

DEPARTAMENTO DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA.

MODELS COSMOLÒGICS INHOMOGENIS
CONFORMEMENT PLANS.

ALICIA HERRERO DEBÓN

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2002

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 12 d'Abril de 2002 davant un tribunal format per:

- Jesús Martín Martín
- Joan Josep Ferrando i BARGUES
- Bartolomé Coll Durán
- Diego Sáez Milán
- Eduard Salvador Solé

Va ser dirigida per:

Prof. Dr Juan Antonio Morales Lladosa y Dr. Miquel Portilla Moll

©Copyright: Servei de Publicacions
Alicia Herrero Debón

Depòsit legal:

I.S.B.N.:84-370-5571-7

Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

Models cosmològics inhomogenis conformement plans



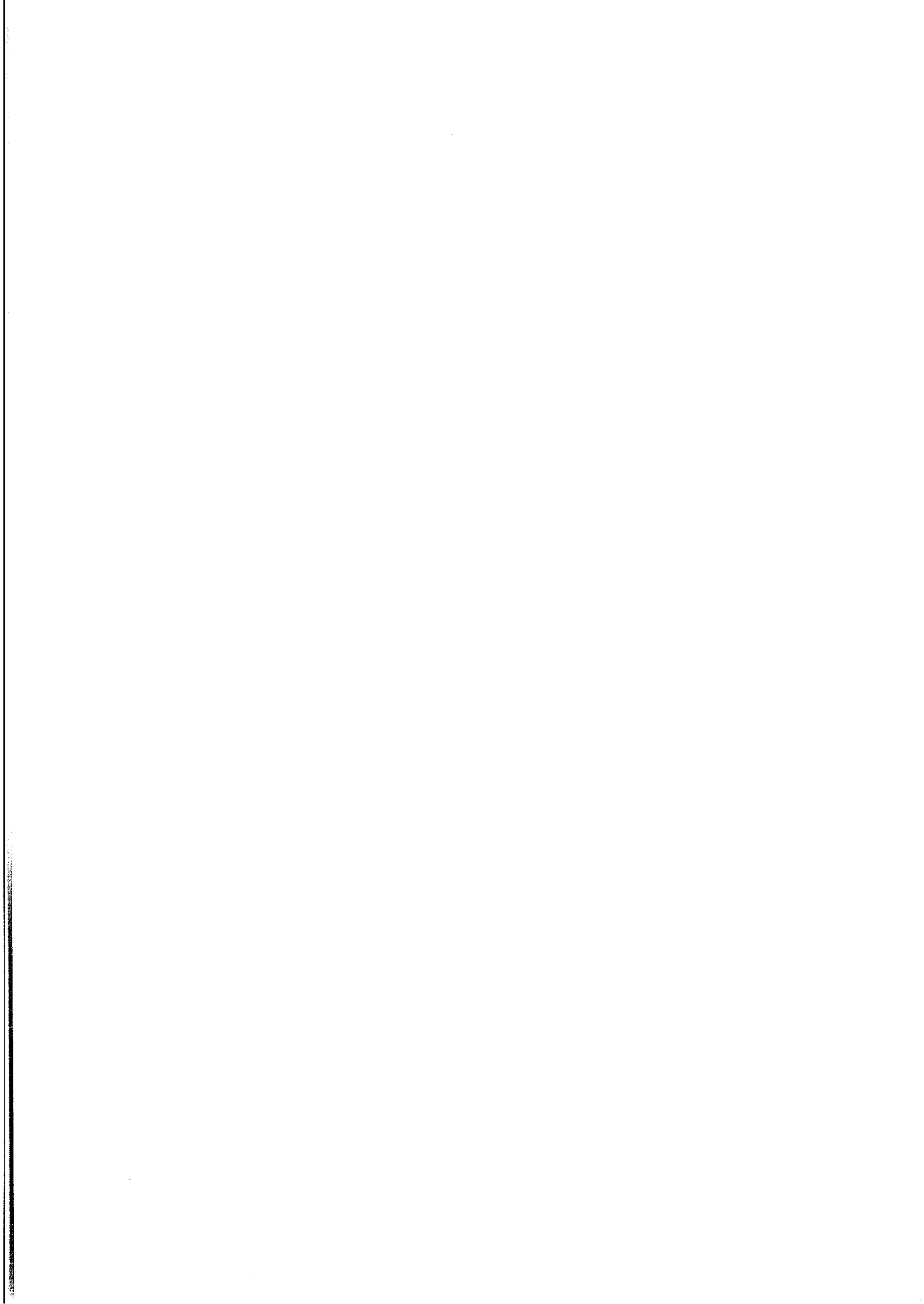
Departament d'Astronomia i Astrofísica
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Estudi general

Tesi doctoral presentada per:

Alicia Herrero Debón

Desembre de 2001



Juan Antonio Morales Lladosa, Professor Titular del Departament d'Astronomia i Astrofísica de la Universitat de València.

Miquel Portilla Moll, Professor Titular del Departament d'Astronomia i Astrofísica de la Universitat de València.

CERTIFIQUEN:

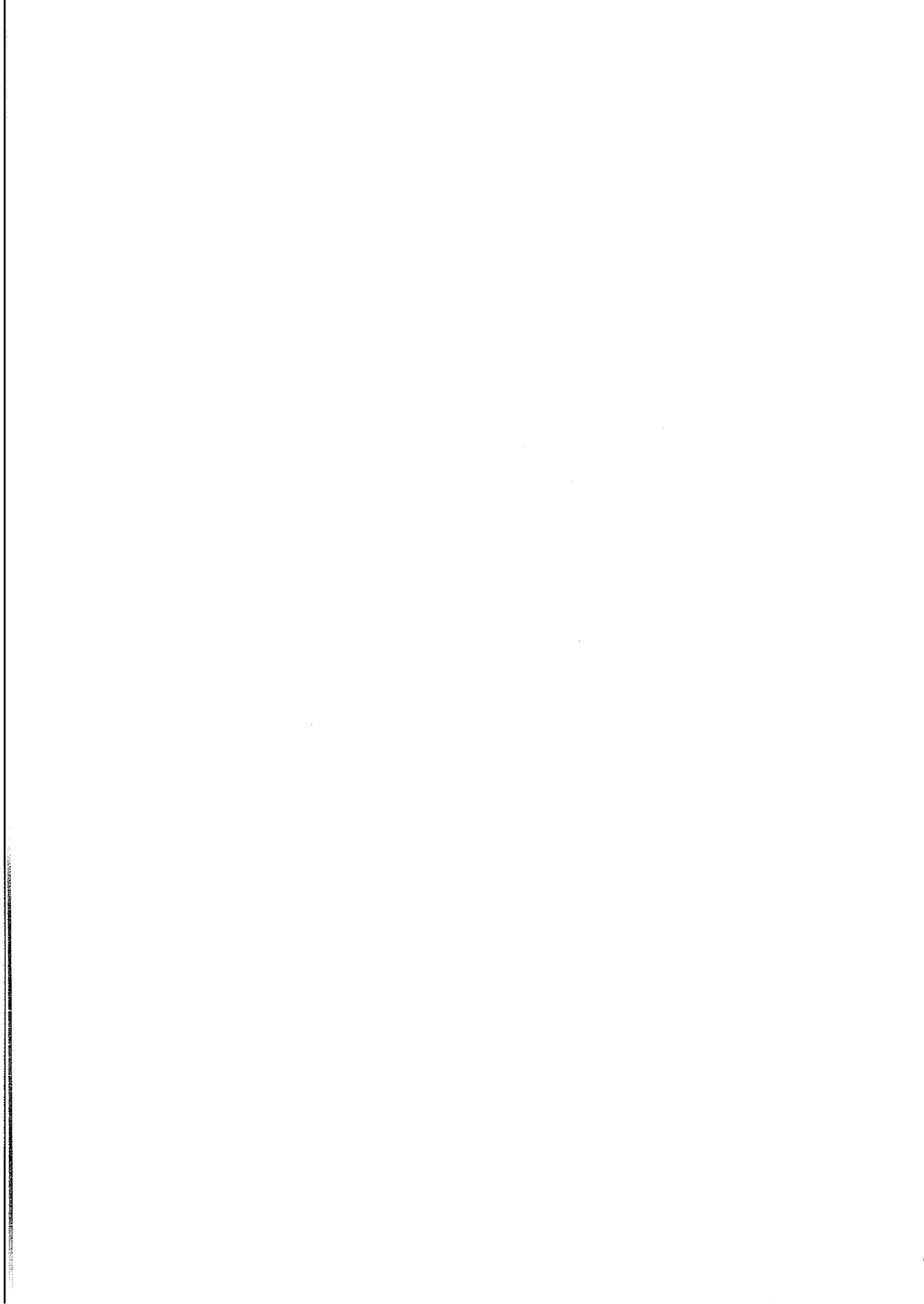
Que la present Memòria, **MODELS COSMOLÒGICS INHOMOGENIS CONFORMEMENT PLANS**, ha estat realitzada sota la seva direcció per **Alicia Herrero Debón** i que constitueix la seua Tesi Doctoral per optar al grau de Doctor en Matemàtiques.

I perquè en prenguem coneixement i tinga els efectes que corresponguen, signem el present certificat.

Burjassot, 20 de Desembre de 2001.

Fdo.: Juan Antonio Morales Lladosa

Fdo. Miquel Portilla Moll



A la meua família

A Miquel



*La paciència es amarga
pero sus frutos son dulces*

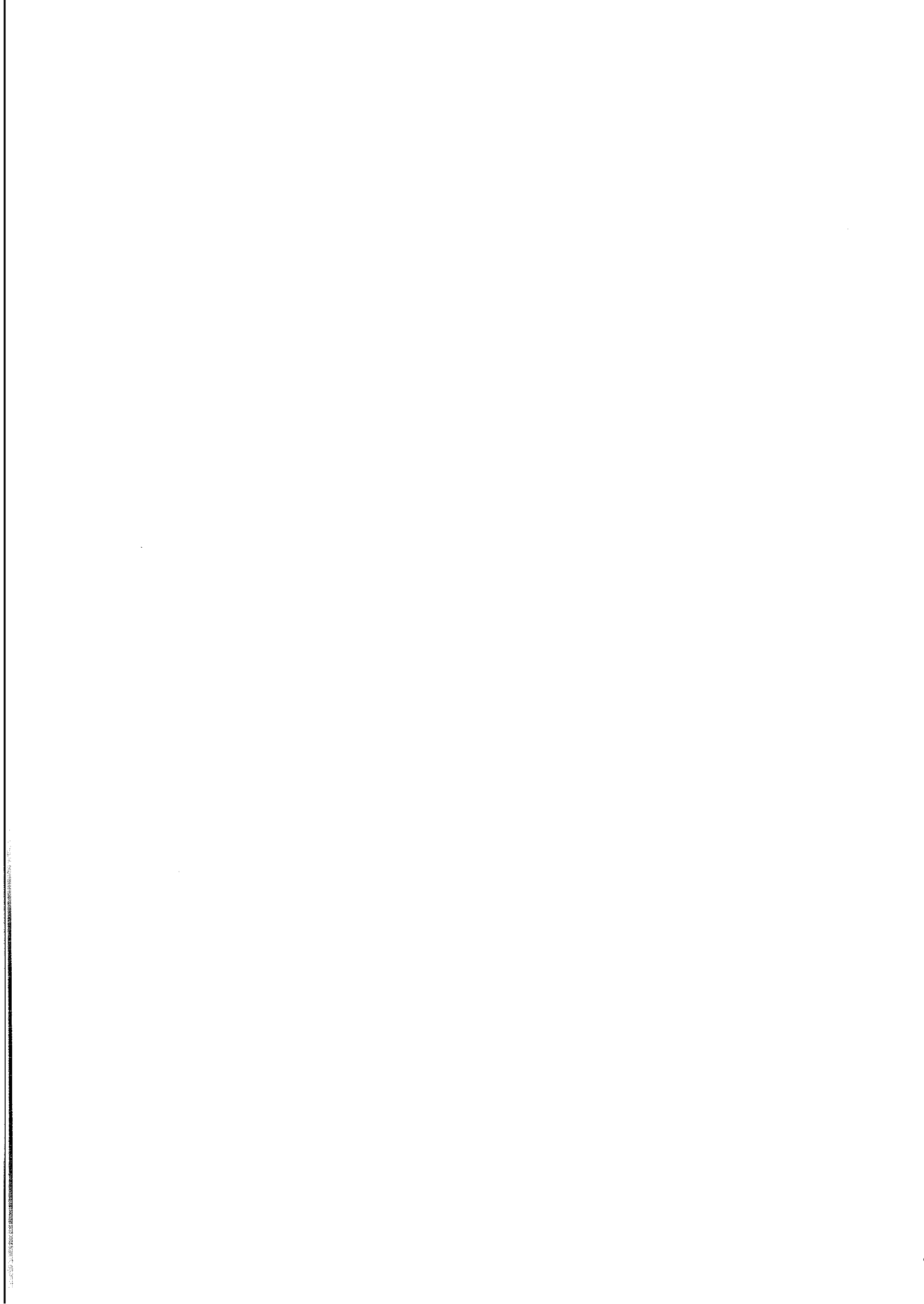
Com aquestes paraules diuen, al final he aconseguit acabar aquesta memòria d'investigació de la qual em sent especialment satisfeta no solament pel treball en sí mateix sinò per haver-me donat l'oportunitat de conèixer a persones com Juan Antonio Morales i Miquel Portilla, entre altres. A ells dec principalment el desenvolupament d'aquest treball i l'interés per aquests temes. Gràcies als dos!

A banda d'ells, també em pareix just agrair la seua companyia a tot els companys del departament d'Astronomia i Astrofísica, així com l'ajuda que m'han prestada. Tampoc no puc oblidar a tots els amics que, gràcies a estar treballant per aquesta universitat, he fet al llarg d'aquests anys de treball. I també a tots els amics que venen de més enrere i han fet més fàcil la vida.

Especial menció mereixen els meus pares i germans perquè sense ells si que és totalment cert que no haguera pogut aplegar fins ací. Espere que continuen ahí recolzant-me en tot moment. I al meu avi, que encara que ja no està amb nosaltres ell sap que sempre el tindrem al nostre cor.

Per últim, encara que no menys important, vull recordar en aquests agraïments a Miquel, ell ha estat aguantant-me en aquesta última etapa d'escriptura, dipòsit, etc., que em consta que és la més dura per tot el treball i nerviosisme que suposa. També, moltíssimes gràcies a tu, carinyet!!

Finalment, recordar que aquest treball ha estat possible gràcies al suport econòmic rebut per part del *Ministerio de Educación y Cultura* amb la concessió d'una beca pre-doctoral, dins del "Programa sectorial de Formación de Profesorado Universitario y Personal Investigador", adscrita al projecte PB96-0797, *Propiedades y evolución de la distribución de galacias y del fondo de microondas*, des de l'1 de gener de 1998 al 30 de setembre de 2000.



Índex

Introducció	1
I Espais-temps conformement plans	9
1 Moviments conformes radials a espais-temps conformement plans	11
1.1 Camps conformes Killing radials a l'espai-temps de Minkowski	11
1.2 Corbes integrals	18
1.3 Classificació dels moviments conformes radials	21
1.4 Superfícies ortogonals a un camp conforme Killing radial min- kowskià	30
1.5 Conformes Killing radials temporals a Minkowski	34
1.6 Espais-temps conformement plans i moviments conformes radials	38
2 Obtenció de factors de conformitat	51
2.1 Les mètriques de Robertson-Walker en coordenades conforme- ment planes	52
2.2 Espais-temps conformement plans amb simetria esfèrica	64
2.3 Conformes Killing radials temporals amb expansió homogènia .	66
2.4 Conformes Killing radials amb seccions ortogonals de curvatura constant	74

II	Espais–temps amb seccions espacials conformement planes	81
3	Problema d'Einstein–Vlasov	83
3.1	Equacions d'Einstein en forma evolutiva	84
3.2	Funcions de distribució i equació de Vlasov	93
3.2.1	Elecció de la funció f_0	96
3.2.2	Resolució de l'equació de Vlasov	98
3.2.3	Tensor impuls–energia associat a f	104
3.3	Equacions d'Einstein–Vlasov	109
4	Obtenció de la solució general del problema d'Einstein–Vlasov linealitzat	113
4.1	Solució general del problema de Cauchy a l'espai de Fourier . .	114
4.2	Evolució del contrast de densitat	118
4.2.1	Pertorbacions de la curvatura extrínseca	122
4.2.2	Pertorbacions de la curvatura	127
4.3	Formació de cúmuls	130
4.4	Discussió	137
	Apèndix A: Integrals associades a la funció de distribució	139
	Apèndix B: Transformades i transformades inverses de Fourier	145
	Bibliografia	151
	Índex de figures	153
	Índex de taules	155

Introducció

En Cosmologia és habitual considerar els models de Friedmann i les pertorbacions d'aquests que depenen únicament d'una funció ϕ anomenada potencial gravitatori. Aquests models s'utilitzen per descriure l'evolució d'un fluid perfecte sota certes condicions. En moltes situacions és suficient exigir que les equacions d'Einstein es verifiquen a primer ordre en ϕ .

Els models de Friedmann, la mètrica dels quals és la de Robertson-Walker, representen una família important de solucions exactes de les equacions d'Einstein. Aquesta família de mètriques té la particularitat de ser conformement plana, és a dir, la forma de la mètrica es pot escriure localment com proporcional a la mètrica de Minkowski amb factor de proporcionalitat una funció de les coordenades (*factor de conformitat*).

Les solucions exactes de les equacions d'Einstein que són conformement planes i amb contingut material de fluid perfecte amb expansió són els *universos de Stephani*, els quals constitueixen una generalització dels universos de Friedmann-Robertson-Walker. Els anomenats *interiors de Schwarzschild* representen la corresponent extensió al cas estàtic. També es coneixen models conformement plans amb altres continguts materials com pot ser el cas de fluids no pascalians i amb fluxe d'energia lligat a les inhomogeneïtats del factor de Hubble.

Aquestes consideracions ens feren pensar en l'interés per a la Cosmologia de les mètriques conformement planes i al mateix temps en el paper que juga el factor de conformitat per comprendre quina mena de deformació respecte de l'espai-temps de Minkowski representa cada espai-temps conformement pla.

Per altra banda, les mètriques de Robertson-Walker també verifiquen una

altra condició interessant que és el fet que admeten un camp vectorial privilegiat verificant la condició de ser un camp conforme Killing temporal i geodèsic amb seccions espacials ortogonals que són també conformement planes en el sentit de mètriques 3-dimensional, és més, en aquest cas són espais de curvatura constant. Novament ens apareix el concepte de mètriques conformement planes, la qual cosa el fa doblement interessant. Aquest altre sentit de parlar de mètriques conformement planes està molt estès en la literatura cosmològica.

En aquest treball parlarem de *models cosmològics conformement plans* en ambdós sentits, aquells que tenen una mètrica associada que és conformement plana en el sentit de mètrica d'espai-temps 4-dimensional, i aquells que tenen associades unes seccions espacials conformement planes en el sentit de mètriques 3-dimensional.

És més, ambdós sentits de mètriques conformement planes simplifiquen considerablement el tractament de les equacions d'Einstein. Aquest tractament, dificultat pels graus de llibertat existents a la mètrica d'espai-temps a determinar, es veu simplificat al restringir-nos a espai-temps els quals tenen un únic grau de llibertat representat per una funció arbitrària de les coordenades. En eixe sentit als espais-temps conformement plans aquesta funció està representada pel factor de conformitat corresponent; mentre que als espais-temps amb seccions espacials conformement planes amb un únic grau de llibertat aquesta funció serà el potencial gravitatori ja que treballarem amb mètriques de la forma de l'aproximació potencial.

Per tant nosaltres dediquem una primera part del treball a l'estudi dels espais-temps conformement plans, principalment a l'obtenció de factors de conformitat, i una segona part a l'estudi de les mètriques que admeten seccions espacials conformement planes, principalment a l'estudi de les equacions d'Einstein-Vlasov per aquestes mètriques.

Als dos primers capítols tractem d'establir un mètode cinemàtic per a l'obtenció de factors de conformitat a espai-temps conformement plans. La forma d'aquests factors de conformitat podria ajudar a classificar i entendre amb major claredat aquests espais-temps, així com a potenciar l'ús de les coordenades conformement planes en Cosmologia. De fet, el factor de conformitat dels espais-temps de Robertson-Walker, conegut des de l'any 1945 quan Infeld i Schild [1] l'obtingueren al seu treball sobre *cosmologia cinemàtica*, va

ser utilitzat per Tauber [2] per analitzar universos en expansió treballant en aquestes coordenades conformement planes.

La manera en què Infeld i Schild obtingueren el factor de conformitat de Robertson-Walker es basava en les isometries que admet un espai-temps conformement pla amb simetria esfèrica i suposant homogeneïtat espacial. Nosaltres ens plantejem una altra manera de recuperar aquest factor de conformitat, fent-la extensible a l'obtenció de factors de conformitat més generals. Aquesta nova forma consisteix en imposar l'existència de camps vectorials amb determinades propietats cinemàtiques, les quals restringiran la forma del factor de conformitat. En particular, nosaltres considerarem camps vectorials que siguin temporals i conformes Killing, ja que la seua caracterització és invariant sota conformitats, és a dir, és la mateixa dins d'una classe de conformitat de mètriques. Aquesta caracterització es basa en les propietats cinemàtiques dels camps, és a dir, en les propietats cinemàtiques dels vectors unitaris u associats en cada cas; aquests vectors unitaris han de tenir distorsió nul·la i acceleració igual a la projecció espacial del gradient d'una funció la derivada de la qual al llarg de u és exactament un terç de la seua expansió. No obstant, les altres propietats cinemàtiques seran diferents depenent de l'espai-temps considerat en una mateixa classe de conformitat. Nosaltres utilitzarem aquesta diferència per determinar factors de conformitat.

Per altra banda, l'observador cosmològic dels universos de Friedmann està associat a un camp conforme Killing temporal, geodèsic i integrable. Aquesta primera consideració sobre un espai-temps conformement pla ens fa caure en el factor de conformitat de les mètriques de Robertson-Walker, essent aquest observador un camp *radial*. Diferents propietats cinemàtiques sobre camps conformes Killing *radials* ens portaran a factors de conformitats d'altres espais-temps més generals en alguns casos. En eixe sentit considerem necessari l'estudi preliminar d'aquesta mena de camps i les seues propietats geomètriques i cinemàtiques a l'espai-temps de Minkowski, donat que moltes d'elles seran les mateixes dins de tota la classe de conformitat, mentre que les diferències ens permetran determinar espais-temps conformement plans concrets.

Aleshores, al primer Capítol de la tesi fem un estudi general dels moviments conformes radials a l'espai-temps de Minkowski i de les seues propietats per

després analitzar aquest tipus de moviments a altres espais-temps conformes a Minkowski. En primer lloc definim el concepte de *camp de direccions radials* a l'espai-temps de Minkowski, veure Equació (1.1), i, tenint en compte les possibles transformacions de coordenades que mantenen el caràcter inercial, donem amb tota generalitat aquesta definició, veure Equació (1.5). A continuació ens preocupen per fer un estudi detallat de les propietats dels camps radials que a més a més són conformes Killing (caràcter causal, tipus d'àlgebra que generen, corbes integrals, superfícies ortogonals, propietats cinemàtiques). Algunes d'aquestes propietats, tals com la distorsió del camp o el seu caràcter causal entre altres, són invariants per conformitats, és a dir, es mantenen per a qualsevol espai-temps conformement pla. A continuació, per tant, estudiem les propietats d'aquests camps que difereixen d'uns espais-temps conformement plans a altres tals com l'acceleració o la forma de les seccions espacials associades a aquests camps radials, les quals van a dependre del factor de conformitat corresponent a cada espai-temps. Aquesta dependència, com comentàvem anteriorment, serà el punt de partida per a l'obtenció de factors de conformitat per a diferents mètriques.

Al Capítol 2 retrobem primerament el factor de conformitat dels espais-temps de Robertson-Walker però únicament amb consideracions cinemàtiques. Nosaltres partim d'un espai-temps conformement pla que admet un camp conforme Killing radial temporal i geodèsic. Amb aquesta suposició la simetria esfèrica i la homogeneïtat espacial, que eren imposades per Infeld i Schild quan obtingueren aquest factor de conformitat [1], es recuperen directament degut al caràcter geodèsic del camp, així com el fet de representar un fluid perfecte. A més a més, trobem la transformació de coordenades que passa de les coordenades conformement planes a les coordenades en què usualment s'escriuen les mètriques de Robertson-Walker, així com l'expressió i la curvatura de les seccions espacials ortogonals al camp conforme Killing radial temporal geodèsic.

Com hem comentat, la condició de simetria esfèrica per als espais-temps de Robertson-Walker s'obté directament del fet que el camp conforme Killing radial temporal té acceleració nul·la. En general, per a un espai-temps conformement pla, imposar que tinga simetria esfèrica ens portarà al fet que el factor de conformitat corresponent a aquests espais-temps dependrà únicament de

les coordenades, conformement planes, temporal i radial (t i r), tal i com provem a aquest capítol basant-nos en treballs anteriors realitzats en aquest sentit per Takeno [3].

A continuació tractem de generalitzar el nostre mètode de treball per a altres situacions. Comencem trobant el factor de conformitat d'aquells espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing radial temporal amb expansió homogènia i no necessàriament geodèsic, els quals es separen de la condició de fluid perfecte ja que es generen en general pressions anisotròpiques no nul·les. A partir d'aquest podem deduir també el cas particular d'expansió nul·la, és a dir, el factor de conformitat dels espais-temps conformes a Minkowski estàtics i amb un camp de Killing radial. Dins d'aquests tenim entre altres la *solució de Bertotti-Robinson* i la corresponent als *interiors de Schwarzschild*. Aquest desenvolupament conclou amb l'estudi del cas d'espais-temps conformement plans admetent un conforme Killing radial amb seccions ortogonals de curvatura seccional constant, els quals corresponen a espais-temps amb pressions anisotròpiques nul·les. La combinació dels dos últims resultats, expansió homogènia i superfícies ortogonals de curvatura constant, dóna lloc a espais-temps conformement plans amb contingut energètic de fluid perfecte els quals, en el cas d'expansió no nul·la, estan dins dels coneguts com a *universos de Stephani*.

Part dels resultats d'aquesta primera part han estat presentats, previ a la seua publicació, en diverses edicions dels E.R.E., *Encontres Relativistes Espanyols*, i en altres congressos [4], [5], [6], [7], [8], publicats a les corresponents actes i posteriorment al *Journal of Mathematical Physics*, [9] i [10].

Finalment, a la segona part d'aquesta tesi, tractem el cas corresponent a models cosmològics inhomogenis conformement plans en l'altre sentit apuntat inicialment, és a dir, en el sentit que admeten seccions espacials conformes a la mètrica plana 3-dimensional. A aquesta última part s'hem plantejat tractar un sistema més realista, partint d'una mètrica general amb components mixtes (g_{0i}) nul·les, ens plantegem que aquesta mètrica siga solució de les equacions d'Einstein linealitzades amb un contingut material generat per una funció de distribució de matèria freda i sense col·lisions que verifica l'equació de Vlasov. És a dir, les components relatives al tensor impuls-energia que apareixen a les equacions d'Einstein seran les associades a aquesta funció de

distribució. Tractem, per tant, les equacions d'Einstein–Vlasov acoblades. A l'imposar aquestes condicions a la forma de la mètrica resulta ser la mètrica de Friedmann–Robertson–Walker pertorbada per una única funció ϕ anomenada potencial gravitatori.

Donada la natura d'aquest problema és necessari distingir 3 etapes al tractament de les equacions d'Einstein–Vlasov, les quals presentem al Capítol 3 d'aquest treball. La primera d'elles consisteix en l'estudi linealitzat de les equacions d'Einstein per a la mètrica, treballant aquestes equacions en forma evolutiva (*formalime 3+1*). Aquest estudi, al cas de matèria freda (per a la qual podem considerar que les velocitats són baixes) i quedant-nos amb les equacions linealitzades, ens permet reduir les esmentades equacions a una única equació diferencial de segon ordre per al potencial gravitatori ϕ (veure equació (3.13)). Els coeficients d'aquesta equació depenen del contingut material considerat, el qual és obtingut posteriorment a partir de la funció de distribució en una segona etapa. Aquesta segona etapa consisteix per tant en l'anàlisi de les equacions que imposa l'equació de Vlasov, és a dir, considerant matèria sense col·lisions, per a l'esmentada funció de distribució.

Considerarem la funció de distribució com una pertorbació analítica en els moments de la situació de quasi-equilibri, apareixent-nos per tant unes funcions tensorials dependents de les coordenades que indicaran tant l'ordre en els moments en què estem com la separació de la situació de quasi-equilibri que estem considerant. L'equació de Vlasov per aquesta funció es pot desenvolupar en diferents potències per als moments de manera que obtenim un sistema d'equacions diferencials per a les funcions que apareixen a la funció de distribució segons l'ordre en els moments. La solució d'aquest sistema d'equacions pot obtindre's progressivament per a qualsevol ordre. En aquest treball nosaltres desenvolupem aquest procés fins a tercer ordre en els moments, per la qual cosa estarem admetent que l'aproximació és bona fins l'ordre quatre en els moments. Tenint en compte que estem considerant que tots els factors que apareixen han de ser funcionals del potencial gravitatori, l'error en l'aproximació sempre estarà per baix del comés a l'aproximar les equacions d'Einstein amb la teoria linealitzada.

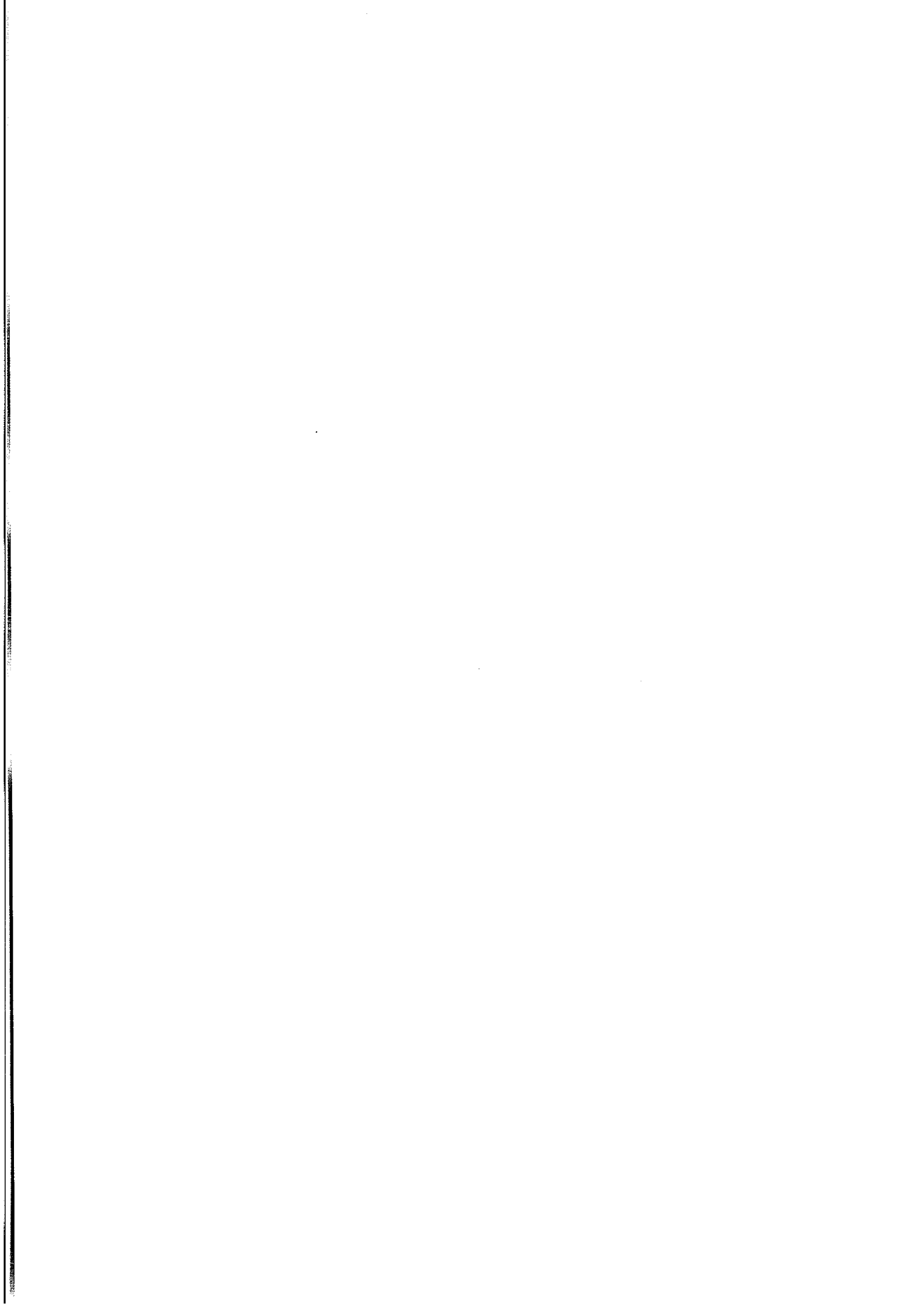
Finalitzem aquesta segona etapa amb la resolució fins a tercer ordre de l'equació de Vlasov suposant en tot moment que les funcions que apareixen a

la funció de distribució són funcionals del potencial ϕ . Aquesta solució permet obtindre el tensor impuls-energia i l'equació d'estat que es verifica, tenint que a l'ordre considerat estem construint un model sense anisotropies, és a dir, amb tensor de pressions anisotròpiques nul.

La tercera etapa desenvolupada a aquest Capítol 3 és l'acoblament final de les equacions d'Einstein-Vlasov. Una vegada obtinguda la forma de la densitat d'energia, la pressió mitjana i el fluxe de calor podem traslladar aquests resultats a l'equació d'evolució, obtinguda anteriorment mitjançant l'estudi de les equacions d'Einstein, per determinar el valor dels coeficients que queden com a dependents del tensor impuls-energia. Això ens permet determinar completament l'equació d'evolució que ha de verificar el potencial gravitatori, veure Equació (3.35).

A continuació, al Capítol 4 ens centrem en la resolució general del problema de Cauchy de l'esmentada equació per al potencial gravitatori. Com l'equació és de segon ordre, cal considerar dues condicions inicials, una sobre el potencial i una altra sobre la seua primera derivada temporal. Trobem la solució general d'aquest problema utilitzant la tècnica de les transformades de Fourier. Finalment apliquem el resultat a la Cosmologia estudiant la formació de cúmuls de galaxies i analitzant els resultats corresponents.

Observem que en aquest treball no estudiem les components tèrmiques del problema, és a dir, no distingim entre la densitat de matèria i la densitat tèrmica, etc... encara que el nostre plantejament permet fer tot eixe desenvolupament.



Part I

**Espais–temps conformement
plans**



Capítol 1

Moviments conformes radials a espais–temps conformement plans

1.1 Camps conformes Killing radials a l'espai–temps de Minkowski

Els camps vectorials són utilitzats en multitud de situacions en física i en matemàtiques per descriure conceptes bàsics per al desenvolupament de diferents situacions teòriques i pràctiques. Per exemple, les transformacions infinitesimals, les direccions pròpies d'un 2-tensor donat, els fluxes de fluids, les direccions associades a sistemes de coordenades, la propagació i polarització de la llum en un medi, els observadors geodèsics i accelerats, etc... Aleshores, la nostra intenció és analitzar les principals propietats d'una classe particular de camps vectorials, aquells que anomenarem *de direccions radials*, en primer lloc a l'espai–temps de Minkowski per passar després als espais–temps conformement plans. Aleshores començarem aclarint el concepte de *camp de direccions radials* per a l'espai–temps pla.

Donada la mètrica de l'espai–temps de Minkowski, η , considerem en aquesta una classe particular de camps vectorials que anomenarem de *direccions*

radials, definint-los de la següent manera:

Definició 1 Direm que un camp vectorial ξ és de **direccions radials** en la mètrica de Minkowski η si existeixen coordenades inercials $\{x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ en les quals el camp s'escriu en la forma:

$$\xi = \alpha(x^\mu) \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x^\mu) \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.1)$$

amb $t = x^0$ la coordenada temporal, r la coordenada radial donada per $r^2 = \delta_{ij} x^i x^j$ on $i, j = 1, 2, 3$ i α i β funcions de totes les coordenades.

En coordenades inercials la mètrica plana s'escriu

$$\eta = -dt \otimes dt + \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = -dt \otimes dt + dr \otimes dr + r^2 h, \quad (1.2)$$

fent aparéixer la coordenada radial r i essent $h = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$ la mètrica de la 2-esfera.

També és conegut que existeixen una sèrie de transformacions de coordenades, les **transformacions conformes**, que deixen invariant la forma diagonal de la mètrica excepte per un factor multiplicatiu (anomenat *factor de conformitat intern*). Aquestes transformacions donen lloc al grup conforme, el qual està constituït per:

- 1) Les isometries de la mètrica plana, és a dir, les translacions, les rotacions espacials i les rotacions temporals o "boosts", donades per les expressions:

$$y^\mu = x^\mu + c^\mu$$

$$y^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{amb} \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

essent c i Λ un vector i una matriu de constants respectivament. Aquestes transformacions tenen la propietat que, no sols deixen invariant la forma diagonal de la mètrica sinó que, a més a més, les noves coordenades continuen essent inercials, és a dir, en aquest cas el factor de conformitat intern val simplement 1.

2) Les dilatacions donades per una constant λ de la següent manera:

$$y^\mu = \lambda x^\mu$$

En aquest cas la mètrica plana en les noves coordenades $\{y^\mu\}$ és de la forma

$$\eta = \frac{1}{\lambda^2} \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

3) Les transformacions conformes especials (o d'acceleració) o transformacions de Haantjees [11] en la direcció d'un vector a són

$$y^\mu = \frac{x^\mu + x^2 a^\mu}{H(a, x)} \quad \text{on} \quad H(a, x) = 1 + 2a \cdot x + a^2 x^2 \quad (1.3)$$

amb $x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, $a^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$ i $a \cdot x = \eta_{\mu\nu} a^\mu x^\nu$. Aquestes transformacions fan apareixer un factor de conformitat intern, F^2 , donat per

$$F = \frac{1}{H(-a, y)}$$

de manera que $\eta = F^2 \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

La combinació d'aquestes transformacions donarà una transformació conforme i un factor de conformitat intern generals que es podran expressar com

$$y^\mu = \frac{\lambda \Lambda^\mu_\nu (x + c)^\nu + \lambda^2 (x + c)^2 a^\mu}{H(\lambda a \cdot \Lambda, x + c)} \quad (1.4)$$

per a la transformació de coordenades, on expressem per $a \cdot \Lambda = a^\mu \Lambda^\nu_\mu$, i el factor de conformitat intern vindrà donat per la funció F següent:

$$F = \frac{1}{\lambda H(-a, y)}$$

essent y el donat per (1.4) i la funció H l'expressada a (1.3).

Notem que de totes aquestes transformacions conformes, les úniques que mantenen el caràcter inercial de les coordenades per a la forma de la mètrica són les isometries. Tant per a les translacions com per a les rotacions espacials i boosts, la mètrica manté la seua forma diagonal sense afegir cap factor de

conformitat. Si observem l'actuació d'aquestes transformacions de coordenades sobre un camp de direccions radials de la forma (1.1) veiem que aquests són invariants en forma sota les translacions i les rotacions espacials mentre que sota un boost, amb $b^\mu = \Lambda_0^\mu$, el camp afegeix a la seua forma nous termes no radials de la següent manera:

$$\xi = \left\{ \left[\alpha + \frac{\beta}{r}(b \cdot y) \right] b^\mu + \frac{\beta}{r} y^\mu \right\} \frac{\partial}{\partial y^\mu},$$

on $r^2 = \eta_{ij} x^i x^j = \eta_{\mu\nu} y^\mu y^\nu + (b \cdot y)^2 = \bar{r}^2 - \bar{t}^2 + (b \cdot y)^2$, amb la qual cosa, un camp que aparentment no té la forma de radial, ho és perquè mitjançant un boost recuperaria la forma (1.1) essent les noves coordenades també inercials per a la mètrica plana.

Per tant, utilitzant aquestes transformacions hem trobat l'expressió més general possible que pot tenir un camp vectorial radial en coordenades inercials. Aquesta expressió ens permetrà donar una definició totalment equivalent a l'anterior de la següent manera:

Definició 2 *Un camp vectorial, ξ , és de direccions radials si existeixen coordenades inercials $\{x^\mu\}$ per a les quals el camp té la forma*

$$\xi = \left\{ \left[\alpha + \frac{\beta}{\bar{r}}(b \cdot x) \right] b^\mu + \frac{\beta}{\bar{r}} x^\mu \right\} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.5)$$

amb $\alpha(x^\mu)$ i $\beta(x^\mu)$ funcions de les coordenades, $\bar{r}^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + (b \cdot x)^2$ i b^μ constants tals que $\eta_{\mu\nu} b^\mu b^\nu = -1$.

Clarament, pel vist anteriorment, aquesta darrera definició 2 és equivalent a la definició 1 perquè donat un camp vectorial ξ en la forma (1.5) tenim que la transformació conforme de coordenades donada per un "boost" amb components $\Lambda_0^\mu = b^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) permet escriure el camp ξ en la forma (1.1) en les noves coordenades que també seran inercials. Anomenarem a aquesta forma (1.1) d'un camp vectorial radial, **forma reduïda** del camp.

Per tant a partir d'ara treballarem amb aquesta forma reduïda i coordenades inercials per fer un estudi dels camps vectorials radials a l'espai-temps de Minkowski. Més concretament, anem a considerar coordenades esfèriques, en les quals un camp vectorial radial serà

$$\xi = \alpha(t, r, \theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial t} + \beta(t, r, \theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r}$$

i la mètrica de l'espai-temps de Minkowski s'escriurà com

$$\eta = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

on, per simplificar la notació, emprarem que $df^2 \equiv df \otimes df$. Les propietats d'aquests camps dependran de les funcions arbitràries α i β que apareixen com a components del camp. Aquesta arbitrietat anirà restringint-se a mesura que considerem nous tipus de camps, a banda del fet de ser radials (la qual cosa sols ens ha portat a la nul·litat de les altres dues components del camp). Un tipus de camp que resulta interessant estudiar són els camps conformes Killing donat que apareixen en diferents situacions tant en Geometria, com en Relativitat i Cosmologia. Per exemple pot representar un observador, comòbil o no amb la matèria.

Per tant, anem a centrar-nos en l'estudi dels camps vectorials radials que verifiquen la condició de ser conformes Killing, és a dir, aquells en què es verifica la relació $\mathcal{L}_\xi \eta = 2\phi\eta$, on denotem per \mathcal{L}_ξ la derivada de Lie respecte del camp ξ i on ϕ és una funció qualsevol de les coordenades. Aquesta condició ens conduirà a una forma concreta de les components $\alpha(t, r, \theta, \varphi)$ i $\beta(t, r, \theta, \varphi)$ del camp.

