DEPARTAMENT D'ÀLGEBRA

CORRESPONDENCIAS DE CARÁCTERES DE GRUPOS FINITOS.

PABLO CENTELLA BARRIO

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Servei de Publicacions
2010

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 7 de setembre de 2010 davant un tribunal format per:

- Dr. Francisco Pérez Monasor
- Dr. Antonio Beltrán Felip
- Dra. Conchita Martínez Pérez
- Dr. Josu Sangroniz Gómez
- Dra. Lucía Sanús Vitoria

Va ser dirigida per:
Dr. Gabriel Navarro Ortega
Dr. Alexander Moretó Quintana

Dipòsit legal: V-3490-2011
I.S.B.N.: 978-84-370-7940-0
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Arts Gràfiques, 13 baix
46010 València
Spain
Telèfon:(0034)963864115

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
DEPARTAMENT D'ÀLGEBRA

Correspondencias de Caracteres de Grupos Finitos

Memoria presentada por
PABLO CENTELLA BARRIO
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas, dirigida por
GABRIEL NAVARRO ORTEGA y
ALEXANDER MORETÓ QUINTANA
Mayo, 2010

D. Gabriel Navarro Ortega, catedrático universitario del Departamento de Álgebra de la Universitat de València,

y Alexander Moretó Quintana, profesor titular del Departamento de Álgebra de la Universitat de València.

CERTIFICAN:

Que la presente Memoria, titulada "Correspondencias de Caracteres de Grupos Finitos", ha sido realizada bajo nuestra dirección por D. Pablo Centella Barrio para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Lo que hacemos constar en cumplimiento de la legislación vigente.

Burjassot, 11 de mayo de 2010

Fdo. Gabriel Navarro Ortega   Fdo. Alexander Moretó Quintana

A mis padres

Agradecimientos

A Gabriel Navarro, por su ayuda y orientación durante todo este tiempo, y por su libro, que desarrolla la Teoría de Caracteres de Brauer en profundidad, sin dejar de ser accesible.

A Alexander Moretó, por sus consejos.

A los miembros del Departamento de Álgebra de la Universitat de València, por su apoyo y lo fácil que ha sido trabajar junto a ellos.

A Martin Isaacs, por sus excelentes artículos y su libro sobre Teoría de Caracteres Ordinarios - siempre escritos con una gran claridad.

Al Ministerio de Educación y Ciencia de España, por el apoyo recibido mediante la concesión de una beca FPU (referencia AP2005-4763), de la cual disfruté del 1 de Abril de 2006 al 31 de Marzo de 2010.

A mi familia, por su apoyo y su comprensión.

A mis amigos, que me han animado a seguir hacia adelante.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos (incluyendo este Capítulo 1 a modo de introducción general). Los resultados originales se encuentran en los capítulos 3 y 4. Los resultados principales los denotaremos como Teorema A, Corolario B, ... y han sido publicados en [1] y [2].

En el Capítulo 2, hacemos un breve repaso a la Teoría de Caracteres Ordinarios y de Brauer, explicando los conceptos y resultados que usaremos en los otros capítulos. El carácter proyectivo indescomponible principal juega un papel esencial en el Capítulo 3 de esta Memoria. Recordaremos en el Capítulo 2 que si p es un primo y G es un grupo finito que tiene un p-complemento H, si denotamos $\Phi_{1_{G^0}}$ al carácter proyectivo indescomponible principal de G, se tiene que $\Phi_{1_{G^0}}$ es igual a $(1_H)^G$, el carácter inducido por el carácter principal de H en G.

Uno de los problemas fundamentales de la Teoría de Caracteres es la Conjetura de McKay. La Conjetura de McKay afirma que si G es un grupo finito, p es un primo, y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, se cumple que

$$|\mathrm{Irr}_{p'}(G)| = |\mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))|\,,$$

donde $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ es el conjunto de caracteres irreducibles de G de p'-grado (esto es, caracteres de grado no divisible por p). Esto equivale a que existe una biyección entre los conjuntos de caracteres $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))$. En general, no se cree que exista una biyección natural entre estos dos conjuntos. (A lo largo de este trabajo, cuando digamos que una aplicación es natural o canónica, queremos decir que está definida explícitamente, sin ningún tipo de elección que pudiese cambiar su definición). Aunque, como hemos dicho, se sospecha que no existen biyecciones naturales

$$\mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))\,,$$

bajo ciertas hipótesis adicionales, diversos autores han logrado construirlas.

Denotemos $N = \mathrm{N}_G(P)$. G. Navarro, en [15], pudo hallar una biyección natural entre los conjuntos $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(N)$, en el caso en que G es un grupo finito p-resoluble en el que $N = P$. Esta biyección es muy sencilla de describir: si $\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(G)$ y $\lambda \in \mathrm{Irr}_{p'}(P)$, se corresponden si y sólo si $\chi^* = \lambda$ es el único constituyente irreducible de χ_P de p'-grado. En particular, $\chi(1) \equiv \chi^*(1) \bmod p$, un hecho que resulta fundamental a la luz de la llamada Conjetura de Isaacs-Navarro (véase [11]). En el Capítulo 3 extendemos esta biyección, y en el Teorema A obtenemos una biyección canónica

$$\Gamma : \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}}) \to \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{N^0}}),$$

donde $\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})$ son los caracteres de $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ que son constituyentes irreducibles del carácter proyectivo $\Phi_{1_{G^0}}$. La correspondencia Γ cumple una serie de propiedades: por ejemplo, si $\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})$, entonces $\Gamma(\chi)$ es un constituyente irreducible de χ_N, y su grado divide al grado de χ. Esta correspondencia, por ser natural, conmuta con la acción del grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q})$. Además, en el caso en que $N = P$, recuperamos la biyección de Navarro de [15].

En realidad, trabajaremos con grupos π-separables (donde π es un conjunto de números primos), así que relajaremos aún más las hipótesis de la biyección de [15]. Usando la biyección Γ, obtenemos los Corolarios B y C. En particular, podemos contar con exactitud el número de caracteres racionales de grado impar de un grupo finito resoluble en términos locales. También obtenemos una desigualdad que podría ser cierta para todos los grupos finitos.

Para llegar a esta biyección, necesitaremos trabajar con diversos conceptos, como los caracteres π-especiales de D. Gajendragadkar, la extensión que de ellos hizo M. Isaacs con los caracteres $\mathrm{B}_\pi(G)$, y también con los caracteres satélite introducidos por M. Isaacs y G. Navarro en [10].

Hay otros casos en los que se ha podido probar que existen correspondencias naturales entre $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(N)$. En 1973, M. Isaacs encontró una biyección natural cuando G es resoluble y $|G : N|$ es impar. Más recientemente, en 2008, A. Turull encontró otra biyección natural si G es resoluble y $|N|$ es impar. En el Capítulo 4, conseguimos una biyección canónica para grupos resolubles, con hipótesis más generales que las de Turull. Nuestra estrategia es nueva: en lugar de imponer condiciones al grupo, restringimos el dominio de la aplicación canónica. Más concretamente, en el Teorema D obtenemos una biyección canónica

$$^* : \mathrm{B}_{2'}(G) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{B}_{2'}(N) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(N).$$

Esta biyección canónica satisface, de nuevo, varias propiedades fundamentales, entre ellas las de la congruencia $\chi(1) \equiv \pm\chi^*(1) \bmod p$, predicha por la Conjetura de Isaacs-Navarro en [11].

Si ^{0} denota restricción a $2'$-elementos, se tiene que ^{0} define una biyección canónica de $\mathrm{B}_{2'}(G)$ al conjunto de caracteres de 2-Brauer irreducibles $\mathrm{IBr}(G)$, y por tanto, a partir de la biyección $^* : \mathrm{B}_{2'}(G) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{B}_{2'}(N) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(N)$ obtenemos una biyección canónica

$$\mathrm{IBr}_{p'}(G) \to \mathrm{IBr}_{p'}(N)\,,$$

donde $\mathrm{IBr}_{p'}(G)$ denota el conjunto de caracteres de 2-Brauer de G de p'-grado. Usando esta correspondencia canónica, podemos probar fácilmente el Corolario E, que es el resultado principal de [18], y que afirma que si G un grupo resoluble y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces $\mathrm{N}_G(P)$ tiene un 2-subgrupo de Sylow normal si y sólo si 1_{G^0} es el único carácter real de 2-Brauer de G de p'-grado. Este es un resultado más en la serie de resultados sobre cómo la tabla de caracteres de un grupo finito G contiene información local.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción

En este capítulo, en primer lugar, hacemos una breve introducción a algunos conceptos básicos de la Teoría de Caracteres Ordinarios, citando diversos resultados conocidos que usaremos a lo largo de este trabajo, sin demostrar ninguno de ellos.

Más adelante, también haremos una introducción a la Teoría de Caracteres de Brauer, demostrando en este caso lo necesario para probar que si G un grupo finito, p un primo y H un p-complemento de G, entonces $\Phi_{1_{G^0}}$, el carácter proyectivo indescomponible principal de G, es igual a $(1_H)^G$, el carácter inducido por el carácter principal de H en G. Después de esto, citaremos otros resultados que utilizaremos. Confiamos en que después de esta introducción, el lector podrá leer con más facilidad los principales capítulos de esta Memoria.

2.2. Caracteres Ordinarios

Sea G un grupo finito. En general, seguiremos la notación de [8] para caracteres ordinarios.

Denotaremos por $\mathrm{cf}(G)$ al conjunto de funciones de clase complejas de G (esto es, funciones $\alpha : G \to \mathbb{C}$ que son invariantes en cada clase de conjugación).

Recordamos que una representación compleja de G es un homomorfismo de grupos $\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La representación $\mathcal{X}$ origina el carácter $\chi : G \to \mathbb{C}$ dado por

$$\chi(g) = \mathrm{Traza}(\mathcal{X}(g)) \,.$$

El primer resultado fundamental es que dos representaciones $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ originan el mismo carácter si y sólo si existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tal que $M^{-1}\mathcal{X}(g)M = \mathcal{Y}(g)$ para todo $g \in G$.

Los caracteres irreducibles de G, $\mathrm{Irr}(G)$, son los caracteres que no son suma de dos caracteres, y se tiene que $\mathrm{Irr}(G)$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{cf}(G)$. En particular, $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)|$, el número de clases de conjugación de G. Denotamos por $\mathrm{Ch}(G)$ al conjunto de caracteres de G.

Si $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$, decimos que $\chi(1) \in \mathbb{N}^*$ es el grado de χ, y se dice que χ es lineal si y sólo si su grado es 1 (además, en este caso, se tiene que $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$). A la función constante 1_G le llamamos carácter principal de G.

Teorema 2.2.1. *Sea* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. *Entonces* $\chi(1)$ *divide a* $|G|$.

Demostración. Teorema 3.11 de [8] ∎

Denotamos por

$$[\cdot,\cdot] : \mathrm{cf}(G) \times \mathrm{cf}(G) \to \mathbb{C}$$

al producto interno definido por

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \alpha(x)\overline{\beta(x)}\,,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathrm{cf}(G)$. La Primera Relación de Ortogonalidad afirma que $\mathrm{Irr}(G)$ es una base ortonormal para este producto interno, y por tanto, si $\alpha \in \mathrm{cf}(G)$, se tiene que

$$\alpha = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} [\alpha, \chi]\chi\,,$$

y $\alpha \in \mathrm{Ch}(G)$ si y sólo si $[\alpha, \chi] \in \mathbb{N}$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ (pero no son todos cero).

Si $\alpha, \beta \in \mathrm{Ch}(G)$, decimos que β es un constituyente de α si

$$[\beta, \chi] \leq [\alpha, \chi] \text{ para todo } \chi \in \mathrm{Irr}(G)\,.$$

Además, si $\beta \in \mathrm{Irr}(G)$ es un constituyente de α, decimos que es un constituyente irreducible de α. Denotamos al conjunto de constituyentes irreducibles de α por $\mathrm{Irr}(\alpha)$; así, se tiene que

$$\mathrm{Irr}(\alpha) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid [\alpha, \chi] \neq 0\}\,.$$

A partir de la Primera Relación de Ortogonalidad podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2 (Segunda Relación de Ortogonalidad)**.** *Sean $g, h \in G$, y denotemos por $\mathrm{Cl}(g), \mathrm{Cl}(h)$ a sus respectivas clases de conjugación en G. Entonces*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = |\mathrm{C}_G(g)|\delta_{\mathrm{Cl}(g),\mathrm{Cl}(h)}\,.$$

Demostración. Esto es el Teorema 2.18 de [8]. ∎

Se define el núcleo de un carácter $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$ como el núcleo de cualquier representación que origina dicho carácter, y lo escribimos como $\ker(\chi)$. Además, se tiene que

$$\ker(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}\,.$$

Si $\ker(\chi) = 1$, decimos que χ es fiel.

Lema 2.2.3. *Sea $N \lhd G$.*

(a) *Si $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$ y $N \subseteq \ker(\chi)$, entonces χ es constante en las coclases de N en G, y si definimos una función $\hat{\chi}$ en G/N mediante $\hat{\chi}(gN) = \chi(g)$, tenemos que $\hat{\chi} \in \mathrm{Ch}(G/N)$.*

(b) *Si $\hat{\chi} \in \mathrm{Ch}(G/N)$, entonces si definimos una función χ en G mediante $\chi(g) = \hat{\chi}(gN)$, tenemos que $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$.*

(c) *En cualquiera de los anteriores casos, se tiene que $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ si y sólo si $\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(G/N)$.*

Demostración. Esto es el Lema 2.22 de [8]. ∎

Usando este lema, identificaremos $\hat{\chi}$ con χ, y usando esta identificación, tenemos que $\mathrm{Irr}(G/N) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid N \subseteq \ker(\chi)\}$.

Si $G' = [G, G]$ es el subgrupo derivado de G, entonces se tiene que un carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ es lineal si y sólo si $\chi \in \mathrm{Irr}(G/G')$.

Si π es un conjunto de números primos, definimos

$$\mathrm{Irr}_\pi(G) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \chi(1) \text{ es un } \pi\text{-número}\}\,.$$

Denotaremos por π' el conjunto de números primos que no están en π. Si $\pi = \{p\}$, donde p es un número primo, escribiremos $\mathrm{Irr}_p(G) = \mathrm{Irr}_\pi(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(G) = \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$.

Si $\chi, \psi \in \mathrm{Ch}(G)$, definimos el producto de estos caracteres como la función $\chi\psi$ en G dada por $\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g)$. Se tiene que $\chi\psi \in \mathrm{Ch}(G)$, y el conjunto de caracteres lineales de G es un grupo abeliano bajo esta operación.

Sea $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$. Sea $\mathcal{X}$ una $\mathbb{C}$-representación que origina el carácter χ, y definimos la siguiente aplicación en G:

$$\det(\chi)(g) = \det \mathcal{X}(g)$$

Entonces, $\det(\chi)$ está bien definido (esto es, es independiente de la representación escogida), y $\det(\chi)$ es un carácter lineal de G (notemos que si χ es lineal, entonces $\det(\chi) = \chi$). Decimos que el orden de χ (y lo escribimos como $o(\chi)$) es el orden de $\det(\chi)$ como miembro del grupo de caracteres lineales de G.

Supongamos que $H \leq G$. Si $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$, la restricción de χ a H, que representamos por χ_H, es un carácter de H. Si $\phi \in \mathrm{Ch}(H)$, definimos la función ϕ^G en G dada por

$$\phi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi^*(g^x)\,,$$

donde $\phi^*(h) = \phi(h)$ para todo $h \in H$, y $\phi^*(g) = 0$ para todo $g \notin H$. Entonces, se tiene que $\phi^G \in \mathrm{Ch}(G)$, y a ϕ^G le llamamos carácter inducido por ϕ en G. Es trivial comprobar que $\phi^G(1) = |G : H|\phi(1)$.

A lo largo de este trabajo usaremos estas sencillas igualdades:

(a) Si $H \leq K \leq G$ y $\phi \in \mathrm{Ch}(H)$, entonces $(\phi^K)^G = \phi^G$.

(b) Si $H, K \leq G$ donde $HK = G$, y $\phi \in \mathrm{Ch}(H)$, entonces $(\phi^G)_K = (\phi_{H \cap K})^K$.

Lema 2.2.4. *Sea $H \leq G$, y sea $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$. Entonces*

$$\ker(\theta^G) = \bigcap_{x \in G} (\ker(\theta))^x\,.$$

Demostración. Esto es el Lema 5.11 de [8]. ∎

Lema 2.2.5 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Sea $H \leq G$, y sean $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$ y $\phi \in \mathrm{Ch}(H)$. Entonces $[\chi, \phi^G] = [\chi_H, \phi]$.*

Demostración. Esto es el Lema 5.2 de [8]. ∎

Si $H \leq G$ y $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$, definimos

$$\mathrm{Irr}(G|\theta) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid [\chi_H, \theta] \neq 0\}\,.$$

Así, por la reciprocidad de Frobenius, $\mathrm{Irr}(G|\theta) = \mathrm{Irr}(\theta^G)$, y decimos que θ está bajo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ (o que χ está por encima de θ) cuando $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$.

Hacemos notar que podemos combinar esta notación con la de caracteres de π-grado: por ejemplo,

$$\mathrm{Irr}_\pi(G|\theta) = \mathrm{Irr}(G|\theta) \cap \mathrm{Irr}_\pi(G)$$

son los constituyentes irreducibles de θ^G de π-grado.

Un carácter homogéneo es un carácter que es múltiplo de un irreducible. Un carácter cuasiprimitivo es un carácter irreducible cuya restricción a cada subgrupo normal es un carácter homogéneo. Un carácter primitivo es un carácter que no puede expresarse como el carácter inducido por un carácter de un subgrupo propio (los caracteres primitivos son cuasiprimitivos - véase el Corolario 6.12 de [8]).

Sea ahora $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Si $g \in G$, entonces

$$\chi(g) = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n \,,$$

donde $(\epsilon_i)^{|G|} = 1$ para todo i. Así, para todo $g \in G$, $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{|G|}$, el menor cuerpo contenido en $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ y a una raíz $|G|$-ésima primitiva de la unidad. Uno de los principales teoremas de la Teoría de Caracteres es el Teorema de Brauer, que afirma que si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, entonces existe una representación $\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{|G|})$ que origina el carácter χ (véase el Teorema 10.3 de [8] - este teorema tuvo consecuencias importantes en la Teoría de Números). Ahora, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q})$, entonces $\mathcal{X}^\sigma(g) = (\mathcal{X}_{ij}(g)^\sigma)$ define otra representación que origina el carácter definido por $\chi^\sigma(g) = \chi(g)^\sigma$ para todo $g \in G$. En definitiva, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q})$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(G)$.

Sea $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$. Decimos que χ es real si $\chi(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in G$. Análogamente, decimos que χ es racional si $\chi(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in G$. Por tanto, si denotamos por $\mathbb{Q}(\chi)$ al menor cuerpo que contiene a $\mathbb{Q}$ y a $\chi(g)$ para todo $g \in G$, tenemos que χ es racional si y sólo si $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}$, y χ es real si y sólo si $\mathbb{Q}(\chi) \leq \mathbb{R}$.

Sea $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$ un carácter lineal. Entonces

$$\lambda : G \to \mathbb{C}^*$$

es un homomorfismo de grupos multiplicativos, y como G es finito, deducimos que $\lambda(g)$ es una raíz de la unidad para todo $g \in G$. Así, λ es real si y sólo si para cada $g \in G$, $\lambda(g) = 1$ o $\lambda(g) = -1$. En particular, un carácter lineal λ es real si y sólo si es racional.

2.3. Algunos Resultados Básicos

Para la comodidad del lector, enunciamos algunos de los resultados de uso más frecuente en los principales resultados de esta Memoria.

Teorema 2.3.1 (Burnside)**.** *Sea G un grupo finito de orden impar, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ diferente de 1_G. Entonces $\chi \neq \bar{\chi}$, esto es, χ no es real.*

Supongamos que $N \lhd G$. Si $\theta \in \mathrm{cf}(N)$ y $g \in G$, entonces se define $\theta^g \in \mathrm{cf}(N)$ mediante

$$\theta^g(n) = \theta(n^{g^{-1}}) = \theta(gng^{-1}) \text{ para todo } n \in N\,,$$

y decimos que θ y θ^g son conjugados. Además, se tiene que $\theta \in \mathrm{Ch}(N)$ si y sólo si $\theta^g \in \mathrm{Ch}(N)$, y $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ si y sólo si $\theta^g \in \mathrm{Irr}(N)$. Esto define una acción de G en $\mathrm{Irr}(N)$, y si $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$, definimos $\mathrm{I}_G(\theta)$ como el estabilizador de θ en G, esto es,

$$\mathrm{I}_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}\,.$$

por lo que $\mathrm{I}_G(\theta) \leq G$.

Teorema 2.3.2 (Clifford)**.** *Sea $N \lhd G$, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Sea θ un constituyente irreducible de χ_N. Sean $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_t$ los diferentes G-conjugados de θ. Entonces se tiene que*

$$\chi_N = e\sum_{i=1}^{t} \theta_i$$

para cierto número positivo e.

