un 89,36% en el posterior.

Tabla 36. Los SMS empleados en el resto de problemas exigiendo lectura algebraica.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
Media	2,00	1,91	0,14	0,14	0,00	0,09	0,00	0,00
Desv. típ.	1,27	1,31	0,35	0,35	0,00	0,29	0,00	0,00

Por lo que respecta al paso 1 del MC (ver Tablas 37 y 38), aumentan las medias de los indicadores sobre el uso de cantidades necesarias (la de *ICanNecC* aumenta un 2,43% y la de *ICanNecD*, un 4,13%) y diminuye la de la variable *ICanEsp* (-79,17%). Aumenta la media de *IRelNec* (+5,80%) y disminuye la de *IRelIn* (-46,08%) sin que en ningún caso la variación sea significativa. En definitiva, la media de la variable *IAcRel*, que describe la calidad de la lectura, aumenta un 5,63% después de la enseñanza.

Tabla 37. La identificación de cantidades en el resto de problemas exigiendo lectura algebraica.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
Media	2,03	2,08	2,00	2,08	0,02	0,01
Desv. típ.	1,22	1,31	1,23	1,31	0,07	0,02

Tabla 38. El establecimiento de relaciones en el resto de problemas exigiendo lectura algebraica.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
Media	1,88	1,99	0,07	0,04	1,86	1,97
Desv. típ.	1,25	1,33	0,15	0,09	1,26	1,33

En el paso 2, se observa que la media de las variables *LetCo* y *LetPol* (ver Tabla 39) permanecen constantes y disminuye la de *Tan* (-50,00%).

Tabla 39. Las variables que describen el paso 2 en el resto de problemas exigiendo lectura algebraica.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	0,09	0,05	1,77	1,77	0,23	0,23
Desv. típ.	0,29	0,21	1,27	1,31	0,43	0,43

Respecto al paso 3, la variable *IAsigArb* pasa de $M = 0,11$ ($SD = 0,17$) a $M = 0,05$ ($SD = 0,09$) lo que supone una disminución de la media del 52,53%.

En la Tabla 40 se muestra que la media de *IgCo* se mantiene constante y que se reduce la media de *IgIn*, lo que implica que el número acumulado de igualdades disminuye. El aumento de las igualdades correctas del 95,35% al 97,62% sobre el total de igualdades hemos de atribuirlo a la falta de producción.

Tabla 40. Las variables que describen el paso 4 en el resto de problemas exigiendo lectura algebraica.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	1,86	1,86	0,09	0,05
Desv. típ.	1,28	1,32	0,29	0,21

Se produce un aumento en las medias de las variables *INomC* (+675,00%) e *INomD* (+35,88%) que miden la construcción de nombres para las cantidades (ver Tabla 41).

Tabla 41. La construcción de nombres en el resto de problemas exigiendo lectura algebraica.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,02	0,12	0,72	0,98
Desv. típ.	0,07	0,36	0,70	0,76

Aplicamos a las variables $INomD_2$ e $INomD_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuye normalmente. Los resultados ($Z = 1,01$, $p = 0,264$ para $INomD_2$; $Z = 0,89$, $p = 0,404$ para $INomD_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad. En consecuencia, aplicamos una prueba *t* para datos pareados a las variables $INomD_2$-$INomD_P$ y hallamos que existen diferencias significativas entre las medias de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($t(21) = -2,80$, $p = 0,011$ para $INomD_2$-$INomD_P$).

5.8.3. LA COMPARACIÓN EXIGIENDO EL USO DEL SMS DEL ÁLGEBRA

Una de las intenciones de nuestra investigación era analizar si la enseñanza del MHC se traduce en una mejora en la competencia del MC. Para dar respuesta a esta pretensión realizaremos un estudio en el que únicamente se compararán los casos (estudiante-problema) en los que los estudiantes utilizaron el SMS del álgebra en los problemas isomorfos de ambos cuestionarios. Lógicamente, omitiremos la referencia a las variables *SMSalg*, *SMSari*, *SMSarialg* y *SMSn*, porque estamos suponiendo problemas en los que se utiliza el SMSalg en el cuestionario previo y posterior. De los 176 casos posibles, sólo 90 cumplieron los requisitos. Aclaramos que las puntuaciones de las variables acumuladas no tendrán el mismo valor máximo en todos los sujetos, pues dependerá del número de problemas que cada estudiante haya resuelto usando el SMS del álgebra.

5.8.3.1. La comparación de todos los problemas

Como se ha indicado en el capítulo 3, cuando tenemos la intención de resolver un problema mediante el MC y realizamos una lectura aritmética del mismo, acabamos planteando una ecuación aritmética. Esto supone que puede coexistir en una misma producción una lectura aritmética con el uso del SMSalg. Por ello consideramos necesario dar cuenta de la evolución de las variables que identifican el tipo de lectura. En la Tabla 42 se muestra un aumento en la media de *LAlg* y una disminución de la media de *LArit*. Se aumenta de un 88,89% de lecturas algebraicas, sobre el total de lecturas, a un 93,33% (con la correspondiente disminución en el porcentaje de lecturas aritméticas).

Tabla 42. El tipo de lectura exigiendo SMSalg.

	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
Media	3,64	3,82	0,45	0,27
Desv. típ.	2,06	2,17	0,60	0,55

Las variables que miden el uso de cantidades necesarias, *ICanNecC* (+0,97%) e *ICanNecD* (+1,97%), aumentan la media (ver Tabla 43), pero también aumenta la media de la variable *ICanEsp* (+183,83%), que mide el uso de cantidades no presentes en las lecturas teóricas. Por lo que respecta al uso de relaciones (ver Tabla 44), se observa una disminución en las medias de *IRelNec* (-0,33%) e *IAcRel* (-3,17%) y un aumento de *IRelIn* (+45,39%).

Tabla 43. La identificación de cantidades exigiendo SMSalg.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
Media	3,89	3,93	3,80	3,88	0,04	0,10
Desv. típ.	2,14	2,21	2,08	2,21	0,09	0,19

Tabla 44. El establecimiento de relaciones exigiendo SMSalg.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
Media	3,24	3,23	0,26	0,38	3,17	3,07
Desv. típ.	1,96	2,15	0,32	0,39	1,94	2,13

Evidentemente, con las condiciones impuestas el valor de la variable *Tan* debe ser cero, pues exigir el uso del SMSalg implica el uso de letras para referirse cantidades desconocidas. Por lo que respecta al uso de letras (ver Tabla 45) se observa un aumento de la media de *LetCo* y una correspondiente disminución de *LetPol*. El 81,11% de las letras utilizas utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje aumentaba al 82,22% (evidentemente esto supone la correspondiente disminución en el porcentaje de letras polisémicas).

Tabla 45. Las variables que describen el paso 2 exigiendo SMSalg.

	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	3,32	3,36	0,77	0,73
Desv. típ.	1,99	2,08	0,69	0,94

Respecto al paso 3, la variable *IAsigArb* pasa de $M = 0{,}16$ ($SD = 0{,}16$) a $M = 0{,}15$ ($SD = 0{,}18$) lo que supone una disminución de la media del 7,09%.

El paso 4 muestra (ver Tabla 46) una disminución en la media de la variable *IgCo* (que mide el número de igualdades correctas) y un aumento de *IgIn* (que mide las incorrectas). Se produce una disminución de las igualdades correctas pasando del 82,14% al 77,91% sobre el total de igualdades.

Tabla 46. Las variables que describen el paso 4 exigiendo SMSalg.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	3,14	3,05	0,68	0,86
Desv. típ.	2,05	2,13	0,84	0,94

Las variables que miden la construcción de nombres para las cantidades, muestran un aumento significativo en los valores de sus medias (ver Tabla 47). Las medias de *INomC* aumentan un 87,14% y los de *INomD*, un 38,31%.

Tabla 47. La construcción de nombres exigiendo SMSalg.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,27	0,50	1,36	1,88
Desv. típ.	0,51	0,67	1,22	1,21

Aplicamos a las variables, $INomC_2$, $INomC_P$, $INomD_2$ e $INomD_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuyen normalmente. Los resultados ($Z = 2{,}21$, $p = 0{,}000$ para $INomC_2$; $Z = 1{,}49$, p = 0,024 para $INomC_P$; $Z = 0{,}76$, $p = 0{,}615$ para $INomD_2$; $Z = 0{,}64$, $p = 0{,}812$ para $INomD_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad para las variables $INomD_2$ e $INomD_P$ y a rechazarla para $INomC_2$ e $INomD_P$. Por lo tanto, no podemos atribuir una distribución normal a la pareja de variables $INomC_2$-$INomC_P$, sobre la aplicaremos el test no paramétrico de Wilcoxon, pero sí a la pareja $INomD_2$-$INomD_P$ sobre la que aplicaremos la prueba paramétrica *t* de Student para datos pareados. Encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables $INomC_2$-$INomC_P$ de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2{,}07$; $p = 0{,}039$). También encontramos que existen diferencias significativas entre los medias de las variables $INomD_2$-$INomD_P$ entre las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($t(21) = -3{,}22$, $p = 0{,}004$ para $INomD_2$-$INomD_P$).

5.8.3.2. La comparación de los problemas de edades

Se abordan de esta forma un total de 42 casos sobre un total de 66 posibles (3 problemas por 22 estudiantes). Se observa (ver Tabla 48) un aumento en la media de *LAlg* y una correspondiente disminución en la de *LArit*. Se pasa de un 90,48% de lecturas algebraicas sobre el total de lecturas a un 95,24% (con la correspondiente disminución en el porcentaje de lecturas aritméticas).

Tabla 48. El tipo de lectura en los problemas de edades exigiendo SMSalg.

	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
Media	1,73	1,82	0,18	0,09
Desv. Típ.	0,99	0,91	0,40	0,29

En cuanto al uso de cantidades necesarias, se observa (ver Tabla 49) una disminución en las medias de *ICanNecC* (-1,23%) e *ICanNecD* (-2,53%) y un aumento de *ICanEsp* (+311,46%). También se produce un descenso (ver Tabla 50) en el uso de relaciones necesarias (la media de *IRelNec* disminuye un 12,10%) y un aumento de las relaciones incorrectas (la media de *IRelIn* aumenta un 93,06%. La variable *IAcRel*, que mide la calidad de la lectura, disminuye su media un 17,93%.

Tabla 49. La identificación de cantidades en los problemas de edades exigiendo SMSalg.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
Media	1,84	1,82	1,80	1,75	0,02	0,09
Desv. típ.	0,95	0,98	0,94	0,92	0,07	0,18

Tabla 50. El establecimiento de relaciones en los problemas de edades exigiendo SMSalg.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
Media	1,41	1,24	0,17	0,32	1,36	1,12
Desv. Típ.	0,86	0,85	0,25	0,36	0,87	0,83

Aplicamos a la variable $IRelIn_2$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuye normalmente. Los resultados (Z = 1,81, p = 0,003 para $IRelIn_2$) nos llevan a rechazar la hipótesis nula de normalidad. En consecuencia, aplicamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados y hallamos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,14, p = 0,032 para $IRelIn_2$-$IRelIn_P$). Al aplicar a las variables $IAcRel_2$ e $IAcRel_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov se obtienen resultados (Z = 0,60, p = 0,863 para $IAcRel_2$; Z = 0,58, p = 0,889) que nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad. En consecuencia, aplicamos una prueba t de Student para datos pareados a las variables $IAcRel_2$-$IAcRel_P$ y hallamos que existen diferencias significativas entre las medias de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($t(21)$ = 2,73, p = 0,027 para $IAcRel_2$-$IAcRel_P$).

Por lo que respecta al paso 2, se observa (ver Tabla 51) una disminución en la media de *LetCo* y un correspondiente aumento en la de *LetPol*. El 71,43% de las letras utilizas utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje disminuía al 69,05% (evidentemente esto supone el correspondiente aumento en el porcentaje de letras polisémicas).

Tabla 51. Las variables que describen el paso 2 en los problemas de edades exigiendo SMSalg.

	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	1,36	1,32	0,55	0,59
Desv. típ.	0,85	1,00	0,51	0,73

Respecto al paso 3, la variable *IAsigArb* pasa de M = 0,10 (SD = 0,09) a M = 0,10 (SD = 0,11).

En el paso 4, se constata (ver Tabla 52) una disminución en la media de la variable *IgCo* (que mide el número de igualdades correctas) y un aumento de *IgIn* (que mide las incorrectas). Se produce una disminución de las igualdades correctas pasando del 75,00% al 58,97% sobre el total de igualdades.

Tabla 52. Las variables que describen el paso 4 en los problemas de edades exigiendo SMSalg.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	1,36	1,05	0,45	0,73
Desv. típ.	1,05	0,84	0,74	0,88

Por lo que respecta a la construcción de nombres, se observa un incremento no significativo (ver Tabla 53) en las medias de las variables *INomC* (+15,15%) e *INomD* (+27,89%).

Tabla 53. La construcción de nombres en los problemas de edades exigiendo SMSalg.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
Media	0,25	0,29	0,72	0,92
Desv. típ.	0,48	0,45	0,80	0,83

5.8.3.3. La comparación del resto de problemas

Se abordan de esta forma 48 casos estudiante-problema sobre un total de 110 posibles (5 problemas por 22 estudiantes). Se observa (ver Tabla 54) un aumento en la media de *LAlg* y una correspondiente disminución en *LArit*. Se aumenta de un 87,50% de lecturas algebraicas, sobre el total de lecturas, a un 91,67% (con la correspondiente disminución en el porcentaje de lecturas aritméticas).

Tabla 54. El tipo de lectura en el resto de problemas exigiendo SMSalg.

	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
Media	1,91	2,00	0,27	0,18
Desv. típ.	1,31	1,41	0,46	0,40

Aumenta (ver Tablas 55 y 56) la media de *ICanNecC* (+2,95%) e *ICanNecD* (+6,01%), lo que supone un aumento de la competencia tras la enseñanza, y, se estabiliza la de *ICanEsp*. Por lo que respecta a las relaciones, se incrementa la media de *IRelNec* (+8,75%) e *IAcRel* (+7,89%) y disminuye la media de *IRelIn* (-35,24%), sin que en ningún caso la variación sea significativa.

Tabla 55. La identificación de cantidades en el resto de problemas exigiendo SMSalg.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
Media	2,05	2,11	2,00	2,13	0,02	0,02
Desv. Típ.	1,40	1,41	1,33	1,43	0,05	0,06

Tabla 56. El establecimiento de relaciones en el resto de problemas exigiendo SMSalg.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
Media	1,83	1,99	0,10	0,06	1,81	1,96
Desv. Típ.	1,25	1,42	0,16	0,13	1,26	1,43

Por lo que respecta al paso 2, se observa (ver Tabla 57) un aumento en la media de *LetCo* y una disminución en la de *LetPol*. El 89,58% de las letras utilizas utilizadas en el cuestionario previo referían a una sola cantidad (letra correcta), mientras que en el cuestionario posterior a la enseñanza el porcentaje aumentaba al 93,75% (evidentemente esto supone el correspondiente descenso en el porcentaje de letras polisémicas).

Tabla 57. Las variables que describen el paso 2 en el resto de problemas exigiendo SMSalg.

	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
Media	1,95	2,05	0,23	0,14
Desv. típ.	1,43	1,43	0,43	0,35

Respecto al paso 3, la variable *IAsigArb* pasa de $M = 0,06$ ($SD = 0,10$) a $M = 0,05$ ($SD = 0,11$) lo que supone una disminución de la media del 22,46%.

En el paso 4 se observa (ver Tabla 58) un incremento en la media de *IgCo* y una disminución en la de *IgIn*. Se produce un aumento de las igualdades correctas pasando del 88,64% al 93,62% sobre el total de igualdades.

Tabla 58. Las variables que describen el paso 4 en el resto de problemas exigiendo SMSalg.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
Media	1,77	2,00	0,23	0,14
Desv. Típ.	1,31	1,51	0,43	0,35

En la construcción de nombres para cantidades, se produce (ver Tabla 59) un incremento en las medias de las variables, *INomC* (-22,46%) e *INomD* (+50,00%), siendo un aumento significativo en el caso de *INomD*.

Tabla 59. La construcción de nombres en el resto de problemas exigiendo SMSalg.

	INomC$_2$	*INomC*$_P$	*INomD*$_2$	*INomD*$_P$
Media	0,02	0,21	0,64	0,96
Desv. típ.	0,07	0,47	0,65	0,73

Aplicamos a las variables *INomD*$_2$ e *INomD*$_P$ la prueba de Kolmógorov-Smirnov para determinar si se distribuye normalmente. Los resultados (Z = 1,16, p = 0,135 para *INomD*$_2$; Z = 0,74, p = 0,646 para *INomD*$_P$) nos llevan a aceptar la hipótesis nula de normalidad. En consecuencia, aplicamos la prueba paramétrica t de Student para datos pareados a las variables *INomD*$_2$-*INomD*$_P$ y hallamos que existen diferencias significativas entre las medias de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (t(21) = -3,09, p = 0,006 para *INomD*$_2$-*INomD*$_P$).

5.8.4. LA COMPARACIÓN ENTRE CLASES DE INDIVIDUOS

5.8.4.1. Atendiendo a la tendencia en la lectura

Recordemos que dividimos la población en las clases L_1 y L_2 según su tendencia a realizar lecturas algebraicas. La clase L_1 estaba formada por 14 sujetos y la L_2 por 9. Sin embargo, al excluir al individuo 7 del estudio comparativo, la clase L_1, de la que formaba parte, pasó a estar integrada por 13 sujetos.

En la clase L_1 se produce un aumento en el número de problemas abordados (se pasa del 86,54% al 89,42% sobre el total de problemas planteados); mientras que en la clase L_2 no hay modificación (98,61%). La causa de la ausencia de variación en la clase L_2 se encuentra en que abordan 71 de 72 (8 problemas por 9 sujetos) problemas posibles, lo que hace que tengan poco margen de aumento. En ambas clases se incrementa el número de lecturas algebraicas. Para los individuos de la clase L_1, se pasa de un 60,23% de lecturas algebraicas, sobre el total de lecturas, a un 72,41%; mientras que en la clase L_2 se pasa de 84,51% a 85,51% (lo que implica una disminución de la proporción de problemas abordados a los que hemos podido asignar una lectura, pues disminuye la media). Los individuos de la clase L_1 muestran un incremento mayor en el porcentaje de lecturas algebraicas, pero no consiguen alcanzar el nivel de los individuos de la clase L_2 (ver Tablas 60 y 61).

Tabla 60. La existencia y tipo de lectura para L_1.

	A$_2$	*A*$_P$	*LAlg*$_2$	*LAlg*$_P$	*LArit*$_2$	*LArit*$_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	6,92	7,15	4,08	4,85	2,69	1,85
Desv. típ.	1,71	1,41	1,04	1,73	1,38	0,90

Tabla 61. La existencia y tipo de lectura para L_2.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	7,89	7,89	6,67	6,56	1,22	1,11
Desv. típ.	0,33	0,33	0,71	1,13	0,67	1,05

En ambos grupos se observa (ver Tablas 62 y 63) una disminución en el uso del SMSalg. El grupo de estudiantes L_1 pasan de usar el SMSalg en el 61,36% de los problemas al 59,77%; mientras que la clase los de la clase L_2 pasan del 84,51% al 79,71%.

Tabla 62. Los SMS empleados para L_1.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
N	13	13	13	13	13	13	13	13
Media	4,15	4,00	2,46	2,38	0,15	0,15	0,00	0,15
Desv. típ.	1,82	2,45	1,51	1,76	0,38	0,38	0,00	0,38

Tabla 63. Los SMS empleados para L_2.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
N	9	9	9	9	9	9	9	9
Media	6,67	6,11	1,00	1,33	0,22	0,22	0,00	0,00
Desv. típ.	1,00	1,45	1,12	1,50	0,44	0,44	0,00	0,00

En la clase L_1 aumentan (ver Tabla 64) las medias de las variables que miden el uso de cantidades necesarias. Así, la media de *ICanNecC* aumenta un 4,77%, *ICanNecD* aumenta un 5,64% e *ICanEsp* disminuye un 30,26%. En la clase L_2 también incrementan las medias de estas variables (ver Tabla 65), pero en menor porcentaje. Así, la media de *ICanNecC* aumenta un 0,49%, la de *ICanNecD* aumenta 1,64% y la de *ICanEsp* aumenta un 29,38%.

Tabla 64. La identificación de cantidades para L_1.

	ICanNecC$_2$	*ICanNecC*$_P$	*ICanNecD*$_2$	*ICanNecD*$_P$	*ICanEsp*$_2$	*ICanEsp*$_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	6,31	6,62	5,46	5,77	0,21	0,14
Desv. típ.	1,82	1,43	1,54	1,75	0,24	0,19

Tabla 65. La identificación de cantidades para L_2.

	ICanNecC$_2$	*ICanNecC*$_P$	*ICanNecD*$_2$	*ICanNecD*$_P$	*ICanEsp*$_2$	*ICanEsp*$_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	7,54	7,57	7,33	7,45	0,14	0,18
Desv. típ.	0,47	0,74	0,63	0,87	0,13	0,20

En los individuos de la clase L_1 (ver Tabla 66) aumenta la media de *IRelNec* (+3,66%) y disminuye la de *IRelIn* (-4,96%); mientras que en los de la clase L_2 (ver Tabla 67) *IRelNec* aumenta un 4,76% e *IRelIn* disminuye en un 7,40%. En definitiva, los de la clase L_1 incrementan la media del indicador de calidad de la lectura, *IAcRel*, en un 2,83% y para de la clase L_2 en un 2,32%; lo que nos da un incremento similar.

Tabla 66. El establecimiento de relaciones para L_1.

	IRelNec$_2$	*IRelNec*$_P$	*IRelIn*$_2$	*IRelIn*$_P$	*IAcRel*$_2$	*IAcRel*$_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	3,92	4,07	1,03	0,98	3,69	3,80
Desv. típ.	1,63	1,69	0,56	0,65	1,56	1,67

Tabla 67. El establecimiento de relaciones para L_2.

	IRelNec$_2$	*IRelNec*$_P$	*IRelIn*$_2$	*IRelIn*$_P$	*IAcRel*$_2$	*IAcRel*$_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	6,03	6,31	0,74	0,69	5,85	5,99
Desv. típ.	0,91	1,55	0,52	0,51	0,97	1,70

En ambas clases se observa (ver Tablas 68 y 69) un aumento de la variable *Tan* (aumento del 900,00% para L_1 y del 33,33% para L_2). Aplicamos una prueba de Wilcoxon[31] para datos pareados y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Tan_2-Tan_P de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,17; p = 0,030) para la clase L_1.

Se produce una disminución de la media de *LetCo* acompañada en un aumento de la media de *LetPol* en para los individuos de la clase L_1 y una disminución para los de la clase L_2. La situación se aclara si recurrimos a comparar el uso de letras correctas sobre el total de letras utilizadas. Se confirma una disminución del 83,64% al 77,78% en la clase L_1, y un aumento del 82,26% al 84,21% en la L_2. Así pues, podemos asociar la disminución de las medias de *LetCo* y *LetPol* en la clase L_2 al descenso en el uso del SMSalg.

Tabla 68. Las variables que describen el paso 2 para L_1.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	0,08	0,77	3,54	3,23	0,69	0,92
Desv. típ.	0,28	0,83	1,61	2,09	0,63	1,19

Tabla 69. Las variables que describen el paso 2 para L_2.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	0,33	0,44	5,67	5,33	1,22	1,00
Desv. típ.	0,50	0,53	1,32	1,66	0,67	0,71

La variable *IAsigArb*, que mide la asignación arbitraria de valor a una cantidad necesaria, aumenta su media en la clase L_1 (pasa de M = 0,34, SD = 0,30 a M = 0,40, SD = 0,35, lo que supone un incremento de la media del 20,34%) y disminuye en la clase L_2 (pasa de M = 0,44, SD = 0,29 a M = 0,33, SD = 0,21, lo que supone un descenso de la media del 26,15%).

En el paso 4, se observa (ver Tabla 70 y 71) que para la clase L_1 aumenta media de *IgCo* (+17,14%) y desciende la de *IgIn* (-33,33%). Sin embargo, se produce el efecto contrario en la clase L_2 (la media de *IgCo* desciende un 11,76% y aumenta un 30,00% la de *IgIn*).

[31] El tamaño de la muestra no aconseja el uso de pruebas paramétricas.

Tabla 70. Las variables que describen el paso 4 para L_1.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
N	13	13	13	13
Media	2,69	3,15	0,92	0,62
Desv. típ.	1,70	2,30	0,86	0,96

Tabla 71. Las variables que describen el paso 4 para L_2.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
N	9	9	9	9
Media	5,67	5,00	1,11	1,44
Desv. típ.	1,32	1,80	1,05	1,01

Aumenta (ver Tablas 72 y 73) la construcción de cantidades tanto para cantidades conocidas como desconocidas en ambos tipos de resolutor. Los de la clase L_1 incrementan la media de *INomC* un 35,90% y la de *INomD* un 40,14%; mientras que los de la clase L_2 la aumentan un 70,24% y un 30,72%, respectivamente.

Tabla 72. La construcción de nombres para L_1.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
N	13	13	13	13
Media	1,00	1,36	2,17	3,04
Desv. típ.	0,68	0,51	1,43	1,44

Tabla 73. La construcción de nombres para L_2.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
N	9	9	9	9
Media	0,78	1,32	2,79	3,64
Desv. típ.	0,62	1,28	1,15	1,36

Para los valores de las variables $INomD_2$ e $INomD_P$ de la clase L_1, aplicamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados y hallamos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables entre las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2{,}21$, $p = 0{,}027$) en los individuos de la clase L_1. Del mismo modo, aplicamos la prueba de Wilcoxon para datos pareados a los valores de las variables $INomD_2$ e $INomD_P$ obtenidas al analizar las actuaciones de los individuos de la clase L_2 y hallamos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables entre las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2{,}10$, $p = 0{,}036$) para la clase L_2.

5.8.4.2. Atendiendo a la competencia del resolutor

Recordemos que dividimos la población en las clases Com_1 (los que demostraron menos competencia) y Com_2 (los que demostraron más competencia) según su competencia en la lectura de los problemas de los cuestionarios 1 y 2. La clase Com_1 estaba formada por 12 sujetos y la Com_2 por 11. Sin embargo, la clase Com_1 pasó a estar integrada por 11 sujetos al excluir al individuo 7 del estudio comparativo.

En la clase Com_1 (ver Tabla 74) se produce un aumento en el número de problemas abordados (se pasa del 82,95% al 86,36% sobre el total de problemas planteados); mientras que en la clase Com_2 (ver Tabla 75) no hay modificación y los abordan todos en los dos cuestionarios. En ambas clases se incrementa el número de lecturas algebraicas. Para los individuos de la clase Com_1, se pasa de un 67,61% de lecturas algebraicas sobre el total de lecturas a un 72,46%; mientras que en la clase Com_2 se pasa de 73,86% a 82,76%. Los individuos de la clase Com_2 muestran un incremento mayor en el porcentaje de lecturas algebraicas e incrementan la diferencia con los de la clase Com_1.

Tabla 74. La existencia y tipo de lectura para Com_1.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	6,64	6,91	4,36	4,55	2,09	1,73
Desv. típ.	1,75	1,45	1,57	1,75	1,51	1,10

Tabla 75. La existencia y tipo de lectura para Com_2.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	8,00	8,00	5,91	6,55	2,09	1,36
Desv. típ.	0,00	0,00	1,22	0,93	1,22	0,92

En ambos grupos se observa (ver Tablas 76 y 77) una disminución en el uso del SMSalg. El grupo de los estudiantes Com_1 pasan de emplear el SMSalg un 61,97%

sobre el total de problemas a un 57,97%; mientras que la clase Com_2 pasa del 79,55% al 77,01%. Aunque las medias de *SMSari* para la clase Com_2 permanecen constantes, el porcentaje de uso del SMSari sobre el total aumenta ligeramente del 19,32% a 19,54%. En los individuos de la clase Com_1, aumenta el porcentaje de uso de SMSari del 33,80% al 37,68%.

Tabla 76. Los SMS empleados para Com_1.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
N	11	11	11	11	11	11	11	11
Media	4,00	3,64	2,18	2,36	0,27	0,09	0,00	0,18
Desv. típ.	2,00	2,50	1,83	2,01	0,47	0,30	0,00	0,41

Tabla 77. Los SMS empleados para Com_2.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
N	11	11	11	11	11	11	11	11
Media	6,36	6,09	1,55	1,55	0,09	0,27	0,00	0,00
Desv. típ.	1,03	1,30	1,13	1,29	0,30	0,47	0,00	0,00

Por lo que respecta a la identificación de cantidades en la lectura del problema, se observa (ver Tablas 78 y 79) un incremento en la media de *ICanNecC* en ambas clases (aumenta un 4,99% en la clase Com_1 y un 1,18% en la Com_2), una disminución de *ICanNecD* en la clase Com_1 (-0,46%) y un aumento de *ICanNecD* en la clase Com_2 (+6,81%). Por último, la media de *ICanEsp* disminuye en ambos grupos (un -5,12% en la clase Com_1 y un -20,31% en la clase Com_2).

Tabla 78. La identificación de cantidades para Com_1.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	5,92	6,22	5,31	5,28	0,21	0,20
Desv. típ.	1,75	1,41	1,64	1,53	0,21	0,18

Tabla 79. La identificación de cantidades para Com_2.

	ICanNecC$_2$	*ICanNecC*$_P$	*ICanNecD*$_2$	*ICanNecD*$_P$	*ICanEsp*$_2$	*ICanEsp*$_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	7,70	7,80	7,14	7,63	0,14	0,11
Desv. típ.	0,38	0,25	0,69	0,65	0,18	0,20

Aparecen diferencias (ver Tablas 80 y 81) en la evolución de ambas clases en lo que respecta al establecimiento de relaciones entre cantidades. Así, la clase Com_1 experimenta un retroceso en el uso de relaciones correctas (la media de *IRelNec* disminuye un 5,56%) e incrementa el uso de relaciones incorrectas (la media de *IRelIn* aumenta un 7,85%). La clase Com_2 aumenta el uso de relaciones correctas (*IRelNec* aumenta un 10,35%) y disminuye el de incorrectas (*IRelIn* disminuye un 21,82%). En definitiva, la media de la variable *IAcRel* disminuye para los sujetos de la clase Com_1 (-9,60%) y aumenta en los de la clase Com_2 (+10,02%).

Tabla 80. El establecimiento de relaciones para Com_1.

	IRelNec$_2$	*IRelNec*$_P$	*IRelIn*$_2$	*IRelIn*$_P$	*IAcRel*$_2$	*IAcRel*$_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	3,68	3,48	0,99	1,07	3,48	3,14
Desv. típ.	1,56	1,31	0,53	0,56	1,48	1,09

Tabla 81. El establecimiento de relaciones para Com_2.

	IRelNec$_2$	*IRelNec*$_P$	*IRelIn*$_2$	*IRelIn*$_P$	*IAcRel*$_2$	*IAcRel*$_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	5,89	6,50	0,84	0,66	5,67	6,24
Desv. típ.	1,05	1,15	0,58	0,60	1,16	1,32

En ambas clases se produce una disminución en la media de la variable *LetCo*, pero, mientras en la clase Com_1 disminuye la media de *LetPol*, en la Com_2, aumenta (ver Tablas 82 y 83). El porcentaje de letras correctas sobre el total de letras pasa del 80,85% al 80,48% (una disminución muy ligera con un correspondiente aumento para las letras polisémicas) en la clase Com_1 y del 84,29% al 81,43% en la Com_2.

La media de la variable *Tan* aumenta en ambas clases (+800,00% en la clase Com_1 y +66,67% en la Com_2). Aplicamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados a los valores de las variables Tan_2-Tan_P para los individuos de la clase Com_1 y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Tan_2-Tan_P de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,07; p = 0,038).

Tabla 82. Las variables que describen el paso 2 para Com_1.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	0,09	0,82	3,45	3,00	0,82	0,73
Desv. típ.	0,30	0,87	1,75	2,00	0,75	0,91

Tabla 83. Las variables que describen el paso 2 para Com_2.

	Tan_2	Tan_P	$LetCo_2$	$LetCo_P$	$LetPol_2$	$LetPol_P$
N	11	11	11	11	11	11
Media	0,27	0,45	5,36	5,18	1,00	1,18
Desv. típ.	0,47	0,52	1,36	1,78	0,63	1,08

En la clase Com_1, la de media de *IAsigArb* (pasa de M = 0,40, SD = 0,31 a M = 0,41, SD = 0,36), que mide la asignación de valores arbitrarios a las cantidades, aumenta un 2,76%; mientras que disminuye (pasa de M = 0,36, SD = 0,30 a M = 0,34, SD = 0,23) un 7,01% en la clase Com_2.

Por lo que respecta al paso 4 (ver Tablas 84 y 85), se produce una disminución de la media de *IgCo* para los individuos de la clase Com_1[32] (pasa de un 81,08% de igualdades correctas sobre el total a un 70,27%) y un aumento para los de la clase Com_2 (pasa de un 78,87% de igualdades correctas sobre el total a un 85,71%).

[32] La disminución es tan pronunciada que, junto al empeoramiento de los indicadores de la calidad de la lectura y de uso del SMSalg, el número de situaciones en las que se plantean ecuaciones correctas por los individuos Com_1 desciende significativamente. Así, al aplicar una prueba de Wilcoxon para datos pareados, encontramos que existen diferencias significativas, a favor de los resultados del cuestionario previo, entre los rangos de las variables $EcCo_2$-$EcCo_P$ (*EcCo* es una variable, que no hemos utilizado de manera sistemática, que mide la construcción de ecuaciones correctas) de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,12; p = 0,034) para los individuos de la clase Com_1.

Tabla 84. Las variables que describen el paso 4 para Com_1.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
N	11	11	11	11
Media	2,73	2,36	0,64	1,00
Desv. típ.	1,90	1,63	0,67	1,27

Tabla 85. Las variables que describen el paso 4 para Com_2.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
N	11	11	11	11
Media	5,09	5,45	1,36	0,91
Desv. típ.	1,70	1,70	1,03	0,83

Se produce (ver Tablas 86 y 87) un aumento en todos los indicadores sobre construcción de nombres en ambas clases. La variable *INomC* aumenta un 48,89% en los individuos de la clase Com_1 y un 47,33% en los de la Com_2, mientras que la variable *INomD* aumenta 62,91% y 21,60%, respectivamente.

Tabla 86. La construcción de nombres para Com_1.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
N	11	11	11	11
Media	0,68	1,02	1,65	2,70
Desv. típ.	0,56	0,60	1,32	1,45

Tabla 87. La construcción de nombres para Com_2.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
N	11	11	11	11
Media	1,14	1,67	3,19	3,88
Desv. típ.	0,68	1,01	0,82	1,13

Al aplicar una prueba de Wilcoxon a los valores las variables *INomC*$_2$-*INomC*$_P$ e *INomD*$_2$-*INomD*$_P$ para los individuos de la clase Com$_1$, encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables en las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,01; p = 0,044 para *INomC*$_2$-*INomC*$_P$; Z = -2,27; p = 0,023 para *INomD*$_2$-*INomD*$_P$). Del mismo modo encontramos que existen diferencias significativas (Z = -2,04; p = 0,041) entre los rangos de las variables *INomD*$_2$-*INomD*$_P$ para los individuos de la clase Com$_2$.

5.8.4.3. Atendiendo a la competencia en el entorno de la hoja de cálculo

Recordemos que dividimos la población en dos clases según la puntuación obtenida en el cuestionario 3. A la clase formada por lo individuos que quedaron por debajo de la media de la variable *C* (que media el número de aciertos) la etiquetamos como HC$_1$ (la clase formada por los individuos que demostraron menos competencia en el cuestionario 3) y a la que estaba por encima, como HC$_2$. La clase HC$_1$ estaba formada por 13 sujetos y la HC$_2$, por 10. Sin embargo, al excluir al individuo 7 del estudio comparativo, la clase HC$_2$, de la que formaba parte, pasó a estar integrada por 9 sujetos.

En ambas clases se produce un aumento en el número de problemas abordados (ver Tablas 88 y 89). En la clase HC$_1$ se pasa de 87,50% problemas abordados sobre el total a 89,42%; mientras que en HC$_2$ aumenta de 97,22% a 98,61%. En ambos grupos se produce un aumento de lecturas algebraicas y una disminución de las aritméticas. El porcentaje de lecturas algebraicas sobre el total de lecturas aumenta del 68,54% al 74,42% en la clase HC$_1$ y del 74,29% al 82,86% en la clase HC$_2$ (con la correspondiente disminución de lecturas aritméticas).

Tabla 88. La existencia y tipo de lectura para HC$_1$.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	7,00	7,15	4,69	4,92	2,15	1,69
Desv. típ.	1,68	1,41	1,75	1,89	1,52	1,11

Tabla 89. La existencia y tipo de lectura para HC$_2$.

	A_2	A_P	$LAlg_2$	$LAlg_P$	$LArit_2$	$LArit_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	7,78	7,89	5,78	6,44	2,00	1,33
Desv. típ.	0,67	0,33	1,09	0,88	1,12	0,87

Respecto al uso de SMSalg se observa (ver Tablas 90 y 91) una disminución en la media de *SMSalg*, junto con un aumento de la media de *SMSari* en ambas clases. El grupo HC_1 pasa de un 67,42% de uso de SMSalg a un 62,79%, mientras que el HC_2 pasa de 77,14% al 75,71%.

Tabla 90. Los SMS empleados para HC_1.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
N	13	13	13	13	13	13	13	13
Media	4,62	4,15	2,00	2,08	0,23	0,23	0,00	0,15
Desv. típ.	2,29	2,67	1,78	2,02	0,44	0,44	0,00	0,38

Tabla 91. Los SMS empleados para HC_2.

	$SMSalg_2$	$SMSalg_P$	$SMSari_2$	$SMSari_P$	$SMSarialg_2$	$SMSarialg_P$	$SMSn_2$	$SMSn_P$
N	9	9	9	9	9	9	9	9
Media	6,00	5,89	1,67	1,78	0,11	0,11	0,00	0,00
Desv. típ.	1,00	1,17	1,12	1,20	0,33	0,33	0,00	0,00

Por lo que respecta a la identificación de cantidades en la lectura del problema, se observa (ver Tablas 92 y 93) un incremento en la media de *ICanNecC* en ambas clases (aumenta un 3,61% en la clase HC_1 y un 1,87% en la HC_2), una disminución de *ICanNecD* en la clase HC_1 (-0,58%) y un aumento de *ICanNecD* en la HC_2 (+8,86%). Por último, la media de *ICanEsp* aumenta en la clase HC_1 (+1,79%) y disminuye (-38,86%) en HC_2.

Aplicamos una prueba de Wilcoxon a las variables $ICanNecD_2$-$ICanNecD_P$ para los valores obtenidos de los sujetos de la clase HC_2 y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2{,}10$; $p = 0{,}035$).

Tabla 92. La identificación de cantidades para HC_1.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	6,38	6,62	5,75	5,71	0,20	0,21
Desv. típ.	1,76	1,49	1,78	1,73	0,20	0,21

Tabla 93. La identificación de cantidades para HC_2.

	$ICanNecC_2$	$ICanNecC_P$	$ICanNecD_2$	$ICanNecD_P$	$ICanEsp_2$	$ICanEsp_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	7,44	7,57	6,92	7,53	0,14	0,09
Desv. típ.	0,91	0,57	0,79	0,74	0,21	0,14

En los individuos de la clase HC_1 disminuye la media de *IRelNec* (-1,74%) y la de *IRelIn* (-4,12%); mientras que en los de HC_2 aumenta *IRelNec* un 10,69% e *IRelIn* disminuye un 8,87% (ver Tablas 94 y 95). En definitiva, los individuos de la clase HC_1 reducen la media del indicador de calidad de la lectura, *IAcRel*, un 3,76% y para los de las clase HC_2 aumenta un 9,24%.

Tabla 94. El establecimiento de relaciones para HC_1.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
N	13	13	13	13	13	13
Media	4,21	4,14	1,01	0,97	3,98	3,83
Desv. típ.	1,91	1,98	0,54	0,68	1,84	1,95

Tabla 95. El establecimiento de relaciones para HC_2.

	$IRelNec_2$	$IRelNec_P$	$IRelIn_2$	$IRelIn_P$	$IAcRel_2$	$IAcRel_P$
N	9	9	9	9	9	9
Media	5,61	6,21	0,76	0,71	5,44	5,94
Desv. típ.	0,99	1,15	0,55	0,47	1,11	1,26

En ambas clases se produce una disminución en la media de la variable *LetCo*, pero, mientras en la clase HC_1 se mantiene la media de *LetPol*, en la HC_2, aumenta (ver Tablas 96 y 97). El porcentaje de letras correctas sobre el total de letras pasa de ser el 82,54% al 80,70% en la clase HC_1 (lo que demuestra que aumenta el uso de letras polisémicas respecto al total de letras) y del 83,33% al 82,86% en la clase HC_2.

La media de la variable *Tan* aumenta en ambas clases (+300,00% en la clase HC_1 y +200,00% en HC_2). Al aplicar una prueba de Wilcoxon para datos pareados a los valores de las variables Tan_2-Tan_P de la clase HC_2, encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Tan_2-Tan_P en las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,00; p = 0,046) para los individuos de la clase HC_2.

Tabla 96. Las variables que describen el paso 2 para HC_1.

	*Tan*2	*Tan*P	*LetCo*2	*LetCo*P	*LetPol*2	*LetPol*P
N	13	13	13	13	13	13
Media	0,15	0,62	4,00	3,54	0,85	0,85
Desv. típ.	0,38	0,87	2,20	2,54	0,80	1,21

Tabla 97. Las variables que describen el paso 2 para HC_2.

	*Tan*2	*Tan*P	*LetCo*2	*LetCo*P	*LetPol*2	*LetPol*P
N	9	9	9	9	9	9
Media	0,22	0,67	5,00	4,89	1,00	1,11
Desv. típ.	0,44	0,50	0,87	1,17	0,50	0,60

En la clase HC_1, la media de *IAsigArb* aumenta (pasa de M = 0,39, SD = 0,28 a M = 0,40, SD = 0,33) un 1,11%; mientras que disminuye (pasa de M = 0,36, SD = 0,33 a M = 0,34, SD = 0,26) un 6,64% en la clase HC_2.

Por lo que respecta al paso 4 (ver Tablas 98 y 99), se produce una disminución de la media de *IgCo* para los individuos de la clase HC_1 (la disminución en la media contrasta con el aumento del porcentaje de igualdades correctas sobre el total de igualdades que pasa de un 75,93% a un 78,00%, por lo que podemos asociar el descenso en las medias al efecto de la disminución en el uso de igualdades) y un aumento para los de la clase HC_2 (el aumento en la media contrasta con la disminución del porcentaje de igualdades correctas sobre el total de igualdades que pasa de un 83,33% a un 82,46% efecto del aumento en el uso de igualdades).

Tabla 98. Las variables que describen el paso 4 para HC_1.

	*IgCo*2	*IgCo*P	*IgIn*2	*IgIn*P
N	13	13	13	13
Media	3,15	3,00	1,00	0,85
Desv. típ.	2,19	2,27	0,91	1,14

Tabla 99. Las variables que describen el paso 4 para HC_2.

	$IgCo_2$	$IgCo_P$	$IgIn_2$	$IgIn_P$
N	9	9	9	9
Media	5,00	5,22	1,00	1,11
Desv. típ.	1,58	1,56	1,00	0,93

Se produce (ver Tablas 100 y 101) un aumento en todos los indicadores sobre construcción de nombres en ambas clases. La variable *INomC* aumenta un 54,41% en los individuos de la clase HC_1 y un 39,42% en los de HC_2, mientras que la variable *INomD* aumenta 45,81% y 24,30%, respectivamente.

Tabla 100. La construcción de nombres para HC_1.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
N	13	13	13	13
Media	0,87	1,35	2,17	3,17
Desv. típ.	0,53	0,93	1,45	1,51

Tabla 101. La construcción de nombres para HC_2.

	$INomC_2$	$INomC_P$	$INomD_2$	$INomD_P$
N	9	9	9	9
Media	0,96	1,34	2,78	3,46
Desv. típ.	0,82	0,86	1,12	1,31

Aplicamos la prueba de Wilcoxon a los valores las variables $INomC_2$-$INomC_P$ e $INomD_2$-$INomD_P$ para los individuos de la clase HC_1 y encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,32; p = 0,020 para $INomC_2$-$INomC_P$; Z = -2,31; p = 0,021 para $INomD_2$-$INomD_P$). Del mismo modo, al aplicar una prueba de Wilcoxon a los valores las variables $INomD_2$-$INomD_P$ para los individuos de la clase HC_2, encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables de las pruebas anterior y posterior a la enseñanza (Z = -2,03; p = 0,042).

6. Estudio de casos

6.1. EL PROPÓSITO DEL ESTUDIO

Los estudios de casos que presentamos se llevaron a cabo una vez concluida la secuencia de enseñaza del MHC y tras la administración del cuestionario Post. Esta parte del estudio tenía un carácter exploratorio y su propósito era describir, tomando como referencia el modelo de competencia, las tendencias cognitivas de los estudiantes cuando resolvían problemas verbales aritmético-algebraicos utilizando la hoja de cálculo. La finalidad era mejorar el modelo de enseñanza, a la luz de las tendencias cognitivas positivas y negativas observadas, y ampliar el modelo de actuación, incorporando aquellos fenómenos que no hubieran sido descritos anteriormente. Por otro lado, las tendencias cognitivas identificadas en el estudio de casos, junto con las aportaciones del modelo de competencia, servirán como base sobre la que explicar algunos resultados cuantitativos obtenidos en el estudio de grupo.

6.2. LA TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE DATOS

Los datos se obtuvieron al enfrentar a parejas de estudiantes a la resolución de una colección problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. Las sesiones se grabaron en vídeo y se transcribieron posteriormente a un protocolo escrito.

La determinación del número de personas que participaron en cada sesión de grabación y del nivel de intervención del investigador tuvo en cuenta las variables que afectan al proceso de toma de datos de las producciones verbales descritas por Schoenfeld (1985). Estas variables son: el número de personas grabadas; el grado de intervención del investigador; la naturaleza y los grados de libertad de las instrucciones recibidas; la naturaleza del entorno y lo confortable que se sientan los sujetos; y, por último, las variables de tarea.

Schoenfeld (1985) indica que los protocolos verbales obtenidos de una única persona ofrecen cogniciones puras; mientras que cierto tipo de conductas, como la toma de decisiones, se muestran más fácilmente en los protocolos resultantes de la actuación de dos personas. Como nuestra investigación trataba de dilucidar y relacionar las decisiones que tomaban los resolutores cuando resolvían problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo, concluimos que era conveniente observar la actuación de parejas de estudiantes y de tal forma lo hicimos.

Las grabaciones se llevaron a cabo en el aula de informática del centro donde se había desarrollado la secuencia de enseñanza. De esta forma, se pretendía que el ambiente les produjera la menor presión posible, a lo que también contribuía el hecho de trabajar en parejas (Schoenfeld, 1985). Únicamente estuvo presente el investigador para minimizar el efecto que podía producir una actuación con público que, evidentemente, ya estaba afectada por el hecho de resolver los problemas mientras eran grabados.

Como nuestra investigación pretendía observar la resolución de problemas, el investigador debía tener un grado de intervención muy bajo (Schoenfeld, 1985). Sin embargo, no podía ser inexistente, pues debíamos evitar las situaciones en las que se enfrentaban a dificultades asociadas al manejo de la hoja de cálculo (por ejemplo, la aparición de referencias circulares, la eliminación accidental de algún elemento necesario, etc.). También debíamos remediar la ausencia de comunicación o los diálogos inaudibles exigiendo que explicaran a su compañero lo que estaban haciendo o que aumentaran el volumen, respectivamente. Por último, debíamos indicar que pasaran a otro problema cuando no se observara actividad o se hubiera superado el tiempo establecido.

Las tareas que se propusieron se adaptaban al nivel de exigencia de la enseñanza recibida, como se puede comprobar al comparar los problemas de la fase de enseñanza con los problemas del estudio de casos que se analizan en el apartado 6.4. Los sujetos sólo recibieron las instrucciones de que debían resolver los problemas utilizando la hoja de cálculo, que al final del proceso de resolución verbalizaran o señalaran el resultado y que hablasen de manera audible.

6.2.1. LA OBTENCIÓN DE LOS PROTOCOLOS AUDIOVISUALES

Las sesiones de grabación se desarrollaron con los resolutores sentados frente a un teclado, un ratón y un monitor situados sobre una mesa. Estos periféricos estaban conectados a un ordenador que disponía de la hoja de cálculo *Excel 2003*. Para la obtención de los protocolos audiovisuales, se utilizaron dos cámaras dispuestas, una frente a la otra, en los vértices opuestos de un rectángulo imaginario formado por los estudiantes y la mesa con los periféricos. Una cámara apuntaba al monitor con un primer plano y se empleó para recoger las expresiones introducidas en la hoja de cálculo. Para conseguir mayor nitidez en la imagen se utilizó un zum del 400% en la hoja de cálculo y un tamaño 20 de letra. La segunda cámara enfocaba a la cara de los resolutores y a la mesa sobre la que se encontraban los periféricos con un plano medio. De esta forma, conseguíamos información sobre qué sujeto manejaba el teclado y/o el ratón, pudiendo saber, al sincronizar los vídeos, quién era el autor (o autores) de las expresiones introducidas. También nos permitía dar cuenta de los gestos que realizaban, dónde dirigían la mirada y quién era el individuo que hablaba, lo que podía haber dado lugar a confusiones en el caso de usar una sola cámara que enfocara exclusivamente al monitor.

Previamente al inicio de la grabación, se informó a los resolutores que debían resolver los problemas que se les irían suministrando en el entorno de la hoja de cálculo y que no podían emplear lápiz o bolígrafo ni ningún otro programa informático presente en el ordenador. Se les indicó que era necesario que verbalizasen cuanto fuera posible y que lo hiciesen en voz alta. A continuación, se les ofreció el enunciado del primer problema de la colección escrito en una hoja de papel y se les pidió que lo leyeran en alto y que lo intentaran resolver. Cuando acabaron, se les entregó el siguiente problema y, así sucesivamente, hasta agotar la colección o el tiempo máximo de 55 minutos. Los problemas se proporcionaron en una misma secuencia a todas las parejas, aunque quedó a criterio del investigador la posibilidad de no ofrecer alguno en función de cómo se estuvieran desarrollando los acontecimientos. Disponían de una tiempo máximo de diez minutos para resolver cada problema, aunque podíamos invitarlos a abandonarlo antes de agotar el tiempo si se observaba falta de acción, una repetición de ideas ya empleadas que no podían llevar al resultado o una petición en tal sentido por parte de algún miembro de la pareja. En el caso que agotasen el tiempo máximo, podíamos conceder una prórroga en función del interés que pudiera tener la actuación o de la proximidad a alcanzar la solución.

6.2.2. LA OBTENCIÓN DE LOS PROTOCOLOS ESCRITOS

Para poder analizar las actuaciones de los estudiantes debemos convertir el protocolo audiovisual en un protocolo escrito. Esto supone "segmentar el protocolo oral y trasladar lo que los resolutores dicen y hacen al lenguaje escrito" (Puig, 1996, p. 74). Necesitamos establecer una criterio que nos permita segmentar el continuo que se observa en el protocolo audiovisual. Llamaremos ítem a cada uno de estos segmentos del protocolo audiovisual representado en el texto. Incluiremos en un ítem cualquier fragmento del discurso de un individuo que se produzca sin interrupción. Cuando se produzca alguna intervención sobre la hoja de cálculo o algún gesto durante la verbalización, se incluirá, entre paréntesis, dentro del mismo ítem, indicando quién es el autor. En ocasiones, para hacer menos farragoso el texto, se omitirá el autor de la acción[1] cuando coincida con el protagonista del ítem en el que se incrusta. Si la acción se produce mientras no existe verbalización, constituirá un ítem en sí misma que también se expresará entre paréntesis. También incluiremos comentarios como la presencia de silencios[2] o de fragmentos de diálogo inaudibles.

Intentaremos ser fieles al discurso de los estudiantes, aunque esto suponga incluir proposiciones mal formadas o expresiones vulgares. Utilizaremos el adverbio *sic* entre paréntesis para indicar que una palabra o proposición, que pudiera parecer inexacta, es textual. También respetaremos la entonación que los individuos dan a las frases sin atender a lo que sería conveniente en un texto bien formado. Los puntos suspensivos se emplearán dentro de la transcripción de las verbalizaciones para indicar una interrupción en el discurso, un final impreciso, una duda o una rectificación inmediata a lo que se acaba de decir. También se utilizarán a continuación de los comentarios, incrustados en medio de un ítem, que indiquen la presencia de un silencio mayor a cinco segundos o un diálogo inaudible para, de esta forma, indicar el paso del tiempo. Cuando tras una interrupción se prosiga la línea argumental en un nuevo ítem, éste se iniciará con puntos suspensivos.

Por lo que respecta a los gestos observados, daremos cuenta fundamentalmente de aquéllos que sirvan para comunicar algo de forma no verbal, para reforzar el discurso o para indicar cuál es el punto de atención de la mirada. Así, por ejemplo, podremos encontrar: "(Lluís mira a la pantalla[3])", "(Lluís mira un instante a la pantalla y vuelve a

---

[1] Toda acción tendrá un autor y éstas se indicarán en el protocolo escrito de manera secuencial según aparezcan en el protocolo audiovisual.

[2] Consideraremos silencio no sólo la abstención de hablar, sino también la ausencia de intervención en la hoja de cálculo cuando supere cinco segundos. En las transcripciones, se indicará mediante la proposición "Silencio de *n* segundos", entre paréntesis, donde *n* será el número de segundos transcurridos.

[3] El uso del verbo mirar junto a un sintagma preposicional locativo (*Lluís mira a la pantalla* o *Lluís mira hacia la pantalla*) pretende expresar la acción que se produce en un instante; es decir, el gesto, y lo hemos preferido al complemento directo (*Lluís mira la pantalla*) que daría una imagen más estática (ver Hanegreefs, 2006).

mirar a la hoja)”, “(Lluís señala al enunciado)”, “(Lluís señala a la celda B4)”, etc. Por lo que respecta a las intervenciones que se realizan sobre la hoja de cálculo, describiremos aquéllas que supongan: señalar una celda o rango de celdas con el cursor; cambiar la posición de la celda activa; introducir, modificar o borrar una expresión en una celda; mover la ventana visible de la hoja de cálculo; copiar y pegar una celda o rango de celdas; etc. Algunas intervenciones, como la introducción de una expresión o la copia y pegado de una formula, pueden extenderse a lo largo de varios ítems, pues, como ya hemos indicado, la segmentación del protocolo audiovisual se articula alrededor del discurso de los individuos. También puede ocurrir que para introducir una expresión se realicen varias acciones con distintas autorías (por ejemplo, un resolutor acciona el teclado y el otro maneja el ratón). Hemos decidido indicar el creador e insertar las acciones en el instante en que se producen tomando como referencia el discurso, aunque esto implique fragmentarlas. Fundamentalmente, seremos respetuosos con los casos en los que la introducción de una fórmula se acompañe de su verbalización.

Todas estas exigencias nos han llevado a transcribir la introducción de expresiones de una manera idiosincrásica para evitar hacer las descripciones demasiado extensas. Así, junto al núcleo del sujeto, el autor[4], y el núcleo del predicado, que lo formarán los verbos *introducir* o *modificar*, encontraremos entre corchetes la información que hace referencia a la celda donde se introduce la expresión, aquello que se pretende introducir y aquello que el interprete de la hoja de cálculo acaba mostrando en la celda. Distinguiremos entre la introducción de fórmulas y cualquier otra expresión. En la introducción de fórmulas, escribiremos en primer lugar la celda donde se introduce la fórmula. A continuación, y separada por un espacio en blanco, la fórmula. Por último, y separado por un punto y coma, el valor que se muestra en la celda o el mensaje de error producido. Así, si Lluís introduce en la celda B1 la fórmula =B2+24 cuyo resultado es 24, escribiremos “(Lluís introduce [B1 =B2+24; 24])”. Cuando se introduzcan otro tipo de expresiones, nos limitaremos a indicar la celda donde se ubicará y aquello que se introduce separado por punto y coma. Así, si Lluís introduce “Metros algodón” en la celda A1, escribiremos “(Lluís introduce [A1; Metros algodón])”. Hemos señalado anteriormente que las intervenciones que se realizan sobre la hoja de cálculo puede ser necesario fragmentarlas. Para indicar que no se ha completado la introducción de una expresión utilizaremos puntos suspensivos. Así, por ejemplo, podemos encontrar “(Lluís introduce [B1 =B2…; …])” o “(Lluís introduce [A1; Metro…])”. No consideraremos en este caso los puntos suspensivos como una transcripción de aquello que han hecho los resolutores, sino un forma de indicar la falta de conclusión en el protocolo escrito. Para la transcripción de la copia y pegado por arrastre se indicarán la celda o rango de celdas que se arrastran y la celda o rango de celdas que se alcanzan. Evidentemente, entre las celdas inicial y final del proceso también se producirá la copia y pegado, pero esto no se indicará explícitamente. Así, si Lluís estira de la celda C1, que muestra el valor 1 y contiene la fórmula =B1+1, y alcanza la celda IV1, escribiremos “(Lluís estira de la celda C1 y llega hasta [IV1 =IU1+1; 254])”. Apuntemos, por último, que dentro de los corchetes se reflejará textualmente aquello que representan los resolutores aunque suponga la aparición de errores ortográficos o de fórmulas mal formadas, y que no lo señalaremos mediante el adverbio *sic*.

[4] Que puede ser omitido si coincide con el que protagoniza el ítem en el que se incrusta.

6.3. LA SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES

Tomamos el criterio de seleccionar a los participantes de forma que se incluyera al menos un individuo de los ocho perfiles obtenidos al clasificar la población (ver apartado 5.6.) y de mantener, siempre que fuera posible, la composición de las parejas según se habían constituido en la secuencia de enseñanza. Cuando una clase estaba formada por un único sujeto, como el caso del perfil (L_2, Com_1, HC_2), la decisión sobre el individuo a elegir era automática. Sin embargo, cuando estaba formada por más de un sujeto, debíamos utilizar algún criterio que nos permitiera seleccionar, al menos, a un representante, intentando, al mismo tiempo, minimizar el número de parejas. Con este fin, se atendió por este orden a: 1) La disponibilidad y actitud de los estudiantes. 2) El interés para poner de manifiesto alguna actuación observada durante la secuencia de enseñanza. 3) La predisposición a mantener las mismas parejas que en la secuencia de enseñanza.

La disponibilidad de los estudiantes se vio comprometida por la necesidad de grabar imágenes de individuos que eran menores de edad. Fue necesario solicitar permiso a sus padres y no obtuvimos autorización para grabar al sujeto 15. Esto nos llevó a descartar del estudio a la pareja 11 (formada por los estudiantes 15 y 24[5]). También excluimos a la estudiante 11 por la actitud mostrada durante la secuencia de enseñanza y atendimos a la petición del sujeto 18 de no participar en el estudio. Esto nos llevó a descartar la pareja 6 (formada por las estudiantes 11 y 22) y a buscar un compañero para el individuo 12 (que junto al sujeto 18 formaba la pareja 13), pues nos interesaba analizar, si surgían, algunas actuaciones (ver apartado 6.5.5.) protagonizadas por este sujeto en la secuencia de enseñanza. Con este fin se le pidió al sujeto 12 que eligiera a un compañero entre los individuos 1 y 23, para que hubiera un representante del perfil (L_2, Com_1, HC_1), y seleccionó al estudiante 1.

En definitiva, participaron en el estudio cinco parejas de las que cuatro mantuvieron la composición de la secuencia de enseñanza y tuvimos que recomponer otra para que participara el sujeto 12. Los nombres de las parejas empleados en este capítulo responden a los pseudónimos que asignamos a los estudiantes y su composición era:

- La pareja Candelaria-María. Estaba formada por las estudiantes 6 (Candelaria) y 17 (María). Durante la secuencia de enseñanza, había recibido el nombre de pareja 1. La estudiante 6 pertenecía a la clase (L_2, Com_2, HC_1) y la 17 a la (L_1, Com_2, HC_2).
- La pareja Alberto-Lluís. Estaba formada por los estudiantes 7 (Alberto) y 20 (Lluís). Durante la secuencia de enseñanza, había recibido el nombre de pareja 3. El estudiante 7 pertenecía a la clase (L_1, Com_1, HC_2) y el 20 a la (L_2, Com_2, HC_2).
- La pareja Macarena-Ester. Estaba formada por las estudiantes 13 (Macarena) y 16 (Ester). Durante la secuencia de enseñanza, había recibido el nombre de pareja 10. Ambas estudiantes pertenecían a la clase (L_1, Com_1, HC_1).
- La pareja Marcos-Jorge. Estaba formada por los estudiantes 3 (Marcos) y 9 (Jorge). Durante la secuencia de enseñanza, había recibido el nombre de pareja

[5] Recordemos que el sujeto 24 era el que había sido excluido del estudio de grupo por haber copiado en los cuestionarios previos.

14. El estudiante 3 pertenecía a la clase (L_2, Com_1, HC_2) y el 9 a la (L_1, Com_2, HC_1).

- La pareja Paco-Lorenzo. Estaba formada por los estudiantes 1 (Paco) y 12 (Lorenzo). Durante la secuencia de enseñanza Paco formaba parte de la pareja 7 y Lorenzo de la pareja 13. El estudiante 1 pertenecía a la clase (L_2, Com_1, HC_1) y el 12 a la (L_2, Com_2, HC_2).

6.4. LA SELECCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Utilizamos seis problemas en el estudio de casos, escogidos de forma que tuvieran estructuras[6] distintas, pero compartieran la característica de que normalmente se resolvieran de manera algebraica. Se intentó respetar que tuvieran un nivel de dificultad similar y que pertenecieran a las mismas subfamilias que los problemas empleados en los cuestionarios 2 y Post y en la secuencia de enseñanza.

Los problemas *Adrián* y *Paz, Petra y su madre* se seleccionaron por tratarse de problemas de la subfamilia de edades. En especial, el problema *Paz, Petra y su madre* se incluyó con la propósito de analizar, si se repetían, las actuaciones que se habían observado durante la secuencia de enseñanza, donde se resolvió, de manera correcta o incorrecta, generando las líneas de vida[7] de los protagonistas por siete de las doce parejas que participaron en el estudio. Elegimos el problema *Las actividades deportivas*, porque ofrece una lectura algebraica sencilla que lo reduce a una lista de relaciones cuya traducción a fórmulas no plantea dificultades como la necesidad de invertir el orden de las cantidades. Además, los valores provisionales que se generan al introducir las fórmulas, representación de las relaciones de la lectura habitual, son positivos. De esta manera, se evita el conflicto que podría suponer la presencia de valores provisionales negativos o decimales en cantidades que deben tener valores enteros positivos. Este problema se utilizó como testigo de la capacidad de los estudiantes para poder emplear el MHC y de la competencia en su uso. El problema *Las ovejas* tiene múltiples lecturas que dan lugar a resoluciones tanto aritméticas como algebraicas. Lo utilizamos para que manifestara la tendencia, por parte de los estudiantes, a realizar esbozos lógico-semióticos en los que se evitara operar con lo desconocido. Los problemas *Los tres amigos* y *Lana y algodón* se escogieron para observar cómo actuaban los estudiantes ante la necesidad de modificar una relación, o la fórmula que la expresa, como consecuencia de la imposibilidad de que exista más de una cantidad representada en dos celdas[8]. Recordemos que esta dificultad sólo aparece en el MHC y que en el MC se puede evitar empleando sistemas de ecuaciones y recurriendo posteriormente al uso de transformaciones algebraicas. La diferencia entre ambos problemas se halla en que para resolver el problema *Los tres amigos*, usando el MHC, podemos elegir entre modificar una relación de comparación entre dos cantidades desconocidas y una conocida o una relación que refleja una estructura conceptual total siendo conocido el todo; mientras que en el problema *Lana y algodón* debe modificarse

[6] La estructura del problema entendida como el entramado de relaciones entre cantidades obtenida tras una lectura analítica llevada a cabo por el investigador.

[7] Llamaremos línea de vida a la progresión aritmética de diferencia uno que expresa las posibles edades de una persona.

[8] Esta limitación tendría su equivalente en la exigencia de resolver un problema mediante el MC empleando una única letra.

necesariamente una relación ligada a la estructura conceptual total. Las relaciones de comparación de cantidades desconocidas mediante una conocida del tipo *A es el triple de B* disponen de un referente lingüístico que les permite invertirse en *B es un tercio de A* mediante una inferencia analítica automatizada. Sin embargo, no se dispone de un apoyo lingüístico, más allá de la expresión verbal de las manipulaciones algebraicas, que permita modificar el sujeto de una relación ligada a la estructura conceptual total. Otra característica interesante del problema *Los tres amigos* es que la lectura habitual puede producir la presencia de valores provisionales negativos en cantidades cuyos valores definitivos deben ser positivos.

El orden en el que se ofrecieron los problemas no respondió, en conjunto, a ninguna planificación. Situamos en último lugar el problema *Paz, Petra y su madre*, pues consideramos que podía influir en la actuación del resto de problemas debido a las peculiaridades que se habían observado cuando lo resolvieron durante la secuencia de enseñanza. También decidimos ofrecer el problema *Las actividades deportivas* antes que el problema *Los tres amigos*, por ser de estructura similar y el segundo ofrecer más dificultades que el primero. Por último, situamos el problema *Lana y Algodón* en penúltimo lugar por considerar que su dificultad podía distorsionar las actuaciones siguientes. A continuación, ofrecemos un análisis de los problemas siguiendo el orden en el que se entregaron a los estudiantes. El número de lecturas que se ofrecen de cada problema da cuenta de las que llevaron a cabo los resolutores que participaron en el estudio.

6.4.1. EL PROBLEMA "ADRIÁN"

Adrián tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián?

Análisis de cantidades

Edad actual de Adrián = Aa =15.

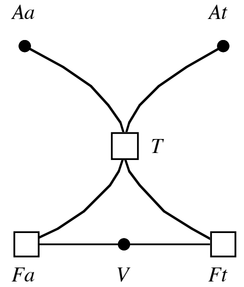
Edad actual de Tania = At = 40.

Edad futura de Adrián = Fa.

Edad futura de Tania = Ft.

Tiempo transcurrido = T.

Número por el que hay que multiplicar la edad futura de Adrián para obtener la edad futura de Tania = V = 2.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Ft = V{\cdot}Fa$ $Ft = At + T$ $Fa = Aa + T$	 Adrián.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Ft = 2 \cdot Fa \\ Ft = 40 + T \rightarrow 40 + T = 2 \cdot (15 + T) \rightarrow T = 10 \\ Fa = 15 + T \end{cases}$$

6.4.2. EL PROBLEMA "LAS OVEJAS"

En una granja hay 180 ovejas en dos corrales. Si sabemos que en uno de ellos hay 30 ovejas más que en el otro, ¿cuántas ovejas hay en cada corral?

Análisis de cantidades

Lectura A

Número de ovejas = N = 180.

Número de ovejas en el corral que menos hay (el pequeño) = Cp.

Número de ovejas en el corral que más hay (el grande) = Cg.

Número de ovejas de más que hay en el corral grande respecto al corral pequeño = Mgp = 30.

Lectura B

Número de ovejas = N = 180.

Número de ovejas en el corral que menos hay (el pequeño) = Cp.

Número de ovejas en el corral que más hay (el grande) = Cg.

Número de ovejas de más que hay en el corral grande respecto al corral pequeño = Mgp = 30.

Número de corrales = C = 2.

Número de ovejas si eliminamos el exceso de ovejas del corral grande = Nqe.

Lectura C

Número de ovejas = N = 180.

Número de ovejas en el corral que menos hay (el pequeño) = Cp.

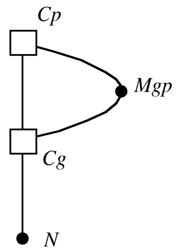
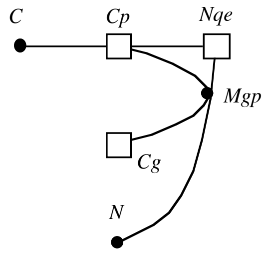
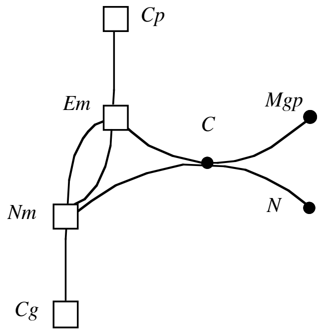
Número de ovejas en el corral que más hay (el grande) = Cg.

Número de ovejas de más que hay en el corral grande respecto al corral pequeño = Mgp = 30.

Número de corrales = C = 2.

La mitad del número de ovejas de más que hay en el corral grande respecto al corral pequeño = Em.

La mitad del número de ovejas = Nm.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$N = Cg + Cp$ $Cg = Mgp + Cp$	 Las ovejas. Lectura A.
$N = Nqe + Mgp$ $Cg = Mgp + Cp$ $Nqe = C \cdot Cp$	 Las ovejas. Lectura B.
$Cg = Nm + Em$ $Nm = Em + Cp$ $N = C \cdot Nm$ $Mgp = C \cdot Em$	 Las ovejas. Lectura C.

Solución partiendo de la lectura A

$$\begin{cases} 180 = Cg + Cp \\ Cg = 30 + Cp \end{cases} \rightarrow 180 = Cp + Cp + 30 \rightarrow \begin{cases} Cp = 75 \\ Cg = 105 \end{cases}$$

6.4.3. EL PROBLEMA "LAS ACTIVIDADES DEPORTIVAS"

1375 personas se han apuntado en actividades deportivas esta temporada. En fútbol hay 2 veces más personas que en natación. En baloncesto hay 43 personas más que en fútbol y en rugby hay 29 personas más que en baloncesto. ¿Cuántas personas hay en cada actividad?

Análisis de cantidades

Número de personas apuntadas en actividades deportivas = T = 1375.

Número de personas apuntadas en fútbol = F.

Número de personas apuntadas en baloncesto = B.

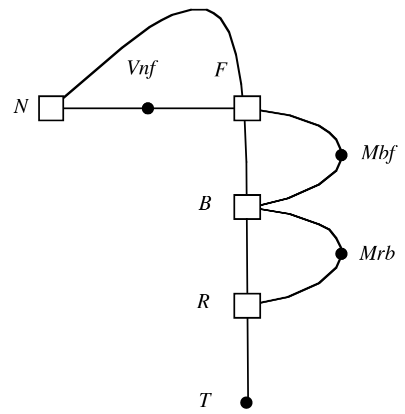
Número de personas apuntadas en natación = N.

Número de personas apuntadas en rugby = *R*.

Número por el que hay que multiplicar el número de personas apuntadas en natación para obtener el número de personas apuntadas en fútbol = *Vnf* = 2.

Número de personas de más que hay apuntadas en baloncesto respecto a las que hay apuntadas en fútbol = *Mbf* = 43.

Número de personas de más que hay apuntadas en rugby respecto a las que hay apuntadas en baloncesto = *Mrb* = 29.

<table>
<tr><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$T = F + B + N + R$
$F = N \cdot Vnf$
$B = F + Mbf$
$R = B + Mrb$</td><td>

Las actividades deportivas.</td></tr>
</table>

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 1375 = F + B + N + R \\ F = 2 \cdot N \\ B = F + 43 \\ R = B + 29 \end{cases} \rightarrow 1375 = 7N + 115 \rightarrow \begin{cases} N = 180 \\ F = 360 \\ B = 403 \\ R = 432 \end{cases}$$

6.4.4. EL PROBLEMA "LOS TRES AMIGOS"

Tres muchachos ganaron 960 euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?

Análisis de cantidades

Dinero total ganado = *T* = 960.

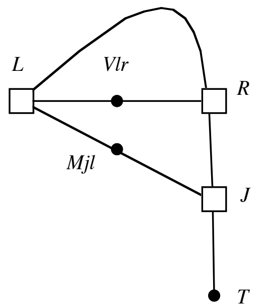
Dinero ganado por Luis = *L*.

Dinero ganado por Juan = *J*.

Dinero ganado por Roberto = *R*.

Número por el que hay que multiplicar lo que ganó Luis para obtener lo que ganó Roberto =*Vlr* = 10.

Dinero de más que ganó Juan respecto al que ganó Luis = *Mjl* = 24.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$T = L + J + R$ $R = L{\cdot}Vlr$ $J = L + Mjl$	 Los tres amigos.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 960 = L + J + R \\ R = L \cdot 10 \\ J = L + 24 \end{cases} \rightarrow 960 = L + 10 \cdot L + L + 24 \rightarrow \begin{cases} L = 78 \\ R = 780 \\ J = 102 \end{cases}$$

6.4.5. EL PROBLEMA “LANA Y ALGODÓN”

Se dispone de tela de lana y de tela de algodón. En total 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón, de 4 euros. El valor total de la tela que se dispone es de 32 euros. ¿De cuántos metros de tela de lana y de cuántos metros de tela de algodón se dispone?

Análisis de cantidades

Metros totales de tela = M = 12.

Precio total de la tela = P = 32.

Precio de un metro de tela de lana = Ul = 2.

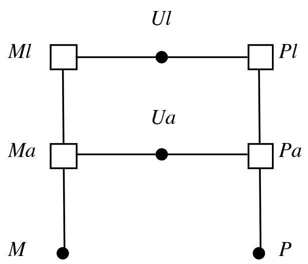
Precio de un metro de tela de algodón = Ua = 4.

Metros de tela de lana = Ml.

Metros de tela de algodón = Ma.

Precio de la tela de lana = Pl.

Precio de la tela de algodón = Pa.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$P = Pl + Pa$ $Pl = Ul{\cdot}Ml$ $Pa = Ua{\cdot}Ma$ $M = Ml + Ma$	 Lana y algodón.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} 32 = Pl + Pa \\ Pl = 2 \cdot Ml \\ Pa = 4 \cdot Ma \\ 12 = Ml + Ma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 32 = 2 \cdot Ml + 4 \cdot Ma \\ 12 = Ml + Ma \end{cases} \rightarrow 32 = 2 \cdot (12 - Ma) + 4Ma \rightarrow \begin{cases} Ma = 4 \\ Ml = 8 \end{cases}$$

6.4.6. EL PROBLEMA "PAZ, PETRA Y SU MADRE"[9]

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Análisis de cantidades

Edad actual de Paz = $Aa = 6$.

Edad actual de Petra = $Ae = 9$.

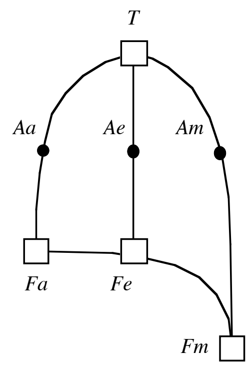
Edad actual de Ana (la madre) = $Am = 35$.

Tiempo transcurrido = T.

Edad futura de Paz = Fa.

Edad futura de Petra = Fe.

Edad futura de Ana (la madre) = Fm.

Análisis de relaciones	*Grafo*
$Fa = Aa + T$ $Fe = Ae + T$ $Fm = Am + T$ $Fm = Fa + Fe$	 Paz, Petra y su madre.

Solución partiendo de la lectura anterior

$$\begin{cases} Fa = 6 + T \\ Fe = 9 + T \\ Fm = 35 + T \\ Fm = Fa + Fe \end{cases} \rightarrow 6 + T + 9 + T = 35 + T \rightarrow T = 20$$

[9] Este problema se ha analizado anteriormente, pero incluimos su descripción para no romper la coherencia de la exposición.

6.5. EL ANÁLISIS DE LOS CASOS

El análisis de los casos consistirá en una descripción del proceso de resolución a partir de las actuaciones recogidas en los protocolos escritos. Tomaremos como marco de referencia el modelo de competencia y las tendencias cognitivas presentadas en otras investigaciones. Para poder estructurar el análisis de una manera más clara, hemos optado por presentar el texto dividido en dos columnas. En la columna de la izquierda se describirá el proceso de resolución y se ofrecerán explicaciones posibles a las actuaciones. En la columna de la derecha se presentarán los fragmentos del protocolo escrito a los que se hace referencia en la columna izquierda. Hemos decidido no presentar la totalidad del protocolo escrito para hacer el texto menos farragoso. Con este fin hemos suprimido las referencias a gestos, excepto cuando eran necesarios para extraer alguna conclusión, y los ítems que reproducen diálogos que describían acciones rutinarias o repetían información. Sin embargo, hemos optado por no cortar el diálogo de los ítems que hemos seleccionado. Los comentarios sobre gestos que se suprimen, que estuvieran incrustados en los ítems discursivos, se sustituirán por puntos suspensivos entre corchetes; pero, para señalar que no se ha eliminado diálogo, se mantendrán los paréntesis que encerraban el comentario. Los ítems suprimidos no se han indicado mediante una marca especial, pues hemos considerado que la ausencia del número que lo identifica cumplía este papel. Para hacer más legible el texto hemos agrupado fragmentos del protocolo escrito, intentando mantener una unidad en el propósito que siguen las acciones y verbalizaciones analizadas. Sin embargo, no hemos pretendido identificar episodios, sino organizar la reconstrucción del proceso de resolución.

