DEPARTAMENT D'ASTRONOMIA I ASTROFÍSICA

MAGNETOHIDRODINÁMICA RELATIVISTA NUMÉRICA: APLICACIONES EN RELATIVIDAD ESPECIAL Y GENERAL

LUIS ANTÓN RUIZ

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Servei de Publicacions
2008

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 14 de març de 2008 davant un tribunal format per:

- D. José María Ibáñez Cabanell
- D. José Luís Ballester Mortes
- D. Enrique García-Berro Montilla
- D. Fernando Moreno Insertis
- D. Joan Josep Ferrando Bargues

Va ser dirigida per:
D. José María Martí Puig
D. Juan Antonio Miralles Torres

Depòsit legal:
I.S.B.N.: 978-84-370-7162-6
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

Magnetohidrodinámica relativista numérica: Aplicaciones en Relatividad Especial y General

Tesis Doctoral

Luis Antón Ruiz
Departamento de Astronomía y Astrofísica
Universitat de València
14 de Marzo de 2008

José María Martí Puig, Profesor Titular del Departamento de Astronomía y Astrofísica de la Universidad de Valencia, y **Juan Antonio Miralles Torres**, Catedrático del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Alicante,

CERTIFICAN:

Que la presente memoria *Magnetohidrodinámica Relativista Numérica: Aplicaciones en Relatividad Especial y General*, ha sido realizada bajo su dirección por D. Luis Antón Ruiz en el Departamento de Astronomía y Astrofísica de la Universidad de Valencia, y que constituye su Tesis Doctoral para optar al grado de Doctor en Física.

Burjassot, 27 de julio de 2007

José María Martí Puig　　　　Juan Antonio Miralles Torres

Nox atra cava circumvolat umbra.

La Eneida, **Virgilio.**

Como nadie se ocupaba en estas cuestiones, pronto se me consideró un experto en ellas.

Heinz Guderian.

Su carencia de fe resulta molesta.

Lord Darth Vader.[1]

[1]Cita incluida por petición expresa.

Mientras por competir con tu cabello,
oro bruñido al sol relumbra en vano,
mientras con menosprecio en medio el llano
mira tu blanca frente el lilio bello;

mientras a cada labio, por cogello,
siguen más ojos que al clavel temprano,
y mientras triunfa con desdén lozano
del luciente cristal tu gentil cuello;

goza cuello, cabello, labio y frente
antes que lo que fue en tu edad dorada
oro, lilio, clavel, cristal luciente,

no sólo en plata o vïola troncada
se vuelva, mas tú y ello juntamente
en tierra, en humo, en polvo, en sombras, en nada

Luis de Góngora

Agradecimientos

Antes de escribir estas líneas revisé las que había escrito con igual finalidad en mi tesina. La conclusión a la que llegué, es que eran totalmente vigentes. Pero aún así, es mi deber reescribirlas:

Los primeros de la lista, como no podría ser de otra forma, están mis padres y mis hermanas. Sin ellos, es evidente que esto no habría podido ser. Sinceramente muchas gracias por todo.

También quisiera hacer un recordatorio a mis abuelas y abuelos, que si bien no pudimos compartir muchos años, estoy seguro que si no hubiera sido por ellos, hoy no estaríamos aquí.

Siguientes en la lista están mis directores de tesis, Juan Antonio Miralles y José María Martí. Para quienes no los conozcan, los describiré comparándolos a dos grandes ajedrecistas, ambos campeones del mundo. Juan Antonio tiene el genio y la intuición de Tahl. Al igual que cuando jugaba Tahl, las piezas parecían cobrar vida, cuando Juan Antonio hace física, son las ecuaciones las que parecen cobrar vida, yendo más allá de la lógica clásica y lo irresoluble deja de serlo y lo imposible sucede. José María por contra es más parecido a Petrosian, perseverante y preciso, no mueve una pieza sin tener presente todo el tablero y cada matiz de la posición. Pueden estar seguros que por complicada que sea la maniobra, la posición final obtenida será la inicialmente calculada.

Debo recordar también a José María Ibáñez, que como jefe del grupo, fue más o menos responsable de que nos embarcaramos en esta *Odisea*, ríanse ustedes de la de Ulises. Si seguimos con los ejemplos ajedrecísticos, le correspondería el papel dado generalmente a Steiniz o a Botvinnik, genios que marcaron su época, que abrieron valiosas líneas de desarrollo. Y que mientras siguieron jugando, como es el caso, son verdaderos colosos que aportan valiosas lecciones a sus colaboradores.

Quisiera recordar y agradecer a Juan Antonio Morales las charlas y consejos dados a lo largo de todos estos años, especialmente una charla en la cual encontramos la pista que nos dio la llave del cambio de sistema de variables para los autovectores. Como Capablanca, del total ve sus partes, y de las partes ve su total, de forma totalmente clarividente.

También debo y quiero recordar a Diego Sáez, el cual fue mi jefe durante casi un año, en el cual confieso que fue un muy buen jefe, motivador y comprensivo. Y del cual aprendí bastantes cosas del Universo y de la ciencia. Si debiera describirlo, diría que al igual que Spassky es un jugador universal, juega igual de bien todas las posiciones.

A nivel de trabajo científico debo recordar también a Tobias, Miguel Angel, Olindo, José Luis y Vicent Romero, sin los cuales la historia de la RMHD y de esta tesis sería otra muy distinta.

Ya a un nivel más personal quiero destacar a Vicent Quilis, un verdadero genio de la física y del cálculo numérico, a la manera de Morphy, Lasker o Kasparov. A quien, sin olvidar todas las ayudas técnicas dadas y que tuve el privilegio de ser alumno suyo durante la carrera, debo agradecerle sobre todo sus consejos y bromas, a la hora del café (la más importante del día, como todo el mundo sabe) que han hecho más llevadero este *cruce de la Beresina* que ha sido esta tesis.

En esta función de animarnos ante la adversidad a la hora del café también destacan con nombre propio Manolo, Pablo, Arturo y Guillermo estos últimos años, y Alicia, Belén, Jèrôme,...en los anteriores.

Y fuera del ámbito más formal, tengo toda una serie de amigos que no puedo dejar de recordar y agradecer el estar ahí y el haber compartido tanto, Kike, Pepe, Rogers, Ortega, Inma, Cilindro, Maynero, Conra, Victoria, Mati, Tapi, Marisol, Juan Pablo, Rafa, Don Juan y un muy largo etcétera que no puedo nombrar por falta de espacio y temor de no citar alguno.

Debo recordar también a Manel, Feli y Enric, ya que sin ellos el departamento habría colapsado ya hace eones.

También debo citar al entonces Ministerio de Educación y Cultura por la concesión que me hizo de una beca FPI al inicio de este estudio.

En fin, a todos, nombrados y no nombrados, que me han acompañado estos diez largos y duros años, quisiera darles, con todo mi cariño, las gracias y brindar con ellos: *Para que desde las noches de un pasado imperfecto, pasando por el amanecer de un presente simple, lleguemos al brillante mediodía de un futuro perfecto.*

Índice

Capítulo 1

Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es la parte de la física que estudia el comportamiento de un sistema físico formado por un fluido conductor (líquido o gas) en el seno de un campo magnético. Tras esta *sencilla* definición se oculta una disciplina de estudio con acusadas características propias y que no podemos entender como una simple extensión o conjunción de las ramas de estudio involucradas.

La condición impuesta al fluido, que éste sea un conductor eléctrico, implica la existencia de cargas libres o casi libres (normalmente electrones), que puedan desplazarse por efecto de los campos electromagnéticos presentes. Si realizamos un estudio sobre la conducción en sólidos, uno puede observar diversos efectos dinámicos como el efecto Hall, Joule, etc, pero, en general, en el caso de sólidos convendremos que los efectos de los desplazamientos de masas son inapreciables. Ahora bien, si consideramos líquidos o gases, además de los efectos dinámicos observados en los sólidos, deberemos tener en cuenta los provocados por los desplazamientos de masas. Estos efectos serán, en general, trascendentes para la comprensión de la dinámica de los fluidos estudiados. Téngase en cuenta además que, debido al acoplamiento que campo y fluido presentan, no será posible en general resolver el sistema de forma perturbativa. Es este acoplamiento el que da a la MHD su carácter diferencial frente a otras disciplinas de estudio que podríamos considerar cercanas, como son la conducción eléctrica en sólidos, la hidrodinámica, etc., y es este acoplamiento también el responsable del mayor grado de dificultad que entraña la resolución de sus ecuaciones.

Antes de seguir, debemos examinar bajo qué hipótesis se formula la MHD. La principal de ellas es que la frecuencia de variación de los campos implicados debe ser mucho menor que la frecuencia efectiva de colisión de los electrones. Dicho de otro modo, los tiempos característicos de variación de los campos deben ser mayores que los tiempos de recorrido libre medio de los electrones de conducción. En este supuesto, la relación existente entre los campos y las corrientes eléctricas obedece la ley de Ohm, con la misma conductividad que en el caso de corrientes estacionarias. Para frecuencias de variación de los campos más altas, la conductividad ya no es la misma que en el caso estacionario, adquiriendo incluso una parte imaginaria. También pueden producirse separaciones netas de cargas, que darán lugar a fuerzas electrostáticas recuperadoras, produciéndose las llamadas oscilaciones del plasma. Nos internaríamos entonces en el dominio de la física de plasmas.

Así pues, la magnetohidrodinámica es aplicable al estudio de fluidos inmersos en campos electromagnéticos de *baja frecuencia*, donde no existe separación de cargas. Las propiedades de algunos escenarios astrofísicos son tales que se cumplen, en general, las condiciones necesarias para poder usar la aproximación magnetohidrodinámica.

1.1 Campos magnéticos y astrofísica

La presencia de campos magnéticos en escenarios astrofísicos es un hecho común. Posiblemente la primera vez que se asociaron las palabras astronomía y magnetismo fue en la idea lanzada por Kepler de que el magnetismo podría ser el causante del movimiento planetario que, aunque errónea, no deja de ser meritoria ahondando en la idea que los *cielos* y la *Tierra* siguen las mismas reglas y buscando una fuerza de acción a distancia para explicar el movimiento observado. Podría ser que en la idea de Kepler influyera el hecho ya conocido en aquella época de que la Tierra poseía un campo magnético. De hecho, el campo magnético de la Tierra, es el primero conocido asociado a un astro. Y a pesar del conocimiento que hoy en día tenemos sobre él, aún estamos lejos de entender la dinámica de dicho campo en su totalidad.

El siguiente astro en donde se detectó un campo magnético fue el Sol. Este campo magnético fue detectado por G. E. Hale en 1908. Hoy en día sabemos que la dinámica de este campo magnético está asociada a la formación y evolución de las manchas solares, al viento solar, a la dinámica de la corona, etc. De hecho, en la actualidad, el estudio de la dinámica de la atmósfera solar, incluyendo el campo magnético, es uno de los campos más destacados de la astrofísica.

La siguiente estrella en la que se detectó un campo magnético fue la estrella Virgo 78, en el año 1947 por H. W. Babcock. Esta estrella, perteneciente a la secuencia principal, con una masa en torno a dos veces y media la masa solar y con una composición química inusual en su atmósfera, es el prototipo de toda una familia de estrellas de tipo A y B (más de 200 conocidas en la actualidad) en donde se han encontrado campos magnéticos. Estos campos tienen una intensidad promedio del orden de 0.1 T, es decir, unas 3000 veces mayor que el campo magnético terrestre.

El método que se usa para determinar la existencia de campo magnético en estas estrellas es la detección del efecto Zeeman en el espectro de emisión. Este método, así como la detección de la polarización inducida en las líneas espectrales, son dos de los principales métodos para determinar la presencia de campos magnéticos. Sin embargo, para que estos efectos sean observables desde la Tierra, las estrellas deben poseer campos magnéticos con escalas características del orden del tamaño de la propia estrella. Hasta el momento, los campos detectados son, en general, compatibles con configuraciones dipolares, similares en esencia a la que presenta un imán de barra o la propia Tierra.

Otro método para detectar campos magnéticos se basa en las observaciones de ondas de radio. El primer hallazgo tuvo lugar entre 1955 y 1958, cuando se descubrieron emisiones de radio con frecuencias en el rango de 10 a 5000 MHz provenientes de Júpiter. Las intensidades de estas emisiones eran extremadamente altas para que tuvieran un origen térmico. Por tanto, se propuso que eran debidas a emisión sincrotrón. Esto fue confirmado cuando se hicieron medidas más precisas de esta radiación y también por medición directa con las sondas que han visitado el planeta (Pioneer 10 y 11, Voyager 1 y 2 y Galileo), estimándose valores entre 4.3×10^{-4} y 14×10^{-4} T para la superficie del planeta. Posteriormente se detectaron campos magnéticos en Saturno, Urano, etc.

Uno de los casos más destacados de detección de emisión no térmica tuvo lugar en 1967, cuando J. Bell y A. Hewish descubrieron el primer púlsar, situado en la nebulosa del Cangrejo. Los púlsares se caracterizan por una emisión periódica de ondas de radio. Los conocidos hasta ahora tienen periodos que recorren un intervalo entre unos pocos milisegundos hasta unos 10 segundos. Concretamente, el encontrado en 1967 en la nebulosa del Cangrejo tenía un periodo de 1.337 s. Estos púlsares se asocian a estrellas de neutrones con una alta velocidad de rotación que presentan campos magnéticos muy intensos, de entre 10^8 y 10^9 T. La conjunción de la rápida rotación, el campo magnético y la emisión sincrotrón de electrones inducida por éste es lo que produce el fenómeno de pulsación observado desde la Tierra. Un dato que reafirma este modelo es la alta polarización medida en estas fuentes, que en algunos casos es cercana al 100 %.

En 1970, poco después del descubrimiento del primer púlsar, J. Kemp, J. Swedlund, J. Landstreet y R. Angel detectaron la presencia de campos magnéticos en una enana blanca. Hoy en día se ha podido corroborar la existencia de estos campos, de intensidades entre 10 y 10^5 T, en unas 50 de estas estrellas, un pequeño porcentaje de todas las conocidas.

Una década después, en 1980 se detectaron por primera vez campos magnéticos en estrellas de baja masa y más recientemente en estrellas de pre-secuencia principal y en estrellas de tipo T-Tauri.

El número de clases de objetos astronómicos sobre los que se tiene constancia de la existencia de campos magnéticos es alto. Además de los escenarios de tipo planetario o estelar citados hasta el momento, existen otros donde también se han detectado campos magnéticos. Posiblemente el más destacado de todos ellos sea el de los chorros extragalácticos. Estos chorros, de tamaños característicos comparables a la galaxia que los origina, están compuestos por plasma colimado, que se desplaza a velocidades cercanas a la luz. El primero de estos objetos fue detectado por H. Curtis en la galaxia M87 en 1918. Al ir acumulando datos de emisión y polarización de estos objetos, en todas las longitudes de onda, desde ondas de radio hasta rayos gamma, se pudo determinar que el espectro de emisión presentaba dos contribuciones principales: en la zona del espectro entre radio y rayos X blandos, la contribución principal provendría de la emisión sincrotrón. A altas frecuencias, la contribución principal provendría del proceso Compton inverso.

Además de los chorros extragalácticos, existen otros chorros de menor tamaño, los llamados microcuásares, asociados a sistemas binarios compactos, como SS433. Éstos, por su estructura y emisión, son cualitativamente muy cercanos a los extragalácticos, aunque existen importantes diferencias de escala entre ambos objetos.

En general se piensa que mecanismos de tipo hidromagnético involucrando objetos compactos centrales (una estrella de neutrones o un agujero negro de origen estelar, en el caso de los microcuásares; un agujero negro de entre 10^7 y 10^9 masas solares, en el caso de los chorros extragalácticos) e intensos campos magnéticos explicarían la formación, aceleración y colimación de los chorros extragalácticos y los microcuásares. En el modelo de Blandford y Payne (1982), la existencia de una componente poloidal de campo magnético anclada al disco de acreción que rodea al objeto compacto central es la responsable de arrancar y acelerar plasma del disco formando el chorro. En el mecanismo de Blandford y Znajek (1977), la torsión de las líneas de campo magnético atravesando la ergosfera de un agujero negro en rotación extraería energía de rotación del agujero negro formando un chorro de alto flujo de Poynting.

Otro escenario en el que los campos magnéticos tiene un papel relevante es el de los estallidos de rayos gamma (GRB, del inglés *Gamma Ray Burst*) y, concretamente, en la emisión remanente de estos objetos, comúnmente denominada *afterglow*. La primera de estas emisiones remanentes fue detectada en 1997, en el GRB 970228, correspondiendo claramente a un espectro de emisión sincrotrón.

Hoy en día, y de acuerdo a su duración, se acepta la existencia de dos tipos de GRB, los *cortos* y los *largos*, presumiblemente asociados a escenarios astrofísicos distintos (colisiones de objetos compactos, en el caso de los cortos; supernovas, en el caso de los largos). Es únicamente a los largos a los que se les ha detectado emisión remanente y, por sus características, parece asociada a explosiones colimadas. Los modelos teóricos que pudieran dar cuenta de esta asimetría en la explosión no están aún muy desarrollados. Sin embargo, de entre ellos se podría destacar el modelo de *hipernova* propuesto por Paczyński (1997), similar al propuesto por Ostriker y Gunn (1971) para supernovas y que se basa en el colapso magnetorotacional de una estrella en rotación rápida. El campo magnético tiene un papel fundamental en la extracción de la energía cinética de rotación del núcleo colapsante y su transmisión a la envoltura, de forma semejante a los modelos de formación de chorros extragalácticos.

1.2 Chorros extragalácticos y magnetohidrodinámica numérica

Los modelos que describen los escenarios citados en la sección anterior deberán tener en cuenta en muchos casos el papel de los campos magnéticos. Existe un consenso general en que las características de muchos de estos escenarios permiten su modelización en la aproximación magnetohidrodinámica. De ahí el interés por la obtención de códigos numéricos magnetohidrodinámicos y su posterior utilización en la descripción de fenómenos astrofísicos. De hecho, el objetivo central de este trabajo es el desarrollo de un código numérico de magnetohidrodinámica relativista que nos permita estudiar diversos escenarios astrofísicos como, por ejemplo, la formación, fenomenología y evolución de los chorros extragalácticos.

Para poder utilizar la aproximación magnetohidrodinámica a la hora de describir el chorro, necesitamos primero que el material del chorro se comporte como un fluido. Es generalmente aceptado que el recorrido libre medio asociado a la interacción coulombiana de las partículas es demasiado grande, incluso mayor que el radio del propio chorro. Sin embargo, es precisamente la presencia de campos magnéticos la que hace que el recorrido libre medio efectivo disminuya considerablemente, al forzar a las partículas a describir un movimiento helicoidal alrededor de las líneas de campo con un radio (radio de Larmor) al menos 8 órdenes de magnitud inferior al radio del chorro (Blandford y Rees 1974), dando validez por tanto a la aproximación hidrodinámica. Si, además, la estructura a gran escala del campo magnético adquiere importancia dinámica, deberemos realizar una descripción magnetohidrodinámica del chorro en la que se incluyan los efectos del campo magnético. Finalmente, si las velocidades del plasma son próximas a la de la luz, como es el caso de los chorros extragalácticos, la descripción clásica deja de ser válida y hay que sustituirla por la descripción relativista. Hablamos entonces de la magnetohidrodinámica relativista (RMHD).

Las simulaciones numéricas en el marco de la hidrodinámica clásica se han convertido en una herramienta muy potente para el estudio de los chorros extragalácticos desde que las primeras simulaciones de Norman et al. (1982) verificaron el modelo de Blandford y Rees (1974) y Scheuer (1974) para las llamadas radiofuentes potentes dobles. Desde entonces, la complejidad de las simulaciones ha aumentado continuamente en paralelo con el aumento de la capacidad computacional, el desarrollo de nuevos algoritmos numéricos y una mejor comprensión de la fenomenología de los chorros, centrándose en el estudio de la morfología, la dinámica y la estabilidad no lineal de los chorros en escalas del kiloparsec. Los trabajos de Clarke et al. (1986), Lind et al. (1989) y Kössl et al. (1990a,b) se centran en las primeras simulaciones en el contexto de la MHD clásica.

Ya en los noventa, las primeras simulaciones de chorros relativistas (Martí et al. 1994, 1995, 1997; Duncan y Hughes 1994) pudieron llevarse a cabo gracias, fundamentalmente, al desarrollo de nuevas técnicas numéricas capaces de resolver las ecuaciones de la hidrodinámica relativista (*relativistic hydrodynamics*, RHD) en las condiciones extremas (flujos con grandes factores de Lorentz y con ondas de choque fuertes) comunes en este escenario. Muchas de estas téc nicas, las llamadas *técnicas numéricas de alta resolución de captura de choques* (usualmente, técnicas HRSC, acrónimo inglés de *High Resolution Shock Capturing techniques*; ver Martí y Müller 2003) explotan el carácter hiperbólico y conservativo de la RHD y han permitido por primera vez la simulación de chorros a escalas del parsec en simetría axial (Gómez et al. 1995, 1997; Komissarov y Falle 1996, 1997; Mioduszewski et al. 1997) y en tres dimensiones (3D; Aloy et al. 2003).

El avance en las simulaciones numéricas de chorros en el contexto de la RMHD ha sido también espectacular en los últimos años. Dubal (1991) efectuó la primera simulación de un chorro relativista magnetizado axisimétrico, utilizando un esquema en diferencias finitas estándar. Poco después, van Putten (1993, 1996), utilizando técnicas pseudo-espectrales, realizó simulaciones similares. Las simulaciones realizadas por Koide y colaboradores en dos dimensiones espaciales (2D) (Koide et al. 1996, Koide 1997) y 3D (Nishikawa et al. 1997, 1998), aunque todavía con una resolución muy pobre y con factores de Lorentz máximos pequeños, abrieron el paso a simulaciones basadas en algoritmos más modernos del tipo HRSC. Los trabajos de Komissarov (1999a) y Leismann et al. (2005) han presentado diversos estudios paramétricos de la morfología y dinámica de chorros relativistas axisimétricos con campos magnéticos toroidales y poloidales.

En los últimos años, la RMHD tanto teórica como numérica, ha experimentado un gran impulso. Así junto con los estudios clásicos de Lichnerowicz (1967) y Anile (1989), referencias ineludibles en el campo de la RMHD, resultan destacables los trabajos de Komissarov (1999a), Balsara (2001), Romero et al. (2005) y Giacomazzo y Rezolla (2006), que han ahondado en la estructura matemática de la RMHD para su resolución numérica en el contexto de las técnicas HRSC.

Finalmente, el desarrollo de códigos numéricos para RMHD en Relatividad General (GRMHD, *General Relativistic Magnetohydrodynamics*), ha impulsado el estudio de la acreción sobre agujeros negros y la formación de chorros. En el ámbito de la GRMHD numérica son destacables las contribuciones de Koide et al. (1999) o las más recientes de Gammie et al. (2003), Komissarov (2005), Duez et al. (2005) (que implementan técnicas HRSC), y la de De Villiers y Hawley (2003a,b), basada en técnicas no conservativas.

1.3 Objetivos de la Tesis y organización de la presente Memoria

El objetivo principal de esta Tesis ha sido el desarrollo de un código para resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en relatividad especial y general basado en técnicas de *alta resolución de captura de choques* (HRSC). Como se ha comentado en la sección anterior, este tipo de técnicas explota el carácter conservativo e hiperbólico del sistema de ecuaciones en cuestión y su introducción en el campo de la hidrodinámica de relativista numérica supuso un avance muy importante.

El núcleo de las técnicas HRSC lo constituye una discretización de las ecuaciones en forma conservativa y la evaluación de los flujos entre celdas numéricas contiguas para el avance temporal de las ecuaciones. De entre las diversas estrategias para el cálculo de dichos flujos, optamos por el desarrollo de un algoritmo basado en la descomposición espectral de las matrices jacobianas del sistema de ecuaciones (lo que, en el lenguaje del análisis numérico, se conoce como *resolvedor del problema de Riemann de tipo Roe*). Nuestra elección estuvo avalada por su éxito en el marco de la hidrodinámica relativista numérica (ver, por ejemplo, el trabajo de revisión de Martí y Müller 2003).

Con todo lo anterior, la presente Memoria se organiza como sigue. Los Capítulos 2 y 3 son introductorios. El Capítulo 2 contiene una introducción a la magnetohidrodinámica clásica en la que se repasan las condiciones que fundamentan la aproximación magnetohidrodinámica ideal y las ecuaciones que la rigen. El Capítulo 3 presenta la descripción covariante del campo electromagnético en términos de los tetravectores campo eléctrico y magnético y el tensor electromagnético. Se escriben además las ecuaciones que gobiernan la evolución del campo magnético en la aproximación magnetohidrodinámica ideal.

El Capítulo 4 es uno de los capítulos esenciales de la presente memoria. En él se presentan las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista y su estructura característica. Las ecuaciones de la RMHD se escriben en forma conservativa introduciéndose diferentes sistemas de variables (conservadas, primitivas, covariantes) de gran utilidad en el desarrollo del trabajo. El análisis espectral de las ecuaciones (el cálculo de los autovalores y autovectores de las matrices jacobianas) se discute, precisamente, en términos de las variables covariantes. En este capítulo se presta también especial atención a las llamadas *degeneraciones* (estados del sistema para los que dos o más autovalores toman el mismo valor). Además se presenta una interesante caracterización covariante de los estados degenerados en términos del tetravector campo magnético. Las últimas dos secciones del capítulo se han dedicado al repaso de las discontinuidades en RMHD (discontinuidades tangenciales, ondas de Alfvén, choques magnetosónicos) y ciertas soluciones continuas autosemejantes (las llamadas *rarefacciones*), que aparecen en la solución numérica de diversos problemas unidimensionales.

Los algoritmos HRSC avanzan en el tiempo las llamadas variables conservadas, por lo que el cálculo de los flujos entre celdas numéricas contiguas necesita conocer la descomposición espectral del sistema en estas variables. El Capítulo 5 describe las transformaciones algebraicas de los autovectores a derechas y a izquierdas del sistema de variables covariantes al sistema de variables conservadas.

Los estados degenerados suponen un serio problema para los algoritmos numéricos basados en la descomposición espectral del sistema, ya que en dichos estados, el conjunto de autovectores deja de ser completo. Autores como Komissarov (1999b) o Balsara (2001) proponen el cambio a otros conjuntos de autovectores completos en los casos de degeneración. La contribución más original del presente trabajo es la obtención de un único conjunto de autovectores *renormalizado* que resulta ser completo también en los estados degenerados. El proceso de *renormalización* de la base de autovectores a derechas y a izquierdas se describe en los Capítulos 6 y 7, respectivamente.

El Capítulo 8 presenta, finalmente, el código numérico desarrollado para resolver las ecuaciones de la RMHD. La primera sección es una introducción a las técnicas HRSC y su implementación en RMHD numérica. El resto de secciones, hasta la 8.9, describe los ingredientes más importantes del código. Finalmente, las Secciones 8.10, 8.11 y 8.12 muestran, respectivamente, el funcionamiento del código en la resolución de una selección de problemas unidimensionales y bidimensionales, y en la simulación de diversos chorros axisimétricos magnetizados.

El Capítulo 9 presenta una extensión del código numérico y sus ingredientes esenciales al caso de la GRMHD y muestra resultados preliminares en el estudio de la evolución de discos gruesos (*toros*) magnetizados alrededor de agujeros negros.

Finalmente, el Capítulo 10 resume los logros más importantes del presente trabajo.

La Memoria se complementa con diez apéndices. El Apéndice A recopila la notación usada.

Capítulo 2

Introducción a la Magnetohidrodinámica

Aunque el principal objetivo del presente trabajo, como ya hemos comentado en el capítulo anterior, es el desarrollo de un código numérico de RMHD, comenzaremos describiendo las ecuaciones y características generales de la MHD clásica ya que, MHD y RMHD comparten muchas propiedades por obedecer a sistemas de ecuaciones diferenciales similares. Además, los problemas numéricos con que nos encontraremos serán también del mismo tipo.

Como ya comentamos al comienzo de la Introducción, la MHD se formula bajo la hipótesis de que las frecuencias de variación de los campos son menores que la frecuencia efectiva de colisión de los electrones. Bajo esta hipótesis, la ley de Ohm es válida en su forma estacionaria y los electrones e iones se mueven de tal modo que no hay separación de cargas, pudiéndose describir el movimiento mecánico del sistema mediante un fluido conductor único. En este límite de bajas frecuencias, se puede despreciar la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell.

Supondremos el fluido como un medio conductor continuo e isótropo. En cuanto a las propiedades mecánicas y térmicas, lo supondremos ideal, es decir, con viscosidad y conductividad térmica nulas.

2.1 Campo electromagnético en un fluido

Como sabemos, las ecuaciones de Maxwell describen la estructura y evolución del campo electromagnético. Para escribir estas ecuaciones usaremos el sistema de unidades de Heaviside-Lorentz (ver, por ejemplo, Jackson 1977), es decir, el sistema Gaussiano racionalizado. En este sistema, y suponiendo que la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son iguales a la unidad, las ecuaciones se escriben como sigue:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico, $\mathbf{B}$ el campo magnético, ρ_q la densidad de carga eléctrica y $\mathbf{j}$ el vector densidad de corriente eléctrica.

Si ahora introducimos en las ecuaciones de Maxwell las hipótesis comentadas en la introducción de este capítulo, es decir, neutralidad eléctrica del fluido ($\rho_q = 0$) y la omisión de las corrientes de desplazamiento ($\partial \mathbf{E}/\partial t = 0$) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{c},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{2.2}$$

La densidad de corriente está relacionada con los campos a través de la ley de Ohm, que, en el caso de un fluido en movimiento y con la hipótesis mencionada anteriormente de neutralidad de carga, adquiere la forma siguiente (Jackson 1977)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}), \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido y σ es la conductividad, que supondremos que es un escalar constante en todo el fluido. En esta expresión se ha tenido en cuenta que el campo eléctrico medido por un observador comóvil con el fluido es, en primera aproximación, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$ (ver la sección 3.1 del capítulo siguiente).

Usando la ley de Ohm (2.3), podemos eliminar el campo eléctrico y escribir las ecuaciones que gobiernan la evolución del campo electromagnético, como las dos ecuaciones siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{\sigma}\nabla^2 \mathbf{B}. \tag{2.5}$$

En muchos casos de interés astrofísico, la conductividad es tal que el tiempo característico de difusión del campo por disipación de la energía magnética es mucho mayor que los tiempos característicos dinámicos. En ese caso, la conductividad se puede suponer infinita ($\sigma \to \infty$), con lo que se obtiene la ecuación de evolución

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{2.6}$$

2.2 Fluido en un campo magnético. Ecuaciones de la MHD ideal

Para describir el estado de un fluido en el seno de un campo magnético, además de conocer el campo magnético, debemos conocer la densidad de masa, ρ, la velocidad del fluido, $\mathbf{v}$, y la presión, p, en cada punto del dominio ocupado por el fluido. Alternativamente, podemos dar otra variable termodinámica como la energía interna específica, ε, en lugar de la presión.

No vamos a deducir las ecuaciones de evolución de un fluido en un campo magnético, ya que es un tema ampliamente tratado en la bibliografía (ver, por ejemplo, Landau and Lifshitz 1960) por lo que nos limitaremos únicamente a escribirlas, resaltando el carácter de ley de conservación que tiene cada una de las ecuaciones: conservación de masa, conservación de momento lineal y conservación de energía.

- **Ecuación de continuidad.** Esta ecuación describe la conservación de la masa, pudiéndose escribir en forma diferencial como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{2.7}$$

- **Ecuación de Euler.** Esta ecuación generaliza la segunda Ley de Newton para medios continuos y se escribe como sigue:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) + \nabla p = \mathbf{F}, \tag{2.8}$$

donde $\mathbf{F}$ representa la fuerza que actúa sobre el fluido de origen distinto a la presión. Suponemos que el fluido no tiene viscosidad y que la fuerza $\mathbf{F}$ es debida al campo magnético (fuerza de Lorentz), que es de la forma

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\, \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \tag{2.9}$$

Bajo las hipótesis que definen la MHD y usando las ecs. (2.2), podemos escribir

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\, \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^2 \tag{2.10}$$

y así obtenemos

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) + \nabla p = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^2. \tag{2.11}$$

Esta ecuación podemos escribirla en forma manifiestamente conservativa y así, la ley de conservación del momento lineal es

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = 0 \qquad (2.12)$$

donde $\otimes$ denota el producto tensorial.

- **Ecuación de conservación de la energía**. Para un fluido ideal en ausencia de campo magnético, esta ecuación se escribe de la forma

$$\frac{\partial \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) \right) = 0. \qquad (2.13)$$

En presencia de campo magnético, a esta ecuación deberemos añadir la contribución del mismo a la densidad de energía, $\mathbf{B}^2/2$, y al flujo de energía, $c\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (vector de Poynting), que podemos obtener en términos de la densidad de corriente, campo magnético y la velocidad del fluido usando las ecs. (2.2) y (2.3). Con esto se tiene la ecuación

$$\frac{\partial \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{c\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} = 0, \qquad (2.14)$$

que en el límite de conductividad infinita conduce a

$$\frac{\partial \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) - \big(\mathbf{v} \times \mathbf{B} \big) \times \mathbf{B} \right) = 0. \qquad (2.15)$$

Después de este sucinto repaso a las ecuaciones de evolución de un fluido en el seno de un campo magnético, sólo nos resta escribir el sistema completo, que estaría formado por las ecuaciones (2.4),(2.6), (2.7), (2.12) y (2.15), es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = 0 \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial (\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) = 0, \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \qquad (2.19)$$

Además de las ecuaciones de evolución, existe una ligadura ya que la divergencia del campo magnético ha de ser cero,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.20}$$

El sistema de ecuaciones se cierra con una ecuación de estado, que supondremos de la forma $p = p(\rho, \varepsilon)$, que relaciona las variables termodinámicas.

2.3 Las ecuaciones de la MHD como sistema hiperbólico de leyes de conservación

El sistema de ecuaciones diferenciales de evolución se puede escribir como un sistema de leyes de conservación. En el caso de coordenadas cartesianas, se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{U})}{\partial x^i} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \tag{2.21}$$

donde el vector de variables conservadas es

$$\mathbf{U} \equiv \left(\rho, \rho v^x, \rho v^y, \rho v^z, \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2, B^x, B^y, B^z\right)^T \tag{2.22}$$

y el vector de flujos (en la dirección x) se escribe como

$$\mathbf{F}^x(\mathbf{U}) \equiv \left(\begin{array}{c} \rho v^x \\ \rho(v^x)^2 + \left(p + \frac{B^2}{2}\right) - (B^x)^2 \\ \rho v^x v^y - B^x B^y \\ \rho v^x v^z - B^x B^z \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + \frac{1}{2}B^2\right) v^x + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right) v^x - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})B^x \\ 0 \\ B^y v^x - B^x v^y \\ B^z v^x - B^x v^z \end{array} \right). \tag{2.23}$$

En ausencia de fuerzas externas al sistema, el vector de términos fuente es $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = 0$.

Si comparamos estas ecuaciones con las de la hidrodinámica podremos apreciar el doble papel que juega el campo magnético. Por un lado tenemos el término $\mathbf{B}^2/2$, que recibe el nombre de presión magnética, ya que aparece en las ecuaciones a pie de igualdad con la presión térmica, p. Por otro lado aparecen los términos del tipo $B^i B^j$, que reciben el nombre de tensión magnética ya que pueden ser interpretados como fuerzas de tensión a lo largo de la línea de campo[1].

Desde un punto de vista matemático, el sistema de ecuaciones de la MHD constituye un sistema hiperbólico ya que los autovalores de la matriz jacobiana

[1] Para un análisis de la dinámica derivada de estas ecuaciones remitimos al lector al libro de Jackson (1977).

del sistema ($\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$) son reales y existe un conjunto completo de autovectores. El Apéndice B repasa las propiedades matemáticas básicas de este tipo de sistemas. El Apéndice C presenta la descomposición espectral de la MHD que permite clasificar a este sistema como *no estrictamente hiperbólico* y *no convexo*. Esta caracterización es compartida por la RMHD, y sus implicaciones desde los puntos de vista teórico y numérico serán discutidas en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Electromagnetismo en relatividad

Aunque el electromagnetismo es históricamente la primera gran teoría científica invariante bajo el grupo de transformaciones de Lorentz, y por tanto intrínsecamente relativista y que marcaba el camino hacia ésta, esto no fue evidente inicialmente (Weinberg 1972). Sólo tras las experiencias de A.A. Michelson y E.W. Morley y la formulación de la teoría de la relatividad especial quedó patente esta propiedad del electromagnetismo. A pesar de ello, cuando se trabaja en este campo, se suele usar en general una notación no covariante que dificulta la apreciación de esta característica.

En este capítulo introduciremos, a partir de la notación comúnmente usada en electromagnetismo de trivectores eléctrico y magnético, una notación covariante, deduciendo las ecuaciones de evolución en la aproximación magnetohidrodinámica ideal. Consideraremos, como hemos hecho en al capítulo anterior, que el fluido es isótropo y la permitividad y permeabilidad son iguales a la unidad. El espacio-tiempo se supondrá plano y que está descrito por la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas.

La primera sección de este capítulo es un recordatorio de cómo debemos transformar campos eléctricos y magnéticos entre sistemas de referencia inerciales. En la segunda sección introduciremos el formalismo covariante que usaremos a lo largo del trabajo para escribir las ecuaciones de Maxwell y el tensor energía-impulso del campo electromagnético. En la última sección de este capítulo, particularizaremos las ecuaciones obtenidas para el caso magnetohidrodinámico ideal.

3.1 Transformaciones de campos

En esta sección trataremos la transformación de los campos eléctrico y magnético en el contexto de la relatividad especial entre sistemas de referencia inerciales. Los textos de referencia que hemos tomado son Jackson (1977) y Barut (1980).

El campo electromagnético, en el marco de la relatividad, viene descrito por un campo tensorial antisimétrico, $\mathbf{F}$. En un espacio tiempo plano, descrito en coordenadas cartesianas (t, x, y, z), las componentes del tensor electromagnéctico y las componentes de los campos eléctrico, $\vec{E}$[1], y magnético, $\vec{B}$, están relacionados de la siguiente forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde los índices griegos toman los valores 0, 1, 2, 3 correspondientes a las coordenadas t, x, y, z.

Para relacionar los campos eléctrico y magnético medidos por diferentes observadores asociados a sistemas de referencia inerciales debemos proceder a transformar el tensor campo electromagnético utilizando la transformación de Lorentz correspondiente, cuya matriz de transformación denotaremos por $\mathbf{\Lambda}$. Para dos sistemas que se mueven entre sí con una velocidad relativa $\vec{v}$ (en lo que sigue se tomará la velocidad de la luz $c = 1$), esta transformación puede escribirse en forma matricial como

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} W & -W\vec{v} \\ -W\vec{v} & \mathbf{I} + \frac{W-1}{v^2}\vec{v} \otimes \vec{v} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

donde $W = 1/\sqrt{1 - v^2}$ es el factor de Lorentz e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad 3×3.

Así, al pasar de un sistema de referencia a otro que se mueve con una velocidad relativa $\vec{v}$, el tensor electromagnético se transforma de la siguiente forma

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}(\vec{v})\, \Lambda^{\beta}_{\nu}(\vec{v})\, F^{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

A partir de este producto matricial y comparando con la ecuación (3.1), obtenemos la ley de transformación de los campos eléctrico y magnético

$$\vec{E}' = W(\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{W^2}{W+1}(\vec{v} \cdot \vec{E})\, \vec{v} \tag{3.4}$$

$$\vec{B}' = W(\vec{B} + \vec{v} \times \vec{E}) - \frac{W^2}{W+1}(\vec{v} \cdot \vec{B})\, \vec{v}. \tag{3.5}$$

De estas ecuaciones se deduce de forma inmediata que las componentes de los campos pararelas a la dirección definida por $\vec{v}$ son invariantes, es decir

$$\vec{v} \cdot \vec{B} = \vec{v} \cdot \vec{B}', \tag{3.6}$$

[1]En este capítulo utilizaremos la notación de caracterizar los vectores por $\vec{\ }$ en lugar de por letra en negrita como en el resto del trabajo, para resaltar el carácter trivectorial reservando la notación en negrita para los tensores.

$$\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{E}'. \tag{3.7}$$

Un caso particular en el que estaremos interesados es aquél en el que en un sistema de referencia no observamos campo eléctrico y sí magnético. El tensor electromagnético en este sistema de referencia es

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^z & B^y \\ 0 & B^z & 0 & -B^x \\ 0 & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

En este caso, usando las ecs. (3.4) y (3.5), podemos calcular cuál será el campo eléctrico y magnético medido en otro sistema de referencia que se mueve respecto al primero con una velocidad $\vec{v}$, obteniéndose

$$\vec{E}' = -W\vec{v} \times \vec{B} \tag{3.9}$$

$$\vec{B}' = W\vec{B} - \frac{W^2}{W+1}(\vec{v} \cdot \vec{B})\,\vec{v}, \tag{3.10}$$

que conduce a que el campo eléctrico y magnético están relacionados por la expresión

$$\vec{E}' = -\vec{v} \times \vec{B}'.$$

3.2 Formalismo covariante

En esta sección introduciremos el formalismo covariante que utilizaremos a lo largo de este trabajo para describir el campo electromagnético. Para una revisión más detallada y general del formalismo remitimos al lector a los textos de Lichnerowicz (1967) y Anile (1989).

Las ecuaciones de Maxwell (2.2) pueden escribirse en forma más compacta si hacemos uso del tensor electromagnético (3.1), $\mathbf{F}$, y de su dual, $\mathbf{F}^*$. Si definimos el tetravector densidad de corriente como $\mathbf{J} \equiv (\rho_q, \vec{j})$, donde ρ_q es la densidad de carga y $\vec{j}$ el trivector densidad de corriente, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell, en coordenadas cartesianas, como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad , \quad \partial_\mu F^{*\,\mu\nu} = 0. \tag{3.11}$$

donde ∂_μ representa la derivada parcial respecto de la coordenada correspondiente al índice μ, que toma los valores t, x, y, z, y el dual del tensor electromagnético se define como

$$F^{*\,\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}F_{\gamma\delta}. \tag{3.12}$$

En esta expresión, $\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$ la densidad tensorial de Levi-Civita, que ,en el caso de la métrica de Minkowski, es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico.

Para relacionar el tensor electromagnético con los campos eléctico y magnético medidos en un sistema de referencia, podemos introducir los tetravectores **e** y **b**, cuyas componentes temporales serán nulas y las componentes espaciales corresponden a los trivectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$, es decir,

$$e^\alpha \equiv (0, \vec{E}) = (0, E^x, E^y, E^z) \quad \text{y} \quad b^\alpha \equiv (0, \vec{B}) = (0, B^x, B^y, B^z). \tag{3.13}$$

Nótese que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los trivectores que aparecen en la mecánica clásica a los que se ha añadido la componente temporal para formar un tetravector. Teniendo en cuenta la tetravelocidad de este sistema de referencia respecto de él mismo es $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, podemos construir el tensor campo electromagnético dado por la ec. (3.8) de la forma

$$F^{\alpha\beta} = \left(u^\alpha e^\beta - u^\beta e^\alpha\right) - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\gamma b_\delta, \tag{3.14}$$

y su dual

$$F^{*\,\mu\nu} = \left(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu\right) + \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} u_\gamma e_\delta. \tag{3.15}$$

Estas expresiones, obtenidas para un sistema de referencia, han de ser válidas en cualquier sistema de referencia y nos dan el tensor electromagnético y su dual en términos de los tetravectores **e**, **b** y **u**. Nótese que las componentes temporales de **e** y **b** serán, en general, diferentes de cero si se expresan en un sistema de referencia distinto al que mide el campo. Así por ejemplo, si usamos el sistema $\mathcal{S}$ para referir las componentes del tetravector campo magnético medido por el sistema de referencia $\mathcal{S}'$, la componente temporal de éste será diferente de cero. En el caso en que refiramos las componentes de los campos al mismo sistema en el que medimos, las componentes temporales de los tetravectores campos serán nulas. Esto se traduce en las igualdades siguientes:

$$e^\nu u_\nu = 0 \quad , \quad b^\nu u_\nu = 0. \tag{3.16}$$

De aquí, y de la expresión de los tensores electromagnético y su dual, ecs. (3.14) y (3.15), se obtiene de forma inmediata que

$$e^\nu = F^{\nu\mu} u_\mu \quad , \quad b^\nu = F^{*\,\nu\mu} u_\mu. \tag{3.17}$$

A lo largo del trabajo descrito en la presente Memoria, el medio en el que estará definido el campo electromagnético será un fluido conductor. Así, si el fluido conductor tiene una tetravelocidad **u**, el tetravector densidad de corriente se escribirá de la forma

$$J^\mu = \rho_q u^\mu + \sigma e^\mu, \tag{3.18}$$

donde el primer término representa la corriente debida al movimiento del fluido conductor cargado y el segundo no es más que la ley de Ohm.

A partir del tensor electromagnético podemos obtener el tensor impulso-energía electromagnético. Este tensor contiene información sobre la densidad de energía, densidad de momento y sus respectivos flujos. Este tensor lo podemos escribir siguiendo este formalismo como

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{EM} = F^{\mu}_{\alpha}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}\right)(e_{\alpha}e^{\alpha} + b_{\alpha}b^{\alpha}) \\ - e^{\mu}e^{\nu} - b^{\mu}b^{\nu} - u^{\mu}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}e_{\alpha}b_{\beta}u_{\gamma} - u^{\nu}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\alpha}b_{\beta}u_{\gamma}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico.

Para finalizar esta sección remarquemos que las ecuaciones (3.14)-(3.19), al estar escritas en forma covariante, son válidas para cualquier sistema de coordenadas y por tanto aplicables en al caso de la Relatividad General. Escribamos, por último, las ecuaciones de Maxwell en el formalismo covariante. Para ello deberemos sustituir las derivadas parciales que aparecen en (3.11) por derivadas covariantes, obteniéndose las siguientes ecuaciones, que serán válidas en el caso de la relatividad general,

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu} \quad , \quad \nabla_{\mu}F^{*\,\mu\nu} = 0 \quad (3.20)$$

donde ∇_{μ} denota la derivada covariante.

3.3 Aproximación magnetohidrodinámica

En el capítulo anterior, obtuvimos las ecuaciones de evolución del campo magnético en el seno de un fluido conductor bajo la hipótesis de conductividad infinita. En esta sección obtendremos estas ecuaciones en el marco de la relatividad especial. En el Capítulo 9 se darán las ecuaciones en el caso de la relatividad general.

En el contexto de la RMHD, trabajaremos con dos sistemas de referencia. El primero de ellos es un sistema de referencia que denominaremos como laboratorio, y en el cual describiremos el comportamiento del campo electromagnético y del fluido. El campo eléctrico y magnético medidos en este sistema de referencia sólo tiene componentes espaciales y serán representados por los trivectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$. El segundo sistema de referencia será el comóvil con el fluido. El campo eléctrico y magnético medido por el observador comóvil tendrá componentes temporales diferentes de cero en el sistema laboratorio. Serán representados por los tetravectores **e** y **b**.

Como en este trabajo nos centraremos en la RMHD ideal, supondremos que la conductividad que presenta el fluido es infinita. La proporcionalidad entre la densidad de corriente y el campo eléctrico medido en el sistema comóvil (ley de Ohm) conduce a que, a fin de mantener una densidad de corriente finita, se deba anular el campo eléctrico, es decir

$$\mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

En la aproximación de la RMHD ideal describimos, por tanto, el campo electromagnético únicamente por medio del tetravector campo magnético (3.17) medido por el observador comóvil. Podemos calcular las componentes de este vector en el sistema de referencia laboratorio usando (3.17), obteniendo, tras usar las ecs. (3.9) y (3.10), las siguientes igualdades

$$b^0 = W(\vec{v}\cdot\vec{B}) \tag{3.22}$$

$$b^i = WB^i - W(\vec{v}\times\vec{E})^i = \frac{B^i + W^2(\vec{v}\cdot\vec{B})v^i}{W}. \tag{3.23}$$

A partir de las relaciones anteriores, se tiene que

$$\mathbf{b}^2 \equiv b^\alpha b_\alpha = \frac{1}{W^2}\Big((\vec{B})^2 + (b^0)^2\Big). \tag{3.24}$$

La tetravelocidad $\mathbf{u}$ tomada para hacer la contracción, es la asociada al observador comóvil, que viene dada por

$$u^\alpha = W\,(1, \mathbf{v}), \tag{3.25}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido y $W = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$, es el factor de Lorentz.

El tensor electromagnético y su dual pueden expresarse en este caso como función únicamente de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{u}$,

$$F^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\,\nu\,\gamma\,\delta}u_\gamma b_\delta \tag{3.26}$$

$$F^{*\mu\nu} = u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu. \tag{3.27}$$

Las ecuaciones de Maxwell (3.20) adoptan en este caso la forma

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_\mu\Big(-\epsilon^{\mu\,\nu\,\gamma\,\delta}u_\gamma b_\delta\Big) = J^\nu, \tag{3.28}$$

$$\nabla_\mu F^{*\,\mu\nu} = \nabla_\mu\Big(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu\Big) = 0. \tag{3.29}$$

La ecuación (3.28) permite obtener la densidad de corriente a partir del campo magnético y la velocidad del fluido, mientras que la componente temporal de la ecuación (3.29) representa la ecuación de ligadura para el campo magnético y la parte espacial, la ecuación de evolución. De hecho, la ecuación (3.29) puede escribirse en términos del campo magnético medido en el sistema laboratorio usando las ecs. (3.22) obteniéndose

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) = 0, \tag{3.31}$$

que conciden con las ecuaciones dadas en el capítulo anterior. Esta coincidencia de las ecuaciones de evolución y ligadura para el campo magnético medido por el observador laboratorio, no debe tomarse como una simple casualidad, sino como el lógico resultado del carácter intrínsecamente relativista del electromagnetismo.

Por último, nos resta ver qué forma adopta el tensor energía-impulso electromagnético en la aproximación magnetohidrodinámica. A partir de la ecuación (3.19), sustituyendo la condición que $e^\mu = 0$, obtenemos

$$T^{\mu\nu}_{EM} = F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \, F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \left(u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \right) b^\alpha b_\alpha - b^\mu b^\nu. \tag{3.32}$$

Capítulo 4

Ecuaciones de la RMHD y su estructura característica

En el Capítulo 2 se obtuvieron las ecuaciones de la MHD ideal clásica, aplicable a situaciones en las que la velocidad del fluido es pequeña comparada con la velocidad de la luz. En el Capítulo 3 se describió el campo electromagnético en el marco de la relatividad especial, es decir, en situaciones en las que las velocidades no sean necesariamente pequeñas. Nos queda ahora hacer la misma descripción para la hidrodinámica, con el fin de obtener las ecuaciones de la MHD en el caso relativista (RMHD). Aunque a lo largo del capítulo usaremos en muchas ocasiones una descripción covariante, y por tanto válida en relatividad general, algunas de las expresiones se particularizarán al caso de la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. En el Capítulo 9) se generalizarán las ecuaciones para métricas arbitrarias.

Con esta perspectiva, comenzaremos el capítulo con una sección dedicada a la descripción de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista (RHD, del inglés *relativistic hydrodynamics*) ideal sin campo magnético. En la segunda sección presentaremos las ecuaciones que definen la RMHD y comentaremos brevemente sus propiedades derivadas del hecho de ser un sistema de leyes de conservación no estrictamente hiperbólico. Las Secciones 4.3 a 4.8 se centrarán en la obtención de la descomposición espectral de las ecuaciones, incluyendo los casos de degeneración, que serán caracterizados de forma covariante en términos del tetravector campo magnético. La Sección 4.9 discute brevemente el carácter *no convexo* de la RMHD. Finalmente, las Secciones 4.10 y 4.11 se dedican a la descripción de ciertas soluciones especiales de las ecuaciones de la RMHD (soluciones discontínuas y rarefacciones, respectivamente).

4.1 Ecuaciones de la hidrodinámica relativista ideal

Las ecuaciones de la hidrodinámica relativista ideal (RHD) son la expresión matemática para medios continuos fluidos de tres leyes de conservación (véase, por ejemplo, Weinberg 1972). La primera de estas leyes deriva de la conservación del número bariónico y recibe el nombre de ecuación de continuidad. La podemos escribir como

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0, \tag{4.1}$$

donde ρ es la densidad de masa en reposo medida por el observador comóvil y u^μ es la tetravelocidad del fluido. El operador ∇_μ representa, como ya se ha dicho, la derivada covariante.

Las otras dos leyes de conservación corresponden a la conservación de la energía y a la del momento que, en forma covariante, se expresan como la conservación del tensor impulso-energía del fluido. Escribiremos, por tanto,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{HD} = 0. \tag{4.2}$$

En el caso de un fluido perfecto, el tensor impulso-energía $T^{\mu\nu}_{HD}$ es

$$T^{\mu\nu}_{HD} = \rho h u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p, \tag{4.3}$$

donde h es la entalpía específica,

$$h = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \tag{4.4}$$

p es la presión y ε, la energía interna específica.

4.2 Las ecuaciones de la RMHD como sistema hiperbólico de leyes de conservación

Para obtener las ecuaciones magnetohidrodinámicas relativistas, debemos proceder a escribir las leyes de conservación correspondientes incluyendo los efectos del campo magnético. Esto supone modificar el tensor impulso-energía del fluido perfecto considerado en la sección anterior, sumándole el tensor impulso-energía del campo. Además, el campo magnético deberá verificar las ecuaciones de Maxwell. Hay que señalar que la ley de conservación del número bariónico no se ve modificada por la presencia del campo. En base a esto, el sistema de ecuaciones de la RMHD ideal se puede escribir como sigue (ver, por ejemplo, Lichnerowicz 1967 o Anile 1989)

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0, \tag{4.5}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{4.6}$$

$$\nabla_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \tag{4.7}$$

donde $F^{*\mu\nu}$ es el dual del tensor electromagnético y $T^{\mu\nu}$, el tensor impulso-energía total, suma de los tensores impulso-energía del fluido, $T^{\mu\nu}_{HD}$, y del campo electromagnético, $T^{\mu\nu}_{EM}$,

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{HD} + T^{\mu\nu}_{EM} = (\rho h + \mathbf{b}^2)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}\left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right) - b^\mu b^\nu. \tag{4.8}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (4.5)-(4.7) se puede escribir como un conjunto de ecuaciones manifiestamente conservativas más una condición de divergencia nula para el campo magnético. En el caso de la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas, las ecuaciones son[1]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^x(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^y(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^z(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \tag{4.9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{4.10}$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho u^0 \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^x - b^0 b^x \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^y - b^0 b^y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^z - b^0 b^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)(u^0)^2 - \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^0)^2 \\ B^x \\ B^y \\ B^z \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{F}^x(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u^x \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^x u^x + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - b^x b^x \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^x u^y - b^x b^y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^x u^z - b^x b^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^x - b^0 b^x \\ 0 \\ B^y v^x - B^x v^y \\ B^z v^x - B^x v^z \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

[1] Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas están deducidas en el apéndice D.

$$
\mathbf{F}^y(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u^y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^x u^y - b^x b^y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^y u^y + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - b^y b^y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^y u^z - b^y b^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^y - b^0 b^y \\ B^x v^y - B^y v^x \\ 0 \\ B^z v^y - B^y v^z \end{pmatrix} \tag{4.13}
$$

y

$$
\mathbf{F}^z(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^x u^z - b^x b^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^y u^z - b^y b^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^z u^z + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - b^z b^z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^z - b^0 b^z \\ B^x v^z - B^z v^x \\ B^y v^z - B^y v^z \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.14}
$$

Al sistema de variables $\mathbf{U}$ se le conoce como *sistema de variables conservadas* ya que, en términos de estas variables, el sistema se escribe en forma manifiestamente conservativa. El esquema numérico que presentaremos en la segunda parte del trabajo se basa precisamente en la discretización de las ecs. (4.9), (4.10) y las variables $\mathbf{U}$ serán las que avanzaremos temporalmente. Estas variables se corresponden con la densidad relativista

$$
D \equiv \rho u^0, \tag{4.15}
$$

las tres componentes de la densidad de momento

$$
S^i \equiv (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^i - b^i b^0, \tag{4.16}
$$

$(i = x, y, z)$, la densidad de energía total

$$
\tau \equiv (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^0 - \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^0)^2 \tag{4.17}
$$

y las componentes del campo magnético, B^i, con lo que

$$
\mathbf{U} \equiv (D, S^x, S^y, S^z, \tau, B^x, B^y, B^z)^T. \tag{4.18}
$$

Hay que decir que las 8 variables conservadas no son todas ellas independientes, ya que las tres componentes del campo magnético están ligadas por la condición de divergencia nula, ec. (4.10).

Los distintos flujos $\mathbf{F}^i$ $(i = x, y, z)$ son función de las variables conservadas $\mathbf{U}$ aunque, en general, no existe una forma explícita de expresarlos en función de ellas. Es por tanto necesario trabajar con otro sistema de variables, que denominaremos *sistema de variables primitivas*, que nos permita escribir en función de ellas tanto las variables conservadas, como los flujos. En el resto de este trabajo adoptaremos como sistema de variables primitivas el definido por

$$\mathbf{V} \equiv (\rho, p, v^x, v^y, v^z, B^x, B^y, B^z)^T, \tag{4.19}$$

y el paso de las variables conservadas a las primitivas se hará a partir de las siguientes expresiones, obtenidas tras algunas operaciones algebraicas a partir de las correspondientes definiciones,

$$\mathbf{S}^2 = (Z + \mathbf{B}^2)^2 \frac{W^2 - 1}{W^2} - (2Z + \mathbf{B}^2) \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{Z^2}, \tag{4.20}$$

$$\tau = Z + \mathbf{B}^2 - p - \frac{\mathbf{B}^2}{2W^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{2Z^2}, \tag{4.21}$$

donde

$$Z = \rho h W^2. \tag{4.22}$$

Estas expresiones, junto con la definición de D, ec. (4.15), y la de Z, forman un sistema de ecuaciones implícitas para las incógnitas ρ, p y W (el factor de Lorentz, u^0), suponiendo que la función $h = h(\rho, p)$ es conocida a través de la ecuación de estado. A lo largo del presente trabajo, nos hemos restringido al uso de ecuaciones de estado de gas ideal y politrópicas[2]. Una vez obtenidos los valores de ρ, p y W, las componentes de la velocidad pueden obtenerse de forma explícita.

El análisis espectral de las matrices jacobianas del sistema, definidas como

$$\mathbf{J}^i = \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}, \tag{4.23}$$

permite comprobar el carácter hiperbólico del sistema de ecuaciones de la RMHD, al tener todos sus autovalores reales y existir un conjunto completo de autovectores. Sin embargo, tal y como ocurre en el caso de la MHD clásica, la existencia de autovalores con multiplicidad superior a 1 para ciertos estados (*degeneraciones*) define a la RMHD como un sistema no estrictamente hiperbólico. El Apéndice B repasa las propiedades matemáticas básicas de los sistemas hiperbólicos, aunque una referencia mucho más completa la constituyen las monografías de LeVeque (1992) o Toro (1997).

En un sistema hiperbólico, los diferentes autovalores definen las velocidades de propagación de las perturbaciones (u ondas) a lo largo de cada dirección, constituyendo los llamados *campos característicos*. Las técnicas HRSC (del inglés

[2] Detalles de la obtención de estas expresiones y su resolución para las ecuaciones de estado citadas en el marco de la relatividad especial y general se verán en los Capítulos 8 (Sección 8.9) y 9 (Sección 9.4), respectivamente.

High Resolution Shock Capturing Techniques, o técnicas de alta resolución de captura de choques) explotan esta propiedad para la integración del sistema de ecuaciones a lo largo del tiempo. En los últimos años, la aplicación de estas técnicas en hidrodinámica y magnetohidrodinámica clásicas y, más recientemente, relativistas, se ha generalizado hasta convertirse en la estrategia de integración más común. En la primera sección del Capítulo 8 se resumen los fundamentos de las técnicas HRSC y su aplicación reciente a la resolución de las ecuaciones dela RMHD. Finalmente, un subconjunto numeroso de las técnicas HRSC se basa de forma específica en el conocimiento de la descomposición espectral del sistema de ecuaciones (autovalores y autovectores de las correspondientes matrices jacobianas).

El objetivo principal de esta Tesis ha sido, precisamente, el desarrollo de un código para resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en relatividad especial y general basado en este tipo de técnicas. Una gran parte de lo que resta de capítulo se ha dedicado, por tanto, al análisis espectral de las ecuaciones de la RMHD. El carácter no estrictamente hiperbólico de la RMHD (compartido con la MHD clásica) plantea, sin embargo, algunos problemas técnicos. En los casos de degeneración el conjunto original de autovectores deja de ser completo, debiendo sustituirse por otro. Por tanto, en el presente capítulo, nos hemos centrado también en el estudio y la caracterización de los estados degenerados, presentando además nuevos conjuntos completos de autovectores en los casos de degeneración.

La aportación más original de la presente Tesis desde el punto de vista teórico ha sido, sin embargo, la de obtener un conjunto completo de autovectores válido tanto para los estados degenerados como para los no degenerados, tras un proceso que llamamos de *renormalización*, análogo al llevado a cabo por Brio y Wu (1988) en el caso de la MHD clásica. El proceso de renormalización de los autovectores de la RMHD se presenta en los Capítulos 6 y 7.

Las patologías de la RMHD (y de la MHD) no acaban en el carácter no estrictamente hiperbólico del sistema que la describe. De acuerdo con una cierta caracterización de los campos característicos, la magnetohidrodinámica, clásica y relativista, se clasifican como sistemas *no convexos*. La definición, implicaciones y controversias en torno al carácter no convexo de la MHD y la RMHD se discuten en la Sección 4.9 de este capítulo.

4.3 El sistema de variables de Anile

La descomposición espectral de las matrices jacobianas del sistema de la RMHD en variables conservadas, definidas en la sección anterior, no es nada sencilla. El estudio de autovalores y autovectores resulta más fácil en el sistema de variables *covariantes*, $\tilde{\mathbf{U}}$, definido por Anile (1989),

$$\tilde{\mathbf{U}} = (u^\alpha, b^\alpha, p, s)^T, \tag{4.24}$$

donde s es la entropía específica.

En términos de estas variables, las ecuaciones de la RMHD se pueden escribir en notación matricial como[3]

$$A_c^{\alpha a}\nabla_\alpha \tilde{U}^c = 0 \qquad \text{con} \quad a, c = 0, ..., 9 \quad \alpha = 0, ..., 3, \tag{4.25}$$

donde las matrices $A_c^{\alpha a}$ son

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} Eu^\alpha \delta_\nu^\mu & -b^\alpha \delta_\nu^\mu + P^{\mu\alpha} b_\nu & l^{\mu\alpha} & 0^\mu \\ b^\alpha \delta_\nu^\mu & -u^\alpha \delta_\nu^\mu & f^{\mu\alpha} & 0^\mu \\ \rho h \delta_\nu^\alpha & 0_\nu & u^\alpha / c_s^2 & 0 \\ 0_\nu & 0_\nu & 0 & u^\alpha \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

donde δ_ν^μ es la delta de Kronecker, $0_\nu = (0,0,0,0)$, $0^\mu = (0,0,0,0)^T$, c_s, la velocidad del sonido, que verifica

$$c_s^2 = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \tag{4.27}$$

y

$$E = \rho h + \mathbf{b}^2, \tag{4.28}$$

$$P^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} + 2u^\mu u^\alpha, \tag{4.29}$$

$$l^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} + \frac{1}{\rho h}\left[\left(\rho h - \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}\right) u^\mu u^\alpha + b^\mu b^\alpha\right], \tag{4.30}$$

$$f^{\mu\alpha} = \frac{1}{\rho h}\left(\frac{b^\mu u^\alpha}{c_s^2} - u^\mu b^\alpha\right). \tag{4.31}$$

Llegados a este punto, conviene señalar que las variables de Anile no son todas independientes, existiendo tres ligaduras entre ellas

$$u^\alpha u_\alpha = -1 \quad , \quad b^\alpha u_\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \nabla_\mu (u^\mu b^0 - u^0 b^\mu) = 0. \tag{4.32}$$

Este hecho deberá tenerse en cuenta en el estudio de la estructura característica de la RMHD que iniciamos a continuación.

4.4 Autovalores

Para proceder al cálculo de los autovalores introducimos la función $\phi(x^\beta)$, de forma que la ecuación $\phi(x^\beta) = 0$ describe la hipersuperficie característica asociada a uno de los autovalores. Esta hipersuperficie representa la propagación de la onda correspondiente al autovalor en el espacio-tiempo. El vector $\phi_\alpha \equiv \partial_\alpha \phi(x^\beta)$ es el vector número de ondas asociado a dicho autovalor. Partiendo de aquí,

[3]Para más detalles, véase el Apéndice E y el Capítulo 1 del libro de Anile (1989).

la matriz característica de la RMHD, expresada en el sistema de variables de Anile es la que obtenemos al realizar la contracción

$$A^\alpha \phi_\alpha = \begin{pmatrix} Ea\delta^\mu_\nu & m^\mu_\nu & l^\mu & 0^\mu \\ \mathcal{B}\delta^\mu_\nu & -a\delta^\mu_\nu & f^\mu & 0^\mu \\ \rho h\phi_\nu & 0_\nu & a/c_s^2 & 0 \\ 0_\nu & 0_\nu & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

donde

$$a = u^\alpha \phi_\alpha, \tag{4.34}$$

$$\mathcal{B} = b^\alpha \phi_\alpha, \tag{4.35}$$

$$l^\mu = l^{\mu\nu}\phi_\nu = \phi^\mu + \left(1 - \frac{\mathbf{b}^2}{\rho h c_s^2}\right) a u^\mu + \frac{\mathcal{B}\, b^\mu}{\rho h}, \tag{4.36}$$

$$f^\mu = f^{\mu\nu}\phi_\nu = \frac{a b^\mu / c_s^2 - \mathcal{B}\, u^\mu}{\rho h}, \tag{4.37}$$

y

$$m^\mu_\nu = (-b^\alpha \delta^\mu_\nu + P^{\mu\alpha} b_\nu)\phi_\alpha = (\phi^\mu + 2au^\mu) b_\nu - \mathcal{B}\delta^\mu_\nu. \tag{4.38}$$

La ecuación característica de la RMHD obtenida al tomar el determinante de la matriz característica (4.33) del sistema extendido e igualarlo a cero, cuyas raíces son los autovalores, es

$$E\, a^2 \mathcal{A}^2 N_4 = 0, \tag{4.39}$$

con

$$\mathcal{A} = Ea^2 - \mathcal{B}^2 \tag{4.40}$$

y

$$N_4 = \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) a^4 - \left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}\right) a^2 G + \mathcal{B}^2 G, \tag{4.41}$$

donde

$$G = \phi^\alpha \phi_\alpha. \tag{4.42}$$

Realicemos ahora el análisis de la ecuación característica. Al haberla podido escribir como un producto de funciones, sólo podrá anularse en el supuesto de que alguna de esas funciones sea nula. Veamos bajo qué condiciones se puede anular cada una de las funciones. Para ello, y sin pérdida de generalidad, tomaremos el vector de ondas de la forma

$$\phi_\alpha = (-\lambda, 1, 0, 0), \tag{4.43}$$

que estaría asociado a una hipersuperficie característica correspondiente a una onda propagándose en la dirección x con una velocidad igual a λ[4].