Demostración. Esto es parte del Teorema 6.2 de [8]. ∎

Teorema 2.3.3 (Correspondencia de Clifford)**.** *Sea $N \lhd G$, y sea $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Denotamos $T = \mathrm{I}_G(\theta)$. Entonces la aplicación $\psi \mapsto \psi^G$ es una correspondencia biyectiva de $\mathrm{Irr}(T|\theta)$ en $\mathrm{Irr}(G|\theta)$.*

Demostración. Esto es parte del Teorema 6.11 de [8]. ∎

Proposición 2.3.4 (Correspondencia de Gallagher)**.** *Sea $N \lhd G$, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $\chi_N = \theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Entonces, la aplicación $\beta \mapsto \beta\chi$ es una correspondencia biyectiva de $\mathrm{Irr}(G/N)$ en $\mathrm{Irr}(G|\theta)$.*

Demostración. Esto es el Corolario 6.17 de [8]. ∎

Teorema 2.3.5. *Sea $N \lhd G$, donde $|G : N| = p$, un número primo, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Entonces ocurre una de estas dos situaciones:*

(a) $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$, *o bien*

(b) $\chi_N = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$, *donde $\theta_i \in \mathrm{Irr}(N)$ son G-conjugados y diferentes entre sí.*

Demostración. Esto es el Corolario 6.19 de [8]. ∎

Teorema 2.3.6. *Sea $N \lhd G$, y sea $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ G-invariante. Supongamos que $(|G:N|, o(\theta)\theta(1)) = 1$ (nótese que, en particular, esto se cumple cuando $(|G:N|, |N|) = 1$). Entonces existe un único carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ (al que llamamos extensión canónica de θ a G) tal que $\chi_N = \theta$ y $(|G:N|, o(\chi)) = 1$. Además, se cumple que $o(\chi) = o(\theta)$.*

Demostración. Esto es el Corolario 8.16 de [8]. ∎

Lema 2.3.7 (Glauberman)**.** *Sean G y S grupos finitos tales que $(|G|, |S|) = 1$, y S actúa por automorfismos sobre G. Supongamos que tanto G como S actúan sobre un conjunto Ω de manera que*

(a) *$(\alpha \cdot g) \cdot s = (\alpha \cdot s) \cdot g^s$ para todo $\alpha \in \Omega$, $g \in G$ y $s \in S$.*

(b) *La acción de G sobre Ω es transitiva.*

Entonces S fija un punto de Ω.

Demostración. Esto es el Lema 13.8 de [8]. ∎

Corolario 2.3.8. *Bajo las mismas hipótesis y notación del Lema 2.3.7, el conjunto de puntos de Ω fijados por S es una órbita bajo la acción de $\mathrm{C}_G(S)$.*

Demostración. Esto es el Corolario 13.9 de [8]. ∎

Sea S un grupo finito que actúa por automorfismos sobre otro grupo finito G. Si χ es un carácter de G y $s \in S$, podemos definir el carácter χ^s de G mediante la igualdad $\chi^s(g^s) = \chi(g)$ para todo $g \in G$. De esta manera, S también actúa sobre el conjunto $\mathrm{Irr}(G)$. Por otro lado, si $x_1, x_2 \in G$ son G-conjugados y $s \in S$, entonces x_1^s y x_2^s también lo son, por lo que S también actúa sobre $\mathrm{Cl}(G)$, el conjunto de clases de conjugación de G, mediante la igualdad $\mathrm{Cl}(x)^g = \mathrm{Cl}(x^g)$.

Teniendo en cuenta que $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)|$, es natural preguntarse si las acciones de S en los conjuntos $\mathrm{Irr}(G)$ y $\mathrm{Cl}(G)$ son permutación-isomorfas, esto es, si existe una biyección $\alpha : \mathrm{Irr}(G) \to \mathrm{Cl}(G)$ tal que $\alpha(\chi^s) = \alpha(\chi)^s$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ y todo $s \in S$. En general, esto no se cumple, pero sí que es cierto si se exigen condiciones adicionales sobre S y G, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.9. *Sea S un grupo finito que actúa sobre otro grupo finito G, donde S es resoluble y $(|G|, |S|) = 1$. Entonces las acciones de S en los conjuntos $\mathrm{Irr}(G)$ y $\mathrm{Cl}(G)$ son permutación-isomorfas.*

Demostración. Esto es parte del Teorema 13.24 de [8]. ∎

2.4. Caracteres de Brauer

En esta sección haremos una breve introducción a la Teoría de Caracteres de Brauer, pues son estos una parte esencial de nuestra Memoria. Para familiarizar al lector con esta teoría y con uno de los objetos claves en esta Memoria (el carácter proyectivo indescomponible), probaremos que si p es un primo, y H es un p-complemento de G, entonces $\Phi_{1_{G^0}} = (1_H)^G$, donde $\Phi_{1_{G^0}}$ es el carácter proyectivo indescomponible principal de G. Éste es un resultado clásico de Teoría de Caracteres de Brauer.

En general, seguiremos la notación de [13] para caracteres de Brauer.

A lo largo de esta sección, G es un grupo finito y p un primo fijo.

Sea R el anillo de enteros algebraicos en $\mathbb{C}$ (esto es, los elementos de $\mathbb{C}$ que son raíces de polinomios mónicos con coeficientes en $\mathbb{Z}$). Como R es un anillo conmutativo y unitario, y pR es un ideal, podemos fijar un ideal maximal M de R que contiene a pR. Escribimos $F = R/M$, que es un cuerpo (ya que M es un ideal maximal) de característica p. Sea

$$^* : R \to F$$

el epimorfismo de anillos natural.

Sea

$$U = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^m = 1 \text{ para cierto } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } (m,p) = 1\} \subseteq R\,,$$

y denotamos por $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ al cuerpo finito de p elementos.

Para definir los caracteres de Brauer, necesitamos un lema técnico.

Lema 2.4.1. *La restricción de* $^* : R \to F$ *a* U *define un isomorfismo* $^* : U \to F^\times$ *de grupos multiplicativos. Además,* F *es la clausura algebraica de su cuerpo primo* $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}_p$.

Demostración. Esto es el Lema 2.1 de [13]. ∎

Ahora, definiremos los caracteres de Brauer.

Definición 2.4.2. Definimos los elementos p-regulares de G como los elementos $g \in G$ tales que $(o(g), p) = 1$ (esto es, los elementos de G de p'-orden), y denotamos

$$G^0 = \{g \in G \mid g \text{ es } p\text{-regular}\}\,.$$

Sea $\mathfrak{X} : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ una F-representación de G. Sea $g \in G^0$. Entonces, podemos aplicar el Lema 2.4.1 para obtener que los valores propios de $\mathfrak{X}(g)$ pueden escribirse como $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ para $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in U$ determinados de manera única (nótese que los valores propios de $\mathfrak{X}(g)$ están todos en $F^{\times}$, pues $\mathfrak{X}(g)$ es invertible, y F es algebraicamente cerrado). Entonces, definimos

$$\varphi(g) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

para todo $g \in G^0$, y decimos que $\varphi : G^0 \to \mathbb{C}$ es el carácter de Brauer (o carácter modular) de G originado por la representación $\mathfrak{X}$. Nótese que φ está determinado de forma única (una vez fijado M) por la clase de equivalencia de la F-representación $\mathfrak{X}$.

El grado de φ se define como $n = \varphi(1)$. Decimos que φ es irreducible si $\mathfrak{X}$ es irreducible, y denotamos por $\mathrm{IBr}(G)$ al conjunto de caracteres de Brauer de G irreducibles.

La F-representación trivial $1_G : G \to F$ (donde $1_G(g) = 1$ para todo $g \in G$) origina el carácter de Brauer 1_{G^0}, al que llamamos carácter de Brauer principal de G.

Ahora enunciaremos y probaremos algunas propiedades básicas de la Teoría de Caracteres de Brauer. Denotamos por

$$\mathrm{cf}(G^0) = \{f : G^0 \to \mathbb{C} \mid f \text{ es constante en cada clase de } G\text{-conjugación}\}$$

al conjunto de funciones de clase complejas definidas en G^0. Además, si $f \in \mathrm{cf}(G)$, denotamos por $f^0 \in \mathrm{cf}(G^0)$ a su restricción a G^0.

Lema 2.4.3. *Sea φ un carácter de Brauer de G. Entonces:*

(a) $\varphi \in \mathrm{cf}(G^0)$.

(b) *Si $H \leq G$, entonces la restricción de φ a H^0 (a la que denotamos por φ_H) es un carácter de Brauer de H.*

Demostración. Sea $\mathfrak{X}$ una F-representación que origina φ.

(a) Sean $g, h \in G^0$ dos elementos que pertenecen a la misma clase de conjugación de G. Entonces $\mathfrak{X}(g)$ y $\mathfrak{X}(h)$ son similares, luego tienen los mismos valores propios, y $\varphi(g) = \varphi(h)$.

(b) Tenemos que $\mathfrak{X}_H$, la restricción de $\mathfrak{X}$ a H, es una F-representación de H que origina el carácter de Brauer φ_H. ∎

Teorema 2.4.4. *Una función de clase $\varphi \in \mathrm{cf}(G^0)$ es un carácter de Brauer si y sólo si $\varphi \neq 0$ es una $\mathbb{N}$-combinación lineal de caracteres en* $\mathrm{IBr}(G)$.

Demostración. Supongamos que $\varphi \neq 0$ es una $\mathbb{N}$-combinación lineal de caracteres en $\mathrm{IBr}(G)$, entonces podemos construir fácilmente una F-representación de G en forma de bloques diagonal, donde cada bloque se corresponde a una F-representación irreducible de G, que origina el carácter de Brauer φ.

A la inversa, si φ es un carácter de Brauer de G, entonces es originado por $\mathfrak{X}$, una F-representación de G. Pero $\mathfrak{X}$ es similar a una representación $\mathfrak{Y}$ en forma de bloques triangular superior, donde cada bloque en la diagonal se corresponde con una F-representación irreducible de G, luego $\mathfrak{X}$ origina un carácter de Brauer que es igual a la suma de los caracteres de Brauer irreducibles originados por cada bloque de la diagonal de $\mathfrak{Y}$. ∎

Recordemos que si $g \in G$, se puede descomponer de manera única como producto de dos elementos $g_p, g_{p'} \in G$, tales que

$$g = g_p g_{p'} = g_{p'} g_p \,,$$

donde $(o(g_{p'}), p) = 1$, y $o(g_p)$ es una potencia de p. Además, se tiene que $g_p, g_{p'} \in \langle g \rangle$, el subgrupo de G generado por g.

Lema 2.4.5. *Sea $\mathfrak{X}$ una F-representación de G, que origina el carácter ordinario χ. Entonces, para todo $g \in G$, $\chi(g) = \chi(g_{p'})$. Si μ es el carácter de Brauer originado por $\mathfrak{X}$, se tiene que $\chi(g) = \mu(g_{p'})^*$. Además, si definimos $\varphi^*(g) = \varphi(g_{p'})^*$ para todo $g \in G$ y $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, entonces*

$$\{\varphi^* \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\} = \mathrm{Irr}_F(G)\,.$$

Demostración. Nótese que si probamos que $\chi(g) = \chi(g_{p'})$ para todo $g \in G$, el resto del lema es trivial. Sea $g \in G$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $G = \langle g \rangle$. Si $\mathfrak{X}$ no es irreducible, entonces $\mathfrak{X}$ es similar a su forma reducida (forma de bloques triangular superior), por lo que podemos asumir que $\mathfrak{X}$ es irreducible. Como F es algebraicamente cerrado y G es abeliano, entonces $\mathfrak{X}$ tiene grado 1, luego $\mathfrak{X} : G \to F^\times$ es un homomorfismo de grupos. Entonces $\mathfrak{X}(g_p)$ tiene orden potencia de p en $F^\times$, luego $\mathfrak{X}(g_p) = 1$, y

$$\chi(g) = \mathfrak{X}(g) = \mathfrak{X}(g_p)\mathfrak{X}(g_{p'}) = \mathfrak{X}(g_{p'}) = \chi(g_{p'})\,. \quad ∎$$

Ahora enunciaremos un lema, que puede probarse usando algunas propiedades de los dominios de Dedekind, y que nos ayudará a probar la independencia de los caracteres irreducibles de Brauer. Denotamos por K a la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$.

Lema 2.4.6. *Sea I un ideal propio de R, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, y no todos cero. Entonces existe un $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $\beta\alpha_i \in R$ para todo $i = 1, \ldots, n$, pero existe un $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\beta\alpha_j \notin I$.*

Demostración. Esto es el Lema 2.5 de [13]. ∎

Teorema 2.4.7. *Los elementos de* $\mathrm{IBr}(G)$ *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{C}$.

Demostración. Como $\varphi(g) \in R \subset K$ para todo $g \in G^0$ y todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, y K es algebraicamente cerrado, por Álgebra Lineal sabemos que es suficiente probar que los elementos de $\mathrm{IBr}(G)$ son linealmente independientes sobre K.

Supongamos que

$$\sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \alpha_\varphi \varphi = 0$$

donde $\alpha_\varphi \in K$ para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, y no son todos cero. Entonces, por el Lema 2.4.6, existe un

$$\beta \in \mathbb{Q}(\alpha_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(G)) \subseteq K$$

tal que $\beta\alpha_\varphi \in R$ para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, pero $\beta\alpha_{\varphi_0} \notin M$ para un cierto $\varphi_0 \in \mathrm{IBr}(G)$. Ahora definimos

$$\varphi^*(g) = \varphi(g_{p'})^*$$

para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, y por el Lema 2.4.5 tenemos que

$$\{\varphi^* \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\} = \mathrm{Irr}_F(G)\,.$$

Como

$$\sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \beta\alpha_\varphi \varphi = 0$$

y $\beta\alpha_\varphi \in R$ para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, podemos obtener

$$\sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} (\beta\alpha_\varphi)^* \varphi^* = 0\,,$$

que es una contradicción con el hecho de que $\mathrm{Irr}_F(G)$ es F-linealmente independiente (véase el Teorema 1.19 de [13]), porque $\beta\alpha_{\varphi_0} \notin M$, luego $(\beta\alpha_{\varphi_0})^* \neq 0$. ∎

Definición 2.4.8. Ahora necesitamos definir un anillo más grande que R. Definimos

$$S = \{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in R - M\}\,,$$

un subconjunto del anillo de fracciones de R. S es un anillo porque $R - M$ está cerrado bajo multiplicación (ya que $M < R$ es un ideal de R). De hecho, a S se le llama localización de R en $R-M$. Como $1 \notin M$, se tiene que $R \subseteq S$, y es evidente que $S \subseteq K$.

Ahora extenderemos la aplicación $^*: R \to F$ a S. Para $r \in R$ y $s \in R-M$, definimos
$$\left(\frac{r}{s}\right)^* = r^*(s^*)^{-1}\,,$$
por lo que obtenemos un homomorfismo de anillos $S \to F$ que extiende a *.

El siguiente es uno de los resultados más importantes de la Teoría de Representaciones, que nos permite relacionar las representaciones ordinarias con las modulares de una manera fundamental.

Teorema 2.4.9. *Sea $\mathfrak{X}$ una $\mathbb{C}$-representación de G. Entonces $\mathfrak{X}$ es similar a una $\mathbb{C}$-representación $\mathfrak{Y}$ de G tal que $\mathfrak{Y}(g)$ tiene sus entradas en S para todo $g \in G$.*

Demostración. Esto es el Teorema 2.7 de [13]. ∎

Nótese que, si $n \in \mathbb{N}$, podemos usar el homomorfismo de anillos $^*: S \to F$ para definir un homomorfismo de anillos
$$^*: \mathrm{Mat}_n(S) \to \mathrm{Mat}_n(F)\,,$$
donde A^* es la matriz obtenida al aplicar * a todas las entradas de $A \in \mathrm{Mat}_n(S)$. Además, podemos ver que
$$\det(A^*) = \det(A)^*$$
para toda matriz $A \in \mathrm{Mat}_n(S)$.

El homomorfismo de anillos $^*: S \to F$ también puede extenderse canónicamente a
$$^*: S[x] \to F[x]\,,$$
donde si un polinomio $p(x) \in S[x]$ tiene todas sus raíces $\xi_1, \ldots, \xi_n$ en S (repetidas según su multiplicidad), como puede escribirse como
$$p(x) = (x-\xi_1)\ldots(x-\xi_n)\,,$$
deducimos que el polinomio
$$p(x)^* = (x-(\xi_1)^*)\ldots(x-(\xi_n)^*)$$
tiene a $(\xi_1)^*, \ldots, (\xi_n)^* \in F$ por raíces.

Corolario 2.4.10. *Sea $\mathfrak{X}$ una $\mathbb{C}$-representación de G cuyas matrices tienen entradas en S, y que origina el carácter χ. Para todo $g \in G$, definimos $\mathfrak{X}^*(g) = \mathfrak{X}(g)^*$. Entonces $\mathfrak{X}^*$ es una F-representación de G, que origina el carácter de Brauer χ^0. En particular, si χ es un carácter ordinario de G, entonces χ^0 es un carácter de Brauer de G.*

Demostración. Como ${}^* : \mathrm{Mat}_n(S) \to \mathrm{Mat}_n(F)$ es un homomorfismo de anillos, tenemos que $\mathfrak{X}^*$ es una F-representación de G. Sea $g \in G^0$, y sean $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ valores propios de $\mathfrak{X}(g)$. Como $(o(g), p) = 1$, tenemos que $\xi_1, \ldots, \xi_n \in U$. Como

$$\det(Ix - \mathfrak{X}(g)^*) = \det(Ix - \mathfrak{X}(g))^* ,$$

tenemos que los valores propios de $\mathfrak{X}^*(g)$ son $(\xi_1)^*, \ldots, (\xi_n)^* \in F$, por lo que deducimos que $\mathfrak{X}^*$ origina el carácter de Brauer χ^0.

Si χ es un carácter ordinario de G, podemos usar el Teorema 2.4.9 para obtener $\mathfrak{Y}$, una $\mathbb{C}$-representación de G con entradas matriciales en S que origina χ. Aplicando ahora la primera parte de este corolario, obtenemos que χ^0 es un carácter de Brauer de G. ∎

Definición 2.4.11. Sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Entonces, por el Corolario 2.4.10, χ^0 es un carácter de Brauer de G, y por el Teorema 2.4.4, tenemos que

$$\chi^0 = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi} \varphi ,$$

donde los números $d_{\chi\varphi}$ son enteros no negativos, y están determinados de forma única, ya que $\mathrm{IBr}(G)$ es linealmente independiente (como hemos visto en el Teorema 2.4.7). A los enteros $d_{\chi\varphi}$ los llamamos números de descomposición, y a la matriz

$$D = (d_{\chi\varphi})_{\chi \in \mathrm{Irr}(G), \varphi \in \mathrm{IBr}(G)}$$

la llamamos matriz de descomposición. Para cada $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, definimos

$$\Phi_\varphi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\varphi} \chi ,$$

y decimos que Φ_φ es el carácter proyectivo indescomponible asociado con φ.

Denotamos

$$\mathrm{vcf}(G) = \{ f \in \mathrm{cf}(G) \mid f(g) = 0 \text{ para todo } x \notin G^0 \} ,$$

el conjunto de funciones de clase de G que se anulan fuera de G^0.

Teorema 2.4.12. *Φ_φ es un elemento de* $\mathrm{vcf}(G)$ *para todo* $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$.

Demostración. Sean $y \in G^0$ y $x \in G$, y denotemos sus clases de conjugación por $\mathrm{Cl}(y)$ y $\mathrm{Cl}(x)$ respectivamente. Usando la Segunda Relación de Ortogonalidad (véase el Teorema 2.2.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{Cl}(x),\mathrm{Cl}(y)}|\mathrm{C}_G(x)| &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(x)}\chi(y) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(x)} \left(\sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi(y) \right) \\ &= \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \left(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\varphi}\overline{\chi(x)} \right) \varphi(y) \\ &= \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \overline{\Phi_\varphi(x)}\varphi(y)\,.\end{aligned}$$

Si x no es un elemento de G^0, a partir de la anterior ecuación podemos deducir que

$$0 = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \overline{\Phi_\varphi(x)}\varphi\,.$$

Como los caracteres de Brauer irreducibles son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ (como hemos visto en el Teorema 2.4.7), tenemos que $\Phi_\varphi(x) = 0$ para cualquier x que no sea p-regular. ∎

De hecho, es cierto que $\{\Phi_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\}$ es una base del espacio $\mathrm{vcf}(G)$, pero no necesitaremos usar esto.