6.5.1. LA PAREJA CANDELARIA-MARÍA

La pareja Candelaria-María fue la que llamamos pareja 1 durante la secuencia de enseñanza. Estaba formada por las estudiantes 6 y 17 a las que, como ya hemos indicado, identificaremos por los pseudónimos Candelaria y María, respectivamente. Al clasificar a la población, Candelaria (la estudiante 6) quedó integrada en la clase (L_2, Com_2, HC_1); mientras que María (la estudiante 17) se incluyó en (L_1, Com_2, HC_2).

La estudiante 6 había demostrado una fuerte tendencia a abordar los problemas de manera algebraica. De hecho fue uno de los pocos individuos que realizó alguna lectura algebraica en el cuestionario 1 (el que estaba compuesto por problemas que normalmente se resuelven de manera aritmética). Junto al sujeto 12 podríamos considerarla como la estudiante con mayor destreza a la hora de identificar relaciones entre cantidades y de manejar expresiones algebraicas. Sin embargo, quedó por debajo de la media en el cuestionario que trataba de determinar la competencia en el uso de la hoja de cálculo, sobre todo por las dificultades que tuvo para contestar a los ítems sobre generación de secuencias numéricas.

La estudiante 17 sólo abordó algebraicamente cinco de los quince problemas que integraban los cuestionarios 1 y 2, pero quedó por encima de la media en la competencia a la hora de reducir el problema a relaciones entre cantidades. Conviene destacar el uso polisémico que hace de la letra x en el problema *Marta y María* (subfamilia edades) para referirse a la edad actual y futura de una de las protagonistas de la historia. También considera en el problema *La familia de Andrea* (subfamilia edades) que las cantidades tiempo transcurrido, edad inicial y edad final están relacionadas multiplicativamente. En el cuestionario 3, no tuvo problemas a la hora de generar secuencias numéricas. Sus errores se centraron en la utilización de más de una fórmula para dar respuesta a las preguntas planteadas, lo que puede indicar dificultades en el uso de los paréntesis para modificar la prioridad de las operaciones.

Por lo que respecta al estudio de casos, esta pareja no abordó el problema *Paz, Petra y su madre* por falta de tiempo.

6.5.1.1. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema "Adrián"

Tras una primera lectura del enunciado, María (ítems 7 y 9) designa dos cantidades empleando los nombres de los protagonistas. A continuación, introducen los valores 15 y 40 en las celdas B1 y B2 (ítems 14 y 19), respectivamente. Por los números que asignan, sería plausible considerar que los nombres anteriores representaban a las cantidades *Aa* y *At*; sin embargo, la ausencia en los nombres de referencias al momento actual o futuro también pueden interpretarse como una referencia a las variables edad de los protagonistas.

4. (Lee María.)

5. Candelaria: Vale, pues… Bueno pon los datos.

7. (María introduce [A1; ADRIAN].)

8. María: Adrián. (Casi inaudible.)

9. (María introduce [A2; TANIA].)

11. María: ¿Adrián tiene…?

12. Candelaria: Quince.

14. (María introduce [B1; 15].)

16. María: ¿Y Tania…?

17. Candelaria: Cuarenta.

19. (María introduce [B2; 40].)

Vuelven a leer el enunciado en busca de qué es lo que se pregunta y de una primera propuesta de plan. Candelaria (ítem 24) señala que es parecido a uno ya hecho en clase[10].

20. (Candelaria mira a la hoja y María, también.)

21. María: ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para…?

24. Candelaria: Es igual que el que hicimos… A ver ([…])… Es parecido…

30. (Silencio de 10 segundos.)

María (ítems 36 y 38) plantea multiplicar por dos alguno de los números representados sin que parezca importarle (ítem 41) cuál debe ser multiplicado. Dejando de lado qué cantidad debe multiplicarse por dos, la propuesta de María tiene dos posibles interpretaciones[11]

31. María: Pues eso por eso (señala a la pantalla).

34. Candelaria: ¿Qué ([…])?

36. María: Por dos (señala a B1 con la mano […]) eso…

37. Candelaria: ¿El qué?

---

[10] En la secuencia de enseñanza se planteó el problema *Amaya y Andrea* (en el apartado 4.2.2.3.8., se ofrece un análisis del problema) que fue resuelto correctamente por esta pareja utilizando el MHC. Ambos problemas son parecidos, pero en el problema *Amaya y Andrea* se ofrece como dato el tiempo transcurrido.

[11] Al disponer de toda la resolución tenemos argumentos para considerar más adecuada una que otra o incluso para poder asegurar cuál de las dos interpretaciones responde a las intenciones del individuo. El hecho de que propongamos las dos posibilidades no pretende generar incertidumbre al lector, sino describir las alternativas que podría barajar el otro resolutor a la vista de los hechos y de aquello que se verbaliza. Es decir, pretendemos recrear el escenario para poder describir los problemas de comunicación que puedan aparecer.

ligadas a las dos explicaciones que hemos hecho de lo que han representado en las celdas A1, A2, B1 y B2: 1) Considera, de manera incorrecta, que la relación "el doble de" se aplica a las edades iniciales. 2) Supone que se han representado las variables edad y no las cantidades edad actual de los protagonistas. Las actuaciones siguientes de María (ver, por ejemplo, ítem 59) nos llevan a considerar plausible la segunda opción.

38. María: … o lo de Tania ([…]) o lo de Adrián…

39. Candelaria: ¿El qué ([…])?

41. María: Lo de Tania o lo de Adrián.

La extrañeza manifestada por Candelaria (ítems 34, 37 y 39) es, posiblemente, un reflejo de la interpretación de lo dicho por María (ítems 36 y 38) según lo que aquélla entiende que se ha representado en las celdas B1 y B2. Así, Candelaria parece suponer que en B1 y B2 se representan las cantidades *Aa* y *At*, respectivamente[12], y que los nombres "Adrián" y "Tania" son etiquetas de *Aa* y *At*. De esta forma, mientras María propone multiplicar por dos la variable edad, Candelaria interpreta que se plantea multiplicar por dos una edad actual, lo que ella entiende que va en contra de lo que se expone en el enunciado.

Candelaria (ítem 42) se opone al plan y trata de reorganizar la solución relacionando el problema con otro (el problema *Amaya y Andrea*[13]) resuelto en clase anteriormente. Sin embargo, señala que en el que les ocupa no se ofrece como dato el tiempo transcurrido, mientras que en el resuelto en clase, sí. La imposibilidad de importar la solución del problema *Amaya y Andrea* le conduce a volver a leer el enunciado (ítem 43).

42. Candelaria: No, pero es que… A ver ([…])… ¿Cuánto…? Es como el que hicimos el otro día que tenía que pasar (levanta dos dedos de la mano) tres años; pero no sabemos cuántos años… Entonces…

43. (Candelaria lee un fragmento del enunciado en voz baja.)

Candelaria (ítem 46) verbaliza la relación entre las edades futuras de Adrián y Tania, pero no asigna celdas a las

46. Candelaria: La ([…])… O sea… A ver… Dentro de tantos ([…]) años ([…]) la edad de Tania será igual que el doble de la edad de…

[12] Candelaria, posteriormente, asignará celdas a las cantidades edad futura de Adrián y edad futura de Tania (ítems 82-84).

[13] A diferencia del caso que nos ocupa, en el problema *Amaya y Andrea* se ofrecía como dato el tiempo transcurrido.

cantidades T, Fa y Ft, posiblemente, porque no hay una referencia explícita a ninguna de ellas. En los ítems 50 y 51, Candelaria vuelve a centrarse en el enunciado y al final del ítem 51 parece decidirse a poner en marcha un plan.

47. María: Adrián ([…]).

49. Candelaria: Entonces (ríe)…

50. María: No sabemos (María mira un instante al ordenador y se observa a Candelaria mirando a la hoja […]).

51. Candelaria: Vale, a ver (silencio de 15 segundos)… Jope. ([…]). Pues a ver ([…])… Vamos a hacer, a ver, si… (Inaudible.)

María (ítem 52) interrumpe el discurso de Candelaria reelaborando lo dicho por ésta en el ítem 46. Sin embargo, no hace referencia al tiempo transcurrido e invierte la relación al verbalizarla (“Adrián tiene que tener el doble que Tania”, ítem 52). Candelaria (ítem 53) corrige el orden de las cantidades en la relación expresada por María sin mencionar el tiempo transcurrido. María (ítem 56) necesita volver a leer[14] el enunciado para darse cuenta del error. Finalmente, María (ítem 59) acepta la relación en el orden en que la propuso Candelaria; pero, de forma intencionada o no, vuelve a evitar referirse al tiempo transcurrido.

52. María: Si ([…]) Tania tiene cuarenta y e… ([…]) o el hermano tiene que tener… Adrián tiene que tener el doble que Tania.

53. Candelaria: ¡No, no, no! Tania tiene que tener el doble que ([…]) Adrián.

55. (María señala al enunciado […])

56. María: ¡Ah… No, no, no! ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que Tania sea igual al doble de la edad de Adrián ([…])?

58. Candelaria: Claro, porque… ¿Cómo va a ser Adrián ([…])…?

59. María: Ella… ¡Ah!, vale […]). Tania tiene que tener el doble de años que Adrián.

Candelaria reorganiza la resolución apoyándose en el paso 4 del MHC o del MC (“Es que hay que encontrar los dos que son iguales”, ítem 62). A continuación, relee el enunciado y ofrece (ítem 64) verbalmente una ecuación, dando respuesta a la búsqueda de dos expresiones de una misma cantidad, donde asigna la letra x a la cantidad T y emplea las relaciones necesarias y suficientes $Ft = V{\cdot}Fa$, $Ft = At + T$ y $Fa = Aa + T$. Esto pone de manifiesto que al realizar un esbozo lógico-semiótico que prevé el uso del SMSalg, sí que es capaz de reducir el problema a una colección de relaciones necesarias y suficientes. Posiblemente, la escasa familiaridad con el lenguaje de la hoja de cálculo actúe como obstáculo a la hora de realizar el análisis del enunciado propio del MHC, ya que el esbozo lógico-semiótico que en

62. Candelaria: Pues a ver… Eh… Vamos a… Es que hay que encontrar los dos que son iguales; pero es que es eso (Candelaria mira a la hoja), a ver, los dos que son iguales son…

63. María: Son ([…])…

64. Candelaria: … Tania más equis es ([…]) igual a Adrián ([…]) más equis por dos.

[14] Al leer el enunciado menciona el tiempo transcurrido.

este caso se realiza prevé el uso del SMShc. En consecuencia, no actúa como obstáculo para desencadenar el análisis del problema la necesidad de operar con cantidades desconocidas, sino el SMS en el que deberán expresarse las relaciones que las incluyen.

La ecuación planteada empleando el MC podría traducirse al lenguaje de la hoja de cálculo considerando como cantidad de referencia a la cantidad *T* y usando dos celdas para representar las dos expresiones de la cantidad *Ft*. Sin embargo, Candelaria (ítem 66) manifiesta su incapacidad para transferir la ecuación al lenguaje de la hoja de cálculo. Posiblemente, esto sea debido a que no puede establecer una correspondencia entre la incógnita de la ecuación en el SMSalg (la letra *x*) y la incógnita de la igualdad de celdas en el SMShc (la celda de referencia). La dificultad para superar este obstáculo podría ser consecuencia de: 1) La ausencia de una celda que represente a la cantidad *T*, en este punto de la resolución. 2) El hecho de que en la secuencia de enseñanza no se hiciera una comparación explícita entre el MC y el MHC. También podría deberse a la decisión que adoptamos en la secuencia de enseñanza de comparar celdas, en lugar de construir ecuaciones en el lenguaje de la hoja de cálculo, que exigiría, en este caso, dividir en dos fragmentos la ecuación que se ha verbalizado.

65. María: Vale ([…]), pues hazlo.

66. Candelaria: Ya, pero ([…]) cómo lo hacemos.

María (ítems 67 y 74, ver Figura 1) propone una igualdad incorrecta entre la suma de las cantidades representadas en B1 y B2 (que para ella parecen ser las variables edad de Adrián y Tania, respectivamente) y la ecuación propuesta por Candelaria en el ítem 64; pero su compañera se opone. Al plantear la igualdad sobre la suma de las cantidades presentes, María parece ofrecer una interpretación restrictiva del paso 4 del MHC, posiblemente ligada al éxito (y a un conflicto entre el ejemplo concreto y lo

67. María: Pero (María señala a la pantalla con la mano […]) la suma de éstos es igual a ([…]) lo que tú has dicho.

68. Candelaria: ¿El qué ([…])? No ([…])… No sé. ¿La suma de eso ([…])?

70. María: Las cantidades ([…]) que tienen que ser iguales es la suma de eso más… ¿Y qué habías dicho tú?

72. Candelaria: ¿Qué suma?

74. María: La suma (María señala B1 y B2 […]) de Adrián y de Tania ([…]) tiene que ser igual…

75. Candelaria: No ([…])… ¿Cómo ([…]),

que ejemplifica), en otros problemas, a la hora de plantear la igualdad sobre relaciones del tipo la suma de las partes es igual al todo.

cómo, qué ([…])?

	A	B
1	ADRIAN	15
2	TANIA	40

Figura 1. Entre los ítems 20 y 95.

Tras el desacuerdo, María y Candelaria vuelven a centrar la resolución en la búsqueda de dos cantidades iguales. Candelaria (ítem 82) expresa lo mismo que verbalizó en el ítem 64, pero sustituyendo la "equis" por "tiempo transcurrido" en una vuelta a la semántica del enunciado. De esta forma, Candelaria fragmenta la ecuación anterior en dos expresiones unidas por una conjunción copulativa, lo que indica que sí que es capaz de expresar los dos términos de la ecuación por separado. El hecho de que haya conseguido fragmentar la ecuación, nos lleva a concluir que fue la imposibilidad de establecer la correspondencia entre letra y celda de referencia la causa primera que obstaculizó la traducción (ítem 66) de la ecuación expresada en el lenguaje del álgebra al lenguaje de la hoja de cálculo.

76. María: Tiene que ([…]) haber (reforzado su explicación con movimiento de manos) dos cantidades ([…]) iguales…

77. Candelaria: Sí ([…]).

79. María: Y esas dos cantidades tenemos que averiguar cuáles son.

80. Candelaria: Claro ([…]).

81. María: Pues eso.

82. Candelaria: La cantidad que tiene que ser igual es (mira a un punto indeterminado) la edad de Tania dentro de tantos años y la edad de Adrián dentro de tantos años…

83. María: Por dos.

84. Candelaria: … por dos (al tiempo que su compañera)… Pues vamos a ponerlo así y ya está.

Construyen (ítems 85-96) una etiqueta para la cantidad Ft. En la diálogo se observa una evolución del nombre desde *Tania dentro de tantos años* hasta *Tania dentro de x años*, lo que supone pasar de una proposición bien formada en el lenguaje natural a una que incorpora elementos del lenguaje del álgebra y que señala que el número de años transcurridos es una cantidad desconocida. Candelaria (ítem 98) también construye un nombre para la segunda representación de la cantidad Ft como plasmación de las relaciones $Ft = V{\cdot}Fa$ y $Fa = Aa + T$ (ver Figura 2). En este nombre se vuelve a emplear la letra x como referencia a la cantidad desconocida T.

85. María: ¿Qué ponemos?

87. Candelaria: Edad de Tania…

93. María: ¿Tania dentro de…?

95. Candelaria: De tantos años ([…])… Yo qué sé… de ([…]) equis años.

96. (María introduce [A3; TANIA DENTRO DE X AÑOS].)

98. Candelaria: Y es igual a la edad de Adrián… O sea a la (sic) doble… el doble de la edad de Adrián dentro de equis años (mientras María introduce [A4; DOBLE EDAD ADRIAN…]).

99. María: A ver, el doble de la edad de Adrián (duda)… equis años.

100. (María, mientras habla, introduce [A4; DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS].)

	A	B
1	ADRIAN	15
2	TANIA	40
3	TANIA DENTRO DE X AÑOS	
4	DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS	

Figura 2. Después del ítem 100.

Inician la construcción de fórmulas para expresar la relación de las cantidades desconocidas representadas con otras cantidades. Esto supone dar por concluido el paso 2 del MHC sin haber asignado celda a la cantidad desconocida *T* y sin haber identificado explícitamente ni haberle asignado una celda a la cantidad de referencia. La fórmula que va pergeñando Candelaria en el ítem 105 supone considerar la cantidad *T* como cantidad de referencia. Evidentemente, el hecho de no haber asignado una celda a esta cantidad desconocida impide representarla en las fórmulas mediante la referencia a la posición de una celda. La necesidad de simbolizarla al escribir la fórmula lleva a Candelaria a proponer expresarla mediante un número. La transformación de "equis años" en "algún número" y después en un número concreto supone pasar de considerar *T* una cantidad desconocida, pero de valor determinado (incógnita), a un número indeterminado (variable), para reducir, a continuación, el número indeterminado a un número concreto, de los infinitos posibles, para suplir la imposibilidad de usar un sistema de representación que exprese la generalidad.

105. Candelaria: Entonces… Tania dentro de equis años es be dos más algún número (María introduce [B3 =B…; …] usando el teclado)… No, pero es que no sabemos qué número poner (María borra B3 […]). ¿Qué número ponemos?

107. María: Probamos…

En el ítem 110, María propone sumar el número uno dando respuesta a la pregunta "¿Qué número ponemos?" (ítem 105). Candelaria parece dudar (ítem 111) y pretende utilizar el conocimiento del paso 2 del MHC (ítem 113) para valorar la propuesta de María, recordando la necesidad de tener una única celda vacía, la de referencia, frente a las dos que se observan ahora en B3 y B4 (ver Figura 2). María (ítem 114) insiste en lo propuesto en el ítem 110 y Candelaria (ítem 115) acaba aceptando el plan. María (ítem 121)

110. María: … más uno, más… Más un…

111. Candelaria: A ver… A ver, espera, espera ([…]). ¿Cómo lo hacemos ([…])?

112. María: Be dos…

113. Candelaria: Nos tiene que quedar (sobre la voz de su compañera) sólo uno ([…]) uno… uno vacío…

114. María: Be dos ([…])… más uno. Así… Y así probamos (mueve la mano de izquierda a derecha)… (Inaudible.)

115. Candelaria: Vale, vale.

119. María: Be dos más uno (María introduce

introduce la fórmula =B2+1 en B3 lo que supone expresar la relación $Ft = At + T$ asignando a T un valor provisional (el número 1).

[B3 =B2+1…; …]), ¿no?

120. Candelaria: Sí.

121. (María introduce [B3 =B2+1; 41] usando el teclado.)

Verbalizan (ítems 130 y 131) una fórmula que plasma las relaciones $Ft = V{\cdot}Fa$ y $Fa = Aa + T$ y permite calcular la segunda aparición de la cantidad Ft que han etiquetado como "DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS". La cantidad desconocida T vuelve a representarse mediante el número uno. Sin embargo, Candelaria (ítem 133) parece entrever un problema a la hora de replicar las fórmulas creadas. Posiblemente observa que las fórmulas representadas en B3 y B4 (ver Figura 3) contienen referencias a las celdas B2 y B1, respectivamente, y que la única forma de hacer variar los resultados de las fórmulas es variar los valores de los argumentos. Y así, aunque Candelaria parecía suponer la presencia en B1 y B2 de cantidades conocidas, ahora apunta la necesidad de generar secuencias numéricas en las filas 1 y 2, lo que implicaría no considerar que en B1 y B2 se representan cantidades conocidas. No queremos decir con esto que suponga ahora la presencia de cantidades desconocidas, sino que pasa a considerar que en las filas 1 y 2 se representarán las variables edad de los protagonistas.

128. María: Es…

129. Candelaria: … quince, o sea, be ([…]) uno…

130. María: Be uno (a la vez)…

131. Candelaria: … más uno… por dos.

132. María: Por dos (acompañando a su compañera).

133. Candelaria: Pero luego hay… tenemos que tener be uno más un… más dos (hace un gesto de fastidio)…

136. María: Be uno (María introduce [B4 =B1…; …]) más uno (María introduce [B4 =B1+1…; …]) por dos (María introduce [B4 =B1+1*2…; …])… entre paréntesis…

137. Candelaria: Entre paréntesis (a la vez que su compañera).

138. (María sitúa el cursor en A4 e introduce [B4 =B1+1*2; 17] usando el teclado.)

139. María: ¿Así (sitúa la celda activa en B4), entre paréntesis eso (mueve el cursor por la barra de referencia sobre "1*2")?

140. Candelaria: Entre paréntesis be uno más uno.

141. (María introduce [B4 =(B1+1)*2; 32].)

Si nos centramos en la fórmula propuesta (ítems 128-141), se observa que debe contener dos operaciones aritméticas y será necesario el uso de un paréntesis para modificar la prioridad del producto respecto la suma. La exigencia de recurrir a una fórmula con dos operaciones aritméticas surge como consecuencia de no haber asignado una celda a la cantidad desconocida Fa. María (ítem 136) introduce la fórmula que han convenido, representando, de nuevo, la cantidad T mediante el número 1 y omite inicialmente el uso del paréntesis[15], aunque al final del ítem 136 dice "entre paréntesis". La vacilación que se refleja en el ítem 139 nos permite concluir que la omisión no fue fruto de un descuido, sino de la duda a la hora de decidir dónde colocarlo.

	A	B
1	ADRIAN	15
2	TANIA	40
3	TANIA DENTRO DE X AÑOS	=B2+1
4	DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS	=(B1+1)*2

Figura 3. Contenido de las celdas después del ítem 142.

María (ítem 142) señala como iguales las dos representaciones de la cantidad *Ft*, coloreando las filas 3 y 4, dando respuesta al cuarto paso del MHC. Resumiendo, la pareja ha utilizado las relaciones correctas, y suficientes para resolver el problema, $Ft = V{\cdot}Fa$, $Ft = At + T$ y $Fa = Aa + T$. Sin embargo, la representación mediante un número que han dado a la cantidad desconocida *T* les impedirá replicar los pasos 3 y 4 para alcanzar la solución (ver Figura 3).

142. María: Y ahora esto (María colorea B3, A3, A4 y B4)… Alargamos… Pero, ¿aquí (sitúa el cursor sobre C3) hay ([…]) que poner algún dato…? (Inaudible.)

Al final del ítem 142, María duda sobre si se debe introducir algún número o fórmula en la celda C3. Candelaria (ítem 143) responde afirmativamente, pero María, sin hacer caso, arrastra la celda B3. Como la fórmula presente en B3 toma argumento en B2, al replicarla genera una secuencia constante de números uno, ya que, a partir de la celda C2, el resto de celdas de la fila 2 están vacías. Candelaria, al final del ítem 143, parece darse cuenta de que algo no está bien y propone introducir (ítem 146) una fórmula de recurrencia en C3 que acabará produciendo, intencionadamente o no, la línea de vida de Tania[16] dando cuenta, de

143. Candelaria: Creo que sí (María estira B3)… No, no, no. Lo haces cada vez más largo… Déjalo hasta ahí (ríen) [[17]]. (María llega hasta [GS3 =GS2+1; 1])… No.

144. (María […] sitúa la celda activa en C3.)

145. María: Me parece que hay que poner…

146. Candelaria: Be tres más uno.

147. (María introduce [C3 =B3+1; 42] usando el teclado.)

148. Candelaria: (Inaudible.)… (María estira C3.) (Ríen.) Hazlo hasta aquí, ya… Ya, ya, ya, ya… (Inaudible.)

149. (María llega hasta [GE3 =GD3+1; 226].)

---

[15] María demostró dificultades a la hora de utilizar paréntesis en el cuestionario 3. Recordemos que en ocho ítems de este cuestionario se exigía la traducción de expresiones matemáticas o verbales que expresaban operaciones entre cantidades a un única fórmula. María utilizó paréntesis innecesarios en un ítem y evitó usar paréntesis en otros dos empleando más de una fórmula.

[16] Realmente la línea de vida se inicia en la celda B2 y continúa en la fila 3. Candelaria ya había generado secuencias en varias líneas cuando se le había propuesto en el cuestionario 3 (ver anexo G).

algún modo, de la relación $Ft = At + T$ (ver Figura 4).

	A	B	C	D
1	ADRIAN	15		
2	TANIA	40		
3	TANIA DENTRO DE X AÑOS	41	42	43
4	DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS	32		

Figura 4. Después del ítem 149.

María (ítem 150) parece proponer introducir en C4 una fórmula de recurrencia que genere una progresión aritmética de diferencia uno con origen en el valor presente en B4. Candelaria (ítem 151) se opone y plantea la copia y pegado de la celda B4. Argumenta su decisión (ítem 153) indicando “esto tiene que crear una relación con eso”, pero sin aclarar a quién hacen referencia “esto” y “eso”. A continuación, María (ítems 154 y 157) propone generar una progresión aritmética de diferencia uno a partir de la celda B1 lo que produciría la línea de vida de Adrián. Esto vuelve a confirmar que María considera que el nombre “Adrián” representa a la variable edad de Adrián y no a la cantidad Aa. Sin embargo, se impone el criterio de Candelaria (ítems 158-160) de replicar la fórmula presente en B4.

150. María: Y ahora esto (mueve la ventana al inicio)… Ponemos también (sitúa la celda activa en C4)… A ver, be (sitúa la celda activa en B4)…

151. Candelaria: Espera ([…]), no. Tenemos que alargar eso (parece que señala a B4), porque…

152. María: ¿Esto (sitúa el cursor sobre B1)?

153. Candelaria: A ver, esto tiene que crear una relación con eso (sigue señalando a la pantalla y mueve los dedos a un lado y otro), porque… No, no lo sé.

154. María: Sí, hay… hay (sitúa el cursor sobre C1) que poner be uno más uno… A ver, be uno (casi inaudible)…

156. Candelaria: No, a ver… A ver, mira: la edad de Tania (señala con la mano a la pantalla) dentro de qui… o sea… No, no, no…

157. María: Aquí (sitúa el cursor sobre C1) tiene que ser be uno más uno ([…]).

158. Candelaria: No ([…]), alarga… alarga ése (señala con la mano a la pantalla) y ya está…

159. María: ¿Éste (sitúa el cursor sobre B4)?

160. (María estira B4.)

	A	B	C	D
1	ADRIAN	15		
2	TANIA	40		
3	TANIA DENTRO DE X AÑOS	41	42	43
4	DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS	32	2	2

Figura 5. Después del ítem 163.

Al estirar de la celda B4, se obtiene una secuencia de valores constantes (ver Figura 5), en la fila 4 a partir de C4, ya que todas las fórmulas hacen referencia a la fila 1, cuyas celdas (excepto A1 y B1) están vacías. María (ítem 167), quizá buscando el error, edita la fórmula presente en C4, donde se observa la

163. Candelaria: Si se supone que está bien hecha la fórmula… Dale ya (señala con la mano a la pantalla), porque no creo que sean (María llega hasta [EQ4 =(EQ1+1)*2; 2])…Vale.

167. (María sitúa la celda activa en C4.)

168. María: Es…

169. Candelaria: Be cuatro.

[17] Seguramente, Candelaria sabe que están generando los posibles valores de la edad de Tania y que la edad de una persona tiene un límite. Así, cuando dice “No, no, no. Lo haces cada vez más largo” se refiere a que la longitud de la secuencia numérica ya es suficiente, lo que supone utilizar las restricciones del contexto del problema para gestionar el proceso de resolución.

fórmula =(C1+1)*2. Candelaria (ítem 169) se limita a decir “Be cuatro”, lo que María parece interpretar como una instrucción para sustituir C1 por B4, y así lo hace[18] (ítem 171). Candelaria (ítem 172) aclara las intenciones: “No, más uno… sólo”. Es decir, está proponiendo generar una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 4 que tendrá su origen en el valor presente en B4. María (ítem 175) sigue las indicaciones e introduce la fórmula =(B4+1) en C4. A continuación (ítems 176 y 178), la copia y pega por arrastre (ver Figura 6), generando la progresión aritmética de diferencia uno con origen en B4.

170. María: Be cuatro (casi inaudible).

171. (María modifica [C4 =(B4+1)*2; 66] usando el teclado.)

172. Candelaria: No, más uno… sólo.

173. (María sitúa la celda activa en C4.)

174. María: ¿Y sin por dos?

175. Candelaria: Sí, porque (María modifica [C4 =(B4+1); 33])… ([…])… Sí ([…]), sí.

176. (María estira C4.)

178. (María llega hasta [FB4 =(FA4+1); 188].)

	A	B	C	D
1	ADRIAN	15		
2	TANIA	40		
3	TANIA DENTRO DE X AÑOS	=B2+1	=B3+1	=C3+1
4	DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS	=(B1+1)*2	=(B4+1)	=(C4+1)

Figura 6. Contenido de la celdas después del ítem 178.

María (ítem 179) propone estirar de C1, una celda vacía en la que había propuesto, en el ítem 154, introducir la fórmula =B1+1. Podemos, por tanto, considerar que insiste en este plan que supondría la generación de la línea de vida de Adrián. Candelaria (ítem 180) se opone y manifiesta (ítem 182) que han hecho algo mal, pero no especifica qué.

179. María: Pero ahora hay que saber (María mueve la ventana hasta el inicio), para cuándo… Hay que alargar esto (mueve el cursor sobre C1) para saberlo, ¿no?

180. Candelaria: ¿Por qué…? No, a ver… Bueno… Es que no sé… Pue… No.

182. Candelaria: Es que ya (sobre las palabras de María) hemos hecho algo mal.

María (ítem 183) señala la variación de la cantidad Ft, representada en la fila 3 y producto de aplicar la relación $Ft = At + T$[19], como causa del error. Las razones que ofrece ponen de manifiesto que para ella es necesario que sea constante una de las dos expresiones de una misma cantidad que se consideran iguales (ítem 191). La justificación (ítem 194) parece centrarse en la dificultad de que se produzca una coincidencia de los valores de dos secuencias numéricas que varían

183. María: Sí, porque esta cantidad (sitúa el cursor sobre B3)…

185. María: … Esta cantidad ([…]) no puede cambiar.

187. Candelaria: No, no. Tiene que cambiar.

188. María: No.

190. Candelaria: Es que no sabemos cuántos ([…]) años tienen que pasar, entonces tienes que cambiar eso.

191. María: Pero hay una cantidad que no puede cambiar para que sean igual.

[18] La fórmula que escribe María reflejaría la relación de recurrencia incorrecta $Ft^* = (Ft + T)\cdot V$, donde utilizamos el asterisco para indicar que Ft^* se calcula a partir de un primer valor de Ft.

[19] Primero como expresión de una relación correcta y después como la generación de una progresión aritmética de diferencia uno.

simultáneamente. Dejando de lado este prejuicio cognitivo[20], se pone de manifiesto una falta de atención a las técnicas ofrecidas en la secuencia de enseñanza para la búsqueda de la coincidencia de valores en las filas que se igualaban en el paso 4 del MHC[21]. Otro factor que puede influir en esta tendencia es el éxito en la resolución de los problemas en los que una de las dos expresiones de la cantidad sobre la que se construía la comparación era un número y generaba una secuencia de valores iguales. En particular, los problemas donde la igualdad se construía sobre una relación que daba respuesta a la estructura conceptual total (en la secuencia de enseñanza, por ejemplo, *El problema de los deportistas*).

192. Candelaria: Pues ninguna de ésas es, porque tienen que cambiar las dos.

194. María: Hay una cantidad que no puede cambiar para que el número de abajo sea igual al de arriba, porque si no, nunca van a ser igual (mueve el cursor sobre las celdas G3 y G4).

Ante las dificultades que se han presentado, fundamentalmente como consecuencia de no representar la cantidad *T* en una celda, Candelaria (ítem 195) conduce la resolución hacia la creación de las líneas de vida de Adrián y Tania[22], un método que les permitirá resolver el problema sin emplear explícitamente *T*[23]. María (ítems 201 y 206) introduce las fórmulas =B1+1 y =B2+1 en C1 y C2, respectivamente, que permitirán generar dos progresiones aritméticas de diferencia uno que expresarán las líneas de vida de

195. Candelaria: Ya, pero es que una… Porque, a ver, no sabemos los años que tienen que pasar ([…]), entonces estamos probando los años que tienen que pasar ([…]). Entonces por qué no ([…])… A ver… Espera… Porque luego hacemos esto (señala con la mano a la pantalla) arriba, o sea, aquí, quince (en la celda B1 se muestra 15) más uno más dos más tr… tal…

196. María: ¿Aquí (sitúa la celda activa en C1)?

197. Candelaria: Y cuarenta (en la celda B2 vemos un 40) más uno, más tal… que es lo que (María introduce [C1 =…; …]) hemos…

201. Candelaria: Sí… Y luego… Es que no sé,

[20] Sin profundizar en exceso lo podríamos considerar un error de disponibilidad (Shaughnessy, 1981) en el que se hacen predicciones basándose en la imposibilidad de construir ejemplos.

[21] Recordemos que se indicó, por ejemplo, que antes de alcanzar la coincidencia de valores en las dos filas que se han igualado, se observa que los números de una fila son mayores que los de la otra y que esta relación se invierte tras alcanzar la concordancia (véase capítulo 4).

[22] Durante la secuencia de enseñanza, esta pareja utilizó esta misma estrategia en la resolución de los problemas *Juan, su padre y su hijo* y *Paz, Petra y su madre*, ambos de la subfamilia edades. También utilizaron la generación de progresiones aritméticas de diferencia 0,1 y 1 para varias cantidades desconocidas en los problemas *Los yogures* y *El concierto*, respectivamente (ver anexo D).

[23] Esto seria consecuencia de: 1) El tiempo transcurrido se puede expresar como una progresión aritmética de diferencia uno. 2) Las variables edad final y el tiempo transcurrido están relacionadas de manera aditiva, siendo el tercer componente de la relación el valor conocido de la edad actual. 3) La edad final también será una progresión aritmética con diferencia uno, pues al añadir un valor constante a una progresión aritmética, se mantiene la diferencia. Sin embargo, no ponemos en la mente de las resolutoras este razonamiento; más bien nos inclinamos a pensar que expresan un conocimiento proporcionado por la experiencia.

los protagonistas del problema. Esto supone no distinguir entre las cantidades *Aa-Fa* y *At-Ft* y considerar sendas variables: una que representa la edad de Adrián y otra que representa la edad de Tania. Las líneas de vida ponen en juego un conocimiento de la realidad respecto al paso del tiempo y las edades de las personas. Tanto en el entorno de la hoja de cálculo como en lápiz y papel, su uso, en este problema, implica sustituir la necesidad de operar con cantidades desconocidas por calcular de forma repetida la edad del año que viene conociendo la edad del año anterior. Esto supone ir de lo conocido hacia lo desconocido, un rasgo típico del razonamiento aritmético.

porque… Y cuand… Y luego ([…]) el otro igual y, cuando ésos dos sean iguales ([…])… Porque pondremos be ([…]), o sea (María pulsa "Enter" e introduce [C1 =B1+1; 16] usando el teclado), ése será (María introduce [C2 =…; …])… Espérate que lo piense…

206. (María introduce [C2 =B2+1; 41] usando el teclado.)

◇	A	B	C	D
1	ADRIAN	15	=B1+1	
2	TANIA	40	=B2+1	
3	TANIA DENTRO DE X AÑOS	=B2+1	=B3+1	=C3+1
4	DOBLE EDAD ADRIAN DENTRO DE X AÑOS	=(B1+1)*2	=(B4+1)	=(C4+1)

Figura 7. Contenido de las celdas después del ítem 206.

En el ítem 210, María aclara que las cantidades representadas en 1 y 2 no tienen que ser iguales. Candelaria (ítem 211) le da la razón e indica (ítem 214) que las que deberían ser iguales son las dos representaciones de *Ft* presentes en las filas 3 y 4. También parece ser consciente de que las fórmulas contenidas (ver Figura 7) en las filas 3 y 4, a partir de la columna C, no apuntan a las celdas correspondientes de las filas 1 y 2 ("tenemos que cambiar lo que pone abajo para que… Tania cambie", ítem 214). Sin embargo, Candelaria (ítem 217) indica que bastará con buscar en qué columna el valor de la fila 2 es el doble que el de la fila 1.

Hemos de señalar que María (ítem 218) no muestra rechazo[24] ante el hecho de que

208. María: ¿Voy alargando?

209. Candelaria: Sí. Y ahora, a ver, tenemos que…

210. María: No, éste (mueve el cursor sobre C1 y C2) no va a ser igual, ¡eh!, porque esto no es… (Bajo la voz de Candelaria. Inaudible.)

211. Candelaria: Ya, ya, no tiene que ser igual ésos dos…

212. (María estira C1.)

213. María: ¡Ah!, vale.

214. Candelaria: Tienen que ser igual los de abajo; pero tenemos que cambiar lo que pone abajo para que… Tania cambie.

215. (María llega hasta [EK1 =EJ1+1; 154].)

217. Candelaria: O sea, es que ésos no van a ser iguales. Esos…Ya, ya, ya[[25]] (María llega hasta [EW2 =EV2+1; 191])… Ésos habrá una… una (María mueve la ventana al inicio) vez que la edad de Tania sea (María mueve la ventana hacia la

[24] Recordemos que en este mismo problema (ítems 183-194), María se mostraba reticente a aceptar la posibilidad de que coincidieran los valores de dos secuencias numéricas cuando variaban simultáneamente.

varíen simultáneamente las secuencias en las que se busca la coincidencia de valores (aunque el doble de los valores presentes en la fila 2 no esté representado de manera explícita). Quizá este cambio de actitud se deba a que ahora María consigue interpretar las secuencias generadas, como representaciones de estados posibles del mundo; mientras que el hecho de que antes se empleará la relación $Ft = V \cdot Fa$, para generar una de las dos secuencias, introducía un conocimiento no habitual.

derecha hasta que inicia en la columna C) el doble que la de este ti… de Adrián.

218. María: ¿Entonces ahora qué…? ¡Ah!, vale, vale. Vamos a buscar la edad, ¿no?

219. Candelaria: Pero espera (María mueve la ventana hacia la derecha hasta que inicia en la columna D), esto (señala a las celdas F3 y F4 que pertenecen a las filas coloreadas) no hay que hacerle caso…

	K	L	M
1	24	25	26
2	49	50	51
3	50	51	52
4	50	52	54

Figura 8. Después del ítem 249.

Encuentran la columna (la columna L, ver Figura 8) en que la edad de Tania es el doble de la edad de Adrián, pero ofrecen como resultado del problema las edades futuras de cada protagonista (ítems 225-227) y no el tiempo transcurrido. El profesor (ítem 244) intenta que las estudiantes contesten a la pregunta del problema, pero vuelven a dar la misma respuesta (ítems 248-251).

Les ha faltado calcular el valor de la cantidad T para poder considerar que han resuelto el problema. Sin embargo, han realizado varios intentos de solución en la mayoría de los cuales se ha atendiendo, de algún modo[26], a las relaciones correctas $Ft = V \cdot Fa$, $Ft = At + T$ y $Fa = Aa + T$, pero en ningún caso han utilizado el MHC.

224. (María mueve la ventana hasta que se inicia en la columna H.)

225. Candelaria: Pues sí (señala con la mano a L1 y L2 que contienen 25 y 50, respectivamente), mira. Aquí está.

226. María: ¡Ah!, vale. Ahí está.

227. Candelaria: Veinticinco y cincuenta.

244. Profesor: ¿Sabéis cuál es el resultado?

245. Candelaria: Sí ([…]).

246. Profesor: ¿… ya?

248. Candelaria: Ahí está.

249. (María colorea las celdas L1 y L2 en las que se muestran los valores 25 y 50, respectivamente.)

250. María: Ya está.

251. Candelaria: Ya está.

[25] Candelaria interrumpe su discurso indicando a María que detenga la generación de la línea de vida antes de alcanzar el límite derecho de la hoja de cálculo. Posiblemente Candelaria entiende que la edad de una persona tiene unos límites en la realidad. Esto pone de manifiesto que el conocimiento del contexto donde se plantea el problema sirve a Candelaria como elemento de control de la secuencia de posibles valores.

[26] Hacemos uso de esta locución adverbial para señalar que la información contenida en las relaciones ha dirigido normalmente la resolución, pero que no siempre se han considerado textualmente como cantidades y relaciones entre cantidades, sino que también se han considerado como variables y funciones.

6.5.1.2. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema "Las ovejas"[27]

Tras leer el enunciado construyen nombres y asignan celdas a las cantidades *Cg*, *Cp* y *N* e introducen (ítem 13) el valor de la cantidad conocida *N*. Los nombres que construyen para las cantidades *Cg* y *Cp* se diferencian mediante un código alfabético que no hace referencia a si representan los corrales que contienen más o menos ovejas.

8. (María introduce [A1; CORRAL…].)

9. María: Corral a (María introduce [A1; CORRAL A] […]) y corral be (María introduce [A2; CORRAL B]). Mira ([…]), y luego ([…]) ponemos ([…])… eh…

10. Candelaria: Número ([…]) de ovejas totales.

11. María: … ovejas totales (sobre la voz de Candelaria)… (María introduce [A3; OVEJAS] […])… Ovejas, ¿hay?

12. Candelaria: Ciento ([…]) ochenta.

13. (María introduce [B3; 180].)

Candelaria (ítems 15 y 17) propone una fórmula para calcular la cantidad que han llamado "CORRAL A" que supondría emplear las relaciones $Cg = Nm + Em$, $N = C{\cdot}Nm$ y $Mgp = C{\cdot}Em$. Es decir, tres de las cuatro relaciones necesarias de la lectura (aritmética) que hemos llamado C (ver apartado 6.4.2.). María (ítem 16) plantea añadir 30, en lugar de 15, lo que implicaría sustituir la relación $Cg = Nm + Em$ por la incorrecta $Cg = Nm + Mgp$ y no emplear $Mgp = C{\cdot}Em$ o considerar que *Em* toma el valor 30 y emplear $Cg = Nm + Em$. Candelaria (ítem 20) inicia la explicación de por qué se debe sumar 15, pero no consigue estructurarla. En el ítem 24, señala que el total de ovejas se divide entre dos, pero no va más allá. Argumentos tan pobres no convencen a María que se mantiene en sus trece y la discusión se encona (ítems 26 y 27), dejando de lado la pretensión de persuadir. Candelaria (ítem 32) comienza a dar forma a una reflexión que convencerá a María y en el ítem 34 da una explicación precisa: "Les sumas [(…)] a una quince y a otra se la restas para que haya treinta de diferencia […]".

14. María: Vale. Ponemos ([…]) aquí (sitúa la celda activa en B1), en el corral a ([…]), hay ([…])… Eh…

15. Candelaria: El ciento ochenta entre dos ([…])…

16. María: Más treinta ([…]).

17. Candelaria: Más quince.

18. María: Más treinta.

20. Candelaria: No. Más quince, porque en un ([…])… Hay treinta de diferencia.

21. María: Claro, pero en uno ([…]) tiene treinta más…

22. Candelaria: No, no.

23. María: … Y en el otro treinta menos. (Sobre la voz de Candelaria.)

24. Candelaria: No ([…]), porque si (señala con la mano a la pantalla y María mira a la pantalla) es ciento ochenta entre dos, lo partes, o sea, te da la mitad justa.

25. María: Menos treinta ([…]).

26. Candelaria: No, no (negando con una mano […]).

27. María: Que sí (asintiendo con la cabeza).

32. Candelaria: Ya lo sé ([…]); pero tienes que restar la mitad ([…]), porque a una se la restas y a otra se la sumas la mitad ([…]). Porque si no, no te daría.

[27] El problema *Las ovejas* es isomorfo al problema *Las naranjas* que se planteó en el cuestionario 1. En aquella ocasión ambas estudiantes lo resolvieron correctamente. Candelaria (sujeto 6) hizo una lectura algebraica (la que etiquetamos como A) y María (sujeto 17) hizo una lectura aritmética (la que etiquetamos como B) en la que no era necesario utilizar la cantidad *Em* (la mitad del exceso del contenido de un saco de naranjas respecto al otro).

33. María: Claro (sobre las palabras finales de Candelaria)… Entonces…

34. Candelaria: Les sumas ([…]) a una quince y a otra se la restas para que haya treinta de diferencia ([…]) y sea de ciento ochenta el total ([…]).

35. María: Vale. Entonces, a ver ([…])…

María (ítems 36 y 37) se dispone a introducir la fórmula, pero, aunque ha aceptado usar 15 en lugar de 30, no parece saber las operaciones y cantidades que debe utilizar. Candelaria (ítem 38) verbaliza una fórmula en la que hay una referencia a una celda que contiene un valor conocido y el resto son valores de cantidades a las que no les crea un espacio en la hoja de cálculo o proceden de cálculos mentales. Así, "dos" sería el valor de la cantidad *C* y "quince", el de *Em* que se obtiene de la relación $Mgp = C{\cdot}Em$. Al final del ítem 38, Candelaria duda entre sumar o restar 15, pues no sabe si en el "CORRAL A" hay más o menos ovejas, como consecuencia de una construcción de nombres poco afortunada. María (ítem 39) le indica que eso da igual y Candelaria (ítem 40) decide restar 15 y con ello calcular *Cp*. En definitiva, para construir la fórmula se han empleado las relaciones correctas $Nm = Em + Cp$, $N = C{\cdot}Nm$ y $Mgp = C{\cdot}Em$.

36. (María introduce [B1 =…; …].)

37. (María mira a Candelaria y hace un gesto con el que solicita información. […])

38. Candelaria: Eh… A ver ([…])… Be ([…]) tres (María introduce [B1 =B3…; …]) entre dos (María introduce [B1 =B3/2…; …] […]) menos ([…]) quince ([…])… ¡Más…! ¿A ver en cuál hay más ([…])…? Hay igual ([…]).

39. María: Es que ([…]) no se sabe… Da igual

40. Candelaria: Pues menos quince mismo.

41. María: Menos quince (María introduce [B1 =B3/2-15; 75] usando el teclado) y luego abajo más quince, ¿no?

42. Candelaria: Sí.

El cálculo del valor asociado a *Cg* lo lleva a cabo María (ítems 43-47) utilizando una fórmula similar a la anterior sólo que en lugar de restar, suma. Nuevamente, se realizan cálculos mentales y la utilización de más de una operación en la fórmula evita tener que crea un espacio, y posiblemente un nombre, para las cantidades *Nm* y *Em* (ver Figura 9). En definitiva, al introducir la fórmula =B3/2+15 en la celda B2 se emplean las relaciones correctas $Cg = Nm + Em$, $N = C{\cdot}Nm$ y $Mgp = C{\cdot}Em$.

43. (María introduce [B2 =…; …].)

44. María: Entonces, be…

45. (María introduce [B2 =B…; …].)

46. Candelaria: Tres.

47. María: … tres (María dice esto al tiempo que Candelaria e inmediatamente introduce [B2 =B3…; …]) entre dos (María introduce [B2 =B3/2…; …]) más quince (María introduce [B2 =B3/2+15; 105] usando el teclado).

	A	B
1	CORRAL A	=B3/2-15
2	CORRAL B	=B3/2+15
3	OVEJAS	180

Figura 9. Contenido de las celdas después del ítem 47.

Candelaria (ítem 48) da por acabado el problema, pero María (ítem 49) decide comprobar el resultado. Para ello realiza un cálculo mental en el que emplea la relación $Cg = Mgp + Cp$, que no han utilizado para alcanzar el resultado. Tras algunas dudas llegan a la conclusión (ítems 52 y 53) de que sí que se cumple la condición y dan por concluida la resolución.

48. Candelaria: Y ya… Sí… Vale ([…])… Ya está, ¿no ([…])…? Supongo.

49. María: ¿Cuántas ovejas hay en cada corral (leyendo el enunciado)…? (María mira al ordenador y se observa que Candelaria mira a la pantalla) Se llevan quin… treinta de di…

50. Candelaria: Sí… No sé.

51. María: No.

52. Candelaria: Sí… Sí. Setenta… setenta y cinco… O sea…

53. María: ¡Ah, sí (Candelaria mira a la hoja)…! Vale. Sí, sí (asiente con la cabeza).

En definitiva, resuelven el problema de manera aritmética y de forma correcta, comprobando el resultado con la relación $Cg = Mgp + Cp$, que no habían empleado para resolverlo. Las operaciones que han utilizado podemos interpretarlas como una representación de las relaciones entre cantidades $Cg = Nm + Em$, $Nm = Em + Cp$, $N = C·Nm$ y $Mgp = C·Em$ (véase lectura C en el apartado 6.4.2.).

6.5.1.3. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema "Las actividades deportivas"

Tras la lectura, coinciden en que ya han hecho el problema. Sin embargo, este problema no se había planteado previamente. Posiblemente lo confunden con *El problema de los deportistas* propuesto en la secuencia de enseñanza[28].

4. María: Éste ya lo hemos hecho.

5. Candelaria: ¡Ostras, es verdad!

Dan nombres y asignan celdas de forma implícita a las cantidades T, F, N, B y R. Sin embargo, omiten representar las cantidades conocidas Vnf, Mbf y Mrb que se usan para comparar unas cantidades desconocidas con otras.

9. María: Personas totales ([…])… Personas total.

10. (María, al tiempo que habla, introduce [A1; PERSONAS TOTAL].)

13. María: En ([…]) nata …

14. Candelaria: En fútbol ([…])… Pon fútbol ([…])…

[28] Ambos problemas comparten el contexto de la situación planteada, pero no son isomorfos. No obstante, al representar mediante grafos las lecturas de estos problemas, las únicas empleadas en el estudio, se observa que el grafo de *El problema de los deportistas* es un subgrafo del problema *Las actividades deportivas*.

15. (María introduce [A2; FUTBOL].)

16. María: Natación (María introduce [A3; NATACION]).

17. Candelaria: Y baloncesto. Creo…

18. María: Y rugby.

19. Candelaria: Y rugby (a la vez que su compañera).

20. María: Fútbol, natación (María introduce [A4; BASKET] y […]) baloncesto y rugby (María introduce [A5; RUGBY]).

24. María: Personas en total ([…])…

25. Candelaria: Personas total ([…]) son mil trescientas setenta ([…]) y cinco.

26. (María introduce [B1; 1375].)

Omiten la identificación explícita de la cantidad de referencia e inician la construcción de fórmulas. Candelaria distingue en el enunciado las relaciones $F = N \cdot Vnf$ (ítem 29), $B = F + Mbf$ (ítem 35) y $R = B + Mrb$ (ítem 40). María las verbaliza como fórmulas de la hoja de cálculo, refiriéndose a la cantidades N, F y B mediante la posición de las celdas que las representan (B3, B2 y B4, respectivamente). Cuando María construye las fórmulas (ver Figura 10), introduce la referencia a las celdas B2, B3 y B4 mediante el teclado.

29. Candelaria: En ([…]) fútbol hay dos veces más personas… o sea, el doble que en natación.

31. María: Vale. Be tres por dos.

32. (María introduce [B2 =B3*2; 0] usando el teclado.)

35. Candelaria: En baloncesto. En baloncesto hay cuarenta… cuarenta y tres ([…]) personas más que en fútbol ([…]).

36. María: Vale. Be dos más cuarenta y tres.

38. (María introduce [B4 =B…; …].)

39. María: Be dos (María introduce [B4 =B2…; …]) más cuarenta y tres (María introduce [B4 =B2+43…; …]), ¿no (María introduce [B4 =B2+43; 43] usando el teclado)…? ¿Y en rugby ([…])?

40. Candelaria: Eh… Veintinueve personas más ([…])…

41. María: Más que en baloncesto (completando la frase a Candelaria)… Pues be cuatro (María introduce [B5 =B4…; …])…

42. Candelaria: Más veintinueve (María introduce [B5 =B4+29; 72] usando el teclado). Vale.

	A	B
1	PERSONAS TOTAL	1375
2	FUTBOL	=B3*2
3	NATACION	
4	BASKET	=B2+43
5	RUGBY	=B4+29

Figura 10. Contenido de las celdas después del ítem 42.

María (ítem 43) pretende organizar el

43. María: ¿Y ([…]) qué pregunta?

proceso de resolución identificando aquello por lo que pregunta el problema. Sin embargo, Candelaria (ítem 44) considera más oportuno dar respuesta al paso 4 del MHC (o del MC) para avanzar en la resolución del problema. Así, en el ítem 46, Candelaria contesta a su propia pregunta generando la necesidad de crear una celda que contenga el resultado de "la suma de todos". El nombre que construyen (ítems 50 y 56) para esta cantidad (la segunda representación de la cantidad T) hace referencia a la operación que se debe utilizar para obtenerla. María, tras escribir el nombre en A6, verbaliza (ítem 56) la fórmula que va a introducir, refiriéndose a las cantidades desconocidas F, N, B y R por la posición de la celda que las representa y escribe la fórmula, empleando el teclado para referirse a las celdas que son argumento. La fórmula que introduce refleja la relación $T = F + B + N + R$ (ver Figura 11).

En definitiva, han conseguido plasmar mediante fórmulas, y de una manera correcta, las relaciones necesarias y suficientes $T = F + B + N + R$, $F = N{\cdot}Vnf$, $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$, asignando de manera implícita el papel de cantidad de referencia a la cantidad desconocida N y estableciendo la comparación sobre dos expresiones distintas de la cantidad T. Esto supone haber realizado una lectura algebraica del problema y haber alcanzado el paso 4 del MHC[29] sin cometer ningún error.

44. Candelaria: Pregunta: cuántas personas ([…]) hay en cada actividad… Entonces… ya tenemos, a ver, dos que tienen que ser iguales.

46. Candelaria: La suma de todos…

47. María: Hay que poner: la suma de todos ([…]) tiene que ser (aumentando el volumen para acallar a su compañera y sobre la voz de ésta)…

48. Candelaria: … y el total de personas. (Al tiempo que habla su compañera.)

49. María: Vale. (Al tiempo que habla su compañera.)

50. Candelaria: Pues pon ahí (María acaba de situar la celda activa en B6): suma. Y ya está.

51. (María introduce [A6; SUMA…].)

56. María: Vale. Suma total (al tiempo que introduce [A6; SUMA TOTAL]). Eh… Be dos más be tres más be cuatro más be cinco… Be dos (María introduce [B6 =B2…; …]) más (María introduce [B6 =B2+…; …]) be tres (María introduce [B6 =B2+B3…; …]) más (María introduce [B6 =B2+B3+…; …]) be cuatro (María introduce [B6 =B2+B3+B4…; …]) más (María introduce [B6 =B2+B3+B4+…; …]) be cinco (María introduce [B6 =B2+B3+B4+B5; 115] usando el teclado).

◇	A	B
1	PERSONAS TOTAL	1375
2	FUTBOL	=B3*2
3	NATACION	
4	BASKET	=B2+43
5	RUGBY	=B4+29
6	SUMA TOTAL	=B2+B3+B4+B5

Figura 11. Contenido de las celdas tras el ítem 56.

María (ítem 59) propone generar una progresión aritmética de diferencia uno a

59. María: Y esto es más uno, ¿no?

[29] Aunque no han señalado explícitamente en la hoja de cálculo las cantidades que deben ser iguales, Candelaria (ítems 46 y 48) sí que lo ha manifestado verbalmente.

partir del valor situado en la celda B6 que representa una de las dos expresiones de *T*, la que se obtiene al aplicar que el todo es igual a la suma de las partes. Esto impediría la replicación de la relación $T = F + B + N + R$ plasmada en B6. Candelaria (ítem 61) se opone y justifica su rechazo en que al arrastrar las celdas que representan a *F*, *B*, *N* y *R* se debe sumar automáticamente todo. María (ítem 62) no parece convencida; pero consiente en arrastrar la celda B6 hasta la celda CD6, obteniendo una secuencia uniforme de ceros (excepto en B6), consecuencia de que las celdas que se suman en las filas 2, 3, 4 y 5 están vacías. Esto lleva a María (ítem 65) a reprochar a Candelaria la decisión adoptada. En el ítem 66, Candelaria explica que todo se arreglará cuando se rellenen las celdas de las filas 2, 3, 4 y 5. Esto pone de manifiesto que Candelaria es capaz de entender el efecto que tendrá la modificación del valor presente en las celdas argumento sobre el resultado de una fórmula, mientras que María valora la fórmula a partir de los resultados provisionales que se ofrecen.

60. (María introduce [C6 =…; …].)

61. Candelaria: No, no, no ([…]), porque (señala con la mano a la pantalla […]) en cuanto alarguemos ésas (mueve la mano de izquierda a derecha)… Si (María borra C6) alargamos ésas (mueve la mano de izquierda a derecha), se sumaría (sigue señalando a la pantalla y mueve la mano de arriba a abajo) todo…

62. María: ¿Seguro?

63. Candelaria: Sí, porque no será (María estira B6)… Bueno no. Al… Sí, sí.

64. (María llega hasta [CD6 =CD2+CD3+CD4+CD5; 0].)

65. María: ¿Ves (al tiempo que habla Candelaria)?

66. Candelaria: Sí. No, no. Está bien, porque en cuanto pongamos (mueve la mano de arriba a abajo mientras señala a la columna BN) aquí algo ([…])… Ahora, alarga las demás.

Al final del ítem 66, Candelaria invita a María a que *alargue las demás*. María estira de la celda B2 hasta CX2, pero Candelaria cambia de opinión y apunta: “Pero habrá que poner más uno” (ítem 70). Candelaria (ítem 66) había sabido explicar la razón por la que debía mantenerse el arrastre de B6 con unos argumentos sólidos y correctos. Sin embargo, ahora cambia de opinión por lo que respecta a la copia y pegado de la celda B2. Proponemos dos explicaciones no excluyentes: 1) Una falta de comprensión del papel que desempeña la cantidad de referencia en los pasos tercero y quinto del MHC[30]. 2) Se importa una

67. María: ¿Éstas…? ¿Ésta (sitúa el cursor sobre B2)?

68. Candelaria: Ésa.

69. (María estira B2.)

70. Candelaria: Ah, no. Pero habrá que poner más uno, (María llega hasta [CX2 =CX3*2; 0]). En ésa sí.

[30] Las fórmulas de la filas 2, 4, 5 y 6 dependen de los valores presentes en la fila 3, donde se halla la celda de referencia. Mientras no se genere una secuencia de posibles valores en la fila 3, la replicación de las celdas B2, B4, B5 y B6 producirá secuencias de valores constantes. No ser conscientes de este hecho, puede animar a introducir la variación de valores en las filas 2, 4, 5 y 6 mediante métodos idiosincrásicos.

forma de proceder que ha dado buen resultado en el problema *Adrián* cuando han generado las líneas de vida y que utilizaron sin buen fin en la secuencia de enseñanza[31].

Se sigue el plan y se generan progresiones aritméticas de diferencia uno en las filas que representan las cantidades desconocidas *F*, *N*, *B* y *R*. Esto producirá la pérdida de la relación $F = N \cdot Vnf$ entre los valores de las filas 2 y 3. Sin embargo, se mantiene la relación $B = F + Mbf$ entre los valores de las filas 2 y 4 y la relación $R = B + Mrb$ entre los valores de las filas 4 y 5 (ver Figura 12). Esto es debido a la conjunción de dos circunstancias de las que seguramente no serán conscientes las resolutoras. Por un lado tenemos que al generar varias progresiones aritméticas con igual distancia entre dos términos consecutivos, se conserva la diferencia existente entre los elementos iniciales de las secuencias. Por otro, a que los valores presentes en la celdas B4 y B5 se habían calculado atendiendo a las restricciones impuestas por las relaciones aditivas $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$.

74. (María introduce [C2 =B2+1; 1].)

75. Candelaria: Y ahora…

76. (María estira C2.)

77. María: Y en éstas, igual.

78. Candelaria: Sí.

79. (María llega hasta [DB2 =DA2+1; 104].)

82. María: Y aquí va: igual (María introduce [C3 =…; …]) be tres (María introduce [C3 =B3…; …]) más uno (María introduce [C3 =B3+1; 1] usando el teclado).

83. (María estira C3.)

84. (María llega hasta [DL3 =DK3+1; 114].)

87. María: Be cuatro (María introduce [C4 =B4+1; 44] usando el teclado)…

88. (María estira C4.)

89. Candelaria: Ya.

90. (María llega hasta [DV4 =DU4+1; 167].)

92. María: Y aquí ([…])… Be (María introduce [C5 =…; …])…

93. Candelaria: Cinco.

94. María: Be cinco (María introduce [C5 =B5…; …]) más uno (María introduce [C5 =B5+1; 73] usando el teclado).

95. (María estira C5.)

96. (María llega hasta [CR5 =CQ5+1; 166].)

	A	B	C	D	E
1	PERSONAS TOTAL	1375			
2	FUTBOL	0	1	2	3
3	NATACION		1	2	3
4	BASKET	43	44	45	46
5	RUGBY	72	73	74	75
6	SUMA TOTAL	115	119	123	127

Figura 12. Después del ítem 96.

Candelaria (ítem 98) parece dudar de la

97. María: ¿Está bien?

[31] Como ya comentamos en el análisis de la actuación de esta pareja en el problema *Adrián*, durante la secuencia de enseñanza resolvieron problemas utilizando el MHC de forma correcta. Sin embargo, se observó la generación de líneas de vida en algún problema de la subfamilia edades (como en *Juan, su padre y su hijo* o *Paz, Petra y su madre*), pero no en todos. También utilizaron la generación de progresiones aritméticas de diferencia 0,1 y 1 para varias cantidades desconocidas en los problemas *Los yogures* y *El concierto*, respectivamente.

validez del proceso seguido y propone estirar de B2, lo que supondría eliminar la progresión aritmética creada entre los ítems 74 y 79. Posiblemente el cambio de opinión se deba a que observa la coincidencia de valores en las filas 2 y 3 (ver Figura 12), cuando los valores provisionales de la cantidad *F* deberían ser el doble de los de la cantidad *N*. Sin embargo, mantiene las progresiones aritméticas generadas para las cantidades *B* y *R* en las filas 4 y 5, respectivamente. Quizá como consecuencia de que observa que existe una diferencia correcta de 43 unidades entre los valores de la fila 2 (donde se representa la cantidad *F*) y los de la fila 4 (donde se representa la cantidad *B*) y un diferencia correcta de 29 unidades entre los valores de la fila 4 y la fila 5 (donde se representa la cantidad *R*). Tras replicar la fórmula contenida en la celda B2 (ítems 99-103), desaparece la diferencia de 43 unidades entre los valores de las filas 2 y 4 (ver Figura 13), pero Candelaria no presta atención a este hecho.

De esta forma replicaron directamente las relaciones $T = F + B + N + R$ y $F = N{\cdot}Vnf$, indirectamente $R = B + Mrb$, al generar dos progresiones aritméticas independientes que respetaban la diferencia, y fallando al replicar indirectamente, de igual forma, $B = F + Mbf$.

98. Candelaria: Creo que… sí. No sé. Creo que está bien… No lo sé… Sí, sí. Lo que hay que hacer es la del fútbol (María estira CR5 hasta [DN5 =DM5+1; 188]); pero es que… ¡Ah!, no sé. Igual sí ([…]). Y la del fútbol, porque hay que arrastrarla desde aquí (señala con la mano a B2). Porque si no ([…])… Desde el (María sitúa la celda activa en B2 donde se observa un cero]) cero… Creo. No sé… A ver…

99. (María estira B2 hasta [D2 =D3*2; 4].)

100. (María estira D2.)

102. Candelaria: Para.

103. (María llega hasta [DP2 =DP3*2; 0].)

◇	A	B	C	D	E
1	PERSONAS TOTAL	1375			
2	FUTBOL	0	2	4	6
3	NATACION		1	2	3
4	BASKET	43	44	45	46
5	RUGBY	72	73	74	75
6	SUMA TOTAL	115	120	125	130

Figura 13. Después del ítem 103.

María (ítem 113) señala la igualdad de las dos expresiones de la cantidad *T* y colorea las filas 1 y 6 (ítems 114 y 117), tras lo que Candelaria (ítem 118) le invita a replicar el paso 4 para buscar la coincidencia de valores en las filas 1 y 6.

113. María: (Inaudible.)… O sea que no… Y en esto (hace clic en B1) tiene que ser igual…

114. (María colorea B1 y A1.)

115. Candelaria: A lo de abajo…

116. María: A la suma.

117. (María colorea B6 y A6.)

118. Candelaria: Pues ya está. Alárgalo (María

estira B6) y así lo vemos antes. O sea. Alarga…

◇	IS	IT	IU
1	1375	1375	1375
2	502	504	506
3	251	252	253
4	294	295	296
5	323	324	325
6	1370	1375	1380

Figura 14. Después del ítem 199.

Entre los ítems 120-162, extienden las secuencias sin alcanzar los límites de la hoja de cálculo y generando series de valores de distinta longitud, lo que les impide realizar comparaciones correctas entre las filas 1 y 6. Durante los ítems 162-196, llevan las secuencias hasta el límite derecho de la hoja de cálculo, que se halla en la columna IV. Candelaria (ítem 197) parecer observar la coincidencia de valores entre las celdas IT1 e IT6 (ver Figura 14). María (ítem 199) marca los valores presentes en IT2, IT3, IT4 e IT5 y dan por resuelto el problema (ítems 200 y 202) sin comprobar que los valores obtenidos verifiquen las restricciones impuestas en el enunciado.

En definitiva, resuelven el problema aplicando correctamente los cuatro primeros pasos del MHC, fallando en el quinto y omitiendo el sexto. Así, realizan una lectura algebraica del problema que lo reduce a las relaciones necesarias y suficientes $T = F + B + N + R$, $F = N{\cdot}Vnf$, $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$; construyen, correctamente, fórmulas que dan cuenta de estas relaciones, tomando implícitamente la cantidad N como cantidad de referencia, y plantean la comparación de dos expresiones de la cantidad T.

162. (María estira B2 hasta [IV2 =IV3*2; 0].)

166. (María estira C3.)

168. (María llega hasta [IV3 =IU3+1; 254].)

174. (María estira C4 hasta [IV4 =IU4+1; 297].)

178. (María estira C5 y llega hasta [IV5 =IU5+1; 326].)

184. (María estira C6.)

186. (María llega hasta [IV6 =IV2+IV3+IV4+IV5; 1385].)

196. (María estira BF1 y llega hasta [IV1; 1375].)

197. Candelaria: Vale. Ya está… (Inaudible.)

198. María: Lo pinto…

199. (María colorea IT5, IT4, IT3 e IT2.)

200. María: Ya está.

201. Profesor: ¿Ya está?

202. Candelaria: Sí.

6.5.1.4. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema "Los tres amigos"

Construyen nombres y asignan implícitamente una celda para las cantidades desconocidas L, J, R y T. Sin embargo, no se representan las cantidades Vlr y Mjl que sirven para comparar entre sí las cantidades desconocidas.

8. (María introduce [A1; LUIS].)

10. María: Luis ([…])…

11. Candelaria: Luis ganó veinticuatro…

12. María: … Juan (sobre las palabras de Candelaria).

13. (María introduce [A2; JUAN].)

15. Candelaria: Y… Roberto.

17. María: Roberto.

18. (María introduce [A3; ROBERTO].)

19. María: Y el dinero ([…]) ganado.

20. Candelaria: Sí. Total ([…]).

21. (María introduce [A4; € GANADO].)

Candelaria (ítem 25) verbaliza la relación $J = L + Mjl$ tal y como se ofrece en el enunciado. María (ítem 26), mientras construye la fórmula, se refiere a la cantidad desconocida J mediante la posición de la celda que se le ha asignado (B2) e introduce la referencia mediante el teclado.

25. Candelaria: Ganó (María introduce [B1 =…; …]) veinticuatro ([…]) euros menos que Juan… Es igual a (María introduce [B1 ==…; …])…

26. María: ¡Ay (María modifica [B1 =…; …])…! Be dos (María introduce [B1 =B2…; …]) menos (María introduce [B1 =B2-…; …]) veinticuatro (María introduce [B1 =B2-24; -24] usando el teclado)… Y Juan ([…])…

De igual modo, Candelaria (ítem 27) verbaliza la relación $R = L\cdot Vlr$ leyendo el enunciado (“Y [Luis] también ganó la décima parte de Roberto”, ítem 27); pero al mirar a la pantalla ambas parecen dudar. Posiblemente observan que la celda que representa a la cantidad L contiene otra fórmula y deben decidir entre duplicar la representación de dicha cantidad o invertir la fórmula que habían previsto para poder introducirla en la celda que representa a la cantidad R. Candelaria parece decantarse por la segunda opción (“O sea que Roberto… Roberto, Roberto…”, ítem 27), pero es María la que verbaliza la relación: primero en lenguaje natural (ítem 31) y después como fórmula de la hoja de cálculo (ítem 33). Tras introducir la fórmula (ítem 37), se observa que los valores provisionales de las cantidades L y R, presentes en B1 y B3, son números negativos (ver Figura 15), pero no manifiestan rechazo.

27. Candelaria: Juan ([…]) ganó… Y también ganó la décima parte de Roberto (Candelaria parece que lee del enunciado y al acabar ambas miran al ordenador). O sea que Roberto… Roberto, Roberto…

29. María: Ganó…

30. Candelaria: O sea, es igual […]).

31. María: Eh… por un diez ([…]).

32. Candelaria: Exacto.

33. María: O sea, be uno por diez.

34. (Candelaria asiente.)

35. (María introduce [B3 ==B1…; …].)

36. Candelaria: Cuidado, que has puesto dos iguales.

37. (María modifica [B3 =B1*10; -240] usando el teclado.)

38. Candelaria: Vale.

A continuación, introducen (ítems 39-43) el valor de la cantidad conocida T, representada en la celda B4, y deciden, sin que medie reflexión sobre la necesidad de establecer una igualdad, asignar una segunda celda para esta cantidad en la que introducirán (ítem 46) una segunda

39. María: ¿Y ([…]) el dinero ganado…?

41. Candelaria: Novecientos sesenta.

42. María: Novecientos sesenta (acompañando las palabras de Candelaria).

43. (María introduce [B4; 960].)

44. Candelaria: Entonces los euros ganados es

expresión de T obtenida a partir de la relación $T = L + J + R$. Vuelven a obtener un valor provisional negativo, en este caso para la cantidad T, ante el que no muestran disgusto (ver Figura 15).

igual a la suma de todo.

45. (María introduce [A5; SUMA].)

46. (María introduce [B5 =B1+B2+B3; -264] usando el teclado.)

Hasta este punto (ver Figura 15) han utilizado las relaciones necesarias y suficientes $T = L + J + R$, $R = L \cdot Vlr$ y $J = L + Mjl$ y han asignado dos celdas a la cantidad T en lo que podíamos considerar el establecimiento implícito de una igualdad. Sin embargo, no han identificado de forma explícita la cantidad de referencia que, en este caso, sería la cantidad J.

◇	A	B
1	LUIS	-24
2	JUAN	
3	ROBERTO	-240
4	€ GANADO	960
5	SUMA	-264

Figura 15. Después del ítem 46.

Se ponen de acuerdo (ver ítems 49 y 50) en que deben generar una progresión aritmética de diferencia uno a partir del valor contenido en la celda que representa la cantidad desconocida L. Entre los ítems 51 y 54, María introduce las fórmulas de recurrencia[32] que permitirán generar las secuencias aritméticas en las filas 1, 2 y 3 (ver Figura 16).

49. María: Y aquí (hace clic en C1) hay que poner más uno.

50. Candelaria: Sí. (Casi inaudible.)

51. (María introduce [C1 =B1+1; -23] usando el teclado.)

52. María: Aquí también.

53. (María introduce [C2 =B2+1; 1] usando el teclado.)

54. (María introduce [C3 =B3+1; -239] usando el teclado.)

◇	A	B	C
1	LUIS	=B2-24	=B1+1
2	JUAN		=B2+1
3	ROBERTO	=B1*10	=B3+1
4	€ GANADO	960	
5	SUMA	=B1+B2+B3	

Figura 16. Contenido de las celdas después del ítem 54.

Antes de iniciar la generación de las secuencias a partir de las fórmulas de recurrencia, María (ítem 55) señala las dos expresiones de la cantidad T que deben

55. (María colorea B4, A4, B5 y A5.)

56. María: Ahora arrastro…

57. Candelaria: Sí.

32 Observamos la misma actuación que tuvieron en el problema *Las actividades deportivas* y no consideramos causas distintas a las señaladas en aquel momento. No obstante, hemos de indicar que, posiblemente, el éxito que creen haber alcanzado en la resolución del problema *Las actividades deportivas* les puede conducir a no reflexionar sobre la oportunidad del uso de progresiones aritméticas y sobre los valores provisionales que generan.

compararse, dando cuenta de manera explícita del paso 4 del MHC. María (ítems 60-66) copia y pega por arrastre el contenido de las celdas C1, C2 y C3 produciendo progresiones aritméticas de diferencia uno en las filas 1, 2 y 3. Parece (ítem 69) dispuesta a hacer lo mismo en la fila 4, pero Candelaria le indica que debe estirar de las celdas que representan a la cantidad *T* sin "poner nada" (ítem 71). Es decir, Candelaria repite el error cometido en el paso 5 del MHC en el problema anterior: replica el paso 4, pero no el 3.

Las acciones anteriores conducen (ver Figura 17) a la producción de secuencias numéricas que en algunos casos mantienen las restricciones del problema (los números presentes en las filas 1 y 2 conservan una diferencia de 24 unidades), pero en otros no (los números presentes en la fila 3 no son diez veces los de la fila 1). En consecuencia, replican directamente la relación $T = L + J + R$, indirectamente $J = L + Mjl$, pero no se conserva $R = L \cdot Vlr$. De momento, Candelaria no observa[33] la violación de la relación multiplicativa en los valores de las filas 1 y 3.

58. María: Desde aquí (sitúa la celda activa en C1), ¿no?

59. Candelaria: Sí.

60. (María estira C1 y llega hasta [IV1 =IU1+1; 230].)

62. (María estira C2.)

64. (María llega hasta [IV2 =IU2+1; 254].)

66. (María estira C3 y llega hasta [IV3 =IU3+1; 14].)

68. (María sitúa la celda activa en B4.)

69. María: ¿Aquí hay que poner (sitúa el cursor sobre C4)…?

70. (María estira B4.)

71. Candelaria: Ahí no hay que poner nada.

72. María: ¿Y en el de abajo tampoco?

73. Candelaria: En el de abajo tampoco. O sea, arrastrarlo ([…])…

75. (María llega hasta [IV4; 960].)

77. María: Aquí (sitúa la celda activa en B5), nada, ¿no?

78. Candelaria: Ahí, arrastrarlo ([…]) y ya está.

79. (María estira B5 y llega hasta [IV5 =IV1+IV2+IV3; 498].)

	A	B	C	D
1	LUIS	-24	-23	-22
2	JUAN		1	2
3	ROBERTO	-240	-239	-238
4	€ GANADO	960	960	960
5	SUMA	-264	-261	-258

Figura 17. Después de ítem 79.

En los ítems 85 y 89, indican que la secuencia obtenida en la fila 5, donde se encuentra la segunda expresión de *T*, fruto de la relación $T = L + J + R$, no alcanza el valor 960 (sólo llega hasta el valor 498 en la celda IV5, véase ítem 79). Candelaria (ítems 90 y 92) supone que han hecho algo mal y parece identificar el error en la fila 3, donde se representa a la cantidad *R*. Posiblemente, observa (ítem 92) que el valor presente en IR3 no es diez veces el

85. Candelaria: Se nos queda corta ([…]).

89. María: No queda ([…]) suficiente hoja ([…]).

90. Candelaria: O sea, es que éste (señala con la mano a IR3) está mal. Porque éste… éste es que gana…

91. María: ¿Éste (sitúa la celda activa en IR2)?

92. Candelaria: … la décima… O sea, no el… el último (María sitúa la celda activa en IR3)… Si gana el… el… o sea si gana diez veces más que el

[33] Recordemos que en el problema anterior (ítem 98), Candelaria sustituyó una progresión aritmética por la replicación de una fórmula que expresaba una relación multiplicativa, probablemente, al observar que no la cumplían las secuencias de números presentes en las filas.

que está en IR1 y que por lo tanto no cumplen la relación $R = L \cdot Vlr$, pero no lo aclara. En el ítem 95, Candelaria duda a la hora de calcular diez por menos veinticuatro y le traslada la decisión a María. Ésta (ítem 98) aprovecha su turno de palabra para proponer un apaño que consiste en modificar la fórmula presente en B1 dividiéndola entre B3. Esto supondría emplear la relación incorrecta $L = (J - Mjl)/R$ como una fusión arbitraria de $R = L \cdot Vlr$ y $J = L + Mjl$. Candelaria (ítem 99) se opone al plan y justifica su rechazo en que de esta forma no se le asignaría fórmula a la cantidad R.

primero… Claro.

95. Candelaria: Sí, porque se supone que (María mueve la ventana al inicio)… se supone que ([…]) Roberto (María sitúa la celda activa en B3) gana diez veces más… O sea, entonces ([…]) como son números negativos… Si gana diez veces más ([…]) que menos veinticuatro… A ver (María sitúa la celda activa en B1)… Tiene que ser… Tú como tienes la mente tan abierta de luces…

98. María: Es que esto hay que poner eso menos eso (sitúa el cursor sobre el fragmento "=B2-24" presente en la barra de referencia) entre be ([…]) tres. Y aquí (sitúa el cursor sobre B3) ponemos ([…]) que eso ([…])…

99. Candelaria: No, es que ([…]) entonces a Roberto no le das ningún dato.

Candelaria (ítem 101) vuelve a insistir sobre la necesidad de que los valores de la fila 3 sean diez veces los de la fila 1 y sugiere avanzar (ítem 107) hasta donde no haya números negativos en la fila 3, llegando a la columna IH, donde IH3 contiene el valor cero (ver celdas IG3 e IH3 en la Figura 18). Posiblemente, considera que sólo tiene importancia corregir la relación $R = L \cdot Vlr$ entre las filas 1 y 3 a partir de donde se observan valores positivos, porque no tiene sentido un resultado negativo en un problema de reparto de dinero. En conclusión, ha encontrado el error, pero en lugar de subsanarlo de raíz (desde la columna C), decide hacerlo desde la columna donde son positivos los valores provisionales incorrectos de las cantidades puestas en juego. Así, Candelaria (ítem 111) dirige a María en la construcción de la fórmula que plasma la relación $R = L \cdot Vlr$ en la celda II3 (ver Figura 18), refiriéndose a la cantidad desconocida L por la posición de la celda II1 que la representa. En el ítem 117, parece ponerse de manifiesto que Candelaria hace una comprobación mental de que la diferencia entre los valores de las filas 1 y 2 es de 24 ("Ya está restado"), lo que nos vuelve a indicar que intenta mantener las restricciones del problema, aunque sólo lo logre de manera parcial.