El primer factor que aparece en la ecuación característica, $E = \rho h + \mathbf{b}^2$, es la densidad de energía total medida en el sistema comóvil con el fluido y es, por tanto, una cantidad distinta de cero.

El segundo factor es a^2. Para anularlo debe cumplirse que

$$\lambda = v^x \quad (\equiv \lambda_e). \tag{4.44}$$

Este autovalor recibe el nombre de autovalor entrópico y representa una raíz doble en el sistema de variables de Anile. En el sistema original la raíz es simple, estando el carácter doble asociado a uno de los grados de libertad extra añadidos por la omisión de las ligaduras del sistema (Komissarov 1999a).

Anulando el factor $\mathcal{A}^2$, obtenemos las condiciones

$$\lambda = \frac{b^x \pm u^x\sqrt{E}}{b^0 \pm u^0\sqrt{E}} \quad (\equiv \lambda_a), \tag{4.45}$$

que definen los llamados autovalores de Alfvén. Como en el caso anterior, cada uno de los dos autovalores representan raíces dobles de la ecuación característica, cuando en el sistema original serían raíces simples. La duplicidad de estas raíces aparece de nuevo asociada a los grados de libertad añadidos por la omisión de las ligaduras (Komissarov 1999a).

Por último, al buscar las raíces de la función N_4, obtenemos la ecuación cuártica

$$C_4\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 = 0, \tag{4.46}$$

cuyos coeficientes se definen como

$$C_0 = (v^x)^4(1-\Omega^2) - \frac{(v^x)^2\Omega^2}{W^2} + \frac{(b^x)^2 c_s^2}{EW^4}, \tag{4.47}$$

$$C_1 = -4(v^x)^3(1-\Omega^2) + \frac{2v^x\Omega^2}{W^2} - \frac{2b^0 b^x c_s^2}{EW^4}, \tag{4.48}$$

$$C_2 = 6(v^x)^2(1-\Omega^2) - \frac{(1-(v^x)^2)\Omega^2}{W^2} + \frac{((b^0)^2-(b^x)^2)c_s^2}{EW^4}, \tag{4.49}$$

$$C_3 = -4v^x(1-\Omega^2) - \frac{2v^x\Omega^2}{W^2} + \frac{2b^0 b^x c_s^2}{EW^4}, \tag{4.50}$$

[4] El análisis de la estructura característica de la RMHD presentado en esta Memoria se repite de forma totalmente análoga para ondas propagándose en la dirección y o z permutando el papel de las componentes espaciales en todas las expresiones.

Figura 4.1: Ejemplo de las funciones $a^2\mathcal{A}N_4$ y N_4 para el estado $\rho = 1.0$, $\varepsilon = 1.0$, $v^x = 0.0$, $v^y = 0.0$, $v^z = 0.0$, $B^x = 1.0$, $B^y = -1.0$, $B^z = 0.13$. Los autovalores son: $\lambda_f = \pm 0.7818$, $\lambda_a = \pm 0.4621$, $\lambda_s = \pm 0.3815$ y $\lambda_e = 0.0$. Los rombos marcan los autovalores magnetosónicos y los triángulos los autovalores de Alfvén y entrópico.

$$C_4 = 1 - \Omega^2 \mathbf{v}^2 - \frac{(b^0)^2 c_s^2}{EW^4}, \tag{4.51}$$

donde $\Omega^2 = c_s^2 + c_a^2 - c_s^2 c_a^2$, y $c_a^2 = \mathbf{b}^2/E$ es la velocidad de Alfvén.

Las soluciones de esta ecuación cuártica nos dan los llamados autovalores magnetosónicos, λ_m, que son en general raíces simples. De estos cuatro autovalores, los dos intermedios reciben el nombre de autovalores magnetosónicos lentos, λ_s, y los otros dos se llaman autovalores magnetosónicos rápidos, λ_f.

Un ejemplo del comportamiento de la función $a^2\mathcal{A}N_4$, cuyos ceros corresponden a los autovalores, y de la función N_4 se muestra en la Fig. 4.1.

Para completar el análisis de la estructura de autovalores véase el Apéndice F.

4.5 Autovectores en el sistema de variables de Anile

Al igual que en el caso de los autovalores, el cálculo de los autovectores se simplifica enormemente en el sistema de variables de Anile. Los autovectores a derechas, r, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left(A_c^{\alpha a}\phi_\alpha\right) r^c = 0 \qquad \text{con} \qquad a, c = 0, ..., 9 \quad \alpha = 0, ..., 3, \tag{4.52}$$

para cada uno de los autovalores y son los siguientes:

- Autovector asociado al autovalor entrópico:

$$r_e = (0^\alpha, 0^\alpha, 0, 1)^T\,, \tag{4.53}$$

- Autovectores asociados a los autovalores de Alfvén:

$$r_a = \left(a\, g^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\delta\nu\mu} \phi^\delta u^\nu b^\mu, \mathcal{B}\, g^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\delta\nu\mu} \phi^\delta u^\nu b^\mu, 0, 0\right)^T\,, \tag{4.54}$$

  donde $\epsilon_{\beta\delta\nu\mu}$ es, como ya dijimos, la densidad tensorial de Levi-Civita.

- Autovectores asociados a los autovalores magnetosónicos

$$r_m = \left(a\, d^\alpha, \mathcal{B}\, d^\alpha + a\,\mathcal{A}\, f^\alpha, a^2\mathcal{A}, 0\right)^T\,, \tag{4.55}$$

  con

$$d^\alpha = a(\mathcal{B}\, f^\alpha - a\, l^\alpha) + \left(\mathcal{B}^2 - \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} a\right) \frac{\phi^\alpha + 2a\, u^\alpha}{\rho h}, \tag{4.56}$$

  donde las funciones l^α y f^α se han definido en la sección anterior (ecs. (4.36) y (4.37)).

Además de los siete autovectores anteriores, existen otros tres espúreos asociados a los grados de libertad añadidos por la omisión de las ligaduras (Komissarov 1999a).

Los autovectores a izquierdas, $\hat{l}$, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\hat{l}_a \left(A^{\alpha a}_c \phi_\alpha \right) = 0 \qquad \text{con} \qquad a, c = 0, ..., 9 \quad \alpha = 0, ..., 3, \tag{4.57}$$

para cada uno de los autovalores y son los siguientes:

- Autovector entrópico:

$$\hat{l}_e = (0_\alpha, 0_\alpha, 0, 1). \tag{4.58}$$

- Autovectores de Alfvén:

$$\hat{l}_a = \left(\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi^\beta u^\gamma b^\delta, \frac{-Ea}{\mathcal{B}}\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi^\beta u^\gamma b^\delta, 0, 0 \right). \tag{4.59}$$

- Autovectores magnetosónicos:

$$\hat{l}_m = \left(\phi_\alpha - \frac{\mathcal{B}(G+2a^2)}{Ea^2} b_\alpha, \frac{G+2a^2}{a} b_\alpha - \frac{\mathcal{B}}{a}\phi_\alpha, \frac{-\mathcal{A}}{\rho h a}, 0\right). \tag{4.60}$$

También en este caso, además de los siete autovectores anteriores, existen otros tres espúreos asociados a los grados de libertad añadidos por la omisión de las ligaduras.

4.6 Descomposición de b^μ en componentes normal y tangencial al frente de onda

Antes de continuar con el análisis de la estructura espectral de la RMHD es conveniente abordar la descomposición del tetravector campo magnético, b^μ, en sus proyecciones normal y tangencial a la dirección de propagación de la onda considerada en el sistema de referencia comóvil. Esta descomposición la usaremos tanto para acabar el estudio de la estructura característica como en la posterior renormalización de los autovectores.

Para poder calcular estas proyecciones introduciremos primero el tetravector velocidad de la onda, w^μ, medido por un observador con tetravector velocidad u^μ. Este vector debe cumplir las siguientes condiciones: i) por representar una tetravelocidad, deberá verificar que $w^\mu w_\mu = -1$, ii) El tetravector debe estar en la hipersuperficie $\phi(x^\alpha) = 0$, con lo que $w^\mu \phi_\mu = 0$. De todos los tetravectores que verifican las condiciones i) y ii), el correspondiente a la tetravelocidad de la onda es aquel que minimiza la velocidad relativa al observador u^μ (véase, por ejemplo, Anile 1989). Esta última condición es equivalente a exigir que el tetravector w^μ sea combinación lineal de u^μ y ϕ^μ.

A partir de lo anterior es fácil probar que

$$w^\mu = \frac{u^\mu - \frac{a}{G}\phi^\mu}{\sqrt{1 + a^2/G}}. \tag{4.61}$$

Ahora podemos hallar la dirección de propagación de la onda en el sistema de referencia comóvil. Si u^μ es la velocidad del observador comóvil, el proyector en el espacio ortogonal es $h^{\beta\gamma} = g^{\beta\gamma} + u^\beta u^\gamma$, y el tetravector unitario que nos da la dirección espacial de propagación es el dado al dividir por su módulo la proyección del vector de ondas

$$\nu^\mu \equiv \frac{h^{\mu\gamma}\phi_\gamma}{\mid h^{\mu\gamma}\phi_\gamma \mid} = \frac{\phi^\mu + a u^\mu}{\sqrt{G + a^2}}, \tag{4.62}$$

Que es la misma dirección que obtenemos al dividir la proyección de la velocidad por su módulo (siempre y cuando éste no sea nulo)

$$\frac{h^{\mu\gamma} w_\gamma}{\mid h^{\mu\gamma} w_\gamma \mid} = \frac{\phi^\mu + a u^\mu}{\sqrt{G + a^2}}. \tag{4.63}$$

Figura 4.2: Esquema de la descomposición del campo magnético en sus componentes normal y tangencial al frente de ondas. El vector ν es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}$ y ϕ contenida en el espacio ortogonal a $\mathbf{u}$. Los vectores ν, $\alpha_{\mathbf{1}}$, $\alpha_{\mathbf{2}}$ forman una base del espacio ortogonal a $\mathbf{u}$, que contiene al vector campo magnético, $\mathbf{b}$.

El vector ν^μ, al igual que b^μ, pertenece al subespacio ortogonal a u^μ y como representa la dirección de propagación de la onda, es perpendicular al frente de ondas.

Ahora, para realizar la descomposición de b^μ deseada, deberemos completar una base del subespacio ortogonal a u^μ que contenga a ν^μ. Para realizar esta descomposición tomaremos el vector de ondas definido en (4.43), $\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0)$. Hecha esta elección podemos completar la base de tetravectores de este subespacio con los tetravectores

$$\alpha_{1\,\mu} \equiv \epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} u^\beta \phi^\gamma \tau_z^\delta = (-u^y, u^y\lambda, u^0 - u^x\lambda, 0), \tag{4.64}$$

$$\alpha_{2\,\mu} \equiv \epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} u^\beta \tau_y^\gamma \phi^\delta = (-u^z, u^z\lambda, 0, u^0 - u^x\lambda), \tag{4.65}$$

donde $\tau_y^\delta = (0,0,1,0)$ y $\tau_z^\delta = (0,0,0,1)$. La Fig. 4.2 muestra gráficamente la relación entre los vectores $\mathbf{u}$, ϕ, ν y $\mathbf{b}$, y los vectores $\alpha_{\mathbf{1}}$ y $\alpha_{\mathbf{2}}$, que completan la base del espacio ortogonal a $\mathbf{u}$.

La elección de esta base se ha realizado por razones de simetría entre las componentes en los desarrollos posteriores donde serán utilizadas. Nótese que la base tomada no es ortonormal, siendo los productos escalares entre lo vectores de la base los siguientes

$$\nu^\gamma \nu_\gamma = 1, \quad \nu^\gamma \alpha_{1\,\gamma} = 0, \quad \nu^\gamma \alpha_{2\,\gamma} = 0,$$

$$\alpha_1^\gamma \alpha_{1\,\gamma}(\equiv \alpha_{11}) = (u^0 - \lambda u^x)^2 - (1-\lambda^2)(u^y)^2, \quad \alpha_1^\gamma \alpha_{2\,\gamma}(\equiv \alpha_{12}) = -u^y u^z (1-\lambda^2),$$

$$\alpha_2^\gamma \alpha_{2\,\gamma}(\equiv \alpha_{22}) = (u^0 - \lambda u^x)^2 - (1-\lambda^2)(u^z)^2.$$

Ahora, en términos de la base $\{\alpha_1^\mu, \alpha_2^\mu, \nu^\mu\}$, el tetravector campo magnético, se escribe como

$$b^\mu = C_1 \alpha_1^\mu + C_2 \alpha_2^\mu + C_3 \nu^\mu, \tag{4.66}$$

con

$$C_1 = \frac{(u^0 - \lambda u^x)(g_2 \alpha_{22} - g_1 \alpha_{12})}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}, \tag{4.67}$$

$$C_2 = \frac{(u^0 - \lambda u^x)(g_1 \alpha_{11} - g_2 \alpha_{12})}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} \tag{4.68}$$

y

$$C_3 = \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{G + a^2}}, \tag{4.69}$$

donde se han definido[5]

$$g_1 = \frac{1}{(u^0 - \lambda u^x)} \Big(b^z (u^0 - \lambda u^x) + b^x u^z \lambda - b^0 u^z \Big), \tag{4.70}$$

$$g_2 = \frac{1}{(u^0 - \lambda u^x)} \Big(b^y (u^0 - \lambda u^x) + b^x u^y \lambda - b^0 u^y \Big). \tag{4.71}$$

Ahora ya podemos descomponer el tetravector campo magnético según (véase la Fig. 4.2)

$$b^\mu = b_n^\mu + b_t^\mu, \tag{4.72}$$

donde b_n^μ es la componente normal al frente de onda

$$b_n^\mu = \frac{\mathcal{B}}{G + a^2} \left(\phi^\mu + a u^\mu \right) \tag{4.73}$$

y b_t^μ, la componente tangencial

$$b_t^\mu = \frac{u^0 - \lambda u^x}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} \Big((g_2 \alpha_{22} - g_1 \alpha_{12})\, \alpha_1^\mu + (g_1 \alpha_{11} - g_2 \alpha_{12})\, \alpha_2^\mu \Big). \tag{4.74}$$

[5]El porqué de la definición de g_1 y g_2 divididos por el factor $(u^0 - \lambda u^x)$ será evidente al abordar la descomposición del vector $\epsilon^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta \phi^\gamma b^\delta$ en la Sección 6.2.

Para acabar el desarrollo únicamente nos queda calcular el vector unitario en la dirección del campo magnético tangencial

$$\frac{b_t^\mu}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{(g_2\alpha_{22} - g_1\alpha_{12})\,\alpha_1^\mu + (g_1\alpha_{11} - g_2\alpha_{12})\,\alpha_2^\mu}{\left[(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)(g_2^2\alpha_{22} - 2g_1g_2\alpha_{12} + g_1^2\alpha_{11})\right]^{1/2}}. \tag{4.75}$$

Remarcaremos, para concluir, que la descomposición del tetravector campo magnético que acabamos de ver depende de la onda elegida (a saber, entrópica, de Alfven, magnetosónica lenta y rápida) de forma que cada autovalor tendrá asociada una descomposición diferente.

4.7 Ordenación de los autovalores

En la Sección 4.4 obtuvimos las expresiones de los siete autovalores de la RMHD, en general distintos, correspondientes a las ondas entrópica, de Alfvén (2), magnetosónicas lentas (2) y magnetosónicas rápidas (2). Si la velocidad del fluido es cero, es muy fácil demostrar que la ordenación de los autovalores es la siguiente

$$\lambda_f^- \leq \lambda_a^- \leq \lambda_s^- \leq \lambda_e \leq \lambda_s^+ \leq \lambda_a^+ \leq \lambda_f^+, \tag{4.76}$$

donde los superíndices $+$ y $-$ hacen referencia exclusivamente al mayor y menor de los dos autovalores de Alfvén, magnetosónicos lentos y magnetosónicos rápidos.

En esta sección demostraremos que, en el caso general de velocidad del fluido diferente de cero, también se cumple esta ordenación. La primera parte de la demostración consistirá en probar que el autovalor entrópico es un valor intermedio entre los dos autovalores de Alfvén.

Efectivamente, desarrollando la expresión obtenida para los autovalores de Alfvén (4.45)[6],

$$\lambda_{a\pm} = \frac{b^x \pm u^x\sqrt{E}}{b^0 \pm u^0\sqrt{E}} = v^x \mp \frac{B^x}{u^0(u^0\sqrt{E} \pm b^0)}. \tag{4.77}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $u^0 > 1$ y la definición de E, se puede probar fácilmente que $(u^0)^2E > (b^0)^2$, lo que asegura el carácter positivo del denominador que aparece en la expresión anterior. Con esto, y recordando que $\lambda_e = v^x$, se tiene finalmente que uno de los autovalores de Alfvén (λ_a^-) es siempre menor o igual que λ_e y el otro (λ_a^+), mayor o igual. Es decir,

$$\lambda_a^- \leq \lambda_e \leq \lambda_a^+. \tag{4.78}$$

Como primer paso para probar la ordenación relativa de los autovalores de Alfvén y entrópico respecto a los magnetosónicos, probaremos que el coeficiente

[6] Nótese que no es posible identificar de forma genérica los $\lambda_{a\pm}$, donde el $\pm$ hace referecia a la elección del signo en la solución considerada, con $\lambda_a^\pm$, donde el $\pm$ hace referecia al autovalor mayor y menor respectivamente.

de λ^4 en el polinomio N_4, definido en (4.46), es positivo. Para ello, desarrollamos la expresión (4.51) que define al coeficiente sustituyendo Ω y b^0, obteniendo la expresión

$$C_4 = (1-\Omega^2) + \frac{1}{W^2}\big(c_s^2(1-c_a^2) + c_a^2(1-c_s^2)\big) + \frac{B^2 c_s^2}{EW^4}. \tag{4.79}$$

Los tres términos de la expresión anterior son cantidades definidas positivas. Por tanto, $C_4 > 0$, lo que implica que el polinomio N_4 cumple

$$N_4(\lambda) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \lambda < \lambda_f^- \\ < 0 & \text{si} \quad \lambda_f^- < \lambda < \lambda_s^- \\ > 0 & \text{si} \quad \lambda_s^- < \lambda < \lambda_s^+ \\ < 0 & \text{si} \quad \lambda_s^+ < \lambda < \lambda_f^+ \\ > 0 & \text{si} \quad \lambda_f^+ < \lambda. \end{cases} \tag{4.80}$$

El siguiente paso es evaluar N_4 en $\lambda = \lambda_e$ y $\lambda = \lambda_a$. Para $\lambda = \lambda_e$ obtenemos

$$N_4(\lambda_e) = \mathcal{B}^2 G. \tag{4.81}$$

Teniendo en cuenta que $G = 1 - \lambda^2 (\geq 0)$, se tiene que $\mathcal{B}^2 G$ y, en consecuencia $N_4(\lambda_e)$, es una cantidad positiva.

Pasemos a evaluar $N_4(\lambda_a)$. A partir de la ecuación característica que define los autovalores de Alfvén, $\mathcal{A} = 0$, obtenemos que para un autovalor de Alfvén se cumple que

$$\rho h = \frac{\mathcal{B}^2}{a^2} - \mathbf{b}^2, \tag{4.82}$$

y sustituyendo en N_4 se obtiene

$$N_4(\lambda_a) = \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) a^2 \left(-\mathbf{b}^2(a^2 + G) + \mathcal{B}^2 \right). \tag{4.83}$$

Si ahora sustituimos $\mathbf{b}^2$ en términos de $\mathbf{b}_t^2$ usando las ecuaciones (4.72) y (4.73) y reordenamos,

$$N_4(\lambda_a) = -\left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) a^2 \mathbf{b}_t^2 (a^2 + G), \tag{4.84}$$

que es, claramente una cantidad definida negativa (o nula).

Así, combinando el hecho de que el autovalor entrópico es un valor intermedio entre los dos autovalores de Alfvén y que $N_4(\lambda_e) \geq 0$ y $N_4(\lambda_a) \leq 0$, concluimos que la única ordenación posible de los autovalores es

$$\lambda_f^- \leq \lambda_a^- \leq \lambda_s^- \leq \lambda_e \leq \lambda_s^+ \leq \lambda_a^+ \leq \lambda_f^+ \tag{4.85}$$

4.8 Degeneraciones en RMHD

Como ya ha quedado dicho, un sistema hiperbólico se caracteriza por el hecho de que los autovalores de su matriz jacobiana son todos reales. Si estos autovalores son distintos entre sí, se dice que el sistema es estríctamente hiperbólico. Si, por el contrario, algún autovalor tiene multiplicidad superior a 1, se dice que el sistema presenta degeneración y que los autovalores repetidos son degenerados.

En la Sec. 4.4 señalamos la existencia de autovalores degenerados en el sistema de la RMHD en variables de Anile. Sin embargo, esas degeneraciones son espúreas estando asociadas a la omisión de las ligaduras entre las variables de Anile. Estudiaremos ahora bajo qué condiciones la RMHD presenta degeneraciones más allá de las discutidas en la citada sección. Para falicitar el análisis de la estructura de autovalores se recomienda ver el ApéndiceF.

Las degeneraciones asociadas a la RMHD se pueden clasificar en dos tipos que podemos relacionar directamente con las degeneraciones que presenta la MHD clásica. En la MHD, las degeneraciones se presentan en:

a) los autovalores asociados a las ondas que se propagan en la dirección perpendicular al campo magnético, en cuyo caso los autovalores de Alfvén y los magnetosónicos lentos coinciden con el autovalor entrópico;

b) los autovalores asociados a las ondas que se propagan en la dirección del campo magnético, en cuyo caso los autovalores de Alfvén coinciden con los magnetosónicos lentos, los magnetosónicos rápidos o con ambos.

En la RMHD encontramos los mismos tipos de degeneraciones que en la MHD, aunque las condiciones bajo las cuales se dan, las debemos formular en forma covariante teniendo en cuenta que el campo magnético depende del observador. Veremos a continuación que la condición de degeneración de un cierto autovalor se puede caracterizar en base a las componentes normal y tangencial al frente de onda asociado a dicho autovalor del campo magnético medido por el observador comóvil. Como los autovalores de Alfvén están siempre implicados en las degeneraciones, bastará considerar las condiciones de degeneración sobre la onda de Alfvén.

4.8.1 Degeneración de tipo I

En este tipo de degeneración se igualan los dos autovalores de Alfvén, los dos magnetosónicos lentos y el entrópico, produciéndose una degeneración quíntuple (ver Fig. 4.3), es decir

$$\lambda_a^- = \lambda_s^- = \lambda_e = \lambda_s^+ = \lambda_a^+. \tag{4.86}$$

A partir de la ecuación (4.77), vemos que para que se cumpla que $\lambda_a = \lambda_e (= v^x)$, debe verificarse que $B^x = 0$. Dada la ordenación de autovalores que discutimos en la sección anterior, la degeneración de los autovalores de Alfvén y entrópico debería implicar la degeneración de los autovalores magnetosónicos lentos. Efectivamente, si tenemos en cuenta la expresión obtenida al sustituir en N_4 el autovalor entrópico, Ec. (4.81), vemos que la única condición para que el polinomio

Figura 4.3: Ejemplo de las funciones $a^2\mathcal{A}N_4$ y N_4 bajo la degeneración de tipo I. Se ha tomado el estado definido por $\rho = 1.0$, $\epsilon = 1.0$, $v^x = 0.5$, $v^y = 0.0$, $v^z = 0.0$, $B^x = 0.0$, $B^y = 0.2$, $B^z = 0.0$. Los autovalores son: $\lambda_f = -0.2231$, $\lambda_a = \lambda_s = \lambda_e = 0.5$, $\lambda_f = 0.8681$. Los rombos marcan los autovalores magnetosónicos y los triángulos los autovalores de Alfvén y entrópico.

Figura 4.4: Ejemplo de degeneración de tipo I. Autovalores en función del campo longitudinal, B_x para el estado definido por $\rho = 1.0$, $\epsilon = 1.0$, $v^x = 0.0$, $v^y = 0.0$, $v^z = 0.0$, $B^y = 1.0$, $B^z = 0.0$. Los autovalores de Alfvén se han representado con línea continua, los magnetosónicos con línea de punto-raya y el autovalor entrópico, con línea discontinua. Se observa la formación de la degeneración de tipo I al anularse el campo magnético longitudinal.

N_4 evaluado en el autovalor entrópico se anule es que $\mathcal{B}(\lambda_e) = 0$. Al desarrollar esta función obtenemos:

$$\mathcal{B}(\lambda_e)(\equiv b^\mu \phi_\mu(\lambda_e)) = b^x - b^0 v^x = \frac{B^x}{W}, \tag{4.87}$$

con lo que B^x debe ser igual a cero.

Vemos, por tanto, que si $B^x = 0$, los autovalores asociados a la dirección x, presentarán una degeneración quíntuple (la Fig. 4.4 ilustra este hecho). Esta condición se puede plantear, sin embargo, en forma manifiestamente covariante. En efecto, caracterizaremos esta degeneración imponiendo que la componente del campo magnético normal al frente de onda de Alfvén, $\mathbf{b}_n$, sea nula, ya que

$$\mathbf{b}_n^2 = \frac{\mathcal{B}^2}{G + a^2}, \tag{4.88}$$

que es igual a cero si $\mathcal{B}$ se evalúa para cualquiera de los autovalores degenerados. Así, esta condición significa que el tetravector campo magnético es ortogonal a la dirección de propagación de la onda de Alfvén en el sistema de referencia comóvil.

4.8.2 Degeneración de tipo II

En este tipo de degeneración, (al menos) un autovalor de Alfvén coincide con uno o dos autovalores magnetosónicos (véase la Fig. 4.5). Debemos resaltar que en MHD clásica, cuando uno de los autovalores de Alfvén presenta esta degeneración, le ocurre lo mismo al otro autovalor. Sin embargo, esto deja de cumplirse en RMHD y podríamos tener este tipo de degeneración en uno solo de los autovalores de Alfvén.

Si recordamos la función obtenida al sustituir un autovalor de Alfvén en N_4, ec. (4.84), vemos que esta función se puede anular por dos motivos, dependiendo de cuál de los dos factores, a o $\mathbf{b}_t$, se anule. El primer caso, $a = 0$, implica que $\lambda_a = v^x$ y correspondería a la degeneración de tipo I ya estudiada. La otra alternativa, el que el tetravector campo magnético transversal al frente de onda de Alfvén, $\mathbf{b}_t$, sea nulo, es la que caracteriza la degeneración de tipo II. Esta condición se puede expresar en términos de $\mathbf{b}_n$, imponiendo que $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}$, que es equivalente a

$$\mathbf{b}^2 = \frac{\mathcal{B}^2}{G + a^2}, \tag{4.89}$$

donde todas las cantidades se han calculado para el autovalor de Alfvén considerado, λ_a.

Geométricamente, la condición anterior significa que el tetravector campo magnético es paralelo a la dirección de propagación de la onda de Alfvén en el sistema comóvil, lo que es equivalente a decir que los tetravectores velocidad, campo magnético y vector de ondas para la onda de Alfvén son coplanarios.

Para concluir nuestro análisis sobre la degeneración de tipo II, debemos discernir entre aquellos casos en los que el autovalor de Alfvén se iguala al

Figura 4.5: Ejemplo de las funciones $a^2\mathcal{A}N_4$ y N_4 bajo la degeneración de tipo II. Se ha tomado el estado definido por $\rho = 1.0$, $\epsilon = 1.0$, $v^x = 0.0$, $v^y = 0.0$, $v^z = 0.0$, $B^x = 100.0$, $B^y = 0.0$, $B^z = 0.0$. Los autovalores son: $\lambda_f = \lambda_a = \pm 0.99987$, $\lambda_s = \pm 0.6545$, $\lambda_e = 0.0$. Los rombos marcan los autovalores magnetosónicos y los triángulos los autovalores de Alfvén y entrópico.

Figura 4.6: Ejemplo de degeneración de tipo II. Autovalores en función de la energía interna específica, ϵ para el estado definido por $\rho = 1.0$, $v^x = 0.0$, $v^y = 0.0$, $v^z = 0.0$, $B^x = 1.0$, $B^y = 0.0$, $B^z = 0.0$. Los autovalores de Alfvén se han representado con línea continua, los magnetosónicos lentos con rombos y los rápidos con triángulos. Finalmente, el autovalor entrópico se ha representado con cruces. Al aumentar la energía interna específica se observa la degeneración de los autovalores de Alfvén primero con los magnetosónicos rápidos, luego con los rápidos y los lentos y, finalmente, sólo con los lentos.

magnetosónico lento, al rápido o a los dos simultáneamente. A fin de realizar este análisis, estudiaremos primero el caso en el que la velocidad del fluido es cero, lo que nos permitirá caracterizar en forma covariante los distintos subcasos y a continuación estudiaremos el caso en el que el fluido se mueva con una cierta velocidad.

Consideremos una onda propagándose en la dirección del eje x. Si la velocidad del fluido es cero, la condición de degeneración de tipo II (4.89), conduce a

$$b^\mu = (0, b^x, 0, 0). \tag{4.90}$$

Como en el caso clásico, el campo transversal a la dirección de propagación de la onda es nulo y los dos autvalores de Alfvén sufren degeneración. Además, las expresiones de todos los autovalores son explícitas, obteniéndose el autovalor entrópico

$$\lambda_e = 0, \tag{4.91}$$

los autovalores de Alfvén

$$\lambda_a = \pm\sqrt{\frac{(b^x)^2}{E}}, \tag{4.92}$$

donde $E = \rho h + \mathbf{b}^2$. Finalmente, los cuatro autovalores magnetosónicos los obtendremos resolviendo la ecuación bicuadrada

$$\lambda^4 - \lambda^2\left(\Omega^2 + \frac{(b^x)^2 c_s^2}{E}\right) + \frac{(b^x)^2 c_s^2}{E} = 0, \tag{4.93}$$

con $\Omega^2 = c_s^2 + c_a^2 - c_s^2 c_a^2$, siendo $c_a^2 = \mathbf{b}^2/E$ y c_s la velocidad del sonido. Así, los dos autovalores magnetosónicos lentos son

$$\lambda_s = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 - (d^4 - 4v_a^2 c_s^2)^{1/2}\right]} \tag{4.94}$$

y los dos autovalores magnetosónicos rápidos

$$\lambda_f = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 + (d^4 - 4v_a^2 c_s^2)^{1/2}\right]}, \tag{4.95}$$

donde $d^2 = c_s^2 + c_a^2 + c_s^2(v_a^2 - c_a^2)$ y $v_a^2 = (b^x)^2/E$.

Analizando las expresiones anteriores llegamos a las siguientes condiciones que permiten discernir entre los diferentes subcasos de degeneración de tipo II (ver Fig. 4.6):

$$\begin{cases} \text{Subcaso 1:} & c_a > c_s, \text{entonces } \lambda_f = \lambda_a \\ \text{Subcaso 2:} & c_a < c_s, \text{entonces } \lambda_s = \lambda_a \\ \text{Subcaso 3:} & c_a = c_s, \text{entonces } \lambda_f = \lambda_a = \lambda_s. \end{cases} \tag{4.96}$$

Las condiciones que hemos escrito involucran magnitudes escalares y, por tanto, son condiciones manifiestamente covariantes que nos permiten saber en qué caso de degeneración nos encontramos independientemente de cuál sea la velocidad del fluido.

Hay que señalar, sin embargo, que si la velocidad del fluido es cero, lo que ocurra con un autovalor de Alfvén ocurrirá con el otro ya que todos los autovalores se distribuyen simétricamente con respecto al entrópico, que vale cero. Esto no ocurrirá en el caso en que dicha velocidad no sea cero como veremos a continuación.

El que el campo magnético transversal a la dirección de propagación de la onda medido por el observador comóvil sea nulo es condición necesaria para que un autovalor magnetosónico esté degenerado con un autovalor de Alfvén. Para ver en qué condiciones dicho campo magnético puede anularse recordaremos su definición (ecuación (4.74))

$$b_t^\mu = \frac{u^0 - \lambda u^x}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}\Big(\left(g_2\alpha_{22} - g_1\alpha_{12}\right)\alpha_1^\mu + \left(g_1\alpha_{11} - g_2\alpha_{12}\right)\alpha_2^\mu\Big). \tag{4.97}$$

En la expresión anterior, los coeficientes g_1 y g_2 son

$$g_1 = \frac{b^z(u^0 - \lambda u^x) + b^x u^z \lambda - b^0 u^z}{u^0 - \lambda u^x} = B^z + \frac{v^z \lambda}{1 - \lambda v^x} B^x, \tag{4.98}$$

$$g_2 = \frac{b^y(u^0 - \lambda u^x) + b^x u^y \lambda - b^0 u^y}{u^0 - \lambda u^x} = B^y + \frac{v^y \lambda}{1 - \lambda v^x} B^x. \tag{4.99}$$

La ecuación que plantea la anulación de $\mathbf{b}_t$ es lineal en λ, por lo que sólo para un autovalor magnetosónico el observador comóvil medirá campo magnético transversal a la dirección de propagación de la onda nulo. Por otro lado, del análisis de la ecuación anterior se sigue también que la única posibilidad para que $\mathbf{b}_t$ se anule para las cuatro ondas magnetosónicas es que $B^y = B^z = v^y = v^z = 0$.

Hasta aquí, simplemente analizando el cumplimiento de la condición necesaria referida a la anulación del campo magnético transversal, hemos podido concluir que para el caso general de un fluido en movimiento habrá degeneración para un único autovalor de Alfven. Consideremos ahora la ecuación que define N_4, ec. (4.41), para el autovalor magnetosónico con $\mathbf{b}_t = 0$. Tras algunas manipulaciones algebraicas, dicha ecuación puede escribirse en términos de $\mathbf{b}_t$ como

$$N_4 = \frac{1}{c_s^2}\left[\mathcal{A}(a^2 - (a^2 + G)c_s^2) - \mathbf{b}_t^2 a^2 (a^2 + G)(1 - c_s^2)\right]. \tag{4.100}$$

La ecuación se simplifica al hacer $\mathbf{b}_t = 0$,

$$N_4 = \frac{1}{c_s^2}\mathcal{A}\left[a^2 - (a^2+G)c_s^2\right], \tag{4.101}$$

de la que podemos concluir que el autovalor magnetosónico en cuestión puede estar degenerado con el autovalor de Alfven (si verifica $\mathcal{A}=0$) o puede, incluso, no estar degenerado (si verifica $a^2-(a^2+G)c_s^2=0$). Es decir, la condición de que $\mathbf{b}_t$ sea nulo para un autovalor magnetosónico es condición necesaria pero no suficiente para que dicho autovalor esté degenerado con un autovalor de Alfven.

Finalmente, dado que acabamos de probar que, en general, sólo podrá haber un autovalor magnetosónico degenerado, cabe preguntarse si en el caso de un fluido en movimiento, podrá darse la doble degeneración descrita por el subcaso 3 para un fluido en reposo. Para que esto pueda darse, el mismo autovalor deberá anular a la vez $\mathcal{A}$ y $a^2-(a^2+G)c_s^2$. Sólo así el autovalor será una raíz doble de N_4. Consideremos un autovalor magnetosónico para el que $\mathbf{b}_t=0$ y que cumple $\mathcal{A}=0$. Entonces, puede deducirse que

$$a^2 = \frac{\mathbf{b}^2 G}{\rho h}. \tag{4.102}$$

Sustituyendo el valor de a^2 en $a^2-(G+a^2)c_s^2=0$ y recordando la definición de E, llegamos a:

$$c_s^2 = \frac{\mathbf{b}^2}{E}(\equiv c_a^2), \tag{4.103}$$

condición que coincide con la encontrada en el caso del fluido en reposo.

Llegados a este punto merece la pena recapitular y recordar los elementos esenciales del análisis de la degeneración de tipo II que acabamos de hacer:

- Para que se dé una degeneración de tipo II, el campo magnético tangencial al frente de onda de Alfvén medido por el observador comóvil debe ser cero. Por contra, la degeneración de tipo I se da cuando se anula la componente normal.

- Desde un punto de vista geométrico, la degeneración de tipo II se caracteriza por el hecho de que los tetravectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{b}$ y ϕ son coplanarios (mientras que en la degeneración de tipo I, $\mathbf{b}$ es ortogonal al plano definido por $\mathbf{u}$ y ϕ).

- Para que un autovalor magnetosónico presente degeneración de tipo II es condición necesaria que el campo magnético tangencial al frente de onda medido por el observador comóvil sea cero, aunque no es condición suficiente.

- La degeneración de un autovalor de Alfvén no implica la degeneración del otro autovalor de Alfvén, salvo que estemos en el caso en que el campo y las velocidades sólo tengan componentes en la dirección x.

- En el caso de que el campo magnético y las velocidades sólo tengan componentes en la dirección x (es decir, $B_y = B_z = v_y = v_z = 0$), habrá, en general, dos autovalores magnetosónicos degenerados. Además, los otros dos no degenerados verificarán

$$a^2 - (G + a^2)c_s^2 = 0. \tag{4.104}$$

- La degeneración de los vectores magnetosónicos puede caracterizarse mediante la comparación de las velocidades del sonido, c_s, y de Alfvén, c_a, en el estado correspondiente de forma que: si $c_a > c_s$, entonces el autovalor magnetosónico degenerado con el de Alfvén es un autovalor magnetosónico rápido; si $c_a < c_s$, entonces el autovalor magnetosónico degenerado con el de Alfvén es uno lento; y si, finalmente, $c_a = c_s$, entonces hay una triple degeneración.

Para acabar, sólo nos resta comprobar que no existe ningún caso de degeneración más allá de los tipos I y II ya discutidos. Según la ordenación de autovalores vista en la sección anterior, el único caso que restaría por analizar es aquel en el que $\lambda_s = \lambda_e$. Sin embargo, como hemos visto, ello sólo puede ocurrir si $B^x = 0$, con lo que estaríamos en la degeneración de tipo I.

4.8.3 Autovectores para los casos degenerados

En los casos de degeneración, los autovectores propuestos en la Sección 4.5 correspondientes a los autovalores degenerados se anulan. Por este motivo se han buscado nuevas expresiones para los autovectores asociados a los autovalores degenerados. Los autovectores que transcribimos son los propuestos por Komissarov (1999a).

Para la degeneración de tipo I los cinco autovectores en el sistema de variables de Anile asociados al valor propio degenerado son

$$r_1 = (g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}b^\beta u^\gamma \phi^\delta, 0^\mu, 0, 0), \tag{4.105}$$

$$r_2 = (b^\mu, \mathbf{b}^2 u^\mu, 0, 0), \tag{4.106}$$

$$r_3 = (0^\mu, b^\mu, -\mathbf{b}^2, 0), \tag{4.107}$$

$$r_4 = (0^\mu, g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}b^\beta u^\gamma \phi^\delta, 0, 0), \tag{4.108}$$

$$r_5 = (0^\mu, 0^\mu, 0, 1). \tag{4.109}$$

El conjunto de autovectores se completa con los asociados a los autovalores magnetósonicos rápidos, que no se anulan ni pierden tampoco la condición de autovector en el estado degenerado.

Para la degeneración de tipo II, los autovectores en el sistema de Anile asociados a los autovalores degenerados son

$$r_{1,2} = (\alpha^{\mu}_{1,2}, \frac{\mathcal{B}}{a}\alpha^{\mu}_{1,2}, 0, 0), \tag{4.110}$$

donde los $\alpha^{\mu}_{1,2}$ están definidos en (4.64) y (4.65).

Para el subcaso 3 se propone adicionalmente el autovector

$$r_3 = \left(-\frac{a}{\rho h c_s^2 \mathcal{B}} b^{\mu}, -\frac{\mathcal{B}}{a\rho h} u^{\mu}, 1, 0\right). \tag{4.111}$$

Como en el caso de la degeneración de tipo I, los autovectores asociados a los autovalores no degenerados siguen siendo válidos.

En este instante, podría parecer que tenemos ya toda la información sobre la estructura característica del sistema necesaria para la construcción del algoritmo numérico, sin embargo aun estamos lejos de ello. Deberemos resolver al menos tres cuestiones previas:

1. Los autovectores están expresados en un sistema de variables (el de variables covariantes) que no es el que nos interesara numéricamente. A la hora de elaborar el código numérico necesitamos usar los autovectores expresados en el sistema de variables conservadas. Como veremos, el cambio entre estos dos sistemas de variables, al ser de diferente dimensión, no es en absoluto trivial. Este punto será abordado en el Capítulo 5.

2. El algoritmo numérico debe funcionar de forma robusta tanto en estados del sistema no degenerados como degenerados. Una posibilidad hubiera sido la de buscar un criterio operativo para cambiar de forma automática el juego de autovectores. Sin embargo, nuestra elección ha sido la de buscar un único juego de autovectores (*renormalizados*) que sea completo tanto en los estados no degenerados como en los degenerados. Esta cuestión la abordaremos en el Capítulo 6.

3. Finalmente, el algoritmo numérico necesita también un conjunto completo de autovectores a izquierdas. En el Capítulo 7 presentamos la obtención del correspondiente conjunto de autovectores *renormalizados* a partir de los correspondientes autovectores en variables covariantes presentados por Anile (1989).

4.9 No convexidad de las ecuaciones de la magnetohidrodinánica

En un sistema *convexo*, los diferentes campos característicos tienen un carácter definido bien como campos *genuinamente no lineales* o como campos *linealmente degenerados* (ver, por ejemplo, el Apéndice B o, para un estudio más profundo, LeVeque 1992). En el caso de la magnetohidrodinámica, tanto clásica como relativista, los campos característicos entrópico y de Alfven son linealmente degenerados mientras que los campos característicos correspondientes a los autovalores magnetosónicos pasan de genuinamente no lineales a linealmente degenerados precisamente en los estados degenerados. Por este hecho, el sistema de ecuaciones se dice que es no convexo. La no convexidad de las ecuaciones de la MHD clásica se discute en el Apéndice C. La prueba de la no convexidad en el caso relativista se encuentra en el Apéndice G.

El carácter no convexo del sistema de ecuaciones es causa de diferentes comportamientos patológicos, como la no unicidad de la solución para ciertos problemas de valores iniciales, asociada, en el caso de la MHD clásica y relativista, al desarrollo de las llamadas *ondas compuestas* (ver Torrilhon 2003). Un ejemplo de onda compuesta se verá, precisamente, en uno de los tests unidimensionales presentados en el Capítulo 8 (Sección 8.10). Existe todavía controversia sobre el carácter no convexo de la MHD dado que las mencionadas ondas compuestas no serían soluciones estables (podríamos decir *admisibles*). Este es el punto de vista defendido por Falle y Komissarov (1999).

4.10 Discontinuidades en RMHD

En esta sección vamos a revisar los diferentes tipos de discontinuidades que admite la magnetohidrodinámica relativista. Nos basaremos en el Capítulo 5 del libro de Lichnerowicz (1967) y en la Sección 8.4 del libro de Anile (1989), adaptando su contenido a nuestra notación.

Los campos característicos están asociados a diferentes tipos de soluciones discontinuas según se trate de campos *genuinamente no lineales* o *linealmente degenerados*. En el caso de la magnetohidrodinámica, tanto clásica como relativista, los campos característicos entrópico y de Alfven, linealmente degenerados, están asociados, respectivamente, a la propagación de las discontinuidades tangenciales y de las ondas de Alfven. Fuera de los casos de degeneración, los campos característicos correspondientes a los autovalores magnetosónicos están asociados a los choques magnetosónicos. Todos estos tipos de discontinuidad van a ser analizados en la presente sección.

Una discontinuidad viene caracterizada por una hipersuperficie $\phi(x^\beta) = 0$ a través de la cual una o más variables son discontinuas. El vector normal a la hipersuperficie será $\phi_\alpha \equiv \partial_\alpha \phi$, y supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\phi_\alpha = (-v_s, 1, 0, 0)$, donde v_s será la velocidad a la que se propaga la discontinuidad[7].

Para que las soluciones discontinuas sean compatibles con las leyes de conservación correspondientes a las ecuaciones de la RMHD (4.2), se deben cumplir las siguientes condiciones de salto a través de la discontinuidad

[7]A lo largo de esta sección, la hipersuperficie $\phi(x^\beta) = 0$ va a estar asociada a la propagación de una discontinuidad, y no se trata, como en el resto del capítulo, de una hipersuperficie característica. La similitud de la notación alcanza también a las definiciones de a, $\mathcal{B}$, E, ... que ahora pasan a depender de la hipersuperficie de discontinuidad y su velocidad de propagación, v_s.

$$\left[\rho\, u^\alpha\right] \phi_\alpha = 0, \tag{4.112}$$

$$\left[b^\alpha u^\beta - b^\beta u^\alpha\right] \phi_\alpha = 0, \tag{4.113}$$

$$\left[T^{\alpha\beta}\right] \phi_\alpha = 0, \tag{4.114}$$

donde $[F] \equiv F_R - F_L$ denota el salto de la variable F entre los estados a ambos lados de la superficie de discontinuidad (L de *left* y R de *right*). De estas ecuaciones se deducen inmediatamente una serie de magnitudes invariantes a través de la discontinuidad.

De la primera condición de salto (4.112) obtenemos que

$$m \equiv \rho u^\mu \phi_\mu = \rho a, \tag{4.115}$$

asociada al flujo de masa, es un invariante a través de la discontinuidad. Para el caso de una discontinuidad propagándose a lo largo del eje x, $m = \rho u^0 (v^x - v_s)$, donde $v^x = u^x/u^0$.

De la segunda condición de salto (4.113) deducimos que el vector

$$V^\mu \equiv \mathcal{B} u^\mu - a b^\mu \tag{4.116}$$

es también un vector invariante a través de la discontinuidad y tangente a ella, como se deriva del hecho de que la contracción $V^\mu \phi_\mu$ sea igual a cero. Como puede comprobarse, las componentes 0 y x de este tetravector están asociadas a la conservación de la componente normal del trivector campo magnético (B^x, para una discontinuidad propagándose a lo largo del eje x). Las componentes y y z expresan la conservación del campo eléctrico transversal a la discontinuidad en el sistema comóvil con la discontinuidad.

Por último, a partir de la tercera condición de salto (4.114), asociada a la conservación del flujo de momento y energía, obtenemos que el vector

$$W^\mu \equiv E a u^\mu + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) \phi^\mu - \mathcal{B} b^\mu \tag{4.117}$$

es también un vector invariante a través de la discontinuidad.

La RMHD admite diferentes tipos de discontinuidades que procedemos a caracterizar.

4.10.1 Discontinuidades tangenciales

Diremos que estamos ante una discontinuidad tangencial si la cantidad m definida en (4.115) es nula. Entonces, $a = 0$ y se tiene que $v^x = v_s$, es decir, que la velocidad normal a ambos lados de la discontinuidad coincide con la velocidad de propagación de la propia discontinuidad ($v^x_L = v^x_R = v_s$).

Si sustituimos la condición $a = 0$ en los dos vectores invariantes a través de la discontinuidad (4.116), (4.117) tenemos entonces que

$$V^\mu = \mathcal{B}u^\mu, \tag{4.118}$$

$$W^\mu = \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right)\phi^\mu - \mathcal{B}b^\mu. \tag{4.119}$$

Llegados a este punto tenemos dos posibilidades dependiendo del valor de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} \neq 0$, teniendo en cuenta (4.118) y que $u^\alpha u_\alpha = -1$, calculando el módulo del V^μ, llegamos a

$$[\mathcal{B}] = 0, \quad [u^\beta] = 0, \tag{4.120}$$

que conducen, al tener en cuenta (4.119), a

$$[b^\beta] = 0, \quad [p] = 0 \tag{4.121}$$

quedando indeterminado únicamente el salto en densidad. Este tipo de discontinuidad se conoce como discontinuidad de contacto.

Por otra parte, si $\mathcal{B} = 0$, se tiene, por un lado que

$$\left[p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right] = 0 \tag{4.122}$$

y que $B^x_L = B^x_R = 0$, además de $v^x_L = v^x_R = v_s$. El resto de los saltos (densidad y componentes tangenciales del campo magnético) quedan indeterminados. Tenemos, en definitiva, dos estados en equilibrio de presiones y con campos magnéticos tangentes a la discontinuidad.

4.10.2 Discontinuidades no tangenciales

Las discontinuidades no tangenciales se caracterizan por tener $m \neq 0$. Estas discontinuidades son las llamadas ondas de Alfvén y los choques magnetosónicos rápidos y lentos.

Para discontinuidades no tangenciales podemos definir una serie adicional de magnitudes invariantes a través de la discontinuidad[8]

$$H \equiv -\frac{V^\mu V_\mu}{m^2} = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\mathcal{B}^2}{a^2} - \mathbf{b}^2\right), \tag{4.123}$$

$$\beta \equiv \mathcal{B}h, \tag{4.124}$$

$$\mathcal{F} \equiv \hat{\alpha} + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right)\frac{G}{a^2}, \tag{4.125}$$

[8]Remitimos al lector a las ya citadas monografías de Lichnerowicz (1967) y Anile (1989) para una demostración completa. Las diferencias entre las notaciones utilizadas por estos autores son, en general, triviales, excepto el hecho de que Lichnerowicz usa un vector normal a la hipersuperficie normalizado.

$$K \equiv h^2 + \frac{m^2 h^2}{\rho^2 G} + \frac{2h\chi}{\rho} - H\chi, \tag{4.126}$$

$$\mathcal{L} \equiv \chi \hat{\alpha}^2, \tag{4.127}$$

donde se han definido

$$\hat{\alpha} \equiv \frac{h}{\rho} - H, \tag{4.128}$$

$$\chi \equiv \mathbf{b}^2 - \frac{m^2 H}{G} = \frac{\mathbf{b}^2(G + a^2) - \mathcal{B}^2}{G} = \frac{\mathbf{b}_t^2(G + a^2)}{G}. \tag{4.129}$$

Llamaremos ondas de Alfvén a las discontinuidades no tangenciales que verifican (Lichnerowicz 1967)

$$\mathcal{A}(\equiv Ea^2 - \mathcal{B}^2) = 0. \tag{4.130}$$

Por otro lado, puesto que para las discontinuidades no tangenciales es fácilmente demostrable que

$$\mathcal{A} = m^2 \hat{\alpha} \tag{4.131}$$

y dado que $m \neq 0$, vemos que las ondas de Alfvén se caracterizan por $\hat{\alpha}_L = \hat{\alpha}_R = 0$. Ahora, teniendo en cuenta esta condición, operando con las magnitudes invariantes a través de discontinuidades que acabamos de definir, puede obtenerse que

$$[\rho] = 0, \tag{4.132}$$

$$[p] = 0, \tag{4.133}$$

$$[\mathbf{b}^2] = 0, \tag{4.134}$$

$$[u^\alpha \phi_\alpha] = [a] = 0, \tag{4.135}$$

$$[b^\alpha \phi_\alpha] = [\mathcal{B}] = 0. \tag{4.136}$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, las presión térmica y la densidad permanecen constantes a través de la discontinuidad. Las componentes de la velocidad y del campo magnético a ambos lados de la discontinuidad están ligadas para satisfacer las ecuaciones (4.134)-(4.136). En el caso clásico estas condiciones conducen a la constancia de la componente normal de la velocidad del fluido a través de la discontinuidad y a una mera rotación del campo magnético y la velocidad tangenciales a la discontinuidad (de ahí que las ondas de Alfven reciban también el nombre de discontinuidades rotacionales). En el caso relativista, sin embargo, la velocidad del fluido normal a la onda puede ser discontinua y el campo magnético tangencial, además de rotar, puede cambiar de módulo.

Analizado el caso en el que $\hat{\alpha}_L = \hat{\alpha}_R = 0$, cabe plantearse qué ocurre en el resto de casos. Lichnerowicz (1967) demuestra que si $\hat{\alpha}_R = \hat{\alpha}_L \neq 0$ no existe discontinuidad. También demuestra que los choques magnetosónicos cumplen que $\hat{\alpha}_L\hat{\alpha}_R > 0$.

Bajo esta condición se puede encontrar la extensión de la adiabática de Hugoniot a la RMHD, la llamada adiabática de Lichnerowicz

$$[h^2] - \left(\frac{h_L}{\rho_L} + \frac{h_R}{\rho_R}\right)[p] + \frac{1}{2}\left[\frac{h}{\rho}\right][\chi] = 0 \tag{4.137}$$

que liga las variables termodinámicas y el campo magnético a ambos lados del choque magnetosónico.

Los choques magnetosónico rápidos verifican que

$$0 < \hat{\alpha}' < \hat{\alpha} \tag{4.138}$$

donde la $'$ hace referencia al estado post-choque, refiriéndose la otra cantidad al estado pre-choque. Alternativamente, los choques magnetosónicos lentos verifican

$$\hat{\alpha}' < \hat{\alpha} < 0. \tag{4.139}$$

Una consecuencia inmediata de estas definiciones y del carácter invariante de $\mathcal{L}$ definida en (4.127) es que la presión magnética crece tras un choque rápido y decrece tras uno lento. Adicionalmente, a partir de la definición de $\hat{\alpha}$ (4.128), se tiene que

$$\frac{h'}{\rho'} < \frac{h}{\rho}. \tag{4.140}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que a través de un choque magnetosónico, $s' > s$ y asumiendo ciertas condiciones de compresibilidad[9] se puede demostrar que

$$p' > p, \quad h' > h, \quad \text{y} \quad \rho' > \rho. \tag{4.142}$$

Comentaremos también que en los choques magnetosónicos rápidos, bajo determinadas circunstancias, puede aparecer una componente tangencial del campo magnético en el material al atravesar el choque no estando esta componente presente en el material antes de atravesar el choque. A este tipo de

[9]
$$\left(\frac{\partial h/\rho}{\partial s}\right)_p > 0, \quad \left(\frac{\partial h/\rho}{\partial p}\right)_s < 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial^2 h/\rho}{\partial p^2}\right)_s > 0, \tag{4.141}$$

ver Lichnerowicz (1967).

ondas de choque se les llama *switch-on*. En el caso de choques magnetosónicos lentos lo que puede ocurrir es justo lo contrario, es decir, la anulación de la componente tangencial del campo al atravesar la onda de choque (*switch-off*).

4.11 Rarefacciones

Una onda simple es una solución suave autosemejante de la RMHD. Esta onda puede ser compresiva o expansiva dependiendo de si el fluido se comprime o expande al atravesar la onda o bien ondas en las que la densidad es constante. Las rarefacciones corresponden a ondas simples expansivas y están asociadas a campos característicos genuinamente no lineales. En esta sección veremos los tipos de ondas de rarefacción que admite la RMHD. Para un estudio más profundo remitimos al lector al artículo Anile y Muscato (1988) y al libro Anile (1989).

Como en la RMHD sólo hay dos campos característicos genuinamente no lineales, podemos tener dos tipos de ondas de rarefacción: las magnetosónicas lentas y las magnetosónicas rápidas.

Estas ondas de rarefacción, a diferencia de las ondas de choque, conectan estados constantes de la misma entropía específica: la entropía específica a través de la rarefacción se mantiene constante. Además, el carácter autosemejante de la onda, hace que los eatdos dentro de la rarefacción dependan de una sola variable. Si tomamos como variable independiente a través de la rarefacción la presión p, las ecuaciones que las describen son (Anile, 1989):

$$\frac{du^\alpha}{dp} = \frac{r_m^\alpha}{Ea^2\mathcal{A}}, \ \frac{db^\alpha}{dp} = \frac{r_m^{\alpha+4}}{Ea^2\mathcal{A}} \tag{4.143}$$

(donde el superíndice del autovector r_m hace referencia a la componente del citado autovector, de 0 a 9). En estas ecuaciones se ha supuesto que no hay degeneración de los autovalores magnetosónicos. En este caso, el campo magnético $\mathbf{b}^2$ es una función creciente de p en la ondas magnetosónicas rápidas y decreciente en las ondas magnetosónicas lentas. Además, el campo magnético no sufre rotación a través de las rarefacciones magnetosónicas. Remitimos al lector a la bibliografía mencionada para un estudio más detallado de los casos degenerados.

Comentaremos por último que, al contrario de lo que ocurre en el caso de ondas de choque, puede haber rarefacciones rápidas en las que el campo magnético transversal se anule al atravesar la rarefacción (*switch-off*), y rarefacciones lentas en las que la componente transversal del campo se haga diferente de cero al atravesar la rarefacción, siendo esta componente cero en el material a la entrada de la rarefacción (*switch-on*).

Capítulo 5

Cambios de sistema de variables

Hasta este momento hemos realizado el análisis espectral de la RMHD en el sistema de variables propuesto por Anile ($\tilde{\mathbf{U}}$, definido en 4.24). Aunque en este sistema de variables resulta más sencillo el análisis espectral, el número de variables de este sistema, 10, es mayor que el necesario para especificar el estado del fluido. Esto se debe a que existen tres ligaduras físicas que no se han utilizado para reducir el sistema de ecuaciones. Estas tres ligaduras se pueden expresar matemáticamente como $u^\alpha u_\alpha = -1$, $b^\alpha u_\alpha = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Además, los esquemas numéricos que utilizaremos hacen uso de la forma conservativa de las ecuaciones de la RMHD y son a estas variables conservadas y no a las variables de Anile a las que debemos referir los autovectores obtenidos en la descomposición espectral.

En las siguientes páginas expondremos la teoría general que hemos deducido para estos cambios de sistemas de variables, que no son en principio triviales ya que los espacios que generan cada uno de los sistemas de variables tienen diferente dimensión. Procederemos, por tanto, a obtener las expresiones para realizar los cambios entre los dos sistemas de variables. En estas expresiones aparecerán derivadas termodinámicas que dejaremos indicadas ya que el cálculo de éstas depende de la ecuación de estado elegida. Como ya se ha hecho en el capítulo anterior, a fin de simplificar las expresiones, particularizaremos los autovectores de la matriz jacobiana en la dirección del eje x, que corresponde a elegir $\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0)$. Los casos correspondientes a las otras dos direcciones se obtienen trivialmente mediante permutación cíclica de las coordenadas.

Además del sistema de variables conservadas, expondremos también la transformación a un sistema de variables que denominaremos como sistema reducido de variables, $\tilde{\mathbf{V}}$, el cual nos facilitará realizar algunos desarrollos analíticos que serán usados más adelante. Además, algunos esquemas numéricos utilizan, en los procesos de reconstrucción de variables, la descomposición espectral en este sistema o en sistemas de variables similares (Balsara 2001).

5.1 Autovectores a derechas

Para obtener los autovectores a derechas en un sistema de 7 variables[1] $\mathbf{W}$ (en la práctica, el sistema de variables conservadas, $\mathbf{U}$ (2.22), o el sistema reducido de variables, $\tilde{\mathbf{V}}$ que definiremos a continuación) a partir del sistema de variables definido por Anile, $\tilde{\mathbf{U}}$, deberemos transformar los autovectores a derechas del sistema de Anile realizando el producto de la matriz de transformación, $\mathbf{M}$, por el autovector correspondiente. Para obtener esta matriz de transformación debemos expresar las variables $\mathbf{W}$ en función de las variables de Anile, $\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{U}})$ y así, la matriz $\mathbf{M}$ se obtiene realizando las correspondientes derivadas parciales,

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}}. \tag{5.1}$$

Nótese, sin embargo, que la forma funcional $\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{U}})$ no es única, ya que podemos utilizar las ligaduras entre las variables de Anile para obtener diferentes expresiones funcionales y, por tanto, no existe una única matriz de transformación. A pesar de ello, al proceder a la transformación de los autovectores, el resultado es independiente de la matriz utilizada.

Una vez explicado el procedimiento general, pasaremos a aplicarlo en los sistemas reducido de variables y en el sistema de variables conservadas.

5.1.1 Sistema de Anile-Sistema reducido de variables

Por la simplicidad de cálculo, a partir del sistema de Anile, definimos el sistema reducido de variables, $\tilde{\mathbf{V}}$, como el conjunto de variables independientes siguientes:

$$\tilde{\mathbf{V}} \equiv (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, \rho)^T. \tag{5.2}$$

Haciendo las derivadas oportunas para obtener la matriz y realizando el producto $\bar{r} = \mathbf{M}r$, obtenemos las siguientes ecuaciones de transformación para las componentes de los autovectores en el sistema de variables reducido:

$$\bar{r}_{u^x} = r_{u^x}, \tag{5.3}$$

$$\bar{r}_{u^y} = r_{u^y}, \tag{5.4}$$

$$\bar{r}_{u^z} = r_{u^z}, \tag{5.5}$$

$$\bar{r}_{b^y} = r_{b^y}, \tag{5.6}$$

$$\bar{r}_{b^z} = r_{b^z}, \tag{5.7}$$

[1]Recordemos que, si bien en principio, tenemos que fijar 8 variables para definir un estado las componentes del campo magnético están ligadas por la condición de divergencia nula, restando pues una variable al total de variables independientes.

$$\bar{r}_p = r_p, \tag{5.8}$$

$$\bar{r}_\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s r_p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p r_s, \tag{5.9}$$

donde r_a hace referencia a la componente del autovector a derechas en el sistema de variables de Anile asociado a la variable a, y $\bar{r}_b$ hace referencia a la componente del autovector a derechas en el sistema de variables reducido, asociado a la variable b.

Como ejemplo de esta transformación, daremos ahora las expresiones de los autovectores obtenidos transformando los autovectores dados en la Sección 4.5.

El autovector entrópico es

$$\bar{r}_e = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p\right)^T, \tag{5.10}$$

los autovectores de Alfvén son de la forma

$$\bar{r}_a = \begin{pmatrix} -a\lambda_a(v^y B^z - v^z B^y) \\ a\big(\lambda_a(v^x B^z - v^z B^x) - B^z\big) \\ a\big(-\lambda_a(v^x B^y - v^y B^x) + B^y\big) \\ \mathcal{B}\big(\lambda_a(v^x B^z - v^z B^x) - B^z\big) \\ \mathcal{B}\big(-\lambda_a(v^x B^y - v^y B^x) + B^y\big) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

y los autovectores magnetosónicos son

$$\bar{r}_m = \begin{pmatrix} ad^x \\ ad^y \\ ad^z \\ \mathcal{B}d^y + a\mathcal{A}f^y \\ \mathcal{B}d^z + a\mathcal{A}f^z \\ a^2\mathcal{A} \\ a^2\mathcal{A}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Las funciones a, d^i, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ y f^i han sido definidas en la Sección 4.5.

5.1.2 Sistema de Anile-Sistema de variables conservadas

Para el sistema de variables conservadas, $\mathbf{U}$, definido en (4.11), podemos tomar la matriz de transformación, $\mathbf{M}$, como:

$$
\left(\begin{array}{cccccc}
\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Eu^x & Eu^0 & 0 & 0 & -2b^0u^0u^x - b^x & 2b^xu^0u^x - b^0 \\
Eu^y & 0 & Eu^0 & 0 & -2b^0u^0u^y - b^y & 2b^xu^0u^y \\
Eu^z & 0 & 0 & Eu^0 & -2b^0u^0u^z - b^z & 2b^xu^0u^z \\
2Eu^0 & 0 & 0 & 0 & -2b^0u^0u^0 - b^0 & 2b^xu^0u^0 - b^x \\
b^y & 0 & -b^0 & 0 & -u^y & 0 \\
b^z & 0 & 0 & -b^0 & -u^z & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccc}
0 & 0 & \partial_p\rho u^0 & \partial_s\rho u^0 \\
2b^yu^0u^x & 2b^zu^0u^x & \partial_p(\rho h)u^0u^x & \partial_s(\rho h)u^0u^x \\
2b^yu^0u^z - b^0 & 2b^zu^0u^z & \partial_p(\rho h)u^0u^y & \partial_s(\rho h)u^0u^y \\
2b^yu^0u^z & 2b^zu^0u^z - b^0 & \partial_p(\rho h)u^0u^z & \partial_s(\rho h)u^0u^z \\
2b^yu^0u^0 - b^y & 2b^zu^0u^0 - b^z & \partial_p(\rho h)u^0u^0 - 1 & \partial_s(\rho h)u^0u^0 \\
u^0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & u^0 & 0 & 0
\end{array}\right), \tag{5.13}
$$

donde:

$$
\partial_p = \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_s \qquad \partial_s = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_p .
$$

Como en la sección anterior, daremos la expresión de los autovectores en variables conservadas obtenidos al multiplicar la matriz **M** por los autovectores descritos en la Sección 4.5 en variables de Anile.