Corolario 2.4.13 (Dickson)**.** *Si $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, entonces $|G|_p$, la p-parte de $|G|$, divide a $\Phi_\varphi(1)$.*

Demostración. Sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Como vimos en el Teorema 2.4.12, $\Phi_\varphi \in \mathrm{vcf}(G)$, por lo que $[1_P, (\Phi_\varphi)_P] = \Phi_\varphi(1)/|P|$, que es un entero, luego $|G|_p = |P|$ divide a $\Phi_\varphi(1)$. ∎

Teorema 2.4.14. $\mathrm{IBr}(G)$ *es una $\mathbb{C}$-base de* $\mathrm{cf}(G^0)$*. A consecuencia de esto,* $|\mathrm{IBr}(G)|$ *es el número de clases de G-conjugación de elementos p-regulares de G.*

Demostración. Ya demostramos en el Teorema 2.4.7 que el conjunto $\mathrm{IBr}(G)$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, por lo que bastará probar que es un sistema generador de $\mathrm{cf}(G^0)$. Sea $\xi \in \mathrm{cf}(G^0)$, y sea $\delta \in \mathrm{cf}(G)$ una extensión de ξ. Como $\mathrm{Irr}(G)$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{cf}(G)$, entonces

$$\delta = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$$

donde $a_\chi \in \mathbb{C}$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}\xi &= \delta^0 = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi^0 = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi \left(\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi\right)\\ &= \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} \left(\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi d_{\chi\varphi}\right)\varphi\,,\end{aligned}$$

luego $\mathrm{IBr}(G)$ es una base de $\mathrm{cf}(G^0)$. ∎

Corolario 2.4.15. *La matriz de descomposición D tiene rango $|\mathrm{IBr}(G)|$. Como consecuencia, si $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, entonces existe un carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $d_{\chi\varphi} \neq 0$.*

Demostración. Como $\mathrm{Irr}(G)$ es una base de $\mathrm{cf}(G)$, entonces

$$\{\chi^0 \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$$

genera a $\mathrm{cf}(G^0)$, por lo que existe un subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ tal que

$$\{\chi^0 \mid \chi \in \mathfrak{B}\}$$

es una base de $\mathrm{cf}(G^0)$. Como $\mathrm{IBr}(G)$ es otra base de $\mathrm{cf}(G^0)$ (véase el Teorema 2.4.14), y

$$\chi^0 = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi\,,$$

tenemos que $(d_{\chi\varphi})_{\chi\in\mathfrak{B},\varphi\in\mathrm{IBr}(G)}$, una submatriz de D, es una matriz de cambio de base, por lo que es invertible, luego D tiene rango $|\mathrm{IBr}(G)|$. ∎

Teorema 2.4.16. *Si $(|G|, p) = 1$, entonces $\mathrm{IBr}(G) = \mathrm{Irr}(G)$.*

Demostración. Como F tiene característica p y $(|G|, p) = 1$, el Teorema de Maschke (véase el Teorema 1.21 de [13]) prueba que FG es semisimple, y como F es algebraicamente cerrado, podemos usar el Teorema de Wedderburn (véase el Teorema 1.17 de [13]) para deducir que

$$\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} \varphi(1)^2 = |G|\,.$$

Pero

$$\begin{aligned}
|G| &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi(1) \right)^2 \\
&= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\varphi,\mu\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}d_{\chi\mu}\varphi(1)\mu(1) \right) \\
&\geq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} (d_{\chi\varphi})^2\varphi(1)^2 \right) = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} \left(\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} (d_{\chi\varphi})^2 \right) \varphi(1)^2 \\
&\geq \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} \varphi(1)^2 = |G|
\end{aligned}$$

(donde la última desigualdad es consecuencia del Corolario 2.4.15), por lo que estas dos desigualdades son igualdades, y para cada $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ existe un único $\chi_\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $d_{\chi_\varphi\varphi} = 1$, y $d_{\chi\varphi} = 0$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $\chi \neq \chi_\varphi$. Además, (como hemos visto en el Teorema 2.4.14) $\mathrm{IBr}(G)$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{cf}(G^0) = \mathrm{cf}(G)$, como lo es $\mathrm{Irr}(G)$, luego $|\mathrm{IBr}(G)| = |\mathrm{Irr}(G)|$, por lo que si $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, $\chi_\varphi = (\chi_\varphi)^0 = \varphi$, y $\mathrm{IBr}(G) = \mathrm{Irr}(G)$. ∎

Corolario 2.4.17. *Si φ es un carácter de Brauer de G, y H es un p'-subgrupo de G, entonces φ_H es un carácter ordinario de H.*

Demostración. Por el apartado **(c)** del Lema 2.4.3, tenemos que φ_H es un carácter de Brauer de H, y por el Teorema 2.4.4, $\varphi_H \neq 0$ es una combinación lineal de enteros no negativos de $\mathrm{IBr}(H)$. Pero, como $(|H|, p) = 1$, el Teorema 2.4.16 afirma que $\mathrm{IBr}(H) = \mathrm{Irr}(H)$, por lo que $\varphi_H \neq 0$ es una combinación lineal de enteros no negativos de $\mathrm{Irr}(H)$, así que es un carácter ordinario de H. ∎

Finalmente, podemos probar el siguiente resultado, que incluye el objetivo que habíamos fijado al principio de esta sección.

Teorema 2.4.18. *Sea H un p'-subgrupo de G. Entonces, el carácter proyectivo indescomponible $\Phi_{1_{G^0}}$ es un constituyente del carácter $(1_H)^G$. Además, si H es un p-complemento de G, se tiene que $\Phi_{1_{G^0}} = (1_H)^G$.*

Demostración. Como $H \subseteq G^0$, tenemos que

$$\chi_H = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi_H$$

para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Como φ_H es un carácter ordinario de H para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ (por el Corolario 2.4.17), deducimos que

$$[\chi, (1_H)^G] = [\chi_H, 1_H] = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}[\varphi_H, 1_H] \geq d_{\chi 1_{G^0}}[(1_{G^0})_H, 1_H] = d_{\chi 1_{G^0}}$$

para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, luego

$$\Phi_{1_{G^0}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi 1_{G^0}} \chi$$

es un constituyente de $(1_H)^G$, como queríamos probar. Si $(|G : H|, |H|) = 1$, podemos aplicar el Corolario 2.4.13 para obtener que

$$(1_H)^G(1) = |G : H| = |G|_p \leq \Phi_{1_{G^0}}(1)\,,$$

por lo que $\Phi_{1_{G^0}} = (1_H)^G$. ∎

2.5. Otros Resultados

Empezaremos esta sección recordando algunos conceptos de Teoría de Caracteres de Brauer que no hemos necesitado en la sección anterior, y que son muy similares a los correspondientes conceptos de Teoría de Caracteres Ordinarios.

Recordamos primero que, análogamente a como se define el concepto de carácter ordinario real, se define carácter de Brauer real: si φ es un carácter de Brauer de G, decimos que φ es real si $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in G^0$.

Se define el núcleo de un carácter de Brauer φ de G como el núcleo de cualquier F-representación que origina dicho carácter, y lo escribimos como $\ker(\varphi)$. Si $\ker(\varphi) = 1$, decimos que φ es fiel.

De manera análoga a lo que ocurre con los caracteres ordinarios, si $N \lhd G$, identificamos $\mathrm{IBr}(G/N)$ con

$$\{\varphi \in \mathrm{IBr}(G) \mid N \subseteq \ker(\varphi)\} \subseteq \mathrm{IBr}(G)\,.$$

Si $G' = [G, G]$ es el subgrupo derivado de G, y usando esta identificación, se tiene que un carácter $\chi \in \mathrm{IBr}(G)$ es lineal si y sólo si $\chi \in \mathrm{IBr}(G/G')$.

Supongamos que $H \leq G$. Si φ es un carácter de Brauer de H, definimos la función φ^G en G^0 dada por

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^*(g^x)\,,$$

donde $\varphi^*(h) = \varphi(h)$ para todo $h \in H^0$, y $\varphi^*(g) = 0$ para todo $g \notin H^0$. Entonces, se tiene que φ^G es un carácter de Brauer de G, y a ϕ^G le llamamos carácter de Brauer inducido por φ en G. Es inmediato comprobar que $\varphi^G(1) = |G : H|\varphi(1)$.

Notemos que por el Teorema 2.4.14, $\mathrm{IBr}(G)$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{cf}(G^0)$. Por ello, si $\alpha \in \mathrm{cf}(G^0)$, se tiene que

$$\alpha = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \alpha_\varphi \varphi \,,$$

para $\alpha_\varphi \in \mathbb{C}$ determinados de manera única, y α es un carácter de Brauer si y sólo si $\alpha_\varphi \in \mathbb{N}$ para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ (pero no son todos cero). De manera análoga a lo que ocurre en la Teoría de Caracteres Ordinarios, si α, β son dos caracteres de Brauer, y

$$\beta = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \beta_\varphi \varphi \,,$$

donde $\beta_\varphi \in \mathbb{N}$ para todo $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, decimos que β es un constituyente de α si

$$\beta_\varphi \leq \alpha_\varphi \text{ para todo } \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\,.$$

Además, si $\beta \in \mathrm{IBr}(G)$ es un constituyente de α, decimos que es un constituyente irreducible de α.

Muchos de los resultados para caracteres ordinarios admiten una versión para caracteres de Brauer. Entre ellos se encuentran la Correspondencia de Clifford (véase el Teorema 2.3.3) y la Correspondencia de Gallagher (véase la Proposición 2.3.4), cuyas versiones para caracteres de Brauer enunciaremos a continuación, junto con otros resultados referentes a caracteres de Brauer y subgrupos normales.

Proposición 2.5.1. *Sea $N \triangleleft G$, y sean $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ y $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$. Entonces θ es un constituyente irreducible de φ_N si y sólo si φ es un constituyente irreducible de θ^G. Además, en este caso, si $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_t$ son los diferentes G-conjugados de θ, se tiene que*

$$\varphi_N = e \sum_{i=1}^{t} \theta_i$$

para cierto número positivo e.

Demostración. Esto es parte del Corolario 8.7 de [13]. ∎

Si π es un conjunto de números primos, definimos

$$\mathrm{IBr}_\pi(G) = \{\varphi \in \mathrm{IBr}(G) \mid \varphi(1) \text{ es un } \pi\text{-número}\}\,,$$

y si $\pi = \{p\}$, donde p es un número primo, escribiremos $\mathrm{IBr}_p(G) = \mathrm{IBr}_\pi(G)$ e $\mathrm{IBr}_{p'}(G) = \mathrm{IBr}_{\pi'}(G)$.

Si $N \leq G$ y $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$, definimos

$$\mathrm{IBr}(G|\theta) = \{\varphi \in \mathrm{IBr}(G) \mid \varphi \text{ es un constituyente irreducible de } \theta^G\}\,,$$

y de acuerdo a la anterior proposición,

$$\mathrm{IBr}(G|\theta) = \{\varphi \in \mathrm{IBr}(G) \mid \theta \text{ es un constituyente irreducible de } \varphi_N\}\,.$$

Además, como ocurre con los caracteres ordinarios, podemos combinar esta notación con la de caracteres de π-grado: por ejemplo,

$$\mathrm{IBr}_\pi(G|\theta) = \mathrm{IBr}(G|\theta) \cap \mathrm{IBr}_\pi(G)$$

son los constituyentes irreducibles de θ^G de π-grado.

De manera análoga a como ocurre en Teoría de Caracteres Ordinarios, si $N \lhd G$, vamos a definir una acción de G en $\mathrm{IBr}(N)$. Si $\theta \in \mathrm{cf}(N^0)$ y $g \in G$, entonces se define $\theta^g \in \mathrm{cf}(N^0)$ mediante

$$\theta^g(n) = \theta(n^{g^{-1}}) = \theta(gng^{-1}) \text{ para todo } n \in N^0\,,$$

y decimos que θ y θ^g son conjugados. Además, se tiene que θ es un carácter de Brauer de N si y sólo si θ^g es un carácter de Brauer de N, y $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$ si y sólo si $\theta^g \in \mathrm{IBr}(N)$. Esto define una acción de G en $\mathrm{IBr}(N)$, y si $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$, definimos $\mathrm{I}_G(\theta)$ como el estabilizador de θ en G, esto es,

$$\mathrm{I}_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}\,.$$

por lo que $\mathrm{I}_G(\theta) \leq G$.

Teorema 2.5.2 (Correspondencia de Clifford)**.** *Sea $N \lhd G$, y sea $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$. Denotamos $T = \mathrm{I}_G(\theta)$. Entonces la aplicación $\psi \mapsto \psi^G$ es una correspondencia biyectiva de $\mathrm{IBr}(T|\theta)$ en $\mathrm{IBr}(G|\theta)$.*

Demostración. Esto es parte del Teorema 8.9 de [13]. ∎

Teorema 2.5.3 (Green)**.** *Sea $N \lhd G$, tal que G/N es un p-grupo, y sea $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$. Entonces existe un único $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ que está por encima de θ, y se tiene que*

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{t} \theta_i\,,$$

donde $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_t$ son los diferentes G-conjugados de θ. En particular, si θ es G-invariante, se tiene que $\varphi_N = \theta$.

Demostración. Este es el Teorema 8.11 de [13]. ∎

Proposición 2.5.4 (Correspondencia de Gallagher). *Sea* $N \lhd G$*, y sea* $\chi \in \mathrm{IBr}(G)$ *tal que* $\chi_N = \theta \in \mathrm{IBr}(N)$*. Entonces, la aplicación* $\beta \mapsto \beta\chi$ *es una correspondencia biyectiva de* $\mathrm{IBr}(G/N)$ *en* $\mathrm{IBr}(G|\theta)$*.*

Demostración. Este es el Corolario 8.20 de [13]. ∎

Teorema 2.5.5 (Swan). *Sea* $N \lhd G$*, tal que* G/N *es resoluble. Sea* $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$*, y sea* $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$ *un constituyente irreducible de* φ_N*. Entonces*

$$\varphi(1)/\theta(1) \text{ divide a } |G:N|\,.$$

Demostración. Este es el Teorema 8.22 de [13]. ∎

Capítulo 3

Correspondencias entre constituyentes de caracteres proyectivos

3.1. Introducción

Supongamos que G es un grupo finito, p es un primo, e $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ es el conjunto de caracteres irreducibles de G de p'-grado. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, la Conjetura de McKay afirma que

$$|\mathrm{Irr}_{p'}(G)| = |\mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))| \,.$$

Si $\mathrm{N}_G(P) = P$ y G es p-resoluble, de hecho, se encontró en [15] una biyección canónica

$$^* : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(P) \,,$$

donde χ^* es el único constituyente lineal de χ_P (Esto resolvió la Conjetura de McKay para grupos con p-subgrupos de Sylow autonormalizantes para $p \geq 5$, ya que estos grupos resultaron ser resolubles, como puede verse en [5]).

El objetivo de este capítulo es usar los resultados de [10] para extender un poco más esta biyección canónica. Si $\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})$ es el conjunto de constituyentes irreducibles del carácter proyectivo indescomponible principal de G que tienen p'-grado, conseguimos probar lo siguiente.

Teorema A. *Sea G un grupo finito p-resoluble, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $N = \mathrm{N}_G(P)$. Entonces, existe una biyección canónica*

$$\Gamma : \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}}) \to \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{N^0}}) \,.$$

De hecho, si $\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})$, entonces $\Gamma(\chi)$ es el único constituyente irreducible del carácter χ_N de p'-grado. Además, $\Gamma(\chi)(1)$ divide a $\chi(1)$.

En el caso particular en el que $P = \mathrm{N}_G(P)$, se tiene que $\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{N^0}}) = \mathrm{Irr}_{p'}(P)$, y recuperamos la biyección * en [15]. Desafortunadamente, la igualdad $|\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})| = |\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{N^0}})|$ no es cierta para grupos finitos en general (como podemos ver en el Ejemplo 3.3.9, basta tomar $G = A_5$ con $p = 2$ para encontrar un contraejemplo).

Mencionamos una consecuencia curiosa para $p = 2$.

Corolario B. *Sea G un grupo finito resoluble, sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ y sea $N = \mathrm{N}_G(P)$. Entonces, el número de caracteres irreducibles racionales de G de grado impar es el número de N-órbitas en $P/\Phi(P)$.*

También escribimos otra consecuencia del Teorema A, que genera una cota superior para $|P : P'|$ a partir de los caracteres de un grupo G finito y p-resoluble.

Corolario C. *Sea G un grupo finito p-resoluble, y sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Entonces*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})} \chi(1) \geq |P : P'| \,.$$

Por supuesto, es concebible que la desigualdad del Corolario C sea cierta para grupos finitos en general.

Los resultados principales de esta sección han sido publicados en [2].

3.2. Algunos Resultados Conocidos

A lo largo de este capítulo, π será un conjunto de números primos, y denotamos por π' al conjunto de números primos que no están en π. En esta sección, recordaremos las definiciones de carácter π-especial, núcleo, $\mathrm{B}_\pi(G)$, y satélite, junto con algunos hechos sobre estos conceptos que, o bien se usan para definirlos, o bien usaremos más adelante.

Notemos que si $\pi = \{p\}$, podremos escribir p' en lugar de $\{p\}'$, p-especial en lugar de $\{p\}$-especial, y análogamente con el resto de conceptos.

Empezaremos recordando algunos resultados de [3].

Definición 3.2.1. Decimos que un carácter χ de un grupo G es π-especial (y escribimos $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$) si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\chi(1)$ es un π-número, y por cada subgrupo subnormal M de G y cada constituyente irreducible ϕ de χ_M, $o(\phi)$ es un π-número.

Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ puede escribirse como $\chi = \alpha\beta$, donde α es π-especial y β es π'-especial, decimos que χ es π-factorizable. Esta definición es esencial, pues M. Isaacs prueba que todo carácter primitivo de un grupo π-separable es π-factorizable (véase el Corolario 4.7 de [9]).

Notemos que, a consecuencia de la definición, 1_G es un carácter π-especial.

Los caracteres π-especiales "creen" que su grupo es un π-grupo. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.2. *Sea G un grupo finito π-separable. Sea H un subgrupo que contiene un π-subgrupo de Hall de G. Entonces la aplicación $\chi \to \chi_H$ es una inyección de $\mathfrak{X}_\pi(G)$ a $\mathfrak{X}_\pi(H)$.*

Demostración. Esto es la Proposición 6.1 de [3]. ∎

Ahora citaremos varios resultados de [9], para llegar a definir los caracteres de $\mathrm{B}_\pi(G)$.

Definición 3.2.3. Sea G un grupo finito π-separable. Consideramos los pares (H, θ), donde $H \leq G$ y $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$, y definimos un orden parcial en el conjunto de estos pares, mediante

$$(H, \theta) \leq (K, \varphi) \text{ si } H \leq K \text{ y } \theta \text{ es un constituyente de } \varphi_H\,.$$

Un par subnormal π-factorizable es un par (S, θ), donde $S \lhd\lhd G$ y θ es π-factorizable. Al conjunto de pares subnormales π-factorizables en G lo denotamos por $\mathfrak{F}_\pi(G)$ (o $\mathfrak{F}(G)$, si no hay duda sobre qué es π).

Denotamos por $\mathfrak{F}^*_\pi(G)$ (o $\mathfrak{F}^*(G)$) al conjunto de elementos maximales de $\mathfrak{F}_\pi(G)$ respecto al orden parcial definido anteriormente.

Notemos que G actúa en $\mathfrak{F}(G)$ (y en $\mathfrak{F}^*(G)$) por conjugación. Esto es, si $(S, \theta) \in \mathfrak{F}(G)$ y $g \in G$, definimos

$$(S, \theta)^g = (S^g, \theta^g) \in \mathfrak{F}(G)\,.$$

Teorema 3.2.4. *Sea G un grupo finito π-separable, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Entonces*

(a) *Existe un par $(U, \theta) \in \mathfrak{F}^*(G)$ tal que $(U, \theta) \leq (G, \chi)$.*

(b) *Si $(V, \varphi) \in \mathfrak{F}(G)$ es tal que $(V, \varphi) \leq (G, \chi)$, entonces $(V, \varphi)^g \leq (U, \theta)$ para algún $g \in G$.*

Demostración. Esto es el Teorema 3.2 de [9]. ∎

El siguiente teorema extiende la Correspondencia de Clifford (véase el Teorema 2.3.3) cuando tenemos un par $(S,\eta) \in \mathfrak{F}^*(G)$, pero no necesariamente $S \lhd G$.

Teorema 3.2.5. *Sea G un grupo finito π-separable, y sea $(S,\eta) \in \mathfrak{F}^*(G)$. Sea $T = \mathrm{I}_G(S,\eta) = \mathrm{I}_{\mathrm{N}_G(S)}(\eta)$, el estabilizador del par (S,η) en G. Entonces la inducción de caracteres define una biyección* $\mathrm{Irr}(T|\eta) \to \mathrm{Irr}(G|\eta)$.

Demostración. Esto es el Teorema 4.4 de [9]. ∎

El siguiente lema es esencial en la definición de los caracteres de $\mathrm{B}_\pi(G)$.

Lema 3.2.6. *Sea G un grupo finito π-separable, y sea $(S,\theta) \in \mathfrak{F}^*(G)$. Entonces, si $S < G$, se tiene que $\mathrm{I}_G(S,\theta) < G$.*

Demostración. Esto es parte del Lema 4.5 de [9]. ∎

Sea G un grupo finito π-separable, y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Por el Teorema 3.2.4, elegimos un par $(S,\eta) \in \mathfrak{F}^*(G)$ tal que $(S,\eta) \leq (G,\chi)$. Sea $T = \mathrm{I}_G(S,\eta)$, y sea $\xi \in \mathrm{Irr}(T|\eta)$ tal que $\xi^G = \chi$ (por el Teorema 3.2.5). Este proceso asocia al par (G,χ) otro par (T,ξ), que está determinado de manera única salvo conjugación en G. Decimos que (T,ξ) es un par inductor estándar para (G,χ). Nótese que si χ es π-factorizable, entonces $S = G$ y $(T,\xi) = (G,\chi)$. En cambio, si χ no es π-factorizable, tenemos que $S < G$, así que $T < G$ por el Lema 3.2.6. En este caso, podemos repetir el proceso y encontrar un par inductor estándar para (T,ξ). Repitiendo el proceso de esta manera hasta llegar a un carácter π-factorizable, obtenemos una cadena

$$(G,\chi) = (T_0,\xi_0) > (T_1,\xi_1) > \cdots > (T_k,\xi_k)$$

donde (T_i,ξ_i) es un par inductor estándar para (T_{i-1},ξ_{i-1}) para todo $1 \leq i \leq k$, y ξ_k es π-factorizable. En cada paso, el par (T_i,ξ_i) está determinado de manera única salvo conjugación en T_{i-1}, luego el último par (T_k,ξ_k) está determinado de manera única salvo conjugación en G.

Definición 3.2.7. Sea G un grupo finito π-separable, y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Llamamos núcleo para χ a cualquier par (W,γ) con γ π-factorizable, obtenido a partir de construir repetidamente pares inductores estándar, empezando por (G,χ). Decimos que el carácter γ es un carácter de núcleo para χ, y denotamos por $\mathrm{nuc}(\chi)$ al conjunto de núcleos para χ.

Nótese que si χ es π-factorizable, entonces $\mathrm{nuc}(\chi) = \{(G,\chi)\}$, y en cualquier caso $\mathrm{nuc}(\chi)$ es una clase de G-conjugación de pares subnormales π-factorizables. Además, si γ es un carácter de núcleo para χ, entonces $\gamma^G = \chi$ y γ es π-factorizable. Si (T,ξ) es un par inductor estándar para χ, entonces es inmediato deducir de las definiciones que $\mathrm{nuc}(\xi) \subseteq \mathrm{nuc}(\chi)$.

Definición 3.2.8. Sea G un grupo finito π-separable. Denotamos por $\mathrm{B}_\pi(G)$ al conjunto de $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tales que algún carácter de núcleo para χ es π-especial (y, por tanto, cualquier carácter de núcleo para χ es π-especial).

Nótese que, en particular, si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ es un carácter π-especial, entonces $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$.

Los siguientes resultados nos muestran que los caracteres de $\mathrm{B}_\pi(G)$ tienen un buen comportamiento con respecto a los subgrupos normales.