Aleshores tenim la condició de conforme Killing,

$$(\mathcal{L}_\xi \eta)_{\mu\nu} = \xi^\rho \eta_{\mu\nu,\rho} + \eta_{\mu\rho} \xi_{,\nu}^\rho + \eta_{\rho\nu} \xi_{,\mu}^\rho = 2\phi \eta_{\mu\nu},$$

on $\eta_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}(\eta_{\mu\nu})$, i anàlogament $\xi_{,\mu}^\rho = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\xi^\rho)$, sobre un camp vectorial radial, ξ , en la forma reduïda (1.1). Treballant aquesta condició component a component ens porta a un sistema d'equacions per a les funcions α i β del camp. Les components $(0, i)$ i $(1, i)$ ($i = 2, 3$) donen que α i β no depenen de les coordenades angulars θ i φ i la resta de components determinaran aquestes funcions mitjançant la resolució del sistema:

$$\dot{\alpha} = \phi \quad (\text{component } (0, 0)) \quad (1.6)$$

$$\beta' = \phi \quad (\text{component } (1, 1)) \quad (1.7)$$

$$\beta = r\phi \quad (\text{components } (i, i), \quad i = 2, 3) \quad (1.8)$$

$$\dot{\beta} = \alpha' \quad (\text{component } (0, 1)) \quad (1.9)$$

on estem representant per punts i primes les derivades parcials respecte de t i r respectivament.

La resolució d'aquestes equacions ens condueix a la següent forma polinòmica per a les components del camp:

$$\begin{aligned}\alpha &= a(t^2 + r^2) + bt + c \\ \beta &= r(2at + b)\end{aligned}\tag{1.10}$$

amb a , b i c constants arbitràries que apareixen en la integració com a única arbitrarietat possible per al cas d'un camp conforme Killing radial. De manera que podem escriure el següent resultat:

Proposició 1 *La forma general de tot camp conforme Killing radial a l'espai-temps de Minkowski és:*

$$\xi = \left(a(t^2 + r^2) + bt + c \right) \frac{\partial}{\partial t} + r(2at + b) \frac{\partial}{\partial r}\tag{1.11}$$

on a , b i c són constants arbitràries.

Com a conseqüència immediata d'aquesta expressió general dels camps conformes Killing radials tenim que podem expressar aquests camps com combinació lineal (dels generadors) de tres transformacions conformes, la translació temporal $\xi_1 = \partial/\partial t$, la dilatació $\xi_2 = t(\partial/\partial t) + r(\partial/\partial r)$, i la transformació d'acceleració en la direcció del temps $\xi_3 = (t^2 + r^2)(\partial/\partial t) + 2tr(\partial/\partial r)$, és a dir:

$$\xi = a \xi_3 + b \xi_2 + c \xi_1.$$

Considerant l'espai generat per la base de vectors $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ i tenint en compte que els seus claudàtors de Lie són

$$\begin{aligned}[\xi_1, \xi_2] &= \xi_1 \\ [\xi_1, \xi_3] &= 2\xi_2 \\ [\xi_2, \xi_3] &= \xi_3\end{aligned}$$

aleshores podem dir que aquests tres vectors, i per tant el camps conformes Killing radials, generen un *àlgebra de Lie 3-dimensional* de tipus Bianchi VIII. Donat que, considerant els vectors

$$e_1 = \xi_1 - \frac{1}{4}\xi_3, \quad e_2 = \xi_2, \quad e_3 = -\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_3,$$

els quals tenen els següents claudàtors de Lie

$$[e_1, e_2] = -e_3 \quad , \quad [e_2, e_3] = e_1 \quad , \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad ,$$

també com a generadors de la mateixa àlgebra, provem que aquesta àlgebra és isomorfa a l'àlgebra pseudo-ortogonal, $AO(1,2)$. Per tant, podem concloure la següent proposició:

Proposició 2 *Els camps conformes Killing radials formen un àlgebra de Lie 3-dimensional de tipus Bianchi VIII i per tant isomorfa a l'àlgebra pseudo-ortogonal, $AO(1,2)$.*

Notem que les coordenades isòtropes, $u = t+r$ i $v = t-r$, permeten escriure els camps conformes Killing radials de manera completament simètrica per a u i v mitjançant funcions polinòmiques de segon grau de cadascuna de les coordenades per separat en cada component:

$$\xi = (au^2 + bu + c) \frac{\partial}{\partial u} + (av^2 + bv + c) \frac{\partial}{\partial v}. \quad (1.12)$$

Les constants arbitràries a , b , c són les mateixes que apareixen a l'Equació (1.11) i determinen tant el caràcter causal del camp conforme Killing radial com el domini de definició on es manté el mateix caràcter.

A més a més, aquesta expressió (1.12) de ξ resulta adequada per obtenir funcions de distribució solució de l'equació de Liouville, ja que, donat que la projecció de ξ sobre cada geodèsica isòtropa és constant al llarg d'eixa geodèsica, si considerem (per exemple) el camp isòtrop $p = 2 \frac{\partial}{\partial v}$ resulta que

$$-\eta(\xi, p) = au^2 + bu + c$$

i per tant que una funció arbitrària $F(au^2 + bu + c)$ verifica l'equació de Liouville.

Per altra banda, la introducció d'aquestes coordenades isòtropes ens facilita en certa manera l'estudi de les regions de causalitat dels camps, és a dir, les regions de l'espai-temps on es manté un mateix caràcter causal per a un camp donat. De fet, denotant per $P = -\eta(\xi, \xi)$, el producte escalar del camp per sí mateix canviat de signe, aquest resulta

$$\begin{aligned} P &= [a(t^2 + r^2) + bt + c]^2 - r^2(2at + b)^2 = \\ &= (au^2 + bu + c)(av^2 + bv + c) \end{aligned} \quad (1.13)$$

el signe del qual donarà els dominis de causalitat del camp ξ . Clarament aquest signe depèn de les constants a , b , c i de la relació entre elles donada pel discriminant del polinomi quadràtic que apareix en coordenades isòtropes, $\Delta = b^2 - 4ac$. Aquesta quantitat Δ serà determinant en una posterior classificació dels camps en diferents classes d'equivalència (com veurem més endavant) i adquirirà altres significats a l'extendre aquest estudi a espai-temps conformement plans.

Llavors, l'estudi del signe de P i de la seua nul·litat es pot fer de l'expressió que resulta a l'escriure P introduint Δ :

$$P = [a(t^2 - r^2) + bt + c]^2 - \Delta r^2$$

i tenint en compte les arrels del polinomi $ax^2 + bx + c$, de manera que: quan $\Delta < 0$ el camp és temporal en tot l'espai-temps ($P > 0$); quan $\Delta = 0$ el camp és temporal per tot arreu salvant el con de llum donat per les rectes $u = -b/2a$ i $v = -b/2a$ on el camp es fa isòtrop ($P = 0$); i quan $\Delta > 0$ aleshores el camp serà espacial, temporal o isòtrop segons es mostra a la Figura 1.1 ((i), (iii)). En aquesta figura estem representant a l'eix d'ordenades la coordenada temporal t i a l'eix d'abcises la coordenada radial r . Com veiem els dominis on el camp és isòtrop es redueixen a cons de llum, mentre que la temporalitat i l'espacialitat es donen en regions obertes de l'espai-temps. Tots aquests resultats és mostren també resumits a la Taula 1.1.

1.2 Corbes integrals

En general, l'equació corresponent a les corbes integrals associades a un camp vectorial resulta de la integració de les equacions $(\xi^\alpha \circ \sigma)(s) = \frac{d(x^\alpha \circ \sigma)}{ds}|_s$, on $\{x^\alpha\}_{\alpha=0}^3$ són les funcions coordenades, $\sigma(s)$ és la corba integral incògnita i ξ^α representen les components del camp en eixes coordenades. En el cas d'un camp conforme Killing radial i, donat que estem treballant en coordenades

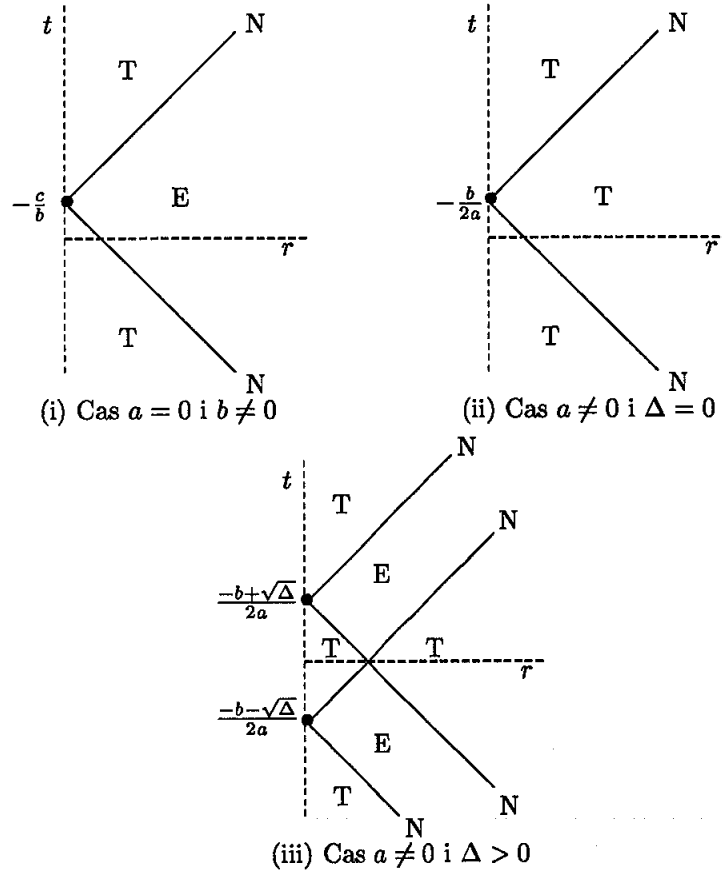


Figura 1.1: Dominis de causalitat d'un camp conforme Killing radial ξ segons els valors del coeficient a i la constant $\Delta = b^2 - 4ac$. Les diferents possibilitats per al caràcter causal, Temporal, Espacial o Nul, en cada domini, apareixen abreuiats per la corresponent majúscula T, E o N, respectivament.

esfèriques, aquestes equacions s'escriuen

$$\begin{cases} a(t^2 + r^2) + bt + c = \frac{dt}{ds} \\ r(2at + b) = \frac{dr}{ds} \\ 0 = \frac{d\sigma^i}{ds} \quad i = 2, 3 \end{cases}$$

		Caràcter causal del conforme Killing radial
$a = 0$	$b = 0$	temporal per tot arreu
	$b \neq 0$	isòtrop sobre el con de llum ($t = -(c/b), r = 0$), temporal a l'interior del con de llum i espacial per a la resta de punts (veure Figura 1.1 (i))
$a \neq 0$	$\Delta < 0$	temporal per tot arreu
	$\Delta = 0$	temporal per tot arreu salvant el con de llum en ($t = -(b/2a), r = 0$) on és isòtrop (veure Figura 1.1 (ii))
	$\Delta > 0$	isòtrop sobre els cons de llum ($t_{\pm}, r = 0$), $t_{\pm} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ temporal per als punts que pertanyen als interiors i als exterior dels dos cons de llum i espacial per a la resta de punts (veure Figura 1.1 (iii))

Taula 1.1: Caràcter causal d'un camp conforme Killing radial segons els diferents valors de les constants a i $\Delta = b^2 - 4ac$.

identificant $(x^0 \circ \sigma)(s) = t(s)$ i $(x^1 \circ \sigma)(s) = r(s)$, les quals donen lloc al següent sistema característic

$$\frac{dt}{a(t^2 + r^2) + bt + c} = \frac{dr}{r(2at + b)} \quad (1.14)$$

la solució del qual dóna de forma implícita l'equació de les corbes integrals com a una família uniparamètrica (paràmetre ω) de corbes que tenen per expressió la forma quadràtica

$$a(t^2 - r^2) + bt - \omega r + c = 0. \quad (1.15)$$

Aquestes corbes representen rectes o hipèrboles segons els valors de les constants a, b, c i el paràmetre ω . Per al cas en què la constant $a = 0$, l'Equació (1.15) és clarament una família de rectes al pla $\{t, r\}$ tal i com representem a la Figura 1.2 per als dos subcasos $b = 0$ i $b \neq 0$, per aquest últim les rectes passen pel punt $(t = -\frac{c}{b}, r = 0)$ per a qualsevol valor del paràmetre ω . Al cas $a \neq 0$, escrivint l'Equació (1.15) com

$$\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(r + \frac{\omega}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta - \omega^2}{4a^2}, \quad (1.16)$$

veiem clarament que correspon a l'equació d'una hipèrbola per a cada valor del paràmetre ω excepte quan $\omega^2 = \Delta$, on aleshores representa un con de llum al punt $(t = -b/2a, r = -\omega/2a)$. En els altres casos, on les corbes són hipèrboles, es pot veure que els vèrtex de cada hipèrbola es troben als punts

$$\left(t = -b/2a, r_{\pm} = \left(-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - \Delta}\right)/2a\right) \quad \text{si } \Delta \leq 0 \quad \text{o si } \omega^2 > \Delta > 0$$

i als punts

$$\left(t_{\pm} = \left(-b \pm \sqrt{\Delta - \omega^2}\right)/2a, r = -\omega/2a\right) \quad \text{si } \Delta > 0 \quad \text{i } \omega^2 < \Delta.$$

Haurem de tenir en compte que, per definició de les coordenades esfèriques, solament podem considerar les parts de les rectes i de les branques hiperbòliques que tenen $r > 0$, resultant gràficament com a la Figura 1.3 per a cada valor de Δ . Notem també que per al cas de $\Delta > 0$ existeix una doble família d'hipèrboles com a corbes integrals.

Resulta interessant la comparació de les corbes integrals associades a un camp conforme Killing radial amb les gràfiques que representen els dominis de causalitat (Figures 1.1 i 1.2). Per exemple, per al cas del camp ξ_2 , el qual té per constants $a = 0$ i $b \neq 0$, les seues corbes integrals als dominis on el camp és temporal formen una congruència radial de rectes (Figures 1.1 (i), i 1.2) amb pendent menor que 1 respecte de l'eix t ; és per això que aquest camp és normalment conegut com (generador d'una) transformació de dilatació. De la mateixa manera podem comprendre el fet que el camp ξ_3 s'identifique com (generador d'una) transformació d'acceleració al llarg de l'eix t , donat que cadascuna de les seues corbes integrals amb paràmetre $\omega \neq 0$ pot ser vista com un moviment relativista hiperbòlic (uniformement accelerat), l'acceleració a del qual té mòdul constant, $|a| = 2|a/\omega|$ (Figures 1.1 (ii), i 1.3).

1.3 Classificació dels moviments conformes radials

Al començament d'aquest capítol hem parlat de les transformacions conformes a l'espai-temps de Minkowski amb la intenció de donar una correcta definició del que s'entén per camp vectorial radial. És més, aquestes transformacions en alguns casos deixen invariant en forma tant al camp com a la

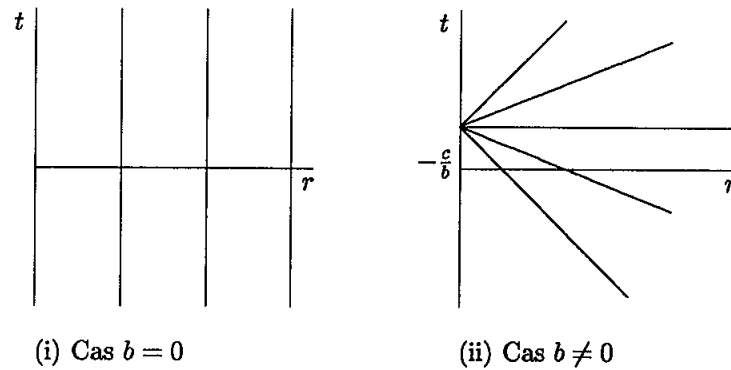


Figura 1.2: Corbes integrals associades a un camp conforme Killing radial ξ donat per l'expressió (1.11) amb $a = 0$.

mètrica plana; mentre que, en altres canvien ambdues formes, la del camp i la de la mètrica; i fins i tot n'hi han també casos en què sols ú dels dos permaneix invariant en forma mentre que l'altre canvia.

En primer lloc, si considerem les transformacions de Lorentz, translacions i rotacions (espacials i boosts), aquestes deixen invariant la forma de la mètrica, és a dir, partint d'unes coordenades inercials, la transformació de coordenades passa a unes noves coordenades que continuen essent inercials. El mateix no passa per al camp, en general, sota aquestes transformacions de coordenades, la seua forma reduïda afegeix termes no radials, com hem vist anteriorment.

Per altra banda, la consideració de transformacions de dilatació solament produeix un factor multiplicatiu constant en la forma, tant de la mètrica com del camp (per tant continuarà tenint forma reduïda encara que les coordenades ja no siguin exactament inercials); mentre que, les transformacions d'acceleració generen un factor de conformitat intern de la mètrica plana i a més a més nous termes no radials en la forma del camp radial depenent del vector al llarg del qual es fa la transformació (si aquest vector té sols part temporal aleshores el camp conserva la forma reduïda modificant el factor multiplicatiu).

Per tant, en general, una transformació conforme que tinga elements procedents de transformacions de dilatació i d'acceleració, afegirà un factor multiplicatiu a la mètrica plana i a més a més pot produir també un canvi en la

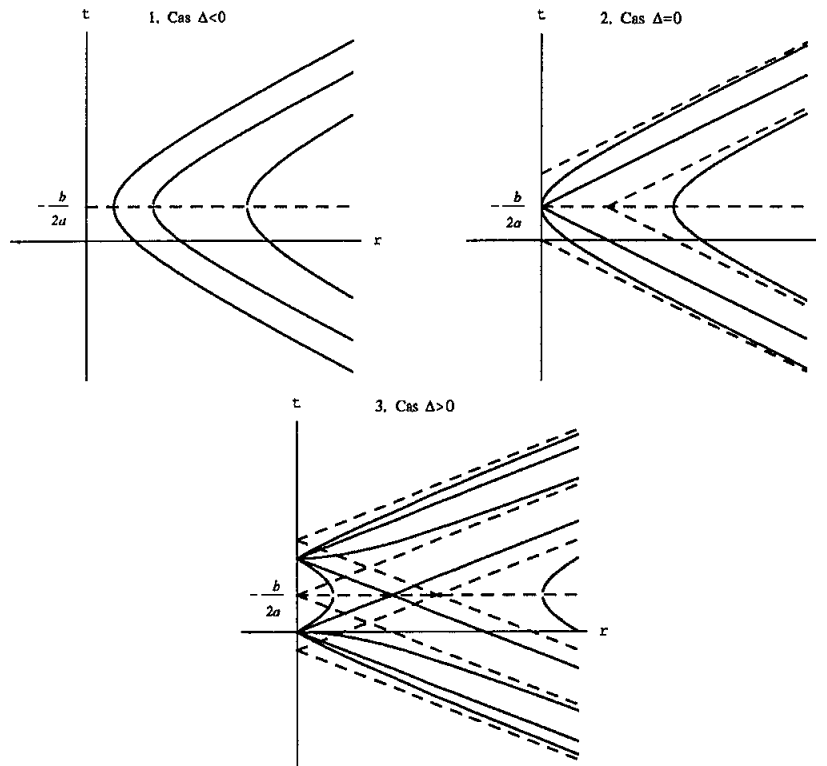


Figura 1.3: Corbes integrals associades a un camp conforme Killing radial ξ donat per l'expressió (1.11) amb $a \neq 0$ i segons el signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

forma del camp vectorial radial.

Anem a centrar-nos en aquelles transformacions conformes a l'espai-temps de Minkowski que mantenen invariant la forma reduïda d'un **camp conforme Killing radial**, encara que la forma de la mètrica plana en les noves coordenades aparega amb un factor multiplicatiu, és a dir, un factor de conformitat intern i llavors, les noves coordenades deixen de ser inercials. Aquestes transformacions ens donen al mateix temps els graus de llibertat que tenim per a les coordenades isòtropes o nul·les.

Partim, doncs, d'una transformació conforme general (1.4) i l'imposem que mantinga la forma (1.11) del camp ξ (o la forma (1.12) si considerem el camp en coordenades isòtropes), evidentment les constants a , b i c passaran a ser unes noves constants \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} en les noves coordenades. Per calcular quines són aquestes transformacions treballarem en coordenades isòtropes de manera que passarem de les coordenades $\{u, v, \theta, \varphi\}$ a unes noves coordenades $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}\}$ també isòtropes al 2-pla $\{t, r\}$. El fet que la transformació de coordenades no canvia la forma de la mètrica salvant d'un factor multiplicatiu és equivalent a dir que les transformacions que busquem donen el grau de llibertat de les coordenades nul·les u i v , i per tant podem plantejar-nos el trobar els canvis de la forma:

$$\bar{u} = \bar{u}(u) \quad , \quad \bar{v} = \bar{v}(v) \quad , \quad \bar{\theta} = \theta \quad , \quad \bar{\varphi} = \varphi \quad (1.17)$$

de manera que la mètrica de Minkowski s'escriu de forma conformement plana per aquestes noves coordenades isòtropes, és a dir:

$$\eta = F^2(\bar{u}, \bar{v}) \left[-\frac{1}{2}(d\bar{u} \otimes d\bar{v} + d\bar{v} \otimes d\bar{u}) + \left(\frac{\bar{u} - \bar{v}}{2}\right)^2 h \right].$$

Realitzant un canvi de coordenades de la forma (1.17), veiem que dóna l'anterior forma conformement plana de la mètrica si les funcions \bar{u} i \bar{v} verifiquen la condició:

$$\bar{u}_u \bar{v}_v = \left(\frac{\bar{u} - \bar{v}}{u - v}\right)^2 \quad (1.18)$$

i aleshores el *factor de conformitat intern*, F^2 , estarà donat per les derivades del canvi de coordenades de la següent manera:

$$F^2 = \frac{1}{\bar{u}_u \bar{v}_v} = u_{\bar{u}} v_{\bar{v}}. \quad (1.19)$$

Ací els subíndexs estan denotant derivades respecte de la coordenada corresponent.

La integració de l'Equació (1.18) respecte de $\bar{u}(u)$ considerant v com a paràmetre constant, dóna per solució

$$\bar{u}(u) = \frac{\bar{v}_v(u-v)}{1+(u-v)A} + \bar{v} \quad (1.20)$$

amb A una funció arbitrària de v . Ara, tenint en compte que \bar{u} és independent de la coordenada v , podem derivar aquesta solució respecte de v per obtenir les funcions $A(v)$ i $\bar{v}(v)$ mitjançant la resolució del sistema d'equacions següent, el qual s'obté de l'esmentada derivació:

$$\begin{cases} A\bar{v}_{vv} - A_v\bar{v}_v + A^2\bar{v}_v = 0 \\ 2A\bar{v}_v + \bar{v}_{vv} = 0 \end{cases}$$

La resolució d'aquest sistema ens porta a dos solucions, la primera i més particular serà quan $A = 0$, de la que resulta la transformació lineal $\bar{v}(v) = pv + q$ i $\bar{u}(u) = pu + q$, amb $p \neq 0$ i q constants arbitràries. I la segona és el cas més genèric en què $A \neq 0$ i per al qual el canvi de coordenades serà

$$\bar{v}(v) = \frac{p}{v+q} + m \quad \text{i} \quad \bar{u}(u) = \frac{p}{u+q} + m$$

amb $p \neq 0$, q , m constants arbitràries. Els factors multiplicatius que apareixen en cada cas es poden calcular de l'expressió (1.19) essent aquests:

$$F^2(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{p^2} \quad \text{i} \quad F^2(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{p^2}{(\bar{u}-m)^2(\bar{v}-m)^2}$$

respectivament per a cadascuna de les transformacions.

Podem veure a continuació que realment aquestes transformacions mantenen invariant la forma reduïda d'un camp conforme Killing radial, que era el que estàvem buscant. Les noves constants \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} dependran de les constants de partida a , b i c i de les constants que apareixen al canvi de coordenades p , q i m . Aquesta dependència entre els diferents coeficients del camp s'obté de les relacions:

$$\bar{\xi}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \xi^\nu \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (1.21)$$

En coordenades isòtropes aquestes relacions condueixen a que el camp conforme en les noves coordenades té la forma

$$\xi = (\bar{a}\bar{u}^2 + \bar{b}\bar{u} + \bar{c})\frac{\partial}{\partial\bar{u}} + (\bar{a}\bar{v}^2 + \bar{b}\bar{v} + \bar{c})\frac{\partial}{\partial\bar{v}}.$$

on les noves constants \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} s'obtenen mitjançant la següent relació matricial:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{M} \equiv \frac{1}{p} \begin{pmatrix} -q^2 & q & -1 \\ 2q(p+mq) & -(p+2mq) & 2m \\ -(p+mq)^2 & m(p+mq) & -m^2 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

A partir d'aquestes expressions és fàcil comprovar que a més a més la quantitat $\Delta = b^2 - 4ac$ és invariant sota aquestes transformacions, és a dir,

$$\Delta = \bar{\Delta}$$

on considerem $\bar{\Delta} = \bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c}$.

Passant ara de nou a coordenades cartesianes, amb $\bar{u} = \bar{t} + \bar{r}$ i $\bar{v} = \bar{t} - \bar{r}$, podem resumir aquests resultats de la següent manera:

Proposició 3 *Les transformacions conformes de coordenades que mantenen invariant la forma reduïda dels camps conformes Killing radials són:*

$$i) \begin{cases} \bar{t} = pt + q \\ \bar{r} = pr \end{cases} \quad \text{amb} \quad F(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = 1/p$$

$$ii) \begin{cases} \bar{t} = \frac{-p(t+q)}{r^2 - (t+q)^2} + m \\ \bar{r} = \frac{pr}{r^2 - (t+q)^2} + m \end{cases} \quad \text{amb} \quad F(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = \frac{p}{\bar{r}^2 - (\bar{t} - m)^2}$$

amb $p \neq 0$, q i m constants arbitràries. Aleshores els camps, en les noves coordenades, tindran la forma reduïda amb les constants donades per la relació (1.22) i la mètrica de Minkowski s'escriurà en forma conformement plana, $F^2\eta$.

Corol·lari 1 *Les transformacions donades a la proposició anterior mantenen invariant el valor de la constant $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Observem que la matriu \mathcal{M} , donada per (1.22), que relaciona les constants del camp en les dues bases té determinant ú, $\det(\mathcal{M}) = 1$. Llavors, les transformacions conformes de la mètrica de Minkowski de la *Proposició 3* equivalen a transformacions ortogonals sobre l'àlgebra formada pels camps conformes Killing radials considerant la seua forma de Killing \mathcal{K} com a mètrica, essent aquesta:

$$\mathcal{K} = \xi_2 \otimes \xi_2 - 2\xi_1 \otimes \xi_3.$$

Per tant Δ està invariantment definida a partir del producte escalar associat a la mètrica \mathcal{K} com $\Delta = \mathcal{K}(\xi, \xi)$. La invariança d'aquesta quantitat ens suggereix la possibilitat de classificar els camps conformes Killing radials segons el signe de Δ , donat que un factor multiplicatiu constant ($\xi \rightarrow k\xi$) canvia el valor de Δ però manté el seu signe. Aleshores tindrem tres classes d'equivalència, la classe amb $\Delta = 0$, un representant de la qual pot ser el camp de la translació temporal ξ_1 , la classe amb $\Delta > 0$, amb representant el camp de dilatació ξ_2 i la classe amb $\Delta < 0$, per a la qual el camp format per l'acceleració més la translació temporal $\xi_3 + \xi_1$ pot ser elegit com a representant de classe.

Per tant direm que *dos camps conformes Killing radials són equivalents si els Δ corresponents tenen el mateix signe, és a dir, si existeix localment una conformitat interna que transforma un camp en l'altre en les noves coordenades, salvant factors multiplicatius constants ($|\Delta|$) sobre el camp.*

Per comprendre millor el sentit geomètric local de l'esmentada equivalència entre camps conformes Killing radials, anem a considerar dos exemples aclaratoris.

- a) Per exemple, els camps ξ_1 i ξ_3 pertanyen els dos a la classe $\Delta = 0$ doncs la conformitat interna donada per la *Proposició 3* amb $p = -1$, $q = 0$ i m arbitrari:

$$\bar{t} = \frac{t}{r^2 - t^2} + m \quad \text{i} \quad \bar{r} = \frac{-r}{r^2 - t^2} \quad (1.23)$$

ens permet escriure el camp de la transformació d'acceleració ξ_3 com el camp de la translació temporal en les noves coordenades,

$$\xi_3 = (t^2 + r^2) \frac{\partial}{\partial t} + 2tr \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \equiv \bar{\xi}_1,$$

tenint en compte les relacions (1.22). La mètrica η en aquestes coordenades té la forma

$$\eta_{(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)} = \frac{1}{[\bar{r}^2 - (\bar{t} - m)^2]^2} \text{diag}(-1, 1, \bar{r}^2, \bar{r}^2 \sin^2 \theta). \quad (1.24)$$

Podem agafar $m = 0$ sense pèrdua de generalitat ja que simplement representa una translació en el temps. Evidentment, per poder establir l'equivalència, aquest canvi de coordenades s'ha de restringir a les regions on la transformació està definida. En aquest cas, i amb $m = 0$, resulta que la transformació té sentit al conjunt de punts de l'espai-temps que verifiquen $t^2 - r^2 > 0$, tenint en compte que la nova coordenada $\bar{r} > 0$ per ser una coordenada radial. I aleshores el conjunt imatge no serà tot l'espai-temps sinó la regió on $\bar{t}^2 - \bar{r}^2 > 0$ ja que per la transformació de coordenades (1.23) tenim que $\bar{t}^2 - \bar{r}^2 = \frac{1}{t^2 - r^2}$.

Anem a veure com afecta aquest canvi de coordenades a la forma de veure les corbes integrals associades al camp. Sabem que a les coordenades de partida, les corbes integrals associades al camp ξ_3 són hipèrboles tal i com veiem a la Figura 1.3, i per l'equivalència, a les coordenades amb barra, aquestes hipèrboles passaran a ser rectes paral·leles a l'eix \bar{t} (que serien les corresponents al camp $\bar{\xi}_1$), però únicament a les regions esmentades. Efectivament, sota el canvi de coordenades, l'equació de les corbes integrals associades al camp ξ_3 donada per (1.15) ens porta a escriure el paràmetre ω com,

$$\omega = \frac{t^2 - r^2}{r} = \frac{1}{\bar{r}} = \bar{\omega},$$

que correspon, en coordenades barres, a l'equació d'una família de rectes. Notem que aquesta correspondència ens transforma el semipla $t < 0$ ($t > 0$) en el semipla $\bar{t} > 0$ ($\bar{t} < 0$) i anàlogament per a les corbes integrals, tal i com veiem a la Figura 1.4.

- b) Un altre exemple interessant és l'equivalència entre el camp de dilatació ξ_2 i el camp $\xi_3 - \xi_1$ en la classe $\Delta > 0$. Segons la *Proposició 3* i les relacions (1.22), una conformitat interna amb $p = -2m \neq 0$ i $q = 1$,

$$\bar{t} = \frac{2m(t+1)}{r^2 - (t+1)^2} + m \quad \text{i} \quad \bar{r} = \frac{-2mr}{r^2 - (t+1)^2} \quad (1.25)$$

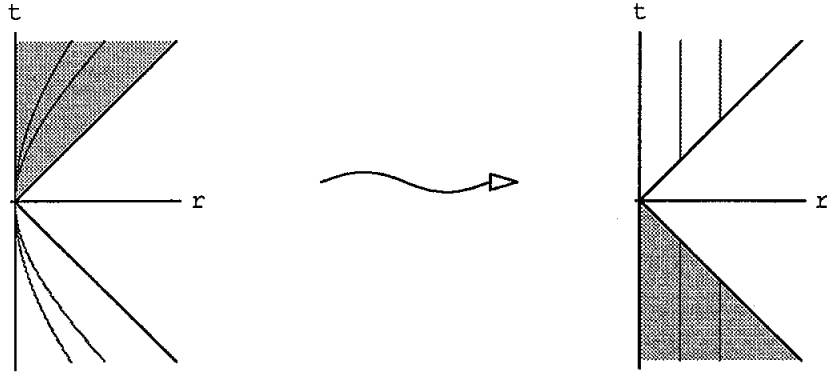


Figura 1.4: Efecte de la transformació de coordenades (1.23) amb $m = 0$, que transforma el camp ξ_3 en el camp ξ_1 , sobre les corbes integrals d'eixos camps. Aquesta transformació està definida a la regió $t^2 - r^2 > 0$ i la seua imatge estarà a $\bar{t}^2 - \bar{r}^2 > 0$ de manera que les zones ombrejades es corresponen entre sí. A aquestes regions les hipèrboles associades al camp ξ_3 s'han transformat en rectes paral·leles a l'eix \bar{t} com correspon a les corbes integrals associades al camp ξ_1 .

permet escriure el camp $\xi_3 - \xi_1$ com el camp de dilatacions en les noves coordenades (\bar{t}, \bar{r}) ,

$$\xi_3 - \xi_1 = (t^2 - r^2 - 1) \frac{\partial}{\partial t} + 2tr \frac{\partial}{\partial r} = 2 \left[\bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right] \equiv 2\bar{\xi}_2$$

i la mètrica com:

$$\eta_{(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)} = \frac{4m^2}{[\bar{r}^2 - (\bar{t} - m)^2]^2} \text{diag} \left(-1, 1, \bar{r}^2, \bar{r}^2 \sin^2 \theta \right) \quad (1.26)$$

Aquesta transformació de coordenades, i per tant l'equivalència entre els dos camps, serà vàlida a les regions de l'espai-temps on el canvi de coordenades estiga definit. Aquestes regions depenen de la constant $m \neq 0$ agafada, de manera que si aquesta és positiva (negativa) la regió de definició serà els punts de l'espai-temps que verifiquen $(t+1)^2 - r^2 > 0$

$((t+1)^2 - r^2 < 0)$ per ser \bar{r} una coordenada radial. I aleshores la imatge de la transformació caurà sobre la regió on $(\bar{t}-m)^2 - \bar{r}^2 > 0$ ($(\bar{t}-m)^2 - \bar{r}^2 < 0$) doncs tenim la relació $(\bar{t}-m)^2 - \bar{r}^2 = \frac{4m^2}{(t+1)^2 - r^2}$.

Anàlogament al fet a l'exemple anterior anem a veure que passa amb les corbes integrals associades al camp. El camp $\xi_3 - \xi_1$ té rectes i hipèrboles com a corbes integrals segons hem vist a la Figura 1.3 ($\Delta > 0$), amb el canvi de coordenades aquestes corbes integrals es transformen totes en rectes passant per l'origen de coordenades (corresponents al camp $\bar{\xi}_2$) a les regions de definició de la transformació ja que el paràmetre ω de les corbes integrals passa a escriure's com:

$$\omega = \frac{t^2 - r^2 - 1}{r} = \frac{2\bar{t}}{\bar{r}} = \bar{\omega}$$

que correspon a la família de rectes associada al camp $\bar{\xi}_2$. A la Figura 1.5 podem veure aquesta transformació sobre l'espai-temps i sobre les corbes integrals per al cas en què $m > 0$, en aquest cas les regions ombrejades es corresponen entre sí segons la transformació de coordenades, produint-se un canvi de signe per a tot $t < -1$.

Conseqüentment, i tal i com hem vist als exemples anteriors, tenim el següent resultat:

Corol·lari 2 *Els camps conformes Killing radials donats per $\xi_3 - k\xi_1$ amb $k = 0, +1, -1$ poden ser elegits com a representants de les classes d'equivalència $\Delta = 0, \Delta > 0$ i $\Delta < 0$ respectivament.*

Notem també que aquests representants s'obtenen únicament del camps ξ_1 i ξ_3 i per tant no formen una base de l'àlgebra generada pels camps conformes Killing radials. Tanmateix, generen tota l'àlgebra per commutació donat que l'altre camp de la base, ξ_2 , s'obté, salvant un factor constant, com el claudàtor de Lie de qualsevol parell d'aquests representants.

1.4 Superfícies ortogonals a un camp conforme Killing radial minkowskià

Siga ξ un camp conforme Killing radial donat en la seua forma reduïda per

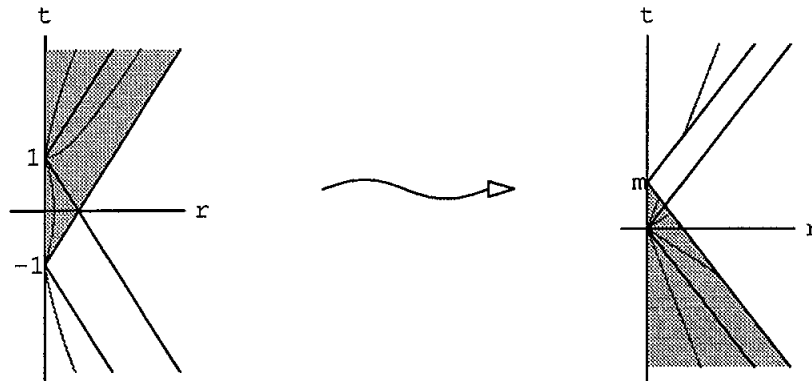


Figura 1.5: Efecte de la transformació de coordenades (1.25) amb $m = 1$, que transforma el camp $\xi_3 - \xi_1$ en el camp $2\bar{\xi}_2$, sobre les corbes integrals d'eixos camps. Aquesta transformació, definida a les regions $(t + 1)^2 - r^2 > 0$ i $(\bar{t} - 1)^2 - \bar{r}^2 > 0$ i de manera que les zones ombrejades es corresponen entre sí, transforma les hipèrboles associades al camp $\xi_3 - \xi_1$ en rectes passant per l'origen de coordenades com correspon a les corbes integrals associades al camp $2\bar{\xi}_2$.

(1.11) i considerem l'1-forma ξ_* associada a ell, és a dir,

$$\xi_* = -\left(a(t^2 + r^2) + bt + c\right)dt + r(2at + b)dr.$$

Aquesta 1-forma és integrable, $\xi_* \wedge d\xi_* = 0$, i a més a més admet com a un potencial la funció $s(t, r)$ donada per:

$$s(t, r) = \begin{cases} b(t^2 - r^2) + 2ct & \text{if } a = 0 \\ \frac{a(t^2 - r^2) - c}{2at + b} & \text{if } a \neq 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

és a dir, $\xi_* \propto ds$ i les superfícies $\Sigma_s = \{(t, r, \theta, \varphi) / s = \text{constant}\}$ són ortogonals al camp ξ . Considerem un domini on el camp no es fa isòtrop a cap punt. Aleshores la mètrica es pot escriure utilitzant la funció s com a nova coordenada i un altra coordenada ω orthogonal al camp ξ , és a dir, $\eta(d\omega, \xi) = 0$. Amb aquesta condició d'ortogonalitat trobem que el sistema a resoldre coincideix efectivament amb el corresponent a les corbes integrals associades al camp (1.15) i per tant la coordenada ω resulta:

$$\omega(t, r) = \frac{a(t^2 - r^2) + bt + c}{r} \quad (1.28)$$

per a qualsevol valor de la constant a . Per poder escriure la mètrica plana en aquestes noves coordenades necessitem les transformacions inverses a les equacions (1.27) i (1.28), les quals venen donades per

i) En el cas $a = 0$:

$$t(s, \omega) = \begin{cases} \frac{s}{2c} & \text{if } b = 0 \\ -\frac{c}{b} + \frac{\omega}{b} \sqrt{\frac{bs + c^2}{\omega^2 - b^2}} & \text{if } b \neq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

$$r(s, \omega) = \sqrt{\frac{bs + c^2}{\omega^2 - b^2}}$$

ii) En el cas $a \neq 0$:

$$t(s, \omega) = \frac{1}{\sigma^2 - \omega^2} \left[(\Delta - \omega^2)s - \frac{b}{2a}(\sigma^2 - \Delta) \pm \frac{\omega}{2a} \sqrt{(\sigma^2 - \Delta)(\omega^2 - \Delta)} \right] \quad (1.30)$$

$$r(s, \omega) = \frac{\sqrt{\sigma^2 - \Delta}}{2a(\sigma^2 - \omega^2)} \left[-\sigma\sqrt{\omega^2 - \Delta} \pm \omega\sqrt{\sigma^2 - \Delta} \right]$$

on $\sigma \equiv 2as + b$ i el signe $+$ ($-$) de la coordenada t correspon al signe $+$ ($-$) per a la coordenada r .

Aleshores resulta que η , escrita en les coordenades $(s, \omega, \theta, \varphi)$, adopta la següent forma diagonal:

$$\eta_{(s, \omega, \theta, \varphi)} = \begin{cases} r^2(s, \omega) \operatorname{diag} \left(\frac{b^2 - \omega^2}{4(bs + c)^2}, \frac{1}{\omega^2 - b^2}, 1, \sin^2 \theta \right) & \text{si } a = 0 \\ r^2(s, \omega) \operatorname{diag} \left(\frac{\Delta - \omega^2}{4(as^2 + bs + c)^2}, \frac{1}{\omega^2 - \Delta}, 1, \sin^2 \theta \right) & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

Notem que aquestes coordenades $(s, \omega, \theta, \varphi)$ no són, en general, coordenades conformement planes. A més a més, observem que considerant les transformacions de coordenades (1.29), (1.30) i la *Proposició 3*, la relació que resulta entre les funcions (s, ω) i les (\bar{t}, \bar{r}) ens permet recuperar, a partir de l'expressió (1.31), les formes mètriques (1.24) i (1.26) que hem vist a l'apartat anterior.