El autovector entrópico en variables conservadas es

$$
R_e = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p u^0 \begin{pmatrix} 1 \\ u^x \\ u^y \\ u^z \\ u^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.14}
$$

el autovector de Alfvén en variables conservadas es:

$$
R_a = \begin{pmatrix}
-\rho\, a\, n_1 \\
-(E((u^x)^2 - \lambda_a^2(u^0)^2) - ((b^x)^2 - \lambda_a^2(b^0)^2))n_1 \\
Ea(-u^yn_1 + u^0\lambda_a n_2 - u^0B^z) + (b^yn_1 - (\lambda_a n_2 - B^z)b^0)\mathcal{B} \\
Ea(-u^zn_1 - \lambda_a n_3 u^0 + u^0B^y) + (b^zn_1 + (\lambda_a n_3 - B^y)b^0)\mathcal{B} \\
n_1(-n_3 + \lambda_a B^y) + (\lambda_a n_2 - B^z)B^x \\
n_1(-n_2 + \lambda_a B^z) - (\lambda_a n_3 - B^y)B^x \\
2n_1(\mathcal{B}b^0 - Eu^0 a)
\end{pmatrix}, \tag{5.15}
$$

donde hemos definido:

$$n_1 = v^y B^z - v^z B^y \quad , \quad n_2 = v^x B^z - v^z B^x \quad \text{y} \quad n_3 = v^x B^y - v^y B^x. \quad (5.16)$$

Finalmente, los autovectores magnetosónicos, R_m, son

$$\begin{pmatrix} \rho a d^0 + \partial_p \rho u^0 a^2 \mathcal{A} \\ aE(u^x d^0 + u^0 d^x) - \mathcal{B}(b^x d^0 + b^0 d^x) - aA(b^x f^0 + b^0 f^x) + 2u^0 u^x \mathcal{H} + \partial_p(\rho h) u^0 u^x a^2 \mathcal{A} \\ aE(u^y d^0 + u^0 d^y) - \mathcal{B}(b^y d^0 + b^0 d^y) - aA(b^y f^0 + b^0 f^y) + 2u^0 u^y \mathcal{H} + \partial_p(\rho h) u^0 u^y a^2 \mathcal{A} \\ aE(u^z d^0 + u^0 d^z) - \mathcal{B}(b^z d^0 + b^0 d^z) - aA(b^z f^0 + b^0 f^z) + 2u^0 u^z \mathcal{H} + \partial_p(\rho) u^0 u^z a^2 \mathcal{A} \\ a(b^y d^0 - b^0 d^y) + \mathcal{B}(-d^0 u^y + d^y u^0) + aA(-v^y f^0 + f^y) \\ a(b^z d^0 - b^0 d^z) + \mathcal{B}(-d^0 u^z + d^z u^0) + aA(-v^y f^0 + f^z) \\ 2Eu^0 a d^0 + (2(u^0)^2 - 1)\mathcal{H} - 2b^0(\mathcal{B} d^0 + a\mathcal{A} f^0) + \left(\partial_p(\rho)(u^0)^2 - 1\right) a^2 \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathcal{H} = \mathcal{B} b^\alpha d_\alpha + a\mathcal{A} b^\alpha f_\alpha = -\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^2}{\rho h} + \frac{a^2 \mathcal{A} \mathbf{b}^2}{\rho h c_s^2}. \quad (5.17)$$

5.1.3 Sistema reducido de variables-Sistema de variables conservadas

Los autovectores a derechas antes deducidos para los sistemas reducido de variables ($\bar{r}_{\tilde{\mathbf{V}}}$) y para el sistema de variables conservadas ($R_{\mathbf{U}}$) están relacionados entre sí a través de la matriz del cambio del sistema variables, $\partial \mathbf{U}/\partial \tilde{\mathbf{V}}$, mediante el producto

$$R_{\mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tilde{\mathbf{V}}} \, \bar{r}_{\tilde{\mathbf{V}}}. \quad (5.18)$$

Esta matriz, al contrario que las matrices de los cambios dadas anteriormente, está unívocamente definida. Deduciremos a continuación su expresión.

Si partimos de que las ligaduras del sistema se pueden escribir como:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^0)^2 = 1 + (u^x)^2 + (u^y)^2 + (u^z)^2 \\ b^0 u^0 = b^x u^x + b^y u^y + b^z u^z \\ B^x = \text{cte} \Rightarrow b^x u^0 = B^x + b^0 u^x \end{array} \right. .$$

Nótese que en el caso de ondas propagándose en la dirección del eje x ($\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0)$) , la condición de divergencia nula del campo magnético, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, es equivalente a $B^x = \text{cte}$ ya que todas las variables dependen sólo de la coordenada x.

Podemos obtener las siguientes derivadas parciales[2]:

$$\frac{\partial u^0}{\partial u^i} = \frac{u^i}{u^0} \qquad i = x, y, z, \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial b^i} \equiv (b^0)_{\mathbf{b^i}} = \frac{u^i u^0}{(u^0)^2 - (u^x)^2} \qquad i = y, z, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial u^x} \equiv (b^0)_{\mathbf{u^x}} = \frac{b^x}{u^0}, \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial u^i} \equiv (b^0)_{\mathbf{u^i}} = \frac{1}{(u^0)^2 - (u^x)^2}\left(B^i - b^x \frac{u^x u^i}{u^0}\right) \qquad i = y, z, \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial b^i} \equiv (b^x)_{\mathbf{b^i}} = \frac{u^x u^i}{(u^0)^2 - (u^x)^2} \qquad i = y, z, \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial u^x} \equiv (b^x)_{\mathbf{u^x}} = \frac{b^0}{u^0}, \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial u^i} \equiv (b^x)_{\mathbf{u^i}} = \frac{1}{(u^0)^2 - (u^x)^2}\left(\frac{B^i u^x}{u^0} - b^x u^i\right) \quad i = y, z. \tag{5.25}$$

Así, escribimos que la matriz jacobiana del cambio es

$$\left(\begin{array}{c}
\rho u^x/u^0 \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^x}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^x}})u^x u^0) + E(u^x u^x/u^0 + u^0) - b^0(b^x)_{\mathbf{u^x}} - (b^0)_{\mathbf{u^x}} b^x \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^x}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^x}})u^0 u^y + E u^x u^y/u^0 - (b^0)_{\mathbf{u^x}} b^y \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^x}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^x}})u^0 u^z + E u^x u^z/u^0 - (b^0)_{\mathbf{u^x}} b^z \\
(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^x}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^x}})(2u^0u^0 - 1) + 2Eu^x - 2b^0(b^0)_{\mathbf{u^x}} \\
b^y u^x/u^0 - u^y(b^0)_{\mathbf{u^x}} \\
b^z u^x/u^0 - u^z(b^0)_{\mathbf{u^x}}
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}
\rho u^y/u^0 \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^y}})u^0 u^x + E u^x u^y/u^0 - (b^0)_{\mathbf{u^y}} b^x - b^0(b^x)_{\mathbf{u^y}} \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^y}})u^0 u^y + E(u^y u^y/u^0 + u^0) - (b^0)_{\mathbf{u^y}} b^y \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^y}})u^0 u^z + E u^z u^y/u^0 - (b^0)_{\mathbf{u^y}} b^z \\
(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^y}})(2u^0u^0 - 1) + 2Eu^y - 2b^0(b^0)_{\mathbf{u^y}} \\
b^y u^y/u^0 - u^y(b^0)_{\mathbf{u^y}} - b^0 \\
b^z u^y/u^0 - u^z(b^0)_{\mathbf{u^y}}
\end{array}$$

[2]En las siguientes expresiones se han escrito subíndices en negrita para denotar la derivada parcial respecto de la variable correspondiente.

$$\begin{array}{c}
\rho u^z/u^0 \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^z}})u^0u^x + Eu^xu^z/u^0 - (b^0)_{\mathbf{u^z}}b^x - b^0(b^x)_{\mathbf{u^z}} \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^z}})u^0u^y + Eu^yu^z/u^0 - (b^0)_{\mathbf{u^z}}b^y \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^z}})u^0u^z + E(u^zu^z/u^0 + u^0) - (b^0)_{\mathbf{u^z}}b^z \\
(-b^0(b^0)_{\mathbf{u^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{u^z}})(2u^0u^0 - 1) + 2Eu^z - 2b^0(b^0)_{\mathbf{u^z}} \\
b^yu^z/u^0 - u^y(b^0)_{\mathbf{u^z}} \\
b^zu^z/u^0 - u^z(b^0)_{\mathbf{u^z}} - b^0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^y}})u^0u^x - b^x(b^0)_{\mathbf{b^y}} - b^0(b^x)_{\mathbf{b^y}} \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^y}})u^0u^y - b^y(b^0)_{\mathbf{b^y}} - b^0 \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^y}})u^0u^z - b^z(b^0)_{\mathbf{b^y}} \\
(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^y}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^y}})(2u^0u^0 - 1) - 2b^0(b^0)_{\mathbf{b^y}} \\
u^0 - u^y(b^0)_{\mathbf{b^y}} \\
-u^z(b^0)_{\mathbf{b^y}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^z}})u^0u^x - b^x(b^0)_{\mathbf{b^z}} - b^0(b^x)_{\mathbf{b^z}} \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^z}})u^0u^y - b^y(b^0)_{\mathbf{b^z}} \\
2(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^z}})u^0u^z - b^z(b^0)_{\mathbf{b^z}} - b^0 \\
(-b^0(b^0)_{\mathbf{b^z}} + b^x(b^x)_{\mathbf{b^z}})(2u^0u^0 - 1) - 2b^0(b^0)_{\mathbf{b^z}} \\
-u^y(b^0)_{\mathbf{b^z}} \\
u^0 - u^z(b^0)_{\mathbf{b^z}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \\
\rho\partial_p h u^0u^x \\
\rho\partial_p h u^0u^y \\
\rho\partial_p h u^0u^z \\
\rho\partial_p h u^0u^0 - 1 \\
0 \\
0
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c}
u^0 \\
(h + \rho\partial_\rho h)u^0u^x \\
(h + \rho\partial_\rho h)u^0u^y \\
(h + \rho\partial_\rho h)u^0u^z \\
(h + \rho\partial_\rho h)u^0u^0 \\
0 \\
0
\end{array}\right), \tag{5.26}$$

donde las parciales termodinámicas indicadas son

$$\partial_\rho h = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p \qquad \text{y} \qquad \partial_p h = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho . \tag{5.27}$$

5.2 Autovectores a izquierdas

En esta sección obtendremos la matriz del cambio, $\mathbf{N}$, necesaria para realizar la transformación de los autovectores a izquierdas en el sistema de variables de Anile, $\tilde{\mathbf{U}}$, al sistema de 7 variables $\mathbf{W}$ (en nuestro caso reducidas o conservadas). Si el cambio fuera entre sistemas de variables de igual dimensión, la matriz $\mathbf{N}$ no sería más que la inversa de la matriz correspondiente al cambio entre los autovectores a derechas, $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$. Sin embargo, en nuestro caso no es así. Debemos recordar que en el sistema de variables de mayor dimensión no todas las variables son independientes y existen tres ligaduras físicas que no se han tenido en cuenta. La forma más sencilla de proceder es suponer que tres de las variables del sistema de Anile no son variables independientes. La opción que proponemos es suponer como dependientes las variables (u^0, b^0, b^x).

Llegados a este punto, por claridad explicativa, procedemos a reordenar el sistema de variables definido por Anile ($\tilde{\mathbf{U}} = (u^\mu, b^\mu, p, s)$), agrupando las variables que consideraremos independientes. Así redefinimos

$$\bar{\mathbf{U}} = (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, s, u^0, b^0, b^x). \tag{5.28}$$

Análogamente a lo que se vio al comienzo de la sección anterior, para obtener los autovectores a derechas, $R_{\mathbf{W}}$, en el sistema de variables $\mathbf{W}$, a partir de los autovectores a derechas, $R_{\bar{\mathbf{U}}}$, en el sistema de variables de Anile reordenado, $\bar{\mathbf{U}}$, debemos realizar

$$R_{\mathbf{W}} = \mathbf{M} \cdot R_{\bar{\mathbf{U}}} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \bar{\mathbf{U}}},$$

siendo $\mathbf{M}$ una matriz 7×10, que podremos descomponer como $\mathbf{M} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz 7×7, en donde aparecerían las derivadas parciales de las variables del sistema $\mathbf{W}$ respecto de las consideradas variables independientes del sistemas de variables de Anile y $\mathbf{B}$ es una matriz 7×3, en donde las derivadas se realizan respecto de las consideradas variables dependientes en el sistema de Anile.

Por otro lado, los autovectores a izquierda deberán transformarse de acuerdo con la ecuación

$$L_{\mathbf{W}} = L_{\bar{\mathbf{U}}} \cdot \mathbf{N},$$

donde $L_{\mathbf{W}}$ es un vector de dimensión 7×1, $L_{\bar{\mathbf{U}}}$ es un vector de dimensión 10×1[3] y $\mathbf{N}$ es una matriz 10×7 que podemos descomponer como

$$\mathbf{N} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{H}$ una matriz 7×7 y $\mathbf{K}$ una matriz 3×7.

[3]Nótese que los autovectores por la izquierda pertenencen al espacio dual de aquel al que pertenencen los autovectores a derechas. Para denotar esta propiedad, los representatemos como vectores fila.

Las matrices $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M}$ deben cumplir la condición

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{I}_{7\times 7}.$$

Si $\mathbf{A}$ es invertible, llegamos a la siguiente condición

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}.$$

La matriz $\mathbf{K}$ es la matriz de las derivadas parciales de u^0, b^0 y b^x como funciones, unívocamente definidas, de las variables del sistema $\mathbf{W}$

$$\mathbf{K} = \frac{\partial(u^0, b^0, b^x)}{\partial \mathbf{W}}. \tag{5.29}$$

Aplicaremos a continuación este procedimiento a los diferentes sistemas de variables a fin de obtener la matriz del cambio para los autovectores a izquierdas correspondientes.

5.2.1 Sistema de Anile-Sistema reducido de variables

En concreto si abordamos el cambio al sistema reducido de variables ya definido: $\tilde{\mathbf{V}} \equiv (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, \rho)$, tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\partial_p \rho)_s & (\partial_s \rho)_p \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}_{7\times 3}. \tag{5.31}$$

Las componente de la matriz $\mathbf{K}$ vendrán definidas por las derivadas parciales ya dadas en (5.19)-(5.25).

Así, para el sistema reducido de variables $\tilde{\mathbf{V}}$ obtenemos la siguiente ley de transformación para las componentes:

$$\bar{l}_{u^x} = \frac{\partial u^0}{\partial u^x} l_{u^0} + l_{u^x} + \frac{\partial b^0}{\partial u^x} l_{b^0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^x} l_{b^x}, \tag{5.32}$$

$$\bar{l}_{u^y} = \frac{\partial u^0}{\partial u^y} l_{u^0} + l_{u^y} + \frac{\partial b^0}{\partial u^y} l_{b^0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^y} l_{b^x}, \tag{5.33}$$

$$\bar{l}_{u^z} = \frac{\partial u^0}{\partial u^z} l_{u^0} + l_{u^z} + \frac{\partial b^0}{\partial u^z} l_{b^0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^z} l_{b^x}, \tag{5.34}$$

$$\bar{l}_{b^y} = \frac{\partial b^0}{\partial b^y} l_{b^0} + \frac{\partial b^x}{\partial b^y} l_{b^x} + l_{b^y}, \tag{5.35}$$

$$\bar{l}_{b^z} = \frac{\partial b^0}{\partial b^z} l_{b^0} + \frac{\partial b^x}{\partial b^z} l_{b^x} + l_{b^z}, \tag{5.36}$$

$$\bar{l}_p = l_p + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho l_s, \tag{5.37}$$

$$\bar{l}_\rho = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p l_s. \tag{5.38}$$

Como en el caso de los autovectores a derechas, l_a hace referencia a la componente del autovector a izquierdas en el sistema de variables de Anile asociado a la variable a, y $\bar{l}_b$ hace referencia a la componente del autovector a izquierdas en el sistema de variables reducido, asociado a la variable b.

Aplicaremos esta transformaciónes en el Capítulo 7, donde abordaremos la renormalización de los autovectores a izquierda.

5.2.2 Sistema de Anile-Sistema de variables conservadas

La obtención de una matriz para transformar los autovectores a izquierdas desde el sistema de Anile al de variables conservadas, resulta bastante tediosa. En las siguientes páginas expondremos el desarrollo realizado para su obtención que, como se verá, está acabado, a falta de la realización de un producto matricial. Esta matriz de transformación no se ha llegado a utilizar porque para el cálculo de las expresiones de los autovectores a izquierdas en variables conservadas se prefirió partir de las expresiones renormalizadas de los autovectores a izquierdas en el sistema reducido de variables, proceso que se expondrá en el Capítulo 7.

Si tenemos en cuenta la reordenación del sistema de Anile que hemos propuesto, $\bar{\mathbf{U}} \equiv (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, s, u^0, b^0, b^x)$, debemos reordenar las columnas de la matriz definida en (5.1.2). Así obtenemos que la correspondiente matriz de transformación $\mathbf{M}$ es

$$\left(\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_p \rho u^0 \\
Eu^0 & 0 & 0 & 2b^y u^0 u^x & 2b^z u^0 u^x & \partial_p(\rho h) u^0 u^x \\
0 & Eu^0 & 0 & 2b^y u^0 u^y - b^0 & 2b^z u^0 u^y & \partial_p(\rho h) u^0 u^y \\
0 & 0 & Eu^0 & 2b^y u^0 u^z & 2b^z u^0 u^z - b^0 & \partial_p(\rho h) u^0 u^z \\
0 & 0 & 0 & 2b^y u^0 u^0 - b^y & 2b^z u^0 u^0 - b^z & \partial_p(\rho h) u^0 u^0 - 1 \\
0 & -b^0 & 0 & u^0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -b^0 & 0 & u^0 & 0
\end{array}\right.$$

$$
\left.\begin{array}{c|cccc}
\partial_s \rho u^0 & \rho & 0 & 0 \\
\partial_s(\rho h) u^0 u^x & E u^x & -2b^0 u^0 u^x - b^x & 2b^x u^0 u^x - b^0 \\
\partial_s(\rho h) u^0 u^y & E u^y & -2b^0 u^0 u^y - b^y & 2b^x u^0 u^y \\
\partial_s(\rho h) u^0 u^z & E u^z & -2b^0 u^0 u^z - b^z & 2b^x u^0 u^z \\
\partial_s(\rho h) u^0 u^0 & 2E u^0 & -2b^0 u^0 u^0 - b^0 & 2b^x u^0 u^0 - b^x \\
0 & b^y & -u^y & 0 \\
0 & b^z & -u^z & 0
\end{array}\right), \tag{5.39}
$$

donde las parciales termodinámicas indicadas son

$$
\partial_p = \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_s \qquad \text{y} \qquad \partial_s = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_p ,
$$

y donde la raya vertical separa las submatrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Podemos calcular la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ y obtenemos

$$
\left(\begin{array}{cccc}
\frac{A u^x E_b}{M E u^0} & \frac{1}{E u^0} & \frac{-b^0 b^y u^x (D-2)}{M E u^0} & \frac{-b^0 b^z u^x (D-2)}{M E u^0} \\
\frac{A u^y}{M} & 0 & G_1 & \frac{-b^0 b^z u^y (D-2)}{M E_b} \\
\frac{A u^z}{M} & 0 & \frac{-b^0 b^y u^z (D-2)}{M E_b} & F_1 \\
\frac{A b^0 u^y}{M u^0} & 0 & \frac{b^0 G_1}{u^0} & \frac{-(b^0)^2 b^z u^y (D-2)}{M u^0 E_b} \\
\frac{A b^0 u^z}{M u^0} & 0 & \frac{-(b^0)^2 b^y u^z (D-2)}{M u^0 E_b} & \frac{b^0 F_1}{u^0} \\
T & 0 & \frac{-(2(u^0)^2-1) b^0 b^y}{M u^0} & \frac{-(2(u^0)^2-1) b^0 b^z}{M u^0} \\
\frac{1}{u^0 \partial_s \rho} - \frac{T \partial_p \rho}{\partial_s \rho} & 0 & \frac{(2(u^0)^2-1) b^0 b^y \partial_p \rho}{M u^0 \partial_s \rho} & \frac{(2(u^0)^2-1) b^0 b^z \partial_p \rho}{M u^0 \partial_s \rho}
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
\frac{-D u^x E_b}{E M} & \frac{-b^y u^x (D-2)}{M} & \frac{-b^z u^x (D-2)}{M} \\
\frac{-D u^0 u^y}{M} & \frac{-b^y u^y (D-2)}{M} + \frac{b^0 G_1}{u^0} & \frac{-b^z E u^0 u^y (D-2)}{M E_b} \\
\frac{-D u^0 u^z}{M} & \frac{-b^y E u^0 u^z (D-2)}{M E_b} & \frac{-b^z u^z (D-2)}{M} + \frac{b^0 F_1}{u^0} \\
\frac{-D u^y b^0}{M} & E G_1 & \frac{-E b^0 b^z u^y (D-2)}{M E_b} \\
\frac{-D u^z b^0}{M} & \frac{-E b^0 b^y u^z (D-2)}{M E_b} & E F_1 \\
\frac{H}{M E_b} & \frac{-(2(u^0)^2-1) b^y E}{M} & \frac{-(2(u^0)^2-1) b^z E}{M} \\
\frac{-H \partial_p \rho}{M E_b \partial_s \rho} & \frac{(2(u^0)^2-1) b^y E \partial_p \rho}{M \partial_s \rho} & \frac{(2(u^0)^2-1) b^z E \partial_p \rho}{M \partial_s \rho}
\end{array}\right), \tag{5.40}
$$

donde

$$
A = \frac{\partial_s(\rho h)}{\partial_s \rho} \quad , \quad C = \partial_p(\rho h) - A \partial_p \rho \quad , \quad E_b = E u^0 - \frac{(b^0)^2}{u^0}, \tag{5.41}
$$

$$
F = E u^0 + 2b^0 b^y u^y - \frac{(b^0)^2}{u^0} \quad , \quad G = E u^0 + 2b^0 b^z u^z - \frac{(b^0)^2}{u^0}, \tag{5.42}
$$

$$H = GF - 4(b^0)^2 b^y b^z u^y u^z = E_b^2 + 2E_b b^0 (b^y u^y + b^z u^z), \tag{5.43}$$

$$M = (C(u^0)^2 - 1)E_b + (C-2) b^0 (b^y u^y + b^z u^z), \tag{5.44}$$

$$T = \frac{-A\left((u^0)^2 E_b + b^0(b^y u^y + b^z u^z)\right)}{u^0 M}, \tag{5.45}$$

$$G_1 = \frac{1}{H}\left(G + \frac{(2(u^0)^2 - 1)E_b b^0 b^y u^y C}{M}\right), \tag{5.46}$$

$$F_1 = \frac{1}{H}\left(F + \frac{(2(u^0)^2 - 1)E_b b^0 b^z u^z C}{M}\right). \tag{5.47}$$

Podemos calcular el producto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, obteniéndose

$$\left(\begin{array}{c}
\frac{u^x}{M}\left(\left(\frac{A\rho}{Eu^0} - \frac{C(u^0)^2+1}{u^0}\right)E_b - (C+2)((b^y)^2 + (b^z)^2)\right) \\
\frac{u^y}{M}\left(A\rho - (C(u^0)^2+1)E - (b^y)^2(C-2) - \frac{(b^z)^2 E u^0}{E_b}\right) + G_1 \frac{b^0 b^y}{u^0} \\
\frac{u^z}{M}\left(A\rho - (C(u^0)^2+1)E - (b^z)^2(C-2) - \frac{(b^y)^2 E u^0}{E_b}\right) + F_1 \frac{b^0 b^z}{u^0} \\
\frac{u^y b^0}{M u^0}\left(A\rho - (C(u^0)^2+1)E - (C-2)(b^z)^2 \frac{E u^0}{E_b}\right) + E G_1 b^y \\
\frac{u^z b^0}{M u^0}\left(A\rho - (C(u^0)^2+1)E - (C-2)(b^y)^2 \frac{E u^0}{E_b}\right) + E F_1 b^z \\
T\rho + \frac{E}{M}\left(2E_b u^0 + \frac{2(u^0)^2+1}{u^0} b^0(b^y u^y + b^z u^z)\right) - (2(u^0)^2-1)((b^y)^2 + (b^z)^2) \\
\frac{\rho(1 - T u^0 \partial_p \rho)}{u^0 \partial_s \rho} - \frac{E \partial_p \rho}{M \partial_s \rho}\left(2E_b u^0 + \frac{2(u^0)^2+1}{u^0} b^0(b^y u^y + b^z u^z) - (2(u^0)^2-1)((b^y)^2 + (b^z)^2)\right)
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}
\frac{u^x}{M}\left(\frac{(C+2)b^0E_b}{E}+(C-2)\left(\left((b^y)^2+(b^z)^2\right)\frac{b^0}{Eu^0}+(b^yu^y+b^zu^z)\right)\right)-\frac{b^x}{Eu^0}\\[2ex]
\frac{u^y}{M}((C+2)u^0u^yb^0+(C-2)\left(b^yu^y+\frac{b^0(b^z)^2}{E_b}+\frac{b^zu^zEu^0}{E_b}\right)\\[2ex]
\frac{u^z}{M}((C+2)u^0u^zb^0+(C-2)\left(b^zu^z+\frac{b^0(b^y)^2}{E_b}+\frac{b^yu^yEu^0}{E_b}\right)\\[2ex]
\frac{u^yb^0}{M}\left(-(C+2)b^0+(C-2)\frac{b^z}{E_b}\left(\frac{b^0b^z}{u^0}+Eu^z\right)\right)-G_1\left(\frac{b^0b^y}{u^0}+Eu^y\right)\\[2ex]
\frac{u^zb^0}{M}\left(-(C+2)b^0+(C-2)\frac{b^y}{E_b}\left(\frac{b^0b^y}{u^0}+Eu^y\right)\right)-F_1\left(\frac{b^0b^z}{u^0}+Eu^z\right)\\[2ex]
J\\[2ex]
J\frac{\partial_p\rho}{\partial_s\rho}
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{1}{EM}((C-2)b^xu^xE_b)-b^0/(Eu^0)\\[2ex]
\frac{1}{M}(C-2)b^xu^0u^y\\[2ex]
\frac{1}{M}(C-2)b^xu^0u^z\\[2ex]
\frac{1}{M}(C-2)b^0b^xu^0u^y\\[2ex]
\frac{1}{M}(C-2)b^0b^xu^0u^z\\[2ex]
\frac{2(u^0)^2-1}{M}\,b^xE_b\\[2ex]
\frac{(2(u^0)^2-1)\partial_p\rho}{M\partial_s\rho}\,b^xE_b
\end{array}\right),$$

donde

$$J=\frac{1}{M}\Bigg(\frac{(2(u^0)^2-1)}{u^0}b^0((b^y)^2+(b^z)^2)$$
$$+\left((2(u^0)^2-1)E-4(b^0)^2\right)(b^yu^y+b^zu^z)-(2(u^0)^2-1)b^0E_b\Bigg). \qquad (5.48)$$

Siguiendo la explicación dada al comienzo de esta sección, para obtener la matriz **N**, sólo nos queda calcular la submatriz **K** (5.29).

Como no conocemos las expresiones explícitas de u^0, b^0 y b^x en el sistema de variables conservadas, tendremos que escribir estas parciales recurriendo a la variable Z ya introducida en (4.22), que escribimos como

$$Z = \rho h (u^0)^2. \tag{5.49}$$

Usando esta variable, y las ecuaciones que relacionan las variables conservadas y primitivas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$b^0 = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) \frac{u^0}{Z}, \tag{5.50}$$

$$b^x = \frac{B^x}{u^0} + \frac{S^x u^0 + b^0 B^x}{Z + \mathbf{B}^2} \frac{b^0}{u^0}, \tag{5.51}$$

$$(u^0)^2 = \frac{(Z + \mathbf{B}^2)^2}{(Z + \mathbf{B}^2)^2 - \mathbf{S}^2 - \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B})^2}{Z^2}(2Z + \mathbf{B}^2)}. \tag{5.52}$$

A partir de estas expresiones deducimos las parciales de u^0, b^0 y b^x respecto a las variables conservadas en función de Z y sus derivadas parciales.

$$\frac{\partial u^0}{\partial D} = \frac{u^0}{Z + \mathbf{B}^2} \left\{ 1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial S^j} = \frac{u^0}{Z + \mathbf{B}^2} \left\{ \left(1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial S^j} + u^0 \left(u_j + \frac{b^0 B_j}{Z} \right) \right\}, \tag{5.54}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \tau} = \frac{u^0}{Z + \mathbf{B}^2} \left\{ 1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial B^j} = \frac{u^0}{Z + \mathbf{B}^2} \Bigg\{ \left(1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial B^j} + 2B_j(1 - (u^0)^2) + \\ b^0 \left(\frac{u^0 S_j}{Z} + u_j \right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial D} = \frac{-b^0 (Z + \mathbf{b}^2)(u^0)^2}{Z(Z + \mathbf{B}^2)} \frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b^0}{\partial S^j} = \frac{-b^0 (Z + \mathbf{b}^2)(u^0)^2}{Z(Z + \mathbf{B}^2)} \frac{\partial Z}{\partial S^j} + \frac{u^0 B_j}{Z} \left(1 + \frac{(b^0)^2}{Z + \mathbf{B}^2} \right) \\ + \frac{u^0 b^0 u_j}{Z + \mathbf{B}^2}, \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial \tau} = \frac{-b^0 (Z + \mathbf{b}^2)(u^0)^2}{Z(Z + \mathbf{B}^2)} \frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{5.59}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial B^j} = \frac{-b^0(Z+\mathbf{b}^2)(u^0)^2}{Z(Z+\mathbf{B}^2)}\frac{\partial Z}{\partial B^j} + \frac{u^0 S_j}{Z}\left(1+\frac{(b^0)^2}{Z+\mathbf{B}^2}\right) + 2(1-(u^0)^2)\frac{b^0 B_j}{(Z+\mathbf{B}^2)} + \frac{(b^0)^2}{Z+\mathbf{B}^2}u_j, \tag{5.60}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial D} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{b^x((u^0)^2-1) - u^0 u^x b^0 \frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right\}\frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.61}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial S^j} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{\left(b^x((u^0)^2-1) - u^0 u^x b^0 \frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial S^j} + u^x\left(\frac{B_j(\rho h+\mathbf{b}^2)}{\rho h} + b^0 u_j\right) - B^x u_j + \frac{b^0}{u^0}\delta^x_j\right\}, \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial \tau} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{b^x\big((u^0)^2-1\big) - u^0 u^x b^0 \frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right\}\frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial B^j} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{\left(b^x((u^0)^2-1) - u^0 u^x b^0 \frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial B^j} + S_j\frac{\rho h+\mathbf{b}^2}{\rho h}u^x + \frac{u_j b^0}{u^0}\Big(b^0 u^x - B^x\Big) - 2B_j\left(u^0 b^x - \frac{B^x}{u^0}\right)\right\}. \tag{5.64}$$

Para realizar el cálculo de las derivadas parciales de la función Z, debemos conocer la ecuación de estado. Si tomamos una ecuación de estado de gas ideal ($p = (\bar\gamma - 1)\rho\varepsilon$, donde $\bar\gamma$ es el exponente adiabático), y manipulamos las expresiones que definen las variables conservadas en términos de las primitivas, como hacemos en la Sección 8.9, obtenemos la ecuación

$$\left(\tau - Z - \mathbf{B}^2 + \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})^2}{2Z^2}\right)(u^0)^2 + \left(\frac{\bar\gamma-1}{\bar\gamma}\right)(Z - Du^0) + \frac{\mathbf{B}^2}{2} = 0, \tag{5.65}$$

que nos aporta una relación adicional entre las parciales de Z y de u^0 respecto de las variables conservadas.

A partir de esta ecuación deducimos las parciales de Z respecto al sistema de variables conservadas que nos permiten la obtención de la matriz $\mathbf{K}$.

$$\frac{\partial Z}{\partial D} = \frac{(\bar\gamma-1)u^0(Z+\mathbf{B}^2)}{\mu}, \tag{5.66}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S^j} = \frac{\bar{\gamma}}{\mu}\Bigg\{ \frac{-b^0 u^0 B_j}{Z}(Z+\mathbf{B}^2) - \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left(\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}(Du^0-2Z)-\mathbf{B}^2\right)$$
$$\cdot\left(S_j(u^0)^2 + \frac{u^0 b^0}{Z}(2Z+\mathbf{B}^2)B_j\right)\Bigg\}, \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = \frac{-\bar{\gamma}(u^0)^2(Z+\mathbf{B}^2)}{\mu}, \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial B^j} = \frac{\bar{\gamma}}{\mu}\Bigg\{ \left((2(u^0)^2-1)B_j - \frac{b^0 u^0}{Z}S_j\right)(Z+\mathbf{B}^2) - \Big(\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}(Du^0-2Z)$$
$$-\mathbf{B}^2\Big)\left[2B_j(1-(u^0)^2) + \frac{b^0}{Z+\mathbf{B}^2}\left(\frac{(2Z+\mathbf{B}^2)u^0}{Z}S_j + b^0 B_j\right)\right]\Bigg\}, (5.69)$$

donde se ha definido

$$\mu = (\bar{\gamma}-1)(Z-Du^0)\left((u^0)^2 - 1 + \frac{(b^0)^2}{Z}\right) - (Z+\mathbf{b}^2)(u^0)^2. \quad (5.70)$$

Con todas estas expresiones podemos calcular la matriz $\mathbf{N}$ de transformación entre los autovectores a izquierdas en el sistema de variables de Anile y el sistema de variables conservadas, aunque aquí no daremos, como ya hemos dicho, las expresiones explícitas.

5.3 Sistema reducido de variables-Sistema de variables conservadas

Como se verá en el Capítulo 7, a la hora de obtener los autovectores a izquierdas en el sistema de variables conservadas renormalizados, resulta conveniente partir de los autovectores en el sistema reducido de variables. Es por ello por lo que abordamos a continuación la obtención de la matriz jacobiana de la transformación entre los sistemas reducido de variables y el sistema de variables conservadas, $\partial\tilde{\mathbf{V}}/\partial\mathbf{U}$, inversa de la matriz (5.26).

El principal problema al que nos enfrentamos es que no tenemos expresiones explícitas de las variables reducidas en función de las variables conservadas. Para superar este obstáculo, recurrimos de nuevo a la variable auxiliar $Z = \rho h(u^0)^2$. La matriz jacobiana la escribiremos en términos de las derivadas parciales de esta variable respecto de las variables conservadas. Escribiremos a continuación las componentes de la matriz jacobiana.

Para calcular las derivadas parciales de la densidad partimos de la ecuación:

$$\rho = \frac{D}{u^0} \tag{5.71}$$

y obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial D} = \frac{1}{u^0} - \frac{D}{u^0(Z+\mathbf{B}^2)} \left\{ 1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.72}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial S^j} = \frac{-D}{u^0(Z+\mathbf{B}^2)} \left\{ \left(1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial S_j} + u^0 \left(u_j + \frac{b^0 B_j}{Z} \right) \right\}, \tag{5.73}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{-D}{u^0(Z+\mathbf{B}^2)} \left\{ 1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial B^j} = \frac{-D}{u^0(Z+\mathbf{B}^2)} \Bigg\{ & \left(1 - (u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial B^j} + 2B_j(1 - (u^0)^2) \\ & + b^0 \left(\frac{u^0 S_j}{Z} + u_j \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Para calcular las derivadas parciales de u^i partimos de la ecuación:

$$u^i = \frac{u^0 S^i + b^0 B^i}{Z + \mathbf{B}^2}, \tag{5.76}$$

y obtenemos

$$\frac{\partial u^i}{\partial D} = \frac{-u^0}{Z+\mathbf{B}^2} \left\{ u^0 u^i + \frac{b^0 b^i}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.77}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial S^j} = \frac{u^0}{Z+\mathbf{B}^2} \left\{ \delta^i_j - \left(u^0 u^i + \frac{b^0 b^i}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial S^j} + \left(u_j u^i + \frac{B_j b^i u^0}{Z} \right) \right\}, \tag{5.78}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial \tau} = \frac{-u^0}{Z+\mathbf{B}^2} \left\{ u^0 u^i + \frac{b^0 b^i}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial B^j} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2} \Bigg\{ & b^0 \delta^i_j - u^0 \left(u^0 u^i + \frac{b^0 b^i}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial B^j} - 2(u^0)^2 B_j u^i \\ & + b^0 u^i u_j + \frac{(u^0)^2 S_j b^i}{Z} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.80}$$

Para calcular las derivadas parciales de b^i partimos de la ecuación:

$$b^i = \frac{B^i + b^0 u^i}{u^0}, \tag{5.81}$$

y obtenemos

$$\frac{\partial b^i}{\partial D} = \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2} \left\{ b^i((u^0)^2 - 1) - u^0 u^i b^0 \frac{2Z + \mathbf{b}^2}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.82}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b^i}{\partial S^j} = \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2} \Bigg\{ & \left(b^i((u^0)^2 - 1) - u^0 u^i b^0 \frac{2Z + \mathbf{b}^2}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial S^j} + \\ & u^i \left(B_j \left(1 + \frac{\mathbf{b}^2 (u^0)^2}{Z} \right) + b^0 u_j \right) - B^i u_j + \frac{b^0}{u^0} \delta^i_j \Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial b^i}{\partial \tau} = \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2} \left\{ b^i((u^0)^2 - 1) - u^0 u^i b^0 \frac{2Z + \mathbf{b}^2}{Z} \right\} \frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b^i}{\partial B^j} = \frac{\delta^i_j}{u^0} + \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2} \Bigg\{ & \left(b^i((u^0)^2 - 1) - u^0 u^i b^0 \frac{2Z + \mathbf{b}^2}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial B^j} \\ + \frac{(b^0)^2}{u^0} \delta^i_j + S_j \left(1 + \frac{\mathbf{b}^2 (u^0)^2}{Z} \right) u^i & + \frac{u_j b^0}{u^0} \left(b^0 u^i - B^i \right) - 2B_j \left(u^0 b^i - \frac{B^i}{u^0} \right) \Bigg\} \end{aligned} \tag{5.85}$$

Para calcular las derivadas parciales de la presión p despejamos esta variable de la ecuación (4.21), obteniendo la ecuación:

$$p = Z - \tau + \mathbf{B}^2 \left(1 - \frac{1}{2(u^0)^2} \right) - \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B})}{2Z^2}, \tag{5.86}$$

y obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{Z + \mathbf{b}^2}{Z + \mathbf{B}^2} \frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{5.87}$$

$$\frac{\partial p}{\partial S^j} = \frac{Z + \mathbf{b}^2}{Z + \mathbf{B}^2} \frac{\partial Z}{\partial S^j} + \frac{1}{(Z + \mathbf{B}^2) u^0} \left(\mathbf{B}^2 u_j - b^0 B_j \right), \tag{5.88}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{Z + \mathbf{b}^2}{Z + \mathbf{B}^2} \frac{\partial Z}{\partial \tau} - 1, \tag{5.89}$$

$$\frac{\partial p}{\partial B^j} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{(Z+\mathbf{b}^2)\frac{\partial Z}{\partial B^j} - \frac{b^0 S_j}{u^0} + \frac{B^2 b_j}{u^0} + \left(2 - \frac{1}{(u^0)^2}\right) Z B_j\right\}. \quad (5.90)$$

Como ya hemos indicado las diversas parciales de Z deben ser calculadas teniendo en cuenta la ecuación de estado. Para el caso de gas ideal las parciales de Z son las indicadas en las ecuaciones (5.66)-(5.69).

5.3.1 Forma de los autovectores a izquierdas en el sistema de variables conservadas

Podemos escribir ahora las expresiones generales de las componentes de los vectores a izquierdas en el sistema de variables conservadas a partir de las expresiones de los vectores a izquierdas en el sistema reducido de variables.

$$L_D = \frac{\bar{l}_\rho}{u^0} + \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{ -\rho\left(1-(u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\bar{l}_\rho + (Z+\mathbf{b}^2)\,\bar{l}_p - \right.$$
$$\left. u^0\left(u^0u^i + \frac{b^0b^i}{Z}\right)\bar{l}_{u^i} + \left(b^i((u^0)^2-1) - u^0u^ib^0\frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right)\bar{l}_{b^i}\right\}\frac{\partial Z}{\partial D} \quad (5.91)$$

$$L_{S^k} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{\left\{ -\rho\left(1-(u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\bar{l}_\rho + (Z+\mathbf{b}^2)\,\bar{l}_p\right.\right.$$
$$\left. - u^0\left(u^0u^i + \frac{b^0b^i}{Z}\right)\bar{l}_{u^i} + \left(b^i((u^0)^2-1) - u^0u^ib^0\frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right)\bar{l}_{b^i}\right\}\frac{\partial Z}{\partial S^k}$$
$$+ D\left(u^i + \frac{b^0B^i}{Z}\right)\bar{l}_\rho + u^0\bar{l}_{u^i}\delta^i_k + b^0\bar{l}_{b^i}\delta^i_k + \frac{B^2u_k - b^0B_k}{u^0}\bar{l}_p +$$
$$u^0\left(u^iu_k + \frac{B_kb^iu^0}{Z}\right)\bar{l}_{u^i} + \left(u^i\left(B_k\left(1+\frac{\mathbf{b}^2(u^0)^2}{Z}\right) + b^0u_k\right)\right.$$
$$\left.\left. - B^iu_k\right)\bar{l}_{b^i}\right\} \quad (5.92)$$

$$L_\tau = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{ -\rho\left(1-(u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\bar{l}_\rho - u^0\left(u^0u^i + \frac{b^0b^i}{Z}\right)\bar{l}_{u^i} + \right.$$
$$\left.(Z+\mathbf{b}^2)\bar{l}_p + \left(b^i((u^0)^2-1) - u^0u^ib^0\frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right)\bar{l}_{b^i}\right\}\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \bar{l}_p \quad (5.93)$$

$$L_{B^k} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\left\{\left\{ -\rho\left(1-(u^0)^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\bar{l}_\rho - u^0\left(u^0u^i + \frac{b^0b^i}{Z}\right)\bar{l}_{u^i} + \right.\right.$$

$$(Z+\mathbf{b}^2)\bar{l}_p + \left(b^i((u^0)^2-1) - u^0u^ib^0\frac{2Z+\mathbf{b}^2}{Z}\right)\bar{l}_{b^i}\Bigg\}\frac{\partial Z}{\partial B^k} +$$

$$b^0\bar{l}_{u^i}\delta^i_k + Eu^0\bar{l}_{B^i}\delta^i_k + \left(-2(u^0)^2B_ku^i + b^0u^iu_k + (u^0)^2\frac{S_kb^i}{Z}\right)\bar{l}_{u^i}$$

$$+\left(\frac{-b^0S_k+B^2b_k}{u^0} + \left(2-\frac{1}{(u^0)^2}\right)ZB_k\right)\bar{l}_p + \left(S_ku^i\left(1+\frac{\mathbf{b}^2(u^0)^2}{Z}\right) +\right.$$

$$\left.(b^0u^i - B^i)\frac{u_kb^0}{u^0} - B_k\left(u^0b^0u^i + \frac{1-(u^0)^2}{u^0}B^i\right)\right)\bar{l}_{B^i}\Bigg\} \quad (5.94)$$

5.4 Sistema de variables conservadas modificado

Si en lugar del sistema de variables conservadas $\mathbf{U} \equiv (D, S^x, S^y, S^z, \tau, B^y, B^z)^T$ trabajamos con el sistema de variables conservadas:

$$\hat{\mathbf{U}} \equiv (D, S^x, S^y, S^z, \tau - D, B^y, B^z)^T, \quad (5.95)$$

los nuevos autovectores son idénticos a los anteriores salvo las siguientes componentes:

$$\hat{r}_{\tau-D} = r_\tau - r_D \quad (5.96)$$

y

$$\hat{l}_{\tau-D} = l_D + l_\tau. \quad (5.97)$$

Capítulo 6

Renormalización de los autovectores a derechas

Los autovectores a derechas descritos en los capítulos anteriores no son válidos en todo el espacio de variables. En concreto, los autovectores a derechas asociados a los autovalores de Alfvén y magnetosónicos se anulan cuando los autovalores correspondientes son degenerados. El objetivo de este capítulo es proponer una renormalización de estos autovectores con el fin de evitar este problema.

Antes de abordar la renormalización, recordaremos cuáles son los tres sistemas de variables en los que trabajaremos: i) Sistema de variables covariantes definido por Anile, $\tilde{\tilde{\mathbf{U}}} \equiv (u^\mu, b^\mu, p, s)^T$; ii) Sistema reducido de variables $\tilde{\mathbf{V}} \equiv (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, \rho)^T$; iii) Sistema de variables conservadas, $\mathbf{U} \equiv (D, S^x, S^y, S^z, \tau, B^y, B^z)^T$. Para transformar los autovectores de un sistema de variables a otro seguiremos lo expuesto en el capítulo anterior. Por simplicidad, tanto en el sistema reducido de variables como en el sistema de variables conservadas, las expresiones estarán dadas para un espacio-tiempo plano, descrito en coordenadas cartesianas.

Procedemos ahora a renormalizar cada uno de los atovectores de la RMHD.

6.1 Autovector entrópico

Este vector no presenta ninguna patología en ninguno de los puntos del espacio de valores físicos posibles, por lo que no hay que proceder a su renormalización. Por completitud escribiremos las formas que adopta en los diferentes sistemas de variables antes definidos.

6.1.1 Sistema de variables de Anile

Como ya vimos, en el sistema de variables de Anile este autovector es de la forma (4.53)

$$r_e = (0^\mu, 0^\mu, 0, 1)^T. \tag{6.1}$$

6.1.2 Sistema reducido de variables

En el sistema reducido de variables, este autovector es de la forma (5.10)

$$\bar{r}_e = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p\right)^T. \tag{6.2}$$

6.1.3 Sistema de variables conservadas

Por último, en el sistema de variables conservadas, este autovector es de la forma (5.14)

$$R_e = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p u^0 \left(1, u^x, u^y, u^z, u^0, 0, 0\right)^T. \tag{6.3}$$

6.2 Autovectores de Alfvén

Los autovectores asociados a los autovalores de Alfvén, en cada uno de los sistemas de variables definidos, se anulan en los dos tipos de degeneraciones que se presentan en la RMHD.

Empezaremos abordando el problema en el sistema de variables de Anile, y una vez resuelto en este sistema, hallaremos los autovectores ya renormalizados en los otros sistemas mediante las transformaciones indicadas en el capítulo anterior.

6.2.1 Sistema de variables de Anile

Empecemos recordando que los autovalores de Alfvén (4.45) son

$$\lambda_a = \frac{b^x \pm u^x \sqrt{E}}{b^0 \pm u^0 \sqrt{E}}, \tag{6.4}$$

y los correspondientes autovectores en el sistema de variables de Anile (4.54),

$$r_a = \left(a\, \epsilon^\alpha_{\delta\nu\mu} \phi^\delta u^\nu b^\mu, \mathcal{B}\, g^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\delta\nu\mu} \phi^\delta u^\nu b^\mu, 0, 0\right)^T. \tag{6.5}$$

Como ya hemos comentado, estos autovectores se anulan cuando el autovalor correspondiente es degenerado. Analicemos ahora qué es lo que sucede en cada tipo de degeneración.

La degeneración de tipo I (4.8.1), en la cual coinciden los autovalores de Alfvén, los magnetosónicos lentos y el entrópico, viene caracterizada por la condición $\mathbf{b}_n = 0$. En el estado degenerado se tiene que

$$a = 0, \quad \mathcal{B} = 0 \tag{6.6}$$

y que

$$\epsilon^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \phi^{\gamma} b^{\delta} \neq 0, \tag{6.7}$$

puesto que el vector b^{δ} no es paralelo al plano definido por u^{β} y ϕ^{γ}.

Vemos, por tanto, que los autovectores se anulan ya que lo hacen las funciones a y $\mathcal{B}$. Sin embargo, si realizamos el cálculo de $\mathcal{B}/a$, obtenemos (ver Apéndice H)

$$\left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)_{\pm} = \mp\sqrt{E}. \tag{6.8}$$

Observamos, por tanto, que la función $\mathcal{B}/a$ es una función bien definida para un autovalor de Alfvén y que es distinta de cero en todo el dominio físico. Por lo cual, a fin de evitar que los autovectores de Alfvén se anulen cuando se presenta la degeneración de tipo I, proponemos escribir estos autovectores en la forma

$$r_{a\pm} = (\epsilon^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \phi^{\gamma} b^{\delta}, \mp\sqrt{E}\, \epsilon^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \phi^{\gamma} b^{\delta}, 0, 0)^T, \tag{6.9}$$

Podemos interpretar estos autovectores como combinaciones lineales de dos de los autovectores propuestos por Anile para la degeneración de tipo I, ecs. (4.105) y (4.108), que reescribimos aquí por claridad,

$$r_1 = (\epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta} b^{\beta} u^{\gamma} \phi^{\delta}, 0^{\mu}, 0, 0) \qquad \text{y} \qquad r_4 = (0^{\mu}, \epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta} b^{\beta} u^{\gamma} \phi^{\delta}, 0, 0).$$

La degeneración de tipo II viene caracterizada por la condición:

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_n^2(\lambda_a) \equiv \frac{\mathcal{B}^2}{a^2 + G}. \tag{6.10}$$

En este caso, los vectores u^{μ}, ϕ^{μ} y b^{μ} son coplanarios y, por tanto, el vector $\epsilon^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \phi^{\gamma} b^{\delta}$ se anula. Como por otra parte, este vector pertenece por construcción al espacio ortogonal a u^{α}, se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base que definimos en la Sección 4.6, concretamente

$$\epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \phi^{\gamma} b^{\delta} = -g_1 \alpha_1^{\mu} + g_2 \alpha_2^{\mu}, \tag{6.11}$$

donde las funciones g_1 y g_2, definidas en (4.70) y (4.71), son

$$g_1 = \frac{1}{(u^0 - \lambda u^x)} \Big(b^z (u^0 - \lambda u^x) + b^x u^z \lambda - b^0 u^z \Big), \tag{6.12}$$

$$g_2 = \frac{1}{(u^0 - \lambda u^x)}\Big(b^y(u^0 - \lambda u^x) + b^x u^y \lambda - b^0 u^y\Big). \tag{6.13}$$

Recordemos que en el caso que $\mathbf{b}_t = 0$, las funciones $g_1 = g_2 = 0$. Por tanto, para renormalizar los autovectores de Alfvén, siguiendo el ejemplo de la renormalización de Brio y Wu (1988) para la MHD, proponemos que en el sistema de variables definido por Anile, se tome

$$r_{a\pm} = (-f_1\alpha_1^\beta + f_2\alpha_2^\beta, \mp\sqrt{E}(-f_1\alpha_1^\beta + f_2\alpha_2^\beta), 0, 0)^T, \tag{6.14}$$

donde definimos:

$$f_1 = \frac{g_1}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}} \quad , \quad f_2 = \frac{g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}}. \tag{6.15}$$

Al no existir los límites matemáticos de estas expresiones en el caso que $g_1^2 + g_2^2 \to 0$, se propone la siguiente prescripcion general para preservar la independencia lineal de los autovectores:

$$\lim_{g_1^2+g_2^2 \to 0} f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \lim_{g_1^2+g_2^2 \to 0} f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6.16}$$

Las expresiones (6.14), (6.15) y (6.16) nos permiten obtener los autovectores de Alfvén renormalizados, válidos para cualquier estado ya que hemos eliminado los problemas relativos a las degeneraciones de tipo I y II.

6.2.2 Sistema reducido de variables

Efectuando la transformación descrita en la Sección 5.1.1 a los autovectores de Alfvén renormalizados que se han obtenido en la subsección anterior, llegamos a las expresiones siguientes para los autovectores de Alfvén en el sistema reducido de variables

$$\bar{r}_{a\pm} = -f_1\bar{V}_{1\,\pm} + f_2\bar{V}_{2\,\pm}, \tag{6.17}$$

donde

$$\bar{V}_{1\,\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{a\pm} u^y \\ u^0 - u^x\lambda_{a\pm} \\ 0 \\ \mp\sqrt{E}(u^0 - u^x\lambda_{a\pm}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

$$\bar{V}_{2\,\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{a\pm} u^z \\ 0 \\ u^0 - u^x \lambda_{a\pm} \\ 0 \\ \mp\sqrt{E}(u^0 - u^x\lambda_{a\pm}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

6.2.3 Sistema de variables conservadas

Tras realizar el cambio al sistema de variables conservadas descrito en 5.1.3, se obtiene que los autovectores de Alfvén renormalizados son

$$R_{a\pm} = -f_1 V_{1\,\pm} + f_2 V_{2\,\pm}, \tag{6.20}$$

con $V_{1\,\pm} =$

$$\begin{pmatrix} \rho u^y \\ E u^y (u^x + u^0 \lambda_{a\pm}) \pm \sqrt{E}\big((b^x + b^0\lambda_{a\pm}) u^y\big) \\ E(u^0(u^0 - u^x\lambda_{a\pm}) + u^y u^y) \pm \sqrt{E}\big(b^y u^y + b^0(u^0 - \lambda_{a\pm} u^x)\big) \\ E u^y u^z \pm \sqrt{E}\, b^z u^y \\ 2E u^0 u^y \pm 2\sqrt{E}\, b^0 u^y \\ b^y u^y - b^0(u^0 - \lambda_{a\pm} u^x) \pm \sqrt{E}\big(u^y u^y - u^0(u^0 - \lambda_{a\pm} u^x)\big) \\ b^y u^y \pm \sqrt{E} u^y u^z \end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

y $V_{2\,\pm} =$

$$\begin{pmatrix} \rho u^z \\ E u^z (u^x + u^0 \lambda_{a\pm}) \pm \sqrt{E}\big((b^x + b^0\lambda_{a\pm}) u^z\big) \\ E u^y u^z \pm \sqrt{E}\, b^y u^z \\ E(u^0(u^0 - u^x\lambda_{a\pm}) + u^z u^z) \pm \sqrt{E}\big(b^z u^z + b^0(u^0 - \lambda_{a\pm} u^x)\big) \\ 2E u^0 u^z \pm 2\sqrt{E}\, b^0 u^z \\ b^y u^z \pm \sqrt{E} u^y u^z \\ b^z u^z - b^0(u^0 - \lambda_{a\pm} u^x) \pm \sqrt{E}\big(u^z u^z - u^0(u^0 - \lambda_{a\pm} u^x)\big) \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

6.3 Autovectores magnetosónicos

Procederemos ahora a la obtención de los autovectores magnetosónicos renormalizados.

6.3.1 Sistema de variables de Anile

Partimos de las expresiones de los autovectores magnetosónicos en el sistema de variables de Anile (4.55),

$$r_m = (ad^\nu, K^\nu, a^2\mathcal{A}, 0)^T, \tag{6.23}$$

donde

$$d^\nu = \left(\frac{c_s^2 - 1}{c_s^2}\right)\left(\frac{a^4}{G}(\phi^\nu + au^\nu) - \frac{a^2\mathcal{B}}{\rho h}b^\nu\right), \tag{6.24}$$

$$K^\nu = \mathcal{B}d^\nu + a\mathcal{A}f^\nu = \mathcal{B}d^\nu + \frac{a\mathcal{A}}{\rho h}\left(\frac{a}{c_s^2}b^\nu - \mathcal{B}u^\nu\right), \tag{6.25}$$

$$\mathcal{A} = Ea^2 - \mathcal{B}^2, \tag{6.26}$$

y veremos qué sucede cuando aparecen degeneraciones.

En la degeneración de tipo I, los autovalores magnetosónicos lentos convergen a v^x, lo que produce, al igual que en el caso de los autovalores de Alfvén, que $a = 0$ y $\mathcal{B} = 0$, anulándose, por tanto, los autovectores magnetosónicos lentos.

En el caso de los autovalores magnetosónicos rápidos, sin embargo, si bien puede suceder que $\mathcal{B} = 0$, se cumple que $a \neq 0$. Es decir, los autovectores magnetosónicos rápidos no se anulan. Aún así, aplicaremos la prescripción de renormalización que desarrollaremos a continuación a todos los autovectores magnetosónicos, tanto lentos como rápidos.

Como primer paso, dividiremos r_m por a^4. Así obtenemos que las componentes del vector r_m/a^4 son

$$\frac{d^\nu}{a^3} = \left(\frac{c_s^2 - 1}{c_s^2}\right)\left(\frac{a}{G}(\phi^\nu + au^\nu) - \frac{\mathcal{B}}{a}\frac{b^\nu}{\rho h}\right), \tag{6.27}$$

$$\frac{K^\nu}{a^4} = \frac{\mathcal{B}}{a}\frac{d^\nu}{a^3} + \frac{\mathcal{A}}{a^2}\frac{1}{\rho h}\left(\frac{b^\nu}{c_s^2} - \frac{\mathcal{B}}{a}u^\nu\right), \tag{6.28}$$

$$\frac{\mathcal{A}}{a^2} = E - \frac{\mathcal{B}^2}{a^2}, \tag{6.29}$$

y 0.

Para conocer el valor de estas expresiones en el caso de degeneración de tipo I, debemos calcular el límite de $\mathcal{B}/a$ cuando se tiende al caso degenerado. Para ello volvamos a la ecuación cuártica, $N_4 = 0$:

$$\rho h\left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right)a^4 - \left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}\right)a^2 G + \mathcal{B}^2 G = 0. \tag{6.30}$$

Procedemos a despejar la fracción deseada, y obtenemos que para un autovalor magnetosónico se debe cumplir que (ver Apéndice H)

$$\left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)^2 = \left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}\right) - \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right)\frac{a^2}{G}. \tag{6.31}$$

De aquí obtenemos

$$\chi \equiv \left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)_{\pm} = \mp\sqrt{\left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}\right) - \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right)\frac{a^2}{G}}, \tag{6.32}$$

donde se ha introducido la variable χ y hemos omitido por comodidad el subíndice $\pm$. El criterio de selección del signo $\pm$ es tomar el mismo signo que se deba tomar para la obtención del autovalor de Alfvén, $\lambda_{a\pm}$, comprendido entre los autovalores magnetosónicos lento y rápido considerados. De esta manera, se garantiza la continuidad de la función $\mathcal{B}/a$.

Sustituyendo en la expresión del autovector (6.23) y dividiendo por $(c_s^2 - 1)/c_s^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} r_m = \Bigg(& \frac{a}{G}(\phi^\nu + a u^\nu) - \frac{b^\nu}{\rho h}\chi \,,\, \chi\left(\phi^\nu \frac{a}{G} + \left(\frac{2a^2}{G} - \frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right) u^\nu\right) \\ & - b^\nu \left(1 + \frac{a^2}{G}\right), \mathbf{b}^2 - \rho h \frac{a^2}{G}, 0\Bigg)^T \equiv (e^\nu, L^\nu, \mathcal{C}, 0)^T. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Así, en un estado degenerado de tipo I, los autovectores magnetosónicos lentos toman la forma:

$$r_{m,s\pm} = \left(\pm\frac{b^\nu}{\rho h}\sqrt{\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}}, \pm\sqrt{\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}}\left(\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right) u^\nu - b^\nu, \mathbf{b}^2, 0\right)^T \tag{6.34}$$

(obtenida de (6.33) haciendo $a = 0$), pudiendo ser expresados como combinación lineal de los vectores deducidos por Anile para el caso de degeneración de tipo I, ecs. (4.106) y (4.107),

$$r_2 = (b^\nu, \mathbf{b}^2 u^\nu, 0, 0)^T \qquad \text{y} \qquad r_3 = (0^\nu, b^\nu, -\mathbf{b}^2, 0)^T.$$

Consideremos ahora la degeneración de tipo II. Esta degeneración viene caracterizada por que el campo tangencial asociado al autovalor que converge al autovalor de Alfvén es nulo ($\mathbf{b}_t = 0$). Analicemos ahora cada una de las componentes del autovector magnetosónico que se ha definido en (6.33). Usando los resultados obtenidos en la subsección 4.6 para la descomposición del campo magnético en componente normal y tangencial, podemos escribir

$$\begin{gathered} e^\nu \equiv \frac{a}{G}(\phi^\nu + a u^\nu) - \frac{b^\nu}{\rho h}\chi = \\ \frac{a\,\mathbf{b}_t^2}{\rho h(a^2 - c_s^2(G + a^2))}(\phi^\nu + a u^\nu) - \frac{\chi}{\rho h} b_t^\nu, \end{gathered} \tag{6.35}$$

$$L^\nu \equiv \chi\left(\phi^\nu \frac{a}{G} + \left(\frac{2a^2}{G} - \frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right) u^\nu\right) - b^\nu \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) =$$
$$= \chi \frac{\mathbf{b}_t^2\,(G+a^2)c_s^2 u^\nu}{\rho h(a^2 - (G+a^2)c_s^2)} - \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) b_t^\nu, \tag{6.36}$$

$$\mathcal{C} \equiv \mathbf{b}^2 - \rho h \frac{a^2}{G} = -\mathbf{b}_t^2\, \frac{(G+a^2)c_s^2}{a^2 - (G+a^2)c_s^2} \quad . \tag{6.37}$$

Para probar las ecuaciones (6.35)–(6.37) hemos usado la igualdad

$$\frac{a^2}{G} - \frac{\mathcal{B}^2}{\rho h (G+a^2)} = \frac{a^2 \mathbf{b}_t^2}{\rho h\big(a^2 - (G+a^2)c_s^2\big)}, \tag{6.38}$$

deducida usando la descomposición del campo magnético en parte normal y tangencial en la ecuación cuártica $N_4 = 0$.

Consideremos ahora un par de autovalores magnetosónicos, lento y rápido, entre los cuales se sitúa un autovalor de Alfvén. Entonces, para el autovalor más próximo al autovalor de Alfvén, proponemos la siguiente renormalización, consistente en dividir el autovector asociado entre $\mid \mathbf{b}_t \mid$, así el autovector será

$$r_m \equiv (e^\nu, L^\nu, \mathcal{C}, 0)^T, \tag{6.39}$$

donde se definen

$$e^\nu = \frac{a \mid \mathbf{b}_t \mid}{\rho h (a^2 - c_s^2(G+a^2))} (\phi^\nu + a u^\nu) - \frac{\chi}{\rho h} \frac{b_t^\nu}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \tag{6.40}$$

$$L^\nu = \chi \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid (G+a^2) c_s^2 u^\nu}{\rho h (a^2 - (G+a^2)c_s^2)} - \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) \frac{b_t^\nu}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \tag{6.41}$$

$$\mathcal{C} = - \mid \mathbf{b}_t \mid \; \frac{(G+a^2)c_s^2}{a^2 - (G+a^2)c_s^2}, \tag{6.42}$$

donde el vector unitario en la dirección del campo tangencial se renormaliza, al igual que se hizo en el caso de los autovectores de Alfvén (6.14), sustituyendo en la expresión (4.75) las funciones g_1 y g_2, (4.70) y (4.71), por las funciones f_1 y f_2, (6.15),

$$\frac{b_t^\mu}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{(f_2 \alpha_{22} - f_1 \alpha_{12}) \alpha_1^\mu + (f_1 \alpha_{11} - f_2 \alpha_{12}) \alpha_2^\mu}{\left(f_2^2 \alpha_{22} - 2 f_1 f_2 \alpha_{12} + f_1^2 \alpha_{11}\right)^{1/2}}. \tag{6.43}$$

Además, debemos prescribir, para el subcaso tercero de la degeneración de tipo II, el siguiente límite:

$$\lim_{a^2-(a^2+G)c_s^2 \to 0} \frac{|\, \mathbf{b}_t \,|}{a^2 - (a^2+G)c_s^2} = 0. \tag{6.44}$$

Para el otro autovalor magnetosónico (el más alejado al autovalor de Alfvén), dividimos el autovector correspondiente por el factor $\rho h a^2/G - \mathbf{b}^2$. Con esto, el citado autovector puede escribirse de la forma:

$$r_m \equiv (e^\nu, L^\nu, \mathcal{C}, 0)^T, \tag{6.45}$$

donde se ha definido

$$e^\nu = \frac{a}{\rho h (G + a^2) c_s^2}(\phi^\nu + a u^\nu) - \frac{\chi}{\rho h} \frac{b_t^\nu G}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}, \tag{6.46}$$

$$L^\nu = \chi \frac{u^\nu}{\rho h} - \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) \frac{b_t^\nu G}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}, \tag{6.47}$$

$$\mathcal{C} = -1, \tag{6.48}$$

con la prescripción, para el subcaso tercero de la degeneración de tipo II, del siguiente límite

$$\lim_{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G \to 0} \frac{b_t^\nu}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} = 0, \tag{6.49}$$

dado que la cantidad $\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G$, proporcional a $\mathcal{A}$ para los autovalores magnetosónicos, se anula en dicho subcaso.

Nótese que se han utilizado los mismos símbolos para las componentes de los diferentes autovectores magnetosónicos. El hacerlo así viene motivado por el hecho de obtener expresiones genéricas de los autovectores en los otros sistemas de variables, como veremos a continuación.

6.3.2 Sistema reducido de variables

A partir de los autovectores magnetosónicos en el sistema de variables de Anile, (6.39) y (6.45), se obtiene aplicando la transformación de sistema de variables dada en la Subsección 5.1.1, que el autovector en el sistema reducido de variables, $\bar{r}_m$, es de la forma

$$\bar{r}_m = \left(e^x, e^y, e^z, L^y, L^z, \mathcal{C}, \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \mathcal{C}\right)^T, \tag{6.50}$$

donde las componentes e^i,L^i y $\mathcal{C}$ deben tomarse acorde a las prescripciones dadas en la subsección anterior.