101. Candelaria: A ver… Roberto que tiene ([…]) diez veces ([…])…

102. María: (Inaudible bajo la voz de Candelaria.)

103. Candelaria: … más que…

104. María: Aquí se multiplicaba, porque ([…])… (Inaudible.)

107. Candelaria: Ya lo sé. Entonces tenemos que hacer… A ver, pon… vete a donde ya no hay números negativos (señala con la mano hacia la derecha)… Empezamos desde ahí y ya está.

108. (María mueve la ventana hacia la derecha hasta que se inicia en la columna IE. A partir de la columna IH dejan de haber valores negativos en la fila 3.)

109. Candelaria: Vale. Pues si es diez veces más (señala con la mano a la pantalla) que doscientos diecisiete (la celda II1, que representa a la cantidad L contiene el valor 217), multiplícalo y ya está.

110. María: Dos m… Dos mil ciento setenta ([…]).

111. Candelaria: Pues ya está (señala con la mano a la pantalla […]). Multiplícalo… o sea, pon… en vez de (María introduce [II3 =…; …]) se… I i… o sea, i i uno…

112. (María introduce [II3 =II1…; …].)

113. María: Por diez.

114. (María introduce [II3 =II1*10; 2170] usando el teclado.)

115. Candelaria: Espérate… Ya está.

116. María: ¿Ya está, no?

117. Candelaria: Ya está restado… Ya se ha

restado.

	IG	IH	II	IJ
1	215	216	217	218
2	239	240	241	242
3	-1	0	2170	2171
4	960	960	960	960
5	453	456	2628	2631

Figura 18. Después del ítem 114.

Candelaria (ítem 119) parece convencida que de esta forma se ha solucionado el error, lo que nos hace sospechar que al introducir en II3 la fórmula que reflejaba la relación multiplicativa sólo estaba intentando aumentar la suma que se calcula en la fila 5 y no tanto dar respuesta a la exigencia de que hubiera una relación multiplicativa entre las filas 1 y 3. De hecho, al final del ítem 119, muestra sorpresa e indica a María (ítem 121) que desplace la ventana activa hacia la izquierda. Quizá, observa el valor 2628, que toma la cantidad *T* en la celda II5 (ver Figura 18), y concluye que la coincidencia de los valores de las dos filas que representan a la cantidad *T* (la 4 y la 5) se debe dar antes de esta columna. Así, se repite la construcción de una fórmula que refleja la relación *R* = *L*·*Vlr* en las celdas HL3 (ítem 126) y AA3 (ítem 128) buscando valores provisionales de *R*, y en consecuencia de *T*, más pequeños. En definitiva, la fila 3 ofrece una secuencia discontinua de valores, pues todas las celdas de la fila 3 incluyen una fórmula de recurrencia excepto las celdas B3, AA3, HL3 e II3 que contienen una fórmula que da cuenta de la relación *R* = *L*·*Vlr*. El proceso seguido entre los ítems 126-128 refuerza nuestra hipótesis de que la única intención de Candelaria era aumentar los valores presentes en la fila 3 para poder alcanzar el valor 960 en la fila 5, ya fuera mediante la relación *R* = *L*·*Vlr* o recurriendo a una progresión aritmética. Evidentemente, esto implica dejar de lado las restricciones del problema para centrase exclusivamente en conseguir la coincidencia de valores en las dos expresiones de la misma cantidad.

118. María: ¿Ya está todo?

119. Candelaria: Sí, entonces ahora hay que mirar… ¡Ah!, pero es que ahora… ¡Ay (se tira las manos a la cabeza)…!

121. Candelaria: Es que mira… Tíralo para atrás (señala a la pantalla y mueve la mano hacia la izquierda)… Da igual… Mira… A ver… Doscien… O sea, tira para atrás (mueve la mano hacia la izquierda) y como el primero ya no son números negativos, nos da igual.

126. Candelaria: Aquí mismo… Mm, no sé… Aquí (Candelaria mueve la ventana hasta que se inicia en la columna HL) por ejemplo… A ver. Esto es igual (Candelaria introduce [HL3 =…; …]) a hache ele uno (Candelaria introduce [HL3 =HL1…; …]) por diez (Candelaria introduce [HL3 =HL1*10; 1940] usando el teclado)… Ya está… Bueno (mueve la ventana hacia la izquierda), más para alante (sic), porque… A ver, ¿dónde empieza aquí…? Éste… Aquí (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna AA y la celda activa se sitúa en AA3)… Es igual a aa (Candelaria introduce [AA3 =AA…; …])…

127. María: A a (a la vez)…

128. Candelaria: … uno (Candelaria introduce [AA3 =AA1*10; 10] usando el teclado)… Vale. Ya está.

La aparente contradicción entre las afirmaciones de Candelaria y María en los ítems 133 y 135, respectivamente, podemos explicarla por los saltos en las secuencias de las filas 3 y 5 (ver Figura 19)[34]. María (ítem 137) señala el brusco aumento que se produce en la columna HL (en la fila 5 se observa 609 en HJ5, 612 en HK5, 2352 en HL5, 2355 en HM5…) y Candelaria (ítem 138) decide copiar y pegar la fórmula presente en HK3 lo que implicaría prolongar la progresión aritmética que inicialmente se había establecido en la fila 3 y eliminar el salto.

130. María: Ahora ya ([…])…

132. Candelaria: Ahora ya hasta…

133. Candelaria: Cuatro… Novecientos sesenta… Vale ya me he pasao (sic).

134. (María mueve la ventana hacia la izquierda y después hacia la derecha.)

135. María: No, es que no llega.

136. Candelaria: ¿Cómo que no?

137. (María se prepara para señalar a la pantalla y cuando aparece la ruptura de la secuencia en la fila 5, señala con la mano a HL5.)

138. Candelaria: ¡Ah!, claro, porque… Vale, vale… Aquí está el fallo (sitúa la celda activa en HL3 y después en HK3)… Coge (señala con la mano a la pantalla) éste y arrástralo.

	HJ	HK	HL	HM
1	192	193	194	195
2	216	217	218	219
3	201	202	1940	1941
4	960	960	960	960
5	609	612	2352	2355

Figura 19. Después del ítem 138.

María (ítem 150) se da cuenta de que no han alcanzado el valor 960 en la fila 5 tras estirar HK3 hasta IV3 (en IV5 se observa el valor 723, véase la Figura 20). Candelaria[35] (ítems 151 y 153) parece identificar el origen del problema nuevamente en las fórmulas que calculan los valores de las celdas de la fila 3, pero no aclara cuál es el error. María (ítem 155) sitúa la celda activa en B3, donde se encuentra una fórmula que expresa correctamente la relación $R = L{\cdot}Vlr$, e indica (ítem 156) a Candelaria que si se arrastrara esta celda, se cumpliría la condición de que los valores de las celdas de la fila 3 fueran diez veces los de la fila

143. (María estira HK3 y llega hasta [IV3 =IU3+1; 239].)

150. María: Es que no tiene suficiente…

151. Candelaria: Ya, ya, ya… Es que… Es que ahí ([…]) está mal eso… el de abajo.

152. María: ¿Éste (sitúa el cursor sobre IG5)?

153. Candelaria: El de abajo… Roberto.

154. María: ¿Éste (sitúa el cursor sobre IF3)?

155. Candelaria: Sí (María mueve la ventana al inicio)… A ver, vamos a plantearlo (María sitúa la celda activa en B3) otra vez de aquí. Si…

156. María: Pero si estiramos (mueve la mano de izquierda a derecha)… si estiramos más ([…]), sí que saldría la cantidad. Porque ya hemos puesto por diez en todas las cantidades.

---

[34] Por ejemplo, si nos centramos en las celdas HJ5 y HK5 (ver Figura 19), podemos concluir que no alcanzamos el 960; pero si lo hacemos en HL5 y HM5, observaremos que nos hemos pasado de 960.

[35] Candelaria vuelve a demostrar que entiende la necesidad de replicar el paso 4, pero se observa una degeneración en la replicación errónea del paso 3. Así, mientras en el problema *Las actividades deportivas* la comparación de los valores de las secuencias le condujo a sustituir una progresión aritmética por la replicación de una celda para que se cumpliera una relación multiplicativa; en este caso los apaños son parciales y parecen tener el único propósito de incrementar la magnitud de los valores para poder alcanzar la verificación de la igualdad. En María podemos identificar una evolución en sentido contrario, pues defiende (ítem 156) que la única forma de corregir el error anterior es copiando y pegando la fórmula que expresa la relación multiplicativa en todas las celdas de la fila.

1 (ítem 156, “si estiramos más ([…]), sí que saldría la cantidad. Porque ya hemos puesto por diez en todas las cantidades”). Candelaria (ítem 157) se opone, pero no consigue explicar el motivo. Deducimos, pues, que Candelaria no parecer tener en cuenta la relación multiplicativa que debería haber entre los valores provisionales de las filas 1 y 3 y concluimos que su único propósito consiste en conseguir que la suma de las cantidades *L*, *J* y *R* dé 960.

157. Candelaria: No (señala con la mano a la pantalla), pero es que ([…])… Pero (chasquea los dedos intentando verbalizar lo que está pensando y se lleva las manos a la cara)… A ver…

◇	IT	IU	IV
1	228	229	230
2	252	253	254
3	237	238	239
4	960	960	960
5	717	720	723

Figura 20. Después del ítem 143.

Surgen problemas de comunicación, fruto de un diálogo que sólo expone retazos de aquello que se está pensando. Así, en el ítem 164, María afirma que el problema está bien planteado, refiriéndose probablemente a que las fórmulas de la columna B (en el ítem 155 había movido la ventana hasta volver a mostrar la columna A) son correctas (ver Figura 16); pero Candelaria (ítem 166) le contesta que no, porque no puede dar -240. María (ítem 167) le responde que si el valor de B1 es negativo, el de B3 también debe serlo. Candelaria (ítem 168) aclara que lo que quería decir es que se ha multiplicado por diez cuando, en realidad, se debería haber dividido.

164. María: Es que está bien planteado ([…]).

166. Candelaria: No, a ver, es que (señala con la mano a la pantalla) no nos tiene que dar dos… menos doscientos cuarenta.

167. María: Si esto (sitúa el cursor sobre B1) da negativo, éste (sitúa el cursor sobre B3) tiene que dar negativo ([…]).

168. Candelaria: Ya, pero es que ([…])… las… tiene la décima parte…

169. María: Pues entonces entre diez ([…]).

170. Candelaria: ¡Ah…! Yo qué sé ([…])… Es que no sé…

172. María: Y ([…])… Y la décima parte ([…])…

Ante la falta de acuerdo y de iniciativa, el profesor les propone abandonar la resolución del problema y aceptan.

181. Profesor: ¿Queréis dejarlo o no?

182. Candelaria: Vale (al tiempo que mira a María).

183. (María asiente.)

En definitiva, resuelven el problema aplicando correctamente los cuatro primeros pasos del MHC y fallando en el quinto. Así, realizan una lectura algebraica del problema que lo reduce a las relaciones necesarias y suficientes $T = L + J + R$, $R = L \cdot Vlr$ y $J = L + Mjl$; construyen fórmulas correctamente que dan cuenta de estas relaciones tomando, implícitamente, la cantidad *J* como cantidad de referencia y plantean la comparación de dos expresiones de la cantidad *T*.

6.5.1.5. El caso de la pareja Candelaria-María en el problema "Lana y algodón"

María (ítems 8 y 18) da nombre y asigna celdas de manera implícita a las cantidades conocidas *M* y *P*. En los ítems 13 y 15, María construye los nombres "€/ALGODÓN", en A2, y "€/LANA", en A3. En los nombres aparece la referencia a la unidad monetaria y al tipo de tela; pero no a la cantidad de tela. La generalidad del nombre nos conduce a considerar que son etiquetas de las cantidades precio de la tela de algodón (*Pa*) y precio de la tela de lana (*Pl*). Sin embargo, Candelaria (ítems 29 y 33) les asigna verbalmente los valores cuatro y dos, respectivamente, y María (ítems 31 y 35) los introduce en las celdas B2 y B3 (ver Figura 21) sin mostrar reserva. Proponemos[36] dos posibles explicaciones: 1) Se pretenden fusionar las cantidades *Ua-Pa* y *Ul-Pl* en las variables dependientes precio de la tela de algodón y precio de la tela de lana, donde el precio unitario no será más que el valor de la variable dependiente asociado al valor uno de la variable independiente metros de un tipo de tela. 2) Se interpretan los nombres "€/ALGODÓN" y "€/TOTAL" como etiquetas de las cantidades *Ua* y *Ul*.

En el ítem 12, Candelaria sugiere que ya hicieron un problema parecido y que no lo acabaron. Efectivamente, durante la secuencia de enseñanza se propuso el problema *Las zapatillas deportivas* isomorfo al que están resolviendo que abordaron aritméticamente, pero de manera incorrecta.

7. María: Metros.

8. (María introduce [A1; METROS TOTAL].)

9. Candelaria: Que son de ([…]) lana y algodón ([…])…

10. María: Metros total.

12. Candelaria: Y ([…]) el algodón está cobrado a ([…]) cuatro euros y la lana a doce ([…])… ¡Ay…! Esto, hicimos uno parecido ([…]), y no lo acabamos ([…]).

13. (María introduce [A2; €/ALGODÓN].)

15. María: Euros lana (María introduce [A3; €/LANA])… ¿Y qué ([…]) más?

16. Candelaria: Y ([…]) el valor de la tela total es de treinta y dos euros.

18. María: Euros totales (María introduce [A4; €/TOTAL]). ¿No?

19. Candelaria: Sí ([…]).

20. María: Metros totales.

23. Candelaria: Metros totales, treinta y ([…]) dos… No, doce, doce.

25. María: Doce.

26. (María introduce [B1; 12].)

28. María: Euros que ([…])…

29. Candelaria: Cuatro.

31. (María introduce [B2; 4].)

32. María: ¿Y de lana ([…])?

33. Candelaria: Dos ([…]).

35. (María introduce [B3; 2].)

36. María: ¿Precio total?

38. Candelaria: Treinta ([…]) y dos.

40. (María introduce [B4; 32].)

---

[36] Evidentemente, existen más posibles explicaciones, pero conocemos el final de la historia. Las dos posibilidades que ofrecemos responden a las interpretaciones distintas que darán las resolutoras. No es nuestra intención crear suspense, sino que la exposición siga un orden y dar cuenta de cómo las distintos referentes que se asignan a lo que se representa en la hoja de cálculo puede entorpecer la comunicación.

	A	B
1	METROS TOTAL	12
2	€/ALGODÓN	4
3	€/LANA	2
4	€/TOTAL	32

Figura 21. Después del ítem 40.

María (ítem 41) se interesa por la pregunta del problema y Candelaria (ítem 42) le contesta que hay que averiguar *Ml* y *Ma*. María (ítem 43) propone realizar un cálculo que podríamos expresar mediante la relación incorrecta $M = Ua \cdot \alpha$ (donde α sería la cantidad que se pretende calcular y que no se explicita, aunque por el contexto posiblemente sea *Ma*). Tras dudar, ella misma rechaza su plan al final del ítem 43. La actuación de María refleja un razonamiento aritmético en el que se pretende ir de lo conocido hacia lo desconocido.

41. María: ¿Y qué hay que saber ([…])?

42. Candelaria: Hay que ([…]) saber de cuántos metros de lana disponemos y cuántos metros de algodón ([…])… Pues a ver…

43. María: Es esto (sitúa el cursor sobre B1) entre cuatro (sitúa el cursor sobre B2)… No.

44. Candelaria: No, no, porque es que… A ver (resopla)… Es que éste…

En el ítem 46, Candelaria ofrece un ejemplo de cómo la reflexión sobre los pasos del método pueden ayudar en la gestión del proceso de resolución. Así, tras afirmar "Es que no sé ni por dónde ir…", recupera el equilibrio intentando dar respuesta al paso 4 del MHC ("Tienen que haber dos iguales…"). Sin embargo, deja de lado la búsqueda de la igualdad y se centra en representar (ítems 47 y 49) en la hoja de cálculo las cantidades por las que pregunta el problema, *Ma* y *Ml* (ver Figura 22).

46. Candelaria: ¿A cuánto nos han cobrado…? Es que no sé ni por dónde ir… A ver… Tienen que haber dos iguales… A ver, no. Vamos a poner el que nos falta ahí (se acerca el teclado): metros de algodón.

47. (Candelaria introduce [A5; METROS ALGODÓN].)

48. María: Y metros de lana.

49. (Candelaria introduce [A6; METROS LANA].)

	A	B
1	METROS TOTAL	12
2	€/ALGODÓN	4
3	€/LANA	2
4	€/TOTAL	32
5	METROS ALGODÓN	
6	METROS LANA	

Figura 22. Después del ítem 49.

María (ítem 56) sugiere plantear una igualdad sobre la relación $M = Ml + Ma$ y Candelaria acepta. En el ítem 58, María propone, además, una segunda igualdad en la que la cantidad *P* (que ocupa la celda B4) sería igual a la suma de las cantidades representadas en las celdas B2 y B3. Esto

56. María: Esto (mueve el cursor sobre A5 y A6) tiene que ser igual a esto (mueve el cursor sobre B1).

57. Candelaria: Exacto. Sí. (Sobre la voz de María.)

58. María: Y esto (mueve el cursor sobre B2 y B3) tiene que ser igual a esto (mueve el cursor

pone de manifiesto que María considera que en estas celdas se representan las cantidades *Pa* y *Pl*, respectivamente, y que plantea una segunda igualdad sobre la relación correcta $P = Pl + Pa$. Candelaria (ítem 59) acepta la primera igualdad e invita a María a introducirla en la hoja de cálculo, pero no menciona la segunda.

sobre B4).

59. Candelaria: O sea, metros de algodón (señala con la mano a la pantalla) y metros la… La suma de los metros de algodón y metros de lana tiene que ser el total ([…]). Es eso ([…]). Pues ya está: ponlo… No sé (duda)…

En definitiva, María propone dos igualdades sin atender a que en el MHC sólo puede construirse una. Tampoco tienen en cuenta la presencia de dos celdas en blanco (dos celdas de referencia), en contra de la exigencia de que antes de la replicación de los pasos 3 y 4 únicamente debe quedar una celda en blanco: la celda de referencia[37].

Candelaria (ítems 61 y 63) señala la presencia de dos cantidades desconocidas, a las que no puede asignar expresión, como obstáculo para seguir adelante en el proceso de resolución. Para encauzar la solución por la senda del MHC hubiera bastado con emplear la relación $M = Ml + Ma$ para asignar una fórmula a *Ma* o *Ml*, pues de esta forma hubieran reducido el problema a un igualdad y a una celda de referencia. Sin embargo, Candelaria parece incapaz de expresar la relación disponiendo las cantidades en otro orden, lo que puede ser debido a que el lenguaje natural no ofrece herramientas para realizar la acción y necesitamos recurrir al conocimiento matemático para llevarla a cabo.

61. Candelaria: Pero es que no sé qué tenemos. (Al tiempo que habla María.)

62. María: Pon ([…]) el total de… No, es que no puede ser.

63. Candelaria: Pero es que ([…]) claro si no sabemos cuántos son ([…]) de cada, cómo sabemos… Es que, ¿cómo podemos saberlo?

María (ítems 64 y 69) construye nombres y asigna celdas a las segundas apariciones de las cantidades *M* (“SUMA METROS”) y *P* (“SUMA/€”). A continuación, introduce (ítems 71 y 74) las fórmulas que expresarán las relaciones $M = Ml + Ma$ y $P = Pl + Pa$, respectivamente (ver Figura 23). Tras la construcción de nombres y

64. María: Pongo ([…]): suma metros (María introduce [A8; SUMA METROS]).

65. Candelaria: A ver, no, espera ([…])… Vamos a ver… Sí, sí. Bueno… Voy a pensar.

66. María: Y… y en…

69. (María introduce [A9; SUMA/€].)

70. (María introduce [B8 =…; …].)

[37] La ausencia de reflexión sobre el papel de la celda de referencia es una constante en la actuación de esta pareja. Únicamente en el ítem 113 del problema *Adrián*, Candelaria sugiere la necesidad de que haya una celda vacía, pero este hecho no se tomó en consideración a la hora de gestionar la resolución.

fórmulas, María (ítem 76) pide conformidad a Candelaria y ésta (ítem 79) manifiesta dudas; posiblemente porque considera que las cantidades representadas en las celdas B2 y B3 son, respectivamente, *Ua* y *Ul*, lo que supondría interpretar la fórmula propuesta por María (ítem 74) como la relación incorrecta $P = Ul + Ua$.

71. Candelaria: O sea, a ver ([…]), los metros totales son iguales (María introduce [B8 = B5+B6; 0] usando el teclado) a tantos de algodón y a tantos de lana…

72. María: (Inaudible.)

74. (María introduce [B9 =B2+B3; 6] usando el teclado.)

76. María: ¿Vale?

78. Candelaria: Yo qué sé ([…]).

<>	A	B
1	METROS TOTAL	12
2	€/ALGODÓN	4
3	€/LANA	2
4	€/TOTAL	32
5	METROS ALGODÓN	
6	METROS LANA	
7		
8	SUMA METROS	= B5+B6
9	SUMA/€	=B2+B3

Figura 23. Contenido de las celdas después del ítem 74.

María (ítems 79, 81, 83 y 85) pretende identificar la igualdad (o igualdades). Su discurso es ambiguo y se apoya en gestos como forma de suplir la falta de precisión. En los ítems 79 y 81, María parece señalar que las igualdades deben construirse sobre dos expresiones distintas de las cantidades conocidas *P* y *M*. Candelaria (ítems 82, 86 y 88) no entiende la propuesta de María y ésta decide reforzar su explicación con lo que se hará posteriormente. Así, en el ítem 89, María propone generar progresiones aritméticas en las filas 2, 3 y 4. Esto pone de manifiesto que, efectivamente, María había fusionado las cantidades *Ua-Pa* y *Ul-Pl* en las filas 2 y 3. Candelaria (ítem 90) se opone al plan indicando: "Pero es que el metro de lana y metro de algodón siempre valen lo mismo", lo que indica que para Candelaria las cantidades representadas en B2 y B3 son *Ua* y *Ul*, respectivamente, y que sólo las puede considerar como tales a lo largo de ambas filas. Posiblemente por esta razón, la respuesta de Candelaria al plan de María (ítem 90) no se centra en el hecho de que en las filas 2 y 3 no estén representadas *Pa* y *Pl* (las cantidades que considera representadas María), sino en indicar que *Ua* y *Ul* (las cantidades que considera representadas Candelaria) son constantes.

79. María: Yo creo que esto tiene que ser igual (sitúa la celda activa en B9).

80. Candelaria: ¿Cómo, cómo?

81. María: Y que… Esto… los… la suma de los metros (mueve el cursor sobre A8 y B8) tiene que ser… No, a ver… Sí. Sí. Si haces esto (mueve el cursor sobre B8 y B9) sería igual… aquí (sitúa el cursor sobre C2), si sumas uno cada vez (mueve el cursor horizontalmente sobre la fila 2 […]), te saldrá cuánto vale…

82. Candelaria: ¿El qué? ¿Cómo ([…]), cómo ([…])? Es que no lo entiendo.

83. María: Si haces esto (señala con el dedo a B9), la suma de algodón y la suma de… o sea, lo que da todo…

84. Candelaria: Sí.

85. María: … Lo igualas…

86. Candelaria: ¿Pero cuánto vale todo… el qué… Los metros de algodón y los metros de lana?

87. María: Sí.

88. Candelaria: Es que… Bueno. No sé… No. Es que no lo entiendo mucho.

89. María: Y después tú, aquí (sitúa el cursor sobre C2), pones más uno (sitúa el cursor sobre C3 y mueve la mano de arriba abajo haciendo un gesto como si estuviera apilando), más uno (sitúa el cursor sobre C4) y más uno ([…]) y lo estiras ([…]) y te saldrá cuánto gasta cada…

90. Candelaria: Pero es que el metro de lana y metro de algodón siempre valen lo mismo.

91. María: Pues, no sé.

Candelaria (ítem 93) toma la iniciativa y plantea variar las cantidades Ma y Ml, lo que podemos interpretar como una forma de señalar la presencia de dos cantidades de referencia. Esto incumple la exigencia del paso 2 del MHC de que haya una única celda de referencia. Ya hemos dicho que la relación $M = Ml + Ma$, a partir de la cual se ha construido una fórmula en B8, se podría utilizar para conectar las cantidades Ma y Ml y conseguir tener una única celda de referencia. El hecho de que Candelaria no considere necesario aprovecharla con este fin lo podemos achacar a que no suele hacer reflexiones alrededor del paso 2, lo que nos puede indicar que no es conocedora de su trascendencia. Otro factor que puede incidir es que Candelaria era una buena resolutora de problemas mediante sistemas de ecuaciones[38] cuando empleaba el MC y, por ello, no ve problema en plantear dos igualdades.

93. Candelaria: A ver, si tenemos tantos metros ([…])… O sea lo que tenemos que variar son los metros de algodón y los metros de lana.

94. María: O sea que (sitúa el cursor sobre B9), ¿esto lo borro ([…])?

95. Candelaria: No sé. Déjalo (se encoje de hombros) ahí ([…]). Pon, a ver, metros de algodón más uno… tal…

96. (María introduce [C5 =…; …].)

105. María: Pongo aquí (sitúa el cursor sobre B5) uno ([…]) y aquí, más uno ([…] sitúa el cursor sobre C5). Y aquí (sitúa el cursor sobre B6 y C6) igual, para que se…

107. Candelaria: Espérate, a ver ([…]), para calcularlo habría que hacer: los metros de algodón supuestos… los supuestos metros por dos que es el pre… O sea, por ejemplo, supuestos metros de algodón, alargaríamos uno ([…]), dos… tal… Luego ([…]) lo ([…]) multiplicarem… o sea, ([…]) abajo…

108. María: Lo multiplicaríamos por cuatro ([…]).

109. Candelaria: … sería multiplicarlo por cuatro ([…])…

Entre los ítems 107 y 109, Candelaria ofrece un discurso que arroja luz sobre dos aspectos: 1) En el ítem 107 señala el carácter provisional (“los supuestos metros por dos”) de los valores de la cantidad Ma que aparecerán en la fila 5 al generar la progresión aritmética. 2) Expresa verbalmente las relaciones $Pa = Ua \cdot Ma$ (ítem 107) y $Pl = Ul \cdot Ml$ (desde el final del ítem 107 hasta el 109); pero lo hace de una manera vaga y en ningún momento contempla la posibilidad de asignar un par de celdas que representen a Pl y Pa. Además comete el error de intercambiar los valores de Ul y Ua (“los metros de algodón supuestos… los supuestos metros por dos”, ítem 107).

115. Candelaria: No… Sí. Se puede hacer, a ver. Alarga primero los metros de algodón (María borra C5)… O sea, y los de lana.

116. María: Per… Pero, ¿qué pongo?

117. Candelaria: Más uno.

118. María: Va a salir…

119. (María introduce [C5 =B…; …].)

120. Candelaria: Va a salir uno, dos, tres, cuatro, cinco…

121. María: El be… be cin… be cinco (María introduce [C5 =B5…; …]) más uno (María introduce [C5 =B5+1; 1] usando el teclado) y el be seis (María introduce [C6 =B6…; …]) más uno (María introduce [C6 =B6+1; 1] usando el teclado).

122. Candelaria: Es que lo malo es que no creo que sean dos ([…]) metros de algodón, dos metros

[38] De hecho fue de las pocas que empleó más de una letra y sistemas de ecuaciones para resolver problemas de manera algebraica (véase, por ejemplo, su actuación en el problema *La visita al teatro* en el anexo F).

En el ítem 117, Candelaria indica[39] a María que introduzca una fórmula de recurrencia en la celda C5. María (ítem 121) acata la orden y tras introducir la fórmula =B5+1 en C5 procede a repetir la acción en C6. Candelaria (ítem 122) se da cuenta de que al generar dos progresiones aritméticas de diferencia uno con igual origen va a exigir que los valores de las cantidades *Ma* y *Ml* sean siempre iguales, lo que equivaldría a suponer una nueva relación inexistente. Sin embargo, decide seguir con el plan (ítem 124) y María (ítems 128 y 130) genera las progresiones aritméticas de diferencia uno en las filas 5 y 6 (ver Figura 24).

de lana ([…])…

123. María: Claro.

124. Candelaria: … tres metros de algodón… Ya ([…]). Bueno, puede ser, no sé.

125. María: ¿Lo alargo ([…])?

126. Candelaria: Sí (encogiéndose de hombros).

128. (María estira C5 y llega hasta [IV5 =IU5+1; 254].)

130. (María estira C6 y llega hasta [IV6 =IU6+1; 254].)

◇	A	B	C	D
1	METROS TOTAL	12		
2	€/ALGODÓN	4		
3	€/LANA	2		
4	€/TOTAL	32		
5	METROS ALGODÓN		1	2
6	METROS LANA		1	2
7				
8	SUMA METROS	0		
9	SUMA/€	6		

Figura 24. Después del ítem 130.

En el ítem 135, Candelaria utiliza un lenguaje impreciso, sin ninguna referencia concreta, y plagado de gestos que pone de manifiesto las dudas que le embargan. María (ítem 138) parece reflexionar sobre la presencia en las filas 5 y 6 de dos secuencias iguales (ver Figura 24) y apunta como origen de la situación a la imposibilidad de asignar un valor a las celdas B5 y B6 (ambas vacías) que representan a las cantidades desconocidas *Ma* y *Ml*, respectivamente. Al igual que Candelaria (ítem 95), María no contempla la posibilidad de usar la relación $M = Ma + Ml$ para subsanar este inconveniente.

135. Candelaria: A ver, entonces ([…]) ahora tenemos ([…])… Es que, a ver, aquí hay que encontrar la manera de que eso, o sea (gesticula con la manos sobre la mesa y mira a un punto indeterminado), un… una fila que sea (mira a la pantalla y la señala con la mano)…

138. María: Es que si ([…]) no sabemos ([…]) los metros (señala a B5 y B6) no te puede saber nunca ([…]) cuánto… o sea, el número (señala a un punto indeterminado del rango A1:B2)…

139. Candelaria: Supongo que se podrá (sobre las palabras de María); pero…

Las palabras de Candelaria en el ítem 139 nos llevan a sugerir que abandonen el problema y aceptan (ítems 149 y 150).

149. María: Queremos dejarlo. (Dice esto mirando a Candelaria.)

150. Candelaria: Vale (encogiéndose de

[39] Asignan nombres idiosincrásicos con referentes compartidos a las acciones que realizan en la hoja de cálculo. Así, la expresión *más uno* se liga a la construcción de una progresión aritmética de diferencia uno.

hombros).

153. María: Es que no lo sabemos…

155. María: Sí que sabemos hacerlo; pero no sabemos por qué…

Sin embargo, Candelaria vuelve a la carga y en el ítem 159, de manera muy vaga, parece volver a verbalizar la necesidad de expresar mediante fórmulas las relaciones $P = Pl + Pa$, $Pl = Ul \cdot Ml$ y $Pa = Ua \cdot Ma$; pero no menciona $M = Ml + Ma$.

156. Candelaria: A ver, es que habría que relacionar… O sea… Es que, a ver, (señala con la mano a la pantalla) eso… sabemos (ríe) …

159. Candelaria: A ver ([…])… Mira, mira… Si multi… si multiplicamos lo que nos sale por todas ésas (mira a la pantalla y la señala con la mano) por el número de… o sea, por los euros que valen y luego hacemos uno que sea la suma de cada uno de las ([…]) columnas esas ([…]) y lo comparamos ([…]) con la suma total que nos tiene que dar ([…]), se supone que nos tiene que… esa otra manera ([…]); pero no sé cómo hacer eso (señala con la mano a la pantalla), porque… o sea, sí (María ríe)… O sea, si eso (señala con la mano a la pantalla), el uno lo multiplicas… Mira… Trae…

◇	A	B	C	D	E
1	METROS TOTAL	12			
2	€/ALGODÓN	4			
3	€/LANA	2			
4	€/TOTAL	32			
5	METROS ALGODÓN		=1*4	=C5+1	=D5+1
6	METROS LANA		=1*2	=C6+1	=D6+1
7					
8	SUMA METROS	= B5+B6			
9	SUMA/€	=B2+B3			

Figura 25. Contenido de las celdas después del ítem 163.

Sin modificar el nombre que habían dado a la cantidad representada en B5 (“METROS ALGODÓN”), Candelaria (ítem 163) cambia la fórmula presente en C5. La nueva fórmula, =1*4, refleja la relación $Pa = Ua \cdot Ma$, donde la cantidad desconocida *Ma* se representa mediante un valor provisional (el número 1). Así, se genera un conflicto entre el nombre que etiqueta a la fila 5 (que apunta a la cantidad *Ma*) y la fórmula introducida en la celda C5 (que apunta a la cantidad *Pa*). También introduce en C6 la fórmula =1*2 (ver Figura 25) que plasma la relación $Pl = Ul \cdot Ml$, lo que provoca nuevamente una contradicción entre la cantidad que se supone que se expresa en C6 y el nombre que etiqueta a la fila, “METROS LANA”, que apunta a *Ml*. Quizá, pretende modificar el origen común de las secuencias de las cantidades *Ma* y *Ml* (filas 5 y 6, respectivamente), para evitar

162. (Candelaria modifica [C5 =…; …].)

163. Candelaria: Uno (Candelaria introduce [C5 =1…; …])… Éste es cuatro (Candelaria introduce [C5 =1*4…; …]), ¿no…? Por cuatro (Candelaria introduce [C5 =1*4; 4])… Y éste es (Candelaria introduce [C6 =…; …])… ¿Éste es dos…? ¿Dónde está (María aprovecha que Candelaria busca una tecla para apropiarse del teclado e introducir [C6 =1*2; 2])…? Y entonces…

que se venda la misma cantidad de los dos tipos de tela.

En el ítem 165, las palabras de Candelaria “Ya se alarga él solo” parecen indicar que los valores de las celdas de las filas 5 y 6 se recalcularán automáticamente al modificar el primer valor de la secuencia, lo que reforzaría nuestra interpretación de que pretendía que las secuencias no fueran iguales. Sin embargo, en el ítem 168 cambia de opinión y decide replicar las fórmulas presentes en C5 y C6 sin atender a que las fórmulas no contienen ninguna referencia a celda como argumento, con lo que generará una secuencia de valores iguales. Parece darse cuenta de este hecho (ítem 170) y renuncia a llevar acabo el plan; pero María (ítem 171) arrastra C5 y genera en la fila 5 una secuencia de valores iguales. Candelaria (ítem 173) decide sustituir el número uno (ver Figura 25) por la referencia a la celda B5[40]. De este modo la fila 5 aloja dos cantidades: en las celdas A5 y B5 están el nombre y el contenedor de la cantidad *Ma*, respectivamente; mientras que en C5 está la expresión que calcula el valor de *Pa*.

En los ítems 176 y 179, María parece indicar que al introducir estas fórmulas en C5 y C6 se generarán sendos ceros[41]. Candelaria (ítems 177 y 181) propone introducir un uno en B5 y B6 para evitarlo. La preocupación de María (ítems 176 y 179) por la aparición de ceros puede interpretarse de dos formas: 1) Se centra en los valores provisionales y los rechaza por considerar que un precio no puede ser cero. 2) Entiende que si en C5 y C6 se tiene el mismo valor, se volverán a generar secuencias de valores iguales en las filas 5 y 6. Candelaria (ítems 180 y 182) atiende a las peticiones de María e

164. María: ¿Alárgalo?

165. Candelaria: Ya se alarga él solo.

166. María: Vale.

167. María: ¿Y aquí te…?

168. Candelaria: No, espera (señala con la mano a la pantalla), no. Eso sí que hay que alargarlo (mueve la mano horizontalmente).

169. María: No, ya está alargado.

170. Candelaria: ¡Ay, no!, porque es que claro… A ver, no, no. Espérate (se lleva las manos a la cara). Algo hay mal.

171. (María estira C5 hasta [E5 =1*4; 4].)

172. María: No, no. Sí.

173. Candelaria: No, no. Mira, mira. A ver, éste es igual (Candelaria introduce [C5 =…; …]) a be un… cinco (Candelaria introduce [C5 =B5…; …]) por dos (Candelaria introduce [C5 =B5*2; 0] usando el teclado)… ¿No…? Sí… ¿Sí…? No lo sé…

174. María: No.

175. Candelaria: … Creo que sí… A ver…

176. María: Va a salir ce… (Prácticamente inaudible.)

177. Candelaria: Si aquí ponemos uno (sobre la voz de María)…

179. María: Pero es que va a salir cero.

180. (Candelaria introduce [B5 =1; 1].)

181. Candelaria: Pero porque si aquí ponemos uno y aquí ponemos uno…

182. (Candelaria introduce [B6 =1; 1].)

183. María: Va a dar lo mismo.

184. Candelaria: … Claro… Si aquí ponemos be cinco…

185. (Candelaria modifica [C5 = B5…; …].)

186. María: Por cuatro.

187. Candelaria: Eso, por cuatro (Candelaria modifica [C5 = B5*4; 4] usando el teclado). Y

[40] En la fórmula =B5*2, que introduce Candelaria (ítem 173) en la celda C5, se mantiene el error de asignar a *Ua* el valor de *Ul*.

[41] Efectivamente, al introducir la fórmula =B5*2 en la celda C5 se obtendrá un cero como consecuencia de que la celda B5 está vacía.

introduce dos números uno en las celdas B5 y B6. Continuando con el plan, Candelaria (ítem 187) modifica la fórmula presente en C5 para plasmar correctamente (corrige el valor del precio de un metro de tela de algodón) la relación $Pa = Ua \cdot Ma$ e introduce (ítem 192) en C6 la fórmula =B6*2 que expresa la relación $Pl = Ul \cdot Ml$. Esto supone representar a las cantidades *Ma* y *Ml* mediante la referencia a las celdas B5 y B6, respectivamente. No existe verbalización de las relaciones, pero sí de la fórmula (ítems 184 y 187). La referencia a la cantidad *Ma* se realiza mediante la posición a la celda B5 y deícticos, mientras que la referencia a la cantidad *Ml* se lleva a cabo mediante la posición de la celda B6. De esta forma, se evita referirse a las cantidades en el lenguaje natural.

Candelaria, al final del ítem 192, propone copiar y pegar el contenido de las celdas C5 y C6, lo que pone de manifiesto la falta de competencia de Candelaria, en este caso, a la hora de interpretar las acciones ligadas a la copia y pegado por arrastre, pues no prevé cuál será el resultado. María obedece sin argumentar nada en contra. Al arrastrar la fórmula = B5*4, presente en C5, se genera en la fila 5 una progresión geométrica de razón cuatro que produce valores muy grandes (ver ítem 195).

aquí…

188. María: Ponemos dos.

189. (Candelaria introduce [C6 =…; …].)

190. Candelaria: … Be ci… seis (Candelaria introduce [C6 =B6…; …]) por…

191. María: Dos.

192. Candelaria: … dos (a la vez y mientras Candelaria introduce [C6 =B6*2; 2]) y ahora lo alargas…

193. María: ¿Ésta (mueve el cursor sobre la fila 5)?

194. Candelaria: … No te queda lo mismo (María estira C5), pero no sé… A ver, prueba a ver si…

195. (María llega hasta [IV5 = IU5*4; 8,38E+152].)

El fracaso de este último intento les lleva a abandonar.

196. Candelaria: Vale.

197. María: No puede ser.

6.5.2. LA PAREJA ALBERTO-LLUÍS

La pareja Alberto-Lluís fue la que llamamos pareja 3 durante la secuencia de enseñanza. Estaba formada por los estudiantes 7 y 20 a los que, como ya hemos indicado, llamaremos Alberto y Lluís, respectivamente. Al clasificar a la población, Alberto (el estudiante 7) quedó integrado en la clase (L_1, Com_1, HC_2); mientras que Lluís (el estudiante 20) se incluyó en (L_2, Com_2, HC_2).

El estudiante 7 no abordó ningún problema de manera algebraica en los cuestionarios previos. Todos los problemas del cuestionario 1 (el que estaba formado por problemas que normalmente se resuelven de manera aritmética) los resolvió de manera aritmética y dejó en blanco todos los problemas del cuestionario 2 (el que estaba formado por problemas que normalmente se resuelven de manera algebraica). Sólo abordó cuatro problemas de los siete que formaban el cuestionario 1, siempre usando el SMSari, y resolvió correctamente tres. Posiblemente, fuera el individuo que demostró menor capacidad en la resolución de problemas; sin embargo, quedó por encima de la media en el cuestionario que trataba de determinar la competencia en el uso de la hoja de cálculo. En este cuestionario, sólo falló en el ítem 8 al construir una fórmula a partir de unas instrucciones dadas en lenguaje natural y generó correctamente las tres secuencias numéricas propuestas. No obstante, hizo un uso innecesario de los paréntesis a la hora de construir fórmulas en tres de los ocho ítems posibles.

El estudiante 20 quedó por encima de la media en el número de problemas abordados algebraicamente, aunque todos los del cuestionario 1 (el que estaba compuesto por problemas que normalmente se resuelven de manera aritmética) y el problema *El precio del pan* del cuestionario 2 los resolvió de manera aritmética. En dos de los siete problemas en los que empleó el SMSalg, usó de manera polisémica la letra x, concretamente en los problemas, del cuestionario 2, *Marta y María* y *La lotería*. Hizo un planteamiento correcto de todos los problemas menos uno en el cuestionario 1 y de tres problemas sobre ocho en el cuestionario 2. No se observa que cometa errores de inversión de operación o de cambio del tipo de relación. Sus errores en la lectura se centran en la conexión de cantidades que no están relacionadas. En el cuestionario 3, sólo erró al construir una fórmula y generó correctamente las tres secuencias propuestas utilizando un método no explicado en clase que consistía en introducir los dos valores iniciales en dos celda contiguas, seleccionar las celdas y arrastrarlas. También usó paréntesis innecesarios en dos de los ocho ítems posibles.

6.5.2.1. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema "Adrián"

Tras una primera lectura del enunciado, Lluís (ítems 4 y 8) designa dos cantidades empleando los nombres de los protagonistas. A continuación, introduce (ítems 13 y 15) los valores 15 y 40 en las celdas B1 y B2, respectivamente, lo que nos sugiere que los nombres anteriores representaban a las cantidades *Aa* y *At*. Sin embargo, los nombres empleados no incluyen indicaciones sobre si refieren a las edades iniciales o finales de los protagonistas y también podrían interpretarse como una referencia a las variables edad[42].

4. (Lluís introduce [A1; Adrian].)
8. (Lluís […] introduce [A2; Tania].)
13. […] (Lluís introduce [B1; 15]) […]
15. (Lluís introduce [B2; 40].)

Lluís (ítems 16 y 17) parece atender al enunciado y, a continuación, da (ítem 18) nombre a la cantidad *Ft*, haciendo una

16. (Alberto mira a la hoja.)
17. (Silencio de 5 segundos.)

[42] Volvemos a insistir en que no es nuestra intención crear suspense, sino el ser fieles a cómo se puede interpretar la información en cada momento. Posiblemente, Lluís desde un primer momento tienen decidido cuál es el referente, pero su compañero puede interpretarlo de las dos formas que estamos proponiendo.

construcción algorítmica del mismo y volviendo a omitir cualquier referencia a si se trata de la edad actual o futura de Adrián, lo que nos lleva a volver a sugerir la posibilidad de que esté refiriéndose a una variable en lugar de hacerlo a una cantidad. La fórmula (ítem 19) que utiliza para asignar valor a esta cantidad reproduce el nombre que se le ha asignado y refleja, de algún modo, la relación[43] $Ft = V{\cdot}Fa$.

18. (Lluís introduce [A3; Adrian*2] […])

19. (Lluís introduce [B3 =b1*2; 30] usando el teclado.)

En las celdas C1 y C2, Lluís (ítem 20 y 21) escribe el siguiente de los números 15 y 40, respectivamente. A continuación, copia (ítem 22) el contenido de la celda B3 en la celda C3, produciendo la fórmula =C1*2. La intención de estas acciones se explica en los ítems 23 y 27: Lluís genera sendas progresiones aritméticas de diferencia uno en las filas 1 y 2, utilizando la técnica de introducir los dos primeros elementos de la serie (en B1, 15 y en C1, 16; en B2, 40 y en C2, 41) y estirar de las celdas que los contienen, en lugar de utilizar fórmulas de recurrencia[44]. La hoja de cálculo se encarga de calcular la diferencia entre los dos términos sucesivos y generar el resto de valores. Evidentemente, de esta forma se forman las líneas de vida de Adrián y Tania[45], poniendo en juego, de algún modo[46], las relaciones $Ft = At + T$ y $Fa = Aa + T$. El uso de líneas de vida confirma que Lluís ha estado considerando desde el inicio variables y no cantidades. También nos indica que, aunque Lluís está resolviendo

20. (Lluís introduce [C1; 16].)

21. (Lluís introduce [C2; 41].)

22. (Lluís estira B3 hasta [C3 =C1*2; 32].)

23. (Lluís selecciona el rango B1:C1 y estira hasta [IV1; 269].)

27. (Lluís selecciona el rango B2:C2 y estira hasta [IV2; 294].)

---

[43] Si Lluís está usando variables, no distinguirá entre edades futuras y actuales, por lo que no podemos decir que considere la relación entre cantidades $Ft = V{\cdot}Fa$. Sin embargo, parece evidente que al establecer la relación funcional entre las variables edad de Adrián y edad de Tania está teniéndola en cuenta *de algún modo*.

[44] En clase se había enseñado a generarlas exclusivamente mediante fórmulas de recurrencia, pero observamos que Lluís ya empleó esta técnica en el cuestionario 3 (ver anexo G).

[45] Lluís (estudiante 20) también usó las líneas de vida en el problema *La familia de Marcos* del cuestionario Post, posiblemente importando esta técnica de la forma de resolver algunos problemas de la subfamilia edades en la hoja de cálculo.

[46] En lugar de trabajar con la cantidad desconocida tiempo transcurrido, se aplica repetidamente el cálculo de la edad el año que viene, construyendo las tablas de valores de las variables edad de los protagonistas.

el problema en la hoja de cálculo y podemos acomodar su actuación a una lectura algebraica, no está empleando el MHC.

Lluís (ítem 29), al colorear la filas 2 y 3 (ver Figura 26), pretende reflejar el paso 4 del MHC en el que se propone establecer una igualdad entre dos expresiones.

29. (Lluís colorea las filas 2 y 3.)

	A	B	C	D
1	Adrian	15	16	17
2	Tania	40	41	42
3	Adrian*2	=B1*2	=C1*2	

Figura 26. Contenido de las celdas después del ítem 29.

Lluís (ítems 30 y 33) lleva hasta el límite derecho de la hoja de cálculo la replicación de la fórmula presente en la fila 3.

30. (Lluís selecciona la celda C3, después, el rango B3:C3 y lo empieza a estirar.)

33. (Llega hasta [IV3 =IV1*2; 538].)

Lluís comienza a buscar la coincidencia de valores en las filas segunda y tercera y la encuentra (ítem 35) en la columna L (ver Figura 27). Da por concluida la resolución y ofrece como solución los valores de las variables edad de Adrián y edad de Tania (ítem 40) en lugar de *T*, posiblemente debido a que *T* no está representada.

En definitiva, resuelven[47] el problema correctamente construyendo las líneas de vida de los protagonistas, empleando, de algún modo, las relaciones $Ft = V{\cdot}Fa$, $Ft = At + T$ y $Fa = Aa + T$.

34. (Lluís mueve la ventana hacia izquierda y derecha hasta que ésta se inicia en la columna L.)

35. Lluís: Ahí (señala con el cursor [L1; 25] y [L2; 50]).

38. Lluís: ¡Ya está!

39. Profesor: ¿Ya está? ¿Cuál es la solución?

40. Lluís: Eh… pues veinticinco años tendría Adrián (mueve la ventana hasta el inicio) y cincuenta tendría Tania.

	K	L	M
1	24	25	26
2	49	50	51
3	48	50	52

Figura 27. En el ítem 35.

6.5.2.2. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema "Las ovejas"

Alberto lee el enunciado en alto. Lluís (ítem 4) invita a resolver el problema a Alberto. Éste duda y cuando Lluís (ítem 8) ya ha tomado la decisión de resolverlo,

4. Lluís: ¿Lo haces tú (señala con la mano a la pantalla)?

6. (Silencio de 9 segundos mientras Alberto duda.)

[47] Utilizaremos plural, porque nos estamos refiriendo a la actuación de la pareja, aunque Alberto prácticamente no participa en la resolución.

Alberto acepta. Alberto (ítems 13 y 14) construye nombres para las cantidades *Cp* y *Cg* diferenciándolos mediante un código numérico que no hace referencia a si representan a los corrales que tienen más o menos ovejas. Mientras Alberto escribe, el profesor (ítem 14) recrimina la falta de diálogo y les solicita que expliquen lo que hacen.

8. (Lluís introduce [A1; 1…].)

9. (Cuando Lluís está introduciendo lo anterior, Alberto le mira y le dice algo al oído.)

10. Alberto: (Inaudible.)

11. Lluís: (Inaudible.)

12. (Lluís le pasa el teclado a Alberto y éste le pasa la hoja.)

13. (Alberto introduce [A1; 1 corral].)

14. Profesor: Deberíais… Ya ([…]) que estáis hablando poco, lo que os recomiendo es que ([…]) le expliquéis al otro, cuando estéis haciendo algo, por qué lo hacéis ([…]), ¡eh! Porque ([…]) no estáis hablando nada ([…]) y lo interesante de que estéis por parejas es para que habléis. Explicadle ([…]) al compañero (Alberto introduce [A2; 2 corral]), cuando estéis haciendo algo, por qué lo hacéis.

Alberto (ítem 15) decide no continuar y pasa la responsabilidad de gestionar la resolución a Lluís.

15. (Lluís mira a Alberto y sonríe. Alberto esconde las manos debajo de la mesa. Lluís le pasa la hoja a Alberto y éste le pasa el teclado.)

Lluís (ítems 16 y 20) construye nombre y asigna celda de manera implícita a la cantidad conocida *Mgp*; pero en el ítem 21 introduce el valor de cantidad la *Mgp* en la celda B1. En el ítem 22, Lluís explica a Alberto que introduce 30 en B1 para que haya una diferencia de 30 entre B1 y B2, lo que implica considerar que el nombre “1 corral” representa a *Cg* y “2 corral” a *Cp*. En el ítem 24, Lluís introduce cero en B2, que es el valor que debe tener *Cp* para que se respete la diferencia de 30 ovejas y en B3 (ítem 25) introduce 30 porque es el valor que tiene la cantidad conocida *Mgp* (ver Figura 28). En definitiva, Lluís ha empleado la relación $Cg = Mgp + Cp$ para el caso concreto en que *Cp* toma el valor cero.

16. Lluís: Pues ([…])… hemos puesto los corrales ([…]) para saber (ambos se miran)… calcular lo que es ([…]). Y ahora ([…]) ponemos la diferencia de lo que tiene ([…]) cada uno.

20. (Lluís introduce en [A3; Diferencia].)

21. (Lluís introduce [B1; 30].)

22. Lluís: Esto es ([…]), como la diferencia es treinta (Lluís […] hace clic en B1 y B2), aquí ponemos treinta para eso…

24. (Lluís introduce [B2; 0].)

25. (Lluís introduce [B3; 30].)

26. (Lluís estira B3 hasta [IV3; 30], mientras se produce un diálogo inaudible.)

	A	B
1	1 corral	30
2	2 corral	0
3	Diferencia	30

Figura 28. Después del ítem 26.

Lluís (ítem 29) representa una cantidad a la que llama “Total”, la cual podríamos interpretar como la suma de las ovejas de

29. (Lluís introduce [A4; Total].)

30. Lluís: Pongo total para hacer la resta y

los corrales. Sin embargo, no le asocia el valor 180 (el número total de ovejas), ni la fórmula =B1+B2 (la suma de las ovejas de los dos corrales como expresión de la relación $N = Cg + Cp$); sino que le asigna =180-b1-b2 (ver Figura 29). En el ítem 30, Lluís parece indicar que el problema quedará resuelto cuando se haga cero la cantidad que ha llamado "Total". Esto supondría plantear la igualdad sobre $0 = N - Cg - Cp$[48]. Esto podemos interpretarlo de dos formas: 1) Lluís ha realizado una transformación algebraica mental de la relación $N = Cg + Cp$, tras la lectura analítica. Una transformación gratuita que no aportaría nuevos significados a las expresiones en una resolución algebraica y que exigiría un esfuerzo extra. 2) Lluís ha considerado una nueva cantidad a la que podríamos llamar *número de ovejas que hay fuera de los corrales* y ha dispuesto la relación $0 = N - Cg - Cp$[49]. Esto supondrá plantear una condición no presente en el enunciado del problema, pero que permitirá modelar el proceso que se reflejará en las actuaciones posteriores.

cuando sea cero… (Inaudible.)…

31. (Lluís introduce [B4 =180-b1-b2; 150] usando el teclado.)

	A	B
1	1 corral	30
2	2 corral	0
3	Diferencia	30
4	Total	=180-B1-B2

Figura 29. Contenido de las celdas después del ítem 31.

Lluís replica (ítem 32) la fórmula que ha introducido en B4 y genera (ítems 34-38) progresiones aritméticas de diferencia uno en las filas 1 y 2. Sus palabras y sus hechos nos permiten sugerir que la intención de Lluís es utilizar la hoja de

32. (Lluís estira B4 hasta [IV4 =180-IV1-IV2; 180].)

34. (Lluís introduce [C1; 31].)

35. (Lluís introduce [C2; 1].)

36. (Lluís selecciona el rango B1:C1 y estira hasta [IV1; 284].)

[48] En ningún problema de los resueltos durante la secuencia de enseñanza se había observado esta estrategia de resolución en la pareja 3 (véase anexo D). Sin embargo, sí que se advierte una tendencia por parte de la pareja a interpretar los resultados numéricos dándoles sentido en una modificación de la situación real planteada (ver apartado 4.2.1.9).

[49] Suponer esta relación daría lugar a una nueva lectura analítica en la que se utiliza la cantidad innecesaria *número de ovejas que hay fuera de los corrales* para alcanzar la solución. Es innecesaria, porque podríamos resolver el problema aunque la elimináramos de la resolución. Sin embargo, veremos que dentro de la estrategia de resolución tiene un papel destacado, pues dará sentido a las acciones que se realizan en la hoja de cálculo. Hemos decidido no asignar una letra a dicha cantidad y representarla en las relaciones en las que participa mediante un cero.

cálculo para describir un posible proceso que haya llevado de una situación inicial hipotética al escenario descrito en el enunciado. Así, podemos interpretar que supone a las 180 ovejas fuera del corral, después introduce 30 en uno y, a continuación, va metiendo una en cada corral de forma alterna hasta que todas las ovejas quedan encerradas. Además, esta interpretación nos permite hacer la hipótesis plausible de que el nombre "Total" (ítem 29) hacía referencia al total de ovejas que quedaban fuera de los corrales. Es decir, Lluís ha realizado una inferencia analítica que ha transformado el enunciado del problema en un nuevo estado posible del mundo en el que todas las cantidades son conocidas o se pueden calcular a partir de conocidas y cumplen las restricciones del problema. Después ha empleado las facilidades que ofrece la hoja de cálculo a la hora de generar secuencias numéricas para unir ambas situaciones mediante el modelado de un posible proceso que llevará de un escenario al otro manteniendo en todo momento las restricciones del problema; es decir, generando una secuencia de nuevos estados posibles del mundo.

38. (Lluís selecciona el rango B2:C2 y estira hasta [IV2; 254]. Mientras, se produce un diálogo inaudible.)

Lluís (ítem 39) inicia la búsqueda de una celda que contenga un valor nulo en la fila 4 y la encuentra en BY4. Colorea (ítems 41 y 42) toda la columna BY (ver Figura 30) y da por concluida la resolución. El profesor pregunta cuál es el resultado y Lluís (ítem 46) no tiene dificultades en dar la respuesta correcta.

En definitiva, podemos identificar las relaciones $Cg = Mgp + Cp$ y $N = Cg + Cp$ en la resolución del problema, lo que supondría considerar que han realizado una lectura algebraica del mismo. Esta lectura algebraica podría resolverse mediante el MHC en la hoja de cálculo, pero han utilizado[50] un método

39. (Lluís desplaza la ventana hacia la izquierda hasta que inicia en la columna BV.)

40. (Lluís hace clic en BY2.)

41. (Lluís colorea de negro el rango BY1:BY4.)

42. (Lluís selecciona el color blanco como color de fuente.)

43. (Lluís hace clic sobre BY1 y BY2 de manera repetida.)

44. Lluís: Ya está.

45. Profesor: ¿Cuál es la solución?

46. Lluís: Primer corral, ciento cinco y segundo, setenta y cinco.

[50] Volvemos a utilizar el plural aunque la resolución la lleva a cabo Lluís de forma casi exclusiva.

idiosincrásico en el que han omitido la construcción de la fórmula que debería expresar la relación $Cg = Mgp + Cp$. En su lugar han generado dos progresiones aritméticas de diferencia uno que tendrán la característica de mantener una diferencia de 30 unidades (el valor de Mgp) entre los valores de una misma columna de las filas 1 y 2 y plantean la verificación de $0 = N - Cg - Cp$ como condición para dar por resuelto el problema.

◇	BX	BY	BZ
1	104	105	106
2	74	75	76
3	30	30	30
4	2	0	-2

Figura 30. En el ítem 42.

6.5.2.3. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema "Las actividades deportivas"

Lluís lee el enunciado en alto. Alberto (ítems 7, 8, 9, 10 y 12) construye nombres y asigna celdas implícitamente a las cantidades F, B, N, R y T (ver Figura 31). Sin embargo, omiten representar las cantidades conocidas Vnf, Mbf y Mrb que se usan para comparar unas cantidades desconocidas con otras.

5. (Lluís lee el enunciado.)

7. (Alberto introduce [A1; Futbol] mientras Lluís lee.)

8. (Alberto introduce [A2; Baloncesto] mientras Lluís lee.)

9. (Alberto introduce [A3; Natacion] mientras Lluís lee.)

10. (Alberto introduce [A4; Rugby] mientras Lluís lee.)

12. (Alberto introduce [A5; Personas apuntadas].)

15. Lluís: Pues… fútbol (señala B1 con el dedo).

16. Alberto: (Inaudible.)

18. (Alberto introduce [B5; 1375].)

◇	A	B
1	Futbol	
2	Baloncesto	
3	Natacion	
4	Rugby	
5	Personas apuntadas	1375

Figura 31. Después del ítem 18.

Después de unos instantes de reflexión, Alberto (ítems 26 y 35) introduce una fórmula que da cuenta de la relación $F = N \cdot Vnf$. No existe verbalización de la fórmula e inserta la referencia a la celda B3, en la que se halla una cantidad

25. (Silencio de 9 segundos.)

26. (Alberto empieza a introducir [B1 =b3…; …].)

35. (Alberto introduce [B1 =b3*2; 0] usando el teclado.)

desconocida, mediante el teclado. Alberto, que hasta el momento no había participado, no muestra reticencia a trabajar con cantidades desconocidas.

	A	B
1	Futbol	=B3*2
2	Baloncesto	
3	Natacion	
4	Rugby	
5	Personas apuntadas	1375

Figura 32. Contenido de las celdas después del ítem 35.

Alberto (ítem 47) empieza a introducir la fórmula que expresa la relación $B = F + Mbf$; mientras Lluís (ítem 47) la verbaliza, refiriéndose a la cantidad F mediante la posición de la celda que la representa. De forma errónea, Lluís (ítem 49) pretende que se debe hacer referencia en la fórmula a B2 en lugar de a B1, lo que supondría construir una operación con la cantidad B, en lugar de F. Alberto (al final ítem 49), sin atender a Lluís, introduce la fórmula =b1*43, empleando un producto en vez de la suma propuesta por Lluís[51]. Alberto (ítems 50 y 51) apunta que en la celda B2 se representa la cantidad B. En el ítem 51, Lluís se da cuenta de su error e indica a Alberto que sustituya el producto por una suma. Éste (ítem 55) obedece e introduce la fórmula correcta =B1+43 en la celda B2, dando cuenta de la relación $B = F + Mbf$.

47. Lluís: Pues en baloncesto tienes que… tienes que poner be uno (Alberto empieza a introducir [B2 =b1…; …]) más cuarenta y tres. (Prácticamente inaudible.)

48. Profesor: Habla más alto, Lluís.

49. Lluís: En baloncesto tiene que poner (mientras tanto Alberto está introduciendo [B2 =b1*43…, …])… No, be dos (mueva la mano hacia el teclado y Alberto se la aparta). En baloncesto tiene que poner be dos más cuarenta y tres (Alberto introduce [B2 =b1*43; 0] usando el teclado)…

50. Alberto: Be dos es baloncesto…

51. Lluís: …porque si pones be uno se sumaría fútbol (señala a la pantalla). (Alberto mueve la celda activa de B2 a B1 con lo que se puede ver [B1 =B3*2, 0].) Ah, pues eso, be uno… Me he liado yo ([…]).

52. Alberto: ¿Pero ([…]) se suma? (Casi inaudible.)

54. Lluís: No sé.

55. (Alberto empieza a modificar [B2 =B1+43…, …], pero se equivoca y escribe [B2 =B1+B443…, …]. Al intentar arreglarlo introduce [B2 =B1+B4; 0].)

56. Lluís: Be cuatro, no. Cuarenta y tres. (Prácticamente inaudible.)

57. (Alberto modifica [B2 =B1+43, 43].)

Con “Natación cero” (ítem 65) y con “En natación hay que poner (sic) nada por ahora” (ítem 71), Lluís parece identificar la cantidad N como cantidad de referencia. Esto lo hace antes de haber terminado de construir todas las fórmulas que describen las relaciones que las cantidades

65. Lluís: Natación cero. ([…])

67. Alberto: (Inaudible.) (Señala al enunciado.)

69. Lluís: Natación, es que luego hay que poner (prácticamente inaudible)…

70. Profesor: Lluís, ([…]) habla más alto,

[51] Estamos ante un ejemplo de error al expresar mediante fórmula (paso 3 del MHC) una relación correcta obtenida tras la lectura analítica del problema (paso 1 del MHC).

desconocidas tienen con otras cantidades, lo que nos permite concluir que es capaz de anticipar la jerarquía de dependencias entre cantidades desconocidas.

por favor! ¿Natación, qué?

71. Lluís: En natación hay que poner (sic) nada por ahora.

Tras unos instantes de reflexión, Alberto (ítem 77) comienza a construir una fórmula que, de momento, relaciona las cantidades desconocidas R y B. Esto vuelve a poner de manifiesto que Alberto es capaz de operar con cantidades desconocidas. Alberto parece dudar sobre cuál es el vínculo entre las cantidades y Lluís (ítem 79) le sugiere añadir *Mrb*. Alberto (ítem 81) acaba introduciendo la fórmula =b2+29 en la celda B4, lo que supondría expresar correctamente la relación $R = B + Mrb$.

76. (Silencio de 6 segundos.)

77. (Alberto empieza a introducir [B4 =b2…; …].)

79. Lluís: Más veintinueve.

81. (Alberto introduce [B4 =b2+29; 72] usando el teclado. La celda activa queda en B3.)

Lluís (ítem 82) vuelve a insistir sobre la asignación de la celda de referencia a B3, la cual representa la cantidad N. Alberto (ítem 83) obedece a Lluís e introduce un cero en B3.

82. Lluís: Ahí, cero (señalando la pantalla con la mano).

83. (Alberto introduce [B3; 0].)

Sin mediar palabra, Lluís (ítem 84) introduce la fórmula =1375-B1-B2-B3-B4 en B5, expresando la relación $0 = T - F - B - N - R$[52]. Esta fórmula parece expresar la cantidad *número de personas que quedan por apuntar*. Sin embargo, la fila 5 había sido etiquetada por Alberto (véase ítems 12 y 18) con el nombre "Total" que parecía simbolizar la cantidad T (ver Figura 33). Posiblemente, Lluís intenta dotar de dinamismo a la situación estática propuesta en el enunciado, ofreciendo una posible explicación de cómo se llevó a cabo la inscripción. El hecho de que Lluís (ítem 85) exprese su intención de "restar personas" pone de manifiesto que su propósito es inscribir a las 1260 personas que quedan por apuntar. En definitiva, se plantea, de manera implícita, el paso 4 del

84. (Lluís coge el ratón y sitúa el teclado delante de él. Modifica [B5 =1375-B1-B2-B3-B4; 1260] usando el ratón.)

85. Lluís: Aquí tendría que poner (casi inaudible)… Aquí tendríamos que poner uno (Lluís introduce [C3; 1]) para empezar a restar personas… (Inaudible.)

[52] Nuevamente, podríamos interpretarlo como una transformación algebraica mental o como la consecuencia de la utilización de una nueva cantidad. Nos decantaremos por la segunda opción y remitimos a los comentarios al ítem 31 del problema *Las ovejas* (apartado 6.5.2.2.) para una descripción más detallada que podríamos importar a este caso.

MHC sobre la verificación de la relación $0 = T - F - B - N - R$.

	A	B	C
1	Futbol	=B3*2	
2	Baloncesto	=B1+43	
3	Natacion	0	1
4	Rugby	=B2+29	
5	Personas apuntadas	=1375-B1-B2-B3-B4	

Figura 33. Contenido de las celdas después del ítem 85.

En el ítem 95, Alberto genera una progresión aritmética de diferencia uno que proporcionará los posibles valores de la cantidad *N*. La intención de Alberto (ítem 100) parece que era generar, en la fila 1, una progresión aritmética de diferencia uno a partir del valor presente en B1, con lo que posiblemente intentaba repetir lo hecho en el problema anterior. Si hubiera continuado con su plan, Alberto habría hecho desaparecer las relaciones entre cantidades de la columna B. Lluís (ítems 101 y 103) se opone sin dar explicación y toma el mando. En los ítems 104 y 105, Lluís replica la fórmula presente en B1 y le indica (ítem 108) a Alberto que debe hacer los mismo con las celdas B2 y B4. De esta forma, entre los ítems 104 y 112, replican los pasos 3 y 4 de manera correcta.

95. (Alberto selecciona el rango B3:C3 y estira hasta [IV3; 254].)

98. (Alberto estira B5 hasta [IV5 =1375-IV1-IV2-IV3-IV4; 1121] y, mientras Alberto arrastra, Lluís hace un gesto de aprobación.)

100. (Alberto empieza a escribir en [C1; 1…].)

101. Lluís: No (casi inaudible).

103. (Lluís borra C1.)

104. (Lluís estira B1 hasta [D1 =D3*2, 4].)

105. (Lluís selecciona el rango B1:D1 y estira hasta [IV1 =IV3*2, 508].)

107. (Lluís selecciona la celda B2.)

108. Lluís: Sólo tienes que arrastrarla…

109. Alberto: Ya lo sé. (Prácticamente inaudible.)

110. (Alberto estira B2 hasta [IV2 =IV1+43, 551].)

112. (Alberto estira B4 hasta [IV4 =IV2+29; 580].)

Lluís (ítem 114) identifica la celda FZ5 donde se observa un cero, que debe interpretarse como que todos los estudiantes ya se han apuntado a alguna actividad. Preguntado por la respuesta, Alberto (ítem 121) ofrece los valores que efectivamente son solución del problema (ver Figura 34).

En definitiva, utilizan las relaciones necesarias y suficientes $T = F + B + N + R$, $F = N{\cdot}Vnf$, $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$, siguiendo el MHC de forma respetuosa. Aunque emplean el MHC, el hecho de establecer la igualdad sobre $0 = T - F - B - N - R$ dota de significado a las secuencias generadas en una posible explicación de cómo se llevó a cabo la inscripción desde una situación hipotética de partida hasta la planteada en el

113. (Alberto empieza a mover la ventana hacia la izquierda lentamente hasta que la ventana se inicia en la columna FX.)

114. (Lluís señala a [FZ5, 0].)

119. Profesor: ¿Ya está? ¿La respuesta cuál era?

120. (Alberto mueve la ventana hasta que se inicia en la columna FW. La columna FZ aparece en pantalla.)

121. Alberto: Pues en fútbol trescientos sesenta; en baloncesto, cuatrocientos tres; en natación, ciento ochenta; y en rugby, cuatrocientos treinta y dos.

problema, manteniendo en todo momento constante la cantidad de personas presentes.

◇	FY	FZ	GA
1	358	360	362
2	401	403	405
3	179	180	181
4	430	432	434
5	7	0	-7

Figura 34. Después del ítem 116.

6.5.2.4. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema "Los tres amigos"

Construyen nombres y asignan celda, de manera implícita, a las cantidades desconocidas *L*, *J*, *R* y a la cantidad conocida *T*. Sin embargo, no se representan las cantidades conocidas que sirven para establecer comparaciones entre cantidades desconocidas.

5. Alberto: (Inaudible.)

6. (Alberto introduce [A1; Luis].)

8. Lluís: Eh… Luis, luego Juan…

10. (Alberto introduce [A2; Juan].)

11. Lluís: Y Roberto.

12. (Alberto introduce [A3; Robrto].)

14. Lluís: Rober.

15. (Alberto […] modifica [A3; Roberto].)

18. Lluís: Total a repartir (señala a la pantalla con la hoja).

19. (Alberto introduce [A4; Total a repartir].)

Lluís (ítem 22) verbaliza la fórmula que expresa la relación $J = L + Mjl$, refiriéndose a la cantidad *L* mediante la posición de la celda que se le ha asignado. Alberto (ítem 24) introduce la fórmula =b2-24 en B1 usando el teclado para referirse a la celda B2 (ver Figura 35). No parece causarles malestar la presencia de un valor provisional negativo en B1 (ver ítem 24) para una cantidad, como es el dinero obtenido tras un reparto, que debe tener un valor positivo.

22. Lluís: Luis ([…])… Luis es ([…]) be dos menos veinticuatro.

24. (Alberto introduce [B1 =b2-24; -24] mediante el teclado.)

◇	A	B
1	Luis	=B2-24
2	Juan	
3	Roberto	
4	Total a repartir	

Figura 35. Contenido de las celdas después del ítem 24.

En el ítem 26, Lluís parece encontrar alguna dificultad en el enunciado y recurre al profesor. Alberto (ítem 31) indica "Que sería entre diez", lo que nos permite suponer que la dificultad de Lluís se centraba en el fragmento de enunciado

26. Lluís: Y ([…]) aquí qué (señala a punto del enunciado)… Es que esto no ([…])…

27. Profesor: No os puedo decir nada del enunciado ([…]) del problema. Lo tenéis que interpretar vosotros.

"la décima parte de lo que ganó Roberto".

28. Alberto: (Inaudible.) ([…])

29. Profesor: Habla más alto. ¿Qué le has dicho?

31. Alberto: Que sería entre diez.

Posiblemente, la observación de Alberto sirva para aclarar las dudas de Lluís, o bien decida dejar para más adelante la decisión. Sea como sea, se centra (ítems 34 y 39) en identificar la cantidad de referencia, para lo que introduce un cero en la celda B2, que representa a la cantidad J.

34. Lluís: Juan (señala con la mano a la pantalla), cero.

39. (Lluís introduce [B2; 0].)

Lluís (ítem 42) verbaliza la relación $R = L{\cdot}Vlr$ refiriéndose a la cantidad L por la posición de la celda donde se representa e introduce la fórmula =b1*10 en la celda B3. Lluís opta por expresar diez veces lo que ganó Luis en lugar de la décima parte de lo que ganó Roberto, evitando de esta forma duplicar las celdas que representan a la cantidad L. Con este fin, quizá se ampara en las posibilidades que le ofrece el lenguaje verbal para modificar el orden de sujeto y atributo (y modificador del atributo) pasando de *A es la décima parte de B* a *B es diez veces A*.

40. Lluís: Y Roberto es ([…])…

42. Lluís: A ver ([…])… Igual (escribe [B3 =…; …]) be uno (escribe [B3 =b1; …]) por diez (introduce [B3 =b1*10; -240] usando el teclado).

◇	A	B
1	Luis	=B2-24
2	Juan	0
3	Roberto	=B1*10
4	Total a repartir	=960-B1-B2-B3

Figura 36. Contenido de las celdas después del ítem 45.

Lluís (ítem 45) introduce la fórmula =960-B1-B2-B3 en la celda B4 (ver Figura 36). Parece que esta fórmula calcula el dinero que queda por repartir, y así lo expresa, cuando, a petición del profesor, lo explica (ítem 49) a su compañero. De manera, implícita, Lluís establece la igualdad sobre $0 = T - L - J - R$. Sin embargo, hemos de apuntar que, a diferencia de lo que ocurría en los problemas anteriores, los valores provisionales que se ofrecen en algunas celdas (véase el valor de las celdas B1 y B3 en la Figura 37) son negativos. También se observa (véase el valor de la celda B4 en la Figura 37) que el valor provisional del dinero a repartir es

45. (Lluís introduce [B4 =960-B1-B2-B3; 1224] usando el ratón.)

47. Profesor: Explícale a tu compañero qué has hecho ([…]) al escribir esa fórmula, por favor.

49. Lluís: Pues he hecho esto igual que siempre para saber lo que queda por repartir…

superior a los 960 euros ofrecidos en el enunciado. En definitiva, Lluís vuelve a plantear la construcción de la situación propuesta en el enunciado, pero ahora con la diferencia de que los valores provisionales ya no son valores posibles en una situación inicial. Podemos interpretar su actuación como una generalización del tipo de igualdad empleada en los problemas anteriores.

	A	B
1	Luis	-24
2	Juan	0
3	Roberto	-240
4	Total a repartir	1224

Figura 37. Después del ítem 45.

Lluís (ítems 51-54), siguiendo el paso 5 del MHC, produce una secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia, utilizando el método de generarla a partir de los dos primeros valores de la serie y, a continuación, replica (ítems 56-78) las fórmulas presentes en las celdas B1, B3 y B4.

El profesor (ítem 57) pretende que Lluís explique a su compañero qué intención le guía al generar la secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia y replicar las fórmulas. Lluís no contesta inmediatamente y cuando lo hace se limita (ítem 70) a explicar qué relaciones están detrás de las fórmulas que ha introducido en las celdas B1 y B3.

51. (Lluís introduce [C2; 1].)

52. (Lluís selecciona el rango B2:C2.)

53. Lluís: Aquí he puesto uno ([…]) para hacer continuar las operaciones.

54. (Lluís estira B2:C2 hasta [IV2; 254].)

56. (Lluís estira B1.)

57. Profesor: Explícale a tu compañero por qué vas ha hacer eso.

58. Alberto: Ya está. (Casi inaudible.)

59. (Lluís llega hasta [C1 =C2-24; -23].)

65. (Alberto […] empieza a estirar B1:C1.)

67. Lluís: Sí… (Inaudible.)

68. (Alberto llega hasta [IV1 =IV2-24; 230].)

70. Lluís: Hemos hecho esto porque hemos puesto (hace clic en B3 y B2)… Luis (hace clic en B1)… o sea, be dos menos veinticuatro, porque Luis le ha dao (sic) veinticuatro euros menos que a Juan (sitúa el cursor sobre B2). Y hemos puesto a Roberto menos doscientos cuaren… O sea (hace clic en B3 y se muestra la fórmula que contiene), be uno por diez porque gana ([…]) diez veces más que Luis. O sea, diez veces menos que Luis… No (casi inaudible).

71. Alberto: Sí, sí. (Casi inaudible.)

74. Lluís: (Inaudible.)

75. (Lluís estira B3 hasta [IV3 =IV1*10; 2300]. […])

78. (Lluís estira B4 hasta [IV4 =960-IV1-IV2-IV3; -1824].)

Lluís (ítem 79) inicia la búsqueda del valor 0 en la fila 4 y lo encuentra en la

79. (Lluís mueve lentamente la ventana hacia la izquierda y luego hacia la derecha. La detiene

celda CZ4. A continuación, colorea (ítem 80) la columna CZ (ver Figura 38) y da por concluida la resolución. El profesor pregunta cuál es la solución y Alberto (ítem 103) da la respuesta correcta.

En definitiva, utilizan las relaciones necesarias y suficientes $T = L + J + R$, $R = L \cdot Vlr$ y $J = L + Mjl$ y vuelven a emplear el MHC. Plantean la igualdad sobre la relación $T = L + J + R$, expresada como $0 = T - L - J - R$. Podríamos concluir que se propone una igualdad a la que se da significado en un proceso que describe la evolución desde una situación hipotética hasta la situación planteada en el enunciado del problema. En este problema, sin embargo, la situación reflejada en la columna B no es un escenario posible del mundo; ya que B1 y B3 contienen valores negativos y B4, que representa el dinero a repartir, contiene un valor mayor a 960.

cuando se inicia en la columna CX. Se observa la columna CZ y el valor que contiene CZ4 es cero.)