Per tant, a partir de (1.31), podem calcular l'expressió de la mètrica induïda sobre les superfícies ortogonals Σ_s per la mètrica d'espai-temps de Minkowski, la qual s'obté de considerar el projector ortogonal $h = \eta + \frac{1}{P} \xi \otimes \xi$. Aleshores aquesta mètrica 3-dimensional γ s'escriu:

$$\gamma_{(\omega, \theta, \varphi)} = r^2(s, \omega) \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\omega^2 - \Delta}, 1, \sin^2 \theta \right).$$

La doble 2-forma de curvatura de Riemann \mathcal{R} d'aquesta mètrica induïda es pot expressar com $\mathcal{R} = [K(s)/2]\gamma \wedge \gamma$, on \wedge denota el producte exterior de

dobles 1-formes i $K(s)$ resulta:

$$K(s) = \begin{cases} \frac{-b^2}{bs + c^2} & \text{quan } a = 0 \\ \frac{-a}{as^2 + bs + c} & \text{quan } a \neq 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Per tant tenim que cadascuna de les superfícies Σ_s ($s = \text{constant}$) ortogonals al camp conforme Killing radial ξ té curvatura seccional constant, $K(s)$, dependent de les corresponents constants associades al camp. Ara be, tenint en compte les expressions (1.13) i (1.27), la quantitat $P = -\eta(\xi, \xi)$ vindrà donada per

$$P = \begin{cases} bs + c^2 & \text{si } a = 0 \\ \frac{as^2 + bs + c}{a}(2at + b)^2 & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

i conseqüentment, la curvatura seccional de Σ_s es pot escriure més simplement com:

$$K(s) = -\frac{1}{\eta(\xi, \xi)}(2at + b)^2,$$

el signe de la qual depén clarament del caràcter causal del camp ξ . Si el camp és espacial tindrem superfícies de curvatura constant positiva i si el camp és temporal aleshores la curvatura de les seccions ortogonals serà negativa, salvant el cas on $a = b = 0$ per al qual la curvatura és nul·la. Podem, doncs, resumir-ho tot de la següent manera:

Proposició 4 *Les seccions ortogonals a un camp conforme Killing radial, a l'espai-temps de Minkowski, són espais 3-dimensionals de curvatura constant negativa o positiva segons (les regions on) el camp siga temporal o espacial, respectivament; salvant el cas del camp $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ (temporal per tot arreu), les seccions ortogonals del qual són planes.*

1.5 Conformes Killing radials temporals a Minkowski

El cas de camps conformes Killing radials *temporals* és especialment interessant perquè estan relacionats amb observadors particulars (en general no

inercials) a l'espai-temps de Minkowski. El tipus d'observador que tingam en cada cas dependrà de les seues propietats cinemàtiques. Anem, doncs, a estudiar aquestes propietats a l'espai-temps de Minkowski.

Les propietats cinemàtiques d'un camp conforme Killing radial temporal ξ seran les corresponents al vector unitari $\mathbf{u} = \frac{\xi}{|\xi|}$, les quals venen donades per la descomposició (relativa a \mathbf{u}) de la seua derivada covariant:

$$\nabla \mathbf{u} = -\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} + \sigma + \Omega + \frac{1}{3}\Theta h, \quad (1.34)$$

essent \mathbf{a} l'acceleració, σ la distorsió (o vorticitat), Ω la rotació, Θ l'expansió i h el projector ortogonal a \mathbf{u} .

La distorsió i la vorticitat del camp ξ són nul·les pel fet de ser un camp conforme Killing i integrable; mentre que l'expansió θ , donada per

$$\theta = \frac{3(2at + b)}{\sqrt{P}}$$

amb P el mòdul del camp canviat de signe (1.13), i l'acceleració \mathbf{a} , amb expressió

$$\mathbf{a} = \frac{2ar}{P} \left(-r(2at + b)dt + (a(t^2 + r^2) + bt + c)dr \right),$$

seran en general diferents de zero.

D'aquestes expressions clarament podem observar que un camp conforme Killing radial temporal en forma reduïda (1.11) i en coordenades inercials és geodèsic si i només si la constant a és igual a zero. I tindrà expansió nul·la (és a dir, serà un camp de Killing) si i només si les constants a i b són iguals a zero, és a dir, únicament quan el camp siga $\xi = c(\partial/\partial t)$.

A més a més, notem també que $\eta(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{4a^2}{\omega^2 - \Delta}$ és constant al llarg de cada corba integral, com es pot veure de l'expressió (1.16). La qual cosa confirma el fet que les corbes integrals associades a un camp conforme Killing radial temporal corresponen a moviments inercials o hiperbòlics. Per tant podem concloure el següent resultat:

Proposició 5 *A l'espai-temps de Minkowski, l'acceleració d'un camp conforme Killing radial temporal té mòdul constant sobre cada corba integral, és*

a dir,

$$|\mathbf{a}| = \frac{2|a|}{\sqrt{\omega^2 - \Delta}},$$

essent ω la funció donada per (1.15).

El vector unitari \mathbf{u} associat a un camp conforme Killing radial temporal, considerat com a quadri velocitat es pot escriure com

$$\mathbf{u} = \frac{\xi}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

on v representa la velocitat del camp relativa a l'observador inercial $\frac{\partial}{\partial t}$ i vindrà donada pel quocient entre les components ξ^1 i ξ^0 del camp:

$$v = \frac{r(2at + b)}{a(t^2 + r^2) + bt + c}. \quad (1.35)$$

Segons la Figura 1.1, podem veure clarament que quan ens aproximem (dins de les regions de temporalitat del camp) als cons de llum, on el camp ξ es fa isòtrop, la velocitat relativa v tendeix a 1 (a la velocitat de la llum). En particular, el cas $a = c = 0$, corresponent al camp geodèsic ξ_2 , resulta especialment interessant (en part també per raons històriques). Per aquest camp la seua velocitat relativa es redueix a $v = \frac{r}{t}$ i adaptant coordenades a ell, la mètrica de Minkowski s'escriu com:

$$\eta = -d\tau^2 + \frac{\tau^2}{\left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^2} [d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (1.36)$$

és a dir, té la forma d'una mètrica de Robertson-Walker amb factor d'expansió $R(\tau) = \tau$. Aquesta expressió de la mètrica plana va ser introduïda per Milne [12] als anys trenta, qui la va utilitzar per donar una interpretació cinemàtica de l'expansió de l'univers. De fet, el model d'univers construït per Milne amb aquesta expressió de la mètrica plana representa un univers en expansió d'acord amb la llei de Hubble (velocitat de recessió proporcional a la distància en cada instant) i es conegut com a *Univers de Milne*. La coordenada temporal τ descriu el temps propi de la congruència radial geodèsica associada al camp

$\xi_2 = \tau \frac{\partial}{\partial r}$, i, segons la *Proposició 6*, les superfícies $\tau = \text{constant}$ són espais de curvatura constant negativa.

Notem que l'expressió (1.36) es pot obtenir també a partir de (1.31) només redefinint les coordenades (s, ω) de la següent manera:

$$s = \tau^2 \quad , \quad \omega = \frac{\rho}{4} + \frac{1}{\rho}.$$

En eixe sentit, podem entendre l'interpretació de Milne de la velocitat de recessió de les galxies com el fet d'adaptar coordenades a un camp conforme Killing radial temporal a l'espai-temps de Minkowski.

Tanmateix, per a camps ξ temporals amb $a \neq 0$ l'acceleració és no nul·la però, per ser temporals, les seccions ortogonals a ells són espais de curvatura constant negativa (com hem vist a la *Proposició 4*). Malgrat això, pel fet de no ser geodèsic, la mètrica de Minkowski en coordenades adaptades a ξ ja no serà exactament de la forma de Robertson-Walker, donat que apareixeran termes extradiagonals η_{01} , i no es pot fer un tractament similar al de Milne en aquesta situació.

Considerem a continuació el camp radial geodèsic isòtrop $\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}$. El desplaçament espectral z d'un esdeveniment emés a $e \equiv (t, r, \theta, \varphi)$ relatiu a un observador u que es troba a l'origen espacial $o \equiv (t = t_0, r = 0)$ ve donat per

$$1 + z = \frac{\eta(\mathbf{k}, \mathbf{u})|_e}{\eta(\mathbf{k}, \mathbf{u})|_o} = \sqrt{\frac{1 + v_e}{1 - v_e}} \sqrt{\frac{1 - v_o}{1 + v_o}}, \quad (1.37)$$

on v és la velocitat de l'observador u relativa a l'observador inercial $\frac{\partial}{\partial t}$ i els subíndexs e i o expressen que les funcions corresponents són avaluades sobre els punts d'emissió i d'observació respectivament.

Aleshores, donat un camp conforme Killing radial temporal ξ en forma reduïda (1.11), la velocitat relativa v d'aquest ξ respecte l'observador inercial resulta de la forma (1.35) i per tant l'expressió (1.37) del redshift es redueix a

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v_e}{1 - v_e}}$$

donat que $v_o \equiv v(t_0, 0) = 0$ per aquests camps. En aquesta expressió solament necessitem conèixer el valor de la velocitat relativa v_e al punt d'emissió sobre les corbes integrals de ξ .

1.6 Espais-temps conformement plans i moviments conformes radials

a) Tota varietat diferenciable M de dimensió n qualsevol amb un camp tensorial mètric (també anomenat mètrica) g associat forma el que anomenem una *estructura mètrica* (M, g) . En particular, l'espai-temps sempre està associat a una varietat diferenciable de dimensió 4 a la qual definim una mètrica *lorentziana* (de signatura $(1,3)$). En general, les estructures mètriques són de diferents tipus depenent, tant de la varietat diferenciable considerada com de la mètrica associada. De fet a una mateixa varietat M li podem associar diverses estructures mètriques que, en general, tindran propietats geomètriques diferents. Però, donada una varietat diferenciable, podem associar-li mètriques diferents però relacionades entre sí de manera que donen lloc a estructures a les quals n'hi han propietats que es conserven al passar d'una a l'altra mentre que altres marquen les diferències entre elles. Dins d'aquestes, resulten de particular interès per al nostre treball aquelles estructures que anomenarem *conformes*. **Es diu que dues estructures mètriques (M, g) i (M, \tilde{g}) són conformes si existeix una funció diferenciable positiva, $f : M \rightarrow]0, +\infty[$, i de classe C^∞ , anomenada **factor de conformitat**, tal que $\tilde{g} = fg$.**

Aquest tipus d'estructures relacionades resulten principalment interessants perquè poden ser considerades com canvis d'escala en la mètrica de manera que es preserven els angles entre vectors diferents i les raons (quocients) entre distàncies. És més, per al cas especial de mètriques lorentzianes (signatura $(1, n)$ on n és la dimensió de la varietat) tenim que dues estructures mètriques són conformes si, i només si, defineixen en cada punt la mateixa estructura causal, és a dir, el mateix con de llum. A més a més, les estructures mètriques lorentzianes conformes tenen també les mateixes geodèsiques isòtropes. Totes aquestes propietats fan especialment interessant les estructures mètriques conformes, també anomenades estructures mètriques relacionades per conformitats, en l'estudi de l'espai-temps.

La relació d'estructures mètriques conformes és una relació d'equivalència per al conjunt de totes les estructures mètriques amb una mateixa varietat diferenciable, pel què podem parlar de classes de conformitat prenent com a representant de classe una mètrica qualsevol dins de la classe. En particular,

nosaltres estudiarem la classe de conformitat de la mètrica plana, considerant com a mètrica plana η aquella que té tensor de curvatura de Riemann nul, $Riem(\eta) = 0$ i per tant es podrà escriure com $\eta = diag(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ amb $\epsilon_i = \pm 1$ on $i = 1, \dots, n$ essent n la dimensió de la varietat. Les mètriques pertanyents a aquesta classe de conformitat es diran *estructures mètriques conformement planes*. Segons la dimensió n de la varietat tindrem que una estructura conformement plana ve caracteritzada de la següent manera: (i) En dimensió $n = 2$ tota mètrica és localment conformement plana; (ii) En dimensió $n = 3$, una mètrica és conformement plana si i sols si el tensor de Cotton associat a ella és nul; (iii) En dimensió $n \geq 4$, una mètrica és conformement plana si i sols si el tensor de Weyl associat a ella és nul.

Per al cas d'un espai-temps conformement pla tindrem per tant que el tensor de Weyl associat a la mètrica és nul i aleshores el tensor de curvatura de Riemann no té part sense traça.

Però, abans de passar a l'estudi particular dels espais-temps conformement plans, anem a donar algunes propietats generals que es verifiquen per a qualsevol parell d'estructures mètriques conformes en qualsevol dimensió, les quals ens seran d'utilitat.

b) Donada una estructura mètrica (M, g) de dimensió n qualsevol, considerem el tensor de curvatura de Riemann associat, $Riem(g)$. Per a qualsevol altra mètrica \tilde{g} conforme a la primera, el tensor de curvatura de Riemann corresponent, $\tilde{Riem}(\tilde{g})$, estarà també relacionat amb l'anterior mitjançant el factor de conformitat entre ambdues mètriques. Aquesta relació es mostra en la següent proposició.

Proposició 6 *En dimensió n qualsevol, dues estructures mètriques conformes, (M, g) i $(M, \tilde{g} = F^2g)$, tenen associats tensors de curvatura de Riemann relacionats de la següent manera:*

$$\tilde{Riem} = F^2(Riem + \Sigma \wedge g) \quad (1.38)$$

on

$$\Sigma = F\nabla d\left(\frac{1}{F}\right) - \frac{1}{2}g(d \ln |F|, d \ln |F|)g, \quad (1.39)$$

essent d la diferencial exterior, ∇ la derivada covariant de Levi-Civita associada a la mètrica g i \wedge el producte exterior de doble 2-formes.

Una conseqüència immediata d'aquesta proposició són les relacions entre els tensors de Ricci, la curvatura escalar i el tensor de Weyl d'ambdues mètriques donat que aquests s'obtenen com a contraccions successives del tensor de Riemann als dos primers casos i de la descomposició de la doble 2-forma de curvatura de Riemann associada per la mètrica al cas del tensor de Weyl. Aquestes relacions seran, per tant, les següents:

Corol·lari 3 *Els tensors de Ricci, les curvatures escalars i els tensors de Weyl associats a cadascuna de les dues mètriques conformes estan relacionats pel factor de conformitat segons les següents expressions:*

- i) *El tensor de Ricci de la mètrica \tilde{g} s'obté a partir del corresponent tensor de Ricci de la mètrica g com:*

$$\tilde{\mathcal{R}}ic = \mathcal{R}ic + \text{tr}_g \Sigma g + (n - 2)\Sigma$$

- ii) *Les corresponents curvatures escalars d'aquestes dues mètriques verifiquen la relació:*

$$\tilde{R} = F^{-2}(R + 2(n - 1)\text{tr}_g \Sigma)$$

- iii) *El tensor de Weyl resulta invariant sota conformitats:*

$$\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$$

Estem denotant la traça respecte de la mètrica g per tr_g i Σ la doble 2-forma donada per (1.39).

Aquestes relacions són vàlides per a qualsevol dimensió n de la varietat diferenciable i per a qualsevol signatura de les mètriques.

c) Anem a veure ara com definim les propietats cinemàtiques associades a un vector unitari temporal i com es relacionen per conformitats en la mètrica. Treballarem en signatura lorentziana (1,3) per a la qual un vector unitari \mathbf{u} i temporal per a la mètrica g verifica $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$. La descomposició cinemàtica de la derivada covariant d'aquest vector \mathbf{u} respecte de g ens dóna la seua acceleració \mathbf{a} , definida per $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, la seua expansió Θ , donada per $\Theta = \text{div}\mathbf{u} = \nabla_{\alpha}\mathbf{u}^{\alpha}$, la seua distorsió σ , que s'obté com $\sigma = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbf{u}}g)_{\perp} - \frac{1}{3}\Theta(g + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$

essent \mathcal{L}_u la derivada de Lie al llarg de \mathbf{u} , \perp la projecció sobre l'espai ortogonal a \mathbf{u} i finalment, la seua vorticitat Ω , $\Omega = \frac{1}{2}(d\mathbf{u})_\perp$; de manera que la derivada covariant del vector s'escriu com,

$$\nabla \mathbf{u} = -\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} + \sigma + \Omega + \frac{1}{3}\Theta(g + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}).$$

Donat aquest \mathbf{u} , podem definir el vector $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{F}\mathbf{u}$ de manera que aquest nou vector és unitari i temporal per a la mètrica $\tilde{g} = F^2g$ ($\tilde{g}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = -1$); i anàlogament, la derivada covariant del vector $\tilde{\mathbf{u}}$ respecte de la mètrica \tilde{g} (per a la qual és unitari) ens dóna les corresponents magnituds cinemàtiques, resultant:

$$\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\sigma} + \tilde{\Omega} + \frac{1}{3}\tilde{\Theta}(\tilde{g} + \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}).$$

Utilitzant les relacions anteriors trobem que aquestes magnituds cinemàtiques no són totalment independents entre elles, sinó que estan relacionades entre sí pel factor de conformitat F^2 entre ambdues mètriques. L'acceleració del vector $\tilde{\mathbf{u}}$ es pot obtenir com,

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{1}{F}(dF)_\perp. \quad (1.40)$$

L'expansió $\tilde{\Theta}$ depèn de l'expansió Θ i de la funció F de la següent manera:

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{F} \left[\Theta + \frac{3}{F}i(dF)\mathbf{u} \right] \quad (1.41)$$

amb $i()$ el producte interior. La distorsió canvia de manera similar a la mètrica, és a dir, amb un factor de proporcionalitat entre elles,

$$\tilde{\sigma} = F\sigma.$$

I finalment, la vorticitat canvia de la mateixa manera que la distorsió,

$$\tilde{\Omega} = F\Omega.$$

Com veiem, encara que totes les magnituds canvien per conformitats, podem dir que la nul·litat de la distorsió i de la vorticitat és invariant sota conformitats. Aquesta propietat resulta d'interès en l'estudi dels camps conformes

Killing radials temporals en tota una classe de conformitat, particularment a la classe dels espais-temps conformement plans.

d) Un camp ξ que verifica $\mathcal{L}_\xi g = 2\Phi g$ es diu que és un camp conforme Killing per a la mètrica g (\mathcal{L}_ξ denota la derivada de Lie). A més un camp conforme Killing temporal està caracteritzat per les propietats cinemàtiques del vector unitari \mathbf{u} associat a ell; de manera que el camp temporal ξ serà un conforme Killing si, i sols si, el seu vector unitari \mathbf{u} associat té distorsió nul·la ($\sigma = 0$) i la seua acceleració és la projecció sobre les superfícies ortogonals a \mathbf{u} del gradient d'una funció la derivada al llarg de \mathbf{u} de la qual és un terç de la seua expansió, $d(\mathbf{a} - \frac{\sigma}{3}\mathbf{u}) = 0$ (on d representa la diferencial exterior a l'espai-temps). De fet, aquesta caracterització és invariant per conformitats, com es pot comprovar de les relacions entre les propietats cinemàtiques d'un camp per a dues mètriques conformes descrites a anteriorment, i per tant és la mateixa per a tota una classe de conformitat de mètriques. Per tant, si un camp vectorial temporal és un conforme Killing per a una mètrica g , aleshores ho serà també per a qualsevol altra mètrica conforme a g . De fet, aquesta propietat és independent del caràcter causal ja que, en general, si ξ és conforme Killing per a g , $\mathcal{L}_\xi g = 2\Phi g$, aleshores per a la mètrica $\tilde{g} = F^2 g$ es verifica que $\mathcal{L}_\xi \tilde{g} = 2\tilde{\Phi} \tilde{g}$ amb coeficient de conformitat $\tilde{\Phi} = \Phi + \frac{1}{2F^2} \xi(F^2)$.

En particular tenim que això es verificarà per a la classe de les mètriques conformement planes, de manera que els camps conformes Killing són els mateixos que els de l'espai-temps de Minkowski per a qualsevol altre espai-temps conforme a ell.

Ara bé, si volem estudiar els camps conformes Killing que són a més a més de direccions radials, aleshores hem de dir en primer lloc què entenem per camp amb direccions radials en un espai-temps conformement pla qualsevol. Per tot el que hem estudiat anteriorment i tenint en compte que els únics factors de conformitat interns d'una mètrica conformement plana són els factors de conformitat interns de la mètrica de Minkowski, podem definir els camps radials de la següent manera:

Definició 3 *Direm que un camp vectorial ξ és de direccions radials per a una mètrica conformement plana $g = F^2 \eta$ si existeixen coordenades $\{x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ inercials per a la mètrica plana η en les quals el camp s'escriu en la*

forma reduïda,

$$\xi = \alpha(x^\mu) \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x^\mu) \frac{\partial}{\partial r}.$$

De manera que tindrem que tot camp de direccions radials de la mètrica plana ho és també en qualsevol mètrica conforme a ella i viceversa. En particular, donat tot ho exposat anteriorment, els camps conformes Killing radials d'una mètrica conformement plana seran els mateixos que els de l'espai-temps de Minkowski i per tant seran de la forma (1.11) segons la *Proposició 1*, tenint doncs que:

Proposició 7 *La forma reduïda de tot camp conforme Killing radial a un espai-temps conformement pla és:*

$$\xi = \left(a(t^2 + r^2) + bt + c \right) \frac{\partial}{\partial t} + r(2at + b) \frac{\partial}{\partial r}$$

on a , b i c són constants arbitràries.

Algunes de les propietats d'aquests camps es mantenen invariants per conformitats i ja han estat estudiades a l'espai de Minkowski. Per exemple la forma dels dominis de causalitat i de les corbes integrals serà la mateixa en tot espai-temps conformement pla, sempre dins del domini de definició del factor de conformitat corresponent (veure les Figures 1.1, 1.2 i 1.3). Per al cas d'un camp conforme Killing radial temporal, la distorsió i la vorticitat són nul·les en qualsevol espai-temps conformement pla pel fet de ser un conforme Killing integrable. Però existeixen altres propietats cinemàtiques i dinàmiques que dependran de l'espai-temps considerat, i aquestes són les que anem a estudiar a continuació.

Considerem l'1-forma ξ_* associada a ξ per la mètrica,

$$\xi_* = F^2[-\alpha dt + \beta dr],$$

amb $\alpha = a(t^2 + r^2) + bt + c$ i $\beta = r(2at + b)$. Aleshores tenim que aquesta 1-forma és integrable, independentment de la forma del factor de conformitat F^2 al igual que passava a l'espai-temps de Minkowski, de manera que existeix

la funció $s(t, r)$ donada per (1.27),

$$s(t, r) = \begin{cases} b(t^2 - r^2) + 2ct & \text{if } a = 0 \\ \frac{a(t^2 - r^2) - c}{2at + b} & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

que és un potencial de ξ_* , és a dir, $\xi_* \propto ds$. A més a més les superfícies ortogonals al camp ξ vindran donades per $\Sigma_s = \{s(t, r) = \text{constant}\}$. Així mateix, les corbes integrals, al ser invariants per conformitats, també ens defineixen la funció $\omega(t, r)$ (1.28),

$$\omega(t, r) = \frac{a(t^2 - r^2) + bt + c}{r}$$

verificant $g(ds, d\omega) = 0$, de manera que la mètrica induïda $\tilde{\gamma}$ sobre les superfícies ortogonals és conforme a la corresponent mètrica induïda γ per la mètrica plana sobre aquestes superfícies ortogonals, amb el mateix factor de conformitat F^2 . Llavors tenim que $\tilde{\gamma} = F^2\gamma$ amb γ una mètrica de curvatura $K(s)$ constant (1.32), segons el vist anteriorment; de manera que, utilitzant les relacions entre els tensors de curvatura de dues mètriques conformes (1.38), tenim que

$$\tilde{\mathcal{R}}iem(\tilde{\gamma}) = \left(\frac{K(s)}{2}\gamma + \Sigma \right) \wedge \tilde{\gamma}$$

amb $\Sigma = F\nabla d\frac{1}{F} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(d\ln|F|, d\ln|F|)\tilde{\gamma}$ i, en aquest cas ∇ denota la derivada covariant respecte de la mètrica γ . En general $\nabla d\frac{1}{F} \neq 0$ i per tant aquests 3-espais no són de curvatura constant.

Ara considerarem que ξ és temporal. Si \mathbf{u} és el corresponent vector unitari, $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$, aleshores per (1.40) i (1.41), la seua expansió Θ i la seua acceleració \mathbf{a} depenen del factor de conformitat de la manera següent,

$$\Theta = \frac{3}{F^2\sqrt{P}}[\alpha\dot{F} + \beta F' + \frac{\beta}{r}F] \quad (1.42)$$

$$\mathbf{a} = \frac{A}{FP}[-\beta dt + \alpha dr] + \frac{1}{F}F_{,\theta}d\theta + \frac{1}{F}F_{,\varphi}d\varphi \quad (1.43)$$

amb α i β les components del camp donades per (1.10) i essent

$$A = \alpha F' + \beta \dot{F} + 2arF \quad (1.44)$$

on el punt i la prima representen les derivades parcials respecte de t i de r , respectivament, $F_{,\theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta}$ i $F_{,\varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}$.

Notem que l'acceleració \mathbf{a} és la projecció ortogonal a \mathbf{u} del gradient d'una funció ja que, per ser el camp un conforme Killing, es verifica que $d\left(\mathbf{a} - \frac{\Theta}{3}\mathbf{u}\right) = 0$. Per tant podem dir que \mathbf{u} és *conformement geodèsic*, és a dir, existeix un espai-temps conformement pla per al qual el camp ξ és geodèsic. En el pròxim capítol provarem que aquest espai-temps correspon a l'espai-temps de Robertson-Walker.

En quant a l'expansió, clarament depèn de l'espai-temps considerat; en particular veurem que per al cas de Robertson-Walker el camp conforme Killing radial temporal geodèsic té expansió homogènia, és a dir, expansió variant solament al llarg de la direcció del camp. Però també n'hi hauran altres espais-temps on l'expansió del camp siga homogènia encara que per aquests l'acceleració del camp serà diferent de zero, però necessàriament Fermi-Walker propagada al llarg de la direcció del camp. Aquesta relació entre la derivada de Fermi de l'acceleració i la propagació de l'expansió es pot provar de manera general per a camps conformes Killing integrables, entre els quals es troben els radials, com anem a veure a continuació. Per demostrar-ho necessitem previament establir el següent resultat general, al qual denotarem de la mateixa manera al camp i a l'1-forma associada a ell per la mètrica sense que això genere confusió en la notació.

Lema 1 *Per a un camp temporal i unitari \mathbf{u} , considerant les seues acceleració \mathbf{a} , expansió Θ , distorsió σ i vorticitat Ω , es verifica la següent identitat:*

$$d\left(\mathbf{a} - \frac{\Theta}{3}\mathbf{u}\right) = \left(i(\mathbf{a})(\sigma - \Omega) + \mathcal{F}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} - \frac{1}{3}d\Theta\right) \wedge \mathbf{u} - \frac{2}{3}\Theta\Omega + (d\mathbf{a})_{\perp}$$

amb d la diferencial exterior, $i()$ el producte interior, $\mathcal{F}_{\mathbf{u}}$ la derivada Fermi-Walker al llarg del camp \mathbf{u} i \perp denotant la projecció sobre el 3-espai ortogonal a \mathbf{u} .

Prova: En primer lloc considerarem la descomposició cinemàtica (relativa a \mathbf{u}) de la derivada covariant del camp \mathbf{u} i de la seua acceleració \mathbf{a} , $\nabla\mathbf{u}$ i $\nabla\mathbf{a}$, respectivament,

$$\nabla\mathbf{u} = -\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} + \sigma + \Omega + \frac{1}{3}\Theta(g + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$$

$$\nabla \mathbf{a} = -g(\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{p} + (\nabla \mathbf{a})_{\perp}$$

essent \mathbf{p} i \mathbf{q} vectors ortogonals a \mathbf{u} . La part antisimètrica d'aquests tensors és, respectivament,

$$d\mathbf{u} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} + 2\Omega \quad , \quad d\mathbf{a} = (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \wedge \mathbf{u} + (d\mathbf{a})_{\perp} .$$

Llavors, tenim

$$d\left(\mathbf{a} - \frac{\Theta}{3}\mathbf{u}\right) = \left(\mathbf{q} - \mathbf{p} - \frac{1}{3}d\Theta - \frac{\Theta}{3}\mathbf{a}\right) \wedge \mathbf{u} - \frac{2}{3}\Theta\Omega + (d\mathbf{a})_{\perp}$$

i tenint en compte que $g(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = 0$ i denotant per ${}^t\nabla \mathbf{a}$ el 2-tensor transposat de $\nabla \mathbf{a}$, podem escriure

$$\mathbf{p} \equiv -\left(i(\mathbf{u})\nabla \mathbf{a}\right)_{\perp} = -\mathcal{F}_{\mathbf{u}}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{q} \equiv -\left(i(\mathbf{u}){}^t\nabla \mathbf{a}\right)_{\perp} = \left(i(\mathbf{a}){}^t\nabla \mathbf{u}\right)_{\perp} = i(\mathbf{a})(\sigma - \Omega) + \frac{\Theta}{3}\mathbf{a}$$

obtenint així l'expressió requerida.

Si tornem ara al cas d'un camp conforme Killing temporal (no necessàriament radial), els quals es caracteritzen per tindre $\sigma = 0$ i $d\left(\mathbf{a} - \frac{\Theta}{3}\mathbf{u}\right) = 0$, que a més a més siga integrable ($\Omega = 0$), aleshores es verifica que $\mathbf{u} \wedge d\mathbf{a} = 0$ o, equivalentment, $i(\mathbf{u}) * d\mathbf{a} = 0$. Per tant, relativament a \mathbf{u} , la 2-forma $d\mathbf{a}$ té part magnètica nul·la i $(d\mathbf{a})_{\perp} = 0$. Conseqüentment el *Lema 1* es redueix a

$$\left(\mathcal{F}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} - \frac{1}{3}d\Theta\right) \wedge \mathbf{u} = 0$$

i donat que $g(\mathbf{u}, \mathcal{F}_{\mathbf{u}}\mathbf{a}) = 0$, la condició d'acceleració Fermi-Walker propagada al llarg de la direcció del camp \mathbf{u} és equivalent a la condició d'expansió homogènia. Tenim demostrat doncs el resultat que anunciaven, el qual podem resumir a la següent proposició:

Proposició 8 *Tot camp conforme Killing temporal integrable té expansió homogènia si, i sols si, té acceleració Fermi-Walker propagada al llarg de la direcció del camp.*

Per altra banda, la propietat cinemàtica d'expansió homogènia per a un camp, també es pot relacionar amb el tensor impuls-energia utilitzant les identitats de Ricci contragudes. Aquestes, per a un camp temporal unitari qualsevol, es poden expressar com

$$i(\mathbf{u})\mathcal{R}ic(g) = -\frac{2}{3}d\Theta + \left[\frac{\Theta^2}{3} + \frac{1}{3}i(\mathbf{u})d\Theta + \delta\mathbf{a} \right] \mathbf{u} + i(\mathbf{a})(\Omega - \sigma) - \delta\Omega - \delta\sigma$$

on δ és la codiferencial exterior ($\delta\mathbf{a} = -\nabla_\nu \mathbf{a}^\nu$ i $(\delta\Omega)_\mu = -\nabla_\nu \Omega_\mu^\nu$). Aleshores, per al cas d'un camp temporal amb distorsió i vorticitat nul·les, resulta que aquestes identitats estan indicant-nos que el fet de tindre expansió homogènia és equivalent a que el camp \mathbf{u} és un autovector del tensor de Ricci. Per tant tenim el següent resultat:

Lema 2 *Tot camp temporal integrable i amb distorsió nul·la és propi del tensor de Ricci si, i sols si, té expansió homogènia.*

Si adaptem aquests resultats als camps conformes Killing temporals podem escriure les següents equivalències, les quals també es verificaran per al cas particular en què el camp és radial,

Proposició 9 *Per a un camp conforme Killing temporal i integrable, les següents propietats són equivalents:*

- 1) *El camp té expansió homogènia.*
- 2) *La seua acceleració és Fermi-Walker propagada al llarg de la direcció del camp.*
- 3) *El camp és un vector propi del tensor de Ricci.*

Reprenent de nou l'acceleració del camp, resulta igualment interessant adonar-se que aquesta no sols es pot relacionar amb l'expansió del camp com hem vist a la proposició anterior, sinó que a banda existeix altre tipus de relació amb la curvatura de les seccions ortogonals al camp, així com amb el tensor impuls-energia. Com veurem també més endavant, les superfícies ortogonals al conforme Killing radial geodèsic dels espais-temps de Robertson-Walker són 3-espais de curvatura seccional constant. Aleshores podem pensar en l'existència o no d'algun tipus de relació similar a la trobada per al cas de l'expansió.

En primer lloc, analitzant el tensor impuls-energia corresponent a una mètrica conformement plana i la seua descomposició respecte d'un camp vectorial temporal \mathbf{u} que defineix una *sincronització umbilical* (és a dir, una foliació de 3-espais, la curvatura extrínseca dels quals és proporcional a la mètrica induïda). Aquesta sincronització serà de curvatura constant si i sols si el tensor de Ricci de la mètrica induïda $\tilde{\gamma}$ té part sense traça igual a zero (és a dir, $\mathcal{R}ic(\tilde{\gamma}) \propto \tilde{\gamma}$). Aleshores, les relacions de Gauss-Codazzi per aquest espai-temps conformement pla i per aquest \mathbf{u} , el qual és integrable i sense distorsió, impliquen que la projecció ortogonal a \mathbf{u} de $\mathcal{R}ic(g)$ és també proporcional a $\tilde{\gamma}$, és a dir, que el tensor de pressions anisotròpiques és nul.

Paral·lelament, tornant a les identitats de Ricci per a un camp temporal qualsevol, tenim que la contracció d'aquestes amb el propi \mathbf{u} permet escriure-les com

$$i(\mathbf{u})i'(\mathbf{u})\mathcal{R}iem(g) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - \Omega^2 - \sigma^2 - \frac{2}{3}\Theta\sigma - \frac{1}{3}\left[i(\mathbf{u})d\Theta + \frac{\Theta^2}{3}\right]\gamma + \\ + (\nabla\mathbf{a})_{\perp} - (i(\mathbf{u})\nabla\sigma)_{\perp}$$

on $i'()$ indica la contracció amb el tercer índex, $(\Omega^2)_{\mu\nu} = \Omega_{\mu}^{\lambda}\Omega_{\lambda\nu}$ i anàlogament per a σ^2 . Aleshores, per al cas d'un camp integrable i sense distorsió, la part sense traça de l'equació anterior es redueix a

$$E - \frac{1}{2}\Pi = \mathcal{T}\left(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + (\nabla\mathbf{a})_{\perp}\right)$$

essent $E = i(\mathbf{u})i'(\mathbf{u})W$ la part elèctrica del tensor de Weyl, Π el tensor de pressions anisotròpiques i \mathcal{T} representant la part sense traça del tensor corresponent. Llavors, en un espai-temps conformement pla ($E = 0$) tindrem que el tensor Π és nul si i sols si l'acceleració verifica que

$$\mathcal{T}\left(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + (\nabla\mathbf{a})_{\perp}\right) = 0$$

o equivalentment que l'acceleració és un vector propi de $(\nabla\mathbf{a})_{\perp}$ tal i com concloem a la següent proposició.

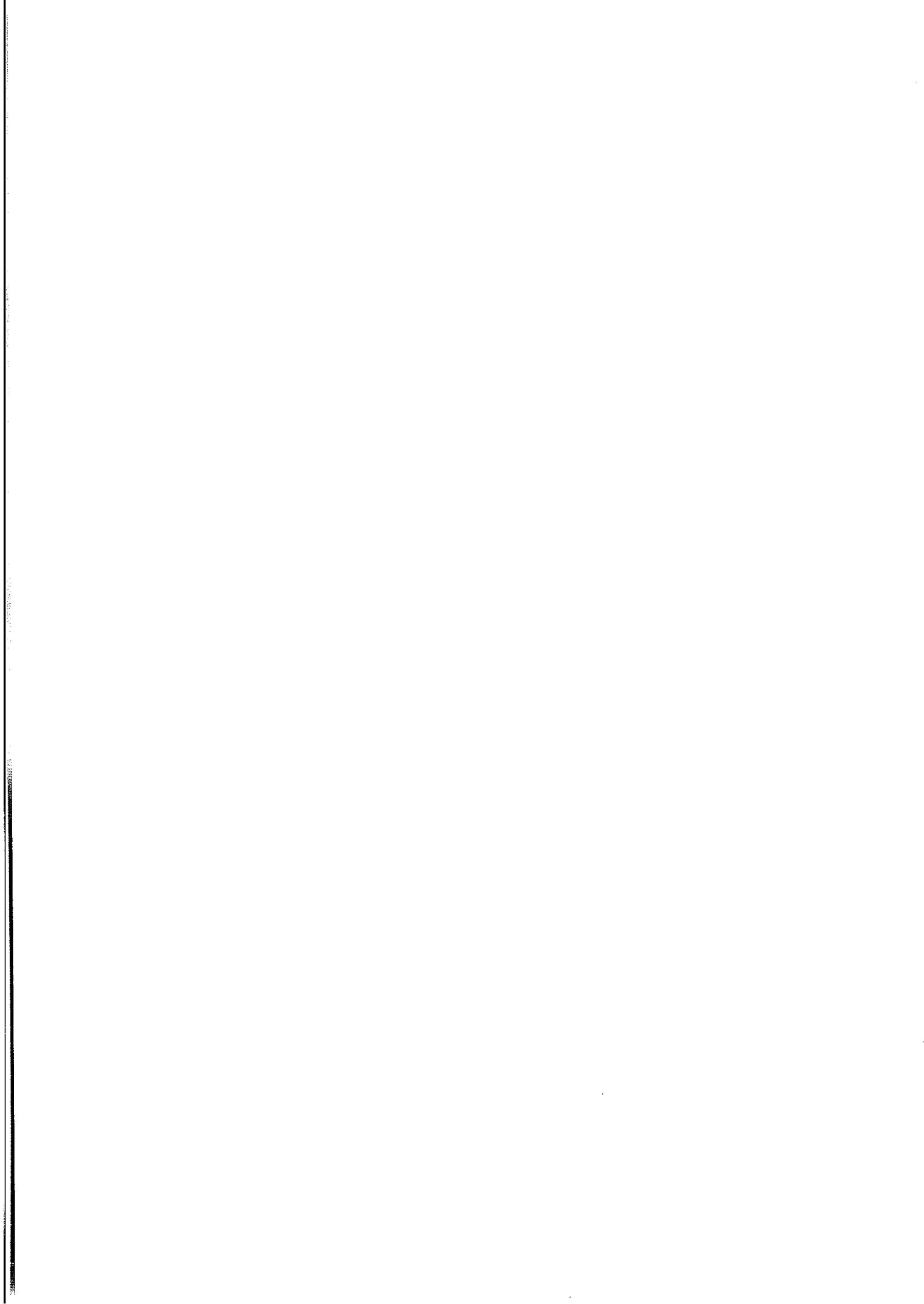
Proposició 10 *En un espai-temps conformement pla, per a un camp temporal integrable i sense distorsió, les següents propietats són equivalents:*

- 1) *Les superfícies ortogonals al camp són de curvatura constant.*
- 2) *La seua acceleració és un autovector de la projecció ortogonal del gradient de l'acceleració amb valor propi donat per*

$$\frac{1}{3} \left(\text{tr} \left((\nabla \mathbf{a})_{\perp} \right) - 2g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \right)$$

- 3) *El tensor de pressions anisotròpiques és nul.*

A aquestes dues últimes proposicions relacionem el tensor impuls-energia associat a un espai-temps conformement pla amb les propietats cinemàtiques corresponents a un observador \mathbf{u} . De fet, la primera de les condicions de cadascuna d'aquestes proposicions (camp conforme Killing integrable amb expansió homogènia i superfícies ortogonals de curvatura constant) es donen conjuntament per als espais-temps de Robertson-Walker. Com és conegut, el contingut energètic d'aquest espai-temps és de fluid perfecte. En general, es pot veure que relativament a un observador \mathbf{u} associat a un camp conforme Killing radial, el contingut energètic corresponent a un espai-temps conformement pla sempre es pot descomposar en suma d'un fluid perfecte de quadrivelocitat \mathbf{u} i altra component que s'anul·la quan l'expansió és homogènia.



Capítol 2

Obtenció de factors de conformitat

Al capítol anterior hem vist que els camps conformes Killing són els mateixos per a tota una classe de conformitat i en particular per a la classe dels espais-temps conformement plans. A més a més, les propietats cinemàtiques associades a camps temporals unitaris també es troben relacionades pel factor de conformitat que lliga dos espais-temps qualsevols. Més concretament, hem estudiat les propietats cinemàtiques associades a un camp conforme Killing radial temporal en funció del factor de conformitat de l'espai-temps conformement pla considerat obtenint que la distorsió i la vorticitat són nul·les en qualsevol espai-temps per ser aquesta propietat invariant sota conformitats, mentre que l'acceleració i l'expansió del camp eren clarament dependents del factor de conformitat. De manera que, per exemple, un camp serà geodèsic solament en aquells espais-temps, el factor de conformitat dels quals satisfi una certa equació diferencial donada per l'expressió (1.43) de l'acceleració; un camp tindrà expansió nul·la si el factor de conformitat verifica que l'expressió (1.42) és igual a zero. Però també podem veure-ho com una manera d'obtenir diferents factors de conformitat, i per tant diferents espais-temps, imposant condicions sobre aquestes propietats cinemàtiques. De fet, com ja apuntàvem al capítol anterior, la condició d'acceleració nul·la sempre pot ser considerada

donat que el camp és conformement geodèsic i obtenir així el factor de conformitat de l'espai-temps conformement pla on el camp és geodèsic, essent aquest el corresponent als espais-temps de Robertson-Walker com veurem a continuació. Podem aprofitar aquesta idea imposant altres condicions cinemàtiques sobre el camp per trobar altres espais-temps conformement plans.

En primer lloc, recordem que el moviment conforme i geodèsic dels universos de Robertson-Walker té expansió homogènia, és a dir, la seua expansió solament varia en la direcció del camp ($\mathbf{u} \wedge d\Theta = 0$). Aleshores, una manera de generalitzar el resultat anterior és considerar els espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing radial temporal amb expansió homogènia i no necessàriament geodèsic.

A continuació, tenint en compte que el camp conforme i geodèsic de Robertson-Walker també verifica que les seccions espacials ortogonals a ell són 3-espais de curvatura constant, estudiem una altra via de generalització que correspon al cas d'espais-temps conformement plans admetent un camp conforme Killing radial amb seccions espacials de curvatura constant, no necessàriament temporal i no necessàriament geodèsic.