6.3.3 Sistema de variables conservadas

El autovector magnetosónico, en variables conservadas, R_m, se obtiene aplicando la transformación dada en la Sección 5.1.3, a los autovectores magnetosónicos correspondientes en variables de Anile, (6.39) y (6.45), obteniéndose

$$\begin{pmatrix} \rho e^0 + \mathcal{C} u^0 \partial_p \rho \\ E(u^x e^0 + u^0 e^x) + 2u^0 u^x b_\alpha L^\alpha - b^x L^0 - b^0 L^x + u^0 u^x \mathcal{C} \partial_p(\rho h) \\ E(u^y e^0 + u^0 e^y) + 2u^0 u^y b_\alpha L^\alpha - b^y L^0 - b^0 L^y + u^0 u^y \mathcal{C} \partial_p(\rho h) \\ E(u^z e^0 + u^0 e^z) + 2u^0 u^z b_\alpha L^\alpha - b^z L^0 - b^0 L^z + u^0 u^z \mathcal{C} \partial_p(\rho h) \\ 2Eu^0 e^0 + (2u^0 u^0 - 1) b_\alpha L^\alpha - 2b^0 L^0 + (\partial_p(\rho h) u^0 u^0 - 1)\mathcal{C} \\ b^y e^0 - b^0 e^y - u^y L^0 + u^0 L^y \\ b^z e^0 - b^0 e^z - u^z L^0 + u^0 L^z \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

donde

$$\partial_p \equiv \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)_s . \quad (6.52)$$

Para el caso del autovalor más próximo al de Alfvén, tras algunas operaciones, encontramos que

$$R_{m\,1} = \frac{a \mid \mathbf{b}_t \mid}{h(a^2 - c_s^2(G + a^2))} (\phi^0 + a u^0) - \frac{\chi}{h} \frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} - \mid \mathbf{b}_t \mid \frac{(G + a^2) c_s^2}{a^2 - (G + a^2) c_s^2} u^0 \partial_p \rho, \quad (6.53)$$

$$R_{m\,2} = \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) \left\{ \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2 - c_s^2(G + a^2)} \big(a(u^x \phi^0 + u^0 \phi^x)(1 - c_s^2) + 2u^0 u^x c_s^2 G \big) - \chi \left(\frac{b_t^x u^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + \frac{b_t^0 u^x}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right) + \left(\frac{b_t^x b^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + \frac{b_t^0 b^x}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right) \right\} + u^0 u^x \mathcal{C} \partial_p(\rho h), \quad (6.54)$$

$$R_{m\,3} = \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) \left\{ \frac{u^y \mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2 - c_s^2(G + a^2)} \big(a\phi^0 (1 - c_s^2) + 2u^0 c_s^2 G \big) - \chi \left(\frac{b_t^y u^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + \frac{b_t^0 u^y}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right) + \left(\frac{b_t^y b^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + \frac{b_t^0 b^y}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right) \right\} + u^0 u^y \mathcal{C} \partial_p(\rho h), \quad (6.55)$$

$$R_{m\,4} = \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) \left\{ \frac{u^z \mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2 - c_s^2(G + a^2)} \big(a\phi^0 (1 - c_s^2) + 2u^0 c_s^2 G \big) - \chi \left(\frac{b_t^z u^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + \frac{b_t^0 u^z}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right) + \left(\frac{b_t^z b^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + \frac{b_t^0 b^z}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right) \right\} + u^0 u^z \mathcal{C} \partial_p(\rho h), \quad (6.56)$$

$$R_{m\,5} = \left(1 + \frac{a^2}{G}\right) \left\{ \frac{2u^0 \mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2 - c_s^2(G + a^2)} \big(a\phi^0(1 - c_s^2) + u^0 c_s^2 G\big) \right.$$
$$\left. + \mid \mathbf{b}_t \mid + (b^0 - \chi u^0) \frac{2b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \right\} + \mathcal{C}\Big(\partial_p(\rho h) u^0 u^0 - 1\Big), \qquad (6.57)$$

$$R_{m\,6} = \frac{u^x \lambda - u^0}{G} \frac{b_t^y}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + u^y \frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \qquad (6.58)$$

$$R_{m\,7} = \frac{u^x \lambda - u^0}{G} \frac{b_t^z}{\mid \mathbf{b}_t \mid} + u^z \frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}. \qquad (6.59)$$

Finalmente, para el autovalor más alejado del de Alfvén, y también tras algunas operaciones, obtenemos

$$R_{m\,1} = \frac{a}{h(G + a^2) c_s^2} (\phi^0 + a u^0) - \frac{\chi}{h} \frac{b_t^0 G}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} - u^0 \partial_p \rho, \qquad (6.60)$$

$$R_{m\,2} = \frac{1}{G c_s^2} \Bigg(a(1 - c_s^2)(u^x \phi^0 + u^0 \phi^x) + 2u^0 u^x c_s^2 G \Bigg) +$$
$$(G + a^2) \Bigg\{ -\chi \left(\frac{b_t^x u^0 + b_t^0 u^x}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} \right) + \left(\frac{b_t^x b^0 + b_t^0 b^x}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} \right) \Bigg\} - u^0 u^x \partial_p(\rho h), \qquad (6.61)$$

$$R_{m\,3} = \frac{1}{G c_s^2} \Bigg(u^y \big(a\phi^0(1 - c_s^2) + 2u^0 c_s^2 G\big) \Bigg) +$$
$$(G + a^2) \Bigg\{ -\chi \left(\frac{b_t^y u^0 + b_t^0 u^y}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} \right) + \left(\frac{b_t^y b^0 + b_t^0 b^y}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} \right) \Bigg\} - u^0 u^y \partial_p(\rho h), \qquad (6.62)$$

$$R_{m\,4} = \frac{1}{G c_s^2} \Bigg(u^z \big(a\phi^0(1 - c_s^2) + 2u^0 c_s^2 G\big) \Bigg) +$$
$$(G + a^2) \Bigg\{ -\chi \left(\frac{b_t^z u^0 + b_t^0 u^z}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} \right) + \left(\frac{b_t^z b^0 + b_t^0 b^z}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} \right) \Bigg\} - u^0 u^z \partial_p(\rho h), \qquad (6.63)$$

$$R_{m\,5} = \frac{1}{G c_s^2} \Bigg(2u^0 \big(a\phi^0(1 - c_s^2) + u^0 c_s^2 G\big) + a^2 - c_s^2(G + a^2) \Bigg)$$
$$+ (G + a^2)(b^0 - \chi u^0) \frac{2b_t^0}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} - (\partial_p(\rho h) u^0 u^0 - 1), \qquad (6.64)$$

$$R_{m\,6} = \frac{1}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}\Big((u^x\lambda - u^0)b_t^y + G u^y b_t^0\Big), \tag{6.65}$$

$$R_{m\,7} = \frac{1}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}\Big((u^x\lambda - u^0)b_t^z + G u^z b_t^0\Big). \tag{6.66}$$

Capítulo 7

Autovectores a izquierdas. Definición y renormalización

Muchos esquemas HRSC utilizan los autovectores a izquierdas en el sistema de variables conservadas o en el sistema reducido como parte esencial del algoritmo. En este capítulo vamos a mostrar el trabajo hecho para su obtención y su renormalización en los sistemas de variables citados. Como en el caso de la de los autovectores a derechas, presentados en el Capítulo 4 y cuya renormalización se ha descrito en el capítulo anterior, trabajaremos en un espacio-tiempo plano descrito en coordenadas cartesianas.

7.1 Autovectores en el sistema de variables de Anile

Como ya hemos visto en la sección (4.5), en el sistema de variables de Anile, los autovectores a izquierdas de la matriz característica del sistema $A^\mu \phi_\mu$, definida en(4.33) se pueden obtener de forma sencilla. Como ocurre con los autovectores a derechas, en este caso se obtienen también 10 autovectores a izquierdas, aunque sólo 7 de ellos tienen significado físico. Los otros tres autovectores están asociados a los grados de libertad añadidos por la omisión de las ligaduras cuando se escribe el sistema en variables de Anile.

Los 7 autovectores a izquierdas con significado físico son (Anile 1989)[1]

- Autovector entrópico:

[1]Recordamos que los autovectores por la izquierda pertenencen al espacio dual de aquel al que pertenencen los autovectores a derechas y que, por tanto, los representatemos como vectores fila.

$$\hat{l}_e = (0_\alpha, 0_\alpha, 0, 1). \tag{7.1}$$

- Autovectores de Alfvén:

$$\hat{l}_a = \left(\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta, \frac{-Ea}{\mathcal{B}}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta, 0, 0\right). \tag{7.2}$$

- Autovectores magnetosónicos:

$$\hat{l}_m = \left(\phi_\alpha - \frac{\mathcal{B}(G+2a^2)}{Ea^2}b_\alpha, \frac{G+2a^2}{a}b_\alpha - \frac{\mathcal{B}}{a}\phi_\alpha, \frac{-\mathcal{A}}{\rho h a}, 0\right). \tag{7.3}$$

Los autovectores a izquierdas que acabamos de escribir y los autovectores a derechas vistos en la Secc. 4.5 no cumplen la condición $\hat{l}_i \cdot r^j \propto \delta_i^j$. Esto es así porque para su obtención hemos resuelto el sistema característico $\hat{l} \cdot (A^\mu \phi_\mu) = 0$, que sin pérdida de generalidad hemos tomado como $\hat{l} \cdot (A^x - \lambda A^0) = 0$, al escoger $\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0)$, y no un sistema como $l \cdot ((A^0)^{-1} \cdot A^x - \lambda I) = 0$, para el que sí se dan la condición indicada entre los correspondientes autovectores a derechas e izquierdas. Si bien ambos sistemas tienen iguales autovectores a derechas, no sucede así con los autovectores a izquierdas. Éstos están relacionados a través de la expresión $l = \hat{l} \cdot A^0$.

Para aplicaciones numéricas necesitamos que los autovectores a izquierdas y a derechas cumplan $l_i \cdot r^j = \delta_i^j$. Si se procede al cálculo $l = \hat{l} \cdot A^0$, se obtienen los siguientes autovectores

$$l_e = (0_\alpha, 0_\alpha, 0, u^0), \tag{7.4}$$

$$l_a = \begin{pmatrix} \left(Eu^0 - \frac{Ea}{\mathcal{B}}b^0\right)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta \\ \\ \left(-b^0 + \frac{Ea}{\mathcal{B}}u^0\right)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta + (\epsilon^0_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta)b_\alpha \\ \\ \epsilon^0_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tag{7.5}$$

$$l_m = \begin{pmatrix} \phi_\nu(Eu^0 - \frac{\mathcal{B}}{a}b^0) + b_\nu\left(\frac{G}{a} + 2a\right)\left(b^0 - \frac{\mathcal{B}}{a}u^0\right) - \frac{\mathcal{A}}{a}\,\delta^0_\nu \\ \\ \phi_\nu(-b^0 + \frac{\mathcal{B}}{a}u^0) + (\phi^0 - \frac{G}{a}u^0)b_\nu \\ \\ \phi^0 - au^0\left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) + \frac{G}{\rho h a}\left(\frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}u^0 - \frac{\mathcal{B}}{a}b^0\right) \\ \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tag{7.6}$$

que verifican la condición anterior. Estos autovectores presentan patologías similares a los autovectores a derechas en los casos de degeneración y necesitan, por tanto, ser renormalizados. Presentamos a continuación la propuesta de renormalización para cada uno de ellos así como las expresiones en los distintos sistemas de variables.

7.2 Autovector entrópico a izquierdas

Como en el caso del autovector entrópico a derechas el autovector entrópico a izquierdas (7.4) está bien definido en los estados degenerados de tipo I y II. Escribiremos a continuación las expresiones de este autovector en el sistema reducido de variables y en el sistema de variables conservadas.

7.2.1 Sistema reducido de variables

A partir del autovector entrópico en variables de Anile (7.4), podemos obtener el autovector entrópico en el sistema reducido de variables, $\tilde{\mathbf{V}} = (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, \rho)$, mediante la transformación descrita en la sección (5.2.1), obteniéndose la siguiente expresión

$$\bar{l}_e = \left(0, 0, 0, 0, 0, u^0 \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho, u^0 \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p\right). \tag{7.7}$$

7.2.2 Sistema de variables conservadas

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección (5.3), obtenemos las siguientes expresiones para las distintas componentes del autovector L en el sistema de variables conservadas $(L_D, L_{S^i}, L_\tau, L_{B^i})$:

$$L_D = \frac{1}{W}\frac{\partial s}{\partial \rho} + \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2}\left\{(Z + \mathbf{b}^2)\frac{\partial s}{\partial p} - \rho\left(1 - W^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\frac{\partial s}{\partial \rho}\right\}\frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{7.8}$$

$$L_{S^i} = \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2}\left\{\left((Z + \mathbf{b}^2)\frac{\partial s}{\partial p} - \rho\left(1 - W^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)\frac{\partial Z}{\partial S^i} + \left(\frac{B^2 u^i - b^0 B^i}{W}\right)\frac{\partial s}{\partial p} - D\left(u^i + \frac{b^0 B^i}{Z}\right)\frac{\partial s}{\partial \rho}\right\}, \tag{7.9}$$

con $i = x, y, z$,

$$L_\tau = -\frac{\partial s}{\partial p} + \frac{1}{Z + \mathbf{B}^2}\left\{(Z + \mathbf{b}^2)\frac{\partial s}{\partial p} - \rho\left(1 - W^2 - \frac{(b^0)^2}{Z}\right)\frac{\partial s}{\partial \rho}\right\}\frac{\partial Z}{\partial \tau}, \tag{7.10}$$

$$
\begin{aligned}
L_{B^i} = \frac{1}{Z+\mathbf{B}^2}\Bigg\{ & \left((Z+\mathbf{b}^2)\frac{\partial s}{\partial p} - \rho\left(1-W^2-\frac{(b^0)^2}{Z}\right)\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)\frac{\partial Z}{\partial B^i} + \\
& - \rho\left(2B^i(1-W^2) + b^0\left(\frac{WS^i}{Z}+u^i\right)\right)\frac{\partial s}{\partial \rho} + \\
& \left(\frac{B^2 b^i - b^0 S^i}{W} + \left(2-\frac{1}{W^2}\right)ZB^i\right)\frac{\partial s}{\partial p}\Bigg\}, \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

con $i = y, z$.

7.2.3 Producto escalar

El producto escalar es un invariante frente al cambio de sistema de variables. El producto escalar del autovector a izquierdas entrópico y su respectivo autovector a derechas es u^0.

7.3 Autovectores de Alfvén a izquierdas

Los autovectores de Alfvén a izquierdas, definidos en (7.5) para el sistema de variables de Anile, no son adecuados en los estados degenerados de tipo I y II. A continuación veremos cómo podemos renormalizarlos para que sean válidos en todos los estados. Una vez hecho esto, trasformaremos los autovectores al sistema de variables reducidas y conservadas.

7.3.1 Renormalización en el sistema de variables de Anile

Los autovectores de Alfvén a izquierdas (7.5) están mal definidos en el límite de la degeneración de tipo I (para el que $a = 0$ y $\mathcal{B} = 0$). Haciendo uso del resultado expresado en (6.8) podemos eliminar la indeterminación 0/0, obteniéndose el autovector a izquierdas

$$
l_{a\pm} = \begin{pmatrix} \left(Eu^0 \pm b^0\sqrt{E}\right)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta \\ \\ \left(-b^0 \mp \sqrt{E}u^0\right)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta + (\epsilon^0_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta) b_\alpha \\ \\ \epsilon^0_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta \\ 0 \end{pmatrix}^T . \qquad (7.12)
$$

Este autovector todavía se anula en el límite de la degeneración de tipo II ($\epsilon^\alpha_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta = 0$). Para corregir este comportamiento, recordemos que se ha demostrado (6.11) que

$$\epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta}\phi^{\beta}u^{\gamma}b^{\delta} = -g_1\alpha_1^{\mu} + g_2\alpha_2^{\mu}.$$

Usando este resultado podremos escribir los autovectores de Alfvén a izquierdas como

$$l_{a\pm} = \begin{pmatrix} (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})(-g_1\alpha_{1\mu} + g_2\alpha_{2\mu}) \\ (-b^0 \mp \sqrt{E}u^0)(-g_1\alpha_{1\mu} + g_2\alpha_{2\mu}) + (-g_1\alpha_1^0 + g_2\alpha_2^0)b_\mu \\ -g_1\alpha_1^0 + g_2\alpha_2^0 \\ 0 \end{pmatrix}^T . \quad (7.13)$$

Así escrito, este autovector se puede expresar como la combinación lineal de los vectores V_1 y V_2,

$$l_{a\pm} = -g_1 V_{1\pm} + g_2 V_{2\pm}, \quad (7.14)$$

siendo

$$V_{1\pm} = ((Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\alpha_{1\mu}, (-b^0 \mp \sqrt{E}u^0)\alpha_{1\mu} + b_\mu\alpha_1^0, \alpha_1^0, 0), \quad (7.15)$$

$$V_{2\pm} = ((Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\alpha_{2\mu}, (-b^0 \mp \sqrt{E}u^0)\alpha_{2\mu} + b_\mu\alpha_2^0, \alpha_2^0, 0). \quad (7.16)$$

Si dividimos por $(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}$ y aplicamos la definición dada en (6.15), se obtiene el autovector de Alfvén a izquierdas en el sistema de variables de Anile ya renormalizado

$$l_{a\pm} = -f_1 V_{1\pm} + f_2 V_{2\pm}. \quad (7.17)$$

7.3.2 Autovectores renormalizados en el sistema reducido de variables

Los autovectores de Alfvén a izquierdas en el sistema reducido de variables, obtenidos a partir de los autovectores renormalizados (7.17), usando el procedimiento descrito en la sección (5.2.1), son

$$\bar{l}_{a\pm} = -f_1 \bar{V}_{1\pm} + f_2 \bar{V}_{2\pm}, \quad (7.18)$$

con

$$\bar{V}_{1\pm} = \begin{pmatrix} 2(-Ea + b^0\mathcal{B}/u^0)u^y \\ (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})((u^0)^2 - u^x u^0 \lambda_{a\pm} - u^y u^y)/u^0 \pm \sqrt{E}B^y u^y/u^0 \\ -(Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})(u^z u^y)/u^0 \pm \sqrt{E}B^z u^y/u^0 \\ -b^z u^z \mp \sqrt{E}(1 + (u^z)^2) \\ u^y(\mp\sqrt{E}u^z + b^z) \\ u^y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

y

$$\bar{V}_{2\pm} = \begin{pmatrix} 2(-Ea + b^0\mathcal{B}/u^0)u^z \\ -(Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})(u^z u^y)/u^0 \pm \sqrt{E}B^y u^z/u^0 \\ (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})((u^0)^2 - u^x u^0 \lambda_{a\pm} - u^z u^z)/u^0 \pm \sqrt{E}B^z u^z/u^0 \\ u^z(\mp\sqrt{E}u^y + b^y) \\ -b^y u^y \mp \sqrt{E}(1 + (u^y)^2) \\ u^z \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

7.3.3 Autovectores renormalizados en el sistema de variables conservadas

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección (5.3), obtenemos los autovectores de Alfvén en el sistema de variables conservadas

$$L_{a\pm} = -f_1 V_{1\pm} + f_2 V_{2\pm}, \tag{7.21}$$

donde, las componentes de los vectores $V_{1\pm}$ y $V_{2\pm}$ son

$$V_{1\pm,D} = C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{7.22}$$

$$V_{1\pm,S^x} = C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial S^x} + (\mathbf{B}^2 u^x - b^0 B^x)\frac{u^y}{u^0} - u^x b^z (B^z u^y - B^y u^z) + (Eu^0 \pm \sqrt{E} b^0) u^y (u^x - 2a) \pm \sqrt{E}\Big\{u^x B^y - u^y B^x - u^z u^x (u^y B^z - u^z B^y)\Big\}, \tag{7.23}$$

$$V_{1\pm,S^y} = C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial S^y} + E(u^0)^2(u^0 - \lambda_{a\pm}u^x) \pm \sqrt{E}\Big\{b^0 u^x a + b^y u^y u^0 - u^z u^y (u^y B^z - u^z B^y)\Big\} - b^0 b^z u^z + (\mathbf{B}^2 u^y - b^0 B^y)\frac{u^y}{u^0} - u^y b^z (B^z u^y - B^y u^z), \tag{7.24}$$

$$V_{1\pm,S^z} = C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial S^z} + (\mathbf{B}^2 u^z - b^0 B^z)\frac{u^y}{u^0} + b^0 b^z u^y - u^z b^z (B^z u^y - B^y u^z) \pm \sqrt{E}\Big(b^z u^y u^0 + (1 + (u^z)^2)(u^z B^y - u^y B^z)\Big), \tag{7.25}$$

$$V_{1\pm,\tau} = C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial \tau} - u^y (Z + \mathbf{B}^2), \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned} V_{1\pm,B^y} = {} & C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial B^y} + \left(\frac{-b^0 S^y + \mathbf{B}^2 b^y}{u^0} + \left(2 - \frac{1}{(u^0)^2}\right) Z B^y\right) u^y \\ & + b^z (B^y u^z - B^z u^y)\left(\frac{u^y b^0}{u^0} + 2B^y \frac{1 - (u^0)^2}{u^0}\right) + (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\Big\{\frac{B^y u^y}{u^0} \\ & + (1 - au^x)(-2(u^0)^2 B^y + b^0 u^y)\frac{u^y}{u^0} - \frac{S^y u^0}{Z} b^x u^y a\Big\} \mp \sqrt{E}\Big\{ \\ & S^y u^y \Big(1 + \frac{b^x B^x u^0}{Z}\Big) + \Big(Eu^0 - \frac{(b^0)^2}{u^0}\Big)\big((u^0)^2 - \lambda_{a\pm} u^0 u^x - (u^y)^2\big) \\ & + (b^0 u^y - 2(u^0)^2 B^y)\frac{u^y u^x B^x}{u^0} - (B^y + (B^y u^z - B^z u^y) u^z)\Big(\frac{u^y b^0}{u^0} \\ & + 2B^y \frac{1 - (u^0)^2}{u^0}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned} V_{1\pm,B^z} = {} & C_{1\pm}\frac{\partial Z}{\partial B^z} + \left(\frac{-b^0 S^z + \mathbf{B}^2 b^z}{u^0} + \left(2 - \frac{1}{(u^0)^2}\right) Z B^z\right) u^y \\ & + b^z (B^y u^z - B^z u^y)\left(\frac{u^z b^0}{u^0} + 2B^z \frac{1 - (u^0)^2}{u^0}\right) + (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\Big\{\frac{B^z u^y}{u^0} \\ & + (1 - au^x)(-2(u^0)^2 B^z + b^0 u^z)\frac{u^y}{u^0} - \frac{S^z u^0}{Z} b^x u^y a\Big\} \mp \sqrt{E}\Big\{ \\ & S^z u^y \Big(1 + \frac{b^x B^x u^0}{Z}\Big) - \Big(Eu^0 - \frac{(b^0)^2}{u^0}\Big) u^y u^z \end{aligned}$$

$$+ (b^0 u^z - 2(u^0)^2 B^z)\frac{u^y u^x B^x}{u^0} - (B^y + (B^y u^z - B^z u^y)u^z)\Big(\frac{u^z b^0}{u^0} + 2B^z \frac{1-(u^0)^2}{u^0}\Big)\Big\}, \quad (7.28)$$

$$V_{2\pm,D} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial D}, \quad (7.29)$$

$$V_{2\pm,S^x} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial S^x} + (\mathbf{B}^2 u^x - b^0 B^x)\frac{u^z}{u^0} - u^x b^y (B^y u^z - B^z u^y) + (Eu^0 \pm \sqrt{E} b^0) u^z (u^x - 2a) \pm \sqrt{E}\Big\{u^x B^z - u^z B^x - u^y u^x (u^z B^y - u^y B^z)\Big\}, \quad (7.30)$$

$$V_{2\pm,S^y} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial S^y} + (\mathbf{B}^2 u^y - b^0 B^y)\frac{u^z}{u^0} + b^0 b^y u^z - u^y b^y (B^y u^z - B^z u^y) \pm \sqrt{E}\big(b^y u^z u^0 + (1 + (u^y)^2)(u^y B^z - u^z B^y)\big), \quad (7.31)$$

$$V_{2\pm,S^z} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial S^z} + E(u^0)^2 (u^0 - \lambda_{a\pm} u^x) \pm \sqrt{E}\Big\{b^0 u^x a + b^z u^z u^0 - u^z u^y (u^z B^y - u^y B^z)\Big\} - b^0 b^y u^y + (\mathbf{B}^2 u^z - b^0 B^z)\frac{u^z}{u^0} - u^z b^y (B^y u^z - B^z u^y), \quad (7.32)$$

$$V_{2\pm,\tau} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial \tau} - u^z (Z + \mathbf{B}^2), \quad (7.33)$$

$$V_{2\pm,B^y} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial B^y} + \left(\frac{-b^0 S^y + \mathbf{B}^2 b^y}{u^0} + \left(2 - \frac{1}{(u^0)^2}\right) Z B^y\right) u^z + b^y (B^z u^y - B^y u^z)\left(\frac{u^y b^0}{u^0} + 2B^y \frac{1-(u^0)^2}{u^0}\right) + (Eu^0 \pm b^0 \sqrt{E})\Big\{\frac{B^y u^z}{u^0} + (1 - a u^x)(-2(u^0)^2 B^y + b^0 u^y)\frac{u^z}{u^0} - \frac{S^y u^0}{Z} b^x u^z a\Big\} \mp \sqrt{E}\Big\{ S^y u^z \Big(1 + \frac{b^x B^x u^0}{Z}\Big) - \Big(Eu^0 - \frac{(b^0)^2}{u^0}\Big) u^y u^z + (b^0 u^y - 2(u^0)^2 B^y)\frac{u^z u^x B^x}{u^0} - (B^z + (B^z u^y - B^y u^z)u^y)\Big(\frac{u^y b^0}{u^0} + 2B^y \frac{1-(u^0)^2}{u^0}\Big)\Big\}, \quad (7.34)$$

$$V_{2\pm,B^z} = C_{2\pm}\frac{\partial Z}{\partial B^z} + \left(\frac{-b^0 S^z + \mathbf{B}^2 b^z}{u^0} + \left(2 - \frac{1}{(u^0)^2}\right) Z B^z\right) u^z$$
$$+ b^y (B^z u^y - B^y u^z)\left(\frac{u^z b^0}{u^0} + 2B^z \frac{1-(u^0)^2}{u^0}\right) + (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\Bigg\{\frac{B^z u^z}{u^0}$$
$$+ (1 - au^x)(-2(u^0)^2 B^z + b^0 u^z)\frac{u^z}{u^0} - \frac{S^z u^0}{Z} b^x u^z a\Bigg\} \mp \sqrt{E}\Bigg\{$$
$$S^z u^z\Big(1 + \frac{b^x B^x u^0}{Z}\Big) + \Big(Eu^0 - \frac{(b^0)^2}{u^0}\Big)((u^0)^2 - \lambda_{a\pm} u^0 u^x - (u^z)^2)$$
$$+ (b^0 u^z - 2(u^0)^2 B^z)\frac{u^z u^x B^x}{u^0} - (B^z + (B^z u^y - B^y u^z) u^y)\Big(\frac{u^z b^0}{u^0}$$
$$+ 2B^z \frac{1-(u^0)^2}{u^0}\Big)\Bigg\}, \quad (7.35)$$

donde hemos definido

$$C_{1\pm} = -Eu^0 u^y (1 - au^x) - (Eu^0 \pm \sqrt{E} b^0)\frac{b^0}{Z}\Bigg\{ - 2b^x a u^y + b^y(1 + au^x) +$$
$$u^z (b^y u^z - b^z u^y)\Bigg\} + (Z + \mathbf{b}^2) u^y - b^z (b^y u^z - b^z u^y)((u^0)^2 - 1)$$
$$\pm \sqrt{E}\Bigg\{u^y \left((u^0)^2 u^x \mathcal{B} + \frac{b^0 b^x B^x}{Z}\right) - ((u^0)^2 - 1)(b^y + u^z (b^y u^z - b^z u^y))\Bigg\} \quad (7.36)$$

$$C_{2\pm} = -Eu^0 u^z (1 - au^x) - (Eu^0 \pm \sqrt{E} b^0)\frac{b^0}{Z}\Bigg\{ - 2b^x a u^z + b^z(1 + au^x) +$$
$$u^y (b^z u^y - b^y u^z)\Bigg\} + (Z + \mathbf{b}^2) u^z - b^y (b^z u^y - b^y u^z)((u^0)^2 - 1)$$
$$\pm \sqrt{E}\Bigg\{u^z \left((u^0)^2 u^x \mathcal{B} + \frac{b^0 b^x B^x}{Z}\right) - ((u^0)^2 - 1)(b^z + u^y (b^z u^y - b^y u^z))\Bigg\} \quad (7.37)$$

7.3.4 Producto escalar

El producto escalar de cada uno de los autovectores de Alfvén a izquierdas renormalizados, definidos en esta sección, con los correspondientes autovectores a derechas dados en la seccion (6.2) es, en cualquiera de los dos sistemas de variables,

$$2(Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\Big((1 - \lambda_{a\pm} v_x)^2 - (1 - \lambda_{a\pm}^2)(f_1 v_y - f_2 v_z)^2\Big). \quad (7.38)$$

7.4 Autovectores magnetosónicos a izquierdas

Los autovectores magnetosónicos a izquierdas presentan un comportamiento inesperado, ya que en el sistema de variables de Anile sólo están mal definidos en el límite de la degeneración de tipo I. Por otro lado, los problemas frente a la degeneración de tipo II aparecen al transformar los autovectores al sistema reducido de variables o al sistema de variables conservadas. Por este motivo, en esta sección empezaremos modificando los autovectores magnetosónicos a izquierdas en el sistema de variables de Anile para que no presenten problemas frente a la degeneración de tipo I. Después, los transformaremos al sistema reducido de variables donde los modificaremos para que no presenten problemas en la degeneración de tipo II. Por último, los transformaremos al sistema de variables conservadas.

7.4.1 Sistema de variables de Anile

Los autovectores magnetosónicos a izquierdas dados en (7.6), no están bien definidos en el límite de la degeneración de tipo I ($a = 0$ y $\mathcal{B} = 0$). Para resolver este problema los multiplicamos por a y hacemos uso de la definición de χ (6.32), obteniendo

$$l_m = \begin{pmatrix} \phi_\nu(Eu^0 a - \mathcal{B}b^0) + b_\nu(G + 2a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) - \mathcal{A}\,\delta^0_\nu \\ \\ \phi_\nu(-ab^0 + \mathcal{B}u^0) + (a\phi^0 - Gu^0)b_\nu \\ \\ a\phi^0 - a^2 u^0\left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) + \frac{G}{\rho h}\left(\frac{\mathbf{b}^2 u^0}{c_s^2} - \chi b^0\right) \\ \\ 0 \end{pmatrix}^T . \tag{7.39}$$

Los autovectores así definidos tampoco se anulan en la degeneración de tipo II. Nótese, sin embargo, que en el subcaso 3 de esta degeneración, caracterizado por ser $c_s^2 = \mathbf{b}^2/E$, tendríamos dos autovectores magnetosónicos iguales. Como en los resolvedores de Riemann no se usan los autovectores en en el sistema de variables de Anile, no nos preocuparemos ahora de esta patología ya que nuestro objetivo es obtener los autovalores a izquierdas bien comportados en el sistema de variables conservadas.

7.4.2 Sistema reducido de variables

Si realizamos el cambio del autovector definido en (7.39) al sistema reducido de variables, $\tilde{\mathbf{V}}$, usando el procedimiento descrito en la sección (5.2.1), obtenemos que las distintas componentes del autovector son

$$\bar{l}_{m,u^x} = Ea\frac{(u^0)^2 - (u^x)^2}{u^0} - (b^0u^0 - b^xu^x)\frac{\mathcal{B}}{u^0}$$

$$+\frac{B_x}{u^0}\left((b^0-\lambda b^x)+(G+2a^2)\left(b^0-\frac{\mathcal{B}}{a}u^0\right)\right), \tag{7.40}$$

$$\bar{l}_{m,u^y}=(-Eau^x+\mathcal{B}b^x)\frac{u^y}{u^0}+\frac{B_y}{u^0}\left((G+2a^2)\left(b^0-\frac{\mathcal{B}}{a}u^0\right)-(b^x\lambda-b^0)\right), \tag{7.41}$$

$$\bar{l}_{m,u^z}=(-Eau^x+\mathcal{B}b^x)\frac{u^z}{u^0}+\frac{B_z}{u^0}\left((G+2a^2)\left(b^0-\frac{\mathcal{B}}{a}u^0\right)-(b^x\lambda-b^0)\right), \tag{7.42}$$

$$\bar{l}_{m,b^y}=\lambda(u^xb^y-u^yb^x)-B^y, \tag{7.43}$$

$$\bar{l}_{m,b^z}=\lambda(u^xb^z-u^zb^x)-B^z, \tag{7.44}$$

$$\bar{l}_{m,p}=a\phi^0+a^2u^0\left(1-\frac{1}{c_s^2}\right)+\frac{G}{\rho h}\left(\frac{\mathbf{b}^2u^0}{c_s^2}-\frac{\mathcal{B}}{a}b^0\right), \tag{7.45}$$

$$\bar{l}_{m,\rho}=0. \tag{7.46}$$

El producto escalar de estos autovectores con los correspondientes autovectores a derechas (6.33) es

$$\begin{aligned}\bar{l}_m\cdot\bar{r}_m=2\Big(G\mathbf{b}^2-\rho ha^2\Big)\Bigg[&u^0\left(1+\frac{\mathbf{b}^2}{\rho hc_s^2}\right)-\frac{\chi}{\rho h}b^0\\&+\left(1-\frac{1}{c_s^2}\right)\frac{a^2}{G}\left(u^0+\frac{u^0-u^x\lambda}{G}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{7.47}$$

Contrariamente a lo que sucedía con los autovectores magnetosónicos en el sistema de variables de Anile (7.39), estos autovectores sí se anulan en la degeneración de tipo II. A fin de evitar esta patología y previo al proceso de renormalización, haremos un análisis de sus componentes, escribiéndolas en términos de las funciones que se anulan en el caso de la degeneración de tipo II ($\mathcal{A}$, g_1, g_2 y $\mathbf{b_t}$).

Partiendo de la expresión (7.40), operando y reagrupando términos obtenemos

$$\bar{l}_{m,u^x}=\frac{1}{u^0}\left[\frac{\mathcal{A}}{a}((u^0)^2-(u^x)^2)+2B^xb_t^0(G+a^2)\right]. \tag{7.48}$$

Para la segunda componente, partiendo de la expresión dada en (7.41), y tras algunas operaciones, llegamos a

$$\bar{l}_{m,u^y} = \frac{u^y}{u^0(u^0 - \lambda u^x)}\left(\frac{\mathcal{A}}{a}u^x(u^x\lambda - u^0) + 2B^x\lambda b_t^0(G + a^2)\right.$$
$$\left. + g_2\left((G + 2a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) - (b^x\lambda - b^0)\right)\right). \quad (7.49)$$

Tras un cálculo similar al de la componente $\bar{l}_{m\,u^y}$, obtenemos que la tercera componente del autovector (7.42), se puede expresar como

$$\bar{l}_{m,u^z} = \frac{u^z}{u^0(u^0 - \lambda u^x)}\left(\frac{\mathcal{A}}{a}u^x(u^x\lambda - u^0) - 2B^x\lambda b_t^0(G + a^2)\right.$$
$$\left. + g_1\left((G + 2a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) - (b^x\lambda - b^0)\right)\right). \quad (7.50)$$

En el caso de la cuarta componente (7.43) es fácil demostrar que

$$\bar{l}_{m,b^y} = -g_2(u^0 - \lambda u^x). \quad (7.51)$$

De forma análoga, para la quinta componente (7.44), se tiene

$$\bar{l}_{m,b^z} = -g_1(u^0 - \lambda u^x). \quad (7.52)$$

En el caso de la sexta componente (7.45), operando y reagrupando términos, se obtiene

$$\bar{l}_{m,p} = \frac{\mathbf{b}_t^2 G}{\rho h(a^2 - (G + a^2)c_s^2)}(\lambda u^x - u^0) - \frac{G}{\rho h}\chi b_t^0. \quad (7.53)$$

La última componente será:

$$\bar{l}_{m,\rho} = 0. \quad (7.54)$$

7.4.3 Propuesta de renormalización

Con el fin de renormalizar las componentes de los autovectores utilizaremos la relación

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right)\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2 - (G + a^2)c_s^2}a^2(G + a^2)c_s^2, \quad (7.55)$$

válida para los autovalores magnetosónicos, y para cuya deducción se ha utilizado la descomposición del campo magnético en sus componentes normal y tangencial, y la igualdad (6.38).

Al igual que hicimos en el caso de los autovectores a derechas, consideremos un par de autovalores magnetosónicos, lento y rápido. Para el autovector correspondiente al autovalor más cercano al autovalor de Alfvén, se propone dividir sus componentes por $\mid \mathbf{b}_t \mid$, quedando entonces de la siguiente manera

$$\bar{l}_{m,u^x} = \frac{G+a^2}{u^0}\left[\frac{(1-c_s^2)\mid \mathbf{b}_t \mid a}{a^2-(G+a^2)c_s^2}((u^0)^2-(u^x)^2)+2B^x\frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}\right], \tag{7.56}$$

$$\begin{aligned}\bar{l}_{m,u^y} = \frac{u^y(G+a^2)}{u^0(u^0-\lambda u^x)}&\left(\frac{(1-c_s^2)\mid \mathbf{b}_t \mid a}{a^2-(G+a^2)c_s^2}u^x(u^x\lambda-u^0)-2B^x\lambda\frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}\right)\\ &+\frac{g_2}{\mid \mathbf{b}_t \mid}\left((G+2a^2)\left(b^0-\chi u^0\right)-(b^x\lambda-b^0)\right),\end{aligned} \tag{7.57}$$

$$\begin{aligned}\bar{l}_{m,u^z} = \frac{u^z(G+a^2)}{u^0(u^0-\lambda u^x)}&\left(\frac{(1-c_s^2)\mid \mathbf{b}_t \mid a}{a^2-(G+a^2)c_s^2}u^x(u^x\lambda-u^0)-2B^x\lambda\frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}\right)\\ &+\frac{g_1}{\mid \mathbf{b}_t \mid}\left((G+2a^2)\left(b^0-\chi u^0\right)-(b^x\lambda-b^0)\right),\end{aligned} \tag{7.58}$$

$$\bar{l}_{m,b^y} = -\frac{g_2}{\mid \mathbf{b}_t \mid}(u^0-\lambda u^x), \tag{7.59}$$

$$\bar{l}_{m,b^z} = -\frac{g_1}{\mid \mathbf{b}_t \mid}(u^0-\lambda u^x), \tag{7.60}$$

$$\bar{l}_{m,p} = \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid G}{\rho h(a^2-(G+a^2)c_s^2)}(\lambda u^x-u^0)-\frac{G}{\rho h}\chi\frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \tag{7.61}$$

$$\bar{l}_{m,\rho} = 0. \tag{7.62}$$

En las expresiones anteriores,

$$\frac{b_t^\mu}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{(f_2\alpha_{22}-f_1\alpha_{11})\alpha_1^\mu+(f_1\alpha_{11}-f_2\alpha_{22})\alpha_2^\mu}{\left(f_2^2\alpha_{22}-2f_1f_2\alpha_{12}+f_1^2\alpha_{11}\right)^{1/2}(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2)^{1/2}}, \tag{7.63}$$

$$\frac{g_{1,2}}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{f_{1,2}\left((u^0-\lambda u^x)^2-(1-\lambda^2)((u^y)^2+(u^z)^2\right)^{1/2}}{\left(f_2^2\alpha_{22}-2f_1f_2\alpha_{12}+f_1^2\alpha_{11}\right)^{1/2}}, \tag{7.64}$$

donde las funciones f_1 y f_2 han sido definidas en (6.15), (6.16). Además, para que los vectores estén bien definidos en el subcaso 3 de la degeneración, adoptaremos la prescripción dada en (6.44).

Para el otro autovector, cuyo autovalor está más alejado del autovalor de Alfvén, se propone dividir sus componentes originales (7.48)-(7.54) por la igualdad (6.38):

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} = \frac{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}{G(G+a^2)c_s^2}, \tag{7.65}$$

obteniéndose

$$\bar{l}_{m,u^x} = \frac{1}{u^0}\left[\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)a((u^0)^2-(u^x)^2) + 2B^x\frac{b_t^0}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G\right], \tag{7.66}$$

$$\bar{l}_{m,u^y} = \frac{u^y}{u^0(u^0-\lambda u^x)}\left[\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)au^x(u^x\lambda-u^0) - 2B^x\lambda\frac{b_t^0}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G\right] + \frac{g_2}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G\left((G+2a^2)\left(b^0-\chi u^0\right) - (b^x\lambda - b^0)\right), \tag{7.67}$$

$$\bar{l}_{m,u^z} = \frac{u^z}{u^0(u^0-\lambda u^x)}\left[\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)au^x(u^x\lambda-u^0) - 2B^x\lambda\frac{b_t^0}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G\right] + \frac{g_1}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G\left((G+2a^2)\left(b^0-\chi u^0\right) - (b^x\lambda - b^0)\right), \tag{7.68}$$

$$\bar{l}_{m,b^y} = -\frac{g_2}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G(u^0-\lambda u^x), \tag{7.69}$$

$$\bar{l}_{m,b^z} = -\frac{g_1}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}G(u^0-\lambda u^x), \tag{7.70}$$

$$\bar{l}_{m,p} = \frac{(\lambda u^x - u^0)G}{\rho h(G+a^2)c_s^2} - \frac{G^2}{\rho h}\chi\frac{b_t^0}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}, \tag{7.71}$$

$$\bar{l}_{m,\rho} = 0, \tag{7.72}$$

debiendo prescribir los siguientes límites, para el caso de triple degeneración

$$\lim_{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G \to 0} \quad \frac{b_t^\nu}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} = 0, \tag{7.73}$$

$$\lim_{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G \to 0} \quad \frac{g_{1,2}}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} = 0. \tag{7.74}$$

7.4.4 Sistema de variables conservadas

Tomando los autovectores en el sistema reducido de variables, cuyas componentes están definidas en (7.48)-(7.54), y transformándolos al sistema de variables conservadas siguiendo el proceso descrito en la sección (5.3), obtendremos los autovectores en variables conservadas. Una vez obtenidos, procederemos a su renormalización.

Previamente definimos

$$H = (G + 2a^2)\left(b^0 - \chi\, u^0\right) - (b^x\lambda - b^0), \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}
C_m = \frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2 - (G + a^2)c_s^2}&\Bigg\{(c_s^2 - 1)(G + a^2)au^0\left(u^x + \frac{b^0 B^x}{Z}\right) + \\
\left((u^0)^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)(\lambda u^x - u^0)G\Bigg\} &- b_t^0\Bigg\{\frac{2(G + a^2)B^x u^0}{u^0 - \lambda u^x}\left(u^0 a + \lambda + \frac{b^0\mathcal{B}}{Z}\right) \\
+ \left((u^0)^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)G\chi\Bigg\} &- g_2\Bigg\{u^0 H\left(u^0 u^y + \frac{b^0 b^y}{Z}\right) + \Bigg(b^y\left((u^0)^2 - 1\right) \\
- u^0 u^y b^0\frac{2Z + \mathbf{b}^2}{Z}\Bigg)(u^0 - \lambda u^x)\Bigg\} &- g_1\Bigg\{u^0 H\left(u^0 u^z + \frac{b^0 b^z}{Z}\right) \\
&+ \left(b^z\left((u^0)^2 - 1\right) - u^0 u^z b^0\frac{2Z + \mathbf{b}^2}{Z}\right)(u^0 - \lambda u^x)\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{7.76}$$

Una vez definidas estas cantidades pasamos a escribir las componentes de los autovectores magnetosónicos en el sistema de variables conservadas,

$$L_{m,D} = C_m\frac{\partial Z}{\partial D}, \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}
L_{m,S^x} = C_m\frac{\partial Z}{\partial S^x} &+ \frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2 - (G + a^2)c_s^2}\Bigg\{(1 - c_s^2)a(G + a^2)\left((u^0)^2 + \frac{(B^x)^2}{\rho h}\right) \\
+ \frac{B^2 u^x - b^0 B^x}{\rho h u^0}(\lambda u^x - u^0)G\Bigg\} &+ b_t^0\Bigg\{\frac{2(G + a^2)B^x}{u^0 - \lambda u^x}\left((1 + au^x)u^0 + \frac{B^x\mathcal{B}}{\rho h}\right) \\
- \frac{B^2 u^x - b^0 B^x}{\rho h u^0}\chi\, G\Bigg\} &+ g_2\Bigg\{u^0 H\left(u^x u^y + \frac{B^x b^y}{\rho h u^0}\right) - (u^0 - \lambda u^x)\cdot \\
\left(u^y\left(b^x u^0 + B^x\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right) - B^y u^x\right)\Bigg\} &+ g_1\Bigg\{u^0 H\left(u^x u^z + \frac{B^x b^z}{\rho h u^0}\right) \\
&- (u^0 - \lambda u^x)\left(u^z\left(b^x u^0 + B^x\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right) - B^z u^x\right)\Bigg\},
\end{aligned}\tag{7.78}$$

$$L_{m,S^y} = C_m\frac{\partial Z}{\partial S^y} + \frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2 - (G + a^2)c_s^2}\Bigg\{(1 - c_s^2)a(G + a^2)\frac{B^x B^y}{\rho h}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{B^2u^y-b^0B^y}{\rho h u^0}(\lambda u^x-u^0)G\Big\}+b_t^0\Big\{\frac{2(G+a^2)B^x}{u^0-\lambda u^x}\left(au^yu^0+\frac{B^y\mathcal{B}}{\rho h}\right)\\
&-\frac{B^2u^y-b^0B^y}{\rho h u^0}\,\chi\,G\Big\}+g_2\Big\{u^0H\left(1+u^yu^y+\frac{B^yb^y}{\rho h u^0}\right)-(u^0-\lambda u^x)\cdot\\
&\left(u^yB^y\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}+b^0(1+(u^y)^2)\right)\Big\}+g_1\Big\{u^0H\left(u^yu^z+\frac{B^yb^z}{\rho h u^0}\right)\\
&-(u^0-\lambda u^x)\left(u^z\left(b^yu^0+B^y\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)-B^zu^y\right)\Big\},
\end{aligned}
\tag{7.79}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{m,S^z}&=C_m\frac{\partial Z}{\partial S^z}+\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2}\Big\{(1-c_s^2)a(G+a^2)\frac{B^xB^z}{\rho h}\\
&+\frac{B^2u^z-b^0B^z}{\rho h u^0}(\lambda u^x-u^0)G\Big\}+b_t^0\Big\{\frac{2(G+a^2)B^x}{u^0-\lambda u^x}\left(au^zu^0+\frac{B^z\mathcal{B}}{\rho h}\right)\\
&-\frac{B^2u^z-b^0B^z}{\rho h u^0}\,\chi\,G\Big\}+g_2\Big\{u^0H\left(u^zu^y+\frac{B^zb^y}{\rho h u^0}\right)-(u^0-\lambda u^x)\cdot\\
&\left(u^y\left(b^zu^0+B^z\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)-B^yu^z\right)\Big\}+g_1\Big\{u^0H\left(1+u^zu^z+\frac{B^zb^z}{\rho h u^0}\right)\\
&-(u^0-\lambda u^x)\left(u^zB^z\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}+b^0(1+u^zu^z)\right)\Big\},
\end{aligned}
\tag{7.80}
$$

$$
L_{m,\tau}=C_m\frac{\partial Z}{\partial \tau}-\left((u^0)^2+\frac{B^2}{\rho h}\right)G\Big\{\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2}(\lambda u^x-u^0)-b_t^0\chi\Big\},\tag{7.81}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{m,B^y}&=C_m\frac{\partial Z}{\partial B^y}+\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2}\Big\{(1-c_s^2)a(G+a^2)\left(\frac{S^yB^x}{\rho h}-2B^yu^xu^0\right)\\
&+\left(\frac{-b^0S^y+B^2b^y}{\rho h\,u^0}+\big(2(u^0)^2-1\big)B^y\right)G(\lambda u^x-u^0)+b_t^0\Big\{\frac{2B^x(G+a^2)}{u^0-\lambda u^x}\Big(\\
&-2u^0B^y(\lambda+u^0a)+b^0au^y+\frac{S^y\mathcal{B}}{\rho h}\Big)+\left(\frac{b^0S^y-B^2b^y}{\rho h\,u^0}-\big(2(u^0)^2-1\big)B^y\right)\\
&\cdot\chi\,G\Big\}+g_2\Big\{H\Big(-2(u^0)^2B^yu^y+b^0(1+u^yu^y)+\frac{S^yb^y}{\rho h}\Big)-(u^0-\lambda u^x)\Big(Eu^0\\
&+S^yu^y\left(1+\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)+\frac{u^yb^0}{u^0}(b^0u^y-B^y)-2B^y\left(u^0u^yb^0+\frac{1-(u^0)^2}{u^0}B^y\right)\Big)\Big\}\\
&+g_1\Big\{H\Big((-2(u^0)^2B^y+b^0u^y)u^z+\frac{S^yb^z}{\rho h}\Big)-(u^0-\lambda u^x)\Big(S^yu^z\left(1+\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)\\
&+\frac{u^yb^0}{u^0}(b^0u^z-B^z)-2B^y\left(u^0u^zb^0+\frac{1-(u^0)^2}{u^0}B^z\right)\Big)\Big\},
\end{aligned}
\tag{7.82}
$$

$$L_{m,B^z} = C_m \frac{\partial Z}{\partial B^z} + \frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2}\left\{(1-c_s^2)a(G+a^2)\left(\frac{S^zB^x}{\rho h} - 2B^zu^xu^0\right)\right.$$
$$+\left(\frac{-b^0S^z+B^2b^z}{\rho h\, u^0} + \big(2(u^0)^2-1\big)B^z\right)G(\lambda u^x - u^0) + b_t^0\left\{\frac{2B^x(G+a^2)}{u^0-\lambda u^x}\right.\Bigg($$
$$-\,2u^0B^z(\lambda+u^0a)+b^0au^z+\frac{S^z\mathcal{B}}{\rho h}\Bigg)+\left(\frac{b^0S^z-B^2b^z}{\rho h\, u^0} - \big(2(u^0)^2-1\big)B^z\right)$$
$$\left.\left.\cdot\,\chi\, G\right\}\right\} + g_2\left\{H\left((-2(u^0)^2B^z+b^0u^z)u^y+\frac{S^zb^y}{\rho h}\right)-(u^0-\lambda u^x)\Bigg(\right.$$
$$\left.S^zu^y\left(1+\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)+\frac{u^zb^0}{u^0}(b^0u^y-B^y)-2B^z\left(u^0u^yb^0+\frac{1-(u^0)^2}{u^0}B^y\right)\Bigg)\right\}+$$
$$g_1\left\{H\left(-2(u^0)^2B^zu^z+b^0(1+u^zu^z)+\frac{S^zb^z}{\rho h}\right)-(u^0-\lambda u^x)\Bigg(Eu^0\right.$$
$$\left.+\,S^zu^z\left(1+\frac{\mathbf{b}^2}{\rho h}\right)+\frac{u^zb^0}{u^0}(b^0u^z-B^z)-2B^z\left(u^0u^zb^0+\frac{1-(u^0)^2}{u^0}B^z\right)\Bigg)\right\}. \quad (7.83)$$

La propuesta de renormalización que hacemos para estos autovectores en el caso de la degeneración de tipo II es la que sigue. Para el autovector magnetosónico cuyo autovalor correspondiente sea el más cercano al autovalor de Alfvén, proponemos dividir por $\mid \mathbf{b}_t \mid$. Así, deberemos realizar las siguientes sustituciones en las componentes del autovector:

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} \longrightarrow \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2-(G+a^2)c_s^2}, \qquad b_t^0 \longrightarrow \frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \quad (7.84)$$

$$g_1 \longrightarrow \frac{g_1}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \qquad g_2 \longrightarrow \frac{g_2}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \quad (7.85)$$

donde las expresiones que debemos usar en la renormalización, se encuentran definidas (7.63) y (7.64).

Para el otro autovector, proponemos dividir por

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} = \frac{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2G}{G(G+a^2)c_s^2}. \quad (7.86)$$

Así, deberemos hacer las siguientes sustituciones en las expresiones de las componentes

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} \longrightarrow 1, \qquad b_t^0 \longrightarrow \frac{b_t^0G(G+a^2)c_s^2}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2G}, \quad (7.87)$$

$$g_1 \longrightarrow \frac{g_1G(G+a^2)c_s^2}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2G}, \qquad g_2 \longrightarrow \frac{g_2G(G+a^2)c_s^2}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2G}, \quad (7.88)$$

donde las expresiones que debemos usar en la renormalición se encuentran en (7.73) y (7.74).

Capítulo 8

Un código numérico para RMHD basado en técnicas HRSC

En este capítulo vamos a describir los ingredientes fundamentales del código numérico para RMHD, basado en las llamadas técnicas de alta resolución de captura de choques, que hemos desarrollado. En la primera sección resumiremos los conceptos básicos de este tipo de técnicas y su aplicación a la magnetohidrodinámica relativista. A continuación, nos centraremos en la descripción de los elementos del código numérico, comenzando por el cálculo de los flujos numéricos, tanto para las variables hidrodinámicas como para las componentes del campo magnético. En una segunda parte del capítulo, analizaremos diversos tests en una y dos dimensiones espaciales. Finalmente describiremos los resultados obtenidos en una aplicación sencilla para el estudio de chorros relativistas magnetizados.

El código numérico descansa en una discretización conservativa de las ecuaciones. El ingrediente más original es el uso de un *resolvedor de Riemann aproximado tipo Roe* basado en la descomposición espectral renormalizada presentada en los capítulos precedentes de este trabajo. Junto con dicho resolvedor, y a efectos de comparación, se ha programado también un resolvedor más sencillo (HLL).

El código resuelve las ecuaciones de la RMHD para un fluido magnetizado relativista caracterizado por las densidades de masa y energía interna y campos tridimensionales de velocidades y magnético, sobre un dominio espacial bidimensional (aproximación 2.5D). La implementación actual del código, permite el uso de coordenadas cartesianas (x, y, z) y cilíndricas (r, ϕ, z) asumiendo, en este último caso dependencia en r y z.

8.1 MHD relativista y técnicas HRSC

Procedimientos analíticos para la obtención de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sólo existen en ciertas situaciones particulares, por lo que se recurre a métodos de resolución numéricos (aproximados). Los métodos de alta resolución de captura de choques (métodos HRSC, del inglés *high-resolution shock-capturing methods*; ver, por ejemplo, LeVeque 1992) están especialmente diseñados para describir correctamente las soluciones de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación (como las ecuaciones de la hidrodinámica o magnetohidrodinámica clásicas y relativistas), que pueden desarrollar discontinuidades a partir de datos iniciales suaves. Estos métodos se basan en la discretización de las ecuaciones en su forma conservativa y la utilización de la información característica del sistema.

En la Sección 8.1.1 se introducirán los conceptos e ingredientes básicos de las técnicas HRSC. En la siguiente sección, haremos un breve repaso histórico de los esfuerzos, problemas y principales logros en la utilización de las técnicas HRSC en el contexto de la MHD y RMHD.

8.1.1 Introducción a las técnicas HRSC

Para simplificar la notación nos restringiremos formalmente al caso de una ecuación escalar en una dimensión espacial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{8.1}$$

con la condición inicial $u(x, t = 0) = u_0(x)$.

En el contexto de los métodos en diferencias finitas, la ecuación (8.1) se resuelve en una malla numérica espacio-temporal (x_i, t^n) con

$$x_j = (j - 1/2)\Delta x, \qquad j = 1, 2, ... \qquad \text{y} \qquad t^n = n\Delta t, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{8.2}$$

donde Δt y Δx son el paso temporal y el tamaño de celda, respectivamente. En cada una de las celdas numéricas se definen las cantidades u_j^n, que pueden interpretarse como una aproximación del valor promedio en la celda

$$u_j^n \simeq \bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n)\, dx. \tag{8.3}$$

Las soluciones clásicas del sistema de ecuaciones diferenciales (que no siempre existen) son aquellas que son C^1. Se define una solución débil como aquella que es solución clásica en las regiones donde es C^1 y que en los puntos donde no es C^1 cumple las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot

$$f(u_R) - f(u_L) = s(u_R - u_L) \tag{8.4}$$

donde s es la velocidad de propagación de la discontinuidad y u_R y u_L son los estados a derecha e izquierda, respectivamente, de la discontinuidad.

Las soluciones débiles tienen el problema de que pueden ser no físicas. Las soluciones físicas son aquellas que corresponden al límite $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) de u_ε, solución de la ecuación

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial^2 x}. \tag{8.5}$$

Podemos caracterizar estas soluciones por la llamada condición entrópica, que para fluidos señala que la entropía de un fluido debe crecer al atravesar una discontinuidad. Para el caso escalar, Oleinik (1959) demostró que las soluciones físicamente relevantes cumplen

$$\frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \tag{8.6}$$

para todo u entre u_R y u_L. La extensión de este resultado a sistemas de leyes de conservación fue desarrollada por Lax (1972).

Un teorema debido a Lax y Wendroff (Lax y Wendroff 1960), demuestra que los esquemas numéricos basados en una discretización conservativa de las ecuaciones, en caso de converger numéricamente, lo hacen a una solución débil del sistema original de ecuaciones. La convergencia bajo refinamiento de malla implica que el error global $\| E_{\Delta x} \|$, definido como

$$\| E_{\Delta x} \| = \Delta x \sum_j \mid \bar{u}_j^n - u_j^n \mid, \tag{8.7}$$

tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$.

Consistentemente con la ley de conservación, un esquema numérico se dice conservativo cuando se escribe en la forma

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}(u_{j-r}^n, u_{j-r+1}^n, ..., u_{j+q}^n) - \hat{f}(u_{j-r-1}^n, u_{j-r}^n, ..., u_{j+q+1}^n)\right), \tag{8.8}$$

donde q y r son enteros positivos y $\hat{f}$ es una función, el flujo numérico, que verifica $\hat{f}(u, u, ..u) = f(u)$.

El anteriormente citado teorema de Lax-Wendroff no establece, sin embargo, bajo qué condiciones el método es convergente. En el contexto de asegurar la convergencia, la *estabilidad de la variación total* de la solución ha probado ser un criterio sólido aunque teóricamente restringido a leyes escalares. La variación total de la solución en un cierto instante t^n se define como

$$\mathrm{TV}(u^n) = \sum_0^{+\infty} \mid u_{j+1}^n - u_j^n \mid . \tag{8.9}$$

Se dice que un esquema numérico es TV-estable si la cantidad $\mathrm{TV}(u^n)$ está acotada por el dato inicial para todo t^n. Para leyes de conservación escalares, escritas en forma conservativa, se demuestra que la TV-estabilidad es una condición suficiente de convergencia (LeVeque 1992). Debido a este resultado, la investigación se ha dirigido hacia el desarrollo de métodos numéricos de alto orden, en forma conservativa, los cuales satisfagan la condición de TV-estabilidad. La forma conservativa se obtiene a partir de la forma integral del sistema de ecuaciones. Integrando la ecuación diferencial en un dominio $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ y comparando con la ecuación (8.8), se llega a la conclusión que el flujo numérico $\bar{f}$ que aparece en (8.8) es una aproximación al promedio temporal del flujo que atraviesa la interfase entre dos celdas numéricas

$$\bar{f}_{j+1/2} \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t))\, dt. \tag{8.10}$$

Los flujos numéricos se pueden obtener calculando de forma exacta o aproximada el flujo que se establecería entre las dos celdas numéricas considerando que en el instante inicial los estados en cada punto de la celda numérica son constantes y que la interfase entre las celdas marcaría la discontinuidad entre los estados, es decir resolviendo el llamado problema de Riemann en cada interfase de la malla. Los métodos numéricos basados en esta estrategia reciben el nombre de *métodos tipo Godunov* en honor de K.S. Godunov quien la introdujo en el marco de las ecuaciones de la dinámica de fluidos perfectos en 1959 (Godunov 1959). En la actualidad, el desarrollo de *resolvedores del problema de Riemann* constituye por sí mismo una disciplina dentro del análisis numérico (ver, por ejemplo, Toro 1997). La disipación numérica necesaria para estabilizar el algoritmo a través de discontinuidades puede introducirse también añadiendo términos disipativos conservativos locales a métodos en diferencias finitas *estándar*. Esta es el enfoque seguido en los llamados *métodos simétricos* (véase, por ejemplo, Davis 1984, Roe 1984, Yee 1987 y Liu y Osher 1998).

La precisión de alto orden se obtiene normalmente usando funciones polinómicas conservativas para interpolar la solución aproximada dentro de las celdas numéricas. La idea es producir estados a la izquierda y a la derecha de cada interfase más precisos sustituyendo los valores medios, u_j^n (que solo proporcionan precisión de primer orden), por valores más próximos al flujo real en las interfases, $u^L_{j+1/2}$, $u^R_{j+1/2}$). Esta el proceso de interpolación debe preservar la TV-estabilidad, cosa que se logra usando algoritmos monótonos.

Se dice que un método es TVD (del inglés *total variation dimishing scheme*) si la variación total de una cualquier solución decrece con el tiempo. Obviamente, los esquemas TVD son TV-estables. El primer esquema de alto orden TVD fue desarrollado por van Leer (1977), quien obtuvo un esquema de segundo orden usando una interpolación en las celdas numéricas. La utilización de parábolas monótonas para obtener mayor precisición dió lugar al desarrollo de un esquema de tercer orden, el método PPM (de *piecewise parabolic method*) desarrollado por Colella y Woodward (1984). La propiedad TVD, aunque asegura la TV-estabilidad, puede ser demasiado restricitiva. De hecho los métodos TVD reducen su precisión hasta primer orden en los extremos. Por ello, se han desarrollado métodos de reconstrucción alternativos, donde se permiten incrementos de la variación total. Este es el caso de los esquemas TVB (*total* *variation bounded*, esquemas de variación acotada), entre los que se encuentran los métodos ENO (*essential non oscillatory*; Shu y Osher 1989) o el método PHM (*piecewise hyperbolic method*; Marquina 1994).

La precisión de alto orden en el avance temporal se puede conseguir utilizando, por ejemplo, algoritmos de Runge-Kutta que preservan la propiedad TVD en cada subpaso (Shu y Osher 1988).

8.1.2 Técnicas HRSC en MHD clásica y relativista

El éxito de los esquemas HRSC en hidrodinámica (clásica y relativista) ha propiciado su aplicación a la MHD y, más recientemente, a la RMHD. La principal diferencia cualitativa entre la hidrodinámica y la magnetohidrodinámica radica en la adición en ésta última de la ecuación de inducción

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{8.11}$$

y de la condición de divergencia nula para el campo magnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{8.12}$$

Esta última ecuación rompe formalmente el carácter conservativo del sistema de ecuaciones, aunque en el caso unidimensional dicho carácter se recupera. Brio y Wu (1988) se aprovecharon precisamente de esta circunstancia para extender las técnicas HRSC basadas en resolvedores de Riemann aproximados a la MHD. Para ello tuvieron que renormalizar los autovectores de la MHD para poderlos utilizar en los casos de degeneración. Muchos trabajos posteriores han ahondado en esta línea de trabajo. Dai y Woodward (1994) adaptaron el esquema de reconstrucción PPM para la MHD. Zachary et al. (1994), Ryu y Jones (1995), Roe y Balsara (1996), etc., han implementado métodos TVD usando diversos resolvedores de Riemann.

La condición de divergencia nula adquiere mayor importancia al considerar la extensión multidimensional. No es únicamente la necesidad de satisfacer de forma más o menos precisa una condición matemática impuesta al sistema, sino el hecho de que, de no cumplirse ésta, los resultados incluirán efectos no físicos, concretamente aceleraciones a lo largo de las líneas de campo magnético. Con objeto de forzar el cumplimiento de la condición de divergencia nula para el campo magnético se han desarrollado diferentes tipos de métodos: método de las *ocho ondas*, *transporte restringido* (CT, del inglés *constrained transport*), esquemas de *proyección*, métodos basados en el uso del vector potencial, etc. Un resumen actualizado de las tres primeras estrategias puede encontrarse en Tóth (2000). En Evans y Hawley (1988) se discuten las limitaciones de la cuarta. En nuestras aplicaciones numéricas hemos utilizado la técnica CT, originalmente desarrollada por Evans y Hawley (1988). El método consiste en una discretización del campo magnético en las interfases que garantiza la conservación del valor inicial de $\nabla \cdot \mathbf{B}$ en cada celda numérica, al nivel de precisión numérica correspondiente al error de redondeo. En la actualidad, existen diversas prescripciones para el cálculo correcto de los flujos asociados al campo magnético para algoritmos basados en resolvedores de Riemann (Dai y Woodward 1998, Ryu el al. 1998, Balsara y Spicer 1999).

En el contexto de la RMHD, los problemas derivados de la inclusión de la ecuación de inducción y de la condición de divergencia nula son los mismos que en MHD, no en vano tenemos las mismas ecuaciones, y las estrategias para solucionarlos son las que acabamos de citar. De hecho los mayores problemas que se encuentran al abordar la extensión de las técnicas HRSC basadas en resolvedores de Riemann a la RMHD provienen del hecho de la falta de un procedimiento de renormalización de autovectores similar al realizado por Brio y Wu (1988) en el caso clásico. Uno de los objetivos principales de la investigación que ha dado lugar a esta Tesis Doctoral ha sido, precisamente, el desarrollar dicho procedimiento de renormalización (véanse los Capítulos 5, 6 y 7).

Además de los problemas ya referidos sobre la carencia de un conjunto de autovectores renormalizados, el mayor acoplamiento de las ecuaciones de la RMHD redunda en una menor eficacia de los esquemas usados. Aún así, en los últimos años se ha realizado un importante esfuerzo en el desarrollo de código para la RMHD basados en técnicas HRSC. Resumiendo brevemente estos esfuerzos, destacaremos el artículo de Komissarov (1999a), en el cual además de un profundo estudio de la estructura característica de la RMHD, se describen las líneas maestras de un código numérico multimensional HRSC, que aunque muy difusivo, ha demostrado ser robusto y fiable, como podemos observar en las simulaciones de chorros relativistas magnetizados (Komissarov 1999b) o de magnetosferas de púlsares (Komissarov y Lyubarsky 2003).

El siguiente trabajo a destacar es el realizado por Balsara (2001). Este trabajo, aunque reducido al caso unidimensional, presenta importantes novedades como es el intento de renormalización de los autovectores a derechas. Posiblemente la aportación más interesante del trabajo sean las propuestas de tests numéricos y su presentación que permiten una rápida comparación con otros códigos, aunque por desgracia ninguno de los tests propuestos corresponden a casos degenerados.

Otro trabajo destacable en el esfuerzo de obtener una descomposición espectral de las matrices jacobianas de la RMHD apta para su empleo en resolvedores de Riemann, es el de Koldoba et al. (2002). Esta descomposición proporciona una expresión similar a la que hemos deducido por otros medios para el autovector de Alfvén en el sistema de Anile. La expresión que dan para los vectores magnetosónicos es similar a la nuestra aunque difiere en la normalización usada, estando inspirada la de Koldoba et al. (2002) en el trabajo de Brio y Wu (1988) y la nuestra, en el análisis geométrico de los autovectores y de las ecuaciones características. Lamentablemente, no proporcionan el paso al sistema de variables conservadas, con lo cual no es posible a priori su uso en los esquemas generales basados en resolvedores de Riemann.

El trabajo de Del Zanna et al. (2002), elude el problema de no contar con una descomposición espectral adecuada para su utilización en resolvedores de Riemann utilizando dos esquemas para el cálculo de flujos (*local Lax-Friedrichs* y *HLL*; ver detalles en Del Zanna et al. 2002) que únicamente necesitan conocer los autovalores. Estos dos esquemas aunque son más difusivos que los basados en resolvedores de Riemann más complejos, son combinados con procedimientos de reconstruccción ENO de tercer orden, obtiendo muy buenos resultados.