80. (Lluís pinta de negro el rango CZ1:CZ4 y cambia el color de la fuente.)

97. Lluís: Sí, ya está. Sí que está bien ([…]).

100. Profesor: ¿Cuál era la solución?

101. Lluís: Dilo ([…]).

103. Alberto: Luis, setenta y ocho; Juan, ciento dos; y Roberto, setecientos ochenta.

◇	CY	CZ	DA
1	77	78	79
2	101	102	103
3	770	780	790
4	12	0	-12

Figura 38. Después del ítem 80.

6.5.2.5. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema "Lana y algodón"

Deciden que sea Alberto el que cargue con el peso de la resolución y éste (ítems 8 y 10) construye los nombres "Algodón" y "Lana", cuya ambigüedad nos impide identificar las cantidades que pretende representar. Lluís (ítem 14) toma el teclado y construye nombres y asigna celdas a las cantidades M (ítem 14) y P (ítem 16). El que construye para P modifica la situación planteada en el problema; pues en el enunciado se habla de valor de la tela (un dinero que se tendrá cuando se venda la tela), mientras que el nombre "dinero disponible" refleja la posesión del mismo. Encontramos dos posibles causas: 1) Repite la estructura del nombre ("Metros disponibles" que ha introducido anteriormente en el ítem 14. 2) Utiliza cantidades que no son propias

4. Lluís: ¿Tú o yo ([…])?

5. Alberto: Yo.

8. (Alberto introduce [A1; Algodón].)

10. (Alberto introduce [A2; Lana].)

14. (Lluís introduce [A3; Metros disponibles].)

16. (Lluís introduce [A4; dinero disponible].)

de la situación ofrecida en el enunciado, sino de una posible evolución. Es decir, emplea al mismo tiempo cantidades propias de las condiciones del enunciado (el presente) y cantidades propias de lo que ocurrirá cuando se venda la tela (el futuro).

Lluís (ítems 31 y 32) introduce los valores de las cantidades conocidas *M* y *L*, respectivamente y coloca (ítems 33 y 34) dos ceros en las celdas B1 y B2 (ver Figura 39). Sean cuales sean las cantidades que se representan, lo que se pone de manifiesto es que Lluís considera que ambas cantidades no están relacionadas. Llegamos a esta conclusión después de observar que ha marcado de esta forma a la cantidad de referencia en todos los problemas que ha resuelto mediante el MHC (ver, por ejemplo, ítem 34 del apartado 6.5.2.4.) y a la luz de que la presencia de estos dos valores provisionales impide la plasmación de una relación aditiva a través de las secuencias numéricas (por ejemplo, $M = Ma + Ml$).

31. (Lluís introduce [B3; 12].)
32. (Lluís introduce [B4; 32].)
33. (Lluís introduce [B2; 0].)
34. (Lluís introduce [B1; 0].)

Evidentemente, la actuación anterior va en contra de la exigencia del paso 2 del MHC de que exista una única celda de referencia.

	A	B
1	Algodón	0
2	Lana	0
3	Metros disponibles	12
4	dinero disponible	32

Figura 39. Contenido de las celdas después del ítem 34.

Lluís (ítem 55) sustituye el contenido de la celda B4 por la fórmula =32-B1-B2 y en el ítem 57 introduce la fórmula =12-1 en B3 (ver Figura 40).

55. (Lluís introduce [B4 =32-B1-B2; 32] usando el ratón.)
57. (Lluís modifica [B3 =12-1; 11].)

	A	B
1	Algodón	0
2	Lana	0
3	Metros disponibles	=12-1
4	dinero disponible	=32-B1-B2

Figura 40. Contenido de las celdas después del ítem 57.

Ante la ausencia de verbalización de las relaciones o fórmulas empleadas, el profesor (ítem 60) le pide a Lluís que

60. Profesor: Explícale ([…]) a tu compañero lo que estás haciendo.
63. Lluís: Pues (modifica [B3 =12; 12])… he

comente a su compañero lo que está haciendo. La explicación, “para poner que no hemos comprado ningún metro” (ver ítem 63), parece confirmar que B1 y B2 representan a las cantidades *Ma* y *Ml*, respectivamente, y que escribe cero para indicar que no se ha comprado ningún metro. Sin embargo, cuando el profesor (ítem 66) insiste sobre lo que representa la fórmula =32-B1-B2, Lluís (ítem 68) se refiere al contenido de B1 y B2 como un precio (“que se reste el ([…]) dinero que hay arriba”, ítem 68) y, por lo tanto, como *Pa* y *Pl*, respectivamente. En consecuencia, podemos concluir que en la celda B4 ha introducido una fórmula que expresaría la relación correcta $0 = P - Pa - Pl$. A continuación, el profesor (ítem 72) se interesa por la sustitución por =12 de la fórmula =12-1, presente en B3, que había hecho en el ítem 63 (ver Figura 41). Lluís (ítem 74) parece manifestar que con =12-1 pretendía expresar la necesidad de vender toda la tela, pero ha entendido que podían no venderse los mismos metros de cada tipo de tela.

A medida que avanzaba la resolución, Lluís (ítems 63-74) ha supuesto cantidades distintas representadas en las celdas B1 y B2, respectivamente. Ofrecemos dos posibles explicaciones no excluyentes: 1) Ha intentado dar sentido a las etiquetas poco precisas introducidas por Alberto en los ítems 8 y 10 dentro de un esquema de resolución que iba perfilando poco a poco. 2) Manifiesta una confusión entre *Pa-Ma* y *Pl-Ml* consecuencia de que el precio de cero metros de tela es de cero euros y de que los valores provisionales representados en B1 y B2 son sendos ceros.

puesto algodón cero (hace clic en B1) para compro… o sea para poner que no hemos comprado ningún metro. De lana cero (hace clic en B2), también, para poner que no hemos comprado ningún metro. Y (hace clic en B3) para calcular que tenemos me… doce metros disponibles y (hace clic en B4 y se muestra =32-B1-B2) dinero disponible, treinta y dos.

66. Profesor: Pero eso de treinta y dos menos ([…]) be uno (haciendo referencia al contenido de B3)…

68. Lluís: Para cuando hago las siguientes operaciones, que se reste el ([…]) dinero que hay arriba.

72. Profesor: Eso ([…]) que has borrado, que habías puesto doce menos uno menos uno.

74. Lluís: Porque es que era para ir (mueve el cursor sobre B1 y B2) de un metro en un metro, pero a lo mejor los metros (mueve el cursor sobre A1 y A2) no es lo mismo los de algodón y los de lana ([…]).

	A	B
1	Algodón	0
2	Lana	0
3	Metros disponibles	=12
4	dinero disponible	=32-B1-B2

Figura 41. Contenido de las celdas después del ítem 63.

Tras unos instantes sin acción, Lluís (ítems 84 y 85) cambia los nombres que había introducido Alberto en A1 y A2. Los nuevos nombres eliminan la incertidumbre respecto a si se representan metros de tela o precio de la tela en las celdas B1 y B2: en B1 se representa *Pa* y en B2, *Pl*. Esto parece confirmar que la fórmula =32-B1-B2 expresaba la relación $P = Pa + Pl$. En los ítems 83 y 86, Lluís genera una progresión aritmética de diferencia dos en la fila 1 en la que hemos supuesto que se representa la cantidad *Pa*. Quizá la construcción de esta secuencia en la fila 1 utiliza de manera implícita la relación $Pa = Ua{\cdot}Ma$, pues el efecto que obtendríamos sería el mismo que multiplicar *Ua* por 1, 2 y 3. Sin embargo, Lluís comete el error de asociar a *Ua* el valor correspondiente a *Ul* produciendo una secuencia de diferencia dos en lugar de diferencia cuatro[53].

80. (Silencio de 10 segundos.)

83. (Lluís introduce [C1; 2].)

84. (Lluís modifica [A1; Algodón €].)

85. (Lluís modifica [A2, Lana €].)

86. (Lluís selecciona el rango B1:C1 y estira hasta [E1; 6].)

Lluís genera un progresión aritmética de diferencia menos uno en la fila 3, que parece reflejar la intención (ítem 74) de ir *de un metro en un metro*. Esta fórmula de recurrencia no responde a ninguna relación entre las cantidades del problema ni permite modelar el paso de una posible situación hipotética a otro escenario. De hecho, el mismo Lluís (ítem 74) ya había indicado "pero a lo mejor los metros ([…]) no es lo mismo los de algodón y los de lana".

90. (Lluís introduce [C3 =B3-1; 11] usando el ratón.)

91. (Lluís estira C3 hasta [S3 =R3-1; -5].)

[53] Sin embargo, no podemos establecer una relación causa-efecto entre ambos hechos. Quizá, Lluís reaccione ante las dos relaciones que expresan la estructura conceptual total de la misma forma que lo ha hecho en los problemas *Las ovejas*, *Las actividades deportivas* y *Los tres amigos*: construyendo escenarios en los que objetos fluyen completamente entre dos receptáculos reales o imaginarios.

	A	B	C	D
1	Algodón €	0	2	4
2	Lana €	0		
3	Metros disponibles	=12	=B3-1	=C3-1
4	dinero disponible	=32-B1-B2		

Figura 42. Contenido de las celdas después del ítem 91.

En el ítem 93, Lluís colorea las filas 3 y 4 (ver Figura 42) sin dialogar con su compañero y el profesor interviene para ver con qué intención se hace. Lluís (ítem 96) contesta "los dos tienen que coincidir a cero". Como se pondrá de manifiesto más adelante (ver comentarios al ítem 144), Lluís propone el cumplimiento simultáneo de dos igualdades, lo que está en consonancia con haber supuesto dos cantidades de referencia independientes. Ahora bien, el hecho de que proponga que ambas cantidades (las representadas en las filas 3 y 4) se hagan cero supone la existencia de dos protagonistas: el vendedor, que se queda sin tela, y el comprador, que se queda sin dinero. Parece que su intención es repetir el método de resolución empleado en el problema *Las ovejas*. Sin embargo, no conseguirá que los valores presentes en las columnas plasmen escenarios posibles en una evolución entre la situación inicial y final, al no tener en cuenta todas las restricciones del problema.

93. (Lluís colorea las filas 3 y 4.)

94. (Lluís hace clic en D4 y en C2 y después mueve la ventana hasta que se inicia en la columna C. Tras esto vuelve la ventana al inicio.)

95. Profesor: ¿Por qué has marcado ésos dos de amarillo?

96. Lluís: Porque los dos tienen que coincidir a cero.

Al igual que ha hecho con *Pa*, genera en la fila 2 una secuencia de posibles valores para *Pl* (ítems 106-108) que aumenta de cuatro en cuatro[54] y que daría respuesta a un incremento de uno en uno de la cantidad *Ml* (que no está representada). Esto supondría emplear, de algún modo, la relación *Pl* = *Ul*·*Ml*, asignando a *Ul* el valor de *Ua* de manera incorrecta. Lluís inicia esta serie en la columna F con lo que evita hacer coincidir el cero de las secuencias que genera en las filas 1 y 2 (ver Figura 43) para introducir la posibilidad de que no se venda la misma

106. (Lluís introduce [F2; 4].)

107. (Lluís introduce [G2; 8].)

108. (Lluís selecciona el rango F2:G2 y estira hasta [N2; 36].)

110. (Lluís estira B4 hasta [N4 =32-N1-N2; -10].)

54 Veremos que Lluís se da cuenta de que ha intercambiado los valores de las cantidades *Ua* y *Ul* en el ítem 166.

cantidad de los dos tipos de tela. La decisión de dónde colocar el origen de la segunda secuencia sólo atiende al azar.

	D	E	F	G
1	4	6		
2			4	8
3	10	9	8	7
4				

Figura 43. El desfase de las secuencias de las filas 1 y 2 después del ítem 108.

Lluís (ítem 116) confiesa que está haciendo pruebas. En el ítem 113, alarga la secuencia de posibles valores de *Pa*; en el 114, elimina parte de la secuencia de *Pl*; y en el 117, parece que comete un error, pues en lugar de seleccionar dos celdas de la fila 1, para que el programa calcule los siguientes elementos de la secuencia de manera automática, estira sólo de G1, generando una secuencia de valores constantes. Sin embargo, no es un error, sino lo que podemos interpretar como una técnica, que repetirá más adelante, para dejar fija una secuencia de valores (en este caso *Pa*) y centrar la variación en la otra.

113. (Lluís selecciona el rango C1:E1 y estira hasta [G1; 10].)

114. (Lluís borra F2 y G2.)

115. (Lluís empieza a estirar G1.)

116. Lluís: Ahora estoy haciendo pruebas para… hasta que me salga.

117. (Lluís llega hasta [N1; 10].)

Lluís modifica la posición relativa de las secuencias numéricas de las filas 1 y 2 con la intención de conseguir la coincidencia de ceros en una misma columna en las filas 3 y 4. Sin embargo, hemos de apuntar que el cero presente en la fila 3 tiene una posición fija, pues es consecuencia de una relación de recurrencia entre los elementos de la propia fila. Por lo tanto, Lluís organiza la búsqueda de la solución suponiendo una conexión indirecta inexistente entre los valores de las filas 3 y 4.

	K	L	M	N	O
1	18	10	10	10	
2		4	8	12	16
3	3	2	1	0	-1
4	14	18	14	10	

Figura 44. Después del ítem 132.

Omitimos las variaciones que Lluís sigue realizando en las secuencias de valores en las filas 1 y 2 entre los ítems 119 y 132 y partimos del estado de la resolución

133. (Lluís estira K1 hasta [Q1; 18].)

134. (Lluís mueve la ventana lentamente hacia la izquierda y la detiene cuando se inicia en la columna J.)

después del ítem 132 (ver Figura 44).

Lluís (ítems 133 y 135) vuelve a utilizar la técnica de dejar fija la secuencia de valores de *Pa*. Para ello genera una secuencia uniforme desde la celda K1 y después desde J1 (ítem 135, ver Figura 45).

135. (Lluís estira J1 hasta [U1; 16].)

136. (Lluís mueve la ventana hasta que se inicia en la columna I.)

	K	L	M	N	O
1	16	16	16	16	16
2		4	8	12	16
3	3	2	1	0	-1
4	16	12	8	4	

Figura 45. Después del ítem 136.

Ante la falta de diálogo, el profesor pide a Lluís que explique el método que guía su actuación. Su contestación, "Voy pro… De uno en uno voy probando" (ítem 139), indica que está aplicando una estrategia de ensayo y error[55]. Las decisiones que toma en los ítems 138, 140 y 141 parecen indicar que se ha dado cuenta de que para la cantidad *P* el cero se alcanza cuando *Pa* y *Pl* toman el valor 16 (véanse los valores de las celdas O1, O2 y O4 en la Figura 45) y de que el cero de la fila 3 está fijo en la columna N. Así, genera (ítem 141) en la fila 2 una nueva secuencia a partir de los valores cuatro y ocho que introduce en las celdas K2 (ítem 138) y L2 (ítem 140), respectivamente.

137. Profesor: ¿Esas pruebas las haces con algún tipo de orden?

138. (Lluís introduce [K2; 4].)

139. Lluís: Eh… Voy pro… De uno en uno voy probando.

140. (Lluís modifica [L2; 8].)

141. (Lluís estira el rango K2:L2 hasta [P2; 24].)

Lluís (ítem 143) encuentra ceros en las celdas N3 y N4, lo que supondría, verificar la condición había impuesto para resolver el problema: dejar de disponer de dinero y de tela de manera simultánea. Así, en el ítem 144, colorea la columna N (ver Figura 46) y afirma que "Ya está" (ítem 146).

142. Lluís: Es que ésta ya no…

143. (Lluís, mientras habla, empieza a mover la ventana hacia la derecha y se detiene cuando la ventana se inicia en la columna M. Se observa la columna N y las celdas N3 y N4 que contienen sendos ceros.)

144. (Lluís pinta de negro el rango N1:N4 y cambia el color de la fuente.)

146. Lluís: Ya está.

[55] Una estrategia de ensayo y error en la que se comprueban (supuestamente) dos condiciones al mismo tiempo.

	M	N	O
1	16	16	16
2	12	16	20
3	1	0	-1
4	4	0	

Figura 46. Después del ítem 144.

De acuerdo con el protocolo de intervención, se le pregunta (ítem 148) por la solución, pues no la ofrece de manera explícita. Posiblemente, Lluís observa que realmente no ha contestado a la pregunta del problema y construye (ítems 155 y 156) los nombres “Algodon metros” y “Lana metros” en las celdas A5 y A6, respectivamente: de esta forma asigna la celdas B5 y B6 a las cantidades *Ma* y *Ml*. Hecho esto, Lluís (ítem 158) pregunta por el valor de *Ua* para calcular, supuestamente, *Ma* a partir de *Pa* mediante *Pa* = *Ua*·*Ma*. Cuando Alberto (ítem 160) le informa que son cuatro euros, Lluís (ítem 166) se da cuenta de que él había empleado un precio de dos euros por metro de tela de algodón a la hora de generar las secuencias de la fila 1 y de cuatro euros por metro de tela de algodón en la fila 2. Lejos de acobardarse, soluciona (ítems 167 y 168) el error intercambiando los nombres de las filas 1 y 2. Esto es posible gracias a la simetría que le da la conmutatividad de la relación *P* = *Pl* + *Pa* que ha sido la única que había expresado como fórmula. Sin que sea necesario, también intercambia (ítems 170 y 172) los nombres que había situado en A5 y A6.

148. Profesor: ¿Ya está? ¿Cuál es la solución?

152. Lluís: Pues (mueve la ventana hacia la derecha)… Espérate un momento que no está.

155. (Lluís modifica [A5; Algodon metros].)

156. (Lluís introduce [A6; Lana metros].)

158. Lluís: ¿Cuánto pide ([…])? ¿Cuánto vale el metro de algodón? (Casi inaudible.)

160. Alberto: Cuatro euros. (Casi inaudible.)

166. Lluís: Que ([…]) cuánto valía un metro de algodón y otro de lana. Me he equivocado y lo he puesto al revés.

167. (Lluís modifica [A1; Lana €].)

168. (Lluís modifica [A2; Algodon €].)

169. Lluís: (Inaudible)… y lo he hecho bien.

170. (Lluís modifica [A5; Lana metros].)

171. Lluís: Metros de lana (dice esto mientras modifica lo anterior).

172. (Lluís modifica [A6; Algodon metros].)

Sin verbalizar la relación ni la fórmula, Lluís introduce las expresiones que plasman las relaciones *Pl* = *Ul*·*Ml* y *Pa* = *Ua*·*Ma* (ítems 173 y 176). Estas relaciones se habían utilizado previamente (intercambiando de forma errónea los valores de *Ua* y *Ul*), aunque de forma implícita, al generar las secuencias de valores de *Pa* y *Pl* en las filas 1 y 2, respectivamente. Ahora se emplean para obtener *Ma* y *Ml* a partir de los valores de *Pa* y *Pl*. Lluís (ítems 179 y 181) arrastra las fórmulas presentes en C5 y C6 hasta

173. (Lluís introduce [C5 =C1/2; 1] utilizando el ratón.)

176. (Lluís introduce en [C6 =C2/4; 0] usando el ratón.)

179. (Lluís estira C6 hasta [N6 =N2/4; 4].)

181. (Lluís estira C5 hasta [N5 =N1/2; 8].)

182. Lluís: Pues de (mueve la ventana al inicio)… de lana (Alberto mira a la pantalla) hemos comprao (sic) (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna J) ocho y de algodón cuatro.

alcanzar la columna N (donde han señalado las cantidades presentes en negro) y ofrece como respuesta al problema los valores que se muestran en la celdas N5 y N6, que son 8 y 4, respectivamente.

En definitiva, utilizan las relaciones necesarias $P = Pa + Pl$, $Pa = Ua{\cdot}Ma$ y $Pl = Ul{\cdot}Ml$; pero no emplean en ningún momento $M = Ma + Ml$. Lluís señala Pa y Pl como cantidades de referencia y emplea las relaciones $Pa = Ua{\cdot}Ma$ y $Pl = Ul{\cdot}Ml$, implícitamente, para generar dos progresiones aritméticas para estas cantidades con diferencia el valor del precio unitario de la tela. Evidentemente, no utilizan el MHC para resolver el problema.

6.5.2.6. El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema "Paz, Petra y su madre"

Lluís (ítem 2) recuerda que este problema ya lo han hecho[56] e introduce el nombre "Paz", que no podemos asegurar que se refiera a la actual o futura de Paz o a la variable edad de Paz. A continuación, deja (ítem 7) la iniciativa a Alberto. Éste construye los nombres "Petra" y "Ana" (ítems 11 y 13) que repiten la ambigüedad descrita para el nombre "Paz". Los valores que Alberto (ítems 15, 16 y 21) introduce en las celdas B1, B2 y B3 nos permiten afirmar, al menos, que no se refería a las cantidades *Fa*, *Fe* y *Fm*.

2. Lluís: ¡Éste ya lo hicimos!

3. (Alberto coge la hoja. […] Lee Alberto.)

5. (Lluís introduce [A1; Paz].)

7. Lluís: ¿Lo quieres hacer tú?

8. Alberto: Sí.

11. (Alberto introduce [A2; Petra].)

13. (Alberto introduce [A3; Ana].)

15. (Alberto introduce [B1; 6].)

16. (Alberto introduce [B2; 9].)

17. (Alberto empieza a introducir [B3; 25…].)

19. Lluís: ¿No sería treinta y cinco?

21. (Alberto acaba introduciendo [B3; 35].)

Lluís (ítem 23) propone el nombre "Total de las mujeres" y Alberto (ítem 24) introduce "Suma de paz i petra". Es evidente que el nombre hace referencia a la suma de las edades de las hermanas, como pone de manifiesto la fórmula que introduce Alberto en el ítem 28 (ver

23. Lluís: Total de las mujeres.

24. (Alberto introduce [A4; Suma de paz i petra].)

28. (Alberto introduce [B4 =b1+b2; 15] usando el teclado.)

[56] Como ya se ha señalado, este problema formaba parte de la colección de problemas que se administró durante la secuencia de enseñanza. Esta pareja resolvió correctamente el problema recurriendo a la generación de las líneas de vida de los protagonistas (ver anexo D).

Figura 47); sin embargo, vuelve a omitir cualquier alusión al momento actual o futuro. En definitiva, parece que Alberto está considerando las variables edad de las protagonistas desde un primer momento.

◇	A	B
1	Paz	6
2	Petra	9
3	Ana	35
4	Suma de paz i petra	=B1+B2

Figura 47. Contenido de las celdas después del ítem 28.

Entre los ítems 29 y 48, Alberto construye progresiones aritméticas de diferencia uno[57] en las filas 1, 2 y 3 con las que representa las líneas de vida de las tres protagonistas. Esto pone de manifiesto que consideraba que los nombres introducidos en A1, A2 y A3 referían a las variables edad de Paz, edad de Petra y edad de Ana. También replica (ítem 48) la fórmula contenida en la celda B4, posiblemente instigado por Lluís (ítem 44).

29. (Alberto introduce [C1; 7].)

30. (Alberto introduce [C2; 10].)

31. (Alberto introduce [C3; 36].)

34. (Alberto estira el rango B3:C3 hasta [IV3; 289].)

37. (Alberto estira el rango B2:C2 hasta [IV2; 263].)

43. (Alberto estira B1:C1 hasta [IV1; 260].)

44. Lluís: (Inaudible.)

48. (Alberto estira B4 hasta [IV4; 535].)

◇	U	V	W
1	25	26	27
2	28	29	30
3	54	55	56
4	53	55	57

Figura 48. Después del ítem 52.

No existe verbalización de la igualdad que se debe verificar, pero en el ítem 51 se pone de manifiesto que se busca la coincidencia de las cantidades que han llamado “Ana” y “Suma de paz i petra”. Alberto (ítem 52) colorea la columna en la que se verifica la igualdad y da por concluida la resolución (ítem 53) sin dar respuesta a la pregunta del problema. Ante la sugerencia del profesor (ítem 54) ofrece los valores de *Fa*, *Fe* y *Fm*, pero no el de *T*, como debía haber sido, posiblemente como consecuencia de que esta cantidad no está representada.

51. (Alberto detiene el movimiento cuando la ventana se inicia en la columna S. Lluís señala la columna V. En las celdas V3 y V4 se muestra el valor 55.)

52. (Alberto pinta de negro el rango V1:V4 y cambia el color de la fuente a blanco.)

53. Alberto: Ya está.

54. Profesor: ¿Cuál era la solución?

55. Alberto: Pues Paz…

57. Alberto: … tenía veintiséis; Petra, veintinueve; y la madre, cincuenta y cinco.

[57] Alberto genera las secuencias partiendo de dos valores iniciales y utilizando un automatismo de la hoja de cálculo que permite identificar la diferencia y generar una secuencia que continúe la iniciada. Sin embargo, este estudiante había construido correctamente todas las progresiones aritméticas propuestas en el cuestionario 3 utilizando fórmulas de recurrencia.

En definitiva, resuelven[58] el problema correctamente utilizando las líneas de vida de las protagonistas. En consecuencia, podríamos suponer que llevan a cabo una lectura algebraica del problema que lo reduce a las relaciones $Fa = Aa + T$, $Fe = Ae + T$, $Fm = Am + T$ y $Fm = Fa + Fe$ y construyen la igualdad sobre dos expresiones de la cantidad Fm, las que provienen de las relaciones $Fm = Am + T$ y $Fm = Fa + Fe$.

6.5.3. LA PAREJA MACARENA-ESTER

La pareja Macarena-Ester fue la que llamamos pareja 10 durante la secuencia de enseñanza. Estaba formada por las estudiantes 13 y 16 a las que, como ya hemos indicado, identificaremos como Macarena y Ester, respectivamente. Al clasificar a la población, ambas estudiantes quedaron incluidas en la clase (L_1, Com_1, HC_1).

La estudiante 13 sólo abordó algebraicamente dos de los quince problemas que conformaban los cuestionarios 1 y 2 y dejó en blanco cinco de los ocho problemas del cuestionario 2 (el que estaba compuesto por problemas que normalmente se resuelven de manera algebraica). Únicamente consiguió obtener una colección de relaciones necesarias y suficientes en dos de los quince problemas de los cuestionarios 1 y 2, cometiendo errores al establecer el orden de las cantidades dentro de una relación en dos problemas del cuestionario 1. Utilizó el SMSalg en tres problemas donde realizó una lectura aritmética, generando ecuaciones aritméticas, y sólo planteó una ecuación algebraica (correcta) en un problema. En el cuestionario 3, dejó en blanco todos los ítems en los que se pedía construir una fórmula que implicaba operar con números y celdas, lo que revela dificultades para operar con cantidades desconocidas. Sin embargo, generó correctamente las tres secuencias numéricas pedidas, pero utilizando la técnica, no explicada en clase, de arrastrar los dos primeros valores de la secuencia.

Aunque la estudiante 16 quedó encuadrada dentro de la misma clase que su compañera, obtuvo unos resultados sensiblemente mejores que ésta en los cuestionarios 1 y 2. Únicamente dejó en blanco dos de los ocho problemas del cuestionario 2 y abordó cinco de manera algebraica, utilizando en todos ellos el SMSalg. Realizó una lectura correcta en tres de los quince problemas que constituían los cuestionarios 1 y 2. En el cuestionario 3, construyó correctamente cuatro de las ocho fórmulas propuestas. Tres de ellas proponían operaciones entre números y la cuarta entre números y celdas, lo que indica que era capaz de operar con lo desconocido. Únicamente, generó una de las tres secuencias numéricas posibles, utilizando la copia y pegado por arrastre de una fórmula de recurrencia.

Por lo que respecta al estudio de casos, esta pareja no abordó el problema *Lana y algodón*; porque, ante la falta de tiempo, se optó por que resolvieran *Paz, Petra y su madre* para ver si repetían, como así fue, la actuación que tuvieron en la secuencia de enseñanza.

[58] Utilizaremos plural, porque nos estamos refiriendo a la actuación de la pareja, aunque Lluís prácticamente no participa en la resolución.

6.5.3.1. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema "Adrián"

Tras leer Macarena el enunciado coinciden en que este problema es parecido a otro que han hecho[59].

5. Macarena: Éste lo hicimos ([…]).

7. Ester: Sí. Uno parecido. (Casi inaudible […])

Macarena (ítem 13) intentar organizar la resolución y para ello propone, en primer lugar, plasmar en la hoja de cálculo la información que puedan extraer del enunciado. Macarena (ítems 19 y 26) construye los nombres "Adrian" y "Tania". A continuación, introduce (ítems 31 y 36) los valores 15 y 40 en las celdas B1 y B2, respectivamente. Por los números que asignan, sería plausible considerar que los nombres anteriores representaban a las cantidades *Aa* y *At*; sin embargo, la ausencia en los nombres de referencias al momento actual o futuro también pueden interpretarse como una referencia a las variables edad de los protagonistas. Por último, en el ítem 45, Macarena construye un nombre, y asigna celda de manera implícita, a la cantidad desconocida *T*, que es por la que se pregunta en el problema. Como es habitual, se ha omitido representar la cantidad conocida *V*, que sirve para comparar dos desconocidas, pero también las cantidades desconocidas *Fa* y *Ft*.

13. Macarena: A ver, lo ([…]) primero hay que poner ([…]) las cosas ([…]) que hay (señala el enunciado).

15. Ester: Adrián, quince años. (Casi inaudible.)

16. (Macarena introduce [A1; Adrain].)

19. (Macarena modifica [A1; Adrian].)

22. Macarena: Tania.

24. Ester: Tania (casi inaudible).

26. (Macarena introduce [A2; Tania].)

27. Macarena: ¿Cuántos años tiene Adrián?

29. Ester: Quince.

31. (Macarena introduce [B1; 15].)

32. Macarena: ¿Y Tania?

34. Ester: Cuarenta.

36. (Macarena introduce [B2; 40].)

42. Macarena: Aquí (señala con el dedo al enunciado […]) hay que poner el tiempo que tiene que transcurrir, ¿no ([…])?

43. Ester: Sí.

45. (Macarena introduce [A3; Tiempo que tiene que transcurrir].)

Ester (ítem 52) parece que propone copiar por arrastre una celda, aunque lo hace de una forma vaga en la que las palabras se sustituyen por gestos, y Macarena (ítem 54) acepta. Sin embargo, Ester (ítem 57) verbaliza una fórmula de recurrencia con la intención de introducirla en C1. Posiblemente, tiene en mente la generación de las líneas de vida de las protagonistas. Macarena (ítem 58) rechaza la propuesta y señala (ítem 59) como prioritario utilizar *el doble* sin indicar entre qué cantidades debe establecerse

52. Ester: Eso de ahí, alargarlo. (Al tiempo que habla mueve la mano hacia la derecha apuntando a la pantalla.)

54. Macarena: Ya, eso ya… Tiene que… era… había que poner igual (introduce [C1 =…; …]) a ([…])…

55. Ester: be…

56. Macarena: … a be

57. Ester: … a be uno más uno.

58. Macarena: Be uno no puede ser, Ester.

59. Macarena: El doble ([…])…

[59] Ya hemos comentado que en la secuencia de enseñanza se planteó el problema *Amaya y Andrea* (se ofrece un análisis del problema en el apartado 4.2.2.3.8.) que fue resuelto correctamente por esta pareja utilizando el MHC. Ambos problemas son parecidos, pero en el problema *Amaya y Andrea* se ofrece como dato el tiempo transcurrido.

esta relación. Tras unos instantes en los que su atención pasa del enunciado a la pantalla, Macarena (ítem 66) insiste en la necesidad de utilizar *el doble*. Ester (ítem 67) traduce la relación *el doble* por la operación multiplicar por dos y Macarena recoge esta información y verbaliza (ítem 68) la fórmula =B1*2 que acaban introduciendo (ítem 73) en C1 (ver Figura 49). Resulta difícil establecer cuál era la relación que se pretendía expresar al introducir la fórmula, ya que, a la incertidumbre sobre cuál es la cantidad representada en B1[60], se une la duda de qué cantidad se asociaba a la celda C1. Posiblemente, Macarena no tuviera otra intención que la de realizar la operación sin que considerara necesario indicar a qué cantidad representaría o quizá lo sitúa en la fila 1 al suponer que se mide una característica de Adrián. En cualquier caso, no parece que entienda que es otra forma de expresar la cantidad *Ft*. Falla a favor de la primera posibilidad el hecho de que Macarena se refiere a *el doble* sin que sirva para ligar dos cantidades, sino como una acción aislada en busca de sobre qué aplicarla.

65. (Silencio de 6 segundos.)

66. Macarena: Habría que poner, si es el doble…

67. Ester: Por dos. ([…])

68. Macarena: El be uno ([…]) por dos.

69. Ester: Mm (asiente).

70. Macarena: Pues ponlo.

73. (Ester introduce [C1 =B1…; …] usando el ratón y Macarena teclea [C1 =B1*2; 30].)

◇	A	B	C
1	Adrian	15	=B1*2
2	Tania	40	
3	Tiempo que tiene que transcurrir		

Figura 49. Contenido de las celdas después del ítem 73.

Ester y Macarena convienen (ítems 75 y 76) en estirar de la celda C1, lo que pone de manifiesto que no hay anticipación sobre qué valores se generarán. El valor que obtienen en IV1 (ítem 77) les sorprende y les hace pensar que algo está mal.

75. Ester: Y ahora (Ester hace un gesto con la mano como si empujara hacia la derecha)…

76. Macarena: Sí (asiente).

77. (Ester estira C1 hasta [IV1 =IU1*2; 4,3422E+77].)

78. Ester: (Inaudible.)

79. Macarena: Ya… ¡Sí, hombre!

Macarena (ítem 84) propone como solución arrastrar B2. Ester (ítem 85) acepta, pero en el ítem 93, mientras está arrastrando la celda B2, avisa que se va a

82. (Macarena mueve la ventana hasta el inicio.)

84. Macarena: Vale… ¿Y aquí qué había que poner ([…])…? ([…]) Si tienen que doblar la

60 No ayuda a eliminar la incertidumbre el hecho de que, en la verbalización de la fórmula, Macarena se refiera a la cantidad representada en la celda B1 por la posición de la celda.

obtener una secuencia de valores uniforme. Esto pone de manifiesto que Ester sí que es capaz de prever la secuencia que se generará en este caso mediante la copia y pegado por arrastre.

edad… ¿No había que arrastrar esto (sitúa la celda activa en B2)?

85. Ester: Sí.

86. (Ester estira B2.)

93. Ester: Siempre va a dar cuarenta (dice esto sin que se observe ninguno de los valores generados al arrastrar la fórmula).

94. (Ester llega hasta [IV2; 40].)

◇	C	D	E	F
1	30	60	120	240
2	40	40	40	40
3				80

Figura 50. En el ítem 114.

Macarena (ítem 96) vuelve a centrarse en el fragmento de enunciado en el que se expresa la relación $Ft = V{\cdot}Fa$. Repite la misma proposición en los ítems 96, 99, 103 y 106, lo que nos sugiere que tiene dificultades para transformar la relación entre cantidades en una operación aritmética[61]. Al comparar lo que Macarena dice en los ítems 96 y 99 y en los ítems 103 y 106, se observa que deja de referirse al tiempo transcurrido cuando verbaliza la relación sin leer el enunciado. Ester (ítem 107), ante la insistencia de Macarena, concluye que el doble de la edad de Tania debe ser 30, volviendo a plasmar la relación *el doble* mediante la operación *multiplicar por dos*. El hecho de que Ester utilice la edad actual de Adrián al realizar la operación podemos achacarlo a: 1) Se ha limitado a dar respuesta a lo expresado por Macarena en el ítem 106 ("El doble de la edad de Adrián") atendiendo a lo que se observa en la hoja de cálculo. 2) No diferencia, al igual que Macarena, entre las edades actuales y futuras, sino que considera las variables edad de Adrián y edad de Tania.

96. Macarena: El doble ([…])… ¡Ay…! ¿Y ahí ([…]) qué ponía…? Cuánto de… tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad ([…]) de Adrián (leyendo)… Sea ([…]) el doble ([…])… No, tiene… Tania tiene que tener la di ([…])… Sí. Tania tiene que tener ([…]) el doble de años que tiene Adrián, ¿no (mira a Ester)?

97. Ester: ¿Mm (mira a Macarena)?

99. Macarena: ¿Tania no tiene que tener el doble de (señala con el dedo al enunciado) la edad que tiene Adrián?

100. Ester: Sí. Espera (Ester mueve los labios como leyendo el enunciado)…

101. Macarena: A ver, ¿cuánto tiempo debe…? A ver, a ver, a ver… ¿Cuánto tiempo…

102. Ester: Tiempo.

103. Macarena: … debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual ([…]) al doble de la edad de Adrián (leyendo el enunciado)?

104. Ester: ¿El doble ([…])?

106. Macarena: El doble de la edad de Adrián.

107. Ester: O sea, treinta.

En el ítem 114, Macarena utiliza los valores numéricos generados en las filas 1 y 2 (ver Figura 50) para valorar lo hecho hasta ese momento. Quizá usa la fórmula

114. Macarena: … cuarenta (sitúa la celda activa en [E2; 40])… Cuarenta (sitúa la celda activa en [F2; 40])… Espera (introduce [F3 =…; …])… Cuarenta (introduce [F3 =40…; …]) por dos (introduce [F3 =40*2…; …]), ochenta

[61] De hecho, en ningún momento sustituye la proposición *el doble* por la operación *multiplicar por dos*; algo que sí que había hecho Ester en el ítem 67.

=40*2, que introduce en F3, con la intención de comprobar que se cumpla la relación *el doble*, ya que tras obtener el resultado concluye: “Pues entonces esto (sitúa la celda activa en [D1; 60] y [C1; 30]) no tiene que ser así porque ([…]) cuarenta… porque Tania tiene que tener el doble que ([…]) éste (Macarena […] sitúa la celda activa en C2)”. Parece que Macarena espera encontrar en la fila 1 (la que representa la edad de Adrián) el valor 80, lo que supondría aplicar la relación *el doble* cambiando sujeto y atributo[62]. Es decir, en lugar del doble de la edad de Adrián, calcula el doble de la edad de Tania y espera que coincida con la edad de Adrián. Macarena, en consecuencia, señala la necesidad de borrar las secuencias generadas. Ester (ítem 115) aplica de manera repetida la acción deshacer y reduce la información representada en la hoja de cálculo a la que se ofrece en la Figura 51.

(introduce [F3 =40*2; 80]))… (Inaudible.)… ¿Cuarenta por dos no son ochenta (Macarena borra F3)? Sí… Pues entonces esto (sitúa la celda activa en [D1; 60] y [C1; 30]) no tiene que ser así porque ([…]) cuarenta… porque Tania tiene que tener el doble que ([…]) éste (Macarena […] sitúa la celda activa en C2). O sea, que no. Que hay que borrar todo esto (mientras dice esto desplaza la ventana hacia la derecha).

115. Ester: Borrar (hace clic en el botón “Deshacer” varias veces) todo patrás (sic).

	A	B
1	Adrian	15
2	Tania	40
3	Tiempo que tiene que transcurrir	

Figura 51. Después del ítem 115.

Macarena (ítem 117) introduce en la celda C2 la fórmula =B1*2 que supondría calcular el doble del valor 15. La escasa verbalización y la constante ambigüedad que acompaña su actuación nos impide determinar, de forma precisa, qué relación intentaba reflejar. Seguramente, pretendía calcular el doble de la edad de Adrián sin atender a si ésta era la edad actual o futura. Ester (ítem 118) duda, pero no está claro si vacila al considerar incorrecta la fórmula o el lugar donde se ubica. Macarena (ítem 119) borra la fórmula y ofrece la posibilidad de multiplicar la edad de Tania por dos. Esta propuesta nos permite concluir que Macarena no tienen un criterio firme sobre el orden que

117. Macarena: Vale[63]… ¡Ya, ya! Ya… Ya te has paso (sic)… (Inaudible.)… Da igual, a ver (Ester mueve la ventana hasta el inicio y selecciona el rango B2:C9)… ¡Ester (ambas ríen)…! Aquí (Macarena introduce [C2 =…; …])… A ver, eso e… tendrá que ser la edad de el (sic) (Macarena señala con el dedo a la pantalla) Adrián (Ester introduce [C2 =B1…; …] usando el ratón y Macarena introduce [C2 =B1*; …]) por dos (Macarena introduce [C2 =B1*2…; …]).

118. Ester: Por dos… ¿Ahí?

119. Macarena: O no (modifica [C2 =…; …])… ¿O (señala con el dedo a la pantalla) la edad de Tania por dos?

120. Ester: Ostras (hace un gesto de confusión)…

---

[62] A [sujeto] es [cópula] el doble de B [atributo].

[63] Intenta detener la acción deshacer a la que se ha aplicado Ester con mucho celo.

tendrán las cantidades desconocidas que intervienen en la comparación multiplicativa *el doble* cuando se expresan mediante una operación.

Entre los ítems 123 y 130, repiten la relación que en se expresa en el enunciado mediante la proposición “¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián?”. Unas veces lo hacen leyendo el enunciado; otras recitando el fragmento que conservan en memoria. Cuando verbalizan la relación almacenada en memoria, no hacen referencia al tiempo transcurrido (ítems 123-129), repitiendo lo observado en la actuación de Macarena en los ítems 99 y 106. Nuevamente, Macarena (ítem 130) invierte la relación entre la edad de Adrián y Tania, pero esta vez lo hace inmediatamente después de leerla en el enunciado.

122. (Silencio de 6 segundos.)

123. Ester: O sea, la edad de Tania ([…])…

126. Macarena: ¿La edad de Tania, qué?

127. Ester: Será igual…

129. Ester: … O sea ([…]), será igual que… o sea… que el doble de la edad de Adrián.

130. Macarena: A ver, lo pongo ([…]) aquí ([…]) y verás tú… Adrián… ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la edad de Tania sea igual ([…]) al doble de la de Adrián (leyendo el enunciado)? ([…])… Adrián tiene ([…]) que tener el doble de edad.

Ester (ítem 131) acepta la propuesta de Macarena (ítem 130) y pretende verbalizar la relación que han venido repitiendo en el episodio anterior, pero situando en el sujeto a la edad de Tania. Tras dudar, propone (ítem 133) que la edad de Tania será el doble de la edad de Adrián[64], lo cual es incorrecto.

131. Ester: Sí. Y ([…]) la de Tania tendrá que ser igual…

132. Macarena: Y la de Tania tiene que ser igual ([…])…

133. Ester: Al doble.

Sin atender a lo que acaba de manifestar Ester, construyen conjuntamente (ítems 134-136) la fórmula =B1*2 en la celda C1, como ya había hecho Macarena en ítem 73 (en la hoja de cálculo se muestra lo mismo que aparecía en la Figura 49). Nuevamente, parecen querer calcular el doble de la edad de Adrián sin atender a si se trata de la edad actual o futura. El hecho de que la sitúe en la fila que han etiquetado como “Adrian” puede ser debido a que utiliza la fila como contenedor de todo lo que tiene que ver con Adrián; ya sea la edad (actual) de

134. Macarena: … que el doble ([…] borra C2)… O sea que sí que hay poner esto (Macarena introduce [C1 =…; ….]) por dos…

135. Ester: O sea ([…])… ¡Uy (Ester […] introduce [C1 =B1…; …] usando el ratón)…!

136. Macarena: Eso por dos (Ester introduce [C1 =B1*2; 30])… Y éste tiene que dar igual que el doble.

137. Ester: No puede ser.

138. Macarena: Sí… A ver, o sea, hay que poner el… esto (señala con el dedo a la pantalla […])… tiene que poner el doble… Hay que hacer cuarenta ([…])… Y ([…]) tiene que ser igual… ([…])… (Inaudible.)… ([…])… (Silencio de 11 segundos.)… A ver, pues pon eso en color (hace

[64] Sin entrar en detalles sobre si se relacionan las cantidades edad actual o futura o si se consideran las variables edad de Adrián y edad de Tania.

Adrián o el doble de la edad de Adrián. Ester (ítem 137) se opone a la fórmula que acaban de introducir sin explicar la razón. Macarena (ítem 138) apoya el plan con un discurso entrecortado y con escasos argumentos.

Tras un prolongado silencio, Macarena (ítem 138) propone como iguales las filas 1 y 2 y Ester las colorea (ver Figura 52). Con el uso de deícticos para referirse a las cantidades, Macarena evita referirse a las cantidades que se están igualando, lo que nos obliga a interpretar cuáles son las que está considerando. Así en la fila 1 se puede suponer tanto la presencia de la edad de Adrián como del doble de la edad de Adrián (sin entrar en detalles sobre si es la edad actual o futura); mientras que en la fila 2 se representa la edad de Tania (sin entrar en detalles sobre si es la edad actual o futura). Parece plausible, ante la proximidad en el tiempo de la introducción en C1 de la fórmula que calcula el doble de la edad de Adrián, suponer que Macarena expresa la igualdad sobre la relación "la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián".

un gesto con la cabeza hacia la pantalla)… Esto y esto (sitúa la celda activa en A2 y A1) que es lo que tiene que ser igual. (Ester colorea las filas 1 y 2)… Ésos dos tienen que ser iguales, ¿no?

139. Ester: Sí.

	A	B	C
1	Adrian	15	=B1*2
2	Tania	40	
3	Tiempo que tiene que transcurrir		

Figura 52. Contenido de las celdas después del ítem 138.

Macarena (ítem 140) replantea el problema tomando ahora como protagonistas a ella (que tiene 14 años) y a su padre (al que le asigna 40 años). En el ítem 142 pretende calcular la edad de su padre cuando ella doble la edad (pase de 14 a 28), lo que pone de manifiesto que considera la relación "la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián" válida en cualquier momento y no como una característica de las edades futuras. Su intento de calcular la edad de su padre cuando ella tenga 28 años también nos muestra que únicamente trabaja con cantidades conocidas: un rasgo típicamente aritmético. Macarena le pregunta a Ester "¿cuánta ([…]) edad

140. Macarena: Vale, pues, a ver ([…]), esto de aquí ([…])… (Inaudible.)… Espera que me pica el ojo ([…])… Si éstos dos ([…]) tienen que ser iguales, éste, hay que poner… A ver, si mi padre ([…])… Si yo ([…]) tengo catorce años y mi padre cuarenta (Ester mira a un punto indeterminado y juega con la pulsera de Macarena) cuando yo tenga veinticuatro… no, cuando yo tenga veintiocho… Suelta (Ester suelta la pulsera […])… Espera ([…]). Espera ([…]) que me parece que ya sé cómo es (casi inaudible).

142. Macarena: Vale (Macarena empieza a introducir [B3 =…; …])… Espérate que me parece que ya sé cómo es… Me parece que es esto por eso… Me está poniendo nerviosa la música (refiriéndose a la música que proviene del aula contigua). (Ambas ríen.) A ver ([…]), si mi padre ([…]) ahora tiene… si yo tengo catorce y mi padre cuarenta ([…]) cuando yo tenga veintiocho ([…]), mi padre tendrá… ¿cuánta ([…]) edad tendrá mi

tendrá mi padre si yo tengo veintiocho?” y ésta (ítem 145) vuelve a ahondar en la necesidad de generar las líneas de vida de los protagonistas, como ya había señalado en el ítem 57.

padre si yo tengo veintiocho?

143. Ester: No lo sé (encogiendo los hombros). Piensa.

144. Macarena: Es que ([…]), claro piensa, es que hay que calcular ([…]) el tiempo.

145. Ester: Pues pones: catorce, quince… (Prácticamente inaudible.)

En el ítem 148, Macarena importa el cálculo que ha pretendido realizar en el ítem 142 al relacionar su edad con la de su padre y plantea multiplicar 15 (la edad actual de Adrián) por dos[65]. Ester da la respuesta a la operación, 30, y apunta (ítem 151) que Tania ya tiene 40 años.

148. Macarena: Vale… Pero es que haber yo, me aclaro ([…]) con mi padre, vale; pero es que esto ([…])… Hay que calcular el tiempo ([…])… Si el ([…])… éste tiene que tener la eda… el Adrián ([…]) tiene que tener (borra B3) la misma edad (sitúa la celda activa en B1) que la… Si Tania ([…]) tiene que tener la misma edad que cuando tenga Adrián el doble de edad.

149. Ester: O sea, treinta.

150. Macarena: Treinta.

151. Ester: Y ya tiene cuarenta.

Entre los ítems 155 y 167, Macarena vuelve a calcular el doble de 15 mediante la introducción de la fórmula =B1*2 en las celdas C2 (ítem 161) y C1 (ítems 165 y 166). De esta forma, repite la construcción de la misma fórmula que emplearon en el ítem 136. La referencia a la edad de Adrián (supuestamente actual) se hace mediante la posición de la celda donde se ubica su valor. Ester (ítems 162, 166 y 168) se opone al plan sin dar argumentos. Quizá, considera pertinente generar las líneas de vida de los protagonistas (así lo ha hecho patente en una ocasión, ver ítems 52-58) o es consciente de que se repite algo que ya se ha hecho en los ítems 73 y 136, sin que permitiera alcanzar la solución.

155. Macarena: Espérate un momento, Ester. Voy a probar una cosa.

156. (Macarena introduce [C2 =…; …].)

161. Macarena: Espera, a ver, éste es igual a (Macarena introduce [C2 =B1…; …])… tiene que ser esto por dos (introduce [C2 =B1*2; 30] usando el ratón).

162. Ester: ¿Por dos por qué (con gesto de extrañeza)?

165. Macarena: Tiene que ser igual a éste (introduce [C1 =B1…; …]) por (introduce [C1 =B1*…; …])…

166. Ester: Qué (con gesto de extrañeza)!

167. Macarena: … éste, por dos (introduce [C1 =B1*2; 30] usando el ratón); pero…

168. Ester: También da treinta.

Superado el límite de 10 minutos y sin que se observe posibilidad de salir del atasco se les hace pasar al siguiente problema.

189. Profesor: Venga, va, pasad al siguiente.

En definitiva, únicamente han considerado la relación multiplicativa entre la edad de

[65] Evidentemente, esto vuelve a poner de manifiesto que considera la relación “la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián” válida en cualquier momento y no como una característica de las edades futuras.

Adrián y Tania, pero evitando en todo momento referirse al tiempo transcurrido y a las edades futuras de los protagonistas. En consecuencia, todas las fórmulas construidas refieren a cantidades conocidas y todos los razonamientos van de lo conocido hacia lo desconocido: un rasgo típico del pensamiento aritmético.

6.5.3.2. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema "Las ovejas"[66]

Ester lee el enunciado y parece proponer (ítems 6 y 13) asignar espacio al número de granjas, cantidad, si tal era su propósito, que carece de trascendencia para la resolución del problema. Por su parte, Macarena parece dispuesta a construir nombre y asignar celda a la cantidad conocida *N*. El nombre que construye (ítem 17) "Ovejas en un corral" es poco afortunado, porque el enunciado habla de que en una granja hay 180 ovejas en dos corrales. Ester se opone (ítems 15, 21 y 29), pero no explica la razón. Macarena (ítem 30) le pregunta a Ester cómo lo haría ella y ésta (ítem 31) se limita a leer el principio del enunciado. Macarena, sin decir nada, introduce (ítem 34) el valor 180 en la celda B1 y sustituye (ítems 39, 42 y 44) el nombre que había construido en A1 por "Ovejas que hay en una granja". Ester (ítem 44) manifiesta que el nombre debería hacer referencia a los dos corrales y Macarena (ítem 46) vuelve a leer el enunciado. Parece observar que en el problema se hace referencia a dos corrales y empieza (ítem 49) a construir, en la celda A2, el nombre "En dos corra…", pero se da cuenta (ítem 55) que ésa es la cantidad que está representada arriba y que por lo tanto lo que debe hacer es modificar el nombre presente en A1. Así procede y consigue (ítem 65) introducir "Ovejas que hay en dos dos corrales" (con la repetición "dos

4. (Lee Ester.)

5. Macarena: Vale, venga ([…])… ¿Qué hay que poner?

6. Ester: Una granja (deja la hoja sobre la mesa)…

12. Macarena: Cien… Ciento ([…])… ciento ochenta (mientras Macarena habla, introduce [A1; 180…], pero lo ha borra posteriormente). A ver…

13. Ester: Yo pondría: en una granja…

14. Macarena: Espera… Ovejas en un corral (introduce [A1; Ovejas en un corral…]).

15. Ester: No.

17. Macarena: Sí (introduce [A1; Ovejas en un corral]). Espérate un momento…

21. Ester: Que no.

22. Macarena: Que sí.

24. Macarena: Ahí ([…]), en un ([…]) corral ciento (Ester hace clic en A1 y Macarena introduce [A1; 18…])… Mecagüen (sic)…

25. (Macarena borra A1.)

28. (Macarena introduce [A1; Ovejas en…].)

29. Ester: Que no.

30. Macarena: Que sí… ¿A ver cómo dices tú que hay que hacerlo (introduce [A1; Ovejas en un corral…])?

31. Ester: En una granja hay ciento ochenta (Macarena introduce [A1; Ovejas en un corral]) ovejas en dos corrales (lee el enunciado)…

33. Macarena: En una granja, vale ([…]). Aquí hay que poner ciento ochenta ovejas que es la que hay en una granja, ¿no?

34. (Mientras Macarena habla, introduce [B1;

[66] El problema *Las ovejas* es isomorfo al problema *Las naranjas* que se planteó en el cuestionario 1. En aquella ocasión ambas estudiantes lo resolvieron aritméticamente de manera incorrecta.

dos”).

Han transcurrido varios minutos desde que iniciaron la resolución y sólo han conseguido dar nombre a la cantidad *N* y asignarle una celda en la que han introducido su valor. Las estudiantes muestran muchas carencias a la hora de diferenciar en el enunciado los elementos significativos de aquéllos que no los son para reducir el problema a relaciones entre cantidades.

180].)

35. (Macarena borra A1.)

36. Ester: Sí.

38. Macarena: (Inaudible.)

39. (Macarena introduce [A1; Ovejas que…].)

40. Ester: En una granja hay…

42. (Macarena introduce [A1; Ovejas que hay en una granja…].)

44. Ester: Espera… En una… hay… En dos corrales (Ester […] acaba introduciendo [A1; Ovejas que hay en una granja])…

46. Macarena: Ovejas que hay en una granja… A ver ([…])… Si sabemos que ([…]) uno de ellos hay treinta (leyendo)…

48. Ester: Hay treinta ovejas más que ([…]) en el otro (leyendo)…

49. (Macarena introduce [A2; En dos corra…].)

50. Ester: ¿Ciento ochenta… (Inaudible.)?

53. Macarena: Esto hay (Macarena borra A2) que ponerlo arriba.

55. Macarena: A ver, esto hay que ponerlo aquí arriba (borra A1)… Ovejas que (introduce [A1; Ovejas que…])…

56. Ester: En dos corrales.

57. Macarena: … hay (introduce [A1; Ovejas que hay…])… Eso es lo que había puesto yo antes ([…])… En dos corrales, ¿vale?

58. (Macarena introduce [A1; Ovejas que hay en dos dos corrales…].)

59. (Ester, un instante antes que Macarena pulse “Enter”, modifica [A1; Ovejas que en dos dos corrales].)

60. Ester: En un corral… ¿En dos corrales…?

62. Macarena: Ovejas que hay en dos corrales (ambas ríen). Ester, por favor.

63. Ester: Vale.

64. Macarena: Que hay en dos corrales.

65. (Macarena introduce [A1; Ovejas que hay en dos dos corrales].)

Macarena (ítem 71) introduce la etiqueta “En un corral hay” en la celda A2. El nombre que construye no hace referencia a si es el corral que tiene más o menos ovejas lo que nos impide saber si representa la cantidad *Cg* o *Cp*.

66. Ester: Vale. Ahora pon…

69. Ester: Uf!

70. (Ester mira al ordenador.)

71. Macarena: En un corral hay (mientras habla introduce [A2; En un corral hay])… Hay

Macarena, al final del ítem 71, empieza a introducir en B2 el valor 30, lo que supondría asignar el exceso de ovejas al número de ovejas que hay en un corral. Ester (ítem 73) termina la frase que había iniciado Macarena para acompañar la introducción del número 30. Macarena (ítem 74) quizá entiende que Ester le pide que complete lo que acaba de introducir en la celda B2 y así escribe "30 mas que en…". En lugar de plasmar la relación entre cantidades mediante fórmulas y números, Macarena parece reescribirla usando el lenguaje natural. Así, entre las celdas A2 y B2, podía leerse: *en un corral hay 30 más que en*. Macarena (ítems 74 y 76) borra el contenido de las celdas A2 y B2 y finaliza el episodio de construcción de este segundo nombre refundiendo (ítem 82) en la expresión "En un corral 30 mas que en otro" el contenido que antes se mostraba entre A2 y B2. Parece plausible considerar que el nombre que introduce (ítem 82) en A2 sirve de etiqueta para la cantidad *Cg*, pero sólo el uso que hagan de la celda B2 nos permitirá asegurarlo.

treinta (introduce [B2; 3…])…

73. Ester: Treinta más ([…])… que en el otro.

74. Macarena: Treinta más que en (introduce [B2; 30 mas que en…] y después borra B2)…

75. Ester: Pon treinta más y ya está.

76. (Macarena borra A2.)

77. (Ester sitúa la celda activa en B2.)

78. (Macarena empieza a introducir [B2; 3…].)

79. (Ester hace clic en el botón "Deshacer" y borra B2.)

80. Macarena: Ester, ahí.

81. (Ester sitúa la celda activa en A2.)

82. Macarena: En un corral hay treinta más que en el otro (mientras habla, introduce [A2; En un corral 30 mas que en otro]). Vale.

Macarena (ítem 89) propone sumar 30 más 180. Posiblemente, su propuesta trata de dar respuesta a la frase "Y en uno hay treinta más que en el otro…" que Ester (ítem 85) deja inconclusa, para lo que toma el valor 180 como propio de "el otro". Esto supondría considerar la relación correcta $Cg = Cp + Mgp$ (presumiendo que en la fila 2 se ha representado la cantidad *Cg*) tomando como valor de *Cp* el de *N*. En el ítem 90, Ester apunta tímidamente que debe ser menos, posiblemente al darse cuenta que la propuesta de Macarena llevaría a que en un corral hubieran más ovejas que en toda la granja. Macarena (ítem 95) verbaliza la fórmula =B1/2+30 que acabará introduciendo (ítem 101) en la celda B2, con la (supuesta) intención de calcular la cantidad *Cg* (ver Figura 53). El hecho de que al verbalizar (ítems 95 y 99) las fórmulas se refiera a las cantidades por

84. Macarena: ¿Cuántas ([…]) ovejas hay en cada corral (leyendo)? A ver ([…]), pues si en los ([…]) dos hay ciento ([…]) ochenta…

85. Ester: Y en uno hay treinta más que en el otro…

87. Macarena: (Inaudible.)… igual (introduce [B2 =…; …])…

88. Ester: (Inaudible.)

89. Macarena: Treinta más ciento ochenta…

90. Ester: Menos… ciento ochenta.

92. (Macarena introduce [B2 =180…; …].)

93. Ester: Espera.

94. (Ester modifica [B2 =B1; …] usando el ratón.)

95. Macarena: Ciento ochenta entre dos más treinta.

97. Ester: Sí (asintiendo).

98. (Macarena introduce [B2 =B1/…; …].)

99. Macarena: Entre dos (introduce [B2 =B1/2+…; …] más (introduce [B2 =B1/2+30;

los valores que las representan, nos impide poder asegurar realmente qué cantidades y relaciones se han puesto en juego. Ofrecemos dos posibilidades: 1) Se utilizan las relaciones correctas $N = C{\cdot}Nm$ y $Cg = Nm + Em$, asignando el valor de Mgp a Em. 2) Se utiliza la relación correcta $N = C{\cdot}Nm$ y la incorrecta $Cg = Nm + Mgp$. En esta ocasión, nos inclinamos por la segunda opción, pues en el nombre ("En un corral 30 mas que en el otro") expresado en la celda A2 se indica la intención. La idea de Macarena ha sido partir en dos el total de ovejas y añadir la diferencia; cuando, realmente, debía haber sumado la mitad de la diferencia.

…])…

100. Ester: No. Espera…

101. (Macarena introduce [B2 =B1/2+30; 120].)

102. Macarena: … ciento veinte.

	A	B
1	Ovejas que hay en dos dos corrales	180
2	En un corral 30 mas que en otro	=B1/2+30

Figura 53. Contenido de las celdas después del ítem 102.

Ester (ítem 104) indica que no se ha de sumar 30 y propone (ítems 104 y 106) la fórmula =B1/2 que expresaría la relación incorrecta $N = Cg{\cdot}C$[67] (o, la también incorrecta, $N = Cp{\cdot}C$). Macarena (ítems 107 y 109) insiste en que es necesario sumar 30 y construye, en A3, el nombre "En un corral hay" para una nueva cantidad. Al comparar este nombre con el que ocupa A2, parece evidente que el nuevo nombre representaría a la cantidad Cp; pero Ester (ítem 128) escribe la fórmula =B2+30 en B3 (ver Figura 54) que producirá siempre un número mayor en B3 que en B2. Macarena (ítems 129 y 130) se opone, quizá porque entiende que deben sumarse 30 en la celda B2, pues así se indica en el nombre "En un corral hay 30 mas que en otro" que se muestra en A2. Sin embargo, Macarena (ítem 132) introduce, de manera involuntaria, la fórmula =B2+30 que Ester estaba

104. Ester: Más treinta, no. Porque… (Inaudible.)… Entre dos (Ester modifica [B2 =B1/2…; …]).

105. Macarena: Ya lo he puesto.

106. Ester: Más treinta (Ester introduce [B2 =B1/2; 90])… Vale. Eso es lo que hay en cada (mueve el ratón sobre B1 y B2)…

107. Macarena: No ([…]). Esto ([…] sitúa la celda activa en B2) es lo que hay ([…]) en cada corral ([…]), pero en…

108. Ester: Pero ([…]) hay que sumarle… (Sobre la voz de su compañera.)

109. Macarena: … uno hay treinta más.

114. (Macarena introduce [A3; En…].)

115. Ester: En un corral hay…

116. Macarena: Espera…

117. (Macarena introduce [A3; En un corral hay].)

125. (Macarena introduce [B3 =…; …].)

126. Ester: Igual…

128. Ester: Esto son (Ester introduce [B3

[67] Siempre que consideremos que en B2 se representa la cantidad Cg, lo que hemos sostenido siendo respetuosos con el nombre presente en A2 ("En un corral 30 mas que en otro"). Sin embargo, como veremos en el ítem 108, Ester no considera que en B2 se represente el número de ovejas en el corral que más tiene (al menos, no de una forma estable), pues indica que "Pero ([…]) hay que sumarle…", refiriéndose al valor que ha calculado en B2.

escribiendo en B3.

=B2…; …] usando el ratón […])… más treinta (Ester introduce [B3 =B2+30…; …]).

129. Macarena: No ([…]).

130. Ester: Sí

131. Macarena: Más treinta no puede ser.

132. (Macarena pulsa "Enter" con lo que introduce [B3 =B2+30; 120].)

133. Ester: Sí, porque en un corral hay más…

	A	B
1	Ovejas que hay en dos dos corrales	180
2	En un corral 30 mas que en otro	90
3	En un corral hay	120

Figura 54. Después del ítem 132.

Macarena (ítems 137 y 139) comprueba que los valores presentes en B2 y B3 no cumplen la relación $N = Cg + Cp$, concluye (ítem 142) que la solución es incorrecta y borran las fórmulas que habían introducido en B2, B3 y B4 (ver Figura 55).

134. Macarena: Ciento veinte… A ver, espérate un momento.

135. (Macarena introduce [B4 =…; …].)

137. Macarena: Ciento veinte más (Macarena introduce [B4 =120+…; …])…

138. Ester: Noventa.

139. Macarena: … noventa (Macarena introduce [B4 =120+90; 210]), no da ciento ochenta.

140. (Macarena borra B4.)

141. (Ester sitúa la celda activa en B3.)

142. Macarena: O sea, que así no es.

143. (Ester borra B3.)

144. (Macarena borra B2.)

El fracaso en esta tentativa les lleva a releer fragmentos del enunciado (ítems 148 y 150) en busca de un nuevo plan.

148. Macarena: Si sabemos que en uno de ellos hay ([…]) treinta ovejas más que ([…]) en el otro, ¿cuántas ovejas hay en cada corral (leyendo)…? Pues si ([…]) aquí hay… ¿En ciento ochenta (sitúa la celda activa en B1) son los dos que hay, no?

150. Ester: (Inaudible. Parece leer el enunciado en voz baja.)… Eso ([…]) son dos corrales. Eso es la suma de los dos.

	A	B
1	Ovejas que hay en dos dos corrales	180
2	En un corral 30 mas que en otro	
3	En un corral hay	

Figura 55. Contenido de las celdas después del ítem 144.

Macarena (ítems 153 y 155) introduce la fórmula =B1+30 en la celda B2. Con esto materializaría la relación incorrecta $Cg = N + Mgp$, suponiendo que en B2 se representara la cantidad Cg, como parece que ha venido considerando Macarena. Ester (ítem 154) duda y Macarena (hacia

153. (Macarena introduce [B2 =B1+30…; …] usando el ratón.)

154. Ester: ¿Más treinta por qué?

155. Macarena: Espérate un momento (Macarena modifica [B2 =B1…; …])… Esto… Esto … Espérate un momento (Macarena introduce [B2 =B1+30…; …])… Más treinta (Macarena

el final del ítem 155) parece entender que ha cometido un error al observar que el resultado de la fórmula es 210, lo que implicaría que un corral hayan más ovejas que entre los dos corrales.

introduce [B2 =B1+30; 210])… Doscientos diez ([…])… Entonces si hay ciento… lo que pasa es que no cuadra ([…]) porque si son ciento ochenta ([…])… ([…])… Si son ([…])… si son ciento ochenta más ([…]) que en el otro…

Tras varios intentos fallidos de solución aritmética, Macarena (ítem 160) pregunta si es necesario generar secuencias numéricas. Ester (ítem 161) le contesta que no, lo que nos indica que parece tener claro que este problema puede resolverse de manera aritmética.

160. Macarena: ¿Cuántos son? A ver, ¿no había (mueve la celda activa entre C1 y C2) que estirar?

161. Ester: No. ¿Aquí pa (sic) qué?

Macarena (ítem 175) vuelve a la lectura de fragmentos del enunciado. Tras una serie de reflexiones triviales por parte de Macarena (ítems 175, 177 y 179), Ester (ítem 180) vuelve a proponer el plan que conlleva las relaciones $Cg = Mgp + Cp$ (correcta) y $N = C \cdot Cp$ (incorrecta) Macarena (ítem 182) le responde que eso ya lo habían hecho (véanse ítems 104-133) y que la suma de las ovejas en los corrales superaba el número de ovejas de la granja.

175. Macarena: Si… si hay ciento ochenta en un corral (parece leer)…

176. Ester: Sí.

177. Macarena: … en dos corrales…

178. Ester: En dos.

179. Macarena: Pero si en uno hay treinta más ([…]) que en el otro, entonces ([…])…

180. Ester: Tú lo divides entre dos y (alarga el brazo hacia la pantalla) le sumas treinta ([…]) y ya está.

182. Macarena: Que no, Ester. Da más ovejas ([…]) de las que tenemos. O sea, ([…]) que no es así… Serás tonta.

183. Ester: Calla.

En el ítem 186, Macarena introduce en la celda B2 una fórmula que tiene una difícil interpretación. Quizá está pensando en dividir el número de ovejas en tres partes: las que hay de más y las dos partes (iguales) de ovejas en cada corral. Evidentemente, esto supondría hacer el exceso de ovejas igual a *Cp*. Sin embargo, en el ítem 191, Macarena vuelve a dividir 180 entre 2 introduciendo la fórmula =B1/2 en la celda B2. De esta forma, obtiene el valor de la cantidad *Cg*[68] mediante una fórmula que expresa la

186. (Macarena introduce [B2 =180/3; 60].)

187. Macarena: Sesenta más ([…])…

188. Ester: Sesenta…

191. Macarena: Ciento ochenta (Macarena introduce [B2 =B1…; …] usando el ratón)… Ciento ochenta entre dos (sigue introduciendo [B2 =B1/2…; …]); porque son dos corrales.

192. Ester: Sí.

193. (Macarena introduce [B2 =B1/2, 90].)

194. Macarena: Son noventa. Y ahora, aquí (introduce, por error, [B3; =]), noventa… Jolines.

195. Ester: Es igual. Aprieta ahí (señala con la

[68] Macarena parece haber considerado en todo momento que en la fila 2 se representaba el número de ovejas en el corral que más tenía, siendo coherente con el nombre "En un corral 30 mas que en otro".

[69] Quizá haga una comprobación mental o no la considere necesaria porque los valores parecen plausibles; a diferencia de lo ocurrido en los ítems 104-144 cuando los valores de *Cg* y *Cp* eran 120 y 90, respectivamente.

relación incorrecta $N = Cg \cdot C$. A continuación, obtiene (ítem 197) el valor de *Cp* mediante la introducción de la fórmula =B2-30 en la celda B3. Esta fórmula expresa la relación correcta $Cg = Cp + Mgp$. En ambas fórmulas refiere a las cantidades representadas en la hoja de cálculo mediante la posición de la celda.

Macarena da por concluido el problema (ver Figura 56) sin comprobar[69], como había hecho en el ítem 139, que los valores presentes en B2 y B3 cumplieran la relación $N = Cg + Cp$; lo que le hubiera conducido a darse cuenta de que la solución no era correcta, pues 90 más 60 da 150.

mano a la pantalla).

196. (Macarena introduce [B3 =…; …].)

197. Macarena: Es igual a noventa (señala a la pantalla con un movimiento de cabeza y Ester introduce [B3 =B2…; …] usando el ratón) menos treinta (Macarena introduce [B3 =B2-30; 60]) son sesenta.

198. Ester: Hay sesenta. Y en el otro (mira a Macarena)…

199. Macarena: Noventa. ¡Ah ([…])! Ya está.

◇	A	B
1	Ovejas que hay en dos dos corrales	180
2	En un corral 30 mas que en otro	90
3	En un corral hay	60

Figura 56. Después del ítem 197.

6.5.3.3. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema "Las actividades deportivas"

Construyen nombre, y asignan implícitamente celda, para la cantidad conocida *T* (ítems 10-17) y para las cantidades desconocidas *F*, *N*, *B* y *R* (ítems 25-41). Como es habitual, no construyen nombres ni asignan celdas a las cantidades conocidas *Vnf*, *Mbf* y *Mrb* que sirven para comparar las cantidades desconocidas.

9. Macarena: En fútbol (Macarena introduce [A1; Fut…])…

10. Ester: No, pon: personas en general.

12. (Macarena introduce [A1; Personas…].)

13. Macarena: Personas…

14. Ester: Ya está.

15. Macarena: … apuntadas

16. Ester: Vale (asiente).

17. (Macarena introduce [A1; Personas apuntadas.)

21. Macarena: ¿Cuántas hay?

22. Ester: Eso lo pongo yo.

25. Ester: En fútbol ([…])…

27. (Macarena introduce [A2; En futbol].)

28. Macarena: En fútbol.

29. Ester: Después ([…]) en baloncesto.

30. (Macarena introduce [A3; En baloncesto].)

32. Ester: Y en rugby.

34. (Macarena introduce [A4; En rugbi…].)

35. Macarena: ¿En rugby es así ([…])?

36. (Ester asiente […])

37. Macarena: Y en natación ([…])…

38. Ester: No, con i griega ([…] modifica [A4; En rugby…]).

39. Macarena: Y en natación (Macarena pulsa "Enter" e introduce [A4; En rugby])…

41. (Macarena introduce [A5; En natacion].)

50. Macarena: A ver ([…])…

51. Ester: Espera (mueve el cursor sobre A3).

52. Macarena: … mil trescientos (introduce [B1; 1375])…

◇	A	B
1	Personas apuntadas	1375
2	En futbol	
3	En baloncesto	
4	En rugby	
5	En natación	

Figura 57. Después del ítem 52.

En el ítem 59, Ester identifica en el enunciado la relación $F = N{\cdot}Vnf$. Macarena (ítem 61) intenta expresar *dos veces* como una operación aritmética, pero duda. Ester (ítem 62) la verbaliza como fórmula refiriéndose a la cantidad N (representada en B5) mediante deícticos y entre ambas introducen =B5*2 en B2, obteniendo un cero. En este episodio, Ester demuestra que no tiene problemas para operar con cantidades desconocidas.

Por otro lado, parece que están resolviendo el problema mediante el MHC, habiéndose internado en el tercer paso sin explicitar qué cantidad desconocida será la de referencia (segundo paso del MHC).

57. Ester: En fútbol hay…

59. Ester: … dos veces… O sea, en fútbol, dos veces más que en natación (señalando el enunciado).

61. Macarena: A ver ([…])… Pues es igual ([…]) a (Macarena introduce [B2 =…; …])… Natación es igual…

62. Ester: Esto (Macarena introduce [B2 =B5…; …] usando el ratón)… Eso por dos.

63. Macarena: Esto… por (Ester introduce [B2 =B5*…; …]) dos (Ester introduce [B2 =B5*2; 0]).

64. Ester: Cero.

65. Macarena: Cero. Vale.

Ester (ítem 67) identifica la relación $B = F + Mbf$ e introducen la fórmula =B2+43 en la celda B3. Al construir la fórmula, Ester (ítem 67) alude a la cantidad desconocida F mediante deícticos cuando la verbaliza y se observa (ítem 67) que Macarena vacila a la hora de hacer referencia a la cantidad desconocida F en

67. Ester: Y en baloncesto, cuarenta y tres (Macarena introduce [B3 =…; …]) personas más que ([…]) en fútbol. Eso (señala con un dedo a la pantalla y Macarena introduce [B3 =B2…; …] usando el ratón)…

68. Macarena: Más (Ester introduce [B3 =B2+…; …]) eso…

70. (Ester introduce [B3 =B2+43; 43] y sitúa

la fórmula[70].

la celda activa en B4.)

Ester (ítem 73) identifica la relación $R = B + Mrb$. No hay verbalización de la fórmula y Ester (ítem 75) introduce =B3+29 en B4.

73. Ester: Y en rugby (Macarena introduce [B4 =…; …]) hay veintinueve ([…]) personas más que en baloncesto.

74. Macarena: Vale.

75. (Ester introduce [B4 =B3+29; 72] usando el ratón.)

◇	A	B
1	Personas apuntadas	1375
2	En futbol	=B5*2
3	En baloncesto	=B2+43
4	En rugby	=B3+29
5	En natación	

Figura 58. Contenido de las celdas después del ítem 75.

Ester (ítem 77) parece buscar una relación que pueda convertir en fórmula para llenar la celda B5, la única que queda en blanco, donde se encuentra representada la cantidad *N*. En el ítem 84, se pone de manifiesto que Macarena considera ya como valores definitivos los que aparecen en las celdas B3 y B4 (ver Figura 59) y que faltan por determinar los de las celdas B2 y B5 (*F* y *N*, respectivamente). Posiblemente, esto sea consecuencia de que en la celda B2 se observa un cero y la B5 está en blanco; mientras que B3 y B4 contienen los valores 43 y 72, respectivamente: ambos plausibles. Podemos concluir que pasa a considerar como definitivos los valores provisionales asignados a las cantidades desconocidas en función de su idoneidad en el contexto planteado en el problema. Sin embargo, Ester (ítem 85) afirma que sólo es necesario determinar *N*, pues con ese valor se calculará *F*. Esto apunta a que Ester es consciente de la relación entre ambas cantidades que establece la fórmula que han introducido en B2 (ver Figura 58).

Del comentario de Ester en el ítem 77, deducimos que no entiende la necesidad de que haya una celda de referencia y del

77. Ester: Y en natación ([…])… (Inaudible.)… Ahora falta natación.

84. Macarena: Falta saber las que hay en fútbol y las que hay en natación (sitúa la celda activa a B2).

85. Ester: Mm (asiente)… Pero cuando sepas lo que vale la natación, sabrás la otra (mientras habla señala a la pantalla con la mano).

87. Macarena: Sí ([…]), pero hay que saber esto (señala a la pantalla con un gesto con la cabeza y sitúa la celda activa en B5).

[70] De hecho, Macarena se limita a seguir las instrucciones de Ester cuando se construyen las fórmulas en las que se operan con cantidades desconocidas. Recordemos que Macarena no contestó a ningún ítem del cuestionario 3 en el que se tuviera que construir una fórmula que utilizara celdas como argumento.

papel que ésta juega en los pasos 3 y 5 del MHC. Recordemos que durante la secuencia de enseñanza se insistió en la necesidad de que hubiera una sola celda en blanco, asociada a una cantidad desconocida, y que a partir de ella se generaba la secuencia de posibles valores de la cantidad que representaba.

	A	B
1	Personas apuntadas	1375
2	En futbol	0
3	En baloncesto	43
4	En rugby	72
5	En natación	

Figura 59. Después del ítem 75.

En el ítem 91, Macarena determina el número de personas que aún no están asignadas a ninguna actividad deportiva. Obtiene como resultado 1260 y concluye que "Faltan un puñao (sic) de personas por poner". Posiblemente con la intención de aumentar los sujetos apuntados en fútbol, decide generar una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 2. Ester (ítem 102) parece proponer que debe generarse una serie de valores en la fila 5. Justifica su idea diciendo "Si no hay nada", lo que suponemos una referencia a que la celda B5 es la de referencia (ver Figura 59).