2.1 Les mètriques de Robertson-Walker en coordenades conformement planes

a) En primer lloc anem a veure, doncs, quins són els espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing radial temporal ξ (1.11) geodèsic. Per la forma de l'acceleració (1.43), aquests espais-temps tindran per factor de conformitat F^2 aquell que verifiqui les equacions:

$$A = 0 \quad \text{i} \quad F_{,j} = 0 \quad j = \theta, \varphi.$$

Per tant la mètrica té necessàriament simetria esfèrica, donat que la funció F depén únicament de t i de r . La integració de l'equació en derivades parcials $A = 0$,

$$\alpha F' + \beta \dot{F} + 2arF = 0 \quad (2.1)$$

on α i β estan donades per (1.10), ens dona la forma general d'aquest F de la següent manera

$$F(t, r) = \begin{cases} f(s) & \text{si } a = 0 \\ \frac{f(s)}{2at + b} & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

on f és una funció arbitrària del seu argument $s(t, r)$ donat per (1.27), és a dir, de

$$s(t, r) = \begin{cases} b(t^2 - r^2) + 2ct & \text{if } a = 0 \\ \frac{a(t^2 - r^2) - c}{2at + b} & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

Per identificar aquests espais-temps conformement plans, podem comparar les expressions obtingudes (2.1) i (2.2) amb aquelles que varen ser presentades per Infeld i Schild al seu treball sobre *Cosmologia cinemàtica* [1]. En aquest treball, els autors trobaren el factor de conformitat dels espais-temps conformement plans i amb simetria esfèrica que satisfien el postulat d'homogeneïtat espacial. És a dir, obtingueren localment una expressió conformement plana de les mètriques de Robertson-Walker. La nostra equació (2.1) és equivalent a l'equació diferencial (A3) analitzada per Infeld i Schild a l'Apèndix d'eixe article. Per tant, la nostra expressió (2.2) del factor de conformitat unifica els quatre casos analitzats per Infeld i Schild a l'esmentat Apèndix. A més a més, notem que pot ser simplificada si tenim en compte l'expressió (1.33) del mòdul del camp en la mètrica plana, P , al Capítol 1, concloent llavors el següent resultat:

Proposició 11 *Els espais-temps de Robertson-Walker són els espais-temps conformement plans que admeten un camp ξ conforme Killing radial temporal geodèsic; i la seua mètrica s'escriu com,*

$$g = \frac{h^2(s)}{P} \eta \quad (2.3)$$

amb $P = -\eta(\xi, \xi)$ donat per (1.33), h una funció arbitrària del potencial s donat per (1.27) i η la mètrica plana.

Cal destacar les principals diferències entre l'anàlisi realitzat per Infeld i Schild al seu treball i el presentat per nosaltres en aquest capítol. El procediment seguit per Infeld i Schild es basa en les isometries admeses per un espai-temps conformement pla amb simetria esfèrica i amb la condició adicional de homogeneïtat espacial. Tanmateix, el nostre treball es fonamenta únicament en condicions cinemàtiques sobre un camp conforme Killing radial sense imposar cap simetria adicional. De fet, la simetria esfèrica i la homogeneïtat espacial apareixen com a conseqüència del caràcter geodèsic del camp conforme. A més a més, nosaltres no sols hem trobat la forma conformement plana dels espais-temps de Robertson-Walker, sinó que també la *Proposició 11* proporciona una nova caracterització d'aquests mitjançant la cinemàtica de l'observador cosmològic, i suggereix que el nostre procediment pot ser generalitzat per obtenir altres factors de conformitat i caracteritzar cinemàticament els corresponents espais-temps conformement plans, presentant d'aquesta manera certes avantatges respecte del mètode d'Infeld i Schild. Més endavant presentem algunes d'aquestes generalitzacions.

Anem a veure a continuació com podem recuperar la forma més usual de la mètrica de Robertson-Walker escrita en coordenades comòbils a partir de la forma conformement plana mitjançant el corresponent canvi de coordenades.

b) Una manera més directa de veure que realment els espais-temps trobats corresponen als de Robertson-Walker és trobar la transformació de coordenades que ens passa de les coordenades conformement planes a les coordenades comòbils, més usuals en Cosmologia. Per aquestes coordenades comòbils, la mètrica de Robertson-Walker s'escriu com

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \frac{R^2(\tau)}{(1 + (k/4)\rho^2)^2} \left[d\rho \otimes d\rho + \rho^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \right] \quad (2.4)$$

essent $k = -1, 0, +1$. Aquesta forma pot ser recuperada realitzant la següent transformació de coordenades. En primer lloc, el temps propi, τ , serà una funció de t i r obtinguda per integració respecte de la funció s (1.27) segons la següent expressió:

$$\tau(t, r) = \frac{1}{2} \int \frac{h(s)}{S(s)} ds, \quad (2.5)$$

on la funció $S(s)$ es defineix com

$$S(s) = \begin{cases} bs + c^2 & \text{if } a = 0 \\ as^2 + bs + c & \text{if } a \neq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

de manera que siga una coordenada adaptada al camp conforme Killing radial geodèsic. Com veiem aquesta nova coordenada temporal és funció únicament del potencial del camp. D'altra banda, la nova coordenada radial ρ (ortogonal a τ o, equivalentment, a s) és també funció d'una única variable ω (1.28) i la seua expressió depén del valor de la quantitat $\Delta = b^2 - 4ac$ associada al camp (1.11) resultant:

$$\rho(t, r) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{si } \Delta = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} (\omega + \sqrt{\omega^2 - \Delta}) & \text{si } \Delta \neq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Com podem veure, aquesta coordenada radial és independent de la funció $h(s)$ que apareix al factor de conformitat i per tant, té la mateixa forma en qualsevol model cosmològic que considerem. Tanmateix, el temps cosmològic τ estarà determinat quan una especificació particular, i aleshores dependent del model, de $h(s)$ siga elegida. Aquesta elecció es pot fer, per exemple, imposant una relació constant de proporcionalitat entre la pressió i la densitat d'energia una vegada tenim integrades de manera analítica les equacions d'Einstein en coordenades conformement planes.

Aquest canvi de coordenades ens permet escriure la mètrica conformement plana de la proposició anterior en la forma (2.4) concloent de manera directa que aquests espais-temps són els de Robertson-Walker. Aleshores el factor d'escala $R(\tau)$ es relaciona amb l'únic grau de llibertat de les coordenades conformement planes, és a dir, amb el factor de conformitat, essent aquesta relació la següent:

$$R(\tau) = \begin{cases} h(s) & \text{si } \Delta = 0 \\ \frac{h(s)}{\sqrt{|\Delta|}} & \text{si } \Delta \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

obtinguda al fer el canvi de coordenades (2.5) i (2.7) i considerant s com a funció de τ , $s(\tau)$, a partir de la funció inversa de l'expressió (2.5).

Notem que a l'espai-temps de Minkowski per al cas d'un camp conforme Killing radial de dilatació ($a = c = 0$), en coordenades adaptades a aquest camp (el qual és geodèsic a les regions de temporalitat) la mètrica s'escriu en la forma de Robertson-Walker amb factor d'escala i coordenades temporal (temps propi) i radial donades per

$$R(\tau) = \tau \quad , \quad \tau = \sqrt{t^2 - r^2} \quad i \quad \rho = \frac{2}{r}(t + \sqrt{t^2 - r^2}),$$

recuperant així el model d'univers (pla) introduït per Milne per donar una explicació cinemàtica de la llei de Hubble.

Resulta també interessant ressaltar que per al cas particular dels espais-temps de Robertson-Walker, l'1-forma ξ_* associada al conforme Killing geodèsic és tancada donat que la funció

$$\bar{s}(s) = -\frac{1}{2} \int \frac{h^2(s)}{S(s)} ds$$

amb $S(s)$ donada per (2.6), permet escriure $\xi_* = d\bar{s} = -h(s)d\tau$. En general, per a qualsevol altre espai-temps conformement pla tenim que la funció s és un potencial del camp ξ però la 1-forma associada no té perquè ser tancada.

c) Donat que aquests espais-temps són els de Robertson-Walker, el camp conforme Killing radial temporal geodèsic tindrà seccions espacials ortogonals de curvatura constant i expansió variant sols al llarg de la seua direcció (és a dir, dependrà solament del temps τ de Robertson-Walker). Podem comprovar aquestes dues propietats substituint el factor de conformitat corresponent a les expressions generals obtingudes al *Capítol 1*, tant per a la curvatura de les seccions espacials com per a l'expansió del camp.

En primer lloc, reprenent l'expressió del tensor de curvatura de Riemann de la mètrica induïda $\tilde{\gamma}$ per la de l'espai-temps sobre les seccions espacials, les quals són les superfícies 3-dimensionals $s = \text{constant}$, tenim que és proporcional a $\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\gamma}$ amb factor de proporcionalitat $\frac{K}{2}$ on $K(s)$ és la curvatura seccional donada per,

$$K(s) = -\frac{\Delta}{h^2(s)} \quad (2.9)$$

la qual és, efectivament, constant sobre cada 3-espai. Per tant les seccions espacials són superfícies de curvatura constant. Notem que, a més a més, el

mòdul del camp ξ , $|\xi| = \sqrt{-g(\xi, \xi)} = h(s)$, és constant sobre cadascun dels 3-espais ortogonals. La proposició següent resumeix aquests resultats:

Proposició 12 *Les seccions espacials ortogonals al camp conforme Killing radial temporal geodèsic per als espais-temps de Robertson-Walker són les superfícies $|\xi|$ constant i són espais 3-dimensionals de curvatura constant positiva, negativa o nul·la segons la quantitat Δ siga negativa, positiva o nul·la, respectivament.*

A continuació ens centrarem en les propietats cinemàtiques del camp ξ conforme Killing radial temporal i geodèsic. La condició d'integrabilitat és general per a tots els camps conformes Killing radials pel fet de ser radials, encara que l'inversa no es certa en general, és a dir, no tot camp conforme Killing integrable és necessàriament radial. No obstant això, en el cas de les geometries de Robertson-Walker ambdues condicions són equivalents, donat que el camp és també geodèsic. És a dir, podem substituir la condició de *radial* en la *Proposició 12* per la condició cinemàtica, més general, d'*integrabilitat* (d'admetre superfícies ortogonals).

De fet, per la *Proposició 9*, tenim que tot camp conforme Killing temporal geodèsic i integrable té també expansió homogènia i és propi del tensor de Ricci. Aleshores, per la *Proposició 12*, el tensor de pressions anisotròpiques és nul i en conseqüència aquest moviment està associat amb la 4-velocitat d'un fluid perfecte. Per tant, la mètrica, així considerada, és necessàriament la de Robertson-Walker. Conseqüentment, es pot inferir que el moviment temporal conforme geodèsic i sense vorticitat de l'espai-temps de Robertson-Walker és necessàriament *radial*, és a dir, es pot escriure en la forma reduïda de l'expressió (1.11) si elegim un sistema de coordenades esfèriques apropiat.

Segons això podem donar la següent caracterització:

Proposició 13 *Els espais-temps de Robertson-Walker són els espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing temporal, integrable i geodèsic.*

En quant a l'expansió del camp conforme Killing radial temporal i geodèsic, hem vist que serà homogènia, és a dir, únicament variant al llarg de la direcció del camp. Clarament, de l'expressió (1.42), substituint el factor de conformitat

corresponent als espais-temps de Robertson-Walker, tenim que l'expansió és una funció solament de s ($\tau = \tau(s)$),

$$\Theta(s) = \frac{6S}{h^2} \frac{dh}{ds} \quad (2.10)$$

on $S(s)$ està donada per (2.6), que depèn de cada model concret en l'elecció de la funció $h(s)$.

Uns espais-temps de Robertson-Walker particulars seran aquells per als quals el camp conforme Killing radial temporal i geodèsic tinga expansió nul·la, és a dir, siga un camp de Killing. Segons l'equació anterior (2.10), aquesta condició correspon al fet de considerar $h(s)$ una funció constant (podem agafar-la igual a 1 sense pèrdua de generalitat). En aquest cas la mètrica conformement plana es redueix a

$$g = \frac{1}{P} \eta$$

amb P donada per (1.33), la qual correspon als universos estàtics d'Einstein quan $\Delta = b^2 - 4ac$ és diferent de zero, mentre que el cas $\Delta = 0$ és l'espai-temps de Minkowski en forma conformement plana. Per tant tenim el següent resultat:

Proposició 14 *Els espais-temps conformement plans que admeten un camp de Killing radial temporal i geodèsic ξ (1.11) són l'espai-temps de Minkowski si $\Delta = 0$, l'univers estàtic d'Einstein si $\Delta < 0$ i l'univers obert d'Einstein si $\Delta > 0$. La mètrica corresponent s'escriu com $g = \frac{1}{P} \eta$, amb P donat per (1.33) i essent $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Segons aquesta proposició i la *Proposició 11*, els espais-temps de Robertson-Walker són conformes als universos d'Einstein amb factor de conformitat $h^2(s)$.

Es podrien considerar també altres casos particulars d'espais-temps de Robertson-Walker com per exemple el cas d'aquells per als quals el camp conforme Killing radial té expansió constant no nul·la. En eixe cas, la funció $h(s)$ del factor de conformitat hauria de verificar l'equació (2.10) amb $\Theta \neq 0$ constant.

d) Hem estudiat els espais-temps de Robertson-Walker en coordenades conformement planes trobant el factor de conformitat amb un grau de llibertat que dependrà de les condicions energètiques que, en cada cas, imposem a l'espai-temps. Dins d'aquests tenim, no sols els espais-temps propiament anomenats de Robertson-Walker, sinó espais-temps més particulars com el de Minkowski, els estàtics d'Einstein i els de De Sitter. Els dos primers casos especials són fàcilment recuperables imposant sobre l'observador que tinga expansió nul·la com hem vist a l'apartat anterior. Per altra banda, els espais-temps de De Sitter es caracteritzen per no tenir un únic camp privilegiat que siga conforme Killing radial i tinga acceleració nul·la, aleshores podrem adaptar coordenades a diferents camps conformes Killing radials geodèsics per tenir la mètrica de curvatura constant escrita en forma de Robertson-Walker. Però, no obtindrem la forma de Robertson-Walker per a qualsevol camp conforme Killing radial geodèsic en un espai-temps de De Sitter qualsevol, n'hi han restriccions relacionades amb el signe de la curvatura de l'espai-temps de De Sitter i amb la curvatura seccional de les superfícies ortogonals al camp considerat. Per veure aquestes restriccions anem a fer primerament un estudi general de la curvatura de Riemann d'espai-temps de la mètrica de Robertson-Walker en coordenades conformement planes i a continuació la reducció als espais-temps de curvatura constant, la qual ens donarà al mateix temps el factor de conformitat d'aquests en relació a la mètrica plana, i les restriccions abans esmentades.

Com els espais-temps de Robertson-Walker són mètriques conformement planes, pel desenvolupament realitzat anteriorment, tenim que la seua curvatura de Riemann és,

$$\mathcal{Riem} = \Sigma \wedge g \quad \text{amb} \quad \Sigma = F \nabla d\left(\frac{1}{F}\right) - \frac{1}{2}g(d \ln |F|, d \ln |F|)g,$$

on $\nabla \eta = 0$ i $F^2 = \frac{h^2(s)}{P}$ és el factor de conformitat de les mètriques de Robertson-Walker segons hem vist a la *Proposició 11*. Així resulta que la curvatura depèn de la funció Σ , de manera que per recuperar els espais-temps de De Sitter només caldrà fer Σ proporcional a la mètrica g (o equivalentment proporcional a η). Aquesta reducció es verifica per a les funcions $h(s)$

particulars que són de la forma

$$h(s) = \frac{\sqrt{|S(s)|}}{ps + q} \quad (2.11)$$

on $S(s)$ és la funció donada per (2.6) essent s el potencial del camp geodèsic i p i q dues constants arbitràries. Amb aquesta $h(s)$ es recupera la forma coneguda del factor de conformitat dels espais-temps de curvatura constant doncs substituint h i P pels seus valors resulta que el factor de conformitat que obtenim és F^2 amb F reduït a:

$$F = \begin{cases} \frac{1}{pb(t^2 - r^2) + 2pct + q} & \text{si } a = 0 \\ \frac{\sqrt{|a|}}{pa(r^2 - t^2) + 2qat + qb - pc} & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

on a , b i c són les constants associades al camp conforme Killing radial temporal geodèsic. Aleshores tenim que la curvatura constant d'aquests espais-temps és 2Ψ amb

$$\Psi = \begin{cases} 2p(pc^2 - qb) & \text{si } a = 0 \\ 2\epsilon(p^2c - pqb + q^2a) & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

i $\epsilon = \text{signe}(a)$. El cas $\Psi = 0$ ens portarà de nou als factors de conformitat interns de Minkowski. Com podem veure, el signe de la curvatura depèn de les constants associades al camp, així com de les constants p i q que apareixen al factor de conformitat. No obstant això, donat un camp conforme Killing radial geodèsic ξ , la qual cosa ens determina ja el valor de les constants a , b i c , no sempre podem trobar constants p i q per obtindre una curvatura Ψ amb signe qualsevol encara que aparentment això sembla possible. Si considerem Ψ com una forma quadràtica per a les variables p i q amb coeficients les constants associades al camp i terme independent la mateixa constant Ψ , el seu estudi ens donarà la relació entre el signe d'aquesta Ψ i les constants a , b i c .

Comencem estudiant el cas més senzill, és a dir, el cas de curvatura nul·la (espai-temps de Minkowski). Com ja sabem, a Minkowski els conformes Killing radials temporals són aquells que ténen seccions ortogonals de curvatura

seccional negativa o nul·la (és a dir, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$) com hem vist al Capítol 1. Efectivament, les formes quadràtiques a estudiar es redueixen a

$$\begin{aligned} c^2 p - bq &= 0 && \text{quan } a = 0 \\ cp^2 + bpq + aq^2 &= 0 && \text{quan } a \neq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

La primera sempre té solucions reals de p i q per a qualsevol b i c i la segona solament tindrà solucions reals de p i q quan el determinant de la matriu L associada a la forma quadràtica siga negatiu o nul, ja que aleshores la forma quadràtica representarà rectes reals al pla $\{p, q\}$; mentre que quan $\det(L)$ és positiu les rectes serien imaginàries. En aquest cas, la matriu resulta ser

$$L = \begin{pmatrix} c & b/2 \\ b/2 & a \end{pmatrix},$$

la qual té per determinant $\det(L) = ac - b^2/4 = -\Delta/4 \leq 0$. Per tant, a l'espai-temps de Minkowski, el conforme Killing radial ξ temporal i geodèsic ha de tenir $\Delta \geq 0$, que en la forma de Robertson-Walker s'interpreta com curvatura de les seccions ortogonals negativa o nul·la.

El cas de curvatura d'espai-temps constant no nul·la, és a dir, $\Psi \neq 0$ ens porta a l'estudi de les formes quadràtiques

$$\begin{aligned} \Psi &= 2p(pc^2 - qb) && \text{quan } a = 0 \\ \Psi &= 2\epsilon(p^2c + pqb + q^2a) && \text{quan } a \neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

les quals tenen associades les matrius

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2c^2 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad L_2 = \epsilon \begin{pmatrix} 2c & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix}$$

amb determinants, $\det(L_1) = -b^2 = -\Delta \leq 0$ i $\det(L_2) = -\Delta$ respectivament. Aleshores, si el determinant de les matrius és nul ($\Delta = 0$), les formes quadràtiques són dues rectes paral·leles reals si $\Psi > 0$ i imaginàries si $\Psi < 0$; si el determinant és negatiu ($\Delta > 0$), representen hipèrboles per a qualsevol valor de Ψ ; i si el determinant és positiu ($\Delta < 0$) les formes quadràtiques són

el·lipses reals si $\Psi > 0$ i imaginàries si $\Psi < 0$. Per tant, l'existència de valors reals de p i q verificant les equacions (2.14) depèn en cada cas del signe de Ψ (curvatura d'espai-temps) i del signe de Δ (del signe de la curvatura de les seccions ortogonals), de manera que si $\Psi > 0$ existeixen p i q reals per a qualsevol valor possible de Δ (positiu, negatiu o nul), mentre que si $\Psi < 0$ aquestes equacions solament tindran solucions reals per a p i q si Δ és positiu.

Conseqüentment podem concloure que a l'espai-temps de De Sitter (curvatura constant positiva) podem adaptar coordenades a diferents conformes Killing radials temporals geodèsics amb seccions espacials ortogonals de curvatura positiva, negativa o nul·la. Mentre que per a l'espai-temps d'anti-De Sitter només podem adaptar coordenades a un camp conforme Killing radial temporal geodèsic que tinga seccions ortogonals de curvatura negativa. I, finalment, a l'espai-temps de Minkowski, les coordenades podran adaptar-se a conformes Killing radials temporals geodèsics que tinguen seccions espacials ortogonals de curvatura negativa o nul·la. En cadascun d'aquests casos el factor d'expansió $R(\tau)$, on τ és la coordenada temporal adaptada al camp conforme, s'obté a partir de (2.8) considerant $h(s)$ la donada per (2.11) i $s(\tau)$ pel canvi invers de (2.5).

e) Una de les caracteritzacions més usuals dels espais-temps de Robertson-Walker està directament relacionada amb el seu contingut material, resultant que són aquells espais-temps de fluid perfecte, la velocitat \mathbf{u} del qual és integrable, geodèsica i sense distorsió. Aquesta caracterització en termes energètics de les mètriques de Robertson-Walker ens permet afirmar que el tensor impuls-energia associat a aquests espais-temps es podrà escriure com

$$T = \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p_0 (g + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$$

essent ρ_0 i p_0 la densitat d'energia i la pressió mesurades per l'observador \mathbf{u} respectivament. En coordenades conformement planes, donat el factor de conformitat (2.3) d'aquests espais-temps, la densitat i la pressió es poden escriure com

$$\rho_0 = \frac{3}{h^2} \left[-\Delta + \left(\frac{2Sh'}{h} \right)^2 \right] = \frac{3}{h^2} (Q^2 - \Delta) \quad (2.15)$$

$$p_0 = -\frac{\rho_0}{3} - \frac{8S}{h^2} \left(\frac{Sh'}{h} \right)' = -\frac{\rho_0}{3} - \frac{4S}{h^2} Q' \quad (2.16)$$

on $Q = \frac{2Sh'}{h}$ i amb S donat per (2.6). Aleshores per a cada contingut material específic (per a cada model), la densitat i la pressió corresponents ens determinaran la funció lliure $h(s)$ del factor de conformitat. Però, la primera restricció general a la qual està sotmesa la funció $h(s)$, en qualsevol model, és la *condició d'energia de Plebański* si volem un espai-temps que siga físicament interpretable. Aquesta condició d'energia bàsicament imposa que la densitat d'energia ha de ser positiva o nul·la i que el mòdul de la pressió ha de ser menor o igual que la densitat, és a dir,

$$\rho_0 \geq 0 \quad , \quad -\rho_0 \leq p_0 \leq \rho_0,$$

la qual cosa es tradueix en termes de $h(s)$ i de la seua primera derivada en las següents desigualtats:

$$Q^2 \geq \Delta \quad \text{i} \quad 2(\Delta - Q^2) \leq 2SQ' \leq Q^2 - \Delta.$$

Notem que en el cas de $\Delta \leq 0$ la primera de les desigualtats no imposa cap restricció sobre la funció $h(s)$ però sí que n'hi haurà que tindre en compte la segona de les desigualtats; mentre que quan $\Delta > 0$ ambdues relacions han de ser considerades a l'hora de fer un model particular. També podem veure que el cas $Q^2 = \Delta$ solament és possible si $\Delta \geq 0$ i per a qualsevol dels dos ens porta a un espai-temps de Robertson-Walker amb pressió i densitat nul·les, és a dir, l'espai-temps de Minkowski, pel que tornariem a recuperar els factors de conformitat interns de la mètrica plana. Però també podem trobar altres universos de Robertson-Walker amb diferents relacions de la pressió i la densitat. Per exemple, si hi ha una relació de barotropia del tipus $p_0 = \kappa\rho_0$, amb κ una constant, aleshores, segons l'expressió (2.16), el factor de conformitat serà de la forma (2.3) amb la funció $h(s)$ verificant l'equació

$$4SQ' + 3\left(\kappa + \frac{1}{3}\right)Q^2 - 3\left(\kappa + \frac{1}{3}\right)\Delta = 0,$$

la solució de la qual depén del signe de la curvatura de les seccions ortogonals

al camp. En particular, si la pressió és nul·la ($\kappa = 0$), la solució s'escriu:

$$h(s) = \begin{cases} = \frac{1}{S}(k_1 s + k_2)^2 & \text{si } \Delta = 0 \\ \frac{[k_1 \sqrt{P} + k_2(2at + b)(2as + b + \sqrt{\Delta})]^2}{\sqrt{P}(2at + b)(2as + b + \sqrt{\Delta})} & \text{si } \Delta > 0 \\ \frac{[k_1(2\sqrt{aS} - (2as + b)) + k_2]^2}{(2\sqrt{aS} - (2as + b))\sqrt{aS}} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

on k_1 i k_2 són constants arbitràries d'integració en cada cas. Aleshores la densitat d'aquests espais-temps no necessàriament serà nul·la sinó que dependrà de la funció $h(s)$ corresponent segons l'expressió (2.15) de la següent manera:

$$\rho_0 = \begin{cases} = \frac{12S^2}{(k_1 s + k_2)^6} (2k_1 S - (k_1 s + k_2)(2as + b))^2 & \text{si } \Delta = 0 \\ \frac{-6k_1 k_2 \Delta P \sqrt{P} (2at + b)^2 (2as + b + \sqrt{\Delta})^3}{[k_1 \sqrt{P} + k_2(2at + b)(2as + b + \sqrt{\Delta})]^6} & \text{si } \Delta > 0 \\ \frac{-12aS\sqrt{aS}(\Delta k_1^2 - k_2^2)(2\sqrt{aS} - (2as + b))^3}{[k_1(2\sqrt{aS} - (2as + b)) + k_2]^6} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Altre cas particular per al qual també es pot obtenir fàcilment el factor de conformitat a partir de la relació anterior és el cas en què la densitat és -3 vegades la pressió, $\rho_0 = -3p_0$, on sols caldrà fer $\kappa = -\frac{1}{3}$.

2.2 Espais-temps conformement plans amb simetria esfèrica

Un espai-temps té simetria esfèrica si admet el grup de rotacions com a subgrup del seu grup de moviments actuant transitivament sobre òrbites bidimensionals de curvatura constant positiva, és a dir, quan admet com a vectors de Killing els generadors de les rotacions. Això permet expressar les mètriques amb simetria esfèrica com:

$$g = A(t, r)dt \otimes dt + B(t, r)dr \otimes dr + 2D(t, r)dt \otimes dr + C(t, r)d\Omega^2$$

on $d\Omega^2 = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$ i A, B, C i D funcions arbitràries verificant la relació $AB - D^2 < 0$. A més a més, en aquesta forma general sempre podem agafar $D = 0$ sense pèrdua de generalitat.

Segons els treballs de Takeno [3] sabem que, a més a més, existeixen altres tipus de coordenades que també posen de manifest la simetria esfèrica de l'espai-temps. Entre aquestes podem destacar les *coordenades isotròpiques*, per a les quals la mètrica es redueix a:

$$g = A(t, r) dt \otimes dt + B(t, r) [dr \otimes dr + r^2 d\Omega^2],$$

és a dir, fer $C = Br^2$ i $D = 0$ a la forma general. Aquest tipus de coordenades resulta especialment interessant perquè, com es prova també al treball de Takeno, per a qualsevol espai-temps amb simetria esfèrica sempre existeix almenys un sistema de coordenades isotròpiques, la qual cosa utilitzarem a continuació.

Takeno considerà les restriccions sobre les funcions arbitràries A, B i C de la forma general (amb $D = 0$) que imposava el fet que l'espai-temps fóra a més a més conformement pla. En coordenades isotròpiques, la condició tensor de Weyl igual a zero, porta a la restricció adicional següent sobre les funcions A i B :

$$p' + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{r}p = 0, \quad (2.17)$$

on $p = \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} = \left(\ln \frac{A}{B}\right)'$ i on les primes estan denotant derivades de les funcions respecte la coordenada radial r . Takeno va resoldre aquesta equació obtenint com a solució general la forma

$$p = \frac{4r}{r^2 + 4\bar{k}(t)}$$

amb $\bar{k}(t)$ una funció arbitrària procedent de la integració. Desfent el canvi s'obté que per a un espai-temps conformement pla amb simetria esfèrica existeixen coordenades (isotròpiques) en les quals la mètrica s'escriu com

$$g = \tilde{A}(t, r) \left\{ -dt \otimes dt + \frac{B}{\tilde{A}} (dr \otimes dr + r^2 d\Omega^2) \right\}$$

on el quocient entre les funcions \tilde{A} i B està donat per l'integració de p resultant

$$\frac{B}{\tilde{A}} = \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{k(t)}{4}r^2\right)^2}$$

amb $a(t)$ i $k(t)$ funcions arbitràries del temps procedents de la integració. Si considerem la mètrica que tenim entre les claus, per aquesta el camp vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ és un conforme Killing geodèsic amb seccions ortogonals de curvatura constant per a cada instant t . Per tant, clarament la mètrica entre claus correspon a la mètrica de Robertson-Walker, la qual és conformement plana i amb factor de conformitat dependent únicament de les coordenades t i r , com varen demostrar Infeld i Schild en 1945. Llavors, tota mètrica conformement plana i amb simetria esfèrica es pot escriure com proporcional a la mètrica de Robertson-Walker amb factor de conformitat $\tilde{A}(t, r)$ i consegüentment tenim demostrat el següent resultat:

Proposició 15 *Donat un espai-temps conformement pla i amb simetria esfèrica, sempre existeixen coordenades conformement planes en les quals el factor de conformitat sols depèn de la coordenada temporal t i de la coordenada radial r i per tant la mètrica resultarà que es pot escriure localment com:*

$$g = F^2(t, r)\eta$$

essent η la mètrica plana en coordenades inercials.

2.3 Conformes Killing radials temporals amb expansió homogènia

a) Anem ara a estudiar el factor de conformitat dels espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing radial temporal amb expansió variant al llarg de la direcció del camp. En virtut de la *Proposició 9* del *Capítol 1*, aquesta condició sobre l'expansió es pot interpretar de diferents, però equivalents, maneres en funció de l'acceleració i la seua derivada Fermi-Walker al llarg del camp o en funció del tensor de Ricci de la mètrica (i consegüentment del tensor impuls-energia associat a la mètrica). És a dir, en

aquests espai-temps, el camp tindrà expansió homogènia, acceleració Fermi-Walker propagada al llarg de la direcció del camp i serà un vector propi del tensor de Ricci, per la qual cosa el tensor impuls-energia d'aquests espais-temps podrà ser expressat en forma diagonal en una base ortogonal adaptada al moviment que, en general, no coincidirà amb aquella que expressa la mètrica en la seua forma conformement plana.

Considerant, per exemple, l'expressió (1.42) de l'expansió, la restricció $u \wedge d\Theta = 0$ (expansió homogènia) ens porta al següent sistema d'equacions diferencials per al factor de conformitat:

$$\left[\beta G' + \alpha \dot{G} - \frac{\beta}{r} G \right]_{,j} = 0 \quad j = \theta, \varphi \quad (2.18)$$

$$\alpha\beta (\ddot{G} + G'') + (\alpha^2 + \beta^2) \dot{G}' = 0 \quad (2.19)$$

on $G = \frac{1}{P}$, i α i β són les components del camp, donades per (1.10). Aquest sistema es resol mitjançant diferents canvis de variables segons el valor de les constants a , b i c del camp en cada cas, arribant en qualsevol dels casos a una expressió de la solució que es pot escriure conjuntament de la següent manera:

$$G = \sqrt{P} [\mu(s) + \nu(\omega, \theta, \varphi)]$$

essent μ i ν dues funcions arbitràries, i s , ω i P donades respectivament per (1.27), (1.28) i (1.33). Per tant, si denotem per $h(s) = \frac{1}{\mu(s)}$, podem concloure el següent resultat:

Proposició 16 *La mètrica, \tilde{g} , dels espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing radial temporal amb expansió homogènia està donada per:*

$$\tilde{g} = \frac{g}{(1 + h\nu)^2} \quad (2.20)$$

on $g = \frac{h^2(s)}{P} \eta$ és la mètrica de Robertson-Walker donada a la Proposition 2 i ν és una funció arbitrària independent del potencial s del camp.

Per tant, substituint la forma (2.20) de la mètrica en l'expressió (1.42) obtenim l'expansió del camp u en aquests espais-temps, la qual, efectivament, sols depèn del potencial s del camp de la següent manera:

$$\Theta(s) = \frac{6S}{h^2} \frac{dh}{ds}, \quad (2.21)$$

resultant ésser exactament la mateixa que l'expansió del camp conforme Killing radial geodèsic dels espais-temps de Robertson-Walker. De fet, aquests espais-temps es recuperen agafant la funció ν com a constant a l'expressió (2.20) ja que en eixe cas el camp tindrà acceleració nul·la com es pot veure clarament de l'expressió de l'acceleració per aquests camps resultant de substituir la mètrica (2.20) a l'Equació (1.43):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{\mu(s) + \nu(\omega, \theta, \varphi)} \left[\frac{\nu_{,\omega}}{r^2} (-\beta dt + \alpha dr) - \nu_{,\theta} d\theta + \nu_{,\varphi} d\varphi \right] = \\ &= \frac{-1}{\mu(s) + \nu(\omega, \theta, \varphi)} [\nu_{,\omega} d\omega + \nu_{,\theta} d\theta + \nu_{,\varphi} d\varphi] = -\perp d \ln(\mu + \nu) \end{aligned}$$

Però, en general aquesta acceleració serà diferent de zero encara que la seua derivada de Fermi al llarg del camp siga necessàriament nul·la.

Com hem comentat anteriorment, donat que el camp conforme Killing radial temporal u dels espais-temps de la *Proposició 9* és un autovector del tensor de Ricci de la mètrica, tindrem que el tensor impuls-energia associat a l'espai-temps és diagonalitzable (Tipus I). Però, no obstant, escrivint el tensor impuls-energia en una base adaptada al moviment tindrem la nul·litat del fluxe de calor encara que el tensor de pressions anisotròpiques no siga necessàriament nul.

b) A l'any 1945, Infeld i Schild [1] destacaren al seu treball *A new approach to kinematic cosmology* l'interés d'utilitzar coordenades conformement planes en Cosmologia. En aquest treball obtingueren la forma localment conformement plana de les mètriques de Robertson-Walker i analitzaren tots els moviments geodèsics possibles de la matèria en aquests espais-temps. Aquesta idea admet una interpretació equivalent considerant l'existència d'un camp conforme Killing temporal i geodèsic en un espai-temps conformement pla com hem vist anteriorment. A més a més la propietat de geodèsic pot ser

substituïda per altres menys restrictives, com per exemple que el camp tinga expansió homogènia o que les seccions ortogonals a ell siguin de curvatura constant, etc... Això permet estendre la idea d'Infeld i Schild a altres cosmologies conformement planes més generals des d'un punt de vista cinemàtic.

Les coordenades conformement planes s'adapten adequadament a una descripció *euleriana* en Cosmologia perquè, en general, la matèria no segueix les línies associades a la coordenada temporal. Malgrat això pot resultar interessant utilitzar-les com una alternativa a la descripció *lagrangiana*, normalment més usual en Cosmologia.

Aleshores, considerem un espai-temps conformement pla, $g = F^2\eta$, en coordenades esfèriques. En aquestes coordenades, donat que les geodèsiques isòtropes són les mateixes que a l'espai-temps de Minkowski, considerem $\mathbf{k} = \frac{1}{F^2}(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r})$ un camp geodèsic radial nul i afí parametritzat i un observador \mathbf{u} associat a un camp temporal de direccions radials ξ donat en forma reduïda (1.1). El desplaçament espectral z d'un esdeveniment emés a $e \equiv (t, r, \theta, \varphi)$ relatiu a l'observador \mathbf{u} que es troba a l'origen espacial $o \equiv (t = t_0, r = 0)$ està donat per

$$1 + z = \frac{g(\mathbf{k}, \mathbf{u})|_e}{g(\mathbf{k}, \mathbf{u})|_o} = \frac{F_o}{F_e} \sqrt{\frac{1 + v_e}{1 - v_e}} \sqrt{\frac{1 - v_o}{1 + v_o}},$$

de manera anàloga al cas d'espai-temps de Minkowski la velocitat v de l'observador \mathbf{u} relativa a l'observador inercial $\frac{\partial}{\partial t}$ ve donada pel quocient entre la component radial i la component temporal del camp, $v = \frac{\beta}{\alpha}$; avaluant aquesta velocitat als punts d'emissió i d'observació segons el subíndex corresponent.

Aquesta $v(t, r, \theta, \varphi)$ podria ser considerada com una velocitat de recessió per al cas d'una camp conforme Killing radial amb expansió homogènia ja que les corbes integrals del camp representen el camí de la matèria. Aleshores, donat un camp conforme Killing radial temporal ξ , la seua velocitat relativa v respecte l'observador associat a $\frac{\partial}{\partial t}$ resulta de (1.35) i per tant l'expressió (1.37) del redshift es redueix a

$$1 + z = \frac{F_o}{F_e} \sqrt{\frac{1 + v_e}{1 - v_e}} \quad (2.22)$$

donat que $v_o \equiv v(t_0, 0) = 0$ per aquests camps. En aquesta expressió solament necessitem conèixer el valor de la velocitat relativa v_e al punt d'emissió sobre

les corbes integrals de ξ , les quals estan donades per la forma implícita (1.15) representant línies rectes o hipèrboles segons el valor de les constants a , b i c del camp.

El desplaçament espectral z observat per aquest moviment conforme radial amb expansió homogènia quan la mètrica està donada en coordenades conformement planes es pot obtenir fàcilment utilitzant l'expressió general (2.22). Tenint en compte que

$$\frac{P_e}{P_o} = \frac{1 - v_e}{1 + v_o}$$

ja que el desplaçament espectral és nul ($z = 0$) quan el camp ξ és un camp de Killing geodèsic, tenim que el desplaçament espectral en aquest cas és

$$1 + z = \frac{(\mu + \nu)_e}{(\mu + \nu)_o}$$

essent e el punt d'emissió de l'esdeveniment relatiu a l'observador u que es troba a l'origen espacial o .

c) L'expressió (2.21) ens dona l'expansió del camp conforme Killing radial temporal privilegiat als espais-temps conformement plans, la mètrica dels quals és (2.20). Conseqüentment si agafem la funció $h(s)$ com a constant tindrem que l'expansió s'anul·la i per tant el camp serà un camp de Killing. Això ens permet escriure el següent resultat:

Proposició 17 *La mètrica dels espais-temps conformement plans que admeten un camp de Killing radial i temporal es pot escriure com*

$$g = \frac{1}{r^2} f^2(\omega, \theta, \varphi) \eta, \quad (2.23)$$

essent f una funció arbitrària i $\omega(t, r)$ donada per (1.28).

En aquesta simplificació hem tingut en compte que el mòdul del camp donat per P també es pot expressar en funció de ω com $P = r^2(\omega^2 - \Delta)$. De fet, aquest resultat es pot obtenir també, de manera independent, resolvent l'equació corresponent a anul·lar directament l'expansió a l'expressió general (1.42). L'equació resultant en aquest cas,

$$\alpha \dot{F} + \beta F' + \frac{\beta}{r} F = 0, \quad (2.24)$$

és una equació diferencial de primer ordre per al factor de conformitat que condueix exactament a la mateixa solució. Aquesta solució, expressada a la proposició anterior, indica clarament que el camp de Killing és, en general, no geodèsic, per la qual cosa hem obtingut uns espais-temps conformement plans estàtics diferents dels *universos estàtics d'Einstein* els quals es reobtingrien novament anul·lant l'expressió corresponent a l'acceleració.

Alguns casos interessants resulten quan considerem que el factor de conformitat és independent de les coordenades angulars θ i φ , per al qual tenim espais-temps conformement plans estàtics i amb simetria esfèrica, el factor de conformitat dels quals és de la forma

$$F^2 = \frac{f^2(\omega)}{r^2} \quad (2.25)$$

amb f una funció arbitrària solament dependent de ω . En particular recuperariem els universos estàtics d'Einstein fent $f(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 - \Delta}}$ amb K una constant qualsevol, tal i com hem vist anteriorment.

Un altre cas particular apareix quan la funció f és una constant, la qual pot ser agafada igual a 1 sense pèrdua de generalitat, aleshores la mètrica s'escriu com $g = \frac{1}{r^2}\eta$, que correspon a la mètrica de **Bertotti–Robinson**. A més a més, aquesta forma constant de la funció f ens està indicant que no sols el camp ξ serà un camp de Killing per aquesta mètrica sinó que qualsevol altre camp de l'àlgebra dels conformes Killing radials també verificarà que el seu coeficient de conformitat respecte de la mètrica g és nul i per tant que és un camp de Killing. La qual cosa caracteritza la mètrica de Bertotti–Robinson de la següent manera:

Proposició 18 *La solució de Bertotti–Robinson correspon als espais-temps conformement plans i amb simetria esfèrica que admeten l'àlgebra conforme radial com a àlgebra de Killing radial, és a dir, que admeten tots els camps conformes Killing radials com a camps de Killing.*

La mètrica de Bertotti–Robinson és l'única solució conformement plana de les equacions d'Einstein–Maxwell per a un camp electromagnètic regular (necessàriament homogèni). En general, el tensor impuls-energia associat a la mètrica d'un espai-temps conformement pla que admet un camp de Killing

radial i a més amb simetria esfèrica (2.25) s'escriu en coordenades adaptades al camp, que com sabem són les coordenades $s(t, r)$ i $\omega(t, r)$ donades per (1.27) i (1.28) respectivament, de forma diagonal de la següent manera:

$$T = \text{diag}(\rho, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

on, si considerem $\nu(\omega) = 1/f(\omega)$, la densitat d'energia ρ i les pressions \mathcal{A} i \mathcal{B} resulten

$$\rho = (\omega^2 - \Delta)(3\nu'^2 - 2\nu\nu'') - \nu(\nu - 2\omega\nu'),$$

$$\mathcal{A} = \rho + 2(\omega^2 - \Delta)\nu\nu''$$

$$\mathcal{B} = \rho + 2\nu(\nu - \omega\nu').$$

totes depenents únicament de la coordenada radial ω . Evidentment, en el cas de les mètriques de Bertotti-Robinson, donat que la funció ν és constant, tenim que els autovalors corresponents al T són iguals dos a dos i canviats de signe entre ells, com correspon al cas d'un camp electromagnètic regular. Altres tipus de continguts materials (densitat constant, fluid perfecte, etc.) determinaran la funció f del factor de conformitat. Per exemple, el cas de *densitat constant* es tradueix en què la funció ν verifiqui l'equació

$$(\omega^2 - \Delta)\nu'' + \omega\nu' - \nu(1 + \lambda\nu) = 0,$$

amb λ un paràmetre constant. El cas $\lambda = 0$ és equivalent a imposar que el tensor T tinga un autovalor triple, corresponent a la part temporal ($\mathcal{A} = \mathcal{B}$), i un simple, és a dir que el contingut material siga de *fluid perfecte*. La solució en aquest cas permet concloure la següent proposició:

Proposició 19 *La mètrica dels espais-temps conformement plans que admeten un camp de Killing radial temporal (espais-temps estàtics), que tenen simetria esfèrica i a més a més el seu contingut energètic és de fluid perfecte s'escriu com*

$$g = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - \Delta}}{k_1\omega(\omega + \sqrt{\omega^2 - \Delta}) + k_2} \right]^2 \eta \quad (2.26)$$

amb k_1 i k_2 constants arbitràries i ω donada per (1.28).

Substituint aquesta forma de la mètrica en l'expressió del tensor impuls-energia obtindrem la densitat i la pressió corresponents a l'esmentat fluid perfecte vist pel moviment de Killing radial. Aquestes quantitats depenen de les constants k_1 i k_2 del factor de conformitat tal i com expressem al següent cor·l·lari.