En el campo de la GRMHD debemos destacar los trabajos de Koide et al. (1998, 1999, 2000, 2002) y Koide (2003) en el contexto de la formación de chorros relativistas y que se basan en la utilización de un método simétrico. Aunque los resultados distan mucho de ser definitivos y muestran numerosas limitaciones (ver, por ejemplo, Komissarov 2004) se trata de trabajos pioneros que se han convertido en un referente fundamental en el marco de la GRMHD numérica.

Siguiendo en el marco de la GRMHD, el panorama actual se completa con las contribuciones de De Villiers y Hawley (2003a), que desarrollan un código numérico basado en técnicas de viscosidad artificial, Gammie et al. (2003) con su código HARM, que utiliza el resolvedor HLL, y recientemente, Komissarov (2004), que ha extendido su código RMHD a GRMHD.

8.2 Discretización de las ecuaciones

De forma genérica, y sin explicitar el algoritmo de avance temporal, la discretización conservativa de las ecuaciones de la RMHD conduce al sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} &= \frac{1}{\Delta V_{i,j}}\left\{\Delta S^1_{i+1/2,j}\hat{\mathbf{F}}^1_{i+1/2,j} - \Delta S^1_{i-1/2,j}\hat{\mathbf{F}}^1_{i-1/2,j}\right\} \\ &+ \frac{1}{\Delta V_{i,j}}\left\{\Delta S^2_{i,j+1/2}\hat{\mathbf{F}}^2_{i,j+1/2} - \Delta S^2_{i,j-1/2}\hat{\mathbf{F}}^2_{i,j-1/2}\right\} + \mathbf{S}_{i,j}, \end{aligned} \tag{8.13}$$

donde los elementos de volumen y área se corresponden con

$$\Delta V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j \quad , \quad \Delta S^1_{i,j} = \Delta y_j \quad , \quad \Delta S^2_{i,j} = \Delta x_i, \tag{8.14}$$

en coordenadas cartesianas, y con

$$\Delta V_{i,j} = \pi \Delta r_i^2 \Delta z_j \quad , \quad \Delta S^1_{i,j} = 2\pi r_i \Delta z_j \quad , \quad \Delta S^2_{i,j} = \pi \Delta r_i^2, \tag{8.15}$$

en coordenadas cilíndricas.

En la expresión (8.13) las cantidades $\mathbf{U}_{i,j}$ y $\mathbf{S}_{i,j}$ representan aproximaciones a los valores medios de las densidades de las variables conservadas y de los términos fuente en las celdas numéricas. Análogamente, las cantidades $\hat{\mathbf{F}}^1_{i+1/2,j}$ y $\hat{\mathbf{F}}^2_{i,j+1/2}$ son los flujos numéricos, aproximaciones a los flujos a través de las correspondientes interfases numéricas. En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{U}_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta V_{i,j}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{U}(x,y,t)\, dx\, dy, \tag{8.16}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^1_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta S^1_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}^{\mathbf{x}}(x_{i+1/2}, y, t)\, dy, \tag{8.17}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^2_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta S^2_{i,j}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{F}^{\mathbf{y}}(x, y_{j+1/2}, t)\, dx, \tag{8.18}$$

$$\mathbf{S}_{i,j} = 0, \tag{8.19}$$

donde las funciones $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}^{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{F}^{\mathbf{y}}$ están definidas en el Capítulo 4 (Sección 4.2).

En coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{U}_{i,j} \approx \frac{2\pi}{\Delta V_{i,j}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \mathbf{U}(r, z, t)\, rdr\, dz, \tag{8.20}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^1_{i+1/2,j} \approx \frac{2\pi}{\Delta S^1_{i,j}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \mathbf{F}^{\mathbf{r}}(r_{i+1/2}, z, t)\, dz, \tag{8.21}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^2_{i,j+1/2} \approx \frac{2\pi}{\Delta S^2_{i,j}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \mathbf{F}^{\mathbf{z}}(r, z_{j+1/2}, t)\, rdr, \tag{8.22}$$

$$\mathbf{S}_{i,j} \approx \frac{2\pi}{\Delta V_{i,j}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \mathbf{S}(r, z, t)\, rdr\, dz, \tag{8.23}$$

donde las funciones $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}^{\mathbf{r}}$, $\mathbf{F}^{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{S}$ están definidas en el Apéndice D.

8.3 Cálculo de flujos numéricos

En esta sección expondremos las dos estrategias utilizadas para el cálculo de los flujos numéricos.

8.3.1 Resolvedor tipo Roe

Los sistemas hiperbólicos lineales tienen solución exacta. El apéndice B se describe la obtención de dicha solución en el contexto de los esquemas conservativos, dando las expresiones de los flujos numéricos en términos de la descomposición espectral de la matriz jacobiana del sistema. Reciben el nombre de resolvedores *tipo Roe* aquellos que utilizan la solución exacta del problema de Riemann correspondiente a un sistema de ecuaciones lineal obtenido mediante una linealización local del sistema hiperbólico original para el cálculo de flujos entre celdas numéricas contiguas.

El resolvedor de Roe original (Roe 1981) se basa en la definición en cada interfase de una matriz constante, $\tilde{\mathbf{A}}$, a partir de la matriz jacobiana del sistema original, que verifica las siguientes propiedades:

1. $\tilde{\mathbf{A}}$ depende únicamente de los valores a izquierda y derecha de la interfase en cuestión, $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$.

2. $\tilde{\mathbf{A}}$ debe ser *consistente*, es decir $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \longrightarrow \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U})$, si $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R \longrightarrow \mathbf{U}$.

3. Para cualquier $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ se debe cumplir que:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) \tag{8.24}$$

4. Los autovectores de $\tilde{\mathbf{A}}$ deben ser linealmente independientes.

Las condiciones 1) y 2) son necesarias para recuperar el algoritmo lineal a partir de la versión no lineal. La condición 3), suponiendo que 4) se verifica asegura que el flujo numérico es exacto para el caso de discontinuidades (ondas de choque).

El trabajo de Roe (1981) presenta la forma de obtener la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ para las ecuaciones de la dinámica de fluidos clásica en términos de un cierto estado $\tilde{\mathbf{U}}$ promedio de los estados $\mathbf{U}_L$ y $\mathbf{U}_R$. A partir de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ y teniendo en cuenta la expresión del flujo numérico en sistemas hiperbólicos lineales, el flujo de Roe se calcula según

$$\widehat{\mathbf{F}}^{\mathrm{ROE}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \sum_p |\widetilde{\lambda}^{(p)}|\widetilde{\alpha}^{(p)}\widetilde{\mathbf{R}}^{(p)}\right], \tag{8.25}$$

con

$$\widetilde{\alpha}^{(p)} = \widetilde{\mathbf{L}}^{(p)} \cdot (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \tag{8.26}$$

donde $\widetilde{\lambda}^{(p)}$, $\widetilde{\mathbf{R}}^{(p)}$, y $\widetilde{\mathbf{L}}^{(p)}$ son los autovalores y los autovectores por la derecha y por la izquierda, respectivamente, de $\tilde{\mathbf{A}}$ (p toma todos los valores enteros desde 1 hasta el número de ecuaciones del sistema).

La linealización de Roe para el sistema de la hidrodinámica relativista en una métrica general fue desarrollada por Eulderink (Eulderink 1993, Eulderink y Mellema 1995). Desafortunadamente, no se conocen los estados promedio de Roe para la MHD (Brio y Wu 1988 obtienen la matriz de Roe en MHD clásica para el caso particular de un gas ideal con exponente adiabático igual a 2).

Si se relaja la condición 3) anterior, el resolvedor de Roe ya no es exacto para ondas de choque, pero sigue produciendo soluciones adecuadas. Por otro lado, las condiciones restantes son satisfechas por un gran número de de estados promedio. El trabajo de revisión de Martí y Müller (2003) recoge toda una serie de resolvedores basados en el de Roe que no satisfacen la condición 3) (resolvedores *tipo Roe*) en hidrodinámica relativista. En el caso del código para RMHD que estamos describiendo, hemos utilizado, tras explorar varias posibilidades sin encontrar diferencias significativas, un resolvedor tipo Roe basado en un estado promedio construido a partir de las variables físicas, según la media aritmética

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R}{2}, \tag{8.27}$$

donde $\mathbf{V} = (\rho, p, v^x, v^y, v^z, B^y, B^z)$. Para este estado promedio, $\tilde{\mathbf{V}}$, es para el que calculamos los autovalores $\widetilde{\lambda}^{(p)}$ y los respectivos autovectores en variables conservadas, $\widetilde{\mathbf{R}}^{(p)}$ y $\widetilde{\mathbf{L}}^{(p)}$), que usamos en el cálculo del flujo de Roe (8.25). En nuestra implementación del código para RMHD, los autovalores se obtienen a partir de las expresiones dadas en la sección (4.4), mientras que los autovectores por la derecha y por la izquierda son los obtenidos en los capítulos 6 y 7, respectivamente.

Un problema del resolvedor de Roe es que viola la condición de entropía para el caso de rarefacciones transónicas (Roe 1981, Van Leer 1984), estando asociado específicamente a los puntos de la onda de rarefacción donde el autovalor asociado cambia de signo. En estos casos el resolvedor de Roe converge a soluciones no físicas. Para prevenir este hecho, se debe incluir un término de viscosidad que actúa en estos puntos (ver Harten y Hyman 1983, Yee 1989). Para ello se modifica el flujo de Roe (8.25) de la siguiente forma

$$\widehat{\mathbf{F}}^{\mathrm{ROE}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \sum_p |\xi^{(p)}|\widetilde{\alpha}^{(p)}\widetilde{\mathbf{R}}^{(p)}\right], \tag{8.28}$$

donde se define

$$\xi^p = \max\Big(|\widetilde{\lambda}^p|,\, \delta^p\Big), \tag{8.29}$$

$$\delta^p = \max\Big(0,\, (\widetilde{\lambda}^p - \lambda_L^p),\, (\lambda_R^p - \widetilde{\lambda}^p)\Big) \tag{8.30}$$

siendo λ_L^p y λ_R^p los autovalores asociados a los estados izquierda y derecha, respectivamente.

8.3.2 Resolvedor HLL

En el resolvedor de Roe (y más en general, en los resolvedores tipo Roe), la solución exacta del problema de Riemann para las ecuaciones de la hidrodinámica consistente en cuatro estados constantes separados por ondas simples (ondas de choque o rarefacciones y una discontinuidad de contacto) se sustituye por cuatro estados constantes separados por discontinuidades lineales. El resolvedor de Riemann HLL (Harten et al. 1983) contiene sólo tres estados constantes,

$$\mathbf{U}^{\mathrm{HLL}}(x/t; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{para } x < \lambda_L t \\ \mathbf{U}_* & \text{para } \lambda_L t \le x \le \lambda_R t \\ \mathbf{U}_R & \text{para } x > \lambda_R t \end{cases}, \tag{8.31}$$

donde λ_L y λ_R representan, respectivamente, cotas a las velocidades mínima y máxima de las ondas que emanan de la discontinuidad inicial. El estado intermedio, $\mathbf{U}_*$, se determina requiriendo la consistencia de la solución aproximada del problema de Riemann con la forma integral de las ecuaciones de conservación. El flujo numérico asociado con dicha solución tiene la forma

$$\widehat{\mathbf{F}}^{\mathrm{HLL}} = \frac{\lambda^+\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \lambda^-\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \lambda^+\lambda^-(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{\lambda^+ - \lambda^-} \tag{8.32}$$

con

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_R^p, \lambda_L^p) \qquad \lambda^- = \min(0, \lambda_R^p, \lambda_L^p), \tag{8.33}$$

donde $\lambda_{L,R}^p$ denota el conjunto de autovalores de los estados izquierda y derecha, respectivamente.

El resolvedor HLL evita el uso de gran parte de la información característica del sistema de ecuaciones, lo que lo hace muy fácil de implementar. Por otro lado, el uso de cotas inferior y superior a las velocidades de propagación de las ondas hace que el resolvedor HLL sea más difusivo que los tipo Roe, por ejemplo. Sin embargo, la mayor difusividad del resolvedor lo hace también más robusto.

8.4 Preservación de la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

En la Sección 8.1.2 ya se discutió la necesidad de imponer la condición de divergencia nula para el campo magnético en el contexto de los algoritmos para la magnetohidrodinámica numérica y se enumeraron las estrategias más utilizadas. En la presente Sección describiremos el algoritmo implementado en nuestro código y que se basa en las técnicas de *transporte restringido* (del inglés, *constrained transport*, CT). Como ya se dijo en 8.1.2, la técnica CT fue desarrollada originalmente por Evans y Hawley (1988) y adaptada a las técnicas HRSC por diversos autores (Dai y Woodward 1998, Ryu et al. 1998, Balsara y Spicer 1999). Entre las ventajas de la técnica CT, además de su compatibilidad con los métodos HRSC, está la de su fácil implementación para mallas numéricas no cartesianas, una cuestión fundamental para un código relativista (especial y general).

Por claridad en la exposición (y para referirnos exactamente al algoritmo programado), nos restringiremos al caso en el que todas las variables del problema dependen exclusivamente de dos coordenadas espaciales y el tiempo (lo que se conoce como *aproximación 2,5D*). El algoritmo se basa en la integración de la ecuación de inducción

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{8.34}$$

sobre las caras (superficies coordenadas) de las celdas numéricas y la aplicación del teorema de Stokes.

Por comodidad definiremos $\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ y denotaremos por (x, y, z) las tres variables coordenadas, indistintamente cartesianas o cilíndricas. Finalmente, supondremos que todas las variables son independientes respecto de z (ϕ, en el caso de coordenadas cilíndricas).

Sea S una de las caras laterales de una cierta celda numérica. Integrando la ecuación de inducción sobre S

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{S}, \tag{8.35}$$

y aplicando el teorema de Stokes obtenemos,

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{l}, \tag{8.36}$$

donde ∂S denota la frontera de la superficie de integración. Sin pérdida de generalidad (y usando una notación adaptada a la del algoritmo en diferencias finitas) supondremos que dicha superficie viene caracterizada por un valor de x constante ($x_{i+1/2}$) y valores de y y z variando, respectivamente, entre $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ y $[z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$. Así,

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = & \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k-1/2}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot d\mathbf{l} \\ & - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}, z) \cdot d\mathbf{l},\end{aligned} \tag{8.37}$$

donde las integrales curvilíneas se efectuan a lo largo de las *aristas* (líneas coordenadas) de la celda numérica correspondiente.

Al no existir dependencia respecto a la variable z se tiene que

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k-1/2}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{8.38}$$

y, por tanto,

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot d\mathbf{l} - \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}, z) \cdot d\mathbf{l}. \tag{8.39}$$

Además, podemos extraer de las integrales las componentes de $\mathbf{\Omega}$

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} &= \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \cdot \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} d\mathbf{l} \quad - \mathbf{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}) \cdot \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} d\mathbf{l} \\ &= \Omega_{z\, i+1/2,j+1/2}\, \Delta z_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{z\, i+1/2,j-1/2}\, \Delta z_{i+1/2,j-1/2},\end{aligned} \tag{8.40}$$

donde Ω_z es la componente z de $\mathbf{\Omega}$ y Δz, la longitud de arco de la arista correspondiente, y donde se han definido $\Omega_{z\, i+1/2,j\pm1/2} = \Omega_z(x_{i+1/2}, y_{j\pm1/2})$, $\Delta z_{i+1/2,j\pm1/2} = \Delta z(x_{i+1/2}, y_{j\pm1/2})$.

Finalmente, para una malla numérica fija (es decir, independiente del tiempo) el orden de las operaciones de derivación temporal e integración sobre la superficie puede invertirse, de forma que la expresión anterior puede utilizarse para avanzar el valor medio del campo magnético sobre la superficie S a lo largo del tiempo. Efectivamente, si definimos

$$B_{x\, i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta S_{i+1/2,j}} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{8.41}$$

Figura 8.1: Esquema de la celda numérica (i, j) que muestra la definición de las componentes del campo magnético y los flujos numéricos en las interfases.

tenemos que

$$\frac{dB_{x\,i+1/2,j}}{dt} = \frac{1}{\Delta S_{i+1/2,j}} \big(\Omega_{z\,i+1/2,j+1/2} \Delta z_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{z\,i+1/2,j-1/2} \Delta z_{i+1/2,j-1/2}\big). \tag{8.42}$$

En las dos expresiones anteriores, $\Delta S_{i+1/2,j}$ es el área de la superficie correspondien te, S.

Repitiendo el mismo proceso para el campo magnético promediado sobre una superficie centrada en $y = y_{j+1/2}$ y con x y z variando, respectivamente, entre $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ y $[z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$,

$$\frac{dB_{y\,i,j+1/2}}{dt} = \frac{1}{\Delta S_{i,j+1/2}} \big(\Omega_{z\,i+1/2,j+1/2} \Delta z_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{z\,i-1/2,j+1/2} \Delta z_{i-1/2,j+1/2}\big). \tag{8.43}$$

Para el caso de coordenadas cartesianas y una malla equiespaciada tenemos, una vez simplificados los factores geométricos,

$$\frac{dB_{x\,i+1/2,j}}{dt} = \frac{1}{\Delta y_j} \left(\Omega_{z\,i+1/2,j+1/2} - \Omega_{z\,i+1/2,j-1/2} \right). \tag{8.44}$$

$$\frac{dB_{y\,i,j+1/2}}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i} \left(\Omega_{z\,i+1/2,j+1/2} - \Omega_{z\,i-1/2,j+1/2} \right). \tag{8.45}$$

Como puede verse con facilidad, el algoritmo de avance del campo magnético promedio sobre las interfases numéricas así definido verifica el que

$$\frac{d}{dt}\int_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV = 0, \tag{8.46}$$

donde la integral se extiende al volumen de la celda numérica correspondiente, con lo que un campo magnético con divergencia nula mantiene su carácter a lo largo de la evolución.

Falta, por último, determinar las cantidades Ω_z, definidas sobre los vértices comunes de cuatro celdas numéricas. Puesto que los valores de Ω_z en cada una de las celdas contiguas serán, en general, diferentes, tiene sentido estimar dichos valores a partir de los flujos numéricos de la ecuación de inducción definidos para los cuatro problemas de Riemann diferentes que se pueden plantear. Existen diversas prescripciones para calcular Ω_z (ver, por ejemplo, Tóth 2000). Nosotros hemos adoptado la dada por Ryu et al. (1998)

$$\Omega_{z\,i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2}(\widehat{F}_{y\,i+1,j+1/2}+\widehat{F}_{y\,i,j+1/2}) - \frac{1}{2}(\widehat{F}_{x\,i+1/2,j+1}+\widehat{F}_{x\,i+1/2,j}), \tag{8.47}$$

donde $\widehat{F}_{x\,i+1/2,j}$ y $\widehat{F}_{y\,i,j+1/2}$ se definen según

- Para el resolvedor HLL:

$$\widehat{F}_{x,i+1/2,j} = \frac{\lambda^+\big(B_y v_x\big)_L - \lambda^-\big(B_y v_x\big)_R + \lambda^+\lambda^-\big((B_y)_R - (B_y)_L\big)}{\lambda^+ - \lambda^-}$$

$$\widehat{F}_{y,i,j+1/2} = \frac{\lambda^+\big(B_x v_y\big)_L - \lambda^-\big(B_x v_y\big)_R + \lambda^+\lambda^-\big((B_x)_R - (B_x)_L\big)}{\lambda^+ - \lambda^-},$$

  donde $\lambda^\pm$ han sido definidos en (8.33) y los subíndices L y R hacen referencia a cantidades calculadas a izquierda y derecha, respectivamente, de la correspondiente interfase.

- Para el resolvedor tipo Roe:

$$\widehat{F}_{x,i+1/2,j} = \frac{1}{2}\big((B_y v_x)_L + (B_y v_x)_R - F^*_{i+1/2,j}\big), \tag{8.48}$$

$$\widehat{F}_{y,i,j+1/2} = \frac{1}{2}\big((B_x v_y)_L + (B_x v_y)_R - F^*_{i,j+1/2}\big), \tag{8.49}$$

  donde, de nuevo, los subíndices L y R hacen referencia a cantidades calculadas a izquierda y derecha, respectivamente, de la correspondiente interfase y F^* es el término de viscosidad numérica en la expresión del flujo de Roe, (8.28).

Figura 8.2: Ejemplo de las funciones determinante del jacobiano de $\mathbf{F}^x(\mathbf{U})$ y N_4 para el estado $\rho = 1.0$, $\epsilon = 10^{-3}$, $v^x = 9.995$, $v^y = 0.01$, $v^z = 0.0$, $B^x = 10^{-2}$, $B^y = 10^{-2}$ y $B^z = 0.0$. Los coeficientes de N_4 de este estado son $C_4 = 0.97895$, $C_3 = -3.9355$, $C_2 = 5.9329$, $C_1 = -3.9752$ y $C_0 = 0.99880$. Los rombos marcan los autovalores magnetosónicos y los triángulos, los autovalores de Alfvén y entrópico. Obsérvese que a pesar de los valores acotados de los coeficientes de la cuártica, cualquier valor entre 0.99465 y 0.99533 es solución con una precisión de $4\,10^{-15}$.

En el contexto de simulaciones 2.5D, la tercera componente del campo, B_z no tiene ninguna contribución a la divergencia del campo magnético al no tener dependencia en la coordenada z. Esto implica que esta componente del campo no precisa de un tratamiento diferente al del resto de variables conservadas, por lo que se avanza siguiendo el mismo esquema que ellas.

8.5 Cálculo de autovalores

Los dos resolvedores del problema de Riemann implementados en nuestro código utilizan los autovalores del sistema de ecuaciones (o, al menos, estimaciones de ellos). En la Sección 4.4 dedujimos la ecuación característica de la RMHD en el sistema de Anile que define dichos autovalores. Para los autovalores entrópico y de Alfvén, la resolución de la ecuación característica conduce a expresiones analíticas (ecuaciones (4.44) y (4.45), respectivamente) que pueden utilizarse directamente para calcularlos. Los autovalores magnetosónicos, por el contrario, son las raíces de una ecuación cuártica (4.41) que debe resolverse numéricamente.

Para resolver la cuártica empleamos un algoritmo de Newton-Raphson, con objeto de obtener los autovalores correspondientes a las ondas magnetosónicas rápidas usando como semilla la velocidad de la luz (+1 y −1, en las unidades del código numérico). Una vez hallados estos dos autovalores, la ecuación cuártica se reduce a una cuadrática que resolvemos analíticamente. Este método presenta problemas de precisión cuando la energía cinética del estado es elevada frente a las energías térmica y magnética. En estos casos, la ecuación a resolver (4.46), presenta regiones extensas en las que se hallarán las raíces con precisiones típicas del orden de 10^{-16} (véase el ejemplo de la Fig. 8.2). Esto implica que al trabajar en doble precisión, independientemente del método que empleemos para calcular las raíces, tendremos problemas derivados de la falta de precisión numérica. La solución analítica de la cuártica no representa una mejora debido al elevado número de operaciones y al cálculo de raíces cuadradas y cúbicas, que tienden a aumentar el error numérico.

El resolvedor HLL utiliza cotas inferior y superior a los autovalores de cada estado. Las expresiones

$$\lambda_0^{\pm} = \frac{u^0 u^x (1-\Omega) \pm \sqrt{\Omega\left(\Omega + (1-\Omega)((u^0)^2 - (u^x)^2)\right)}}{\Omega + (1-\Omega)(u^0)^2}, \tag{8.50}$$

donde $\Omega = c_s^2 + c_a^2 - c_a^2 c_s^2$ y $c_a^2 = \mathbf{b}^2/E$, representan cotas a dichos autovalores, tal y como se prueba en el Apéndice H. Esta aproximación fue utilizada con éxito por Leismann et al. (2005). Dado que al sustituir los autovalores por una cota en el resolvedor HLL, aumenta la viscosidad numérica del algoritmo, para poder comparar mejor las capacidades de los dos resolvedores implementados, HLL y tipo Roe, en todos los tests presentados en esta tesis se ha utilizado una versión del resolvedor HLL con autovalores analíticos.

8.6 Cálculo de autovectores

El trabajo analítico realizado en los Capítulos 5, 6 y 7 está motivado por su aplicación numérica. Como hemos visto, los flujos numéricos basados en el resolvedor de Roe implican el conocimiento de los autovectores a derechas e izquierdas en las variables conservadas.

En una primera versión del código numérico se programaron los autovectores a derechas en variables conservadas provenientes de realizar el producto de la matriz **M** (introducida en la Sección 5.1.2) por los autovectores correspondientes en el sistema de variables de Anile definidos en la Sección 4.5. Los autovectores a izquierdas eran obtenidos por inversión numérica de la matriz formada por los autovectores a derechas. Con esta implementación se comprobó que los autovectores obtenidos tenían errores numéricos muy importantes en los estados próximos a las degeneraciones. La Fig. 8.3 muestra el error en la condición de autovector para un par de autovectores a derechas e izquierdas calculados según el procedimiento que acabamos de describir. El error del vector magnetosónico a derechas es prácticamente nulo (error máquina) en todo el espacio de parámetros considerado, excepto a lo largo de la línea $B_x = 0$ (degeneración de tipo I), sobre la que el error relativo alcanza valores en torno al 25%. El error correspondiente al autovector de Alfvén a izquierdas se concentra a lo largo de la misma línea pero con valores mucho más pequeños ($\sim 10^{-11}$). Con respecto a los autovalres a izquierdas hay que destacar que el proceso de inversión numérica propaga el error (de unos tantos por cien) a regiones muy extensas del espacio de parámetros.

El resultado mostrado en la figura anterior puede compararse con el de la Fig. 8.4, en la que se muestra el error relativo para los mismos estados (incluyendo además el estado con $B^x = 0$, $B^y = 0$) de los mismos autovectores pero renormalizados, es decir calculados según el procedimiento descrito en los Capítulos 5, 6 y 7. En este caso, el error relativo máximo de los vectores magnetosónicos a derechas e izquierdas es mucho menor (del orden de 10^{-7}) y el de los vectores de Alfvén es el error máquina. El mayor error de los vectores magnetosónicos puede ser debido en parte al error producido en el cálculo numérico del autovalor magnetosónico.

Dada la dependencia del flujo de Roe con los autovectores a derechas e izquierdas, el error en la condición de autovector con y sin renormalización permite ya estimar la bondad de las dos aproximaciones en el cálculo de los flujos numéricos y, por tanto, la fiabilidad y robustez del código numérico. Sin embargo, la validez de ambas aproximaciones queda todavía más clara si analizamos el comportamiento de la función vectorial $\sum_p (\mathbf{L}^{(p)} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{R}^{(p)}$, directamente relacionada con el término de viscosidad numérica que aparece en el flujo de Roe. Las Figs. 8.5 y 8.6 muestran las componentes asociadas con las densidades de masa relativista y de momento en la dirección z de dicha función calculadas con los autovectores sin renormalizar y renormalizados, respectivamente. El comportamiento de las componentes para el caso de los autovectores sin renormalizar, Fig. 8.5, es catastrófico como cabía esperar del hecho de mezclar en una única expresión las componentes de los autovectores a derechas e izquierdas. Por el contrario, la Fig. 8.6 muestra un comportamiento suave.

El algoritmo con el que calculamos los flujos de Roe en el código RMHD se basa en los autovectores a derechas e izquierdas calculados según el procedimiento descrito en los Capítulos 5, 6 y 7.

8.7 Reconstrucción de variables

Con objeto de aumentar la precisión de los resultados sin incrementar de forma significativa el tiempo de cálculo, los métodos en diferencias finitas de alta resolución incorporan técnicas de reconstrucción de la solución en las celdas numéricas.

Como se dijo en la Sección 8.1.1, las técnicas de reconstrucción se basan en interpolaciones polinómicas en cada celda numérica de las variables o flujos. Para que el algoritmo resultante sea TV-estable, las interpolaciones entre

Figura 8.3: Errores relativos en la condición de autovector para el par de autovectores a derechas (R) y a izquierdas (L), asociados a un autovalor magnetosónico rápido (1) y uno de Alfvén (2), para una serie de estados con $\rho = 2.0$, $\epsilon = 0.1$, $v^x = -0.50$, $v^y = 0.50$,$v^z = 0.50$, $B^z = 0.0$, y con B^x y B^y barriendo un intervalo de valores entre -1 y -10^{-7} y entre 10^{-7} y 1 de forma exponencial, con 50 puntos en cada intervalo señalado. Los autovectores a derechas están sin renormalizar y los correspondientes autovectores a izquierdas se han calculado por inversión numérica de la matriz de vectores propios a derechas.

Figura 8.4: Errores relativos en la condición de autovector para el par de autovectores a derechas (R) y a izquierdas (L), asociados a un autovalor magnetosónico rápido (1) y uno de Alfvén (2), para los mismos estados de la Fig. 8.3, pero incluyendo el estado con $B^x = 0$, $B^y = 0$. Los autovectores están renormalizados según el procedimiento descrito en los capítulos 5, 6 y 7.

Figura 8.5: Logaritmo del valor absoluto de las componentes D y S^z de la función vectorial $\sum_p (\mathbf{L}^{(p)} \cdot \mathbf{U})\mathbf{R}^{(p)}$ con los autovectores a derechas sin renormalizar y los correspondientes autovectores a izquierdas calculados por inversión numérica de la matriz de vectores propios a derechas, para los mismos estados de la Fig. 8.3.

Figura 8.6: Componentes D y S^z de la función vectorial $\sum_p(\mathbf{L}^{(p)} \cdot \mathbf{U})\mathbf{R}^{(p)}$ con los autovectores renormalizados según el procedimiento descrito en los capítulos 5, 6 y 7, para los mismos estados de la Fig. 8.3.

celdas contiguas se *limitan* con objeto de que las funciones reconstruidas no incrementen el número de extremos de la solución original y, con ello, su *variación total*.

El método que hemos utilizado es una versión modificada del algoritmo *minmod* de interpolación lineal unidimensional desarrollado originalmente por van Leer (1977) y que proporciona un algoritmo de segundo orden espacial. Si V es una de las variables a reconstruir y V_i su valor medio en la celda i (con coordenada $x = x_i$), los valores de V a izquierda y derecha de la interfase numérica $i + 1/2$, $V_{L\,i+1/2}$, $V_{R\,i+1/2}$, respectivamente, se calculan según

$$V_{L\,i+1/2} = V_i + \Delta_i \big(x_{i+1/2} - x_i\big) \tag{8.51}$$

$$V_{R\,i+1/2} = V_{i+1} + \Delta_{i+1} \big(x_{i+1/2} - x_{i+1}\big), \tag{8.52}$$

con

$$\Delta_i = minmod \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i}, \frac{V_i - V_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \tag{8.53}$$

y donde la función *minmod* se define como:

$$minmod(a, b) \begin{cases} a & \text{si } \mid a \mid < \mid b \mid, \quad \text{con} \quad ab > 0 \\ b & \text{si } \mid a \mid > \mid b \mid, \quad \text{con} \quad ab > 0 \\ 0 & \text{si } \quad ab < 0 \end{cases} \tag{8.54}$$

El algoritmo de interpolación que acabamos de describir se aplica a lo largo de cada una de las direcciones de integración. En la integración a lo largo del eje x, las variables a reconstruir son $(\rho, p, u^x, u^y, u^z, B^y, B^z)$. La reconstrucción de B_x a lo largo de la integración en x es innecesaria ya que el campo magnético está definido originalmente sobre las interfases.

En los tests con condiciones iniciales más extremas (entre los que se encuentran los tests multidimensionales descritos en la Sección 8.11, en lugar de ρ y p hemos reconstruido sus logaritmos. En los casos con grandes saltos en la densidad o la presión y, especialmente en aquellas situaciones donde dichos saltos se combinan con magnetizaciones muy grandes, la interpolación logarítmica, al reducir la magnitud de los saltos y proporcionar valores reconstruidos más próximos al mínimo, proporciona flujos numéricos más acordes con los valores extremos (por pequeños) de dichas celdas, lo que ha dotado al código de una mayor robustez. Además, en estos casos, hemos limitado el valor absoluto de la pendiente a 2 en aquellas zonas en las que el cociente entre la presión magnética y la térmica es mayor que 4.

8.8 Avance temporal

El avance temporal se ha efectuado utilizando algoritmos Runge-Kutta que preservan la propiedad TVD del método (Shu y Osher 1988). Se han programado algoritmos Runge-Kutta de segundo y tercer orden. Se detallan a continuación los algoritmos para el caso de una dimensión espacial sin términos fuente. Si

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{1}{\Delta x}(\hat{\mathbf{F}}^n_{j+1/2} - \hat{\mathbf{F}}^n_{j-1/2}) \ \ (\equiv \mathbf{L}(\mathbf{U}^n)) \tag{8.55}$$

representa el algoritmo semidiscreto para avanzar la solución desde el instante t^n al instante t^{n+1}, donde los $\hat{\mathbf{F}}^n_{j+1/2}$ son los flujos numéricos obtenidos a partir de la solución reconstruida en el instante t^n, los algoritmos de Runge-Kutta utilizados son los siguientes.

1. Runge-Kutta de segundo orden:

$$\mathbf{U}^{n+1/2}_j = \mathbf{U}^n_j + \Delta t L(\mathbf{U}^n) \tag{8.56}$$

$$\mathbf{U}^{n+1}_j = \frac{1}{2}\mathbf{U}^n_j + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{n+1/2}_j + \frac{1}{2}\Delta t\mathbf{L}(\mathbf{U}^{n+1/2}) \tag{8.57}$$

2. Runge-Kutta de tercer orden:

$$\mathbf{U}^*_j = \mathbf{U}^n_j + \Delta t\mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \tag{8.58}$$

$$\mathbf{U}^{n+1/2}_j = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n_j + \frac{1}{4}\mathbf{U}^*_j + \frac{1}{4}\Delta t\mathbf{L}(\mathbf{U}^*) \tag{8.59}$$

$$\mathbf{U}^{n+1}_j = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n_j + \frac{2}{3}\mathbf{U}^{n+1/2}_j + \frac{2}{3}\Delta t\mathbf{L}(\mathbf{U}^{n+1/2}). \tag{8.60}$$

En las expresiones anteriores, Δt es el paso de tiempo que debe satisfacer la condición de Courant, como corresponde a cualquier esquema explícito. En general, los resultados obtenidos usando el algoritmo de tercer orden son equivalentes a los obtenidos con el de segundo para pasos de tiempo más pequeños. Esto ha hecho que en la práctica, se haya usado el esquema de segundo orden.

8.9 Recuperación de variables primitivas

El esquema numérico utilizado para resolver las ecuaciones de la RMHD permite obtener los valores de las variables conservadas **U** tras cada paso de tiempo. Sin embargo, una característica importante de la RMHD es que no existe una forma explícita de recuperar las variables primitivas $\mathbf{V} = (\rho, p, v^x, v^y, v^z, B^x, B^y, B^z)$ a partir del sistema de variables conservadas. Para poder obtener las variables primitivas de un determinado estado, conocidos los valores de las variables conservadas debemos proceder a la resolución numérica de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. En esta sección vamos a describir el procedimiento desarrollado para recuperar las variables primitivas tras cada paso de tiempo. Nuestro procedimiento es muy similar al de Komissarov (1999a) y Leismann et al. (2005). El artículo de Noble et al. (2006) analiza la eficiencia y robustez de hasta seis métodos de recuperación en el contexto de la magnetohidrodinámica en relatividad general.

La idea básica del procedimiento consiste en la resolución de un sistema de dos ecuaciones para el módulo de la densidad de momento, $\mathbf{S}^2 = S^i S_i$, y la densidad de energía total. A partir de la definición de S^i, (4.16), escribimos:

$$\mathbf{S}^2 = (\rho h + \mathbf{b}^2)^2 W^4 \mathbf{v}^2 + (b^0)^2 \left(\mathbf{b}^2 + (b^0)^2 - 2(\rho h + \mathbf{b}^2) W^2\right), \tag{8.61}$$

donde $\mathbf{v}^2 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Para la densidad de energía total tenemos

$$\tau = (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 - p - \frac{\mathbf{b}^2}{2} - (b^0)^2. \tag{8.62}$$

En las ecuaciones anteriores, podemos eliminar la dependencia en el cuadrivector campo magnético, $\mathbf{b}$, a partir de la relación entre su módulo y el del trivector campo magnético, $\mathbf{B}$, (4.134), y la relación

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = \rho h W b^0. \tag{8.63}$$

Con esto, las ecuaciones (8.61) y (8.62) se escriben

$$S^2 = (Z + B^2)^2 \frac{W^2 - 1}{W^2} - (2Z + B^2) \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{Z^2}, \tag{8.64}$$

donde hemos introducido, además, la definición $Z = \rho h W^2$, y

$$\tau = Z + B^2 - p - \frac{B^2}{2W^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{2Z^2}. \tag{8.65}$$

Las dos ecuaciones anteriores, junto con la definición de la densidad de masa relativista, ec. (4.15), y la definición de Z, forman un sistema de ecuaciones implícitas para las incógnitas ρ, p y W, suponiendo que la función $h = h(\rho, p)$ es conocida a través de la ecuación de estado. En nuestro código numérico para RMHD en relatividad restringida nos hemos limitado a una ecuación de estado de gas ideal, para la que

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \tag{8.66}$$

donde γ es el exponente adiabático. Para esta ecuación de estado, el término para la presión que aparece en la ecuación (8.65) se puede sustituir por

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Z - DW}{W^2}. \tag{8.67}$$

Tras esta sustitución, las ecuaciones (8.64) y (8.65) se pueden resolver como sistema para las incógnitas W y Z. Para ello, despejamos el factor de Lorentz W de ambas ecuaciones. A partir de (8.65) obtenemos

Figura 8.7: Panel izquierdo: funciones F (línea discontínua) y G (línea de puntos) para el estado $\rho = 1.0$, $\epsilon = 1.0$, $v^x = 0.99$, $v^y = 0.0$, $v^z = 0.0$, $B^x = 1.0$, $B^y = 1.0$, $B^z = 0.0$. Panel derecho: función resta $F - G$.

$$W = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} D - \left\{ \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} D \right)^2 - 4 \left(\tau - Z - \mathbf{B}^2 + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{2Z^2} \right) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} Z + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \right\}^{1/2} \right] \left[2 \left(\tau - Z - \mathbf{B}^2 + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{2Z^2} \right) \right]^{-1} \equiv F(Z; \mathbf{U}) \tag{8.68}$$

(correspondiente a la única raíz positiva de la ecuación cuadrática original) y a partir de (8.64),

$$W = \sqrt{\frac{(Z + \mathbf{B}^2)^2}{(Z + \mathbf{B}^2)^2 - \mathbf{S}^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2}{Z^2} (2Z + \mathbf{B}^2)}} \equiv G(Z; \mathbf{U}). \tag{8.69}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones anteriores y procedemos a la resolución numérica de la ecuación resultante por el método de la bisección. La Fig. 8.7 muestra la representación de las funciones F y G y su diferencia, $F - G$, para un estado particular.

Una vez obtenidos los valores para Z y W el resto de variables primitivas puede obtenerse de forma explícita.

8.10 Tests unidimensionales en coordenadas cartesianas

En esta sección vamos a mostrar los resultados obtenidos con nuestro código en la resolución de algunos problemas de Riemann unidimensionales. Los datos iniciales de los diferentes problemas se han escogido de entre los tests publicados por Balsara (2001) y Komissarov (1999a). Los datos iniciales correspondientes a los tests aparecen listados en la Tabla 1. En dicha tabla, no aparecen listados los valores iniciales de las velocidades tangenciales a la discontinuidad inicial por ser en todos los casos iguales a cero.

Test	ρ_L	ρ_R	p_L	p_R	v_L^x	v_R^x	B^x	B_L^y	B_R^y	B_L^z	B_R^z	γ
Ba1	1.0	0.125	1.0	0.1	0.0	0.0	0.5	1.0	-1.0	0.0	0.0	2.0
Ba3	1.0	1.0	10^3	0.1	0.0	0.0	10.0	7.0	0.7	7.0	0.7	4/3
Ba4	1.0	1.0	0.1	0.1	0.999	-0.999	10.0	7.0	-7.0	7.0	-7.0	5/3
Ko7	1.0	0.1	10^3	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4/3
Ko8	1.0	0.1	30.0	1.0	0.0	0.0	0.0	20.0	0.0	0.0	0.0	4/3

Los tests denominados como Ba1, Ba3 y Ba4 se corresponden con los tests numerados como 1, 3 y 4 en el artículo de Balsara (2001). Los tests Ko7 y Ko8 se corresponden con los discutidos en las secciones 6.7 (*shock-tube 1*) y 6.8 (*shock-tube 2*) del artículo de Komissarov (1999a).

Recientemente Giacomazzo y Rezzolla (2006) y Romero et al. (2005), estos últimos para una configuración particular del campo magnético, han obtenido soluciones analíticas para el problema de Riemann en RMHD. Sin embargo, en la discusión de los tests unidimensionales la discusión de nuestros resultados no se hará teniendo en cuenta la citada solución analítica.

8.10.1 El test Ba1

Los datos iniciales correspondientes a este test aparecen listados en la Tabla 1. Se trata de la extensión relativista de un test clásico propuesto originalmente por Brio y Wu (1988). La discontinuidad inicial se descompone en la siguiente estructura de ondas (de izquierda a derecha): una rarefacción rápida, una *onda compuesta*, una discontinuidad de contacto, un choque lento y una rarefacción rápida. La onda compuesta (que podemos describir en este caso como una onda de choque seguida de una rarefacción) contiene la transición de la componente transversal del campo magnético entre los valores iniciales (1 y -1). No se observa ninguna onda de Alfven propagándose hacia la derecha al no haber rotación del campo magnético a la derecha de la discontinuidad de contacto.

El test es sólo moderadamente relativista, desde el punto de vista cinemático (el factor de Lorentz del flujo alcanza un valor máximo en torno a 1.5), sin embargo, constituye un test interesante por la riqueza de estructuras y discontinuidades que desarrolla. Las Figs. 8.9 y 8.10 muestran los perfiles de diversas variables en un instante posterior a la ruptura de la discontinuidad inicial, obtenidos con dos versiones del código numérico usando los resolvedores HLL

Figura 8.8: Error L para el test Ba1 para las variables densidad de masa, presión térmica, componente de la velocidad en el eje x y componente del campo magnético en dirección y, para el resolvedor HLL (línea continua y cruces) y para el resolvedor tipo Roe (línea discontinua y asteriscos).

Figura 8.9: Test Ba1 realizado con el resolvedor HLL, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 1600 celdas numéricas y una CFL de 0.5.

Figura 8.10: Test Ba1 realizado con el resolvedor tipo Roe, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 1600 celdas numéricas y una CFL de 0.5.

y tipo Roe. Los perfiles son muy similares en ambos casos aunque se nota una menor difusión (menor número de puntos) en los perfiles obtenidos con el resolvedor tipo Roe.

8.10.2 El test Ba3

Este test (ver de nuevo la Tabla 1) se caracteriza por presentar un gran salto en la presión térmica (cuatro órdenes de magnitud) entre los estados izquierdo y derecho de la discontinuidad inicial. La ruptura de dicha discontinuidad produce una región estrecha de gran densidad propagándose a través del estado inicial derecho a velocidad supermagnetosónica, el equivalente a una onda de detonación. La estructura de ondas es, de izquierda a derecha: una rarefacción magnetosónica rápida, una rarefacción magnetosónica lenta, una discontinuidad de contacto, un choque magnetosónico lento y, finalmente, un choque magnetosónico rápido. La existencia de la velocidad de la luz como límite para las velocidades de propagación de las ondas es la responsable de la delgadez de la onda de detonación, cuya resolución supone un test severo para cualquier algoritmo numérico. La coplanariedad del campo magnético en los estados iniciales izquierdo y derecho explica la ausencia de ondas de Alfven.

Como se observa en las Figs 8.11 y 8.12, las soluciones numéricas obtenidas con los dos resolvedores son similares. La resolución de las discontinuidades involucra un número parecido de celdas en ambos casos. Además, los valores extremos de la densidad, el campo magnético transversal y la velocidad transversal en el frente de la onda de detonación (en las figuras, alrededor de la posición $x = 0.9$) son también parecidos. Comparando con las soluciones originales de Balsara (2001), vemos que en éstas últimas los valores extremos mencionados son mayores en valor absoluto. Sin embargo, tanto en nuestros resultados como en los cálculos originales de Balsara (2001), los estados constantes entre la discontinuidad de contacto, la onda magnetosónica lenta y la rápida, no llegan a resolverse.

8.10.3 El test Ba4

El dato inicial correspondiente a este test (ver Tabla 1) representa la colisión a velocides relativistas (el factor de Lorentz en el sistema de referencia fijo es 22.366) de dos medios homogéneos idénticos, con campos magnéticos transversales rotados 180 grados. La solución, simétrica respecto de la posición de la discontinuidad inicial, está formada por dos choques magnetosónicos rápidos y dos choques magnetosónicos lentos más internos, que se alejan de la posición de la colisión inicial. Los choques internos dejan tras de sí material con campo magnético nulo (choques *switch-off*).

Los paneles de las Figs. 8.9 y 8.14 representan diversas variables en un tiempo posterior a la colisión inicial de los dos fluidos magnetizados relativistas. La mayor difusión del resolvedor HLL queda reflejada en la mayor cantidad de puntos involucrados en la descripción de los choques (en especial los lentos) respecto

Figura 8.11: Test Ba3 realizado con el resolvedor HLL, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 1600 celdas numéricas y una CFL de 0.5. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

Figura 8.12: Test Ba3 realizado con el resolvedor tipo Roe, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 1600 celdas numéricas y una CFL de 0.5. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

Figura 8.13: Test Ba4 realizado con el resolvedor HLL, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 1600 celdas numéricas y una CFL de 0.5. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

Figura 8.14: Test Ba4 realizado con el resolvedor tipo Roe, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 1600 celdas numéricas y una CFL de 0.5. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

del resolvedor de tipo Roe. El otro resultado llamativo es la depresión de la densidad en el entorno de la colisión inicial. Este fenómeno (conocido como *sobrecalentamiento –overheating*) representa un problema tradicional para los métodos conservativos incluso en el caso de simulaciones puramente hidrodinámicas. De nuevo, la mayor disipación del resolvedor HLL frente al tipo Roe hace el problema menos dramático en el caso del primero. Finalmente, nuestros resultados son comparables a los obtenidos originalmente por Balsara (2001) y a los más recientes de Del Zanna et al. (2002), usando reconstrucción de segundo orden y resolvedor HLL.

8.10.4 El test Ko7

La propiedad más destacable del dato inicial correspondiente a este test (ver Tabla 1) es la ausencia de campo magnetico tangencial. Se trata, pues, de un dato inicial incluido en uno de los casos degenerados de la magnetohidrodinámica (degeneración II). El test pone a prueba, por tanto, la capacidad de nuestra propuesta de vectores propios renormalizados. Por lo demás, la evolución del dato inicial desarrolla una onda de detonación menos extrema que la producida en el test Ba3 (debido a la menor magnitud del salto en presión en este caso). Este problema ha sido propuesto por Komissarov (1999; ver tambieén erratum Komissarov 2002).

La degeneración del dato inicial conduce a una estrutura de ondas similar a la obtenida en el caso puramente hidrodinámico. La onda de detonación (una delgada capa de material denso) aparece limitada por una onda de choque y una discontinuidad de contacto. Al tiempo que la onda de detonación se desplaza hacia la derecha, una rarefacción recorre el estado a la izquierda de la discontinuidad inicial.

Las Figs. 8.15 y 8.16 representan diversas variables del problema en un momento de su evolución. En este caso, los dos resolvedores producen resultados con difusiones similares, como se deduce de los valores de la densidad en la onda de detonación (en torno a 0.65, aproximadamente un 76% del valor analítico). Este valor es también similar al obtenido por Komissarov (1999), aunque en este caso, el número de celdas involucrado en la transición de la onda de choque delantera es superior. Los resultados de Komissarov (1999) muestran también unas oscilaciones numéricas de gran amplitud en el factor de Lorentz del fluido en la onda de detonación. Nuestros resultados presentan unos perfiles limpios de dichas oscilaciones.

8.10.5 El test Ko8

Este test, cuyas condiciones iniciales aparecen recogidas en la Tabla 1, consiste en un estado con campo magnético puramente tangencial (degeneración I) situado a la derecha de un estado puramente hidrodinámico. El interés de este test radica, como en el caso del anterior Ko7, en probar la capacidad de nuestro resolvedor para abordar problemas que involucran estados degenerados (incluyendo estados puramente hidrodinámicos). La solución, que aparece en

Figura 8.15: Test Ko7 realizado con el resolvedor HLL, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 400 celdas numéricas y una CFL de 0.5. La discontinuidad inicial se sitúa en $x = 1.25$. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

Figura 8.16: Test Ko7 realizado con el resolvedor tipo Roe, reconstrucción *min-mod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 400 celdas numéricas y una CFL de 0.5. La discontinuidad inicial se sitúa en $x = 1.25$. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

las Figs. 8.17 y 8.18, contiene sólo tres ondas: una onda de rarefacción magnetosónica rápida, que se propaga a través del estado inicial izquierdo, una discontinuidad de contacto y un choque hidrodinámico que avanza sobre el estado inicial a la derecha. A juzgar por el valor para la densidad alcanzado en la onda de detonación (en torno a 0.6, un 93% del valor analítico), los dos resolvedores utilizados, HLL y tipo Roe, presentan una difusión similar y ligeramente inferior al algoritmo propuesto por Komissarov (1999).

8.10.6 Conclusiones

El análisis de los tests unidimensionales prueba el buen funcionamiento del algoritmo numérico propuesto tanto con el resolvedor HLL como con el de tipo Roe. Dicho buen funcionamiento se manifiesta en la ruptura correcta de las discontinuidades iniciales y la no generación de estados no físicos (si exceptuamos el *overheating*. Los resultados apuntan hacia una menor difusión del esquema numérico basado en el resolvedor de Roe, como era de esperar.

8.11 Tests bidimensionales en coordenadas cartesianas

En esta sección presentamos los resultados obtenidos en la simulación de tres problemas bidimensionales. Los dos primeros representan explosiones con simetría cilíndrica en un medio magnetizado con campo magnético homogéneo. Los datos iniciales están extraidos del artículo de Komissarov (1999). El tercer problema simula el movimiento oscilatorio de rotación de un cilindro *rígido* bajo la fuerza de tensión magnética. Los datos están extraidos del artículo de Del Zanna et al. (2002) y son una adaptación al caso relativista del test propuesto por Tóth (2000) en el marco de la MHD clásica. A pesar de que los resultados no pueden compararse con una solución analítica, los tests son muy interesantes, ya que involucran estados localmente degenerados, cuya descripción constituye un reto para nuestro reolvedor linealizado tipo Roe.

8.11.1 Explosiones cilíndricas en medios con campo magnético homogéneo

En ambos tests, una malla cartesiana equiespaciada describe la región cuadrada $[0, 12] \times [0, 12]$, en el plano xy, en cuyo centro se sitúa un cilindro de radio $r_c = 0.8$ de gas en reposo con una densidad de $\rho_c = 0.01$ y una presión térmica $p_c = 1.0$. En la zona de transición entre $0.8 < r < 1.0$ los valores de la presión y la densidad decaen exponencialmente hasta alcanzar los valores del medio externo, $\rho_e = 10^{-4}$, $p_e = 3 \cdot 10^{-5}$. El campo magnético inicial es uniforme y alineado según el eje x. En el primero de los tests (Ko2D1), $B_x = 0.01$, mientras que en el segundo, Ko2D2, $B_x = 0.1$. En ambos casos, la ecuación de estado que describe el fluido es la de un gas ideal con $\gamma = 4/3$.

Figura 8.17: Test Ko8 realizado con el resolvedor HLL, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 400 celdas numéricas y una CFL de 0.5. La discontinuidad inicial se sitúa en $x = 1.25$. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

Figura 8.18: Test Ko8 realizado con el resolvedor tipo Roe, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han utilizado 400 celdas numéricas y una CFL de 0.5. La discontinuidad inicial se sitúa en $x = 1.25$. El perfil de B_z (no mostrado) es idéntico al de B_y.

Las Figs. 8.19 y 8.20 muestran la distribución de las magnitudes relevantes en el instante $t = 4.0$ para el test Ko2D1, usando los resolvedores HLL y tipo Roe, respectivamente. Las Figs. (8.21) y (8.22) hacen lo propio con el segundo test, Ko2D2. Los correspondientes pies de figura contienen la información relativa al algoritmo numérico utilizado. La comparación con los resultados originales de Komissarov (1999) y los estudios de convergencia de la solución bajo refinamiento de malla, permite confiar en la verosimilitud de nuestros resultados. En el primero de los tests, la explosión inducida por la diferencia de presiones inicial mantiene prácticamente la simetría cilíndrica debido a que la fuerza de Lorentz que actúa sobre el fluido es muy pequeña. Se observa, pues, una onda de choque casi completamente circular que separa el medio externo no perturbado de una zona interna, en la que el fluido alcanza una velocidad máxima de expansión correspondiente a un factor de Lorentz 5.61. La expansión del gas tras la onda de choque provoca la rarificación de la región central. Se observa también el reforzamiento (en un factor casi 10) del campo magnético tras la onda de choque en las zonas donde no es ortogonal a la explosión. Los resultados obtenidos con los dos resolvedores son indistinguibles, al nivel de resolución de las figuras.

Los resultados correspondientes al test Ko2D2 son similares a los anteriores, sólo que ahora, la mayor intensidad del campo magnético produce una oposición efectiva a la expansión del gas. En este caso, se observan dos regiones, una exterior y otra interior en la que la expansión sigue siendo prácticamente radial. La región externa está formada por un choque delantero casi circular dado que la velocidad de expansión es muy próxima a la de la luz. La región interna es circular debido a la evacuación del campo magnético que reduce su evolución a la puramente hidrodinámica. Esta región está acotada por otro choque, en este caso reverso. Entre los dos choques citados, se observa otra discontinuidad, en cuya parte externa se va comprimiendo el campo magnético. El reforzamiento de la componente de campo magnético transversal a la expansión reduce la velocidad de ésta en la dirección y respecto del test anterior (Ko2D1) y la hace aumentar a lo largo de la dirección x, rompiendo la simetría cilíndrica. El reforzamiento del campo magnético alcanza en este caso el factor 3.5.

8.11.2 El test del rotor

Del Zanna et al. (2002) adaptaron al caso relativista el siguiente test de magnetohidrodinámica clásica de Balsara y Spicer (1999) y Tóth (2000). Una malla cartesiana equiespaciada describe la región $[0, 1.0] \times [0, 1.0]$ en el plano xy con una resolución de 400×400 celdas numéricas. En el centro de la malla, y rodeado por un medio homogéneo de densidad $\rho_e = 1.0$ y presión térmica $p_e = 10.0$, se sitúa un cilindro de radio $r_c = 0.1$ en rotación rígida con velocidad angular $\omega_c = 9.95$, con lo que el material de la región más externa gira con un velocidad correspondiente a un factor de Lorentz $\simeq 10$. El material del cilindro tiene una densidad $\rho_c = 10.0$ y una presión térmica $p_c = 10.0$. El campo magnético es uniforme en toda la malla y orientado en la dirección del eje x, con un valor $B_x = 1.0$. La ecuación de estado es la de un gas ideal con $\gamma = 5/3$.

Figura 8.19: Explosión cilíndrica con $B_x = 0.01$ (test Ko2D1) en $t = 4.0$. Test realizado con el resolvedor HLL, reconstrución *minmod* y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han uilizado $[200 \times 200]$ celdas y una CFL de 0.3.

Figura 8.20: Explosión cilíndrica con $B_x = 0.01$ (test Ko2D1) en $t = 4.0$. Test realizado con el resolvedor de tipo Roe, reconstrución *minmod* con pendiente limitada a 2.0, y el algoritmo de Runge Kutta de segundo orden para el avance temporal. Se han uilizado $[200 \times 200]$ celdas y una CFL de 0.3.

Figura 8.21: Explosión cilíndrica con $B_x = 0.1$ (test Ko2D2) en $t = 4.0$. Test realizado con el resolvedor HLL, reconstrución *minmod* con pendiente limitada a 2.0, y el algoritmo de Runge Kutta de tercer orden para el avance temporal. Se han uilizado $[200 \times 200]$ celdas y una CFL de 0.1.

Figura 8.22: Explosión cilíndrica con $B_x = 0.1$ (test Ko2D2) en $t = 4.0$. Test realizado con el resolvedor de tipo Roe, reconstrución *minmod* con pendiente limitada a 2.0, y el algoritmo de Runge Kutta de tercer orden para el avance temporal. Se han uilizado $[200 \times 200]$ celdas y una CFL de 0.1.

La rotación del cilindro arrastra las líneas del campo magnético enrollándolas. El enrollamiento de las líneas de campo genera una fuerza que tiende a frenar el cilindro. La deceleración del cilindro junto con su expansión marca la evolución del sistema. Las Figuras (8.24) y (8.23) recogen las distribuciones de diferentes variables en el instante $t = 0.4$ para los resolvedores tipo Roe y HLL, respectivamente. Similarmente a los resultados de Del Zanna et al. (2002), se observa una reducción importante en la velocidad de rotación del cilindro y una expansión de éste que hace disminuir la densidad y la presión centrales. Comparando los resultados de ambos resolvedores podemos apreciar una mejor resolución de las estructuras y unos valores más extremos para el caos del resolvedor tipo Roe sugiriendo una menor viscosidad numérica de este resolvedor respecto del HLL.

8.12 Chorros relativistas magnetizados

Como indicamos en la Introducción, una de las aplicaciones astrofísicas más interesantes del código numérico que acabamos de presentar se da en el campo de los chorros extragalácticos, cuya simulación en el marco de la hidrodinámica clásica comenzó hace ahora veinticinco años (Norman et al. 1982). En el marco de la dinámica relativista, las primeras simulaciones son todavía más recientes (van Putten 1993, Duncan y Hughes 1994, Martí et al. 1994) aunque han alcanzado actualmente su madurez incorporando de forma gradual nuevos y más elaborados ingredientes, como son efectos tridimensionales, campos magnéticos, ecuaciones de estado realistas y procesos de emisión.

El artículo de Leismann et al. (2005), utilizando un código muy similar al desarrollado en esta Tesis Doctoral, presenta un estudio paramétrico de la morfología y dinámica de chorros relativistas axisimétricos con campos magnéticos toroidales y poloidales. Los trabajos de Komissarov (1999b), cuyos modelos iniciales han servido de base para las simulaciones presentadas aquí, y Mignone, Massaglia y Bodo (2005) muestran también simulaciones de chorros relativistas con campos magnéticos toroidales. En esta sección vamos a presentar los resultados de las simulaciones de diversos chorros relativistas con campos magnéticos toroidales y helicoidales obtenidos con el código numérico que acabamos de describir. Además de estas simulaciones (correspondientes a chorros extragalácticos *de gran escala*), el código aquí desarrollado se ha utilizado en simulaciones preliminares de chorros de *pequeña escala*, presentadas en forma de póster, en las conferencias internacionales de Ann Arbor, Michigan (Roca et al. 2006) y Girdwood, Alaska (Roca et al. 2007), con objeto de dilucidar el papel de los campos magnéticos en la dinámica y la emisión de los chorros extragalácticos a escalas del parsec.

Las simulaciones de chorros supersónicos propagándose a través de un medio externo estático homogéneo explican los rasgos morfológicos básicos de los chorros extragalácticos. Un haz supersónico se extiende desde el punto de inyección del chorro hasta el punto de impacto en el medio ambiente. El haz, en el intento de abrirse camino a través del medio, sufre una serie de expansiones y compresiones, formando choques internos o de recolimación. En el lugar de impacto

Figura 8.23: Test del rotor en $t = 0.4$. Test realizado con el resolvedor HLL, reconstrucción *minmod* y el algoritmo de Runge-Kutta de segundo orden. Se ha utilizado una malla numérica de 200×200 celdas y una CFL de 0.1.

Figura 8.24: Test del rotor en $t = 0.4$. Test realizado con el resolvedor de tipo Roe, reconstrucción *minmod* con pendiente limitada a 2.0, y el algoritmo de Runge-Kutta de tercer orden. Se ha utilizado una malla numérica de $[250 \times 250]$ celdas y una CFL de 0.1.

con el medio ambiente, el chorro acaba formando una estructura compleja compuesta por un choque terminal plano (disco de Mach), una discontinuidad de contacto que separa el material original del chorro del medio ambiente y una onda de choque delantera como consecuencia de la propagación supersónica del chorro a través del medio ambiente. Finalmente, el material del chorro que impacta en el medio ambiente es deflectado formando una envoltura alrededor del chorro. Esta envoltura está separada del medio ambiente por una discontinuidad de contacto sobre la que se desarrollan inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, causando la mezcla turbulenta de los materiales del chorro y el medio ambiente. En el caso de chorros con campos magnéticos toroidales, el material decelerado en el disco de Mach tiene dificultades para deflectarse formando la envoltura y, al menos en simulaciones axisimétricas, tiene la tendencia a acumularse en la parte delantera del chorro (Clarke et al. 1986 señalaron este fenómeno en simulaciones de chorros MHD clásicas). La velocidad de avance de la cabeza del chorro en el medio ambiente está gobernada por el balance de momento en la zona del impacto del chorro con el ambiente.

En las siguientes secciones presentaremos resultados correspondientes a varios chorros relativistas axisimétricos con distintas configuraciones del campo magnético. Se han utilizado coordenadas cilíndricas (r, z, ϕ), permitiendo la existencia de componentes toroidales para el campo magnético y la velocidad del fluido, pero suponiendo que todas las variables del modelo numérico son independientes de la coordenada ϕ. Las simulaciones se han efectuado con el código descrito en las secciones precedentes, utilizando la interpolación lineal limitada para la reconstrucción de las variables en las celdas numéricas, los resolvedores de Riemann tipo Roe y HLL, y el algoritmo de Runge-Kutta de segundo orden para el avance temporal. Las simulaciones han seguido la evolución de los chorros inyectados a través de la región definida por $0 < r \leq R_b$ (donde R_b es, por tanto, el radio del chorro en la inyección) y $z = 0$, propagándose a través de un medio ambiente homogéneo en una región $(r, z) \in [0, 15R_b] \times [0, 50R_b]$, con resoluciones típicas de 20 y 30 celdas$/R_b$. Tanto el material del chorro como el del medio ambiente están descritos por una ecuación de estado de gas ideal con $\gamma = 4/3$.

8.12.1 Chorros con campo magnético toroidal

Las dos simulaciones que vamos a presentar en esta seción se corresponden con los modelos A y B del artículo de Komissarov (1999b). La configuración del campo magnético (toroidal) de estos modelos es similar a la de los modelos de Lind et al. (1989), en el contexto de la MHD clásica. Los chorros de ambos modelos están en equipartición (presión térmica promedio igual a presión magnética promedio), pero difieren en la magnitud del flujo de Poynting. El modelo JKoA (modelo A en el artículo original de Komissarov 1999b) tiene un flujo de Poynting alto, mientras que el modelo JKoB (modelo B en Komissarov et al. 1999b) lo tiene bajo.

Modelo JKoA: Campo magnético toroidal y flujo de Poynting alto. El medio ambiente en el que se propaga este chorro es un medio no magnetizado con una densidad (en unidades arbitrarias) $\rho_e = 10^3$ y presión térmica $p_e = 0.170338$ (en unidades de densidad por la velocidad de la luz al cuadrado). El chorro tiene, en las mismas unidades, una densidad de $\rho_b = 1.0$ y una velocidad en la dirección del eje z, $v_b^z = 0.994874$ (equivalente a un factor de Lorentz $W_b = 10$).

El campo toroidal tiene una dependencia radial dada por

$$B^\phi = \begin{cases} B_o^\phi (r/r_m), & \text{si } r < r_m \\ B_o^\phi (r_m/r), & \text{si } r < r_m < R_b \\ 0, & \text{si } r > R_b \end{cases}, \tag{8.70}$$

siendo $B_o^\phi = 10.0$ y $r_m = 0.37$. Esta configuración del campo magnético corresponde a una corriente axial homogénea en el interior del chorro para $r \leq r_m$ y una corriente de retorno también axial sobre la superficie del chorro. La condición de equilibrio hidromagnético transversal para el chorro, que para una configuración como la considerada viene dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{b^\phi}{r}\frac{d(rb^\phi)}{dr}, \tag{8.71}$$

permite obtener la dependencia radial de la presión térmica:

$$p = \begin{cases} p_e\big(\alpha + 2(1 - (r/r_m)^2)\big)/\beta, & \text{si } r < r_m \\ \alpha p_e, & \text{si } r < r_m < R_b \\ p_e, & \text{si } r > R_b \end{cases}, \tag{8.72}$$

donde $\beta = 0.34$ y

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\beta}\left(\frac{R_b}{r_m}\right)^2 = 0.59735. \tag{8.73}$$

Las Figs. 8.25 y 8.26 muestran las distribuciones de diferentes magnitudes correspondientes al modelo JKoA en el instante $t = 110$, con el resolvedor de tipo Roe y una resolución de 20 celdas/R_b, cuando material del chorro alcanza el final de la malla computacional situada a $z = 50$. Los paneles de estas figuras pueden compararse directamente con los resultados de la Fig. 3 de Komissarov (1999b), que ha utilizado el algoritmo descrito en Komissarov (1999a) y la misma resolución espacial (20 celdas/R_b). El haz supersónico acaba a $z \approx 24$ ($z \approx 23$, en la simulación original de Komissarov 1999b) en un choque casi plano que se observa claramente en las distribuciones de presión térmica y densidad de masa en reposo inercial. La región entre este choque y el extremo del chorro contiene material decelerado en el choque terminal y que no ha podido deflectarse debido al fuerte pinzamiento producido por el campo toroidal. El haz supersónico presenta además diversos choques cónicos (a $z \approx 4, 17, 20$). La fuerza de pinzamiento es también la responsable de dificultar la expansión

Figura 8.25: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JKoA en el instante $t = 110$. Simulación efectuada con el resolvedor de tipo Roe, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.4, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.35) para el avance temporal. Resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.26: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JKoA de la figura anterior, en el instante $t = 110$. Resolvedor de Riemann tipo Roe; resolución espacial: 20 celdas/R_b.

lateral de la envoltura del chorro y darle a éste una estructura estilizada. Como en el resto de simulaciones bidimensionales, la superficie de contacto entre la envoltura del chorro y el medio ambiente se ve sujeta al desarrollo de inestabilidades de Kelvin-Helmholtz (que la presencia del campo magnético toroidal no puede inhibir) y que se manifiestan en la simulación como grandes vórtices visibles en la distribución de densidad de masa en reposo.