91. Macarena: Espérate un momento ([…] Macarena introduce [C4 =43+72; 115].) Ciento quince. (Borra C4 e introduce [C4 =1375-115; 1260].) Ves pensando (mientras introduce la fórmula anterior). Faltan un puñao (sic) de personas por poner. A ver, aquí (sitúa la celda activa en C2) había que poner igual a (introduce [C2 =…; …]) esto (introduce [C2 =B2…; …] usando el ratón) más uno (introduce [C2 =B2+1; 1]). ¿No? Y estirarlo (Ester hace un gesto de extrañeza), ¿no?

93. (Macarena estira C2.)

95. Macarena: (Inaudible. Ambas ríen.)… No me hagas reír (llega hasta [IV2 =IU2+1; 254]). Vale.

97. Ester: Ahí (señala con la hoja a la pantalla).

98. Macarena: ¿Aquí (sitúa la celda activa en B5)?

100. Macarena: ¿Dónde? ¿Aquí ([…]) o aquí (mueve la celda activa de C5 a C3)?

102. Ester: Pues en natación (Macarena […] sitúa la celda activa en B5). Si no hay nada.

104. Macarena: En natación, ¿qué?

105. Ester: Pues no sé.

Macarena (ítem 115) se centra en determinar el valor de la cantidad N. En el ítem 117, vuelve a leer un fragmento del enunciado y concluye que hay que saber las personas que hay en fútbol para saber las que hay en natación, lo que supondría volver a utilizar la relación $F = N{\cdot}Vnf$ y le conduciría a un círculo vicioso en el que

114. (Silencio de 5 segundos.)

115. Macarena: ¿Cuántas hay en natación…?

117. Macarena: Se han apuntado ([…]) a activi… esta temporada… en fútbol hay dos veces más personas que en natación (leyendo)… Pero ([…]) hay que saber las que (Ester sitúa la celda activa en C5) hay en fútbol para saber las que hay en natación.

necesita saber N para calcular F y viceversa. Ester (ítems 120-123) realiza un reparto equitativo de los estudiantes en las distintas actividades deportivas, lo que iría en contra de las restricciones impuestas por el enunciado. El resultado de la operación resulta ser un número decimal (ver Figura 60) y Macarena lo rechaza "porque las personas ([…]) no se parten" (ítem 124) sin que Ester se oponga. Esto puede poner de manifiesto que, tanto Ester como Macarena, consideraban que se estaba calculando definitivamente N y no un valor provisional que pudiera dar una idea de su valor real y sirviera como primer valor de prueba[71]. Evidentemente, esta suposición implicaría que Ester pretende ir de lo conocido hacia lo desconocido, un rasgo típico del pensamiento aritmético, para, de esta forma, calcular el resto de cantidades a las que han asociado fórmulas que han dejado cálculos suspendidos[72].

120. Ester: (Inaudible.)… (Ester introduce [C5 =1375…; …].)… (Inaudible.)… entre cuatro, era entre cuatro (señala a la pantalla con el dedo).

121. (Ester introduce [C5 =1375/…; …].)

123. (Ester introduce [C5 =1375/4; 343,75].)

124. Macarena: No puede ser ([…]), porque las personas ([…]) no se parten, Ester.

127. (Macarena borra C5.)

◇	A	B	C	D
1	Personas apuntadas	1375		
2	En futbol	0	1	2
3	En baloncesto	43		
4	En rugby	72		
5	En natación		343,75	

Figura 60. Después de ítem 123.

Macarena (ítem 129) pregunta si la fórmula introducida en B2 contenía un signo de multiplicación y la edita para saberlo. Ester (ítem 131) responde afirmativamente y parece indicar a Macarena que introduzca un valor en B5, pero resulta inaudible[73]. Sin embargo, Macarena (ítem 136) sustituye la fórmula presente en B2 por un valor. Ester (ítems

129. Macarena: […] ¿Aquí (hace clic en B2) habíamos puesto un por?

131. Ester: Sí (apunta a la pantalla con la mano), pero si… (Inaudible.)

132. Macarena: ¿Cuál?

133. Ester: Éste (señala con el dedo a B5).

134. Macarena: ¡Ah! Vale. Ya.

136. (Macarena introduce [B2; 14…].)

[71] Si la idea era obtener un primer valor de prueba para la cantidad N, se podían haber quedado con una aproximación de 343,75.

[72] En el momento en que se introduzca el valor definitivo de la cantidad N en la celda B5, el programa recalculará automáticamente todas las fórmulas y dará los valores definitivos del resto de cantidades desconocidas. Decimos que estas fórmulas han dejado cálculos suspendidos, porque parece que la intención de Ester no era materializar relaciones, sino reflejar un cálculo que será definitivo cuando se sepa el valor de la cantidad desconocida N. Esto establecería una orden en el que deberían efectuarse las operaciones, lo que es propio de la aritmética.

[73] Suponemos esto por las preguntas y acciones posteriores que realiza de Macarena.

137, 140 y 142) le explica que debe introducir el valor en B5 y que ha de conservarse la fórmula presente en B2. Utilizando la acción deshacer vuelven a la situación anterior al ítem 136. Macarena (ítem 144) sigue las instrucciones de Ester e introduce el número 15 en B5, lo que produce una variación en los valores de B2, B3 y B4. Macarena (ítem 145) muestra una gran sorpresa, lo que pone de manifiesto que no parecía ser consciente del recalculado automático de una fórmula cuando se modifica el valor de una celda argumento.

137. Ester: No borres.

138. Macarena: No borro… No, pero aún no cambia.

139. (Macarena borra B2.)

140. Ester: Al revés…

141. Macarena: Que sí.

142. Ester: … Si cambias (sitúa la celda activa en B5) éste.

143. Macarena: Sí. Deshazlo… Deshaz… (Ester sitúa la celda activa en B2.)… Ester, arriba (señala a la pantalla con el dedo)… Ester, arriba (alargando más el brazo)… (Ester pulsa el botón “Deshacer” con lo que vuelven a tener [B2 =B5*2; 0].) Vale, a ver, si cambio éste (sitúa la celda activa en B5)…

144. Ester: Claro (Macarena introduce [B5; 15])… ¿Ves (la celda B2 pasa a contener el valor 30)?

145. Macarena: Sí que cambia. ¡Hala!

146. (Ester sitúa la celda activa en B5.)

147. Ester: Te lo he dicho yo.

Macarena (ítem 153) supone que ahora basta con cambiar el valor presente en B5 hasta conseguir tener en B2 la mitad que en B5; pero se da cuenta de que eso ya se cumple. Aunque Macarena ha comprobado que existe conexión entre las celdas B2 y B5, parece que no ha entendido que están enlazadas por una fórmula que expresa la relación $F = N \cdot Vnf$ y plantea la verificación de la relación como condición para resolver el problema. Ester (ítems 156, 159 y 161) le hace ver que eso es siempre así. Macarena (ítems 162 y 169) asume la situación y muestra su desaliento: “Yo que estaba toda ilusionada (introduce [C5 =…; …]) porque lo había sacao (sic)”.

153. Macarena: Espérate. Vamos probando porque así tiene que dar… el dobl… A pues no… Ya da… ([…]) Si en fútbol hay el doble que en natación (sitúa el cursor sobre B5)… ([…])… ¿Quince ([…]) no es el doble de…? ¿Treinta no es ([…]) el doble de quince?

154. Ester: Sí.

155. Macarena: En baloncesto hay (leyendo)…

156. Ester: Pero (apunta a la pantalla con la mano) es que va a dar siempre el número que pongas

158. Macarena: ¿Eh ([…])?

159. (Ester introduce [B5; 5].)

161. Ester: Si pones cinco, también dará (señala con la mano a la pantalla).

162. Macarena: Joder. Podía ser más complicao (sic). Mecagüen (sic).

164. (Macarena introduce [B5; 15].)

167. Ester: ¡Qué tonta eres!

169. Macarena: A ver ([…])… Si en baloncesto hay… Joder (sitúa la celda activa en B2)… En fútbol (sitúa la celda activa en B5)… queda el doble, eso no vale ([…])… Yo que estaba toda ilusionada (introduce [C5 =…; …]) porque lo había sacao (sic) ([…]). A ver, esto…

Ester (ítem 170) genera una progresión

170. Ester: Esto (Ester introduce [C5 =B5…;

aritmética de diferencia uno en la fila 5, aunque no tiene muy claro con qué intención (ítem 173). Macarena (ítem 182) critica el plan por el hecho de que haya tantas personas (aunque se trata de un número inferior al total de estudiantes) cuando se observa el número 269 en la celda IV5. Ester (ítem 184, ver Figura 61) se da cuenta de que no se cumple que los valores de la celda D2 sean el doble de los de la celda D5. Macarena (ítem 185) parece indicar que los únicos que deben cumplir esa relación son los valores de las celdas B2 y B5.

…] usando el ratón) más uno (Macarena introduce [C5 =B5+1; 16]).

172. Macarena: ¿Qué haces ahí?

173. Ester: Yo qué sé.

174. (Ester sitúa la celda activa en C5.)

175. Macarena: Venga, pues estira.

176. (Ester estira C5.)

177. Ester: Como sea así.

178. (Ester llega hasta [IV5 =IU5+1; 269].)

182. Macarena: Sí, hombre. ¿Cómo van a haber tantas, Ester?

183. (Macarena sitúa la celda activa en D5.)

184. Ester: Ahora no es el doble (se observan los valores 32 y 17 en las celdas D2 y D5, respectivamente).

185. Macarena: Sí, vamos (mueve el cursor de C2 a C5). Pero si el doble es éste (mueve el cursor de B2 a B5).

	A	B	C	D
1	Personas apuntadas	1375		
2	En futbol	30	31	32
3	En baloncesto	73		
4	En rugby	102		
5	En natación	15	16	17

Figura 61. Después del ítem 184.

En el ítem 186, Ester le indica a Macarena que desplace la ventana hacia la derecha. Macarena obedece y ambas comienzan a buscar que se cumpla que los valores de la fila 2 sean el doble de los de la fila 5 (ítems 189 y 191) para lo que realizan cálculos mentales. Es decir, plantean la verificación de la relación $F = N \cdot Vnf$ más allá de la columna B, donde ya se produce en las celdas B2 y B5. En el ítem 193, Macarena parece darse cuenta de que no va a volver encontrar que un número de la fila 2 sea el doble de uno de la fila 5.

186. Ester: Pallá (sic). (Mientras dice esto, Ester apunta a la pantalla con la mano y la mueve de izquierda a derecha.)

188. Macarena: A ver, el doble… de veint… El doble de eso…

189. Ester: Veinticinco, cincuenta (se observan los valores 40 y 25 en las celdas L2 y L5, respectivamente)… Chis!

190. (Macarena sigue desplazando la ventana hacia la derecha.)

191. Macarena: Mira a ver si hay algún doble por ahí, Ester.

192. Ester: Pero es que…

193. Macarena: Treinta y cinco… (Inaudible.)… Que sale alguno… Que es que salga alguno… Que es quince. Si no, no hay más dobles, Ester… (Inaudible.)… ([…])… Tienen que coincidir todos ([…]) los números, ¿no?

Ester (ítem 196) propone aplicar la relación $T = F + B + N + R$ para comprobar que la suma de personas apuntadas dé 1375. Macarena (ítem 197) se opone y parece basar su decisión en

196. Ester: Pues suma esto (mueve el cursor sobre el rango B2:B5) a ver si te da eso (señala con el cursor a B1).

197. Macarena: Pues va a ser que no.

que los valores provisionales representados permiten, a ojo, predecir que la suma no dará 1375. Aun así, Ester (ítems 199-204) construye la fórmula =B2+B3+B4+B5 en C7 (ver Figura 62), lo que implica operar con cantidades desconocidas, aunque en las celdas que las representan se muestran valores provisionales. No construyen un nombre para identificar la cantidad que se pretende calcular con la fórmula y, al escribirla, Ester utiliza deícticos para referirse a las celdas argumento.

Tras el ítem 204, han conseguido expresar mediante fórmulas (ver Figura 62) las relaciones necesarias y suficientes $T = F + B + N + R$, $F = N{\cdot}Vnf$, $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$. También han iniciado la comparación de $F + B + N + R$ con el valor conocido de T, lo que supone buscar la verificación de una igualdad.

199. (Ester introduce [C7 =…; …].)

200. Ester: Igual a (introduce [C7 =B2…; …] usando el ratón) esto, más (introduce [C7 =B2+…; …]) esto…

201. (Ester introduce [C7 =B2+B3+B4…; …] usando el ratón.)

202. (Macarena introduce [C7 =B2+B3+B4+…; …].)

203. (Ester introduce [C7 =B2+B3+B4+B5…; …] usando el ratón.)

204. (Macarena pulsa “Enter” e introduce [C7 =B2+B3+B4+B5; 220].)

◇	A	B	C
1	Personas apuntadas	1375	
2	En futbol	=B5*2	=B2+1
3	En baloncesto	=B2+43	
4	En rugby	=B3+29	
5	En natación	15	=B5+1
6			
7			=B2+B3+B4+B5

Figura 62. Contenido de las celdas después del ítem 204.

En los ítems 205 y 206, coinciden en que suponer 15 personas apuntadas en natación implica que la suma no alcance el valor 1375. Macarena (ítem 207) borra la fórmula que han introducido en C7; usa el valor provisional que habían que habían obtenido para T, en el ítem 204, como nuevo valor de N e introduce (ítem 209) la fórmula =B2+B3+B4+B5 en C6. La fórmula genera el valor 1655 (ítem 209) y convienen (ítems 210 y 211) en que se han pasado.

El uso del valor obtenido en C7 (ítem 204) como valor de prueba para N (ítem 207), supone dotar a la estrategia ensayo y error de un procedimiento de decisión no basado en la relación de aumento y/o disminución entre el valor de prueba y el valor obtenido para comparar.

205. Macarena: Com… ¡Madre mía! Nos faltan personas (sitúa la celda activa en C7)…

206. Ester: Nos faltan…

207. Macarena: A ver (borra C7), espérate un momento. Espera ([…]). Espera (modifica [B5; 220])… Sí, hombre…

208. Ester: Es que ahora han cambiado éstos (mueve el cursor sobre B3 y B4) también.

209. Macarena: A ver, espérate un momento ahí (Macarena introduce [C6 =…; …]). A ver, ponlo (señala a la pantalla con la cabeza) esto más… (Introducen [C6 =B2+B3+B4+B5; 1655]. Ester usa el ratón y Macarena escribe los signos “+”.) Mecagüen (sic)…

210. Ester: Ahora nos pasamos.

211. Macarena: … Casi… Ahora nos pasamos…

Ester guía a Macarena (ítems 233-238) en la construcción de la fórmula =C6-B1 en la celda C8, que resta el valor provisional y el que debería tener la cantidad T, para obtener los estudiantes que sobran o faltan por apuntar. Macarena (ítem 242) emplea este número (280) como nuevo valor provisional de N y construyen (ítem 258) en C6 una fórmula que da cuenta, nuevamente, de la relación $T = F + B + N + R$. El resultado obtenido, 2075, vuelve a superar 1375 y Macarena (final del ítem 258) se da cuenta y decide borrar la fórmula que había introducido en C6.

El hecho que Macarena borre nuevamente la fórmula que ha construido para comprobar si la suma de las personas apuntadas a las actividades deportivas es 1375 nos sugiere que no se trata de una acción casual. Posiblemente, no es capaz de darse cuenta de que esta fórmula se recalculará automáticamente cuando se modifiquen los valores de las celdas argumento. Sin embargo, en los ítems 142-147, Ester ya le había hecho ver esta característica de la hoja de cálculo.

233. Ester: Esto (introduce [C8 =C6…; …] usando el ratón).

234. Macarena: Eso menos…

235. Ester: Menos. (Sobre la voz de Macarena.)

236. (Macarena introduce [C8 =C6-…; …].)

237. Ester: Esto (introduce [C8 =C6-B1; 280] usando el ratón)…

238. Macarena: Eso (acompañando a Ester).

239. Ester: Y da doscientos ochenta (casi inaudible).

240. Macarena: Doscientos ochenta (sobre el comentario anterior de su compañera). A ver. Vale.

241. (Macarena borra C8.)

242. (Macarena introduce [B5; 280].)

243. Macarena: Doscientos ochenta, cambia todo eso y, a ver… Ahora (Ester sitúa la celda activa en C6 y después en B6)… A ver, espérate, quita eso (Macarena sitúa la celda activa en C6 y borra C6).

258. Macarena: Suma (señala a la pantalla con la cabeza)… eso (Ester introduce [C6 =B2…; …]) más (Macarena introduce [C6 =B2+…; …]) eso (Ester introduce [C6 =B2+B3…; …]), más (Macarena introduce [C6 =B2+B3+…; …]) eso (Ester introduce [C6 =B2+B3+B4…; …]), más (Macarena introduce [C6 =B2+B3+B4+…; …]) eso (Ester introduce [C6 =B2+B3+B4+B5; 2075] usando el ratón). Vale… ¡Ya se pasa! Se pasa más aún (Macarena borra C6). A ver, Ester, espera (Macarena introduce [C6 =…; …]). Es igual…

Ester (ítem 259) indica a Macarena que no es necesario borrar cada vez la fórmula que expresa $F + B + N + R$, pues su resultado cambiará automáticamente.

259. Ester: Pero no lo borres porque (señala con el dedo a B5) si cambias ése, también cambiará ése (señala con el dedo a C6).

Macarena (ítems 260 y 261) no hace caso a Ester y se centra en obtener una estimación (o sencillamente calcular) del valor de N de la misma manera que lo había hecho Ester anteriormente (ver comentario a los ítems 120-123). El resultado no entero vuelve a bloquearla.

260. (Macarena introduce [C6 =1375…; …] mientras Ester habla.)

261. Macarena: Espera… Entre (Macarena introduce [C6 =1375/4; 343,75])… Que no se pueden partir las personitas (Macarena borra C6). Jolín.

Vuelven (ítems 279-284) a escribir en C6 la fórmula que expresa $F + B + N + R$. En el ítem 285, Macarena señala que esa comprobación (la del ítem 284) ya la

279. Ester: Es igual (introduce [C6 =…; …])…

280. Macarena: Igual (acompañando a Ester)…

281. Ester: A esto (introduce [C6 =B2…; …])

habían hecho, refiriéndose a que la suma da el resultado 2075 (ver ítem 258). Evidentemente, esto es consecuencia de que se han vuelto ha introducir en C6 la misma fórmula y que no se ha modificado en valor de prueba presente en B5. Una vez más se pone de manifiesto las dificultades que tiene Macarena para entender los automatismos de la hoja de cálculo.

más (introduce [C6 =B2+…; …])…

282. Macarena: A eso más (acompañando a Ester)…

283. Ester: Esto (introduce [C6 =B2+B3…; …]) más (introduce [C6 =B2+B3+…; …])…

284. (Ester introduce [C6 =B2+B3+B4+B5; 2075] usando el ratón.)

285. Macarena: Pero que ya lo hemos puesto.

Ester (ítem 287) prueba con el valor 120 en B5 y Macarena (ítem 288) pregunta por qué emplea este valor. Entre los ítems 288 y 291, Ester explica a Macarena que el resultado que aparece en C6 depende de lo que se pone en B5 y que cuando sean iguales los valores de B1 y C6, habrán resuelto el problema. Macarena (ítems 290 y 293) afirma que entiende el propósito.

286. Ester: Que ya… A ver si así cambia.

287. (Ester introduce [B5; 120].)

288. Macarena: ¿Ciento veinte, por qué?

289. Ester: Para (señala a la pantalla con la mano)…Porque (señala a B5)… depende lo que pones ahí…

290. Macarena: ¡Ah…! ¡Vale, vale, vale, vale, vale…! (Alzando la voz para acallar a su compañera.)

291. Ester: … cambia eso (señala a C6) y te… cuando sea igual (señala a B1) pues…

293. Macarena: Vale, vale. Que me he enterao (sic).

Macarena (ítem 294) comienza a probar valores en B5. Estos valores de prueba ya no se calculan a partir del resultado obtenido en C6 (como había ocurrido anteriormente), sino que parece observar que a medida que aumenta el valor de B5, también lo hace el de C6. El cambio de criterio que guía la estrategia de ensayo y error se ha producido de manera instantánea y como consecuencia de la reflexión que ha hecho Ester (ítems 285-293) sobre el recalculado automático de las fórmulas (ítems 289 y 291). En el ítem 297, consiguen dar con el resultado.

En definitiva, realizan una lectura algebraica del problema que lo reduce a las relaciones necesarias y suficientes $T = F + B + N + R$, $F = N \cdot Vnf$, $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$. Utilizan el MHC, pero en el paso quinto se limitan a sustituir valores en la celda de referencia sin aprovechar las facilidades de la hoja de cálculo para replicar los pasos tercero y cuarto.

294. (Macarena introduce [B5; 150] y en C6 se muestra 1165.)

295. Ester: Ves (sic) poniendo números.

296. Macarena: Casi.

297. (Macarena introduce [B5; 180] y en C6 se muestra 1375.)

298. Macarena: ¡Ah…!

299. Ester: Ya está.

300. Macarena: Toma. Soy un (sic) hacha.

6.5.3.4. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema "Los tres amigos"

Dan nombre y asignan celda de manera implícita a las cantidades desconocidas L, J y R y a la conocida T (ver Figura 63). Sin embargo, no se representan las cantidades Vlr y Mjl que sirven para comparar entre sí las cantidades desconocidas.

5. Ester: Ganaron.

7. (Macarena introduce [A1; Ganaron].)

8. Macarena: ¿Lo que ganó Luis ([…])?

10. (Macarena introduce [A2; Luis…].)

11. Ester: Luis ganó…

13. (Macarena introduce [A2; Luis].)

14. Macarena: Luis.

16. Ester: Juan. ([…])

17. (Macarena introduce [A3; Juan].)

18. Macarena: Juan y Roberto.

20. Ester: Roberto.

22. (Macarena introduce [A4; Roberto].)

24. Ester: Vale ([…]). Lo que ganó ([…]), novecientos sesenta.

26. (Macarena introduce [B1; 960].)

◇	A	B
1	Ganaron	960
2	Luis	
3	Juan	
4	Roberto	

Figura 63. Después del ítem 26.

Sin señalar explícitamente qué cantidad jugará el papel de cantidad de referencia, identifican (ítems 27 y 28) la relación $J = L + Mjl$ en el enunciado e introducen (ítems 27-40) la fórmula =24-B3 en la celda B2, cambiando[74] el papel de minuendo y sustraendo. Quizá, sea consecuencia de no atender a la conjunción *que* del fragmento de enunciado "Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan", convirtiéndolo en *Luis ganó veinticuatro euros menos Juan*.

27. Ester: Luis ([…]) ganó ([…]) veinticuatro euros (leyendo)… menos (Macarena mira al ordenador e introduce [B2 =…; …]) que Juan.

28. Macarena: Menos que Juan. (Acompañando a Ester.)

30. Macarena: Pon ahí (señala a la pantalla con la mano)…

32. Ester: Veinticuatro.

33. Macarena: No.

35. Macarena: Sí, sí.

37. (Macarena introduce [B2 =24-…; …].)

38. Ester: Menos que (Ester introduce [B2 =24-B3…; …] usando el ratón)…

39. Macarena: Juan.

40. (Macarena pulsa "Enter" e introduce [B2 =24-B3; 24].)

41. Macarena: Veinticuatro ([…]).

[74] Utilizamos el plural, porque ambas participan, pero es Ester la que da pie a la confusión al animar a Macarena (ítem 32) a introducir el número 24 a continuación del signo igual que ésta había escrito en B2.

En el ítem 44, Ester lee el trozo del enunciado en el que se ofrece la relación $R = L \cdot Vlr$, omitiendo el sujeto de la frase. Macarena (ítem 47) aísla *la décima parte* de las cantidades que relaciona y pretende identificar su valor, lo que implicaría considerar una cantidad en lugar de una operación. Ester (ítem 56), posiblemente dando respuesta a la pregunta de Macarena (ítem 47), concluye que la décima parte será diez. Macarena (ítems 62, 66, 68) relaciona la décima parte con lo que se gana con un décimo de lotería, lo que pone de manifiesto que supone *el décimo* como una cantidad de la que hay que saber su valor. En definitiva, se puede observar como a partir del ítem 47 dejan de referirse a *la décima parte* y lo hacen exclusivamente a *la décima* o *un décimo* que acaba reduciéndose al número diez.

44. Ester: Y la décima parte ([…]) de lo que ganó… que Juan y la décima parte (leyendo)…

47. Macarena: ¿Y la décima parte cuánto es?

55. Macarena: Éste es más difícil.

56. Ester: Pues la décima será diez ([…]).

58. Macarena: O no.

59. Ester: Un décimo, diez (con ironía).

62. Macarena: Cuando ganas un décimo, ¿qué ganarías?

63. Ester: Un décimo es de diez.

64. Macarena: ¿Sí?

65. Ester: Y nuev… un noveno, de nueve (ríe).

66. Macarena: Ester, ([…]) cuando ganas el décimo…

67. Profesor: Hablad en alto.

68. Macarena: … El décimo ([…]) de la lotería, cuando lo ganan, ¿qué ganan? ¿Diez?

69. Ester: No, ([…]) pero algo de diez ([…]) tiene que ser.

71. Ester: La décima es de diez.

73. Macarena: Pues yo qué sé… (Inaudible.)

74. Ester: Sí ([…]) porque… Sí, es diez.

76. Ester: Tía ([…]), décimo es de diez.

77. Macarena: Entonces qué ponemos.

79. Ester: Porque unidad, uno (levanta un dedo y ríe.)

80. Macarena: ¿Qué?

81. Ester: Unidad, uno. Dece… Decena, diez. Centena, cien… Debe de ser eso.

Ester (ítem 95) pretende usar el número diez, al que han reducido *la décima parte*, para la construcción de una fórmula en la que se sume diez a la cantidad *J*. Empieza a escribirla en la celda B3, donde está representada la cantidad *J* (ver Figura 63), mientras dice “diez más que Juan”. Macarena (ítem 96) parece observar la imposibilidad de construir en la celda que representa a la cantidad *J* una fórmula que sume diez a la cantidad *J* y dice “será Roberto”. Sin embargo, no aclara si es la cantidad *R* a la que hay que añadir diez o es la celda donde hay que introducir la

95. Ester: Pues ([…]) diez más que Juan… Igual (Ester introduce [B3 =…; …])… Diez (Ester introduce [B3 =10…; …])… No ([…]).

96. Macarena: Será… A ver ([…]), será Roberto.

97. Ester: No.

99. Macarena: Sí.

100. Ester: La décima parte de ([…]) lo que ganó ([…]). (Dice esto leyendo.)

105. Macarena: Va.

107. Ester: Pues va.

109. (Macarena borra B3.)

112. Ester: Que ése (señala a la pantalla con la

fórmula. La discusión se encona (ítems 97 y 99) y conduce a Ester (ítem 100) a volver a leer el fragmento de enunciado en que se expresa la relación. En el ítem 112, Ester indica que Roberto ganó “la décima parte más” que Juan. Macarena (ítem 115) concluye “Entonces es menos”, lo que podemos interpretar como que se debe hacer una operación de resta en la celda B3, donde había empezado a introducir una fórmula. Esto supone convertir en aditiva la relación multiplicativa ligada a *la décima parte*. En el ítem 121, Macarena vuelve a verbalizar “diez menos”, pero en lugar de considerarlo un fragmento de una comparación entre cantidades (diez menos que) lo traduce directamente como una operación matemática (10 menos) cometiendo un nuevo error de inversión sobre la relación incorrecta propuesta por Ester, que se refleja en la fórmula =10-B4 que introduce en B3.

mano) es Juan ([…]) porque (Macarena introduce [B3 =…; …]) Roberto ganó ([…]) la décima parte ([…]) más.

115. Macarena: Entonces es menos.

116. Ester: Pues será que no ([…]).

121. Macarena: A ver, espera, diez (Macarena modifica [B3 =10…; …] […]) menos (Macarena introduce [B3 =10-10…; …]) eso… O sea (Macarena modifica [B3 =10-…; …]), diez menos diez, no.

122. (Macarena introduce [B3 =10-B4; 10] usando el ratón.)

◇	A	B
1	Ganaron	960
2	Luis	14
3	Juan	10
4	Roberto	

Figura 64. Contenido de las celda después del ítem 122.

Ester (ítems 130 y 134) propone sumar el dinero que le corresponde a cada personaje con la intención de buscar la coincidencia con el valor de T, lo que supone plantear la igualdad, que debe establecerse en el paso cuarto del MHC, sobre la relación $T = L + J + R$.

125. Ester: ¿Y qué vamos a hacer?

129. Macarena: Pues yo qué sé.

130. Ester: Tienen que sumarlo.

134. Ester: Vamos a hacer ([…]) lo mismo que antes… (Inaudible.)

De acuerdo con el plan que acaba de exponer, Ester (ítem 165) comienza a probar valores en la celda B4 (la celda de referencia), lo que produce que se modifiquen automáticamente los valores presentes en B2 y B3. Cuando Macarena (ítem 170) le pide que le explique lo que está haciendo, Ester (ítem 171) prueba con otro valor en B4 que produce la aparición de un número negativo en B3. Esto lleva a Macarena (ítem 172) a hacer un comentario sarcástico que pone de manifiesto que tiene dificultades para entender el carácter provisional de los

165. (Ester introduce [B4; 5] y los valores de las celdas B2 y B3 cambian automáticamente.)

166. Ester: ¿Ves?

168. Macarena: ¿Qué has hecho?

169. Ester: Borro éste (Ester borra B4) y se queda igual.

170. Macarena: Vale, muy bien, pero me puedes explicar qué es lo que habías hecho.

171. Ester: Pues que… (Inaudible.)… (Ester introduce [B4; 25] y en la celda B3 se muestra automáticamente -15) un número. No

172. Macarena: Sí, menos quince (Ester borra B4), va a ganar… Espérate un momento. Espera

valores generados y que los interpreta como definitivos dentro del contexto del problema. A continuación, introduce la fórmula =960/3 en la celda B5 con el objetivo de realizar un reparto equitativo con el que pretende haber resuelto el problema diciendo que a cada uno le corresponden 320 euros. En el ítem 177, Macarena emplea el número que acaba de calcular (ver Figura 65) como valor de prueba en B4, lo que supone el uso del valor obtenido en un reparto equitativo como un primer valor de prueba. Ahora es Ester (ítem 179) la que parece dudar de su propio plan ante la presencia de un valor negativo en B3 (ver Figura 65), pues, tras el comentario, no insiste en seguir probando con otros posibles valores en la celda B4.

un plis (sic) (Macarena introduce [B5 =960/3; 320]). Trescientos veinte. Hala… Cada uno tiene que ganar trescientos veinte, ¿no ([…])?

176. Macarena: Espérate un momento… Trescientos (Ester […] hace un gesto de extrañeza)… veinte.

177. (Macarena introduce [B4; 320]. Cambian automáticamente los valores de las celdas B2 y B3. En B2 se muestra el valor 334 y en B3, -310.)

178. Macarena: Uno gana trescientos treinta y cuatro…

179. Ester: Y el otro debe.

	A	B
1	Ganaron	960
2	Luis	334
3	Juan	-310
4	Roberto	320
5		320

Figura 65. Después del ítem 177.

Macarena (ítem 182) calcula la suma de los números presentes en B2, B3 y B4 sin signo (-310 se convierte en 310) y lo compara con 960. Evidentemente, pone en juego la verificación de $T = L + J + R$ como condición para resolver el problema; sin embargo, muestra poco respeto por las relaciones que han permitido calcular los valores de B2 y B3. Se da cuenta (al final del ítem 182) que se han pasado en 4 (la suma ha dado 964) y Ester (ítem 187) propone disminuir en 4 el valor 320, con la esperanza de que reducir el exceso de la suma. Macarena (ítem 189) parece que vuelve a dar carácter definitivo a los resultados provisionales, pues se opone a la propuesta de Ester indicando que el dinero se debe mantener.

182. Macarena: A ver ([…]), espera (Macarena introduce [C5 =…; …]). A ver… Trescientos treinta y cuatro (Macarena introduce [C5 =334…; …]), más (Macarena introduce [C5 =334+…; …]) trescientos diez (Macarena introduce [C5 =334+310…; …]), más trescientos… (Macarena introduce [C5 =334+310+320; 964]). ¡Uy…! Casi. Nos pasamos ([…]) por cuatro.

187. Ester: Pues réstale al de trescientos veinte, cuatro…

189. Macarena: Sí, hombre… Y los cuatro euros esos.

Macarena acaba probando un valor menor a 320 (aunque no el que se obtendría de restar 4 a 320) en el ítem 197. Entre Ester y Macarena (ítems 198-204) introducen la fórmula =B2+B3+B4 en la celda C5 que

197. Macarena: Trescientos dieciocho (Macarena introduce [B4; 318])… ¡Ih…! A ver, espérate un momento. Súmalo.

198. (Macarena introduce [C5 =…; …].)

199. (Ester introduce [C5 =B2…; …] usando

expresaría $L + J + R$. No construyen nombre para identificar la cantidad que se calcula con esta fórmula, aunque es evidente que representa a T. El valor que obtienen (342) no coincide con 960 y se aleja mucho debido a que ahora sí que se tienen en cuenta los signos.

el ratón.)

200. (Macarena introduce [C5 =B2+…; …].)

201. (Ester introduce [C5 =B2+B3…; …] usando el ratón.)

202. (Macarena introduce [C5 =B2+B3+…; …].)

203. (Ester introduce [C5 =B2+B3+B4…; …] usando el ratón.)

204. (Macarena introduce [C5 =B2+B3+B4; 342].)

205. Macarena: Tres cientos cua… No puede ser.

	A	B
1	Ganaron	960
2	Luis	814
3	Juan	-790
4	Roberto	800
5		824

Figura 66. Después del ítem 229.

Entre los ítems 208 y 229 van probando números en B4. En el ítem 209, Macarena indica, de forma implícita, el aumento de la suma a medida que se incrementa el valor de B4. Siguen aumentando el valor que se introduce en B4 hasta que Macarena (ítem 230) observa que Luis ha recibido casi todo el dinero que se podía repartir (se muestra un 814 en la celda B2 y un 800 en B4, ver Figura 66). Ester (ítem 232) insiste en que debe ser así, pero observa (ítem 235) que Roberto debe dinero, apoyándose en el valor negativo provisional que hay la celda que la representa. Macarena (ítem 236) le contesta que no se puede deber.

208. (Ester introduce [B4; 310] en C5 se muestra 334.)

209. Macarena: Trescientos diez, no. Tiene que ser más.

229. (Ester introduce [B4; 800] en C5 se muestra 824.)

230. Macarena: Ester, pero no puede ganar eso porque Luis casi ha ganado todo (Macarena sitúa la celda activa en B2).

232. Ester: Tiene que ser así.

233. Macarena: Que no.

234. (Ester sitúa la celda activa en B3 donde se muestra -790.)

235. Ester: Y éste debe.

236. Macarena: Pero cómo va a deber dinero, Ester ([…]). Si lo gana ([…]), ¿cómo lo va a deber?, por favor.

Siguieron probando valores hasta que consiguieron que la suma diera 960 (ítem 247). Macarena (ítem 250) indica que no es posible, porque un protagonista gana 950 euros; es decir, casi el total, lo que supone hacer una comprobación del resultado sobre el hecho de que una parte no puede superior al todo. Sin embargo, en ningún momento hicieron referencia a que el valor de la cantidad J siempre era

247. (Ester introduce [B4; 936]. En B2, B3 y C5 se muestra, respectivamente, 950, -926 y 960).

250. Macarena: Qué tonta eres! Pero, sí, hombre, si gana uno… No. Si ganan los tres novecientos sesenta, ¿cómo va a ganar Luis (Ester ríe) novecientos cincuenta (Macarena sitúa el cursor sobre B2 que muestra 950 y mira a Ester)? (Ester se encoge de hombros.)… Porque vamos ([…])…

negativo y se hacía cada vez más pequeño, lo que sí que hubiera sido un argumento sólido para valorar la resolución.

Abandonaron la resolución.

258. Profesor: ¿Lo queréis dejar ése?

259. Ester: Sí (al tiempo que asiente con la cabeza).

En definitiva, han realizado una lectura algebraica del problema que lo ha reducido a las relaciones correctas $T = L + J + R$ y $J = L + Mjl$ y a la incorrecta $R = Vlr + J$. En las dos comparaciones cometen errores de inversión ligados a verbalizaciones que omiten parte de la información. Podemos decir que utilizan el MHC, pero sustituyendo el paso quinto por una estrategia de ensayo y error.

6.5.3.5. El caso de la pareja Macarena-Ester en el problema "Paz, Petra y su madre"

Macarena (ítem 4), quizá, recuerde este problema como uno de los que integraban la secuencia de enseñanza[75].

4. Macarena: ¡Ah…! Éste ([…])… Éste lo ([…]) sé yo.

Macarena (ítems 5, 7 y 9) construye los nombres "Paz", "Petra" y "Madre". A continuación, introducen los valores 6, 9 y 35 en las celdas B1, B2 y B3 (ítems 15, 20 y 25), respectivamente. Por los números que asignan, sería plausible considerar que los nombres anteriores representaban a las cantidades *Aa*, *Ae* y *Am*; sin embargo, la ausencia en los nombres de referencias al momento actual o futuro también pueden interpretarse como una referencia a las variables edad de los protagonistas.

En el ítem 16, Macarena repite que este problema ya lo han hecho y Ester (ítem 21) contesta que era uno parecido. Macarena insiste y parece convencer a Ester (ítem 22).

5. (Macarena introduce [A1; Paz].)

6. (Ester empieza a leer.)

7. (Mientras Ester lee, Macarena introduce [A2; Petra].)

9. (Macarena introduce [A3; Madre].)

10. (Ester acaba de leer […])

11. (Macarena sitúa la celda activa en B1.)

12. Macarena: A ver ([…])… ¿Éste cuánto es ([…])?

13. Ester: Seis ([…]).

15. (Macarena introduce [B1; 6].)

16. Macarena: ¿Te acuerdas ([…]) que lo hicimos?

18. Macarena: Nueve.

20. (Macarena introduce [B2; 9].)

21. Ester: Uno ([…]) parecido.

22. Macarena: No. Éste.

24. Ester: ¿Sí ([…])…? Treinta y cinco.

[75] Macarena y Ester lo resolvieron generando las líneas de vida de los protagonistas. Sin embargo, su planteamiento fue incorrecto, pues buscaron que se verificara que la suma de las edades futuras de las hijas fuera igual a la edad actual de la madre.

25. (Macarena introduce [B3; 35].)

Macarena (ítem 34) se interesa por la pregunta del problema. Ester (ítem 36) le contesta que hay que calcular el valor de la cantidad T y Macarena (ítem 37) construye nombre y le asigna celda de manera implícita.

34. Macarena: Hay que buscar… (Inaudible.)

35. (Macarena sitúa la celda activa en A4.)

36. Ester: Años que deben pasar.

37. (Mientras Ester habla, Macarena introduce [A4; Años que tienen que pasar].)

Construyen (ítems 42-52) una progresión aritmética de diferencia uno a partir del valor presente en la celda B1, lo que supone generar la línea de vida de Paz. De esta forma, se deja de considerar cantidades y se pasa a suponer variables que modelizan el paso de la situación inicial a la final. Ester (ítems 49 y 51) establece la condición que se debe verificar para alcanzar el resultado, planteando la relación incorrecta $Am = Fa + Fe$, como ya hicieron cuando resolvieron el mismo problema en la secuencia de enseñanza. A continuación, generan (ítems 57-61) la línea de vida de Petra a partir de una fórmula de recurrencia. Ester (ítem 63 y 67) duda si debe generar una secuencia de valores constantes con la edad actual de la madre o debe tener en cuenta que su edad también pasa (ítem 69). Esto iría en contra de lo que había afirmado en los ítems 49 y 51. Macarena (ítem 70) le contesta que la edad de la madre debe ser la misma y se apoya para justificarlo en la secuencia de valores que ha empezado a generar Ester en el ítem 66.

Podemos concluir que, de algún modo, se han empleado la relaciones $Fa = Aa + T$, $Fe = Ae + T$ (ambas correctas) y $Am = Fa + Fe$ (incorrecta). Decimos de algún modo porque no se emplea la cantidad T, representada en B4 (ver Figura 67) como tal, sino que se recurre a las facilidades que ofrece la hoja de cálculo a la hora de generar secuencias numéricas y se repite el cálculo de la edad el año siguiente partiendo del valor conocido de la edad actual.

42. Ester: Ahora hay que estirar lo de arriba (mueve la mano de izquierda a derecha).

43. Macarena: Sí ([…]). Sí, ([…]) ¿no?

44. Ester: Sí.

45. Macarena: Era igual a ése (Macarena introduce [C1 =…; …] y Ester introduce [C1 =B1…; …] usando el ratón)…

46. Ester: Más uno.

47. (Macarena introduce [C1 =B1+1; 7].)

48. (Ester estira C1.)

49. Ester: O sea, la edad de las dos niñas tiene que sumar…

50. Macarena: Mm (asiente).

51. Ester: … y dar treinta y cinco.

52. (Llega hasta [IV1 =IU1+1; 260].)

53. Ester: Sí que lo hicimos, ¿no?

54. (Macarena mueve la ventana al inicio.)

55. Macarena: Sí.

56. (Macarena sitúa la celda activa en C2.)

57. (Macarena introduce [C2 =…; …], Ester introduce [C2 =B2…; …] usando el ratón y Macarena introduce [C2 =B2+1; 10].)

58. (Ester estira C2.)

59. Macarena: Sí…

61. (Llega hasta [IV2 =IU2+1; 263].)

62. (Macarena mueve la ventana al inicio.)

63. (Ester sitúa la celda activa en B3 y luego en C3.)

64. Macarena: Tía, se arrastra.

65. (Macarena sitúa la celda activa en B3.)

66. (Ester estira B3.)

67. Ester: ¿Así, treinta y cinco?

68. Macarena: Sí.

69. Ester: Pero, ¿su edad también tiene que pasar?

70. Macarena: ¿El qué ([…])? No. La edad de la madre es la misma. No lo ves, treinta y cinco.

71. (Llega hasta [IV3; 35].)

	A	B	C	D
1	Paz	6	=B1+1	=C1+1
2	Petra	9	=B2+1	=C2+1
3	Madre	35	35	35
4	Años que tienen que pasar			

Figura 67. Contenido de las celdas después del ítem 71.

Macarena (ítem 76) indica a Ester que coloree las filas 1 y 2, que representan a las edades de Paz y Petra, respectivamente. Aunque propone esto después de decir "¿Qué tiene que ser igual ([…])?", no parece que entienda como iguales ambas edades. De hecho, en el ítem 78, busca que se verifique que la suma (que hace mentalmente) del valor de las edades de Paz y Petra (situadas en las filas 1 y 2) dé 35. Ester (ítems 81 y 84) viene en su ayuda e introduce una fórmula que suma las edades de las hijas. La fórmula la introduce en L5 y no construye nombre para esta nueva cantidad. El resultado de la fórmula indica que la igualdad se verifica en la columna L (ver Figura 68).

76. Macarena: … A ver. ¿Qué tiene que ser igual (Ester mueve al ventana hasta que se inicia en la columna C)? La edad de Petra o sea de Paz (Ester mueve la ventana al inicio)… Pues (señala con la cabeza a la pantalla) píntalo. Las dos a la vez (Ester selecciona la fila 1 y 2)… Ahí (señala con la cabeza a la pantalla y Ester colorea las filas 1 y 2).

78. Macarena: A ver, ahora hay que ver algo que sume treinta y cinco (Macarena mueve la ventana hacia la izquierda lentamente)… A ver (la ventana se inicia en la columna H)… Doce… doce y quince, veintisiete (en H1, H2 y H3 se muestran, respectivamente, 12, 15 y 35.

79. (Ester sitúa la celda activa en L5.)

80. Ester: Espera.

81. (Ester introduce [L5 =L1+L2…; …] usando el ratón.)

82. Ester: A ver si es esto.

83. (Ester introduce [L5 =L1+L2; 35]

84. Ester: Sí.

	K	L	M
1	15	16	17
2	18	19	20
3	35	35	35
4			
5		35	

Figura 68. Después del ítem 83.

Macarena (ítem 86) pregunta por el valor de T, intentando dar respuesta a la pregunta del problema. Ester (ítem 89) responde que diez y Macarena (ítem 90) comprueba la respuesta utilizando la relación $Fa = T + Aa$ y haciendo un cálculo mental.

86. Macarena: ¿Cuántos años tienen que pasar?

87. Ester: Uf…!

88. Macarena: Pues si una… si tiene dieci…

89. Ester: Diez.

90. Macarena: Si tiene seis ([…]) y cuando sean dieciséis (Macarena mueve la ventana al inicio) será lo que tiene que pasar… diez (Ester introduce [B4; 10 años]) años… Ya está.

6.5.4. LA PAREJA MARCOS-JORGE

La pareja Marcos-Jorge fue la que llamamos pareja 14 durante la secuencia de enseñanza. Estaba formada por los estudiantes 3 y 9 a los que, como ya hemos indicado, llamaremos Marcos y Jorge, respectivamente. Marcos (el estudiante 3) era el único representante de la clase (L_2, Com_1, HC_2), mientras que Jorge (el estudiante 9) quedó incluido en (L_1, Com_2, HC_1).

El estudiante 3 abordó de manera algebraica seis de los ocho problemas del cuestionario 2 (el que estaba formado por problemas que normalmente se resuelven de manera algebraica), pero ninguno del cuestionario 1 (el que estaba formado por problemas que normalmente se resuelven de manera aritmética). Omitió relaciones o conectó cantidades de manera incorrecta en todos los problemas que resolvió de manera aritmética. Sin embargo, realizó lecturas correctas y suficientes para alcanzar la solución en cuatro de los seis problemas que abordó de manera algebraica. Conviene destacar el uso polisémico que hace de la letra *x* en el problema *Marta y María* (subfamilia edades) al referirse a las edades actual y futura de una de las protagonistas de la historia. En el cuestionario 3, quedó por encima de la media a la hora de construir fórmulas y secuencias numéricas en la hoja de cálculo. Generó correctamente las tres secuencias numéricas mediante la copia y pegado de fórmulas de recurrencia y los dos errores que cometió al construir fórmulas fueron debidos a la omisión del paréntesis que debería modificar la prioridad de las operaciones. En definitiva, podemos considerarlo un individuo que no tiene dificultades para operar con lo desconocido, pero que sí las tiene a la hora de convertir los problemas a una colección de relaciones entre cantidades.

El estudiante 9 quedó por debajo de la media en el número de problemas abordados algebraicamente. Aunque resolvió de manera algebraica el problema *Las cortinas* del cuestionario 1, sólo realizó lecturas algebraicas en cinco de los ocho problemas del cuestionario 2. Consiguió reducir los problemas a un conjunto de relaciones necesarias y suficientes en cuatro (que había abordado algebraicamente) de los ocho problemas del cuestionario 2 y en dos (que había abordado aritméticamente) de los siete del cuestionario 1. Planteó un ecuación en la que usó de manera polisémica la letra *x* en el problema *La lotería*. En el cuestionario 3, erró en la construcción de tres fórmulas, siempre por problemas de interpretación en el orden de los operandos y usó paréntesis innecesarios en cuatro de los ocho ítems posibles. Sin embargo, no encontró dificultades para operar con cantidades desconocidas. Sólo generó una secuencia numérica correcta y no fue capaz de construir progresiones aritméticas de diferencia distinta a uno. En definitiva, podemos considerarlo como un resolutor que no tiene dificultades para operar con lo desconocido y que no muestra dificultades para hacer lecturas algebraicas correctas y expresarlas en el SMSalg, si bien parece confiar más en la resolución aritmética.

6.5.4.1. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema "Adrián"

Tras leer el enunciado, introducen los nombres "Adrián" y "Tania", en las celdas A1 y A2, y los valores 15 y 40 en las celdas B1 y B2, respectivamente. Por los valores que les asignan (ítems 8 y 17) posiblemente consideran que los nombres anteriores representan a las cantidades *Aa*

4. Jorge: Pues pon Adrián.
6. (Marcos introduce [A1; Adrián].)
8. (Jorge introduce [B1; 15].)
9. (Jorge sitúa la celda activa en A2.)
10. (Ambos miran a la hoja.)
11. Jorge: Tania (mira a la pantalla). Pon

y *At*; sin embargo, la ausencia en los nombres de reseñas al momento actual o futuro también pueden interpretarse como una referencia a las variables edad de los protagonistas. En el ítem 20, Jorge propone asignar una celda a la cantidad desconocida *T*, aquélla por la que se pregunta en el enunciado, y Marcos (ítem 22) la etiqueta como “Tiempo Trans.”

Tania.

13. (Marcos introduce [A2; Tania].)

16. Jorge: Pon catorce… cuarenta años.

17. (Marcos introduce [B2; 40].)

20. Jorge: Y ahora pon tiempo ([…])… que tiene que transcurrir (casi inaudible).

22. (Marcos introduce [A3; Tiempo Trans.].)

	A	B
1	Adrián	15
2	Tania	40
3	Tiempo Trans.	

Figura 69. Después del ítem 22.

En el ítem 30, Jorge verbaliza la relación entre las edades futuras de Adrián y Tania, sin hacer referencia al tiempo transcurrido. Jorge (ítem 33) indica que deben hacer lo que hacían con las ecuaciones, pero sin aclarar qué hacían. Por su parte, Marcos (ítem 34) propone emplear “cadenas numéricas”, lo que podemos interpretar como una referencia al uso de las líneas de vida de los protagonistas. La generación de las líneas de vida implicaría considerar las variables edad de Adrián y edad de Tania, lo que explicaría la ambigüedad de los nombres introducidos en A1 y A2.

30. Jorge: A ver, tiene que… Tania tiene que tener el doble de años que Adrián.

32. Marcos: Claro.

33. Jorge: Pues, e… debe ser… Para calcular el tiempo… A ver. Sería cuarenta… Tenemos que hacer lo mismo que lo de las ecuaciones.

34. Marcos: O lo de ecuaciones o lo de… ¿Cómo se dice (Marcos mueve la mano horizontalmente)…? Cadenas numéricas (Jorge sitúa la celda activa en C1) porque también tiene que coincidir.

Jorge (ítem 36) admite la propuesta de Marcos y construye una fórmula de recurrencia con la que genera (ítem 37) una progresión aritmética. Lo que nos permite interpretar que, de alguna manera, se emplea la relación $Fa = Aa + T$. Decimos de alguna manera porque la celda B3, que representa a la cantidad desconocida *T*, no se emplea en el establecimiento de la relación. El paso del tiempo se consigue calculando de manera repetida la edad el año que viene. Jorge (ítem 37) detiene el arrastre de C1 en BO1, donde se observa un 80. El contexto del problema que está resolviendo le lleva a pensar la necesidad de alargar un poco más para llegar hasta una edad (en este caso, 118) que ya sea difícil de alcanzar por una persona.

36. Jorge: Sí ([…]), pon (Jorge introduce [C1 =…; …]) quince (introduce [C1 = B1…; …]) más (introduce [C1 = B1+…; …]) uno (introduce [C1 = B1+1; 16] utilizando la flechas)… Dieciséis.

37. Jorge: Estiramos para (Jorge estira C1 y llega hasta [BO1 = BN1+1; 80])… Serían ochenta años. Un poco más. (Estira BO1 y llega hasta [DA1 = CZ1+1; 118].)… Vale.

Buscan (ítems 38-41) las dos expresiones de una misma cantidad que deben ser iguales, lo que correspondería al paso 4 del MHC. Sin embargo, sólo verbalizan una de las dos expresiones: el doble de años de Adrián.

38. Marcos: Y tenemos (Jorge mueve la ventana al inicio) que buscar una que coincida con que sea el doble ([…]), ¿no?

39. Jorge: Sí, el doble de años de…

40. Marcos: Sí…

41. Jorge: …de Adrián.

Entre los ítems 44 y 46, Jorge genera la línea de vida de Tania, expresando la relación $Ft = At + T$ mediante una secuencia de valores. En esta ocasión, Jorge llega hasta el valor 148, lo que supone una edad difícil de alcanzar para una persona.

44. (Jorge introduce [C2 = B2+1; 41] utilizando las flechas.)

45. (Jorge estira C2.)

46. (Llega hasta [DF2 =DE2+1; 148].)

Inician la búsqueda de la columna en la que los valores de la fila 2 sean el doble de los de la fila 1; pero necesitan recordar la relación que se debe cumplir (ítems 53 y 55). Jorge (ítems 60 y 61) señala la verificación de la igualdad en la columna L (ver Figura 70) y pregunta "¿Cuántos años tienen que pasar?". Marcos (ítem 63) da la respuesta correcta y dan por concluida la resolución.

50. Jorge: Pues ahora hay que buscar (Jorge mueve la ventana al inicio)… A ver.

51. (Jorge desplaza la ventana hacia la derecha.)

53. Marcos: ¿Tania qué tiene que tener? ¿El doble que Adri…?

55. Jorge: El doble que Adrián.

57. (Jorge continúa el desplazamiento de la ventana hacia la derecha.)

60. (Jorge mueve la ventana hasta que se inicia en la columna I. Se observa [L1; 25] y [L2; 50]).

61. Jorge: Veinticinco (al tiempo que dice esto, Marcos señala a L1). ¿Cuántos años tienen que pasar?

63. Marcos: Pues ([…]) comenzaba ([…]) con Adrián tenía quince años ([…]); tienen que ([…]) pasar diez años.

	K	L	M
1	24	25	26
2	49	50	51
3			

Figura 70. Después del ítem 60.

6.5.4.2. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema "Las ovejas"

Construyen nombres y asignan celdas a las cantidades *Cg*, *Cp* y *N* e introducen el valor de la cantidad conocida *N* (ítem 10). Los nombres que construyen para las cantidades *Cg* y *Cp* se diferencian mediante un código alfabético que no hace referencia a si representan los corrales que contienen más o menos ovejas. No representan la cantidad

4. Jorge: Pon granja. Total ([…]) ovejas o granja.

5. (Marcos introduce [A1; Granja/ovejas].)

7. Marcos: Con dos clics (indicándole otra forma de hacerlo).

8. Jorge: Ciento ochenta.

9. (Jorge introduce [B1; 189…].)

conocida *Mgp* que sirve para comparar dos cantidades desconocidas.

10. (Marcos modifica [B1; 180].)

11. Jorge: Vale (Jorge sitúa la celda activa en A2). Y ([…]) aquí hay que poner do ([…])… corral ([…]) a…

12. (Marcos introduce [A2; Corral A].)

13. Marcos: Y corral be.

14. Jorge: Y corral be (acompañando las palabras de Marcos).

16. (Marcos introduce [A3; Corral B].)

◇	A	B
1	Granja/ovejas	180
2	Corral A	
3	Corral B	

Figura 71. Después del ítem 16.

Jorge (ítem 18) verbaliza la relación correcta $Cg = Mgp + Cp$ refiriéndose a la cantidad *Cg* mediante el nombre que han introducido en B3 (ver Figura 71) y a *Cp* mediante la expresión "el otro". Cuando Marcos (ítem 20) introduce la fórmula, se refiere a la cantidad *Cp* (desconocida y representada por una celda en blanco) mediante la posición de la celda. La actuación anterior implica que se considera *Cg* ligada a la fila 3 y al nombre "Corral B" y *Cp*, a la fila 2 y al nombre "Corral A".

18. Jorge: En el corral be (sitúa la celda activa en B3) hay treinta ovejas más que en el otro.

19. Marcos: Pues…

20. (Marcos introduce [B3 =B2+30, 30] utilizando las flechas.)

21. Jorge: Vale.

22. Marcos: Sí.

Al final del ítem 23, Jorge marca como objetivo calcular las ovejas que hay en el "Corral A". Parece que entiende que la celda B3 (la que representa a la cantidad que ha llamado "Corral B", que sería la cantidad *Cg*) depende de B2 (la que representa a la cantidad que ha llamado "Corral A", que sería la cantidad *Cp*) y que en el momento en que se sepa *Cp*, se sabrá *Cg*. Podemos interpretar esta reflexión como una forma de segmentar la solución para centrarla ahora en determinar *Cp*; lo cual no sería descabellado, pues el valor de esta cantidad se podría calcular a partir de las cantidades conocidas *Mgp* y *N*. Sin embargo, en el ítem 25, hace una propuesta que parece alejarse de la intención anterior, pues plantea generar

23. Jorge: Pues ahora hay que hacer una serie para… Hay que saber cuántas ([…])… cuántas ovejas hay ([…]) en el corral a.

24. Marcos: Claro.

25. Jorge: Entonces hay que hacer (sitúa la celda activa en C3) treinta más uno (Marcos sitúa la celda activa en C2)…

27. Jorge: La serie. Hay que saber cuántos… hay que saber cuántos hay aquí (selecciona la fila 2 y la colorea). Y cuántos hay aquí (selecciona la fila 3 y la colorea).

28. Marcos: Vale. Entonces tenemos que poner aquí uno (Marcos señala C2 con el dedo) be dos más uno y en la de abajo be tres más uno.

una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 3 (en la que se ha representado la cantidad *Cg*). El mismo Jorge, en el ítem 27, colorea las filas 2 y 3 (ver Figura 72) para señalar que son esas las cantidades que hay que determinar[76]. Marcos (ítem 28) no se opone al uso que se hace del coloreado de celdas y propone generar progresiones aritméticas de diferencia uno partiendo de los números presentes en B2 y B3[77]. En consecuencia, no se replica la fórmula contenida en B3. Sin embargo, se mantiene la relación *Cg* = *Mgp* + *Cp* entre los valores de las filas 2 y 3. Esto es debido a que a que la relación es aditiva y a que al generar dos progresiones aritméticas con igual distancia entre dos términos consecutivos, se conserva la diferencia existente entre los elementos iniciales de las secuencias (los cuales se habían calculado atendiendo a las restricciones impuestas por *Cg* = *Mgp* + *Cp*).

◇	A	B
1	Granja/ovejas	180
2	Corral A	
3	Corral B	=B2+30

Figura 72. Contenido de las celdas después del ítem 27.

Llevan adelante el plan y generan (ver Figura 73) dos progresiones aritméticas en las filas 2 (ítems 31-39) y 3 (ítems 50-53). También generan una secuencia de valores constantes en la fila 1 al arrastrar la celda B1 (ítems 43-48). Marcos (ítem 46) entiende que al estirar una celda que contiene un número, se generará una secuencia de valores iguales y Jorge (ítem 47) justifica su acción indicando que lo hace "Para saber qué suma y qué hace, y no confundirse", lo que parece señalar a que será un forma de tener siempre presente en pantalla el número que debe

31. (Marcos borra C2 e introduce [C2 =B2+1, 1] usando las flechas.)

32. Jorge: Vale.

33. (Marcos introduce [C3 = B3+1, 31] usando las flechas.)

34. Jorge: Vale.

35. (Jorge estira C2.)

37. Marcos: Y los dos tienen que dar (mira a la hoja) ciento ochenta, ¿no?

38. Jorge: Claro.

39. Marcos: Vale (mira al ordenador)… (Jorge llega hasta [IV2 =IU2+1, 254].)… Al sumarlos.

[76] Señalemos que el coloreado de filas se utilizó en la secuencia de enseñanza para indicar las filas que contenían las cantidades que debían ser iguales.

[77] Habían utilizado esta técnica en algunos problemas de la secuencia de enseñanza (por ejemplo, en el problema *Los yogures*, parcialmente, y en *Números 2*, ver anexo D), aunque normalmente emplearon el MHC sobre lecturas no siempre correctas.

alcanzar la suma de las ovejas.

Las filas 2 y 3 reflejan una situación que podríamos explicar como: se han metido 30 ovejas en el corral grande y ahora vamos aumentado una a una las ovejas en cada corral hasta que, como veremos a continuación, la suma dé 180.

40. Jorge: Mm (asintiendo).

42. Jorge: A ver, vamos a estirar éste.

43. (Jorge arrastra B1.)

44. Marcos: ¿Ése?

45. Jorge: Claro.

46. Marcos: Dará todo el rato ciento ochenta.

47. Jorge: Por eso. Para saber qué suma y qué hace, y no confundirse.

48. (Llega hasta [IV1; 180].)

50. Jorge: Vale… Y aquí (Jorge sitúa la celda activa en C3)…

51. Marcos: Ése.

52. Jorge: Ése

53. (Jorge estira B3 hasta [IV3 =IU3+1; 284].)

	A	B	C	D
1	Granja/ovejas	180	180	180
2	Corral A		=B2+1	=C2+1
3	Corral B	=B2+30	=B3+1	=C3+1

Figura 73. Contenido de las celdas después del ítem 53.

En el ítem 55, Jorge verbaliza las condiciones que deben cumplir los valores de *Cp* y *Cg* y se observa que plantean la solución del problema sobre la verificación, mediante un cálculo mental, de la igualdad $N = Cg + Cp$. Así, Marcos (ítems 56 y 59) identifica los valores, 75 para *Cp* y 105 para *Cg* cuya suma da 180 (ver Figura 74).

En definitiva, podemos identificar las relaciones $Cg = Mgp + Cp$ y $N = Cg + Cp$ en la resolución del problema, lo que supondría considerar que han realizado una lectura algebraica del mismo. Esta lectura algebraica podría resolverse mediante el MHC, pero han evitado la replicación de los pasos 3 y 4 generado dos progresiones aritméticas que respetan que la diferencia entre las ovejas presentes en los corrales sea 30.

55. Jorge: A ver, en uno hay treinta más que en otro. Y todo suma… ciento ochenta.

56. (Marcos señala con el dedo BY2 y BY3, celdas que contienen 75 y 105, respectivamente.)

57. (Jorge sitúa el cursor sobre las celdas BY2 y BY3.)

58. Jorge: Pues estos.

59. Marcos: Setenta y cinco y ciento cinco.

60. (Jorge colorea la columna BY.)

◇	BX	BY	BZ
1	180	180	180
2	74	75	76
3	104	105	106

Figura 74. Después del ítem 60.

6.5.4.3. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema "Las actividades deportivas"

Construyen nombres y asignan celdas a las cantidades desconocidas *F*, *B*, *N* y *R* y a la cantidad conocida *T* (ver Figura 75). No se representan las cantidades conocidas *Vnf*, *Mbf* y *Mrb* que sirven para relacionar las cantidades desconocidas anteriores.

3. (Mientras Jorge lee el enunciado, Marcos […] introduce [A1; Futbol] y [A2; Baloncesto].)

5. Marcos: Natación y rugby, ¿no?

7. Jorge: Sí.

8. (Marcos introduce [A3; Natación]).

9. Jorge: Y rugby.

10. (Marcos introduce [A4; Rugby].)

11. Jorge: Y pon total de personas. (Mientras Marcos escribe lo anterior.)

13. Marcos: ¿Rugby con…? Sí.

15. Jorge: Y total.

16. (Marcos introduce [A5; Total de personas].)

◇	A	B
1	Futbol	
2	Baloncesto	
3	Natación	
4	Rugby	
5	Total de personas	

Figura 75. Después del ítem 16.

Sin asignar el valor de la cantidad conocida *T* y sin identificar la cantidad de referencia entran en el tercer paso del MHC. Jorge (ítem 22) identifica la relación $F = N{\cdot}Vnf$ en el enunciado y Marcos (ítems 24-28) introduce en B1 la fórmula =B3*2, que materializa la relación anterior en el lenguaje de la hoja de cálculo.

22. Jorge: A ver ([…]). En fútbol hay dos veces más personas que en natación (leyendo).

24. (Marcos introduce [B1 =…; …].)

25. Marcos: Eh…

26. (Marcos introduce [B1 =B3…; …].)

27. Jorge: Pues dos por (Marcos introduce [B1 =B3*…; …])… Eso por dos.

28. (Marcos introduce [B1 =B3*2; 0] usando las flechas.)

Jorge (ítem 29) identifica la relación $B = F + Mbf$ y Marcos (ítem 30) introduce la fórmula =43+B1 en B2 sin acompañarla de verbalización.

29. Jorge: Vale ([…])… En baloncesto ([…])… En baloncesto hay cuarenta y tres personas más que en fútbol (leyendo)

30. (Marcos introduce [B2 =43+B1; 43] usando las flechas.)

31. Jorge: Vale.

Jorge (ítem 33) identifica la relación $R = B + Mrb$ y Marcos (ítem 39) introduce la fórmula =29+B2 en B4 sin que haya

33. Jorge: Y en rugby veintinueve personas más que en baloncesto (leyendo).

39. (Marcos introduce [B4 =29+B2; 72]

verbalización de las cantidades.

usando las flechas.)

Jorge (ítem 41) identifica el valor de la cantidad *T* que se ofrece en el enunciado, y lo introduce (ítem 43) en la celda B5.

Hasta este punto (ver Figura 76) han utilizado las relaciones necesarias $F = N \cdot Vnf$, $R = L \cdot Vlr$ y $J = L + Mjl$, pero sólo han asignado una celda a la cantidad *T*

41. Jorge: Vale ([…]). ¿Cuántas personas hay en cada actividad (leyendo)? A ver, Total de personas son mil trescientas setenta y cinco.

42. Marcos: Sí.

43. (Jorge introduce [B5; 1375].)

	A	B
1	Futbol	=B3*2
2	Baloncesto	=43+B1
3	Natación	
4	Rugby	=29+B2
5	Total de personas	1375

Figura 76. Contenido de las celdas después del ítem 43.

Jorge (ítem 47) arrastra de la celda B5, que contiene un número, y genera una secuencia de valores constantes.

46. Jorge: Y si estiramos (estira B5) mil trescientos setenta y cinco…

47. (Llega hasta [IV5; 1375].)

Jorge (ítems 48-51) colorea las filas 1, 2, 3 y 4 que representan las cantidades *F*, *B*, *N* y *R*: aquéllas por las que se pregunta en el problema. Vuelven a utilizar el coloreado de filas para señalar las incógnitas del problema; apartándose del uso que se le daba en la secuencia de enseñanza como forma de indicar las cantidades que debían ser iguales.

48. Jorge: Vale (mueve la ventana al inicio)… A ver, y aquí (selecciona la fila 1) hay que averiguar (Jorge colorea de amarillo la fila 1) cuántos hay en fútbol, cuántos hay en baloncesto (Jorge colorea de amarillo la fila 2), en natación (Jorge colorea de amarillo A3) y en rugby.

49. Marcos: Y en rugby (a la vez).

50. Jorge: Perdón.

51. (Jorge colorea de amarillo la fila 3 y la fila 4.)

52. Jorge: Vale.

Entre los ítems 53 y 75, Jorge genera progresiones aritméticas de diferencia uno en las filas 1, 2, 3 y 4 tomando como origen los valores presentes en B1, B2, B3 y B4 (ver Figura 77)[78]. Se generan las secuencias utilizando fórmulas de recurrencia (ver ítems 53, 54, 58 y 63) que se introducen en las celdas respectivas de la columna C. En consecuencia, no se replica el paso 3, lo que producirá la pérdida de la relación $F = N \cdot Vnf$ entre los valores de las filas 1 y 3. Sin embargo, se mantiene la relación $B = F + Mbf$ entre

53. (Jorge introduce [C1 =B1+1; 1] usando las flechas.)

54. (Jorge introduce [C2 =B2+1; 44] usando las flechas.)

55. Jorge: Y aquí hay…

56. (Jorge introduce [C3 =B3+1…; …].)

57. Marcos: Más uno.

58. (Jorge introduce [C3 =B3+1; 1] usando las flechas.)

59. (La celda activa se sitúa en C4.)

60. Marcos: Y en éste más uno.

[78] Repiten la técnica que les dio buen resultado en el problema *Las ovejas* gracias a que la lectura que realizaron del problema lo reducía exclusivamente a relaciones aditivas. En este caso, la presencia de relaciones multiplicativas impedirá que lleguen a buen puerto.

los valores de las filas 1 y 2 y la relación $R = B + Mrb$ entre los valores de las filas 2 y 4 (ver Figura 77) por las razones ya explicadas en la actuación de la pareja Candelaria-María en este mismo problema (ver comentarios a los ítems 74-96 en el apartado 6.5.1.3.).

61. (Jorge introduce [C4 =+1; 1].)

62. Jorge: ¡Ay! Perdón.

63. Jorge: A ver, más (introduce [C4 =+1…; …])… Y aquí, esto (introduce [C4 = B4+1; 73] usando las flechas).

64. Jorge: Y…

65. (Jorge arrastra C1.)

66. Marcos: Ésos se estiran.

67. (Llega hasta [IV1 = IU1+1; 254].)

68. (Jorge mueve la ventana hasta el inicio.)

69. (Jorge estira C2 hasta [IV2 = IU2+1; 297].)

70. Jorge: Doscientos noventa y siete.

71. (Jorge mueve la ventana hasta el inicio.)

72. (Jorge estira C3 hasta [IV3 = IU3+1; 254].)

73. Jorge: Vale. Y ahora el rugby.

74. (Jorge mueve la ventana hasta el inicio.)

75. (Jorge estira C4 hasta [IV4 = IU4+1; 326].)

	A	B	C	D	E
1	Futbol	0	1	2	3
2	Baloncesto	43	44	45	46
3	Natación		1	2	3
4	Rugby	72	73	74	75
5	Total de personas	1375	1375	1375	1375

Figura 77. Después del ítem 75.

Jorge (ítem 76) expresa que deben buscar la suma, quizá haciendo referencia a establecer la igualdad sobre el cumplimiento de que la suma $F + B + N + R$ dé 1375 (el valor de la cantidad T). Sin embargo, no introducen una fórmula que exprese la suma en una nueva celda. Directamente, inician la búsqueda de los valores que verifiquen la igualdad, lo que les obligará a calcular la suma mentalmente. Cuando llegan a la columna IV, que limita la hoja de cálculo por la derecha, Marcos (ítem 115) introduce en IV6 una fórmula que sí que expresa $F + B + N + R$ sin construir nombre para esta (supuesta) nueva aparición de la cantidad T.

76. Jorge: Vale, pues ahora hay que su… ahora hay que encontrar (mueve la ventana hacia la izquierda) la suma, ¿no?

77. Marcos: Sí.

78. (Jorge mueve la ventana hasta que se inicia en la columna EG.)

79. Jorge: Vale. Pues vamos a encontrarla.

80. Marcos: A ver…

81. Jorge: Eh…

82. (Jorge desplaza la ventana hacia la derecha hasta que se inicia en la columna EV.)

83. Jorge: Ahora hay que poner la suma de todos éstos (señala a la columna EZ con el cursor).

84. Marcos: Sí.

85. Jorge: A ver, espera.

86. (Jorge desplaza la ventana hasta que se inicia en la columna EX.)

87. Marcos: De las más elevadas (Jorge

vuelve a desplazar la ventana hacia la derecha) porque mil trescientos setenta y cinco…

88. Jorge: Pues de las últimas.

96. (Jorge mueve el cursor sobre la columna IV).

97. Jorge: Aquí sí que puede ser, ¿no?

98. Marcos: Puede ser.

115. (Marcos introduce [IV6 =suma(IV1:IV4); 1131)] usando el ratón. El programa colorea automáticamente la casilla IV6.)

	IT	IU	IV
1	252	253	254
2	295	296	297
3	252	253	254
4	324	325	326
5	1375	1375	1375
6			1131

Figura 78. Después del ítem 115.

El valor obtenido al sumar los valores presentes en las celdas IV1, IV2, IV3 e IV4 es menor que 1375 (ver celda IV6 en la Figura 78). Jorge (ítem 120) ordena a Marcos que borre la fórmula que acaban de introducir. Marcos (ítem 121) ejecuta la acción y parece apuntar (ítem 124) que el resultado obtenido era menor que 1375. Jorge propone buscar el fallo (ítem 125) sin que ni uno ni otro señalen que si la hoja de cálculo tuviera más columnas, habrían alcanzado la solución, aunque incorrecta. Las restricciones que impone la hoja de cálculo se traducen en una valoración del proceso de resolución, posiblemente como consecuencia de la falta de familiaridad con el entorno que les impide modificar el origen de las secuencias numéricas.

116. Jorge: No da. No da. ¡Ah, vale!

117. Marcos: Mil ciento treinta y uno.

118. Jorge: No da, no.

119. Marcos: No.

120. Jorge: Imposible. Atrás. Suprime.

121. (Marcos borra IV6.)

124. Marcos: No. No, eso da menos.

125. Jorge: Por eso, por eso… Que vamos a encontrar el fallo.

Marcos (ítem 127) dice que "el fallo está en natación", quizá porque la cantidad N era la única a la que no se le había asignado una fórmula. Jorge (ítem 137) relee el enunciado en el fragmento donde se relacionan N y F y posteriormente invierte verbalmente la relación ("Y en natación deben haber dos veces menos", ítem 141). Posiblemente, Marcos (ítems 146 y 148) se apoya en esta información para construir la fórmula =B1/2 en B3, con la intención de calcular N y así

127. Marcos: A ver ([…]), natación… Creo que el fallo está en natación, porque…

128. Jorge: A ver ([…]), en natación hay ([…]) dos per… dos veces menos ([…]) personas que en fútbol.

134. Marcos: En natación, ¿qué era?

135. (Marcos sitúa la celda activa en B3.)

137. Jorge: En natación, me dice que en dos… hay dos veces más personas que en… En fútbol hay dos veces más personas que en natación (leyendo)…

obtener el resto de cantidades desconocidas. Esto pone de manifiesto un proceder aritmético en el que las fórmulas introducidas se ven como cálculos suspendidos que se clausurarán al conocer *N*. La introducción de esta fórmula supone volver a utilizar la relación $F = N \cdot Vnf$, ya empleada para construir la fórmula presente en B1 (ver ítem 28) y, en consecuencia, produce una referencia circular.

Un último apunte. Aunque están buscando un error, en ningún momento se ofrece una reflexión sobre la inconsistencia de los valores de las filas 1 y 3, donde los primeros deberían ser el doble de los segundos (ver Figura 77).

138. (Marcos sitúa la celda activa en B1.)

140. Marcos: Sí.

141. Jorge: Y en natación deben haber dos veces menos ([…]).

142. (Marcos sitúa la celda activa en B3.)

143. Marcos: Pero es lo mismo.

145. Jorge: Claro.

146. Marcos: Esto (introduce [B3 =B1…; …]) entre…

147. Jorge: Entre…

148. Marcos: … dos (introduce [B3 =B1/2…; …])… Que es cero (introduce [B3 =B1/2; “Referencia circular”] usando las flechas). Bueno, que no deja.

149. Jorge: No da.

El profesor les explica que lo que han hecho genera un error y les invita a deshacerlo; pero los estudiantes no hacen caso y mantienen la fórmula que han introducido en la celda B3. En el ítem 171 el profesor vuelve a insistir. Jorge, sin embargo, prosigue con el plan que había iniciado en el ítem 170 que le conduce a introducir la fórmula = B5/4 en B6, lo que supone llevar cabo un reparto equitativo de los estudiantes entre las posibles actividades. Este cálculo podría tener dos finalidades: 1) Estimar un posible valor para la cantidad *N* para irlo afinando mediante una estrategia de prueba y refinado, lo que explicaría que el cálculo no se realizara en B3. 2) Obtener el valor de la cantidad *N*, o de otra cantidad desconocida, procediendo, aunque incorrectamente, de lo conocido hacia lo desconocido. La actuación de Jorge entre los ítems 178 y 189 nos revelerá que su finalidad era calcular *N*. Finalmente, Jorge (ítem 177) atiende a las recomendaciones del profesor y sustituye la fórmula presente en B3 por un cero con lo que hace desaparecer la referencia circular (ver Figura 79).

170. Jorge: Vale, vale. Entonces ([…]): ¿cuántas personas hay en cada actividad (leyendo)? Pues ([…]) ahora vamos a hacer una aquí (sitúa la celda activa en B6)… Podemos hacer un… (Inaudible.)… así, aparte (Jorge introduce (B6 =B5…; …] usando las flechas)… entre (Jorge introduce (B6 =B5/…; …]).

171. Profesor: Perdón ([…]). Eso que habéis hecho es un error, ¡eh ([…])! Os… Eh… La fórmula, la fórmula que habéis creado, a *Excel* le cuesta calcularla. O sea que…

172. Jorge: Vale, vale.

174. Profesor: ¿La habéis cambiado la fórmula esa que…?

175. Jorge: No. Ahora la cambiamos (modifica [B6 =B5/4; 343,75]). Es que no. A ver (Jorge borra B3). La cambiamos, ¿no? Dejamos…

176. Marcos: Sí.

177. Jorge: Ponemos aquí (Jorge sitúa la celda activa en B3) igual a cero (Jorge introduce [B3; 0]). Vale.

	A	B	C
1	Futbol	0	1
2	Baloncesto	43	44
3	Natación	0	1
4	Rugby	72	73
5	Total de personas	1375	1375
6		343,75	

Figura 79. Después del ítem 177.

Jorge (ítem 178) parece darse cuenta de que no puede asignar un número decimal a cantidades que expresan el número de personas. Marcos (ítem 186) le indica que no tienen que ser todas iguales. Jorge (ítem 187) le propone redondearlo a 344 y Marcos (ítem 188) acepta. En el ítem 189, Jorge introduce la fórmula =344+43 en la celda B7, lo que podemos interpretar como la expresión de la relación $B = F + Mbf$ tomando la aproximación de 343,7 (344) como valor de F. El valor que obtiene le lleva a concluir que han hecho algo mal, sin que podamos determinar relación causa-efecto más allá de la posible comparación del valor 387, presente en B7, con el 43, presente en B2; ambas fruto de aplicar la relación $B = F + Mbf$, pero tomando distintos valores de F.