Teorema 3.2.9. *Sea G un grupo finito π-separable, y sea $N \lhd G$ tal que G/N es un π-grupo. Sean $\phi \in \mathrm{Irr}(N)$ y $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\phi)$. Entonces $\phi \in \mathrm{B}_\pi(N)$ si y sólo si $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$.*

Demostración. Esto es el Teorema 7.1 de [9]. ∎

Teorema 3.2.10. *Sea G un grupo finito π-separable, y sea $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$. Entonces, si $N \lhd G$, todo constituyente irreducible de χ_N se encuentra en $\mathrm{B}_\pi(N)$.*

Demostración. Esto es el Corolario 7.5 de [9]. ∎

El siguiente resultado nos muestra la interesante relación entre los caracteres de $\mathrm{B}_\pi(G)$ y los caracteres irreducibles de un π-subgrupo de Hall de G.

Teorema 3.2.11. *Sea G un grupo finito π-separable, y $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Supongamos que $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *Si $\alpha \in \mathrm{Irr}(H)$, entonces*

$$\alpha(1) \geq [\chi_H, \alpha]\chi(1)_\pi$$

(b) *χ_H tiene un constituyente irreducible α tal que $\alpha(1) = \chi(1)_\pi$.*

(c) *Si α es como en* **(b)**, *entonces para todo $\psi \in \mathrm{B}_\pi(G)$ se tiene que*

$$[\psi_H, \alpha] = \begin{cases} 1, & si \quad \psi = \chi \\ 0, & si \quad \psi \neq \chi \end{cases}$$

Demostración. Esto es el Teorema 8.1 de [9]. ∎

Una de las razones fundamentales por las que M. Isaacs introdujo los caracteres B_π es la siguiente. El célebre Teorema de Fong-Swan (Teorema 10.1 de [13]) afirma que si G es p-resoluble y $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, entonces existe un $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $\chi^0 = \varphi$, donde ^{0} denota restricción a p'-elementos. En el caso en que $\pi = \{p\}'$, los caracteres $\mathrm{B}_\pi(G)$ proporcionan un lifting canónico de $\mathrm{IBr}(G)$; es decir, se puede probar que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_{p'}(G) & \to & \mathrm{IBr}(G) \\ \chi & \mapsto & \chi^0 \end{array}$$

es una biyección canónica. Pero todavía más, en el caso general se tiene que $\{\chi^0 \mid \chi \in \mathrm{B}_\pi(G)\}$ es una base de $\mathrm{cf}(G^0)$, las funciones de clase complejas definidas en los π-elementos de G. Esto es el principio de una Teoría de π-Bloques.

Teorema 3.2.12. *Sea G un grupo finito π-separable. Entonces, la aplicación $\chi \mapsto \chi^0$, donde ^{0} denota restricción a π-elementos, define una biyección de $\mathrm{B}_\pi(G)$ en una $\mathbb{C}$-base del espacio de funciones de clase sobre los π-elementos de G.*

En particular (para $\pi = \{p\}'$), si G es un grupo finito p-resoluble, la aplicación $\chi \mapsto \chi^0$, donde ^{0} denota restricción a p'-elementos, define una biyección de $\mathrm{B}_{p'}(G)$ en $\mathrm{IBr}(G)$, el conjunto de caracteres de p-Brauer de G.

Demostración. Esto es el Teorema 9.3 y el Corolario 10.3 de [9]. ∎

Si G un grupo finito π-separable, $P \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ y $\psi \in \mathrm{Irr}(P)$, M. Isaacs descubrió ([10]) un hecho extraordinario, y es que existe un único subgrupo $\hat{P} \geq P$ maximal con la propiedad de que ψ se extiende a $\hat{P}$. Además, existe una única extensión π-especial $\hat{\psi}$ de ψ a $\hat{P}$, y si ψ es cuasiprimitivo, se tiene que $\hat{\psi}^G$ es irreducible. Usando este hecho, definen una aplicación sobreyectiva

$$\Psi : \mathrm{Irr}(P/P') \to \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)\,,$$

que será clave a lo largo de este capítulo. El siguiente teorema define la aplicación Ψ, y nos da algunas de sus propiedades.

Teorema 3.2.13. *Sea G un grupo finito π-separable, $P \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ y $N = \mathrm{N}_G(P)$. Dado un $\lambda \in \mathrm{Irr}(P)$ lineal, existe un único subgrupo $\hat{P} \geq P$ maximal con la propiedad de que λ se extiende a $\hat{P}$, y hay una única extensión π-especial $\hat{\lambda}$ de λ a $\hat{P}$. Además, $\hat{\lambda}^G \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$, y $(\hat{P}, \hat{\lambda})$ es un núcleo para $\hat{\lambda}^G$.*

Si definimos $\Psi(\lambda) = \hat{\lambda}^G$, tenemos que Ψ es una aplicación sobreyectiva de $\mathrm{Irr}(P/P')$ a $\mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$, y si $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$, entonces $\Psi^{-1}(\chi)$ es una N-órbita de caracteres lineales de P.

Además, si tenemos un automorfismo de Galois $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, se cumple que $\Psi(\lambda)^\sigma = \Psi(\lambda^\sigma)$ (esto es, Ψ conmuta con la acción de Galois).

Demostración. El primer párrafo es consecuencia de los Teoremas 2.1 y 2.2 de [10], ya que los caracteres lineales son cuasiprimitivos.

El segundo párrafo es consecuencia de los Teoremas 2.3 y 2.4 de [10].

El hecho de que Ψ conmuta con la acción de Galois es una consecuencia directa de su definición. ∎

El siguiente teorema nos permite definir el concepto de satélites de un carácter de $\mathrm{B}_\pi(G)$.

Teorema 3.2.14. *Sea G un grupo finito π-separable, sea $\psi \in \mathrm{B}_\pi(G)$, y supongamos que (W, γ) es un núcleo para ψ. Entonces, la aplicación $\alpha \mapsto (\alpha\gamma)^G$ es una inyección de $\mathfrak{X}_{\pi'}(W)$ a $\mathrm{Irr}(G)$, y decimos que estos caracteres $(\alpha\gamma)^G$ son los satélites del carácter $\psi \in \mathrm{B}_\pi(G)$.*

Demostración. Esto es el Teorema 3.1 de [10]. ∎

Teorema 3.2.15. *Cada carácter de $\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$ es un satélite de un único carácter de $\mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$.*

Demostración. Esto es el Teorema 3.6 de [10]. ∎

3.3. La Biyección Γ

Finalmente, en esta sección estamos preparados para construir la biyección Γ. Primero, queremos hacer unos comentarios que nos permitirán probar que $\Gamma(\chi)(1) \mid \chi(1)$ para todo $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$.

Si G es un grupo finito, denotamos por $\nu_p(G)$ al número de p-subgrupos de Sylow de G, y $\nu_\pi(G)$ es el número de π-subgrupos de Hall de G. G. Navarro probó en [16] que si G es p-resoluble y $H \leq G$, entonces $\nu_p(H) \mid \nu_p(G)$.

Más adelante, A. Turull probó por otros métodos el siguiente resultado, que generaliza el de Navarro:

Teorema 3.3.1. *Sea G es un grupo finito π-separable, y sea $H \leq G$. Entonces, $\nu_\pi(H) \mid \nu_\pi(G)$.*

Demostración. Esto es el Corolario 1.2 de [22]. ∎

Hacemos notar que este resultado fue generalizado aún más por M. J. Iranzo, F. Pérez Monasor y J. Medina en [6], pero el Teorema 3.3.1 será suficiente para nuestras intenciones.

Ahora procederemos a construir la biyección Γ.

Teorema 3.3.2. *Sea G un grupo finito π-separable, $P \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ y $N = \mathrm{N}_G(P)$. Entonces, existe una biyección*

$$\Gamma : \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G) \to \mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)$$

tal que, si $(\hat{P}, \hat{\lambda})$ es un núcleo para $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$ y $P \leq \hat{P}$ (por lo que $\chi = \hat{\lambda}^G$), entonces $\Gamma(\chi) = (\hat{\lambda}_{N \cap \hat{P}})^N$. Además, $\Gamma(\chi)(1) \mid \chi(1)$.

Demostración. Ya sabemos que la aplicación Ψ del Teorema 3.2.13 define una biyección desde los conjuntos de N-órbitas de caracteres lineales de P hasta el conjunto $\mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$ - llamemos a esa biyección f. Trabajando con N en lugar de G, la aplicación Ψ define una biyección desde los conjuntos de N-órbitas de caracteres lineales de P hasta el conjunto $\mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)$ - llamemos a esa biyección g. Entonces, definimos $\Gamma = gf^{-1}$, y por tanto,

$$\Gamma : \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G) \to \mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)\,.$$

Sea $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$, y sea $(\hat{P}, \hat{\lambda})$ un núcleo para χ con $P \leq \hat{P}$ (que sabemos que existe, por el Teorema 3.2.13). Entonces $f^{-1}(\chi)$ es el conjunto de N-conjugados de $\lambda = \hat{\lambda}_P$, y $\hat{P}$ es el único subgrupo maximal que contiene a P con la propiedad de que λ se extiende a él. Por tanto, el único subgrupo maximal de N que contiene a P al que λ se extiende es $N \cap \hat{P}$, y usando la Proposición 3.2.2 (ya que $|\hat{P} : N \cap \hat{P}|$ es un π'-número), sabemos que $\hat{\lambda}_{N \cap \hat{P}}$ es π-especial, y por tanto, es la única extensión π-especial de λ a $N \cap \hat{P}$, luego $\Gamma(\chi) = (\hat{\lambda}_{N \cap \hat{P}})^N$, como queríamos demostrar.

Como G es un grupo finito π-separable, podemos aplicar el Teorema 3.3.1 para deducir que

$$|\hat{P} : \mathrm{N}_{\hat{P}}(P)| = \nu_\pi(\hat{P}) \mid \nu_\pi(G) = |G : \mathrm{N}_G(P)|\,,$$

y como $\mathrm{N}_{\hat{P}}(P) = N \cap \hat{P}$, tenemos que

$$\Gamma(\chi)(1) = |\mathrm{N}_G(P) : \mathrm{N}_{\hat{P}}(P)| \text{ divide a } |G : \hat{P}| = \chi(1)\,. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3.3. *Sea G un grupo finito π-separable, $P \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$ y $\lambda \in \mathrm{Irr}(P)$ lineal. Entonces $\chi = \Psi(\lambda)$ sii $\lambda \leq \chi_P$. Además, en este caso, $[\chi, \lambda^G] = 1$.*

Demostración. Si $\chi = \Psi(\lambda)$, sea $(\hat{P}, \hat{\lambda})$ un núcleo para χ tal que $P \leq \hat{P}$ y $\lambda \leq \hat{\lambda}$ (el cual sabemos que existe, usando el Teorema 3.2.13). Entonces, como $\hat{\lambda}$ está a su vez bajo χ (ya que $\chi = \hat{\lambda}^G$), tenemos que $\lambda \leq \chi_P$.

En el otro sentido, si $\lambda \leq \chi_P$, podemos usar el apartado **(a)** del Teorema 3.2.11 para obtener que

$$1 = \lambda(1) \geq [\chi_P, \lambda]\chi(1)_\pi = [\chi_P, \lambda]\,,$$

por lo que $[\chi, \lambda^G] = [\chi_P, \lambda] = 1$. Entonces, por el apartado **(c)** del mismo teorema, deducimos que χ es el único elemento de $\mathrm{B}_\pi(G)$ que está por encima de λ. Por tanto, como $\Psi(\lambda) \in \mathrm{B}_\pi(G)$ está por encima de λ (como hemos visto en la anterior implicación de este teorema), debe ser cierto que $\chi = \Psi(\lambda)$ (y ya hemos visto que $[\chi, \lambda^G] = 1$ en este caso). ∎

Teorema 3.3.4. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.3.2,* $\Gamma(\chi)$ *es el único constituyente irreducible de* χ_N *de* π'*-grado.*

Demostración. Primero, notemos que $\hat{\lambda}$ es un constituyente de $(\hat{\lambda}^G)_{\hat{P}}$, ya que

$$[\hat{\lambda}, (\hat{\lambda}^G)_{\hat{P}}] = [\hat{\lambda}^G, \hat{\lambda}^G] \geq 1\,.$$

Sabemos que $\Gamma(\chi) \in \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)$, y que

$$\begin{aligned}[\chi_N, \Gamma(\chi)] &= [(\hat{\lambda}^G)_N, (\hat{\lambda}_{N\cap\hat{P}})^N] = [(\hat{\lambda}^G)_{\hat{P}}, (\hat{\lambda}_{N\cap\hat{P}})^{\hat{P}}] \\ &\geq [\hat{\lambda}, (\hat{\lambda}_{N\cap\hat{P}})^{\hat{P}}] = [\hat{\lambda}_{N\cap\hat{P}}, \hat{\lambda}_{N\cap\hat{P}}] = 1\,,\end{aligned}$$

por lo que $[\chi_N, \Gamma(\chi)] \geq 1$, y $\Gamma(\chi)$ es un constituyente irreducible de χ_N de π'-grado.

Sabemos que $\Gamma(\chi)$ es la imagen mediante la aplicación Ψ (considerada en el grupo N) de un carácter lineal λ_0 de P. Por el teorema anterior (aplicado en N), sabemos que λ_0 es un constituyente irreducible de $\Gamma(\chi)_P$ y, en particular, $[\Gamma(\chi)_P, \lambda_0] = 1$. Como $\Psi^{-1}(\chi)$ es una N-órbita de caracteres, tenemos que

$$\Gamma(\chi)_P = \sum_{\lambda\in\Psi^{-1}(\chi)} \lambda$$

(por el Teorema de Clifford).

Aplicando ahora el teorema anterior en G, deducimos que todo constituyente irreducible lineal de χ_P está en $\Psi^{-1}(\chi)$, y la multiplicidad de todos ellos es 1. Por tanto,

$$\chi_P = \Xi + \sum_{\lambda\in\Psi^{-1}(\chi)} \lambda = \Xi + \Gamma(\chi)_P\,,$$

donde ningún constituyente irreducible del carácter Ξ es lineal (o bien Ξ es cero).

Supongamos ahora que $\xi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)$ está por debajo de χ, y $\xi \neq \Gamma(\chi)$. Por lo que hemos visto, necesariamente los constituyentes irreducibles de ξ_P se encuentran entre los constituyentes irreducibles de Ξ, que no son lineales. Sea δ uno de ellos. Como $P \lhd N$, tenemos que $\delta(1)$ divide a $\xi(1)$ (por el Teorema de Clifford), así que δ es de π'-grado, pero P es un π-grupo, por lo que δ es lineal, lo cual es una contradicción. Por tanto, es cierto que el único constituyente irreducible de χ_N de π'-grado es $\Gamma(\chi)$. ∎

Nota 3.3.5. Nótese que en la prueba de la anterior proposición, si $\pi = \{p\}$, entonces todos los constituyentes irreducibles del carácter Ξ tienen grado divisible por p (o Ξ es cero), así que también podemos deducir que $\Gamma(\chi)(1) \equiv \chi(1) \bmod p$.

Teorema 3.3.6. *Sea G un grupo finito π-separable, y sea H un π'-subgrupo de Hall de G. Entonces los elementos de $\mathrm{B}_\pi(G)$ de π'-grado son exactamente los constituyentes irreducibles de $(1_H)^G$ de π'-grado. Además, si χ es uno de ellos, entonces $[\chi, (1_H)^G] = 1$.*

Demostración. Sea P un π-subgrupo de Hall de G.

Supongamos que $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$ y que $\chi(1)$ es un π'-número. Entonces, por el Teorema 3.2.13, existen $P \leq \hat{P} \leq G$ y un $\hat{\lambda} \in \mathrm{Irr}(\hat{P})$ lineal tal que $\chi = \hat{\lambda}^G$, y $(\hat{P}, \hat{\lambda})$ es un núcleo para $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$. Por tanto, $\hat{\lambda}$ es un carácter π-especial, luego $o(\hat{\lambda})$ es un π-número, y también lo es $o(\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H})$; pero $\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H}$ es un carácter de un π'-grupo, por lo que su orden también debe ser un π'-número, y por tanto $\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H} = 1_{\hat{P}\cap H}$. Entonces

$$[\chi, (1_H)^G] = [\chi_H, 1_H] = [(\hat{\lambda}^G)_H, 1_H] = [(\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H})^H, 1_H] = [\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H}, 1_{\hat{P}\cap H}] = 1\,,$$

así que $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_H)^G)$, como queríamos demostrar (y también hemos probado que $[\chi, (1_H)^G] = 1$).

A la inversa, sea $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_H)^G)$. Por el Teorema 3.2.15, sabemos que χ es un satélite de un cierto $\psi = \hat{\lambda}^G \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$, donde $(\hat{P}, \hat{\lambda})$ es un núcleo para ψ, $P \leq \hat{P} \leq G$ y $\hat{\lambda}$ es lineal, luego $\chi = (\alpha\hat{\lambda})^G$, donde $\alpha \in \mathrm{Irr}(\hat{P})$ es un carácter π'-especial. De igual modo que en la implicación inversa, $\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H} = 1_{\hat{P}\cap H}$, por lo que tenemos que

$$0 < [\chi, (1_H)^G] = [\alpha_{\hat{P}\cap H}\hat{\lambda}_{\hat{P}\cap H}, 1_{\hat{P}\cap H}] = [\alpha_{\hat{P}\cap H}, 1_{\hat{P}\cap H}]\,,$$

así que $\alpha_{\hat{P}\cap H} = 1_{\hat{P}\cap H}$ ya que $\alpha_{\hat{P}\cap H} \in \mathrm{Irr}(\hat{P} \cap H)$, pues $\alpha_{\hat{P}\cap H}$ es π'-especial (usando la Proposición 3.2.2, ya que $\hat{P} \cap H \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(\hat{P})$ y α es π'-especial).

Entonces, usando otra vez la Proposición 3.2.2 (y recordando que $1_{\hat{P}}$ es π'-especial), tenemos que $\alpha = 1_{\hat{P}}$, luego

$$\chi = (\alpha\hat{\lambda})^G = \hat{\lambda}^G = \psi \in \mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G)\,. \quad \blacksquare$$

Reuniendo varios de nuestros resultados, obtenemos el siguiente corolario, que incluye al Teorema A de la introducción (teniendo en cuenta que $\Phi_{1_{G^0}} = (1_H)^G$ y $\Phi_{1_{N^0}} = (1_{H\cap N})^G$, por el Teorema 2.4.18):

Corolario 3.3.7. *Sea G un grupo finito π-separable, $P \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $N = \mathrm{N}_G(P)$ y $H \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(G)$. Entonces existe una biyección*

$$\Gamma : \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H) \to \mathrm{Irr}_{\pi'}(N|1_{H\cap N})$$

tal que, si $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H)$, entonces $\Gamma(\chi)$ es el único constituyente irreducible de χ_N de π'-grado. Además, $\Gamma(\chi)(1) \mid \chi(1)$.

Además, si $N = P$, se tiene que

$$\Gamma : \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H) \to \mathrm{Irr}(P/P')$$

y $\Gamma = \Psi^{-1}$, donde Ψ es la biyección del Teorema 3.2.13.

Demostración. Usando el Teorema 3.3.6, podemos deducir que

$$\mathrm{B}_\pi(G) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(G) = \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H) \text{ y } \mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N) = \mathrm{Irr}_{\pi'}(N|1_{H\cap N}),$$

ya que $H \cap N \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(N)$. Teniendo en cuenta esto, el primer párrafo de este corolario se deduce de los Teoremas 3.3.2 y 3.3.4.

Supongamos ahora que $N = P$. Entonces $H \cap N = H \cap P = 1$, luego $\mathrm{Irr}_{\pi'}(N|1_{H\cap N}) = \mathrm{Irr}_{\pi'}(N) = \mathrm{Irr}_{\pi'}(P) = \mathrm{Irr}(P/P')$, ya que los caracteres irreducibles de P de π'-grado son exactamente los caracteres lineales de P (al ser P un π-grupo). Por otro lado, el Teorema 3.2.13 afirma que la aplicación $\Psi : \mathrm{Irr}(P/P') \to \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H)$ es sobreyectiva, y dado $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H)$, entonces $\Psi^{-1}(\chi)$ es una N-órbita de caracteres lineales de P; pero como $N = P$, tenemos que $\Psi^{-1}(\chi)$ es un único elemento, por lo que Ψ es una biyección. Además, a partir de la descripción de Γ en la demostración del Teorema 3.3.2, deducimos que $\Gamma = \Psi^{-1}$. ∎

Nota 3.3.8. Nótese que la aplicación Ψ del Teorema 3.2.13 conmuta con automorfismos de Galois, por lo que también lo hace la biyección Γ. A partir de esto, se deduce fácilmente que $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\Gamma(\chi))$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H)$ (donde $\mathbb{Q}(\chi)$ es el menor cuerpo conteniendo a $\mathbb{Q}$ y a los valores de χ). A consecuencia es esto, un carácter $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}(G|1_H)$ es racional (esto es, $\chi(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in G$) si y sólo si $\Gamma(\chi)$ es racional, ya que un carácter es racional si y sólo si es fijado por todo automorfismo de Galois.

Ejemplo 3.3.9. En la Introducción, mencionamos a A_5 con $p = 2$. En este grupo $\Phi_{1_G} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_5$, donde $\chi_1(1) = 1$, $\chi_2(1) = \chi_3(1) = 3$ y $\chi_5(1) = 5$. Por tanto, $|\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})| = 4$. Por otro lado, $|\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{N^0}})| = 2$. Como afirmamos, este contraejemplo prueba que la igualdad $|\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})| = |\mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{N^0}})|$ no es cierta para todo grupo finito.

Si G es un grupo finito p-resoluble, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $N = \mathrm{N}_G(P) = P$, podemos usar el Teorema F de [15] para deducir que:

- Si $\lambda \in \mathrm{Irr}(P)$ es lineal, entonces $\lambda^G = \chi + \Xi$, donde $\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(G)$ y todos los constituyentes irreducibles del carácter Ξ tienen grado divisible por p.