Las Figs. 8.27 y 8.28 muestran distribuciones de las mismas magnitudes para el modelo JKoA con la misma resolución espacial (20 celdas/R_b) que las Figs. 8.25 y 8.26 pero usando el resolvedor de Riemann HLL. La comparación de ambos juegos de figuras permite encontrar diversas diferencias. Por un lado la posición de los choques internos no es la misma. El choque terminal se encuentra más adelantado (en $z \approx 30$) en el caso de la simulación con el resolvedor de HLL, sin embargo el chorro ha avanzado menos (el extremo se sitúa en este caso en $z \approx 46$). En cualquier caso, las diferencias más significativas se centran en la estructura de la envoltura cuya superficie de contacto con el medio ambiente es mucho más difusa, con vórtices mucho menos definidos. La mayor difusión de la superficie de contacto junto con la menor velocidad de avance del chorro podrían ser una consecuencia de la mayor viscosidad del resolvedor HLL respecto del de tipo Roe. Con objeto de contrastar esta posibilidad, hemos repetido la simulación del modelo JKoA con el resolvedor HLL pero con una resolución 1.5 veces mayor (30 celdas/R_b). Los resultados se muestran en las Figs. 8.29 y 8.30. La comparación de estas figuras con las correspondientes a la simulación con el resolvedor de Roe y 20 celdas/R_b (Figs. 8.25 y 8.26) permiten confirmar nuestra hipótesis. La posición del extremo del chorro y del choque terminal son ahora más parecidas, y lo mismo ocurre con la estructura de vórtices de la superficie de contacto entre el material del chorro y el medio ambiente (como se ve, por ejemplo, en la distribución de la masa en reposo). De hecho la simulación con el resolvedor HLL y 30 celdas/R_b parece todavía más difusiva que la efectuada con el resolvedor de tipo Roe y 20 celdas/R_b.

Modelo JKoB: Campo magnético toroidal y flujo de Poynting bajo. Los parámetros que definen este modelo son idénticos a los del anterior (JKoA) excepto en los valores de la densidad de masa en reposo en el chorro y en el medio ambiente, que pasan a valer, respectivamente, $\rho_b = 10$ y $\rho_e = 10^4$. Esta modificación, que mantiene la magnetización del modelo anterior, produce un modelo con bajo flujo de Poynting. Como se puede apreciar en las Figs. 8.31 y 8.32 (correspondientes a la simulación que utiliza el resolvedor tipo Roe y una reolución de 20 celdas/R_b), las diferencias morfológicas con respecto al modelo JKoA son apreciables. La prominencia de la región con material del chorro delante del choque terminal es menor que en el modelo JKoA. Por contra, la envoltura que rodea al chorro es casi el doble de ancha. Los choques internos en el haz supersónico son ahora más intensos.

La comparación de las Figs. 8.31 y 8.32 con la Fig. 5 de Komissarov (1999b), correspondiente al mismo modelo, muestra concordancias evidentes en la posición de los choques internos y el choque terminal, la anchura de la envoltura y la onda

Figura 8.27: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JKoA en el instante $t = 110$. Simulación efectuada con el resolvedor HLL, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.4, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.35) para el avance temporal. Resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.28: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JKoA de la figura anterior, en el instante $t = 110$. Resolvedor de Riemann HLL; resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.29: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JKoA en el instante $t = 110$. Simulación efectuada con el resolvedor HLL, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.4, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.35) para el avance temporal. Resolución espacial: 30 celdas/R_b.

Figura 8.30: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JKoA de la figura anterior, en el instante $t = 110$. Resolvedor de Riemann HLL; resolución espacial: 30 celdas/R_b.

Figura 8.31: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JKoB en el instante $t = 220$. Simulación efectuada con el resolvedor de tipo Roe, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.2, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.25) para el avance temporal. Resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.32: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JKoB de la figura anterior, en el instante $t = 220$. Resolvedor de Riemann tipo Roe; resolución espacial: 20 celdas/R_b.

de choque delantera y la estructura extremadamente turbulenta de la superficie de contacto entre la envoltura y el medio ambiente. La simualción mostrada en las Figs. 8.33 y 8.34, obtenidas con la misma resolución de 20 celdas/R_b pero con una versión del código que utiliza el resolvedor HLL, presenta una velocidad de avance ligeramente distinta, y una envoltura más estrecha y difusa, confirmando la tendencia de la mayor difusión del resolvedor HLL respecto del de tipo Roe ya comentada en la simulación anterior.

8.12.2 Chorros con campo magnético helicoidal

Los chorros presentados en la sección anterior contienen una única componente del campo magnético (toroidal). Además, las condiciones iniciales están escogidas de tal modo ($v^\phi = 0$) que el campo magnético permanece siempre ortogonal al movimiento del fluido. Este hecho hace que, por ejemplo, la configuración del campo magnético en cada punto del chorro, y a lo largo de toda la simulación, se corresponda con uno de los casos de degeneración discutidos en el Capítulo 4 (degeneración de tipo I). Desde un punto de vista numérico y en el contexto de los resolvedores de Riemann basados en la descomposición espectral de las ecuaciones (como el de Komissarov 1999a, o el desarrollado en la presente Tesis), este hecho hace que no sea necesario cambiar de base de vectores propios entre estados degenerados y no degenerados, lo que supone una simplificación muy grande. Hasta el momento, el escaso número de trabajos que han considerado simulaciones de chorros RMHD han considerado siempre configuraciones simplificadas (Komissarov 1999b y Mignone, Massaglia y Bodo 2005: chorros con campo toroidal; Leismann et al. 2005: chorros con campo toroidal, chorros con campo poloidal).

En esta sección presentamos resultados preliminares de una simulación con un campo magnético helicoidal axisimétrico. En este caso, la presencia de una componente B^z en la configuración inicial del campo magnético acaba generando una componente B^r, y velocidad azimutal v^ϕ en el fluido, como puede verse de las ecuaciones de la RMHD en coordenadas cilídricas (ver Apéndice D.1). El resultado es un modelo de chorro axisimétrico pero con velocidades del fluido y campos magnéticos con orientaciones arbitrarias.

El modelo presentado aquí, JHe, utiliza como base los parámetros del modelo JKoB, discutido en la sección anterior, introduciendo una componente axial constante ($B^z = 1$) de campo magnético. El carácter constante de dicha componente axial no altera la ecuación para el equilibrio hidromagnético transversal del chorro original.

Las Figs. 8.35 y 8.36 muestran distribuciones de diferentes magnitudes de la simulación del modelo JHe, utilizando el resolvedor tipo Roe y una resolución de 20 celdas/R_b, al final de su evolución. Dichas figuras pueden compararse con las equivalentes para el modelo JKoB (Figs. 8.31 y 8.32), observándose algunas diferencias. La magnetización ya no es nula en el medio ambiente por lo que ya no puede utilizarse para trazar el material del chorro. Aparte de esta diferencia obvia, el modelo con campo helicoidal presenta una estructura interna menos intensa en el haz supersónico y una envoltura más estrecha y difusa.

Figura 8.33: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JKoB en el instante $t = 220$. Simulación efectuada con el resolvedor HLL, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.2, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.25) para el avance temporal. Resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.34: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JKoB de la figura anterior, en el instante $t = 220$. Resolvedor de Riemann HLL; resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Estas diferencias pueden estar motivadas por la presencia de una componente poloidal del camop magnético que reduce el pinzamiento provocado por el campo toroidal en el haz y tiende a inhibir el desarrollo de inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en la superficie de separación entre el material del chorro y el medio ambiente. Sin embargo, un aumento de la viscosidad numérica en el resolvedor de Riemann podría causar unos efectos similares. Con objeto de confirmar esta posibilidad, hemos repetido la simulación con la misma resolución pero utilizando el resolvedor HLL. Los resultados se muestran en las Figs. 8.37 y 8.38. Los resultados de ambas simulaciones son muy similares lo que refuerza la conclusión de que los efectos observados en la simulación con campo axial se deben en parte al incremento de la difusión en el resolvedor de Riemann tipo Roe en el caso general.

Figura 8.35: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JHe en el instante $t = 220$. Simulación efectuada con el resolvedor de tipo Roe, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.4, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.2) para el avance temporal. Resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.36: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JHe de la figura anterior, en el instante $t = 220$. Resolvedor de Riemann tipo Roe; resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.37: Distribuciones de densidad y presión térmica para el modelo JHe en el instante $t = 220$. Simulación efectuada con el resolvedor HLL, reconstrucción lineal con pendiente limitada a 2 en las celdas en las que el cociente entre las presiones magnética y térmica es mayor que 0.4, y Runge-Kutta de segundo orden (CFL = 0.2) para el avance temporal. Resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Figura 8.38: Distribuciones de densidad de masa en reposo inercial (ρW^2) y magnetización ($1/\beta$) para la simulación del modelo JHe de la figura anterior, en el instante $t = 220$. Resolvedor de Riemann HLL; resolución espacial: 20 celdas/R_b.

Capítulo 9

Magnetohidrodinámica en Relatividad General

Aunque gran parte de las expresiones que hemos utilizados en los capítulos anteriores están escritas en forma covariante sin hacer referencia a una métrica particular, hemos particularizado en ocasiones al caso de espacio tiempo plano con métrica de Minkowski. En este capítulo estudiaremos el caso de la magnetohidrodinámica en presencia de campo gravitatorio, que vendrá descrito por una métrica con curvatura no nula, es decir, estudiaremos el caso de la magnetohidrodinámica en relatividad general (o GRMHD, del inglés *General Relativistic Magnetohydrodynamics*. Para ello utilizaremos el formalismo $\{3+1\}$ en el que el espacio-tiempo se folia con 3-superficies espaciales (York 1983).

Denotaremos a las coordenadas generales que usaremos en las siguientes líneas como $\{(t, x, y, z)\}$, sin que ello implique ninguna hipótesis previa sobre el espacio-tiempo ni que sean coordenadas cartesianas.

Detalles sobre todo lo descrito en este capítulo pueden encontrarse en el trabajo de Antón et al. (2006).

9.1 Introducción

En el formalismo $\{3+1\}$, separamos el espacio-tiempo en espacio tridimensional y tiempo unidimensional t. Para ello debemos elegir una familia de hipersuperficies tridimensionales, caracterizadas por el valor delparámetro t y que corresponderán a $t =$ constante. Éstas deben ser hipersuperficies espaciales, es decir, el vector normal a la superficie debe ser un vector temporal o nulo.

En este formalismo, la métrica del espacio-tiempo viene dada por la función α, que recibe el nombre de *lapse*, por el trivector β^i, que recibe en nombre de *shift* y por la metrica espacial γ_{ij}. En términos de estas funciones, la métrica del espacio-tiempo se escribe como sigue:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(\alpha^2 - \beta^2) & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - (\beta^i\beta^j)/\alpha^2 \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

donde γ^{ij} es la inversa de la matriz γ_{ij}, $\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i_j$, las componentes covariantes y contravariantes del shift están relacionadas por $\beta^i = \gamma^{ij}\beta_j$ y se ha definido β como el módulo del shift $\beta = \beta^i\beta_i$. Hay que tener en cuenta que las componentes de la métrica dependen, en general de las coordenadas.

Denotaremos por g el determinante de la métrica del espacio-tiempo y por γ el determinante de la métrica espacial.

El observador natural asociado a este formalismo es aquél cuya tetravelocidad $\mathbf{n}$ es perpendicular a las hipersupeficies t = constante en cada punto. A este observador le llamaremos "observador Euleriano", y su tetravelocidad, $\mathbf{n}$, viene dada por

$$n^\mu = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i), \tag{9.3}$$

y de aquí obtenemos que

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0). \tag{9.4}$$

Asociado a este observador podemos definir una base adaptada de vectores

$$\{\mathbf{n}, \partial_i\}, \tag{9.5}$$

donde ∂_i son los tres vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie t = constante, que se pueden escribir como

$$(\partial_j)_\mu = (\beta_j, \gamma_{ji}). \tag{9.6}$$

Nótese que $\mathbf{n} \cdot \partial_i = 0$, es decir, el vector $\mathbf{n}$ es ortogonal a tres vectores ∂_i.

Además del observador Euleriano, es conveniente definir el observador comóvil. Este observador se define como aquel que tiene tetravelocidad igual a la del fluido en cada punto. Si denotamos por $\mathbf{u}$ la tetravelocidad del fluido, las componentes covariantes de la velocidad de éste que mide el observador Euleriano vienen dadas por

$$v_i = -\frac{\mathbf{u} \cdot \partial_i}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}, \tag{9.7}$$

y las componentes contravariantes son

$$v^i = \gamma^{ij} v_j = \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha} \tag{9.8}$$

Utilizando estas expresiones, podemos expresar las componentes de la tetravelocidad del fluido, u^μ, en función de v^i como sigue,

$$u^0 = \frac{W}{\alpha} \quad , \quad u^i = W\left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha}\right) \tag{9.9}$$

$$u_0 = (-\alpha + \beta_i v^i)W \quad , \quad u_i = W v_i, \tag{9.10}$$

donde se ha definido el factor de Lorentz, W,como

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij} v^i v^j}}. \tag{9.11}$$

En este formalismo, suponiendo que el fluido constituye un medio isótropo, dieléctrico, permeable y conductor, podremos describir el tensor electromagnético y su dual, igual que hacíamos en el caso de la RMHD, a partir de los campos eléctrico, **e**, y magnético, **b**, medidos por un observador, **u**, como

$$F^{\mu\nu} = u^\mu e^\nu - u^\nu e^\mu - \epsilon^{\mu\nu\lambda\delta} u_\lambda b_\delta \tag{9.12}$$

$$F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\delta} F_{\lambda\delta} = u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu - \epsilon^{\mu\nu\lambda\delta} u_\lambda e_\delta, \tag{9.13}$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\lambda\delta}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita, que se define como

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}[\mu\nu\lambda\delta] \tag{9.14}$$

siendo $[\mu\nu\lambda\delta]$ el símbolo de de Levi-Civita.

Al igual que en el caso de relatividad restringida se cumple que

$$e^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu \qquad y \qquad b^\mu = F^{*\mu\nu} u_\nu \tag{9.15}$$

y esto conlleva que los vectores campo eléctrico y magnético son ortogonales a la tetravelocidad del observador que mide estos campos.

$$e^\mu u_\mu = 0 \qquad y \qquad b^\mu u_\mu = 0 \tag{9.16}$$

Aunque en las expresiones anteriores el vector **u** podría representar la tetravelocidad de cualquier observador, en lo que sigue supondremos que este observador es el comóvil. Si consideramos que la conductividad eléctrica del fluido es infinita, $\sigma \to \infty$, el campo eléctrico medido por el observador comóvil debe ser nulo (Anile, 1989),

$$e^\mu = 0. \tag{9.17}$$

Bajo estas condiciones, que corresponden al caso de la magnetohidrodinámica ideal, la ecuación que describe la evolución del campo magnético, se escribe de la siguiente forma

$$\nabla_\mu F^{*\mu\nu} = \nabla_\mu \big(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu\big) = 0 \tag{9.18}$$

La relación entre las componentes del cuadrivector campo magnético medido por el observador comóvil, **b**, y las componentes del trivector campo magnético medido en el sistema de referencia Euleriano, **B**, son

$$b^0 = \frac{W(\gamma_{ij}B^i v^j)}{\alpha} \quad , \quad b^i = \left(\frac{B^i + W^2(\gamma_{ij}B^i v^j)(v^i - \beta^i/\alpha)}{W}\right). \tag{9.19}$$

Las componentes espaciales también las podemos escribir como

$$b^i = \left(\frac{B^i + \alpha b^0 u^i}{W}\right). \tag{9.20}$$

Las expresiones para las componentes covariantes son las siguientes

$$b_0 = -(\alpha^2 - \beta^2)b^0 + \beta_i b^i \quad , \quad b_i = \left(\frac{B_i + W^2(\gamma_{ij}B^i v^j)v_i}{W}\right) \tag{9.21}$$

y

$$b_i = \left(\frac{B_i + \alpha b^0 u_i}{W}\right). \tag{9.22}$$

A partir de estas expresiones podemos calcular el módulo al cuadrado del vector **b**,

$$\mathbf{b}^2 = \frac{(\gamma_{ij}B^i B^j) + W^2(\gamma_{ij}B^i v^j)^2}{W^2} = \frac{B^2 + \alpha^2(b^0)^2}{W^2} \tag{9.23}$$

Como hemos dicho, la ecuación (9.18) gobierna la evolución del campo magnético. Si la reescribimos en función del campo magnético medido por el observador Euleriano obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,B^i}{\partial x^i} = 0, \tag{9.24}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,B^i}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,\Big((\alpha v^i - \beta^i)B^j - (\alpha v^j - \beta^j)B^i\Big)}{\partial x^j}, \tag{9.25}$$

que podemos escribir, en notación de trivectores, como el par de ecuaciones siguientes

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{9.26}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,\mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\times\big((\alpha\mathbf{v} - \beta)\times\mathbf{B}\big) = 0. \tag{9.27}$$

Además de las ecuaciones de evolución del campo electromagnético deberemos obtener las de evolución del fluido. Estas corresponden, por un lado, a la conservación del número bariónico, que escribimos como

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0. \tag{9.28}$$

Por otra parte, el tensor energía impulso tiene formalmente la misma forma que en RMHD

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho h + \mathbf{b}^2\right) + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b^2}\right) g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu \tag{9.29}$$

y la ecuación de conservación se escribe, al igual que hicimos en el caso de la RMHD, como

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{9.30}$$

Aunque formalmente estas ecuaciones son las mismas que escribíamos en el caso de relatividad restringida, nótese que el efecto del campo gravitatorio en relatividad general es el de modificar las derivadas covariantes que aparecen en las ecuaciones ya que éstas se definen a partir de la métrica del espacio-tiempo.

Para obtener las ecuaciones de evolución en forma conservativa es conveniente introducir una serie de variables del fluido asociadas al observador Euleriano. Para ello, teniendo en cuenta que la divergencia del tensor impulso-energía debe ser cero, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, obtenemos, al multiplicar escalarmente por los vectores de la base adaptados al observador Euleriano, y que genéricamente denotaremos por $\bar{e}_\nu$, la siguiente ecuación

$$\big(\nabla_\mu T^{\mu\nu}\big)\bar{e}_\nu = 0, \tag{9.31}$$

que conduce a

$$\nabla_\mu\big(T^{\mu\nu}\bar{e}_\nu\big) = T^{\mu\nu}\nabla_\mu \bar{e}_\nu. \tag{9.32}$$

Sustituyendo el vector génerico $\bar{e}_\nu$ por cada uno de los vectores $\{\mathbf{n}, \partial_i\}$ y desarrollando obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,\tau}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,H^i}{\partial x^i} = \alpha\left(T^{\mu\nu}\frac{\partial \ln\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma^0_{\nu\mu}T^{\mu\nu}\right), \tag{9.33}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,S_i}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,H_i^j}{\partial x^j} = T^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\delta_{\nu\mu}g_{\delta i}\right), \tag{9.34}$$

siendo $\Gamma^{lambda}_{\mu\nu}$ los símbolos de Christoffel y donde se han definido las variables

$$\tau \equiv T^{0\mu}n_\mu = \big(\rho h + \mathbf{b}^2\big)W^2 - \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right) - (\alpha b^0)^2, \tag{9.35}$$

$$S_i \equiv T^{0\mu}\,\partial_{(i)\mu} = \big(\rho h + \mathbf{b}^2\big)W^2 v_i - \alpha b^0 b_i, \tag{9.36}$$

$$H^i \equiv T^{i\mu} n_\mu = \big(\rho h + \mathbf{b}^2\big)W^2 (v^i - \beta^i/\alpha) - \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right)\frac{\beta^i}{\alpha} - \alpha b^0 b^i, \tag{9.37}$$

$$H^j_i \equiv T^{j\mu}\,\partial_{(i)\mu} = \big(\rho h + \mathbf{b}^2\big)W^2 (v^j - \beta^j/\alpha) v_i - \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right)\delta^i_j - \alpha b^j b_i. \tag{9.38}$$

9.2 Sistema de ecuaciones

Si ahora agrupamos las ecuaciones (9.25), (9.26), (9.28), (9.33) y (9.34), obtenemos un sistema de 8 ecuaciones de evolución mas una ecuación de ligadura que podemos escribir como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,\mathbf{U}}{\partial x^0} + \frac{\partial\sqrt{-g}\,\mathbf{F}^i}{\partial x^i}\right) = \mathbf{S}, \tag{9.39}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{9.40}$$

en donde

$$\mathbf{U} = (D, S_i, \tau, B^i)^T, \tag{9.41}$$

o bien,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho W \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v_x - \alpha b^0 b_x \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v_y - \alpha b^0 b_y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v_z - \alpha b^0 b_z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 - \big(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\big) - (\alpha b^0)^2 \\ B^x \\ B^y \\ B^z \end{pmatrix}. \tag{9.42}$$

Y donde los flujos, $\mathbf{F^i}$, son

$$\mathbf{F}^x = \begin{pmatrix} \rho W (v^x - \beta^x/\alpha) \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v_x (v^x - \beta^x/\alpha) + \big(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\big) - b^x b_x \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v_y (v^x - \beta^x/\alpha) - b^x b_y \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v_z (v^x - \beta^x/\alpha) - b^x b_z \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 (v^x - \beta^x/\alpha) - \alpha b^0 b^x - \big(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\big)\beta^x/\alpha \\ 0 \\ B^y (v^x - \beta^x/\alpha) - B^x (v^y - \beta^y/\alpha) \\ B^z (v^x - \beta^x/\alpha) - B^x (v^z - \beta^z/\alpha) \end{pmatrix}, \tag{9.43}$$

y los términos fuente, **S**, son

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu x}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} g_{\delta x}\right) \\ T^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu y}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} g_{\delta y}\right) \\ T^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu z}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} g_{\delta z}\right) \\ \alpha\left(T^{\mu 0}\frac{\partial \ln \alpha}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{0}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.44}$$

9.3 Autovalores del sistema

Como el espacio de variables definido por Anile (u^{μ}, b^{μ}, p, s) es covariante, formalmente, el problema de valores propios es el mismo que tratamos en el caso de relatividad especial. Debemos, por tanto, resolver la ecuación:

$$Ea^2\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 = 0 \tag{9.45}$$

donde usamos las mismas definiciones que en el Capítulo 4, Secc. 4.4. Estas definiciones son capaces de incluir los efectos de la gravedad, como podemos observar en la Fig. (9.1). Cuando sea necesario concretar en los cálculos, al igual que hacíamos en el Capítulo 4) y sin pérdida de generalidad, tomaremos $\phi_{\alpha} = (-\lambda, 1, 0, 0)$, que corresponde a una onda propagándose en la dirección x.

El estudio de autovectores se realizará en el Apéndice I.

9.3.1 Autovalor entrópico

Este autovalor lo obtenemos al resolver

$$a = u^{\nu}\phi_{\nu} = 0, \tag{9.46}$$

obteniéndose

$$\lambda_e = \alpha v^x - \beta^x \tag{9.47}$$

9.3.2 Autovalores de Alfvén

Los dos autovalores de Alfvén se obtienen resolviendo la ecuación

$$\mathcal{A} \equiv Ea^2 - \mathcal{B}^2 = 0 \tag{9.48}$$

obteniéndose

$$\lambda_a = \frac{b^x \pm \sqrt{E}u^x}{b^0 \pm \sqrt{E}u^0}. \tag{9.49}$$

Figura 9.1: En esta figura podemos observar los efectos de la graviatación en el cálculo de autovalores. Se ha escogido una métrica de Schwarzschild exterior en coordenadas de Schwarzschild para un objeto central de masa M. El estado está definido por $\rho = 1.0$, $c_s = 0.1$, $\sqrt{g_{rr}}B^r = \sqrt{g_{\theta\theta}}B^\theta = 0.5$, y donde estamos variando la componente radial de la velocidad (v^r) desde 0 hasta obtener valores del módulo de la velocidad (V) cercanos a la unidad. Siendo los casos rojo y azul tomados a $r = 3\,M$ y los casos negro y amarillo en $r = 2 \cdot 10^5\,M$. Los casos negro y rojo se carecterizan por tener $v^\theta = 0$ y los azul y amarillo por $\sqrt{g_{\theta\theta}}v^\theta = 0.8$

9.3.3 Autovalores magnetosónicos

Los cuatro autovalores magnetosónicos los obtendremos al resolver la ecuación

$$N_4 \equiv \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right) a^4 - \left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} \right) a^2 G + \mathcal{B}^2 G = 0. \tag{9.50}$$

Desarrollemos primero los términos que aparecen en esta ecuación,

$$a = u^\mu \phi_\mu = -W\eta + W v^x, \tag{9.51}$$

donde hemos definido

$$\eta = \frac{\lambda + \beta^x}{\alpha}, \tag{9.52}$$

$$\mathcal{B} = b^\mu \phi_\mu = -\bar{b}^0 \eta + \bar{b}^x, \tag{9.53}$$

donde se define

$$\bar{b}^0 = W(\gamma_{ij} B^i v^j), \tag{9.54}$$

$$\bar{b}^x = \frac{B^x}{W} + W(\gamma_{ij} B^i v^j) v^i. \tag{9.55}$$

Y, por último,

$$G = \phi^\mu \phi_\mu = \gamma^{xx} - \frac{(\lambda + \beta^x)^2}{\alpha^2} \equiv \gamma^{xx} - \eta^2. \tag{9.56}$$

A partir de estas expresiones, sustituyendo en N_4 y operando, obtenemos la siguiente ecuación cuártica

$$A_4 \eta^4 + A_3 \eta^3 + A_2 \eta^2 + A_1 \eta + A_0 = 0, \tag{9.57}$$

con las siguientes expresiones para los coeficientes,

$$A_4 = 1 - \Omega^2 v^2 - \frac{(\bar{b}^0)^2 c_s^2}{E W^4}, \tag{9.58}$$

$$A_3 = -4 v^x (1 - \Omega^2) - 2 v^x \frac{\Omega^2}{W^2} + \frac{2 \bar{b}^0 \bar{b}^x c_s^2}{E W^4}, \tag{9.59}$$

$$A_2 = 6 (v^x)^2 (1 - \Omega^2) - (\gamma^{xx} - (v^x)^2) \frac{\Omega^2}{W^2} + \frac{((\bar{b}^0)^2 \gamma^{xx} - (\bar{b}^x)^2) c_s^2}{E W^4}, \tag{9.60}$$

$$A_1 = -4 (v^x)^3 (1 - \Omega^2) + 2 v^x \gamma^{xx} \frac{\Omega^2}{W^2} - \frac{2 \bar{b}^0 \bar{b}^x \gamma^{xx} c_s^2}{E W^4}, \tag{9.61}$$

$$A_0 = (v^x)^4(1-\Omega^2) - \gamma^{xx}(v^x)^2\frac{\Omega^2}{W^2} + \frac{(\bar{b}^x)^2\gamma^{xx}c_s^2}{EW^4}, \qquad (9.62)$$

donde

$$\Omega^2 = c_s^2 + c_a^2 - c_a^2 c_s^2 \quad , \quad c_a^2 = \frac{\mathbf{b}^2}{E}. \qquad (9.63)$$

Es decir, hemos obtenido una ecuación en η que es formalmente muy similar a la que teníamos en RMHD para λ, (4.46). Para resolver esta ecuación procedemos de igual forma que la descrita en la Sección 8.5.

9.4 Código GRMHD

En el desarrollo del código numérico de GRMHD hemos seguido básicamente los mismos esquemas desarrollados en el Capítulo 8. Concretamente, para la discretización de las ecuaciones se han seguido la Sección 8.2 y el Apéndice J. Para preservar la condición de divergencia nula para el campo magnético usamos la técnica del *transporte restringido* descrita en la Sección 8.4. En el Apéndice J describimos algunos de los detalles de su implementación.

Pasamos ahora a describir más detalladamente los apartados donde las diferencias introducidas son significativas respecto a lo descrito en el Capítulo 8.

9.5 Recuperación de variables primitivas

En el código numérico de GRMHD hemos implementado dos ecuaciones de estado: la de un gas ideal y la de un polítropo. En las siguientes líneas expondremos cuales son los sistemas de ecuaciones que deberemos resolver en ambos casos para obtener las variables primitivas a partir de las conservadas para ambas ecuaciones de estado.

9.5.1 Ecuación de estado de un gas ideal

Al igual que en el caso de RMHD descrito en al Sección 8.9, comenzamos calculando dos productos escalares.

- El primero de ellos es

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{S} \equiv B^i S_i = (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2(B^i v_i) - \alpha b^0(B^i b_i). \qquad (9.64)$$

Recordando que

$$W(B^i v_i) = \alpha b^0, \quad B^i b_i = \frac{B^2 + W^2(B^i v_i)}{W} = \mathbf{b}^2 W, \qquad (9.65)$$

obtenemos

$$B^i S_i = \rho h W \alpha b^0 = \frac{\alpha b^0 Z}{W}, \tag{9.66}$$

donde Z vuelve a definirse como

$$Z = \rho h W^2 \tag{9.67}$$

- El segundo producto escalar es

$$\mathbf{S}^2 \equiv S^i S_i = (\rho h + \mathbf{b}^2)^2 W^4 \mathbf{v}^2 + \alpha^2 (b^0)^2 \big(-2(\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 + \gamma^{ij} b_i b_j\big). \tag{9.68}$$

Necesitamos evaluar $\gamma^{ij} b_i b_j$, y a partir de $\mathbf{b}^2$ obtenemos que

$$\gamma^{ij} b_i b_j = \mathbf{b}^2 + \alpha^2 (b^0)^2. \tag{9.69}$$

Sustituyendo en (9.68) las expresiones (9.66), (9.67) y (9.69), y operando llegamos a

$$\left[(Z + \mathbf{B}^2)^2 - \mathbf{S}^2\right] W^2 = (Z + \mathbf{B}^2)^2 + (2Z + \mathbf{B}^2) \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^2 W^2}{Z^2}. \tag{9.70}$$

Por otro lado, partimos de la definición de τ,

$$\tau = (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 - \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right) - (\alpha b^0)^2, \tag{9.71}$$

que, operando, reescribimos como

$$\tau = \rho h W^2 + \mathbf{B}^2 - p - \frac{\mathbf{B}^2 + (\alpha b^0)^2}{2W^2}, \tag{9.72}$$

en la que sustituimos las expresiones (9.66) y (9.67) y una ecuación de estado de gas ideal, $p = (\bar{\gamma} - 1)\rho\epsilon$, para obtener finalmente

$$\left(\tau - Z - \mathbf{B}^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})^{\mathbf{2}}}{2Z^2}\right) W^2 + \frac{\bar{\gamma} - 1}{\bar{\gamma}} (Z - DW) + \frac{\mathbf{B}^2}{2} = 0 \tag{9.73}$$

Las ecuaciones (9.70) y (9.73) forman un sistema de ecuaciones formalmente idéntico al de la RMHD que permite recuperar las variables primitivas a partir de las conservadas para una ecuación de estado de gas ideal. Para resolver este sistema de ecuaciones procedemos de forma análoga a la descrita en la Sección (8.9).

9.5.2 Ecuación de estado de polítropo

La ecuación de estado de un polítropo viene dada por

$$p = K\rho^{\bar{\gamma}}, \tag{9.74}$$

donde K es una constante y $\bar{\gamma}$ es el exponente politrópico.

Podemos interpretar esta ecución como un caso particular de la ecuación de estado de gas ideal, en la que la energía interna específica cumple

$$\epsilon = \frac{K\rho^{\bar{\gamma}-1}}{\bar{\gamma}-1}. \tag{9.75}$$

En el caso de una ecuación de estado politrópica, el sistema de ecuaciones de evolución está sobredimensionado. Normalmente, se prescinde de la ecuación correspondiente a la conservación de la energía (τ), avanzando el resto de variables (D, S_i, B^i).

Ahora, procediendo de igual forma que en la sección anterior, obtenemos la ecuación (9.70)

$$\left[(Z+\mathbf{B}^2)^2 - \mathbf{S}^2\right]W^2 = (Z+\mathbf{B}^2)^2 + (2Z+\mathbf{B}^2)\frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})^2W^2}{Z^2}. \tag{9.76}$$

Teniendo en cuenta que

$$Z = \rho h W^2 = DW\left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}K\rho^{\bar{\gamma}-1}\right), \tag{9.77}$$

obtenemos que la ecuación en W a resolver es

$$\begin{aligned}&\left[DW\left(1+\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}K\rho^{\bar{\gamma}-1}\right] + \mathbf{B}^2\right)^2 (W^2-1) - \mathbf{S}^2W^2\\ &- \frac{\left[2\left(DW\left(1+\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}K\rho^{\bar{\gamma}-1}\right)\right)+\mathbf{B}^2\right](\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})^2}{\left(DW\left(1+\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}K\rho^{\bar{\gamma}-1}\right)\right)^2} = 0.\end{aligned} \tag{9.78}$$

A diferencia del caso de un gas ideal, si la ecuación de estado es la de un polítropo, obtenemos una sola ecuación de recuperación en lugar de un sistema de dos ecuaciones.

9.6 Reconstrucción de variables

Ya abordamos en la Sección 8.7 las principales cuestiones referidas a la reconstrucción de las variables en las celdas numércias con objeto de aumentar la precisión espacial del algoritmo. Aunque inicialmente implementamos una reconstrucción lineal (*minmod*) para el conjunto de variables $(\rho, p, v^x, v^y, v^z, B^x, B^y, B^z)$, los mejores resultados se obtuvieron con la reconstrucción de las variables $(\rho, p, v_x, v_y, v_z, B^x, B^y, B^z)$, que es el que hemos utilizado en este trabajo.

9.7 Resolvedores de Riemann en GRMHD

En esta sección vamos a describir las dos estrategias alternativas que hemos seguido para construir un resolvedor de Riemann aproximado que permita la obtención de un código GRMHD robusto. En los casos analizados, las dos estrategias han demostrado ser cualitativamente equivalentes, con ligeras diferencias numéricas, aunque el procedimiento que expondremos en segundo lugar es más interesante debido a que se basa en el uso de resolvedores de RMHD, con lo cual permitiría una rápida extensión de cualquier resolvedor de RMHD al contexto de la GRMHD.

9.7.1 Enfoque basado en la descomposición espectral local

Esta estrategia es la que podríamos definir como clásica y es la que ya se ha empleado en RMHD. También es la misma estrategia que se describe en el artículo de Banyuls et al. (1997) para abordar la GRHD, y al que remitimos para un mayor detalle.

En esta aproximación, una vez discretizado el problema en celdas numéricas, los flujos numéricos a través de las interfases de estas celdas se obtienen mediante un resolvedor de Riemann basado en la descomposición espectral del sistema hiperbólico considerado. En este caso, el sistema de ecuaciones está dado en la Sección 9.2, los autovalores en la Sección 9.3 y los autovectores en el Apéndice I. Una vez que se tiene la descomposición espectral, se emplea alguno de los algoritmos descritos en la literatura para la obtención de un resolvedor aproximado de problemas de Riemann. En este trabajo y en esta aproximación se ha utilizado el resolvedor HLLE (véase la Sección 8.3.2 y el trabajo de Schneider et al. 1993).

9.7.2 Enfoque basado en el principio de equivalencia

Este segundo enfoque para el caso puramente hidrodinámico sin campo magnético se describe en Pons et al. (1998) y se basa en el principio de equivalencia de relatividad general que afirma que localmente cualquier espacio-tiempo puede ser descrito como un espacio-tiempo plano con una métrica Minkowskiana.

A partir de este principio, la estrategia radica en realizar un cambio de coordenadas a un sistema localmente Minkowskiano, donde calcularemos los flujos usando un resolvedor aproximado del problema de Riemann en RMHD. Una vez calculados estos flujos, deben ser transformados al sistema de coordenadas inicial.

Más detalladamente, para generalizar el procedimiento al caso GRMHD, debemos recordar que en el caso puramente hidrodinámico, las componentes del shift transversales a la interfase de la celda (β^i), se comportaban como las componentes de la velocidad de la malla numérica. Como se discute en detalle en Pons et al. (1998), esto puede entenderse como que el vector de flujos numéricos calculados para el caso que $\beta^i = 0$, deben modificarse en la cantidad $-\beta^i \mathbf{U}/\alpha$, donde $\mathbf{U}$ hace referencia al vector estado.

En el caso de la magnetgohidrodinámica, el procedimiento descrito sigue siendo válido para los flujos correspondientes a las variables D, S_i y τ, pero no para las componentes del campo magnético B^i. Si siguieramos el mismo razonamiento que en el caso anterior llegaríamos a que el flujo correspondiente a la ecuación del campo magnético es

$$v^i B^k - v^k B^i - \beta^i B^k/\alpha. \tag{9.79}$$

Es decir, estaríamos omitiendo la contribución $\beta^k B^i/\alpha$. Este término, que debe interpretarse como una corrección de la fuerza electromotriz causada por el movimiento de la superficie respecto el observador Euleriano, debe añadirse en la expresión de los flujos.

9.8 Tests

En esta sección describiremos los resultados obtenídos con el código numérico de GRMHD en diferentes casos en los que la solución analítica es conocida con el fin de validar nuestro código numérico.

9.8.1 El test B1

Este test consiste en el problema de Riemann que se expuso en la Sección 9.2. La diferencia no radica en la modificación de las variables físicas que definen el estado inicial, sino en la modificación de las coordenadas usadas.

En la Fig. 9.2 hemos representado tres casos: el correspondiente a un espacio-tiempo plano descrito por la métrica de Minkowski, que corresponde a la línea continua y que será nuestro modelo de referencia; el correspondiente a un espacio-tiempo plano descrito por una métrica que se diferencia de la métrica de Minkowski por el hecho de contener un vector shift diferente de cero, $\beta_x = 0.4$; un último caso que corresponde a una métrica que se diferencia de la métrica de Minkowski por ser $\alpha = 2.0$ en lugar de ser igual a la unidad.

Como vemos al comparar las Figs. 9.2 y 8.10, en el caso de la métrica de Minkowski los resultados son completamente equivalentes a los obtenidos en el caso de relatividad especial ya que nuestro código de GRMHD recupera el límite de RMHD cuando la métrica se hace Minkowskiana.

Si observamos ahora los resultados correspondientes al caso de $\alpha = 2.0$ a $t = 0.2$ vemos que, como era de prever, coincide perfectamente con el caso Minkowskiano a $t = 0.4$.

Por último, el efecto del shitf no es más que producir una traslación de la solución correspondiente a shift nulo: la estructura de la solución numérica en el caso de $\beta = 0.4$ a $t = 0.4$ es la misma que la correspondiente al caso $\beta = 0$, pero desplazada hacia la izquierda una distancia igual a $\beta_x \cdot t = 0.16$.

Figura 9.2: Test B1. Realizado con el resolvedor HLL en el enfoque basado en la descomposición espectral local, 1600 celdas, rk=2, MIDMOD y cfl=0.5. Correspondiendo la línea continua al caso de espacio tiempo plano y $t = 0.4$, los triangulos al caso con $\beta_x = 0.5$ y $t = 0.4$ y los triángulos al caso con $\alpha = 2.0$ y $t = 0.2$.

Figura 9.3: Acreción esférica magnetizada. Comparación entre la solución numérica (línea sólida) y la numérica (círculos) para un modelo con $\beta = 1.0$ y calculado en una malla con $N_r = 100$, una vez se ha establecido la convergencia. Se muestran las cantidades densidad de materia (ρ), densidad de energía interna específica (ϵ), velocidad radial (v^r) y campo radial (B^r).

Figura 9.4: Error L de la densidad de masa en reposo (ρ) para una acrección esférica magnetizada en función de la resolución radial. Las líneas a trazos cortos y largos indican respectivamente la convergencia de primer y segundo orden. Los diferentes símbolos usados en la figura denotan diferentes valores para el parámetro de magnetización (β).

9.8.2 Acreción de Michel

La solución estacionaria correspondiente a un gas ideal acretado por un agujero negro de Schwarzschild fue deducida por F.C. Michel en 1972 en el caso de simetría esférica.

La solución de Michel no se ve modificada por la presencia de un campo magnético radial arbitrario con simetría esférica. Sin embargo, no todas las configuraciones de con campo radial con simetría esférica satisfacen la condición de divergencia nula. Las configuraciones que verifican esta condición son aquellas en que el campo medido por el observador Euleriano viene dado por

$$B^r = k\frac{\sqrt{1-2M/r}}{r^2} \tag{9.80}$$

donde k es una constante arbitraria y M es la masa del agujero negro de Schwarzschild. Esta solución corresponde al campo producido por un monopolo magnético de carga k situado en $r=0$, con lo cual, la condición de divergencia nula se cumple en todo el espacio excepto en el origen.

Las soluciones de acreción de Michel vienen caracterizadas por la masa del agujero negro, M, el valor de las constantes de acreción, $C_1 \equiv \rho W v^r r^2$ y $C_2 \equiv hW\left(1-\frac{2M}{r}\right)$, relacionadas con la conservación de la masa en reposo y la energía respectivamente, y por el exponente adiabático de la ecuación de estado tipo polítropo $\bar{\gamma}$.

La solución particular de acreción que hemos tomado corresponde un exponente adiabático $\bar{\gamma}=4/3$ y a los siguientes valores de las constantes de la acreción:

$$C_1 = \rho W v^r r^2 = -1.4 \qquad \text{y} \qquad C_2 = hW\left(1-\frac{2M}{r}\right) = 1. \tag{9.81}$$

A esta solución estacionaria de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista se le añade un campo magnético radial y con simetría esférica que cumpla la condición de divergencia nula como el que hemos descrito más arriba. A fin de parametrizar la intensidad del campo magnético, se define el parámetro $\beta = b^2/2p$, cociente entre la presión magnética y la del gas en un punto determinado, que se ha elegido como el correspondiente al punto crítico de la solución de Michel, es decir, aquel en el que la velocidad del sonido coincide con la velocidad de caída del fluido. En el test que hemos realizado, el valor de la coordenada radial del punto crítico es $r_c = 8.0 r_s$, donde $r_s = 2M$ es el radio de Schwarzschild.

En la Figura 9.3 se muestran los resultados de la acreción en el caso en que el parámetro β tiene el valor $\beta = 1.0$. La solución analítica corresponde a la línea sólida y la solución numérica a los círculos. Esta solución numérica ha sido obtenida al integrar numéricamente las ecuaciones de la GRMHD, partiendo de una condición inicial. En este caso se ha partido de la solución analítica y hemos integrado las ecuaciones usando el cdigo numérico descrito por un tiempo de $t = 250M$. Como vemos, nuestro código es capaz de mantener la solución estacionaria durante un periodo de tiempo largo con gran precisión.

A fin de cuantificar la precisión de nuestro código en este test, hemos calculado el error L, definido como $\mathrm{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} |Q_i - Q_{a,i}| / \sum_{i=1}^{N} Q_{a,i}$, siendo N el número de puntos de la malla numérica, Q la magnitud física elegida, que en este caso ha sido la densidad ρ, y el subíndice a hace referencia a la solución analítica. Los resultados obtenidos para diferentes valores del parámetro β que caracteriza la intensidad del campo magnético se muestran en la Fig. 9.4 en función del número de puntos de la malla. Esta gráfica nos permite, además, determinar el orden del código numérico, que en este caso resulta ser 2, independientemente del valor del parámetro β.

En la Tabla 9.8.3 se muestra el error L correspondiente a las magnitudes ρ, v^r y B^r para cada uno de los métodos que hemos usado en el cálculo de los flujos numéricos. Para construir esta tabla hemos usado 70 celdas numéricas y el valor del parámetro β se ha elegido igual a 10.0.

9.8.3 Acreción de Takahashi-Gammie

Otro test unidimensional que podemos realizar está basado en el estudio realizado por Takahashi et al. (1990) sobre los flujos de acreción estacionarios sobre agujeros negros. Este estudio fue posteriormente particularizado al caso de acreción ecuatorial en la región entre el horizonte de sucesos y la órbita circular estable más interna por Gammie (1999).

La solución obtenida por Gammie (1999) describe la acreción ecuatorial estacionaria de un gas frío magnetizado sobre un agujero negro de Kerr. El modelo asume que hay simetría axial, que el material es frío, $h \simeq 1$, y que está confinado en el plano ecuatorial. Este modelo representa un paso más en el nivel de complejidad de las ecuaciones a resolver con respecto a las que hemos utilizado en los tests anteriores ya que involucra la métrica de Kerr, aunque particularizada al plano ecuatorial. Como resultado, se añaden a las ecuaciones nuevos términos debido al mayor número de símbolos de Christoffel no nulos.

Como se describe en Gammie (1999), la solución de acreción viene determinada cuando se especifican cuatro constantes conservadas, a saber, el ritmo de acreción $F_M = 2\pi r^2 u^r \rho$, el flujo de momento angular $F_L = 2\pi T^r_\phi$, el flujo de energía $F_E = 2\pi T^r_0$ y la componente $F_{\theta\phi}$ del tensor electromagnético, que se relaciona con el flujo magnético a través de la frontera interna.

A fin de comparar con otros autores, hemos tomado como modelo inicial el usado por Gammie et al. (2003) y por De Villiers y Hawley (2003), correspondiente a la acreción por un agujero negro de Kerr que se caracteriza por una masa $M = 1$, un parámetro de momento angular $a = 0.5$, y los siguientes valores de las constantes $F_M = -1.0$, $F_L = -2.815344$, $F_E = -0.908382$, $F_{\theta\phi} = 0.5$.

La malla numérica que hemos utilizado en este test consiste en $N_r \times N_\theta$ celdas numéricas en las direcciones radial y angular respectivamente. La malla radial cubre la región entre $r_{\min} = r_{\text{horizon}} + 0.2\ r_s$ y $r_{\max} = 4.0 r_s$, mientras la malla angular contiene sólo $N_\theta = 3$ puntos que subtienden un pequeño ángulo de $10^{-5}\pi$ radianes alrededor del plano ecuatorial.

Figura 9.5: Test de acreción de Takahashi-Gammie realizado con el resolvedor HLLE, según el enfoque basado en la descomposición espectral local, utilizándose 200 celdas radiales, rk=2, reconstrucción MIDMOD y CFL=0.5.

Figura 9.6: Test de acreción de Takahashi-Gammie realizado con el resolvedor HLLE, según el enfoque basado en el principio de equivalencia, utilizándose 200 celdas, rk=2, reconstrucción MIDMOD y CFLl=0.5.

Figura 9.7: Test de Takahashi-Gammie realizado con el resolvedor tipo Roe según el enfoque basado en el principio de equivalencia, utilizándose 200 celdas, rk=2, reconstrucción MIDMOD y CFL=0.5.

Figura 9.8: Error L de la densidad de masa en reposo (ρ), la velocidad radial (v^r) y el campo toroidal (B^ϕ) para la acreción de Takahashi-Gammie en función de la resolución radial (resolvedor de Roe, según el principio de equivalencia). Las líneas a trazos cortos y largos indican respectivamente la convergencia de primer y segundo orden.

En la Figs. 9.5-9.7 se muestran los perfiles radiales de algunas variables significativas obtenidas utilizando las diferentes estrategias para la obtención de los flujos numéricos descritas en la Sección 9.7, con una malla radial de $N_r = 200$. Los círculos indican los resultados numéricos (para una de cada cuatro celdas numéricas) mientras que las líneas sólidas corresponden a la solución analítica. Se observa que la estacionariedad de la solución numérica es preservada con muy buena aproximación por el código numérico que hemos utilizado. También se puede observar que, después de evolucionar durante un largo periodo de tiempo usando nuestro código, no hay diferencias significativas entre la solución numérica y la analítica.

Con el presente test hemos obtenido también el orden de convergencia del código bajo refinamiento de malla. El orden global de convergencia se deduce de la Fig. 9.8, obteniéndose que el código es de segundo orden. Como ya ha sido comentado por Gammie et al. (2003), el empeoramiento en el orden de convergencia que se obtiene para la variable B_ϕ al refinar la malla se debe a que la condición inicial del test requiere la solución de una ecuación algebraica no lineal. Los errores en esta variable en el instante inicial son más pronunciados en el caso de un número de celdas radiales elevado.

Las prestaciones del código usando también el resolvedor HLL basado en la formulación de Pons et al. (1998) han sido también calibradas en este test. Mientras que el orden de convergencia se preserva independientemente del re-

	$\delta\rho$	δv^r	δB^r	δB^ϕ
Michel test				
HLL	3.76×10^{-3}	3.92×10^{-3}	7.64×10^{-17}	–
Roe-type	2.97×10^{-3}	3.45×10^{-3}	1.09×10^{-12}	–
Gammie test				
HLL	1.92×10^{-2}	2.54×10^{-3}	2.28×10^{-9}	1.48×10^{-3}
Roe-type	6.90×10^{-3}	3.01×10^{-3}	3.96×10^{-3}	2.14×10^{-3}

Tabla 9.1: Tets de acreción: Comparación de los errores de las magnitudes representativas para los resolvedores HLL y Roe. La columna muestra el error global cuando se ha alcanzado la solución estacionaria.

solvedor usado para calcular los flujos numéricos, la exactitud real varía significativamente. El resultado de esta comparación se muestra en Tabla 9.8.3, en donde hemos utilizado una malla con $N_r = 60$.

9.8.4 Discos gruesos de acreción alrededor de agujeros negros

Un test intrínsicamente 2-dimensional viene dado por la solución estacionaria de un disco grueso (toro) orbitando alrededor de un agujero negro. Este tipo de escenarios astrofísicos ha sido descrito por Fishbone & Moncrief (1976), Kozlowski et al. (1978) y más recientemente por Font & Daigne (2002). La configuración consiste en un fluido barøtropo ($p = p(\rho)$) en órbita circular no-Kepleriana alrededor de un agujero negro de Schwarzschild o Kerr. Estos discos pueden presentar un vértice en al plano ecuatorial a través de la cual se produce la acreción del material sobre el agujero negro.

Hemos estudiado este tipo de configuraciones de toros tanto en el caso puramente hidrodinámico (no magnetizado) como en el caso en que el campo magnético sea importante para la dinámica (toro magnetizado). Se ha supuesto que el momento angular específico (por unidad de masa), $l = -u_\phi/u_t$, es constante.

9.8.5 Toros no magnetizados

A fin de analizar las prestaciones del código numérico en el caso puramente hidrodinámico hemos considerado un modelo de toro similar al usado por De Villiers y Hawley (2003) específico $l = 4.5$. El toro orbita alrededor de un agujero negro de Schwarzschild de masa M, presentanto el máximo de densidad en $r = 15.3\,M$. El borde interior del toro está situado en $r = 9.34\,M$ y el exterior en $r = 39.52\,M$. Hemos tomado una ecuación de estado politrópica $p = K\rho^{\bar{\gamma}}$, con $\bar{\gamma} = 4/3$ y se ha tomado K de manera que la relación de masas entre el toro y el agujero negro sea de 0.07.

Figura 9.9: Error L de la densidad de masa en reposo (ρ) para un toro puramente hidrodinámico en función de la resolución radial. Las líneas a trazos cortos y largos indican respectivamente la convergencia de primer y segundo orden.

Hemos comprobado que el código es capaz de mantener la solución estacionaria al evolucionar durante un tiempo significativo del orden de 10 periodos orbitales. A partir de la Fig. 9.9 se puede deducir que el código alcanza el segundo orden de convergencia en la variable ρ para valores razonables de N, $N > 200$.

9.8.6 Toros magnetizados

Por último, hemos considerado la evolución de un toro magnetizado orbitando alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. En este caso, la solución estacionia proporciona sólo el modelo inicial ya que no hay soluciones estacionarias con campo magnético. Siguiendo la prescripción de De Villiers y Hawley (2003) hemos añadido al modelo inicial un campo magnético poloidal obtenido a partir de un potencial vector de la forma $A_\phi \propto \max(\rho/\rho_c - C, 0)$, donde ρ_c es la densidad máxima del toro y C es un parámetro libre que determina el grado de confinamiento del campo magnético dentro del toro. El modelo de toro es el mismo que el usado en la subsección anterior al que hemos añadido un campo caracterizaqdo por $C = 0.5$ de manera que el promedio de la razón entre la presión magnética y la del gas en el interior del toro es de $1.5{\times}10^{-3}$.

Los cuatro paneles de la Fig. 9.10 muestran la evolución de los isocontornos logarítmicamente espaciados de densidad de masa durante los primeros 8 periodos orbitales. En esta simulación se ha empleado el resolvedor HLL en una malla computacional de 200 celdas radiales por 100 celdas angulares. La dinámica de estos toros viene gobernada por la llamada *inestabilidad magnetorotacional* (Balbus y Hawley 1991), la cual genera turbulencias en el toro que permiten explicar el transporte del momento angular hacia afuera. En el caso axisimétrico, que es el que aquí se estudia, la inestabilidad magnetorotacional es menos significativa que en el caso de tres dimensiones y se manifiesta por la aparición del llamado *channel solution* (De Villiers y Hawley 2003). Este hecho se observa en nuestra simulación después del tercer periodo orbital. Como se muestra en la figura, tras el tercer periodo aparece una estructura elongada ded alta densidad cerca del ecuador (*channel*). En la Fig. 9.10 se muestran dos hechos adicionales que deben ser atribuidos sin ninguna duda a la aparición de la inestabilidad magnetorotacional. El primero de ellos, representado en el panel superior, muestra el transporte de momento angular, que inicialmente era constante, hacia afuera. Se observa que este momento angular se aproxima al perfil Kepleriano (línea sólida) a medida que evoluciona. En el panel inferior se muestra el rápido incremento de la presión magnética media respecto a la presión del gas durante los dos primeros periodos orbitales, debido a que la inestabilidad magnetorotacional provoca turbulencias.

Figura 9.10: Toro magnetohidrodinámico, realizado con el resolvedor HLLE bajo el enfoque basado en el pricipio de equivalencia, usándose 200 celdas radiales ($[2,5, 52,0]\, M$) y 100 celdas angulares ($[0, \pi]$).

Capítulo 10

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido el desarrollo de un código numérico para resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en relatividad especial y general basado en técnicas de *alta resolución de captura de choques* (HRSC). Este tipo de técnicas explota el carácter conservativo e hiperbólico del sistema de ecuaciones en cuestión y su introducción en el campo de hidrodinámica de relativista numérica ha supuesto un avance muy importante.

Para poder lograr este objetivo ha habido que llevar a cabo una importante tarea en aspectos tanto teóricos como numéricos de la magnetohidrodinámica relativista.

10.1 Aspectos teóricos

El núcleo de las técnicas HRSC lo constituye una discretización de las ecuaciones en forma conservativa y la evaluación de los flujos entre celdas numéricas contiguas para el avance temporal de las ecuaciones. De entre las diversas estrategias para el cálculo de dichos flujos, optamos por el desarrollo de un algoritmo basado en la descomposición espectral de las matrices jacobianas del sistema de ecuaciones.

Es precisamente en el contexto de la descomposición espectral de la RMHD en el que se han hecho contribuciones novedosas.

- Partiendo de los trabajos de referencia de Anile (1989) y Komissarov (1999a), se ha obtenido un conjunto de vectores propios *renormalizados* para la RMHD y la GRMHD que resulta ser completo tanto en los estados no degenerados como en los degenerados, generalizando el trabajo clásico de Brio y Wu (1988) para la MHD.

- En el camino hacia la obtención de esta nueva base de autovectores, se han caracterizado los dos tipos de degeneraciones de la RMHD de forma covariante, en términos de las componentes del tetravector campo magnético normal y tangencial al frente de onda de Alfven, medidas por el observador comóvil.

- Finalmente, se ha probado el carácter *no convexo* de la RMHD (tal y como ocurre en la MHD) atendiendo a la clasificación de sus campos característicos en *linealmente degenerados* o *genuinamente no lineales*.

10.2 Aspectos numéricos

- Implementación de un código HRSC de segundo orden para RMHD en relatividad especial. La extensión de las técnicas HRSC en magnetohidrodinámica relativista es muy reciente (el primer trabajo en RMHD data de 1999), por lo que la implementación de nuestro código numérico puede considerarse como novedosa. Algunos ingredientes clave en los que ha habido que trabajar son: el cálculo de los autovalores y autovectores de las matrices jacobianas del sistema; el algoritmo para mantener la divergencia del campo magnético nula; la recuperación de las variables primitivas a partir de las conservadas. En este punto, la colaboración con T. Leismann (Leismann 2005) ha resultado muy fructífera.

- Implementación de un código HRSC de segundo orden para GRMHD. Aquí, el aspecto más novedoso ha sido la utilización del principio de equivalencia para la obtención de los flujos numéricos a partir de los correspondientes flujos en relatividad especial. Esta estrategia fue propuesta por Pons et al. (1998) en el marco de la hidrodinámica relativista y ha sido extendida aquí al caso de la magnetohidrodinámica relativista.

Ambos códigos han sido sometidos a una amplia batería de tests.

10.3 Aplicaciones

Los códigos desarrollados en el presente trabajo han comenzado a aplicarse en diferentes escenarios astrofísicos como, por ejemplo,

- Chorros extragalácticos relativistas magnetizados de gran escala. Algunas simulaciones de chorros extragalácticos de gran escala se han mostrado en el Capítulo 8 de la presente Memoria. El objetivo básico es el estudio de la influencia del campo magnético en la morfología y dinámica de estos objetos.

- Chorros extragalácticos de pequeña escala. Aquí, el interés radica en el estudio de la influencia del campo magnético en la estructura de los chorros y en la interpretación de los mapas de polarización. Resultados preliminares de este tipo de estudios se han presentado en diversos congresos internacionales.

- Acreción sobre objetos compactos. En Antón et al. (2006) y en el Capítulo 9 de la presente Memoria se han mostrado simulaciones preliminares de discos de acreción magnetizados alrededor de agujeros negros abriendo el camino a futuras aplicaciones en el contexto de la formación de chorros, la estabilidad de los discos de acreción magnetizados o la emisión de ondas gravitatorias.

Apéndice A

Notación

En las siguientes líneas expondremos la notación que hemos utilizado para representar las principales variables usadas en este trabajo.

A.1 Convenios matemáticos

- Los índices griegos pueden tomar los valores $0, 1, 2, 3$ o t, x, y, z o t, r, ϕ, z o t, r, θ, ϕ dependiendo del sistema de coordenadas.
- Los indices latinos pueden tomar los valores $1, 2, 3$ o x, y, z o r, ϕ, z o r, θ, ϕ dependiendo del sistema de coordenadas.
- ln hace referencia al logaritmo en base e.
- log hace referencia al logaritmo decimal.

A.2 Variables asociadas a la métrica del espacio-tiempo

- $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico del espacio-tiempo correspondiente.
- $\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\partial_{\beta} g_{\mu\delta} + \partial_{\delta} g_{\mu\beta} - \partial_{\mu} g_{\beta\delta} \right)$ son símbolos de Christoffel asociados al tensor métrico.
- δ^{μ}_{ν} es la delta de Kronecker, que se define como

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

- $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita, que se define como

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}[\mu\nu\alpha\beta]$$

donde $[\mu\nu\alpha\beta]$ es el símbolo de Levi-Civita completamente antisimétrico.

En el contexto del formalismo 3+1 nos aparecen los siguientes elementos

- α es la función *lapse*.
- β^i es el *shift*.
- γ^{ij} es la métrica espacial.

A.3 Magnitudes físicas

- ρ es la densidad de masa en reposo del fluido.
- ϵ es la energía interna específica del fluido, es decir, energía interna por unidad de masa.
- p es la presión del fluido.
- $h = 1 + \epsilon + p/\rho$ es entalpía específica del fluido.
- s es la entropía específica.
- $\bar{\gamma}$ es el exponente adiabático, definido como

$$\bar{\gamma} = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_s$$

.

- u^α son las componentes de la tetravelocidad del fluido. Ésta satisface $u^\alpha u_\alpha = -1$.
- v^i denota las componentes de la trivelocidad. La relación existente entre v^i y u^α en relatividad especial y coordenadas cartesianas es $u^\alpha = W\left(1, v^x, v^y, v^z\right)$ donde $W = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$ es el factor de Lorentz.
- b^α es el cuadrivector campo magnético, denotaremos por $\mathbf{b}^2 \equiv b^\alpha b_\alpha$.
- El trivector campo magnético será B^i. La relación existente entre B^i y b^α es

$$b^0 = W(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}), \qquad b^i = \frac{1}{W}(B^i + W^2 v^i (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}))$$

Además se debe cumplir que: $b^\alpha u_\alpha = 0$.

- $D = \rho W$ es la densidad de masa relativista.
- $S^i = (\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u^i - b^0 b^i$ son las componentes del vector densidad de momento.
- $\tau = (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 - \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right) - (b^0)^2$ es la densidad de energía total.
- $T^{\mu\nu} = (\rho h + \mathbf{b}^2)u^\mu u^\nu + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{b^2}\right) g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu$ es el tensor impulso energía magnetohidrodinámico.
- $Z = \rho h W^2$.

A.4 Variables de la descomposición espectral

- λ es un autovalor de la matriz característica del sistema.
- $\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0)$ es el vector de ondas asociado al autovalor λ. Sin pérdida de generalidad, en todos los desarrollos teóricos lo suponemos orientado en la dirección asociada a la primera coordenada.
- $a = u^\mu \phi_\mu$.
- $\mathcal{B} = b^\mu \phi_\mu$.
- $G = \phi^\mu \phi_\mu$.
- $E = \rho h + b^2$.
- $\mathcal{A} = Ea^2 - \mathcal{B}^2$
- $N_4 = \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) a^4 - \left(\rho h + \frac{b^2}{c_s^2}\right) a^2 G + \mathcal{B}^2 G$
- $\chi = \frac{\mathcal{B}}{a}$
- $\tilde{\mathbf{U}} = (u^\alpha, b^\alpha, p, s)$ es el sistema de variables covariantes o de Anile.
- r y l denotan, respectivamente, los autovectores a derechas y a izquierdas ortogonales en el sistema de variables de Anile.
- $\mathbf{V} = (u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, \rho)$ es el sistema reducido de variables.
- $\bar{r}$ y $\bar{l}$ denotan, respectivamente, los autovectores a derechas y a izquierdas ortogonales en el sistema reducido de variables.
- $\mathbf{U} = (D, S^x, S^y, S^z, \tau, B^y, B^z)$ es el sistema de variables conservadas.
- R y L denotan, respectivamente, los autovectores a derechas e izquierdas ortogonales en el sistema de variables de conservadas.

Apéndice B

Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

En este apéndice expondremos los conceptos básicos más importantes asociados a los sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicos.

B.1 Ecuación lineal en derivadas parciales

Partamos de una ecuación lineal en derivadas parciales como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{B.1}$$

donde a es constante.

Tomemos una curva $x(t)$ definida por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a. \tag{B.2}$$

La familia de curvas que son solución de esta ecuación diferencial viene dada por las rectas paralelas

$$x(t) = x_0 + at, \tag{B.3}$$

donde x_0 es un parámetro libre.

Consideremos ahora una solución de la ecuación escalar (B.1), $u = u(t, x)$. Si calculamos el ritmo de variación de u sobre una de las curva $x = x(t)$ antes definidas, tenemos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{B.4}$$

Es decir, la variación de u sobre la curva considerada es nula y, por tanto, u es constante sobre dicha curva. La curva que cumple esta propiedad recibe el nombre de *curva característica* y el conjunto de curvas características (B.3) define el campo característico de la ecuación diferencial (B.1).

Por tanto, si conocemos el campo característico y la condición inicial $u(t = 0, x) = u_0(x)$, la solución de la ecuación diferencial (B.1) viene dada por

$$u(t,x) = u_0(x - at) = u_0(x_0). \tag{B.5}$$

Es decir, la solución de la ecuación nos dice que el perfil inicial, sea suave o discontinuo, se propaga con una velocidad a a lo largo del eje x. Por ello, a es la velocidad de propagación.

En general, si a es una función de u, $a = a(u(t,x))$, la ecuación en derivadas parciales $(B.1)$ tiene como curvas características a aquellas curvas $x(t)$ que cumplan la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a(u(t,x)). \tag{B.6}$$

Sobre estas curvas también se cumple que u, y por tanto a, son constantes. Es decir, la familia de curvas características es la siguiente

$$x = x_0 + a(u_0(x_0))t, \tag{B.7}$$

que no son más que rectas aunque, en este caso, no paralelas.

La solución de la ecuación en derivadas parciales, conocida la condición inicial y las curvas características, es formalmente

$$u(t,x) = u_0(x - a(u_0(x_0))t). \tag{B.8}$$

Si en el caso de $a =$ cte, el perfil inicial se propagaba con una velocidad constante a lo largo del eje x, en el caso $a \neq$ cte, el perfil inicial en cada punto se propaga a una velocidad distinta. Aunque, en principio, podríamos usar la solución dada en (B.8), ésta solución resulta inviable ya que quedarían indeterminada la solución en aquellos puntos en donde se cortaran las curvas características con la consiguiente aparición de discontinuidades o bien en aquellas regiones en donde las curvas caracteríticas divergieran provocando la aparición de rarefacciones.

Pasamos ahora a generalizar lo que hemos visto al caso de sistemas.

B.2 Sistemas de ecuaciones

Consideremos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de n ecuaciones con n funciones incógnita independientes, u^i,

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \sum_{i=1}^n a_i^1(t,x,u^1,\ldots,u^n)\partial_x u^i + b^1(t,x,u^1,...u^n) = 0 \\ \partial_t u^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2(t,x,u^1,\ldots,u^n)\partial_x u^i + b^2(t,x,u^1,...u^n) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial_t u^n + \sum_{i=1}^n a_i^n(t,x,u^1,\ldots,u^n)\partial_x u^i + b^n(t,x,u^1,...u^n) = 0, \end{cases} \tag{B.9}$$

donde hemos usado ∂_t (∂_x) para indicar la derivada parcial con respecto a t (x).

En forma matricial, dicho sistema se expresa como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} = 0, \tag{B.10}$$

donde $\mathbf{U} \equiv (u^1, u^2, \ldots, u^n)$, $\mathbf{B} \equiv (b^1, b^2, \ldots, b^n)$ y la matriz $\mathbf{A}$ está formada por los coeficientes a^i_j.

Se dice que el sistema es *lineal con coeficientes constantes* si los elementos de la matriz $\mathbf{A}$ y del vector $\mathbf{B}$ son constantes. Si $a^i_j = a^i_j(t,x)$ y $b^i = b^i(t,x)$ entonces el sistema *es lineal con coeficientes variables.* El sistema se considera también *lineal* si $\mathbf{B}$ depende linealmente de $\mathbf{U}$. Se dice que el sistema es *quasi-lineal* si los elementos de la matriz $\mathbf{A}$ son funciones de $\mathbf{U}$. Finalmente, el sistema es llamado *homogéneo* si $\mathbf{B} = 0$.