178. Jorge: Y aquí me sale trescientas cuarenta y tres coma setenta y cinco personas ([…]). Entonces alguna tendrá que haber una más que en la otra.

179. Marcos: ¿Cómo, cómo?

181. Jorge: Pues si hay trescientas cuarenta y cinco personas…

182. Marcos: ¿En qué?

183. Jorge: En cada actividad ([…]), ¿no? ¿Vale? Lo he dividido entre cuatro (al tiempo que mueve el cursor sobre el rango B1:B4).

184. Marcos: Vale.

185. Jorge: Ahora falta saber los valores.

186. Marcos: Pero no tienen por qué ser igual todos los…

187. Jorge: Lo redondeamos a cua… a trescientos cuarenta y cuatro y vemos cuántas hay en cada ([…])… ¿Sabes?

188. Marcos: Sí.

189. Jorge: Si en… si en… A ver, en trescientas… trescientas cuarenta y cuatro (Jorge introduce [B7 =343…; …])… ¡Ay!, trescientas cuarenta… A ver, ¡qué lío me he hecho yo (Jorge introduce [B7 =344;…])! Eh… Más cuarenta y tres (introduce [B7 =344+43; 387]), ¿no? Trescientos ochenta y siete. Vale. Es que hemos hecho alguna cosa mal (Jorge arrastra B6 sobre B7 y se copia [B7 =B5/4; 85,9375]). (Jorge selecciona B6 y B7 y las borra.)… Hemos hecho alguna cosa mal aquí (Jorge sitúa la celda activa en C6).

Jorge (ítem 193) propone abandonar, pero Marcos (ítem 194) vuelve a leer los fragmentos del enunciado donde se expresan las relaciones $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$ y comprueba las fórmulas presentes en B2 y B4, que representan a las cantidades B y R, respectivamente. Posiblemente, sigue buscando el inexistente error. Tras un silencio, parece rendirse.

193. Jorge: Y si nos pasamos al siguiente, porque éste es difícil.

194. Marcos: En baloncesto hay cuarenta y tres personas más que en fútbol (Jorge sitúa la celda activa en B2) y en rugby veintinueve más ([…]) que en (Jorge sitúa la celda activa en B4) baloncesto (leyendo)… Vale (Jorge sitúa la celda activa en B6 y Marcos mira a la hoja). Pues, a ver… (Silencio de 10 segundos. […])… No sé.

Sin embargo, Jorge aún concibe un último

195. Jorge: En las de baloncesto ([…]) y en la de rugby hay… ¿Cuarenta y tres más setenta y dos,

plan. En el ítem 195 propone sumar 43 más 72; es decir, *Mbf* + *Mrb* (o *B* + *R*, tomando los valores provisionales presentes en las celdas B2 y B4, ver Figura 79), lo que supondría generar una cantidad espuria. Marcos (ítem 196) hace la operación mentalmente de manera errónea, pues el resultado correcto es 115. Jorge (ítem 202) suma el valor 105 (el resultado incorrecto de la operación *Mbf* + *Mrb*) a 344 (la aproximación de 1375/4). Es decir, suma dos cantidades espurias y obtiene una nueva cantidad espuria, sin que podamos identificar qué intenciones le guían. La respuesta que ofrece Marcos en el ítem 204 no lo aclara; ni tampoco el hecho de que no asigne nombres a las cantidades.

Tras este intento abandonaron la resolución.

cuánto es?

196. Marcos: Ciento… No. Sí, ciento cinco.

197. Jorge: Ciento cinco, ¿no?

198. Marcos: Sí.

199. Jorge: Hay ciento cinco personas más que en los totales, entonces es mil… o sea ciento… trescientos cuarenta y tres… A ver, quítame el papel (el papel estaba sobre el teclado).

200. Marcos: Sí.

201. (Marcos aparta la hoja.)

202. Jorge: Sería trescientos cuarenta y cuatro (Jorge introduce [B7 =344…; …]) más… o no: menos… Más ciento cinco (introduce [B7 =344+105; 449]). Que daría cuatrocientos cuarenta y nueve. Vale.

203. Marcos: ¿Y ésos cuatrocientos cuarenta y nueve (Jorge borra B7)… a qué se refiere?

204. Jorge: Son las ciento cinco más personas que hay en la actividad, pero eso no tiene nada que ver.

205. Marcos: No.

6.5.4.4. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema “Los tres amigos”

Marcos (ítems 3 y 4) construye nombres mediante un código alfabético[79], pero posiblemente entiende su ambigüedad y los borra. A sugerencia de Jorge (ítems 8, 12 y 15), Marcos asigna los nombres de pila de los protagonistas a las cantidades desconocidas *L*, *J* y *R*. También construye nombre para la cantidad *T* (ver Figura 80); pero no para las cantidades conocidas *Vlr* y *Mjl* que sirven para relacionar las cantidades desconocidas.

3. (Mientras Jorge lee, Marcos introduce [A1; A].)

4. (Mientras Jorge lee, Marcos introduce [A2; B].)

6. (Mientras Jorge lee, Marcos introduce [A1; Luis] y lo borra.)

8. Jorge: Pon Luis.

9. (Marcos introduce [A1; Luis].)

11. (Marcos introduce [A2; Juan].)

12. Jorge: Juan… Y Roberto.

14. (Marcos introduce [A3; Roberto].)

15. Jorge: Vale. Y pon total ([…]).

16. Marcos: ¿Y ([…]) el total era?

18. Marcos: Novecientos sesenta.

19. (Marcos introduce [A4; Total].)

21. (Marcos introduce [B4; 960].)

[79] En los problemas *La lotería* y *La quiniela* de los cuestionarios 2 y Post, respectivamente, también se produce un reparto de dinero entre tres personas de las que no se da el nombre. Marcos se refirió al dinero que le correspondía a cada personaje mediante “1º”, “2º” y “3º”, mientras que Jorge empleó “A”, “B” y “C”.

	A	B
1	Luis	
2	Juan	
3	Roberto	
4	Total	960

Figura 80. Después del ítem 21.

Jorge (ítems 22 y 24) relee el enunciado en busca de relaciones entre las cantidades a las que acaban de asignar celda y concluye que “Roberto habrá ganado más” (final del ítem 24); pero no explicita el segundo término de la comparación (Luis o Juan). A continuación, Jorge (ítem 26) hace referencia a la cantidad “ganancias entre los tres” y cuando Marcos (ítem 28) le apunta que son 960, le replica (ítem 29) que se refiere a las ganancias partidas entre tres. De hecho, en el ítem 32 construye nombre para esta cantidad (“ganancias / 3”[80]) e introduce (ítem 35) la fórmula =B4/3 en B5 para calcular su valor. Mientras construye la fórmula, se refiere a la celda B4, que contiene a la cantidad conocida *T*, mediante deícticos. Posiblemente, la propuesta de Jorge es realizar una primera estimación de las cantidades *L*, *J* y *R*.

22. Jorge: Vale ([…] sitúa la celda activa en B1). Luis ganó…

23. Marcos: Sí.

24. Jorge: … menos veinticuatro (Marcos introduce [B1 =…; …]) euros ([…])… A ver, Juan ([…]) ganó… a ver ([…])… Y la décima (leyendo), a ver… Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan ([…]) y la décima parte de lo que ganó Roberto (leyendo)… Entonces ([…]), Roberto habrá ganado más.

25. Marcos: Ése más.

26. Jorge: A ver, espera. Lo ganado entre los tres (Jorge hace clic en A5 con lo que introduce [B1 =A5…, …] involuntariamente)… No, no, espera. Quita esto (Marcos borra B1)… Entonces, a ver, ganancias entre los tres.

28. Marcos: Las ganancias entre los tres es novecientos sesenta.

29. Jorge: Ya, ya, ya, pero me refiero… Ganancias… ganancias partidas entre tres. ¿Sabes?

30. Marcos: Sí, repartidas entre tres.

31. Jorge: Sí. Entre tres.

32. (Mientras mantienen el diálogo anterior, Jorge introduce [A5; ganancias / 3].)

33. Jorge: Vale.

35. Jorge: Vale. Entonces era (introduce [B5 =…; …]), esto (introduce [B5 =B4…; …]) entre tres (introduce [B5 =B4/3; 320] usando las flechas)… Trescientos veinte… Y si Luis ha ganado (sitúa la celda activa en B1) trescientos euros… veinticuatro euros menos ([…]).

Al final del ítem 35, Jorge verbaliza la relación $J = L + Mjl$, tal y como se expresa en el enunciado, e introduce (ítems 37-39) la fórmula =B2-24 en la celda B1 que representa a la cantidad *L*. Mientras Jorge escribe la fórmula anterior, se interesa (final del ítem 37) por lo que ha ganado Juan; en lo que podríamos

36. Marcos: ¿Menos que qué? Que Juan.

37. Jorge: Que (introduce [B1 =…; …]) Juan (sobre la voz de Marcos). Juan habrá ganado, a ver (introduce [B1 =B2…; …])… ¿Juan ha ganado?

38. Marcos: Menos veinticuatro.

39. Jorge: Menos veinticuatro (introduce [B1 =B2-24; -24] usando las flechas), ¿no? Vale.

[80] El nombre reproduce la operación matemática que permitirá obtener el valor de la cantidad. En ningún momento se observa que consideren esta cantidad como propia de una situación hipotética distinta a la planteada en el enunciado.

considerar como una necesidad de cerrar la operación que está planteando, pues la celda B2 está vacía. Jorge (ítem 41) propone el número obtenido al dividir el total de dinero a repartir entre tres como valor de la cantidad *J*; pero Marcos (ítem 42) le indica que el valor de esa cantidad no se conoce. No obstante, Jorge introduce 320 en la celda B2 (ítem 42).

En definitiva, Jorge ha sido capaz de construir una fórmula en la que se opera con lo desconocido, pero ha necesitado de manera inmediata calcular esa cantidad desconocida para que desaparezca la provisionalidad del valor que calcula la fórmula.

40. Marcos: Sí.

41. Jorge: Y Juan ha ganado… Ha ganado trescientos veinte, se supone… ¿No?

42. Marcos: No (Jorge introduce [B2; 320]), no lo sabemos.

	A	B
1	Luis	296
2	Juan	320
3	Roberto	
4	Total	960
5	ganancias / 3	320

Figura 81. Después del ítem 42.

Jorge (ítem 43) identifica la relación $R = L \cdot Vlr$ en el enunciado. Tras leer, mira a la pantalla e invierte verbalmente la relación: “Roberto ha ganado ([…]) diez veces más que Luis” (final del ítem 43). Posiblemente, ha observado que no está vacía la celda que representa a la cantidad *L*. Jorge (ítem 50) verbaliza la fórmula mientras la introduce y al situarse sobre la celda B1 dice 320, valor que está presente en B2 o B5, pero no en B1 (ver Figura 81). Marcos (ítem 54) muestra sorpresa ante la referencia a 320 y Jorge (ítem 55) rectifica e indica que se refiere a 296 (el valor presente en B1, ver Figura 81). Aunque Marcos ha confundido el valor presente en la celda argumento, la fórmula =B1*10 que ha introducido en la celda B3 ha respondido de forma correcta a la relación $R = L \cdot Vlr$.

43. Jorge: Porque si… si (Jorge coge la hoja y señala al enunciado)… si ([…]) Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto (leyendo), entonces (Jorge mira a la pantalla) Roberto ha ganado (mueve el cursor sobre B3 […]) diez veces más que Luis.

44. Marcos: Claro.

45. Jorge: ¿Sabes?

46. Marcos: ¡Ah, vale, vale!

47. Jorge: ¿Entiendes ahora?

48. Marcos: Pues ponemos eso de…

50. Jorge: Roberto div… Roberto por diez (Marcos introduce [B3 =…; …])… Entonces será trescientos (Marcos introduce [B3 =B1…; …]) veinte…

51. Marcos: Por diez.

52. Jorge: … por diez

53. (Marcos introduce [B3 =B1*…; …].)

54. Marcos: ¿Trescientos veinte?

55. Jorge: No, no, no. Perdón, perdón. Doscientos noventa y seis por diez (Marcos introduce [B3 =B1*10…; …])… Pero nos dará dos mil…

56. Marcos: Novecientos sesenta.

57. (Marcos introduce [B3 =B1*10; 2960] usando las flechas.)

Jorge (ítem 58) parece que iba a hacer referencia a una segunda expresión de la cantidad T mediante, supuestamente, la construcción de una fórmula que sumara las cantidades J, L y R; pero Marcos (ítem 59) le interrumpe y señala que el valor obtenido en el cálculo anterior (ítem 57) es demasiado grande (de hecho superaría los 960 euros a repartir). Marcos (ítem 60) borra la fórmula introducida en el ítem 57, lo que parece indicar que también lo considera excesivo. Convienen (ítems 61 y 63) que en lugar de multiplicar por diez deben dividir entre diez. Marcos introduce la fórmula =B1/10 en B3, usando las flechas para referirse a la celda argumento B1 y verbalizando (ítem 80) el valor provisional presente en B1 cuando menciona la cantidad L. Podemos concluir que la nueva fórmula que escriben en B3 implica sustituir la relación identificada (ítems 43-57) en el enunciado por la incorrecta $L = R \cdot Vlr$. Es decir, en este caso la inversión no es consecuencia de un error al aislar la relación en el enunciado o al traducirla en una fórmula, sino una forma de producir valores plausibles.

58. Jorge: Suma…

59. Marcos: Eso es demasiao (sic).

60. (Marcos borra B3.)

61. Marcos: ¿La décima parte ([…])? Es que no es diez veces, es la décima parte.

63. Jorge: Entre diez… Entre diez.

78. Marcos: A ver (introduce [B3 =B1…; …).

79. Jorge: Será…

80. Marcos: La décima parte de… de doscientos noventa y seis (introduce [B3 =B1/…; …])…

81. Jorge: Es…

82. (Marcos introduce [B3 =B1/10; 29,6] usando las flechas.)

83. Marcos: Veintinueve con seis.

	A	B
1	Luis	296
2	Juan	320
3	Roberto	29,6
4	Total	960
5	ganancias / 3	320

Figura 82. Después del ítem 83.

Jorge (ítems 87, 89 y 94) considera que para calcular el valor definitivo de la cantidad R debe añadir 29,6 a 320 (el resultado de dividir 960/3). Lo que implicaría el uso de las relaciones[81] $R^* = R + \alpha$, $L = R \cdot Vlr$ y $T = \alpha \cdot \beta$ (siendo α el dinero que le correspondería a cada protagonista si el reparto fuera equitativo y β el número de personas entre las que se

86. Marcos: Veintinueve con seis es lo que ha ganado más Roberto.

87. Jorge: Entonces súmaselo a dos… a trescientos veinte.

88. Marcos: Claro.

89. Jorge: Pues ya está. Súmaselo.

90. Marcos: Eh… trescientos veinte a veintinueve con seis (borra B3).

[81] Usamos R^* para indicar que se calcula un segundo valor de esta cantidad a partir de un primer valor de R (en el capítulo 5, se da una explicación más detallada).

reparte el dinero)[82]. Parece que Marcos observa que le ha correspondido poco dinero a Roberto (29,6 euros, ver Figura 82) y propone aumentar este valor de manera arbitraria para que todos los protagonistas reciban alrededor de 320 euros. Así, Jorge (ítem 94) introduce la fórmula =B1/10+320 (ver Figura 83) en la celda B3. No existe verbalización de la relación que da cuerpo a la fórmula =B1/10+320 posiblemente por la dificultad para referirse a las cantidades. Nuevamente, los valores provisionales gobiernan las gestión del proceso de resolución. Así, se establecen relaciones entre cantidades con el único propósito de obtener valores que consideran plausibles. En este caso, recurriendo al cálculo del valor de una cantidad a partir de otro valor de la misma que se había obtenido anteriormente.

91. Jorge: Espera. No, no, espera. ¿Qué has hecho?

92. Marcos: Deshaz.

93. (Jorge deshace y vuelve a aparecer [B3 =B1/10…; …].)

94. Jorge: Me refiero que pongas aquí más (en la barra de referencia, escribe [B3 =B1/10+…; …]) trescientos veinte (introduce [B3 =B1/10+320; 349,6])… Novecientos sesenta (Tras pulsar "Enter", la celda activa se sitúa B4 y contiene el valor 960). ¿No? ¡Ay, no (hace clic en B3)! Trescientos cuarenta y nueve con…

95. Marcos: Con seis.

◇	A	B
1	Luis	=B2-24
2	Juan	320
3	Roberto	=B1/10+320
4	Total	960
5	ganancias / 3	=B4/3

Figura 83. Contenido de las celdas después del ítem 95.

Marcos (ítem 97) propone sumar el contenido de las celdas B1, B2 y B3. Jorge (ítems 99, 101 y 102) introduce la fórmula que da respuesta a la propuesta; pero no le asocia un nombre que haga referencia a la cantidad que representa. Para calcular el total, utilizan la función predefinida SUMA, la cual no había formado parte de los contenidos ofrecidos durante de la secuencia de enseñanza. Jorge (ítem 102) utiliza deícticos para referirse a la celdas que representan a las cantidades que se utilizan en la fórmula.

97. Marcos: Y si sumamos éstos tres (mueve la celda activa de B1 a B3 usando las flechas).

98. Jorge: Espera, vamos a poner suma, eso de…

99. (Jorge introduce [B6 =…; …].)

100. Marcos: Suma.

101. (Jorge introduce ([B6 =suma…; …].)

102. Jorge: Suma (introduce ([B6 =suma(…; …]) entre (introduce ([B6 =suma(B1…; …]) éste hasta éste (introduce ([B6 =suma(B1:B3…; …]). ¿No?

103. Marcos: Sí.

104. Jorge: Vamos a ver.

[82] Marcos recurrió, en el cuestionario Post, al cálculo del valor definitivo de una cantidad empleando un valor provisional asignado previamente (lo que hemos venido en llamar cálculo recursivo de una cantidad) en los problemas *La familia de Marcos* y *Amelia y Enrique*; pero no se observa esta actuación en los problemas del cuestionario 2. Jorge también empleó este procedimiento en los problemas *La edad de Pablo*, *Amelia y Enrique* y *Bolígrafos* todos pertenecientes al cuestionario Post, sin que tampoco se observe su uso en el cuestionario 2.

105. Marcos: Novecientos noventa y nueve.

106. (Jorge introduce ([B6 =suma(B1:B3); 965,6] usando las flechas.)

	A	B
1	Luis	296
2	Juan	320
3	Roberto	349,6
4	Total	960
5	ganancias / 3	320
6		965,6

Figura 84. Después del ítem 106.

En los ítems 107-109, parece ponerse de manifiesto que la intención con la que han planteado la suma era la de comparar el resultado con el valor 960 de la cantidad conocida *T*. Es decir, proponían la verificación de la igualdad $T = L + J + R$. Se dan cuenta (ítems 109-111) de que hay un exceso de 5,6 en el valor 965,6 respecto del 960 (ver Figura 84). Jorge (ítem 112) está dispuesto a quitarlo de lo que le corresponde a alguno de los personajes para que se verifique la igualdad. Marcos (ítem 115) no se opone a la propuesta, pero duda a la hora de elegir el personaje al que se le habrá de restar. Jorge (ítem 116) propone como candidatos a Luis y a Roberto (Luis tiene menos de 320 y Roberto más). El hecho de que proponga finalmente a Roberto podemos asociarlo al hecho de que tiene más que nadie. Marcos (ítem 118) ofrece la posibilidad de “quitarle” a Juan.

107. Marcos: ¡Ah, no!

108. Jorge: Novecientos sesenta y cinco coma seis.

109. Marcos: Es que pasa cinco con seis euros…

110. Jorge: Sí.

111. Marcos: … de más.

112. Jorge: Entonces habrá que quitar los cinco coma seis de algún sitio.

113. (Jorge edita la fórmula contenida en B6 haciendo doble clic sobre la celda.)

114. Jorge: Vale (sitúa la celda activa en A6).

115. Marcos: El problema es de dónde.

116. Jorge: De Luis o de Roberto (hace clic en B1 y B3, respectivamente). Yo pienso que de Roberto, ¿no?

117. (Jorge mueve el cursor sobre la barra de referencia donde se muestra la fórmula que contiene B3.)

118. Marcos: O de Juan.

La sugerencia de Marcos (ítem 118) lleva a Jorge (ítems 119 y 120) a interesarse por el contenido de la celda B2 donde se ha introducido el valor obtenido al dividir equitativamente el dinero ganado (ver Figura 84). En los ítems 121 y 123, ambos coinciden en que no conocen el valor de la cantidad *J*, lo que pone de manifiesto que ahora consideran provisional el valor 320 presente en B2. Marcos (ítem 124) pregunta a Jorge cómo ha averiguado el valor presente en B2 (el valor provisional de la cantidad *J*) y éste le contesta (ítem 126) que es una suposición y que lo obtiene al partir el valor de *T* dividido entre tres. Marcos (ítem 127) le indica que

119. (Jorge hace clic en B2.)

120. Jorge: Porque Juan ([…])… Juan…

121. Marcos: Juan ([…]) no… no lo sabemos.

123. Jorge: Claro.

124. Marcos: ¿Cómo has averiguado que es trescientos veinte, Juan?

126. Jorge: Porque es una suposición, ¿no?, que ha ganado trescientos veinte. Si se reparten entre tres…

127. Marcos: Pero no tienen por qué ser iguales.

128. Jorge: Por eso… Que no son entre tres.

es posible que no ganen lo mismo y Jorge (ítem 128) le da la razón.

Marcos y Jorge (ítem 129) vuelven a fijarse en el enunciado del problema. En la parte final del ítem 129, Marcos expone como dificultad el hecho de no conocer cuánto vale la cantidad *R*. Lo que parece indicar un razonamiento aritmético en el que surge la necesidad de ir de lo conocido hacia lo desconocido. Jorge (ítem 130) modifica verbalmente "la décima parte que ganó Roberto" y dice "Roberto habrá ganado la décima parte más", con lo que posiblemente pretende indicar que *Roberto ganó diez veces lo que ganó*... Abandonan esta línea de razonamiento y Jorge (ítem 133) se interesa por el contenido de la celda B6 (ver Figura 84). Posiblemente, la falta de un nombre en la celda A6, le haya llevado a olvidar que en esta celda se encuentra la segunda aparición de la cantidad *T* (ver ítem 106). Tras editar la celda (ítem 133), parece entender a quién representa. Mientras Jorge tenía estas preocupaciones, Marcos (ítem 136) concluye que el valor que han asignado a *J* (el resultado de dividir 960 entre 3) es incorrecto y deciden eliminarlo.

129. Marcos: A ver ([…])… Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte ([…]) de lo que ganó Roberto (leyendo)… (Silencio de 5 segundos.)… Eso quiere decir que (Marcos señala al enunciado y Jorge mira a la hoja) veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte que ganó Roberto ([…])… Es que no sabemos cuánto ganó (Jorge sitúa la celda activa en A1) Roberto (Jorge hace clic en B2 y B3).

130. Jorge: Roberto habrá ganado la décima parte más, ¿no?

132. Marcos: Sí, más que… Sí, la décima parte ([…]), pero ([…]) veinticuatro euros menos de ([…])… que esa cantidad (Marcos sitúa la celda activa en B1). A ver, veinticuatro euros menos…

133. Jorge: ¿Esto qué es (sitúa la celda activa en B6)?

134. Marcos: … que…

135. Jorge: Vale, ya está (sitúa la celda activa en B1).

136. Marcos: No, (desplaza la celda activa a B2 usando la flechas) Juan está mal. Juan está… Juan no es trescientos veinte.

137. Jorge: Pues quítalo.

138. (Marcos borra B2.)

Marcos (ítem 145) guía a Jorge a la hora de introducir en B1 la fórmula =B2-24+B3/10 (ver Figura 85) y se refiere a la cantidad *R* por el nombre que le han asignado. Esta fórmula podemos interpretarla como un intento de ubicar en la celda que representa a la cantidad *L* una concatenación de las expresiones que servirían para calcularla utilizando como nexo de unión entre ambas una suma. En definitiva, se ensamblan de una manera idiosincrásica las relaciones $L = J - Mjl$ y $L = R/Vlr$ para dar lugar a $L = J – Mjl + R/Vlr$. La introducción de la fórmula =B2-24+B3/10 en B1 genera una referencia circular (ítem 146) y, al aparecer el mensaje de error, Jorge (ítems 147 y 149) la sustituye por =B2-24, lo que supondría expresar la relación correcta $J = L + Mjl$.

145. Marcos: Arriba. Ahí ([…] señalando la barra de referencia). Más (Jorge […] introduce [B1 =B2-24+…; …])… Pon Roberto… No, la cantidad de Roberto (señala a la pantalla con el dedo mientras Jorge introduce [B1 =B2-24+B3…; …] usando el ratón)… entre diez (introduce [B1 =B2-24+B3/10; "Referencia circular"])… Error.

146. (Jorge hace clic en "Aceptar" y desaparece el cuadro de diálogo.)

147. Jorge: Vamos a quitar esto (modifica [B1 = B2-24…; …]). A ver…

148. Marcos: En teoría es así.

149. (Jorge introduce [B1 =B2-24; -24].)

	A	B
1	Luis	=B2-B4+B3/10
2	Juan	
3	Roberto	=B1/10+320
4	Total	960
5	ganancias / 3	=B4/3
6		=SUMA(B1:B3)

Figura 85. Contenido de las celdas después del ítem 146.

Jorge (ítem 150) propone generar una secuencia de posibles valores a partir de la celda que representa a *J*, la cual está en blanco. Posiblemente, haya recordado que esto es lo que se hacía sobre la celda que quedaba en blanco después de plantear el problema cuando se usaba el MHC. El hecho de que coloree la fila 2 vuelve a indicar que con esto marcan aquello que no conocen y quieren determinar, apartándose del uso que se le daba en la secuencia de enseñanza para señalar las dos expresiones de una cantidad que debían alcanzar valores iguales. Entre los ítems 150 y 154, Jorge genera una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 2.

150. Jorge: Pero Juan (colorea la fila 2)… Tendremos que averiguar lo que gana Juan (hace clic en B2 y C2), ¿no? Entonces tendrá que ser (introduce [C2 =…; …] esto… esto (introduce [C2 =B2…; …]) más uno (introduce [C2 =B2+1; 1] usando las flechas). Vamos a hacer lo mismo, a ver lo que sale.

151. (Jorge estira C2.)

152. Marcos: ¿Con cadena numérica?

153. Jorge: Claro. No hay otra forma. Más fácil.

154. (Llega hasta [IV2 =IU2+1; 254].)

155. Jorge: Vale. Doscientos cincuenta y cuatro.

En lugar de replicar el contenido de la celda B1, Jorge (ítems 157, 158 y 162) construye otra progresión aritmética de diferencia uno en la fila 1. El hecho de que la fórmula presente en B1 tenga como argumento a la celda B2 y que estén unidas por una relación aditiva, permite que se mantenga un diferencia (correcta) de 24 unidades entre los números de las filas 1 y 2 (ver Figura 86).

157. Jorge: Y éste (hace clic en B1) también habrá que añadirle (introduce [C1 =…; …] éste (introduce [C1 =B1…; …]) más uno (introduce [C1 =B1+1; -23])… Seguirá restando.

158. (Jorge estira C1.)

159. Marcos: No, sumando.

160. Jorge: Sumando, es verdad.

161. Marcos: Porque negativo más un positivo…

162. (Llega hasta [IV1 =IU1+1; 230].)

163. Jorge: Vale.

Jorge (ítems 167 y 170) es consciente de que la celda B4 contiene el valor de una cantidad conocida y, en consecuencia, no genera una progresión aritmética, sino que replica su contenido.

167. Jorge: Total ([…]) vas a poner (estira B4) total aquí y… y Roberto será la décima parte más…

169. Marcos: Roberto gana…

170. (Jorge llega hasta [IV4; 960].)

	A	B	C	D
1	Luis	-24	-23	-22
2	Juan		1	2
3	Roberto	317,6		
4	Total	960	960	960
5	ganancias / 3	320		
6		293,6		

Figura 86. Después del ítem 170.

Marcos (ítem 172) verbaliza la relación que existe entre las cantidades *L* y *R*. Jorge (ítem 174) edita la celda B3, donde se ubica la fórmula que sirve para calcular la cantidad *R*, y se observa =B1/10+320 (ver Figura 85). Marcos (ítem 176) le pregunta a Jorge "¿De dónde has sacado los trescientos veinte?". Éste le contesta que 320 son las ganancias y Marcos (ítem 178) parece concluir que no debería haberse añadido ese valor, lo que supone respetar las restricciones del problema. Sin embargo, Jorge interpreta que no se debería haber realizado el cálculo que se muestra en la celda B5 (ver Figura 85) y borra (ítem 181) A5 y B5. Destacamos que en ningún momento prestan atención al error que supone dividir B1 entre diez en lugar de multiplicarlo. A continuación, Jorge (ítem 182) muestra el contenido (ver Figura 85) de la fórmula presente en B6, posiblemente sin ninguna intención. Marcos le pregunta qué papel juega la fórmula asignada a B6 y Jorge (ítem 184) le contesta que la suma. Aunque Marcos (ítem 185) parece tolerar su presencia, Jorge (ítem 186) la borra.

En este momento, la fórmula =B2-24 presente en B1 expresa la relación $J = L + Mjl$, la fórmula =B1/10+320, ubicada en B3, da cuenta de las relaciones $R^* = R + \alpha$, $L = R \cdot Vlr$ y $T = \alpha \cdot \beta$ (siendo α el dinero que le correspondería a cada protagonista si el reparto fuera equitativo y β el número de personas entre las que se reparte el dinero) y en la celda B4 se encuentra el valor 960 de la cantidad conocida *T* (ver Figura 87).

172. Marcos: Roberto gana diez (Marcos mira a la hoja)… la décima parte menos que la que ganó Luis (mira a la pantalla).

174. (Jorge hace clic en B3.)

175. Jorge: Entonces…

176. Marcos: La décima parte… Lo que ganó Luis… ¿Roberto qué es? La be tres (mueve la celda activa con las flechas de B3 a B1, y viceversa […]). La décima parte ([…]). Es que lo de trescientos veinte ([…]) no sé por qué. ¿De dónde has sacado los trescientos veinte?

177. Jorge: De lo de las ganancias (hace clic en B5).

178. Marcos: Mm (Jorge sitúa la celda activa en B3)… Lo de las ganancias no teníamos que haberlo hecho.

179. Jorge: Pues lo quitamos.

180. Marcos: Sí.

181. (Jorge borra A5 y B5.)

182. (Jorge sitúa la celda activa en B6.)

183. Marcos: ¿Eso qué es?

184. Jorge: Lo de la suma.

185. Marcos: ¡Ah vale!

186. (Jorge borra B6.)

	A	B	C
1	Luis	=B2-24	=B1+1
2	Juan		=B2+1
3	Roberto	=B1/10+320	
4	Total	960	960

Figura 87. Contenido de las celdas después del ítem 186.

Tras algunas vacilaciones (ítems 187-190), Jorge (ítem 191) propone generar una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 3 para "ver lo que sale". Marcos (ítem 192) prevé que el plan fallará, aunque no es capaz de articular una propuesta alternativa. Jorge (ítem 194) tampoco parece muy seguro, pero decide seguir adelante. Tras introducir (ítem 193) la fórmula =B3+1 en la celda C3, se muestra una valor decimal. Marcos (ítem 195) lo indica, pero Jorge (ítem 196) sigue adelante y replica el contenido de la celda C3.

187. Jorge: Pues…

188. Marcos: Pon Roberto (sobre las palabras de Jorge).

189. (Marcos sitúa la celda activa en C2.)

190. (Jorge sitúa la celda activa en C3.)

191. Jorge: No. ¿No es mucho mejor poner esto a ver lo que sale (introduce [C3 =…; …]) más uno?

192. Marcos: Pero es que no (Jorge introduce [C3 =B3…; …])… No creo.

193. (Jorge introduce [C3 =B3+1; 318,6] usando las flechas.)

194. Jorge: Ya. Da igual. Vamos a intentarlo.

195. Marcos: Da decimales todo.

196. Jorge: Ya, pero como no tendrá salir (estira C3)… ¿Sabes?

197. Marcos: No sé… A ver.

198. (Llega hasta [IV3 =IU3+1; 571,6].)

	A	B	C	D
1	Luis	-24	-23	-22
2	Juan		1	2
3	Roberto	317,6	318,6	319,6
4	Total	960	960	960

Figura 88. Después del ítem 198.

Marcos (ítem 202) insiste en que los valores de la fila 3 deben ser valores enteros (ver Figura 88); aunque por tratarse de dinero esto no tiene que ser necesariamente así. Posiblemente, observe que, como en la filas 1 y 2 no hay valores decimales, no se podrá conseguir que la suma de las tres dé un número entero en ninguna columna. Jorge (ítem 204) propone generar una progresión aritmética de diferencia 0,1, lo que sí que proporcionaría algún valor entero. Sin embargo, Marcos (ítems 205, 207 y 208) identifica el origen de los valores decimales en B3, donde se calcula el primer valor provisional de la cantidad *R*,

202. Marcos: Decimales con seis. Tiene que dar la ([…]) cifra exacta… Novecientos sesenta.

203. (Jorge mueve la ventana hasta el inicio.)

204. Jorge: O si quita… O si sumamos cero coma uno (sitúa la celda activa en C3)…

205. Marcos: Pon Roberto.

206. Jorge: … en vez de…

207. (Marcos sitúa la celda activa en B3.)

208. Marcos: Porque creo que Roberto… Lo de Roberto está mal.

209. Jorge: Quítalo.

210. Marcos: Vamos a ver (introduce [B3 =…; …] y mira a la hoja). Roberto… (Silencio de 5 segundos.)… es (mira a la pantalla) diez… tiene, a ver cómo lo digo… Tiene ([…]) la décima parte de

e insiste en que la fórmula asignada al cálculo de la cantidad R está mal[83]. Jorge (ítem 209) consiente en modificar la fórmula presente en B3. Marcos (ítem 210) parece leer el enunciado y concluye que Roberto tiene la décima parte de lo que ganó Luis, lo cual supone un error de inversión; pero duda a la hora de introducir la fórmula y recurre a Jorge. Éste (ítem 211) no sólo no le ayuda, sino que propone pasar a otro problema.

lo que ha ganado Luis menos… O sea, lo que ha ganado ([…]) él (introduce [B3 =B1/…, …] usando las flechas)… Claro, que antes daba error (modifica [B3 =B1…, …])… A ver… ¿A ti ([…]) se te ocurre algo?

211. Jorge: A mí ya nada. Es que yo ya he hecho todo lo que he pensao (sic). Pasamos a otro, ¿no?

En el ítem 212, Marcos vuelve a leer un fragmento del enunciado del problema, lo que nos indica que tiene problemas al interpretar el fragmento de enunciado donde se expresa la relación $R = L \cdot Vlr$. Así, en el ítem 216 podemos interpretar que dice "y [Luis] la décima parte de Roberto más", en una nueva búsqueda de cuál es la cantidad que tendrá un valor mayor. Jorge (ítem 217), sin embargo, se centra en volver a representar la relación $T = L + J + R$ lo que implicaría duplicar la cantidad T. Marcos (ítem 219) expresa la necesidad de calcular un valor o asignarle una expresión a la celda que representa a la cantidad R. La respuesta de Jorge (ítem 220) pone de manifiesto que no tiene claro la fórmula que hay que asignar a la cantidad R, pero que eso no le impide poder trabajar con ella: un rasgo del pensamiento algebraico.

212. Marcos: Espérate, espérate (coge la hoja y la pone de forma que sólo él puede leerla)… Veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto (leyendo).

214. (Silencio de 8 segundos.)

215. Jorge: Pero si Luis ganó veinticuatro euros menor (sic)… euros menos (mueve la ventana hasta el final)…

216. Marcos: Y… y la décima parte de Roberto más.

217. Jorge: A ver… Vamos a hacer lo de suma (mueve la ventana hasta el inicio) aquí (sitúa la celda activa en C5, lo que supone introducir [B3 =B1; -24]). Suma…

218. (Jorge introduce [C5 =…; …].)

219. Marcos: Pero si no sabemos lo que tiene Roberto.

220. Jorge: Por eso vamos a hacer otra cosa.

En el ítem 217, Jorge había hecho clic en C5 con lo que de manera involuntaria había introducido en B3 la fórmula =B1. En consecuencia, se observan iguales los valores de B1 y B3, lo que llama la atención de Marcos (ítem 233). En busca del error, Marcos (ítem 237) edita la fórmula presente en B3 y concluye (ítem 238) que la fórmula =B1 es incorrecta. Jorge (ítem 239) propone introducir una fórmula en B3 que representaría

231. Marcos: Espérate (señala a la pantalla con la mano). Lo de Roberto.

232. Jorge: ¿Qué?

233. Marcos: ¿Por qué aparece menos veinticuatro?

235. Jorge: No sé.

237. (Marcos hace clic en B3 y aparece "=B1" en la barra de referencia.)

238. Marcos: Roberto no es igual a be uno ([…]). Roberto ([…])…

[83] Posiblemente ya había indicado que esta fórmula era incorrecta en el ítem 178; pero Jorge había interpretado que se refería a la fórmula que calculaba lo que le correspondería a cada protagonista si el reparto fuera equitativo.

correctamente a la relación $R = L \cdot Vlr$. La verbalización de la relación (ítem 239) se hace mediante la de la propia fórmula, donde la cantidad L se expresa mediante la posición de la celda B1. Marcos (ítem 240) parece dudar; pero Jorge introduce la fórmula = B1*10 en B3.

Han conseguido representar correctamente las relaciones $R = L \cdot Vlr$ y $J = L + Mjl$, dos de las tres relaciones necesarias para resolver el problema, y la otra, $T = L + J + R$, parecen tenerla en mente.

239. Jorge: O a lo ([…]) mejor… A ver, be uno por diez… por diez.

240. Marcos: ¿Por diez?

241. (Jorge introduce [B3 = B1*10, -240].)

	A	B	C
1	Luis	=B2-24	=B1+1
2	Juan		=B2+1
3	Roberto	=B1*10	=B3+1
4	Total	960	960

Figura 89. Contenido de las celdas después del ítem 241.

Aunque las fórmulas presentes en B1 y B3 son correctas, los valores producidos en las filas 1 y 3 no son el resultado de una replicación de estas fórmulas, sino de la generación de sendas progresiones aritméticas (ver Figura 89). Marcos (ítem 243) emprende la búsqueda de la presencia de valores positivos en la fila 3, lo que pone de manifiesto que considera estos valores como provisionales y que entiende que el dinero que proviene de un reparto no puede tener un valor negativo. Al alcanzar la columna IV (el límite derecho de la hoja de cálculo) se observa el número 14 en IV3 (ver Figura 90), lo que les lleva abandonar el problema. Nuevamente, vuelve a establecerse una relación causa-efecto entre una limitación técnica y el hecho de haber realizado un planteamiento incorrecto[84].

243. Marcos: A ver, por casualidad (desplaza la ventana hacia la derecha)… ¿da algún número positivo?

244. Jorge: No, no va a dar ninguno. Bueno. Sí dará…

245. Marcos: Uno o dos.

246. Jorge: Sí. Hasta diez dará (cuando empiezan a aparecer sólo valores positivos en todas las celdas).

247. Marcos: Más o menos.

248. (Marcos mueve la ventana hasta el final.)

249. Jorge: Catorce (el valor de IV3 es 14).

250. Marcos: No, no, no.

251. Jorge: Imposible.

[84] Esta pareja ya había tenido la misma actuación en el problema *Las actividades deportivas* en los ítems 116-125 (véase apartado 6.5.4.3.)

◇	IT	IU	IV
1	228	229	230
2	252	253	254
3	12	13	14
4	960	960	960

Figura 90. Después del ítem 249.

6.5.4.5. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema "Lana y algodón"

Marcos (ítems 3 y 4) introduce los nombres "Lana" y "Algodón", en las celdas A1 y A2, respectivamente. Los nombres son ambiguos, pues no hacen referencia a la magnitud que se mide. Por la asignación de valores que realiza en los ítems 33 y 34, parece plausible concluir que representan a las cantidades conocidas *Ua* y *Ul*, respectivamente. Jorge (ítems 7 y 9, respectivamente) verbaliza las cantidades *Ml* y *Ma* y Marcos (ítems 8 y 10) les construye los nombres "m/lana" y "m/algodón". Jorge identifica las cantidades *M* (ítem 16) y *P* (ítem 37) y Marcos les asigna los nombres "Total/metros" (ítem 20) y "Valor total" (ítem 40).

En definitiva, se han limitado a representar las cantidades conocidas o desconocidas a las que se cita de manera explícita en el enunciado; pero han omitido referirse a las cantidades *Pa* y *Pl* (ver Figura 91).

3. (Marcos […] introduce [A1; Lana] mientras Jorge continúa leyendo el enunciado.)

4. (Marcos introduce [A2; Algodón] mientras Jorge lee el enunciado.)

7. Jorge: Pon aquí ([…]) metros de lana. (Dice esto sobre la anterior pregunta de Marcos.)

8. (Marcos […] introduce [A3; m/lana].)

9. Jorge: Y metros de algodón.

10. (Marcos introduce [A4; m/algodón].)

16. Jorge: Doce metros ([…])… Total de metros… Pon aquí (mueve la celda activa a A5) total de metros.

20. (Marcos modifica [A5; Total/metros].)

22. Marcos: Total de metros ([…]).

23. Jorge: … lana ([…])… ¡Ah!, total de metros son doce.

25. (Marcos introduce [B5; 12].)

27. Jorge: Vale.

29. (Marcos introduce [B1; 2…].)

30. Jorge: Eh ([…])… Dos euros ([…]) y algodón cuatro euros.

33. (Marcos introduce [B1; 2].)

34. (Marcos introduce [B2; 4…].)

35. Marcos: Cuatro.

37. Jorge: A ver, el valor total ([…]). Pon valor total de (hace clic en A6 con lo que introduce [B2; 4]) metros… Pon valor…

38. Marcos: ¿Valor total?

39. Jorge: Claro. Valor total.

40. (Marcos introduce [A6; Valor total].)

41. Jorge: Vale ([…]). Son treinta y dos euros.

43. (Marcos introduce [B6; 32].)

	A	B
1	Lana	2
2	Algodón	4
3	m/lana	
4	m/algodón	
5	Total/metros	12
6	Valor total	32

Figura 91. Después del ítem 43.

Jorge (ítem 44) vuelve a leer fragmentos del enunciado en busca de las cantidades que se deben determinar y parece entender que se han de averiguar los valores de *Ml* y *Ma*. En el ítem 47, Jorge intenta verbalizar proposiciones hipotéticas que parten de cantidades conocidas, lo que puede dar a entender la intención de establecer inferencias analíticas con el fin de ir de lo conocido hacia lo desconocido (razonamiento aritmético). En los ítems 46 y 48, Marcos pregunta por el precio de los metros de lana sin concretar si se refiere al precio unitario o el precio total y Jorge (ítem 49) le responde que cuestan dos euros. Marcos (ítem 50) consulta si ése es el precio de un metro de tela de lana y Jorge (ítem 51) le responde que sí. En el ítem 53, Jorge concluye que hay que averiguar *Ma* y *Ml* y colorea las filas 3 y 4. Nuevamente, el uso que hacen del coloreado no es el que se propuso en la secuencia de enseñanza, cuya intención era marcar las dos expresiones de una cantidad que debían alcanzar el mismo valor, sino el de señalar aquello por lo que se pregunta en el problema.

44. Jorge: Vale. Y ahora dice ([…] lee el enunciado): ¿de cuántos metros de tela y de cuántos metros de tela de algodón se dispone?

46. Marcos: ¿La lana son dos euros el metro?

47. Jorge: Sí. Y total de metros son doce. Si ([…] lee el enunciado) el valor total de la tela que se dispone es de ([…]) treinta y dos euros… Si han comprado treinta y dos euros de…

48. Marcos: ¿Cuánto ([…]) cuestan ([…]) los metros de lana ([…])?

49. Jorge: ¿De lana ([…])? Dos euros (sitúa la celda activa en B1 […]). Hay que averi…

50. Marcos: Y… ¿Un metro? (Sobre las palabras de Jorge.)

51. Jorge: Un metro, dos euros ([…]).

52. Marcos: Claro, claro. Vale.

53. Jorge: Y dos ([…])… y dos metros, cuatro euros ([…]). Entonces hay que averiguar esto (colorea la fila 3) los metros de lana y los de algodón (colorea la fila 4).

Marcos propone generar progresiones aritméticas (lo que el llama “cadenas numéricas”, ítem 54) sin haber expresado ninguna de las relaciones entre las cantidades. Tampoco han identificado una única cantidad de referencia, ni se han interesado por establecer una igualdad entre dos cantidades o dos expresiones de una misma cantidad. Jorge (ítem 55) acepta el plan y en el ítem 57 copia por arrastre la celda B6, la cual contiene el valor de la cantidad conocida *P*.

54. Marcos: Eso con una cadena numérica sí que se puede.

55. Jorge: Claro. Y hay que averiguar… hay que poner aquí (Marcos introduce [C6 =…; …] y Jorge introduce [C6 =C5…; …] fortuitamente)… Espera, espera. Quita esto, quita esto (señala a C6 con el cursor). Suprímelo.

56. (Marcos borra C6.)

57. Jorge: Hay que (hace clic en B6) estirar esto (estira B6) para saber el valor total.

58. Marcos: Sí.

59. (Llega hasta [IV6 =32; 32].)

Jorge (ítem 60) indica que las cantidades que han etiquetado como "m/lana" y "m/algodón", y que parece asociar a *Ml* y *Ma*, no son necesarias. Marcos (ítem 61) apoya la propuesta con una argumentación ambigua que parece reflejar que consideraba que estos nombres representaban a las cantidades conocidas *Ul* y *Ua*. La divergencia en los referentes asociados a los nombres "m/lana" y "m/algodón" podría explicar la falta de relación entre las argumentaciones que exhiben Jorge y Marcos en los ítems 60 y 61. En el ítem 62, Jorge propone generar una progresión aritmética en la fila 1 y Marcos (ítem 63) le apunta la operación que hay que usar en la fórmula de recurrencia. Posiblemente, han colapsado las cantidades *Ul-Pl* y *Ua-Pa* en las variables precio de la tela de lana y precio de la tela de algodón y han decidido generar las secuencias de posibles valores de los precios, con lo que no resulta necesario representar los metros de tela[85].

Las fórmulas de recurrencia que introducen (ítems 65 y 66) en las celdas C1 y C2 servirán para generar progresiones aritméticas de diferencia uno, con lo que no atienden a que los precios de la tela de lana serán múltiplos de dos y los algodón, de cuatro, siempre que los metros de tela sean valores enteros. Sin embargo, Jorge (ítem 69) apunta que la diferencia entre valores debería ser dos. Marcos (ítem 70) le pregunta la razón y Jorge (ítem 71) afirma "Si son un metro, ahí calcularíamos medio metro." Refiriéndose a que los valores impares que se obtienen en la fila 1 representarían la compra de partes no enteras de metros de tela de lana. Marcos (ítem 73) no entiende la intención y Jorge (ítem 74) construye la fórmula =B2+2 en

60. Jorge: Y (mueve la ventana al inicio)… aquí el de los metros (señala primero con el cursor a B3 y B4 y después a B1 y B2) no hace falta.

61. Marcos: No, porque siempre es el mismo.

62. Jorge: Claro. Lo que… Aquí (sitúa la celda activa en C1) sí que hay que hacer serie numérica (introduce [C1 =…; …]). Hay que hacer…

63. Marcos: Más uno.

64. (Jorge introduce [C1 =B1…; …] usando las flechas.)

65. Jorge: Más uno (mientras dice esto introduce [C1 =B1+1; 3)… Y aquí (tras pulsar Intro la celda activa se sitúa en C2) lo mismo

66. (Jorge introduce [C2 =B2+1; 5] usando las flechas).

67. Jorge: Vale. Estiramos

68. (Jorge estira C1 hasta [CJ1 =CI1+1; 88].)

69. Jorge: No. Tendría que ser por dos… más dos.

70. Marcos: ¿Por qué?

71. Jorge: Porque si dos metros de tela (mueve la ventana al inicio)… Si son un metro, ahí calcularíamos medio metro.

72. (Jorge modifica [C1 =B1+2; 4].)

73. Marcos: ¿Cómo, cómo?

74. Jorge: Sería esto. ¿Sabes? Aquí sería más dos (modifica [C2 =B2+2, 6]).

75. Marcos: Explícate.

76. Jorge: Porque si calculamos uno (estira C1), calcularíamos medio metro ([…]). Dos metros ([…])… Un metro de tela vale dos euros, ¿no?

77. Marcos: Sí.

78. Jorge: Pues medio metro de tela, valdrá un euro ([…]).

79. Marcos: Claro.

81. (Jorge llega hasta [IV1 =IU1+2; 510].)

82. Jorge: Pues ya está. Si hemos puesto uno, habremos (mueve la ventana al inicio) calculado

[85] Los metros de tela se utilizarán de manera implícita en las diferencias de la progresiones aritméticas que se generan para producir los posibles precios de la tela de lana y algodón (véase la argumentación de Jorge a partir del ítem 69).

la celda C2 a modo de ejemplo[86]. Marcos (ítem 75) sigue sin comprender el propósito que guía la actuación de Jorge y éste (ítem 78) se lo aclara diciendo “Pues medio metro de tela, valdrá un euro”. En definitiva, Jorge pretende representar una secuencia de valores de la cantidad *Pl* mediante una progresión aritmética de diferencia *Ul* que materializaría la relación *Pl* = *Ul*·*Ml*. Posiblemente su intención es la misma para *Pa*, pero la secuencia que se generará no tendrá diferencia *Ua*. Así, cuando Jorge (ítems 84-87) replica el contenido de la celda C2, produce una progresión aritmética de diferencia dos en la fila 2. Mientras se genera la secuencia, Marcos (ítem 86) parece querer decir que en algodón la diferencia no debería ser dos, sino cuatro; pero se limita a decir “Pero en algodón ([…]) no pasa lo mismo”. Marcos quizá interpreta que el valor obtenido en IV2 (ítem 87) es mayor que en IV1 (ítem 82) y le contesta a Marcos “En ([…]) algodón hay más” (ítem 88).

un…

83. Marcos: Un medio metro.

84. (Jorge estira C2.)

85. Jorge: Un metro y medio.

86. Marcos: Claro. Ya lo veo, ya. Ya te entiendo, ya. Pero en algodón ([…]) no pasa lo mismo.

87. (Jorge llega hasta [IV2 =IU2+2; 512].)

88. Jorge: En ([…]) algodón hay más.

89. Marcos: Claro. Por eso.

	A	B	C	D
1	Lana	2	4	6
2	Algodón	4	6	8
3	m/lana			
4	m/algodón			
5	Total/metros	12		
6	Valor total	32	32	32

Figura 92. Después del ítem 87.

Entre los ítems 90 y 92, Jorge genera una secuencia uniforme de valores a partir del número (12) contenido en B5. Jorge (ítem 92) utiliza el conocimiento de los posibles valores que pueden tomar las cantidades en el problema para decidir en qué momento detiene la generación de la secuencia.

90. Jorge: Y en… y en total (mueve la ventana al inicio) hay que dar doce, ¿no?

91. Marcos: Si hay que ir de metro en metro (Jorge estira B5)… A ver, espérate… Para. Ponlo

92. Jorge: Da igual hasta aquí y ya está (llega hasta [FL5 =12; 12]), porque no creo que hayan comprado (en la ventana se observa el valor 334 en la celda FL1) trescientos treinta y cuatro euros (mueve la ventana al inicio)… A ver…

Marcos (ítem 100) indica que el precio de un metro de tela de algodón es de cuatro euros. Jorge (ítem 102) intenta justificar

100. Marcos: El algodón son cuatro (apunta con la mano hacia la pantalla)… cuatro euros el metro. ([…])

[86] Sin embargo, en la fila 2 está representado el precio de la tela de algodón que tiene un precio unitario de cuatro euros. La fórmula de recurrencia propuesta daría una secuencia de valores del precio de la tela de algodón aumentando de medio metro en medio metro.

que ya ha tenido en cuenta esto a la hora de generar la progresión aritmética de la fila 2. Le explica a Marcos que el valor 6 que aparece en C2 supone haber comprado dos metros de tela de algodón. La asociación de seis euros a dos metros, parece que la establece en función de la posición del valor 6 dentro de la secuencia generada en la fila 2 (es el segundo valor, ver Figura 92). Sin embargo, Marcos (ítems 103 y 106) le hace ver que si un metro cuesta cuatro euros, dos metros costarán ocho. Jorge (ítem 107) intenta defender su postura, pero acaba cediendo (ítem 109). Jorge (ítem 113) introduce la fórmula =B2+4 en C2, estira de C2 y genera una progresión aritmética con origen en cuatro y diferencia cuatro. Con esto se pone en juego implícitamente $Pa = Ua{\cdot}Ma$ en la fila 2 del mismo modo como lo había hecho con $Pl = Ul{\cdot}Ml$ en la fila 1 (ver ítems 72-81). Hemos de indicar que, aunque se ha producido una representación de las relaciones anteriores, la elección del origen de las secuencias en el precio de un metro de tela, introduce la restricción de que se han de vender la misma cantidad de metros de ambas telas ($Ma = Ml$), algo que no se exigía en el enunciado.

102. Jorge: Claro (señala a la pantalla) entonces aquí a los seis euros habremos calculado dos. Dos metros (mueve el cursor sobre C2). Seis euros, dos metros.

103. Marcos: Sí pero, dos metros no son seis euros.

104. (Jorge mueve la ventana hasta que se inicia en la columna C.)

105. Jorge: ¿Qué?

106. Marcos: Dos… dos… dos metros no son seis euros. Un metro (levanta un dedo […]) son cuatro euros; dos metros, ocho.

107. Jorge: ¿Y qué (mueve la ventana al inicio)? No, perdona (hace clic rápidamente en B2, C3 y C2).

108. Marcos: Sí

109. Jorge: Ostras, es verdad! Aquí será más dos (hace clic en C1).

110. Marcos: No, no, no. Ésa sí.

111. Jorge: Ésta sí, pero aquí (sitúa la celda activa en C2) será más cuatro.

112. Marcos: Exacto.

113. (Jorge modifica [C2 =B2+4; 8].)

114. Jorge: Vale. Ahora sí.

115. (Jorge estira C2.)

116. Jorge: Vale.

117. (Jorge llega hasta [IV2 =IU2+4; 1020].)

A estas alturas es evidente que ambos resolutores consideran que las filas 1 y 2 representan a las variables precio de la tela de lana y precio de la tela de algodón. Jorge (ítem 118) busca valores de las filas 1 y 2 (en la misma columna) que verifiquen la relación $P = Pl + Pa$. El cálculo lo realiza mentalmente y observa (ver Figura 93) que los valores de las filas 1 y 2 pasan de sumar 30 (columna F) a 36 (columna G). Marcos (ítem 119) concluye que no se da la igualdad de valores.

118. Jorge: Pues (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna K)… A ver, se han gastado treinta y dos euros (mueve la ventana al inicio)… Pues dieciocho (en la pantalla se muestra [D1; 6] y [D2; 12])… Aquí… aquí hay treinta y dos ya (mueve el cursor sobre [E1; 8] y [E2; 16]), ¿no? No, aquí hay veintidós. Aquí, treinta (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna F donde se muestra [F1; 10] y [F2; 20])… Sí. Aquí, treinta (mueve el cursor sobre [F1; 10] y [F2; 20]) y aquí, treinta y seis (mueve el cursor sobre [G1; 12] y [G2; 24]).

119. Marcos: Entonces no da ninguno treinta y dos.

	E	F	G
1	8	10	12
2	16	20	24
3			
4			
5	12	12	12
6	32	32	32

Figura 93. En el ítem 118.

Jorge (ítem 120) propone que en algún caso se habrán comprando medios metros de tela. Esto implica rechazar y culpabilizar a la restricción implícita *Ma = Ml* que habían establecido al situar los ceros de ambas progresiones en la misma columna y emplear como diferencia el precio unitario de la tela de lana y algodón, respectivamente. En el ítem 123, Jorge decide construir una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 1, lo que implicaría representar la secuencia de precios de la tela de lana avanzando de medio metro en medio metro[87].

120. Jorge: Tendrá que ser (mueve la ventana hasta el inicio)… Alguno habrá dado medio metro. Alguno habrá comprado medio metro.

122. Marcos: ¿Más?

123. Jorge: Claro (sitúa la celda activa en C2). Vamos a probar con éste más uno (modifica [C1 =B1+1; 3])… Vamos a hacer con éste y a ver lo que da.

124. (Jorge estira C1.)

125. Jorge: Hasta aquí más o menos (llega hasta [AP1 =AO1+1; 42]). Y (mueve la ventana al inicio)… A ver, aquí: once (se observa [C1; 3] y [C2; 8]).

	A	B	C	D
1	Lana	2	3	4
2	Algodón	4	8	12
3	m/lana			
4	m/algodón			
5	Total/metros	12	12	12
6	Valor total	32	32	32

Figura 94. Después del ítem 125.

Tras generar la secuencia (ver Figura 94), vuelven a buscar que la suma de los valores de las filas 1 y 2 dé 32; pero nuevamente observan (ítems 133 y 134) que se pasa de sumar 31 (columna G) a 36 (columna H). Jorge (ítem 134) decide generar una progresión aritmética de diferencia dos en la fila 2, lo que implicaría representar la secuencia de precios de la tela de algodón avanzando de medio metro en medio metro. De esta forma, se vuelve a exigir implícitamente que *Ma = Ml*.

133. Marcos: Treinta y dos (Jorge mueve la ventana hasta que se inicia en la columna C). No, treinta y uno (se observa [G1; 7] y [G2; 24]).

134. Jorge: Treinta y uno. Y aquí (señala [H1; 8] y [H2; 28] con el cursor) treinta y seis… Pues aquí dos (modifica [C2 =B2+2; 6]). Vale.

135. (Jorge estira C2.)

136. Jorge: Vale más o menos.

137. (Jorge llega hasta [AQ2 =AP2+2; 86].

Jorge (ítem 138) inicia la búsqueda de los valores de las filas 1 y 2 cuya suma dé 32; pero vuelven a encontrar (ítems 138 y

138. Jorge: Y… y ya está (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna B)… A ver, vamos a ver si… Aquí quince (se observa [E1; 5] y [E2; 10]) … dieciocho (se observa [F1; 6] y [F2;

[87] En las celdas B1 y B2 siempre se ofrece el precio de un metro de tela de lana y algodón. El desfase en los metros de tela se empieza a observar a partir de la columna C.

139) que se pasa de una suma menor (columna J) a una mayor (columna K, ver Figura 95).

12])… (Mueve la ventana hasta que se inicia en la columna F)… treinta (se observa [J1; 10] y [J2; 20]), otra vez… treinta y tres (se observa [K1; 11] y [K2; 22]).

139. Marcos: Treinta y tres (a la vez).

	I	J	K
1	9	10	11
2	18	20	22
3			
4			
5	12	12	12
6	32	32	32

Figura 95. En el ítem 138.

Marcos (ítem 141) propone generar en la fila 2 una progresión aritmética de diferencia tres, lo que implicaría considerar que la secuencia de precios de la tela de algodón ha avanzando de tres cuartos de metro en tres cuartos de metro. Jorge (ítem 146) parece preguntar si al modificar la fórmula presente en C2, se ha modificado la diferencia de la secuencia en la fila 2 y concluyen (ítems 147 y 148) que no. Jorge (ítem 149) copia el contenido de la celda C2 generando un progresión aritmética de diferencia tres y origen en cuatro en la fila 2.

141. Marcos: Pues tres.

143. Jorge: ¿Qué han comprado un metro y cuarto… de tela? (Modifica [C2 =B2+3; 7].) Es que también.

144. Marcos: Éste sí. Supongo que sí.

145. (Marcos mueve la ventana hasta que se inicia en la columna F.)

146. Jorge: ¿Se ha cambiado ([…]) ya directamente?

147. Marcos: No ([…]), a ver…

148. Jorge: No. (Casi inaudible bajo las palabras de Marcos.)

149. (Jorge estira C2 hasta [AJ2 =AI2+3; 106].)

Vuelven a buscar que la suma de valores de las filas 1 y 2 dé 32, pero se pasa de 30 en la columna H (ítem 152) a 34 en la columna I (ítem 153).

150. Jorge: A ver.

151. (Jorge mueve la ventana hasta que se inicia en la columna G.)

152. Marcos: Ocho y veintidós (se observa [H1; 8] y [H2; 22]), treinta.

153. Jorge: Treinta y ocho (mueve el cursor sobre [J1; 10] y [J2; 28]). ¿Y aquí (mueve el cursor sobre [I1; 9] e [I2; 25])?

154. Marcos: Treinta y cuatro.

155. Jorge: Treinta y cuatro. ¿Y aquí (hace clic en [H2, 22])?

Jorge (ítem 157) vuelve a generar (ítems 158 y 160) una progresión de diferencia dos en la fila 1 (ver Figura 96). Esta secuencia ya la habían producido entre los ítems 72 y 81, lo que nos indica que Jorge está variando las diferencias de las progresiones sin un criterio claro. Marcos (ítem 159) plantea usar una diferencia de 0,5 si falla este intento.

157. Jorge: Treinta. Pues en éste (mueve la pantalla hasta el inicio)… Es que en éste tendrá que ser dos (modifica [C1 =B1+2; 4])… Obligado ya.

158. (Jorge estira C1.)

159. Marcos: Y si no cero coma cinco, después.

160. (Jorge llega hasta [BB1 =BA1+2; 106].)

◇	A	B	C	D
1	Lana	2	=B1+2	=C1+2
2	Algodón	4	=B2+3	=C2+3
3	m/lana			
4	m/algodón			
5	Total/metros	12	12	12
6	Valor total	32	32	32

Figura 96. Contenido de las celdas tras el ítem 160.

Vuelven a buscar la verificación de la relación $P = Pa + Pl$, pero no se produce. Jorge (ítem 167) parece pensar que se hallan cerca de la solución por el hecho de obtener 31 como valor de la suma de las celdas G1 y G3.

165. Jorge: Veintiuno… A ver… Aquí, doce (se observa [G1; 12])… Treinta y (mueve el cursor sobre [G1, 12] y [G2, 19])… Ostras (ríe).

166. Marcos: Treinta y uno.

167. Jorge: Treinta y uno. Éste ya es… ya…!

Marcos (ítem 169) insiste en emplear una diferencia de 0,5 en la progresión generada en la fila 1. Esto supone considerar una variación en los metros de tela de lana de 0,25 en 0,25. Entre Marcos y Jorge generan la progresión aritmética con origen en 2 (celda B1) y diferencia 0,5 (ítems 173, 175 y 177).

169. Marcos: Pues cero coma cinco metros

170. Jorge: ¿Aquí (hace clic en C1)? ¿Cero coma cinco?

171. Marcos: Sí.

172. Jorge: Pues pon cero coma cinco.

173. (Marcos modifica [C1 =B1+0,5; 2,5].)

174. Jorge: Otra vez.

175. (Jorge estira C1.)

176. Marcos: Ya se ha cambiado, creo.

177. Jorge: Ya se ha cambiado. Ah, sí (llega hasta [AD1 =AC1+0,5; 16]) que se ha cambiao (sic)! Pues da igual (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna I)… A ver (mueve el cursor sobre [L1; 7])… sie… siete… Aquí, no. Aquí da mucho (mueve la ventana hasta el inicio). Aquí. Treinta (mueve el cursor sobre [D1; 3] y [D2; 10])… Ay, no, trece. Perdón!

Inician (ítem 177) la búsqueda de la verificación de la relación $P = Pa + Pl$ y creen encontrarla en la columna J (ítems 183-185), tras cometer un error de cálculo. Jorge (ítem 184) concluye que 6 (presente en J1) más 28 (presente en J2) da como resultado 32 en lugar de 34 (ver Figura 97).

182. Jorge: Veintisiete (se observa [H1; 5] y [H2; 22]).

183. Marcos: Veinticinco y medio… Veintiocho y seis (mueve el cursor sobre [J1; 6] y [J2; 28]).

184. Jorge: Treinta y dos.

185. Marcos: Sí.

◇	I	J	K
1	5,5	6	6,5
2	25	28	31
3			
4			
5	12	12	12
6	32	32	32

Figura 97. En el ítem 183.

Jorge (ítem 186) indica que ahora deben calcular los metros. Marcos (ítem 187)

186. Jorge: Ahora hay que averiguar (colorea la columna J)… A ver, ahora hay que averiguar lo

realiza mentalmente una operación que supone el uso de la relación $Pl = Ul{\cdot}Ml$ y que le lleva a calcular Ml. Del mismo modo, en el ítem 202, calcula Ma utilizando $Pa = Ua{\cdot}Ma$. No se plantean la posibilidad de comprobar si la suma de los valores obtenidos da 12, con lo que en ningún momento emplean la relación $M = Ml + Ma$.

En definitiva, han expresado numéricamente las variables precio de la tela de lana y precio de la tela de algodón, lo que implica usar, de algún modo, las relaciones $Pl = Ul{\cdot}Ml$ y $Pa = Ua{\cdot}Ma$. Han variado las diferencias de las progresiones aritméticas hasta conseguir que se verificara (incorrectamente) la relación $P = Pl + Pa$. Después han empleado nuevamente las relaciones $Pl = Ul{\cdot}Ml$ y $Pa = Ua{\cdot}Ma$ para hallar Ml y Ma, sin comprobar que se verificara $M = Ml + Ma$.

de cuántos… cuántos metros (mueve la ventana hasta el inicio)… Si…

187. Marcos: Si dos euros son un metro… A ver (sitúa la celda activa en J3)… Seis euros entre dos, tres metros.

202. Marcos: Y cuatro por siete, siete metros. Siete metros.

203. Jorge: Vale, siete metros.

204. (Jorge mueve la ventana hasta el inicio.)

205. Marcos: Tres de lana y…

206. (Marcos introduce [B3; 3].)

207. Jorge: Y tres.

208. Marcos: Y siete de algodón.

209. (Marcos introduce [B4; 7].)

6.5.4.6. El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema "Paz, Petra y su madre"

En los ítems 3 y 4, Marcos construye los nombres "Paz" y "Petra". Estas designaciones no incluyen modificadores que nos permitan aclarar si sirven para referir a las edades actuales o futuras de los protagonistas o si sencillamente representan a las variables edad de Paz y edad de Petra. El hecho de que en los ítems 5 y 6 introduzcan los valores seis y nueve, respectivamente, en las celdas B1 y B2, nos permite descartar que pretendan referirse a las cantidades Fa y Fe. Marcos (ítem 14) construye un nombre que, nuevamente, no podemos determinar si se refiere a Am o a la variable edad de la madre. Lo que sí que parece claro es que no lo hace a Fm, pues en el ítem 18, Marcos introduce el valor 35 en la celda contigua (ver Figura 98). Por último, Jorge (ítem 20) propone asignar una celda a la cantidad desconocida T y Marcos introduce el nombre "Años" en la celda A4 (ítem 21). Ni Marcos ni Jorge han hecho referencia a las cantidades

3. (Marcos introduce [A1; Paz] mientras Jorge lee el enunciado.)

4. (Marcos introduce [A2; Petra] mientras Jorge lee el enunciado.)

5. (Marcos introduce [B1; 6] mientras Jorge lee el enunciado.)

6. (Marcos introduce [B2; 9] mientras Jorge lee el enunciado.)

8. Marcos: ¿La madre no tiene nombre?

9. Jorge: No.

10. (Marcos introduce [A3; Madre].)

11. Marcos: Vale (Jorge mira a la hoja), ¿la madre cuánto ([…])?

12. Jorge: Eh… No, Ana ([…]). Sí que tiene nombre: es Ana.

13. Marcos: ¡Ah ([…]), Ana!

14. (Marcos modifica [A3; Ana].)

15. Jorge: Vale.

16. Marcos: ¿Treinta y cinco?

17. Jorge: Treinta ([…]) y cinco, sí.

18. (Marcos introduce [B3; 35].)

desconocidas *Fa*, *Fe* y *Fm*.

20. Jorge: Y ahora años transcurridos… o años… años.

21. (Marcos introduce [A4; Años].)

	A	B
1	Paz	6
2	Petra	9
3	Ana	35
4	Años	

Figura 98. Después del ítem 21.

Jorge (ítem 22) propone "hacer la serie" e introduce la fórmula de recurrencia =B4+1 en C4. Marcos (ítem 23) parece apuntar que habrá que hacer lo mismo con las otras filas. Jorge (ítems 25 y 26) genera una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 4 con origen en cero (B4), pero no la lleva hasta el extremo derecho de la hoja de cálculo. Nuevamente, el conocimiento de los posibles valores que pueden tomar las cantidades cuando se trata con las edades de las personas actúa como elemento de control en las decisiones, pues Jorge (final del ítem 26) se muestra conforme con que la secuencia sólo alcance el valor 66.

22. Jorge: Y aquí ahora hay que hacer la serie ¿no? Aquí (hace clic en C4) habrá que hacer uno (Jorge introduce [C4 =B4…; …] usando las flechas) más uno (Jorge introduce [C4 =B4+1; 1]).

23. Marcos: En todos también.

24. Jorge: Espera.

25. (Jorge estira C4.)

26. Jorge: Vamos a poner más o menos aquí (llega hasta [BP4 =BO4+1; 66]). Vale, sesenta y seis.

Jorge (ítems 32-37), con la complicidad de Marcos, colorea las filas 1, 2 y 3. De acuerdo con el uso que han hecho del coloreado en los problemas anteriores. Podemos concluir que de esta forma señalan las cantidades que desean determinar. Evidentemente, esto supone considerar ahora que las filas 1, 2 y 3 representan a las cantidades *Fa*, *Fe* y *Fm*, lo que nos invita (junto a la propuesta de Marcos en el ítem 23) a pensar que están considerando las variables edad de los protagonistas, en lugar de tratar con cantidades.

32. Jorge: Pues aquí ponemos aquí (colorea la fila 1).

33. Marcos: No, no, la madre también (Jorge colorea la fila 2) tiene que…

34. (Jorge selecciona la fila 3.)

35. Jorge: ¿Aquí?

36. Marcos: Sí.

37. (Jorge colorea la fila 3.)

38. Jorge: Vale.

	A	B	C	D
1	Paz	6		
2	Petra	9		
3	Ana	35		
4	Años		1	2

Figura 99. Después del ítem 38.

Entre los ítems 42 y 64, Jorge genera progresiones aritméticas de diferencia uno

42. (Jorge introduce [C1 =B1+1; 7] usando

en las filas 1, 2 y 3 que sirven para representar las líneas de vida de las protagonistas[88]. Podemos colegir que, de esta forma, se emplean las relaciones $Fa = Aa + T$, $Fe = Ae + T$ y $Fm = Am + T$, aunque sea mediante la generación de tablas de valores, aplicando de manera repetida el cálculo de la edad el año que viene sobre el dato conocido de la edad actual.

las flechas.)

43. Jorge: Y aquí … y aquí…

44. (Jorge introduce [C2 =B2+1; 10] usando las flechas.)

49. Marcos: Ésa (Jorge introduce [C3 =B3…; …] usando el ratón)… más uno (Jorge introduce [C3 =B3+1; 36]). Ahora.

50. Jorge: Ahora la alargamos.

51. (Jorge estira C1.)

53. (Jorge llega hasta [BX1 =BW1+1; 80].)

55. (Jorge estira C2.)

56. Jorge: Tienen que igualar los años de la madre, ¿no?

57. Marcos: Sí.

58. (Jorge llega hasta [BX2 =BW2+1; 83].)

62. (Jorge estira C3.)

64. (Jorge llega hasta [BZ3 =BY3+1; 111].)

Jorge (ítem 56) parece anticipar que la condición que se debe cumplir es la verificación de $Fm = Fa + Fe$ y Marcos (ítem 57) lo corrobora. En los ítems 65 y 66 se confirma esta intención, pero en lugar de construir una fórmula que haga la suma automáticamente, realizarán las comprobaciones mentalmente.

65. Jorge: Pues (desplaza lentamente la ventana hasta que se inicia en la columna AQ)… Aquí (señala con el dedo a la pantalla) son los años transcurridos, ¿no? Y tenemos que averiguar cuánto ([…] Marcos mueve la ventana hasta que se inicia en la columna E)… Cuántos años tienen que pasar para que entre las dos niñas igualen la edad de su madre (leyendo el enunciado). ([…] Marcos mueve la ventana hasta que se inicia en la columna C.) Pues tenemos que buscar (mueve la mano hacia la pantalla) dos números que sumados den los…

66. Marcos: Claro.

A partir del ítem 67, inician la búsqueda de los valores de las filas 1, 2 y 3 que verifiquen $Fm = Fa + Fe$. Poco a poco, van avanzando en las líneas de vida hasta que en el ítem 88, Marcos señala que la suma de los valores de las celdas V1 y V2 da lo mismo que el número presente en V3 (ver Figura 100) y Jorge (ítem 91) da el valor correcto de la cantidad T que era la pregunta del problema.

83. Marcos: Veinticuatro y veintisiete (se observa [T1; 24] y [T2; 27]), cincuenta y uno. No (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna Q). Veinticinco y veintiocho (se observa [U1; 25] y [U2; 28])…

84. Jorge: Tampoco.

85. Marcos: ¿Cincuenta y tres?

86. Jorge: Claro.

87. (Marcos mueve la ventana hasta que se inicia en la columna R.)

88. Marcos: Veintiséis y veintinueve, cincuenta y cinco (se observa [V1; 26], [V2; 29] y [V3; 55]).

[88] Señalemos que la longitud de las secuencias generadas se controla por el conocimiento que tiene Jorge de que las edades no suelen superar los 100 años.

89. Jorge: Aquí (selecciona la columna V y la colorea).

90. Marcos: Exacto.

91. Jorge: Pues tiene que pasar veinte años (se observa [V4; 20]).

	U	V	W
1	25	26	27
2	28	29	30
3	54	55	56
4	19	20	21

Figura 100. Después del ítem 89.

Una vez han terminado la sesión, el profesor pregunta para qué han generando las secuencias en las filas 1, 2 y 3 a lo que contestan que para que vayan pasando los años. Las respuestas de ambos (ítems 98-100) muestran que, efectivamente, de esta forma han procedido de lo conocido hacia lo desconocido, modelizando mediante las sucesiones el paso del tiempo.

92. Profesor: Una pregunta que me hago yo ahora a ver si me la podéis contestar. Esto de co… sumándole uno que habéis hecho (el profesor edita [C1 =B1+1; 7], [C2 =B2+1; 10] y [C3 =B3+1; 36]). Con esto, ¿qué pretendías hacer?

93. (Jorge mueve la ventana hasta el inicio.)

94. Jorge: Sumar los años.

95. Profesor: Sumar los años.

96. Marcos: Que vayan pasando…

97. Jorge: Claro.

98. Marcos: Claro (a la vez). Un años más ([…])…

99. Jorge: Un año más (repitiendo casi al mismo tiempo las palabras de Marcos)

100. Marcos: … en cada uno.

6.5.5. LA PAREJA PACO-LORENZO

La pareja Paco-Lorenzo estaba formada por los estudiantes 1 y 12. El individuo 1 perteneció a la pareja 7 durante la secuencia de enseñanza, mientras que el sujeto 12 formaba parte de la pareja 13. Al clasificar a la población, Paco (el estudiante 1) quedó integrado en la clase (L_2, Com_1, HC_1); mientras que Lorenzo (el estudiante 12) se incluyó en (L_2, Com_2 y HC_2).

El estudiante 1 no abordó ningún problema de manera algebraica en el cuestionario 1 (el que estaba formado por problemas que normalmente se resuelven de manera aritmética); pero en el cuestionario 2 (el que estaba formado por problemas que normalmente se resuelven de manera algebraica) resolvió siete de los ocho problemas de manera algebraica. Quedó por debajo de la media en la competencia a la hora de plantear problemas, logrando reducir el enunciado a un conjunto de relaciones suficientes en cinco de los quince problemas que formaban los cuestionarios 1 y 2. En dos de los siete problemas en los que empleó el SMSalg, usó de manera polisémica la letra x, concretamente en los problemas, del cuestionario 2, *Marta y María* y *La lotería*. Cometió dos errores al establecer el orden que deberían tener las cantidades dentro de una relación y dos errores de tipo de relación, al considerar que tres veces correspondía a sumar tres y el doble a sumar dos. También quedó por debajo de la media en el cuestionario que trataba de determinar la competencia en el uso de la hoja de cálculo, fundamentalmente como consecuencia de errar en todos los ítems en los que se proponía la generación de una secuencia numérica. Para construir las secuencias numéricas empleó fórmulas que no contenían referencias a celdas, sino únicamente números, lo que hacía imposible establecer una relación de recurrencia, y, además, no respetó las diferencias entre términos que se exigían.

Al igual que su compañero, el estudiante 12 no abordó ningún problema de manera algebraica en el cuestionario 1; pero en el cuestionario 2 resolvió algebraicamente siete de los ocho problemas posibles. Por lo que se refiere a su competencia a la hora de reducir el problema a relaciones entre cantidades, quedó por encima de la media con sólo cuatro planteamientos incorrectos sobre quince posibles. Sólo utilizó la *x* de manera polisémica en el problema *Marta y María*. Junto con el sujeto 18, podemos considerarlo el más competente en el uso de la hoja de cálculo, pues construyó todas las fórmulas y secuencias numéricas planteadas de manera correcta en el cuestionario 3.