- Si $\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(G)$, entonces $\chi_P = \lambda + \Lambda$, donde $\lambda \in \mathrm{Irr}(P)$ es lineal, y ningún constituyente irreducible del carácter Λ es lineal.

Además, la aplicación $\chi \mapsto \lambda$ es una biyección $F : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}(P/P')$.

Corolario 3.3.10. *Bajo las mismas hipótesis que el Corolario 3.3.7, si* $\pi = \{p\}$ *y* $N = P$*, entonces* $\mathrm{B}_p(G) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(G) = \mathrm{Irr}_{p'}(G|1_H) = \mathrm{Irr}_{p'}(G)$ *y* $\Gamma = \Psi^{-1} = F$*, donde* F *es la biyección* $\mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}(P/P')$ *que acabamos de describir.*

Demostración. Como $\Gamma : \mathrm{Irr}_{p'}(G|1_H) \to \mathrm{Irr}(P/P')$ es una biyección (por el Corolario 3.3.7), y $F : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}(P/P')$ es otra biyección, deducimos que $\mathrm{Irr}_{p'}(G|1_H) = \mathrm{Irr}_{p'}(G)$. Así, por el Corolario 3.3.7, lo único que queda por comprobar es que $\Psi^{-1} = F$, lo cual es una consecuencia inmediata de las definiciones de F y Ψ (teniendo en cuenta que estamos suponiendo que $N = P$ por hipótesis). ∎

3.4. Consecuencias

En esta sección, demostraremos los Corolarios B y C. Para probar el primero de ellos, necesitaremos varios resultados previos.

Proposición 3.4.1. *Sea* G *un 2-grupo. Entonces, el conjunto de caracteres lineales racionales de* G *es exactamente* $\mathrm{Irr}(G/\Phi(G))$.

Demostración. Como $G/\Phi(G)$ es un grupo 2-elemental abeliano (véase 5.2.7 (a) de [12]), entonces si $\lambda \in \mathrm{Irr}(G/\Phi(G))$, tenemos que λ es lineal (por ser un carácter de un grupo abeliano). Además, si $x \in G/\Phi(G)$, entonces $x^2 = 1$, luego $1 = \lambda(x^2) = \lambda(x)^2$, por lo que $\lambda(x) = 1$ o $\lambda(x) = -1$. Por tanto, λ es racional.

Sea ahora λ un carácter lineal racional de G. Entonces, para todo $x \in G$, $\lambda(x)$ es una raíz de la unidad (por ser λ lineal), luego se tiene que $\lambda(x) = 1$ o $\lambda(x) = -1$ (ya que $\lambda(x) \in \mathbb{Q}$). Entonces, $\lambda(x^2) = \lambda(x)^2 = 1$ para todo $x \in G$. Pero como $\Phi(G) = \langle x^2 \mid x \in G \rangle$ (esto es una sencilla deducción del hecho de que, como podemos ver en 5.2.8 de [12], $\Phi(G)$ es el menor subgrupo normal de P tal que el grupo cociente de G sobre él es un grupo 2-elemental abeliano), se tiene que $\Phi(G) \leq \ker(\lambda)$, esto es, $\lambda \in \mathrm{Irr}(G/\Phi(G))$. ∎

Teorema 3.4.2. *Sea G un grupo resoluble, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un carácter irreducible real de G de grado impar. Sea $N \lhd G$ y sea $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ un constituyente irreducible de χ_N. Entonces θ es un carácter real.*

Demostración. Por inducción sobre $|G : N|$. Suponemos que $N < G$, o no hay nada que probar.

Consideramos un factor principal G/M tal que $N \leq M$. Si $N \neq M$, sea $\psi \in \mathrm{Irr}(M)$ un carácter sobre θ y bajo χ. Por la hipótesis de inducción, tenemos que ψ es real, y como $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\psi)$ es de grado impar, entonces ψ también lo es. Usando la hipótesis de inducción una vez más, deducimos que θ es un carácter real. Por tanto, podemos suponer que G/N es un factor principal, y como G es resoluble, tenemos que $|G/N| = p$ para cierto primo p.

Si $\chi_N = \theta$, entonces θ es real, así que podemos suponer que $\chi_N \notin \mathrm{Irr}(N)$. Entonces, por el Lema 2.3.5, tenemos que

$$\chi_N = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \,,$$

donde $\theta_i \in \mathrm{Irr}(N)$ son G-conjugados y diferentes entre sí. Entonces, como $\chi(1) = p\theta(1)$ es impar, deducimos que p es impar. Ahora, como χ es real, tenemos que χ_N también lo es, por lo que

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\theta_i} = \overline{\chi_N} = \chi_N = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \,.$$

Como la conjugación compleja es una involución y p es impar, tenemos que existe un θ_i real, por lo que θ, al ser un G-conjugado de dicho carácter, también lo es. ∎

Teorema 3.4.3 (Gow)**.** *Sea G un grupo resoluble, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un carácter irreducible real no trivial de G de grado impar. Entonces, $\chi = \lambda^G$ para algún $\lambda \in \mathrm{Irr}(U)$ lineal, donde $U < G$ y $|U : \ker(\lambda)| = 2$ (por tanto, en particular, χ es racional).*

Demostración. Este teorema es el resultado principal de [4]. ∎

Vamos a desviarnos un momento de nuestro objetivo para dar una versión más fuerte del Teorema 3.4.3 debida a G. Navarro y no publicada anteriormente.

Teorema 3.4.4. *Sea G un grupo resoluble, y sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un carácter irreducible real de G de grado impar. Entonces, si $U \leq G$ y $\alpha \in \mathrm{Irr}(U)$ es cualquier carácter primitivo tal que $\alpha^G = \chi$, entonces α es un carácter lineal real.*

Demostración. Aplicaremos inducción en $|G|$. Si $|G| = 1$ no hay nada que probar, por lo que suponemos que $|G| > 1$. Como

$$\chi(1) = \alpha^G(1) = |G : U|\alpha(1)$$

es impar, tenemos que $|G : U|$ y $\alpha(1)$ son ambos impares.

Por el Lema 2.2.4, tenemos que

$$\ker(\chi) = \bigcap_{x \in G} (\ker(\alpha))^x\,,$$

por lo que, en particular, $\ker(\chi) \leq \ker(\alpha)$.

Si $\ker(\chi) \neq 1$, consideramos el grupo $G/\ker(\chi)$, y tenemos que $\chi \in \mathrm{Irr}(G/\ker(\chi))$ es un carácter irreducible real de $G/\ker(\chi)$ de grado impar, $U/\ker(\chi) \leq G/\ker(\chi)$, y $\alpha \in \mathrm{Irr}(U/\ker(\chi))$ es un carácter primitivo tal que $\alpha^{G/\ker(\chi)} = \chi$. Entonces, podemos aplicar la hipótesis de inducción para deducir que $\alpha \in \mathrm{Irr}(U/\ker(\chi))$ es un carácter lineal real, por lo que α también lo es como carácter de U. Por esto, podemos suponer que χ es fiel.

Sea $N = \mathrm{O}_{2'}(G)$. Por el Teorema 3.4.2, sabemos que cualquier constituyente irreducible de χ_N es real. Como N es un $2'$-grupo, el Teorema de Burnside (véase el Teorema 2.3.1) nos dice que el único carácter real de N es 1_N. Así, deducimos que χ_N es una función constante, pero χ_N es un carácter fiel (ya que también lo es χ), por lo que $\mathrm{O}_{2'}(G) = N = 1$.

Sea $M = \mathrm{O}_2(G)$, y como $G > 1$ es resoluble y $\mathrm{O}_{2'}(G) = 1$, tenemos que $M > 1$. Por otro lado, como $|G : U|$ es impar, tenemos que $M \leq U$. Como α es primitivo, entonces α es cuasiprimitivo, por lo que $\alpha_M = e\theta$, con $e \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathrm{Irr}(M)$. Como $\alpha(1)$ es impar, $\theta(1)$ es impar, pero θ es un carácter irreducible de un 2-grupo, por lo que θ es lineal. Además, por el Teorema 3.4.2, deducimos que θ es real.

Sea $T = \mathrm{I}_G(\theta)$. Si $u \in U$, se tiene que

$$e\theta = \alpha_M = (\alpha_M)^u = e\theta^u\,,$$

por lo que $\theta = \theta^u$, y $U \leq T \leq G$.

Como $\alpha^T \in \mathrm{Irr}(T)$, y $(\alpha^T)^G = \alpha^G = \chi$, tenemos que α^T es el correspondiente de Clifford de χ sobre θ (véase el Teorema 2.3.3). Además

$$(\overline{\alpha^T})^G = \overline{(\alpha^T)^G} = \overline{\chi} = \chi$$

y $\overline{\alpha^T} \in \mathrm{Irr}(T)$, por lo que $\overline{\alpha^T}$ también es el correspondiente de Clifford de χ sobre θ, y $\overline{\alpha^T} = \alpha^T$, esto es, α^T es real.

Si $T < G$, como $\alpha^T \in \mathrm{Irr}(T)$ es un carácter irreducible real y $\alpha^T(1) = |T : U|\alpha(1)$ es impar, podemos aplicar la hipótesis de inducción para deducir que α es un carácter lineal real. Así, podemos suponer que $T = G$, por lo que θ es G-invariante.

Así, usando el Teorema 2.3.2, deducimos que $\chi_M = \chi(1)\theta$, por lo que $\theta \in \mathrm{Irr}(M)$ es fiel, lineal y real. Así, $\theta(x) = -1$ para todo $x \in M$ no trivial, y al ser θ fiel, deducimos que $|M| \leq 2$, por lo que $|M| = 2$.

Como $|M| = 2$ y $M \lhd G$, tenemos que $M \leq \mathrm{Z}(G)$, y como teníamos que $\mathrm{O}_{2'}(G) = 1$, deducimos que $\mathrm{O}_{2'}(G/M) = 1$, por lo que G es un 2-grupo.

Como el orden de χ es impar, deducimos que χ es lineal, por lo que el único carácter que lo induce es él mismo, y ya suponíamos por hipótesis que χ era real. ∎

Hacemos notar que en la demostración no se ha usado que α es un carácter primitivo, sólo que es cuasiprimitivo. Pero también hacemos notar que, por el Teorema 11.33 de [8] (debido a T. Berger), si G es resoluble y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, entonces χ es primitivo si y sólo si es cuasiprimitivo.

Ahora ya podemos probar el Corolario B.

Teorema 3.4.5. *Sea G un grupo resoluble, sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ y sea $N = \mathrm{N}_G(P)$. Entonces, el número de caracteres irreducibles racionales de G de grado impar es el número de N-órbitas en $P/\Phi(P)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.4.3, tenemos que si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ es un carácter irreducible racional no trivial de G de grado impar, entonces $\chi = \lambda^G$ para algún $\lambda \in \mathrm{Irr}(U)$ lineal, de orden 2 (ya que $|U : \ker(\lambda)| = 2$), donde $|G : U| = \chi(1)$ es impar. Sea H un 2-complemento de G. Entonces, si $\chi \in \mathrm{Irr}_{2'}(G)$ es racional, tenemos que

$$[\chi, (1_H)^G] = [\chi_H, 1_H] = [(\lambda^G)_H, 1_H] = [(\lambda_{U\cap H})^H, 1_H]\,,$$

ya que $(\lambda^G)_H = (\lambda_{U\cap H})^H$, pues $G = HU$. Tenemos que $\lambda_{U\cap H}$ es un carácter lineal de orden divisor de 2, pero $U \cap H$ es un $2'$-grupo, por lo que $\lambda_{U\cap H} = 1_{U\cap H}$. Asi,

$$[\chi, (1_H)^G] = [(1_{U\cap H})^H, 1_H] = [1_{U\cap H}, 1_{U\cap H}] = 1\,,$$

y por tanto, χ es un constituyente irreducible de $(1_H)^G$ de grado impar (lo cual también ocurre si $\chi = 1_G$). Lo mismo ocurre con los caracteres irreducibles racionales de N de grado impar: son constituyentes irreducibles de $(1_{N\cap H})^N$ de grado impar. Por el Corolario 3.3.7, y la Nota 3.3.8 sobre cuerpos de valores en la correspondencia, concluimos que el número de caracteres irreducibles racionales de G de grado impar es el mismo que los de N.

Supongamos que $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ es racional y de grado impar, y sea $\lambda \in \mathrm{Irr}(P)$ bajo θ. Usando el Teorema 3.4.2, al ser θ real y de grado impar, deducimos que λ también es real. Como $P \triangleleft N$ y θ es de grado impar, entonces λ también debe serlo, pero como P es un 2-grupo, deducimos que λ es lineal. Por tanto, por la Proposición 3.4.1, $\lambda \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))$.

Sea T el estabilizador de λ en N, y sea $\hat{\lambda}$ la extensión canónica de λ a T (usando el Teorema 2.3.6, ya que $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$, y por tanto, $(|P|, |T : P|) = 1$). Notemos que si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces $\hat{\lambda}^\sigma$ es una extensión de $\lambda^\sigma = \lambda$ que tiene el mismo orden que $\hat{\lambda}$, y por unicidad, $\hat{\lambda}^\sigma = \hat{\lambda}$ para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, por lo que $\hat{\lambda}$ también es racional. Aplicando la correspondencia de Clifford (véase el Teorema 2.3.3), sabemos que existe un único $\phi \in \mathrm{Irr}(T|\lambda)$ tal que $\theta = \phi^N$, y aplicando la correspondencia de Gallagher en T (véase la Proposición 2.3.4), sabemos que existe un único $\tau \in \mathrm{Irr}(T/P)$ tal que $\phi = \tau\hat{\lambda}$ (por lo que $\theta = (\tau\hat{\lambda})^N$). Por la unicidad de las correspondencias de Clifford y Gallagher, y usando que θ, $\hat{\lambda}$ y λ son racionales, concluimos que τ también es racional. Como T/P tiene orden impar y τ es real (ya que es racional), tenemos que $\tau = 1$ (por el Teorema 2.3.1); por tanto, $\theta = (\hat{\lambda})^N$. Esto prueba que los caracteres irreducibles racionales de N de grado impar son del tipo

$$\{(\hat{\lambda})^N \mid \lambda \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))\}.$$

Por otro lado (olvidandonos ahora de θ), si $\lambda \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))$, entonces λ es racional (por la Proposición 3.4.1). Como antes, sea T el estabilizador de λ en N, y sea $\hat{\lambda}$ la extensión canónica (racional) de λ a T. Por la correspondencia de Clifford, sabemos que $(\hat{\lambda})^N \in \mathrm{Irr}(N)$, que es racional (por la unicidad de la correspondencia de Clifford), y que su grado es $|N : T|$, que es impar (pues $P \leq T$ y $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$). Por tanto, hemos visto que el conjunto

$$\{(\hat{\lambda})^N \mid \lambda \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))\}$$

es el conjunto de caracteres irreducibles racionales de N de grado impar.

Ahora, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))$, entonces λ_1 y λ_2 son N-conjugados si y sólo si $(\hat{\lambda_1})^N = (\hat{\lambda_2})^N$, por lo que los caracteres irreducibles racionales de N de grado impar son exactamente

$$\{(\hat{\lambda})^N \mid \lambda \in \Lambda\},$$

donde Λ es un sistema completo de representantes de N-órbitas (o lo que es lo mismo, N/P-órbitas) en $\mathrm{Irr}(P/\Phi(P))$, y por tanto, el número de caracteres irreducibles racionales de G de grado impar es $|\Lambda|$. Por acción coprima, sabemos que las N/P-acciones en $\mathrm{Irr}(P/\Phi(P))$ y en el conjunto de clases de conjugación de $P/\Phi(P)$ son permutación-isomorfas (por el Teorema 2.3.9), por lo que $|\Lambda|$ es el número de N/P-órbitas (o lo que es lo mismo, N-órbitas) en $P/\Phi(P)$. Esto completa la demostración del teorema. ∎

Seguidamente probaremos el Corolario C de la Introducción.

Teorema 3.4.6. *Sea G un grupo finito π-separable, y sean P y H un π-subgrupo de Hall y un π-complemento de G, respectivamente. Entonces*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_H)^G)} \chi(1) \geq |P : P'| \,.$$

Demostración. Denotemos $N = \mathrm{N}_G(P)$. Si $\lambda \in \mathrm{Irr}(P)$ es lineal (esto es, $\lambda \in \mathrm{Irr}(P/P')$), entonces (por el Teorema 3.2.13 aplicado en N, y usando la misma notación) $\hat{P}$ debe ser el estabilizador de λ en N, y $\hat{\lambda}$ es la extensión canónica de λ a $\hat{P}$ (esto es, la única extensión que tiene π-orden, la cual tiene, de hecho, el mismo orden que λ - véase el Teorema 2.3.6). De esta manera, usando el Teorema 3.2.13 obtenemos que

$$\mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N) = \{\hat{\lambda}^N \mid \lambda \in \Delta\} \,,$$

donde Δ es un sistema completo de representantes de N-órbitas en $\mathrm{Irr}(P/P')$ y $\hat{\lambda}$ es la extensión canónica de λ a su estabilizador en N. Se deduce que

$$\sum_{\tau \in \mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)} \tau(1) = \sum_{\lambda \in \Delta} \hat{\lambda}^N(1) \,.$$

Notemos que si $\lambda \in \Delta$, entonces $\hat{\lambda}^N(1) = |N : \hat{P}|$, y como $\hat{P}$ es el estabilizador de λ en N, entonces $|N : \hat{P}|$ es el cardinal de la N-órbita de λ. Por tanto, si sumamos esta cantidad variando λ en Δ, obtenemos el cardinal del conjunto de caracteres lineales de P, esto es, $|Irr(P/P')| = |P : P'|$. Así,

$$\sum_{\tau \in \mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N)} \tau(1) = \sum_{\lambda \in \Delta} |N : \hat{P}| = |P : P'| \,,$$

pero sabemos que $\mathrm{B}_\pi(N) \cap \mathrm{Irr}_{\pi'}(N) = \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_{N \cap H})^N)$ por el Teorema 3.3.6, así que

$$\sum_{\tau \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_{N \cap H})^N)} \tau(1) = |P : P'| \,.$$

Por tanto (y usando que $\Gamma(\chi)(1)$ divide a $\chi(1)$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_H)^G)$, como hemos visto en el Corolario 3.3.7),

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_H)^G)} \chi(1) \geq \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_H)^G)} \Gamma(\chi)(1) = \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}_{\pi'}((1_{N \cap H})^N)} \tau(1) = |P : P'| \,. \quad \blacksquare$$

Una pregunta lógica que cabe hacerse es la siguiente: ¿qué podemos decir del Corolario C si el grupo G no es p-resoluble? ¿Es cierta la desigualdad

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})} \chi(1) \geq |P : P'|$$

para grupos finitos en general?

Hemos comprobado múltiples grupos para diferentes primos p, y no hemos encontrado ninguno de ellos en el que la desigualdad no se cumpla - de hecho, los valores de $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(\Phi_{1_{G^0}})} \chi(1)$ tienden a ser mucho mayores que los de $|P : P'|$. Adjuntamos dos tablas donde comparamos estos dos valores (para $p = 2$ y $p = 3$) para diversos grupos: grupos alternados A_n, grupos especiales lineales proyectivos $\mathrm{PSL}(2, n)$ y $\mathrm{PSL}(3, n)$, y grupos esporádicos.

Grupo	$\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}_{2'}(\Phi_{1_{G^0}})} \chi(1)$	$\lvert P:P'\rvert$
A_5	12	4
A_6	20	4
A_7	72	4
A_8	196	8
A_9	434	8
A_{10}	1752	8
$\mathrm{PSL}(2,7)$	8	4
$\mathrm{PSL}(2,8)$	56	8
$\mathrm{PSL}(2,11)$	12	4
$\mathrm{PSL}(2,13)$	28	4
$\mathrm{PSL}(2,16)$	240	16
$\mathrm{PSL}(2,17)$	36	4
$\mathrm{PSL}(2,19)$	20	4
$\mathrm{PSL}(3,3)$	80	4
$\mathrm{PSL}(3,4)$	322	16
$\mathrm{PSL}(3,5)$	684	8
$\mathrm{PSL}(3,7)$	800	4
$\mathrm{PSL}(3,8)$	25970	64
$\mathrm{PSL}(3,9)$	7100	16
M_{11}	112	4
M_{12}	332	8
J_1	840	8
M_{22}	882	8
J_2	884	8
M_{23}	1610	8
HS	5852	8
J_3	4862	8
M_{24}	24976	16
McL	51788	8
He	82452	16
Ru	285768	8
Suz	648208	16
$O'N$	415340	8
Co_3	626518	16
Co_2	11427684	32

Tabla 3.1: p=2

Grupo	$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{3'}(\Phi_{1_{G0}})} \chi(1)$	$\lvert P : P' \rvert$
A_5	6	3
A_6	27	9
A_7	64	9
A_8	135	9
A_9	9	9
A_{10}	546	9
$\mathrm{PSL}(2,7)$	9	3
$\mathrm{PSL}(2,8)$	9	9
$\mathrm{PSL}(2,11)$	12	3
$\mathrm{PSL}(2,13)$	15	3
$\mathrm{PSL}(2,16)$	18	3
$\mathrm{PSL}(2,17)$	18	9
$\mathrm{PSL}(2,19)$	81	9
$\mathrm{PSL}(3,3)$	111	9
$\mathrm{PSL}(3,4)$	126	9
$\mathrm{PSL}(3,5)$	126	3
$\mathrm{PSL}(3,7)$	513	9
$\mathrm{PSL}(3,8)$	513	9
$\mathrm{PSL}(3,9)$	46841	81
M_{11}	99	9
M_{12}	286	9
J_1	78	3
M_{22}	540	9
J_2	189	9
M_{23}	2025	9
HS	6534	9
J_3	6156	9
M_{24}	5568	9
McL	39942	27
He	81330	9
Ru	65976	9
Suz	754886	27
$O'N$	1475444	81
Co_3	1759339	27
Co_2	4330602	27

Tabla 3.2: p=3

Capítulo 4

Correspondencias entre caracteres de 2-Brauer de grupos resolubles

4.1. Introducción

Supongamos que G es un grupo finito y p es un primo. Como hemos dicho, la Conjetura de McKay afirma que existe una biyección entre el conjunto $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ de caracteres complejos irreducibles de G de grado no divisible por p y el conjunto $\mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))$, donde P es un p-subgrupo de Sylow de G. En general, no se conocen correspondencias naturales entre estos dos conjuntos, ni siquiera para grupos resolubles, y de hecho, se supone que no van a existir. En 1973 (véase el Teorema 10.9 de [7]), M. Isaacs encontró una biyección natural

$$\mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))$$

si G es resoluble y $|G : \mathrm{N}_G(P)|$ es impar. Mucho mas recientemente, A. Turull encontró otra biyección natural si G es resoluble y $|\mathrm{N}_G(P)|$ es impar (véase [20]).