Los sistemas de *leyes de conservación* son sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que pueden ser escritos como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \tag{B.11}$$

donde $\mathbf{U}$ es llamado vector de variables conservadas y $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (f^1, f^2, ..., f^n)$ es el vector de flujos, siendo cada componente, f^i, función de $\mathbf{U}$.

Llamamos matriz jacobiana del sistema a la matriz

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial u^1 & .... & \partial f^1/\partial u^n \\ \partial f^2/\partial u^1 & .... & \partial f^2/\partial u^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f^n/\partial u^1 & .... & \partial f^n/\partial u^n \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

Nótese que un sistema de leyes de conservación se puede escribir como un sistema quasi-lineal aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{A}(\mathbf{U})\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}. \tag{B.13}$$

En un sistema de leyes de conservación, los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$, obtenidos por la resolución de la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \tag{B.14}$$

constituyen los autovalores del sistema y representan las velocidades de propagación de pequeñas perturbaciones.

Llamamos *autovector por la derecha*, $\mathbf{R}^i$, correspondiente al autovalor λ_i, a aquel vector que cumple la condición $\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^i = \lambda_i \mathbf{R}^i$. Similarmente, llamamos *autovector por la izquierda*, $\mathbf{L}^i$, correspondiente al autovalor λ_i, a aquel vector que cumple la condición $\mathbf{L}^i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{L}^i$.

Un sistema de ecuaciones diferenciales tal como el dado en (B.10) se dice que es *hiperbólico* en un punto (t,x) si $\mathbf{A}$ en ese punto tiene n autovalores reales y los correspondientes n autovectores son linealmente independientes. El sistema se llama *estrictamente hiperbólico* si los autovalores son todos ellos distintos entre sí.

Si un sistema es hiperbólico, la matriz jacobiana es diagonalizable. La matriz $\mathbf{R}$ cuyas columnas son los autovectores a derechas y la matriz $\mathbf{L}$ cuyas filas son los autovectores a izquierdas, cumplen las siguientes condiciones:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{\Lambda} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{L}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{I}, \tag{B.15}$$

siendo $\mathbf{\Lambda}$ la matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores.

B.2.1 Resolución de un sistema hiperbólico lineal

Un sistema hiperbólico lineal de primer orden en derivadas parciales con coeficientes constantes viene dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}=0, \tag{B.16}$$

donde $\mathbf{U}\equiv(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ y la matriz $\mathbf{A}$ está formada por los coeficientes a^i_j.

Diagonalizando la matriz $\mathbf{A}$, el sistema se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}=0, \tag{B.17}$$

donde las variables $\mathbf{W}\equiv(w^1,w^2,\ldots,w^n)$ reciben el nombre de *variables características del sistema*, cumpliéndose las siguientes relaciones:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{W}, \quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{W}=\mathbf{U}, \quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{W}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{F}. \tag{B.18}$$

Tenemos, por tanto, n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, similares a la ecuación (B.1). Como ya hemos visto, la solución del sistema conociendo las curvas características y la condición inicial en $t=0$, $w^i_0(x)$, será

$$w^i(t,x)=w^i_0(x-\lambda^i t), \tag{B.19}$$

expresión que hace evidente el hecho de que a los autovalores del sistema también se les denomina velocidades características.

La solución del sistema expresada en las variables iniciales $\mathbf{U}$, será por tanto

$$\mathbf{U}(t,x)=\mathbf{R}\cdot\mathbf{W}(t,x)=\mathbf{R}\cdot\mathbf{W}_0(x-\lambda^i t). \tag{B.20}$$

Se está ahora en condiciones de considerar el problema de Riemann en el que se basan los métodos HRSC. El problema plantea que en el instante inicial, $t=0$, las variables $\mathbf{U}$ vienen dadas por

$$\mathbf{U}=\begin{cases}\mathbf{U}_L & x<0\\ \mathbf{U}_R & x>0\end{cases},$$

es decir, presentan una discontinuidad inicial en $x = 0$. Nos interesa ahora saber el valor del vector de flujos $\mathbf{F}$ en $x = 0$ en un instante $t > 0$.

En el instante $t = 0$, las variables características presentan también una discontinuidad en $x = 0$. El valor a la izquierda de $x = 0$ viene dado por $\mathbf{W}_L$, mientras que a la derecha de $x = 0$ toman el valor $\mathbf{W}_R$. Dadas las condiciones iniciales, podemos concluir que la solución para $t > 0$ es

$$w^i(t,x) = \begin{cases} w_L^i & x < \lambda_i t \\ w_R^i & x > \lambda_i t \end{cases},$$

cuya interpretación es clara: las discontinuidades en cada variable característica se desplazan con una velocidad igual al autovalor asociado.

Como el flujo asociado a la variable característica w^i, f^i, no es más que $f^i = \lambda_i w^i$, tendremos que el flujo en $x = 0$ para $t > 0$ es

$$f^i(x=0) = \begin{cases} \lambda_i w_L^i & \text{si} \quad \lambda_i > 0 \\ \lambda_i w_R^i & \text{si} \quad \lambda_i < 0 \end{cases}. \tag{B.21}$$

Este flujo se puede escribir de forma más compacta como:

$$f^i(x=0) = \frac{1}{2}\left(\lambda_i w_L^i + \lambda_i w_R^i - \mid \lambda_i \mid \Delta w^i\right), \tag{B.22}$$

con $\Delta w^i = w_R^i - w_L^i$.

Si ahora se realiza el producto del vector de flujos con la matriz $\mathbf{R}$, se obtiene el vector de flujos en $x = 0$ para $t > 0$, correspondiente a las variables $\mathbf{U}$ del sistema inicial, $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}$

$$F^i(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\left(F_L^i + F_R^i - \sum_{j=1}^{n} \mid \lambda_j \mid \Delta w^j R_j^i\right). \tag{B.23}$$

B.3 Caracterización de los campos característicos

En general, dado un sistema hiperbólico de leyes de conservación, las velocidades características $\lambda_i(\mathbf{U})$ definen un campo característico (campo-λ_i). Clasificamos los campos característicos en dos categorías:

- Decimos que un campo-λ_i es *linealmente degenerado* si se cumple que

$$\nabla_U \lambda_i \cdot R^i = 0, \quad \forall\, \mathbf{U}. \tag{B.24}$$

  Asociadas a este tipo de campo característicos están las discontinuidades de contacto. La trayectoria seguida por una de estas discontinuidades en un diagrama $t - x$ nos muestra que es paralela a las curvas características asociadas a este campo a ambos lados de la discontinuidad.

Las discontinuidades que podamos encontrar en sistemas lineales con coeficientes constantes, son todas de este tipo y son discontinuidades que ya aparecen en el dato inicial y únicamente se propagan.

- Decimos que un campo-λ_i es *genuinamente no lineal* si se cumple que

$$\nabla_U \lambda_i \cdot R^i \neq 0, \quad \forall \mathbf{U}. \tag{B.25}$$

Asociadas a este tipo de campo característicos están las ondas de choque y las rarefacciones. La trayectoria de una onda de choque en un diagrama $t - x$ nos muestra que las curvas características asociadas a este campo convergen a la onda de choque. Por contra, en una rarefacción vemos que las curvas características divergen.

Este tipo de discontinuidades, las podremos encontrar en sistemas quasilineales. Podrán aparecer en la solución inicial, en cuyo caso se porpagarán o surgir de la evolución de soluciones iniciales continuas.

Apéndice C

Descomposición espectral de la MHD

El estudio de las ecuaciones linearizadas de la MHD para pequeñas perturbaciones permite la definición de tres tipos diferentes de ondas que propagarán las pertubaciones. Estas ondas, que vienen caracterizadas por sus velocidades de propagación, se clasifican en ondas *magnetosónicas rápidas*, *magnetosónicas lentas* y ondas *de Alfvén*. En el caso en que las ondas se desplacen en la dirección positiva del eje x, sus velocidades, respecto del fluido, serán

- Ondas magnetosónicas rápidas

$$v_f = \frac{1}{2}\left\{ c_s^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\rho} + \sqrt{\left(c_s^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\rho}\right)^2 - 4c_s^2\frac{B_x^2}{\rho}} \right\}^{1/2}. \tag{C.1}$$

- Ondas magnetosónicas lentas

$$v_s = \frac{1}{2}\left\{ c_s^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\rho} - \sqrt{\left(c_s^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\rho}\right)^2 - 4c_s^2\frac{B_x^2}{\rho}} \right\}^{1/2}. \tag{C.2}$$

- Ondas de Alfvén

$$v_a = \sqrt{\frac{B_x^2}{\rho}}. \tag{C.3}$$

En las expresiones anteriores, c_s es la velocidad del sonido en el fluido, que para un gas ideal es

$$c_s = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}. \tag{C.4}$$

Nótese que si las ondas se propagan en la dirección negativa del eje x, las velocidades resultan ser iguales en módulo pero de signo contrario. Cada una de estas ondas tendrá propiedades distintas y sus velocidades de propagación están asociadas a los autovalores de la matriz jacobiana del sistema, como veremos a continuación

C.1 Autovalores y autovectores de la MHD

Las ecuaciones de la MHD forman un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólico. Ello implica que la propagación de las perturbaciones siguen las llamadas curvas características. Estas curvas vienen definidas por los autovalores de la matriz jacobiana del sistema. Si realizamos la descomposición espectral de esta matriz jacobiana correspondiente a la propagación en la dirección del eje x (Brio y Wu 1988), se obtiene que los autovalores son

$$\lambda_f = v_x \pm v_f, \tag{C.5}$$

$$\lambda_a = v_x \pm v_a, \tag{C.6}$$

$$\lambda_s = v_x \pm v_s, \tag{C.7}$$

$$\lambda_e = v_x, \tag{C.8}$$

donde λ_e es el autovalor que llamaremos entrópico, λ_a serán los autovalores de Alfvén, λ_s y λ_f son, respectivamente, los autovalores magnetosónicos lentos y rápidos y v_x es la componente x de la velocidad del fluido.

Un ligero análisis de estas expresiones, nos permite ver que si $B_x = 0$, tenemos una quíntuple degeneración ($\lambda_s = \lambda_a = \lambda_e$). Por otro lado, si $B_y = B_z = 0$ tenemos que una de las ondas magnetosónicas coincidará con una de las ondas de Alfvén. Concretamente se cumple que

$$\begin{cases} \lambda_s = \lambda_a & \text{si } B_x^2/\rho < c_s^2 \\ \lambda_s = \lambda_a & \text{si } B_x^2/\rho > c_s^2 \\ \lambda_s = \lambda_a = \lambda_f & \text{si } B_x^2/\rho = c_s^2 \end{cases} \tag{C.9}$$

Los autovectores por la derecha de la matriz jacobiana, según la renormalización propuesta por Brio & Wu (1988) son

$$R_{v_x \pm v_f} = \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \\ \alpha_f(v_x \pm v_f) \\ \\ \alpha_f v_y \mp \alpha_s \beta_y v_a \mathrm{sign}(B_x) \\ \\ \alpha_f v_z \mp \alpha_s \beta_y v_a \mathrm{sign}(B_x) \\ \\ \frac{\alpha_s \beta_y v_f}{\sqrt{\rho}} \\ \\ \frac{\alpha_s \beta_y v_f}{\sqrt{\rho}} \\ \\ \alpha_f \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} + g_f^{\pm} \end{pmatrix}, \tag{C.10}$$

$$R_{v_x \pm v_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \mp \beta_z \mathrm{sign}(B_x) \\ \\ \pm \beta_y \mathrm{sign}(B_x) \\ \\ \frac{\beta_z}{\sqrt{\rho}} \\ \\ -\frac{\beta_y}{\sqrt{\rho}} \\ \\ \mp(\beta_z v_y - \beta_y v_z) \mathrm{sign}(B_x) \end{pmatrix}, \tag{C.11}$$

$$R_{v_x \pm v_s} = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \\ \alpha_s(v_x \pm v_s) \\ \\ \alpha_s v_y \pm \alpha_f \beta_y c_s \mathrm{sign}(B_x) \\ \\ \alpha_s v_z \pm \alpha_f \beta_y c_s \mathrm{sign}(B_x) \\ \\ -\frac{\alpha_f \beta_y c_s^2}{\sqrt{\rho}} \\ \\ -\frac{\alpha_f \beta_z c_s^2}{\sqrt{\rho}} \\ \\ \alpha_s \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} + g_s^{\pm} \end{pmatrix}, \tag{C.12}$$

$$R_{v_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \\ 0 \\ \frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2} \end{pmatrix}, \tag{C.13}$$

donde se ha definido

$$\alpha_f = \frac{\sqrt{v_f^2 - v_a^2}}{\sqrt{v_f^2 - v_s^2}}, \qquad \alpha_s = \frac{\sqrt{v_f^2 - c_s^2}}{\sqrt{v_f^2 - v_s^2}} \tag{C.14}$$

(tomando $\alpha_f = \alpha_s = 1$ si $B_y, B_z = 0$ y $v_a = c_s$),

$$\beta_y = \frac{B_y}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}}, \qquad \beta_z = \frac{B_z}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} \tag{C.15}$$

(tomando $\beta_y = \beta_z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, si $B_y, B_z = 0$).
Por último, se ha definido

$$g_f^{\pm} = \frac{\alpha_f v_f^2}{\gamma - 1} \pm \alpha_f v_f v_x \mp \alpha_s v_a \mathrm{sign}(B_x)(\beta_y v_y + \beta_z v_z) + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}\alpha_f (v_f^2 - c_s^2), \tag{C.16}$$

$$g_s^{\pm} = \frac{\alpha_s v_s^2}{\gamma - 1} \pm \alpha_s v_s v_x \pm \alpha_f c_s \mathrm{sign}(B_x)(\beta_y v_y + \beta_z v_z) + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}\alpha_s (v_s^2 - c_s^2). \tag{C.17}$$

Los vectores propios por la izquierda de la matriz jacobiana son

$$L^T_{v_x \pm v_f} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_f}{4\theta_1} c_s^2 v^2 \mp \frac{1}{2\theta_2}\Big(\alpha_f c_s v_x \text{sign}(B_x) - \alpha_s v_s(\beta_y v_y + \beta_z v_z)\Big) \\ -\frac{\alpha_f}{2\theta_1} c_s^2 v_x \pm \frac{\alpha_f c_s}{2\theta_2} \text{sign}(B_x) \\ -\frac{\alpha_f}{2\theta_1} c_s^2 v_y \mp \frac{\alpha_s \beta_y v_s}{2\theta_2} \\ -\frac{\alpha_f}{2\theta_1} c_s^2 v_z \mp \frac{\alpha_s \beta_z v_s}{2\theta_2} \\ \frac{\alpha_s}{2\theta_1} \beta_y v_f \left(v_s^2 + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} c_s^2\right)\sqrt{\rho} \\ \frac{\alpha_s}{2\theta_1} \beta_z v_f \left(v_s^2 + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} c_s^2\right)\sqrt{\rho} \\ \frac{\alpha_f}{2\theta_1} c_s^2 \end{pmatrix}, \quad \text{(C.18)}$$

$$L^T_{v_x \pm v_a} = \begin{pmatrix} \pm\frac{\beta_z v_y - \beta_y v_z}{2} \text{sign}(B_x) \\ 0 \\ \mp\frac{\beta_z}{2} \text{sign}(B_x) \\ \pm\frac{\beta_y}{2} \text{sign}(B_x) \\ \frac{\beta_z \sqrt{\rho}}{2} \\ -\frac{\beta_y \sqrt{\rho}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(C.19)}$$

$$L^T_{v_x \pm v_s} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_s}{4\theta_1} c_f^2 v^2 \mp \frac{1}{2\theta_2}\Big(\alpha_s v_a v_x \text{sign}(B_x) - \alpha_f v_f(\beta_y v_y + \beta_z v_z)\Big) \\ -\frac{\alpha_s}{2\theta_1} c_f^2 v_x \pm \frac{\alpha_s v_a}{2\theta_2} \text{sign}(B_x) \\ -\frac{\alpha_s}{2\theta_1} c_f^2 v_y \pm \frac{\alpha_f \beta_y v_f}{2\theta_2} \\ -\frac{\alpha_s}{2\theta_1} c_f^2 v_z \pm \frac{\alpha_f \beta_z v_f}{2\theta_2} \\ -\frac{\alpha_f}{2\theta_1} \beta_y v_f \left(v_f^2 + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} c_s^2\right)\sqrt{\rho} \\ -\frac{\alpha_f}{2\theta_1} \beta_z v_f \left(v_f^2 + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} c_s^2\right)\sqrt{\rho} \\ \frac{\alpha_s}{2\theta_1} c_f^2 \end{pmatrix}, \quad \text{(C.20)}$$

$$L_{v_x}^T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha_f^2 c_s^2 + \alpha_s^2 v_f^2}{2\theta 1} v^2 \\ \frac{\alpha_f^2 c_s^2 + \alpha_s^2 v_f^2}{\theta 1} v_x \\ \frac{\alpha_f^2 c_s^2 + \alpha_s^2 v_f^2}{\theta 1} v_y \\ \frac{\alpha_f^2 c_s^2 + \alpha_s^2 v_f^2}{\theta 1} v_z \\ \frac{1}{\theta_1} \alpha_f \alpha_s \beta_y v_f (v_f^2 - c_s^2) \sqrt{\rho} \\ \frac{1}{\theta_1} \alpha_f \alpha_s \beta_z v_f (v_f^2 - c_s^2) \sqrt{\rho} \\ -\frac{1}{\theta_1} (\alpha_f^2 c_s^2 + \alpha_s^2 v_f^2) \end{pmatrix}, \tag{C.21}$$

donde se ha definido

$$\theta_1 = \alpha_f^2 c_s^2 \Big(c_f^2 + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} c_s^2 \Big) + \alpha_s^2 v_f^2 \Big(c_s^2 + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} c_s^2 \Big), \tag{C.22}$$

$$\theta_2 = \alpha_f^2 v_f c_s \text{sign}(B_x) + \alpha_s v_s v_a \text{sign}(B_x), \tag{C.23}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \tag{C.24}$$

C.2 Caracterización de los campos de la MHD

De acuerdo con la clasificación de los campos característicos dada en el apéndice anterior, los campos asociados a los autovalores de Alfven y entrópico son linealmente degenerados. Sin embargo, los campos asociaos a los autovalores magnetosónicos no tienen un carácter definido, dado que cambian de genuinamente no lineales a linealmente degenerados en las degeneraciones (Brio y Wu 1988).

Apéndice D

RMHD en coordenadas cilíndricas y esféricas

El el capítulo 4 se escribieron las ecuaciones de la RMHD utilizando coordenadas cartesianas. Sin embargo, en muchas aplicaciones de interés en astrofísica es más conveniente utilizar otras coordenadas más adaptadas a la simetría del problema, como las coordenadas cilíndricas o las esféricas. Por esta razón, escribiremos a continuación las ecuaciones de la RMHD en estas coordenadas.

D.1 Coordenadas cilíndricas

Al describir mediante coordenadas cilíndricas un espacio-tiempo plano, a cada punto del espacio-tiempo se le asocia una base de vectores $(\partial_t, \partial_r, \partial_\phi, \partial_z)$. El tensor métrico del espacio ($g_{\mu,\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu$), en coordenadas cilíndricas es

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{D.1}$$

El determinante de la métrica es

$$g = -r^2. \tag{D.2}$$

Los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r \qquad y \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}. \tag{D.3}$$

Sabiendo todo esto, se pueden ya escribir explícitamente las ecuaciones de la RMHD en coordenadas cilídricas. Sin embargo, recordemos que clásicamente cuando trabajamos en coordenadas cilídricas se suele usar una base ortonormal de vectores. En relatividad especial también es posible realizar el cambio a la generalización a 4 dimensiones de esa base ortonormal: $(e_{\hat{0}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\phi}}, e_{\hat{z}})$. La relación entre ambas bases viene dada por

$$\partial_0 = e_{\hat{0}} \quad , \qquad \partial_r = e_{\hat{r}}, \qquad \partial_\phi = r e_{\hat{\phi}}, \qquad \partial_z = e_{\hat{z}}. \tag{D.4}$$

Así, tomando como ejemplo la tetravelocidad, se cumple que,

$$\mathbf{u} = u^0\partial_0 + u^r\partial_r + u^\phi\partial_\phi + u^z\partial_z = u^{\hat{0}}e_{\hat{0}} + u^{\hat{r}}e_{\hat{r}} + u^{\hat{\phi}}e_{\hat{\phi}} + u^{\hat{z}}e_{\hat{z}}. \tag{D.5}$$

Es decir, la relación entre las componentes de los distintos vectores expresadas en las dos bases es

$$u^0 = u^{\hat{0}}, \qquad u^r = u^{\hat{r}}, \qquad r u^\phi = u^{\hat{\phi}}, \qquad u^z = u^{\hat{z}}. \tag{D.6}$$

Entonces, si desarrollamos las ecuaciones de la RMHD utilizando la base ortonormal, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\, r\,\mathbf{F}^r(\mathbf{U})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{F}^\phi(\mathbf{U})}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathbf{F}^z(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \tag{D.7}$$

donde

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{c} \rho W \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{r}} - b^{\hat{0}} b^{\hat{r}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{0}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{z}} - b^{\hat{0}} b^{\hat{z}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 - \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^{\hat{0}})^2 \\ B^{\hat{r}} \\ B^{\hat{\phi}} \\ B^{\hat{z}} \end{array} \right), \tag{D.8}$$

$$\mathbf{F}^r(\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{c} \rho W v^{\hat{r}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)(W v^{\hat{r}})^2 + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^{\hat{r}})^2 \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{z}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{z}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{r}} - b^{\hat{0}} b^{\hat{r}} \\ 0 \\ B^{\hat{\phi}} v^{\hat{r}} - B^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} \\ B^{\hat{z}} v^{\hat{r}} - B^{\hat{r}} v^{\hat{z}} \end{array} \right), \tag{D.9}$$

$$\mathbf{F}^{\phi}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho W v^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)(W v^{\hat{\phi}})^2 + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^{\hat{\phi}})^2 \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\phi}} v^{\hat{z}} - b^{\hat{\phi}} b^{\hat{z}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{0}} b^{\hat{\phi}} \\ B^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - B^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} \\ 0 \\ B^{\hat{z}} v^{\hat{\phi}} - B^{\hat{\phi}} v^{\hat{z}} \end{pmatrix} \tag{D.10}$$

$$\mathbf{F}^{z}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho W v^{\hat{z}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{z}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{z}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\phi}} v^{\hat{z}} - b^{\hat{\phi}} b^{\hat{z}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{z}} - b^{\hat{0}} b^{\hat{z}} \\ B^{\hat{r}} v^{\hat{z}} - B^{\hat{z}} v^{\hat{r}} \\ B^{\hat{\phi}} v^{\hat{z}} - B^{\hat{\phi}} v^{\hat{z}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{D.11}$$

y

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left((\rho h + \mathbf{b}^2)(W v^{\hat{\phi}})^2 + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^{\hat{\phi}})^2\right)/r \\ \left((\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\phi}}\right)/r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (v^{\hat{r}} B^{\hat{\phi}} - v^{\hat{\phi}} B^{\hat{r}})/r \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{D.12}$$

D.2 Coordenadas esféricas

Al igual que en el caso de coordenadas cilíndricas, cuando se describe mediante coordenadas esféricas un espacio-tiempo plano, a cada punto del espacio-tiempo se le asocia una base de vectores $(\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi)$. El tensor métrico del espacio $(g_{\mu,\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu)$, en coordenadas esféricas es

El tensor métrico asociado a las coordenadas esféricas es

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r\sin\theta)^2 \end{pmatrix} \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(r\sin\theta)^2 \end{pmatrix} \tag{D.13}$$

siendo el determinante de la métrica

$$g = -r^4 \sin^2\theta. \tag{D.14}$$

Los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad , \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta, \tag{D.15}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} \quad y \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta.$$

Al igual que en el caso anterior, se está ya en condiciones de escribir explícitamente las ecuaciones de la RMHD en coordenadas esféricas. Sin embargo, también clásicamente cuando trabajamos en coordenadas esféricas se suele usar otra base de ortonormal de vectores. En relatividad general también es posible realizar el cambio a la generalización a 4 dimensiones de esa base ortonormal: $(e_{\hat{0}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}})$. La relación entre ambas bases viene dada por

$$\partial_0 = e_{\hat{0}} \quad , \quad \partial_r = e_{\hat{r}}, \quad \partial_\theta = re_{\hat{\theta}} \quad , \quad \partial_z = r\sin\theta e_{\hat{\phi}}. \tag{D.16}$$

Así, tomando otra vez el ejemplo de la tetravelocidad, se cumple que,

$$\mathbf{u} = u^0\partial_0 + u^r\partial_r + u^\theta\partial_\theta + u^\phi\partial_\phi = u^{\hat{0}}e_{\hat{0}} + u^{\hat{r}}e_{\hat{r}} + u^{\hat{\theta}}e_{\hat{\theta}} + u^{\hat{\phi}}e_{\hat{\phi}}. \tag{D.17}$$

Es decir, la relación entre las componentes de los distintos vectores expresadas en las dos bases es

$$u^0 = u^{\hat{0}} \quad , \quad u^r = u^{\hat{r}}, \quad ru^\theta = u^{\hat{\theta}}, \quad r\sin\theta\, u^\phi = u^{\hat{\phi}}. \tag{D.18}$$

Entonces, si desarrollamos las ecuaciones de la RMHD utilizando la base ortonormal, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\, r^2\,\mathbf{F}^r(\mathbf{U})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\,\mathbf{F}^\theta(\mathbf{U})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{F}^\phi(\mathbf{U})}{\partial\phi} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \tag{D.19}$$

donde

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{c} \rho W \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{r}} - b^0 b^{\hat{r}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{\theta}} - b^0 b^{\hat{\theta}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 v^{\hat{\phi}} - b^0 b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)W^2 - \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^0)^2 \\ B^{\hat{r}} \\ B^{\hat{\theta}} \\ B^{\hat{\phi}} \end{array} \right), \tag{D.20}$$

$$\mathbf{F}^r(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho W v^{\hat{r}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)(W v^{\hat{r}})^2 + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - b^{\hat{r}} b^{\hat{r}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\theta}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\theta}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} - b^0 b^{\hat{r}} \\ 0 \\ B^{\hat{\theta}} v^{\hat{r}} - B^{\hat{r}} v^{\hat{\theta}} \\ B^{\hat{\phi}} v^{\hat{r}} - B^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} \end{pmatrix}, \tag{D.21}$$

$$\mathbf{F}^\theta(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho W v^{\hat{\theta}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\theta}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\theta}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)(W v^{\hat{\theta}})^2 + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - b^{\hat{\theta}} b^{\hat{\theta}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{\theta}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\theta}} - b^0 b^{\hat{\theta}} \\ B^{\hat{r}} v^{\hat{\theta}} - B^{\hat{r}} v^{\hat{\theta}} \\ 0 \\ B^{\hat{\phi}} v^{\hat{\theta}} - B^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}} \end{pmatrix} \tag{D.22}$$

$$\mathbf{F}^\phi(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho W v^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{r}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}} - b^{\hat{\theta}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2)(W v^{\hat{\phi}})^2 + \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - b^{\hat{\phi}} b^{\hat{\phi}} \\ (\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 v^{\hat{\phi}} - b^0 b^{\hat{\phi}} \\ B^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} - B^{\hat{\phi}} v^{\hat{r}} \\ B^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}} - B^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{D.23}$$

y

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Big((\rho h + \mathbf{b}^2) W ((v^{\hat{\theta}})^2 + (v^{\hat{\phi}})^2) + 2\left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - (b^{\hat{\theta}})^2 - (b^{\hat{\phi}})^2\Big)/r \\ -\Big((\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 \big(v^{\hat{r}} v^{\hat{\theta}} - (v^{\hat{\phi}})^2 \cot\theta\big) - \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right)\cot\theta - b^{\hat{r}} b^{\hat{\theta}} + (b^{\hat{\phi}})^2 \cot\theta\Big)/r \\ -\Big((\rho h + \mathbf{b}^2) W^2 \big(v^{\hat{r}} v^{\hat{\phi}} + v^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}} \cot\theta\big) - b^{\hat{r}} b^{\hat{\phi}} - b^{\hat{\theta}} b^{\hat{\phi}} \cot\theta\Big)/r \\ 0 \\ (v^{\hat{r}} B^{\hat{\theta}} - v^{\hat{\theta}} B^{\hat{r}})/r \\ \Big(-2(v^{\hat{\phi}} B^{\hat{r}} - v^{\hat{r}} B^{\hat{\phi}}) + \cot\theta (v^{\hat{\theta}} B^{\hat{\phi}} - v^{\hat{\phi}} B^{\hat{\theta}})\Big)/r \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{D.24}$$

Apéndice E

RMHD en el sistema de variables de Anile

En las siguientes líneas, expondremos brevemente el proceso de obtención de las ecuaciones de la RMHD en el sistema de variables covariantes o de Anile (Anile 1989). Para ello partiremos de las expresiones tensoriales de las ecuaciones

$$\nabla_\mu \rho u^\mu = 0 \tag{E.1}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{E.2}$$

$$\nabla_\mu \big(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu \big) = 0 \tag{E.3}$$

Si ahora realizamos las siguientes contracciones, obtenemos

$$u_\nu \nabla_\mu \big(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu \big) = 0 \Longrightarrow u^\mu u^\nu \nabla_\mu b_\nu + \nabla_\nu b^\nu = 0 \tag{E.4}$$

$$b_\nu \nabla_\mu \big(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu \big) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} u^\mu \nabla_\mu \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^2 \nabla_\nu u^\nu - b^\mu b^\nu \nabla_\mu u^\nu = 0 \tag{E.5}$$

$$u_\mu \nabla_\nu T^{\nu\mu} = 0 \Longrightarrow u^\nu \nabla_\nu \rho (1 + \epsilon) + \rho h \nabla_\nu u^\nu = 0, \tag{E.6}$$

donde, para la obtención de esta última ecuación (E.6), se ha usado la ecuación (E.5). Ahora, a partir de esta ecuación (E.6), la de conservación de la masa (E.1) y la primera ley de la termodinámica,

$$T ds = d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho, \tag{E.7}$$

obtenemos la llamada condición adiabática, que podemos escribir como

$$u^\mu \nabla_\mu s = 0. \tag{E.8}$$

Introduciendo en (E.6) la definición de velocidad del sonido y aplicando (E.8) se tiene que

$$\frac{1}{c_s^2} u^\mu \nabla_\mu p + \rho h \nabla_\mu u^\mu = 0. \tag{E.9}$$

Si realizamos la siguiente contracción obtenemos

$$b_\mu \nabla \nu T^{\nu\mu} = 0 \Longrightarrow u^\mu u^\nu \nabla_\mu b_\nu - \frac{b^\nu}{\rho h} \nabla_\nu p = 0, \tag{E.10}$$

donde se ha utilizado (E.4) para obtener la expresión final.

Si ahora realizamos la contracción $h_{\mu\nu} \nabla_\alpha T^{\alpha\nu}$, siendo el proyector $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, y usando las ecuaciones (E.4), (E.5), (E.6) y (E.10), obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} &E u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - b^\alpha \nabla_\alpha b^\mu + \big(h^{\mu\alpha} + u^\mu u_\alpha\big) b_\nu \nabla_\alpha b^\nu \\ &+ \frac{1}{\rho h} \left(\rho h \, h^{\mu\alpha} - \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} u^\mu u^\alpha + b^\mu b^\alpha \right) \nabla_\alpha p = 0. \end{aligned} \tag{E.11}$$

Por último, podemos reescribir la ecuación (E.3), como

$$u^\alpha \nabla_\alpha b^\beta - b^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + \frac{1}{\rho h} \left(-\frac{b^\beta u^\alpha}{c_s^2} + u^\beta b^\alpha \right) \nabla_\alpha p = 0. \tag{E.12}$$

El sistema de ecuaciones resultante al tomar las ecuaciones (E.8), (E.9), (E.11) y (E.12) es el que define la RMHD en el sistema extendido de variables definido por Anile (4.24)

$$\tilde{U} = (u^\alpha, b^\beta, p, s)^T.$$

Si escribimos este sistema de ecuaciones de forma matricial como ya hicimos en el Capítulo 4.3 obtenemos que las ecuaciones de la RMHD son

$$A_c^{\alpha a} \nabla_\alpha \tilde{U}^c = 0 \qquad \text{con} \qquad a, c = 0, ...9 \quad \alpha = 0, ...4,$$

donde

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} E u^\alpha \delta^\mu_\nu & -b^\alpha \delta^\mu_\nu + P^{\mu\alpha} b_\nu & l^{\mu\alpha} & 0^{\mu\alpha} \\ b^\alpha \delta^\mu_\nu & -u^\alpha \delta^\mu_\nu & f^{\mu\alpha} & 0^{\mu\alpha} \\ \rho h \delta^\alpha_\nu & 0^\alpha_\nu & u^\alpha / c_s^2 & 0^\alpha \\ 0^\alpha_\nu & 0^\alpha_\nu & 0^\alpha & u^\alpha \end{pmatrix} \tag{E.13}$$

y se han definido

$$P^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} + 2 u^\mu u^\alpha, \tag{E.14}$$

$$l^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} + \frac{1}{\rho h}\left(\left(\rho h - \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2}\right) u^\mu u^\alpha + b^\alpha b^\mu\right), \tag{E.15}$$

$$f^{\mu\alpha} = \frac{1}{\rho h}\left(\frac{b^\mu u^\alpha}{c_s^2} - u^\mu b^\alpha\right). \tag{E.16}$$

Apéndice F

Diagramas de Jeffrey y Taniuti

Al contrario de lo que ocurre en la hidrodinámica clásica (HD) donde la velocidad de propagación de las ondas en un fluido homogéneo y en reposo no depende de la dirección de propagación, en el caso de la MHD, la existencia de un campo magnético conduce a una dependencia de la velocidad de las ondas con la dirección de propagación.

Para visualizar dicha dependencia, A. Jeffrey y T. Taniuti (1966) propusieron unos diagramas en coordenadas polares donde se representaba la velocidad de propagación de las ondas. Dada una dirección de propagación, se representa en el diagrama el extremo del vector velocidad, cuyo módulo viene dado por el valor absoluto del autovalor correspondiente. Repitiendo el proceso para distintas direcciones se obtienen las curvas que constituyen el diagrama.

Si uno realiza los diagramas de Jeffrey y Taniuti correspondientes a un fluido en reposo en el caso de la MHD, observa dos simetrías. La primera de ellas es una simetría de revolución alrededor de la dirección que marca el campo magnético, lo que justifica realizar la representación restringiéndonos a un plano que contenga al campo magnético. Convencionalmente, y sin pérdida de generalidad, se toma el eje x como direción del campo magnético. La segunda simetría es especular respecto al plano ortogonal a la dirección del campo magnético. Tanto la dirección del campo magnético como su plano ortogonal marcan también las direcciones donde se presentan las degeneraciones. El plano ortogonal marca la degeneración caracterizada porque el campo longitudinal a la dirección dada es nulo y la dirección x nos marca la degeneración caracterizada porque el campo transversal a esta dirección es nulo.

En el caso de la RMHD, si el fluido está en reposo, tenemos diagramas similares a los de la MHD, véase los diagramas de las Figs. F.1, F.2 y F.3. En estos diagramas podemos ver que en la dirección Y se da la degeneración de tipo I y en la dirección X la degeneración de tipo II. Concretamente, estos diagramas nos muestran cada uno de los tres subtipos de degeneración de tipo II que existen,

Figura F.1: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el estado $\rho = 1.0 \epsilon = 1.0, v^x = 0.0, v^y = 0.0, v^z = 0.0, B^x = 5.0, B^y = 0.0, B^z = 0.0$. Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetsónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén y con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento. Al autovalor entrópico correspondeúnicamente el origen, punto (0,0).

Figura F.2: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el estado $\rho = 1.0, \epsilon = 50.0, v^x = 0.0, v^y = 0.0, v^z = 0.0, B^x = 5.0, B^y = 0.0, B^z = 0.0$. Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetsónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén y con linea rojo discontinua el autovalor magnetosónico lento. Al autovalor entrópico corresponde únicamente el origen, punto (0,0).

Figura F.3: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el estado $\rho = 1.0, \epsilon = 37.864, v^x = 0.0, v^y = 0.5, v^z = 0.0, B^x = 5.0, B^y = 0.0, B^z = 0.0$. Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetosónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén y con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento. Al autovalor entrópico corresponde únicamente el origen, punto (0,0).

Figura F.4: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el estado $\rho = 1.0, \epsilon = 50.0, v^x = 0.9, v^y = 0.0, v^z = 0.0, B^x = 5.0, B^y = 0.0, B^z = 0.0$. Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetosónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén, con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento y con línea negra continua el autovalor entrópico.

Figura F.5: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el estado $\rho = 1.0, \epsilon = 1, v^x = 0.0, v^y = -0.50, v^z = 0.0, B^x = 5.0, B^y = 0.0, B^z = 0.0$. Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetosónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén, con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento y con línea negra continua el autovalor entrópico.

Figura F.6: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el mismo estado que el de la figura (F.5). Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetosónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén y con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento. Al autovalor entrópico en este plano corresponde unicamente el origen, punto (0,0).

Figura F.7: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el estado $\rho = 1.0, \epsilon = 1.0, v^x = 0.634, v^y = 0.634, v^z = 0.0, B^x = 5.0, B^y = 0.0, B^z = 0.0$. Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetosónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén, con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento y con línea negra continua el autovalor entrópico.

Figura F.8: Diagrama de Jeffrey y Taniuti para el mismo estado que en la figura (F.7). Con línea negra discontinua se ha marcado la curva asociada al autovalor magnetosónico rápido, con línea amarilla continua el correspondiente al autovalor de Alfvén y con linea roja discontinua el autovalor magnetosónico lento. y con línea negra continua el autovalor entrópico.

ya sea que el autovalor de Alfvén coincida con el magnetosónico rápido, Fig. F.1, o con el magnetosónico lento, Fig. F.2 o con ambos, Fig. F.3. Como en el caso de la MHD, estos diagramas también presentan simetría de revolución sobre el eje X y simetría especular respecto al eje Y (o más precisamente respecto al plano YZ).

Si el fluido no está en reposo, se perderá la simetría de estos diagramas. Por ejemplo, si tomamos $v^x \neq 0$, al ser la velocidad y el campo paralelos entre sí, conservaremos la simetría de revolución, aunque ya no la especular, como podemos observar en la Fig. F.4. Ademś, la degeneración de tipo II se da en la dirección del eje X y la degeneración de tipo I en el plano YZ. Recuérdese que en este tipo de figura, para conocer los autovalores en una dirección dada deberemos trazar esa dirección de manera que pase por el punto $(0, 0)$.

Cuando la velocidad no es colineal al campo magnético, se pierde la simetría de revolución respecto al eje X. Podemos observar este hecho en los diagramas de las Figs. F.5 y F.6, ambos correspondientes al mismo estado, pero el primero muestra las velocidades en el plano XY y el segundo en el plano XZ. En este caso particular, donde la velocidad es ortogonal al campo magnético preservamos sin embargo la simetría especular respecto al plano XZ, plano que, además, marca la degeneración de tipo I. Respecto a la degeneración de tipo II, es de remarcar que en el diagrama del plano YZ no se observa. En el diagrama del plano XY, esta degeneración se da en dos direcciones diferentes y en cada una de estas direcciones únicamente nos coinciden un autovalor de Alfvén con uno magnetosónico rápido, siendo el otro autovalor de Alfvén no degenerado para la dirección considerada.

Si abordamos un caso más general, como el que se muestra en las Figs. F.7 y F.8 vemos que en el plano XY no se aprecia ninguna simetría. Sobre el eje Y encontramos la degeneración de tipo I, en el punto $(0.0, 0.634)$ e igual que en el caso anterior la degeneración de tipo II no está sobre una única dirección. Si bien puede parecer que hemos perdido toda simetría, queda aún una simetría especular definida sobre el plano que definen los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{v}$, el XY en este ejemplo, que es el plano que hemos estado analizando. Como podemos apreciar si miramos la Fig. F.8, donde representamos el plano XZ, la simetría especular es clara. Nótese que en las dos figuras analizadas, se muestra la dirección X y que los autovalores sobre dicha dirección son los mismos.

Apéndice G

Caracterización de los campos de la RMHD

Al igual que hemos hecho en el caso de la MHD, procederemos en este apéndice al estudio de los campos caracteríisticos de la RMHD. Para ello trabajaremos en el sistema de variables definido por Anile: $\tilde{\mathbf{U}} = (u^\alpha, b^\alpha, p, s)$. Empezaremos con el autovalor entrópico, continuaremos con los de Alfvén y acabaremos con los magnetosónicos. Como veremos, el resultado de este análisis es similar al obtenido en el caso de la MHD.

G.1 Autovalor entrópico

El autovalor entrópico es

$$\lambda_e = v^x = \frac{u^x}{u^0}. \tag{G.1}$$

Si calculamos el gradiente de este autovalor respecto del sistema de variables de Anile obtenemos

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\lambda_e = \left(\frac{-u^x}{(u^0)^2}, \frac{1}{u^0}, 0, 0, 0^\alpha, 0, 0\right). \tag{G.2}$$

Recordando que

$$r_e = (0^\alpha, 0^\alpha, 0, 1), \tag{G.3}$$

vemos que el producto escalar del autovector y el gradiente es nulo

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\lambda_e \cdot r_e = 0. \tag{G.4}$$

Por tanto, el campo característico asociado a este autovalor es linealmente degenerado, al igual que sucedía en el caso de la MHD.

G.2 Autovalores de Alfvén

Los autovalores de Alfvén vienen dados por la expresión

$$\lambda_a = \frac{b^x \pm u^x\sqrt{E}}{b^0 \pm u^0\sqrt{E}}. \tag{G.5}$$

Si calculamos su gradiente, obtenemos

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\lambda_a = \frac{1}{(b^0 \pm u^0\sqrt{E})^2}\begin{pmatrix} \mp\sqrt{E}(b^x \pm u^x\sqrt{E} \\ \pm\sqrt{E}(b^0 \pm u^0\sqrt{E} \\ 0 \\ 0 \\ -(b^x \pm u^x\sqrt{E}) \mp \frac{b^0}{\sqrt{E}}(B_x) \\ (b^0 \pm u^0\sqrt{E}) \mp \frac{b^x}{\sqrt{E}}(B_x) \\ \mp\frac{b^y}{\sqrt{E}}B_x \\ \mp\frac{b^z}{\sqrt{E}}B_x \\ \mp\frac{\partial_p E}{\sqrt{2E}}B_x \\ \mp\frac{\partial_S E}{\sqrt{2E}}B_x \end{pmatrix}. \tag{G.6}$$

Recordando que

$$r_a = (a\, g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma\delta\mu}u^\gamma b^\delta \phi^\mu, \mathcal{B}\, g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma\delta\mu}u^\gamma b^\delta \phi^\mu, 0, 0) \equiv (a\,\xi^\alpha, \mathcal{B}\,\xi^\alpha, 0, 0), \tag{G.7}$$

el producto escalar entre al autovector y el gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\lambda_a \cdot r_a = \frac{1}{(b^0 \pm u^0\sqrt{E})^2}&\Big(\pm\sqrt{E}a(-(b^x \pm u^x\sqrt{E})\xi^0 + \\ (b^0 \pm u^0\sqrt{E})\xi^1) + (\pm B_x)\mathcal{B}(\xi^\alpha b_\alpha) &+ \mathcal{B}(-(b^x \pm u^x\sqrt{E})\xi^0 \\ &+ (b^0 \pm u^0\sqrt{E})\xi^1)\Big). \end{aligned} \tag{G.8}$$

Esta expresión es nula ya que $\xi^\alpha b_\alpha = 0$ por las propiedades de antisimetría del tensor de Levi-Civita y por ser $\xi^1 = \lambda_a \xi^0$.

Así pues, al igual que en el caso de la MHD, los campos característicos asociados a los autovalores de Alfvén son linealmente degeneradas.

G.3 Autovalores magnetosónicos

La ecuación $N_4 = 0$, (4.41), nos da los valores propios magnetosónicos y se puede escribir de la forma

$$\lambda^4 C_4 + \lambda^3 C_3 + \lambda^2 C_2 + \lambda C_1 + C_0 = 0, \tag{G.9}$$

donde los coeficientes se definen como

$$C_4 = (u^0)^4 \rho h(1 - c_s^2) + (u^0)^2(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2) - c_s^2 (b^0)^2, \tag{G.10}$$

$$C_3 = -4u^x (u^0)^3 \rho h(1 - c_s^2) - 2u^0 u^x (\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2) + 2c_s^2 b^0 b^x, \tag{G.11}$$

$$\begin{aligned} C_2 = 6(u^x)^2(u^0)^2 \rho h(1 - c_s^2) - ((u^0)^2 - (u^x)^2)\Big(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2\Big) \\ + c_s^2 \Big((b^0)^2 - (b^x)^2\Big), \end{aligned} \tag{G.12}$$

$$C_1 = -4(u^x)^3 u^0 \rho h(1 - c_s^2) + 2u^0 u^x (\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2) - 2c_s^2 b^0 b^x, \tag{G.13}$$

$$C_0 = (u^x)^4 \rho h(1 - c_s^2) - (u^x)^2 (\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2) + c_s^2 (b^x)^2. \tag{G.14}$$

Para determinar la derivada de λ respecto a una cierta variable V, derivamos la ecuación anterior respecto de dicha variable, obteniéndo

$$\partial_V \lambda = -\frac{\lambda^4 \partial_V C_4 + \lambda^3 \partial_V C_3 + \lambda^2 \partial_V C_2 + \lambda \partial_V C_1 + \partial_V C_0}{4C_4 \lambda^3 + 3C_3 \lambda^2 + 2C_2 \lambda + C_1} \equiv -\frac{Q_V}{P_\lambda}. \tag{G.15}$$

En el cálculo del gradiente del autovalor, la variable V serán las distintas variables que componen el sistema de Anile.

G.3.1 Las funciones Q_V

En esta subsección procederemos a determinar las funciones Q_V necesarias para calcular el gradiente del autovector:

- Función derivada respecto de $\mathbf{u^0}$

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial u^0} = 4(u^0)^3 \rho h(1 - c_s^2) + 2u^0 (\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.16}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial u^0} = -12(u^0)^2 u^x \rho h(1-c_s^2) - 2u^x(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.17}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial u^0} = 12u^0(u^x)^2 \rho h(1-c_s^2) - 2u^0(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.18}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial u^0} = -4(u^x)^3 \rho h(1-c_s^2) + 2u^x(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.19}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial u^0} = 0. \tag{G.20}$$

Agrupando y simplificando obtenemos

$$Q_{u^0} = 2\lambda a\big(-2\rho h(1-c_s^2)a^2 + (\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2)G\big). \tag{G.21}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{u^x}$

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial u^x} = 0, \tag{G.22}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial u^x} = -4(u^0)^3 \rho h(1-c_s^2) - 2u^0(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.23}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial u^x} = 12u^x(u^0)^2 \rho h(1-c_s^2) + 2u^x(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.24}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial u^x} = -12(u^x)^2 u^0 \rho h(1-c_s^2) + 2u^0(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2), \tag{G.25}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial u^x} = 4(u^x)^3 \rho h(1-c_s^2) - 2u^x(\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2). \tag{G.26}$$

Agrupando y simplificando, obtenemos

$$Q_{u^x} = 2a\big(2\rho h(1-c_s^2)a^2 - (\rho h c_s^2 + \mathbf{b}^2)G\big). \tag{G.27}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{u^y}$

  En este caso, tenemos que las derivadas parciales son

$$\frac{\partial C_4}{\partial u^y} = \frac{\partial C_3}{\partial u^y} = \frac{\partial C_2}{\partial u^y} = \frac{\partial C_1}{\partial u^y} = \frac{\partial C_0}{\partial u^y} = 0. \tag{G.28}$$

  Es decir, la función resultante es

$$Q_{u^y} = 0. \tag{G.29}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{u^z}$

  En este caso, como en el anterior, tenemos que

$$\frac{\partial C_4}{\partial u^z} = \frac{\partial C_3}{\partial u^z} = \frac{\partial C_2}{\partial u^z} = \frac{\partial C_1}{\partial u^z} = \frac{\partial C_0}{\partial u^z} = 0. \tag{G.30}$$

  Por lo tanto, también la función resultante es

$$Q_{u^z} = 0. \tag{G.31}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{b^0}$

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial b^0} = -2b^0((u^0)^2 + c_s^2), \tag{G.32}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial b^0} = 4u^0 u^x b^0 + 2b^x c_s^2, \tag{G.33}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial b^0} = 2b^0((u^0)^2 - (u^x)^2 + c_s^2), \tag{G.34}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial b^0} = -4u^0 u^x b^0 - 2b^x c_s^2, \tag{G.35}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial b^0} = 2(u^x)^2 b^0. \tag{G.36}$$

  Agrupando y simplificando obtenemos la expresión

$$Q_{b^0} = 2G\big(\,b^0 a^2 - c_s^2 \mathcal{B}\lambda\,\big) \tag{G.37}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{b^x}$

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial b^x} = 2(u^0)^2 b^x, \tag{G.38}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial b^x} = -4u^0 u^x b^x + 2b^0 c_s^2, \tag{G.39}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial b^x} = -2b^x((u^0)^2 - (u^x)^2 + c_s^2), \tag{G.40}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial b^x} = 4u^0 u^x b^x - 2b^0 c_s^2, \tag{G.41}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial b^x} = -2b^x(c_s^2 + (u^x)^2). \tag{G.42}$$

  Agrupando y simplificando obtenemos la expresión

$$Q_{b^x} = 2G\big(- b^x a^2 + c_s^2 \mathcal{B}\big). \tag{G.43}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{b^y}$

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial b^y} = 2(u^0)^2 b^y, \tag{G.44}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial b^y} = -4u^0 u^x b^y, \tag{G.45}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial b^y} = -2((u^0)^2 - (u^x)^2) b^y, \tag{G.46}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial b^y} = 4u^0 u^x b^y, \tag{G.47}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial b^y} = -2(u^x)^2 b^y. \tag{G.48}$$

  Agrupando y simplificando obtenemos

$$Q_{b^y} = -2b^y a^2 G. \tag{G.49}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{b^z}$

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial b^z} = 2(u^0)^2 b^z, \tag{G.50}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial b^z} = -4u^0 u^x b^z, \tag{G.51}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial b^z} = -2((u^0)^2 - (u^x)^2) b^z, \tag{G.52}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial b^z} = 4u^0 u^x b^z, \tag{G.53}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial b^z} = -2(u^x)^2 b^z. \tag{G.54}$$

  Agrupando y simplificando obtenemos

$$Q_{b^z} = -2b^z a^2 G. \tag{G.55}$$

- Función derivada respecto $\mathbf{p}$

  Las deivadas parciales de los coeficientes son

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_4}{\partial p} &= ((u^0)^4(1-c_s^2) + (u^0)^2 c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial p} \\ &+ (-\rho h (u^0)^4 + (u^0)^2 \rho h - (b^0)^2)\frac{\partial c_s^2}{\partial p},\end{aligned} \tag{G.56}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_3}{\partial p} &= (-4(u^0)^3 u^x (1-c_s^2) - 2u^0 u^x c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial p} + \\ &+ (4\rho h (u^0)^3 u^x - 2u^0 u^x \rho h + 2b^0 b^x)\frac{\partial c_s^2}{\partial p},\end{aligned} \tag{G.57}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_2}{\partial p} &= (6(u^0)^2(u^x)^2(1-c_s^2) - ((u^0)^2 - (u^x)^2)c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial p} + \\ &+ (-6\rho h (u^0)^2 (u^x)^2 - ((u^0)^2 - (u^x)^2)\rho h - ((b^0)^2 - (b^x)^2))\frac{\partial c_s^2}{\partial p},\end{aligned} \tag{G.58}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial p} = (-4u^0(u^x)^3(1-c_s^2) + 2u^0u^xc_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial p} + (4\rho h u^0(u^x)^3 + 2u^0u^x\rho h - 2b^0b^x)\frac{\partial c_s^2}{\partial p}, \tag{G.59}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial p} = ((u^x)^4(1-c_s^2) - (u^x)^2c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial p} + (-\rho h(u^x)^4 - (u^x)^2\rho h + (b^x)^2)\frac{\partial c_s^2}{\partial p}. \tag{G.60}$$

Agrupando y simplificando obtenemos

$$Q_p = \big((1-c_s^2)a^4 - c_s^2Ga^2\big)\frac{\partial \rho h}{\partial p} - \big(\rho h a^2(a^2+G) - \mathcal{B}^2G\big)\frac{\partial c_s^2}{\partial p}. \tag{G.61}$$

- Función derivada respecto s

  Las derivadas parciales de los coeficientes son

$$\frac{\partial C_4}{\partial s} = ((u^0)^4(1-c_s^2) + (u^0)^2c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial s} + (-\rho h(u^0)^4 + (u^0)^2\rho h - (b^0)^2)\frac{\partial c_s^2}{\partial s}, \tag{G.62}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial s} = (-4(u^0)^3u^x(1-c_s^2) - 2u^0u^xc_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial s} + + (4\rho h(u^0)^3u^x - 2u^0u^x\rho h + 2b^0b^x)\frac{\partial c_s^2}{\partial s}, \tag{G.63}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial s} = (6(u^0)^2(u^x)^2(1-c_s^2) - ((u^0)^2 - (u^x)^2)c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial s} + + (-6\rho h(u^0)^2(u^x)^2 - ((u^0)^2 - (u^x)^2)\rho h - (b^0 - b^x))\frac{\partial c_s^2}{\partial s}, \tag{G.64}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial s} = (-4u^0(u^x)^3(1-c_s^2) + 2u^0u^xc_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial s} + (4\rho h u^0(u^x)^3 + 2u^0u^x\rho h - 2b^0b^x)\frac{\partial c_s^2}{\partial s}, \tag{G.65}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial s} = ((u^x)^4(1-c_s^2) - (u^x)^2 c_s^2)\frac{\partial \rho h}{\partial s} +$$
$$(-\rho h(u^x)^4 - (u^x)^2\rho h + (b^x)^2)\frac{\partial c_s^2}{\partial s}. \quad \text{(G.66)}$$

Agrupando y simplificando obtenemos

$$Q_s = \big((1-c_s^2)a^4 - c_s^2 G a^2\big)\frac{\partial \rho h}{\partial s} - \big(\rho h a^2(a^2+G) - \mathcal{B}^2 G\big)\frac{\partial c_s^2}{\partial s}. \quad \text{(G.67)}$$

G.3.2 $\nabla\lambda \cdot R_\lambda$

Si escribimos el autovector magnetosónico como (Komissarov 1999a)

$$R_\lambda = (K^\mu, R^\mu, a\mathcal{A}, 0), \quad \text{(G.68)}$$

donde

$$a = u^\mu \phi_\mu, \quad \text{(G.69)}$$

$$\mathcal{A} = Ea^2 - \mathcal{B}, \quad \text{(G.70)}$$

$$K^\mu = \frac{c_s^2 - 1}{c_s^2}\left(\frac{a^4}{G}(\phi^\mu + a u^\mu) - \frac{a^2\mathcal{B}}{\rho h} b^\mu\right), \quad \text{(G.71)}$$

$$R^\mu = \frac{\mathcal{B}}{a}K^\mu + \frac{\mathcal{A}}{\rho h}\left(\frac{a}{c_s^2}b^\mu - \mathcal{B}u^\mu\right), \quad \text{(G.72)}$$

con

$$\mathcal{B} = b^\mu\phi_\mu \quad , \quad E = \rho h + \mathbf{b}^2 \quad \text{y} \quad G = \phi^\mu\phi_\mu. \quad \text{(G.73)}$$

Finalmente, tras un largo cálculo podemos escribir el producto escalar entre al vector gradiente y el autovector

$$\nabla_{\tilde{U}}\lambda \cdot R_\lambda = \left\{a^2\left(\frac{4a^2}{c_s^2} + \frac{\partial \rho h}{\partial p}\right)\Big(a^2 - c_s^2(a^2+G)\Big) + 2(1-c_s^2)a^6\right.$$
$$\left. - \frac{2b^2a^4}{\rho h c_s^2} + \frac{2\mathcal{B}^2 G a^4}{\rho h} - \big(\rho h a^2(a^2+G) + \mathcal{B}^2 G\big)\frac{\partial c_s^2}{\partial p}\right\}$$
$$\cdot \frac{-a\mathcal{A}}{4C_4\lambda^3 + 3C_3\lambda^2 + 2C_2\lambda + C_1}. \quad \text{(G.74)}$$

Podemos observar que el factor común del numerador es $a\mathcal{A}$. Esto implica que en los casos que el autovalor sea degenerado esta cantidad es cero (en las degeneraciones de tipo I, $a = 0$ y en las degeneraciones de tipo II, $\mathcal{A} = 0$). Por otro lado, sabemos que en el límite hidrodinámico, los autovalores exteriores convergen a los sónicos, que son campos genuínamente no lineales, con lo que el producto $\nabla_{\tilde{U}} \lambda \cdot R_\lambda$ no se anula en este límite.

Con estos datos, al igual que en el caso de la MHD (Brio y Wu 1988), podemos afirmar que los campos asociados a los autovalores magnetosónicos no tienen un carácter genuinamente no lineal o linealmente degenerado definido, por lo que el sistema de la RMHD no es convexo.

Apéndice H

Estudio de la función $\mathcal{B}/a$

En este apéndice estudiaremos el comportamiento de la función $\mathcal{B}/a$ cuando nos acercamos a estados que presentan degeneración de sus valores propios. Recordemos que esta función se define como

$$\frac{\mathcal{B}}{a} \equiv \frac{b^x - \lambda b^0}{u^x - \lambda u^0}. \tag{H.1}$$

El interés se debe a que esta función se utiliza en el Capítulo 6 para la renormalización de los autovectores de Alfvén y magnetosónicos en el caso de la degeneración de tipo I. Recordemos que este tipo de degeneración sucede cuando $B^x = 0$, y entonces, los autovalores de Alfvén y los magnetosónicos lentos son iguales a v^x. La función $\mathcal{B}/a$ presenta, por tanto una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Estudiemos qué sucede con el límite de esta función para cada autovalor.

H.1 Autovalor de Alfvén λ_a

Si recordamos que los autovalores de Alfvén vienen dados por la expresión

$$\lambda_{a\pm} = \frac{b^x \pm u^x\sqrt{E}}{b^0 \pm u^0\sqrt{E}}, \tag{H.2}$$

sustituyendo en la ecuación (H.1) y tras un sencillo cálculo se obtiene

$$\frac{\mathcal{B}(\lambda_{a\pm})}{a(\lambda_{a\pm})} = \frac{b^x - \lambda_{a\pm} b^0}{u^x - \lambda_{a\pm} u^0} = \mp\sqrt{E}. \tag{H.3}$$

El resultado obtenido, $\mp\sqrt{E}$, es una función que está bien definido para cualquier estado físico y es siempre distinta de cero. Por ello, a la hora de evaluar la función $\mathcal{B}/a$ para los autovalores de Alfvén, es conveniente utilizar esta expresión (H.3) ya que evita el problema de la indeterminación en el caso de la degeneración de tipo I.

H.2 Autovalor magnetosónicos λ_m

Partiendo de la ecuacón característica de los autovalores magnetosónicos,

$$N_4 \equiv \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right) a^4 - \left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} \right) a^2 G + \mathcal{B}^2 G = 0,$$

despejando, obtenemos que

$$\left(\frac{\mathcal{B}}{a} \right)^2 = \left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} \right) - \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right) \frac{a^2}{G}. \tag{H.4}$$

En el límite de la degeneración de tipo I, vemos que

$$\lim_{\lambda \to v^x} \left(\frac{\mathcal{B}}{a} \right)^2 = \rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} > 0. \tag{H.5}$$

Nótese que si bien en este caso $\lambda_s = \lambda_a = v^x$, no se obtiene el mismo límite para la función $\mathcal{B}/a$ que en el caso de los autovalores de Alfven, salvo que $c_s^2 = 1$.

Esta igualdad no es propiamente dicha la que queríamos evaluar, $\mathcal{B}/a$, sino su cuadrado. Así, tendremos que realizar la raiz cuadrada:

$$\frac{\mathcal{B}}{a} = \pm \sqrt{\left(\rho h + \frac{\mathbf{b}^2}{c_s^2} \right) - \rho h \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right) \frac{a^2}{G}}, \tag{H.6}$$

donde queda por resolver cómo determinamos el signo. Si consideramos que en las degeneraciones de tipo II, la función está bien definida, entonces ésta ha de ser igual para las ondas de Alfvén y magnetosónicas que estén degeneradas. De aquí se deduce que el signo de la raíz de una pareja de autovalores magnetosónicos (λ_f y λ_s) debe ser igual al de autovalor de Alfvén comprendido entre ambos autovalores.

En refuerzo a esta argumentación está el estudio analítico que podemos hacer de la función (H.4) como función de λ:

1. Se puede determinar que la función (H.4), como función de λ, es continua en $]-1, 1[$.

2. La función presenta dos asíntotas verticales en $\lambda = -1$ y en $\lambda = 1$, cuyos límites laterales en -1^+ y 1^- son iguales a $-\infty$.

3. Si calculamos la derivada de la función (H.4) respecto de λ, se obtiene que

$$\partial_\lambda \left(\frac{\mathcal{B}}{a} \right) \propto \frac{(v^x - \lambda)(\lambda v^x - 1)}{(1 - \lambda^2)^2}. \tag{H.7}$$

   Vemos que la derivada se anula únicamente en el punto $\lambda = v^x$, que es un máximo local de la función. Por tanto, en el intervalo $]-1, v^x[$ la función es monótona creciente y en el intervalo $]v^x, 1[$ es monótona decreciente.

4. A partir de las propiedades de monotonía de la función se deduce que

$$\lambda_f^- \leq \lambda_s^- \Longrightarrow \left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)^2_{f-} \leq \left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)^2_{s-} \tag{H.8}$$

$$\lambda_s^+ \leq \lambda_f^+ \Longrightarrow \left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)^2_{s+} \geq \left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)^2_{f+}. \tag{H.9}$$

5. A partir de las propiedades de monotonicidad de la función se deduce que existen dos raíces de la función en el intervalo $]-1,1[$. Estas dos raíces, que denotaremos por (λ_0), verifican la ecuación

$$\begin{aligned}\lambda_0^2(\Omega + (1-\Omega)(u^0)^2) - 2\lambda_0 u^0 u^x (1-\Omega) - \\ - (\Omega - (1-\Omega)(u^x)^2 = 0,\end{aligned} \tag{H.10}$$

donde definimos $\Omega = c_s^2 + c_a^2 - c_a^2 c_s^2$ y siendo $c_a^2 = \mathbf{b}^2/E$.

Despejando obtenemos

$$\lambda_0^{\pm} = \frac{u^0 u^x (1-\Omega) \pm \sqrt{\Omega\left(\Omega + (1-\Omega)((u^0)^2 - (u^x)^2)\right)}}{\Omega + (1-\Omega)(u^0)^2}. \tag{H.11}$$

Teniendo en cuenta la monoticidad de la función (H.4) y del hecho que $(\mathcal{B}/a)^2 \geq 0$ para los autovalores magnetosónicos rápidos, λ_f, se deduce que $\lambda_0^{\pm}$ son cotas inferior y superior al conjunto de autovalores.

La igualdad entre $\lambda_0^{\pm}$ y los autovalores magnetosónicos rápidos se producirá cuando se cumpla que $B^x = 0$ y $b^0 = 0$, ya que en este caso, $\mathcal{B}(\lambda_f) = 0$ y $a(\lambda_f) \neq 0$.

Apéndice I

Autovectores en Relatividad General

Como ya se ha descrito en la Sección 9.7.2, se puede aplicar el principio de equivalencia para construir códigos robustos y de altas prestaciones de magnetohidrodinámica en Relatividad General haciendo uso de los de resolvedores desarrollados para la magnetohidrodinámica en Relatividad Especial. Cabe pensar, por tanto, que el interés práctico por obtener los autovectores (en variables conservadas) de la magnetohidrodinámica en Relatividad General será reducido. Aun así, creemos que puede tener interés por completitud. Procederemos pues a exponer la obtención de estos autovectores.

Partiremos de las expresiones de los autovectores correspondientes al sistema de variables de Anile que, al estar en forma covariante, son válidos para cualquier métrica. A partir de aquí seguiremos el mismo procedimiento que en los Capítulos 5, 6 y 7, a fin de obtener los autovectores en los sistemas de variables correspondientes.

I.1 Matriz del cambio de variables de Anile a conservadas

A fin de obtener los vectores propios a derechas en el sistema de variables conservadas partiendo del sistema de variables de Anile, debemos proceder, en primer lugar, a la obtención de la matriz del cambio.