6.5.5.1. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema "Adrián"

Lorenzo (ítems 10 y 21) construye los nombres "Edad de Adrián" y "Edad de Tania" siguiendo las indicaciones de Paco (ítems 7 y 16). Paco (ítem 24) apunta que la edad de Adrián son 15 años y la de Tania (ítem 28), 40. Lorenzo (ítems 26 y 30) introduce estos valores en las celdas B1 y B2 (ver Figura 101), respectivamente. Por los valores que asignan, podríamos concluir que los nombres que han introducido en A1 y A2 eran etiquetas de las cantidades *Aa* y *At*; pero la ausencia de referencia en los nombres al momento actual o futuro también puede apuntar a que se trataba de las variables edad de los protagonistas.

6. Lorenzo: Escribimos los datos.

7. Paco: Vale ([…]). Edad ([…]) de Adrián. ¿Escribes ([…]) tú o yo?

8. (Lorenzo introduce [A1; Edad de adr…].)

9. Paco: Yo (con ironía).

10. (Lorenzo introduce [A1; Edad de Adrián].)

13. Paco: Habérmelo dao (sic) a mí.

16. Paco: Edad… edad Tania.

21. ([…] Lorenzo modifica [A2; Edad de Tania].)

24. Paco: Vale ([…]). Edad de Adrián: quince años.

26. (Lorenzo introduce [B1; 15].)

28. Paco: Tania, cuarenta.

30. (Lorenzo introduce [B2; 40].)

	A	B
1	Edad de Adrián	15
2	Edad de Tania	40

Figura 101. Después del ítem 30.

Paco (ítems 32 y 36) parece proponer la generación de las líneas de vida de los protagonistas[89].

32. Paco: Ahora en uno se ponía más uno, ¿no?

33. Lorenzo: ¿Eh ([…])?

36. Paco: Lo de más uno y eso y se estiraba.

Lorenzo (ítem 37) no atiende al

37. Lorenzo: ¡Ah!, espera (sitúa la celda

[89] Durante la secuencia de enseñanza, Paco (sujeto 1) formaba parte de la pareja 7. Esta pareja (ver anexo D) usó, al menos, las líneas de vida para resolver el problema *Paz, Petra y su madre*. Decimos *al menos*, porque problemas técnicos impidieron recoger las producciones de los otros problemas de edades resueltos en la última sesión de la secuencia de enseñanza.

planteamiento de Paco y representa la cantidad desconocida *T*. El nombre que le construye (ítem 47) supone copiar la pregunta del problema y dar una descripción muy precisa del mismo (aunque con errores en la escritura), pero incómoda para seguir trabajando con él. De manera involuntaria, borra (ítem 48) el nombre que había introducido en A1.

activa en A3). Tenemos que ([…]) poner esto. Te pregunta… qué (señala con el dedo a la hoja) debe transcurrir.

47. (Lorenzo introduce [A3; Años que deben transcurrir para que la edad de Tania sea el soble que a edad de Adriám].)

48. (Al introducir lo anterior, y de manera involuntaria, borra A1 […])

En vista de la longitud del nombre, Lorenzo (ítems 53 y 54) lo segmenta escribiendo parte en A3 y parte en A4. Después, guía a Paco (ítems 64 y 65) para conseguir combinar las celdas B3 y B4 en una única celda (ver Figura 102). Para ello utiliza conocimientos del funcionamiento del programa que no habían sido ofrecidos en la secuencia de enseñanza.

52. Lorenzo: Ahora lo ponemos en dos líneas.

53. (Lorenzo modifica [A3; Años que deben transcurrir para que].)

54. (Lorenzo introduce [A4; la edad de Tania sea el soble que a edad de Adrián].)

55. Lorenzo: Es que ocupa demasiado.

63. (Paco selecciona el rango B3:B4.)

64. Lorenzo: La tercera (señala un botón de la barra de herramientas)… (Inaudible.)… El de la izquierda.

65. (Lorenzo asiente cuando Paco pulsa el botón "Unir celdas". Las celdas B3 y B4 se fusionan.)

◇	A	B	C
1		15	
2	Edad de Tania	40	
3	Años que deben transcurrir para que		
4	la edad de Tania sea el soble que la edad de Adrián		

Figura 102. Después del ítem 65.

Lorenzo (ítems 67 y 68) reescribe el nombre "Edad de Adrián" en la celda A1, que había eliminado anteriormente por error.

67. Lorenzo: Pri… ¿Adónde está esto (sitúa la celda activa en A1, donde anteriormente se leía "Edad de Adrián".)

68. (Lorenzo introduce [A1; Edad de Adrián].)

Para evitar posibles dificultades técnicas por el hecho de haber unido las celdas B3 y B4 (ver Figura 102), el profesor decide intervenir. En el ítem 71, separa las celdas combinadas y limita el nombre a parte de la frase que Lorenzo había escrito en la celda A3 (ver Figura 103).

71. Profesor: Esperad un momento. Esperad un momento que habéis tenido algún pequeño problema y, […] Vamos a deshacer (el profesor deshace) que es lo mejor que podremos hacer… […] Estabas aquí (vuelve a la situación del ítem 47) […] No sé ni arreglarlo yo (el profesor modifica [A3; Años que deben transcurrir]). ¡Hale, venga! Seguid.

◇	A	B
1	Edad de Adrián	15
2	Edad de Tania	40
3	Años que deben transcurrir	

Figura 103. Después del ítem 71.

Lorenzo (ítem 77) comienza a introducir

77. (Lorenzo introduce [B3 =…; …].)

una fórmula en B3, pero duda y fija la vista en el enunciado (ítem 78). Paco (ítem 79) plantea escribir la fórmula =B2+1. Posiblemente esté proponiendo la generación de la línea de vida de Tania en la fila 2, lo que supondría considerar representada la variable edad de Tania en dicha fila. Lorenzo (ítem 82) se opone al plan indicando "tiene que ser el doble" y Paco (ítem 83) trata de traducir a fórmula la propuesta de Lorenzo mediante "Be dos por dos". Lorenzo (ítem 85) corrige a Paco justificando que "también pasan los años para los dos". Parece que Lorenzo considera que las celdas B1 y B2 (y todas las celdas de las filas correspondientes) representan las edades actuales de los protagonistas y no concibe que se puedan multiplicar por dos, pues entiende que eso debería hacerse con las edades futuras para dar cuenta de la relación $Ft = V{\cdot}Fa$.

78. (Lorenzo coge la hoja y ambos miran a la hoja.)

79. Paco: Be dos más uno (Lorenzo mira a la pantalla). ¿O no…? No.

82. Lorenzo: No, más uno no, porque (Lorenzo mira a la hoja) tiene que ser el doble.

83. Paco: Be dos por dos… Sí.

85. Lorenzo: (Inaudible.)… (Lorenzo mira a la hoja.)… No (mira a Paco), porque también pasan los años para los dos.

86. Profesor: Habla más alto (Lorenzo mira a la hoja), Lorenzo. Que lo estabas haciendo muy bien al principio. ¿Qué le has dicho?

87. Lorenzo: Que también… que pasan… Que los años pasan para los dos.

89. Paco: Y claro él se queda por ahí aún con quince años.

Desde el ítem 86 hasta el 92, Lorenzo parece mantener centrada su atención en el enunciado. Rompe (ítem 92) el silencio y parece que va a proponer un plan; pero vuelve a fijarse en el enunciado durante mucho tiempo (ítem 94).

91. (Silencio de 12 segundos.)

92. Lorenzo: Pues (Paco mira a la hoja) entonces sería (señala un punto del enunciado)…

94. (Silencio de 24 segundos.)

En el ítem 104, Lorenzo verbaliza una ecuación (no totalmente audible) en el SMSalg, lo que supone haber empleado el MC en lugar del MHC[90]. Esto pone de manifiesto que el esbozo lógico-semiótico que ha llevado a cabo preveía el uso del SMSalg, y no del SMShc, para resolver el problema. Sin embargo, de momento, no podemos asegurar que esto sea debido a una elección azarosa o a una decisión influida por las dificultades que encuentra en el uso del SMShc. De hecho, también podría ser consecuencia de que durante

102. Lorenzo: Ya sé cómo se hace más o menos.

104. Lorenzo: Entonces si (señala un punto del enunciado) multiplicas el quince años de éste más equis ([…]), sabemos… (Inaudible.)… cuál es, es igual a los cuarenta más equis.

105. Paco: Es verdad.

[90] Durante la secuencia de enseñanza, Lorenzo (sujeto 12) formaba parte de la pareja 13. Esta pareja resolvió varios problemas (ver anexo D) utilizando la hoja de cálculo como si se tratara de un editor de texto. Así, introducían dentro de celdas las ecuaciones escritas en el lenguaje del álgebra con las limitaciones que imponía la imposibilidad de indicar la prioridad de una operación mediante la yuxtaposición vertical o diagonal de los operadores (ver problemas *Los yogures*, *Paz, Petra y su madre*, *Números 1*, *Otro reparto*, *Números 2* y *Las zapatillas deportivas* en el anexo D) que introducían en una celda. Evidentemente, esto suponía resolver los problemas usando el MC en lugar del MHC.

mucho tiempo ha permanecido atento al enunciado, por lo que no tenía información sobre qué cantidad se representaba en cada celda: algo necesario para poder elaborar un plan u ofrecer una ecuación en el SMShc.

No es posible determinar si la ecuación planteada es correcta, pues hay un fragmento inaudible, pero sí se observa la representación de la cantidad T mediante la letra x y la aparición de las cantidades Fa y Ft ligadas con T mediante las relaciones $Fa = Aa + T$ y $Ft = At + T$, respectivamente.

Paco (ítem 109) pregunta cómo trasladar la información que Lorenzo acaba de verbalizar a la hoja de cálculo. Lorenzo (ítem 110) dice "alargando no sé". Esto se puede interpretar como una muestra de la incapacidad para identificar las relaciones empleadas para plantear la ecuación y trasladarlas a fórmulas de la hoja de cálculo para resolverlo vía el MHC. En el ítem 112, Paco dice "¿Y la equis que la pones con la letra ([…])?", lo que pone de manifiesto que Paco es incapaz de establecer una correspondencia entre letra y celda de referencia[91] que, necesariamente, debe hacerse vía la cantidad que ambas representan. Podríamos pensar que esto es debido a que Paco, no ha realizado el esbozo lógico-semiótico del problema y se ha limitado a escuchar la propuesta de Lorenzo, con lo que no es plenamente consciente de la correspondencia entre la letra x y la cantidad T. Sin embargo, su pregunta refleja un desconocimiento más profundo, pues no duda sobre la celda que hará el papel de letra, sino sobre cómo debería representarse la letra en la hoja de cálculo. Es decir, no entiende la relación entre letra en el SMSalg y celda de referencia en el SMShc.

106. (Lorenzo mira al ordenador.)

109. Paco: ¿Cómo se hace eso?

110. Lorenzo: Es que alargando no sé. En ecuación, sí. Es que alargando no sé.

112. Paco: ¿Y la equis que la pones con la letra (señala al teclado)?

[91] A diferencia de la actuación de la pareja Candelaria-María en este mismo problema, las dificultades no podemos achacarlas a la ausencia de una celda que represente a la cantidad T (ver Figura 103).

Posiblemente, las palabras de Paco (ítem 112) lleven a Lorenzo a centrarse en buscar la correspondencia que debe dar a la letra en el SMShc y, sin que medie explicación, escribe (ítem 115) la función booleana[92] =2(B1+B3)=B2+B3 en la celda B5. Esta fórmula posiblemente sea una traducción de la ecuación verbalizada en el ítem 104. De hecho, es una expresión mal formada en el lenguaje de la hoja de cálculo, pues le falta el signo de multiplicación entre el número 2 y el paréntesis; algo permitido en el lenguaje del álgebra, pero no en el de la hoja de cálculo. Esto, junto a la explicación que ofrece en el ítem 116 ("La be tres como si ([…]) fuera equis"), pone de manifiesto que Lorenzo, tras unos instantes de reflexión[93], sí que ha sido capaz de establecer una equivalencia entre letra y celda de referencia. De esta forma, se omite la representación y construcción de nombre para las cantidades *Fa* y *Ft*, lo que se refleja en la necesidad de utilizar más de una operación en la fórmula que plasma la ecuación.

Lorenzo (ítem 119) explica a Paco que la fórmula generada producirá los valores VERDADERO y FALSO. Al introducir la fórmula, el interprete de la hoja de cálculo informa del error en la fórmula. Lorenzo (ítem 122) pulsa "Sí" en el cuadro de diálogo y el intérprete del programa corrige la fórmula. Al final, acaban introduciendo =2*(B1+B3)=B2+B3 en la celda B5 (ver Figura 104). La fórmula que introduce Lorenzo sería la forma en la que se representa una ecuación en el lenguaje de la hoja de cálculo. Como ya comentamos en el capítulo 4, omitimos su

114. (Lorenzo borra B3.)

115. (Lorenzo introduce [B5 =2(B1+B3)=B2+B3…; …] usando el ratón.)

116. Lorenzo: ¿Tú entiendes esto? La be tres como si ([…]) fuera equis (mientras habla, mueve el cursor sobre el primer be tres de la fórmula).

117. Paco: Sí, sí.

119. Lorenzo: Y aquí te saldrá verdadero o falso.

120. (Lorenzo introduce [B5 =2(B1+B3)=B2+B3; Error en la fórmula].)

121. Profesor: Yo… Te está diciendo que…

122. (Lorenzo pulsa "Sí" en el cuadro de diálogo que ha aparecido y *Excel* modifica [B5 =2*(B1+B3)=B2+B3; FALSO].)

---

[92] Durante la secuencia de enseñanza no se ofrecieron ejemplos de cómo construir estas funciones. Su uso supone plantear una ecuación en el lenguaje de la hoja de cálculo. La pareja 13 (Lorenzo formaba parte de esta pareja durante la secuencia de enseñanza) utilizó funciones booleanas como ecuaciones en los problemas *Amaya y Andrea* (un problema similar al que nos ocupa), *Juanjo, Raúl y Laura* y *Juan, su padre y su hijo* (ver anexo D).

[93] A partir del ítem 106, fija su vista en la pantalla del ordenador. Esto, posiblemente le permite realizar la conexión entre la letra x, la cantidad T y la celda B3.

uso de manera intenciona durante la secuencia de enseñaza.

◇	A	B
1	Edad de Adrián	15
2	Edad de Tania	40
3	Años que deben transcurrir	
4		
5		=2*(B1+B3)=B2+B3

Figura 104. Contenido de las celdas después del ítem 122.

Lorenzo (ítems 123-129) replica los pasos 3 y 4 y genera una secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia. En ningún momento, señalan, de manera explícita, qué cantidad asume este papel. Sin embargo, Lorenzo (ítems 123 y 126) da un estatus especial a la fila 3 (y a la celda B3 que representa a la cantidad *T*) al generar una progresión aritmética de diferencia uno. Para ello decide recurrir a la técnica de seleccionar los dos primeros elementos de la serie.

123. Lorenzo: Aquí vamos alargando.

124. (Lorenzo introduce [B3; 1].)

125. (Lorenzo selecciona el rango B1:B5 y estira hasta [C1; 15], [C2; 40], [C3; 1] y [C5 =2*(C1+C3)=C2+C3; FALSO].)

126. (Lorenzo modifica [C3; 2].)

127. (Lorenzo estira el rango B1:C5.)

128. Lorenzo: Vamos alargando hasta que salga verdadero.

129. (Lorenzo estira hasta [IV1; 15], [IV2; 40], [IV3; 159] y [IV5 =2*(IV1+IV3)=IV2+IV3; FALSO].)

Atendiendo a lo que ha dicho en el ítem 128 (“Vamos alargando hasta que salga verdadero”), Lorenzo (ítem 130) mueve la ventana mientras se muestra en las celdas de la fila 5 el valor FALSO. Lorenzo se detiene (ítem 133) al observar “#########” en K5 y explica a Paco (ítem 135) que eso es debido a que no cabe el valor que se debe mostrar (algo que tampoco se había enseñado en clase). Lorenzo (ítem 136) ajusta la anchura de la columna y se muestra VERDADERO (ver Figura 105). Dan por concluida la resolución del problema y Lorenzo (ítem 139) indica que tienen que pasar diez años.

130. Lorenzo: Vamos a mirar… (Inaudible.)… (Lorenzo mueve la ventana hacia la izquierda.) Tú, si ves alguno, avisas.

133. (Lorenzo detiene el movimiento cuando la ventana se inicia en la columna F. Se observa ######### en K5.)

134. Paco: ¡Uy!

135. Lorenzo: Es que no cabe aquí.

136. (Lorenzo ajusta la anchura de la columna K. En K5 aparece VERDADERO.)

137. Lorenzo: Entonces es (sitúa la celda activa en [K3; 10])…

138. Paco: ¡Qué máquina!

139. Lorenzo: Diez tiene que pasar, ¿no ([…])?

140. Paco: Sí.

En definitiva, reducen[94] el problema a las relaciones $Ft = V{\cdot}Fa$, $Ft = At + T$ y $Fa = Aa + T$ y lo resuelven mediante el MHC construyendo una ecuación expresada en el lenguaje de la hoja de cálculo. Sin embargo, para identificar las relaciones necesitan realizar un esbozo lógico-

[94] Utilizaremos plural, porque nos estamos refiriendo a la actuación de la pareja, aunque Paco prácticamente no participa en la resolución.

semiótico que prevé el uso del SMSalg.

◇	J	K	L
1	15	15	15
2	40	40	40
3	9	10	11
4			
5	FALSO	VERDADERO	FALSO

Figura 105. Después del ítem 136.

6.5.5.2. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema "Las ovejas"

Mientras Paco lee el enunciado, Lorenzo traslada a la hoja de cálculo parte de la información que oye y construye nombres para la cantidad *N* ("Ovejas", ítem 6) y para la cantidad *C* ("Corrales", ítem 7), que sólo es necesaria (y tiene, por tanto, utilidad) en las lecturas aritméticas de este problema. En los ítems 10 y 11, se observa una pausa en la que posiblemente releen el enunciado de manera individual. Lorenzo (ítem 15) introduce el número 180 en la celda B1, asignando valor a la cantidad conocida *N*. A continuación, Paco (ítem 19) apunta que el número de corrales es dos y Lorenzo (ítem 21) introduce el número 2 en B2. En el ítem 23, Paco indica a Lorenzo que introduzca el nombre "Corral uno" y éste (ítem 25) le replica que le acaba de decir que eran dos corrales. Fijan (ítem 26) la atención en el enunciado y Paco (ítem 27) concreta su propuesta que supone asignar la etiqueta "Corral uno" a la cantidad *Cg*, pues dice "Ahora, corral uno. Treinta ovejas más que en el otro" (ítem 27). El nombre que Paco asigna a la cantidad *Cg* confunde a Lorenzo, pues cree entender que se le está diciendo que sólo hay un corral. De hecho, Lorenzo (ítem 30) borra el número dos que había asignado a la cantidad *C*. Paco (ítem 32) insiste en que son dos corrales y Lorenzo (ítem 33) vuelve a introducir el valor[95], mientras le dice a Paco que le está confundiendo. Paco (ítem 35) le aclara que debe introducir el nombre "corral número uno" y Lorenzo

4. (Paco lee el enunciado.)

6. (Lorenzo introduce [A1; Ovejas], mientras Paco lee.)

7. (Lorenzo introduce [A2; Corrales], mientras Paco lee.)

10. (Ambos miran a la hoja.)

11. (Silencio de 5 segundos.)

12. Paco: Pues pon total…

15. (Lorenzo introduce [B1; 180].)

17. Paco: Total ovejas.

19. Paco: Corrales, dos.

21. (Lorenzo introduce [B2; 2].)

23. Paco: Corral uno.

25. Lorenzo: ¿No ([…]) habías dicho que eran dos?

26. (Ambos miran a la hoja.)

27. Paco: Ahora, corral uno. Treinta ovejas más que en el otro.

28. Lorenzo: Sí, pero (señala con el dedo a la hoja)…

30. (Lorenzo borra B2.)

31. Lorenzo: ¡Ah!, claro… Ya me estoy liando.

32. Paco: Ahora, abajo. Claro. ¡Dos ([…]), dos! Dos ([…]) corrales.

33. (Lorenzo introduce [B2; 2].)

34. Lorenzo: Me ([…]) estás liando, ya.

35. Paco: Y ahora pones ([…]) corral número uno (mueve la mano hacia el teclado con la intención de escribir; pero no lo hace), corral número… ¿Vale? Corral ([…]) uno.

36. (Lorenzo introduce [A3; Corral 1].)

[95] Lorenzo asigna celda a la cantidad conocida *C*, pero siempre se refiere a ella por su valor cuando la utiliza para construir fórmulas.

(ítem 36) introduce “Corral 1” en la celda A3. En el ítem 39, Lorenzo toma la hoja y parece leer el enunciado. A propuesta de Paco (ítem 44), Lorenzo (ítem 47) introduce el nombre “Corral 2”, etiqueta de la cantidad *Cp*, en la celda A4 (ver Figura 106).

En definitiva, construyen nombres para las cantidades desconocidas *Cp* y *Cg* diferenciándolos mediante un código numérico que no hace referencia a si representan a los corrales que tienen más o menos ovejas (aunque Paco verbaliza treinta más junto a la etiqueta “Corral 1”). Dan nombre a la cantidad conocida *C*, pero la cantidad *Mgp* no recibe una asignación de celda, como es habitual para las cantidades que sirven para comparar otras dos desconocidas.

38. Paco: Treinta ovejas más que en el otro (leyendo).

39. Lorenzo: Dame (solicitando la hoja).

41. (Lorenzo mira a la hoja.)

42. Paco: Entonces…

43. Lorenzo: Entonces…

44. Paco: … tendrá treinta. Bueno, pon bajo (sic) corral dos.

45. Lorenzo: Que… que… ¡Ah!, bueno, es verdad.

47. (Lorenzo introduce [A4; Corral 2].)

◇	A	B
1	Ovejas	180
2	Corrales	2
3	Corral 1	
4	Corral 2	

Figura 106. Después del ítem 47.

Lorenzo (ítem 52) verbaliza la relación $Cg = Mgp + Cp$ y, a continuación, la expresa (ítem 60) como la fórmula =B4+30 en la celda B3 (ver Figura 107). La referencia a la posición de la celda argumento, que representa a la cantidad *Cp*, la realiza mediante el ratón; mientras que al aludir verbalmente a la cantidad utiliza el nombre que le han asignado. La construcción de esta fórmula supone operar con lo desconocido, un rasgo típicamente algebraico.

52. Lorenzo: Entonces ([…]) en el corral uno ([…]), treinta más que en el dos.

54. Paco: … Treinta más que… Vale.

57. Lorenzo: Entonces, sería…

58. Paco: Es igual.

59. (Lorenzo introduce [B3 =…; …].)

60. Lorenzo: … el corral uno igual (introduce [B3 =B4…; …]) al corral dos (Lorenzo empieza a introducir [B3 =B4…; …]) más treinta (introduce [B3 =B4+30; 30] usando el ratón.)

◇	A	B
1	Ovejas	180
2	Corrales	2
3	Corral 1	30
4	Corral 2	

Figura 107. Después del ítem 60.

Paco (ítem 64) parece proponer la generación de una progresión aritmética con origen en el valor (provisional) presente en la celda B3. Las intenciones

64. Paco: Y ahí (Lorenzo […] sitúa la celda activa en B4) be… be tres más uno.

65. Lorenzo: ¿Eh ([…])?

que le guían no son muy claras[96] y son cortadas de raíz por Lorenzo (ítem 67) que contesta "Éste se puede hacer creo que sin estirar". La respuesta de Lorenzo parece indicar que se decanta por resolver el problema aritméticamente[97], lo que contrasta con que haya utilizado una cantidad desconocida para calcular otra cantidad desconocida en el ítem 60.

66. Paco: Ahora sería lo de estirar ([…]), ¿no?

67. Lorenzo: No sé, creo que no. Éste se puede hacer creo que sin estirar.

Lorenzo (ítem 73) comienza a introducir un fórmula en la celda B4 que va modificando en los ítems 74 y 75. Posiblemente, pretendía construir la fórmula =(B1-B3)/2 (así lo hará en el ítem 93), pero, por error, introduce (ítem 75) =(B1-B3)/. La ausencia de denominador provoca que el intérprete del programa haga la propuesta de corrección =(B1-B3) y Lorenzo, sin reflexionar, la acepta (ítem 76). Esto supone la generación de una referencia circular, pues la fórmula presente en B4 tiene como argumento la celda B3 y viceversa. El intérprete del programa avisa de la situación mediante un cuadro de diálogo y Lorenzo (ítem 77) pulsa el botón "Aceptar", lo que implica la aparición del asistente para resolver referencias circulares al que le prestan poca atención. La aceptación de una referencia circular provoca que el interprete de la hoja de cálculo aísle la celda que contiene la fórmula del resto de celdas y esto tendrá consecuencias en los episodios siguientes.

73. (Lorenzo introduce [B4 =B1/2…; …].)

74. (Lorenzo modifica [B4 =(B1+B3)/2-B3…; …].)

75. (Lorenzo, por error, introduce [B4 =(B1-B3)/; "Error en la fórmula introducida"] usando el ratón.)

76. (Lorenzo pulsa "Sí" en el cuadro de diálogo y *Excel* modifica la fórmula [B4 =(B1-B3); "Referencia circular"].)

77. (Lorenzo pulsa "Aceptar" en el cuadro de diálogo con lo que *Excel* resuelve la referencia circular automáticamente. *Excel* modifica el valor de salida [B4 =(B1-B3); 0].)

El profesor (ítem 78) intenta explicar el significado de la referencia circular a Lorenzo. Mientras lo hace, éste (ítem 79) repasa la fórmula que ha introducido y elimina (ítem 82) el paréntesis innecesario sin que ello suponga deshacerse de la referencia circular. Lorenzo actúa

78. Profesor: Te ha… Te ha dado un error. ¿Sabes qué error te ha dado? Es…Ese error, ¿sabes lo que significa?

79. (Mientras el profesor habla, Lorenzo abre y cierra ventanas asociadas a la referencia circular.)

80. Lorenzo: No sé… Pues un error.

[96] Las interpretaciones posibles irían desde considerar que propone una acción ligada al MHC hasta suponer que pretende llevar a cabo una estrategia similar a la utilizada por la pareja Alberto-Lluís en este mismo problema. La escasa descripción del plan aconseja no extraer conclusiones aventuradas.

[97] En el cuestionario 1, Lorenzo resolvió correctamente el problema *Las naranjas*, isomorfo al problema *Las ovejas*, de manera aritmética.

precipitadamente sin atender a las sugerencias del profesor y acaba borrando (ítem 85) la fórmula presente en B4.

81. Profesor: Es… eh…

82. (Lorenzo modifica [B4 =B1-B3; 0].)

83. Lorenzo: ¡Ah!, sí, que tiene que… (Inaudible.)

84. Profesor: Significa referencia circular. Es decir, que…

85. (Lorenzo borra B4.)

En vista de las dificultades, Paco (ítem 88 y 90) vuelve a plantear la generación de una progresión aritmética de diferencia uno en la fila 3. Lorenzo (ítem 91) no atiende a la propuesta de Paco y plantea deshacerse de la referencia circular sustituyendo B3 por 30 (ver Figura 107). Esto nos indica que posiblemente, Lorenzo ha considerado que la celda B3 representaba la cantidad *Mgp* y no la cantidad *Cg*, como inicialmente habían supuesto, confundido por el valor provisional presente en B3 (asociado a la cantidad *Cg* y fruto de la fórmula =B4+30) que era el mismo que el de la cantidad conocida *Mgp*. Sin embargo, Lorenzo (ítem 95) vuelve a hacer referencia a la celda B3 en la fórmula =(B1-B3)/2 que introduce en B4 (ver Figura 108) y obtiene como resultado un cero que no concuerda con las operaciones propuestas y los valores presentes en las celdas. Esto es consecuencia de aceptar la existencia de una referencia circular y del trato que da la hoja de cálculo a las celdas que se ven afectadas por ellas [98].

88. Paco: ¿Probamos lo de estirar?

89. Lorenzo: Pues en vez de poner be tres en la celda…

90. Paco: Be tres… Be tres más uno.

91. Lorenzo: … ponemos treinta y ya está (mira a Paco), directamente.

93. (Lorenzo introduce [B4 =(B1-B3)/2; "Referencia circular"] usando el ratón.)

94. Paco: ¡Uh!

95. (Lorenzo pulsa "Aceptar" y *Excel* calcula [B4 =(B1-B3)/2; 0].)

96. (Lorenzo hace clic en B4, después en B3 y, por último, vuelve a hacer clic en B4.)

97. Lorenzo: ¡Ah!, no sé.

◇	A	B
1	Ovejas	180
2	Corrales	2
3	Corral 1	=B4+30
4	Corral 2	=(B1-B3)/2

Figura 108. Contenido de las celdas después del ítem 97.

Mientras el profesor intenta ayudarle con la referencia circular, Lorenzo (ítem 99) sustituye B3 por 30, lo que conduce a expresar la fórmula =(B1-30)/2 en la celda

99. Profesor: Espera. Espera un momento. Espera un momento (Lorenzo modifica [B4 =(B1-30/2…;…]). Espera un momento. Espera un momento… Espera un momento […]

[98] Las fórmulas que utilizan como argumento celdas que han creado una referencia generan siempre un valor nulo.

B4, calculando el valor definitivo de la cantidad *Cp*. Esta fórmula materializa las relaciones correctas *N* = *Nqe* + *Mgp* y *Nqe* =*C*·*Cp* y el valor que produce sirve para clausurar la operación suspendida que expresaba la fórmula presente en B3, que, a su vez, plasmaba la relación *Cg* = *Mgp* + *Cp*. Lorenzo (ítem 110) da por concluida la resolución y, además de ofrecer respuesta a la pregunta del problema, realiza una suma mental para comprobar que se verifica la relación *N* = *Cg* + *Cp* que ya había utilizado para alcanzar la solución.

En definitiva, han realizado una lectura aritmética del problema que lo ha reducido a las relaciones necesarias *N* = *Nqe* + *Mgp*, *Nqe* =*C*·*Cp* y *Cg* = *Mgp* + *Cp* (la que hemos llamado lectura B, ver apartado 6.4.2.). Aunque la lectura es aritmética, se construyen fórmulas en las que se opera con lo desconocido. Quizá sea consecuencia de que Lorenzo se ha limitado a escribir las fórmulas a medida que iba encontrando las relaciones en el problema o de que tras iniciar el MHC decidió resolverlo aritméticamente sin desechar los trozos que ya había empleado. En cualquier caso, su actuación aprovecha el recalculado automático de las fórmulas que ofrece la hoja de cálculo.

104. (Lorenzo modifica [B4 =(B1-30)/2; 75].)

105. Paco: Setenta…

106. Lorenzo: Pues ya está.

110. Lorenzo: El corral dos (señala con el dedo a la pantalla), setenta y cinco (sitúa la celda activa en B3). El corral, uno, ciento cinco. La diferencia es de treinta (sitúa la celda activa en B4 y después en B3). Y la suma entre los dos ciento ochenta (mueve la celda activa a B1).

112. Paco: Es verdad. Pues ya está, ¿no?

114. Lorenzo: Sin estirar.

6.5.5.3. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema "Las actividades deportivas"

Tras la lectura se construyen nombres para las desconocidas *F*, *N*, *B* y *R* y para la cantidad conocida *T* (ver Figura 109). No dan nombre ni asignan celda a las cantidades conocidas *Vnf*, *Mbf* y *Mrb* que sirven para relacionar las cantidades desconocidas anteriores.

9. Lorenzo: Total de personas.

11. Paco: Acti… No. Actividades deportivas, pon.

13. (Lorenzo introduce [A1; Total de personas].)

20. Paco: Número de personas…

23. Lorenzo: Mil trescientas setenta y cinco.

24. Paco: … mil trescientas setenta y cinco. (Al mismo tiempo que su compañero.)

30. (Lorenzo modifica [B1; 1375].)

33. Paco: Fútbol. Personas fútbol.

35. Lorenzo: Personas que hay en fútbol.

38. (Lorenzo introduce [A2; Personas en

fútbol].)

40. Paco: Personas en…

43. Paco: En natación.

45. (Lorenzo introduce [A3; Personas de Natación].)

47. Paco: Baloncesto.

50. Paco: Y rugby ([…])… Rugbie (sic).

51. (Lorenzo introduce [A4; Personas en baloncesto].)

52. (Lorenzo introduce [A5; Personas en rugby].)

	A	B
1	Total de personas	1375
2	Personas en fútbol	
3	Personas de natación	
4	Personas en baloncesto	
5	Personas en rugby	

Figura 109. Después del ítem 52.

Paco (ítem 59) identifica la relación $F = N \cdot Vnf$ en el enunciado y Lorenzo (ítem 62) precisa entre qué cantidades se establece la comparación. Paco (ítem 63) verbaliza la fórmula que expresaría la relación, refiriéndose a las cantidades que participan por su nombre; pero propone una operación suma en lugar de un producto[99]. Lorenzo (ítem 65) introduce la fórmula =B3*2 en la celda B3, sin atender a la propuesta de Paco.

58. (Ambos miran a la hoja.)

59. Paco: Dos veces más que en natación.

62. Lorenzo: En fútbol dos veces más que en natación.

63. Paco: Es igual (Lorenzo introduce [B2 =…; …]), dos más…

64. (Lorenzo introduce [B2 =B3*…; …].)

65. Lorenzo: El fútbol es igual a dos (introduce [B2 =B3*2; 0] usando el ratón) veces la natación.

Paco (ítem 68) identifica la relación $B = F + Mbf$ y Lorenzo (ítems 72 y 74) la traduce, correctamente, a la fórmula =B2+43 sin acompañar la escritura de verbalización.

68. Paco: Y en baloncesto cuarenta y tres más ([…]) que en fútbol.

72. (Lorenzo introduce [B4 =B2+…; …].)

73. Paco: Cuarenta y tres más…

74. (Lorenzo introduce [B4 =B2+43; 43] usando el ratón.)

Paco (ítem 82) verbaliza la relación $R = B + Mrb$ y Lorenzo (ítems 81 y 83) la materializa introduciendo la fórmula =B4+29 en B5.

75. (Ambos miran a la hoja.)

76. Lorenzo: ¿Y de rugby no te dice nada?

81. (Lorenzo introduce [B5 =B4…; …].)

82. Paco: En rugby veintinueve más que en baloncesto.

83. (Lorenzo introduce [B5 =B4+29; 72] usando el ratón.)

[99] Paco (sujeto 1) había cometido este mismo error al expresar *el doble que* y *tres veces* como las sumas *dos más* y *tres más*, respectivamente, en el problema *Marta y María* del cuestionario 2 (ver anexo F).

	A	B
1	Total de personas	1375
2	Personas en fútbol	=B3*2
3	Personas de natación	
4	Personas en baloncesto	=B2+43
5	Personas en rugby	=B4+29

Figura 110. Contenido de las celdas después del ítem 83.

Paco (ítem 87) centra la atención en "seleccionar las celdas que sean iguales". Lorenzo (ítems 93 y 96) le indica que no es necesario seleccionarlas (en realidad quiere decir que no es necesario colorearlas). Sin embargo, Paco (ítem 97) propone seguir el ritual y señala que deben ser iguales las celdas que representan a la cantidad T, asignando una a su valor conocido y otra a la suma de las cantidades F, N, B y R. Con este fin, Lorenzo (ítem 102) introduce el nombre "Suma de todas" en la celda A7 y, a continuación, Paco (ítems 106 y 107) colorea las filas 7 y 1, dando respuesta explícita a la exigencia del paso 4 del MHC.

87. Paco: Muy bien. Ahora viene natación ([…]). ¿No hay que hacer lo de seleccionar las celdas que sean iguales ([…])? Sí, ¿verdad?

93. Lorenzo: Lo de seleccionar era para aclararnos mejor, pero aquí ya sabemos que es esto.

94. Profesor: ¿Qué has dicho?

96. Lorenzo: Que lo de pintarlas de colores era para aclararnos mejor pero ya sabemos que…

97. Paco: Da igual. Vamos a hacerlo que me hace ilusión ([…]). Tiene que ser igual a esto (señala la fila 1)… y la suma (sitúa la celda activa en A7) de todas, ¿no?

98. Lorenzo: Sí.

99. Paco: Pon: suma de todas las personas.

100. (Lorenzo introduce [A7; SUmas…].)

101. Paco: ¡Uh!

102. (Lorenzo modifica [A7; Suma de todas].)

106. (Paco colorea la fila 7.)

107. (Paco colorea la fila 1.)

Lorenzo (ítem 110) introduce la fórmula =SUMA(B2:B5) en la celda B7, plasmando la relación $T = F + B + N + R$. Al final del ítem 110, propone *alargar* al tiempo que introduce en B3 el valor uno (ver Figura 111), lo que podemos interpretar como una alusión implícita a que ésta será la celda de referencia.

110. Lorenzo: Y ahora ponemos (Lorenzo introduce [B7 =SUMA(…; …])… la suma de todas (Lorenzo introduce [B7 =SUMA(B2:B5); 115] usando el ratón). Que de momento da eso… doscientos setenta y cinco, que no es… ¡Ay!, ciento quince, que no es (introduce [B3; 1]). Alargar… ¿O te hace ilusión ([…])?

	A	B
1	Total de personas	1375
2	Personas en fútbol	2
3	Personas de natación	1
4	Personas en baloncesto	45
5	Personas en rugby	74
6		
7	Suma de todas	122

Figura 111. Después del ítem 110.

Las acciones que lleva a cabo Lorenzo en el ítem 115 sirven para generar una progresión aritmética de diferencia uno en

115. (Lorenzo selecciona el rango B1:B5 y lo estira hasta [C1; 1376], [C2 =C3*2; 4], [C3; 2]; [C4 =C2+43; 47] y [C5 =C4+29; 76].)

la fila 3 al mismo tiempo que replica las fórmulas presentes en la columna B. Así, estira el rango B1:B5 hasta C1:C5, de forma que todas las fórmulas se copian correctamente, mientras que los números presentes en C1 y C3 aumentan una unidad respecto a los presentes en B1 y B3, en virtud de un automatismo de la hoja de cálculo[100]. Lorenzo (ítem 118) sustituye 1376 por 1375 en la celda C1, para lograr que en la fila 1 se genere una secuencia de valores iguales. Sin embargo, introduce (ítem 117) el número dos en C2 haciendo desaparecer la fórmula =C3*2. Quizá la confunde con C3, donde debería haber y hay un dos.

Lorenzo (ítem 124) arrastra el rango B1:C7 alcanzando la columna BH (ítem 126) e IC (ítem 129). En la fila 2 se muestra alternativamente el resultado multiplicar por dos el número presente en la fila 3 y el número dos; mientras que en la fila 7 aparecen sucesivamente el resultado de sumar los números presentes en las filas 2, 3, 4 y 5 y una celda vacía (ver Figura 112). Esto es consecuencia de haber modificado (ítem 117), erróneamente, el valor de C2 y de no haber copiado la fórmula presente en B7 en la celda C7. Ni Lorenzo ni Paco muestran sorpresa ante la alternancia de valores en las filas 2 y 7.

116. Lorenzo: Y aquí te sale ya esto.

117. (Lorenzo modifica [C2; 2].)

118. (Lorenzo modifica [C1; 1375].)

124. (Lorenzo estira el rango B1:C7.)

125. Paco: ¡Yuju!

126. (Lorenzo se detiene en [BH1; 1375], [BH2 =BH3*2; 118], [BH3; 59]; [BH4 =BH2+43; 161], [BH5 =BH4+29; 190] y [BH7 =SUMA(BH2:BH5); 528]. La fila 2 presenta alternativamente un valor constante 2 y el resultado de aplicar la fórmula que en B2 era =B3*2. La fila 7 presenta alternativamente una celda vacía y el resultado de aplicar la fórmula que en B7 era =SUMA(B2:B5).)

127. (Lorenzo vuelve a estirar, sin perder el rango seleccionado.)

128. Lorenzo: Así hasta casi el final.

129. (Lorenzo llega hasta [IC1; 1375], [IC2 =IC3*2; 472], [IC3; 236]; [IC4 =IC2+43; 515], [IC5 =IC4+29; 544] y [IC7 =SUMA(IC2:IC5); 1767]. La fila 2 presenta alternativamente un valor constante 2 y el resultado de aplicar la fórmula que en B2 era =B3*2. La fila 7 presenta alternativamente una celda vacía y el resultado de aplicar la fórmula que en B7 era =SUMA(B2:B5).)

◇	FX	FY	FZ	GA
1	1375	1375	1375	1375
2	2	360	2	364
3	179	180	181	182
4	45	403	45	407
5	74	432	74	436
6				
7		1375		1389

Figura 112. Después del ítem 141.

Lorenzo (ítem 138) inicia la búsqueda de la coincidencia de valores entre las celdas de las columnas 1 y 7. Continúan sin

138. (Lorenzo mueve la ventana hacia la derecha hasta que se inicia en la columna FU.)

139. Lorenzo: Y… ¿y cuál había que adivinar?

[100] Esto es debido a un automatismo propio de la hoja de cálculo *Excel 2003*. Cuando se estira de una única celda que contienen un número, se genera una secuencia de valores constantes; pero cuando se estira de un rango de celdas en las que hay fórmulas y números, se generan progresiones aritméticas de diferencia uno a partir de las celdas donde hay números.

prestar atención a la alternancia de valores de las filas 2 y 7; pero la fortuna les sonríe, pues se alcanza la coincidencia de valores en una columna que contiene fórmula en ambas filas (ver Figura 112). Lorenzo (ítem 141) muestra a Paco la coincidencia de valores en las celdas FY7 y FY1 y se limita a verbalizar (ítems 143 y 154) el valor de *N* como respuesta a la pregunta del problema; aunque al introducir (ítem 149) 180 en B3 se observan en las celdas B2, B4 y B5 los valores de *F*, *B* y *R* (ver Figura 113).

En definitiva, realizan una lectura algebraica del problema que lo reduce a las relaciones $T = F + B + N + R$, $F = N{\cdot}Vnf$, $B = F + Mbf$ y $R = B + Mrb$ y lo resuelven mediante el MHC.

Ésta (hace clic en [FY3; 180]) es natación…

140. Paco: Te has pasao (sic), te has pasao (sic).

141. Lorenzo: Es ésta (hace clic en [FY7; 1375]). No ves que es (hace clic en [FY1; 1375]) igual.

142. Paco: Es verdad.

143. Lorenzo: Tenemos que averiguar ésta (hace clic en [FY3; 180]): la natación ([…]).

144. Paco: Sí.

146. Lorenzo: Pues, ciento ochenta.

148. Lorenzo: ¡Bien!

149. (Lorenzo modifica [B3; 180] y se produce la igualdad de valores en B1 y B7.)

152. Lorenzo: Pues ya está.

153. Profesor: ¿Ya está? ¿Cuánto daba?

154. Lorenzo: Ciento ochenta… la natación.

	A	B
1	Total de personas	1375
2	Personas en fútbol	360
3	Personas de natación	180
4	Personas en baloncesto	403
5	Personas en rugby	432
6		
7	Suma de todas	1375

Figura 113. Después del ítem 149.

6.5.5.4. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema "Los tres amigos"

Lorenzo (ítem 9) construye nombre y asigna implícitamente celda a la cantidad conocida *T*. También asigna nombre y celda (ver Figura 114) a las cantidades desconocidas *L* (ítem 14), *J* (ítem 17) y *R* (ítem 19). No ubican ni dan nombre a las cantidades conocidas *Vlr* y *Mjl* que sirven para comparar las cantidades desconocidas.

8. Lorenzo: Lo que ganan en total.

9. (Lorenzo introduce [A1; Lo que ganan en total].)

12. Paco: Luis.

14. (Lorenzo introduce [A2; Luis].)

17. (Lorenzo introduce [A3; Juan].)

19. (Lorenzo introduce [A4; Roberto].)

25. Paco: Total ([…])… novecientos sesenta.

27. (Lorenzo introduce [B1; 960].)

	A	B
1	Lo que ganan en total	960
2	Luis	
3	Juan	
4	Roberto	

Figura 114. Después del ítem 27.

Paco (ítem 29) parece identificar la relación $J = L + Mjl$ en el enunciado, aunque omite el sujeto. Lorenzo la verbaliza mientras introduce la fórmula

29. Paco: Luis ([…]), veinticuatro euros me… menos que Juan ([…]). Es igual ([…]) a veinticuatro menos Juan. Igual a…

30. Lorenzo: Entonces (introduce [B2 =…;

=B3-24 en B2. La referencia a la cantidad *J* en la fórmula se hace mediante la posición de la celda donde se ha representado y ésta se introduce mediante el ratón.

…]) Luis es igual (introduce [B2 =B3…; …]) a Juan menos veinticuatro (introduce [B2 =B3-24; -24] usando el ratón).

Fijan (ítems 31 y 33) la vista en el enunciado y permanecen en silencio durante 12 segundos. En el ítem 36, Lorenzo expresa la relación incorrecta *R = J·Vlr*. Parece que Lorenzo realiza un lectura lineal del fragmento de enunciado "Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto" suprimiendo la conjunción para considerar *Juan la décima parte de lo que ganó Roberto*. Lorenzo (ítem 38) reelabora la proposición y acaba afirmando "O sea lo de Juan ([…]) entre diez", lo que implicaría cometer un error de inversión sobre la relación incorrecta *R = J·Vlr* expresada anteriormente (ítem 36 y primera parte del ítem 38). Sin embargo, introduce la fórmula =B4/10 en la celda B3 que no supone una inversión en la relación incorrecta *R = J·Vlr*.

31. (Lorenzo mira a la hoja.)

32. Lorenzo: Y…

33. (Paco mira a la hoja.)

34. (Silencio de 12 segundos.)

36. Lorenzo: Y Juan lo que ganó Roberto entre diez ([…]). ¿No ([…])? La décima parte. (Casi inaudible.)

37. Profesor: A ver: repite, Lorenzo.

38. Lorenzo: Que lo que gana Juan (señala al enunciado con el dedo) es la décima parte de lo que gana Roberto, ¿no ([…])? Entre diez ([…])… O sea lo de Juan ([…]) entre diez ([…])… ¿Una décima parte no es entre diez?

39. Paco: Sí.

40. Lorenzo: Eso.

42. (Lorenzo introduce [B3 =B4/10; 0] usando el ratón.)

Lorenzo (ítem 43) propone implícitamente la duplicación de la cantidad *T* y la asignación de una fórmula que sume el dinero ganado por los protagonistas, pues así lo habían hecho en el problema anterior. Paco (ítem 45) sugiere el nombre "Suma de todos" para la segunda aparición de la cantidad *T*, pero Lorenzo (ítem 46) le asigna el nombre "Total" y representa la relación *T = L + J + R* mediante la introducción (ítems 49-51) de la fórmula =SUMA(B2:B4) en la celda B6. Vuelve a utilizar la función SUMA no utilizada por el profesor durante la secuencia de enseñanza. Se produce un valor negativo en B6 y Lorenzo (ítem 51) lo justifica diciendo que se trata de un valor provisional. Paco (ítems 57 y 60) colorea las filas 1 y 6 (ver Figura 115), lo que implica identificarlas como aquéllas en las que se debe verificar la igualdad de valores.

43. Lorenzo: Y ahora lo de la suma ésa que has hecho antes. (Casi inaudible.)

45. Paco: Suma de todos.

46. (Lorenzo introduce [A6; Total].)

47. (Lorenzo sitúa la celda activa en B6.)

48. Paco: Espérate. Espérate. Espérate. Espérate!

49. (Lorenzo introduce [B6 =…; …].)

50. (Paco hace clic en la fila 6 y aparece [B6 =6:6…; …].)

51. Lorenzo: Suma (modifica [B6 = SUMA(…; …] y coge el ratón) de todos éstos (introduce [B6 =SUMA(B2:B4); -24] usando el ratón). Nos da menos veinticuatro porque no hemos puesto los demás.

57. (Paco colorea la fila 6.)

60. (Paco colorea la fila 1.)

	A	B
1	Lo que ganan en total	960
2	Luis	=B3-24
3	Juan	=B4/10
4	Roberto	
5		
6	Total	=SUMA(B2:B4)

Figura 115. Contenido de las celdas después del ítem 60.

En los ítem 64, Lorenzo introduce el valor 1 en la celda B4. El trato especial que Lorenzo da a esta celda lo podemos interpretar como una forma de señalar de manera implícita a la celda de referencia. A continuación, selecciona (ítem 66) el rango B1:B6 y lo copia en C1:C6. Esto produce la replicación de las fórmulas presentes en las celdas de la columna B y el aumento en una unidad de los valores presentes en las celdas B1 y B4. Lorenzo (ítem 67) corrige el valor presente en C1 y explica que sólo deben cambiar los demás, lo cual es correcto.

Entre los ítems 74 y 87, Lorenzo replica los pasos 3 y 4 y genera una secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia. Lorenzo (ítem 88) observa que la secuencia generada en la fila 6 no alcanza[101] el valor 960 y propone modificar el primer valor de la progresión aritmética generada en la fila 4. Si hubiera generado la secuencia mediante una fórmula de recurrencia, habría conseguido cambiar todos los valores, pero al hacerlo a partir de los dos primeros elementos de la secuencia (ver ítems 64, 66 y 74), tiene que volver a generarla. Entre los ítems 88 y 91, Lorenzo crea una progresión aritmética con origen en 500 y diferencia uno en la fila 4; pero no consigue que en la fila 6 se alcance el valor 960 (ver Figura 116). La decisión de tomar como origen de la nueva secuencia de posibles valores el número 500 y no continuar a partir de 255, último número presente en la fila 4 (ver ítem 87); quizá sea consecuencia de que Lorenzo observa una gran diferencia entre el valor 282 que se

64. (Lorenzo introduce [B4; 1].)

66. (Lorenzo selecciona el rango B1:B6 y lo estira hasta [C1; 961], [C2 =C3-24; -23,8], [C3 =C4/10; 0,2]; [C4; 2] y [C6 =SUMA(C2:C4); -21,6].)

67. Lorenzo: Se tiene que quedar (modifica [C1; 960])… Sólo se tiene que cambiar éste, los demás, no.

74. (Lorenzo selecciona el rango B1:C6.)

87. (Lorenzo llega hasta [IV1; 960], [IV2 =IV3-24; 1,5], [IV3 =IV4/10; 25,5]; [IV4; 255] y [IV6 =SUMA(IV2:IV4); 282].)

88. Lorenzo: No llega. Pues mira (Lorenzo mueve la ventana hasta el inicio)… Cambiamos éste (hace clic en B4)… Cambiamos éste y ponemos, yo qué sé… quinientos (modifica [B4; 500]) a ver si llega… (Inaudible.)… (Modifica [C4; 5001].) Cambiamos estos números (modifica [C4; 501])… Y vamos avanzando (selecciona el rango B4:C4 y empieza a estirar) y como si nada hubiera pasado (casi inaudible).

91. Paco: Venga, venga (Lorenzo llega hasta [IV4; 754])… No ha llegao (sic)… Mecagüen (sic).

[101] Esto es consecuencia de que la fórmula introducida en B3 (ver ítem 42) era incorrecta.

produce en IV6 y el 960 que debería obtenerse.

	IT	IU	IV
1	960	960	960
2	51,2	51,3	51,4
3	75,2	75,3	75,4
4	752	753	754
5			
6	878,4	879,6	880,8

Figura 116. Después del ítem 91.

Paco (ítem 93) parece proponer iniciar la secuencia de la fila 4 en 600. Sin embargo, Lorenzo (ítem 94) introduce una fórmula de recurrencia en C4 con la que genera una progresión aritmética con origen en 500 y diferencia uno (ítem 96). Al hacerlo de esta forma, podrá modificar todos los valores de la secuencia cambiando únicamente el valor inicial (el que está en B4).

93. Paco: Seiscientos.

94. (Lorenzo modifica [C4 =B4+1; 501].)

95. Lorenzo: Pues ahora sólo alargamos éste.

96. (Lorenzo estira C4 hasta [IV4 =IU4+1; 754.)

97. Paco: ¡Ay!

Sin embargo, Lorenzo (ítem 98) procede a variar el valor de B4 y no atiende al resto de valores de la secuencia. De hecho, dice: “Vas probando ([…]) números ahí…”. A lo largo del ítem 98, va aumentando el valor presente en B4, pues parece observar que al aumentar el valor presente en B4, también aumenta el contenido en B6. En el ítem 105, Lorenzo prueba el valor 820 en B4 y consigue la verificación de la igualdad (ver Figura 117). La repuesta a la pregunta del problema se observa en las celdas de la columna B.

98. Lorenzo: Está igual (mueve la ventana al inicio) pero ahora si (hace clic en B4) cambiamos éste, se cambian todos. Porque si ponemos, por ejemplo, setecientos (introduce [B4; 700] y después introduce [B4; 800])… Vas probando (modifica [B4; 850]) números ahí… Y nos hemos pasao (sic)

105. Lorenzo: Pon (señala a la pantalla) ochocientos veinte ([…])… ¡Eso no es…! Entonces si ponemos aquí (Lorenzo modifica [B4; 820]) ochocientos veinte, toda la columna se cambia. Y la suma da (sitúa la celda activa en [B6; 960]) esto, novecientos sesenta.

106. Paco: Vale. Ya está.

En definitiva, han realizado una lectura algebraica del problema que lo ha reducido a las relaciones necesarias $T = L + J + R$ y $J = L + Mjl$ y a la incorrecta $R = J{\cdot}Vlr$. La resolución se lleva a cabo mediante el MHC, si bien se abandona la generación de secuencias de posibles valores por la prueba y error en la celda de referencia.

	A	B	C
1	Lo que ganan en total	960	960
2	Luis	58	58,1
3	Juan	82	82,1
4	Roberto	820	821
5			
6	Total	960	961,2

Figura 117. Después del ítem 105.

6.5.5.5. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema "Lana y algodón"

Lorenzo (ítem 6) construye el nombre "Tela algodón + tela lana" que refleja la intención de ligarlo a una cantidad que dará cuenta de una suma; pero no se especifica la magnitud o unidad de aquello que se suma. En los ítems 16 y 18, aclara la situación al asignar el valor 12 a la celda B1, lo que nos permite concluir que había etiquetado a la cantidad *M*. Paco (ítem 20) propone a Lorenzo que especifique que las unidades son metros y Lorenzo (ítem 24) acaba escribiendo "Tela algodón + tela lana (m)" en A1. A continuación, introduce (ítem 35) el nombre "Precio Algodón" en A2 que puede identificar tanto a *Ua* como a *Pa*, pues no hay ninguna referencia a si se trata, o no, del precio unitario. En el ítem 36, Paco propone el nombre *metro algodón*, posiblemente en referencia a la cantidad *Ma*; pero Lorenzo (ítem 38) le indica que da igual precio que metro. Posiblemente tenga la intención de generar una progresión aritmética con diferencia el valor de *Ua* en la fila que representa a *Pa*, lo que evitaría asignar celda a la cantidad *Ma*; pero los episodios siguientes no nos permiten confirmar esta explicación. Lorenzo (ítem 40) introduce el nombre "Precio Lana" en A3, del que nuevamente no podemos afirmar si hace referencia a *Ul* o *Pl*. Entre los ítems 56 y 58, Lorenzo introduce los valores cuatro y dos en las celdas B2 y B3, respectivamente, lo que nos podría inclinar a pensar que Lorenzo asignaba nombre y celda a las cantidades *Ua* y *Ul*, respectivamente; aunque también podría estar representado las variables precio de la tela de algodón y precio de la tela de lana. Por último, Lorenzo (ítems 44 y 48)

6. (Lorenzo introduce [A1; Tela algodón + tela lana] mientras Paco lee.)

8. (Paco termina de leer el enunciado.)

9. Lorenzo: Seguro que ([…]) son mezclas y no las hemos dado.

16. Lorenzo: La suma ([…]) de los dos, doce metros.

18. (Lorenzo introduce [B1; 12].)

20. Paco: Pon metros. Espérate.

24. (Lorenzo modifica [A1; Tela algodón + tela lana (m)].)

34. Lorenzo: Precio algodón.

35. (Lorenzo introduce [A2; Precio Algodón].)

36. Paco: Metro algodón, ¿no?

38. Lorenzo: No (señala con la mano al enunciado), pone ([…])… Da igual precio que metro…

40. (Lorenzo introduce [A3; Precio Lana].)

41. Lorenzo: Precio lana ([…])…

44. Lorenzo: Euros con los que se dispone.

48. (Lorenzo introduce [A4; Euros con los que se disponen].)

56. Lorenzo: Vamos a poner (sitúa la celda activa en B2) los cuatro euros aquí ([…])… Tú ([…]) ve diciéndome los metros estos.

58. Paco: El precio del metro de lana: dos euros (Lorenzo introduce [B3; 2]) y el de (Lorenzo introduce [B2; 4]) algodón a cuatro.

60. Lorenzo: Se dispone de cuántos euros ([…])… treinta y dos.

62. (Lorenzo introduce [B4; 32].)

construye el nombre “Euros con los que se disponen”, para la cantidad *P*, lo que se confirma cuando introduce (ítem 62) el valor 32 en la celda B4. Hemos de apuntar que el nombre que se asigna no responde a la situación expresada en el problema, pues no se dispone de dinero, sino que éste se obtendrá cuando se venda la tela.

Lorenzo (ítem 65) se pregunta qué cantidades hay que determinar para dar respuesta al problema, lo que le conduce (ítems 67 y 72) a construir nombre y asignar celda, de manera implícita, a las cantidades *Ma* y *Ml* (ver Figura 118).

65. Lorenzo: Ya está, ¿no? Lo que te pregunta ([…])… ¿Cuántos ([…])… metros ([…]) de algodón? No ([…])… ¡Ah!, pero es por separado.

67. (Lorenzo introduce [A5; Cuantos metros de lana tengo].)

68. Lorenzo: Cuántos metros de lana tengo.

70. (Lorenzo estira A5 hasta [A6; Cuantos metros de lana tengo].)

71. Lorenzo: Y cuántos metros de algodón tengo.

72. (Lorenzo modifica [A5; Cuantos metros de algodón tengo].)

	A	B
1	Tela algodón + tela lana (m)	12
2	Precio Algodón	4
3	Precio Lana	2
4	Euros con los que se disponen	32
5	Cuantos metros de algodón tengo	
6	Cuantos metros de lana tengo	

Figura 118. Contenido de las celdas después del ítem 72.

Lorenzo (ítem 76) propone realizar una suma para plantear una igualdad. Esto supondría intentar dar respuesta al paso cuarto del MHC cuando aún no se ha identificado la cantidad de referencia ni se ha establecido ninguna relación entre cantidades; por lo que, quizá, utiliza el conocimiento del método para reorganizar el proceso de resolución. Paco (ítem 81) señala como iguales la fila 1 y las 5 y 6, sin especificar la operación que debería realizarse entre las cantidades *Ma* y *Ml* representadas en las filas 5 y 6. Lorenzo (ítem 82) se opone inicialmente, pero acaba aceptando. En los ítems 84 y 87, Paco colorea las filas 1, 5 y 6 para señalar la igualdad entre tres cantidades sin especificar la relación que las une.

76. Lorenzo: A ver, la suma entre los dos también ([…]), para la igualdad esta rara que decías tú.

77. Paco: Claro. Claro.

81. Paco: Espera. Éstos (señala con el cursor las filas 5 y 6) son iguales a éste (señala con el cursor la fila 1), ¿no…? Sí.

82. Lorenzo: No, porque ahí (señala con la mano a la pantalla) pone metros… Vale, sí.

84. (Paco colorea las filas 5 y 6.)

87. (Paco colorea la fila 1.)

Tras un largo silencio (ítems 92 y 94) en

92. Lorenzo: Eh… Pues algodón… (Silencio

el que fijan la vista en la pantalla, el profesor (ítem 96) le pide a Paco que le explique qué cantidades son iguales. Paco duda y Lorenzo (ítem 99) señala que deben ser igual B5 y B6 a B1, manteniendo la ambigüedad sobre la operación que debe unir las cantidades. El profesor (ítem 100) insiste en que sea Paco el que lo explique, pero, ante la vacilación de Paco (ítem 102), Lorenzo (ítem 103) confirma que debe verificarse $M = Ml + Ma$.

de 15 segundos.)… pues no lo sé seguro.

94. (Silencio de 17 segundos.)

96. Profesor: ¿Qué cantidades, al final, decís que son iguales?

99. Lorenzo: Según Paco ([…]) éstas dos (sitúa la celda activa en B6 y B5) y ésta (sitúa la celda activa en B1).

100. Profesor: Explícaselo, Paco, por qué son iguales ésas.

102. Paco: Porque ahí…

103. Lorenzo: Porque es la suma de los dos.

Después de un silencio (ítem 112), Paco (ítem 117) pide a Lorenzo que afine los nombres introducidos en las celdas A2 y A3. Lorenzo (ítems 119 y 120) introduce los nombres “Precio Algodón (m)” y “Precio Lana (m)”, lo que confirma que en las celdas B2 y B3 se han representado las cantidades *Ua* y *Ul*, respectivamente. También pone de manifiesto que aún no han representado las cantidades *Pa* y *Pl*.

112. (Silencio de 15 segundos.)

117. Paco: Pon metro (hace doble clic en A2). Mejor que si no…

119. (Lorenzo modifica [A2; Precio Algodón (m)].)

120. (Paco hace doble clic en A3.)

121. (Lorenzo modifica [A3; Precio Lana (m)].)

Se produce un nuevo silencio (ítem 126) tras el que Lorenzo (ítem 127) dice “Imposible ([…]) estirar una ecuación así”. Resulta difícil concluir cuál es el propósito que esta afirmación esconde. Posiblemente esté relacionado con el hecho de que observa la necesidad de establecer dos igualdades, aunque esta suposición es muy aventurada.

Paco (ítem 127) parece impaciente y comienza a mostrar indiferencia hacia los intentos de Lorenzo por resolver el problema, lo que se pone de manifiesto en los gestos que hace y en la respuesta del ítem 128.

126. (Silencio de 5 segundos.)

127. Lorenzo: Imposible ([…]) estirar una ecuación así (Paco mira a Lorenzo y le enseña el reloj)… Sí ([…])… Eh… Una ecuación (Paco mira a un punto indeterminado)… pero… pero (mira a la pantalla) como (mueve la mano hacia la pantalla y Paco mira a la pantalla) no se puede poner aquí la equis pues (mira a Paco y éste mira a un punto indeterminado) tenemos que echar la equis y poner iguales.

128. Paco: ¡Ah!

129. Lorenzo: No has entendido nada, así que no…

Lorenzo (ítem 143) decide plantear en primer lugar una ecuación, lo que nos indica que confía en que al realizar el esbozo lógico-semiótico del problema, previendo el uso del SMSalg, conseguirá identificar todas las relaciones necesarias para resolverlo. También dice “luego alargando” (ítem 143), lo que parece señalar que, a continuación, expresará las ecuaciones en el lenguaje de la hoja de

142. (Silencio de 7 segundos.)

143. Lorenzo: Primero ([…]) hacemos una ecuación y luego alargando. ¿Vale?

144. Paco: Vale.

160. (Lorenzo introduce [B8; 4*x=…].)

161. Lorenzo: Igual a doce, no.

162. (Lorenzo introduce [B8; 4*x=12…].)

163. Lorenzo: A doce por… Me estoy liando.

cálculo y buscará la verificación de la misma. La ecuación que empieza a escribir Lorenzo (ítem 162) no es correcta ni podrá serlo, pues está igualando *Pa* (la expresión “4*x”, suponiendo que “x” son los metros de algodón) y *M* (el número 12). De hecho, Paco le indica que debe ser 32 (el valor de *P*) y Lorenzo (ítem 166) borra 12 de la ecuación que estaba construyendo.

164. Paco: A treinta y dos.

165. (Silencio de 6 segundos.)

166. (Lorenzo modifica [B8; 4*x=…].)

Lorenzo (ítem 173) borra la ecuación que estaba escribiendo, lo que indica que tampoco es capaz de desencadenar una lectura analítica del problema sobre el supuesto de expresarla en el SMSalg. El profesor (ítem 174) les invita a abandonar el problema y aceptan (ítems 175 y 177).

En definitiva, sólo han sido capaces de verbalizar la relación $M = Ma + Ml$ y de asignar celda a las cantidades conocidas *M*, *P*, *Ua* y *Ul*, y las desconocidas *Ma* y *Ml*; es decir, aquéllas que se mencionaban de manera explícita en el enunciado[102].

173. (Lorenzo borra B8.)

174. Profesor: ¿Lo queréis dejar éste?

175. Lorenzo: ¿Se ([…]) puede dejar para el final?

176. Profesor: Bueno ([…]) si os da tiempo sí, pero… que no…

177. Paco: Para el final, final.

6.5.5.6. El caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema “Paz, Petra y su madre”

Paco (ítem 8) recuerda que este problema ya lo han hecho, pero avisa que no se acuerda. Lorenzo (ítem 15) afirma que lo hicieron el último día[103]. A lo largo de los ítems 11-21, Paco verbaliza los nombres “Edad Paz”, “Edad Petra” y “Edad madre” y Lorenzo se encarga de introducirlos en las celdas A1, A2 y A3. No sabemos si con ello se refieren a las cantidades edad actual o futura o si han dado nombre a las variables edad de las protagonistas.

8. Paco: Yo ([…]) lo he hecho… Pero no me acuerdo…

11. Lorenzo: Edad Paz.

13. (Lorenzo introduce [A1; Edad…].)

14. (Paco mira a la hoja.)

15. Lorenzo: Sí, lo (mira a Paco) hicimos el último día, ¿no?

16. Paco: Edad (ambos miran a la pantalla) Berta (Lorenzo introduce [A1; Edad Paz])… Petra…

17. (Lorenzo introduce [A2; Edad Petra].)

18. Paco: ¿Tú lo hiciste?

19. Lorenzo: Creo que sí. Me suena.

[102] Evidentemente, la omisión de *Pa* y *Pl* impide emplear las relaciones $P = Pl + Pa$, $Pl = Ul{\cdot}Ml$ y $Pa = Ua{\cdot}Ma$, en las que participan

[103] El problema *Paz, Petra y su madre* lo hicieron entre las sesiones segunda y tercera (tanto la pareja 7, de la que formaba parte Paco, como de la pareja 13, de la que formaba parte Lorenzo). Posiblemente, Lorenzo lo confunda con alguno de los problemas de edades que sí se hicieron en la última sesión de la secuencia de enseñanza.

21. Paco: Edad madre (Lorenzo […] introduce [A3; Edad madre])… unos noventa años (irónicamente). Edad Paz ([…]), veintinueve años ([…]).

Lorenzo (ítems 42, 43 y 49) introduce los valores de la edad actual de las tres protagonistas en las celdas B1, B2 y B3, lo que nos permite descartar que haya representado a las cantidades *Fa*, *Fe*, *Fm*.

42. (Lorenzo introduce [B1; 6].)

43. (Lorenzo introduce [B2; 9].)

47. Lorenzo: Era nueve y treinta y cinco…

49. (Lorenzo introduce [B3; 35].)

Lorenzo (ítems 53 y 54) construye nombre y asigna la celda B4 a la cantidad desconocida *T* (ver Figura 119).

53. Lorenzo: Años que deben pasar.

54. (Lorenzo introduce [A4; Años que deben pasar].)

◇	A	B
1	Edad Paz	6
2	Edad Petra	9
3	Edad madre	35
4	Años que deben pasar	

Figura 119. Después del ítem 54.

Desde el ítem 58 hasta el ítem 74, Lorenzo introduce la fórmula =B1+B2+B4=B3+B4 en la celda B6, la cual emplea el signo igual como comparador booleano. La ecuación que se materializa de esta forma responde al uso de la relación correcta $Fm = Am + T$ y la incorrecta $Fm = Aa + Ae + T$ (en el ítem 130, Lorenzo expone de forma clara esta intención). El error es consecuencia de añadir una sola vez la cantidad *T* (B4) en el término izquierdo de la ecuación (ver Figura 120). Ofrecemos dos posibles explicaciones: 1) Lorenzo traduce linealmente[104] el fragmento de enunciado "años deben pasar para que, entre las dos niñas". 2) Lorenzo intenta mantener el equilibrio de una supuesta igualdad, sumando la misma cantidad en ambos lados de la igualdad. Los episodios que seguirán nos inclinan a suponer una traducción lineal. Valga como ejemplo que, en el ítem 148, Lorenzo dice "La suma de las dos más los años que pasan".

58. Lorenzo: Pues no se saben los años ([…])… Pero (hace clic en B6) lo que sí que sabe es que la edad (introduce [B6 =B1…; …]) de Paz más (introduce [B6 =B1+…; …]) la de Petra (introduce [B6 =B1+B2…; …])…

59. Paco: Deben pasar quin…

60. Lorenzo: … más los años (introduce [B6 =B1+B2+B4…; …])…

66. Lorenzo: La edad de Paz (mueve el cursor sobre B1) más la de Petra (mueve el cursor sobre B2) más los años que deben pasar será igual (introduce [B6 =B1+B2+B4=…; …]) la edad… madre (introduce [B6 =B1+B2+B4=B3…; …]) más los años que deben pasar (introduce [B6 =B1+B2+B4=B3+B4…; …]).

69. Paco: Venga. Va.

71. Lorenzo: ¿Tú lo entiendes?

72. Paco: Sí.

74. (Lorenzo introduce [B6 =B1+B2+B4=B3+B4; FALSO] usando el ratón.)

[104] Recordemos que llamamos traducción lineal o sintáctica a aquélla en la que se da respuesta a las cantidades a medida que van apareciendo sin incorporar otra información implícita. Así, al hacer una lectura lineal de la proposición "años deben pasar para que, entre las dos niñas" no se tiene en cuenta el hecho implícito de que se está haciendo referencia a las edades futuras y se considera *T* ("años deben pasar") + *Aa* + *Ae* ("entre las dos niñas").

El uso de fórmulas con más de una operación aritmética permite a Lorenzo no asignar celda ni construir nombre para las cantidades *Fa*, *Fe* y *Fm*; aunque, evidentemente, se usan.

	A	B
1	Edad Paz	6
2	Edad Petra	9
3	Edad madre	35
4	Años que deben pasar	
5		
6		=B1+B2+B4=B3+B4

Figura 120. Contenido de las celdas después del ítem 74.

Entre los ítems 77 y 99, Lorenzo[105] replica los pasos 3 y 4 y genera una secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia. Otorga esta consideración a la cantidad *T*, representada en la celda B4, pues en esta fila genera una progresión aritmética de diferencia uno. Para crear la progresión aritmética vuelve a recurrir a seleccionar los dos primeros valores de la secuencia y estirar del controlador de relleno. Lorenzo (ítems 94, 96 y 99) parece entender que los números de la fila 4, por tratarse del tiempo transcurrido en la vida de una persona, no pueden superar valores razonables. Ésta es la explicación que encontramos a que detenga (ítem 99) la prolongación de las secuencias antes de alcanzar el límite derecho de la hoja de cálculo.

77. (Lorenzo introduce [B4; 1].)

81. Lorenzo: Ahora vamos a alargar…

82. Paco: Yo lo hice de otra forma ([…]), creo ([…])… Ya ([…]) no me acuerdo… ¿Cuál alargo?

83. Lorenzo: Todos. Espérate…

84. (Lorenzo selecciona el rango B1:B6, coge el ratón y estira hasta [C1; 6], [C2; 9], [C3; 35], [C4; 1] y [C6 =C1+C2+C4=C3+C4; FALSO].)

85. Lorenzo: No es seguro porque a veces… ¿Ves?

86. (Lorenzo modifica [C4; 2].)

87. Paco: Dos.

88. (Lorenzo selecciona el rango B1:C6.)

89. Lorenzo: Ahora ya puedes alargar.

90. (Paco coge el ratón.)

92. (Paco estira el rango B1:C6.)

94. Lorenzo: No, no creo que pasen tantos años…

95. Paco: Ya verás como son veinte.

96. Lorenzo: No ([…]) creo que vivan tanto.

97. (Lorenzo coge el ratón.)

98. Paco: Ya verás como son veinte.

99. (Lorenzo estira hasta [HT1; 6], [HT2; 9], [HT3; 35], [HT4; 227] y [HT6 =HT1+HT2+HT4=HT3+HT4; FALSO].)

[105] Lorenzo únicamente deja participar a Paco en el ítem 92. Una vez ha seleccionado el rango de celdas B1:C6 que se deben estirar, permite a Paco arrastrarlas; pero vuelve a tomar el control del ratón (ítem 97) y decide el punto donde debe acabar la copia y pegado (ítem 99).

◇	T	U	V
1	6	6	6
2	9	9	9
3	35	35	35
4	19	20	21
5			
6	FALSO	FALSO	FALSO

Figura 121. En el ítem 103.

En el ítem 98, Paco había predicho que el valor de la cantidad *T* sería veinte. Cuando Lorenzo desplaza la ventana hacia el límite izquierdo de la hoja de cálculo, encuentra (ítem 103) el valor 20 en la celda U4, pero en la celda U6 se observa FALSO (ver Figura 121). Lorenzo (ítem 105) le indica que el valor de la cantidad *T* no puede ser veinte[106] y sigue buscando; pero se da cuenta (ítem 107) de que algo está mal pues no se verifica la igualdad cuando ya han transcurrido más de 100 años. Las limitaciones que impone el contexto del problema sirven a Lorenzo para valorar la validez de la solución.

103. (Lorenzo mueve la ventana hacia la izquierda hasta que se inicia en la columna U. En U4 se observa 20 y en U6, FALSO.)

104. Lorenzo: No, no son veinte.

105. Paco: ¿Eh?

106. (Lorenzo desplaza la ventana hacia la derecha.)

107. Lorenzo: ¿Eh…? Es que algo hemos hecho mal, porque no van a vivir tanto (en la fila 4 se observan valores superiores a 100).

Lorenzo reflexiona y repasa el contenido de las celdas C6, C5 y C4 (ítems 112 y 114), lo que parece indicar que está buscando el error en la copia que se hizo de la columna C (ítem 84). Posiblemente lo haya relacionado con las secuencias mixtas que se observaron en el problema *Las actividades deportivas* debido a un error en la copia y pegado del columna B en la columna C. Lorenzo no encuentra el fallo y parece tan convencido de que lo ha planteado bien que contempla (ítem 124) la posibilidad de que nunca se igualen y de que se trate de un "problema trampa".

Paco (ítems 113 y 115) propone generar las líneas de vida de las protagonistas ("La edad de todas, más uno", ítem 115). Lorenzo (114) se opone e insiste en que lo que hay sumar es *T*.

111. (Silencio de 8 segundos.)

112. (Lorenzo hace clic en C6 y C5.)

113. Paco: ¿No es todo más uno…? Sí.

114. Lorenzo: ¿Más uno? No, más esto (sitúa el cursor sobre C4).

115. Paco: La edad de todas, más uno (Lorenzo hace clic en C6 y después en B7). Así hasta que… Sí, ahora verás.

121. Lorenzo: A lo mejor será ([…]) que nunca igualarán.

122. Paco: Sí hombre… (Inaudible.)

124. Lorenzo: Pues un problema trampa.

Lorenzo (ítem 130) indica que, mentalmente, obtiene que han de pasar cinco años. Lo justifica diciendo: "si entre

130. Lorenzo: De cabeza ([…]) me sale que son cinco años (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna B y se observa [F4; 5]). Porque si entre los dos, quince (mueve la celda

[106] Sin embargo, la respuesta a la pregunta del problema es veinte, como veremos más adelante.

los dos [*Aa* y *Ae*], quince […] y éste [*Am*], treinta y cinco […] Si pasan para los dos, cinco años […]; entre los dos tienen veinte [*Aa* + *Ae* + *T*] y éste, cuarenta [*Am* + *T*]". Esto pone de manifiesto: 1) Realmente Lorenzo busca que la suma de las edades de las hijas sea el doble de la de la madre ("entre los dos tienen veinte y éste, cuarenta", ítem 130; "Pero aquí […] sale falso", ítem 132)[107]. 2) El error cometido al introducir (ver ítem 74) la ecuación incorrecta no fue fruto de una omisión involuntaria y refuerza la interpretación de que hizo una traducción sintáctica de un fragmento del enunciado.

activa de [F1; 6] a [F2; 9]) y éste, treinta y cinco (mueve la celda activa a [F3; 35]). Si pasan para los dos, cinco años ([…]); entre los dos tienen veinte y éste, cuarenta…

131. Paco: Mm (asiente).

132. Lorenzo: Pero aquí no sé por qué sale falso (sitúa la celda activa en F6 en la que se observa FALSO).

Lorenzo (ítem 136) construye la fórmula =F1+F2+F4 en la celda F7 con la intención de comprobar la validez del cálculo mental que acaba de realizar (ver ítem 130). Quizá esto le sugiera la posibilidad de construir las funciones numéricas que se muestran en cada uno de los términos de la ecuación con la intención de observar la evolución de los valores que generan. Así, Lorenzo (ítem 148) construye las fórmulas =B1+B2+B4 y =B3+B4 en las celdas B8 y B9, respectivamente. La verbalización que acompaña a la introducción de la fórmula =B1+B2+B4, "La suma de las dos más los años que pasan" (ítem 148), vuelve a poner de manifiesto que, Lorenzo ha hecho una lectura lineal del fragmento de enunciado "años deben pasar para que, entre las dos niñas". No construye nombre para las cantidades que se calculan con estas fórmulas y las usa con la intención de observar la evolución de los valores que generan.