Cor·l·lari 4 *Per a la mètrica de la proposició anterior, la densitat d'energia és necessàriament constant,*

$$\rho = -3k_1(2k_2 + k_1\Delta),$$

i la pressió, funció sols de la coordenada radial, s'escriu com

$$p(\omega) = A = -3\Delta k_1^2 - 4k_1 k_2 + \frac{2k_2(k_1\Delta + k_2)}{\sqrt{\omega^2 - \Delta}(\omega + \sqrt{\omega^2 - \Delta})}.$$

Llavors hem trobat el factor de conformitat d'uns espais-temps conformement plans, estàtics, amb simetria esfèrica i amb contingut material de fluid perfecte per al qual la densitat d'energia és constant. Per tant podem dir que aquests espais-temps corresponen a la solució **Interior de Schwarzschild** de les equacions d'Einstein.

Tot aquest desenvolupament ha estat fet baix la suposició de que el camp conforme Killing radial ξ agafat era temporal, per la qual cosa, el fet de ser camp de Killing era equivalent a que el camp tinguera expansió nul·la i sota aquesta hipòtesi hem aplegat a la mètrica expressada per (2.23). Ara bé, si partim d'un camp conforme Killing radial no necessàriament temporal, la condició de ser camp de Killing per a un espai-temps conformement pla amb mètrica g , és a dir, tindre coeficient de conformitat respecte de g igual a zero, es pot expressar exactament per l'equació diferencial (2.24) per al factor de conformitat. Per tant, la *Proposició 17* es pot estendre a camps no temporals dient que, la mètrica dels espais-temps conformement plans que admeten un camp de Killing radial (amb qualsevol caràcter causal) s'expressa com (2.23). Però, n'hi ha que tindre en compte que si el camp és temporal aleshores la coordenada s és temporal i la coordenada ω és espacial, mentre que si el camp és espacial tindrem que la coordenada ω és la coordenada temporal i la s l'espacial.

2.4 Conformes Killing radials amb seccions ortogonals de curvatura constant

a) Anem ara a analitzar l'altra via de generalització apuntada anteriorment, l'estudi de la geometria de les superfícies ortogonals al camp conforme Killing radial. Al *Capítol 1* i a la *secció 2.1* hem vist que les superfícies ortogonals a un camp conforme Killing radial són 3-espais de curvatura constant per al cas de l'espai-temps de Minkowski, mentre que això mateix passa a l'espai-temps de Robertson-Walker per al camp conforme Killing radial temporal geodèsic. Però, en general, aquestes superfícies no seran espais de curvatura constant, donant lloc a una nova i interessant propietat sobre els camps conformes Killing radials que ens permetrà obtenir altres factors de conformitat generalitzats.

Segons hem estudiat al *Capítol 1*, donat un camp conforme Killing radial ξ en un espai-temps conformement pla qualsevol, les seccions ortogonals a ell són les superfícies $\{s = \text{constant}\}$ i la mètrica induïda sobre aquests 3-espais $\tilde{\gamma}$ és també conformement plana tenint per doble 2-forma de curvatura la donada per l'expressió

$$\tilde{Riem}(\tilde{\gamma}) = \left(\frac{K(s)}{2} \gamma + \Sigma \right) \wedge \tilde{\gamma}$$

amb $\Sigma = F \nabla d \frac{1}{F} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma} (d \ln |F|, d \ln |F|) \tilde{\gamma}$ i F el factor de conformitat tant de la mètrica d'espai-temps com entre les mètriques induïdes. Aquesta doble 2-forma no serà en general proporcional a la doble 2-forma $\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\gamma}$ (on \wedge és el producte exterior de 2-formes), pel que tindrem que les superfícies ortogonals a un camp conforme Killing radial no són de curvatura constant en qualsevol espai-temps conformement pla, depén del factor de conformitat.

La condició de curvatura seccional constant per aquests 3-espais serà, doncs, que Σ siga proporcional a $\tilde{\gamma}$ o equivalentment, tenint en compte l'expressió de Σ en funció del factor de conformitat, que es verifiqui el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\left[\beta \dot{G} + \alpha G' - \frac{\alpha}{r} G \right]_{,j} = 0 \quad j = \theta, \varphi$$

$$G_{,\theta\varphi} = \cot \theta G_{,\varphi}$$

$$G_{,\varphi\varphi} = \sin^2 \theta G_{,\theta\theta} - \sin \theta \cos \theta G_{,\theta}$$

$$P(G_{,\theta\theta} + rG') = r^2(\beta^2 \ddot{G} + \alpha^2 G'' + 2\alpha\beta \dot{G}')$$

amb $G = \frac{1}{F}$, α i β donades per (1.10), el punt i la prima representant les derivades parcials respecte t i r , respectivament, i els subíndex denotant derivades parcials respecte ells. Aquest sistema es pot resoldre obtenint com a solució que

$$G(t, r, \theta, \varphi) = \vec{\sigma} \cdot \vec{r} + H(t, r)$$

on denotem per

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{r} = \sigma_1(s)r \cos \varphi \sin \theta + \sigma_2(s)r \sin \varphi \sin \theta + \sigma_3(s)r \cos \theta,$$

essent $\sigma_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) funcions arbitràries de $s(t, r)$ donada per (1.27), i per $H(t, r)$ la funció de la forma

$$H(t, r) = \begin{cases} m(s)r^2 + n(s) & \text{si } a = b = 0 \\ m(s)t + n(s) & \text{en altre cas} \end{cases} \quad (2.27)$$

amb $m(s)$ i $n(s)$ funcions arbitràries del seu argument s . Per tant, tenim el següent resultat:

Proposició 20 *La mètrica dels espais-temps conformement plans que admeten un camp conforme Killing radial amb superfícies ortogonals de curvatura seccional constant es pot escriure com*

$$g = \frac{1}{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r} + H(t, r))^2} \eta \quad (2.28)$$

essent la funció $H(t, r)$ la donada per (2.27).

Aleshores la curvatura de Riemann de la sincronització homogènia associada a aquest moviment conforme és $\tilde{Riem}(\tilde{\gamma}) = \frac{\tilde{K}(s)}{2} \tilde{\gamma} \wedge \tilde{\gamma}$ on la curvatura seccional \tilde{K} ve donada per

$$\tilde{K} = \frac{-P}{r^4} H_{,\omega}^2 - \frac{2\alpha}{r^3} H H_{,\omega} - \frac{\beta^2}{P r^2} H^2 - \sigma^2$$

amb $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$, i és realment constant sobre cada superfície $s = \text{constant}$ ja que les seues derivades parcials respecte ω , θ i φ són zero. De fet, \tilde{K} es pot escriure com a funció de s de la següent manera, segons el cas,

$$\tilde{K}(s) = \begin{cases} 4mn - \sigma^2 & \text{si } a = b = 0 \\ \frac{b}{bs + c^2} [sm^2 - bn^2 + 2cmn] - \sigma^2 & \text{si } a = 0, b \neq 0 \\ \frac{a}{as^2 + bs + c} \left[\frac{bs + c}{a} m^2 - n^2 - 2smn \right] - \sigma^2 & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Notem que el signe de la curvatura seccional en aquest cas no depèn explícitament del caràcter causal del camp, com passava a Minkowski, ni de la quantitat $\Delta = b^2 - 4ac$, com era el cas de Robertson-Walker; sinó que dependrà de les funcions arbitràries que apareixen al factor de conformitat, les quals es determinaran en cada model a l'imposar un contingut energètic donat.

Si el camp conforme Killing radial que té seccions ortogonals de curvatura constant és temporal, el tensor impuls-energia d'aquests espais-temps, segons hem vist a la *Proposició 10* del *Capítol 1*, té pressions anisotròpiques nul·les. A més a més, pel *Lemma 1* de l'esmentat capítol, la derivada de Fermi de l'acceleració del camp al llarg de la seua direcció és proporcional a la projecció ortogonal del gradient de l'expansió, és a dir,

$$\mathcal{F}_u \mathbf{a} = -\frac{1}{3}(d\Theta)_\perp. \quad (2.30)$$

En aquest cas, els espais-temps resultants, la mètrica dels quals és (2.28), representen una generalització de les cosmologies de Robertson-Walker, la qual cosa es posa de manifest si escrivim la funció $H(t, r)$, donada per (2.27), de la següent manera equivalent,

$$H(t, r) = \begin{cases} \tilde{f}(s) + \lambda(s)r^2 & \text{if } a = b = 0 \\ \tilde{f}(s) + \lambda(s)t & \text{if } a = 0, b \neq 0 \\ (2at + b)\tilde{f}(s) + \lambda(s) & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

on $\tilde{f}(s)$ i $\lambda(s)$ són funcions arbitràries. Això permet expressar la mètrica (2.28) de la següent manera,

$$g = \left[\frac{F_0}{1 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{r} + \lambda(s)\delta(t, r))F_0} \right]^2 \eta \quad (2.31)$$

essent F_0^2 el factor de conformitat de la mètrica de Robertson-Walker donat per (2.2) i la funció $\delta(t, r)$ donada per:

$$\delta(t, r) = \begin{cases} r^2 & \text{si } a = b = 0 \\ t & \text{si } a = 0, b \neq 0 \\ 1 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Aleshores, clarament recuperem les mètriques de Robertson-Walker fent $\vec{\sigma} = 0$ i $\lambda = 0$.

Com hem vist, aquestes mètriques generalitzen les de Robertson-Walker però en general no tenen un contingut material de fluid perfecte ja que existeix un fluxe de calor que vindrà donat bàsicament pel gradient espacial de l'expansió del camp conforme Killing, de manera que es fa nul si l'expansió és homogènia al igual que passava a l'apartat anterior. La combinació d'ambdues possibilitats, fluxe de calor nul (expansió homogènia) i pressions anisotròpiques iguals a zero (seccions ortogonals de curvatura constant) ens porta a uns espais-temps conformement plans i de fluid perfecte on el camp conforme Killing radial temporal no és necessàriament geodèsic però la seua acceleració serà Fermi-Walker propagada al llarg de la direcció del camp.

b) Considerem ara aquest cas especial, és a dir, el cas d'un camp conforme Killing radial amb expansió homogènia i seccions espacials ortogonals de curvatura constant. Considerant les *Proposicions 17 i 10* estudiades al *Capítol 1*, aquest cas correspon a una família de solucions conformement planes i de fluid perfecte, l'acceleració de les quals és Fermi-Walker propagada al llarg de les línies de corrent del fluid. La mètrica d'aquesta família, segons les equacions (2.18) i (2.19), adopta l'expressió (2.31) amb $\vec{\sigma}$ i λ com a (quatre) constants arbitràries. A més a més, quan l'expansió és no nul·la, aquestes mètriques de fluid perfecte pertanyen a la classe conformement plana de fluids perfectes coneguda com **universos de Stephani**.

Més particularment, al cas de simetria esfèrica, $\vec{\sigma} = 0$, la mètrica (2.31) s'expressa com una deformació uniparamètrica de la mètrica de Robertson-Walker $g_0 = F_0^2 \eta$, és a dir,

$$g_\lambda = \frac{g_0}{[1 + \lambda \delta(t, r) F_0^2]^2} \quad (2.32)$$

L'acceleració del fluid resultant de l'Equació (1.43) per aquest g_λ ,

$$\mathbf{a}_\lambda = \frac{\lambda F_0}{P(1 + \lambda \delta F_0)} (\alpha \delta' + \beta \dot{\delta} - 2ar\delta) (-\beta dt + \alpha dr),$$

és diferent de zero, salvant per al cas en què $\lambda = 0$, com es pot deduir per a cada valor de la funció $\delta(t, r)$. I, a partir de l'Equació (1.42), l'expansió homogènia resulta

$$\Theta_\lambda = \Theta_0 - \frac{3\lambda}{\sqrt{P}} \left(\alpha \dot{\delta} - \frac{\beta}{r} \delta \right)$$

on Θ_0 representa l'expansió (2.10) del camp a l'espai-temps de Robertson-Walker, la mètrica del qual és $g_0 = \frac{h^2(s)}{P} \eta$. En aquest cas també tenim que la densitat d'energia ρ_λ i la pressió p_λ del fluid s'escriuen en funció de les corresponents a Robertson-Walker de la següent manera:

$$\rho_\lambda = \rho_0 + A\lambda^2 + B(s)\lambda \quad (2.33)$$

$$p_\lambda = p_0 + C(r)\lambda^2 + D(t, r)\lambda \quad (2.34)$$

essent ρ_0 i p_0 , respectivament, le densitat d'energia i la pressió dels universos de Robertson-Walker, donades per

$$\rho_0 = \frac{3}{h^2} \left[-\Delta + \left(\frac{2Sh'}{h} \right)^2 \right]$$

$$p_0 = -\frac{\rho_0}{3} - \frac{8S}{h^2} \left(\frac{Sh'}{h} \right)'$$

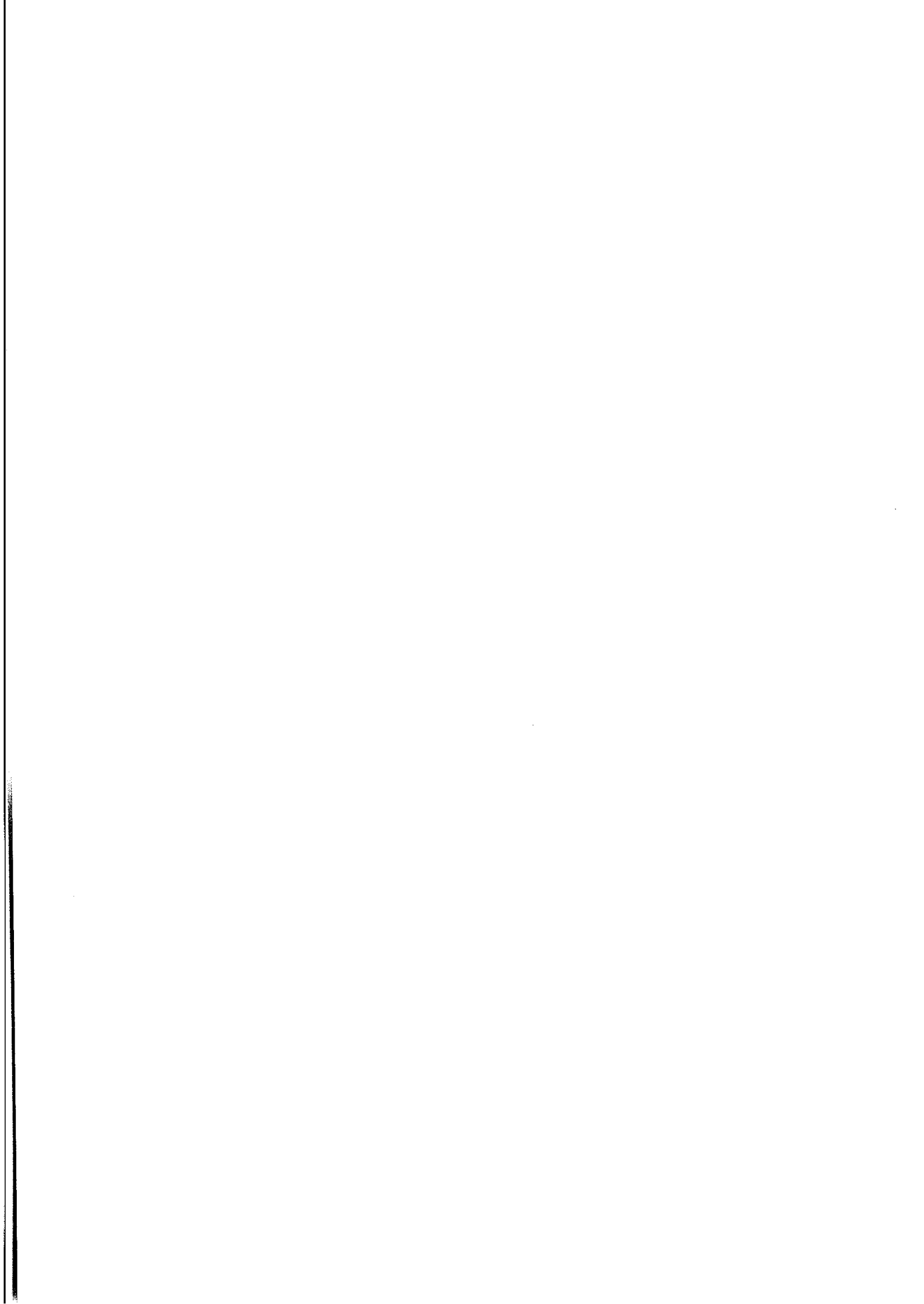
amb S donada per (2.6) i els coeficients A , $B(s)$, $C(r)$ i $D(t, r)$ segons la Taula 1. La densitat d'energia (2.33) és homogènia ja que sols depén del potencial s , com ocorreix per a qualsevol univers de Stephani. La forma de les funcions $C(r)$ i $D(t, r)$ dona les inhomogeneïtats de la pressió (2.34).

	$a = b = 0$	$a = 0$ and $b \neq 0$	$a \neq 0$
$\delta(t, r)$	r^2	t	1
A	0	3	0
$B(s)$	$12c\mu(s)$	$12c(\sqrt{S}\mu)'$	$-12(\sqrt{aS}\mu)'$
$C(r)$	$4r^2$	-3	0
$D(t, r)$	$8c(c^2r^2\mu'' - \mu)$	(*)	(**)

Taula 2.1: Coeficients A , B , C i D que apareixen a les expressions (32) i (33) de la densitat d'energia i la pressió, respectivament; denotem per $\mu(s) = \frac{1}{h(s)}$ i els símbols (*) i (**) representen les funcions següents,

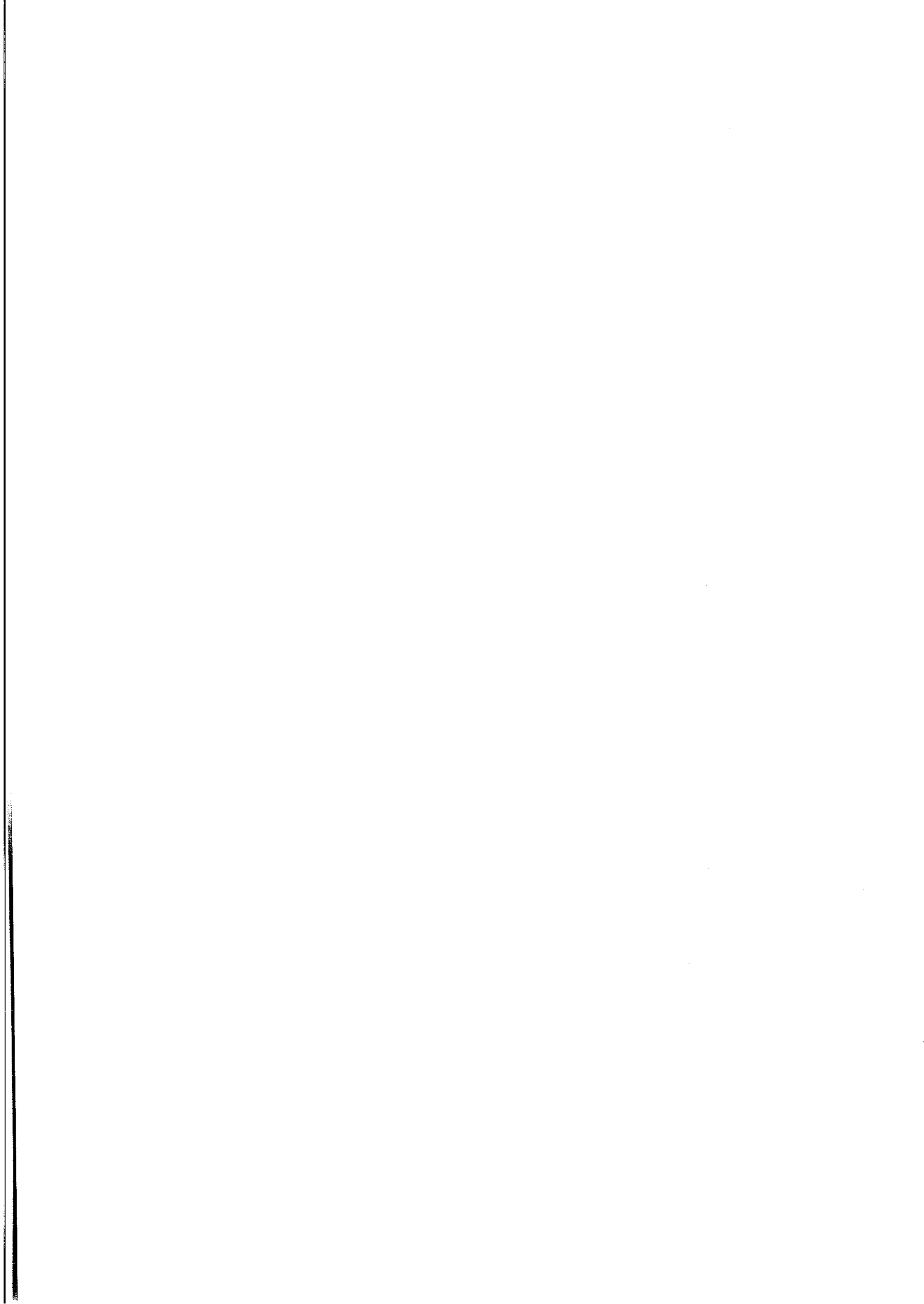
$$(*) \quad \frac{2}{\sqrt{S}} \left\{ b(5bt + 3c)\mu + 2S \left[3(2bt + c)\mu' + 2t(S\mu')' \right] \right\}$$

$$(**) \quad \frac{4a}{\sqrt{aS}} \left\{ \left[3as + b + \frac{a(bt + 2c)}{2at + b} \right] \mu + S \left[3\mu' + \frac{2}{2at + b} (S\mu')' \right] \right\}$$



Part II

Espais–temps amb seccions espacials conformement planes



Capítol 3

Problema d'Einstein–Vlasov

A la primera part d'aquest treball hem estudiat models cosmològics per als quals l'espai–temps és conformement pla. Comencen ara una segona part on estudiarem els models cosmològics per als quals l'espai–temps no és conformement pla però sí admet seccions espacials conformes a la mètrica plana 3–dimensional.

A aquesta part anem a analitzar alguns models físics reals en Cosmologia, en aquests models considerarem matèria freda sense col·lisions. Com hem dit, treballarem en models conformement plans als quals la part espacial de la mètrica és conformement plana. És a dir, seran universos de Friedmann–Robertson–Walker pertorbats, als quals la pertorbació estarà donada mitjançant un potencial gravitatori Newtonià ϕ . Aquests models són utilitzats freqüentment en Cosmologia.

La nostra idea és resoldre les equacions d'Einstein–Vlasov linealitzades per a una mètrica de Friedmann–Robertson–Walker pertorbada per una única funció ϕ que anomenarem potencial gravitatori, aquestes mètriques són conegudes com a *mètriques de l'aproximació potencial*.

En aquesta línia, estudiarem el problema d'Einstein–Vlasov tractant per separat les equacions d'Einstein i la corresponent a l'operador de Liouville. És a dir, desenvoluparem en primer lloc les equacions d'Einstein per a una mètrica de la forma de l'aproximació potencial, amb un únic potencial ϕ i considerant el

contingut material com a funcions a determinar. La determinació d'aquestes funcions es farà a continuació estudiant la funció de distribució de matèria que les genera. Aquesta funció de distribució haurà de verificar l'equació de Vlasov per al cas de baixes velocitats i on la mètrica serà l'esmentada anteriorment. Finalment, acoblarem ambdós resultats per obtindre l'equació que ha de verificar el potencial ϕ per ser solució de les equacions d'Einstein-Vlasov acoblades.

3.1 Equacions d'Einstein en forma evolutiva

Anem a estudiar, doncs, les restriccions que les equacions d'Einstein imposen sobre una mètrica de la forma de l'aproximació potencial caracteritzada per una única funció de les coordenades ϕ , coneguda com a potencial gravitatori. Aquestes equacions ens donaran per tant l'evolució en el temps d'aquest ϕ sota certes condicions o lligams. N'hi ha moltes formes de treballar amb les equacions d'Einstein, però una de les més esteses és la coneguda com formalisme evolutiu o formalisme 3+1. Nosaltres treballarem d'aquesta forma per tal d'obtindre les equacions que ens donaran l'evolució en el temps d'aquest ϕ .

Per tant, la nostra mètrica de partida serà una pertorbació de les mètriques de Friedmann-Robertson-Walker de la següent manera,

$$g = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1)$$

on $\alpha(\phi)$ és una funció arbitrària no nul·la del potencial gravitatori $\phi(t, x^i)$ i la mètrica espacial γ_{ij} té la forma

$$\gamma_{ij} = a^2(\gamma\delta_{ij} + \sigma_{ij})$$

amb $a(t)$ el factor d'expansió, $\gamma(\phi) = 1 - 2\phi$ i σ_{ij} funcions de les coordenades verificant que $\delta^{ij}\sigma_{ij} = 0$ ja que qualsevol part amb traça (respecte de la mètrica δ) d'aquestes funcions seria reabsorbible amb una nova definició de la funció potencial. Amb això no estem eixint-nos del marc de les mètriques conformement planes ja que considerarem que inicialment el tensor $\sigma_{ij} = 0$, però

resulta interessant tindre-la en compte per saber com es comportarà a l'evolució, és a dir, per veure si les equacions d'evolució mantindran la forma conformement plana de la part espacial de la mètrica o generaran components no nul·les de σ . Veurem que aquestes funcions σ_{ij} de traça nul·la representen la generació d'ones gravitatòries.

Les equacions d'Einstein de la Relativitat General determinen la mètrica de l'espai-temps una vegada imposat el contingut material existent a l'univers, el qual vindrà representat pel tensor impuls-energia T . Aquestes equacions s'escriuen en general com:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \text{tr} T g_{\mu\nu} \right),$$

on $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ representa el tensor de Ricci associat a la mètrica g i $\text{tr} T$ és la traça del tensor T respecte de la mateixa mètrica.

Una altra forma d'expressar-les, com comentàvem anteriorment, és mitjançant la descomposició del tensor impuls-energia relativa a l'observador \mathbf{u} , és a dir, utilitzant el *formalisme 3+1*. En aquest formalisme les equacions d'Einstein s'expressen en forma evolutiva de la següent manera [13]:

$${}^{(3)}\mathcal{R} + (\text{tr} K)^2 - \text{tr}(K^2) = 16\pi G\rho$$

$$D^\nu K_{\nu\mu} - D_\mu(\text{tr} K) = 8\pi G\mathbf{q}_\mu$$

$$\mathcal{L}_\mathbf{u}h = -2K$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathbf{u}K_{\mu\nu} - {}^{(3)}\mathcal{R}_{\mu\nu} - (\text{tr} K)K_{\mu\nu} + 2K_{\alpha\nu}K_\mu^\alpha + D_\mu\mathbf{a}_\nu + \mathbf{a}_\mu\mathbf{a}_\nu = \\ = -8\pi G \left((T_\perp)_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(3P - \rho)h_{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

on K representa la curvatura extrínseca associada a la mètrica espacial γ_{ij} , ${}^{(3)}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ i ${}^{(3)}\mathcal{R}$ són respectivament el tensor de Ricci i la curvatura escalar associades a γ_{ij} , \mathbf{a} és l'acceleració de l'observador \mathbf{u} , h representa el projector ortogonal relatiu a aquest observador i finalment ρ , \mathbf{q}_μ , P són la densitat, el fluxe d'energia i la pressió mitjana respectivament i $(T_\perp)_{\mu\nu} = Ph_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}$ representa la projecció ortogonal relativa a \mathbf{u} del tensor impuls-energia T . A més a més,

denotem per \mathcal{L}_u la derivada de Lie al llarg de u i per D la derivada covariant respecte a la mètrica espacial γ_{ij} .

Les dues primeres equacions són conegudes com a equacions de lligadura entre la densitat i el fluxe d'energia i el tensor de Ricci induït i la curvatura extrínseca de la mètrica; mentre que les dues últimes representen les equacions d'evolució per a la mètrica.

Notem que al nostre cas, donat l'observador $u = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}$, tenim que el projector ortogonal $h = g + u \otimes u$ coincideix amb la mètrica induïda γ_{ij} i a més es verifica que

$$\mathcal{L}_u h_{ij} = \frac{1}{\alpha} \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{i} \quad \mathcal{L}_u K = \frac{1}{\alpha} \dot{K}$$

on el punt representa derivació respecte de la coordenada temporal t . Per altra banda, per la forma de l'acceleració d'aquest observador tenim que

$$\alpha (\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j + D_i \mathbf{a}_j) = D_i D_j \alpha,$$

amb la qual cosa podem reduir les dues equacions d'evolució resultants de la següent manera:

$$\dot{\gamma}_{ij} = -2\alpha K_{ij}$$

$$\dot{K}_{ij} = \alpha \left(\overset{(3)}{\mathcal{R}}_{ij} + (\text{tr } K) K_{ij} - 2K_i^m K_{mj} \right) + 4\pi G \alpha (P - \rho) \gamma_{ij} - 8\pi G \alpha \Pi_{ij} - D_i D_j \alpha$$

tenint, per tant, una expressió més simplificada d'aquestes equacions. A més a més, donat que el tensor de pressions anisotròpiques Π té, per definició, traça nul·la, l'última equació d'evolució pot descomposar-se en dues equacions. Per un costat l'equació corresponent a prendre traces,

$$(\text{tr } K) \cdot - \frac{\alpha}{2} (\text{tr } K)^2 = \frac{\alpha}{4} \overset{(3)}{\mathcal{R}} - \Delta_\gamma \alpha + 12\pi G \alpha P \quad (3.2)$$

amb $\Delta_\gamma \alpha = \gamma^{ij} D_i D_j \alpha$, la qual sols depèn de la pressió mitjana P . I per altre costat, la part sense traça d'ambdós membres de l'equació, on solament apareixerà el tensor de pressions anisotròpiques,

$$\mathcal{Z}(\dot{K}_{ij}) = \alpha \mathcal{Z} \left(\overset{(3)}{\mathcal{R}}_{ij} + (\text{tr } K) K_{ij} - 2K_i^m K_{mj} \right) - \mathcal{Z}(D_i D_j \alpha) - 8\pi G \alpha \Pi_{ij} \quad (3.3)$$

on $\mathcal{Z}()$ representa la part sense traça del tensor corresponent respecte de la mètrica espacial γ_{ij} .

Anem primerament a calcular les quantitats relatives a la mètrica que apareixen a les equacions. La curvatura extrínseca corresponent a les superfícies $t = \text{constant}$ segons la primera equació d'evolució serà:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha}\dot{\gamma}_{ij} = -\frac{a}{\alpha}(\dot{a}\gamma - a\dot{\phi})\delta_{ij} - \frac{a}{2\alpha}(2\dot{a}\sigma_{ij} + a\dot{\sigma}_{ij})$$

la qual substituïrem més endavant a la segona equació per obtenir l'evolució del potencial gravitatori i del tensor σ_{ij} . El tensor de Ricci induït $\overset{(3)}{\mathcal{R}}_{ij}$ i la curvatura escalar induïda $\overset{(3)}{\mathcal{R}}$ corresponents a la mètrica (3.1) venen donats per:

$$\begin{aligned}\overset{(3)}{\mathcal{R}}_{ij} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{3}{\gamma}\phi_{,i}\phi_{,j} + \phi_{,ij} + \left(\Delta\phi + \frac{1}{\gamma}(\nabla\phi)^2 \right) \delta_{ij} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma}\delta^{mn}(\sigma_{jm,in} - \sigma_{ij,mn} + \sigma_{mi,jn}) \\ \overset{(3)}{\mathcal{R}} &= \frac{2}{a^2\gamma^2} \left(\frac{3}{\gamma}(\nabla\phi)^2 + 2\Delta\phi \right) + \frac{1}{a^2\gamma^2}\delta^{mn}\delta^{ij}\sigma_{jm,in}\end{aligned}$$

on $\Delta\phi = \delta^{ij}\phi_{,ij}$ i $(\nabla\phi)^2 = \delta^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$. Ara ens queda substituir aquestes expressions sobre les dues equacions obtingudes a partir de la segona equació d'evolució, així com a les equacions de lligadura.

Donat que estem treballant amb una mètrica de la forma de l'aproximació potencial on es considera que el potencial és molt menut, podem menysprear tots els termes d'ordre 2 en el potencial de manera que al desenvolupament que realitzem estarem permetent un error d'ordre ϕ^2 . És a dir, anem a fer una teoria linealitzada per al potencial a la qual farem, per tant, ús del desenvolupament en sèrie de potències de l'expressió

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1-2\phi} = 1 + 2\phi + O(\phi^2)$$

i a partir d'ara sols escriurem les expressions linealitzades en el potencial, encara que, a efectes d'estudis posteriors, guardarem també termes quadràtics en les derivades primeres del potencial per veure l'efecte que podrien produir en

l'evolució. A més a més també considerarem que les funcions σ_{ij} són menudes inicialment i veurem que sempre es mantindran per baix del potencial, amb la qual cosa, els termes quadràtics en σ així com els productes de ϕ o derivades de ϕ per σ també seran menyspreables.

Amb tot açò, anem a escriure les equacions d'Einstein per aquesta mètrica, en elles les components del tensor impuls-energia estaran donades per la funció de distribució de matèria com veurem més endavant. En primer lloc, les equacions de lligadura per a la mètrica resulten

$$4\pi G\rho = \frac{5}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{a^2}\Delta\phi + \frac{3H^2}{2\alpha^2} - \frac{3H}{\alpha^2}\dot{\phi} + \frac{3}{2\alpha^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4a^2}\sigma_{im,im}$$

$$4\pi G\alpha q_i = -\dot{\phi}_{,i} - \left[2\dot{\phi} + \frac{\alpha'}{\alpha}(H - \dot{\phi})\right]\phi_{,i} - \frac{H}{2}\sigma_{im,m} - \frac{1}{4}\dot{\sigma}_{im,m}$$

on denotem $\sigma_{im,im} = \delta^{mn}\delta^{ij}\sigma_{jm,in}$, $\dot{\sigma}_{im,m} = \delta^{jl}\dot{\sigma}_{ij,l}$ i $H = \frac{\dot{a}}{a}$, donant així un lligam entre la densitat i el fluxe d'energia i el potencial gravitatori.

En quant a les equacions d'evolució, com hem dit, substituïrem la primera d'elles i les expressions de les curvatures calculades a les dues equacions que resulten de la descomposició de la segona equació d'evolució. Tenint en compte la linealització tenim que la part amb traça, la qual depèn únicament de la pressió mitjana, es pot escriure com:

$$\ddot{\phi} - \dot{H} - \frac{3}{2}H^2 + \left(3 + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)H\dot{\phi} + \frac{\alpha}{3a^2}(\alpha'(1+2\phi) - \alpha(1+4\phi))\Delta\phi =$$

$$= 4\pi G\alpha^2 P + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)\dot{\phi}^2 + \frac{\alpha}{3a^2}\left(\frac{3\alpha}{2} + \alpha' - \alpha''\right)(\nabla\phi)^2 + \frac{\alpha^2}{12a^2}\sigma_{im,im} \quad (3.4)$$

amb la mateixa notació anterior i on la pressió mitjana es determinarà posteriorment a partir de l'equació de Vlasov.

Fem el mateix amb la part sense traça de la segona equació, és a dir, substituïm les expressions de les curvatures obtingudes. En primer lloc, donat que anem a considerar que totes les components del tensor impuls-energia van a dependre de les coordenades a través del potencial gravitatori, les pressions anisotròpiques podem ser, per tant, considerades de la forma

$$\Pi_{ij} = AZ(\phi_{,ij}) + BZ(\phi_{,i}\phi_{,j})$$

amb A i B dues constants a determinar de les expressions de Vlasov com veurem més endavant (Secció 3.3) i recordem que $\mathcal{Z}()$ representa la part sense traça respecte de la mètrica γ_{ij} . Aleshores, amb totes aquestes consideracions tenim que l'equació que involucra aquest tensor Π_{ij} resulta de la següent manera:

$$\ddot{\sigma}_{ij} + 3H\dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{a^2}\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{a^2}\mathcal{Z}(\sigma_{im,jm} + \sigma_{jm,im}) + \frac{2\alpha}{a^2}\mathcal{Z}(S_{ij}) = 0 \quad (3.5)$$

essent $\sigma_{im,jm} = \delta^{mn}\sigma_{im,jn}$ i el factor S_{ij} una funció de les derivades espacials del potencial donada de la següent manera:

$$S_{ij} = -(\alpha' - (1 + 2\phi - 8\pi GA)\alpha)\phi_{,ij} + (-\alpha'' - 2\alpha' + (3 - 8\pi GB)\alpha)\phi_{,i}\phi_{,j}.$$

Notem que les equacions d'evolució que ens han resultat, (3.4) i (3.5), donen de manera separada l'evolució del potencial gravitatori i la de la part sense traça de la mètrica espacial resultant en ambdós casos equacions d'ones amb termes fonts no nuls.

Encara tenim a les nostres equacions una llibertat que pot ajudar-nos a simplificar aquestes expressions, la llibertat en l'elecció de la funció $\alpha(\phi)$. No saltres elegirem aquesta funció de manera que la part sense traça de l'equació d'evolució (3.5) tinga com a terme font una funció menuda del potencial, en eixe sentit resulta interessant elegir α de manera que al terme S_{ij} desapareguen els termes en derivades segones del potencial, és a dir, que α verifiqui l'equació

$$\alpha' - (1 + 2\phi - 8\pi GA)\alpha = 0,$$

la solució de la qual és de la forma

$$\alpha(\phi) = Ce^{b_1\phi + \phi^2} = C(1 + b_1\phi + O(\phi^2))$$

amb C una constant arbitrària d'integració que agafarem igual a 1 per simplicitat i $b_1 = 1 - 8\pi GA$.

La determinació d'aquesta funció α redueix el problema a una única equació d'evolució per al potencial, l'Equació (3.4), i un altra per a la part sense traça de la mètrica espacial (3.5), a les quals hem d'incorporar aquest resultat junt als que obtindrem per la resolució de l'equació de Vlasov. Però, abans

de passar a l'estudi de l'equació de Vlasov, estudiarem amb més profunditat, tractant de simplificar al màxim, les equacions d'evolució i les de lligadura.

L'expressió de la funció α elegida permet simplificar les equacions de lligadura de la següent manera:

$$4\pi G\rho = \frac{1}{a^2}\Delta\phi - 3H\dot{\phi} + \frac{3H^2}{2}(1 - 2b_1\phi) + \frac{5}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4a^2}\sigma_{im,im} \quad (3.6)$$

$$4\pi G\mathbf{q}_i = -\dot{\phi}_{,i} - b_1 H\phi_{,i} - \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{im,m} \quad (3.7)$$

i també les equacions d'evolució del potencial ϕ i del tensor σ com:

$$\ddot{\phi} + (3 + b_1)H\dot{\phi} - \dot{H} - \frac{3}{2}H^2 + \frac{b_1 - 1}{3a^2}\Delta\phi = 4\pi GP(1 + 2b_1\phi) + \quad (3.8)$$

$$+ \left(b_1 - \frac{1}{2}\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{3a^2}\left(-\frac{1}{2} + b_1 - b_1^2\right)(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{12a^2}\sigma_{im,im}$$

$$\ddot{\sigma}_{ij} + 3H\dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{a^2}\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{a^2}\mathcal{Z}(\sigma_{im,jm} + \sigma_{jm,im}) - \frac{4}{a^2}\mathcal{Z}(\phi_i\phi_j) = 0 \quad (3.9)$$

on el factor multiplicatiu del terme $\mathcal{Z}(\phi_i\phi_j)$ seria realment $\frac{4}{a^2}(1 + 4\pi G(B - 4A))$, però podem menysprear els termes en B i A front al factor 1 per ser proporcionals a la temperatura (com veurem més endavant). Observem que el potencial gravitatori, en concret les seues derivades primeres espacials, és el terme font de l'equació d'evolució per a la funció σ , és a dir, que el potencial gravitatori pot generar ones gravitatòries encara que aquestes no es consideren inicialment.

Anàlogament al desenvolupat anteriorment per al tensor de pressions anisotròpiques, el considerar la pressió mitjana P com un funcional del potencial gravitatori porta a escriure'l, considerant les parts dominants, en la forma:

$$P = P_0 + E\Delta\phi$$

on P_0 representa, per tant, la part homogènia de la pressió. Aquesta forma de la pressió permet descomposar l'equació d'evolució per al potencial en una part homogènia i una part inhomogènia de la següent manera:

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 + 4\pi GP_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + (3 + b_1)H\dot{\phi} - \left(\frac{1 - b_1}{3a^2} + 4\pi GE\right) \Delta\phi - 8\pi GP_0 b_1 \phi = \\ = \left(b_1 - \frac{1}{2}\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{3a^2} \left(-\frac{1}{2} + b_1 - b_1^2\right) (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{12a^2} \sigma_{im,im} \end{aligned}$$

on P_0 i E els obtindrem de les expressions de Vlasov com veurem a la Secció 3.3.

Però encara podem simplificar un poc més aquestes últimes equacions d'evolució. Donat que el que ens interessa és obtenir el potencial gravitatori, podem resoldre la part homogènia de l'equació considerant que P_0 és menyspreable front a la part inhomogènia de la pressió, és a dir, farem $P_0 = 0$, la qual cosa ens fixarà el factor d'expansió $a(t)$ segons l'equació

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 = 0 \quad (3.10)$$

on recordem que $H = \frac{\dot{a}}{a}$. La solució d'aquesta equació dona el factor de escala de la mètrica de De Sitter de la següent manera

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

amb $a_0 = \frac{2}{H_0}$ el valor de la funció $a(t)$ a l'època actual, $t_0 = \frac{2}{3H_0}$ és l'instant actual i per tant H_0 representa l'edat de l'univers.

A més a més, és habitual treballar en el temps conforme η , la qual cosa significa fer el canvi de variable $dt = a(t)d\eta$ a les nostres equacions i a la mètrica. Amb això el factor d'escala és de la forma $a(\eta) = a_0\eta^2$ i l'equació d'evolució (3.8) en aquest temps conforme resulta:

$$\phi_{,\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{,\eta} - \frac{4\pi G}{3}(2A + 3Ea^2)\Delta\phi = \frac{1}{2}\phi_{,\eta}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{12}\sigma_{im,im} \quad (3.11)$$

a la qual també hem tingut en compte que $b_1 \approx 1$ ja que el factor A de les pressions anisotròpiques serà menyspreable front al factor 1 que apareix a l'expressió de b_1 . I l'Equació (3.9) s'escriu com:

$$\sigma_{ij,\eta\eta} + \frac{4}{\eta}\sigma_{ij,\eta} - \Delta\sigma_{ij} + \mathcal{Z}(\sigma_{im,jm} + \sigma_{jm,im}) = 4\mathcal{Z}(\phi_i\phi_j) \quad (3.12)$$

on els factors A i E en ambdues equacions es determinaran a l'apartat següent a l'introduir l'equació de Vlasov sobre la funció de distribució de matèria amb l'hipòtesi que tots els factors de la funció de distribució han de ser funcionals del potencial gravitatori ϕ .