Nuestra estrategia aquí no será limitar los posibles grupos resolubles G al poner condiciones sobre ellos, sino limitar el conjunto $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$, para encontrar una biyección natural entre subconjuntos adecuados de $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))$. Específicamente, demostramos el siguiente resultado, cuyas hipótesis son ligeramente más débiles que las que son necesarias para la correspondencia de Turull de [20]. Si G es un grupo finito resoluble, recordemos que $\mathrm{B}_{2'}(G)$ es un lifting canónico de los caracteres de 2-Brauer de G (véase el Teorema 3.2.12).

Teorema D. *Sea G un grupo finito resoluble. Entonces existe una biyección* *canónica*

$$^* : \mathrm{B}_{2'}(G) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{B}_{2'}(\mathrm{N}_G(P)) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P)) .$$

En particular, existe una biyección natural

$$\mathrm{IBr}_{p'}(G) \to \mathrm{IBr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P)) ,$$

donde $\mathrm{IBr}_{p'}(G)$ *es el conjunto de caracteres de 2-Brauer irreducibles de* G *de* p'*-grado.*

Notemos que si $|\mathrm{N}_G(P)|$ es impar (como en las hipótesis de la correspondencia de Turull), entonces $\mathrm{B}_{2'}(\mathrm{N}_G(P)) = \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(P))$ y por tanto nuestro Teorema D es más general que la correspondencia de Turull.

Si $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ es el grupo de Galois de la clausura algebraica del cuerpo de números racionales sobre los racionales, veremos que * conmuta con la acción de $\mathcal{G}$. Además, $\chi^*(1)$ divide a $\chi(1)$ y $\chi(1) \equiv \pm\chi^*(1) \bmod p$ para todo $\chi \in \mathrm{B}_{2'}(G) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(G)$ (como fue conjeturado en [11], [17] y [21]). A diferencia de Turull en [20], no somos capaces de controlar los índices de Schur de los caracteres que se encuentran en correspondencia.

Queremos mencionar que el hecho de que

$$|\mathrm{IBr}_{p'}(G)| = |\mathrm{IBr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))|$$

(donde nos estamos refiriendo a caracteres de q-Brauer, para un número primo q) es cierto y bien conocido para grupos resolubles (véase [24]). Si G no es resoluble, entonces $|\mathrm{IBr}_{p'}(G)|$ no tiene por qué ser igual a $|\mathrm{IBr}_{p'}(\mathrm{N}_G(P))|$.

Las correspondencias canónicas nos permiten obtener resultados como el que viene a continuación fácilmente. Este es el resultado principal de [18], que nosotros deducimos de nuestro Teorema D.

Corolario E. *Sea* G *un grupo resoluble y sea* $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$*. Entonces* $\mathrm{N}_G(P)$ *tiene un 2-subgrupo de Sylow normal si y sólo si* 1_{G^0} *es el único carácter real de 2-Brauer de* G *de* p'*-grado.*

Los resultados principales de esta sección han sido publicados en [1].

4.2. Preliminares

A lo largo de este capítulo, G será un grupo finito. Básicamente, usaremos la notación de [13] para caracteres de q-Brauer, donde q es un primo.

Si G es un grupo π-separable, usaremos el conjunto canónico $\mathrm{B}_\pi(G) \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, definidos en la sección 3.2, y ^{0} denotará restricción a π-elementos.

Cuando $\pi = \{q\}'$, tenemos que $\mathrm{B}_{q'}(G)$ es un lifting canónico de los caracteres de q-Brauer $\mathrm{IBr}(G)$ (por el Teorema 3.2.12).

Ahora, probaremos un lema que necesitaremos en la demostración del Lema 4.2.6

Lema 4.2.1. *Supongamos que $L \lhd G$, donde G es π-separable. Sea $\phi \in \mathrm{B}_\pi(L)$ y sea H un π-subgrupo de Hall de G. Supongamos que α y β son caracteres (ordinarios) de G tales que α_L y β_L sólo contienen G-conjugados de ϕ. Entonces $\alpha_H = \beta_H$ si y sólo si $\alpha_{HL} = \beta_{HL}$.*

Demostración. Si $\alpha_{HL} = \beta_{HL}$, es inmediato que $\alpha_H = \beta_H$.

Supongamos ahora que $\alpha_H = \beta_H$. Si $\mu \in \mathrm{Irr}(HL)$ es un constituyente de α_{HL}, entonces

$$\alpha_L = (\alpha_{HL})_L = \mu_L + \Xi\,,$$

donde Ξ es un carácter de L o es cero. Como α_L sólo contiene G-conjugados de ϕ, entonces μ_L sólo contiene G-conjugados de ϕ; sea τ uno de ellos. Como HL/L es un π-grupo, $\tau \in \mathrm{B}_\pi(L)$ (ya que es un G-conjugados de $\phi \in \mathrm{B}_\pi(L)$) y $\mu \in \mathrm{Irr}(HL|\tau)$, concluimos que $\mu \in \mathrm{B}_\pi(HL)$ (por el Teorema 3.2.9). Análogamente, si μ fuese un constituyente de β_{HL} en lugar de α_{HL}, también se cumpliría que $\mu \in \mathrm{B}_\pi(HL)$. Por tanto, podemos escribir

$$\alpha_{HL} = e_1\mu_1 + \cdots + e_s\mu_s \quad \text{y} \quad \beta_{HL} = d_1\nu_1 + \cdots + d_t\nu_t\,,$$

donde $\mu_i, \nu_j \in \mathrm{B}_\pi(HL)$ y $e_i, d_j \in \mathbb{N}$ para todo $1 \le i \le s$ y todo $1 \le j \le t$ (donde los μ_i son diferentes entre sí, y los ν_j son diferentes entre sí). Como $\alpha_H = \beta_H$, tenemos que

$$e_1\mu_1^0 + \cdots + e_s\mu_s^0 = d_1\nu_1^0 + \cdots + d_t\nu_t^0\,,$$

donde ^{0} denota restricción a π-elementos. Por el Teorema 3.2.12, sabemos que $\{\nu^0 \mid \nu \in \mathrm{B}_\pi(HL)\}$ es una $\mathbb{C}$-base del espacio de funciones de clase sobre los π-elementos de HL, y que

$$^0 : \mathrm{B}_\pi(HL) \to \{\nu^0 \mid \nu \in \mathrm{B}_\pi(HL)\}$$

es una biyección, por lo que concluimos que

$$\alpha_{HL} = e_1\mu_1 + \cdots + e_s\mu_s = d_1\nu_1 + \cdots + d_t\nu_t = \beta_{HL}\,,$$

como se quería demostrar. ∎

La siguiente definición es fundamental en Teoría de Caracteres.

Definición 4.2.2. Sea K un grupo finito, y sea $L \lhd K$.

Sea $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$. Diremos que θ está completamente ramificado respecto a K/L si existe un $\phi \in \mathrm{Irr}(L)$ tal que $\theta_L = e\phi$, con $e^2 = |K : L|$.

Sea $\phi \in \mathrm{Irr}(L)$. Diremos que ϕ está completamente ramificado respecto a K/L si existe un $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ tal que $\phi^K = e\theta$, con $e^2 = |K : L|$.

Si K un grupo finito, $L \lhd K$, $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ y $\phi \in \mathrm{Irr}(L)$ tales que θ está por encima de ϕ, entonces θ está completamente ramificado respecto a K/L si y sólo si ϕ está completamente ramificado respecto a K/L (esto es inmediato por la reciprocidad de Frobenius).

La siguiente definición aparece en [7], y más concretamente, en la Sección 3 de dicho artículo.

Definición 4.2.3. Decimos que (G, K, L, θ, ϕ) es una 5-tupla de caracteres cuando G es un grupo finito, $L \subseteq K \lhd G$ con $L \lhd G$ donde K/L es abeliano, $\phi \in \mathrm{Irr}(L)$, $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ y $\theta_L = e\phi$ con $e^2 = |K : L|$, y ϕ es G-invariante (lo que es equivalente a que θ sea G-invariante).

Supongamos que (G, K, L, θ, ϕ) es una 5-tupla de caracteres, con K/L un grupo abeliano de orden impar. Entonces, Isaacs define en la Sección 9 de [7] el carácter canónico $\psi = \psi^{(K/L)} \in \mathrm{Ch}(G)$. Dicho carácter sólo depende de ϕ y de la acción de G/K en K/L, y es tal que $\psi(1)^2 = |K : L|$, su núcleo está contenido en K, y $\psi(g) \neq 0$ para todo $g \in G$. Hacemos notar que Isaacs dio métodos para calcular el valor exacto de $\psi(g)$ para cualquier $g \in G$, pero no los transcribiremos, ya que no necesitaremos usarlos en este trabajo.

Teorema 4.2.4. *Supongamos que (G, K, L, θ, ϕ) es una 5-tupla de caracteres, con K/L un grupo abeliano de orden impar. Entonces, si $\psi = \psi^{(K/L)}$ es el carácter canónico de G que se origina de esta 5-tupla de caracteres, existe un subgrupo $U \subseteq G$ tal que:*

(a) *$UK = G$ y $U \cap K = L$;*

(b) *si $K \leq W \leq G$, la ecuación $\chi_{W \cap U} = \psi_{W \cap U}\xi$ donde $\chi \in \mathrm{Irr}(W|\theta)$ y $\xi \in \mathrm{Irr}(W \cap U|\phi)$ define una biyección entre estos conjuntos de caracteres.*

Esbozo de la demostración. La prueba se puede realizar por inducción en $|K/L|$, exactamente de la misma manera que la primera parte de la prueba del Teorema 9.1 de [7], para deducir que podemos asumir que K/L es un p-grupo, y entonces basta seguir la prueba del Teorema 3.1 de [14] para concluir que este teorema es cierto. ∎

Notemos que, bajo las mismas hipótesis y notación del Teorema 4.2.4, si $g \in G$, entonces U^g también satisface **(a)** y **(b)**. Notemos también que si σ

es un elemento de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, el grupo de Galois de la clausura algebraica del cuerpo de números racionales (sobre los racionales), entonces $(G, K, L, \theta^\sigma, \phi^\sigma)$ es una 5-tupla de caracteres, y el carácter canónico que se origina de ésta es ψ^σ, según su definición en [7]. Así, podemos aplicar el Teorema 4.2.4 a esta nueva 5-tupla de caracteres, y es fácil comprobar que las correspondencias de **(b)** conmutan con σ; esto es, si $K \leq W \leq G$, y

$$\chi_{W\cap U} = \psi_{W\cap U}\xi \text{ donde } \chi \in \mathrm{Irr}(W|\theta) \text{ y } \xi \in \mathrm{Irr}(W \cap U|\phi) \,,$$

entonces

$$(\chi^\sigma)_{W\cap U} = (\psi^\sigma)_{W\cap U}\xi^\sigma \text{ donde } \chi^\sigma \in \mathrm{Irr}(W|\theta^\sigma) \text{ y } \xi^\sigma \in \mathrm{Irr}(W \cap U|\phi^\sigma)\,.$$

Ahora, recordaremos los conceptos de caracteres triples e isomorfismos de caracteres triples (los cuales pueden verse con más detalle en el capítulo 11 de [8]). Decimos que (G, K, θ) es un carácter triple si G es un grupo finito, $K \lhd G$ y $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ es G-invariante. Notemos que los conceptos de 5-tupla de caracteres y caracteres triples están relacionados: si (G, K, L, θ, ϕ) es una 5-tupla de caracteres, entonces (G, K, θ) y (G, L, ϕ) son caracteres triples.

Supongamos ahora que (G, K, θ) y (U, L, ϕ) son caracteres triples, y que

$${}^\star : G/K \to U/L$$

es un isomorfismo de grupos. Si $K \leq H \leq G$, denotamos por $H^\star$ al único subgrupo $L \leq H^\star \leq U$ tal que $(H/K)^\star = H^\star/L$, y si β es un carácter de H/K, entonces $\beta^\star$ denota al correspondiente carácter de $H^\star/L$ mediante el isomorfismo * (esto es, el único carácter $\beta^\star$ de $H^\star/L$ tal que $\beta^\star(x^\star) = \beta(x)$ para todo $x \in H/K$). Supongamos que para cada $K \leq H \leq G$ existe una biyección

$${}^\star : \mathrm{Irr}(H|\theta) \to \mathrm{Irr}(H^\star|\phi)\,,$$

que extendemos linealmente a una biyección

$${}^\star : \mathrm{Ch}(H|\theta) \to \mathrm{Ch}(H^\star|\phi)$$

(donde $\mathrm{Ch}(H|\theta)$ denota el conjunto de caracteres χ de H tales que χ_K es un múltiplo de θ; esto es, los caracteres de H que son $\mathbb{N}$-combinación lineal de los caracteres de $\mathrm{Irr}(H|\theta)$). Supongamos también que, para cada

$$K \leq I \leq H \leq G, \chi \in \mathrm{Irr}(H|\theta) \text{ y } \beta \in \mathrm{Irr}(H/K)\,,$$

se cumple lo siguiente:

(a) $(\chi_I)^\star = (\chi^\star)_{I^\star}$ y

(b) $(\chi\beta)^\star = \chi^\star\beta^\star$.

Entonces, decimos que

$$^\star : (G, K, \theta) \to (U, L, \phi)$$

es un isomorfismo de caracteres triples.

Lema 4.2.5. *Supongamos que (G, K, L, θ, ϕ) es una 5-tupla de caracteres, donde K/L es un grupo abeliano de orden impar. Sean ψ y U como en el Teorema 4.2.4, y sea*

$$^\star : G/K \to U/L$$

el isomorfismo canónico de grupos (teniendo en cuenta que $G = KU$ y $L = K \cap U$), y para cada $K \leq W \leq G$, denotamos por

$$^\star : \mathrm{Irr}(W|\theta) \to \mathrm{Irr}(W \cap U|\phi)$$

a la biyección canónica de Isaacs dada por $\chi_{W\cap U} = \psi_{W\cap U}\chi^\star$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(W|\theta)$. Entonces estas aplicaciones definen un isomorfismo de caracteres triples

$$^\star : (G, K, \theta) \to (U, L, \phi)\,.$$

Demostración. Tomamos un $K \leq H \leq G$ (nótese que, entonces, se tiene que $H^\star = H \cap U$). Nótese que si extendemos

$$^\star : \mathrm{Irr}(H|\theta) \to \mathrm{Irr}(H^\star|\phi)$$

linealmente a

$$^\star : \mathrm{Ch}(H|\theta) \to \mathrm{Ch}(H^\star|\phi)$$

y $\chi \in \mathrm{Ch}(H|\theta)$, entonces $\chi^\star$ es el único carácter de $\mathrm{Ch}(H^\star|\phi)$ tal que $\chi_{H^\star} = \psi_{H^\star}\chi^\star$, teniendo en cuenta que $\psi(g) \neq 0$ para todo $g \in G$.

Queremos probar que * es un isomorfismo de caracteres triples, por lo que es suficiente probar que se cumple **(a)** y **(b)**, tal y como estan enunciados en la definición de isomorfismo de caracteres triples. Sean

$$K \leq I \leq H \leq G, \chi \in \mathrm{Irr}(H|\theta) \text{ y } \beta \in \mathrm{Irr}(H/K)\,.$$

Tenemos que $\chi_{H^\star} = \psi_{H^\star}\chi^\star$, por lo que

$$(\chi_I)_{I^\star} = \chi_{I^\star} = (\chi_{H^\star})_{I^\star} = \psi_{I^\star}(\chi^\star)_{I^\star}\,,$$

luego $(\chi_I)^\star = (\chi^\star)_{I^\star}$, por lo que **(a)** es cierto.

Como $\beta \in \mathrm{Irr}(H/K)$, se tiene que $\beta^\star = \beta_{H^\star}$ (por la definición del isomorfismo canónico $^\star : G/K \to U/L$), y como $\chi_{H^\star} = \psi_{H^\star}\chi^\star$, deducimos que

$$(\chi\beta)_{H^\star} = \chi_{H^\star}\beta_{H^\star} = \psi_{H^\star}\chi^\star\beta_{H^\star} = \psi_{H^\star}\chi^\star\beta^\star\,,$$

por lo que $(\chi\beta)^\star = \chi^\star\beta^\star$, y **(b)** también es cierto. ∎

Usaremos el lema anterior para probar el que viene a continuación, el cual trata sobre caracteres de 2-Brauer. Este será un lema clave para probar el Teorema 4.3.1.

Lema 4.2.6. *Supongamos que (G, K, L, θ, ϕ) es una 5-tupla de caracteres, con G resoluble y K/L un grupo abeliano de orden impar. Supongamos también que $\theta \in \mathrm{B}_{2'}(K)$. Sean ψ y U como en el Teorema 4.2.4, y denotamos por*

$$^\star : \mathrm{Irr}(G|\theta) \to \mathrm{Irr}(U|\phi)$$

a la biyección canónica de Isaacs, dada por $\chi_U = \psi_U \chi^\star$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$. Entonces $\chi^0 \in \mathrm{IBr}(G)$ si y sólo si $(\chi^\star)^0 \in \mathrm{IBr}(U)$ para $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$. Además, dados $\chi, \tau \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$, se tiene que $\chi^0 = \tau^0$ si y sólo si $(\chi^\star)^0 = (\tau^\star)^0$. Así, existe una biyección canónica de caracteres de Brauer

$$^* : \mathrm{IBr}(G|\theta^0) \to \mathrm{IBr}(U|\phi^0)\,.$$

Demostración. Nótese que $\theta \in \mathrm{B}_{2'}(K)$ es equivalente a $\phi \in \mathrm{B}_{2'}(L)$, según el Teorema 3.2.9, ya que $|K/L|$ es impar. Por tanto, $\theta^0 \in \mathrm{IBr}(K)$ y $\phi^0 \in \mathrm{IBr}(L)$ (por el Teorema 3.2.12).

Sea H un 2-complemento de G, por lo que se cumple que $K \subseteq HL$ y que $U \cap H$ es un 2-complemento de U, ya que $HU = G$. Sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$ (por lo que $\chi^\star \in \mathrm{Irr}(U|\phi)$). Escribimos

$$(\chi^\star)^0 = e_1\alpha_1^0 + \cdots + e_r\alpha_r^0\,,$$

donde $r \geq 1$, $\alpha_i \in \mathrm{B}_{2'}(U)$ y e_i son enteros no negativos (usando los Teoremas 2.4.4 y 3.2.12). Como $U \cap H$ es un 2-complemento de U, tenemos que $U \cap H$ está contenido en los elementos 2-regulares de U, por lo que

$$(\chi^\star)_{U\cap H} = (e_1\alpha_1 + \cdots + e_r\alpha_r)_{U\cap H}\,.$$

Como $(\chi^\star)_L = e\phi$, donde e es un entero no negativo (ya que $L \lhd U$ y ϕ es U-invariante, por ser G-invariante), deducimos que

$$e\phi^0 = ((\chi^\star)_L)^0 = ((\chi^\star)^0)_L = e_1(\alpha_1^0)_L + \cdots + e_r(\alpha_r^0)_L\,,$$

y como $\phi^0 \in \mathrm{IBr}(L)$, deducimos que para cada i, se cumple que

$$((\alpha_i)_L)^0 = (\alpha_i^0)_L = v_i\phi^0$$

para un entero no negativo v_i. Como cada constituyente irreducible de $(\alpha_i)_L$ esta en $\mathrm{B}_{2'}(L)$ (usando el Teorema 3.2.10), y $\mathrm{B}_{2'}(L)$ es un lifting canónico de $\mathrm{IBr}(L)$ (otra vez por el Teorema 3.2.12), se deduce que $(\alpha_i)_L = v_i\phi$. Así, todo α_i está por encima de ϕ.

Hemos visto que el único carácter irreducible que es un constituyente tanto de $(\chi^\star)_L$ como de $(e_1\alpha_1 + \cdots + e_r\alpha_r)_L$ es $\phi \in \mathrm{B}_{2'}(L)$, y que

$$(\chi^\star)_{U\cap H} = (e_1\alpha_1 + \cdots + e_r\alpha_r)_{U\cap H}\,,$$

por lo que podemos usar el Lema 4.2.1 para concluir que

$$(\chi^\star)_{L(U\cap H)} = (e_1\alpha_1 + \cdots + e_r\alpha_r)_{L(U\cap H)}\,.$$

Para cada i, como $\alpha_i \in \mathrm{Irr}(U|\phi)$, tenemos que existe un carácter $\beta_i \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$ tal que $\alpha_i = (\beta_i)^\star$. Usando el Lema 4.2.5, también denotamos por * a la extensión de la biyección canónica de Isaacs a sumas (distintas de cero) de caracteres en $\mathrm{Irr}(F|\theta)$, para todo $K \le F \le G$. Entonces, obtenemos que

$$(\chi_{LH})^\star = (\chi^\star)_{L(U\cap H)} = ((e_1\beta_1+\cdots+e_r\beta_r)^\star)_{L(U\cap H)} = ((e_1\beta_1+\cdots+e_r\beta_r)_{LH})^\star\,,$$

ya que

$$(LH)^\star = LH \cap U = L(U\cap H)\,,$$

y como

$$^\star : \mathrm{Ch}(LH|\theta) \to \mathrm{Ch}((LH)^\star|\phi)$$

es una biyección, deducimos que

$$\chi_{LH} = (e_1\beta_1 + \cdots e_r\beta_r)_{LH}\,,$$

por lo que

$$\chi_H = (e_1\beta_1 + \cdots e_r\beta_r)_H\,.$$

Si $\chi^0 \in \mathrm{IBr}(G)$, y como $\chi_H = (e_1\beta_1 + \cdots e_r\beta_r)_H$, concluimos que $r = 1$ y $e_1 = 1$, luego

$$(\chi^\star)^0 = (\beta_1^\star)^0 = (\alpha_1)^0 \in \mathrm{IBr}(U)\,.$$

Usando un razonamiento análogo al de los párrafos anteriores, obtenemos que $\chi^0 \in \mathrm{IBr}(G)$ si $(\chi^\star)^0 \in \mathrm{IBr}(U)$ (esto no es una conclusión inmediata, ya que, bajo la notación anterior, si $(\chi^\star)^0 \in \mathrm{IBr}(U)$, deduciríamos que $\chi_{LH} = \beta_1$, pero β_1 no tiene porque estar en $\mathrm{B}_{2'}(LH)$, y no podemos asegurar que $\beta_1^0 \in \mathrm{IBr}(G)$).