El sistema de variables de Anile es el siguiente:

$$\tilde{\mathbf{U}} = (u^\alpha, b^\alpha, p, s). \tag{I.1}$$

Las variables conservadas vienen dadas por la ecuación (9.41), aunque debido a la condición de divergencia nula del campo magnético, debemos considerar sólo siete de estas variables ya que las tres componentes del campo están ligadas pos la relación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Para obtener los autovectores correspondientes a los autovalores estudiados en la Sección 9.3 en la que considerábamos ondas propagándose en la dirección del eje x, el sistema de variables conservadas que debemos utilizar es el siguiente:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha\rho u^0 \\ \alpha(\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u_x - \alpha b^0 b_x \\ \alpha(\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u_y - \alpha b^0 b_y \\ \alpha(\rho h + \mathbf{b}^2)u^0 u_z - \alpha b^0 b_z \\ \alpha^2(\rho h + \mathbf{b}^2)(u^0)^2 - \left(p + \frac{\mathbf{b}^2}{2}\right) - \alpha^2 (b^0)^2 \\ B^y \\ B^z \end{pmatrix}. \tag{I.2}$$

La matriz del cambio la obtendremos derivando las variables conservadas respecto de las variables de Anile, $\partial\mathbf{U}/\partial\tilde{\mathbf{U}}$. Realizando estas derivadas obtenemos la siguiente matriz de dimensión 10×7:

$$\left(\begin{array}{ccccc} \alpha\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha E(u_x + g_{x0}u^0) & \alpha E u^0 g_{xx} & \alpha E u^0 g_{xy} & \alpha E u^0 g_{xz} & \alpha(2g_{o\mu}b^\mu u^0 u_x - b_x - b^0 g_{0x}) \\ \alpha E(u_y + g_{yo}u^0) & \alpha E u^0 g_{xy} & \alpha E u^0 g_{yy} & \alpha E u^0 g_{yz} & \alpha(2g_{0\mu}b^\mu u^0 u_y - b_y - b^0 g_{0y}) \\ \alpha E(u_z + g_{zo}u^0) & \alpha E u^0 g_{xz} & \alpha E u^0 g_{yz} & \alpha E u^0 g_{zz} & \alpha(2g_{0\mu}b^\mu u^0 u_z - b_z - b^0 g_{0z}) \\ 2\alpha^2 E u^0 & 0 & 0 & 0 & (2\alpha^2 u^0 u^0 - 1)g_{0\mu}b^\mu - 2\alpha^2 b^0 \\ \alpha b^y & 0 & -\alpha b^0 & 0 & -\alpha u^y \\ \alpha b^z & 0 & 0 & -\alpha b^0 & -\alpha u^z \end{array} \right. \ldots$$

$$\ldots \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha(2g_{x\mu}b^\mu u^0 u_x - b^0 g_{xx}) & \alpha(2g_{y\mu}b^\mu u^0 u_x - b^0 g_{xy}) & \alpha(2g_{z\mu}b^\mu u^0 u_x - b^0 g_{xz}) \\ \alpha(2g_{x\mu}b^\mu u^0 u_y - b^0 g_{yx}) & \alpha(2g_{y\mu}b^\mu u^0 u_y - b^0 g_{yy}) & \alpha(2g_{z\mu}b^\mu u^0 u_y - b^0 g_{yz}) \\ \alpha(2g_{x\mu}b^\mu u^0 u_z - b^0 g_{zx}) & \alpha(2g_{y\mu}b^\mu u^0 u_z - b^0 g_{zy}) & \alpha(2g_{z\mu}b^\mu u^0 u_z - b^0 g_{zz}) \\ (2\alpha^2 u^0 u^0 - 1)g_{x\mu}b^\mu & (2\alpha^2 u^0 u^0 - 1)g_{y\mu}b^\mu & (2\alpha^2 u^0 u^0 - 1)g_{z\mu}b^\mu \\ 0 & \alpha u^0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha u^0 \end{array} \ldots$$

$$\ldots \left. \begin{array}{cc} \alpha\partial_p \rho u^0 & \alpha\partial_s \rho u^0 \\ \alpha\partial_p(\rho h)u^0 u_x & \alpha\partial_s(\rho h)u^0 u_x \\ \alpha\partial_p(\rho h)u^0 u_y & \alpha\partial_s(\rho h)u^0 u_y \\ \alpha\partial_p(\rho h)u^0 u_z & \alpha\partial_s(\rho h)u^0 u_z \\ \alpha^2\partial_p(\rho h)u^0 u^0 - 1 & \alpha^2\partial_s(\rho h)u^0 u^0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \tag{I.3}$$

donde ∂_p denota derivada parcial respecto de p de la variable termodinámica correspondiente manteniendo la entropía constante y ∂_s denota derivada parcial respecto a s a p constante.

Como ya vimos en el Capítulo 5, la obtención de esta matriz del cambio depende de la elección que hagamos al expresar las variables conservadas en función de las variables de Anile. Esta elección no es única ya que podemos hacer uso de las ligaduras para cambiar la forma funcional de las variables conservadas. Recordemos, sin embargo, que los autovectores en variables conservadas no dependerán de esta elección.

I.2 Descomposición en el espacio ortogonal

Al igual que en el caso de relatividad restringida, antes de abordar la renormalización de los autovectores debemos caracterizar y dotar de una base al espacio ortogonal a **u**. El proceso es similar al de RMHD (véase la Sección 4.6). El primer paso consiste en deducir cúal es la dirección de propagación de la onda, ν, respecto al observador comóvil.

Si el vector de onda considerado es

$$\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0), \tag{I.4}$$

correspondiente al caso de propagación en la dirección del eje x, lo cual es consistente con la elección de variables conservadas dada más arriba, las componentes contravariantes serán

$$\phi^\mu = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} \lambda + \beta^x \\ -(\lambda+\beta^x)\beta^x + \alpha^2\gamma^{xx} \\ -(\lambda+\beta^x)\beta^y + \alpha^2\gamma^{xy} \\ -(\lambda+\beta^x)\beta^z + \alpha^2\gamma^{xz} \end{pmatrix}. \tag{I.5}$$

Siguiendo el mismo proceso que en relatividad restringida, se deduce que el vector que da la dirección de propagación de la onda, ν, respecto al observador comóvil, u^μ, es

$$\nu^\mu = \frac{\phi^\mu + a u^\mu}{\sqrt{G + a^2}}. \tag{I.6}$$

Tomaremos este vector como uno de los integrantes de la base. Para completarla se proponen los vectores

$$\psi_{1\mu} = \epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} u^\beta \phi^\gamma \tau_z^\delta, \qquad \text{con} \quad \tau_z^\delta = (0, 0, 0, 1) \tag{I.7}$$

y

$$\psi_{2\mu} = \epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} u^\beta \phi^\gamma \tau_y^\delta, \qquad \text{con} \quad \tau_y^\delta = (0, 0, 1, 0). \tag{I.8}$$

Desarrollando las expresiones, obtenemos

$$\psi_{1\mu} = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} (\lambda+\beta^x)(-u^x\beta^y + u^y\beta^x) + \alpha^2(\gamma^{yx}u^x - \gamma^{xx}u^y) \\ (\lambda+\beta^x)(u^0\beta^y + u^y) - \alpha^2 u^0\gamma^{xy} \\ (\lambda+\beta^x)(-u^x - u^0\beta^x) + \alpha^2 u^0\gamma^{xx} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{I.9}$$

$$\psi_{2\mu} = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} (\lambda+\beta^x)(u^x\beta^z - u^z\beta^x) + \alpha^2(-\gamma^{zx}u^x + \gamma^{xx}u^z) \\ (\lambda+\beta^x)(-u^0\beta^z - u^z) + \alpha^2 u^0\gamma^{xz} \\ 0 \\ (\lambda+\beta^x)(u^x + u^0\beta^x) - \alpha^2 u^0\gamma^{xx} \end{pmatrix}. \tag{I.10}$$

Las componentes contravariante de dichos vectores serán

$$\psi_1^\mu = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} -u_y\gamma_{zz} + u_z\gamma_{yz} \\ \lambda(-u_y\gamma_{zz} + u_z\gamma_{yz}) \\ \lambda(u_x\gamma_{zz} - u_z\gamma_{xz}) + u_0\gamma_{zz} - u_z\beta_z \\ \lambda(-u_x\gamma_{yz} + u_y\gamma_{xz}) - u_0\gamma_{yz} + u_y\beta_z \end{pmatrix}, \tag{I.11}$$

$$\psi_2^\mu = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} -u_y\gamma_{yz} + u_z\gamma_{yy} \\ \lambda(-u_y\gamma_{yz} + u_z\gamma_{yy}) \\ \lambda(u_x\gamma_{yz} - u_z\gamma_{xy}) + u_0\gamma_{yz} - u_z\beta_y \\ \lambda(-u_x\gamma_{yy} + u_y\gamma_{xy}) - u_0\gamma_{yy} - u_y\beta_y \end{pmatrix}. \tag{I.12}$$

Así, los vectores ν, $\boldsymbol{\psi_1}$ y $\boldsymbol{\psi_2}$ forman una base del espacio ortogonal a u^μ. Las relaciones de ortogonalidad entre estos vectores son

$$\nu_\mu\nu^\mu = 1 \quad , \quad \nu_\mu\psi_1^\mu = 0 \quad , \quad \nu_\mu\psi_2^\mu = 0, \tag{I.13}$$

$$\psi_1^\mu\psi_{1\mu} \equiv \frac{\psi_{11}}{g} = \frac{-1}{g}\Big(G(\gamma_{zz} + u_zu_z) + a^2\gamma_{zz}\Big), \tag{I.14}$$

$$\psi_1^\mu\psi_{2\mu} \equiv \frac{\psi_{12}}{g} = \frac{-1}{g}\Big(G(\gamma_{yz} + u_yu_z) + a^2\gamma_{yz}\Big), \tag{I.15}$$

$$\psi_2^\mu\psi_{2\mu} \equiv \frac{\psi_{22}}{g} = \frac{-1}{g}\Big(G(\gamma_{yy} + u_yu_y) + a^2\gamma_{yy}\Big). \tag{I.16}$$

Pertenecientes a este espacio vectorial son los vectores $\epsilon^{\nu\beta\gamma\delta}\phi_\beta u_\gamma b_\delta$ y b^μ. Deberemos calcular las expresiones de estos vectores en esta base. Comenzaremos con el vector $\epsilon^{\nu\beta\gamma\delta}\phi_\beta u_\gamma b_\delta$. Por las propiedades de antisimetría de la densidad tensorial de Levi-Civita, sabemos que se debe cumplir que

$$\epsilon^{\mu\beta\gamma\delta}\phi_\beta u_\gamma b_\delta = h_1\psi_1^\mu + h_2\psi_2^\mu, \tag{I.17}$$

y a partir de esta ecuación determinamos los valores de h_1 y h_2,

Figura I.1: Esquema del espacio ortogonal a $\mathbf{u}$. Se muestra la base ν, $\psi_{\mathbf{1}}$ y $\psi_{\mathbf{2}}$, se esquematiza la descomposición del campo magnético en componente normal y tangencial al frente de ondas, y la descoposición del vector $\epsilon \equiv \epsilon^{\nu\beta\gamma\delta}\phi_\beta u_\gamma b_\delta$.

$$h_1 = \Bigg[\lambda\Big(\gamma_{yy}(u_x b_z - u_z b_y) - \gamma_{yz}(u_x b_y - u_y b_x) - \gamma_{xy}(u_y b_z - u_z b_y)\Big)$$
$$+ \gamma_{yy}(u_o b_z - u_z b_0) - \gamma_{yz}(b_y u_0 - b_0 u_y) + (u_y b_z - u_z b_y)\beta_y\Bigg] \cdot$$
$$\Bigg[\Big(u_x(\gamma_{zz}\gamma_{yy} - \gamma_{yz}\gamma_{yz}) + u_y(-\gamma_{zz}\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\gamma_{yz}) + u_z(-\gamma_{xz}\gamma_{yy} + \gamma_{yz}\gamma_{xy})$$
$$\Big)\lambda + u_0(\gamma_{yy}\gamma_{zz} - \gamma_{yz}\gamma_{yz}) + \beta_y(u_z\gamma_{yz} - u_y\gamma_{zz}) + \beta_z(u_y\gamma_{yz} - u_z\gamma_{yy})\Bigg]^{-1}, \quad \text{(I.18)}$$

$$h_2 = \Bigg[\lambda\Big(\gamma_{zz}(u_x b_y - u_y b_y) - \gamma_{yz}(u_x b_z - u_z b_x) - \gamma_{xz}(u_y b_z - u_z b_y)\Big)$$
$$+ \gamma_{zz}(u_o b_y - u_y b_0) - \gamma_{yz}(b_z u_0 - b_0 u_z) + (u_y b_z - u_z b_y)\beta_z\Bigg] \cdot$$
$$\Bigg[\Big(u_x(\gamma_{zz}\gamma_{yy} - \gamma_{yz}\gamma_{yz}) + u_y(-\gamma_{zz}\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\gamma_{yz}) + u_z(-\gamma_{xz}\gamma_{yy} + \gamma_{yz}\gamma_{xy})$$
$$\Big)\lambda + u_0(\gamma_{yy}\gamma_{zz} - \gamma_{yz}\gamma_{yz}) + \beta_y(u_z\gamma_{yz} - u_y\gamma_{zz}) + \beta_z(u_y\gamma_{yz} - u_z\gamma_{yy})\Bigg]^{-1}. \quad \text{(I.19)}$$

Veamos ahora la descomposición del vector b^μ. Este vector pertenece al espacio ortogonal a $\mathbf{u}$, ya que $b^\mu u_\mu = 0$. Así pues, podemos expresarlo como

$$b^\mu = C_1\psi_1^\mu + C_2\psi_2^\mu + C_3\nu^\mu, \quad \text{(I.20)}$$

y, resolviendo la ecuación, se obtiene

$$C_1 = \xi\left(\frac{h_2\psi_{22} - h_1\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2}\right), \quad \text{(I.21)}$$

$$C_2 = \xi\left(\frac{h_1\psi_{11} - h_2\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2}\right), \quad \text{(I.22)}$$

$$C_3 = \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{G + a^2}}, \quad \text{(I.23)}$$

donde se ha definido

$$\xi = \Big(u_x(\gamma_{zz}\gamma_{yy} - \gamma_{yz}\gamma_{yz}) - u_y(\gamma_{zz}\gamma_{xy} - \gamma_{xz}\gamma_{yz}) - u_z(\gamma_{xz}\gamma_{yy} - \gamma_{yz}\gamma_{xy})$$
$$\Big)\lambda + u_0(\gamma_{yy}\gamma_{zz} - \gamma_{yz}\gamma_{yz}) + \beta_y(u_z\gamma_{yz} - u_y\gamma_{zz}) + \beta_z(u_y\gamma_{yz} - u_z\gamma_{yy}) \quad \text{(I.24)}$$

Al igual que en el caso de la RMHD, la componente del campo magnético en la dirección de propagación de la onda (normal al frente de onda) es

$$b_n^\mu = \frac{\mathcal{B}}{G + a^2}\Big(\phi^\mu + a u^\mu\Big), \tag{I.25}$$

y la componente tangencial es

$$b_t^\mu = \xi \left\{ \left(\frac{h_2\psi_{22} - h_1\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2} \right) \psi_1^\mu + \left(\frac{h_1\psi_{11} - h_2\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2} \right) \psi_2^\mu \right\}. \tag{I.26}$$

Es fácil demostrar que

$$\mathbf{b}_t^2 = \frac{\xi^2}{\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2} \Big[h_1^2\psi_{11} - 2h_1h_2\psi_{12} + h_2^2\psi_{22} \Big] \tag{I.27}$$

y que por tanto el vector unitario en la dirección del campo tangencial es

$$\frac{b_t^\mu}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{(h_2\psi_{22} - h_1\psi_{12})\,\psi_1^\mu + (h_1\psi_{11} - h_2\psi_{12})\,\psi_2^\mu}{\big[\,(\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2)\,(h_1^2\psi_{11} - 2h_1h_2\psi_{12} + h_2^2\psi_{22})\,\big]^{1/2}} \tag{I.28}$$

I.3 Autovectores a derechas

Procederemos ahora a la obtención de los autovectores a derechas en el sistema de variables conservadas realizando el producto de cada uno de los autovectores en el sistema de variables de Anile por la matriz del cambio que acabamos de escribir.

I.3.1 Autovector entrópico

Partiendo de que el autovector entrópico en el sistema de variables de Anile es $r_e = (0^\mu, 0^\mu, 0, 1)^T$, el autovector entrópico en el sistema de variables conservadas viene dado por

$$R_e = \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p u^0 \begin{pmatrix} 1 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ \alpha u^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{I.29}$$

Este autovector, como en el caso de relatividad restringida, presenta un buen comportamiento en el espacio de estados.

I.3.2 Autovectores de Alfvén

El autovector de Alfvén en el sistema de Anile (comparar con (6.9)), viene dado por

$$r_{a\pm} = (\epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta}\phi^{\beta}u^{\gamma}b^{\delta}, \mp\sqrt{E}\epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta}\phi^{\beta}u^{\gamma}b^{\delta}, 0, 0)^T, \tag{I.30}$$

donde

$$\epsilon^{\mu\beta\gamma\delta}\phi_{\beta}u_{\gamma}b_{\delta} = \begin{pmatrix} -u_y b_z + u_z b_y \\ (-u_y b_z + u_z b_y)\lambda \\ u_0 b_z - u_z b_0 + \lambda(u_x b_z - u_z b_x) \\ -u_0 b_y + u_y b_0 + \lambda(-u_x b_z + u_z b_x) \end{pmatrix}. \tag{I.31}$$

En la sección anterior (I.2) hemos visto que

$$\epsilon^{\mu\beta\gamma\delta}\phi_{\beta}u_{\gamma}b_{\delta} = h_1\psi_1^{\mu} + h_2\psi_2^{\mu}, \tag{I.32}$$

es decir, podemos escribir el autovector de Alfvén como

$$r_{a\pm} = \left(h_1\psi_1^{\mu} + h_2\psi_2^{\mu}, \mp\sqrt{E}(h_1\psi_1^{\mu} + h_2\psi_2^{\mu}), 0, 0\right)^T. \tag{I.33}$$

Para renormalizar este autovector, a fin de evitar problemas en los casos de degeneración, definimos las funciones

$$f_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \quad f_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \tag{I.34}$$

y, como ya hicimos en el caso de la RMHD, debemos tomar en los casos degenerados la siguiente prescripción

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\to 0} f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lim_{h_1^2+h_2^2\to 0} f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{I.35}$$

Así, el autovector de Alfvén renormalizado en el sistema de variables de Anile es

$$r_{a\pm} = \left(f_1\psi_1^{\mu} + f_2\psi_2^{\mu}, \mp\sqrt{E}(f_1\psi_1^{\mu} + f_2\psi_2^{\mu}), 0, 0\right)^T. \tag{I.36}$$

Una vez realizada la renormalización en el sistema de variables de Anile, podemos abordar el cambio al sistema de variables conservadas. El autovector de Alfvén en variables conservadas que se obtiene es

$$R_{a\pm} = f_1 V_{1\pm} + f_2 V_{2\pm}, \tag{I.37}$$

siendo

$$V_{1\pm} = \alpha \begin{pmatrix} \rho\psi_1^0 \\ E(u_x\psi_1^0 + u^0\psi_{1x}) \pm \sqrt{E}(b_x\psi_1^0 + b^0\psi_{1x}) \\ E(u_y\psi_1^0 + u^0\psi_{1y}) \pm \sqrt{E}(b_y\psi_1^0 + b^0\psi_{1y}) \\ E(u_z\psi_1^0 + u^0\psi_{1z}) \pm \sqrt{E}(b_z\psi_1^0 + b^0\psi_{1z}) \\ 2\alpha(Eu^0 \pm \sqrt{E}b^0)\psi_1^0 \\ b^y\psi_1^0 - b^0\psi_1^y \pm \sqrt{E}(u^y\psi_1^0 - u^0\psi_1^y) \\ b^z\psi_1^0 - b^0\psi_1^z \pm \sqrt{E}(u^z\psi_1^0 - u^0\psi_1^z) \end{pmatrix} \tag{I.38}$$

y

$$V_{2\pm} = \alpha \begin{pmatrix} \rho\psi_2^0 \\ E(u_x\psi_2^0 + u^0\psi_{2x}) \pm \sqrt{E}(b_x\psi_2^0 + b^0\psi_{2x}) \\ E(u_y\psi_2^0 + u^0\psi_{2y}) \pm \sqrt{E}(b_y\psi_2^0 + b^0\psi_{2y}) \\ E(u_z\psi_2^0 + u^0\psi_{2z}) \pm \sqrt{E}(b_z\psi_2^0 + b^0\psi_{2z}) \\ 2\alpha(Eu^0 \pm \sqrt{E}b^0)\psi_2^0 \\ b^y\psi_2^0 - b^0\psi_2^y \pm \sqrt{E}(u^y\psi_2^0 - u^0\psi_2^y) \\ b^z\psi_2^0 - b^0\psi_2^z \pm \sqrt{E}(u^z\psi_2^0 - u^0\psi_2^z) \end{pmatrix}. \tag{I.39}$$

I.3.3 Autovectores magnetosónicos

Para renormalizar los autovectores magnetosónicos debemos seguir el mismo procedimiento que el descrito en la Sección 6.3. Así, con el fin de que los autovectores magnetosónicos no degeneren, el autovector asociado al autovalor magnetosónico más próximo al autovalor de Alfvén, será de la forma (comparar con (6.39) y las definiciones subsiguientes)

$$r_m \equiv (e^\nu, L^\mu, \mathcal{C}, 0)^T, \tag{I.40}$$

en donde se han definido

$$e^\nu = \frac{a \mid \mathbf{b}_t \mid}{\rho h(a^2 - c_s^2(G + a^2))}(\phi^\nu + au^\nu) - \frac{\chi}{\rho h}\frac{b_t^\nu}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \tag{I.41}$$

$$L^\nu = \chi\frac{\mid \mathbf{b}_t \mid (G + a^2)c_s^2 u^\nu}{\rho h(a^2 - (G + a^2)c_s^2)} - \left(1 + \frac{a^2}{G}\right)\frac{b_t^\nu}{\mid \mathbf{b}_t \mid}, \tag{I.42}$$

$$\mathcal{C} = - \mid \mathbf{b}_t \mid \frac{(G + a^2)c_s^2}{a^2 - (G + a^2)c_s^2} \quad . \tag{I.43}$$

A fin de evitar que el denominador que aparece en el autovector se haga cero y ocasione problemas numéricos, se debe prescribir el siguiente límite

$$\lim_{a^2-(a^2+G)c_s^2 \to 0} \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2-(a^2+G)c_s^2} = 0 \tag{I.44}$$

y utilizar la siguiente expresión del vector unitario en la dirección del campo tangencial

$$\frac{b_t^\mu}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{(f_2\psi_{22} - f_1\psi_{12})\,\psi_1^\mu + (f_1\psi_{11} - f_2\psi_{12})\,\psi_2^\mu}{\left[\,(\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2)\,(f_1^2\psi_{11} - 2f_1f_2\psi_{12} + f_2^2\psi_{22})\,\right]^{1/2}}. \tag{I.45}$$

El autovector asociado al otro autovalor magnetosónico (más alejado del autovalor de Alfvén), será (comparar con (6.45) y las definiciones subsiguientes)

$$r_m \equiv (e^\nu, L^\nu, \mathcal{C}, 0)^T, \tag{I.46}$$

donde

$$e^\nu = \frac{a}{\rho h(G+a^2)c_s^2}(\phi^\nu + au^\nu) - \frac{\chi}{\rho h}\frac{b_t^\nu G}{(\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G)} \tag{I.47}$$

$$L^\nu = \chi\frac{u^\nu}{\rho h} - \left(1 + \frac{a^2}{G}\right)\frac{b_t^\nu G}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G}, \tag{I.48}$$

$$\mathcal{C} = -1, \tag{I.49}$$

proponiéndose la siguiente prescripción del límite de degeneración:

$$\lim_{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G \to 0} \frac{b_t^\nu}{\rho h a^2 - \mathbf{b}^2 G} = 0. \tag{I.50}$$

Con este procedimiento se eliminan los problemas de degeneración que pueden presentar los autovectores magnetosónicos rápido y lento y cuando los autovalores correspondientes tienden al autovalor de Alfvén que está entre ellos. Téngase en cuenta que el procedimiento se repite para cada par (rápido y lento) de autovectores magnetosónicos.

Una vez calculados los autovectores renormalizados en el sistema de variables de Anile, podemos obtener los correspondientes autovectores en el sistema de variables conservadas, R_m,

$$R_m =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} \rho e^0 + \mathcal{C} u^0 \partial_p \rho \\ E(u_x e^0 + u^0 e_x) + 2u^0 u_x b_\mu L^\mu - b_x L^0 - b^0 L_x + u^0 u_x \mathcal{C} \partial_p(\rho h) \\ E(u_y e^0 + u^0 e_y) + 2u^0 u_y b_\mu L^\mu - b_y L^0 - b^0 L_y + u^0 u_y \mathcal{C} \partial_p(\rho h) \\ Ea(u_z e^0 + u^0 e_z) + 2u^0 u_z b_\mu L^\mu - b_z L^0 - b^0 L_z + u^0 u_z \mathcal{C} \partial_p(\rho h) \\ \alpha(2E u^0 e^0 + (2u^0 u^0 - 1/\alpha^2) b_\mu L^\mu - 2b^0 L^0 + (\partial_p(\rho h) u^0 u^0 - 1)\mathcal{C}) \\ a(b^y e^0 - b^0 e^y) - u^y L^0 + u^0 L^y \\ a(b^z e^0 - b^0 e^z) - u^z L^0 + u^0 L^z \end{pmatrix} \tag{I.51}$$

I.4 Autovectores a izquierdas

Vamos a deducir la expresión de los autovectores a izquierdas, $\bar{l}$, en el sistema reducido de variables $(u^x, u^y, u^z, b^y, b^z, p, \rho)$. Partiremos, al igual que en el caso de los autovectores a derechas, de las expresiones obtenidas en el sistema de variables de Anile.

Para obtener los autovectores en el sistema reducido de variables, debemos calcular las derivadas de las variables dependientes u^0, b^0, b^x respecto del sistema reducido de variables a través de las ligaduras. Así, partiendo de la ligadura $u^\alpha u_\alpha = -1$ obtenemos que

$$\frac{\partial u^0}{\partial u^k} = -\frac{g_{k0} u^0 + g_{ki} u^i}{g_{00} u^0 + g_{0i} u^i} = -\frac{u_k}{u_0} = \frac{v_k}{\alpha - \beta_i v^i} \tag{I.52}$$

Partiendo de la ligadura $b^\mu u_\mu = 0$ se deduce

$$b^0 = \frac{-1}{u^0 u_0 + u^x u_x} \left((b^x u^0 - b^0 u^x) u_x + u^0 (b^y u_y + b^z u_z) \right), \tag{I.53}$$

y, de aquí, derivando y operando se deduce que

$$\frac{\partial b^0}{\partial b^k} = \frac{-u^0 u_k}{u^0 u_0 + u^x u_x}, \tag{I.54}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial u^y} = -\frac{u^0 b_y - b^0 u_y - u_y (b^y u_y + b^z u_z + u^0 b_0)}{u^0 u_0 + u^x u_x}, \tag{I.55}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial u^z} = -\frac{u^0 b_z - b^0 u_z - u_z (b^y u_y + b^z u_z + u^0 b_0)}{u^0 u_0 + u^x u_x}, \tag{I.56}$$

$$\frac{\partial b^0}{\partial u^x} = -\frac{u^0 u_0 b_x - u_x (b^y u_y + b^z u_z + u^0 b_0)}{(u^0 u_0 + u^x u_x) u_0}. \tag{I.57}$$

La tercera ligadura, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,se reduce, en el caso de problemas unidimensionales en la dirección x, a la condición $B_x =$ constante. Así, como se cumple que

$$B_x = \alpha(b^x u^0 - b^0 u^x), \tag{I.58}$$

se obtiene

$$\frac{\partial b^x}{\partial b^i} = \frac{u^x}{u^0}\frac{\partial b^0}{\partial b^i} = \frac{-u^x u_i}{u^0 u_0 + u^x u_x}, \tag{I.59}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^i}u^x - b^x\frac{\partial u^0}{\partial u^i}\right) = \frac{(u_0 b^0 + u_x b^x)u_0 - u^x(u_0 b_x - u_x b_0)}{(u^0 u_0 + u^x u_x)u_0}, \tag{I.60}$$

$$\frac{\partial b^x}{\partial u^x} = \frac{1}{u^0}\left(b^0 + \frac{\partial b^0}{\partial u^x}u^x - b^x\frac{\partial u^0}{\partial u^x}\right) = \frac{b^x u_y u_0 - (u_0 b_y - u_y b_0)u^x}{(u^0 u_0 + u^x u_x)u_0}. \tag{I.61}$$

Así pues, la transformación que nos permite pasar de los autovectores a izquierdas del sistema de variables de Anile, $(l_1, l_2, \ldots, l_{10})$, a los autovectores a izquierdas del sistema reducido de variables, $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_7)$, es

$$\bar{l}_1 = \frac{\partial u^0}{\partial u^x}l_1 + l_2 + \frac{\partial b^0}{\partial u^x}l_5 + \frac{\partial b^x}{\partial u^x}l_6, \tag{I.62}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{\partial u^0}{\partial u^y}l_1 + l_3 + \frac{\partial b^0}{\partial u^y}l_5 + \frac{\partial b^x}{\partial u^y}l_6, \tag{I.63}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{\partial u^0}{\partial u^z}l_1 + l_4 + \frac{\partial b^0}{\partial u^z}l_5 + \frac{\partial b^x}{\partial u^z}l_6, \tag{I.64}$$

$$\bar{l}_4 = \frac{\partial b^0}{\partial b^y}l_5 + \frac{\partial b^x}{\partial b^y}l_6 + l_7, \tag{I.65}$$

$$\bar{l}_5 = \frac{\partial b^0}{\partial b^z}l_5 + \frac{\partial b^x}{\partial b^z}l_6 + l_8, \tag{I.66}$$

$$\bar{l}_6 = l_9 + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho l_{10}, \tag{I.67}$$

$$\bar{l}_7 = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p l_{10}. \tag{I.68}$$

I.4.1 Autovector entrópico a izquierdas

Aplicando la transformación anterior a las componentes del autovector entrópico a izquierdas en el sistema de Anile (7.4), obtenemos el correspondiente autovector en el sistema reducido de variables,

$$\bar{l}_e = \left(0, 0, 0, 0, 0, u^0\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho, u^0\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p\right). \tag{I.69}$$

I.4.2 Autovectores de Alfvén a izquierdas

Los autovectores a izquierdas de Alfvén en el sistema de variables de Anile son (comparar con (7.12))

$$l_{a\pm} = \begin{pmatrix} (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta \\ \\ (-b^0 \mp \sqrt{E}u^0)\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta + (\epsilon^0_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta)b_\mu \\ \\ \epsilon^0_{\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta \\ 0 \end{pmatrix}^T . \tag{I.70}$$

Como ya se desmostró (ver (I.17)),

$$\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}\phi^\beta u^\gamma b^\delta = h_1\psi_{1\mu} + h_2\psi_{2\mu}, \tag{I.71}$$

con lo que podremos reescribir el vector (I.70) como

$$l_{a\pm} = h_1 V_{1\pm} + h_2 V_{2\pm}, \tag{I.72}$$

siendo

$$V_{1\pm} = \Big((Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\psi_{1\mu}, (-b^0 \mp \sqrt{E}u^0)\psi_{1\mu} + \psi_1^0 b_\mu, \psi_1^0, 0\Big), \tag{I.73}$$

$$V_{2\pm} = \Big((Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\psi_{2\mu}, (-b^0 \mp \sqrt{E}u^0)\psi_{2\mu} + \psi_2^0 b_\mu, \psi_2^0, 0\Big). \tag{I.74}$$

Introduciendo ahora las funciones $f_{1,2}$, definidas en (I.34), obtenemos los autovectores de Alfven a izquierdas renormalizados

$$l_{a\pm} = f_1 V_{1\pm} + f_2 V_{2\pm}. \tag{I.75}$$

Finalmente, transformamos el autovector al sistema reducido de variables

$$\bar{l}_{a\pm} = f_1 \bar{V}_{1\pm} + f_2 \bar{V}_{2\pm}, \tag{I.76}$$

con

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1\pm,\,1} = {} & (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\left(\psi_{1\,x} - \psi_{1\,0}\frac{u_x}{u_0}\right) - (b^0 \pm \sqrt{E}u^0)\bigg(\frac{\partial b^0}{\partial u^x}\psi_{1\,0} \\ & + \frac{\partial b^x}{\partial u^x}\psi_{1\,x}\bigg) + \frac{\psi_1^0}{u_0(u^0u_0 + u^xu_x)}\Big((u_0b_x - u_xb_0)(u_0b^0 + u_xb^x) \\ & - (b_xu_0 - u_xb_0)(u^0b_0 + u^xb_x)\Big), \end{aligned} \tag{I.77}$$

$$\bar{V}_{1\pm,\,2} = (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\left(\psi_{1\,y} - \psi_{1\,0}\frac{u_y}{u_0}\right) - (b^0 \pm \sqrt{E}u^0)\bigg(\frac{\partial b^0}{\partial u^y}\psi_{1\,0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^y}\psi_{1\,x}\bigg) - \frac{\psi_1^0}{u_0(u^0u_0 + u^xu_x)}\Big((u_0b_y - u_yb_0)(u^0b_0 + u^xb_x) + b^xu_y(u_xb_0 - u_0b_x)\Big), \tag{I.78}$$

$$\bar{V}_{1\pm,\,3} = (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\left(\psi_{1\,z} - \psi_{1\,0}\frac{u_z}{u_0}\right) - (b^0 \pm \sqrt{E}u^0)\bigg(\frac{\partial b^0}{\partial u^z}\psi_{1\,0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^z}\psi_{1\,x}\bigg) - \frac{\psi_1^0}{u_0(u^0u_0 + u^xu_x)}\Big((u_0b_z - u_zb_0)(u^0b_0 + u^xb_x) + b^xu_z(u_xb_0 - u_0b_x)\Big), \tag{I.79}$$

$$\bar{V}_{1\pm,\,4} = (-b^0 \mp u^0\sqrt{E})\bigg(\frac{-u_y}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0\psi_{1\,0} + u^x\psi_{1\,x}) + \psi_{1\,y}\bigg) + \psi_1^0\left(\frac{-u_y}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0b_0 + u^xb_x) + b_y\right), \tag{I.80}$$

$$\bar{V}_{1\pm,\,5} = (-b^0 \mp u^0\sqrt{E})\bigg(\frac{-u_z}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0\psi_{1\,0} + u^x\psi_{1\,x}) + \psi_{1\,z}\bigg) + \psi_1^0\left(\frac{-u_z}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0b_0 + u^xb_x) + b_z\right), \tag{I.81}$$

$$\bar{V}_{1\pm,\,6} = \psi_1^0, \tag{I.82}$$

$$\bar{V}_{1\pm,\,7} = 0 \tag{I.83}$$

y

$$\bar{V}_{2\pm,\,1} = (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\left(\psi_{2\,x} - \psi_{2\,0}\frac{u_x}{u_0}\right) - (b^0 \pm \sqrt{E}u^0)\bigg(\frac{\partial b^0}{\partial u^x}\psi_{2\,0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^x}\psi_{2\,x}\bigg) + \frac{\psi_2^0}{u_0(u^0u_0 + u^xu_x)}\Big((u_0b_x - u_xb_0)(u_0b^0 + u_xb^x) - (b_xu_0 - u_xb_0)(u^0b_0 + u^xb_x)\Big), \tag{I.84}$$

$$\bar{V}_{2\pm,\,2} = (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\left(\psi_{2\,y} - \psi_{2\,0}\frac{u_y}{u_0}\right) - (b^0 \pm \sqrt{E}u^0)\biggl(\frac{\partial b^0}{\partial u^y}\psi_{2\,0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^y}\psi_{2\,x}\biggr) - \frac{\psi_2^0}{u_0(u^0u_0 + u^xu_x)}\Bigl((u_0b_y - u_yb_0)(u^0b_0 + u^xb_x) + b^xu_y(u_xb_0 - u_0b_x)\Bigr), \tag{I.85}$$

$$\bar{V}_{2\pm,\,3} = (Eu^0 \pm b^0\sqrt{E})\left(\psi_{2\,z} - \psi_{2\,0}\frac{u_z}{u_0}\right) - (b^0 \pm \sqrt{E}u^0)\biggl(\frac{\partial b^0}{\partial u^z}\psi_{2\,0} + \frac{\partial b^x}{\partial u^z}\psi_{2\,x}\biggr) - \frac{\psi_2^0}{u_0(u^0u_0 + u^xu_x)}\Bigl((u_0b_z - u_zb_0)(u^0b_0 + u^xb_x) + b^xu_z(u_xb_0 - u_0b_x)\Bigr), \tag{I.86}$$

$$\bar{V}_{2\pm,\,4} = (-b^0 \mp u^0\sqrt{E})\biggl(\frac{-u_y}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0\psi_{2\,0} + u^x\psi_{2\,x}) + \psi_{2\,y}\biggr) + \psi_2^0\left(\frac{-u_y}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0b_0 + u^xb_x) + b_y\right), \tag{I.87}$$

$$\bar{V}_{2\pm,\,5} = (-b^0 \mp u^0\sqrt{E})\biggl(\frac{-u_z}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0\psi_{2\,0} + u^x\psi_{2\,x}) + \psi_{2\,z}\biggr) + \psi_2^0\left(\frac{-u_z}{u^0u_0 + u^xu_x}(u^0b_0 + u^xb_x) + b_z\right), \tag{I.88}$$

$$\bar{V}_{2\pm,\,6} = \psi_2^0, \tag{I.89}$$

$$\bar{V}_{2\pm,\,7} = 0. \tag{I.90}$$

I.4.3 Autovectores magnetosónicos a izquierdas

Los autovectores magnetosónicos a izquierdas en el sistema de variables de Anile son (comparar con (7.39))

$$l_m = \begin{pmatrix} \phi_\nu(Eu^0a - \mathcal{B}b^0) + b_\nu(G + 2a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) - \mathcal{A}\,\delta^0_\nu \\ \\ \phi_\nu(-ab^0 + \mathcal{B}u^0) + (a\phi^0 - Gu^0)b_\nu \\ \\ a\phi^0 - a^2u^0\left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) + \frac{G}{\rho h}\left(\frac{\mathbf{b}^2u^0}{c_s^2} - \frac{\mathcal{B}}{a}b^0\right) \\ \\ 0 \end{pmatrix}^T \tag{I.91}$$

Procederemos ahora a la transformación de las componentes de estos vectores al sistema reducido de variables, desarrollándolos de forma adecuada para proceder, posteriormente, a su renormalización.

- La componente primera del autovector magnetosónico en el sistema reducido de variables es

$$\bar{l}_{m\,1} = \frac{Ea(u^0 u_0 + u^x u_x)}{u_0} - \frac{\mathcal{B}(b^0 u_0 + b^x u_x)}{u_0} + (G + 2a^2)\left(b^0 - \frac{\mathcal{B}}{a} u^0\right)$$
$$\left(b_x - \frac{u_x}{u_0} b_0\right) + (-ab^0 + \mathcal{B}u^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^x}\phi_0 + \frac{\partial b^x}{\partial u^x}\phi_x\right) +$$
$$(a\phi^0 - Gu^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^x} b_0 + \frac{\partial b^x}{\partial u^x} b_x\right) \quad (I.92)$$

que podemos reescribir como

$$\bar{l}_{m\,1} = \frac{\mathcal{A}}{a}\frac{u^0 u_0 + u^x u_x}{u_0} + \frac{b_{t\,x} u_0 - u_x b_{t\,0}}{u_0}\Bigg[(G + 2a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) -$$
$$\frac{(b^x u^0 - b^0 u^x)a + (b_0 u^0 + b_x u^x)(u^x\phi^0 - \phi^x u^0)}{u^0 u_0 + u^x u_x}\Bigg] - \frac{\mathcal{B}(\phi_x u_0 - \phi_0 u_x)}{(G + a^2)u_0}$$
$$\left[\frac{a(b_t^x u^0 - b_t^0 u^x)(u^0 u_0 + u^x u_x + 1) + (u^x \phi^0 - \phi^x u^0)(b_{t\,0} u^0 + b_{t\,x} u^x)}{u^0 u_0 + u^x u_x}\right] +$$
$$\frac{u_0 b^0 + u_x b^x}{u_0(u^0 u_0 + u^x u_x)}\Bigg((b_t^x u^0 - b_t^0 u^x)(\phi_x u_0 - u_x \phi_0) +$$
$$+ (u^x\phi^0 - \phi^x u^0)(b_{t\,x} u_0 - b_{t\,x} u_0)\Bigg) \quad (I.93)$$

- La componente segunda del autovector magnetosónico en el sistema reducido de variables es

$$\bar{l}_{m\,2} = (Eau^x - \mathcal{B}b^x)\frac{u_y}{u_0} + (G + 2a^2)\left(b^0 - \frac{\mathcal{B}}{a}u^0\right)\left(b_y - \frac{u_y}{u_0} b_0\right)$$
$$+ (\mathcal{B}u^0 - ab^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^y}\phi_0 + \frac{\partial b^x}{\partial u^y}\phi_x\right) + (a\phi^0 - Gu^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^y} b_0 + \frac{\partial b^x}{\partial u^y} b_x\right) \quad (I.94)$$

que podemos escribir como:

$$\bar{l}_{m\,2} = \frac{\mathcal{A}u^x u_y}{a u_0} + (b_{t\,y} u_0 - b_{t\,0} u_y)\Bigg[(G + a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) - \frac{1}{u^0 u_0 + u^x u_x}$$

$$\left(a(b^x u^0 - b^0 u^x) + (u^x \phi^0 - \phi^x u^0)(b_0 u^0 + b_x u^x)\right)\Bigg] + \phi_0 \frac{a\mathcal{B}u_y}{(G+a^2)u_0}$$
$$\left[\frac{(b_t^x u^0 - b_t^0 u^x)(u^0 u_0 + u^x u_x + 1) + (u^x \phi^0 - \phi^x u^0)(b_{t\,0} u^0 + b_{t\,x} u^x)}{u^0 u_0 + u^x u_x}\right] -$$
$$\frac{b^x u_y}{(u^0 u_0 + u^x u_x)u_0}\Bigg((b_t^x u^0 - u^x b_t^0)(u_x \phi_0 - \phi_x u_0) +$$
$$(b_{t\,0} u_x - b_{t\,x})(u^x \phi^0 - \phi^x u^0)\Bigg) \quad \text{(I.95)}$$

- La componente tercera del autovector magnetosónico en sistema reducido de variables es

$$\bar{l}_{m\,3} = (Eau^x - \mathcal{B}b^x)\frac{u_z}{u_0} + (G+2a^2)\left(b^0 - \frac{\mathcal{B}}{a}u^0\right)\left(b_z - \frac{u_z}{u_0}b_0\right)$$
$$+ (\mathcal{B}u^0 - ab^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^z}\phi_0 + \frac{\partial b^x}{\partial u^z}\phi_x\right) + (a\phi^0 - Gu^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial u^z}b_0 + \frac{\partial b^x}{\partial u^z}b_x\right) \quad \text{(I.96)}$$

que es posible escribirla como:

$$\bar{l}_{m\,3} = \frac{\mathcal{A}u^x u_z}{au_0} + (b_{t\,z}u_0 - b_{t\,0}u_z)\Bigg[(G+a^2)\left(b^0 - \chi u^0\right) - \frac{1}{u^0 u_0 + u^x u_x}$$
$$\left(a(b^x u^0 - b^0 u^x) + (u^x \phi^0 - \phi^x u^0)(b_0 u^0 + b_x u^x)\right)\Bigg] + \phi_0 \frac{a\mathcal{B}u_z}{(G+a^2)u_0}$$
$$\left[\frac{(b_t^x u^0 - b_t^0 u^x)(u^0 u_0 + u^x u_x + 1) + (u^x \phi^0 - \phi^x u^0)(b_{t\,0} u^0 + b_{t\,x} u^x)}{u^0 u_0 + u^x u_x}\right] -$$
$$\frac{b^x u_z}{(u^0 u_0 + u^x u_x)u_0}\Bigg((b_t^x u^0 - u^x b_t^0)(u_x \phi_0 - \phi_x u_0) +$$
$$(b_{t\,0} u_x - b_{t\,x})(u^x \phi^0 - \phi^x u^0)\Bigg) \quad \text{(I.97)}$$

- La componente cuarta del autovector magnetosónico en el sistema reducido de variables es

$$\bar{l}_{m\,4} = \frac{-u_y}{u^0 u_0 + u^x u_x}\Bigg((-ab^0 + \mathcal{B}u^0)(u^0 \phi_0 + u^x \phi_x)$$
$$+ (a\phi^0 - Gu^0)(b_0 u^0 + b_x u^x)\Bigg) + (a\phi^0 - Gu^0)b_y, \quad \text{(I.98)}$$

equivalente a

$$\bar{l}_{m\,4} = (a\phi^0 - Gu^0)\left(\frac{-u_y}{u^0 u_0 + u^x u_x}(b_{t\,0}u^0 + b_{t\,x}u^x) + b_{t\,y}\right) - \frac{u_y a^2}{u^0 u_0 + u^x u_x} b_t^0 \tag{I.99}$$

- La componente quinta del autovector magnetosónico en el sistema reducido de variables variables es

$$\bar{l}_{m\,5} = (\mathcal{B}u^0 - ab^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial b^z}\phi_0 + \frac{\partial b^x}{\partial b^z}\phi_x\right) + (a\phi^0 - Gu^0)\left(\frac{\partial b^0}{\partial b^z} b_0 + \frac{\partial b^x}{\partial b^z} b_x + b_z\right), \tag{I.100}$$

que es equivalente a:

$$\bar{l}_{m\,5} = (a\phi^0 - Gu^0)\left(\frac{-u_z}{u^0 u_0 + u^x u_x}(b_{t\,0}u^0 + b_{t\,x}u^x) + b_{t\,z}\right) - \frac{u_z a^2}{u^0 u_0 + u^x u_x} b_t^0 \tag{I.101}$$

- La componente sexta del autovector magnetosónico en el sistema reducido de variables es

$$\bar{l}_{m\,6} = a\phi^0 + a^2 u^0 \left(1 - \frac{1}{c_s^2}\right) + \frac{G}{\rho h}\left(\frac{\mathbf{b}^2 u^0}{c_s^2} - \frac{\mathcal{B}}{a} b^0\right), \tag{I.102}$$

que podemos escribir como

$$\bar{l}_{m\,6} = \frac{b_t^2\, G}{\rho h(a^2 - (G + a^2)c_s^2}\big(a\phi^0 - u^0 G\big) - \frac{G}{\rho h}\,\chi b_t^0 \tag{I.103}$$

- Por último, la componente séptima del autovector magnetosónico en el sistema reducido de variables es

$$\bar{l}_{m\,7} = 0. \tag{I.104}$$

Ahora, la propuesta de renormalización es la siguiente:

- Para el autovector correspondiente al autovalor más próximo al autovalor de Alfvén, proponemos dividir sus componentes por $\mathbf{b}_t$. Así, deberemos realizar las siguientes sustituciones:

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} \longrightarrow \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2-(G+a^2)c_s^2}\,, \qquad b_t^0 \longrightarrow \frac{b_t^0}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \tag{I.105}$$

$$h_1 \longrightarrow \frac{h_1}{\mid \mathbf{b}_t \mid} \quad \text{y} \quad h_2 \longrightarrow \frac{h_2}{\mid \mathbf{b}_t \mid}. \tag{I.106}$$

Las prescripciones sugeridas para los límites 0/0 son

$$\lim_{a^2-(a^2+G)c_s^2\to 0} \frac{\mid \mathbf{b}_t \mid}{a^2-(a^2+G)c_s^2} = 0. \tag{I.107}$$

$$\frac{h_{1/2}}{\mid \mathbf{b}_t \mid} = \frac{f_{1/2}\left((u^0-\lambda u^x)^2-(1-\lambda^2)((u^y)^2+(u^z)^2\right)^{1/2}}{\left(f_2^2\alpha_{22}-2f_1f_2\alpha_{12}+f_1^2\alpha_{11}\right)^{1/2}}. \tag{I.108}$$

- Para el autovector asociado al otro autovalor magnetosónico proponemos dividir por:

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} = \frac{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G}{G(G+a^2)c_s^2}. \tag{I.109}$$

Así, deberemos hacer las siguientes sustituciones:

$$\frac{\mathbf{b}_t^2}{a^2-(G+a^2)c_s^2} \longrightarrow 1\,, \qquad b_t^0 \longrightarrow \frac{b_t^0 G(G+a^2)c_s^2}{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G}, \tag{I.110}$$

$$h_1 \longrightarrow \frac{h_1 G(G+a^2)c_s^2}{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G} \quad \text{y} \quad h_2 \longrightarrow \frac{h_2 G(G+a^2)c_s^2}{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G}. \tag{I.111}$$

Las prescripciones sugeridas en los límites 0/0 son

$$\lim_{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G\to 0} \frac{b_t^\nu}{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G} = 0, \tag{I.112}$$

$$\lim_{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G\to 0} \frac{h_{1/2}}{\rho h a^2-\mathbf{b}^2 G} = 0. \tag{I.113}$$

Apéndice J

Elementos geométricos en las métricas de Schwarzschild y Kerr

En este Apéndice vamos a escribir los elementos geométricos de los espacio-tiempos de Schwarzschild y Kerr, necesarios para la integración numérica de las ecuaciones en diferencias finitas tal y como se ha hecho en el Capítulo 9. Utilizaremos coordenadas de la forma (t, r, θ, ϕ) (coordenadas de Schwarzschild en el caso de la métrica de Schwarzschild; coordenadas de Boyer-Lindquist, en el caso de la de Kerr).

J.1 Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild describe el espacio exterior de un agujero negro con simetría esférica. En coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ), tomando unidades geometrizadas $(G = 1, c = 1)$, se escribe como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \tag{J.1}$$

siendo $r_0 = 2M$ el radio de Schwarzschild, donde M es la masa del agujero negro.

Identificando los elementos métricos de esta métrica con los del formalismo $3 + 1$, obtenemos

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \quad , \quad \gamma_{rr} = g_{rr}, \quad \gamma_{\theta\theta} = g_{\theta\theta} \quad ,$$
$$\gamma_{\phi\phi} = g_{\phi\phi} \quad \text{y} \quad \sqrt{\gamma} = \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - r_0/r}}. \tag{J.2}$$

Para resolver numéricamente las ecuaciones de la GRMHD en este espacio-tiempo debemos calcular los elementos geométricos que se utilizarán en el avance temporal de las variables conservadas. Procederemos ahora a su obtención, distinguiendo el caso de las variables hidrodinámicas (densidad, momento y energía) del caso de las componentes de campo magnético.

J.1.1 Flujos hidrodinámicos

Las variables hidrodinámicas se avanzan numéricamente integrando en el tiempo la siguiente expresión:

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\Delta V}\Bigg(\Delta S^r\big(\mathbf{F}^r_{i+1/2,j} - \mathbf{F}^r_{i-1/2,j}\big) + \Delta S^\theta\big(\mathbf{F}^\theta_{i,j+1/2} - \mathbf{F}^\theta_{i,j-1/2}\big)\Bigg) + \mathbf{S}(\mathbf{U}), \tag{J.3}$$

donde los elementos geométricos definidos son

$$\Delta V = \int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\gamma}\,dr\,d\theta\,d\phi = 2\pi\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)\Bigg\{\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\left(r^3 + \frac{5}{4}r_0r^2 + \frac{15}{8}r_0^2r\right) + \frac{5}{8}r_0^3\ln\left(\sqrt{r}\left(1+\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\right)\right)\Bigg\}\Bigg|_{r_1}^{r_2}, \tag{J.4}$$

$$\Delta S^r = \int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\gamma}\,d\theta\,d\phi = 2\pi\frac{r^{5/2}}{\sqrt{r-r_0}}\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big), \tag{J.5}$$

$$\Delta S^\theta = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\gamma}\,dr\,d\phi = 2\pi\,\sin\theta\Bigg\{\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\left(r^3 + \frac{5}{4}r_0r^2 + \frac{15}{8}r_0^2r\right) + \frac{5}{8}r_0^3\ln\left(\sqrt{r}\left(1+\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\right)\right)\Bigg\}\Bigg|_{r_1}^{r_2}. \tag{J.6}$$

J.1.2 Flujos del campo magnético

Las componentes de campo magnético se avanzan numéricamente integrando en el tiempo la siguiente expresión:

$$\frac{dB_{r\,i+1/2,j}}{dt} = \frac{\Delta l_\phi}{\Delta S^{r\,i+1/2,j}}\Big(\Omega_{\phi\,i+1/2,j+1/2} - \Omega_{\phi\,i+1/2,j-1/2}\Big), \tag{J.7}$$

$$\frac{dB_{\theta\,i,j+1/2}}{dt} = \frac{\Delta l_\phi}{\Delta S^{\theta\,i,j+1/2}}\Big(\Omega_{\phi\,i+1/2,j+1/2} - \Omega_{\phi\,i-1/2,j+1/2}\Big), \tag{J.8}$$

$$\frac{dB_{\phi\, i,j}}{dt} = \frac{\Delta t}{\Delta S^{\phi\, i,j}} \Big\{ \Delta l_r \Big(\Omega_{r\, i,j+1/2} - \Omega_{r\, i,j-1/2} \Big) + \Delta l_\theta \Big(\Omega_{\theta\, i+1/2,j} - \Omega_{\theta\, i-1/2,j} \Big) \Big\}, \tag{J.9}$$

donde los elementos geométricos introducidos son

$$\Delta l_\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma} d\phi = \frac{2\pi r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - r_0/r}}, \tag{J.10}$$

$$\Delta l_\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\gamma} d\theta = \frac{r^2}{\sqrt{1 - r_0/r}} \Big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \Big), \tag{J.11}$$

$$\Delta l_r = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma} dr = \sin\theta \Bigg\{ \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \left(r^3 + \frac{5}{4} r_0 r^2 + \frac{15}{8} r_0^2 r \right) + \frac{5}{8} r_0^3 \ln\left(\sqrt{r} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right) \right) \Bigg\} \Bigg|_{r_1}^{r_2}, \tag{J.12}$$

$$\Delta S^\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma}\, dr\, d\theta = \big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \big) \Bigg\{ \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \left(r^3 + \frac{5}{4} r_0 r^2 + \frac{15}{8} r_0^2 r \right) + \frac{5}{8} r_0^3 \ln\left(\sqrt{r} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right) \right) \Bigg\} \Bigg|_{r_1}^{r_2}. \tag{J.13}$$

J.2 Métrica de Kerr

La métrica de Kerr describe el espacio-tiempo exterior de un agujero negro en rotación. En coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ), tomando unidades geometrizadas $(G = 1, c = 1)$, se tiene que

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\varrho^2} dt^2 - 4a \frac{Mr \sin^2\theta}{\varrho^2} dt d\phi + \frac{\varrho^2}{\Delta} dr^2 + + \varrho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma}{\varrho^2} \sin^2\theta d\phi^2, \tag{J.14}$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \tag{J.15}$$

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \tag{J.16}$$

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \tag{J.17}$$

siendo M la masa del agujero negro, $a = J/M$ el momento angular por unidad de masa y J es el momento angular total del agujero negro.

Los elementos métricos correspondientes al formalismo $\{3+1\}$ son

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varrho^2 \Delta}{\Sigma}}, \quad \beta_\phi = -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\varrho^2}, \quad \gamma_{rr} = \varrho^2/\Delta,$$

$$\gamma_{\theta\theta} = \varrho^2, \quad \gamma_{\phi\phi} = \Sigma \sin^2 \theta / \varrho^2 \quad \text{y} \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{\frac{\rho^2 \Sigma \sin^2 \theta}{\Delta}}. \tag{J.18}$$

Nótese que la métrica de Schwarschild se recupera al tomar $J = 0$ en la métrica de Kerr.

Para avanzar numéricamente las ecuaciones de la GRMHD, deberemos integrar las ecuaciones discretizadas (J.3), (J.7), (J.8) y (J.9), en las que los elementos geométricos vienen dados ahora por

$$\Delta V = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma}\, dr\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma}\, dr\, d\theta, \tag{J.19}$$

$$\Delta S^r = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\gamma}\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\gamma}\, d\theta, \tag{J.20}$$

$$\Delta S^\theta = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma}\, dr\, d\phi = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma}\, dr. \tag{J.21}$$

$$\Delta l_\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma} d\phi = 2\pi \sqrt{\gamma}, \tag{J.22}$$

$$\Delta l_\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\gamma} d\theta, \tag{J.23}$$

$$\Delta l_r = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma} dr, \tag{J.24}$$

$$\Delta S^\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\gamma}\, dr\, d\theta. \tag{J.25}$$

Remarcaremos que las integrales que aparecen en los elementos geométricos en el caso de la métrica de Kerr no son analíticas y se han obtenido por integración numérica.

Bibliografía

Aloy, M.A., Martí,J.M., Gómez, J.L., Agudo, I., Müller, E., Ibáñez, J.M., 2003, ApJ, **585**, L109-L112

Anile, A.M., 1989, Relativistic fluids and magneto-fluids, Cambridge University Press

Antón, L., Martí, J.M., Ibáñez, J.M., Miralles, J.A., 2001, en 'Highlights of spanish astrophysics II', Kluwer Academic publishers

Antón, L., Zanotti, O., Miralles, J.A., Martí, J.M., Ibáñez, J.M., Font, J.A., Pons, J.A., 2006, ApJ, **296**, 296-312

Balsara, D.S., Spicer, D.S., 1999, JCP, **149**, 270

Balsara, D.S., 2001, ApJSS, **132**, 83-101

Banyuls, F., Font, J.A., Ibañez, J.M., Martí, J.M., Miralles, J.A., 1997, ApJ, **476**, 111-231

Barut, A.O., 1980, Electrodynamics and classical theory of fields and particles, Dover Publications, Inc.

Blandford, R.D., Payne, D.G., 1982, MNRAS, **199**, 853

Blandford, R.D., Rees, M.J., 1974, MNRAS, **169**, 395

Blandford, R.D., Zanjek, R.L., 1977, MNRAS, **179**, 433-456

Brackbill, J.U., Barnes D.C., 1980, JCP, **35**, 426

Brio, M., Wu, C.C., 1988, JCP, **75**, 500

Burns, J.O., Norman M.L., Vlarke D.A., 1991, Science, **253**, 522-530

Clarke, D.A., Norman, M.L., Burns, J.O., 1986, ApJ, **311**, L63-67

Colella, P., Woodward, P.R., 1984, JCP, **54**, 173

Davis, R.J., 1984, ICASE, Virginia, USA, Report no. 84-20

Dai, W., Woodward P.R., 1994, JCP, **111**, 354

Dai, W., Woodward P.R., 1998, JCP, **142**, 331

Del Zanna, L., Bucciantini, N., Londrillo, P., 2002, A&A, **400**, 397

De Villiers, J.P., Hawley, J.F. 2003, ApJ, **589**, 458-480

De Villiers, J.P, Hawley, J.F., Krolik, J.H., Hirose, S., 2005, ApJ, **620**, 878-888

Dubal, M., 1991, CPC, **64**,221

Duez, M., Liu, Y.T., Shapiro, S.L., Stephens, B.C., PRD, **72**, ???

Duncan, G.C., Hughes, P.A., 1994, ApJ Lett., **436**, L119-L122

Eulderink,F., 1993, Tesis Doctoral.

Eulderink,F., Mellema, G., 1995 A&AS **110**,587

Evans, C.R., Hawley, J.F., 1988, ApJ, **332**, 659

Falle, S. A. E. G., Komissarov, S. S., 2001, J. Plasma Physics, **65**, 29

Gammie, C.F., 1999, ApJ, **522**, L57-L60

Gammie, C.F., McKinney, J.C., Tóth, G., 2003, ApJ, **589**,444-457

Gammie, C.F., Shapiro S.L., McKinney, J.C., 2004, ApJ, **602**, 312-319

Giacomazzo, B. Rezzolla, L., 2006, J. Fluid Mech., **562**, 223-259

Godunov, S.K., 1959, Mat. Sb., **47**, 271

Gómez, J.L., Martí, J.M., Marscher, A.P., Ibáñez J.M., Alberdi, A., 1997, ApJ, **482**, L33

Gómez, J.L., Martí, J.M., Marscher, A.P., Ibáñez J.M., Marcaide, J.M., 1995, ApJ Lett., **449**, L19

Hirose S., Krolik, J.H., De Villiers, J.P., Hawley, J.F., 2004, ApJ, **606**, ???

Jackson, J.D., 1977, Electrodinámica Clásica, Alhambra

Jeffrey, A., Taniuti, T., 1966, Non-linear waves propagation, Academic Press

Koide, S., 1997, ApJ, **478**, 66

Koide, S., 2003, PRD, **67**, 104010

Koide, S., Meier, D.L., Shibata, K., Kudoh, T., 2000, ApJ,**563**, 688

Koide, S., Nishikawa, K., Mutel, R. L., 1996, ApJ Lett., **463**, L71

Koide, S., Shibata, K., Kudoh. T., 1998, ApJ Lett., **495**, L63

Koide, S., Shibata, K., Kudoh. T., 1999, ApJ, **522**, 727

Koide, S., Shibata, K., Kudoh. T., Meier, D.L., 2002, Science, **295**, 1688

Koldoba, A.V., Kuznetsov, O.A., Ustyugova G.V., 2002, MNRAS, **333**, 932-942

Komissarov, S.S., 1999a, MNRAS, **303**, 343-366

Komissarov, S.S., 1999b, MNRAS, **308**, 1069-1076

Komissarov, S.S., 2004, MNRAS, **350**, 1431

Komissarov, S.S., 2005, MNRAS, **359**, 801

Komissarov, S.S., Falle, S.A.E.G., 1996, MNRAS, **278**, 586

Komissarov, S.S., Falle, S.A.E.G., 1997, MNRAS, **288**, 833

Komissarov, S.S., Lyubarsky Y.E., 2003, MNRAS, **344**, L93-L96

Kössl, D., Müller, E., Hillebrandt, W., 1990a, A&A, **239**, 378-396

Kössl, D., Müller, E., Hillebrandt, W., 1990b, A&A, **239**, 397-400

Lax, P.D., 1972, Regional Conference Series Lectures in Applied Math., 11 (SIAM, Philadelphia)

Lax, P.D., Wendroff, B., 1960, Comm. Pure Appl. Math, **13**, 217

Leismann, T., Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Extragalactic Jets, Ph. Thesis, Technischen Universität München, 2005

Leismann, T., Antón, L., Aloy, M.A., Müller, E., Martí, J.M, Miralles, J.A., Ibañez, J.M., 2005, A&A, **436**, 503-526

LeVeque, R., 1992, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, Basel

Lichnerowicz, A., 1967, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, W.A. Benjamin, Inc.

Lifshitz E.M., Landau L.D., Pitaevsku L.P., 1995, *Electrodynamics of continuous media*, Elsevier Butterworth-Heinemann

Lind, K.R., Payne, D.G., Meier, D.L., Blandford, R.D., 1989, ApJ, **344**, 89-103

Liu, X.D., Osher, S., 1998, JCP, **142**, 304-330

Marquina, A., 1994, J. Sci. Comput., **15**, 892

Martí J.M., Müller E., 1999, Living Reviews in Relativity, http://relativity.livingreviews.org/ Articles/#volume6

Martí J.M., Müller E., Font, J.A., Ibáñez, J.M., 1995, ApJ Lett., **448**, L105

Martí J.M., Müller E., Font, J.A., Ibáñez, J.M., Marquina, A., 1997, ApJ, **479**, 151

Martí J.M., Müller E., Ibáñez, J.M., 1994, A&A, **281**, L9-L11

Michel, F.C., 1971, Ap&SS, **15**, 153

Mignone, A., Massaglia, S., Bodo, G., 2005, SSR, **121**, 21-31

Mioduszewski, A.J., Hughes, P.A., Duncan, G.C., 1997, ApJ, **476**, 649

Nishikawa, K., Koide, S., Sakai, J., et al., 1997, ApJ Lett., **483**, L45

Nishikawa, K., Koide, S., Sakai, J., et al., 1998, ApJ, **498**, 166

Noble, S.C.,Gammie, C.F., McKinney, J.C. Del Zanna, L., 2006, ApJ, **641**,626

Norman, M.L., Smarr, L., Winkler, K.-H.A., Smith M.D., 1982, A&A, **113**, 285

Oleinik, O.A., 1959, Uspekhi Mat. Nauk., **14**, 165

Ostriker, J.P., Gun, J.E., 1971, ApJ Lett., **164**, L95

Paczyński, B. , 1997, ApJ Lett., **494**, L45

Pons, J.A., Font, J.A., Ibañez, J.M., Martí, J.M., Miralles, J.A., 1998, A&A, **339**, 638-642

Powell K.G., 1994, ICASE report No. **94**, 24

Rayburn, D.R., 1977, MNRAS, **179**, 603

Roca-Sogorb, M., Perucho, M., Gómez, J.L., Martí, J.M., Agudo, I., Aloy, M.A., Antón, L., Marscher, A.P. Jorstad, S.G., 2006, Poster; Magnetic Field Structure in Relativistic Jets, Congreso: Relativistic Jets, The Common Physics of AGN, Microquasars and Gamma Ray Burts, University of Michigan (USA)

Roca-Sogorb, M., Perucho, M., Gómez, J.L., Martí, J.M., Antón, L., Aloy, M.A., Agudo, I., 2007, Poster; Magnetic Field Structure of Relativistic Jets in AGN, Congreso: Extragalactic Jets, Theory and Observation from Radio to Gamma Rays, Alyeska Resort, Girdwood, Alaska (USA)

Roe, P.L., 1981, JCP, **43**, 357-372

Roe, P.L., 1984, ICASE, Virginia, USA, Report no. 84-53

Roe, P.L., Balsara D.S., 1996, SIAM J. Appl. Math., **56**,57

Romero, R., Martí, J.M., Pons, J.A., Ib'añez, J.M., Miralles, J.A., 2005, J. Fluid Mech., **544**, 323-338

Ryu, D., Jones, T.W., 1995, ApJ, **442**, 228-258

Ryu, D., Miniati, F.,Jones, T.W., Frank, A., 1998, ApJ, **509**, 224-255

Scheuer, P.A.G., 1974, MNRAS, **166**, 513

Schneider et al., 1993, JCP, **105**, 92-107

Shu, C., Osher, S., 1988, JCP, **77**, 439

Shu, C., Osher, S., 1989, JCP, **83**, 32

Stone, J.M., Norman, M.I., 1992, ApJS, **80**, 791-818

Takashahi, M., Nitta, S., Tatematsu, Y., Tomimatsu, A., 1990, ApJ, **363**, 206

Toro, E.F., 1997, *Riemann Solvers and Numerical Methods for fluid dynamics*, Springer

Torrilhon, M., 2003, J. Plasma Physics, **69**, 253-276

Tóth, G., 2000, JCP, **161**, 605-652

van Leer, B., 1977, JCP, **23**, 276

van Putten, M.H.P.M., 1993a, JCP, **105**, 339

van Putten, M.H.P.M., 1993b, ApJ Lett., **408**, L21

van Putten, M.H.P.M., 1995, SIAM Journal on Numerical Analysis, **32**, 1504

van Putten, M.H.P.M., 1996, ApJ Lett., **467**, L57

Weinberg, S., 1972, Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, Inc.

Yee, H.C., 1987, JCP, **68**, 151-179

York, J.W., 1983, Graviatational Radiation, Ed. N. Deruelle y T. Piran (Amsterdam: North-Holland), 175

Zachary, A.L., Malagoli, A., Colella, P., 1994, SIAM J.Sci. Stat. Comput., 15,263