Comparant l'equació resultant per al potencial gravitatori ϕ (3.11) amb l'apareguda per a la part sense traça de la mètrica σ_{ij} (3.12), observem que ambdues són equacions diferencials molt similars, són equacions d'ones amb termes font no nuls. A més el terme font de l'equació corresponent a σ_{ij} és d'ordre $(\nabla\phi)^2$ amb la qual cosa és menyspreable quan considerem una teoria linealitzada, per tant podem igualar a zero aquesta equació. Això implica que si inicialment agafem $\sigma_{ij} = 0$, no és generat cap funció σ_{ij} i la mètrica és mantindrà conformement plana, pel què l'única equació relevant serà la corresponent al potencial gravitatori, la qual es reudeix a:

$$\phi_{,\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{,\eta} - \frac{4\pi G}{3}(2A + 3Ea^2)\Delta\phi = 0. \quad (3.13)$$

al considerar nul·les les funcions σ_{ij} i linealitzar en ϕ i les seues derivades.

Una altra diferència important entre ambdues equacions ve reflectida pel factor multiplicatiu que acompanya al laplaciana corresponent. Al cas de σ_{ij} el coeficient del $\Delta\sigma$ és constant mentre que al cas del potencial el coeficient corresponent és variable ja que porta un factor $a^2(\eta)$. Aquesta diferència resulta ser determinant pel que fa al comportament de les equacions ja que marca la forma de les corbes característiques i per tant l'evolució de la solució. Per un costat, les corbes característiques associades a l'Equació (3.12) són bàsicament rectes a l'espai-temps, la qual cosa fa que qualsevol σ_{ij} localitzada inicialment en una regió s'escape d'aquesta regió a l'evolucionar, és per això que les quantitats σ_{ij} donarien ones gravitatòries propangant-se a l'infinit. En canvi les característiques associades a l'Equació (3.13) són corbes acotades per una assíptota de manera que les pertorbacions de la mètrica degudes al potencial no poden abandonar la regió en què estaven localitzades inicialment.

Resulta també interessant senyalar que el cas de considerar $a(t) = \text{constant}$, és a dir considerar una pertorbació de Minkowski, iguala la situació comentada anteriorment a ambdues equacions ja que el coeficient que acompanya al laplaciana del potencial gravitatori passaria a ser també constant. En eixe cas serien necessaris els termes quadràtics que apareixen a l'equació (3.11) per

poder establir resultats significatius a l'evolució del potencial. Un cas immediat d'aquesta situació és el cas estacionari ($\phi_{,\eta} = 0$), la discussió del qual ens donaria les correccions relativistes al model isotèrmic newtonià. En aquest cas l'evolució s'obtindria de la resolució d'ambdues equacions, la corresponent al potencial i la de les funcions σ_{ij} , de manera acoblada. Si abordem aquest problema per aproximacions successives, la primera d'elles seria fer $\sigma_{ij} = 0$ per obtenir la primera aproximació al potencial $\phi^{(1)}$. Aquesta $\phi^{(1)}$ seria la solució de l'equació $\Delta\phi = k(\nabla\phi)^2$ amb k una constant de proporcionalitat. En simetria esfèrica aquesta equació admet com a solució una funció $\phi^{(1)}$ verificant que $\Delta\phi^{(1)}(r) = \frac{1}{r^2(k+cr)^2}$, la qual ja es podria considerar com la primera aproximació al model isotèrmic relativista.

3.2 Funcions de distribució i equació de Vlasov

Vejam ara com són les quantitats del tensor impuls-energia associades a una funció de distribució de matèria freda sense col·lisions que haurem d'incorporar a les equacions d'Einstein anteriors. Veurem primer la forma d'aquesta funció de distribució depenent dels moments de les partícules i de les coordenades d'aquestes partícules mitjançant el potencial gravitatori de la mètrica, és a dir, veurem la dependència com a funcionals del potencial. Com, a més, exigim que aquesta funció de distribució verifiqui l'equació de Vlasov, establim també quines condicions ens està imposant aquesta equació sobre aquesta funció.

La resolució d'aquesta equació ens determinarà tant la funció de distribució de partida com el tensor impuls-energia associat. Amb la qual cosa podrem reprendre les equacions d'Einstein i construir l'equació d'evolució per al potencial ϕ .

Com es va introduir a la Mecànica Estadística i posteriorment s'ha fet ús a la Cosmologia, donat un gas (fluid), la funció de distribució de les partícules en aquest gas és una funció (escalar) a l'espai de fases que depèn de les posicions (x^μ) i dels moments (p^μ) de les partícules de manera que el nombre de partícules del gas i el contingut material de l'espai-temps s'obtenen a partir d'aquesta funció mitjançant integració. Recordem també que el quadrimoment associat a una partícula és un quadri-vector \mathbf{p} orientat cap al futur

que verifica la relació $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -m^2$, essent m la massa de la partícula i per tant, a l'espai tangent (en un punt) de l'espai-temps aquest vector s'escriu com $\mathbf{p} = p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Aleshores l'espai de fases en què es treballa és un espai de dimensió 7 on es podem agafar com a coordenades les quatre coordenades $\{x^\mu\}$ de l'espai-temps i les tres que queden de les $\{p^\mu\}$ una vegada s'aplica la relació que verifica el quadri-moment (en general sol eliminar-se la component p^0).

Per altra banda, en Mecànica Estadística un sistema en quasi-equilibri és descrit per una funció de distribució de la forma

$$f_0(x^\mu, p^\mu) = e^{\theta + \beta_\nu p^\nu}$$

on $\beta_\nu = \beta \mathbf{u}_\nu$, essent \mathbf{u} un vector temporal unitari i amb θ i β funcions de les coordenades de posició de les partícules. Fora de la situació de quasi-equilibri, la funció de distribució queda completament lliure, encara que com a pertorbacions d'aquest quasi-equilibri es solen agafar funcions de distribució polinòmiques en els moments. Nosaltres anem a considerar una funció de distribució de la forma:

$$f(x^\mu, p^\mu) = f_0(x^\mu, p^\mu) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_n} \right) \quad (3.14)$$

essent cada $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$ una funció arbitrària de les coordenades $\{x^\mu\}$, de manera que la seua nul·litat ens fa caure en la posició de quasi-equilibri. Aleshores tenim una funció de distribució general en la qual la situació de quasi-equilibri és fàcilment recuperable i a més a més l'única suposició adicional és que la part pertorbativa siga una funció analítica en els moments de les partícules. Quan ens restringim a mètriques depenent d'un únic potencial, considerarem que totes aquestes funcions depenen de les coordenades a través del potencial gravitatori, és a dir, són funcionals del potencial.

El desenvolupament de l'equació de Vlasov sobre funcions del tipus (3.14) que anem a fer a continuació és vàlid no solament per a mètriques de la forma de l'aproximació potencial amb part espacial conformement plana, sinó també per a mètriques de la forma:

$$g = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.15)$$

amb part espacial no necessàriament conformement plana. Notem que dins d'aquest tipus s'inclouen les mètriques pertorbatives de Friedmann-Robertson-Walker que ens interesen, per a les quals bastaria fer $\alpha^2 = 1 + 2\phi$ i $\gamma_{ij} = (1 - 2\phi)\delta_{ij} + \sigma_{ij}$.

Per aquestes mètriques (3.15) considerem l'observador cosmològic $u = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}$ amb la qual cosa la funció de distribució del quasi-equilibri és $f_0 = e^{\theta - \beta \alpha p^0}$ on les funcions θ i β quedaran determinades a l'imposar noves condicions. Anem a veure quines condicions cal imposar per tal de determinar θ i β .

En aquest contexte imposem a la funció de distribució general f (3.14) que siga solució de l'equació de Vlasov amb terme de col·lisions nuls, és a dir, que l'operador de Liouville actuant sobre aquesta f siga igual a zero. Per fer compatible aquesta condició amb el fet que la nul·litat de les funcions $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$ ens porta a una situació de quasi-equilibri amb funció de distribució f_0 , hem de considerar també que la nostra f_0 verifica l'equació de Vlasov en les mateixes condicions.

L'operador de Liouville, L , està donat per

$$L \equiv p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \frac{\partial}{\partial p^\mu}$$

on $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ representen els símbols de Christoffel de la mètrica g considerada. Aquest operador actuant sobre la funció de distribució (3.14) ens porta a la següent equació per a les diverses funcions que apareixen a f :

$$\begin{aligned} & (\theta_{,\mu} p^\mu + \beta_{(\nu;\mu)} p^\nu p^\mu) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_n} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_{(\alpha_1 \dots \alpha_n; \mu)}^n p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_n} p^\mu = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

on la coma denota derivades parcials respecte a la coordenada x^μ corresponent, mentre que el punt i coma està indicant derivació covariant. Així mateix amb els parèntesis representem la simetrització del tensor corresponent, per exemple, $\beta_{(\nu;\mu)} = \frac{1}{2} (\beta_{\nu;\mu} + \beta_{\mu;\nu})$.

Tenim doncs l'expressió general de l'operador de Liouville sobre funcions de distribució del tipus (3.14) a les quals és fàcilment recuperable la situació de quasi-equilibri, la qual suposem que regeix quan la mètrica no és pertorbada. Per resoldre aquesta Equació (3.16) desenvoluparem en tri-moments i anul·larem cada ordre per separat. Comencem en primer lloc veent com podem elegir la funció f_0 , per això estudiem les conseqüències que podem extraure de la recuperació de la situació de quasi-equilibri verificant també l'equació de Vlasov per a matèria sense col·lisions. Notem que amb aquesta suposició no estem perdent generalitat ja que qualsevol manera d'allunyar-nos d'aquesta f_0 s'incorporarà al valor de les funcions tensorials ϵ^n .

3.2.1 Elecció de la funció f_0

Com hem comentat anteriorment, per recuperar la situació de quasi-equilibri a partir de la funció de distribució general només hem de considerar nul·les les funcions $\epsilon^n_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ quedant-nos, doncs, únicament amb la funció f_0 . De la mateixa manera podem recuperar l'equació resultant de l'actuació de l'operador de Liouville sobre aquesta f_0 a partir de (3.16) eliminant les mateixes funcions $\epsilon^n_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$. Llavors, l'equació de Vlasov per al quasi-equilibri resulta:

$$\theta_{,\mu} p^\mu + \beta_{(v;\mu)} p^\nu p^\mu = 0. \quad (3.17)$$

Estudiarem aquesta part de l'equació en primer lloc. Per fer aquest estudi hem de tenir en compte que podem eliminar una de les components p^μ del moment donat que es verifica la relació $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -m^2$, segons la qual la component p^0 s'escriu en funció de les components espacials del moment de la següent manera:

$$(p^0)^2 = \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \gamma_{ij} p^i p^j \quad \Rightarrow \quad p^0 = \sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \gamma_{ij} p^i p^j}$$

de la qual podem agafar el desenvolupament en sèrie de potències corresponent ja que estem treballant amb matèria freda per a la qual les velocitats són baixes. Per tant tenim que:

$$p^0 = \frac{m}{\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2^n n!} \left(\frac{\alpha \gamma}{m} \right)^{2n} |\vec{p}|^{2n} \right).$$

Utilitzant aquests valors a l'Equació (3.17), aquesta es pot escriure com

$$\begin{aligned} \theta_{,\mu} p^\mu + \beta_{(\nu;\mu)} p^\nu p^\mu = \frac{m}{\alpha} \dot{\mu} + (\mu_{,i} + m\beta a_i) p^i + \left(\frac{\dot{\mu} - m\dot{\beta}}{2m\alpha} \gamma_{ij} - \beta K_{ij} \right) p^i p^j + \\ + \frac{1}{2m} (\beta a_i - \beta_{,i}) \gamma_{jk} p^i p^j p^k + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

on el punt representa la derivada respecte de la coordenada temporal t , la coma representa la derivada respecte a la coordenada corresponent, essent els índexs llatins indicadors de les coordenades espacials de l'espai-temps; i denotant $a_i = (\ln \alpha)_{,i}$, $\mu = \theta - m\beta$ i per K_{ij} la curvatura extrínseca de les superfícies $t = \text{constant}$.

Això ens porta a que podem escriure l'equació com una sèrie de potències per a les coordenades espacials del moment, de manera que la seua nul·litat és equivalent a anul·lar cadascun dels coeficients de la sèrie per separat, és a dir, tindrem el següent sistema d'equacions:

- 0) La part escalar de l'equació serà: $\dot{\mu} = 0$.
- 1) La part vectorial de l'equació: $\mu_{,i} + m\beta a_i = 0$ per a tot índex espacial i .
- 2) La part tensorial d'ordre 2 resulta: $\frac{\dot{\mu} - m\dot{\beta}}{2m\alpha} \gamma_{ij} - \beta K_{ij} = 0$ per a qualsevol i, j .
- 3) La part tensorial d'ordre 3 és: $\beta a_i - \beta_{,i} = 0$ per a tot i .
- 4) La part tensorial d'ordre 4 equival a: $m\dot{\beta} + \dot{\mu} = 0$.

i successivament per a la resta d'ordres tornen a aparéixer les equacions d'ordre 3 i 4 segons anem a ordres imparells o a ordres parells respectivament, de manera que aquest sistema representa totes les equacions que han de verificar les funcions θ i β perquè f_0 siga solució de l'equació de Liouville per a la mètrica (3.15).

La primera de les equacions dóna que la funció μ sols depèn de les coordenades espacials, i un estudi de les altres equacions ens porta a que, genèricament,

l'única solució exacta possible per a qualsevol α i γ_{ij} de la mètrica (sense restringir la mètrica) seria que la funció f_0 fóra constant, la qual no es pot considerar com a funció de distribució de matèria.

En altre cas, si volem funcions de distribució no constants, hem de considerar la segona i la tercera equacions com a restriccions sobre la mètrica. La tercera equació imposa que $K_{ij} \propto \gamma_{ij}$, és a dir que la mètrica ha d'admetre una sincronització umbilical. Per tant, la mètrica tindrà γ_{ij} com a funció sols de les coordenades espacials, és a dir, serà estàtica.

Llavors tenim que no existeixen solucions de l'equació de Liouville sense col·lisions de la forma f_0 diferents de la constant per a qualsevol mètrica (3.15), salvant el cas en què la mètrica siga estàtica.

Però, per a mètriques no estàtiques, ja que no existeix solució exacta, podem trobar solucions aproximades (no constants) quedant-nos a ordres baixos en els moments. Per aquestes solucions aproximades les funcions β i θ dependran de la mètrica considerada. Per exemple, podem considerar els casos de dues mètriques molt utilitzades en Cosmologia, la mètrica d'Einstein-de Sitter i els models de Friedmann-Robertson-Walker. Per a totes aquestes mètriques tenim que $\alpha = 1$ i que la part espacial és conformement plana (com també ho és per a les mètriques de l'aproximació potencial). Aleshores una solució fins a ordre tres de l'equació de Liouville donarà necessàriament

$$\mu = \text{constant} \quad \text{i} \quad \frac{\beta}{a^2(t)} = \text{constant},$$

essent $a^2(t)$ el factor d'expansió corresponent en cada cas i on la part espacial és $\gamma_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ o $\gamma_{ij} = \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2}\delta_{ij}$ respectivament.

3.2.2 Resolució de l'equació de Vlasov

Tornem de nou a l'estudi de l'equació general (3.16), utilitzant un mètode anàleg al desenrotllat al subapartat anterior. Considerarem en primer lloc la part (3.18) desenvolupada en sèrie de potències com anteriorment i deseno-

lupem de manera similar el següent factor de l'esmentada equació general:

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_n} = \lambda + \Lambda_i p^i + \Lambda_{ij} p^i p^j + \Lambda_{ijk} p^i p^j p^k + \dots$$

on els coeficients per a cada ordre de moments es podem agrupar donant lloc a les següents funcions:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^n \epsilon_{0\dots 0}^n \\ \Lambda_i &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n-1} \epsilon_{0\dots 0i}^n \\ \Lambda_{ij} &= Y_{ij} + \frac{\Lambda}{2m\alpha} \gamma_{ij} \\ Y_{ij} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n-2} \epsilon_{0\dots 0ij}^n \\ \Lambda &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n-1} \epsilon_{0\dots 0}^n \\ \Lambda_{ijk} &= Z_{ijk} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{2\alpha^2} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n-3} \epsilon_{0\dots 0(i \gamma_{jk})}^n \\ Z_{ijk} &= \sum_{n=3}^{+\infty} \binom{n}{3} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n-3} \epsilon_{0\dots 0ijk}^n \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aquesta descomposició dels diferents factors que intervenen a l'Equació (3.16) ens permet escriure-la com una sèrie de potències per als moments igualada a zero, aleshores cadascún dels coeficients de la sèrie ha d'anul·lar-se per separat, per la qual cosa tindrem un sistema d'equacions per a les funcions definides anteriorment del qual sols mostrem les equacions corresponents a la part escalar, la part vectorial i la part tensorial d'ordre 2, donant a continuació una indicació del que passa a ordres superiors. Posteriorment també escriurem l'equació corresponent a l'ordre 3 però en forma reduïda a la qual haurem tingut en compte la solució dels ordres inferiors.

1) La part escalar de l'equació de Vlasov es redueix a:

$$\lambda\dot{\mu} + \dot{\lambda} - m\alpha a^i \Lambda_i = 0 \quad (3.20)$$

2) La part vectorial de l'equació resulta:

$$\frac{m}{\alpha} \dot{\mu} \Lambda_i + \lambda (\mu_{,i} + m\beta a_i) + \lambda_{,i} + \frac{m}{\alpha} \dot{\Lambda}_i - \frac{m}{\alpha} \Lambda a_i + 2m K_i^j \Lambda_j - 2m^2 a^j Y_{ij} = 0 \quad (3.21)$$

3) La part tensorial d'ordre 2 serà:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{\alpha} \dot{\mu} \Lambda_{ij} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\beta}}{\alpha} \lambda - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Lambda}{\alpha} \right)^{\cdot} + a^k \bar{\Lambda}_k \right\} \gamma_{ij} + 2\Lambda_{(j} (\mu_{i)} + m\beta a_{i)} + \frac{m}{\alpha} \dot{Y}_{ij} + \\ & + \left(\frac{\Lambda}{\alpha} - \lambda\beta \right) K_{ij} + \Lambda_{(ij)}^{(3)} - 3m^2 a^k Z_{ijk} + \Lambda_{(i} a_{j)} - \bar{\Lambda}_{(i} a_{j)} + 4m Y_{k(j} K_{i)}^k = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

on ha aparegut una nova funció tensorial

$$\bar{\Lambda}_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{m}{\alpha} \right)^{n-1} \in_{0\dots 0i}^n$$

Així succesivament, als següents ordres van apareixent les funcions dels ordres anteriors i les seues derivades i a més a més noves variables cada vegada, una d'elles amb un subíndex espacial més, i les altres seran sèries similars a les aparegudes a l'ordre anterior i a l'ordre dues vegades inferior però amb una n multiplicativa adicional, com al cas de Λ_i i $\bar{\Lambda}_i$. És a dir, a l'ordre tres l'equació resultant tindrà les funcions anteriors i les seues derivades i apareixeran per tant tres noves funcions que podem denotar W_{ijkl} , \bar{Z}_{ijk} i \bar{Y}_{ij} definides de manera similar:

$$W_{ijkl} = \sum_{n=4}^{+\infty} \binom{n}{4} \left(\frac{m}{\alpha} \right)^{n-4} \in_{0\dots 0ijkl}^n$$

$$\bar{Z}_{ijk} = \sum_{n=3}^{+\infty} n \binom{n}{3} \left(\frac{m}{\alpha} \right)^{n-3} \in_{0\dots 0ijk}^n$$

$$\bar{Y}_{ij} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \binom{n}{2} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n-2} \in_{0\dots 0ij}^n.$$

Notem que, donat que no existeix solució general per aquests tipus de mètriques de l'equació corresponent a la nul·litat de l'operador de Liouville aplicat sobre la funció f_0 , no hem considerat com a nul el factor multiplicatiu (3.18) que apareix a l'equació general de f , amb la qual cosa estan apareixent també les funcions μ i β com a incògnites.

Com veiem a aquest sistema d'equacions cada ordre està incorporant una nova funció dependent de les \in^n de la funció de distribució. Per tant es podrà resoldre de manera progressiva a cada ordre. Nosaltres donarem una solució fins a ordre 3 en els moments, amb la qual cosa agafarem també com a solució de f_0 la calculada anteriorment, és a dir, $\dot{\mu} = 0$ i $\mu_i = -m\beta a_i$ per tal de recuperar el quasi-equilibri fàcilment essent també solució de Vlasov fins a l'esmentat ordre. Aquesta hipòtesi ens facilitarà la resolució de les equacions anteriors fins a ordre 3 de manera que l'error comés serà d'ordre 4 en els moments.

Anem, doncs a resoldre cadascuna de les equacions del sistema solució de l'equació de Vlasov. Abordarem la resolució d'aquestes equacions ordre a ordre imposant la menor quantitat de coses possible sobre la mètrica, és a dir, sobre el potencial gravitatori ϕ . Com hem comentat anteriorment el sistema pot anar resolent-se ordre a ordre per a tots els ordres, encara que nosaltres aquí solament arribarem fins al tercer ordre.

En primer lloc anem a considerar per tant la funció f_0 triada tal i com l'expressem a l'apartat anterior, és a dir, tindrem que la funció μ és constant i que la funció β és proporcional al factor d'expansió $a(t)$ amb factor de proporcionalitat constant.

Utilitzant aquestes expressions de μ i β sobre la resta d'equacions de Vlasov podem simplificar-les de manera que per a l'equació (3.20) ens quedarà que:

$$\dot{\lambda} - m\alpha^i \Lambda_i = 0$$

la qual, segons el comentat anteriorment, si busquem la solució més general possible en quant a ser vàlida per a qualsevol potencial, és equivalent a les equacions següents:

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{i} \quad \Lambda_i = 0. \quad (3.23)$$

Aleshores la funció λ no depèn del temps, encara que si pot dependre de les coordenades espacials. Per simplicitat nosaltres agafarem aquesta funció com a nul·la, $\lambda = 0$.

En quant a l'Equació vectorial (3.21), tenint en compte la forma de f_0 i les equacions anteriors, resulta

$$\frac{m}{\alpha} \Lambda a_i + 2m^2 a^j Y_{ij} = 0$$

la solució de la qual, si descomposem el tensor Y_{ij} en la seua part amb traça i la part sense traça, serà que les funcions Λ i Y_{ij} verifiquen les equacions:

$$\frac{\Lambda}{\alpha} + \frac{2}{3} m \operatorname{tr} Y = 0 \quad \text{i} \quad \mathcal{Z}(Y) = 0 \quad (3.24)$$

on \mathcal{Z} està representat la part sense traça del tensor respecte de la mètrica espacial induïda. Una solució particular d'aquestes dues equacions seria per tant agafar les funcions Λ i Y_{ij} nul·les, $\Lambda = 0$, $Y_{ij} = 0$.

Passem ara l'equació corresponent al segon ordre, (3.22), aquesta es podrà reescriure una vegada resoltes les anteriors com:

$$3m^2 a^k Z_{ijk} + \frac{1}{2} a^k \bar{\Lambda}_k \gamma_{ij} + \bar{\Lambda}_{(i} a_{j)} = 0$$

és a dir, el valor de la funció Z_{ijk} dependrà dels corresponents a les funcions $\bar{\Lambda}_i$ de la següent manera:

$$Z_{ijk} = -\frac{1}{2m^2} \bar{\Lambda}_{(i} \gamma_{jk)}. \quad (3.25)$$

En aquesta equació hem utilitzat per simplificar-la la solució per a la f_0 , i les expressions (3.23) i (3.24).

Finalment resoldrem l'equació corresponent a tercer ordre. Aquesta equació, com hem dit, afegeix tres noves variables així com les derivades de les variables aparegudes als ordres anteriors. Per simplicitat, sols escriurem a l'equació d'aquest ordre les components que queden una vegada simplificada l'equació tenint en compte els valors de μ i β i les expressions (3.23), (3.24) i (3.25). Aquesta equació queda per tant com:

$$\bar{Y}_{(ij} a_{k)} + a^l \bar{Y}_{l(i} \gamma_{jk)} + \frac{\bar{\Lambda}}{m} a_{(i} \gamma_{jk)} + 4m^2 a^l W_{ijkl} = 0. \quad (3.26)$$

Tenint en compte que estem considerant en tot moment que aquestes funcions han de ser funcionals del potencial gravitatori apleguem a que necessàriament les funcions que apareixen a aquesta última equació solament poden dependre del potencial de la següent manera:

$$\bar{Y}_{ij} = Y_1 \phi_{ij} + Y_2 \phi_i \phi_j + Y_3 \gamma_{ij}$$

$$W_{ijkl} = W_1 \phi_{(ij} \gamma_{kl)} + W_2 \phi_{(i} \phi_j \gamma_{kl)} + W_3 \gamma_{(ij} \gamma_{kl)}$$

on les constants Y_k i W_k verificaran les següents equacions, les quals es dedueixen a partir de la relació (3.26):

$$2Y_j + 4m^2 W_j = 0 \quad \text{i} \quad 2Y_3 + 4m^2 W_3 + \frac{\bar{\Lambda}}{m} = 0$$

on la primera equació s'ha de verificar per a $j = 1, 2$. Una solució possible d'aquest tercer ordre és agafar:

$$W_{ijkl} = 0 \quad , \quad Y_1 = Y_2 = 0 \quad \text{i} \quad 2Y_3 + \frac{\bar{\Lambda}}{m} = 0 \quad (3.27)$$

amb la qual cosa estarem fent un model sense anisotropies.

Com veiem, amb relació a l'equació corresponent al primer ordre, en el que afecta als ordres posteriors, és indiferent agafar la solució general corresponent a l'expressió (3.24) com agafar la solució particular comentada que fa $\Lambda = 0$ i $Y_{ij} = 0$. El que es veura afectat per aquesta elecció serà la forma del tensor impuls-energia associat a la funció de distribució corresponent, solució de l'equació de Vlasov.

Per tant, una solució particular de Vlasov fins a tercer ordre en els moments (és a dir, fins a segon ordre en el potencial), vàlida per a qualsevol potencial gravitatori i per a un model sense anisotropies és agafar nul·les totes les funcions que apareixerien noves en ordres superiors amb subíndexs espacials (és a dir, aquelles que donen tensors \in^n que estaran contraguts amb ordre quatre dels moments) i considerar les altres verificant les condicions (3.23), (3.24), (3.25) i (3.27).

Notem que les equacions no ens donen directament els tensors que apareixen en la funció de distribució sinó les sèries funcionals definides a partir d'ells, de manera que per obtindre'ls basta plantejar els sistemes d'equacions que resulten per a les sèries corresponents.

3.2.3 Tensor impuls-energia associat a f

Els conceptes físics de fluxe de partícules i fluxe de moments d'aquestes partícules a través d'una superfície donada sol representar-se geomètricament associant a cadascuna d'aquestes quantitats un tensor d'ordre 1 (vector) en el primer cas i d'ordre 2 en el segon. El primer es coneix com *vector corrent de partícules*, mentre que el segon s'anomena *tensor impuls-energia* o *tensor energia-moment* i representa el contingut material de l'espai-temps al relacionar-lo amb la mètrica espai-temporal.

Les equacions d'Einstein relacionen la geometria de l'espai-temps, és a dir la mètrica, amb el contingut material d'aquest mitjançant la identificació de cadascun dels termes geomètrics amb els conceptes físics de pressió, densitat, fluxe, etc... El contingut material (tensor impuls-energia) i el vector corrent de partícules, poden escriure's de manera cinemàtica tenint en compte les components de la mètrica, o també relacionant-lo amb les quantitats observables mitjançant la funció de distribució de matèria considerada. En qualsevol cas, ambdues maneres de representar-lo estan relacionades entre sí i anem a establir aquesta relació per poder determinar les diferents variables a l'imposar les esmentades equacions d'Einstein.

En primer lloc anem a escriure aquestes dues quantitats tensorials de manera geomètrica relativa a l'observador cosmològic \mathbf{u} . Recordem que, en general, tenim que tant el vector corrent de partícules, N , com el tensor impuls-energia T , es poden descomposar relativament a un observador \mathbf{u} de la següent manera:

$$\begin{aligned} N &= n\mathbf{u} + N_{\perp} \\ T &= \rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{u} + Ph + \Pi \end{aligned}$$

on els diferents factors que apareixen vindran donats mitjançant el projecteur ortogonal $h = g + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ associat a la mètrica per:

- 1) $n = -i(\mathbf{u})N = -g(N, \mathbf{u})$ representa la **densitat de partícules**.
- 2) El vector $N_{\perp} = h(u)$ és el **fluxe de partícules**. En general, si l'observador \mathbf{u} representa també la velocitat del fluid, aleshores aquest fluxe és nul i la densitat n sol anomenar-se densitat *pròpia* de partícules.
- 3) La **densitat d'energia** ve donada per $\rho = i^2(u)T = \mathbf{u}^{\alpha}\mathbf{u}^{\beta}T_{\alpha\beta}$.

- 4) El **fluxe de calor** (fluxe d'energia, densitat de moment...) és el vector $q = -(i(u)T)_\perp$.
- 5) L'escalar $P = \frac{1}{3} \text{tr}_h T$ representa la **pressió mitjana** del medi.
- 6) El **tensor de pressions anisotròpiques** $\Pi = T_\perp - Ph$, on T_\perp és la projecció ortogonal del tensor T mitjançant el projecteur h .

Nosaltres treballarem amb l'observador $u = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}$, el qual no té perquè representar la velocitat del fluid. De fet, agafarem que en general no és la velocitat del fluid per tal de tractar genèricament les anisotropies de l'univers. Per tant totes les quantitats expressades dependran de les diferents condicions que imposen sobre el contingut material a més d'exigir també que es verifiquen les equacions d'Einstein.

Per altra banda, tenint en compte que el nostre contingut material vindrà determinat per una funció de distribució de matèria f , hem de considerar també la relació existent entre aquestes dues magnituds N i T i la funció f . Per a una funció de distribució qualsevol, independentment que aquesta verifiqui l'equació de Vlasov o no, el vector corrent de partícules N i el tensor impuls-energia T associats a ella es poden obtenir mitjançant integració de superfície de la funció a l'espai de moments, és a dir:

$$N^\alpha = \int f p^\alpha d\omega \quad \text{i} \quad T^{\alpha\beta} = \int f p^\alpha p^\beta d\omega$$

essent $d\omega$ l'element de volum de l'espai tri-dimensional de moments. Per tant, els diferents factors que resulten de la descomposició de N i T relativa a l'observador u es poden obtenir també per integració de la funció de distribució.

En particular per al nostre cas, al qual la funció de distribució s'escriu com (3.14), aquestes integrals són sumatoris d'integrals de la forma,

$$M_n = \int f_0 \mathbf{p}^n d\omega \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (3.28)$$

on denotem $\mathbf{p}^n = \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \dots \otimes \mathbf{p}$, ja que les funcions $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$ no depenen dels moments, aleshores, tindrem

$$N = M_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \cdot M_{n+1}$$

$$T = M_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \cdot M_{n+2}$$

on el punt està denotant producte escalar, és a dir, $\epsilon^n \cdot M_{n+2} = \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n M_{n+2}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \mu \nu}$. Amb la qual cosa, les densitats, els fluxes i les pressions relatives a l'observador \mathbf{u} , utilitzant les definicions introduïdes anteriorment, també estaran donades per aquestes integrals (3.28) i les corresponents contraccions amb el vector \mathbf{u} tenint:

$$n = -M_1 \cdot \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \cdot M_{n+1} \cdot \mathbf{u}$$

$$N_{\perp} = h(M_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} h(\epsilon^n \cdot M_{n+1})$$

$$\rho = M_2 \cdot \mathbf{u}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \cdot M_{n+2} \cdot \mathbf{u}^2$$

$$\mathbf{q} = -h(M_2 \cdot \mathbf{u}) - \sum_{n=1}^{+\infty} h(\epsilon^n \cdot M_{n+2} \cdot \mathbf{u})$$

$$T_{\perp} = h(M_2) + \sum_{n=1}^{+\infty} h(\epsilon^n \cdot M_{n+2})$$

denotant, com anteriorment, $\mathbf{u}^n = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}$ i el punt com a la contracció dels subíndexs corresponents.

Per tant, el primer pas serà trobar el valor d'aquestes quantitats tensorials M_n considerant que l'element de volum $d\omega$ a l'espai de moments es defineix en general com $d\omega = \frac{\sqrt{-g}}{|p_0|} dp^1 dp^2 dp^3$ en coordenades contravariants per als moments, essent g el determinant de la mètrica d'espai-temps.

El càlcul de les M_n pot abordar-se des del punt de vista tensorial, en aquest sentit cadascuna de les M_n és un tensor d'ordre n la descomposició relativa a \mathbf{u} del qual ens permetrà obtenir el seu valor i posteriorment substituir-les a les expressions de les densitats, fluxes i pressions. Observem en primer lloc la

factorització corresponent a M_2 , aquest és un tensor d'ordre 2 que no té fluxes ni pressions anisotròpiques, és a dir:

$$M_2 = m_2^2 \mathbf{u}^2 + m_2^0 h$$

on a l'Apèndix A podem veure el càlcul d'aquesta descomposició i de les corresponents m_2^2 i m_2^0 . Anàlogament per a M_3 , M_4 i en general per a qualsevol M_n la descomposició corresponent com a tensor d'ordre n serà

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m_n^{n-2k} h^k \mathbf{u}^{n-2k} = \frac{(-1)^n}{h^k (h^k)_1} F_{n-2k,k} h^k \mathbf{u}^{n-2k}$$

on el càlcul corresponent el presentem a l'esmentat apèndix. El número $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ representa la part sencera del quocient $n/2$, $h^k (h^k)_1$ és el número resultant de contraure un qualsevol dels termes independents del producte tensorial h^k (k vegades h) amb h un número k de vegades (la manera d'obtindre el seu valor es presenta de manera recurrent a l'esmentat Apèndix A), representem per $h^k \mathbf{u}^m$ el tensor d'ordre $k+m$ amb únicament les components linialment independents del producte tensorial $h \otimes \dots \otimes h \otimes \mathbf{u} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}$ tenint en compte les simetries corresponents (per exemple, $h\mathbf{u} = h_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\gamma + h_{\alpha\gamma} \mathbf{u}_\beta + h_{\beta\gamma} \mathbf{u}_\alpha$) i per últim el factor $F_{n-2k,k}$ és el valor de la integral

$$F_{n-2k,k} = \int f_0 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^{n-2k} (h_{ij} p^i p^j)^k d\omega.$$

Aleshores la densitat de partícules i els diferents factors del tensor impuls-energia es poden escriure com:

$$n = -F_{1,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+1}}{h^k (h^k)_1} F_{n+1-2k,k} \in^n \cdot h^k \mathbf{u}^{n-2k}$$

$$N_\perp = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+1}}{h^k (h^k)_1} F_{n+1-2k,k} h (\in^n \cdot h^k \mathbf{u}^{n-2k})$$

$$\rho = F_{2,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n}{h^k (h^k)_1} F_{n+2-2k,k} \in^n \cdot h^k \mathbf{u}^{n-2k}$$

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n}{h^k (h^k)_1} F_{n+2-2k,k} \in^n \cdot h^k \mathbf{u}^{n+1-2k}$$

$$T_{\perp} = \frac{1}{3} F_{0,1} h + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n}{h^k (h^k)_1} F_{n+2-2k,k} \in^n \cdot h^k \mathbf{u}^{n+2-2k}$$

on el tensor T_{\perp} ens donarà les pressions, tant la pressió mitjana (prenent traces) com les anisotròpiques.

Aquestes expressions es podem simplificar tenint en compte el valor de cada $F_{r,s}$, calculat a l'Apèndix A. Per calcular aquestes $F_{r,s}$ a l'esmentat apèndix, hem de restringir de nou la mètrica (3.15) a aquelles que tenen part espacial conformement plana, és a dir, de la forma

$$g = -\alpha dt^2 + a^2 \gamma^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.29)$$

on α i γ són funcions arbitràries de totes les coordenades i la funció arbitrària del temps $a(t)$ representa el factor d'expansió de la mètrica. Això permet separar a f_0 la dependència de moments de la de coordenades de posició i utilitzar l'aproximació de p_0 donada al subapartat anterior, per escriure

$$f_0 = e^{\mu} e^{-\kappa |\vec{p}|^2}$$

on recordem que $\mu = \theta - m\beta$ i hem denotat $\kappa = \frac{a^2 \beta \gamma^2}{2m}$ amb β proporcional a a^2 amb factor de proporcionalitat constant per aquesta mètrica i $|\vec{p}|^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = \delta_{ij} p^i p^j$. De fet, el considerar f_0 d'aquesta manera no suposa cap restricció donat que els termes que faltarien de la sèrie resultant estarien carregats sobre les funcions tensorials \in^n de la resta de la funció de distribució. Aleshores, agafant f_0 d'aquesta manera, podem fer un canvi de coordenades en els moments de les "cartesianes" a les "esfèriques", el qual facilitarà la integració ja que en aquestes últimes coordenades $d\omega = \frac{\sqrt{-g}}{|p_0|} |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega$ essent $d\Omega$ l'element d'angle sòlid.

Aquestes consideracions permeten calcular les integrals $F_{r,s}$ tal i com mostrem a l'esmentat apèndix i per tant escriure les expressions següents de les densitats, els fluxes i les pressions, a les quals hem tingut en compte que la

funció de distribució verifica l'equació de Vlasov, la solució del qual hem trobat al subapartat anterior:

$$n = \frac{15\mathcal{N}\mathcal{T}^2}{8m\alpha a^3} \left(\bar{\Lambda} + \frac{4m\alpha}{3} \text{tr}(\bar{Y}) + \frac{8m^3\alpha}{5} W_{ijkl} h^{ij} h^{kl} \right)$$

$$N_{\perp} = \frac{35\mathcal{N}\mathcal{T}^3}{8m^2 a^3} \left(\bar{\Lambda}_i + 2\bar{\Lambda}_i + \frac{12m^2}{5} \bar{Z}_{ijk} h^{jk} \right) dx^i$$

$$\rho = \frac{15\mathcal{N}\mathcal{T}^2}{8a^3\alpha} \left(\bar{\Lambda} + \frac{4m\alpha}{3} \text{tr}(\bar{Y}) + \frac{8m^3\alpha}{5} W_{ijkl} h^{ij} h^{kl} \right) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{q} = \frac{35\mathcal{N}\mathcal{T}^3}{8ma^3} \left(\bar{\Lambda}_i + 2\bar{\Lambda}_i + \frac{12m^2}{5} \bar{Z}_{ijk} h^{jk} \right) dx^i \quad (3.31)$$

$$P = \frac{35\mathcal{N}\mathcal{T}^3}{8m\alpha a^3} \left(\bar{\Lambda} + \frac{4m\alpha}{3} \text{tr}(\bar{Y}) + \frac{56m^3\alpha}{27} W_{ijkl} h^{ij} h^{kl} \right) \quad (3.32)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{7\mathcal{N}\mathcal{T}^3}{a^3} \left(\mathcal{Z}(\bar{Y}_{ij}) + \frac{20m^2}{9} \mathcal{Z}(W_{ijkl} h^{kl}) \right)$$

on $\text{tr}()$ representa la traça del tensor corresponent mitjançant el projecteur ortogonal h associat a la mètrica i a l'observador \mathbf{u} , $\mathcal{Z}()$ la part sense traça i $\mathcal{N} = (2\pi m a^2 \mathcal{T})^{3/2} e^{\mu}$ essent $\mathcal{T} = 1/\beta$ l'indicador de la temperatura. Aquestes expressions són, per tant, vàlides per a mètriques que admeten seccions espacials conformement planes.

Aquestes expressions són les que donen el contingut material que posarem a les equacions d'Einstein per tal d'obtindre la forma final de l'equació d'evolució per al potencial gravitatori que, per tant, ens determinarà la mètrica.

En endavant, farem un model sense anisotropies, és a dir considerarem pressions anisotròpiques nul·les i per tant agafarem les funcions $W_{ijkl} = 0$ i $\mathcal{Z}(\bar{Y}) = 0$.

3.3 Equacions d'Einstein-Vlasov

Finalment anem a veure com queden les equacions d'Einstein de la Relativitat general quan considerem que el tensor impuls-energia és el corresponent

a una distribució de matèria representada per la funció $f(x^\mu, p^\mu)$ donada a (3.14) i que verifica l'equació de Vlasov amb terme de col·lisions nul, tal i com hem vist a l'apartat anterior. És a dir, anem a escriure l'equació d'evolució que resulta quan considerem les equacions d'Einstein-Vlasov acoblades.

Donat que aquestes equacions (d'Einstein-Vlasov) es poden resoldre de manera desacoblada, hem fet un tractament per separat d'ambdues parts, primer de les equacions d'Einstein i després de l'equació de Vlasov. La resolució a l'apartat anterior de Vlasov ens ha donat per tant el tensor impuls-energia associat al medi. Aquestes quantitats s'han d'incorporar a les equacions d'Einstein estudiades al primer apartat d'aquest capítol tenint en compte que cadascuna de les funcions que apareixen a la funció de distribució ha de ser considerada com una funció que depèn dels moments i de les coordenades a través del potencial gravitatori.

Recordem que ara treballem en una mètrica de la forma de l'aproximació potencial amb un únic potencial i una funció de distribució general de la forma (3.14). Com hem vist al primer apartat d'aquest capítol, tenim dues equacions de lligadura que ens permetran identificar les relacions entre els tensors que apareixen a la funció de distribució i el potencial gravitatori; i una equació d'evolució que determinarà la forma d'aquest potencial dependent de les condicions inicials de partida.