Sean ahora $\chi, \tau \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$. Tenemos que $\chi^0 = \tau^0$ sii $\chi_H = \tau_H$, y usando el Lema 4.2.1, esto es cierto sii $\chi_{LH} = \tau_{LH}$. Por el Lema 4.2.5, esto es equivalente a

$$(\chi^\star)_{L(U\cap H)} = (\chi_{LH})^\star = (\tau_{LH})^\star = (\tau^\star)_{L(U\cap H)}\,,$$

lo cual es cierto sii $(\chi^\star)_{U\cap H} = (\tau^\star)_{U\cap H}$ (usando otra vez el Lema 4.2.1, ya que $\chi^\star, \tau^\star \in \mathrm{Irr}(U|\phi)$), y esto es equivalente a $(\chi^\star)^0 = (\tau^\star)^0$.

Sea ahora $\tau \in \mathrm{IBr}(G|\theta^0)$. Por el Teorema 3.2.12, sabemos que existe un $\chi \in \mathrm{B}_{2'}(G)$ tal que $\chi^0 = \tau$. Además, por el Teorema 3.2.10, todo constituyente irreducible de χ_K se encuentra en $\mathrm{B}_{2'}(K)$ y, por tanto, debe ser θ (otra vez por el Teorema 3.2.12, aplicado ahora en K). Análogamente, si $\tau \in \mathrm{IBr}(U|\phi^0)$, existe un $\chi \in \mathrm{Irr}(U|\phi)$ tal que $\chi^0 = \tau$.

Así, si $\tau \in \mathrm{IBr}(G|\theta^0)$, sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$ tal que $\chi^0 = \tau$. Como $\chi^0 = \tau \in \mathrm{IBr}(G|\theta^0)$, tenemos que $(\chi^\star)^0 \in \mathrm{IBr}(U|\phi^0)$, y definimos $\tau^* = (\chi^\star)^0$. Por lo que hemos probado anteriormente,

$$^* : \mathrm{IBr}(G|\theta^0) \to \mathrm{IBr}(U|\phi^0)$$

es una biyección canónica. ∎

Análogamente a como antes se ha definido el concepto de carácter triple, se define su equivalente modular: decimos que (G, K, θ) es un carácter triple modular si G es un grupo finito, $K \lhd G$ y $\theta \in \mathrm{IBr}(K)$ es G-invariante. La definición de isomorfismos de caracteres triples modulares es también análoga, y no la explicitaremos aquí. El siguiente resultado es el Teorema 8.28 de [13], y lo usaremos para probar el Teorema 4.2.8.

Teorema 4.2.7. *Sea (G, K, θ) un carácter triple modular. Entonces existe un isomorfismo de caracteres triples modulares*

$$F : (G, K, \theta) \to (U, L, \phi)$$

donde ϕ es lineal y fiel. En particular, L es un p'-subgrupo central de U.

Ahora probaremos un teorema que usaremos más adelante, en la prueba del Teorema 4.3.1.

Teorema 4.2.8. *Supongamos que $G = KH$, donde K y $L = K \cap H$ son normales en G. Supongamos que $\theta \in \mathrm{IBr}(K)$ es G-invariante y tal que $\theta_L = \phi \in \mathrm{IBr}(L)$. Entonces la restricción de caracteres define una biyección*

$$\mathrm{IBr}(G|\theta) \to \mathrm{IBr}(H|\phi)\,.$$

Demostración. Aplicaremos inducción en $|G : H| = |K : L|$. Podemos suponer que $H < G$ ya que, de lo contrario, no habría nada que probar.

Supongamos que existe un $K_1 \lhd G$ tal que $L < K_1 < K$. Sea $\theta_1 = \theta_{K_1} \in \mathrm{IBr}(K_1)$, que es G-invariante, por lo que, en particular, es K_1H-invariante. Entonces, por inducción en $|G : H|$, la restricción es una biyección

$$\mathrm{IBr}(G|\theta) \to \mathrm{IBr}(K_1H|\theta_1)$$

y también es una biyección

$$\mathrm{IBr}(K_1H|\theta_1) \to \mathrm{IBr}(H|\phi)\,,$$

y componiendo estas dos biyecciones, deducimos que el teorema se cumple en este caso. Por tanto, podemos asumir que K/L es un factor principal de G.

Usando el Teorema 4.2.7 aplicado al carácter triple modular (G, L, ϕ), podemos probar fácilmente que podemos asumir que ϕ es lineal y fiel, por lo que θ también es lineal. El núcleo de un carácter de Brauer está definido en la página 39 de [13], por ejemplo. Como $\ker(\theta) \triangleleft G$, tenemos que $\ker(\theta)L \triangleleft G$ y $L \leq \ker(\theta)L \leq K$. Como habíamos supuesto que K/L es un factor principal de G, tenemos que o bien $\ker(\theta)L = K$, o bien $\ker(\theta)L = L$.

Supongamos ahora que $\ker(\theta)L = K$, por lo que $\ker(\theta)H = G$. Si $\chi \in \mathrm{IBr}(G|\theta)$ y $g \in G$, y elegimos $m \in \ker(\theta)$ y $h \in H$ tal que $g = mh$, tenemos que $\chi(g) = \chi(h)$. Usando este hecho, es trivial comprobar que χ_H es irreducible (usando representaciones), y como los valores de χ en H determinan completamente a χ, obtenemos que la restricción define una inyección

$$\mathrm{IBr}(G|\theta) \to \mathrm{IBr}(H|\phi)\,.$$

Por otro lado, si $\psi \in \mathrm{IBr}(H|\phi)$, es sencillo extenderlo a un carácter $\chi \in \mathrm{IBr}(G|\theta)$ (usando representaciones una vez más), luego la aplicación es una biyección, y el teorema se cumple en este caso.

Por tanto, podemos asumir que $\ker(\theta)L = L$, esto es, $\ker(\theta) \leq L$. Entonces, $\ker(\theta) = \ker(\phi) = 1$, luego θ es fiel. Como θ es lineal y fiel, deducimos que K es abeliano, y como θ también es G-invariante, entonces K es central; en particular, G es un producto central de K y H. Entonces, usando otra vez el hecho de que θ es lineal, es inmediato que la restricción define una biyección

$$\mathrm{IBr}(G|\theta) \to \mathrm{IBr}(H|\phi)\,. \quad \blacksquare$$

Para probar el Teorema 4.3.1, necesitaremos un lema más, el cual enunciamos a continuación.

Lema 4.2.9. *Sea $L \subseteq K \triangleleft G$ con $L \triangleleft G$, tal que K/L es abeliano. Sea $\phi \in \mathrm{Irr}(L)$ G-invariante. Entonces, existe un único subgrupo $L \leq R \leq K$ tal que R es maximal con respecto a que ϕ tenga una extensión K-invariante hasta él. Además, toda extensión de ϕ a R está completamente ramificada respecto a K/R, y se cumple que $R \triangleleft G$.*

Demostración. Esto es el Lema 2.2 de [23]. $\blacksquare$

4.3. Teoremas Principales

A lo largo de esta sección, G será resoluble, e $\mathrm{IBr}(G)$ será el conjunto de caracteres de 2-Brauer de G.

Usaremos el siguiente teorema recursivamente para probar el Teorema D.

Teorema 4.3.1. *Sea G resoluble, y sea $L \subseteq K \triangleleft G$ con $L \triangleleft G$, y con K/L abeliano. Sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $H = L\mathrm{N}_G(P)$ cumple que $HK = G$ y $H \cap K = L$. Sea $\phi \in \mathrm{IBr}(L)$ P-invariante. Para cualquier $L \leq X$, denotamos*

$$J_\phi(X) = \{\chi \in \mathrm{IBr}(X|\phi) \mid p \text{ no divide a } \chi(1)/\phi(1)\}\,.$$

Entonces, existe una biyección natural

$$^* : J_\phi(G) \to J_\phi(H)\,,$$

tal que para todo $\chi \in J_\phi(G)$:

(a) *las correspondencias * conmutan con la acción de Galois, esto es, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces $(\chi^\sigma)^* = (\chi^*)^\sigma$;*

(b) *$\chi^*(1)$ divide a $\chi(1)$;*

(c) *$\chi(1)/\chi^*(1)$ divide a $|G : H|$ y*

(d) *$\chi(1) \equiv \pm\chi^*(1)$ mod p.*

Demostración. Por inducción en $|G : L|$. Podemos suponer que $L < G$ ya que, en caso contrario, no habría nada que probar. Nótese que, ya que $H \cap K = L$, tenemos que $\mathrm{C}_{K/L}(P) = 1$, y como $P \subseteq H$, tenemos que

$$(|P|, |K/L|) = (|P|, |G : H|) = 1\,.$$

Sea T el estabilizador de ϕ en G (luego $LP \subseteq T$, y $P \in \mathrm{Syl}_p(T)$), que es resoluble (ya que G también lo es). Nótese que, entonces, $H \cap T$ es el estabilizador de ϕ en H,

$$H \cap T = (L\mathrm{N}_G(P)) \cap T = L(\mathrm{N}_G(P) \cap T) = L\mathrm{N}_T(P)\ ,$$

y T satisface las hipótesis del teorema con respecto a los subgrupos $K_0 = K \cap T$, $L_0 = L$ y $H_0 = H \cap T$ (como $K_0/L \leq K/L$ abeliano, tenemos que K_0/L es abeliano. Por otro lado, nótese que KP/K es un p-subgrupo de Sylow de G/K normal, por lo que K_0P/K_0 es un p-subgrupo de Sylow de G/K_0 normal. Por tanto, usando el argumento de Frattini, $T = K_0\mathrm{N}_T(P) = K_0H_0$). Usando la correspondencia de Clifford de caracteres de 2-Brauer (véase el

Teorema 2.5.2), sabemos que tenemos dos biyecciones (dadas por inducción de caracteres):

$$\mathrm{IBr}(T|\phi) \to \mathrm{IBr}(G|\phi) \quad \text{y} \quad \mathrm{IBr}(T \cap H|\phi) \to \mathrm{IBr}(H|\phi)\,.$$

Restringiendo estas biyecciones, y teniendo en cuenta que $P \subseteq T \cap H$, por lo que

$$p \nmid |G : T| \quad \text{y} \quad p \nmid |H : T \cap H|\,,$$

obtenemos otras dos biyecciones (también dadas por inducción de caracteres):

$$J_\phi(T) \to J_\phi(G) \quad \text{y} \quad J_\phi(T \cap H) \to J_\phi(H)\,.$$

Si $T < G$, usando la hipótesis de inducción, obtenemos una correspondencia biyectiva natural

$$^\Diamond : J_\phi(T) \to J_\phi(T \cap H)$$

satisfaciendo de **(a)** a **(d)**, y definimos

$$^* : J_\phi(G) \to J_\phi(H)$$

como la composición de estas tres biyecciones: si $\chi \in J_\phi(G)$, sea $\xi \in J_\phi(T)$ el único carácter tal que $\xi^G = \chi$, y escribimos $\chi^* = (\xi^\Diamond)^H$. Como tanto $^\Diamond$ como las correspondencias de Clifford conmutan con la acción de Galois, tenemos que * satisface **(a)**. Para cualquier $\chi \in J_\phi(G)$, nótese que $\chi(1) = |G : T|\xi(1)$ y $\chi^*(1) = |H : H \cap T|\xi^\Diamond(1)$. Como

$$|G : T| = |KH : T| = |KH : KT||KT : T| = |H : H \cap T||KT : T|$$

y $\xi^\Diamond(1)$ divide a $\xi(1)$ (ya que $^\Diamond$ satisface **(b)**), obtenemos que $\chi^*(1)$ divide a $\chi(1)$, y como $\xi(1)/\xi^\Diamond(1)$ divide a $|T : H \cap T|$ (ya que $^\Diamond$ satisface **(c)**), deducimos que

$$\frac{\chi(1)}{\chi^*(1)} = \frac{|G : T|}{|H : H \cap T|}\frac{\xi(1)}{\xi^\Diamond(1)} \text{ divide a}$$

$$\frac{|G : T|}{|H : H \cap T|}|T : H \cap T| = \frac{|G : H \cap T|}{|H : H \cap T|} = |G : H|\,,$$

por lo que * satisface **(b)** y **(c)**. Además, como $\mathrm{C}_{K/(K \cap T)}(P) = 1$ (ya que $\mathrm{C}_{K/L}(P) = 1$), tenemos que

$$|KT : T| = |K : K \cap T| \equiv 1 \bmod p\,,$$

y como $\xi(1) \equiv \pm\xi^\Diamond(1) \bmod p$ (ya que $^\Diamond$ satisface **(d)**), deducimos que

$$\chi(1) = |G : T|\xi(1) \equiv \pm|G : T|\xi^\Diamond(1) = \pm|KT : T|\chi^*(1) \equiv \pm\chi^*(1) \bmod p\,,$$

por lo que * también satisface **(d)**, demostrando el teorema en este caso. Así, podemos asumir que ϕ es G-invariante.

Supongamos que 2 divide a $|K : L|$, y sea $L \subseteq A \subseteq K$ tal que $A/L \in \mathrm{Syl}_2(K/L)$. Nótese que, como K/L es abeliano, A/L es el único 2-subgrupo de Sylow de K/L, por lo que se tiene que $A \triangleleft G$. Usando el Teorema de Green (véase el Teorema 2.5.3), sea θ el único carácter de $\mathrm{IBr}(A)$ que está por encima de ϕ, por lo que $\theta_L = \phi$ (ya que ϕ es G-invariante luego, en particular, es K-invariante), y nótese que para cada $A \leq X \leq G$, tenemos que

$$J_\theta(X) = \{\chi \in \mathrm{IBr}(X|\theta) \mid p \text{ no divide a } \chi(1)/\theta(1)\} = J_\phi(X)\,.$$

Entonces, como $|G : A| < |G : L|$ (ya que $A/L > 1$, pues 2 divide a $|K : L|$) podemos aplicar inducción para obtener una correspondencia biyectiva natural entre $J_\phi(G)$ y $J_\phi(AH)$ satisfaciendo de **(a)** a **(d)**. Por otro lado, podemos aplicar el Teorema 4.2.8 para deducir que la restricción es una biyección de $\mathrm{IBr}(AH|\theta) = \mathrm{IBr}(AH|\phi)$ a $\mathrm{IBr}(H|\phi)$, que se restringe a una biyección de $J_\phi(AH)$ a $J_\phi(H)$. Componiendo estas dos biyecciones, obtenemos la biyección buscada, que satisface de **(a)** a **(d)** (pues la biyección de $J_\phi(G)$ a $J_\phi(AH)$ también lo hacía), por lo que el teorema estaría probado en este caso. Así, podemos asumir que $|K : L|$ es impar.

Sea ahora $\tilde{\phi}$ el único carácter en $\mathrm{B}_{2'}(L)$ que se restringe a ϕ (véase el Teorema 3.2.12). Por unicidad, como ϕ es G-invariante, tenemos que $\tilde{\phi}$ también es G-invariante.

Sea $L \leq R \leq K$ el único subgrupo tal que tal que R es maximal con respecto a que $\tilde{\phi}$ tenga una extensión K-invariante hasta él, tal y como está definido en el Lema 4.2.9 (por lo que $R \triangleleft G$). Sea $\mathfrak{R}$ el conjunto de extensiones de ϕ a R, y nótese que $\mathfrak{R}$ no es vacío porque $\tilde{\phi}$ se extiende a R, y como $|R : L|$ es impar, sabemos que toda extensión de $\tilde{\phi}$ a R se encuentra en $\mathrm{B}_{2'}(R)$, usando el Teorema 3.2.9. Sea C el grupo de caracteres de R/L (y notemos que son caracteres lineales, ya que R/L es abeliano, al serlo K/L. De esto, deducimos que cualquier carácter irreducible de R que está por encima de ϕ está en $\mathfrak{R}$). Entonces, C actúa transitivamente en $\mathfrak{R}$ (véase la Proposición 2.5.4), y como $(|P|, |C|) = 1$, podemos usar el Lema de Glauberman (véase el Lema 2.3.7) para deducir que existe un $\tau \in \mathfrak{R}$ que es P-invariante. Además, como los caracteres en $\mathfrak{R}$ que son P-invariantes con una $\mathrm{C}_C(P)$-órbita (véase el Corolario 2.3.8), pero $\mathrm{C}_C(P) = 1$ ya que $\mathrm{C}_{R/L}(P) = 1$, deducimos que τ es único (esto es, τ es la única extensión P-invariante de ϕ a R).

Si $n \in \mathrm{N}_G(P)$, tenemos que τ^n es una extensión P-invariante de ϕ a R, luego $\tau^n = \tau$ por unicidad, y τ es $\mathrm{N}_G(P)$-invariante. Sea $\tilde{\tau}$ el único carácter en $\mathrm{B}_{2'}(R)$ que se restringe a τ (por el Teorema 3.2.12). Como

$$((\tilde{\tau})_L)^0 = ((\tilde{\tau})^0)_L = \tau_L = \phi\,,$$

deducimos que $(\tilde{\tau})_L \in \mathrm{Irr}(L)$, y por el Teorema 3.2.9, tenemos que $(\tilde{\tau})_L \in \mathrm{B}_{2'}(L)$, por lo que $(\tilde{\tau})_L = \tilde{\phi}$, por el Teorema 3.2.12. Así, por el Lema 4.2.9, $\tilde{\tau}$ es K-invariante (ya que está completamente ramificado respecto a K/R), por lo que también lo es τ, y así, τ is invariante en $K\mathrm{N}_G(P) = G$ (y también lo es $\tilde{\tau}$, por unicidad).

Definimos $M = RH$. Usando el Teorema 4.2.8, obtenemos que la restricción es una biyección de $\mathrm{IBr}(M|\tau)$ a $\mathrm{IBr}(H|\phi)$. Si $\omega \in J_\phi(M)$, se tiene que todos los constituyentes irreducibles de ω_R se encuentran en $\mathfrak{R}$ (ya que son caracteres irreducibles de R que están por encima de ϕ), y usando la Proposición 2.5.1, tenemos que $\omega_R = e \sum \Delta_i$, donde cada uno de los Δ_i es la suma de una órbita bajo la acción de P (ya que $P \leq M$). Si todas estas órbitas fuesen no triviales, tendríamos que $p \mid (\Delta_i(1)/\phi(1))$ para todo i (ya que P es un p-grupo), luego $p \mid (\omega(1)/\phi(1))$, lo cual sería una contradicción con el hecho de que $\omega \in J_\phi(M)$. Por tanto, tenemos que existe una órbita trivial, esto es, existe un constituyente irreducible de ω_R que es P-invariante, y por unicidad, ese constituyente irreducible es τ, por lo que τ está bajo ω. Así, tenemos que $J_\phi(M) \subseteq \mathrm{IBr}(M|\tau)$, y deducimos que la restricción es una biyección de $J_\phi(M)$ a $J_\phi(H)$ (nótese también que $J_\phi(G) \subseteq \mathrm{IBr}(G|\tau)$, usando un razonamiento análogo - esto lo usaremos más adelante). Por tanto, bastará encontrar una biyección canónica * de $J_\phi(G)$ a $J_\phi(M)$ satisfaciendo de **(a)** a **(d)**.

Como ya hemos dicho anteriormente, $\tilde{\tau}$ está completamente ramificado respecto a K/R. Sea $\tilde{\theta}$ el único elemento de $\mathrm{Irr}(K)$ que está por encima de $\tilde{\tau}$, por lo que $(G, K, R, \tilde{\theta}, \tilde{\tau})$ es una 5-tupla de caracteres. Notemos que, como $\tilde{\tau} \in \mathrm{B}_{2'}(R)$ y K/R es un $2'$-grupo, tenemos que $\tilde{\theta} \in \mathrm{B}_{2'}(K)$ (por el Teorema 3.2.9), y por el Teorema 3.2.12, $\theta = (\tilde{\theta})^0 \in \mathrm{IBr}(K)$. Sean U y ψ como en el Teorema 4.2.4 (respecto a esta 5-tupla de caracteres). Como

$$p \nmid |G : M| = |K : R| = |G : U| \,,$$

podemos asumir que $P \subseteq U$ (ya que, en caso contrario, podríamos escoger un U^g en lugar de U, para cierto $g \in G$). Entonces $U/R \cong G/K$ tiene un p-subgrupo de Sylow normal, que es RP/R. Por tanto, usando el argumento de Frattini,

$$U = R\mathrm{N}_U(P) \leq RH = M \,.$$

Como $|G : M| = |G : U|$, tenemos que $|M| = |U|$, y deducimos que $U = M$.