Paco (ítem 147) hace referencia a que las edades de las protagonistas no varían (en las filas 1, 2 y 3, se muestran secuencias numéricas uniformes, ver Figura 121), lo que podemos interpretar como una nueva

135. Lorenzo: Ésta (señala con el cursor a F1) más ésta (señala con el cursor a F2) más ésta (señala con el cursor a F4)… Espera un momento.

136. (Lorenzo introduce [F7 =F1+F2+F4; 20] usando el ratón.)

147. Paco: Es que la… es que la edad de ellas no cambia (Lorenzo mueve la ventana hasta el inicio) según eso. Sí que tiene que cambiar.

148. Lorenzo: A ver la suma de las dos (introduce [C8 =B1+B2+…; …], pero lo borra e introduce [B8 =B1+B2+…; …])… La suma de las dos más los años que pasan (introduce [B8 =B1+B2+B4; 16] usando el ratón) debe ser igual (introduce [B9 =…; …]) a la de la madre (introduce [B9 =B3…; …]) más los años que pasan (introduce [B9 =B3+B4; 36] usando el ratón).

[107] Posiblemente, esté considerando la relación entre las edades futuras de los protagonistas en el problema *Adrián*.

propuesta de generar las líneas de vida.

Lorenzo (ítems 149-155) replica las fórmulas presentes en las celdas B8 y B9 (ver Figura 122) sin agotar el límite derecho de la hoja de cálculo, lo que nos indica que vuelve a tener en cuenta las restricciones de la situación que se plantea en el problema para decidir la longitud de las secuencias que se generan en el paso quinto del MHC.

En el ítem 155, Paco señala que los valores de las filas 8 y 9 tienen una diferencia constante de 20 unidades, con lo que parece sugerir que no se podrá lograr la coincidencia de valores en ambas filas.

149. (Lorenzo estira el rango B8:B9.)

150. Lorenzo: Y ahora aquí vamos a ver si sale alguna vez igual.

151. (Lorenzo llega hasta [G8 =G1+G2+G4; 21] y [G9 =G3+G4; 41].)

152. (Lorenzo sigue estirando hasta [DH8 =DH1+DH2+DH4; 126] y [DH9 =DH3+DH4; 146].)

153. (Lorenzo mueve la ventana a izquierda y derecha.)

154. (Lorenzo selecciona el rango DG8:DH9 y empieza a estirar.)

155. Paco: No cambia nunca ([…]). Es la diferencia de veinte años (Lorenzo llega hasta [GQ8 =GQ1+GQ2+GQ4; 213] y [GQ9 =GQ3+GQ4; 233]). ¿Ves?

◇	A	B	C	D
1	Edad Paz	6	6	6
2	Edad Petra	9	9	9
3	Edad madre	35	35	35
4	Años que deben pasar	1	2	3
5				
6		FALSO	FALSO	FALSO
7				
8		16	17	18
9		36	37	38

Figura 122. Después del ítem 151.

Posiblemente, la indicación que hace Paco (ítem 155), lleva a Lorenzo a darse cuenta de su error. En el ítem 161, Lorenzo afirma “Pasan para las dos” e introduce (ítem 163), en la celda B6, la fórmula =B1+B4+B4+B2=B3+B4 (ver Figura 123). Esta fórmula representa una ecuación correcta que supondría el uso de las relaciones necesarias y suficientes $Fa = Aa + T$, $Fe = Ae + T$, $Fm = Am + T$ y $Fm = Fa + Fe$.

161. Lorenzo: ¡Ah, no! Pasan para las dos… Espera (modifica [B8 =B1+B6; 16] usando el ratón)… ¡Ah!, ya. Ya sé que está mal (hace clic en B6). He puesto (modifica [B6 =B1++B4B2+B4=B3+B4…; …])… (Inaudible.)

162. Profesor: ¡Cuidado Lorenzo, cuidado con el más.!

163. (Lorenzo introduce [B6 =B1+B4+B4+B2=B3+B4; FALSO] usando el teclado para escribir el nuevo B4.)

◇	A	B
1	Edad Paz	6
2	Edad Petra	9
3	Edad madre	35
4	Años que deben pasar	1
5		
6		=B1+B4+B4+B2=B3+B4

Figura 123. Contenido de las celdas de las filas 1 a 6 después del ítem 163.

Lorenzo (ítems 165 y 167) replica la nueva ecuación y encuentra en la celda U6 el valor VERDADERO (ver Figura 124).

165. (Lorenzo estira B6.)

167. (Lorenzo llega hasta [CN6 =CN1+CN4+CN4+CN2=CN3+CN4; FALSO].)

En la celda U4 (que representa a la cantidad *T*) se observa el valor 20; el que había propuesto Paco como resultado repetidamente.

En definitiva, han reducido el problema a las relaciones necesarias y suficientes $Fa = Aa + T$, $Fe = Ae + T$, $Fm = Am + T$ y $Fm = Fa + Fe$ y han resuelto el correctamente el problema mediante el MHC, construyendo una ecuación en el lenguaje de la hoja de cálculo.

172. (Lorenzo detiene el arrastre y mueve la ventana hacia la izquierda.)

173. Paco: Por este lao (sic). ¡Chiquitín!

174. (Lorenzo detiene la ventana cuando se inicia en la columna Q. En U6 se observa ########.)

175. (Lorenzo ajusta la anchura de la columna U y en U6 aparece VERDADERO.)

<>	T	U	V
1	6	6	6
2	9	9	9
3	35	35	35
4	19	20	21
5			
6	FALSO	VERDADERO	FALSO

Figura 124. Después del ítem 175.

7. Conclusiones

Evitaremos convertir el capítulo dedicado a las conclusiones en un resumen de los aspectos destacados de los apartados anteriores y nos centraremos en dar respuesta a los objetivos planteados en el capítulo en el que se delimitó el problema a investigar. En consecuencia, no incluiremos elementos de la teoría descritos en el modelo de competencia, ni valoraremos las herramientas metodológicas empleadas en el análisis de las resoluciones escritas. Sin embargo, el hecho de que las conclusiones del estudio de casos tengan la intención de detallar actuaciones, más o menos generalizadas, en situaciones concretas, nos obligará a describir los escenarios en las que se producen, sacrificando el estilo por la claridad. Por este motivo, haremos referencia, en notas a pie de página, a los lugares donde encontramos actuaciones que apoyan las afirmaciones realizadas. Indicaremos, en estos casos, el protagonista, la pareja, el problema y los ítems en los que se observa la actuación. Cuando la acción la lleven a cabo los dos miembros de la pareja, prescindiremos del protagonista y cuando sea una característica que se observa en toda la resolución del problema, omitiremos la referencia a los ítems. Así, por ejemplo, en lugar de escribir "véase la actuación de Lorenzo en el caso de la pareja Paco-Lorenzo en el problema *Adrián* entre los ítems 144-122", escribiremos "(Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Adrián*; ítems 114-122)".

7.1. CONCLUSIONES DESDE EL ESTUDIO DE CASOS

El estudio de casos pretendía dar respuesta a:

> ¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas en la hoja de cálculo después de haber sido instruidos en la resolución algebraica de problemas en dicho entorno?

Presentaremos las conclusiones extraídas del estudio de casos como un catálogo de actuaciones que, normalmente, detallarán obstáculos, dificultades y errores. Esto puede dar una imagen negativa de las consecuencias de la enseñanza en lo que respecta a la competencia en el uso del MHC. Por esta razón, hemos considerado conveniente iniciar el apartado con una breve descripción cuantitativa del estudio de casos, que muy bien podría haberse incluido como último apartado del capítulo 6. La finalidad fundamental será mostrar que, tras la enseñanza, los estudiantes son capaces de utilizar el MHC para resolver problemas verbales de manera algebraica en la hoja de cálculo; pero también nos servirá para identificar dificultades en su uso que posteriormente analizaremos de forma cualitativa.

Atendiendo al éxito a la hora de plantear el problema en la hoja de cálculo de manera algebraica[1], las parejas Alberto-Lluís, Marcos-Jorge y Paco-Lorenzo lo consiguieron en el 50% (tres de seis) de los problemas que se les propuso; la pareja Candelaria-María, en el 40% (dos de cinco) y la pareja Macarena-Ester, en el 20% (uno de cinco). En consecuencia, todas las parejas fueron capaces de utilizar la hoja de cálculo para plasmar, al menos, una lectura algebraica de un problema utilizando el MHC. Incluso la pareja Macarena-Ester, formada por estudiantes que tras los cuestionarios previos incluimos en la clase (L_1, Com_1, HC_1), consiguió plantear y resolver correctamente un problema (el único que resolvieron de manera correcta) siguiendo el MHC hasta el cuarto paso y sustituyendo el paso quinto por una estrategia de ensayo y error.

Dejando de lado el éxito en la resolución y centrándonos en el hecho de atender correctamente a todos los pasos del MHC, encontramos que la pareja Paco-Lorenzo lo consiguió en el 66,7%[2] de los casos; la pareja Alberto-Lluís, en el 33,3% y el resto de parejas no lo consiguieron en ningún caso. Podemos establecer una relación entre el uso correcto del MHC y la pertenencia a la clase[3] (L_2, Com_2, HC_2) de Lluís y Lorenzo. Posiblemente, sea consecuencia de conjugar competencia en la resolución algebraica de problemas y en el uso del lenguaje de la hoja de cálculo. De hecho, tanto Lluís como Lorenzo (ver apartado 7.1.1.3.) utilizaron conocimientos de la hoja de cálculo que no habían sido mostrados durante la secuencia de enseñanza.

Si consideramos los planteamientos correctos, entendiendo como tales aquellos casos en los que se ha atendido de manera implícita o explícita a todas las relaciones entre cantidades de una lectura analítica correcta del problema, y sea cual sea el tipo de lectura llevada a cabo, las parejas Alberto-Lluís y Marcos-Jorge consiguieron un 83,3% de éxitos; la pareja Candelaria-María, un 80%; la pareja Paco-Lorenzo, un 66,7% y la pareja Macarena-Ester, un 20%.

En definitiva, podemos extraer dos primeras conclusiones: 1) Las dificultades al aplicar el MHC se centraron en el paso quinto, lo que explica la diferencia existente entre el porcentaje de problemas planteados algebraicamente, y por lo tanto en los que se alcanza el paso cuarto, y el porcentaje de problemas en los que se aplicaron todos los pasos MHC. 2) El hecho de que el porcentaje de planteamientos algebraicos correctos sea inferior al de planteamientos correctos, implica que se han utilizando métodos alternativos al MHC para resolver los problemas en la hoja de cálculo.

7.1.1. La tendencia a evitar el uso del MHC

El esbozo lógico-semiótico que se realiza cuando se usa el MHC prevé el uso del SMShc, donde las relaciones se expresan mediante fórmulas en las que se opera con cantidades desconocidas y éstas se representan mediante celdas. Entre las celdas que representan a las cantidades desconocidas, la que hemos llamado celda de referencia adoptará un papel central, ya que en el paso tercero servirá de argumento, directo o

[1] Del mismo modo que en el MC es habitual tomar como planteamiento de un problema el resultado de ponerlo en ecuaciones (paso cuarto del MC); en la hoja de cálculo consideraremos que el planteamiento de un problema es el estado de la solución al alcanzar el paso cuarto del MHC.

[2] La pareja Paco-Lorenzo usa el MHC en un 66,7% de los problemas, pero sólo hace un planteamiento correcto en el 50% de los casos.

[3] La participación e influencia en las resoluciones de los otros miembros de las parejas es prácticamente inexistente y, cuando se produce, está tutelada por Lluís y Lorenzo.

indirecto, de las fórmulas que se asignarán al resto de cantidades desconocidas. Las dificultades para desencadenar el análisis de un problema cuando se prevé el uso del SMShc para resolverlo mediante el MHC se reflejan en: 1) El uso de variables en lugar de cantidades. 2) Los intentos de resolver aritméticamente algunos problemas; lo que implica ir de lo conocido hacia lo desconocido, aunque se emplee el SMShc. 3) La verbalización de ecuaciones expresadas en el SMSalg por parte de algunos sujetos clasificados como buenos resolutores algebraicos en los cuestionarios previos; lo que supone el uso del MC.

7.1.1.1. El uso de variables en lugar de cantidades

En los problemas de edades empleados en el estudio de casos se ofrecen dos o más estados posibles del mundo conectados por el paso del tiempo del que los estudiantes tienen un conocimiento proporcionado por la experiencia. Cuando tenemos la intención de resolver estos problemas y atendemos únicamente a los estados, las situaciones descritas en el enunciado se expresarán mediante cantidades y relaciones entre cantidades. Sin embargo, cuando pretendemos representar el proceso que une los estados, consideraremos variables y relaciones entre variables que se materializarán en funciones. Desde este punto de vista, las cantidades serían los valores concretos que toman las variables en una situación real. Podríamos utilizar la metáfora de que las cantidades ofrecen instantáneas, mientras que las variables proporcionan la película de los hechos.

Las facilidades que ofrece la hoja de calculo a la hora de construir secuencias numéricas favorece la resolución de los problemas de la subfamilia edades mediante la generación de las líneas de vida de los protagonistas[4]. En nuestro estudio, hemos dado el nombre de líneas de vida a las secuencias numéricas que representan las distintas edades que puede tener una persona. Las líneas de vida ponen en juego un conocimiento de la realidad, respecto al paso del tiempo y las edades de las personas, que conduce a fusionar las cantidades edad actual y edad futura, junto a todas las posibles edades que puede tener un protagonista, en la variable edad. La plasmación de líneas de vida, cuando no se conoce el tiempo transcurrido, sustituye la operación con lo desconocido por el cálculo con valores conocidos para obtener la edad el año que viene de manera recursiva y permite prescindir de la representación del tiempo transcurrido mediante una celda. La exigencia de que el tiempo transcurra igual para los protagonistas de la historia se logra situando la edad actual de cada uno en la misma columna de la hoja de cálculo. En definitiva, el uso de líneas de vida permite pasar de considerar valores determinados (en el caso de las cantidades), ya fueran conocidos o desconocidos, a suponer valores indeterminados (en el caso de las variables) que gracias al conocimiento del mundo y del potencial de la hoja de cálculo podremos expresar como tablas numéricas de posibles valores. El uso de líneas de vida se observa en todos los tipos de resolutor[5]; aunque entre los sujetos pertenecientes a las clases L_2 y Com_2 se evidencian diferencias.

---

[4] Todas las parejas, excepto la formada por Paco y Lorenzo, emplearon esta técnica en los problemas de la subfamilia edades que se les planteó. En las actuaciones de la pareja Paco-Lorenzo, se observan intentos de emplearla por parte de Paco, pero Lorenzo se opuso anteponiendo el uso del MHC.

[5] (María; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 150-160), (Candelaria-María; *Adrián*; ítems 195-final), (Lluís; Alberto-Lluís; *Adrián*), (Alberto, Alberto-Lluís; *Paz, Petra y su madre*), (Ester; Macarena-Ester; *Adrián*; ítems 54-58 y 145), (Macarena-Ester; *Paz, Petra y su madre*), (Marcos-Jorge; *Adrián*), (Marcos-Jorge; *Paz, Petra y su madre*), (Paco, Paco-Lorenzo; *Adrián*; ítems 32-36) y (Paco, Paco-Lorenzo; *Paz, Petra y su madre*; ítems 113-115).

Así, Lorenzo (sujeto 12) se opone al uso de líneas de vida cuando lo plantea su compañero, Lluís (sujeto 20) las emplea en todos los problemas de la subfamilia edades y Candelaria (sujeto 6) se resiste a utilizarlas, pero acaba recurriendo a ellas cuando fracasa al resolver el problema *Adrián*[6] mediante el MHC.

En el problema *Lana y algodón*[7], las cantidades precio unitario y precio total de la tela, unidas por una relación del estilo *precio unitario-número de unidades-precio total*, también se fusionaron en la variable precio. En estos casos, se observa la generación de progresiones aritméticas con diferencia el valor del precio unitario, que proporcionan los posibles valores de la variable precio total de manera recursiva[8]. Al igual que en las líneas de vida, cuando no se conoce el número de unidades (en este caso los metros de tela de lana y algodón), se sustituye la operación con lo desconocido por la operación con valores conocidos para obtener el precio total de una unidad más de producto. De esta forma, se evita representar las cantidades desconocidas metros de tela de lana y metros de tela de algodón, aunque se tengan en cuenta implícitamente, y se centra la resolución en el cumplimiento de que la suma de los precios de los dos tipos de tela alcance el valor del precio total que se ofrecía como dato. Esto tienen como consecuencia no atender en ningún caso a la relación que liga la suma de los metros de los dos tipos de tela con los metros totales de tela.

Podemos concluir que la fusión de cantidades en variables y la posterior generación de las tablas de valores de la variable es un recurso que emplean de forma espontánea los resolutores cuando observan dificultades para resolver los problemas utilizando el MHC; aunque también hay casos en los que su uso se asocia a una facilidad para construir situaciones posibles y unirlas mediante el modelado de un proceso. Así, el estudiante que hemos llamado Lluís (sujeto 20) utilizó la hoja de cálculo en el problema *Las ovejas*[9] para describir un posible proceso que se desarrolla entre una situación inicial hipotética y la descrita en el enunciado[10]. Concretamente supuso a las 180 ovejas fuera de los corrales, después introdujo 30 en uno y, a continuación, fue metiendo una en cada corral de forma alterna hasta que todas las ovejas quedaron encerradas. Es decir, realizó una inferencia lógica que transformó el enunciado del problema en un nuevo estado del mundo en el que todas las cantidades eran conocidas, o se podían calcular a partir de otras conocidas, y cumplían las restricciones del problema. Después empleó las facilidades que ofrece la hoja de cálculo a la hora de generar secuencias numéricas para unir ambas situaciones mediante el modelado de un posible proceso que llevara de un escenario al otro, manteniendo en todo momento las restricciones del problema; es decir, generando una secuencia de nuevos estados posibles del mundo. Podríamos decir que en lugar de resolver la situación planteada en el problema, la

---

[6] Recordemos que el enunciado del problema *Adrián* decía: “Adrián tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián?”.

[7] Recordemos que el enunciado del problema *Lana y algodón* decía: “Se dispone de tela de lana y de tela de algodón. En total 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón, de 4 euros. El valor total de la tela que se dispone es de 32 euros. ¿De cuántos metros de tela de lana y de cuántos metros de tela de algodón se dispone?”.

[8] (Lluís; Alberto-Lluís; *Lana y algodón*) y (Marcos-Jorge; *Lana y algodón*; ítems 69-119).

[9] Recordemos que el enunciado del problema *Las ovejas* decía: “En una granja hay 180 ovejas en dos corrales. Si sabemos que en uno de ellos hay 30 ovejas más que en el otro, ¿cuántas ovejas hay en cada corral?”.

[10] (Lluís; Lluís-Alberto; *Las ovejas*).

construyó, utilizando la hoja de cálculo para modelizar el proceso. Para controlar cuándo había llegado a la situación propuesta en el problema necesitaba observar la verificación de una condición. Podría haber utilizado que la suma de las ovejas de los corrales fuera 180 (empleando la relación $N = Cg + Cp$, donde N sería el total de ovejas y Cg y Cp el número de ovejas en los corrales que más y menos tienen, respectivamente); pero buscó que el número de ovejas que hubiera fuera de los corrales fuera cero (empleando la relación $0 = N - Cg - Cp$). Desde el punto de vista de las cantidades, esto supondría plantear una igualdad sobre dos expresiones de una cantidad innecesaria cuyo nombre podría ser *número de ovejas que hay fuera de los corrales*. Decimos que sería innecesaria, porque podríamos resolver el problema de manera aritmética o algebraica, aunque la elimináramos de la solución. Sin embargo, dentro de la estrategia de resolución tiene un papel destacado y, al considerarla como variable, resultará necesaria, pues nos permitirá conectar las situaciones inicial y final dando sentido a las acciones que se realizan en la hoja de cálculo. Así, cada columna representará un fotograma de una película en la que todos los valores podrían ser interpretados como la descripción de un instante en la evolución desde la situación hipotética de partida, en la que las ovejas están fuera de los corrales, hasta la planteada en el problema, consiguiendo que, en todo momento, el número de ovejas presente en cada columna sea constante.

La técnica anterior plantea el agotamiento de la variable que se obtiene al restar las partes al total como condición que se debe cumplir para resolver un problema. Evidentemente, para poderla emplear, se necesita que en la situación descrita se identifique una estructura conceptual total y que el todo sea conocido. En nuestro estudio, los problemas *Las actividades deportivas*[11] y *Los tres amigos*[12] cumplían esta condición y Lluís extendió la técnica para resolverlos y la integró dentro del MHC. Así, en el problema *Las actividades deportivas*, planteó la igualdad sobre la condición de agotar el número de personas que quedaban por apuntarse, con lo que dotó de significado a las secuencias numéricas generadas como una posible explicación de cómo se llevó a cabo la inscripción desde una situación hipotética de partida hasta la planteada en el problema. En el problema *Los tres amigos*, utilizó la misma técnica, pero los valores de la situación inicial ya no describían una estado posible del mundo, pues se observaba que el dinero a repartir era mayor que el que se disponía, así como la presencia de números negativos ligados a una cantidad, el valor de un reparto, que en cualquier situación real es positiva.

7.1.1.2. El recurso a la resolución aritmética

Recordemos que habíamos seleccionado el problema *Las ovejas* para observar la tendencia a regresar a las formas de resolver aritméticas, pues, a diferencia del resto de

[11] Recordemos que el enunciado del problema *Las actividades deportivas* decía: “1375 personas se han apuntado en actividades deportivas esta temporada. En fútbol hay 2 veces más personas que en natación. En baloncesto hay 43 personas más que en fútbol y en rugby hay 29 personas más que en baloncesto. ¿Cuántas personas hay en cada actividad?”.

[12] Recordemos que el enunciado del problema *Los tres amigos* decía: “Tres muchachos ganaron 960 euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?”.

problemas del estudio de casos, disponía[13] de múltiples lecturas tanto aritméticas como algebraicas. Así, encontramos que tres[14] de las cinco parejas lo resolvieron aritméticamente; pero, no podemos establecer una relación entre el perfil de resolutor y la tendencia a realizar una lectura aritmética, pues así lo resolvieron los estudiantes más competentes y los menos competentes[15].

Entre los resolutores más competentes, hemos de señalar el caso de Lorenzo (sujeto 12) que hizo una lectura aritmética del problema *Las ovejas* que materializó mediante dos fórmulas. En la primera fórmula que introdujo operó con cantidades desconocidas, dejando el cálculo suspendido[16]; en la segunda, calculó la cantidad desconocida que era argumento de la fórmula anterior mediante una operación con cantidades conocidas, con lo que obtuvo, de manera automática, el valor de la cantidad a la que primero había asignado expresión. Posiblemente, al dejar cálculos suspendidos, se está reflejando el análisis del problema a medida que se va procesando la información presente en el enunciado. Esto podría estar respaldado por el hecho de que en la hoja de cálculo el SMS que se prevé usar no está influido por el hecho de si se utilizará el MHC o se resolverá de manera aritmética, pues se emplea el SMShc en cualquier caso. De hecho, esta actuación no hubiera sido observable si no hubiéramos tenido un registro de la secuencia, pues no sabríamos qué fórmula se ha escrito primero. Sin embargo, en el caso del lápiz y el papel, la diferencia entre ambas formas de resolver la hubiera dado el SMS empleado[17], pues si hubiéramos querido operar con cantidades desconocidas en primer lugar, hubiéramos tenido que recurrir al SMSalg.

7.1.1.3. El recurso al MC

Las resoluciones aritméticas o el uso de variables en lugar de cantidades pueden responder a decisiones adoptadas por los resolutores de acuerdo con preferencias personales y, por lo tanto, no pueden servirnos para establecer una relación causa-efecto entre dificultad para analizar un problema previendo el uso del MHC y el recurso a operar con valores conocidos para evitarlo. Sin embargo, en aquellos problemas en los que resulta complejo realizar un lectura aritmética, se observan actuaciones en las que los resolutores más competentes en el uso del MC se apoyan en el SMSalg para desencadenar el análisis del problema. Esto se manifiesta en la verbalización de

[13] Evidentemente, un problema no dispone de múltiples lecturas, pero sí que puede tener unas características que den lugar a distintas lecturas por parte de los resolutores. Permítasenos el abuso de lenguaje.

[14] (Candelaria-María; *Las ovejas*), (Macarena-Ester; *Las ovejas*) y (Paco-Lorenzo; *Las ovejas*).

[15] Sin embargo, las parejas Candelaria-María y Paco-Lorenzo, en las que estaban los estudiantes (Candelaria y Lorenzo) más competentes en la resolución de problemas, lo resolvieron correctamente; mientras que la pareja Macarena-Ester, formada por estudiantes del perfil (L_1, Com_1, HC_1), lo hicieron de manera incorrecta.

[16] Llamaremos cálculo suspendido a aquella fórmula en la que se opera con lo desconocido y que se emplea con la intención de que se realice un cálculo automático tras averiguar el valor de la cantidad desconocida que actúa como argumento de la fórmula. Los cálculos suspendidos se amparan en la idea de que *cuando sepa el valor de esta cantidad, sabré el de aquélla*.

[17] Por ejemplo, si intentáramos reflejar la solución anterior en lápiz y papel necesitaríamos recurrir al SMSalg y al uso de dos letras: una primera que se asignaría a un cálculo con una segunda a la que, a su vez, se le asignaría un cálculo aritmético.

ecuaciones[18] en el SMSalg, que expresan la lectura algebraica que realizan del problema, o en el intento de construirlas. En estos casos, el uso del MC que protagonizan los estudiantes Candelaria (sujeto 6) y Lorenzo (sujeto 12)[19] sí que nos permite concluir que no actúa como obstáculo para desencadenar el análisis del problema la necesidad de operar con cantidades desconocidas o la complejidad estructural del problema, sino que el impedimento es el SMS en el que deberán expresarse las relaciones con el fin de resolver mediante el MHC. Apuntamos como una posible causa el hecho de no haber conectado física o mentalmente la cantidad de referencia a una celda, lo que impide materializar, mediante fórmulas, las relaciones donde intervenga. De hecho, cuando se verbalizó la ecuación en el problema *Adrián*, la pareja Candelaria-María no había representado la cantidad tiempo transcurrido en la hoja de cálculo; mientras que Lorenzo, que sí que le había asignado una celda, verbalizó la ecuación teniendo la vista fija en el enunciado y, por lo tanto, prestando poca atención a la información presente en la pantalla.

En los casos en los que se produce la verbalización de una ecuación en el SMSalg, los resolutores manifiestan inicialmente que no son capaces de exportarla[20] a la hoja de cálculo, lo que nos indica que la traducción desde el SMSalg al SMShc, aunque teóricamente posible, no es automática. Parece que un elemento clave para lograrlo es poder establecer una relación entre la letra en el SMSalg y la celda de referencia en el SMShc. Posiblemente, esta sea la causa de que no lo lograra la pareja Candelaria-María, pues en ningún momento asignaron una celda a la cantidad tiempo transcurrido, que era la que se representaba mediante una letra en la ecuación verbalizada en el SMSalg. La pareja Paco-Lorenzo, que sí que consiguió la traducción, había representado en la celda B3 a la cantidad tiempo transcurrido. Los fragmentos del diálogo que mantuvieron durante la resolución del problema parecen confirmar nuestra afirmación. Así, mientras Paco manifiesta "¿Y la equis que la pones con la letra ([…])?", Lorenzo le responde "La be tres como si ([…]) fuera equis".

También es posible que influyera la destreza en el uso de la hoja de cálculo, aspecto en el que Lorenzo (se incluyó en la clase HC_2) era el más competente que Candelaria (se incluyó en la clase HC_1); pero la ausencia de más casos no nos permiten ser concluyentes. La habilidad de Lorenzo se puso de manifiesto no sólo en que relacionara letra con celda de referencia, sino en que también construyera una ecuación[21] en el lenguaje de la hoja de cálculo, usando el igual como comparador[22], para materializar la igualdad que debía cumplirse al aplicar el MHC en los problemas *Adrián* y *Paz, Petra y su madre*[23]. Así, en el problema *Adrián* representó la edad actual de Adrián en la celda

[18] Un ejemplo sería la ecuación "Tania más equis es ([…]) igual a Adrián ([…]) más equis por dos", que verbaliza Candelaria (Candelaria-María, *Adrián*, ítem 64).

[19] (Candelaria; Candelaria-María; *Adrián*; ítem 64), (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Adrián*; ítem 104) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Lana y algodón*; ítems 127-166).

[20] (Candelaria-María; *Adrián*; ítems 65-66) y (Paco-Lorenzo; *Adrián*; ítems 109-110).

[21] La construcción de ecuaciones en el lenguaje de la hoja de cálculo ya se había observado, durante la secuencia de enseñanza, en las producciones de la pareja de la que era miembro Lorenzo.

[22] (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Adrián*; ítems 114-122) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Paz, Petra y su madre*; ítem 163).

[23] Recordemos que el enunciado del problema *Paz, Petra y su madre* decía: "Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?".

B1; la edad actual de Tania, en B2; el tiempo transcurrido, en B3 y la fórmula =2*(B1+B3)=B2+B3, que hacía de ecuación, en la celda B5.

7.1.2. DIFICULTADES Y ERRORES AL USAR EL MHC

7.1.2.1. El primer paso

En el problema *Adrián*, se observa la tendencia a omitir la referencia al tiempo transcurrido cuando se repite el fragmento del enunciado "¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián?", reduciéndolo a la proposición *la edad de Tania sea el doble de la edad de Adrián*[24]. Posiblemente, esta actuación está ligada al hecho de que se considera la variable edad en lugar de la cantidad edad y se omiten los modificadores[25] que dotan de precisión en el tiempo, como las palabras *actual* o *futura*, por no ser propios de la variable: algo que se refleja en los nombres que se construyen para etiquetar las celdas. La ausencia de modificadores en los nombres que identifican a las cantidades en la hoja de cálculo también se observa en el problema *Lana y algodón*, donde no se distingue entre precio unitario y precio total; o en el problema *Paz, Petra y su madre*, donde tampoco se indica si se refieren a las edades actuales o futuras. En definitiva, se observa una tendencia a omitir modificadores de los nombres en los problemas en los que se consideran variables en lugar de cantidades. Sin embargo, no podemos discernir qué es la causa o qué el efecto, o si, sencillamente, no tiene ninguna relación.

En casos extremos, la ausencia de modificadores en la etiqueta que encabeza una fila puede llevar a considerarla un contenedor simultáneo de todas las cantidades que tienen que ver, directa o indirectamente, con un nombre[26]. Por ejemplo, en el problema *Adrián*, Macarena introduce en la misma fila, etiquetada con el nombre "Adrian", la edad actual de Adrián, la edad futura de Adrián y el doble de la edad de Adrián.

A la hora de convertir fragmentos de enunciado en relaciones entre cantidades y éstas en fórmulas, se observan errores fruto de omitir partes del texto o de aislar las proposiciones del resto del enunciado. Así, por ejemplo, en el problema *Los tres amigos*, se extrae la relación inexistente *Juan la décima parte de lo que ganó Roberto* del fragmento "Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan y la décima parte de lo que ganó Roberto", tras eliminar la conjunción y transformar el complemento de la proposición anterior (Juan) en sujeto de la siguiente[27]. En otros casos, se hace una traducción sintáctica de lo que se lee, como en el problema *Paz, Petra y su madre* en el que se convierte la proposición "años deben pasar para que, entre las dos niñas" en la suma de los años transcurridos más las edades actuales de las niñas, en lugar de sumar

[24] (Candelaria-María; *Adrián*; ítems 52-59), (Macarena-Ester; *Adrián*; ítems 96-107 y 122-133) y (Marcos-Jorge; *Adrián*; ítem 30).

[25] Un modificador es un morfema que determina o transforma palabras y otros elementos gramaticales. Por ejemplo, en *edad actual*, la palabra *edad* es el núcleo del sintagma nominal y *actual* es un modificador directo.

[26] (Candelaria; Candelaria-María; *Lana y algodón*, ítems 156-final) y (Macarena; Macarena-Ester; *Adrián*; ítems 68-73 y 134-139).

[27] (Macarena; Macarena-Ester; *Los tres amigos*; ítems 95-112) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Los tres amigos*; ítems 31-42).

las edades futuras de las niñas[28]. En el problema *Los tres amigos*, la pareja Macarena-Ester intercambia el orden de minuendo y sustraendo al materializar el fragmento de enunciado "Luis ganó veinticuatro euros menos que Juan"[29]. Quizá, no dan importancia a la conjunción *que*, o no entienden su papel, y acaban expresando la proposición *Luis ganó veinticuatro euros menos Juan*. Esta actuación, posiblemente, se ve soportada por el hecho de haber asignado el nombre "Juan" a la cantidad dinero que le corresponde a Juan. Así, si a lo que gana Juan se le llama *Juan*, la frase *Luis gana veinticuatro menos Juan*, pasa a suponer que 24 es el minuendo de una resta.

Tras la lectura del problema, la repetición verbal de fragmentos de enunciado ponen de manifiesto errores a la hora de establecer el orden de las cantidades dentro de una comparación. Así, en el problema *Adrián*, algunas estudiantes expresan *Adrián tiene que tener el doble que Tania*, alterando el orden del fragmento de enunciado "¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad de Adrián?". La actuación se produce sin que medie explicación[30], pero observándose, previamente, indecisiones sobre cuál era la cantidad que debía multiplicarse por dos[31]. De hecho, Macarena (sujeto 13), que tras los cuestionarios previos quedó incluida en la clase (L_1, Com_1, HC_1), manifestó dudas a la hora de expresar, como una operación matemática, las relaciones multiplicativas en las que se empleaban los sustantivos[32] multiplicativos y partitivos *el doble*[33] y *la décima parte*[34], respectivamente. Así, las dificultades de la pareja Macarena-Ester, en el problema *Los tres amigos*, les condujeron a reducir el fragmento "Luis ganó […] la décima parte de lo que ganó Roberto" a la proposición *la décima* y ésta, a *diez*. De este modo, la relación multiplicativa se acabó convirtiendo en un número y al intentar integrarlo nuevamente en una relación, lo hicieron, de manera incorrecta, en una relación aditiva[35].

7.1.2.2. Los pasos segundo y tercero

7.1.2.2.1. Las dificultades ligadas a la ausencia de la celda de referencia

La ausencia de celda de referencia puede provocar la necesidad de recurrir a números (valores provisionales) para poder representar la cantidad de referencia en las fórmulas que se construyen para el resto de cantidades desconocidas en el tercer paso del MHC. Esta actuación únicamente se constató en dos episodios protagonizados por la pareja Candelaria-María[36]. Por ejemplo, en el problema *Adrián*, se observa que la cantidad

---

[28] (Macarena; Macarena-Ester; *Paz, Petra y su madre*; ítems 49-final) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Paz, Petra y su madre*; ítems 58-147).

[29] (Macarena-Ester; *Los tres amigos*; ítems 27-41.)

[30] (María; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 52-59) y (Macarena; Macarena-Ester; *Adrián*; ítem 130).

[31] (María; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 31-41) y (Macarena; Macarena-Ester; *Adrián*; ítems 117-130).

[32] *Doble* y *décima* son adjetivos que se sustantivan al precederlos por los artículos determinados *el* y *la*, respectivamente.

[33] (Macarena; Macarena-Ester; *Adrián*; ítems 59-68), (Macarena; Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 57-65).

[34] (Macarena-Ester; *Los tres amigos*; ítems 44-81.)

[35] (Macarena-Ester; *Los tres amigos*; ítems 95-122.)

[36] (Candelaria; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 105-141) y (Candelaria; Candelaria-María; *Lana y algodón*, ítems 155-163).

tiempo transcurrido se representa mediante la letra *x* tras verbalizar una ecuación correcta en el SMSalg, después se verbaliza como cualquier número y, por último, se representa mediante un número concreto en una fórmula. En definitiva, cuando no se consigue conectar la cantidad de referencia con la celda de referencia, la necesidad de representarla provoca que evolucione hacia una variable que, a su vez, acaba representándose mediante un número concreto. Este hecho puede estar influido por el doble papel que juegan las celdas que representan a las cantidades desconocidas en la resolución de un problema mediante el MHC, ya que en los cuatro primeros pasos se consideran cantidades, mientras que en el quinto, representan variables.

7.1.2.2.2. Las dificultades para operar con lo desconocido

El uso del MHC implica construir fórmulas en las que se opera con lo desconocido y todos los sujetos, a excepción de Macarena (sujeto 12), fueron capaces de hacerlo. Las dificultades de Macarena se manifestaron en que evitó introducir fórmulas que tuvieran por argumento celdas vacías y cuando lo hizo, fue en respuesta a las instrucciones de su compañera. Esta tendencia la podemos relacionar con los problemas que presentó a la hora de entender el recalculado automático[37] de las fórmulas en la hoja de cálculo y con la tendencia a seguir calculando que analizaremos más adelante.

7.1.2.2.3. Las dificultades para invertir las relaciones obtenidas tras la lectura analítica

Como ya comentamos en el apartado 6.4., los problemas *Los tres amigos* y *Lana y algodón* se eligieron con la intención de analizar cómo los estudiantes resolvían las situaciones en que era necesario invertir el orden de las cantidades en, al menos, una de las relaciones obtenidas tras realizar el análisis del problema[38]. En el caso del problema *Los tres amigos*, se podía optar por modificar el orden de una relación en la que se comparaban dos cantidades desconocidas mediante una conocida y una relación que plasmaba una estructura conceptual total conocido el todo y desconocidas las partes; en el problema *Lana y algodón*, era necesario invertir el orden de las cantidades en una estructura conceptual total.

En ningún caso, se produce la inversión de cantidades sobre una estructura conceptual total, lo que provoca[39] que ninguna pareja pueda resolver el problema *Lana y algodón* de manera correcta[40]. Esto puede ser debido a que la modificación del orden de las cantidades en una relación que plasma una estructura conceptual total puede necesitar de habilidades algebraicas, como consecuencia de la falta de un soporte verbal para realizarla. Sin embargo, las relaciones de comparación de cantidades desconocidas mediante una conocida del tipo *A es el triple de B* disponen de un referente lingüístico

---

[37] (Macarena; Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 142-169 y 286-293.)

[38] El resolutor decide la representación matemática en forma de operación (u operaciones) entre cantidades al identificar una relación en un problema. Sin embargo, cuando se usa el MHC o el MC restringiendo el número de letras a emplear, puede resultar necesario modificar el orden.

[39] Recordemos que en el problema *Lana y algodón* esto era necesario para conseguir que todas las cantidades desconocidas dependieran de la cantidad de referencia.

[40] Una pareja contestó correctamente a la pregunta del problema probando valores, pero sin tener en cuenta todas las relaciones necesarias para resolverlo.

que les permite invertirse en *B es un tercio de A* mediante una inferencia analítica automatizada.

7.1.2.2.4. La modificación de las fórmulas sin atender a las relaciones

La pretensión de conseguir valores plausibles o de verificar la igualdad planteada a cualquier precio puede conducir a inventar nuevas operaciones en las que se recurre a cálculos recursivos[41] para refinar un valor provisional que se había obtenido previamente[42]. Con el mismo propósito, se puede sustituir una fórmula correcta, que expresa una relación necesaria, por otra incorrecta. Encontramos esta actuación[43] en el problema *Los tres amigos*, donde se reemplaza una fórmula en la que se multiplicaba una cantidad por diez[44] por otra en la que la misma cantidad pasa a dividirse por diez, para obtener, de esta forma, valores más pequeños. Evidentemente, estas actuaciones suponen que los valores provisionales gobiernan la gestión del proceso de resolución y no serían posibles en el caso que la igualdad se planteara sobre una cantidad desconocida, porque no existiría el referente sobre el que deben tomarse las decisiones.

7.1.2.3. El paso cuarto

La estudiante María (sujeto 17) señala la necesidad de que la igualdad se establezca sobre dos expresiones de una cantidad conocida en el problema *Adrián*; es decir, entre una celda que contenga un valor constante y otra que contenga un valor variable[45]. El origen de esta tendencia cognitiva parece encontrarse en la idea de que es poco probable que dos cantidades que varían simultáneamente puedan coincidir, lo que supondría atender a los valores provisionales representados antes que a las relaciones que se han empleado para construir las secuencias. Sin embargo, María no muestra esta tendencia cuando se plantea, en el mismo problema, la igualdad sobre operaciones con valores pertenecientes a dos filas en las que se representan líneas de vida, aunque en estas filas también se observan dos secuencias de valores variables[46]. Esto puede ser consecuencia de que al reducir los grados de libertad, pues se sabe que lo que hay en la línea de vida es cierto, se produce una disminución en la percepción de la improbabilidad de que se dé la coincidencia.

7.1.2.4. El paso quinto

7.1.2.4.1. La generación de progresiones aritméticas en lugar de replicar el paso tercero del MHC

Recordemos que llamamos replicación del paso tercero a la copia y pegado por arrastre de las fórmulas que se construyeron para expresar las relaciones que unas cantidades desconocidas tenían con otras. Se observa una tendencia a sustituir la replicación del

[41] Recordemos que llamamos cálculo recursivo a aquél en el que se calcula el valor de una cantidad a partir de otro valor que se le había asignado previamente.

[42] (Jorge; Marcos-Jorge; *Los tres amigos*; ítems 86-95.)

[43] (Candelaria-María; *Los tres amigos*; ítems 164-172) y (Marcos-Jorge; *Los tres amigos*; ítems 58-83).

[44] Ambas parejas habían materializado la relación “Luis ganó […] la décima parte de lo que ganó Roberto”, asignando a Roberto una expresión en la que se multiplicaba lo que ganó Luis por diez.

[45] (María; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 183-194.)

[46] (María; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 217-final.)

paso tercero del MHC por la generación de progresiones aritméticas de diferencia uno con origen en los valores provisionales producidos por las fórmulas que se han asignado a las cantidades desconocidas en el paso tercero[47]. Cuando dos cantidades desconocidas estén unidas mediante una relación aditiva, las secuencias numéricas obtenidas de este modo mantendrán la relación que debería haber entre los valores[48]. Esto es debido a que al generar dos progresiones aritméticas con igual distancia entre dos términos consecutivos, se conserva la diferencia existente entre los elementos iniciales de las secuencias. Sin embargo, la sustitución del replicado de fórmulas por la generación de progresiones aritméticas conducirá a soluciones incorrectas en los problemas en los que se presenten relaciones multiplicativas. Este error[49] se centró fundamentalmente en las parejas Candelaria-María y Marcos-Jorge, pero entre ambas se observa una diferencia. Mientras en la pareja Marcos-Jorge parecen convencidos desde el inicio que es así como debe hacerse; en el caso de Candelaria-María se observa desde un principio la tendencia en María (sujeto 17) y una evolución hacia actuaciones menos competentes por parte de Candelaria (sujeto 6). Así, inicialmente, Candelaria mostró la intención de replicar las fórmulas que habían construido en el paso tercero en el problema *Las actividades deportivas*[50]. El hecho de que iniciara la replicación de fórmulas antes de generar la secuencia de posibles valores de la cantidad de referencia provocó que las secuencias que se generaron estuvieran formadas por valores constantes. Quizá, la ausencia de variación fue la que le llevó a generar progresiones aritméticas para introducirla[51]. Una vez lo hizo, posiblemente, observó[52] que los valores de dos filas no verificaban la relación multiplicativa que los debería unir[53] y decidió replicar sólo la fórmula que daba cuenta de esta relación, produciendo la coexistencia de secuencias correctas, obtenidas por replicación, con incorrectas, obtenidas por generación de progresiones aritméticas. En el problema *Los tres amigos*, Candelaria planteó directamente la generación de progresiones aritméticas en lugar de replicar el paso tercero. Cuando observó que los valores de dos filas no verifican la relación multiplicativa[54], decidió replicar la fórmula

---

[47] La sustitución de la replicación del paso tercero por la generación de progresiones aritméticas ya se observó durante la secuencia de enseñanza en las parejas 1 (Candelaria-María) y 14 (Marcos-Jorge).

[48] Así, la pareja Marcos-Jorge consiguió resolver correctamente el problema *Las ovejas* aun, posiblemente, cometiendo este error, como consecuencia de que en la lectura que llevaron a cabo sólo aparecían relaciones aditivas.

[49] (Candelaria; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 169-178), (Candelaria-María; *Las actividades deportivas*; ítems 70-96), (Candelaria-María; *Los tres amigos*; ítems 49-54), (Alberto; Alberto-Lluís; *Las actividades deportivas*; ítem 100), (Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 91-95 y 170-178), (Marcos-Jorge; *Las ovejas*; 28-53), (Marcos-Jorge; *Las actividades deportivas*; ítems 53-75) y (Marcos-Jorge; *Los tres amigos*; 150-163 y 187-198).

[50] (Candelaria; Candelaria-María; *Las actividades deportivas*; ítems 66-70.)

[51] Las fórmulas asignadas a las cantidades desconocidas dependen de los valores presentes en la celda de referencia. Mientras no se genere una secuencia de posibles valores en la fila donde se ha ubicado la cantidad de referencia, la replicación de las celdas que representan las otras cantidades desconocidas producirá secuencias de valores constantes. No ser conscientes de este hecho, puede animar a introducir la variación de valores en las filas en las que se representan cantidades desconocidas mediante métodos idiosincrásicos.

[52] (Candelaria; Candelaria-María; *Las actividades deportivas*; ítems 97-103.)

[53] En el problema *Las actividades deportivas* se lee: “En fútbol hay 2 veces más personas que en natación”.

[54] En el problema *Los tres amigos* se lee: “Luis ganó […] la décima parte de lo que ganó Roberto”.

que plasmaba la relación. Sin embargo, en este caso, lo hizo de forma parcial, introduciendo la fórmula que expresaba la relación multiplicativa en algunas celdas, pero manteniendo las fórmulas de recurrencia que producían la progresión aritmética en el resto[55].

En definitiva, se observa que esta actuación parece ligada a: 1) El tipo de resolutor, ya que los únicos individuos que no la proponen son los de la clase (L_2, Com_2, HC_2). 2) La necesidad de producir variación en las celdas que representan a las cantidades desconocidas para conseguir que se verifique la igualdad[56]. Con este fin, posiblemente, se exporta, al resto de cantidades desconocidas, la generación de una progresión aritmética para obtener una secuencia de posibles valores.

7.1.2.4.2. La omisión del paso quinto del MHC

7.1.2.4.2.1. El uso del ensayo y error

Las dificultades para avanzar en el paso quinto se reflejan, en ocasiones, en la omisión del mismo, reduciéndolo al uso de una estrategia de ensayo y error en la que se van probando valores en la celda o celdas que están vacías para comprobar si se verifica una condición. El uso de esta estrategia se localizó[57] en la pareja Macarena-Ester, que estaba formada por estudiantes del perfil (L_1, Com_1, HC_1), y se dio sólo en aquellos problemas en los que se planteaba la igualdad sobre una cantidad conocida[58]. Posiblemente, el hecho de que se dé únicamente en estos problemas puede ser consecuencia de que cuando la igualdad se establece sobre una cantidad desconocida, el valor de prueba hace variar las dos celdas que se comparan y podría resultar complejo establecer relaciones causa-efecto en la evolución de los valores que guiaran el proceso. Sin embargo, la selección de los problemas empleados en nuestra investigación nos impide ser concluyentes, pues los dos únicos problemas en los que típicamente se planteaba la igualdad sobre una cantidad desconocida eran *Adrián* y *Paz, Petra y su madre*, ambos de la subfamilia edades, y esta pareja no resolvió ninguno de ellos mediante el MHC[59].

En la estrategia de ensayo y error, el valor de prueba se va refinando al observar cómo influye su variación en el valor que se compara, al establecer relaciones del tipo *si aumento el valor de prueba, aumenta el valor que se compara*. Sin embargo, en la

---

[55] (Candelaria; Candelaria-María; *Los tres amigos*; ítems 85-138.)

[56] A favor de esta afirmación, también contribuye el hecho de que únicamente se observan los casos (María; Candelaria-María; *Las actividades deportivas*; ítems 59-66) y (María; Candelaria-María; *Los tres amigos*; ítems 68-73) en los que se plantea sustituir la replicación del paso cuarto (es decir, de las dos celdas sobre las que se plantea la igualdad) por la generación de progresiones aritméticas; pero en ambos casos la propuesta fue rechazada por su compañera.

[57] También se observa en la pareja Paco-Lorenzo en el problema *Los tres amigos* (ítems 98-final), pero después de haber replicado correctamente los pasos tercero y cuarto y de que hubieran generado una secuencia de posibles valores para la cantidad de referencia. En este caso, el ensayo y error sustituye a la generación de secuencias numéricas una vez ya se tiene una idea de cuál será el resultado. Es decir, en este caso sirve para atajar a la hora de alcanzar la solución y no es reflejo de una carencia.

[58] (Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 196-final) y (Macarena-Ester; *Los tres amigos*; ítems 197-final).

[59] La única pareja que resolvió estos problemas mediante el MHC fue la formada por Paco y Lorenzo, la cual, lejos de tener una actuación poco competente, recurrió a la construcción de ecuaciones en el lenguaje de la hoja de cálculo.

pareja Macarena-Ester, se observan métodos de refinado idiosincrásicos como el uso del valor que se ha comparado como nuevo valor de prueba[60] o utilizar la diferencia entre el valor que se compara y el resultado que se debería haber obtenido[61].

7.1.2.4.2.2. La tendencia a seguir calculando.

Entre las parejas Macarena-Ester y Marcos-Jorge, se advierte una tendencia a seguir calculando una vez se ha completado el paso tercero del MHC y se observa una celda (la de referencia) vacía[62]. Quizá, consideran que las fórmulas que han introducido hasta ese momento no son más que cálculos suspendidos que proporcionarán un valor definitivo cuando se obtenga el valor de la cantidad de referencia. Esto manifestaría una tendencia a regresar a la aritmética una vez se ha iniciado la resolución de manera algebraica, pues al emplear el MHC se prevé determinar al mismo tiempo todas las cantidades desconocidas una vez se verifique la igualdad; mientras que en este caso se observa un procedimiento secuencial que responde a expectativas del tipo *cuando sepamos esta cantidad, se sabrá la otra*.

7.1.3. LA GESTIÓN DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN

7.1.3.1. El uso del conocimiento de los pasos del MHC

La reflexión sobre los pasos del MHC se utiliza como instrumento para reorganizar la resolución de un problema cuando aparecen dificultades a la hora de realizar la lectura analítica o materializar las relaciones identificadas mediante fórmulas. Fundamentalmente, se atiende a la necesidad de que hayan dos expresiones iguales de una misma cantidad[63] (paso 4 del MHC) y en sólo un caso[64] a la exigencia de que haya una celda de referencia identificada como una celda vacía[65] (paso 2 del MHC). Evidentemente, estas actuaciones no pueden observarse en las parejas más competentes en el uso del MHC (Alberto-Lluís y Paco-Lorenzo), pues no suelen presentar dificultades a la hora de resolver los problemas.

7.1.3.2. La atención a las restricciones impuestas por el contexto

El conocimiento que proporciona el contexto del escenario recreado en el enunciado actúa, en ocasiones, como referente a la hora de limitar la longitud de las secuencias de posibles valores. Así, en los problemas de la subfamilia edades, se observan casos en lo

---

[60] (Macarena; Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 205-211.)

[61] (Ester; Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 233-258.)

[62] (Macarena-Ester; *Las actividades deportivas*; ítems 77-87 y 114-127), (Jorge; Marcos-Jorge; *Las ovejas*; ítems 23-24), (Jorge; Marcos-Jorge; *Las actividades deportivas*; ítems 127-149) y (Jorge; Marcos-Jorge; *Los tres amigos*; ítems 35-42)

[63] (Candelaria; Candelaria-María; *Adrián*; ítem 62), (María; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 76-82), (Candelaria; Candelaria-María; *Las actividades deportivas*; ítem 44), (Candelaria; Candelaria-María; *Lana y algodón*; ítem 46), (Macarena; Macarena-Ester; *Adrián*; ítem 138) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Lana y algodón*; ítem 76).

[64] Quizá sea consecuencia de que, como hemos visto en el apartado 7.1.2.1.2.2., algunas parejas ven en la presencia de celdas vacías un inconveniente más que una necesidad.

[65] (Candelaria; Candelaria-María; *Adrián*; ítem 113.)

que se tiene en cuenta los valores que puede alcanzar la edad de una persona[66]. Este mismo conocimiento puede emplearse como argumento para enjuiciar la validez de una solución cuando se han superado los valores que serían plausibles sin que se verifique la igualdad[67].

7.2. CONCLUSIONES DESDE EL ESTUDIO DE GRUPO

Conviene tener presente que las conclusiones que se presentan a continuación sólo tienen validez para la población sometida al estudio y no pretenden establecer hechos generalizables a cualquier otra población. Tampoco podremos hacer responsable de las observaciones del estudio de grupo a las características de la hoja de cálculo, sino a la secuencia de enseñanza que hemos elaboramos con la finalidad de resolver problemas de manera algebraica en dicho entorno[68].

Recordemos que el estudio de grupo pretendía dar respuesta a:

> ¿Cómo influye la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo en la competencia de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales con lápiz y papel y, en especial, mediante el método cartesiano?

Tras la secuencia de enseñanza, los estudiantes abordan más problemas, aumentan el número de lecturas algebraicas e incrementan la competencia a la hora de analizar los problemas. Estas conclusiones, si pueden considerarse como tales, eran de esperar, pues el efecto de la enseñanza es el aprendizaje y, en nuestro caso, hemos enseñado a resolver problemas verbales de manera algebraica. Sin embargo, se constata una disminución en el uso del SMSalg y un aumento del SMSari, lo que supone una tendencia negativa de cara al propósito de que nuestra secuencia de enseñanza favoreciera el uso del MC, ya que este método necesita del SMSalg. El aumento de lecturas algebraicas y la disminución en el uso del SMSalg se manifiesta en un aumento significativo en la asignación de valores provisionales (números) a las cantidades desconocidas. El uso de valores provisionales se observa en algunas actuaciones de los estudiantes en el cuestionario Post como: la resolución de algunos problemas de edades mediante la construcción de tablas similares a las empleadas en la hoja de cálculo[69]; el uso del ensayo y error hasta dar con el valor[70]; la asignación de un valor arbitrario a una

---

66 (Candelaria; Candelaria-María; *Adrián*; ítems 143 y 217), (Jorge; Marcos-Jorge; *Adrián*; ítems 37 y 44-46), (Jorge; Marcos-Jorge; *Paz, Petra y su madre*; ítems 26 y 42-64) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Paz, Petra y su madre*; ítems 94-99 y 149-155).

67 (Macarena; Macarena-Ester; *Los tres amigos*; ítems 208-236) y (Lorenzo; Paco-Lorenzo; *Paz, Petra y su madre*; ítem 107).

68 Uno de los factores que podría influir negativamente en la competencia en el uso del MC (y que, por lo tanto, podría explicar algunos resultados negativos que describiremos) es la pérdida de conocimiento debido al paso del tiempo; ya que, mientras duró la secuencia de enseñanza, no se resolvieron problemas algebraicos con lápiz y papel. Sin embargo, veremos que los estudiantes muestran un aumento de la competencia a la hora de plantear algunos problemas mediante el MC, lo que iría en contra de este efecto.

69 Ver en el apartado 5.7. (Estudiante 3; *La familia de Marcos*; Cuestionario Post), (Estudiante 13; *La familia de Marcos*; Cuestionario Post), (Estudiante 16; *La familia de Marcos*; Cuestionario Post) y (Estudiante 20; *La familia de Marcos*; Cuestionario Post). Aclaremos que con "(Estudiante 3; *La familia de Marcos*; Cuestionario Post)" queremos decir "ver la actuación del estudiante 3 en el problema *La familia de Marcos* en el Cuestionario Post".

70 Ver en el apartado 5.7. (Estudiante 2; *La paga*; Cuestionario Post) y (Estudiante 21; *Bolígrafos*; Cuestionario Post).

cantidad desconocida[71], en ocasiones, para emplearlo en una serie de cálculos recursivos en los que este primer valor se emplea para calcular un valor definitivo de la cantidad desconocida[72]; o la representación de varias cantidades desconocidas mediante un cero[73], lo que podemos interpretar como la transferencia de la celda de referencia[74] a la resolución en lápiz y papel. La conjunción de los análisis cuantitativo y cualitativo de las actuaciones en el cuestionario Post nos permite ofrecer como afirmación plausible que el uso de valores provisionales para cantidades desconocidas es consecuencia de la secuencia de enseñanza, ya sea por deficiencias de la misma, por las características de la hoja de cálculo o por ambas al mismo tiempo.

Evidentemente, el descenso en el uso del SMSalg, y el aumento del SMSari, conlleva una disminución en el empleo de letras; pero esto contrasta con el incremento del uso de letras polisémicas. El aumento de letras polisémicas podría ser consecuencia de que las cantidades desconocidas se representa mediante una celda en la hoja de cálculo y que la referencia a su nombre puede quedar oculta por el hecho de que al utilizarlas como argumento de fórmulas se seleccionan mediante una acción (el uso de las flechas del teclado de edición o del ratón[75]). Esto puede llevar a considerar que las cantidades desconocidas se representan mediante una *caja* y puede restar importancia a que cada cantidad está ligada al nombre-posición de la celda[76]. Sin embargo, nos inclinamos a ofrecer como posible explicación los efectos de la tendencia (ver apartado 7.1.1.1.) a considerar variables en lugar de cantidades cuando se resuelven problemas en la hoja de cálculo[77], lo que puede acabar confundiendo como iguales cantidades distintas, como ocurría, fundamentalmente, en los problemas de la subfamilia edades con la edad actual y la edad futura. A favor de esta afirmación, tenemos que la polisemia aumenta en los problemas de edades y disminuye en el resto cuando exigimos el uso del SMSalg. Nuevamente, podríamos achacarlo a defectos de la secuencia de enseñanza o a las características de la hoja de cálculo. Sin embargo, es evidente que la intención de la instrucción no ha sido en ningún momento fomentar el uso de estrategias espontáneas que se alejaran de la utilización del MHC; aunque, de manera intencionada, la intervención de los profesores fue disminuyendo a medida que se iba avanzado en la secuencia.

Por último, se constata un aumento significativo en la construcción y asignación de nombres tanto para las cantidades conocidas como desconocidas. Esto lo podemos asociar a la necesidad de etiquetar la celda que representa a una cantidad cuando se

[71] Ver en el apartado 5.7. (Estudiante 10; *La familia de Marcos*; Cuestionario Post).

[72] Ver en el apartado 5.7. (Estudiante 5; *Pantalones y camisas*; Cuestionario Post).

[73] Ver en el apartado 5.7. (Estudiante 4; *Amelia y Enrique*; Cuestionario Post).

[74] Recordemos que, normalmente, la celda de referencia permanece vacía al finalizar el paso cuarto del MHC y, por lo tanto, la cantidad desconocida que representa suele tener asociado un valor provisional nulo.

[75] Recordemos que, durante la secuencia de enseñanza, únicamente se mostró cómo hacer referencia a las celdas argumento mediante el uso del ratón.

[76] Para confirmar esta hipótesis deberíamos ver si existe relación entre el aumento de polisemia y la forma de referirse a las celdas argumento cuando se introducen fórmulas; pero las limitaciones de nuestro trabajo nos lo impiden.

[77] Somos conscientes de que no podemos fundamentar los resultados del estudio de grupo en los del estudio de casos, pero sí que podemos dar explicaciones plausibles de algunas observaciones.

trabaja en la hoja de cálculo. Sin embargo, no se observa que la asignación de nombres tenga influencia en el éxito o fracaso en la resolución[78].

¿Influyen las características de los problemas o la pertenencia a un perfil de resolutor en las conclusiones? Si nos centramos en los problemas de la subfamilia edades se observa una disminución en la competencia a la hora de analizar los problemas, aunque se sigue observando un aumento en el número de lecturas algebraicas. Sin embargo, en el resto de problemas (es decir, aquéllos que no pertenecen a la subfamilia edades) se mejora la competencia en la lectura, llegando a producirse una disminución significativa en el uso de cantidades espurias. Esto pone de manifiesto que la secuencia de enseñanza no ha contribuido a que los estudiantes sean más competentes al resolver los problemas de la subfamilia edades, lo que sí que va en contra de que la enseñanza produce aprendizaje. Una posible causa podría ser la falta de una atención específica a las estructuras conceptuales ligadas a este tipo de problemas, pero esto choca con el conocimiento que los estudiantes muestran del paso tiempo. Otro posible origen podría ser la aparición de métodos espontáneos basados en la generación de líneas de vida que llevan a considerar la edad como una variable en lugar de como una cantidad, lo que puede conducir a no atender a la necesidad de materializar la relación entre la edad actual, la edad futura y el tiempo transcurrido cuando se emplea el SMSalg. Nuevamente, si separamos los problemas de edades de aquéllos que no lo son, se pone de manifiesto que, aunque en ambos tipos aumenta el uso de valores provisionales, sólo es significativo en el caso de los problemas de edades, lo que podemos ligar, fundamentalmente, al uso de las líneas de vida como tablas de valores al resolver con lápiz y papel.

Por lo que respecta a la influencia del perfil del resolutor en las consecuencias de la enseñanza, tanto los estudiantes que incluimos en la clase L_1 (los que quedaron por debajo de la media en el número de lecturas algebraicas en los cuestionarios previos) como los que incluimos en la clase L_2 realizaron más lecturas algebraicas y mejoraron su competencia a la hora de analizar los problemas. En ambos casos se produjo un descenso en el uso del SMSalg que se reflejó en un aumento del uso de valores provisionales para las cantidades desconocidas, siendo significativo en el caso de los estudiantes de la clase L_1.

Si atendemos a la competencia a la hora de analizar los problemas, tanto los estudiantes de la clase Com_1 (los menos competentes a la hora de analizar los problemas en los cuestionarios previos) como los de la clase Com_2 llevaron a cabo más lecturas algebraicas. Sin embargo, mientras que los sujetos de la clase Com_2 mejoraron su competencia en el análisis de los problemas, los de la clase Com_1 mostraron un empeoramiento en los indicadores tanto en la identificación de cantidades desconocidas como en el establecimiento de relaciones correctas (disminuyen) o incorrectas (aumentan). En ambos casos, se produjo un descenso en el uso del SMSalg que se plasmó en un aumento del uso de valores provisionales para las cantidades desconocidas, siendo significativo en el caso de los estudiantes de la clase Com_1.

Se observa un aumento en el número de problemas abordados y de lecturas algebraicas cuando atendemos a las dos clases en que se divide la población según su competencia en el uso de la hoja de cálculo. Por lo que respecta a la competencia en el análisis de los problemas, los sujetos de la clase HC_1 obtienen peores puntuaciones en la identificación

[78] Dejamos para otras investigaciones la posible influencia de la adecuación del nombre construido en el éxito en la resolución

de cantidades desconocidas y en el establecimiento de relaciones entre cantidades correctas, pero construyen menos relaciones incorrectas. Los individuos de la clase HC_2 incrementan su competencia en el análisis de los problemas, aumentando significativamente el reconocimiento de cantidades desconocidas sobre el total de necesarias. Nuevamente, se observa un disminución en el uso del SMSalg que se traduce en un aumento de la asignación de valores provisionales a las cantidades desconocidas, siendo significativo en el perfil HC_2.

Sería ocioso concluir que la dificultad en el análisis de los problemas y en el uso de la hoja de cálculo son dos características del estudiante que influyen negativamente en la mejora de la competencia tras la enseñanza, pues es evidente que los estudiantes con dificultades iniciales tendrán más problemas para aprender. Sin embargo, sí que podemos afirmar que el recurso a valores provisionales tras la secuencia de enseñanza se puede asociar a: la tendencia a evitar plantear problemas de manera algebraica, ser poco diestro en el análisis de los problemas o ser competente en el uso de la hoja de cálculo.

Podríamos pensar que estos resultados deberían mejorar cuando se exigiera lectura algebraica en los problemas isomorfos de los cuestionarios 2 y Post; es decir, cuando se comparan únicamente las actuaciones derivadas de una lectura algebraica de los problemas. Sin embargo, se constata una disminución en la competencia a la hora de analizar los problemas. Se identifican más cantidades necesarias tanto conocidas como desconocidas, pero se produce un descenso en la proporción de relaciones correctas sobre las que deberían construirse y un incremento de las incorrectas. También se observa una disminución significativa en el empleo del SMSalg y un aumento, también significativo, en el recurso al SMSari que se manifiesta en un incremento del uso de valores provisionales para representar a las cantidades desconocidas. En los problemas de la subfamilia edades, se constata una disminución en todos los indicadores de la competencia en el análisis de los problemas, siendo significativo el empeoramiento en lo que respecta a la construcción de relaciones entre cantidades, pues disminuye la proporción de correctas sobre la de necesarias y aumenta la de incorrectas. Sin embargo, los estudiantes aumentan la competencia al llevar a cabo la lectura analítica en el resto de problemas. El uso de SMSalg diminuye en ambos tipos de problemas, pero en los de edades se produce un aumento significativo del uso de SMSari que se ve acompañado de un incremento, también significativo, de la asignación de valores provisionales a cantidades desconocidas. Sin embargo, en los problemas que no son de edades, se advierte una disminución en la asignación de valores provisionales para las cantidades desconocidas.

Cuando se exige el empleo del SMSalg, y por lo tanto del MC, sobre el total de los problemas, se observa una disminución en la competencia a la hora de llevar a cabo la lectura analítica que se refleja en un descenso en la proporción de relaciones correctas y en un aumento de las incorrectas, aunque se observa un incremento en las cantidades conocidas y desconocidas identificadas. Al considerar únicamente los problemas de edades, se muestra una disminución en la competencia a la hora de analizarlos que se refleja en todos los indicadores, tanto los que miden la identificación de cantidades como de relaciones, que se hace significativo en el aumento de relaciones incorrectas. También se advierte un aumento en el uso de letras polisémicas que, como ya hemos señalado, se podría considerar consecuencia del uso de líneas de vida cuando se resuelven los problemas de edades en la hoja de cálculo. Estas observaciones contrastan con las de los problemas que no son de edades en los que se constata un incremento en los indicadores que miden la competencia en la lectura analítica de los problemas y también se manifiesta una disminución en el uso de letras polisémicas. Una posible explicación a esta divergencia la podríamos encontrar en la escasa competencia que mostraron los estudiantes en los problemas de la subfamilia edades durante los cuestionario previos, que, posiblemente, les llevó a adaptar al lápiz y papel estrategias que les habían resultado exitosas en la hoja de cálculo.

En definitiva, los resultados de nuestro estudio de grupo arrojan luces y sombras sobre el uso de la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo como una forma de avanzar hacia la competencia en el método cartesiano. Podemos atribuir la principal causa de las tendencias cognitivas negativas, que se observan al regresar al lápiz y papel, a las estrategias espontáneas correctas o incorrectas que usan los estudiantes. Evidentemente, permitir que aniden estas estrategias espontáneas es consecuencia de la acción (o inacción) educativa, pero su presencia pone de manifiesto que las potencialidades de la hoja de cálculo encierran peligros que es necesario tener presentes.

8. Referencias bibliográficas

Abramovich, S. y Nabors, W. (1997). Spreadsheets as Generators of New Meanings in Middle School Algebra. *Computers in the Schools*, *13*, 13-25.

Ainley, J. (1995). Reasons to be formal: contextualising formal notation in a spreadsheet environment. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *2*, 26-33.

Alspaugh, C. A. (1972). Identification of Some Components of Computer Programming Aptitude. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 89-98.

Arganbright, D. E. (1984). Mathematical Applications of an Electronic Spreadsheet. En V. P. Hansen y M. J. Zweng (Eds.), *Computers in Mathematics Education* (pp. 184-193). Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Arnau, D. (2004). *El método de la hoja electrónica de cálculo para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos: Un estudio con alumnos de primer curso de secundaria*. Tesis de máster no publicada, Universitat de València, València .

Barnett, J. (1979). The Study of Syntax Variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving* (pp. 23-68). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: a problem analysis. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psycholgy of Mathematics Education*, *2*, 64-71.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How Children View Equality Sentences* (PMDC Technical Report No. 3). Florida State University, Tallahassee, FL.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Windsor, United Kingdom: NFER-NELSON.

Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brown, A., Carpenter, T. P., Kouba, V. L., Lindquist, M. M., Silver, E. A. y Swafford, J. O. (1988). Secondary School for Fourth NAEP Mathematics Assessment: Algebra, Geometry, Mathematics Methods, and Attitudes. *Mathematics Teacher*, *81*, 337-347.

Caldwell, J. H. y Goldin, G. A. (1979). Variables Affecting Word Problem Difficulty in Elementary School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*, 323-336.

Caldwell, J. H. y Goldin, G. A. (1987). Variables Affecting Word Problem Difficulty in Secondary School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 187- 196.

Capponi, B. y Balacheff, N. (1989). Tableur et Calcul Algebrique. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 179-210.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: València.

Chaiklin, S. (1989). Cognitive Studies of Algebra Problem Solving and Learning. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 93-114). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Chalouh, L. y Herscovics (1988). Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 33-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chomsky, N. (1965). *Aspects of the theory of syntax*. Boston: MIT Press.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *1*, 16-30.

Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation Difficulties in Learning Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*, 286-290.

Clement, J., Lochhead, J. y Soloway, E. (1980). Positive effects of computer programming on students understanding of variables and equations. En *Proceedings of the American Society for Computing Machinery 1980 Annual Conference*, 467-474.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2003). *Matemáticas 2*. Madrid: Grupo Anaya.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive Development & Mathematics Learning*. Documento presentado en el Psychology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Cook, B. (1973). *An Analysis of Arithmetic Linguistic and Algebraic Structural Variables that Contribute to Problem Solving Difficulty in Algebra Word Problems*. Documento presentado en el *Annual Meeting of The American Educational Research Association*. New Orleans, LA. (ERIC Document Reproduction Service No ED076433.)

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Drouhard, J. P. y Teppo, A. R. (2004). Symbols and Language. En K. Stacey, H. L. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 227-264). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eco, U. (2001). *Cómo se hace una tesis* [Traducido por L. Baranda y A. Clavería]. Barcelona: Gedisa. (Trabajo original publicado en 1977.)

Feurzeig, W., Papert, S., Bloom, M., Grant, R. y Solomon, C. (1970). Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. *SIGCUE Outlook*, *4*(2), 13-17.

Filloy, E. (1987). Modelling and the Teaching of Algebra. En J. C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *1*, 298-300.

Filloy, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. En G. Booker, P. Coob y T. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *1*, PII 1-PII 33.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*, 327-342.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 155-175). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fisher, K. M. (1988). The Students-and-Professors Problem Revisited. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 260-262.

Frege, G. (1973). *Estudios sobre semántica* [Traducido por U. Moulines]. Barcelona: Ariel. (Originales publicados entre 1884 y 1904.)

Fridman, L. M. (1975). The mechanisms of solving arithmetic problems. En J. W. Wilson (Ed.), *Analyses of Reasoning Processes (Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. 13)* (pp. 79-87). Chicago: School Mathematics Study Group Stanford University and Survey of Recent East Europe Mathematical Literature.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51-59.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del algebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *9*, 71-75.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *2*, 337-344.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 252-257). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Goldin, G. A. (1979). Structure Variables in Problem Solving. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving* (pp. 103-169). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Hanegreefs, H. (2006). La construcción preposicional con mirar: un análisis sintáctico-semántico. *Boletín de Lingüística*, *18*(25), 22-65.

Haspekian, M. (2005a). An "Instrumental Approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teachings: The case of spreadsheet. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*, 109-141.

Haspekian, M. (2005b). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques: Étude du cas des tableurs*. Tesis doctoral no publicada, Université Paris 7, París.

Hatfield, L. L. y Kieren, T. E. (1972). Computer-Assisted Problem Solving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 99-112.

Healy, L., Pozzi, S. y Sutherland, R. (2001). Reflections on the Role of the Computer in the Development of Algebraic Thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 231-247). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 59-78.

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1999). Tools to think with: Detecting different strategies in solving arithmetic word problems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 255-273.

Jerman, M. y Ress, R. (1972). Predicting the Relative Difficulty of Verbal Arithmetic Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, 306-323.

Kaput, J. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (1995). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform? En D. T. Owens, M. K. Reed y G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of 17th PME-NA Annual Meeting*, *1*, 71-94.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York: MacMillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*, 230-240.

Kieran, C. y Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technological Environments in Algebra Learning and Teaching. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 99-152). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop* (pp. 7-20). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kirshner, D. (1987). *The grammar of symbolic elementary algebra*. Tesis doctoral no publicada, The University of British Columbia, Vancouver, Canada.

Kirshner, D. (2001). The Structural Algebra Option Revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 83-98). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Kulm, G. (1979). The Classification of Problem-Solving Research Variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving* (pp. 1-21). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 217-232.

Mafei, L. y Mariotti, M. A. (2006). A remedial intervention in algebra. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 113-120.

Mariotti, M. A. y Cerulli, M. (2001). Semiotic mediation for algebra teaching and learning. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 225-232.

McArthur, D. y Stasz, C. (1990). *An Intelligent Tutor for Basic Algebra*. Santa Mónica, CA: The RAND Corporation.

Mochón, S., Rojano, T. y Ursini, S. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*. México, D.F.: Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. SEP, ILCE, CONACYT.

Nesher, P. (1976). Three Determinants of Difficulty in Verbal Arithmetic Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 369-388.

Nicaud, J. F., Bouhineau, D. y Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and CAS Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 169-211.

Noss, R. (1986). Constructing a conceptual framework for elementary algebra through LOGO programming. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 335-357.

Oliver, J. y Zukerman, I. (1991). DISSOLVE: An Algebra Expert for an Intelligent Tutoring System. En R. Lewis y S. Otsuki (Eds.), *Proceedings of the IFIP TC3 Advanced Research on Computer in Education* (pp. 219-224). Amsterdam: Elsevier.

Palarea, M. y Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *SUMA*, *20*, 29-35.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [Traducido por J. Zagazagoitia]. México, D.F.: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945.)

Polya, G. (1966). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 113-127.

Puig, L. (1998). *Poner un problema en ecuaciones*. Manuscrito no publicado.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México, D.F.: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la SEIEM*, 107-126.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, México: PNFAPM.

Real Academia Española de la Lengua. (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Espasa-Calpe.

Roberts, R. S. y Moore, M. L. (1984). Programming to Learn Problem Solving. En V. P. Hansen y M. J. Zweng (Eds.), *Computers in Mathematics Education* (pp. 162-170). National Council of Teachers of Mathematics.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 137-145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1993). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. En I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*, *1*, 189-196.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1997). Pupils' Strategies and the Cartesian Method for Solving Problems: The Role of Spreadsheets. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Psychology of Mathematics Education Conference*, *4*, 72-79.

Rojano, T. y Ursini, S. (1997). *Enseñando Álgebra con Hojas Electrónicas de Cálculo*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rubio, G. (1994). *Modelos didácticos para resolver problemas verbales aritmético-algebraicos. Tesis teóricas y observación empírica*. Tesis doctoral no publicada, CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Schoen, H. L. (1988). Teaching Elementary Algebra with a Word Problem Focus. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 119-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of "Out Loud" Problem-Solving Protocols. *Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 171-191.

Schwartz, J. L. (1996). Socratic Tutoring with Software: An Example and a Prospectus. En J. M. Laborde (Ed.), *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp. 188-202). Berlin: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1981). Misconceptions of Probability: From Systematics Errors to Systematic Experiments and Decisions. En A. P. Shulte y J. R. Smart (Eds.), *Teaching Statistics and Probability* (pp. 90-100). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Simpson, J. y Weiner, E. (1989). *The Oxford English Dictionary*. Oxford: Clarendon Press.

Solares, A. (2007). *La representación de la incógnita: Significados y sentidos generados para la solución de sistemas de ecuaciones de dos incógnitas*. Tesis doctoral no publicada, CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*, 149-167.

Sutherland, R. (1987). What are the links between variable in Logo and variable in algebra? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *8*, 103-130.

Sutherland, R. y Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *4*, 1-26.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 353-383.

Tabach, M. y Friedlander, A. (2004). Levels of student responses in a spreadsheet-based environment. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *4*, 423-430.

Tabach, M. y Friedlander, A. (2008). Understanding Equivalence of Symbolic Expressions in a Spreadsheet-Based Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*, 27-46.

Tabach, M., Hershkowitz, R. y Arcavi, A. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*, 48-63.

Thomas, O. J., Monaghan, J. y Pierce, R. (2004). Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, Assessment, Teaching and Learning. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 155-186). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (1989). Artificial Intelligence, Advanced Technology, and Learning and Teaching Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 135-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Ursini, S. (2001). General methods: a way of entering the world of algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 209-229). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 63-75.

Vlassis, J. (2002). Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 341-359.

Wagner, S. y Kieran, C. (1988). An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 220-237). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, K. (2006). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education*, *8*, 117-132.

Wilson, K., Ainley, J. y Bills, L. (2004). Spreadsheet generalising and paper and pencil generalising. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *4*, 441-448.

Wilson, K., Ainley, J. y Bills, L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *4*, 321-328.

Yerushalmy, M. y Chazan, D. (2002). Flux in School: Curricular Change, Graphing Technology, and Research on Student Learning and Teacher Knowledge. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 725-755). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.