En primer lloc, l'Equació de lligadura (3.7), junt a l'expressió (3.31) del fluxe d'energia, permet identificar el tensor $\bar{\Lambda}_i$ amb derivades espacials del potencial gravitatori de la següent manera:

$$\bar{\Lambda}_i + 2\bar{\Lambda}_i = \frac{ma^3}{35\pi GN\mathcal{T}^3} \left(-\dot{\phi}_{,i} - b_1 H \phi_{,i} \right). \quad (3.33)$$

Anàlogament si a l'Equació (3.6) substituïm l'expressió (3.30) de la densitat, tenint en compte el valor de α , aleshores tenim la relació:

$$\bar{\Lambda} + \frac{4m\alpha}{3} \text{tr}(\bar{Y}) = \frac{2a^3}{15\pi GN\mathcal{T}^2} \left(\frac{1}{a^2} \Delta\phi - 3H\dot{\phi} + \frac{3H^2}{2}(1 - b_1\phi) \right) \quad (3.34)$$

la qual, segons les relacions de Vlasov (3.27), determina tant el valor de $\bar{\Lambda}$ com el de $\text{tr}(\bar{Y})$:

$$\frac{2m}{3} \text{tr}(\bar{Y}) = -\bar{\Lambda} = \frac{2a^3}{15\pi GN\mathcal{T}^2} \left(\frac{1}{a^2} \Delta\phi - 3H\dot{\phi} + \frac{3H^2}{2}(1 - b_1\phi) \right).$$

En segon lloc, comparant les expressions (3.30) i (3.32) de la densitat i la pressió i tenint en compte la relació (3.34) obtenim:

$$P = \frac{7\mathcal{T}}{3m}\rho = \frac{7\mathcal{T}}{12\pi Gm} \left(\frac{1}{a^2}\Delta\phi - 3H\dot{\phi} + \frac{3H^2}{2}(1 - b_1\phi) \right)$$

amb la qual cosa la part inhomogènia de la pressió, és a dir el factor E que acompanya a $\Delta\phi$ en (3.13) és:

$$E = \frac{7\mathcal{T}}{12\pi Gma^2}.$$

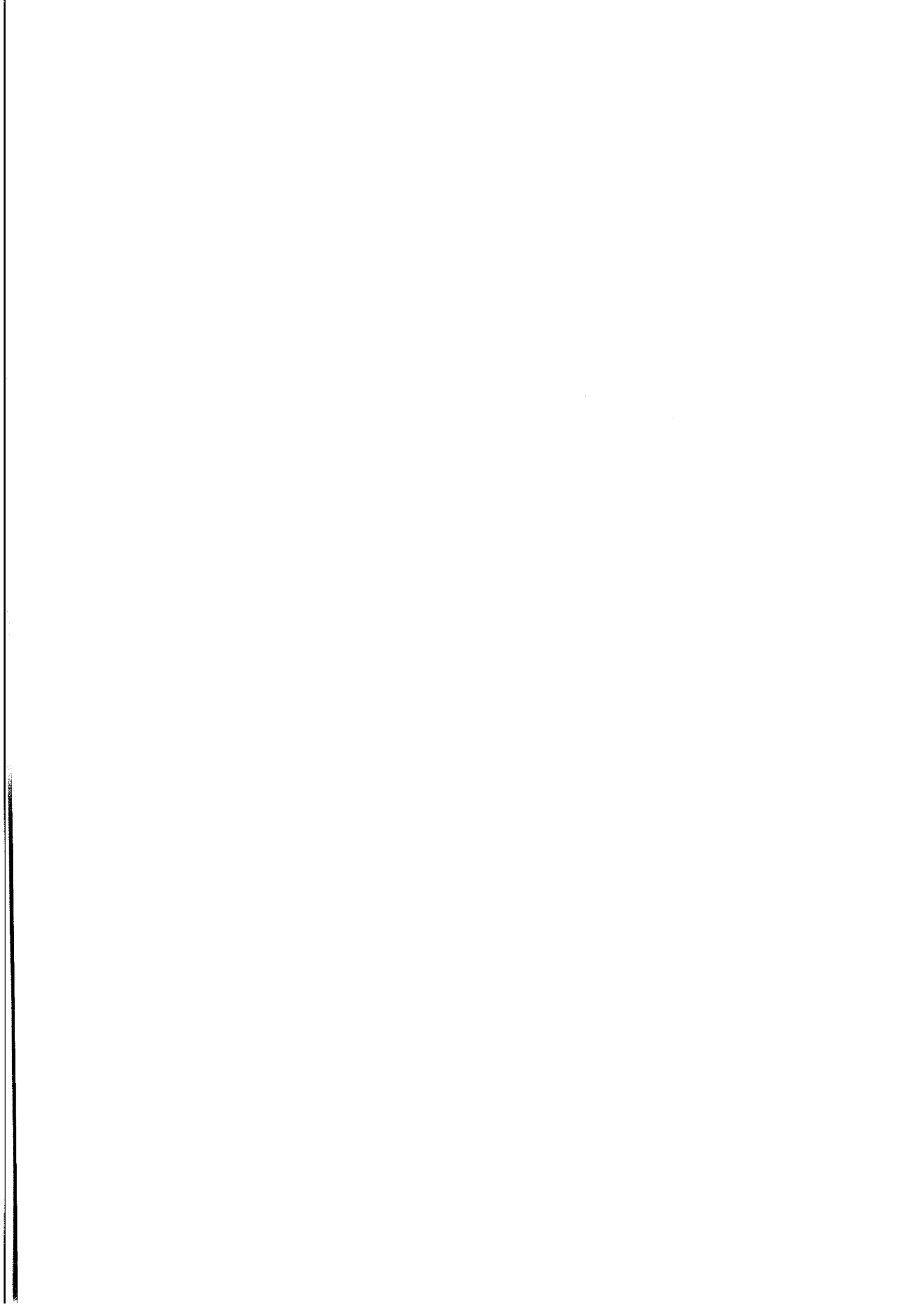
Substituint aquest factor a l'equació d'evolució final per al potencial ϕ (3.13) obtesa al primer apartat i tenint en compte que estem considerant un model sense anisotropies ($A = 0$), tenim que l'equació a resoldre queda de la forma:

$$\phi_{,\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{,\eta} - \frac{7\mathcal{T}}{3m}\Delta\phi = 0$$

on $\mathcal{T} = \frac{1}{\beta}$ representa la temperatura. Com la funció β verifica que $\frac{\beta}{a^2} = \text{constant}$, aleshores tenim que $a^2\mathcal{T} = \text{constant}$ on eixa constant vindrà donada pel valor del factor d'expansió i de la temperatura a l'època actual, $a^2\mathcal{T} = a_0^2\mathcal{T}_0$. Per tant l'equació d'evolució a resoldre per al potencial gravitatori queda:

$$\phi_{,\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{,\eta} - \frac{7\mathcal{T}_0}{3m\eta^4}\Delta\phi = 0 \quad (3.35)$$

essent \mathcal{T}_0 el valor de la temperatura a l'època actual. Al capítol següent resoldrem aquesta equació donades les condicions inicials corresponents.



Capítol 4

Obtenció de la solució general del problema d'Einstein–Vlasov linealitzat

El formalisme 3+1 junt a l'equació de Vlasov per a una funció de distribució de matèria sense col·lisions ens ha permet escriure les equacions d'Einstein–Vlasov acoblades com a una única equació d'evolució per al potencial gravitatori quan treballem amb mètriques de la forma de l'aproximació potencial. Aquesta equació és

$$\phi_{,\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{,\eta} - \frac{7\mathcal{T}_0}{3m\eta^4}\Delta\phi = 0 \quad (4.1)$$

A aquest capítol anem a centrar-nos en l'estudi d'aquesta equació d'evolució per trobar la seua solució general i determinar així el potencial gravitatori i, per tant, la mètrica. Una vegada obtinguda aquesta solució, donarem un exemple de la possible aplicació d'aquest resultat a la Cosmologia per obtindre l'evolució del contrast de densitat i la formació d'estructures.

4.1 Solució general del problema de Cauchy a l'espai de Fourier

El problema de Cauchy per a l'equació d'evolució per al potencial gravitatori està format per aquesta Equació (4.1) i les condicions inicials sobre el potencial i la seua primera derivada ja que l'equació és de segon ordre en les derivades temporals del potencial,

$$\begin{cases} \phi_{,\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{,\eta} - \frac{7T_0}{3m\eta^4}\Delta\phi = 0 \\ \phi(x, \eta_i) = \phi_i(x) \\ \phi_{,\eta}(x, \eta_i) = \phi'_i(x) \end{cases}$$

on recordem que $\phi_{,\eta} = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$, $\phi_{,\eta\eta} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}$, $\Delta\phi$ és el laplaciana espacial de ϕ , és a dir, $\Delta\phi = \delta^{ij}\phi_{,x_i x_j}$ i $\phi_i(x)$, $\phi'_i(x)$ són dues funcions de les coordenades espacials.

Una manera de trobar la solució general d'aquest tipus d'equacions consisteix en utilitzar transformades de Fourier, és a dir, passar a l'espai de Fourier, resoldre l'equació diferencial ordinària corresponent i després, fent les corresponents transformades inverses, obtenir la solució general per a la funció ϕ . Anem, doncs, a utilitzar aquest mètode per resoldre el nostre problema de Cauchy.

Considerem les transformades de Fourier sobre les coordenades espacials definides per:

$$\mathcal{F}[\phi(x, \eta)](s, \eta) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{is \cdot x} \phi(x, \eta) dx$$

on $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ són les coordenades espacials i $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ les corresponents a l'espai de Fourier. L'aplicació d'aquesta definició i de les propietats conegudes de les transformades de Fourier sobre el nostre problema de Cauchy fa desaparèixer el laplaciana $\Delta\phi$ de l'equació transformant-la a més a més en una equació diferencial ordinària de segon ordre. Aleshores,

a l'espai de Fourier, el problema que tenim és:

$$\begin{cases} \phi_{\eta\eta} + \frac{6}{\eta}\phi_{\eta} + \frac{7T_0}{3m\eta^4}s \cdot s\phi = 0 \\ \phi(s, \eta_i) = \mathcal{F}[\phi_i(x)](s) = \phi_i(s) \\ \phi_{\eta}(s, \eta_i) = \mathcal{F}[\phi'_i(x)](s) = \phi'_i(s) \end{cases}$$

on denotem per la mateixa lletra la funció i la seua transformada de Fourier, de manera que $\phi(s, \eta) = \mathcal{F}[\phi(x, \eta)](s, \eta)$ és la funció a l'espai de Fourier i les condicions inicials són per tant $\phi_i(s) = \mathcal{F}[\phi_i(x)](s)$ i $\phi'_i(s) = \mathcal{F}[\phi'_i(x)](s)$. A més denotem per $k^2 = s \cdot s$ al producte escalar de s com a element de \mathbb{R}^3 .

Per resoldre aquest problema de Cauchy tractarem en primer lloc l'equació diferencial com una equació d'una única variable (η) on les constants d'integració que ens apareixeran seran funcions de les coordenades espacials relacionades amb les condicions inicials segons indica el mateix problema. En aquesta equació, el canvi de variable $u = \frac{1}{\eta}$ la transforma en

$$u\phi_{uu} - 4\phi_u + cu k^2\phi = 0,$$

on denotem per $c = \frac{7T_0}{3m}$, la la solució general de la qual serà de la forma

$$\phi(s, u) = A\phi_1(s, u) + B\phi_2(s, u)$$

amb A i B dues constants (respecte de la coordenada temporal u) d'integració arbitràries i $\{\phi_1(s, u), \phi_2(s, u)\}$ un sistema de solucions fonamentals d'aquesta equació a l'espai de Fourier, verificant:

$$\begin{aligned} \phi_1(s, u_i) &= 1 & \phi_2(s, u_i) &= 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(s, u_i) &= 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(s, u_i) &= 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Amb la qual cosa, tornant al nostre problema de Cauchy, les condicions inicials ens determinaran les constants A i B , de manera que la solució general a l'espai de Fourier és:

$$\phi(s, u) = \phi_i(s)\phi_1(s, u) - \frac{1}{u_i^2}\phi'_i(s)\phi_2(s, u).$$

Llavors, sols ens queda determinar quines són aquestes dues solucions fonamentals.

La manera d'obtindre aquestes dues solucions fonamentals passa per obtindre dues solucions linealment independents i a partir d'elles veure quines seran les que verifiquen les condicions (4.2). Una solució es pot obtindre per integració complexa [14] en un contorn l tal que continga el punt $\alpha_1 = i\sqrt{c}k$ però no el punt $\alpha_2 = -i\sqrt{c}k$, de la següent manera:

$$\phi_+(s, u) = \int_l (\bar{u} - i\sqrt{c}k)^{-3} (\bar{u} + i\sqrt{c}k)^{-3} e^{u\bar{u}} d\bar{u},$$

resultant que $\phi_+(s, u)$ es pot escriure com

$$\phi_+(s, u) = e^{ui\sqrt{c}k} (cku^2 - 3i\sqrt{c}ku + 3)$$

on recordem que $k = \sqrt{s \cdot s}$ és el mòdul de s .

A partir d'aquesta solució $\phi_+(s, u)$ podem utilitzar el mètode de reducció de d'Alembert per obtindre un altra solució linealment independent amb aquesta mitjançant l'integral:

$$\phi_*(s, u) = \phi_+(s, u) \int_{u_i}^u \frac{t^4 dt}{(\phi_+(s, t))^2}$$

la qual dóna com a resultat la funció

$$\phi_*(s, u) = -\phi_+(s, u) \left[\frac{3ue^{-ui\sqrt{c}k}}{c^2 k^2 \phi_+(s, u)} + \frac{e^{-2ui\sqrt{c}k}}{2ic^{\frac{5}{2}} k^5} \right]_{u_i}^u$$

Aleshores el sistema format per les solucions $\{\phi_+, \phi_*\}$ és un sistema de solucions linealment independent per a qualsevol valor de la constant c . De fet, observem que per al cas en què $c = 0$ aquestes dues solucions resulten

$$\phi_+(s, u) = 3 \quad \phi_*(s, u) = \frac{1}{10}(u^5 - u_i^5)$$

de manera que la solució general de l'equació en aquest cas serà de la forma:

$$\phi(s, u) = C_1 + C_2 u^5$$

amb C_1 i C_2 constants arbitràries d'integració, tal i com hauríem obtingut al resoldre l'equació diferencial per al cas $c = 0$,

$$u\phi_{uu} - 4\phi_u = 0,$$

de manera més directa.

A partir d'aquest sistema linealment independent de solucions obtindrem el sistema fonamental:

$$\phi_1(s, u) = A\phi_+(s, u) + B\phi_*(s, u) \quad \phi_2(s, u) = C\phi_+(s, u) + D\phi_*(s, u),$$

les funcions del qual han de verificar les condicions inicials (4.2), aleshores les constants (respecte de u) resulten ser

$$A = \frac{1}{\phi_+(s, u_i)} \quad B = -\frac{1}{u_i^4} \frac{\partial \phi_+}{\partial u}(s, u_i)$$

$$C = 0 \quad D = \frac{\phi_+(s, u_i)}{u_i^4}.$$

Per tant, hem trobat el sistema fonamental $\{\phi_1(s, u), \phi_2(s, u)\}$ que buscàvem, a partir del qual generarem la solució del nostre problema de Cauchy a l'espai de Fourier. Aquestes dues funcions depenen del mòdul del vector $s = (s_1, s_2, s_3)$ i de la coordenada temporal u i la seua expressió és:

$$\phi_1(s, u) = \frac{3}{\epsilon^3} \left(\frac{\sin(kg)}{k^3} - g \frac{\cos(kg)}{k^2} \right) + \frac{u(3u_i - u)}{\epsilon u_i^2} \frac{\sin(kg)}{k} + \frac{u^2}{u_i^2} \cos(kg)$$

$$\phi_2(s, u) = \frac{9}{\epsilon^4 \tau} \left(g \frac{\cos(kg)}{k^4} - \frac{\sin(kg)}{k^5} + \frac{g^2 \sin(kg)}{3k^3} \right) - \frac{u^2 \sin(kg)}{\epsilon u_i k} \quad (4.3)$$

$$+ \frac{3u}{\epsilon^3} \left(g \frac{\cos(kg)}{k^2} - \frac{\sin(kg)}{k^3} \right)$$

on estem denotant per $g = \epsilon - \tau u$ una mesura del temps, per $\tau = \sqrt{c}$ un indicador de la temperatura i $\epsilon = \tau u_i$.

Observem que, donat que $g < \epsilon$ per a tot temps, tant ϕ_1 com ϕ_2 tendeixen a un valor de l'ordre de la unitat quan ϵ tendeix a zero. Per tant, no afegiran un valor significatiu sobre el valor del potencial gravitatori.

Recordem doncs, que la solució a l'espai de Fourier del nostre sistema serà:

$$\phi(s, u) = \phi_i(s)\phi_1(s, u) - \frac{1}{u_i^2}\phi_i'(s)\phi_2(s, u) \quad (4.4)$$

on $u = 1/\eta$ és la coordenada temporal invertida, de manera que, fent la transformada inversa de Fourier d'aquesta funció $\phi(s, u)$, obtindrem el potencial $\phi(x, u)$ solució del nostre problema de Cauchy de partida. Aquesta transformada inversa de Fourier podem fer-la de dues maneres diferents tenint en compte, per un costat la seua definició, i per l'altre les seues propietats generals, donant en ambdós casos el mateix resultat. Aquestes dues maneres consisteixen en:

- 1) Calcular la transformada inversa de Fourier de la funció obtinguda $\phi(s, u)$:

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi(s, u)](x, u) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-is \cdot x} \phi(s, u) ds$$

- 2) Utilitzar les propietats de les transformades inverses de Fourier per calcular la corresponent a $\phi(s, u)$ mitjançant productes de convolució entre funcions:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\phi(s, u)](x, u) &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_1(s, u)](x, u) * \phi_i(x) - \\ &- \mathcal{F}^{-1}[\phi_2(s, u)](x, u) * \frac{1}{u_i^2}\phi_i'(x) \end{aligned}$$

Com podem veure les condicions inicials determinaran la solució general del problema evolutiu plantejat, així com la manera més còmoda d'aplegar a ella, bé mitjançant transformades de Fourier inverses o bé per convolucions.

Per tant, hem trobat la solució general al nostre problema a l'espai de Fourier, de manera que conegudes les condicions inicials tenim el potencial gravitatori en qualsevol instant. A continuació anem a obtenir la solució general a l'espai real, fent les corresponents transformades inverses de Fourier i utilitzant el mètode més convenient.

4.2 Evolució del contrast de densitat

Abans de començar aquest estudi recordem que, en general, per treballar en Cosmologia, el resultat que interessa principalment conèixer no és el valor

i el comportament del potencial gravitatori (de la mètrica), sinó el valor i el comportament del contrast de densitat i del fluxe d'energia produïts per aquest potencial solució del problema de Cauchy. De fet, és habitual treballar amb aquestes quantitats en lloc de considerar el potencial. Tenint en compte que estem considerant totes aquestes quantitats com a funcionals del potencial, és a dir com a dependents de les coordenades a través del potencial, per a nosaltres serà equivalent conèixer un o les altres.

Com hem vist anteriorment sabem que la relació entre la densitat d'energia i el potencial gravitatori està donada per l'Equació (3.6), la qual es pot escriure, utilitzant el temps conforme, i menyspreant l'últim terme com:

$$4\pi G\rho = \frac{1}{a^2}\Delta\phi - \frac{3H}{a}\phi_{,\eta} - 3H^2b_1\phi + \frac{3H^2}{2}$$

i a la qual podem considerar la part homogènia $\frac{3H^2}{2} = \rho_0$ de manera que el contrast de densitat δ vindrà donat pel quocient

$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\eta^2}{6}\Delta\phi - \eta\phi_{,\eta} - 2b_1\phi. \quad (4.5)$$

De la mateixa manera, la relació entre el fluxe d'energia i el potencial, donada per l'expressió (3.7), s'escriu utilitzant el temps conforme com:

$$4\pi Gq_i = -\frac{1}{a_0\eta^2}\phi_{,\eta i} - \frac{2b_1}{a_0\eta^3}\phi_{,i}. \quad (4.6)$$

Com anteriorment hem especificat, n'hi ha dues maneres de calcular aquests funcionals del potencial per a unes condicions inicials donades. La primera d'elles seria trobar la solució per al potencial gravitatori utilitzant les transformades inverses de Fourier segons especifiquem anteriorment i, una vegada obtingut el potencial, substituir-lo a les expressions del contrast de densitat i del fluxe d'energia per obtindre aquestes quantitats. L'altra manera, que serà la que nosaltres utilitzarem, és continuar treballant a l'espai de Fourier, on ja tenim la solució del potencial, per aconseguir les expressions del contrast de densitat i del fluxe en relació a les funcions ϕ_1 i ϕ_2 i les condicions inicials i, posteriorment, fer les transformades inverses necessàries per caure

directament en el valor d'aquests dos funcionals sense necessitat de calcular el potencial $\phi(x, \eta)$ primerament.

Seguint aquest mètode, podem passar aquestes expressions a l'espai de Fourier utilitzant les transformacions de Fourier corresponents i les seues relacions per obtenir que el contrast de densitat a l'espai de Fourier, $\delta(s, \eta)$, s'escriu com:

$$\delta(s, \eta) = \mathcal{F}[\delta(x, \eta)](s, \eta) = -\frac{\eta^2}{6}k^2\phi(s, \eta) - \eta\phi_{,\eta}(s, \eta) - 2\phi(s, \eta)$$

a la qual, si a més a més considerem la forma de la solució general per al potencial donada per l'expressió (4.4) escrita per al temps conforme $\eta = 1/u$, tenim que aquest contrast resultarà en funció de ϕ_1 i ϕ_2 com:

$$\begin{aligned} \delta(s, \eta) = & -\left(\frac{\eta^2}{6}k^2 + 2\right) [\phi_1(s, \eta) \cdot \phi_i(s) - \eta_i^2\phi_2(s, \eta) \cdot \phi'_i(s)] - \\ & - \eta (\phi_{1,\eta}(s, \eta) \cdot \phi_i(s) - \eta_i^2\phi_{2,\eta}(s, \eta) \cdot \phi'_i(s)) \end{aligned}$$

essent $k^2 = s \cdot s$. Aquesta expressió serà la que utilitzem per calcular el contrast de densitat a l'espai de Fourier per després, mitjançant les transformades inverses corresponents passar a l'espai real i trobar $\delta(x, \eta)$. Recordem també que les expressions de les funcions ϕ_1 i ϕ_2 escrites en el temps conforme i simplificant-les mitjançant certs operadors diferencials són:

$$\phi_1(s, \eta) = \left(\frac{3}{\epsilon^3} \mathcal{D}_g - \frac{\eta_i(3\eta - \eta_i)}{\epsilon\eta^2} \partial_g^2 - \frac{\eta_i^2}{\eta^2} \partial_g^3 \right) \frac{\sin(kg)}{k^3}$$

on $\mathcal{D}_g(f) = f - g\partial_g(f)$, essent ∂_g , ∂_g^2 i ∂_g^3 les derivades parcials primeres, segones i terceres respecte de la variable $g = \tau \left(\frac{1}{\eta_i} - \frac{1}{\eta} \right)$ respectivament. I l'altra funció és

$$\phi_2(s, \eta) = \frac{-9}{\epsilon^5\eta_i} \left(\mathcal{D}_g + \frac{1}{3}g^2\partial_g^2 \right) \frac{\sin(kg)}{k^5} - \left(\frac{3}{\epsilon^3\eta} \mathcal{D}_g - \frac{\eta_i}{\epsilon\eta^2} \partial_g^2 \right) \frac{\sin(kg)}{k^3}$$

amb k el mòdul de s i $\epsilon = \tau/\eta_i$ essent $\tau = \sqrt{c}$ la mesura de la temperatura.

A continuació ens restringirem als casos en què les condicions inicials estan donades per funcions dependents de la coordenada radial r , fent un estudi de

la forma de la solució general en aquests casos per al contrast de densitat. És a dir, agafar com a condicions inicials, $\phi_i(r) = h_1(r)$ i $\phi_i'(r) = h_2(r)$ on les funcions h_1 i h_2 són funcions únicament de la coordenada radial. Tot això es traduirà en el següent contrast de densitat inicial:

$$\delta_i(r) = \left(\frac{\eta_i^2}{6} - 2 \right) \Delta h_1(r) - \eta_i h_2(r). \quad (4.7)$$

A aquesta expressió es pot observar que el cas amb potencial inicial nul no implica necessàriament que el contrast de densitat inicial siga nul sinó que aquest dependrà del valor inicial de la primera derivada temporal del potencial.

A l'expressió anterior (4.7) podem observar que donades les condicions inicials h_1 i h_2 , per obtenir el valor del contrast de densitat hem de fer un càlcul adicional, el de Δh_1 . Per estalviar aquest càlcul i donat que el que interessa per treballar en Cosmologia és el contrast de densitat, podem donar-nos com a condicions inicials el valor de la laplaciana del potencial gravitatori inicial, $\Delta \phi_i$, i el valor de la primera derivada temporal del potencial gravitatori. Amb aquestes dues quantitats podríem reobtindre fàcilment el valor inicial que pren el potencial gravitatori. Per tant treballarem amb dues condicions inicials de la forma

$$\frac{\eta_i^2}{6} \Delta \phi_i(r) = f_1(r) \quad \text{i} \quad \phi_i'(r) = f_2(r)$$

on les funcions $f_1(r)$ i $f_2(r)$ són funcions únicament de la coordenada radial r i a més es podran escriure, sense pèrdua de generalitat, com:

$$f_j(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_j(R_p) \left(H(R_p - r) - H(R_{p-1} - r) \right) \quad (4.8)$$

amb $j = 1, 2$, considerant una partició d'ordre n al domini de definició de la funció. La funció $H(\lambda)$ representa la funció de Heaviside 3-dimensional definida per

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

és a dir, una bola de radi λ .

Notem que l'expressió d'aquestes funcions és la mateixa ja es considere com a condició inicial de la laplaciana del potencial gravitatori com de la seua

primera derivada temporal. A més a més, aquesta descomposició no restringeix la forma de les funcions $f_j(r)$ ja que aquesta és vàlida tant per a funcions amb suport acotat, per a les quals el domini de definició seria l'interval $[0, R_0]$, com per aquelles amb suport no acotat que siguin integrables.

Aleshores, podem escriure el contrast de densitat evolucionat a l'espai de Fourier en funció de les condicions inicials de la següent manera:

$$\delta(k, \eta) = \frac{\eta^2}{6} \phi_1(k, \eta) \cdot \mathcal{F}[\nabla \phi_i](k) + \frac{\eta^2 \eta_i^2}{6} k^2 \phi_2(k, \eta) \cdot \phi_i'(k) \quad (4.9)$$

on solament hem considerat el terme de la laplaciana, ja que aquest representa la contribució dominant dels tres termes expressats anteriorment.

Per treballar a l'espai de Fourier necessitem fer la transformada de Fourier d'aquest tipus de funció $f_j(r)$, la qual, segons podem veure a l'Apèndix B, és de la forma:

$$f_j(k) = \mathcal{F}[f_j(r)](k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_j(R_p) \left(\mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(kR_p)}{k^3} - \mathcal{D}_{R_{p-1}} \frac{\sin(kR_{p-1})}{k^3} \right)$$

essent $\mathcal{D}_{R_p} h = h - R_p \partial_{R_p} h$ un operador similar a l'introduït anteriorment però ara respecte de la variable R_p , $j = 1, 2$ i $k = \sqrt{s \cdot s}$. Llavors la solució per al contrast de densitat a l'espai de Fourier serà, segons la relació (4.9), el producte d'aquestes $f_j(k)$ per les funcions ϕ_1 i ϕ_2 :

$$\delta(k, \eta) = \frac{\eta^2}{\eta_i^2} \phi_1(k, \eta) \cdot f_1(k) + \frac{\eta^2 \eta_i^2}{6} k^2 \phi_2(k, \eta) \cdot f_2(k).$$

Com veiem l'evolució del contrast de densitat tindrà una contribució per part del valor inicial de la derivada del potencial (f_2) on sols ens apareixeran els termes de la funció ϕ_2 , i un altra contribució deguda al valor de la laplaciana del potencial gravitatori inicial, a la qual interessarà únicament la funció ϕ_1 . Anem a estudiar cadascuna d'aquestes contribucions per separat.

4.2.1 Pertorbacions de la curvatura extrínseca

Estudiarem en primer lloc la contribució corresponent a una condició inicial no nul·la per a la primera derivada del potencial gravitatori. Geomètricament

això s'interpreta com l'efecte de produir variacions en la curvatura extrínseca associada a la mètrica.

Aquesta contribució, a l'espai de Fourier, substituint l'expressió de ϕ_2 i de la funció f_2 , es pot escriure com:

$$\delta^{(2)}(k, \eta) = \frac{\eta_i^3}{6\epsilon} P_1 - \frac{\eta_i^2 \eta}{2\epsilon^3} P_3 - \frac{3\eta_i \eta^2}{2\epsilon^5} P_5$$

essent cada terme P_i de la següent manera:

$$P_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_2(R_p) \left(\partial_g^2 \mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^4} - \partial_g^2 \mathcal{D}_{R_{p-1}} \frac{\sin(R_{p-1} k) \sin(gk)}{k^4} \right)$$

$$P_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_2(R_p) \left(\mathcal{D}_g \mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^4} - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_{R_{p-1}} \frac{\sin(R_{p-1} k) \sin(gk)}{k^4} \right)$$

$$P_5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_2(R_p) \left(\mathcal{D}_g + \frac{1}{3} g^2 \partial_g^2 \right) \left(\mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^6} - \mathcal{D}_{R_{p-1}} \frac{\sin(R_{p-1} k) \sin(gk)}{k^6} \right)$$

Anem a estudiar aquests factors per veure com s'escriu la transformada inversa de Fourier corresponent a cadascun d'ells de manera que així obtindrem l'expressió de la contribució al contrast de densitat a l'espai real del valor incial de la primera derivada del potencial. Primerament observem que la transformada inversa de Fourier del primer terme, P_1 , es construeix mitjançant els límits següents:

$$\mathcal{F}^{-1}[P_1] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_2(R_p) (Z_1(R_p, g, r) - Z_1(R_{p-1}, g, r))$$

amb la funció Z_1 donada per l'expressió:

$$Z_1(R, g, r) = \partial_g^2 \mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^4} \right] = -\mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^2} \right].$$

Per tant, podem escriure en general i recordant la definició d'integració de Stieltjes [15] que la transformada inversa de la funció P_1 s'obté mitjançant una integració d'aquest tipus:

$$L_1 = \mathcal{F}^{-1}[P_1] = \int_0^{+\infty} f_2(R) dZ_1(R).$$

De la mateixa manera per a la resta de termes que apareixen al contrast de densitat tenim que les transformades inverses de Fourier corresponents es calcularan mitjançant integrals de Stieltjes. Per al terme P_3 resulta:

$$L_3 = \mathcal{F}^{-1}[P_3] = \int_0^{+\infty} f_2(R) dZ_3(R),$$

on ara la funció Z_3 està donada per

$$Z_3(R, g, r) = \mathcal{D}_g \mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^4} \right].$$

I per al terme P_5 tindrem

$$L_5 = \mathcal{F}^{-1}[P_5] = \int_0^{+\infty} f_2(R) dZ_5(R)$$

essent Z_5 en aquest cas la següent:

$$Z_5(R, g, r) = (\mathcal{D}_g + \frac{1}{3} g^2 \partial_g^2) \mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^6} \right].$$

Per tant podem escriure aquesta part del contrast de densitat a l'espai real en funció d'aquestes integrals de la següent manera:

$$\delta^{(2)}(r, \eta) = \frac{\eta_i^3}{6\epsilon} L_1 - \frac{\eta_i^2 \eta}{2\epsilon^3} L_3 - \frac{3\eta_i \eta^2}{2\epsilon^5} L_5. \quad (4.10)$$

Calculem doncs aquestes integrals de Stieltjes. Per resoldre les dues primeres es convenient utilitzar el mètode d'integració per parts. Aquest mètode es aplicable encara que les funcions Z_1 i Z_3 no siguin derivables, però sí serà convenient que la funció f_2 ho siga per poder calcular les integrals finals que

resulten. Comencem en primer lloc per la integral L_3 , la integració per parts permet reduir aquesta integral a

$$L_3 = - \int_0^{+\infty} Z_3(R) df_2(R)$$

ja que, en general, es té que les funcions f_j s'anulen per a tot $r > R_0$ (si són de suport acotat) o tendeixen a zero quan R tendeix a infinit per ser integrables, i a més, en aquest cas, la funció $Z_3(R)$ s'anul·la quan $R = 0$ donat que, per l'Apèndix B, aquesta funció resulta ser de la forma:

$$Z_3(R, g, r) = \frac{1}{16\pi r} \begin{cases} R^2 + g^2 - r^2 & \text{si } |r - g| < R < r + g \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases} \quad (4.11)$$

on hem fet ús de l'expressió (4.21) de la transformada inversa de Fourier i hem aplicat els operadors corresponents sobre R i sobre g a aquesta transformada. Per tant, substituint el valor de la funció Z_3 tenim la integral

$$L_3 = \frac{-1}{16\pi r} \int_{|r-g|}^{r+g} (R^2 + g^2 - r^2) df_2(R)$$

on, tenint en compte que la funció $f_2(R)$ és diferenciable, aquesta integral es pot reduir a una integral de Riemann aplicant de nou la integració per parts. Finalment resulta que:

$$L_3 = \frac{-1}{8\pi r} \left\{ g(r+g)f_2(r+g) + g(r-g)f_2(|g-r|) - \int_{|r-g|}^{r+g} R f_2(R) dR \right\}.$$

De la mateixa manera podem estudiar mitjançant la integració per parts la integral L_1 , per a la qual tindrem que:

$$L_1 = - \int_0^{+\infty} Z_1(R) df_2(R)$$

ja que, pel mateix raonament anterior la funció f_2 tendeix a zero cap a l'infinit i la funció Z_1 també s'anul·la quan $R = 0$ donat que la seua expressió és:

$$Z_1(R, g, r) = \frac{1}{8\pi r} \left\{ -\bar{Z}_1(R, g, r) + R \left(\delta^D(r-B) + H(A)\delta^D(r-A) - H(-A)\delta^D(r+A) \right) \right\} \quad (4.12)$$

on δ^D denota la distribució *delta* de Dirac i la part \bar{Z}_1 ve donada per:

$$\bar{Z}_1(R, g, r) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi r} & \text{si } |r - g| < R < r + g \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}.$$

En l'obtenció d'aquesta expressió hem fet ús de la transformada inversa de Fourier (4.22) calculada a l'Apèndix B i aplicant sobre aquesta l'operador diferencial corresponent (\mathcal{D}_R).

Això ens permet calcular aquesta integral obtenint que el seu valor és:

$$L_1 = \frac{1}{8\pi r} \left[f_2(r + g) - f_2(|r - g|) - |r - g|f_2'(|r - g|) + (r + g)f_2'(r + g) \right]$$

on f_2' denota la primera derivada de la funció f_2 .

Per últim estudiem la integral L_5 , per calcular aquesta integral ens calculem primerament el valor de la funció Z_5 ja que el mètode de càlcul de la integral dependrà d'aquesta funció. Per obtindre Z_5 hem de fer la transformada inversa de Fourier de la funció

$$U(k, g) = \frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^6},$$

la qual calculem a l'Apèndix B. Segons l'expressió (4.23) i una vegada aplicats els operadors diferencials corresponents sobre aquesta expressió, resulta que la funció Z_5 és de la forma:

$$\begin{aligned} Z_5(R, g, r) = & -\frac{1}{2} \int_{g-R}^{g+R} t\psi(t)dt + \frac{1}{2}(gR - \frac{1}{3}g^2)\psi(g - R) + \\ & + \frac{1}{2}(gR + \frac{1}{3}g^2)\psi(g + R) - \frac{1}{6}g^2R(\psi'(g - R) + \psi'(g + R)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

on denotem per $\psi(t, r) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(tk)}{k^4} \right]$, la qual té la forma (4.20) segons hem calculat a l'esmentat apèndix. Per tant la funció Z_5 és derivable i podem calcular la seua derivada respecte de la variable R de manera que la integral L_5 s'obté com

$$L_5 = \int_0^{+\infty} f_2(R) \partial_R Z_5 dR.$$

Segons l'expressió (4.13) aquesta derivada parcial de Z_5 ens porta a que

$$\partial_R Z_5 = \frac{1}{16\pi r} \begin{cases} 4R^2 r H(g-r) & \text{si } R < |r-g| \\ R \left(2Rr - r^2 - R^2 + \frac{1}{3}g^2 \right) & \text{si } |r-g| < R < r+g \\ 0 & \text{si } R > r+g \end{cases}$$

Llavors, la integral resulta

$$L_5 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{g-r} R^2 f_2(R) dR \quad H(g-r) + \\ + \frac{1}{16\pi r} \int_{|r-g|}^{r+g} R \left(2rR - R^2 - r^2 + \frac{g^2}{3} \right) f_2(R) dR$$

amb la qual cosa tenim calculat el contrast de densitat $\delta^{(2)}$ salvant el valor de la funció f_2 de la condició inicial com a suma (4.10) d'aquestes integrals L_1 , L_3 i L_5 .

4.2.2 Pertorbacions de la curvatura

Estudiem a continuació la contribució generada pel valor inicial del contrast de densitat (bàsicament pel valor inicial de la laplaciana del potencial gravitatori). Aquesta contribució, la qual s'interpreta geomètricament com a pertorbacions de la curvatura, està donada per:

$$\delta^{(1)}(k, \eta) = -Q_0 + \frac{\eta_i - 3\eta}{\epsilon \eta_i} Q_1 + \frac{3\eta^2}{\epsilon^3 \eta_i^2} Q_3$$

essent cada terme Q_i de la següent manera:

$$Q_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_1(R_p) \left(\partial_g^3 \mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^6} - \partial_g^3 \mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^6} \right)$$

$$Q_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_1(R_p) \left(\partial_g^2 \mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^6} - \partial_g^2 \mathcal{D}_{R_{p-1}} \frac{\sin(R_{p-1} k) \sin(gk)}{k^6} \right)$$

$$Q_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f_1(R_p) \left(\mathcal{D}_g \mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k) \sin(gk)}{k^6} - \right)$$

$$-\mathcal{D}_g \mathcal{D}_{R_{p-1}} \left(\frac{\sin(R_{p-1}k) \sin(gk)}{k^6} \right)$$

De manera anàloga a la desenvolupada anteriorment per a la contribució al contrast de densitat de la primera derivada del potencial, les transformades inverses de Fourier de cadascun d'aquests factors es calcula mitjançant integració de Stieltjes de manera que tindrem:

$$1) M_0 = \mathcal{F}^{-1}[Q_0] = \int_0^{+\infty} f_1(R) dY_0(R) \quad \text{essent la funció } Y_0 \text{ la donada per:}$$

$$Y_0(R, g, r) = \partial_g^3 \mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^6} \right] = -\mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \cos(gk)}{k^3} \right]$$

$$2) M_1 = \mathcal{F}^{-1}[Q_1] = \int_0^{+\infty} f_1(R) dY_1(R) \quad \text{on } Y_1 \text{ està donada per}$$

$$Y_1(R, g, r) = \partial_g^2 \mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^6} \right] = -\mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^4} \right]$$

$$3) M_3 = \mathcal{F}^{-1}[Q_3] = \int_0^{+\infty} f_1(R) dY_3(R) \quad , \text{ ara la funció } Y_3 \text{ és}$$

$$Y_3(R, g, r) = \mathcal{D}_g \mathcal{D}_R \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^6} \right].$$

Per tant ens queda calcular aquestes integrals de Stieltjes i les transformades inverses de Fourier necessàries a cadascuna d'elles. Calculem primer el terme corresponent a la transformada Y_0 . Per calcular aquesta transformada tenim en compte que també es pot escriure com:

$$Y_0(R, g, r) = -\mathcal{D}_R \partial_g \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^4} \right]$$

amb la qual cosa podem utilitzar els resultats de l'Apèndix B per escriure aquesta funció com

$$Y_0(R, g, r) = -\frac{1}{8\pi r} \begin{cases} 0 & \text{si } R < |r - g| \\ g - r & \text{si } |r - g| < R < r + g \\ 2r & \text{si } R > r + g \end{cases}$$

Aleshores la integral corresponent a aquesta funció es pot resoldre utilitzant com a l'apartat anterior el mètode d'integració per parts reduint-la a:

$$M_0 = \frac{1}{8\pi r} \left\{ (r-g) \left(f_1(r+g) - f_1(|r-g|) \right) - 2r f_1(r+g) \right\}.$$

La següent integral M_1 es pot fer també utilitzant la integració per parts ja que la funció Y_1 , segons el mateix *Apèndix B*, és de la forma:

$$Y_1(R, g, r) = \frac{1}{16\pi r} \begin{cases} 0 & \text{si } R < |r-g| \\ (r-g)^2 - R^2 & \text{si } |r-g| < R < r+g \\ -4gr & \text{si } r > r+g \end{cases}$$

i conseqüentment la integral es redueix a:

$$M_1 = -\frac{1}{8\pi r} \int_{|r-g|}^{r+g} R f_1(R) dR.$$

Finalment ens queda calcular la integral M_3 per a la qual necessitem la transformada inversa de Fourier representada per la funció Y_3 . Aquesta transformada és part de la Z_5 calculada a l'apartat anterior i per tant la manera de procedir per a la resolució de l'integral serà totalment anàloga, és a dir, ací no aplicarem integració per parts sinó que tindrem en compte que la funció és Lipstziana per resoldre la integral. En primer lloc, veiem que la funció Y_3 resulta:

$$Y_3(R, g, r) = -\frac{1}{2} \int_{g-R}^{g+R} t \psi(t) dt + gR (\psi(A) + \psi(B))$$

essent $\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(tk)}{k^4} \right]$. Per tant la derivada parcial d'aquesta funció respecte de la variable R és:

$$\partial_R Y_3 = \frac{1}{16\pi r} \begin{cases} 4R^2 r H(g-r) & \text{si } R < |r-g| \\ R(2Rr - r^2 - R^2 + g^2) & \text{si } |r-g| < R < r+g \\ 0 & \text{si } R > r+g \end{cases}$$

i aleshores la integral es queda com:

$$M_3 = \int_0^\infty f_1(R) \partial_R Y_3 dR = \frac{1}{4\pi} \int_0^{g-r} R^2 f_1(R) dR H(g-r) +$$

$$+ \frac{1}{16\pi r} \int_{|r-g|}^{r+g} R(2Rr - r^2 - R^2 + g^2) f_1(R) dR.$$

Per tant tenim calculada aquesta part del contrast de densitat, $\delta^{(1)}$, en funció d'aquestes integrals de la següent manera:

$$\delta^{(1)}(r, \eta) = -M_0 + \frac{\eta_i - 3\eta}{\epsilon\eta_i} M_1 + \frac{3\eta^2}{\epsilon^3\eta_i^2} M_3 \quad (4.14)$$

amb la qual cosa, l'expressió total del contrast de densitat serà la suma d'ambdues contribucions,

$$\delta(r, \eta) = \delta^{(1)}(r, \eta) + \delta^{(2)}(r, \eta)$$

podent calcular cadascuna per separat.

A continuació anem a veure com aplicar aquests resultat en Cosmologia. Al següent apartat donem un inici d'aquesta aplicació, agafant uns certs valors inicials per a les funcions f_j veiem com és l'evolució del contrast de densitat, el seu perfil en el temps i com originen la formació d'estructures. Sense anar més enllà, volem mostrar la viabilitat d'aquest resultat com a ferramenta per a la generació d'estructures.