Entonces, podemos usar finalmente el Lema 4.2.6 para obtener una biyección canónica * de $\mathrm{IBr}(G|\theta) = \mathrm{IBr}(G|\tau)$ a $\mathrm{IBr}(M|\tau)$ tal que $\chi_M = (\psi_M)^0\chi^*$ para todo $\chi \in \mathrm{IBr}(G|\theta)$ (y por tanto, en particular, $\chi(1) = e\chi^*(1)$, donde $e^2 = |K/R|$). Como vimos que $J_\phi(G) \subseteq \mathrm{IBr}(G|\tau)$ y $J_\phi(M) \subseteq \mathrm{IBr}(M|\tau)$, y usando que $\psi_K = e1_K$, deducimos que esta biyección se restringe a otra biyección canónica de $J_\phi(G)$ a $J_\phi(M)$. Usando la nota de después del Teorema 4.2.4, deducimos que * satisface **(a)**. Es evidente que * satisface **(b)**, y como $e^2 = |K/R| = |G/M|$, entonces * también satisface **(c)**. Como $\mathrm{C}_{K/R}(P) = 1$, deducimos que

$$e^2 = |K/R| \equiv 1 \bmod p\,,$$

luego $e \equiv \pm 1 \bmod p$, y * satisface **(d)**, lo que completa la demostración. ∎

Notemos que, usando las mismas hipótesis y notación del Teorema 4.3.1, si $n \in \mathrm{N}_G(P)$, entonces $\phi^n \in \mathrm{IBr}(L)$ es invariante en $P^n = P$, por lo que podemos aplicar el mismo teorema usando ϕ^n en lugar de ϕ, y es rutinario comprobar que si $\chi \in J_\phi(G) = J_{\phi^n}(G)$, entonces $\chi = \chi^n$ se corresponde con $(\chi^*)^n = (\chi^*) \in J_\phi(H)$.

Ahora probaremos el Teorema D. Aunque trabajaremos con caracteres de 2-Brauer, el Teorema D es inmediato a partir del hecho de que si G es resoluble, entonces $\mathrm{B}_{2'}(G) \cap \mathrm{Irr}_{p'}(G)$ es un lifting canónico de los caracteres de 2-Brauer en $\mathrm{IBr}_{p'}(G)$ (por el Teorema 3.2.12).

Teorema 4.3.2. *Sea G resoluble, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, y $N = \mathrm{N}_G(P)$. Entonces, existe una existe una biyección natural * entre $\mathrm{IBr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{IBr}_{p'}(N)$ tal que para todo $\chi \in \mathrm{IBr}_{p'}(G)$:*

(a) ** conmuta con la acción de Galois;*

(b) *$\chi^*(1)$ divide a $\chi(1)$;*

(c) *$\chi(1)/\chi^*(1)$ divide a $|G : N|$ y*

(d) *$\chi(1) \equiv \pm\chi^*(1)$ mod p.*

Demostración. Por inducción en $|G : N|$. Si $G = N$, no hay nada que probar; por tanto, podemos asumir que $N < G$. Sea

$$K = \mathrm{O}^{p'p}(G) = \mathrm{O}^p(\mathrm{O}^{p'}(G))\,,$$

Notemos que, como $G > N \geq 1$ y G es p-resoluble (al ser resoluble), tenemos que $K < G$. Como $\mathrm{O}^{p'}(G) = KP$, tenemos que K actúa transitivamente sobre $\mathrm{Syl}_p(G)$, y por el argumento de Frattini, deducimos que $KN = G$, por lo que $K > 1$ (o tendríamos que $N = G$). Como K es resoluble (ya que G lo es), tenemos que $L = K' < K$.

Si p divide a $|K : L|$, sea $J/L \in \mathrm{Hall}_{p'}(K/L)$ (por lo que $|K : J|$ es un p-número distinto de 1). Como K/L es abeliano, tenemos que $J \lhd K$, por lo que $\mathrm{O}^p(K) \leq J < K$, pero $\mathrm{O}^p(K)$ char K char $\mathrm{O}^{p'}(G)$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $K = \mathrm{O}^{p'p}(G)$. Por tanto, K/L es un p'-grupo.

Tenemos que P actúa por conjugación en el grupo abeliano K/L, y como $(|P|, |K/L|) = 1$, la acción es coprima. Por tanto (véase 8.4.2 de [12]), deducimos que

$$K/L = \mathrm{C}_{K/L}(P) \times [K/L, P] \,.$$

Sea $L \leq M \lhd K$ tal que $[K/L, P] = M/L$ (esto es, $M = [K, P]L$). Tenemos que P normaliza a M, y consideramos $MP \leq KP$ (y tenemos que P también normaliza a MP). Sean $m \in M$, $x \in P$ y $k \in K$. Entonces

$$(mx)^k = m^k(x^k x^{-1})x \in M^k[K, P]P = M[K, P]P = MP \,,$$

por lo que K también normaliza a MP, y $MP \lhd KP$. Como

$$|KP : MP| = |K : K \cap MP| = |K : M|$$

es un p'-número, tenemos que $\mathrm{O}^{p'}(KP) \leq M$, y si $\mathrm{C}_{K/L}(P) \neq 1$, deduciríamos que $M < KP = \mathrm{O}^{p'}(G)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, podemos afirmar que $\mathrm{C}_{K/L}(P) = 1$.

Sea $H = LN$. Como $\mathrm{C}_{K/L}(P) = 1$, tenemos que $H \cap K = L$, y como

$$KH = KLN = KN = G \,,$$

deducimos que

$$|G : H| = |KH : H| = |K : H \cap K| = |K : L| > 1 \,.$$

Entonces, podemos aplicar la hipótesis inductiva a H, con lo que obtenemos una biyección natural entre $\mathrm{IBr}_{p'}(H)$ e $\mathrm{IBr}_{p'}(N)$ satisfaciendo de **(a)** a **(d)**, así que bastará encontrar una biyección natural * entre $\mathrm{IBr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{IBr}_{p'}(H)$ satisfaciendo de **(a)** a **(d)** (nótese que, en este caso, por **(c)** nos referimos a que para todo $\chi \in \mathrm{IBr}_{p'}(G)$, $\chi(1)/\chi^*(1)$ divide a $|G : H|$).

Sea χ un elemento de $\mathrm{IBr}_{p'}(G)$ o de $\mathrm{IBr}_{p'}(H)$. Entonces, todos los constituyentes irreducibles de χ_L tienen p'-grado, y hay un p'-número de ellos, por lo que, como P actúa sobre ellos, deducimos que al menos uno de ellos es P-invariante. Para cualquier $\phi \in \mathrm{IBr}_{p'}(L)$ P-invariante, denotamos la biyección del Teorema 4.3.1 por

$$F_\phi : \mathrm{IBr}_{p'}(G|\phi) \to \mathrm{IBr}_{p'}(H|\phi)$$

(notemos que podemos aplicar dicho teorema, ya que $K/L = K/K'$ es abeliano).

Supongamos ahora que $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{IBr}_{p'}(L)$ son P-invariantes, y que $\chi \in \mathrm{IBr}_{p'}(G|\phi_1) \cap \mathrm{IBr}_{p'}(G|\phi_2)$. Como $G = NK$, deducimos que existen elementos $n \in N$ y $k \in K$ tales que $\phi_1 = (\phi_2)^{nk}$. Sea T el estabilizador de ϕ_1 en K. Sabemos que ϕ_1 es invariante en P y en $P^{nk} = P^k$ por lo que, para todo $x \in P$, tenemos que ϕ_1 queda fijado por $[k, x] = (x^{-1})^k x$, pero $[k, x] = k^{-1}k^x \in K$, luego $[k, x] \in T$ para todo $x \in P$, y deducimos que $kT \in \mathrm{C}_{K/T}(P) = 1$, luego $k \in T$. Así, tenemos que

$$\phi_1 = \phi_1^{k^{-1}} = ((\phi_2)^{nk})^{k^{-1}} = (\phi_2)^n$$

para cierto $n \in N$, y por la nota previa a este teorema, obtenemos que

$$F_{\phi_2}(\chi) = F_{\phi_2}(\chi)^n = F_{\phi_1}(\chi)\,,$$

por lo que deducimos que tenemos una aplicación

$$F : \mathrm{IBr}_{p'}(G) \to \mathrm{IBr}_{p'}(H)$$

bien definida, dada por $F(\chi) = F_\phi(\chi)$ para todo $\phi \in \mathrm{IBr}_{p'}(L)$ que sea un constituyente P-invariante de χ_L, para todo $\chi \in \mathrm{IBr}_{p'}(G)$.

Si $\xi \in \mathrm{IBr}_{p'}(H)$, entonces existe un $\phi \in \mathrm{IBr}_{p'}(L)$ que es un constituyente P-invariante de ξ_L, pero

$$F_\phi : \mathrm{IBr}_{p'}(G|\phi) \to \mathrm{IBr}_{p'}(H|\phi)$$

es una biyección, por lo que existe un $\chi \in \mathrm{IBr}_{p'}(G|\phi)$ tal que $\chi = (F_\phi)^{-1}(\xi)$, y $F(\chi) = F_\phi(\chi) = \xi$. Por tanto, F es sobreyectiva.

Sean ahora $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{IBr}_{p'}(G)$ tales que $F(\chi_1) = \xi = F(\chi_2)$. Sea $\phi_1 \in \mathrm{IBr}_{p'}(L)$ (resp. $\phi_2 \in \mathrm{IBr}_{p'}(L)$) un constituyente P-invariante de $(\chi_1)_L$ (resp. $(\chi_2)_L$); así,

$$F(\chi_1) = F_{\phi_1}(\chi_1) = \xi = F_{\phi_2}(\chi_2) = F(\chi_2)\,.$$

Tenemos que ϕ_1 y ϕ_2 son constituyentes de ξ_L, por lo que existe un $h \in H$ tal que $(\phi_1)^h = \phi_2$, de lo que se deduce que

$$\chi_1 = (\chi_1)^h \in \mathrm{IBr}_{p'}(G|(\phi_1)^h) = \mathrm{IBr}_{p'}(G|\phi_2)\,,$$

luego

$$F_{\phi_2}(\chi_1) = F(\chi_1) = \xi = F_{\phi_2}(\chi_2)\,,$$

pero como F_{ϕ_2} es inyectiva, tenemos que $\chi_1 = \chi_2$, por lo que F también es inyectiva y, por tanto, es una biyección.

Usando el hecho de que las correspondencias del Teorema 4.3.1 satisfacen de **(a)** a **(d)**, deducimos que F también lo hace, y por tanto, el teorema queda probado. ∎

Finalmente, probaremos el Corolario E, pero antes, necesitamos un lema de G. Navarro, L. Sanus y P. H. Tiep:

Lema 4.3.3. *Sea G un grupo resoluble. Entonces* $\mathrm{IBr}(G)$ *tiene un único carácter real si y sólo si G tiene un 2-subgrupo de Sylow normal.*

Demostración. Esto es el Lema 2.1 de [19]. ∎

También necesitaremos el siguiente lema de Teoría de Grupos.

Lema 4.3.4. *Sea A un grupo finito que actúa coprimamente sobre un p-grupo finito P. Si $[P/P', A] = 1$, entonces $[P, A] = 1$.*

Demostración. Primero, notemos que como P es un p-grupo, se tiene que $P' \leq \Phi(P)$.

La igualdad $[P/P', A] = 1$ es equivalente a que

$$P/P' = \mathrm{C}_{P/P'}(A)\,,$$

y como la acción de A en P' es coprima, tenemos que

$$\mathrm{C}_{P/P'}(A) = \mathrm{C}_P(A)P'/P'$$

(por 8.2.2 a) de [12]). Así, deducimos que

$$P = \mathrm{C}_P(A)P' \leq \mathrm{C}_P(A)\Phi(P) \leq P\,,$$

por lo que $P = \mathrm{C}_P(A)\Phi(P)$. Por tanto, $P = \mathrm{C}_P(A)$, lo cual es equivalente a que $[P, A] = 1$. ∎

Corolario E. *Sea G un grupo resoluble y sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Entonces* $\mathrm{N}_G(P)$ *tiene un 2-subgrupo de Sylow normal si y sólo si 1_{G^0} es el único carácter real de 2-Brauer de G de p'-grado.*

Demostración. Como la biyección * del Teorema 4.3.2 conmuta con la acción de Galois, podemos suponer que G tiene un p-subgrupo de Sylow normal P (por lo que P' char P char G, luego P' char G).

Si $\chi \in \mathrm{IBr}_{p'}(G)$, entonces χ_P es una combinación lineal de caracteres en $\mathrm{IBr}_{p'}(P)$, que son exactamente los caracteres de Brauer lineales de P (ya que P es un p-grupo). Como P' es un subgrupo del núcleo de cada carácter de Brauer lineal de P, se tiene que

$$P' \leq \ker(\chi_P) = \ker(\chi) \cap P \leq \ker(\chi)\,,$$

por lo que $\mathrm{IBr}_{p'}(G) = \mathrm{IBr}_{p'}(G/P')$. Por otro lado, si $\varphi \in \mathrm{IBr}(G/P')$, sea $\lambda \in \mathrm{IBr}(P/P')$ un constituyente irreducible de φ_P. Como P/P' es abeliano, sabemos que λ es lineal. Por otro lado, como G/P es resoluble, el Teorema 2.5.5 nos dice que $\varphi(1) = \varphi(1)/\lambda(1)$ divide a $|G/P|$, que es un p'-número, por lo que $\varphi(1)$ también lo es. Así, tenemos que

$$\mathrm{IBr}_{p'}(G) = \mathrm{IBr}_{p'}(G/P') = \mathrm{IBr}(G/P').$$

Ahora bien, $\mathrm{IBr}(G/P')$ tiene un único carácter real si y sólo si G/P' tiene un 2-subgrupo de Sylow normal (por el Lema 4.3.3) y, para concluir la prueba de este corolario, bastará probar que esto ocurre si y sólo si $\mathrm{N}_G(P) = G$ tiene un 2-subgrupo de Sylow normal. Podemos suponer que $p \neq 2$, ya que en caso contrario, sabemos que tanto G como G/P' tienen un 2-subgrupo de Sylow normal.

Sea $Q \in \mathrm{Syl}_2(G)$, por lo que $QP'/P' \in \mathrm{Syl}_2(G/P')$. Si $Q \lhd G$, tenemos que $QP'/P' \lhd G/P'$. En el otro sentido, si $QP'/P' \lhd G/P'$, entonces $QP' \lhd G$, por lo que

$$QP = QP'P \lhd G.$$

Por otro lado, como

$$QP/P' = QP'/P' \times P/P'$$

es un producto directo, tenemos que

$$[P/P', Q] = [P/P', QP/P'] = 1,$$

y aplicando el Lema 4.3.4, deducimos que $[P, Q] = 1$, y $Q \lhd QP$. Así, como Q char $QP \lhd G$, deducimos que $Q \lhd G$, concluyendo así la prueba de este corolario. ∎

Notación

$\mathbb{N}$	el conjunto de números naturales
$\mathbb{Z}$	el conjunto de números enteros
$\mathbb{Q}$	el conjunto de números racionales
$\mathbb{R}$	el conjunto de números reales
$\mathbb{C}$	el conjunto de números complejos
$\mathbb{Q}_n$	el menor cuerpo contenido en $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ y a una raíz n-ésima primitiva de la unidad
$\mathbb{Q}(\chi)$	el menor cuerpo contenido en $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ y a los valores de $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$
$\mathrm{cf}(G)$	el conjunto de funciones de clase complejas $G \to \mathbb{C}$
$\mathrm{Ch}(G)$	el conjunto de caracteres (complejos) de un grupo finito G
$\mathrm{Irr}(G)$	el conjunto de caracteres (complejos) irreducibles de un grupo finito G
$[\cdot,\cdot]$	producto interno en $\mathrm{cf}(G)$, véase pág. 6
$\mathrm{Irr}(\alpha)$	el conjunto de constituyentes irreducibles de $\alpha \in \mathrm{cf}(G)$
$\mathrm{Irr}_\pi(G)$	el conjunto de caracteres irreducibles de G de π-grado
$\ker(\chi)$	el núcleo de un carácter $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$
$\det(\chi)$	véase pág. 8
$o(\chi)$	el orden de $\det(\chi)$ en el grupo de los caracteres lineales de G
χ_H	la restricción de $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$ a $H \leq G$
ϕ^G	el carácter inducido por $\phi \in \mathrm{Ch}(H)$ en G, donde $H \leq G$
$\mathrm{Irr}(G\|\theta)$	$\mathrm{Irr}(\theta^G)$, donde $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ y $H \leq G$
θ^g	el conjugado de $\theta \in \mathrm{cf}(N)$ por $g \in G$, donde $N \lhd G$
$\mathrm{I}_G(\theta)$	el estabilizador de $\theta \in \mathrm{cf}(N)$ en G, donde $N \lhd G$ (véase pág. 10)
$\mathfrak{X}_\pi(G)$	el conjunto de caracteres π-especiales de G
$\mathfrak{F}_\pi(G)$	el conjunto de pares subnormales π-factorizables en G
$\mathfrak{F}^*_\pi(G)$	los elementos maximales de $\mathfrak{F}_\pi(G)$, según la Definición 3.2.3
$\mathrm{nuc}(\chi)$	el conjunto de núcleos para χ, según la Definición 3.2.7
$\mathrm{B}_\pi(G)$	véase la Definición 3.2.8

Ψ	véase pág. 30
Γ	véase el Teorema 3.3.2
R, M, F	véase pág. 12
G^0	el conjunto de elementos p-regulares de G
$\mathrm{cf}(G^0)$	el conjunto de funciones de clase complejas $G^0 \to \mathbb{C}$
f^0	la restricción de $f \in \mathrm{cf}(G)$ a G^0
$\mathrm{IBr}(G)$	el conjunto de caracteres de p-Brauer irreducibles de un grupo finito G
φ_H	la restricción de un carácter de Brauer φ de G a H^0, donde $H \leq G$
$D = (d_{\chi\varphi})$	matriz de descomposición, véase Definición 2.4.11
Φ_φ	el carácter proyectivo indescomponible asociado con el carácter de Brauer $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$
$\mathrm{vcf}(G)$	el conjunto de elementos de $\mathrm{cf}(G)$ que se anulan fuera de G^0
$\ker(\varphi)$	el núcleo de un carácter de Brauer de G
φ^G	el carácter inducido por un carácter de Brauer φ de H en G, donde $H \leq G$
$\mathrm{IBr}_\pi(G)$	el conjunto de caracteres de Brauer irreducibles de G de π-grado
$\mathrm{IBr}(G\|\theta)$	los elementos de $\mathrm{IBr}(G)$ que son constituyentes irreducibles de θ^G, donde $\theta \in \mathrm{IBr}(H)$ y $H \leq G$
θ^g	el conjugado de $\theta \in \mathrm{cf}(N^0)$ por $g \in G$, donde $N \lhd G$
$\mathrm{I}_G(\theta)$	el estabilizador de $\theta \in \mathrm{IBr}(N)$ en G, donde $N \lhd G$ (véase pág. 23)
(G, K, θ)	un carácter triple (pág. 49), o un carácter triple modular (pág. 53)
(G, K, L, θ, ϕ)	una 5-tupla de caracteres, véase la Definición 4.2.3
$\psi^{(K/L)}$	el carácter canónico que se origina de una 5-tupla de caracteres (G, K, L, θ, ϕ)

Bibliografía

[1] P. Centella, *Correspondences between 2-Brauer characters of solvable groups*, accepted for publication in Comm. Algebra (2009).

[2] P. Centella and G. Navarro, *Correspondences between constituents of projective characters*, Arch. Math. (Basel) **90** (2008), no. 4, 289–294.

[3] D. Gajendragadkar, *A Characteristic Class of Characters of Finite π-Separable Groups*, J. Algebra **59** (1979), no. 2, 237–259.

[4] R. Gow, *Real-valued characters of solvable groups*, Bull. London Math. Soc. **7** (1975), 132.

[5] R. Guralnick, G. Malle, G. Navarro, *Self-normalizing Sylow subgroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 4, 973–979

[6] M. J. Iranzo, F. Pérez Monasor, J. Medina, *Arithmetical questions in π-separable groups*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 8, 2713–2716.

[7] I. M. Isaacs, *Characters of solvable and symplectic groups*, Amer. J. Math. **95** (1973), 594–635.

[8] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006.

[9] I. M. Isaacs, *Characters of π-separable groups*, J. Algebra **86** (1984), no. 1, 98–128.

[10] I. M. Isaacs and G. Navarro, *Characters of p'-degree of p-solvable groups*, J. Algebra **246** (2001), no. 1, 394–413.

[11] I. M. Isaacs and G. Navarro, *New refinements of the McKay conjecture for arbitrary finite groups*, Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 1, 333–344.

[12] H. Kurzweil and B. Stellmacher, *The Theory of Finite Groups, An Introduction*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.

[13] G. Navarro, *Characters and Blocks of Finite Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 250. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[14] G. Navarro, *Induction of Characters and p-Subgroups*, J. Algebra **250** (2002), no. 1, 217–228.

[15] G. Navarro, *Linear characters of Sylow subgroups*, J. Algebra **269** (2003), no. 2, 589–598.

[16] G. Navarro, *Number of Sylow subgroups in p-solvable groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 10, 3019–3020.

[17] G. Navarro, *The McKay conjecture and Galois automorphisms*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 3, 1129–1140.

[18] G. Navarro and L. Sanus, *Sylow normalizers with a normal Sylow 2-subgroup*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **51** (2008), no. 3, 779–783.

[19] G. Navarro, L. Sanus and P. H. Tiep, *Groups with two real Brauer characters*, J. Algebra **307** (2007), no. 2, 891–898.

[20] A. Turull, *Odd character correspondences in solvable groups*, J. Algebra **319** (2008), no. 2, 739–758.

[21] A. Turull, *Strengthening the McKay conjecture to include local fields and local Schur indices*, J. Algebra **319** (2008), no. 12, 4853–4868.

[22] A. Turull, *The number of Hall π-subgroups of a π-separable group*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 9, 2563–2565.

[23] T. R. Wolf, *Character correspondences in solvable groups*, Illinois J. Math. **22** (1978), no. 2, 327–340.

[24] T. R. Wolf, *Variations on McKay's character degree conjecture*, J. Algebra **135** (1990), no. 1, 123–138.