4.3 Formació de cúmuls

Apliquem aquests resultats a funcions f_j conegudes a la literatura cosmològica, és a dir, determinarem les condicions inicials i veurem la seua evolució en el temps. Com a perfil inicial per al contrast de densitat és usual treballar amb funcions de la forma dels models de King [16]. Agafarem en primer lloc una funció $f_1(r)$ que tinga la forma dels models de King i una funció $f_2(r)$ que siga menyspreable front a aquesta f_1 , de manera que al contrast de densitat inicial domine la funció f_1 . És a dir prenem com a funció f_1 l'expressió

$$\delta_i(r) \approx f_1(r) = K \left(\frac{R_0^2}{R_0^2 + r^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.15)$$

essent K una constant que marcarà el valor màxim inicial al que aplega el contrast de densitat i R_0 altra constant marcant la distància r on la projecció

2-dimensional del contrast de densitat s'ha reduït a la meitat respecte del contrast al centre. Aquesta condició inicial dóna per tant que el perfil inicial del contrast de densitat és de la forma de la figura següent:

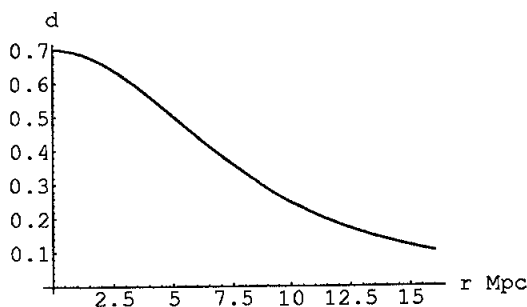


Figura 4.1: Perfil inicial del contrast de densitat $\delta_i(r)$ quan considerem $K = 0.7$ i $R_0 \approx 10^{-2}$.

L'altra condició inicial, la referida a la derivada primera del potencial ha de ser una funció menyspreable front a l'anterior de manera que realment el contrast de densitat inicial siga la funció f_1 . Aleshores agafem com a condició inicial f_2 la funció:

$$f_2(r) = -\frac{1}{r+C} \left(\frac{R_1}{R_1+r} \right)^2$$

on $1/C$ representa el valor màxim d'aquesta funció, el qual es dóna en el centre. Com podem veure a la Figura 4.2 aquesta funció realment és menyspreable front a la f_1 quan agafem valors apropiats de les constants C i R_1 .

Notem que la forma de la funció f_2 correspon a la forma de les condicions inicials que donarien una evolució tipus Frenk-Navarro-White (FNW) [17] (encara que hem afegit la constant C). Recordem que el perfil de FNW és l'obtingut per les simulacions d' N cossos cosmològiques. Nosaltres veurem que l'evolució a la que ens porten aquestes condicions inicials triades coincideixen amb les de FNW en un interval de r , separant-se d'aquestes fora d'aquest interval.

Per altra banda, encara que la funció f_2 és menyspreable front a la f_1 , aquesta condició inicial f_2 és la que provocarà tot el creixement al contrast de

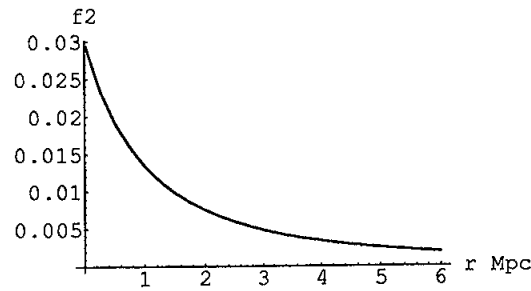


Figura 4.2: Condició inicial sobre la primera derivada temporal del potencial gravitatori, $f_2(r)$ quan considerem $C = 0.03$ i $R_1 \approx 10^{-3}$.

densitat ja que en l'evolució fa aparèixer a l'expressió del contrast de densitat evolucionat un factor R_1^2 dividint al valor de la laplaciana del potencial. Aquest factor fa que, encara que la variació del potencial no siga gran, la variació del contrast s'incrementa considerablement. De fet, el cas en què agafarem $f_2(r) = 0$, no donaria més que un creixement del contrast de densitat de l'ordre del factor d'expansió de la mètrica ja que en aquest cas no apareixeria el factor R_1^2 al denominador i per tant el creixement estaria sempre per baix del requerit per a la formació de cúmuls o altres estructures. En eixe sentit, s'imposa la necessitat d'agafar una condició inicial no nul·la per a la primera derivada del potencial gravitatori.

L'evolució del contrast de densitat donades aquestes dues condicions inicials està donada per l'expressió

$$\delta(r, \eta) = \delta^{(1)}(r, \eta) + \delta^{(2)}(r, \eta)$$

on $\delta^{(1)}$ i $\delta^{(2)}$ venen donades per integrals segons les expressions (4.14) i (4.10) respectivament. Substituint les funcions f_1 i f_2 a eixes expressions obtenim el contrast de densitat en funció de la coordenada radial i del temps. Aquest contrast de densitat creix en el centre a mesura que evolucionem fins aplegar a l'època actual, mostrem aquest creixement a la Figura 4.3

Aleshores, aquest creixement central del contrast de densitat produeix un canvi en el seu perfil al llarg del temps. A l'època actual el contrast de densitat

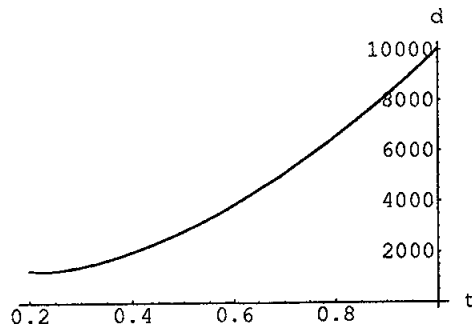


Figura 4.3: Evolució del contrast de densitat en el centre $\delta(0, \eta)$ fins a l'època actual per al cas en què $K = 0.7$, $R_1 \approx 10^{-2}$, $C = 0.03$ i $R_2 \approx 10^{-3}$ quan considerem $\eta_i = 1/5$, *redshift* $z = \left(\frac{1}{\eta_i^2} - 1\right)$, i ϵ de l'ordre de 10^{-5} .

pren un perfil com el que mostrem a la Figura 4.4, és a dir, aconseguim un

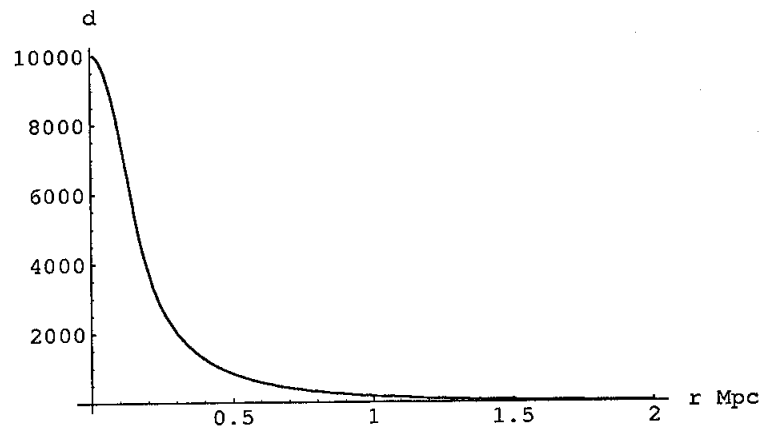


Figura 4.4: Perfil del contrast de densitat $\delta(r)$ a l'època actual per al cas en què $K = 0.7$, $R_1 \approx 10^{-2}$, $C = 0.03$ i $R_2 \approx 10^{-3}$ quan considerem $\eta_i = 1/5$ i ϵ de l'ordre de 10^{-5} .

creixement al contrast de densitat en el centre de l'ordre de l'observat per als cúmuls així com la grandària típica associada a aquestes estructures (0.2 Mpc); i a mesura que ens allunyem del centre el contrast de densitat disminueix, primer molt ràpidament per després tendir asimptòticament a zero (Figura 4.4).

Representant aquest contrast de densitat evolucionat en escala logarítmica podem comparar amb els resultats obtinguts per simulació numèrica per FNW. Aquesta comparació, representada a la Figura 4.5, permet veure les diferències i semblances entre el contrast de densitat obtingut pels dos mètodes. Ambdós mètodes són tangents en una regió, però cap al centre i cap a l'exterior difereixen. Mentre que per a FNW el creixement cap al centre tendeix a infinit, per a la nostra solució el valor en el centre es talla en un valor finit. Per l'altre costat el valor del contrast de densitat cap a l'exterior (per a r grans) decau molt més ràpidament per a la nostra solució que per a l'obtinguda per FNW.

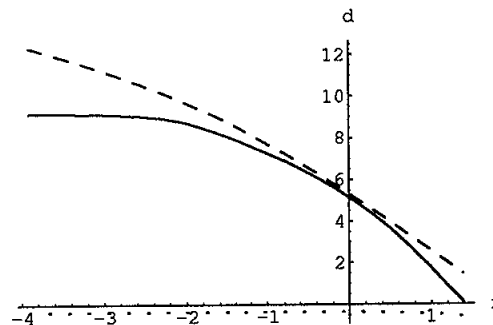


Figura 4.5: Contrast de densitat a escala logarítmica. La línia contínua representa el $\delta(r)$ aconseguit per nosaltres a l'època actual, la línia discontinua és el contrast de densitat a l'època actual obtingut per FNW i la línia de punts representa el contrast de densitat inicial.

Aquest resultat sembla prou raonable però el model presenta un inconvenient. Donada l'Equació (4.6) podem determinar el camp de velocitats inicial, el mòdul del qual resulta

$$v_i(r) = \frac{\eta_i^2}{6} |f_2'(r)| \quad (4.16)$$

i aleshores, utilitzant la funció f_2 i els valors dels paràmetres corresponents, s'obtenen velocitats inicials massa grans, tal i com mostrem a la Figura 4.6. .

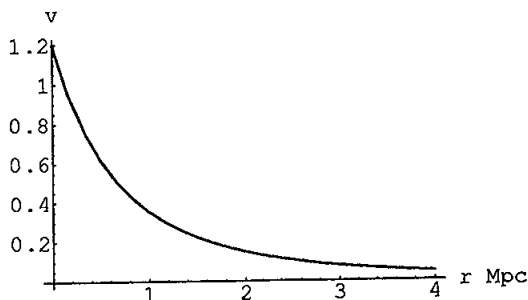


Figura 4.6: Mòdul de les velocitats inicials

Però sempre es poden aconseguir models sense aquest inconvenient canviant les condicions inicials i els valors dels paràmetres, de manera que obtindrem situacions similars a les anteriors i amb un camp de velocitats inicial molt menor que l'anterior. A continuació donem un model on obtenim aquesta millora.

Com hem vist a l'exemple anterior, la condició inicial sobre la derivada temporal del potencial, encara que menyspreable front al valor inicial de la laplaciana del potencial, és la responsable en l'evolució del creixement del contrast de densitat en el centre i per tant de la formació d'estructures (veure l'Equació (4.5)). A més a més aquesta condició inicial dóna també el camp de velocitats inicials. Per tant, per obtenir diferents camps de velocitats hauriem de produir variacions sobre la derivada inicial del potencial, la qual cosa pot produir per tant variacions en el tipus d'evolució del contrast de densitat. Variarem per tant la funció $f_2(r)$ de la que partim.

Agafem com a nova condició inicial per a la primera derivada del potencial gravitatori la funció següent:

$$f_2(r) = -C \left(\frac{R_1}{R_1 + r} \right)^3 - D \left(\frac{R_2}{R_2 + r} \right)^3 \quad (4.17)$$

i fem nul el valor inicial del potencial, $f_1(r) = 0$. En aquest cas l'evolució del contrast de densitat porta a gràfiques similars a les anteriors, essent la comparativa a escala logarítmica entre el perfil del contrast obtingut per nosaltres a l'època actual i el corresponent a un model de FNW, la gràfica 4.3 que mostrem a continuació.

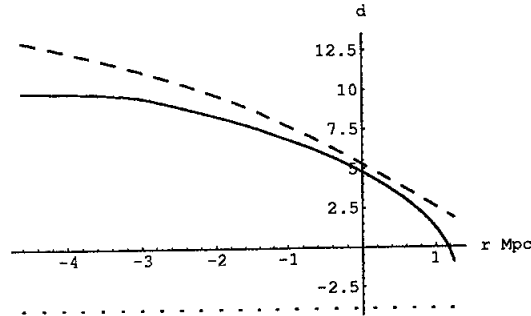


Figura 4.7: Contrast de densitat a escala logarítmica. La línia contínua representa el $\delta(r)$ aconseguit per nosaltres a l'època actual, la línia discontinua és el contrast de densitat a l'època actual obtingut per FNW i la línia de punts representa el contrast de densitat inicial considerat. Els paràmetres considerats per aquesta representació són $\eta_i = 1/5$, $C = 4.5 \cdot 10^{-3}$, $R_1 = 1.5$, $D = 1.6 \cdot 10^{-2}$, $R_2 = 4$ i ϵ de l'ordre de 10^{-5} .

El camp de velocitats inicial que resulta en aquest cas és molt menor que al model anterior essent la velocitat inicial màxima que s'obté de 0.00014 com podem observar a la Figura 4.8, on hem fet ús de l'Equació (4.16) amb valors dels paràmetres de la funció f_2 els utilitzats per realitzar la Figura 4.7.

Observem que el primer exemple podria haver suggerit que per fer créixer una estructura es necessita donar inicialment grans velocitats cap al centre a la matèria, però aquest últim exemple ens mostra que això no és necessàriament així, podem fer aparéixer estructures tenint velocitats inicials cap al centre de l'ordre de 10^{-4} .

Notem també que les funcions $f_2(r)$ utilitzades als dos exemples són similars, més concretament verifiquen que $|f_2^{(I)} - f_2^{(II)}| \leq 0.33|f_2^{(I)}|$ per a tot r . Aquest és el motiu pel qual el resultat final de l'evolució del contrast de densitat dels dos models és semblant, veure les Figures 4.5 i 4.7.

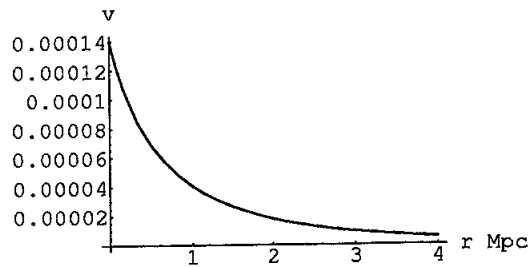


Figura 4.8: Mòdul de les velocitats inicials per a la funció f_2 donada per (4.17) i amb valors de les constants els donats a la Figura 4.7

4.4 Discussió

La teoria relativista linealitzada de l'evolució de les pertorbacions d'un model de Friedmann fou formulada per Lifshitz en 1946 [18]. Com en aquesta tesi s'hem replantejat el tema, és convenient fer un xicotet resum senyalant les diferències entre ambdós resultats.

En primer lloc, el que importa, a efectes de l'evolució, és conèixer la pertorbació sobre la mètrica espacial o sobre la curvatura extrínseca d'una superfície $\eta = \text{constant}$ del model de Friedmann. Al nostre cas aquesta informació està continguda principalment al potencial inicial i a la seua derivada primera temporal inicial. Amb aquesta informació hem obtingut la solució general del problema a l'espai de les coordenades espacials en termes d'integrals de les condicions inicials. El treball de Lifshitz dona la solució únicament a l'espai de Fourier.

En aquest treball hem suposat que la pertorbació comença en una etapa tardia de l'evolució de l'Univers, quan la mètrica pertorbada pot aproximar-se per un espai d'Einstein-de Sitter amb factor d'expansió $a(\eta) = a_0\eta^2$. També hem suposat una solució sense pressions anisotròpiques obtenint finalment una pressió isotròpica de la forma $P = P_0(\eta) + (7T_0/60\pi Gm\eta^4)\Delta\phi$. Al treball de Lifshitz es considera únicament pressió isotròpica $P = 0$, la qual cosa explica la diferència entre els dos resultats.

Finalment, la contribució del potencial al contrast de densitat final fa que, quan el contrast creix, ho faci amb el factor d'expansió. Qualitativament l'evolució d'aquesta pertorbació pot entendre's en el marc de la gravitació Newtoniana.

Per altra banda, la contribució de la derivada temporal del potencial al contrast de densitat li fa tindre un creixement molt més ràpid i pot ser relevant per explicar la formació d'estructures. Per tant és essencial que la pertorbació modifiqui la curvatura extrínseca ja que la pertorbació de la curvatura escalar dóna lloc a creixements molt suaus. A diferència del cas anterior, aquesta evolució no pot entendre's dins del marc de la gravitació Newtoniana.

Apèndix A

Integrals associades a la funció de distribució

El tensor impuls-energia associat a una funció de distribució de matèria ve donat per integració de superfície d'aquesta funció a l'espai 3-dimensional de moments. Per al cas particular d'una funció que es separa de l'equilibri segons la forma donada en (3.14) resulta que l'obtenció del corresponent tensor impuls-energia està associada al càlcul de les integrals de la forma

$$M_n = \int f_0 \mathbf{p}^n d\omega \forall n \in \mathcal{N}$$

on $d\omega$ representa l'element de volum a l'espai de moments, el qual en coordenades "cartesianes" per als moments s'escriu

$$d\omega = \frac{\sqrt{-g}}{|p_0|} dp^1 dp^2 dp^3$$

on g representa el determinant de la mètrica d'espai-temps considerada, és a dir per al nostre cas aquesta serà $g = -\alpha^2 a^6 \gamma^6$ doncs la mètrica que estem utilitzant és la donada a (3.29).

Donat que a l'equilibri hem considerat $f_0 = e^{\mu} e^{-\kappa |\vec{p}|^2}$, on recordem que $\mu = \theta - m\beta$ i $\kappa = \frac{a^4 \gamma^2}{2mT_0}$ essent $|\vec{p}|^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = \delta_{ij} p^i p^j$, pareix

més convenient treballar en coordenades "esfèriques" per als moments, a les quals l'element de volum resulta

$$d\omega = \frac{\sqrt{-g}}{|p_0|} |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega$$

essent $d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\varphi$ l'element d'angle sòlid. A més a més tenim que la component p_0 del quadri-moment a la nostra mètrica resulta $p_0 = g_{0\mu} p^\mu = -\alpha^2 p^0$, a la qual també hem de considerar la relació $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -m^2$. Aleshores tenim que el mòdul $|p_0|$ pot ser substituït per

$$|p_0| = \alpha |p^0| \approx m + \frac{1}{2m} a^2 \gamma^2 |\vec{p}|^2 - \frac{1}{8m^3} a^4 \gamma^4 |\vec{p}|^4 + \dots$$

tenint ja tot expressat en coordenades esfèriques per als moments salvant el producte tensorial \mathbf{p}^n .

Anem ara a abordar el càlcul de les M_n , per això notem que cadascuna d'aquestes representa un tensor d'ordre n , per la qual cosa podem fer la seua descomposició relativa a l'observador $\mathbf{u} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}$. Per exemple, el tensor M_2 d'ordre 2 no té fluxes ni pressions anisotròpiques, com podem deduir de la seua forma integral, i aleshores la seua descomposició resulta

$$M_2 = m_2^2 \mathbf{u}^2 + m_2^0 h$$

essent h el projector ortogonal de la mètrica espai-temporal relatiu a l'observador \mathbf{u} i per tant les funcions escalars m_2^2 i m_2^0 s'obtenen per contraccions del tensor M_2 amb l'observador \mathbf{u} i el projector ortogonal h resultant les següents integrals

$$m_2^2 = i^2(\mathbf{u}) M_2 = \int f_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^2 d\omega$$

$$m_2^0 = \frac{1}{3} h(M_2) = \frac{1}{3} \int f_0(h_{ij} p^i p^j) d\omega$$

on $i()$ representa la contracció interior d'ordre la potència corresponent. Anàlogament per a M_3 , tensor d'ordre 3, la seua descomposició resulta:

$$M_3 = m_3^3 \mathbf{u}^3 + m_3^1 h \cdot \mathbf{u}$$

amb els factors multiplicatius essent

$$m_3^3 = -i^3(\mathbf{u}) = -\int f_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^3 d\omega$$

$$m_3^1 = -\int f_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) h_{ij} p^i p^j d\omega$$

De la mateixa manera podem anar descomposant tots els tensors M_n relativament a l'observador \mathbf{u} i al projector ortogonal associat de manera que l'expressió general que obtenim per aquestes descomposicions és:

$$M_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} m_n^{n-2k} h^k \mathbf{u}^{n-2k}$$

on $[\frac{n}{2}]$ representa la part sencera d'aquest quocient, és a dir, agafarem $\frac{n}{2}$ si n és parell i $\frac{n-1}{2}$ si n és imparell, $\mathbf{u}^k = \mathbf{u} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}$ i el producte $h^k \mathbf{u}^{n-2k}$ representa un tensor d'ordre n amb únicament les components linealment independents del producte tensorial $h \otimes \dots \otimes h \otimes \mathbf{u} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}$ tenint en compte les simetries corresponents, per exemple $h\mathbf{u} = h_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\gamma + h_{\alpha\gamma} \mathbf{u}_\beta + h_{\beta\gamma} \mathbf{u}_\alpha$. Llavors cadascun dels m_n^k s'obté per integració similar a la presentada per a M_2 i per a M_3 resultant en general la següent expressió integral:

$$m_n^{n-2k} = \frac{(-1)^n}{h^k (h^k)_1} \int f_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^{n-2k} (h_{ij} p^i p^j)^k d\omega$$

on denotarem per $h^k (h^k)_1$ el número resultant de contraure un qualsevol dels termes independents del tensor h^k (producte tensorial de h un número k de vegades) amb h també k vegades, aquest número serà:

$$h^k (h^k)_1 = \begin{cases} 3^k + 3^{k-1} C^k((k-2)h) + \dots + 3^3 C^k(2h) + 3 C^k(0h) & \text{si } k \text{ parell} \\ 3^k + 3^{k-1} C^k((k-2)h) + \dots + 3^2 C^k(h) + 3 C^k(0h) & \text{si } k \text{ imparell} \end{cases}$$

per a tot valor de $k > 1$ i per a $k = 0, 1$ és $h^0 \cdot (h^0)_1 = 1$ i $h^1 (h^1)_1 = 3$. En aquesta expressió el valor de les constants $C^k(mk)$ s'obté per recurrència de

la següent manera:

$$C^k(kh) = 1 = \text{número de vegades en què coincideixen totes les } h$$

$$C^k((k-2)h) = N(h^2) - C^k(kh) = \text{número de vegades en què coincideixen totes les } h \text{ menys } 2$$

⋮

$$C^k((k-2m)h) = N(h^{2m}) - C^k((k-2m+2)h)$$

$$C^k(0h) = N(h^k) - N(h^{k-1})$$

essent $N(h^k) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, el qual representa el número de termes independents que tenim al producte tensorial de k vegades h .

Per tant, les integrals que hem de calcular són totes de la mateixa forma,

$$F_{r,s} = \int f_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^r (h_{ij} p^i p^j)^s d\omega,$$

les quals es poden escriure de la següent manera, si tenim en compte les expressions de f_0 , \mathbf{u} i de $d\omega$:

$$F_{r,s} = (-1)^k 4\pi e^\mu \alpha^{k-1} (a\gamma)^{2s+3} \int_0^{+\infty} e^{-\kappa|\vec{p}|^2} (p^0)^{r-1} |\vec{p}|^{2s+2} d|\vec{p}|$$

per a qualsevol valor de $r, s \geq 0$. Donat que p^0 es pot escriure en funció de $|\vec{p}|$ segon hem vist anteriorment, ens quedaran unes integrals gaussianes, el valor de les quals es troba tabulat en qualsevol llibre de taules integrals, de la següent manera:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^n \sqrt{a}} \quad \text{si } a > 0.$$

Això ens permet calcular $F_{r,s}$ obtenint la següent expressió general:

$$F_{r,s} = \frac{(-1)^r \mathcal{N} m^{r+s-1} \mathcal{T}_0^s 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s+1)}{a^{2s+3}} \left\{ 1 + \frac{(r-1)(2s+3)}{2ma^2} \mathcal{T}_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{(r-1)(r-3)(2s+3)(2s+5)}{8m^2 a^4} \mathcal{T}_0^2 + \dots \right\}$$

la qual és vàlida per a qualsevol $r, s \geq 0$ i on $\mathcal{N} = (2m\pi\mathcal{T}_0)^{3/2}e^\mu$. De la qual també podem escriure la sèrie general,

$$F_{r,s} = \frac{(-1)^r \mathcal{N} m^{r+s-1} \mathcal{T}_0^s 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}{a^{2s+3}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(r-1)(r-3) \cdots (r-2n+1)(2s+3)(2s+5) \cdots (2s+2n+1) \mathcal{T}_0^n}{2^{n+1} m^n a^{2n}} \right\}.$$

Llavors, substituint aquests càlculs a les m_n^k obtindrem valors aproximats d'aquestes que després ens donaran les pressions, els fluxes i les densitats que anàvem buscant al *Capítol 3*. Per exemple, una aproximació d'algunes d'aquestes m_n^k és:

$$\begin{aligned} m_2^2 &= F_{2,0} \approx \frac{m\mathcal{N}}{a^3} \left(1 + \frac{3\mathcal{T}_0}{2ma^2} \right) \\ m_2^0 &= \frac{1}{3} F_{0,1} \approx \frac{\mathcal{N}\mathcal{T}_0}{a^5} \left(1 - \frac{5\mathcal{T}_0}{2ma^2} \right) \\ m_3^3 &= -F_{3,0} \approx \frac{m^2\mathcal{N}}{a^3} \left(1 + \frac{3\mathcal{T}_0}{ma^2} \right) \\ m_3^1 &= -\frac{1}{3} F_{1,1} = \frac{3m\mathcal{N}\mathcal{T}_0}{a^5} \\ m_4^4 &= F_{4,0} \approx \frac{m^3\mathcal{N}}{a^3} \left(1 + \frac{9\mathcal{T}_0}{2ma^2} \right) \\ m_4^2 &= \frac{1}{3} F_{2,1} \approx \frac{m^2\mathcal{N}\mathcal{T}_0}{a^5} \left(1 + \frac{5\mathcal{T}_0}{2ma^2} \right) \\ m_4^0 &= \frac{1}{15} F_{0,2} \approx \frac{m\mathcal{N}\mathcal{T}_0^2}{a^7} \left(1 - \frac{7\mathcal{T}_0}{2ma^2} \right) \end{aligned}$$

Apèndix B

Transformades i Transformades Inverses de Fourier

Al *Capítol 4* hem resolt l'equació d'evolució per al potencial gravitatori passant l'esmentada equació a l'espai de Fourier mitjançant les transformades de Fourier. Necessitem per tant les transformades de Fourier de les condicions inicials utilitzades, així com posteriorment les transformades inverses corresponents. Anem a veure com calcular aquestes transformades.

Considerem les transformades de Fourier 3-dimensionals sobre les coordenades espacials, les quals estan definides per:

$$\mathcal{F}[f(x, \eta)](s, \eta) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{is \cdot x} f(x, \eta) dx$$

on $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ són les coordenades espacials i $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ les corresponents a l'espai de Fourier.

Segons aquesta definició i les seues propietats es pot veure que donada una funció que depèn de la coordenada radial $r = |x|$, aleshores la seua transformada de Fourier dependrà de la coordenada radial $k = |s|$ a l'espai de Fourier.

Al nostre cas, necessitem la transformada de Fourier de funcions dependents de r , aquestes funcions es poden escriure de la forma

$$f(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f(R_p) \left(H(R_p - r) - H(R_{p-1} - r) \right)$$

on la funció $H(\lambda)$ representa la funció pas de Heaviside 3-dimensional, és a dir, una bola de centre zero i radi λ ja que aquesta funció es defineix com

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Aleshores la transformada de Fourier d'aquest tipus de funcions resulta:

$$\mathcal{F}[f(r)](k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f(R_p) \left(\mathcal{F}[H(R_p - r)] - \mathcal{F}[H(R_{p-1} - r)] \right)$$

amb la qual cosa sols hem de calcular la transformada corresponent a una bola de Heaviside $H(\lambda - r)$. Aquesta transformada es calcula fàcilment a través de la definició resultant de la següent manera:

$$\mathcal{F}[H(\lambda - r)](k) = 4\pi \left\{ \frac{\sin(\lambda k)}{k^3} - \lambda \frac{\cos(\lambda k)}{k^2} \right\} = 4\pi \mathcal{D}_\lambda \left(\frac{\sin(\lambda k)}{k^3} \right)$$

essent l'operador diferencial $\mathcal{D}_\lambda(h) = h - \lambda \frac{\partial h}{\partial \lambda}$. Per tant la transformada de Fourier de la funció $f(r)$ és:

$$\mathcal{F}[f(r)](k) = 4\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f(R_p) \left(\mathcal{D}_{R_p} \frac{\sin(R_p k)}{k^3} - \mathcal{D}_{R_{p-1}} \frac{\sin(R_{p-1} k)}{k^3} \right) \quad (4.18)$$

Per altra banda, també necessitarem les transformades inverses de Fourier de les funcions que ens apareixen a la solució. Aquestes transformades inverses 3-dimensionals, realitzades també per a les coordenades espacials, es defineixen com:

$$\mathcal{F}^{-1}[W(s, z)](x, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-is \cdot x} W(s, z) ds.$$

essent, de manera anàloga, $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ les coordenades espacials a l'espai de Fourier i $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ les corresponents a l'espai real. De la mateixa manera es pot veure que la transformada inversa d'una funció que depèn de les coordenades espacials a través del seu mòdul k , dependrà de les coordenades espacials a l'espai real a través de la coordenada radial r .

Les solucions obtingudes ens porten a funcions de la forma

$$W(k, g) = \frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^4} = \frac{\cos(Ak) - \cos(Bk)}{2k^4}$$

$$V(k, g) = \frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^2} = \frac{\cos(Ak) - \cos(Bk)}{2k^2}$$

$$U(k, g) = \frac{\sin(Rk) \sin(gk)}{k^6} = \frac{\cos(Ak) - \cos(Bk)}{2k^6}$$

amb $A = g - R$ i $B = g + R$. Per tant, anem a calcular les transformades inverses de Fourier d'aquests tipus de funcions. Obtenim en primer lloc la transformada de Fourier següent:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(\lambda k)}{k^4} \right] (r)$$

la qual es pot calcular utilitzant les propietats de derivació de les transformades inverses de la següent manera:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(\lambda k)}{k^4} \right] (r) = \frac{d}{d\lambda} \left(\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(\lambda k)}{k^5} \right] \right) (r).$$

Aquesta última transformada inversa de la funció quocient entre el $\sin(\lambda k)$ i k^5 podem obtindre-la, utilitzant de nou propietats generals de les transformades, mitjançant el producte de convolució entre funcions ja que tindrem que

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(\lambda k)}{k^5} \right] (r) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(\lambda k)}{k} \right] (r) * \mathcal{F}^{-1}[k^{-4}](r)$$

on denotem per $*$ el producte de convolució entre dues funcions, el qual es defineix com

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x - t)dt$$

a qualsevol dimensió n , al nostre cas bastarà agafar $n = 3$.

Tenint en compte que les transformades inverses involucrades anteriorment són conegudes i s'obtenen com

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(\lambda k)}{k} \right] (r) = \frac{1}{4\pi\lambda} \left\{ \delta^D(\lambda - r)H(\lambda) + \delta^D(\lambda + r)H(-\lambda) \right\},$$

apareixent de nou la funció pas de Heaviside $H(\lambda)$ i la distribució delta de Dirac, δ^D ,

$$\delta^D(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

i per altre costat, utilitzant l'expressió general [19]

$$\mathcal{F}^{-1}[k^{-\lambda-n}] = \frac{\Gamma(\frac{-\lambda}{2})r^\lambda}{2^{\lambda+n}\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})\pi^{3/2}} \quad (4.19)$$

on n denota la dimensió de l'espai on fem les transformades de Fourier i $\Gamma()$ representa la funció *gamma*, podem particularitzar al nostre cas amb $n = 3$ i $\lambda = 1$ per obtenir que

$$\mathcal{F}^{-1}[k^{-4}](r) = \frac{r}{8\pi}.$$

Aleshores, primer per convolució i després per derivació podem obtenir el resultat que ens interessa. Per convolucions apleguem a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(\lambda k)}{k^5} \right] (r) &= \frac{-1}{24\pi r} \left\{ - [r(r^2 + 3\lambda^2)H(\lambda - r) + \lambda(\lambda^2 + 3r^2)H(r - \lambda)] H(\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - [r(r^2 + 3\lambda^2)H(-\lambda - r) - \lambda(\lambda^2 + 3r^2)H(\lambda + r)] H(-\lambda) \right\} \end{aligned}$$

i per tant derivant respecte de λ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(\lambda k)}{k^4} \right] (r) &= \frac{1}{8\pi r} \left\{ - [2\lambda r H(\lambda - r) + (r^2 + \lambda^2)H(r - \lambda)] H(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + [2\lambda r H(-\lambda - r) - (r^2 + \lambda^2)H(\lambda + r)] H(-\lambda) \right\} \quad (4.20) \end{aligned}$$

Per tant la transformada inversa de Fourier que anem a utilitzar s'escriu com:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[W(k, g)](r) = & \frac{1}{16\pi r} \{ -2ArH(A)H(A-r) - (r^2 + A^2)H(A)H(r-A) + \\ & + 2ArH(-A)H(-A-r) - (r^2 + A^2)H(-A)H(A+r) + \\ & + 2BrH(B-r) + (r^2 + B^2)H(r-B) \} \end{aligned} \quad (4.21)$$

on hem tingut en compte que $B = R + g > 0$ ja que R_p representa un radi (i per tant és positiu) i g és una quantitat temporal que és també sempre positiva.

La següent transformada inversa de Fourier que ens apareix, $\mathcal{F}^{-1}[V]$, s'obté una vegada coneguda la transformada

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(\lambda k)}{k^2} \right] = \frac{1}{4\pi r} \{ H(r-\lambda)H(\lambda) + H(r+\lambda)H(\lambda) \}$$

la qual es calcula directament utilitzant la definició de transformada inversa de Fourier. Per tant l'expressió que necessitem resulta

$$\mathcal{F}^{-1}[V(k, g)](r) = \frac{1}{8\pi r} \{ H(r-A)H(A) + H(r+A)H(-A) - H(r-B) \} \quad (4.22)$$

on de nou hem tingut en compte que $B > 0$.

Finalment la transformada $\mathcal{F}^{-1}[U]$ es calcula obtenint la transformada del coseno següent:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(\lambda k)}{k^6} \right].$$

Per obtenir aquesta transformada anem a considerar la descomposició de la funció quocient,

$$\frac{\cos(\lambda k)}{k^6} = \frac{1}{k^6} - \int_0^\lambda (\lambda - t) \frac{\cos(tk)}{k^4} dt$$

de manera que la transformada que volem calcular s'obté mitjançant la suma de dues transformades, és a dir,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(\lambda k)}{k^6} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{k^6} \right] - \int_0^\lambda (\lambda - t) \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(tk)}{k^4} \right] dt.$$

les quals ja tenim calculades. La primera d'elles donada per l'expressió (4.19) amb $n = \lambda = 3$ i la segona està donada per l'expressió (4.20).

Utilitzant aquest resultat tenim la transformada inversa de Fourier de la funció $U(k, g)$:

$$\mathcal{F}^{-1}[U(k, g)](r) = \int_0^B (B - t)\psi(t)dt - \int_0^A (A - t)\psi(t)dt \quad (4.23)$$

on denotem per $\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(tk)}{k^4} \right]$ la qual té per expressió (4.20).

Bibliografia

- [1] L. Infeld and A. Schild, "A new approach to kinematic cosmology", *Phys. Rev.* **68**, 250–272 (1945).
- [2] G.E. Tauber, "Expanding universe in conformally flat coordinates", *J. Math. Phys.* **8**, 118–123 (1967).
- [3] H. Takeno, "The Theory of spherically symmetric space-times", *Scientific Reports of the research institute for Theoretical Physics (Hiroshima University, Japan, 1966)*.
- [4] A. Herrero i J.A. Morales, "Conformally flat space-times with spherical symmetry", *Actes dels E.R.E.-97, Analytical and numerical approaches to relativity: Sources of gravitational radiation*, editat per C.Bona, J. Carot, L. Mas i J. Stela (Universitat de les Illes Balears, 1998), planes 267–270
- [5] A. Herrero i J.A. Morales, "Radial conformal motions", *Actes dels E.R.E.-98, Relativity and gravitation in general*, editat per J. Martín, E. Ruíz, F. Atrio, A. Molina (World Scientific, Singapore, 1999).
- [6] A. Herrero i J.A. Morales, "Conformal motions in Cosmology", *Actes dels E.R.E.-99, Relativity and gravitation in general*, editat per J. Martín, E. Ruíz, F. Atrio, A. Molina (World Scientific, Singapore, 2000).
- [7] A. Herrero i J.A. Morales, "Espai-temps conformement plans amb seccions espacials homogènies", *Poster a la Segona Trobada Matemàtica, Societat Catalana de Matemàtiques (Barcelona, 1999)*.

- [8] A. Herrero i J.A. Morales, "Conformal factors of generalized cosmologies", *Actes del Ninth Marcel Grossmann Meeting*, MG9, en prensa.
- [9] A. Herrero i J.A. Morales, "Radial conformal motions in Minkowski space-time", *J. Math. Phys.* **40**, 3499–3508 (1999).
- [10] A. Herrero i J.A. Morales, "A kinematic method to obtain conformal factors", *J. Math. Phys.* **41**, 4765–4776 (2000).
- [11] A. Krasinski, "Shear-free normal cosmological models", *J. Math. Phys.* **30**, 433–441 (1989).
- [12] E. A. Milne, "Kinematic Relativity" (Oxford at the Clarendon Press, 1948).
- [13] Y. Bruhat, J.W. York, *The Cauchy problem, General Relativity and Gravitation* (A. Held, 1980).
- [14] V. Smirnov, *Cours de Mathématiques superieures, tome 3, 2^o partie* (Editions Mir, Moscou).
- [15] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis* (Dover Publications, INC, New York, 1990).
- [16] I. King, *Astron. J.* **67**, 471 (1962).
- [17] C. Frenk i altres, "The Santa-Barbara cluster comparison project", *Ap.J.* **525**,554 (1999).
- [18] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Teoria clásica de los campos* (Ed. Reverté 1981).
- [19] I.M. Guelfand, G.E. Chilov, *Les distributions, tome I* (Dunod, Paris, 1962).

Índex de figures

1.1	Dominis de causalitat d'un camp conforme Killing radial ξ segons els valors del coeficient a i la constant $\Delta = b^2 - 4ac$. Les diferents possibilitats per al caràcter causal, Temporal, Espacial o Nul, en cada domini, apareixen abreviats per la corresponent majúscula T, E o N, respectivament.	19
1.2	Corbes integrals associades a un camp conforme Killing radial ξ donat per l'expressió (1.11) amb $a = 0$	22
1.3	Corbes integrals associades a un camp conforme Killing radial ξ donat per l'expressió (1.11) amb $a \neq 0$ i segons el signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. . .	23
1.4	Efecte de la transformació de coordenades (1.23) amb $m = 0$, que transforma el camp ξ_3 en el camp $\bar{\xi}_1$, sobre les corbes integrals d'eixos camps. Aquesta transformació està definida a la regió $t^2 - r^2 > 0$ i la seua imatge estarà a $\bar{t}^2 - \bar{r}^2 > 0$ de manera que les zones ombrejades es corresponen entre sí. A aquestes regions les hipèrboles associades al camp ξ_3 s'han transformat en rectes paral·les a l'eix \bar{t} com correspon a les corbes integrals associades al camp $\bar{\xi}_1$	29
1.5	Efecte de la transformació de coordenades (1.25) amb $m = 1$, que transforma el camp $\xi_3 - \xi_1$ en el camp $2\bar{\xi}_2$, sobre les corbes integrals d'eixos camps. Aquesta transformació, definida a les regions $(t + 1)^2 - r^2 > 0$ i $(\bar{t} - 1)^2 - \bar{r}^2 > 0$ i de manera que les zones ombrejades es corresponen entre sí, transforma les hipèrboles associades al camp $\xi_3 - \xi_1$ en rectes passant per l'origen de coordenades com correspon a les corbes integrals associades al camp $2\bar{\xi}_2$	31

- 4.1 Perfil inicial del contrast de densitat $\delta_i(r)$ quan considerem $K = 0.7$ i $R_0 \approx 10^{-2}$ 131
- 4.2 Condició inicial sobre la primera derivada temporal del potencial gravitatori, $f_2(r)$ quan considerem $C = 0.03$ i $R_1 \approx 10^{-3}$ 132
- 4.3 Evolució del contrast de densitat en el centre $\delta(0, \eta)$ fins a l'època actual per al cas en què $K = 0.7$, $R_1 \approx 10^{-2}$, $C = 0.03$ i $R_2 \approx 10^{-3}$ quan considerem $\eta_i = 1/5$, $redshift = z = \left(\frac{1}{\eta_i} - 1\right)$, i ϵ de l'ordre de 10^{-5} 133
- 4.4 Perfil del contrast de densitat $\delta(r)$ a l'època actual per al cas en què $K = 0.7$, $R_1 \approx 10^{-2}$, $C = 0.03$ i $R_2 \approx 10^{-3}$ quan considerem $\eta_i = 1/5$ i ϵ de l'ordre de 10^{-5} 133
- 4.5 Contrast de densitat a escala logarítmica. La línia continua representa el $\delta(r)$ aconseguit per nosaltres a l'època actual, la línia discontinua és el contrast de densitat a l'època actual obtingut per FNW i la línia de punts representa el contrast de densitat inicial. 134
- 4.6 Mòdul de les velocitats inicials 135
- 4.7 Contrast de densitat a escala logarítmica. La línia continua representa el $\delta(r)$ aconseguit per nosaltres a l'època actual, la línia discontinua és el contrast de densitat a l'època actual obtingut per FNW i la línia de punts representa el contrast de densitat inicial considerat. Els paràmetres considerats per aquesta representació són $\eta_i = 1/5$, $C = 4.5 \cdot 10^{-3}$, $R_1 = 1.5$, $D = 1.6 \cdot 10^{-2}$, $R_2 = 4$ i ϵ de l'ordre de 10^{-5} . 136
- 4.8 Mòdul de les velocitats inicials per a la funció f_2 donada per (4.17) i amb valors de les constants els donats a la Figura 4.7 137

Índex de taules

1.1	Caràcter causal d'un camp conforme Killing radial segons els diferents valors de les constants a i $\Delta = b^2 - 4ac$	20
2.1	Coefficients A , B , C i D que aparèixen a les expressions (32) i (33) de la densitat d'energia i la pressió, respectivament; denotem per $\mu(s) = \frac{1}{h(s)}$ i els símbols (*) i (**) representen les funcions següents,	79